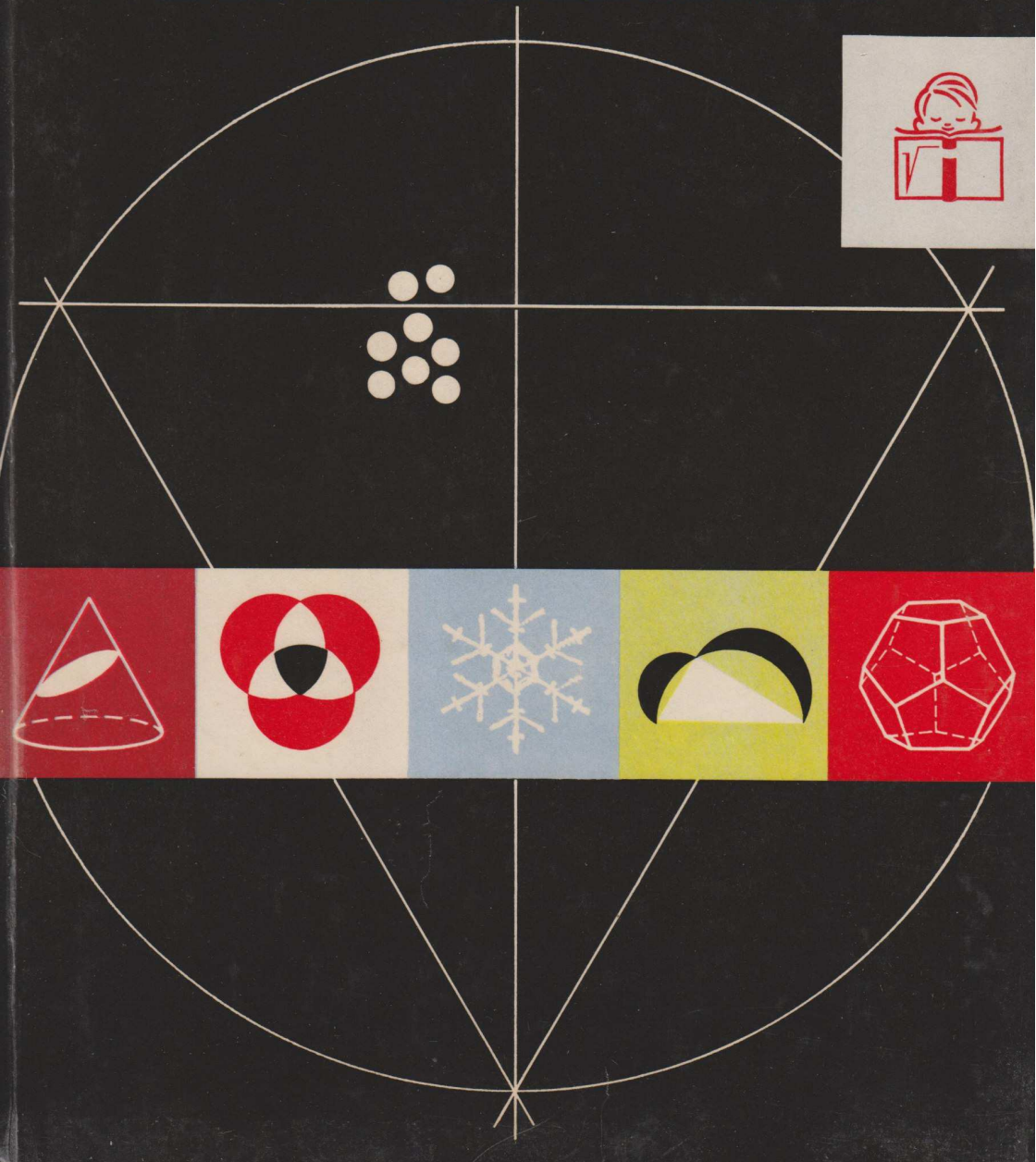
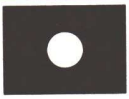
Rund um die Mathematik



Inhaltsverzeichnis

Seite 3		„Heureka" – ich habe es gefunden
Seite 11		Ist eine Menge immer viel?
Seite 15		Ordnung ist das halbe Leben
Seite 23		Kannst du schon zählen?
Seite 33		In einem Zuge
Seite 43		Nun mach aber einen Punkt
Seite 49		Breite – Höhe – Tiefe, gibt's noch mehr?
Seite 57		Messen ist gut – Berechnen ist besser
Seite 65		Räder rollen – warum eigentlich?

Seite 73		Zahlen zum Anschauen
Seite 81		Überall Pärchen
Seite 89		Auf oder ab – oder auch beides
Seite 99		Spieglein, Spieglein an der Wand ...
Seite 109		Wespen – groß wie Lerchen?
Seite 117		Gibt es auch linke Winkel?
Seite 127		Auch Schatten haben gute Seiten
Seite 137		Von der Wurst zum Sputnik
Seite 145		Achtung, Kurve!
Seite 153		Lösungen

RUND UM DIE MATHEMATIK

von
Lilly Görke
Kurt Ilgner
Günter Lorenz
Günter Pietzsch
Manfred Rehm

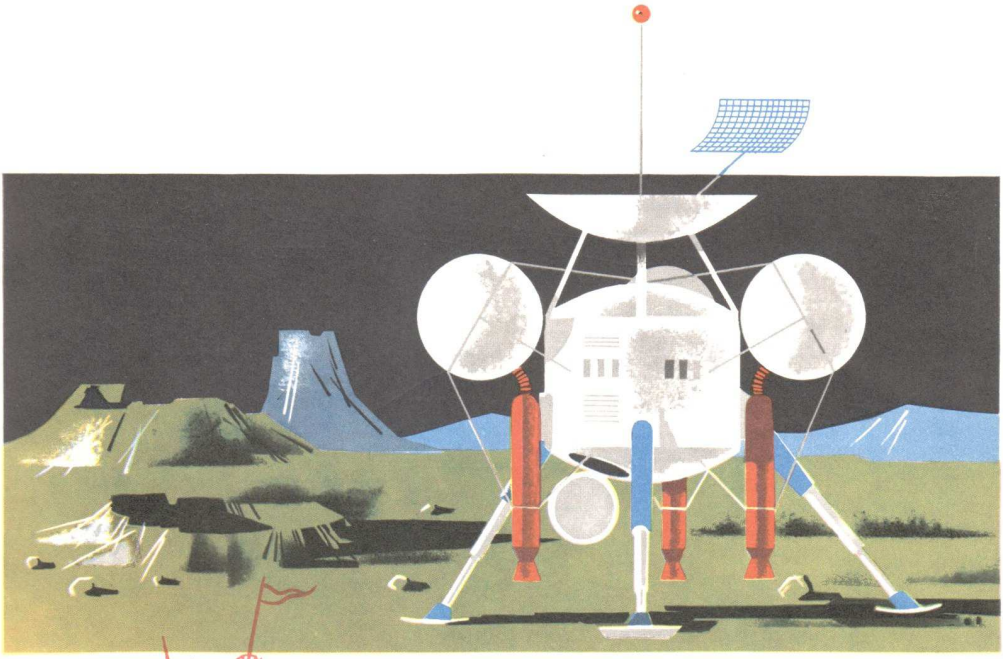
illustriert von
Rudolf Schultz-Debowski

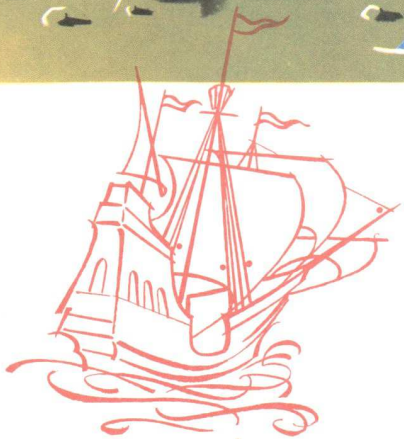
DER KINDERBUCHVERLAG BERLIN

Mathematische Schülerbücherei Nr. 34

Alle Rechte vorbehalten
Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 304-270/363/71-(95) · Kartengenehmigung MdI der DDR Nr. 386/68
Typographische Gestaltung: Gerhard Neitzke
Lichtsatz: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Druck: Tribüne, Leipzig
Buchbinderische Verarbeitung: Großbuchbinderei H. Sperling, Leipzig
4. Auflage
ES 9 F Preis 9,80
Für Leser von 10 Jahren an

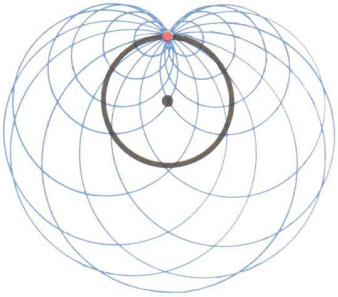
„Heureka" – ich habe es gefunden



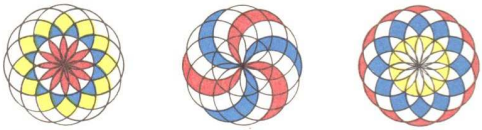


Von der Freude am Entdecken –
Von überraschenden Wahrheiten –
Von der Schönheit des Nützlichen.

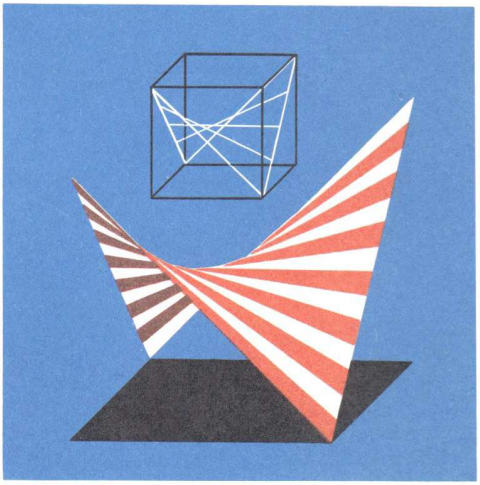
1 Alle blauen Kreise haben ihr Zentrum auf dem schwarzen Kreis und gehen durch den roten Punkt
2 Gleiche Kreise – verschieden gesehen
3 Gegenüberliegende Quadratdiagonalen gleich geteilt; durch Verbindungsstrecken entsteht eine Sattelfläche
4 Das gleiche Bild wie bei Wasserwellen von zwei Zentren aus



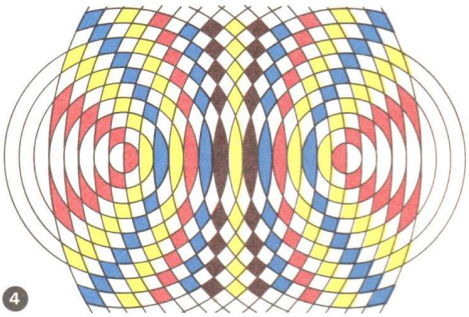
1



2

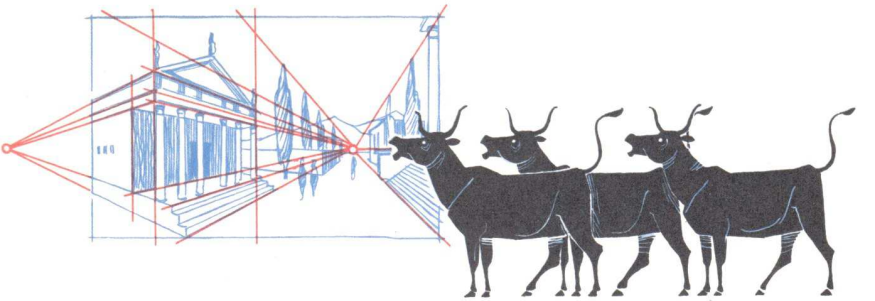


3



4

Feuerwehrmann, Lokomotivführer, Architekt – wer ist unter uns, der das nicht einmal werden wollte? Im Löschfahrzeug sitzen und mit ihm durch die Straßen brausen, eine Lokomotive führen und die mächtige Maschine beherrschen oder hochragende imponierende Hochhäuser aus Stahl, Beton und Glas bauen – wer ist unter uns, der nicht davon träumte, das oder ähnliches zu machen?
Später dann, wenn man älter wird und von den Abenteuern großer Entdecker oder den Taten berühmter Forscher erfährt – wer möchte da nicht ein zweiter Christoph Kolumbus oder Robert Koch werden? Fremde Länder durchmessen, in unwegsamen Gegenden die Quellen großer Flüsse aufspüren, unbekannte Gebirgszüge erkunden oder geheimnisvolle Lebensvorgänge ergründen, das ist interessant.
Heute, im Zeitalter der Himmelsstürmer wiederum, möchte so mancher Astronaut sein, möchte in einem Weltraumschiff die Erde umkreisen und das Wissen der Menschheit über den Kosmos bereichern helfen. Und wie ist erst der zu beneiden, der seinen Fuß einmal auf andere Himmelskörper setzen darf! Aber solche Träume werden nur immer für wenige in Erfüllung gehen. Die anderen, Daheimgebliebenen, werden höchstens in Büchern von diesen Taten lesen, werden allenfalls am Fernsehschirm zuschauen können.
Es gibt jedoch eine Wissenschaft, in der jeder die Entdeckungen der großen Forscher nacherleben kann, ohne deshalb in ferne Länder oder zu anderen Planeten reisen zu müssen – die Mathematik. Wer sich für die Vulkane in Chile interessiert, der kann nur in den seltensten Fällen dorthin fahren – er ist auf die Augenzeugenberichte anderer angewiesen; ihre Kenntnisse muß er übernehmen und dabei auch vieles glauben, ohne es nachprüfen



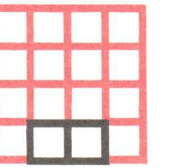
zu können. In der Mathematik aber läßt sich alles nachprüfen; man kann den gleichen Weg zu den gleichen Entdeckungen gehen, den die Großen der Wissenschaft schon gegangen sind, wenn man sich nur bemüht. Und es lohnt sich! Denn viele Überraschungen erlebt man auf diesem Wege, und man merkt, daß die Mathematik Spaß macht und schön ist!

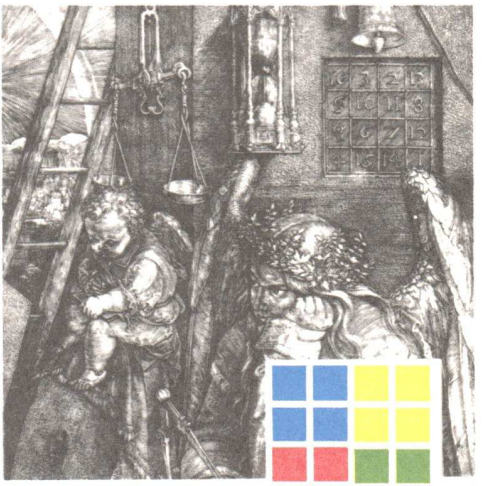
Wie schön sind beispielsweise viele Kurven, Figuren und Flächen, mit denen sich schon vor vielen hundert Jahren die Geometrie beschäftigt hat. Ist es nicht merkwürdig, daß gekrümmte Flächen gänzlich aus Geraden aufgebaut werden können? Viele Maler zeigen eine Vorliebe für die Mathematik, und nicht nur, weil sie sie bei der Perspektive brauchen. Albrecht Dürer hat auf seinem Kupferstich „Melancholie" ein magisches Quadrat angebracht. In ihm ist die Jahreszahl 1514 versteckt, vor allem aber enthält das magische Quadrat eine Fülle überraschender Zahlbeziehungen.

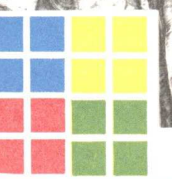
Doch ganz abgesehen von dem Schönen – welche Freude macht es erst, einen mathematischen Sachverhalt ergründet zu haben; sie ist gewiß nicht minder groß als die bei der Erkundung neuer Länder und Meere. Nicht umsonst erzählt man von Pythagoras, daß er vor Freude über die Entdeckung eines mathematischen Satzes eine Herde Ochsen den Göttern geopfert habe. Der Dichter Adalbert von Chamisso meinte deshalb, daß auch heute noch alle Ochsen vor Angst zittern, wenn die Entdeckung einer neuen Wahrheit bevorsteht.

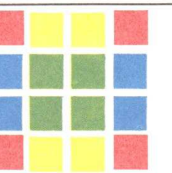
Archimedes zeigte seine Freude auf ganz andere Weise. Beim Baden fiel ihm auf, daß sein Körper im Wasser leichter wurde. Und dabei kam ihm die Idee, wie er bei der Krone des Königs Hiero feststellen könnte, ob sie wirklich – den Angaben des Goldschmieds entsprechend – aus reinem Gold bestünde. Vor Freude dar-

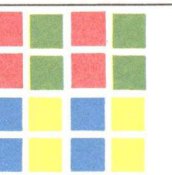
An dem magischen Quadrat gibt es viel zu entdecken. Hier sind Felder, für die sich als Summe jeweils 34 ergibt, in gleicher Farbe dargestellt. Es gibt aber noch viel mehr Möglichkeiten

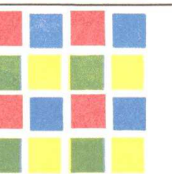












über eilte er mit dem Ruf „Heureka", was soviel heißt wie „ich hab es gefunden!", auf die Straße. Und das erregte in Syrakus solches Aufsehen, daß man noch heute davon weiß – Archimedes war nämlich nackt.

Einen kleinen Abglanz dieser Freude am Neuentdeckten kann man gerade bei der Beschäftigung mit der Mathematik immer wieder selbst erleben, wenn man etwas wirklich eingesehen, nachentdeckt hat, wenn einem „ein Licht aufgegangen" ist. Staunend erkennt man dann, zu welchen Leistungen der menschliche Geist fähig ist, wie er Schranken überwinden kann, die ihm von Natur aus gesteckt scheinen. Archimedes hat das einmal so gesagt: „Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die sich nicht mit Mathematik beschäftigt haben." Vielleicht hat er dabei an die Geschichte von dem Wettlauf zwischen dem griechischen Helden Achill und einer Schildkröte gedacht? Die Geschichte war so:

Achill läuft zehnmal so schnell wie die Schildkröte. Er gibt dem Tier also anstandshalber 100 m Vorsprung. Wegen dieser Vorgabe aber kann Achill die Schildkröte niemals einholen. Hat Achill die vorgegebenen 100 m zurückgelegt, ist die Schildkröte schon 10 m weitergekommen; hat Achill diese 10 m bewältigt, dann ist ihm die Schildkröte immer noch um 1 m voraus. Auch dieses Meter legt Achill, schon etwas außer Atem, zurück – aber, o Schreck, die Schildkröte liegt immer noch vorn, wenn auch nur um $\frac{1}{10}$ m, also 10 cm. Nach dem Durchlaufen dieser 10 cm befindet sich die Schildkröte noch um 1 cm vor Achill – kurzum, so klein der Vorsprung auch ist, eingeholt wird die Schildkröte auf diese Weise von Achill nie. So kann sie mit stolzgeschwellter Brust das Siegerpodest besteigen. Klingt das nicht ganz vernünftig?

Nun dürfte freilich nach dieser Überlegung niemals ein schnellerer Läufer einen anderen einholen, sofern der nur erst einmal vor ihm ist, und kein Auto könnte ein anderes, langsamer fahrendes, überholen. Das ist aber Unsinn, wie wir alle wissen. Schließlich brauchen wir uns ja nur zu überlegen, wo die Schildkröte ist, wenn Achill eine größere Strecke – sagen wir 200 m – durchlaufen hat; da sie in dieser Zeit nur $\frac{1}{10}$ von 200 m zurückgelegt hat, steckt sie immer noch bei 120 m, ist also weit abgeschlagen.

Nun, so unvernünftig ist diese Wettlaufgeschichte auch wieder nicht. Ein Problem, auf das der griechische Philosoph Zenon mit ihr aufmerksam machen wollte, war: In welcher Entfernung vom Start überholt denn nun eigentlich Achill die Schildkröte? Die Strecke, die er bis dahin zurücklegen müßte, ergibt sich doch offenbar aus

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots .$$

Wie aber soll man eine solche Summe, in der es keinen letzten Summanden gibt, ermitteln? Daß Zenon diese Aufgabe nicht lösen konnte, lag unter anderem an der griechischen Zahlenschreibweise, die für solche Überlegungen ungeeignet war. Wenn wir für diese Summe $111{,}111\ldots = 111{,}\bar{1}$ schreiben, dann weiß schon ein Schüler der Klasse 6, daß das $111\frac{1}{9}$ ist. $111\frac{1}{9}$ m vom Startpunkt entfernt wird also die Schildkröte überholt.

Zenon hat es sich aber auch zu schwer gemacht. Warum läßt er Achill nicht mit der schönen Helena um die Wette laufen? Sie ist doch immerhin halb so schnell wie ihr Landsmann Achill, und er hätte ihr als Kavalier gern 1 km Vorgabe zugebilligt. Wann holt er sie ein? Mit Zenon müßten wir überlegen: Nach 1 km ist ihm Helena noch $\frac{1}{2}$ km voraus; nach diesem

Eine ganze Kunstepoche des antiken Griechenlands wird nach den hauptsächlich verwendeten Schmuckelementen als „geometrische Kunst" bezeichnet

halben Kilometer noch $\frac{1}{4}$ km ...., kurzum: Die Einholestelle wird uns durch

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots.$$

angegeben. Ohne Zenon würden wir denken: Ist Achill 2 km gelaufen, so hat es Helena auf 1 km gebracht; mit ihrer Vorgabe ist sie dann aber genau so weit wie Achill, so daß wir für dessen Laufstrecke sagen können:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots. = 2.$$

Ist das nicht merkwürdig, eine Summanden-Kette ohne Ende und als Summe dennoch eine Zahl wie 2? Eine andere derartige Kette ist

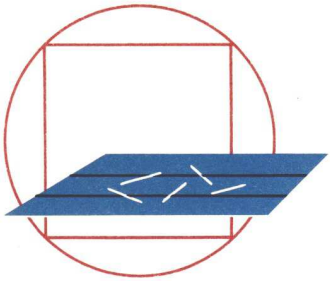
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots.$$

– man sieht schon, wie es weitergeht. Scheinbar unterscheidet sie sich von der vorhergehenden nur dadurch, daß ein „bißchen" hinzugekommen ist; sie könnte also vielleicht 3 oder 4 ergeben. Irrtum! Dieses „bißchen" reicht nämlich dafür aus, daß es zu dieser Kette keine Summe gibt; sie klettert über jede noch so große Zahl schließlich einmal hinweg.

Eine Erbschaftsgeschichte aus dem Morgenland ist vielleicht noch verblüffender: Der Scheich Abu Hassan hinterließ seinen beiden Söhnen fünf Kamele und ein Testament. Sein älterer Sohn Achmed sollte die Hälfte, der zweite Sohn Ibrahim ein Drittel der Kamele erhalten. Als die Söhne die Erbschaft nach dem Vermächtnis des Vaters teilen wollten, gerieten sie in Verlegenheit. Weder die Hälfte noch ein Drittel des Kamelbestandes ließ sich bilden, ohne daß dabei ein Kamel zu Schaden gekommen wäre. Schließlich sollte doch aber keins der wertvollen Tiere getötet oder verkauft werden. Als sie schon ganz verzweifelt waren, kam ihnen ein reisender weiser Derwisch zu Hilfe. Er stellte sein eigenes Kamel zu den

fünfen der Hinterlassenschaft, und nun konnte es ans Verteilen gehen: Achmed erhielt die Hälfte, also drei Kamele, Ibrahim ein Drittel, mithin zwei Kamele. Und siehe da – das Kamel des Derwischs blieb nach dieser Teilung übrig, auf ihm konnte der weise Mann reich beschenkt wieder seiner Wege reiten.

Sicher war der Trick recht hübsch, aber entspricht denn diese Teilung überhaupt dem Testament? Drei Kamele sind schließlich mehr als die Hälfte von fünf, und zwei Kamele sind mehr als ein Drittel. Und doch ist wohl dem Willen des Scheichs entsprochen worden: $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ machen zusammen nämlich noch gar kein Ganzes aus, sondern nur $\frac{5}{6}$. Das übrigbleibende Sechstel müßte wieder dem Testament entsprechend verteilt werden in $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{6}$, also $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{18}$. Die ergeben aber zusammen wiederum nicht das ganze Sechstel, sondern



π = 3,14159265358979323846264338327

nur $\frac{5}{6}$ davon, also $\frac{5}{36}$ des Gesamtkamelbestandes. Zusammen mit den zuerst verteilten $\frac{5}{6}$ sind damit erst $\frac{35}{36}$ verteilt, und das übriggebliebene Sechsunddreißigstel müßte wieder dem Testament gemäß verteilt werden ... ein Prozeß, der nie ein Ende hat. Wie gut, daß ein Zufall den Derwisch des Weges führte. Offenbar hatte er so ähnlich gedacht wie wir vorhin beim Wettlauf und dadurch eine ordnungsgemäße Erbschaftsteilung möglich gemacht. Diese hübsche Aufgabe wird übrigens auch erzählt mit 17 Kamelen und drei Söhnen, die jeweils $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{9}$ erhalten, oder mit 39 Kamelen und vier Söhnen, die dann ... aber das kann sich vielleicht jeder selbst überlegen!

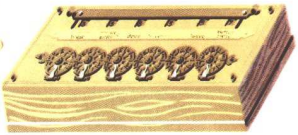
Der Zufall kann uns aber nicht nur einen Derwisch bringen, er kann uns auch selbst staunen machen: Wir nehmen eine Nähnadel (Streichholz, Zahnstocher, Trinkhalm tun es auch) und zeichnen auf ein größeres Blatt einige Parallelen, die voneinander doppelt so weit entfernt sind, wie die Nadel lang ist. Lassen wir dann blindlings die Nähnadel auf das Blatt fallen, so bestimmt der Zufall, ob die liegende Nadel eine der Parallelen kreuzt oder aber zwischen zwei Parallelen liegenbleibt. Wir zählen nun bei einer größeren Anzahl solcher Versuche alle Fälle, in denen Parallelen getroffen werden, und dividieren die Gesamtzahl der Würfe durch diese Zahl. So erhalten wir etwa die folgenden Quotienten:

Gesamtzahl d. Würfe	Parallelen getr.	Quotient
100	35	$\frac{100}{35} = 2{,}85$
500	161	$\frac{500}{161} = 3{,}11$
1000	305	$\frac{1000}{305} = 3{,}28$
6000	1913	$\frac{6000}{1913} = 3{,}14$

Das Überraschende ist nun gar nicht einmal, daß diese Quotienten alle ungefähr gleich sind, sofern man eine größere Anzahl von Würfen ausgeführt hat. Viel erstaunlicher ist, daß dieser Quotient ein Näherungswert für die bekannte Kreiszahl $\pi = 3{,}14159\ldots$ ist; er liegt im allgemeinen um so dichter an π, je mehr Versuche man gemacht hat. Erstaunlich ist das vor allem deshalb, weil doch Nadel und Parallelen auf den ersten Blick gar nichts mit einem Kreis zu tun haben. Dieser merkwürdige Nadelversuch geht auf den Franzosen Buffon zurück, der im 18. Jahrhundert lebte; er kann leicht von jedem selbst durchgeführt werden. Freilich, um zu verstehen, warum er wirklich einen Näherungswert für π liefert, um also Buffons Erkenntnis „nachzuentdecken", müßten wir mehr über die sogenannte Wahrscheinlichkeitsrechnung wissen – aber auch das kann man sich ja erarbeiten.

Schließlich ist jedoch die Mathematik nicht nur schön und interessant, bringt nicht nur Freude und Erstaunen – sie ist auch nützlich. Jeder weiß, daß ohne Mathematik unsere moderne Technik nicht möglich wäre. Letztlich hat sich ja die Mathematik auch ursprünglich aus den Messungen von Land- und Gefäßinhalt, dem Bauwesen, aus Zeitrechnung, Mechanik und Schiffahrt entwickelt. Die Freude am Entdecken kam erst im Laufe der Zeit als treibende Kraft hinzu; manchmal hat diese Freude freilich alle Fragen der praktischen Verwendbarkeit in den Hintergrund zu schieben versucht, gewiß zu Unrecht. Aber auch in solchen Zeiten gab es immer große Mathematiker, die die praktische Seite der Mathematik nicht vernachlässigten. Archimedes gehörte zu ihnen. Seine Maschinen dienten der Bewässerung des Landes, dem Heben schwerer Lasten, aber auch der Verteidigung seiner Heimatstadt gegen die römi-

Blaise Pascal 1623 bis 1662



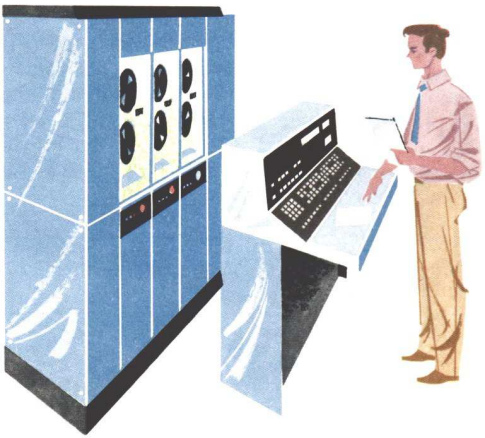
schen Angreifer. Er vernichtete ihre Schiffe mit Steinschleudern, setzte sie mit Spiegeln in Brand und hob sie mit Flaschenzügen aus dem Wasser.

An vielen seiner Maschinen ist nicht unmittelbar zu erkennen, daß die Mathematik an ihrer Wiege Pate gestanden hat. Heute gibt es Maschinen, die unmittelbar in enger Beziehung zur Mathematik stehen – die gewaltigen elektronischen Rechenautomaten. Es war ein weiter Weg bis zu ihnen: 1642 erfand der neunzehnjährige Franzose Blaise Pascal eine Maschine, mit der man allerdings nur addieren und subtrahieren konnte. Sie sollte vor allem die Geldrechnung seines Vaters erleichtern, der für die Versorgung von Truppen mit Geld verantwortlich war.

Gewiß hat Pascal nicht geahnt, daß man später einmal Maschinen bauen würde, die nicht nur einzelnen, sondern Millionen von Menschen mühsame Rechenarbeit abnehmen würden. Unsere modernen Rechenautomaten erledigen in Minuten Arbeiten, zu denen ganze Büros gewandter Rechner Wochen und Monate brauchen würden. Diese Maschinen erledigen die Lohnabrechnung für Tausende von Werktätigen eines großen Betriebes in wenigen Stunden, sie verarbeiten im Handumdrehen wahre Berge von Zahlen, und sie ermöglichen komplizierte Berechnungen, die früher wegen ihres großen Umfangs gar nicht durchgeführt werden konnten. Damit helfen sie, immer bessere und leistungsfähigere Werkzeugmaschinen, Turbinen und Motoren zu konstruieren.

Aber diese Maschinen tun auch noch vieles andere: Sie übersetzen Artikel aus Zeitungen, technischen Zeitschriften von einer Sprache in die andere und ermöglichen damit einen schnellen Informationsaustausch; sie prüfen Unterschriften und finden mit Sicherheit auch geschickteste Fälschungen heraus; sie helfen den Ärzten beim Erkennen von Krankheiten. Sie berechnen auch die Bahnen von Satelliten und Weltraumschiffen; sie ermitteln in Sekundenschnelle notwendige Bahnänderungen und die dafür erforderlichen Manöver; sie werten die Millionen von Meßangaben aus, die zur Erde gefunkt werden – ja, sie machen es eigentlich erst möglich, daß der Mensch seine Schritte in den Kosmos lenkt, daß der Traum vom Kosmonauten für den einen oder anderen einmal Wirklichkeit wird.

Die ungarische Mathematikerin Rozsa Péter sagte einmal, daß man sich in die Mathematik verlieben könne, ohne dabei befürchten zu müssen, daß man etwas Unnützes treibe. Vielleicht kann auch dieses Buch dazu beitragen, Liebe zur Mathematik zu erwecken. Es ist eine kleine Entdeckungsreise in das Reich der Mathematik, zu der jeder eingeladen ist, der ein bißchen mitdenken will.



Ist eine Menge immer viel?

Mengen, mal so, mal anders –
Eine Menge von Großvätern –
Teile sind immer noch Mengen –
Von Zetteln und Zensuren –
Vereinigt, und doch nicht mehr –
Vom Durchschnitt, der manchmal leer.

Ein neues Schuljahr hat begonnen. Die Kinder kommen aus der Schule und erzählen sich die Neuigkeiten des ersten Schultages:
„Wir haben eine Menge neuer Fächer auf dem Stundenplan."
(Gisela aus Klasse 5a zu Christa aus Klasse 6a.)
„In Russisch werden wir eine Menge Vokabeln hinzulernen."
(Jutta aus der 7b zu Astrid aus der 5b.)
„Auch in Geschichte müssen wir eine Menge lernen."
(Monika zu Siegfried, beide aus der 6a.)
„Wir haben einen Neuen, der hat aber eine Menge Vornamen."
(Wolfgang aus der 6a zu Manfred aus der 5a.)
„Eine Menge Bilder hängen in unserer neuen Klasse."
(Peter aus der 6a zu Horst aus der 5b.)
Solche Sätze, in denen das Wort „Menge" vorkommt, sagt jeder von uns täglich. Mit „Menge" ist in allen Fällen „viel" gemeint. Wieviel, das ist dabei immer ganz verschieden: Der Neue hat drei Vornamen, in Russisch sind es sicher ein paar hundert Vokabeln, und in Geschichte ist unter der Menge, die zu lernen ist, sicher gar keine Zahl zu verstehen.
Auch in der Mathematik kommt das Wort Menge sehr häufig vor. Aber auf solche Unsicherheiten, von wieviel Dingen ab man „Menge" sagen darf, lassen wir uns nicht ein. Eine Menge von Bleistiften – das können viel oder wenig sein, das ist ganz egal. Wir haben eine Menge von Fingern – ohne Nachzählen wissen wir, daß es zehn sind –; zu Haus steht eine Menge von Tassen im Schrank; jeder hat eine Menge von Großvätern, auch wenn es nur zwei sind. Um wieviel es bei einer Menge geht, das ist gar nicht so wichtig. Von Bedeutung ist aber, daß man genau weiß, ob diese oder jene Person, dieser oder jener Gegenstand zu der Menge gehört oder nicht: Vater und Mutter gehören beispielsweise nicht zur Menge der Großväter ihrer Kinder, auch Nachbars Dackel nicht; die Vase, die die Mutter zum Geburtstag geschenkt bekam, gehört aber zur Menge ihrer Vasen – wenn sie nicht inzwischen zu einer Menge von Scherben geworden und diese Menge dann in den Mülleimer gewandert ist.
Wir wollen uns noch etwas mehr über solche Mengen unterhalten: In die Klasse 6a, das ist die Klasse von Peter und Monika, gehen 27 Schüler, 14 Mädchen und 13 Jungen. Damit haben wir aus der Menge der 27 Schüler zwei „Teilmengen" gemacht; und von jedem Kind aus der Klasse 6a kann man sofort sagen, zu welcher der beiden Teilmengen es gehört. Damit wir alles etwas einfacher schreiben können, wollen wir die einzelnen Mengen mit den Anfangsbuchstaben bezeichnen:

Schüler der Klasse 6a – S
Jungen der Klasse 6a – J
Mädchen der Klasse 6a – M

Monika und Peter gehören also zur Menge S, sie zur Teilmenge M, er zur Teilmenge J. Gisela geht in die Klasse 5a, gehört also nicht zu S. Dann kann sie natürlich auch nicht zu M und schon gar nicht zu J gehören. Warum nicht?
Das ist doch alles sehr einfach, nicht wahr? Deshalb wollen wir jetzt einmal von den zehn am Anfang genannten Kindern die nennen, die

zu S gehören und zu J,
zu S gehören, aber nicht zu J,
zu S gehören, aber nicht zu M,
nicht zu S gehören und nicht zu M,
nicht zu S gehören, aber zu J.

Wer mit den Buchstaben Schwierigkeiten haben sollte, der schaut immer wieder nach, was sie bedeuten!
Und nun gleich ein paar Fragen, die schon etwas kniffliger sind:

● Kann jemand zu S gehören, aber nicht zu J?
Kann jemand zu M gehören, aber nicht zu S?
Kann jemand zu M gehören und gleichzeitig zu S?
Kann jemand zu J gehören und gleichzeitig zu M?
Kann jemand nicht zu S gehören und nicht zu M?

Das war auch nicht viel schwerer! Und damit wir noch besser über Mengen Bescheid wissen, sehen wir uns gleich noch ein Beispiel an: Da sind die Zensuren für die Klasse 6a, und zwar in Deutsch, Mathematik und Erdkunde.

Rainer, Christa und Susi fassen wir zur Menge D_1 zusammen, sie haben nämlich als einzige in Deutsch eine Eins. Jetzt machen wir uns fünf Zettel, etwa so groß wie eine Postkarte, und schreiben auf den ersten D_1, auf den nächsten D_2, auf den letzten schließlich D_5. Und nun schreiben wir auf den ersten Zettel die Schüler aus 6a, die in Deutsch eine Eins haben, also Rainer, Christa und Susi, auf den zweiten die mit einer Zwei und so weiter. Auf diese Weise wird also die Menge S wieder zerlegt, und zwar in die fünf Teilmengen D_1 bis D_5. Und nun zwei Fragen:

● Kann jemand auf keinem der Zettel stehen?
Kann jemand auf mehreren Zetteln stehen?

Das geht doch wohl nicht! Denn schließlich hat doch jeder, sofern er nicht sehr, sehr lange gefehlt hat, eine Zensur bekommen, und keiner bekam mehrere. Wenn es anders sein sollte, dann hat sich irgendwo ein Fehler eingeschlichen. Vielleicht wurde jemand vergessen? Deshalb ist es gut, wenn man die Namen auf den Zetteln durchzählt; 27 müssen es sein. Wir können auch so sagen: Wenn in der Klasse 6a die Lehrerin alle Schüler aus D_1 aufstehen läßt, dann dazu alle aus D_2 und so fort, dann muß zum Schluß die ganze Klasse, also die ganze Menge S, stehen. Wir schreiben das in dieser Art

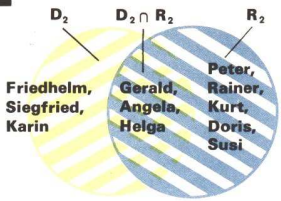
$$D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 = S$$

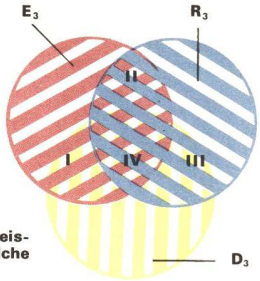
und sagen dafür: Wenn man die Mengen D_1 bis D_5 vereinigt, dann entsteht die Menge S.

ZENSURENLISTE

	Deutsch (D)	*Mathematik (R)*	*Erdkunde (E)*
Peter Anders	3	2	3
Alfred Busch	3	3	2
Ralph Friese	4	3	4
Gerhard Hasse	4	4	4
Friedhelm Katz	2	3	3
Rainer Kuske	1	2	1
Gerald Labes	2	2	2
Wolfgang Michel	3	4	3
Erhard Pohl	5	4	4
Siegfried Reichert	2	1	2
Kurt Rösler	3	2	3
Herbert Sattler	5	4	4
Jürgen Weiß	4	3	3
Gloria Beutler	3	4	4
Christa Demuth	1	1	2
Angela Ebert	2	2	3
Helga Gast	2	2	2
Monika Hahn	4	3	3
Marion Hübner	4	4	4
Dagmar Jansen	3	3	4
Doris Kinzel	3	2	2
Ingrid Lehmann	3	4	3
Susi Maier	1	2	2
Edelgard Noack	4	3	3
Inge Radke	3	3	3
Karola Schüler	4	4	4
Karin Ulm	2	1	2

Wenn man dasselbe mit D_4 und R_4 statt mit D_2 und R_2 macht, erhält man andere Namen. Welche?





Welche Namen stehen in den Kreisbogen-Dreiecken I, II, III, welche in IV?

Genauso hätten wir vorhin auch schreiben können

$$M \cup J = S$$

Und nun kommt etwas Drolliges: Die Lehrerin hat nach den Deutschzensuren aufgerufen, die Kinder stehen noch alle, und nun sagt sie: „Jetzt stellen sich alle Jungen dazu!" Was passiert? Nichts! Nur dumme Gesichter wird es geben und ein Rufen: „Aber die stehen doch schon alle!" Es bleiben also alle so stehen, wie sie vorher auch schon standen, die ganze Menge S! Wenn wir das mit unseren Zeichen schreiben, ergibt sich

$$S \cup J = S,$$

und genauso hätten wir schreiben können:

$$S \cup M = S \text{ oder } M \cup J \cup D_1 \cup D_3 = S$$

Wenn man zu einer Menge irgendeine ihrer Teilmengen „hinzulegt", so passiert gar nichts! Deshalb benutzen wir für das Vereinigen von Mengen auch nicht das Zeichen + von der Addition.

Jetzt bilden wir aus S einmal andere Teilmengen, indem wir uns die Mathematikzensuren auf der Liste ansehen. Da wir das M schon für die Menge der Mädchen verwendet haben, nennen wir diese Mengen R_1 bis R_5, um Verwechslungen zu vermeiden. Wer gehört zu R_5? Niemand! Der Zettel mit R_5 würde leer bleiben, weil sich die Klasse 6a in Mathematik angestrengt hat! Aber auch dazu wollen wir noch Menge sagen, nur ist diese Menge dann eben leer. Die Menge von Schneewittchens Geschwistern ist beispielsweise auch leer. Und wenn wir vorhin richtig überlegt haben, dann sind wir schon einmal auf die leere Menge gestoßen: Wir sollten die Kinder nennen, die „nicht zu S, aber zu J" gehören! Die gibt es nicht, und daher ist die Menge dieser Kinder leer. Auch Einermengen gibt es. Bilde einmal E_1! (E bedeutet Erdkunde.)

Nun haben wir aus S schon dreimal Teilmengen gebildet:

$$S = J \cup M$$
$$S = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5$$
$$S = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5$$

Und jedesmal muß jeder Junge und jedes Mädchen aus der Klasse 6a zu genau einer der Teilmengen gehören. Es wird also Kinder in der 6a geben, die sowohl zu J als auch zu D_2 gehören: Das sind die Jungen mit der Deutschzensur Zwei. Wir wollen sagen: Das ist der „Durchschnitt" von J und D_2. So erhalten wir wieder eine Menge, die wir zur Abkürzung G nennen wollen. Dann schreiben wir

$$J \cap D_2 = G$$

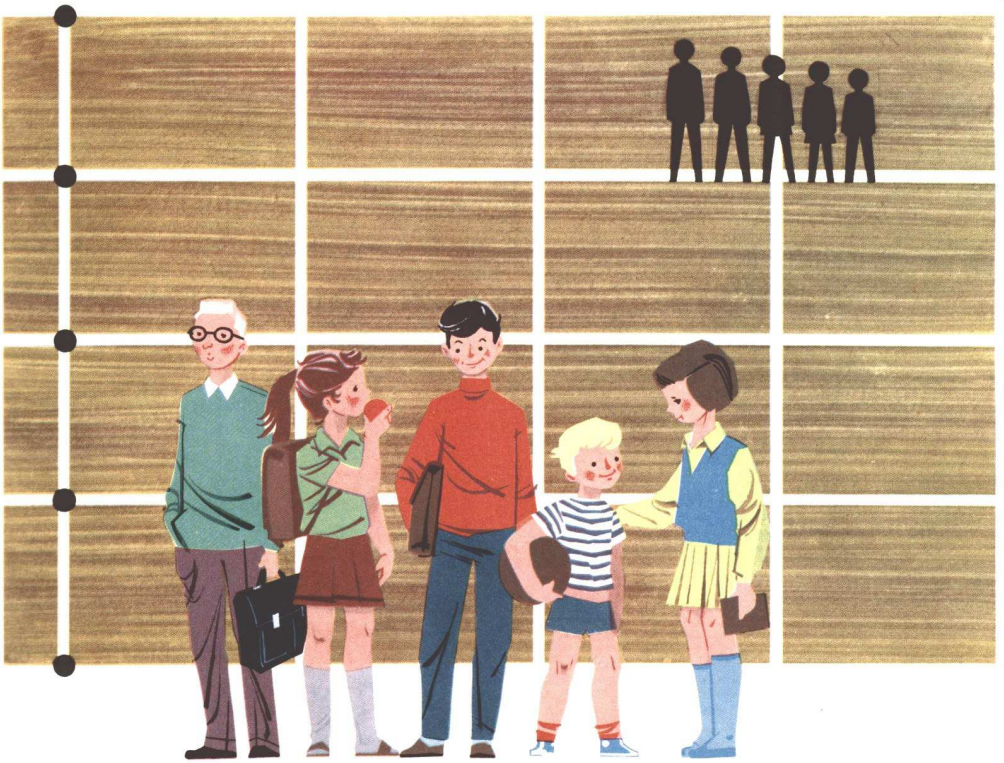
Den Unterschied der beiden Zeichen wollen wir uns noch einmal klarmachen. Die Lehrerin sagt in der Klasse 6a: „Jetzt stehen alle auf, die in Deutsch eine Zwei und dann noch die, die in Mathematik eine Zwei haben." Das ist $D_2 \cup R_2$, alle Kinder haben sich nun von ihren Plätzen erhoben, die in Deutsch *oder* Mathematik mit Zwei bewertet wurden. Will die Lehrerin dagegen, daß $D_2 \cap R_2$ aufstehen soll, dann könnte sie sagen: „Jetzt erheben sich bitte alle die, die in Deutsch *und* in Mathematik eine Zwei haben."

Und wer Freude an den Zetteln mit den Mengen hat, der schreibt noch einmal auf besondere Zettel die Namen der Schüler, die zu den folgenden Durchschnitten gehören:

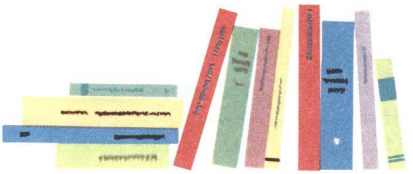
$R_2 \cap E_3$	$J \cap M$
$R_2 \cap D_1$	$D_1 \cap R_4$
$E_2 \cap D_3$	$R_3 \cap D_4$
$R_3 \cap S$	$D_2 \cap R_2 \cap E_2$

Einige dieser Durchschnitte werden leer sein; einem kann man es sofort ansehen. Bei einem sieht man gleich, daß er höchstwahrscheinlich nicht leer ist. Welche sind diese beiden?

Ordnung ist das halbe Leben!



Ordnung und Ordnung ist zweierlei –
Es kommt aufs Prinzip an –
Die Ordnung
auf dem Hühnerhof: Wer hackt wen? –
Mädchen unter sich –
Ein Reinfall beim Toto –
Ein Schachklub und der erste Platz.



Sind bei den Namen die Anfangsbuchstaben und vielleicht auch noch weitere gleich, so wird nach den ersten unterschiedlichen Buchstaben geordnet. (Man sagt auch lexikographisch ordnen.) Ordne auf diese Weise die folgenden Namen:

MURKS, Heinz
MUSKEL, Anita
MOLICH, Jutta
MUDDEL, Wolfgang
MUELLER, Gerhard
MUELLER, Gerald

Ordnung ist das halbe Leben, so sagt ein altes Sprichwort. Liederlich herumliegende Sachen, abgerissene Knöpfe – das gibt nicht nur einen unschönen Anblick, das erschwert uns auch das tägliche Leben. Nun kann man Ordnung von ganz verschiedenen Standpunkten aus schaffen oder auch halten: Die Knöpfe müssen zueinander und zu den Knopflöchern passen; und wenn wir unsere Bücher und Hefte, so wie sie kommen, stapeln und in den Schrank legen, dann ist die Mutter vielleicht zufrieden; Nutzen haben wir von einer solchen Ordnung nicht! Denn beim Suchen nach dem Schreibheft müßte man auch jetzt noch den ganzen Heftstapel durchsehen, und das kann ganz besonders morgens zu lange dauern, wenn man es eilig hat. Bei einer sinnvollen Ordnung finden wir das Heft mit einem Griff. Eine große Bibliothek mit Tausenden von Büchern ist so geordnet, daß man jedes Buch sofort auffindet.
Auf der Zensurenliste der 6a sind die Namen aus dem gleichen Grunde geordnet: Erst die Jungen, dann die Mädchen, und innerhalb der beiden Mengen J und M stehen die Namen alphabetisch nach den Anfangsbuchstaben. Man hätte auch nach den Endbuchstaben ordnen können. Das wäre zwar ungewöhnlich, wohl auch weniger zweckmäßig, aber geordnet wären M und J dadurch ebenfalls. Vorgeschrieben wird diese Ordnung durch unser Alphabet, das den 26 Buchstaben eine ganz bestimmte Reihenfolge zuweist. So ist zum Beispiel festgelegt: a steht vor b. Diese Reihenfolge hat sich uns so fest eingeprägt, daß wir sie ganz selbstverständlich auf Namen übertragen. Dabei ist sie eigentlich ganz willkürlich; das a hat seinen ersten Platz genausowenig „verdient" wie das o seinen fünfzehnten. Das sieht man auch bei einem Vergleich mit dem russischen Alphabet, bei dem unser w den drit-

ten Platz „errungen" hat. Und deshalb würde z. B. der Name Jürgen Weiß in einer russischen Liste nicht am Ende stehen. (Sondern wo?) Doch nicht immer ist eine alphabetische Ordnung praktisch. Es ist beispielsweise unwichtig, ob man in der Klassenliste an zehnter oder an zwanzigster Stelle steht. Anders ist es dagegen bei einem Leistungsvergleich. Besonders am Ende eines Schuljahres ordnen viele Klassenlehrer ihre Klasse nach den Zensuren. Wir wollen das für unsere Musterklasse 6a einmal tun, indem wir für jeden Schüler die drei angegebenen Zensuren addieren.

Dabei muß sich mindestens 3, aber höchstens 15 ergeben. Warum? Auf diese Weise können wir die Klasse 6a, die Menge S, wieder in Teilmengen zerlegen, die wir in bekannter Weise mit Z_3 bis Z_{15} bezeichnen wollen. Und nun gleich drei Fragen:

Welche der Z-Mengen sind leer?

Welche enthält nur einen einzigen Schüler?

Welche enthält am meisten Schüler?

Und eine vierte Frage kann man beantworten, ohne auf die Zensurenliste zu blicken:

Hätte es passieren können, daß jede dieser Mengen $Z_3, \ldots, Z_{15}$ nicht mehr als einen Schüler enthält?

Nun wollten wir ja aber die Menge S nach den Zensuren ordnen. Selbstverständlich kommen in unserer Reihenfolge die Schüler aus Z_{13} ans Ende, die aus Z_4 an den Anfang, und alle aus Z_7 stehen vor denen aus Z_8. Das leuchtet ein; wie steht es aber nun innerhalb einer Z-Menge? Christa und Rainer bilden die Menge Z_4 und stehen damit am Anfang; wer von beiden ist denn nun aber wirklich der Klassenbeste? In solchen Fällen ordnen wir nach der Wichtigkeit der drei Fächer, die Liste nennt sie uns schon in der richtigen Reihenfolge. Wir bilden nun einfach aus den drei Zensuren als

Ziffern eine neue Zahl: für Christa 112, für Rainer 121. Wer auf diese Weise innerhalb einer Z-Menge die kleinere Zahl bekommt, der gilt als besser; Christa ist also Klassenbeste. Wenn sich dann noch gleiche Zahlen ergeben, so lassen wir hier das Alphabet entscheiden. Auf diese Weise ergibt sich für Z_8 die Reihenfolge

Friedhelm Katz	233
Peter Anders	323
Kurt Rösler	323
Alfred Busch	332

Jetzt haben wir die Menge S schon zweimal geordnet, und wir können uns vorstellen, daß es auch noch andere Möglichkeiten des Ordnens gibt. Im Turnunterricht wird sehr häufig der Größe nach geordnet. Manchmal ist es notwendig, eine Klasse nach dem Alter oder der Länge des Schulweges zu ordnen. „Christa vor Siegfried" könnte dann – je nachdem, wonach man geordnet hat – etwa bedeuten:

Christa vor Siegfried
- Christa ist besser als Siegfried
- Christa ist größer als Siegfried
- Christa ist älter als Siegfried
- Christa hat's weiter als Siegfried

Freilich müssen diese vier Sätze nicht gleichzeitig gelten. Christa kann sehr wohl in den Zensuren besser, dennoch aber viel kleiner als Siegfried sein.

Bei Gleichaltrigkeit oder gleich langem Schulweg muß wieder ein anderes Ordnungsprinzip, etwa das Alphabet, herangezogen werden.

Bleiben wir noch beim Turnunterricht: Die Klasse 6a macht ein Kreisspiel und läuft dabei in einem geschlossenen Kreis auf dem Hof herum. Einer läuft hinter dem anderen – oder läuft einer vor dem anderen? Peter vor Kurt oder Kurt vor Peter?

Das kann man schlecht entscheiden, auch dann nicht, wenn die beiden in dem Kreis dichter beieinander laufen. Denn eigentlich läuft doch jeder hinter allen anderen, aber auch gleichzeitig vor allen anderen.

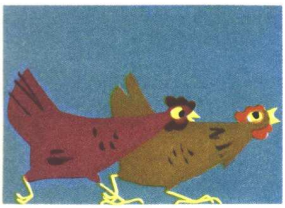
Auch wenn es dabei sehr ordentlich zugeht – eine geordnete Menge von Schülern ist das nicht. Folgende Forderung müssen wir nämlich stellen: Nimmt man zwei beliebige Schüler heraus, so muß genau feststehen, wer von den beiden bei der betreffenden Ordnung vor dem anderen steht!

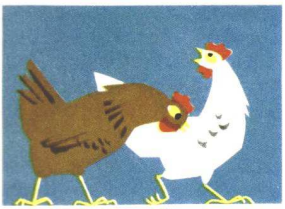
Hierzu noch ein anderes Beispiel: Auch in unserer Volksarmee müssen Befehle erteilt und Befehle ausgeführt werden. So erhält innerhalb einer Kompanie der Soldat seine Befehle vom Unteroffizier, dieser erhält sie vom Leutnant und der wiederum vom Hauptmann, vom Kompaniechef. Was aber geschähe, wenn der Hauptmann selbst nun wieder vom Soldaten Befehle entgegennehmen müßte?

Wie vorhin beim Spiel auf dem Hof hätte sich der Kreis geschlossen, und die Folge wäre ein heilloses Durcheinander, weil nunmehr jeder jedem befehlen könnte.

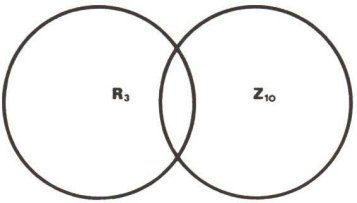
Zuweilen kann man unter dem Hühnervolk eine gewisse „Ordnung" beobachten. Es kommt vor, daß sich zwischen den Hühnern eines Hofes eine recht stabile Rangordnung nach dem Motto „Wer darf wen hacken?" herausbildet, die sich zum Beispiel bei der Futtersuche bemerkbar macht. Dabei kann es nun aber durchaus passieren, daß sich – wie vorhin beim Spiel – ein Kreis schließt: Huhn H_1 hackt Huhn H_2, dieses hackt H_3, H_3 hackt H_4 und so weiter; und trotzdem findet etwa H_5 gar nichts dabei, munter auf H_2 einzuschlagen, obwohl es doch nach der „Hackreihe" als ein Huhn, das von H_4 gehackt wird, unter H_2 rangieren müßte. Offenbar ist hier etwas nicht in Ordnung.

Damit sind wir aber eigentlich schon bei einer





Fülle die drei Felder
mit den entsprechenden Namen aus



zweiten Eigenschaft, die alle bisher besprochenen Ordnungen haben. Sie ist ganz leicht zu verstehen:

Wenn Hans vor Fritz und Fritz vor Ernst,
dann auch Hans vor Ernst.

Diese Eigenschaft wollen wir gleich einmal ausnutzen bei der folgenden Aufgabe:

Susi feiert ihren dreizehnten Geburtstag und hat dazu noch vier Freundinnen eingeladen: Inge, Helga, Karin und Dagmar. Beim Kaffeetrinken scherzt man miteinander:

(1) Susi: „Komm du erst mal in meine Jahre, Karin"

(2) Inge: „Gib doch nicht so an, Susi. Auch wenn du heute Geburtstag hast, fehlen dir immer noch einige Wochen bis zu mir, genau soviel wie mir bis zu Dagmar"

(3) Karin: „Ich finde, du kannst eigentlich gar nicht mitreden, Helga. Bei euch ist Mathematik doch noch ein Kinderspiel"

(4) Helga: „Haha, wenn Inge das gesagt hätte, aber du?"

Wir wollen einmal probieren, ob wir aus diesen vier Sätzen die Mädchen nach ihrem Alter ordnen können. Damit wir eine bessere Übersicht behalten, kürzen wir den Namen durch den Anfangsbuchstaben ab, und für „ist älter als" schreiben wir das Zeichen $\succ$. Dem ersten Satz können wir entnehmen, daß Susi älter als Karin ist, also kurz:

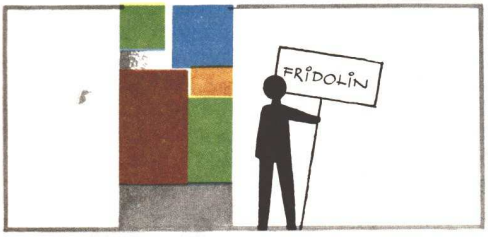
(1) $S \succ K$

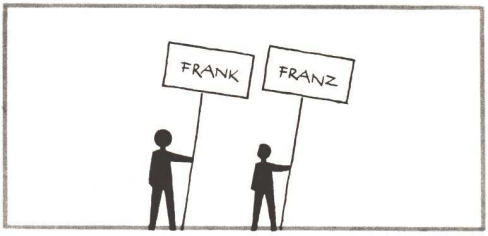
Satz (2) gibt uns gleich zwei solche Kurz-Zeilen:

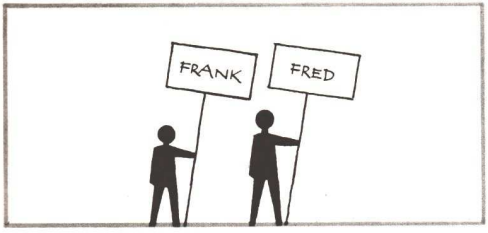
(2a) $I \succ S$

(2b) $D \succ I$

Von fünf Jungen haben wir vier Bilder. Leider sind die Jungen auf keinem Bild alle beieinander. Trotzdem kann man die fünf der Größe nach ordnen







Aus Satz (3) können wir erkennen

(3) $K \succ H$

Und schließlich zeigt uns Satz (4)

(4) $I \succ H$

Und nun ist es nicht mehr schwer, die fünf Mädchen dem Alter nach in die richtige Reihenfolge zu bringen:

Offenbar muß diejenige die älteste sein, die in den fünf Zeilen (1) bis (4) niemals rechts steht, denn sie hat dann keine ältere vor sich. Das ist Dagmar. Sie ist nach (2b) älter als Inge; nach (4) und (2a) ist Inge älter als Helga und Susi. Nach (1) ist Susi älter als Karin, und nach (3) ist Karin wieder älter als Helga. Im ganzen also:

$D \succ I \succ S \succ K \succ H$

Helga ist also die jüngste. Und das können wir noch überprüfen: H steht in den fünf Zeilen (1) bis (4) niemals auf der linken Seite, Helga ist also nicht älter als irgendeins der anderen vier Mädchen.

Und nun überlege bitte selbst:

a) Welcher der vier Sätze von Susi, Karin, Helga und Inge war überflüssig?

b) Wenn Karin nichts gesagt hätte, welche Möglichkeiten für die Altersreihenfolge hätten dann bestanden?

Übrigens, wer hat bemerkt, daß wir folgenden Schluß gezogen haben:

„Wenn Dagmar älter als Inge ist und Inge älter als Susi, dann ist Dagmar auch älter als Susi?"

Freilich muß man sich gut überlegen, ob man so schließen darf, denn immer klappt das nicht. Beim Fußball-Toto zum Beispiel kann man damit einen Reinfall erleben. Soll man sich etwa vor dem Spiel Motor Zwickau gegen Lok Sten-

dal für einen Tip entscheiden, so könnte man möglicherweise denken: Stendal hat vor zwei Wochen FC Hansa Rostock geschlagen, Rostock hat vor vier Wochen Zwickau geschlagen, also muß auch Stendal gegen Zwickau siegreich bleiben. Man darf sich nur nicht wundern, wenn Stendal trotzdem verliert, weil hier nicht gilt:

Wenn A vor B und B vor C, so auch A vor C

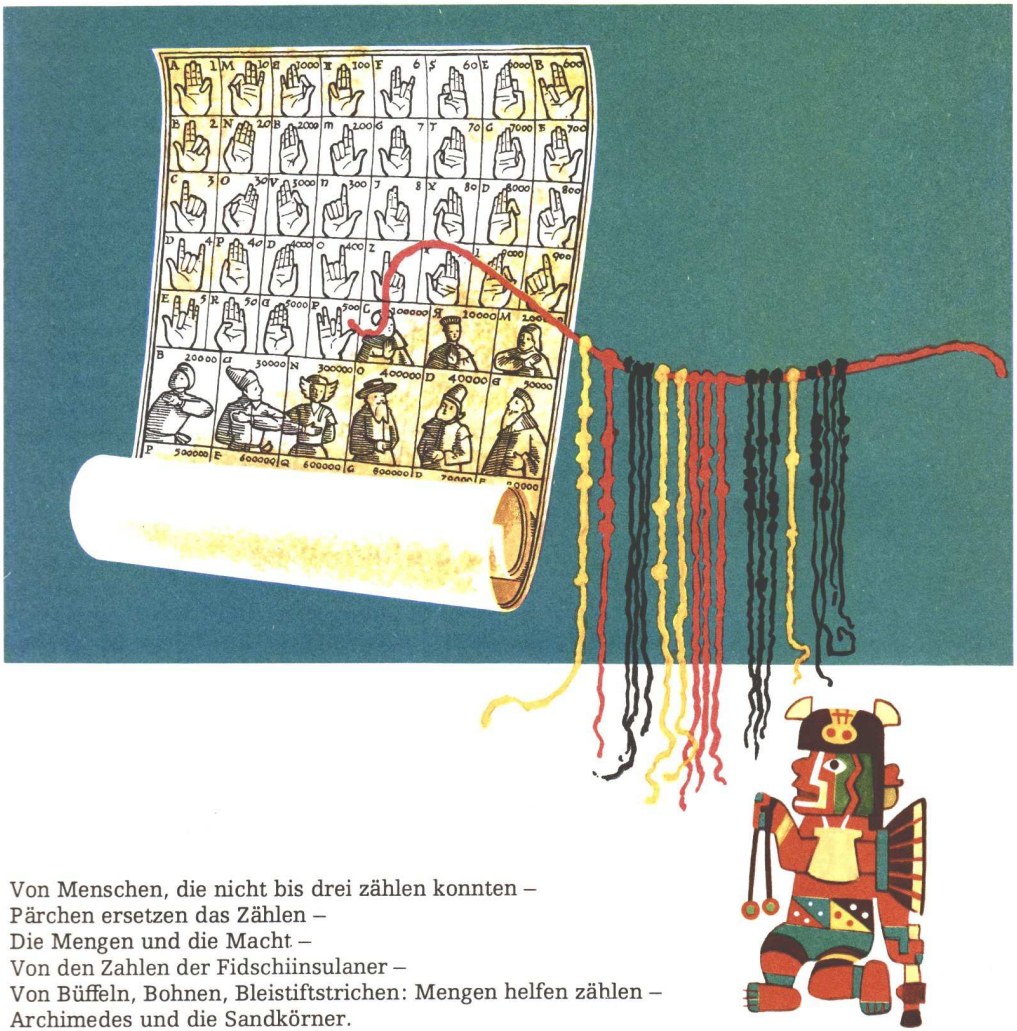
An der folgenden Aufgabe soll jeder allein ein bißchen knobeln.

In einem Schachklub wollen die sechs Spieler Schachner, Schachert, Schachtel, Schachbum, Schachmat und Schachlis versuchen, an einem gemütlichen Abend unter sich ganz zwanglos eine Reihenfolge zu ermitteln. Dazu soll jeder zwei Partien gegen verschiedene Gegner spielen, die unter den übrigen fünf ausgelost werden. Nach einiger Zeit hat sich folgender Spielstand ergeben:

Schachner schlägt Schachtel
und unterliegt Schachlis
Schachtel schlägt Schachbum
und unterliegt Schachner
Schachlis schlägt Schachner
und unterliegt Schachert
Schachbum schlägt Schachmat
und unterliegt Schachtel

Wie viele Spiele wurden bisher ausgetragen? Wie viele fehlen noch? Bisher stehen vier Spieler punktgleich. Für eine Zwischenwertung will man die Reihenfolge von eins bis sechs nach dem Motto „Wer hat wen besiegt" festlegen, also genauso, wie wir vorhin die Mädchen nach dem Alter geordnet haben. Wer belegt nun die Plätze eins bis sechs? Welches Resultat muß sich beim Rest der Spiele ergeben, damit diese Reihenfolge bestätigt wird?

Kannst du schon zählen?



Von Menschen, die nicht bis drei zählen konnten –
Pärchen ersetzen das Zählen –
Die Mengen und die Macht –
Von den Zahlen der Fidschiinsulaner –
Von Büffeln, Bohnen, Bleistiftstrichen: Mengen helfen zählen –
Archimedes und die Sandkörner.

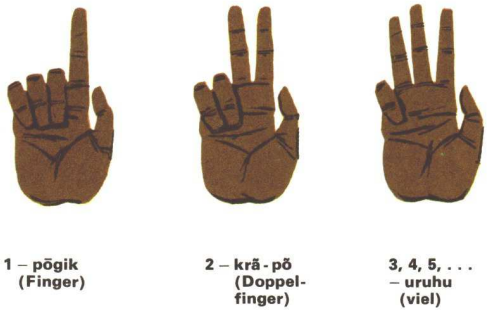
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
Meine Mutter, die schneid't Rüben,
Meine Mutter, die schneid't Speck,
Du mußt weg!

Wer lesen und schreiben kann, der wird ja wohl erst recht zählen können, nicht wahr? Sogar die Kleinen, die noch nicht zur Schule gehen, vermögen schon zu zählen, und wenn sie auch manchmal mit der Reihenfolge etwas durcheinanderkommen – beim Abzählen zum Versteckspiel oder Haschen klappt es gewiß.
Trotzdem ist es bei ihnen mit dem Zählen noch nicht weit her: Obwohl sie beispielsweise ihre Murmeln gezählt haben, geben sie auf die Frage, wieviel Murmeln sie besitzen, keine Antwort. Statt dessen fangen sie munter wieder an zu zählen – eins, zwei, drei... Es ist ihnen also noch nicht vollkommen klar, daß die letzte Zahl, zu der sie beim Zählen gelangen, angibt, wieviel Elemente die gezählte Menge enthält. Sie haben nur die Folge der Zahlwörter auswendig gelernt, weil sie sie von den Erwachsenen und älteren Spielkameraden immer wieder gehört haben. Ihre volle Bedeutung aber ist ihnen noch nicht bewußt. Ja, es dauert mehrere Jahre, bis ein Kind die Zahlen wirklich beherrschen gelernt hat, und das hat bei uns allen so lange gedauert. Dabei begegnet es ihnen frühzeitig und überall: Es hört, daß um zwölf Uhr gegessen wird, daß es schon wieder um zwei Zentimeter gewachsen ist. Die sechs Brötchen für Mutti kosten dreißig Pfennig. Das Kind weiß, daß es vier Jahre alt ist und sein Haus die Nummer siebzehn trägt – überall Zahlen. Und wenn es ein Kind nicht fertigbringt, die bereits vorhandenen Zahlen mühelos von den Älteren zu übernehmen und richtig zu verwenden, dann kann man schon daraus schließen, wie schwierig es für die Menschen gewesen ist, sich die Zahlen erst einmal zu schaffen!
Ein einzelner hat sie gewiß nicht entdeckt. Erst in Jahrtausenden schuf sich die Menschheit in den Zahlen ein Hilfsmittel, um Mengen

auf die Anzahl ihrer Elemente hin zu vergleichen oder zu ordnen. Dabei wurden die Bezeichnungen – Zahlwörter und Zahlschrift – immer mehr vervollkommnet, ebenso das Rechnen. Wie diese Entwicklung vor sich gegangen ist, können wir nur vermuten oder folgern aus Verhältnissen, die Forscher bei Völkerstämmen in Afrika, Südamerika oder in der Südsee vorgefunden haben – Völkerstämmen, die vor kurzer Zeit noch auf einer Entwicklungsstufe standen, die der unserer Vorfahren vor 5000 bis 10000 Jahren entspricht. Ein solcher Volksstamm sind die Krekmun in Südostbrasilien, die von den portugiesischen Eroberern wegen der dicken Holzpflöcke in Lippen und Ohren verächtlich als „Faßspünder", als „Botokuden", bezeichnet wurden. Sie besaßen nur Zahlwörter für 1 und 2, alles, was darüber hinausging, war „viel". Auch einige Südseestämme „konnten nicht bis drei zählen". Bei einigen anderen reichte die Folge der natürlichen Zahlen bis 6, aber alles darüber war auch hier „viel". Oft faßte man sich beim Nennen des unbestimmten Zahlwortes „viel" in die Haare, um anzudeuten, daß es sich um eine so „unzählbare" Menge wie die Menge der Haare auf dem Kopf handelte.

Freilich darf man nun nicht denken, daß es Menschen, deren Zahlenfolge derart begrenzt ist, nicht möglich sei, Mengen mit mehr als zwei oder sechs Elementen in ihrer Anzahl zu vergleichen und bei solchen Mengen das Fehlen eines Elementes festzustellen. So berichtet ein Forscher von den Abiponern, einem heute durch das rücksichtslose Vorgehen der europäischen Eroberer fast ausgerotteten Indianerstamm auf dem Gebiet Nordargentiniens, folgendes: Wenn die Abiponer zur Jagd ausritten und sich dabei nach den Hunden umsahen, so bemerkten sie das Fehlen eines ein-

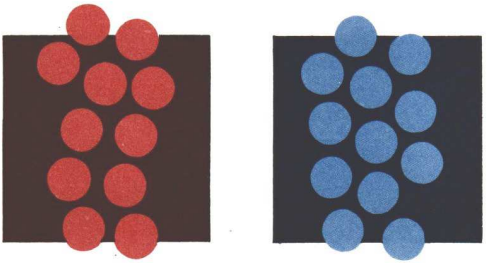
Zahlbezeichnungen der Krekmun



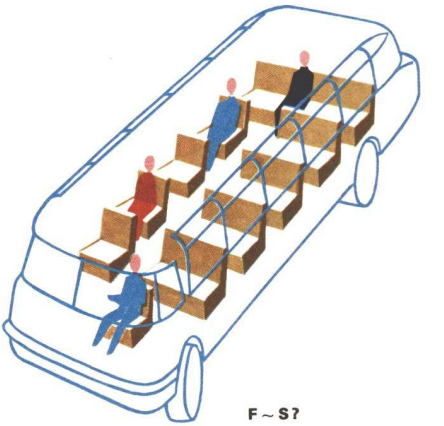
zigen Hundes sogleich und riefen ihn, obwohl es sich um eine sehr große Meute handelte. Bemerkenswert ist auch, daß Kinder, die noch nicht zählen können, oft besser schätzen als Erwachsene oder ältere Kinder: Von zwei Mengen, die nahezu die gleiche Anzahl Elemente enthalten, finden sie die mit der größeren Anzahl heraus und irren sich dabei nur selten.

Allzugroß darf die Elementanzahl allerdings nicht werden. Aber auch in solchen Fällen ist es möglich, zwei Mengen ohne Zählen hinsichtlich der Anzahl ihrer Elemente zu vergleichen, und das sogar mit absoluter Sicherheit! Wie man das tut, machen wir uns am besten an einem Perlenspiel klar, bei dem man auf einem Karton mit Löchern Perlen zu schönen Mustern anordnet. Wollen wir zum Beispiel die Frage beantworten, ob die Zahl der Löcher größer ist als die Zahl der roten Perlen, so wäre es gewiß töricht, beide Mengen zu zählen und dann die gewonnenen Zahlen zu vergleichen. Statt dessen setzen wir einfach auf jedes Loch eine rote Perle. Behalten wir, nachdem alle Löcher besetzt sind, noch Perlen übrig, so sind offenbar mehr rote Perlen als Löcher da. Sind dagegen die Perlen aufgebraucht, bevor alle Löcher besetzt sind, ist es umgekehrt. Wenn aber keines von beiden zutrifft, vielmehr gerade für jedes Loch eine rote Perle und für jede rote Perle ein Loch da ist, so enthalten die Menge der Löcher und die Menge der roten Perlen die gleiche Anzahl von Elementen.

Auf diese Weise kann man zwei Mengen M_1 und M_2 immer hinsichtlich der Anzahl ihrer Elemente vergleichen: Man versucht, jedem Element der einen Menge ein einziges Element der anderen Menge hinzuzugesellen und umgekehrt – zu jedem Loch eine rote Perle und zu jeder roten Perle ein Loch. Meist kann man diese Zuordnung der Elemente zueinander nur in Gedanken vornehmen und nicht so greifbar wie bei den Perlen. Bleiben nun dabei von keiner der beiden Mengen Elemente übrig, so nennt man die Mengen „gleichmächtig" und



Schätze, ob es mehr blaue oder mehr rote Kreise sind!

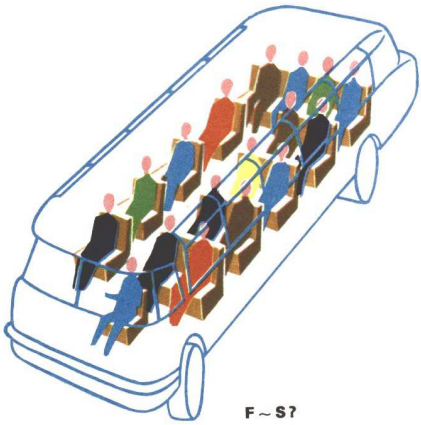


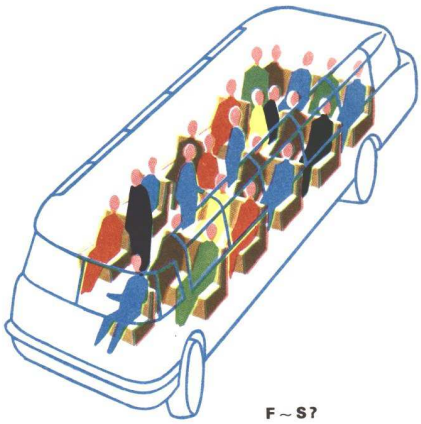
F ~ S?

schreibt $M_1 \sim M_2$; beide haben die gleiche Anzahl Elemente. So übersieht man meist sehr schnell, ob in einem Autobus oder in einem Eisenbahnabteil die Menge S der Sitzplätze und die Menge F der Fahrgäste gleichmächtig sind oder welche Menge von größerer Mächtigkeit ist, die größere Elementanzahl hat.

Was ist den oben gezeichneten Mengen von Kindern, Körben, Pilzen und Vögeln und allen mit diesen gleichmächtigen Mengen gemeinsam? Nur die Anzahl der Elemente, und die nennen wir hier 3. Ebenso ist die Zahl 5 das, was allen Mengen gemeinsam ist, die der hier dargestellten Menge von Bäumen gleichmächtig sind – wie verschieden sie auch sonst sein mögen. Entsprechendes trifft für jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... zu. Man gelangt zu den natürlichen Zahlen, wie man diese Zahlen zum Unterschied beispielsweise zu den gebrochenen Zahlen wie $\frac{1}{4} = 0{,}25$ nennt, wenn man bei Mengen von all ihren Verschiedenheiten absieht und nur die Gleichmächtigkeit beachtet. Darum kann man auch mit den natürlichen Zahlen alle Mengen „zählen", Murmeln ebenso wie Häuser, Kinder, Kuchenstückchen oder Tage.

Daß man das kann, wird uns sicherlich ganz selbstverständlich vorkommen. Trotzdem ist das eine wichtige Erkenntnis auf dem Wege zu den Zahlen, wie wir sie heute kennen, zu der die Menschheit aber erst allmählich gelangte. In der Frühzeit der Zahlenentwicklung gibt es noch gar keine Zahlwörter, die verschiedene Anzahl ist mit den gezählten Dingen fest verbunden, gewissermaßen eine Eigenschaft dieser Dinge. So sagen zum Beispiel die Fidschiinsulaner bola für 10 Kähne, für 10 Kokosnüsse aber koro. Erst allmählich machten sich die Zahlwörter selbständig, und wie langsam das vor sich ging, erkennt man unter anderem daran, daß es in der Sprache von Ureinwohnern Westkanadas sieben verschiedene Reihen von Zahlwörtern gibt. Sie werden gebraucht, je nachdem, ob es sich bei den zu zählenden Dingen um flache Gegen-





Ts

Menge der Tortenstücke

K

Menge der Kinder

T

Menge der Tassen

U

Menge der Untertassen

L

Menge der Löffel

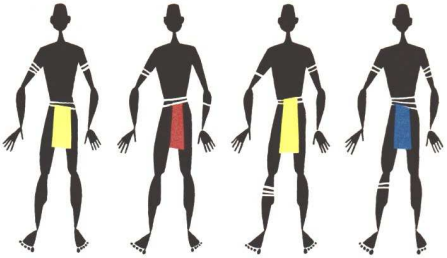
Z

Menge der Zuckerdosen

Wie kann man am bequemsten feststellen, ob Gleichmächtigkeit besteht?

Ts ~ K? K ~ T?
T ~ U? U ~ L?
L ~ Z?

stände, runde Gegenstände, längliche Gegenstände, sonstige unbestimmte Gegenstände, Menschen, Boote oder Maße handelt.
Es war schon ein langer Weg bis zu unseren Zahlen, mit denen wir alles zählen!
Besonders wichtig für den, der noch nicht sicher mit den Zahlen umgehen kann und keine rechte Vorstellung von ihrer Größe hat, ist die Benutzung von Hilfsmengen für die Mengen, deren Elementanzahl eigentlich bestimmt werden soll. So erzählt ein Forscher von einem afrikanischen Häuptling, den die Kolonialherren zur Ablieferung von 20 Büffeln verurteilt hatten. Als jemand über die Höhe dieser Strafe erstaunt war, fragte der Häuptling: „Ist das denn soviel?" Dann zählte er sich 20 Kaffeebohnen ab, für jeden abzugebenden Büffel eine. Als er diese Hilfsmenge für die ihr gleichmächtige Menge der Büffel vor sich sah, wurde ihm die Größe des Verlustes erst richtig bewußt, und er war entsetzt über die Schwere der Strafe.
Eine Hilfsmenge, die dem Menschen seit jeher für solche Zwecke zur Verfügung gestanden hat, wird von seinen Fingern gebildet. Jeder von uns hat seine Finger schon zu Hilfe genommen – beispielsweise, wenn er überlegt, wieviel Klassenkameraden am Ferienlager teilnehmen werden: Heinz, Gisela, ...: Jedesmal, wenn einem ein neuer Name einfällt, biegt man einen Finger zur Seite. Und statt die Mitschüler zu zählen, zählt man nachher einfach die anzeigenden Finger! Und wenn man die entsprechende Anzahl Finger in die Höhe hält und sagt: „Soviel von uns fahren ins Ferienlager", dann versteht das auch jemand, der gar keine Zahlen kennt. Einem Ausländer, mit dem man sich sprachlich nicht verständigen kann, teilt man so mit, wieviel Stationen er noch bis zu seinem Reiseziel fahren muß.



$3 \cdot 20 + 10 + 5 + 3 = 78$

In vielen Sprachen hängen die Namen für die Zahlen deshalb auch eng mit den Fingerbezeichnungen zusammen. „Drei" heißt zum Beispiel bei den südamerikanischen Kamayura „Gipfelfinger", drei Bäume sind also „Gipfelfinger Bäume". Mit den Zahlwörtern der Krekmun war es ja ähnlich. Die Finger heißen lateinisch „digiti", und im Mittelalter nannte man so auch die Zahlen bis zehn. Im Englischen heißen die Einer heute noch „digits", und ein großer Teil der Rechenmaschinen, die sogenannten Ziffernrechenmaschinen, trägt den Namen Digitalrechner. Freilich, sowie man über 10 hinausgeht, kommt man mit den Fingern eines Menschen nicht mehr aus, andere müssen helfen. Man kann auch die Zehen zu Hilfe nehmen – kein Problem, wenn man barfuß geht. „Ein Mensch", das wäre dann die Zahl 20. Auf Irian heißt die Zahl 78: „Drei Menschen sterben ($3 \cdot 20 = 60$), zwei Hände gehen zu Ende ($2 \cdot 5 = 10$), ein Fuß geht zu Ende (5) und 3".

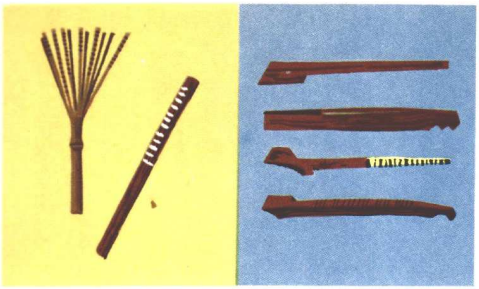
Wenn uns auch die Finger als Hilfsmenge überall zur Verfügung stehen, ist ihre Anwendung doch nicht immer zweckmäßig. Stellen wir uns nur einmal vor, der Kellner in einem Lokal würde für jedes Glas Bier, das er an einen Tisch bringt, einen Finger umbiegen! Er könnte sehr bald kein Tablett mehr tragen. Deshalb macht er es auch anders: Er macht Striche auf einen Bierfilz, und wenn die Zeche zu begleichen ist, werden einfach diese Striche gezählt. Der besseren Übersicht halber setzt man nun diese Striche meist nicht einfach nebeneinander, sondern durch vier Striche wird der fünfte quer gezogen, es wird gebündelt. In dieser Weise haben die Menschen schon sehr früh Zahlen festgehalten, allerdings nicht mit Bleistiftstrichen auf Papier, sondern durch Kerben, die in Holz geschnitten wurden. Schon vor

Doppelkerbholz aus Finnland

vielen Jahrhunderten gab es Kerbhölzer, besonders in Form der aus „Stock" und „Einsatz" bestehenden Doppelhölzer für Käufer und Verkäufer, Gläubiger und Schuldner. Die Kerbe wurde über beide Teile geschnitten, und jeder Partner behielt dann einen Teil. Bei der endgültigen Abrechnung wurden beide Teile zusammengelegt, und auf diese einfache Weise war ohne schriftlichen Vertrag jeder Betrug ausgeschlossen. So mag die Redensart „er hat etwas auf dem Kerbholz" entstanden sein.

In abgelegenen Alpentälern der Schweiz sind Kerbhölzer bis heute üblich, beispielsweise, um die Milchmenge festzuhalten, die die einzelnen Bauern zur genossenschaftlichen Käseerzeugung auf der Alm beigesteuert haben. Bis in das 19. Jahrhundert hinein war eine Art Kerbhölzer in England sogar amtlich, denn auf ihnen kerbte das englische Schatzamt die von den Bürgern gezahlten und geschuldeten Steuern ein.

Allerdings handelte es sich bei all diesen Kerbhölzern schon um etwas mehr als nur um die

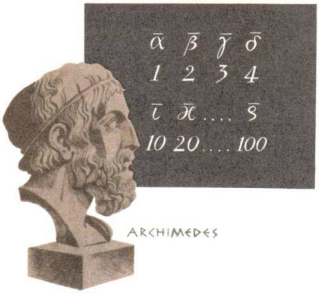


Einfacher Zählstock und Zählstock aus aufgeschlitztem Bambus für gepflückte Kokosnüsse
Kerbhölzer des englischen Schatzamtes

Zwei Kerbholzarten aus der Schweiz, links ein „Milchstab", rechts sogenannte „Alpbeile", auf denen die „Kuhrechte", die die einzelnen Bauern auf der Alp haben, vermerkt sind

Darstellung von Hilfsmengen durch Kerben. Es wurden nämlich verschiedene Arten von Kerben verwandt, größere und besonders geformte Kerben traten an die Stelle von mehreren kleinen Kerben, so etwa, als würde der Kellner auf dem Bierfilz anstelle von fünf Einzelstrichen ein besonderes Zeichen – etwa ein Dreieck – und anstelle von zehn Einzelstrichen wieder ein anderes Zeichen malen. Hier haben wir es mit einer Art Zahlenschrift zu tun!
Die hochzivilisierten indianischen Ureinwohner von Peru, die Inkas, stellten Zahlen durch Knotenschnüre, sogenannte Quipus, dar. Auch hier waren die einzelnen Knoten mehr als die Elemente einer Hilfsmenge, denn je nach der Stelle, an der sie sich befanden, und nach ihrer Form hatten sie einen ganz verschiedenen Wert. Auch das ist also eine besondere „Zahlschrift", genau wie Knoten, die die Müller in einigen kleinen Mühlen in Baden noch bis in unser Jahrhundert hinein benutzten, um die Menge des Mehls im Sack zu kennzeichnen; dazu nahmen sie einfach die Sackschnur.

Eine besondere Art, Zahlen darzustellen, ohne daß man dabei eigentlich Ziffern benutzte, waren die schon im Altertum anzutreffenden und noch im Mittelalter in verschiedener Form benutzten „Fingerzahlen". Dabei wurde nicht etwa 1 durch einen erhobenen Finger, 2 durch zwei erhobene Finger und so weiter dargestellt. Das wäre ja nichts anderes als die uns schon bekannte Verwendung der Finger als Hilfsmenge zum Zählen, und außerdem wäre man damit nicht weit gekommen. Bei den Fingerzahlen aber konnte man mit beiden Händen alle natürlichen Zahlen bis 9 999 darstellen – die Einer mit Kleinfinger, Ringfinger und Mittelfinger, die Zehner mit Zeigefinger und Daumen der linken Hand, die Hunderter mit Daumen und Zeigefinger, die Tausender mit Mittel-, Ring- und Kleinfinger der rechten. Und wenn man auch noch die Lage der Hände am Körper mit beachtete, konnte man sogar noch weiter kommen, in der abgebildeten Tafel (S. 23) aus dem Jahre 1727 bis zu einer Million.
Ist denn 1 000 000 nun aber die größte aller natürlichen Zahlen? Gewiß nicht, denn wir brauchen ja nur um 1 weiterzugehen, dann erhalten wir eine noch größere natürliche Zahl, nämlich 1 000 001. Und so läßt sich überhaupt keine größte natürliche Zahl angeben, denn wenn wir glauben, wir hätten die größte – einen Schritt weiter finden wir noch eine größere! Es gibt also keine größte natürliche Zahl, auch wenn die Menschen früher irgendwann Schluß machen mußten, weil sie nicht weiterzählen konnten oder ihre Art, die Zahlen darzustellen, keine größeren Zahlen zuließ. Für die Krekmun war ja die Folge der natürlichen Zahlen schon mit 2 zu Ende, für andere Völker mit 6, und auch die Griechen, die doch in der Mathematik so Großes geleistet haben, hatten eine so ungeschickte Zahlschrift, daß sie nur einen sehr



begrenzten Teil der natürlichen Zahlen darzustellen vermochten. Sie benutzten für das Schreiben der Zahlen die Buchstaben ihres Alphabets. Die Abbildung zeigt Zahlzeichen, wie die Griechen sie anfangs verwendeten. Nur die Zeichen für 90 und für 900 sind dabei keine Buchstaben. Die größte Zahl, die man auf diese Weise darstellen kann, ist 9 999 999, und 10 000 war die größte Zahl, für die sie noch eine besondere Bezeichnung, nämlich „Myrios", hatten. Auch heute benutzt man manchmal noch ein davon abgeleitetes Wort, um sehr große Zahlen anzudeuten, sagt also etwa „Myriaden Sterne stehen am Himmel".

Archimedes aber, der größte Mathematiker und Naturforscher des Altertums, der im dritten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung in Syrakus, einer Stadt auf der Insel Sizilien, lebte, zeigte seinen Landsleuten, wie man zu immer größeren Zahlen gelangen und diese auch bezeichnen kann. Er stellte dazu die Überlegung an, wieviel Sandkörner wohl nötig wären, um das ganze Weltall auszufüllen. Der Sand dient uns ja auch heute noch oft als Sinnbild für große Zahlen, so wenn wir sagen „zahllos wie der Sand am Meer", obwohl die Zahl der Sandkörner gewiß begrenzt ist. Archimedes rechnete mit sehr feinem Sand, eigentlich mehr mit Staub, denn er nahm an, daß eine Myriade Sandkörner erst ein Mohnkorn ausfüllen und daß von diesen Mohnkörnern vierzig nebeneinandergelegt erst eine „Fingerbreite" ergeben. Es soll uns hier nicht interessieren, daß Archimedes meinte, das ganze Weltall sei eine Kugel, deren Radius eine Myriade mal so groß wäre wie der Abstand der Erde von der Sonne, und daß er dann auch diesen Abstand nur auf ein Zehntel seines wahren Wertes schätzte. Wie wir heute wissen, ist es von der Erde zum nächsten Fixstern schon ungefähr dreihundertmal so weit, wie Archimedes für den Radius des gesamten Weltalls annahm.

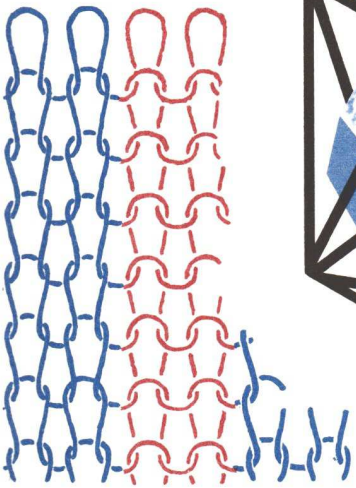
Aber Archimedes hatte ja auch diese Rechnung viel weniger angestellt, weil ihn wirklich die Zahl der Sandkörner interessierte, als vielmehr, um neue Zahlen zu benennen und darzulegen, wie man zu immer größeren Zahlen gelangen kann. Das sieht man am deutlichsten daraus, daß die von ihm ermittelte Zahl der Sandkörner in unserer Schreibweise „nur" eine 1 mit 57 Nullen ist, die größte Zahl aber, zu der er bei seinen Überlegungen gelangt und die er noch bezeichnen kann, eine 1 mit 800 000 000 000 000 000 Nullen – ein unvorstellbarer Zahlenriese!

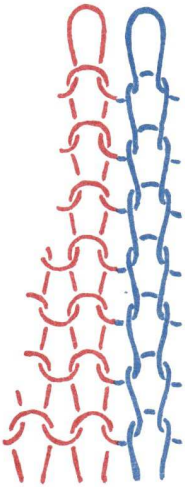
Versuchen wir einmal auszurechnen, wie lange wir brauchen würden, um diese Zahl in Ziffern hinzuschreiben! Wenn wir sehr schnell schreiben, schaffen wir zwei Ziffern in einer Sekunde, in einer Minute also 120 Ziffern, in einer Stunde 7 200 Ziffern. Wenn wir an jedem Tag acht Stunden schreiben würden, brauchten wir, um die ganze Zahl darzustellen, mehr Jahre, als vermutlich seit der Zeit vergangen sind, da die Kruste unseres Erdballs zu erstarren begann! Und wenn wir einmal annehmen, daß alle gegenwärtig auf der Erde lebenden Menschen – Säuglinge wie Greise – nichts weiter täten, als beim Schreiben dieser Zahl mitzuhelfen, so würden sie dazu immer noch insgesamt länger als ein Jahr benötigen.

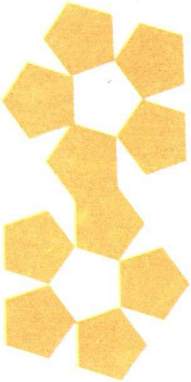
Wer Spaß am Rechnen hat, überlegt, wieviel Bibliotheken die Zahl von Archimedes füllen würde, wenn man annimmt, daß jede Bibliothek 100 000 Bücher umfaßt, jedes dieser Bücher 500 Seiten hat, auf jeder Seite 40 Zeilen und auf jeder Zeile 50 Ziffern stehen.

Wenn wir dann staunend vor dem Ergebnis sitzen, wollen wir daran denken, daß es noch viel größere natürliche Zahlen gibt!

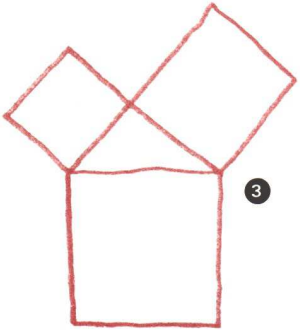
In einem Zuge



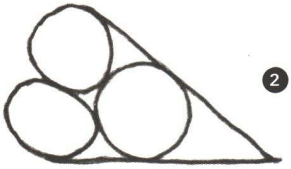




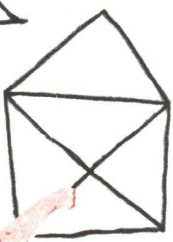
Von Figuren,
die man in einem Zuge zeichnen kann
und solchen,
bei denen man das nicht kann –
Wäscheleine und Seemannsknoten –
Von Schlingen
beim Stricken, Häkeln und anderswo –
Eulers Spaziergang über sieben Brücken
und Hamiltons Reisen auf einem Dodekaeder –
Ein lebensgefährliches Labyrinth.



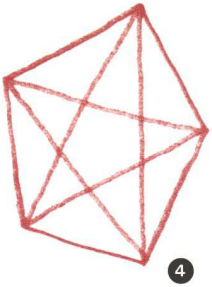
3



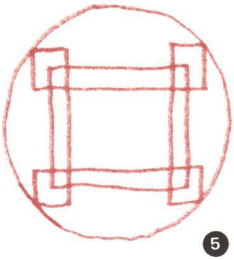
2



1



4



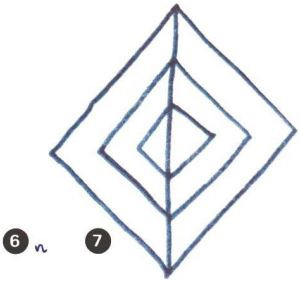
5

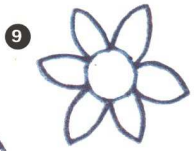
Diesem bescheidenen Häuschen, Figur 1, sieht man es nicht an, daß es ein ganz besonderer Vertreter seiner Art ist: Es ist nämlich uralt, sozusagen historisch. Ganze Generationen unserer Vorfahren haben es – nein, nicht bewohnt, gezeichnet! Es hat nämlich eine Bewandtnis mit ihm: Man muß es, ohne abzusetzen, ohne eine Linie doppelt zu ziehen, in einem Zuge fertigstellen. Nur an zwei Punkten kann man den Bleistift ansetzen, wenn es klappen soll, und hat man mit einem von beiden angefangen, so wird der andere zum Endpunkt. Wir sollten das auch einmal versuchen.

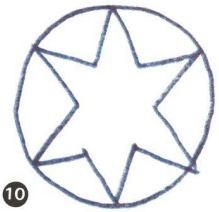
Ebenso steht es mit der Figur 2. Man muß schon ein Weilchen probieren, bis man die Punkte gefunden hat, die Anfangs- und Endpunkt sind!

Versuchen wir das gleiche einmal bei den Figuren 3, 4, 5, die anderer Art sind. Wir überdecken dazu die Zeichnung mit einem Bogen Transparentpapier und können nun nach Herzenslust malen. Mit ein bißchen Aufpassen muß es bei diesen Figuren eigentlich immer klappen – gleichgültig, an welcher Stelle man mit dem Nachzeichnen anfängt; an der gleichen Stelle muß man dann übrigens auch wieder aufhören. Bei der Figur 5 ist es wegen der vielen Linien und Eckpunkte nur etwas schwierig, die Übersicht zu behalten.

Bei Figur 6 aber werden wir vergeblich nach einer Möglichkeit suchen, sie in einem Zuge nachzuziehen. Woran liegt das? Überlegen wir einmal, was unbedingt nötig ist, wenn wir eine Figur in einem Zuge durchlaufen und keine Linie doppelt begehen wollen: Von jedem Punkt, zu dem wir irgendwie hingekommen sind, müssen wir auf anderem Wege wieder wegkommen. In jedem Punkt müssen also zwei Wege zusammentreffen: einer hin, einer weg; oder vier Wege: zwei hin, zwei weg;





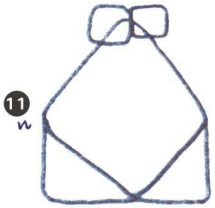


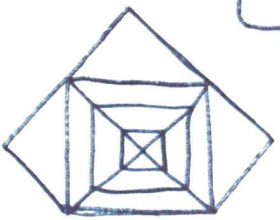
oder sechs Wege ... kurz: Die Anzahl der Wege, die in einem Punkt zusammentreffen, muß immer gerade sein. Und wenn das der Fall ist, dann ist die Figur auch ganz leicht nachzuzeichnen, und der Linienzug läuft in sich selbst zurück – so, wie wir es bei den Figuren 3, 4, 5 gesehen haben.

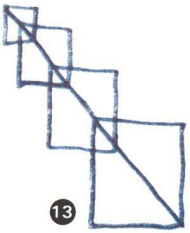
Nun kann man aber auch an einer anderen Stelle mit dem Zeichnen enden – wie beispielsweise bei den Figuren 1 und 2! Dann geht man vom Anfangspunkt einmal öfter weg, als man hingekommen ist, und der Endpunkt hat auch einen zusätzlichen Weg, der zu ihm hinführt, ohne daß man wieder weggeht. Also kann man auch Figuren in einem Zuge zeichnen, die zwei Punkte mit einer ungeraden Anzahl von Wegen besitzen – keinen mehr und auch nicht etwa nur einen. Schließlich kann man ja nur an einer einzigen Stelle anfangen und an einer aufhören. Sehen wir uns einmal die Figuren 1 und 2 daraufhin genau an und zählen für alle Eckpunkte die Wege, die von ihnen ausgehen! Von den anderen Punkten der Figur gehen ja sowieso immer zwei Wege aus.

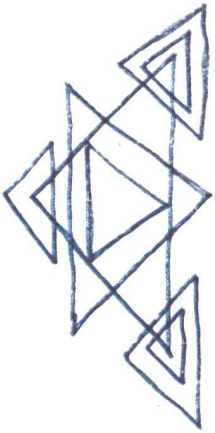
Jetzt erkennen wir auch, warum die Figur 6 sich so hartnäckig unseren Bemühungen widersetzte: Sie hat vier Punkte, von denen eine ungerade Anzahl von Linien ausgeht, nämlich jeweils drei; also brauchen wir uns gar keine Mühe mehr mit ihr zu geben! Bevor wir nun mit dem Nachzeichnen in einem Zuge bei den Figuren 7 bis 14 beginnen, schauen wir sie uns sorgfältig an! Bei welchen ist der Anfang beliebig? Welche haben zwei ganz bestimmte Anfangs- und Endpunkte, und bei welchen klappt es auf keinen Fall?

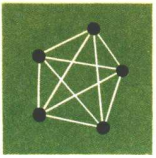
Mit einer ganz ähnlichen Frage hat es übrigens Rainer zu tun, der seiner Mutter oftmals beim Aufhängen der Wäsche hilft. Er steht mit einer Wäscheleine vor vier Pfählen und versucht









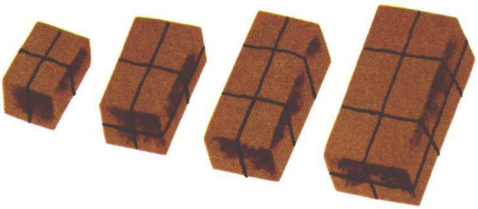


vergeblich, die Leine so zu ziehen, daß alle möglichen Verbindungen hergestellt werden – es soll ja möglichst viel Wäsche Platz finden – und die Leine nirgends doppelt hängt. Als es noch fünf Pfähle waren, gelang ihm das immer auf Anhieb; aber jetzt ist der eine Pfahl, der schon lange morsch war, abgebrochen. Wer kann ihm helfen?

Die Wäscheleine führt uns gleich auf ein weiteres Problem: Ist Rainer am Endpfahl angekommen, so muß er die Leine befestigen – haltbar und doch wieder leicht lösbar zugleich. Manchmal – bei „kleiner Wäsche" – hat er nicht alle Linienzüge gespannt, und die Leine ist noch nicht zu Ende. Rainer hat also zum Festmachen keines der beiden Leinenenden zur Verfügung: Das eine hängt am Anfangspfahl, das andere ist noch im Leinenwickel. Dadurch ist hier das Befestigen schwieriger als beim Verschnüren eines Pakets, wo man ja ein Ende frei hat.

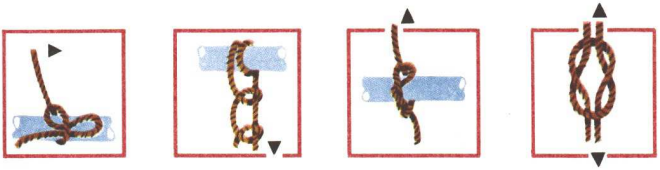
Damit wir besser verstehen, wie sich Rainer hilft, nehmen wir selbst einen „Pfahl" und eine „Wäscheleine" – vielleicht einen Hammerstiel und einen nicht zu dünnen Bindfaden –, und dann wollen wir es gemeinsam probieren: Zuerst legen wir Schlingen, wie sie die Abbildung a zeigt. Daß eine einzige solche Schlinge die Wäscheleine nicht am Pfahl festzuhalten vermag, können wir uns denken, und so legen wir gleich noch eine zweite daneben. Dabei beachten wir aber, daß die beiden Schlingen nicht vollkommen übereinstimmen: Links liegt das Eingangsstück unten, rechts oben. Weil beim Festmachen der Wäscheleine die beiden Schlingen übereinander um den Pfahl herumgehen müssen, schieben wir sie jetzt übereinander – Kreuzung über Kreuzung – und streifen sie über den Pfahl. Aber gleichgültig, ob wir die linke über die rechte Schlinge legen oder

Überleg einmal, wie man diese Päckchen mit einem einzigen Stück Bindfaden verschnüren kann, ohne daß dieser irgendwo doppelt liegt. Probier es selbst aus!



a b

Slipstek, zwei halbe Schläge, Zimmermannstek, Kreuzknoten

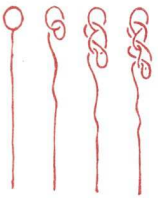


umgekehrt – es gibt keinen festen Halt. Klappen wir beide Schlingen um 90 Grad nach hinten, so daß jetzt die äußeren Ränder hinten liegen, und streifen sie dann über den Pfahl, haben wir schon eine größere Festigkeit erreicht; für die Wäsche dürfte es allerdings kaum ausreichen.

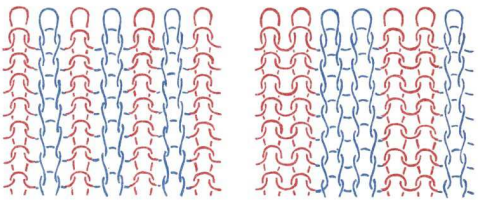
Versuchen wir es nun mit zwei einander gleichen Schlingen (b) und schieben die linke über die rechte, so daß Eingangs- und Ausgangsstück innen zu liegen kommen. Streifen wir diese Doppelschlinge über den Pfahl und ziehen an, so erhalten wir in beiden Zugrichtungen eine solche Festigkeit, daß wir keine Angst um die Wäsche zu haben brauchen. Der Seemann nennt diese Doppelschlinge Webeleinenstek und vertäut auf diese Weise Schiffe am Ufer, indem er die beiden Schlingen nacheinander um einen Poller wirft. Auch beim Wäschepfahl wird man ja nicht die beiden Schlingen vorher legen und dann überstreifen, sondern sie einzeln und nacheinander um den Pfahl herumlegen. Probieren wir einmal, wie man das machen muß, und überzeugen wir uns auch davon, daß sich der Webeleinenstek leicht wieder lösen läßt!

Der Webeleinenstek ist nur einer von vielen Seemannsknoten. Derartige Knoten sind auch für den Bergsteiger wichtig. In der Mathematik heißen sie allerdings nicht Knoten, sondern Verschlingungen, denn der Mathematiker spricht von Knoten nur dann, wenn es sich um einen geschlossenen Faden handelt.

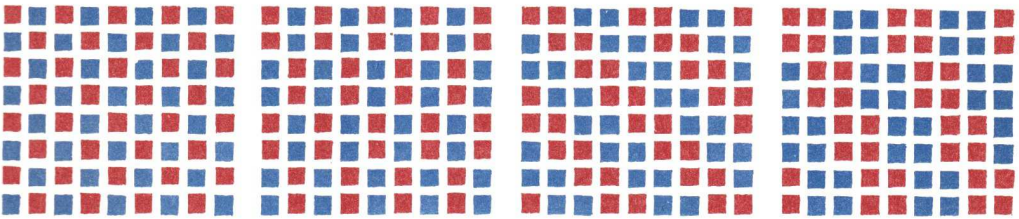
Besonders verwickelt ist die Fadenführung beim Häkeln und Stricken. Das Häkeln beginnt mit einer Schlinge am Fadenende, und mit dem Häkelhaken wird dann durch diese Schlinge eine Masche herausgezogen – zum Unterschied von der Schlinge hat eine Masche keine Überkreuzung –, so daß eine neue Schlinge entsteht,

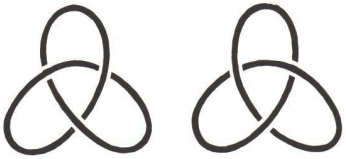


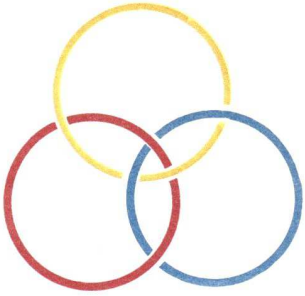
Fadenführung beim Häkeln



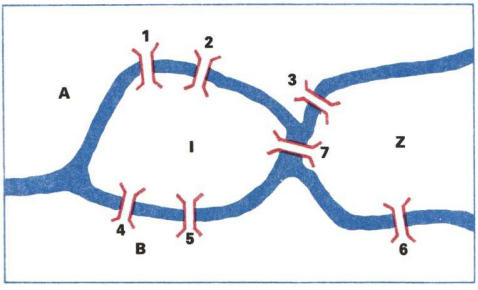
Durch das Abwechseln rechter und linker Maschen beim Stricken entstehen verschiedene Muster

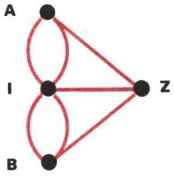


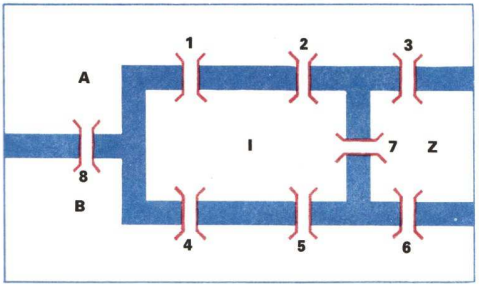




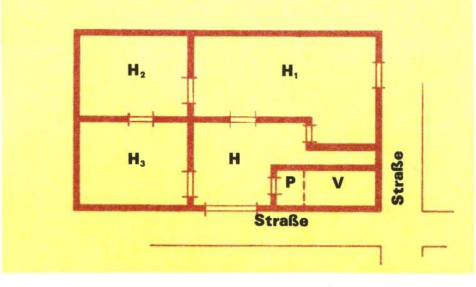
und so geht das immer weiter. Solange das Ende noch nicht befestigt ist, braucht man nur an dem Faden zu ziehen, und das ganze Kunstwerk löst sich in Wohlgefallen auf.
Beim Stricken sieht die Fadenführung etwas komplizierter aus als beim Häkeln. Verhältnismäßig einfach ist allerdings noch das Stricken mit dem „Strickliesel". Hier halten die Stifte am Rand die Maschen fest, durch die dann mit der Stricknadel die neuen Maschen gezogen werden.
Beim üblichen Stricken wird das Festhalten der Maschen auch mit einer Nadel besorgt, entweder mit einer zweiten oder – bei der Rundstricknadel – mit dem anderen Ende derselben Nadel, mit der die neuen Maschen erzeugt werden. Grundlage jeder Strickerei bilden zwei Arten von Maschen – rechte und linke –, durch deren Abwandlung und Abwechslung die verschiedenen Muster zustande kommen.
Auch beim Stricken zerstört ein Zug an dem noch nicht befestigten Strickfaden die ganze Arbeit; das ist ein wesentlicher Unterschied zu den Verschlingungen, die wir gewöhnlich Knoten nennen. An einem wirklich verknoteten Schnürsenkel kann man so lange ziehen, wie man will – die Verschlingung wird höchstens fester, und schließlich reißt der Schnürsenkel, aber beseitigen kann man sie auf diese Weise nicht.
Deshalb ist es auch umgekehrt nicht möglich, in eine Schnur eine Verschlingung hineinzubringen, ohne mindestens eines der beiden Enden einmal loszulassen – es sei denn, man wendet einen kleinen Kunstgriff an: Man kann diese Verschlingung nämlich vorher „in die Arme" hineinbringen, indem man sie verschränkt. Faßt man dann die Enden des Bindfadens und zieht die Hände jetzt auseinander, dann wandert die Verschlingung gewissermaßen aus den Armen in die Schnur.
Schauen wir uns nun die beiden „Herzblattschlingen" an: Die eine ist das Spiegelbild der anderen. Wir stellen uns aus dicker Schnur zwei solche Schlingen her und versuchen dann einmal, ob es uns gelingt, eine Schlinge so zu verändern, daß sie genau wie die andere verläuft. Wir dürfen aber die Schnur nicht zerschneiden!
Solch eine Herzblattschlinge stellt eine einzige geschlossene Kurve dar. Nun kann man aber auch verschiedene geschlossene Kurven ineinander verschlingen, wie das an den drei farbigen Kreisen zu sehen ist. Dabei ist kein Paar von ihnen verschlungen: Wenn man einen Kreis zerschneidet, hat man alle Schnüre voneinander getrennt. Schauen wir uns auch einmal an, wie die Olympiaringe, die die fünf bewohnten Erdteile symbolisieren sollen, miteinander verbunden sind! Und nun überlegen wir, wie sich fünf geschlossene Kurven so verschlingen lassen, daß die ganze Kette in fünf getrennte Teile zerfällt, wenn man eine Kurve zerschneidet, gleichgültig welche. Mit Kreisen gelingt das freilich nicht!
Alle die Fragestellungen, die wir uns jetzt vorgelegt haben, gehören in ein besonderes Gebiet der Geometrie, in die Topologie. In der Topologie kommt es nicht darauf an, wie lang die einzelnen Gebilde sind oder welchen Flächeninhalt sie umschließen. Die Unterscheidung gerader und krummer Linien spielt ebensowenig eine Rolle wie die Größe von Winkeln. Es geht hier um solche Eigenschaften geometrischer Gebilde, die erhalten bleiben, wenn man das Gebilde beliebig verzerrt, sofern man nur nicht den Zusammenhang zerstört, also zum Beispiel nicht etwa Überkreuzungen von Linien beseitigt oder hinzufügt, so daß vorher







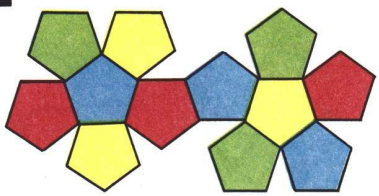
Das ist der Plan eines Werkgeländes mit dem Hof H, den Hallen H_1, H_2, H_3 und dem Verwaltungsgebäude V, in das die Pförtnerloge P eingebaut ist. Der Betriebsschutz will auf seinem Nachtrundgang alle Tore und Türen nur einmal durchschreiten und sie danach sofort verschließen. Selbstverständlich soll der Gang in P enden, und das Verschließen von P vor dem Rundgang wird nicht mitgerechnet.
Ist ein solcher Gang möglich? Wo müßte er beginnen, und auf welchem Wege könnte er erfolgen?

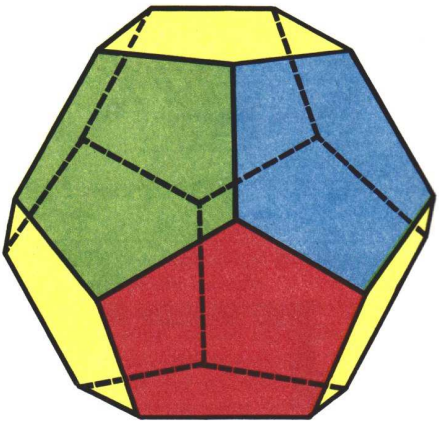


benachbarte Punkte jetzt nicht mehr benachbart sind oder umgekehrt.
Eines der ältesten topologischen Probleme ist mit dem Namen des Schweizer Mathematikers Leonhard Euler verknüpft, der von 1725 bis 1741 und von 1766 bis 1783 an der Akademie der Wissenschaften in Petersburg, dem heutigen Leningrad, wirkte. Es ist unter dem Namen „Königsberger Brückenproblem" bekannt geworden, weil es von den Brücken in Königsberg, dem heutigen Kaliningrad, handelt. Zu Eulers Zeiten gab es über die beiden Arme des Pregels die Brücken 1 bis 7, von denen fünf auf eine Insel I, den Kneiphof, führten. Ist es nun möglich, einen Spaziergang so einzurichten, daß man jede Brücke genau einmal überschreitet, also keine ausläßt und auch keine mehrmals überquert? Ganz offensichtlich kommt es für die Beantwortung dieser Frage nicht auf die genaue Lage der Brücken an – man braucht also dafür nicht etwa eine Landkarte oder einen Stadtplan. Ja, man kann sogar die Insel I, den zwischen den beiden Flußarmen gelegenen Landteil Z sowie die beiden Ufer A und B durch Punkte ersetzen und die Brücken durch Strecken, die diese Punkte verbinden. Auf diese Weise ist ein sogenannter „Graph" entstanden, und das Königsberger Brückenproblem ist gleichwertig mit der Frage, ob es möglich ist, diesen Graph in einem Zuge zu durchlaufen. Wie man das entscheiden kann, haben wir aber schon gesehen. Wir können nun selbst überlegen, warum ein solcher Spaziergang über die Königsberger Brücken nicht möglich war. Versuchen wir einmal, folgende Fragen zu beantworten:

1. Ist der Spaziergang möglich, wenn die Brükke 7 als einzige mehrmals überschritten werden darf?
2. Wie muß man laufen, wenn der Spazier-

Netz des Dodekaeders





Dodekaeder (Zwölfflach)

gang auf A beginnen und enden soll, keine Brücke ausgelassen und möglichst wenige doppelt begangen werden sollen?

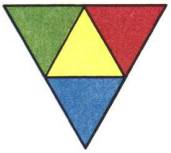
3. Ist der Spaziergang vielleicht möglich, wenn man die später gebaute Eisenbahnbrücke 8, die A mit B verbindet, ebenfalls benutzen darf?

Euler hat seinerzeit das Brückenproblem dadurch verallgemeinert, daß er anstelle der vier Landflächen eine beliebige Anzahl betrachtete und zwischen ihnen Brücken und Wasserläufe in beliebiger Anordnung annahm. Über diese Frage schrieb er eine Abhandlung, die er 1736 der Petersburger Akademie vorlegte, und mit dieser Arbeit war gewissermaßen die Topologie geboren.

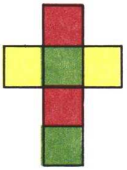
Um Rundreisen geht es auch bei dem Geduldsspiel „Die Reisenden auf dem Dodekaeder", das der irische Mathematiker Sir William Rowan Hamilton im Jahre 1859 in London herausgab. Dieses Spiel verlangte, Kanten eines regelmäßigen Zwölfflachs, eines Dodekaeders, so zu durchwandern, daß dabei jede Ecke genau einmal besucht wird und die Wanderung zum Ausgangspunkt zurückführt. Auch hier ist es am bequemsten, für die Lösung einen Graphen zu Hilfe zu nehmen, also von dem Körper zu einem ebenen Gebilde überzugehen. Einen solchen Graphen, der dem Dodekaeder entspricht, zeigt die obere Abbildung auf Seite 41. Dabei entsprechen die Linien des Graphen den Kanten des Dodekaeders, die Punkte, die man bei einem Graphen Knotenpunkte nennt und die hier mit A bis U bezeichnet sind, den Eckpunkten des Körpers.

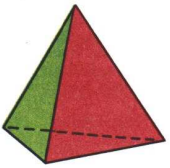
Eine Rundreise auf dem Dodekaeder anzugeben ist verhältnismäßig leicht. Überlegen wir auch einmal, ob es möglich ist, eine Rundreise so einzurichten, daß jede Kante genau einmal durchlaufen wird!

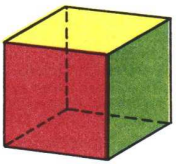
Tetraeder (Vierflach)

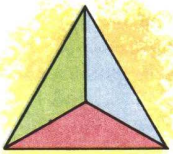


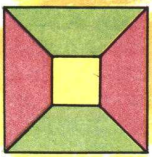
Würfel oder Hexaeder (Sechsflach)

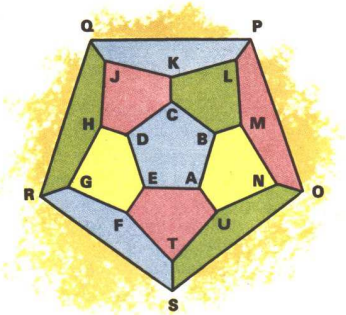












Graph des Dodekaeders

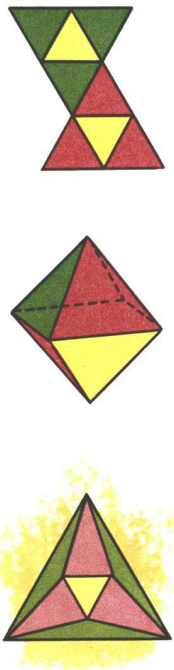
Hamilton veränderte die Aufgabe noch etwas:

1. Die ersten fünf Punkte der Reise sollen vorgegeben sein. Versuchen wir es einmal mit K–L–M–N–O, dann mit A–U–T–S–R!
2. Die ersten drei Punkte sind vorgeschrieben, und die Wanderung soll nicht zum Ausgangspunkt zurückführen, sondern zu einem – ebenfalls vorgegebenen – Endpunkt. A–B–C sollen die ersten Punkte sein, und die Wanderung soll bei Q enden oder bei S oder bei D!

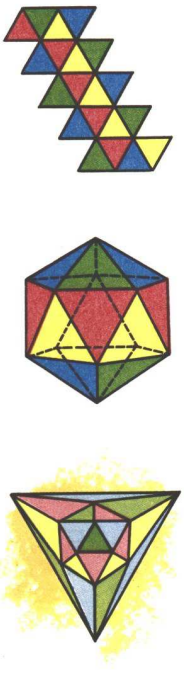
Diesen Fall 2. kann man noch durch die Forderung ergänzen, daß ein vorgeschriebener Punkt, zum Beispiel M, ausgelassen werden soll. Es gibt also eine unerschöpfliche Zahl von Variationen dieses Spiels! Dasselbe kann man auch mit den anderen regelmäßigen Körpern versuchen. Graphen, die zu diesen Körpern gehören, sind ebenfalls hier abgebildet.

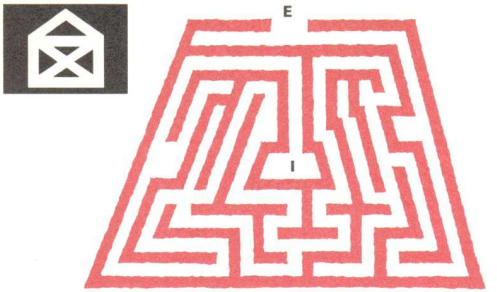
Zu den topologischen Problemen gehören auch die Irrgärten oder Labyrinthe. Ihren Namen führen sie nach einem Bauwerk, dem Labyrinth, das nach einer griechischen Sage Dädalos im Auftrag des Königs Minos auf Kreta für den Minotaurus – ein menschenmordendes Ungeheuer, halb Mensch, halb Stier – gebaut hat. Diesem Minotaurus mußten immer wieder griechische Mädchen und Jünglinge geopfert werden. Theseus, der Held, wollte das Land von dieser Geißel befreien, den Minotaurus erschlagen. Er mußte ihn in seinem Bau aufsuchen; das aber war gefährlich. Niemals hatte jemand aus dem Labyrinth wieder herausgefunden. Die Tochter des Königs Minos, Ariadne, aber liebte Theseus. Sie gab ihm ein mächtiges Garnknäuel. Den Anfang des Knäuelfadens sollte er am Eingang des Labyrinths befestigen, damit er nach dem Sieg über den Minotaurus auch wieder aus dem verwinkelten Gemäuer herausfände. Das gelang auch dank der List der Königstochter.

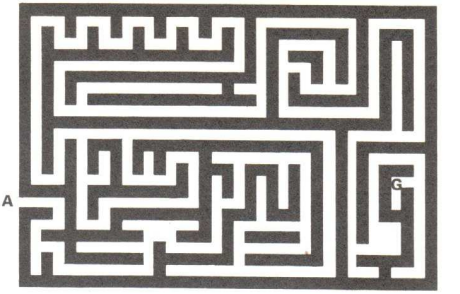
Oktaeder (Achtflach)



Ikosaeder (Zwanzigflach)

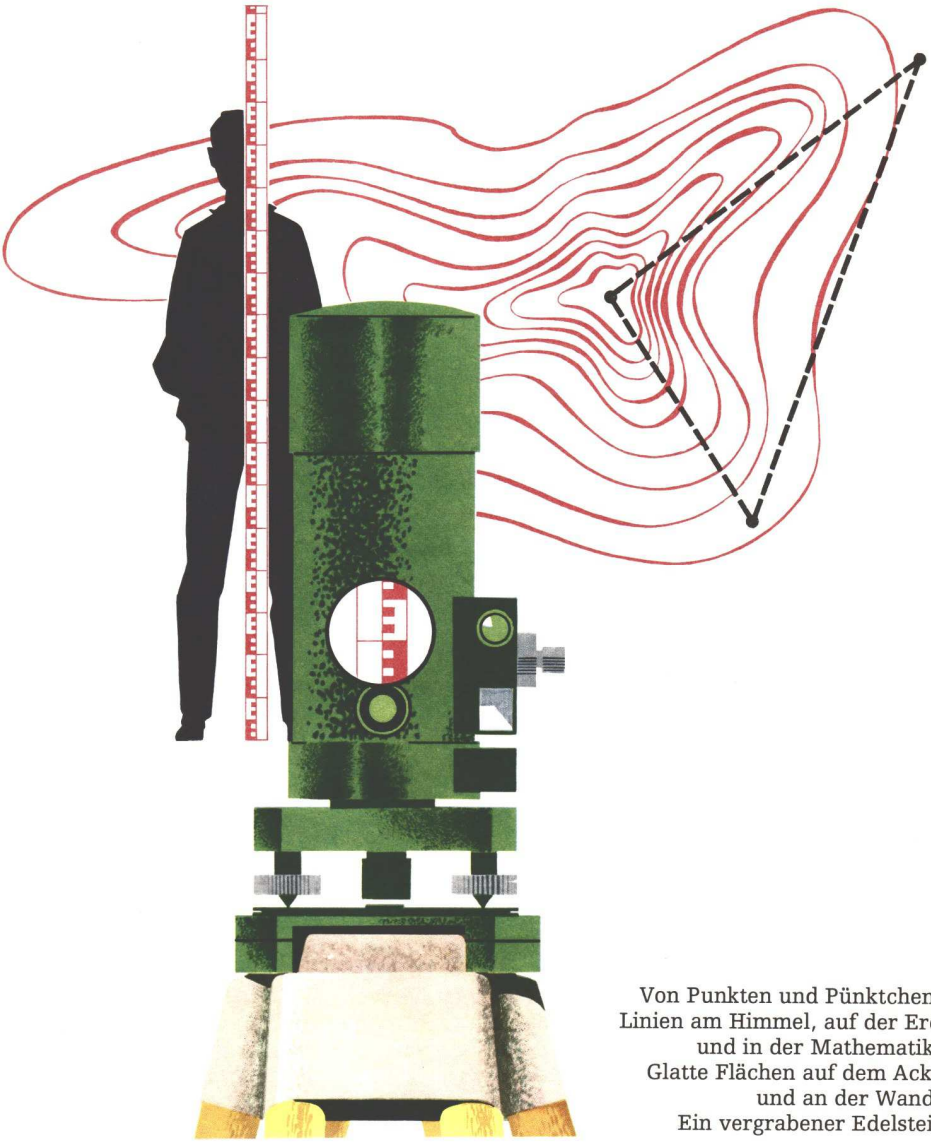






Im Barock wurde es Mode, aus kunstvoll verschnittenen Hecken Labyrinthe anzulegen; ein kleiner Irrgarten dieser Art befindet sich im Park des Schlosses Pillnitz bei Dresden. Allerdings sind die Hecken hier so regelmäßig angelegt, daß man sich kaum verlaufen kann.
Anders ist es dagegen bei dem Labyrinth im Garten von Hampton Court in der Nähe Londons, bei dem man vom Eingang E zum Inneren I und wieder zurück gelangen soll. Für das Wieder-heraus-Finden hilft zwar ein Ariadnefaden, was macht man aber, wenn man keinen hat? Am sichersten ist es, wenn man sich immer an der gleichen Wandseite hält – gleichgültig, ob an der linken oder an der rechten; Hauptsache ist, daß man zwischendurch nicht wechselt, sondern bei der einmal gewählten Seite bleibt. Allerdings gibt dieses Vorgehen keine Gewähr dafür, daß man auf diese Weise wirklich alle Teile des Labyrinths betritt, das heißt, es wäre auch möglich, daß man wieder herauskommt, ohne das Innere I erreicht zu haben. Aber auch Theseus mit seinem Ariadnefaden hätte es ja passieren können, daß er den Minotaurus nie zu Gesicht bekommen hätte.
Es gibt auch ein Verfahren, das garantiert zu allen Teilen des Labyrinths führt. Es verlangt, daß man alle Gänge beim Betreten markiert und beim abermaligen Passieren derselben Stelle die Markierung entsprechend ändert. Hinzu kommen Anweisungen, wie man zu gehen hat, wenn man an einen Punkt gelangt, von dem verschiedene Wege mit und ohne Markierungen ausgehen, doch wollen wir dieses komplizierte Verfahren nicht weiter betrachten. Aber versuchen wollen wir doch einmal, in dem Labyrinth von Hampton Court von E nach I zu gelangen, indem wir uns immer auf der rechten Wandseite halten! Bleiben dabei Gänge unbetreten? Versuchen wir es danach auch einmal mit der linken Wandseite! Falls hier Gänge unbetreten bleiben – sind es dieselben wie beim Gehen an der rechten Seite?
Hier sind auch noch zwei andere Labyrinthe; in einem sucht ein Gefangener bei G den Ausgang A. Solche Irrgärten können wir auch selbst entwerfen. Es ist allerdings ein Unterschied, ob man ein Labyrinth von oben betrachtet und damit einen Überblick hat, oder ob man mitten in einem Labyrinth steht und versuchen muß, aus diesem Irrgarten herauszufinden. Wenn wir uns in die Lage des Suchenden ohne Überblick versetzen wollen, dann schneiden wir in einen Papierbogen ein kleines Loch. Diesen Bogen legen wir so auf das Labyrinth, daß das Loch jeweils nur eine kleine Umgebung der Stelle freigibt, an der sich der Suchende gerade befinden soll.

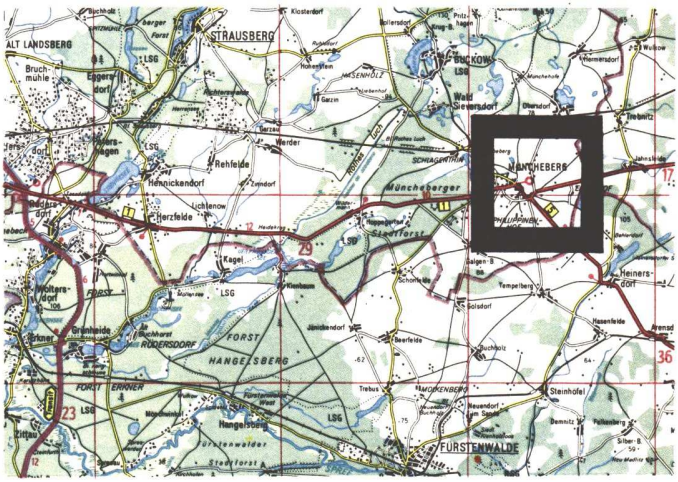
Nun mach aber einen Punkt!



Von Punkten und Pünktchen –
Linien am Himmel, auf der Erde
und in der Mathematik –
Glatte Flächen auf dem Acker
und an der Wand –
Ein vergrabener Edelstein.

Peter fährt mit der U-Bahn zum Alexanderplatz, dem Treffpunkt seiner Klasse für den Wandertag. Er braucht seine Freunde nicht lange zu suchen, die roten Punkte auf Karins Kleid leuchten ihm entgegen. Er hat noch nicht alle begrüßt, da fragt Klaus ihn: „Hast du gestern im Fernsehen das Punktspiel zwischen FC Vorwärts und Wismut Aue gesehen?"
Inzwischen sind alle Schüler versammelt, und Punkt 8.00 Uhr beginnt der Ausflug mit einer S-Bahn-Fahrt. Ziel ist das Rote Luch in der Nähe von Müncheberg: Dort soll die Stelle aufgesucht werden, die für alle Höhenangaben von Bergen und Orten in der DDR den festgelegten Ausgangspunkt, den Nullpunkt, darstellt. Fünfmal haben wir jetzt das Wort „Punkt" benutzt, aber jedes Mal hatte es eine andere Bedeutung: Der Nullpunkt ist eine Stelle auf einer kleinen Kugel; die Punkte, mit denen wir ein Fußballspiel bewerten, sind Zahlen, und der Treffpunkt ist eine Fläche, genau wie die Punkte auf Karins Kleid.
Auch in der Schule, speziell im Geometrieunterricht, sprechen wir von Punkten:
„Bestimme den Abstand des Punktes P von der Geraden g!" Wenn man das aufzeichnet, dann markiert man den Punkt P durch einen winzigen Kreis, ein kleines Kreuzchen, oder man tippt mit dem Bleistift nur einmal auf das Papier. Und sei sie auch noch so klein, diese Markierung, unter dem Mikroskop sieht sie aus wie ein Graphitgebirge.
Was man auch zeichnet und auch womit, stets sind es nur Markierungen für Punkte! Denn die Punkte der Mathematik haben keine Ausdehnung. Sie existieren daher nur in Gedanken, auch wenn man dabei an winzig kleine Pünktchen denkt. Und auch für diese kleinen Dingerchen gilt nicht, was man von mathematischen Punkten fordert – daß man durch zwei

von ihnen nur eine einzige gerade Linie zeichnen kann. Wenn der Bleistift spitz genug ist, gelingt es uns sicher, mehrere Bleistiftstriche durch zwei derartige Punkt-Markierungen zu zeichnen, die immer noch voneinander zu unterscheiden sind.
Nun hätten wir bei unserem Erzählen über die Punkte aber beinahe die wandernde Klasse aus den Augen verloren. Sie ist inzwischen schon aus der S-Bahn gestiegen und hat den Fußweg angetreten. Rainer verfolgt ihn ständig auf seiner Karte, wo der Weg als Linie gekennzeichnet ist, die von Herzfelde nach Müncheberg führt, und als Fernverkehrsstraße 1 bezeichnet wird. Plötzlich zeigt Peter zum blauen Himmel, wo wie aus dem Nichts eine weiße Linie entsteht. Erst als alle angestrengt nach oben schauen, entdecken sie als winzigen silbernen Punkt das Flugzeug, das diese weiße Linie, den Kondensstreifen, erzeugt. Als Wolfgang vorhin beim Laufen einen Stock hinter sich herzog, entstand eine Linie im Sand; und wenn nachher, bei einer Wanderpause, Völkerball gespielt werden soll, dann wird einer der Spieler mit dem Absatz in ähnlicher Weise die Begrenzungslinien eines Spielfeldes entstehen lassen.
Wenn wir mit dem Bleistift auf einem Papierbogen eine Strecke zeichnen, passiert genau dasselbe: Die Bleistiftspitze läßt hinter sich einen Strich entstehen; er ist zwar etwas dünner, wohl auch etwas gerader, aber unter einem Mikroskop betrachtet sieht er nicht anders aus als die Kreidelinien, die ein Fußballfeld abgrenzen oder eine Aschenbahn einteilen. Alle diese Linien, ob krumm oder gerade, haben eine gewisse Breite: Die Linie auf der Landkarte ist etwa $\frac{1}{2}$ mm breit, die auf dem Fußballfeld etwa 5 cm, und noch viel breiter ist der Kondensstreifen – ja, er verbreitert sich sogar immer mehr und löst sich schließlich auf.


STRAUSBERG
ALT LANDSBERG
Bruchmühle
Eggersdorf
Werneuchen
Rehfelde
Hennickendorf
Zerndorf
Lichtenow
Herzfelde
Kagel
Müncheberger
Stadtforst
MÜNCHEBERG
Heinersdorf
Tempelberg
Golsdorf
Hasenfelde
Buchholz
Steinhöfel
Dennitz
Falkenberg
FÜRSTENWALDE
Trebus
Nevendorf
Jänickendorf
Seerfelde
Wolterdorf
Grünheide
Birkner
Buchhorst
RÜDERSDORF
FORST
HANGELSBERG
FORST ERKNER
Hangelsberg
Fürstenwalder
Stadtforst
Werder
Garzin
Wuhlsee
Wulkow
Mönchehuk
Wiesenberg
Pritzhagen
Klosterdorf
Hohenstein
Waldsieversdorf
Gwendorf
Tiefenbitz
Jahnsfelde
Silberberg
Silber-B.
Neu Mellnitz
Schwarzenhof
Schorfheide
Galgen-B.
Kienheim
Bunterstein
Aschendorf
Hermersberg
Berkenhof
Hasenheide
Hasenfeld
Hasenberg
Hasenfurt
Hasenberg
Hasenfurt
Hasenberg
Hasenfurt

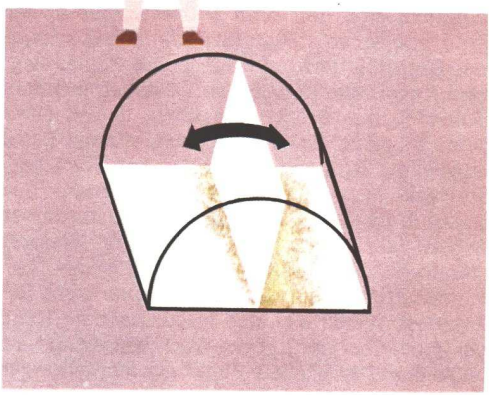
Keine Breite dagegen hat die Linie des Mathematikers, und daher läßt sie sich ebensowenig zeichnen wie ein mathematischer Punkt. Auch sie kann nur angedeutet, markiert werden durch Striche, Fäden, Draht oder etwas Ähnliches. Wohl aber können wir uns eine solche mathematische Linie entstanden denken als Spur eines sich bewegenden mathematischen Punktes. Und eine ganz besondere mathematische Linie ist die Gerade, die nirgends ihre Richtung ändert, bei der man niemals an ein Ende kommt, nach welcher Seite man auch immer gehen mag.

Inzwischen ist die Klasse weitergewandert. Auf den Feldern der LPG Lichtenow sehen die Schüler Vorbereitungen zur Frühjahrsbestellung. Dazu gehört, neben vielem anderen, daß eine glatte Ackerfläche geschaffen wird; sie entsteht, wenn hintereinandergekoppelte Balken von einem Traktor quer über das Feld gezogen werden. Ein Stückchen Wegs weiter wird eine Straße angelegt: Eine große Maschine, ein Schrapper, schafft mit ihrem Schürfkübel eine glatte Fläche. Und in ganz ähnlicher Weise geht der Maurer vor, der ein Stallgebäude am Dorfeingang neu verputzt: Zunächst wirft er den Mörtel mit der Kelle an die Wand, dann streicht er ihn mit der Kante eines großen Brettes glatt, und schließlich reibt er mit einem kleineren Brett nach, um die Fläche noch glatter zu machen.

In all diesen und ähnlichen Fällen entsteht eine Fläche durch das Bewegen einer Linie; bei den drei geschilderten Beispielen entstand sogar eine ebene Fläche, und zwar deshalb, weil eine gerade Linie immer in gleicher Richtung bewegt wurde. Beim Bewegen gekrümmter Linien oder bei einer Änderung der Bewegungsrichtung kann man auch gebogene, gewölbte Flächen erhalten.

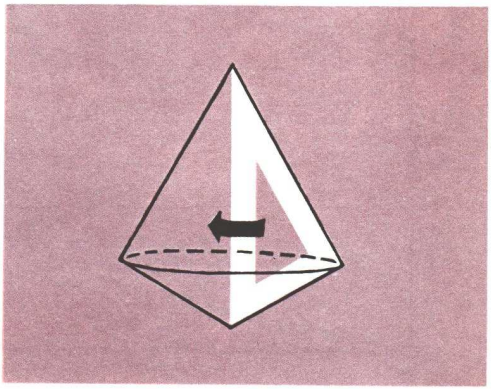
Überlegen wir einmal:

1. Bei Gymnastikübungen lassen wir die Arme kreisen, vorwärts oder rückwärts. Was für eine Fläche beschreiben dabei die Arme?
2. Bei welcher Bewegung einer geraden Linie wird keine Fläche erzeugt? Kann man auch eine Kreislinie so bewegen, daß keine Fläche entsteht?



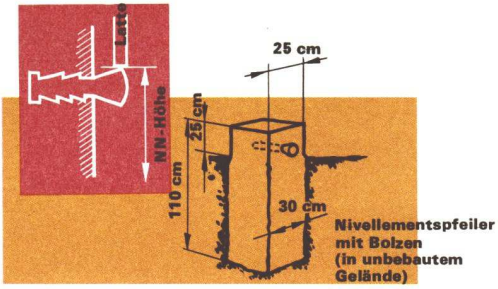
Was verlangt man in der Mathematik von einer Fläche? Daß sie keinerlei Dicke hat. Deshalb ist ein Blatt Papier, und mag es noch so dünn sein, keine Fläche; allenfalls ist das, worauf geschrieben wird, eine Fläche. Und von einer ebenen Fläche verlangen wir dann noch zusätzlich, daß sie nirgends kleine Huckel oder Beulen hat, und wenn sie nach allen Richtungen unbegrenzt ist, sprechen wir von einer Ebene.

Und was passiert, wenn eine Fläche bewegt wird, etwa wenn man eine Buchseite umblättert? Dann durchwandert diese ein Stück des Raumes, der uns umgibt, man sagt auch, sie erzeugt einen Körper. Natürlich haben auch diese Körper ganz verschiedenes Aussehen, je nachdem, was für eine Fläche bewegt wird und wie sie bewegt wird. Probieren wir das, indem wir einen Buchdeckel oder ein Zeichendreieck um eine der Seiten drehen. Was gibt das für Körper? Wie kann man überhaupt eine Fläche bewegen, ohne daß ein Körper entsteht? Was ist, wenn man beispielsweise ein Zeichendreieck um einen Bleistift wirbelt?



Von einem mathematischen Körper verlangen wir, daß er von mathematischen Flächen begrenzt wird. Und den Raum schlechthin wollen wir uns wieder unbegrenzt vorstellen.

Unsere Klasse ist inzwischen auf der Landstraße Herzfelde–Müncheberg bis zum Kilometerstein 40,7 gekommen und biegt den Waldweg nach links ein. Nach kurzer Zeit stehen alle auf einer ringförmigen Talsohle und ver-



Tonnenförmiger Höhenbolzen (einzementiert in die Fundamente älterer Gebäude)

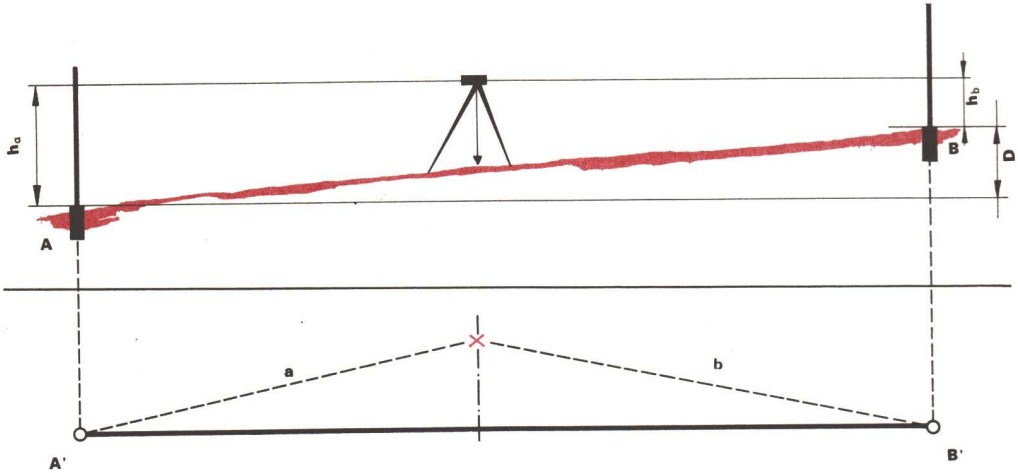
Da die NN-Höhen nicht direkt meßbar sind, wird über das ganze Land ein Höhennetz gelegt. Es besteht aus gut vermarkten Höhenfestpunkten, meist als Höhenbolzen

sammeln sich um ihren Lehrer: „Hier in der Erde vergraben stehen fünf Pfeiler auf schweren Granitplatten, und auf jedem Pfeiler liegt eine Kugel; alle fünf Kugeln bestehen aus dem Halbedelstein Achat. Der obere Punkt einer jeden Kugel ist als das vom Amsterdamer Pegel abgeleitete Null-Niveau für die amtlichen Kartenwerke der DDR festgelegt worden. Für Holland ist der Nullpunkt des Amsterdamer Pegels, also eines Meßgerätes für Wasserstände, maßgebend. Dieser Punkt ist als Normalnull (NN) auch außerhalb Hollands von Bedeutung. Wenn wir also lesen, daß die Höhe des Fichtelberges 1214 m über NN beträgt, so heißt das: Der höchste Punkt des Fichtelberges liegt 1214 m höher als der Nullpunkt des Amsterdamer Pegels beziehungsweise 1177 m über dem Null-Niveau. Eine ähnliche Rolle wie Normalnull spielt der Nullpunkt des Kronstädter Pegels, der gegenüber dem Amsterdamer 16 cm höher liegt. Er gilt nicht nur für die Sowjetunion als Bezugspunkt, sondern neuerdings auch für die DDR und wird hier als Höhennormal (HN) bezeichnet.

Die Jungen und Mädchen staunen. Sie staunen nicht über die etwa kastaniengroßen Achatkugeln; die können sie gar nicht sehen, weil sie unterhalb der Erdoberfläche liegen. Als sie aber hören, daß bei solchen Messungen Genauigkeiten von 0,3 bis 0,5 mm pro Kilometer erreicht werden, staunen sie über die Präzision, mit der solche Höhenmessungen durchgeführt werden.

Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte A und B (Abstand nicht größer als 100 m)
$D = h_a - h_b$. Ist die NN-Höhe des Punktes A bekannt (H_A), so läßt sich die NN-Höhe (H_B) des Punktes B berechnen
$H_B = H_A + D$

Der Grundriß soll zeigen, daß das Nivellierinstrument nicht über der Verbindungsstrecke von A und B zu stehen braucht. Es soll aber von diesen beiden Punkten ungefähr gleichen Abstand haben, $a \approx b$



Breite – Höhe – Tiefe – gibt's noch mehr?

Die Schildbürger suchen ihre Glocke –
Jedem Fleckchen seine Nummer(n) –
Schachspiel ohne Schachbrett –
Aller guten Dinge sind drei –
Diebstähle aus dem verschlossenen Tresor.

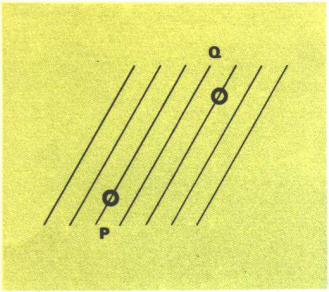
Die Einwohner von Schilda, die bekannten Schildbürger, hatten große Sorge, wie sie wohl die Glocke ihrer Kirche vor den herannahenden, plündernden Landsknechtshaufen in Sicherheit bringen konnten. Sie beschlossen, die Glocke im See zu versenken. Und um sie später wieder heben zu können, schnitt einer von ihnen eine Kerbe in das Boot an der Stelle, an der sie die Glocke über Bord hoben.

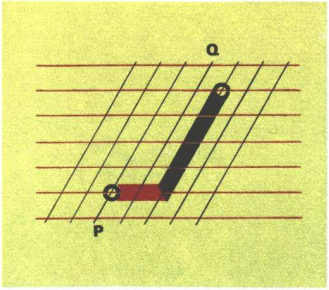
Auf eine solche Idee konnten auch nur die Schildbürger kommen, denn als sie nach Jahren die Glocke wieder heben wollten, fanden sie wohl die Kerbe im Boot, aber die Glocke nicht mehr. Weil wir diesen Fehler der Schildbürger nicht wiederholen wollen, überlegen wir, was man tun muß, um eine bestimmte Stelle genau angeben zu können. Dazu wollen wir uns zuerst Punkt, Gerade, Ebene und Raum noch einmal etwas näher ansehen.

Wenn wir uns nur längs einer Geraden bewegen dürfen, dann sind wir in der gleichen Lage wie eine Lokomotive, die auf einer Strecke ohne Weichen fährt. Auf einer Ebene sind wir so beweglich wie die kleinen zweisitzigen elektrischen Autos (Autoscooter), die man auf dem Rummelplatz sieht. Sie können jeden beliebigen Punkt ansteuern, nur nach unten können sie nicht, genausowenig wie nach oben. Im Raum gleichen wir einem Flugzeug: Es kann nicht nur jede Richtung einschlagen wie die Scooter, es kann vor allem auch steigen und sinken. Und bei einem Punkt, da sind wir zum Stillstand verurteilt.

Die Kilometersteine, die längs einer Eisenbahnstrecke oder einer Landstraße stehen, zählen vom Beginn der Strecke, meist einer größeren Stadt, an. Dadurch gehört zu jeder Stelle der Strecke oder Straße eine ganz bestimmte Zahl. Wenn die Verkehrspolizei die Meldung erhält, daß auf der Autobahn bei Kilometer 43,5 ein Unfall geschehen ist, dann weiß sie genau, wo Einsatz- und Rettungswagen hinfahren müssen. Genauso können wir auf jeder Linie, insbesondere also auch auf jeder Geraden, durch eine einzige Zahl jeden Punkt festlegen. Wenn die Linie, wie die Gerade, keinen Anfangspunkt hat, nimmt man einfach irgendeinen Punkt als Anfang (man sagt zu diesem Punkt besser „Ursprung") und legt von ihm aus nach beiden Seiten die Zahlen fest.

Freilich braucht man dazu dann positive und negative Zahlen. An den Zahlen, die zu zwei verschiedenen Punkten gehören, erkennt man auch gleich, ob die Punkte weit voneinander entfernt liegen oder nicht. Nehmen wir an, ein Einsatzwagen der Volkspolizei befindet sich bei Kilometer 34,5, ein anderer bei Kilometer 79 – welchen wird man wohl zum Unfallort bei Kilometer 43,5 senden? Und weil für jeden Punkt eine einzige Zahlenangabe aus-

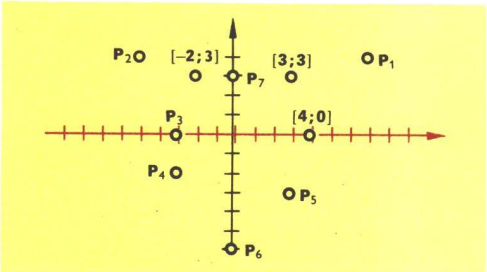




Eine Schar von Parallelen reicht nicht aus, um auf ihnen allein von einem beliebigen Punkt der Ebene zu jedem anderen Punkt dieser Ebene zu gelangen. Man benötigt zwei Scharen, zwei verschiedene Richtungen, weil die Ebene zweidimensional ist

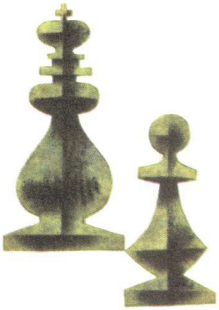
reicht, sagt man auch: Eine Linie hat die Dimension 1, sie ist eindimensional.
Wie muß man es nun bei einer Fläche anstellen, um einen beliebigen Punkt so kennzeichnen zu können, daß man ihn jederzeit wiederfindet? Die Schildbürger hätten sich zum Beispiel beim Versenken der Glocke zwei Angaben merken müssen: Erstens, in welcher Richtung vom Bootssteg aus, und zweitens, wie weit in dieser Richtung sie gefahren sind bis zu dem Platz, an dem die Glocke versenkt wurde. Sie hätten sich den Platz aber auch anders einprägen können, nämlich durch seine Entfernung von zwei markanten Punkten des Seeufers, etwa dem Bootssteg und einem großen Baum. Bei diesem Verfahren kann es allerdings zwei Punkte des Sees geben, auf die dieselben Entfernungsangaben zutreffen. Überlegen wir einmal selbst, warum das so ist und wie man sich hier helfen kann!

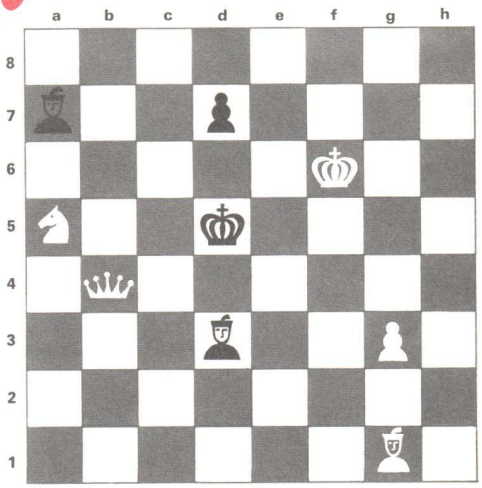
Gib auch die Punkte P_1 bis P_7 durch Zahlenpaare an! Suche diejenigen Punkte, die zu [3;5], [−8;−4], [9;−5], [1;−3], [−6;1], [0;0] gehören!



Nun lassen sich ja auf dem Wasser Entfernungen ohne besondere Hilfsmittel nur schwierig messen. Deshalb wollen wir uns ein bequemes Verfahren zur Festlegung eines beliebigen Punktes für den Fall deutlich machen, daß die Schildbürger ihre Glocke nicht im See versenken, sondern sie auf einem ihrer Äcker vergraben. Zwei sich kreuzende Feldwege, die den Acker begrenzen, wollen wir hier zu Hilfe nehmen. Wir merken uns, wie weit wir von der Kreuzung der beiden Feldwege bis zum Versteck zu gehen haben, erstens in der Richtung des einen Feldweges und zweitens in der Richtung des anderen Feldweges. Zwei Angaben brauchen wir also, um die Glocke wiederzufinden.
Nehmen wir an, das Versteck der Glocke sei gekennzeichnet durch das Zahlenpaar [90; 50]. Dabei muß allerdings verabredet werden, welcher der beiden Richtungen die erste Zahl des Paares entspricht und welcher die zweite. Will man auf diese Weise alle Punkte einer unbegrenzten Fläche wie der Ebene erfassen, so muß man auch hier negative Zahlen mit verwenden. Denn man will erreichen, daß nicht nur zu einem Punkt ein ganz bestimmtes Zahlenpaar gehört, sondern auch umgekehrt zu einem Zahlenpaar nur ein einziger Punkt. Vorher muß man freilich wieder einen Ursprung festlegen. In unserem Fall entspricht er der Wegkreuzung, und die sich kreuzenden Landstraßen entsprechen den Achsen eines „Koordinatensystems", mit dessen Hilfe wir uns in einer Ebene richtig und leicht orientieren können.
Man sagt übrigens Cartesisches Koordinatensystem zu Ehren des französischen Philosophen und Mathematikers René Descartes. Er nannte sich, der Mode seiner Zeit entsprechend, Cartesius.

René Descartes
1596 bis 1650

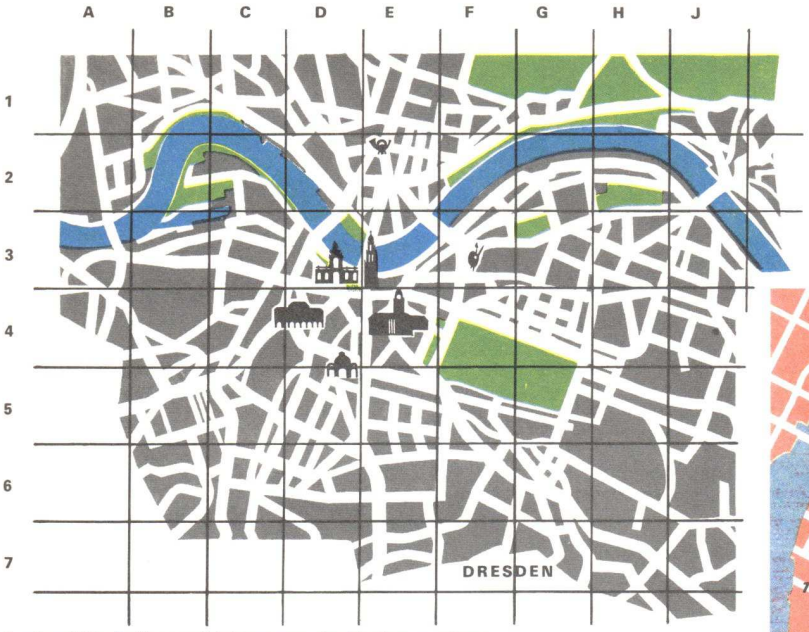


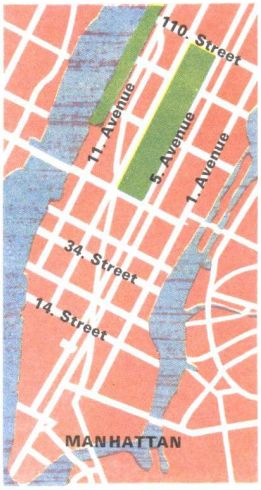


Die Achsen des Koordinatensystems stehen meist senkrecht aufeinander. Man spricht dann von einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Wenn man jeden Punkt einer Ebene durch eine Richtungsangabe und seine Entfernung von einem festen Punkt aus festlegt statt durch zwei Entfernungen, wie wir es gemacht haben, so führt das auf die sogenannten Polarkoordinaten; die Richtung wird dabei als Winkel angegeben.

Beim Schachbrett haben wir es ebenfalls mit einer Art Koordinatensystem zu tun, denn hier sind die 64 Felder auch durch zwei Angaben festgelegt: Durch einen der Buchstaben a, ..., h wird die Spalte, durch eine der Zahlen 1, ..., 8 wird die Zeile angegeben. Auf diese Weise kann man zum Beispiel mit d3 leicht den Standort eines Läufers angeben; und wenn dieser Läufer von d3 nach e4 zieht, so weiß man sofort, daß dieser Zug erlaubt ist und nicht weit führt, weil die beiden Felder d3 und e4 mit einer Ecke aneinanderstoßen, also dicht beieinanderliegen, benachbart sind. Zwei Menschen können auf diese Weise Schach spielen, ohne sich an einem Schachbrett gegenüberzusitzen; sie teilen sich die Züge nur telefonisch oder brieflich, etwa von Berlin nach Moskau, durch Buchstaben und Zahlen mit. Sie werden dann, jeder in seiner Stadt an einem eigenen Schachbrett, die entsprechenden Züge ausführen. Ja, gute Schachspieler brauchen das Brett gar nicht einmal; ihnen genügt es, wenn sie sich die Paare aus Buchstaben und Zahlen schriftlich festhalten.

Man könnte leicht auf den Gedanken kommen, beim Schachbrett mit einer Zahlenangabe auszukommen, indem man zum Beispiel die Felder zeilenweise so durchnumeriert, daß man mit der untersten Zeile beginnt und jeweils von links nach rechts jedem Feld fortlaufend





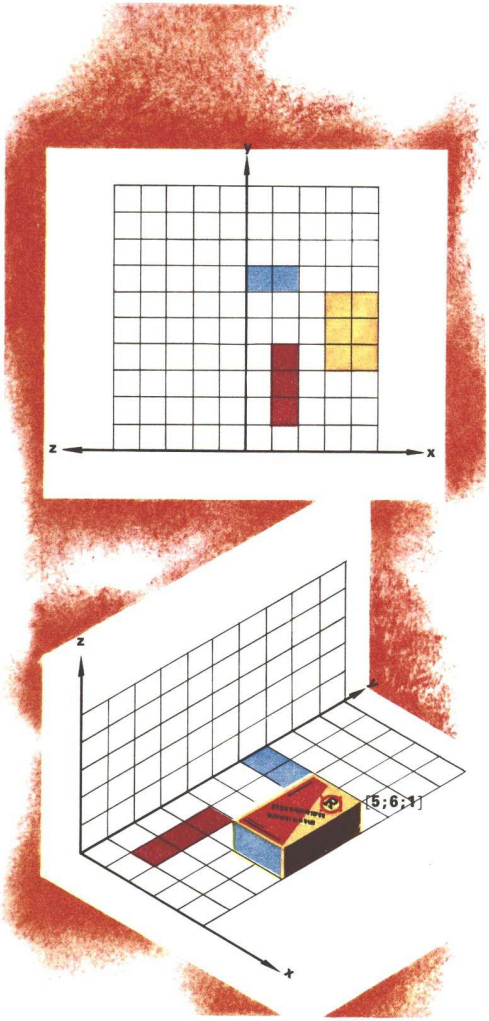
Auch auf Stadtplänen erleichtert man das Suchen von Straßen und Gebäuden durch eine Einteilung, die der beim Schachbrett entspricht
In manchen jüngeren Städten ist das Suchen sogar noch leichter. So tragen zum Beispiel im New-Yorker Stadtteil Manhattan viele Straßen Nummern statt Namen.
Der nebenstehende Stadtplanausschnitt zeigt nur einen Teil des Straßennetzes.

eine der Zahlen von 1 bis 64 zuordnet. Ein Zug von d3 nach e4 wäre dann ein Zug von 20 nach 29. Das ist natürlich möglich, aber doch recht unübersichtlich, weil zwei Felder, deren Nummern dichter beieinanderliegen als die zweier anderer, auf dem Schachbrett durchaus nicht auch immer weniger weit voneinander entfernt sind als jene. Man kann zum Beispiel dem Zug von 20 nach 29 nicht ansehen, daß die Felder mit einer Ecke aneinanderstoßen.

Nun ist das ja aber bei weitem nicht die einzige Möglichkeit des Durchnumerierens. So kann man ja auch mit einem der vier Mittelfelder beginnen und in Schneckenform weiterzählen – und es gibt noch Millionen anderer Möglichkeiten; ihre Gesamtzahl wird durch eine 90-stellige Zahl angegeben! Aber bei keiner von ihnen spiegeln sich die Abstände der Felder auf dem Schachbrett in den Abständen der zugeordneten Feldnummern wider.

Erst recht erlebt man einen Mißerfolg, wenn man jedem Punkt der Ebene eine einzige Zahl zuordnen will und verlangt, daß auch zu jeder Zahl nur ein bestimmter Punkt gehört und man aus den Zahlen erkennen kann, wie dicht die Punkte beieinanderliegen.

Wir wissen jetzt: Eine Gerade ist eindimensional, eine Ebene hat zwei Dimensionen, und es ist leicht einzusehen, daß man bei einem Punkt von der Dimension Null spricht. Wie aber stehtes mit dem Raum? Hier benötigt man drei Zahlen. Wenn man eine Adresse auf einem Paket genau angeben will, dann muß man zunächst durch Angabe der Straße und Hausnummer diejenige Stelle festlegen, bis zu der der Paketzusteller auf der Erdoberfläche fahren muß. Und dann wird noch eine Zahl für das Stockwerk angegeben, um dem Zusteller zu sagen, wie hoch er „in den Raum" hineinzusteigen hat, um das Paket an Ort und Stelle abzugeben.



Sehr gut können wir uns ein räumliches Koordinatensystem folgendermaßen klarmachen: Wir zeichnen auf einem Blatt Papier drei Skalen (x, y, z), die von einem Punkt ausgehen und von denen je zwei aufeinander senkrecht stehen, wenn wir das Blatt längs der y-Skale falten und die eine Hälfte hochstellen. Die Einheiten auf den Skalen wählen wir 1,7 cm lang und zeichnen vor dem Kniffen drei Rechtecke so ein, wie man es auf dem Bild sieht. Auf diese Rechtecke können wir – jedenfalls ungefähr – eine Streichholzschachtel stellen, jeweils mit einer anderen Seitenfläche. Wenn wir das getan haben, wird es für uns nicht schwierig sein, für die acht Eckpunkte der Schachtel jeweils die drei Zahlen zu bestimmen. Dabei wollen wir auch die Reihenfolge Breitenskale, Tiefenskale, Höhenskale einhalten; im ganzen wären das also 24 Grüppchen zu je drei Zahlen, sogenannte Zahlentripel. Für einen Punkt ist das Tripel hier schon angegeben.

Die Frage, welche Dimension denn der Raum habe, ist nun zu beantworten: Er ist dreidimensional. Wir brauchen auch drei Scharen von Parallelen, drei Richtungen, um jeden Punkt mit jedem verbinden zu können. Wie könnten diese Scharen zueinander liegen? Wie dürfen sie jedoch nicht liegen?

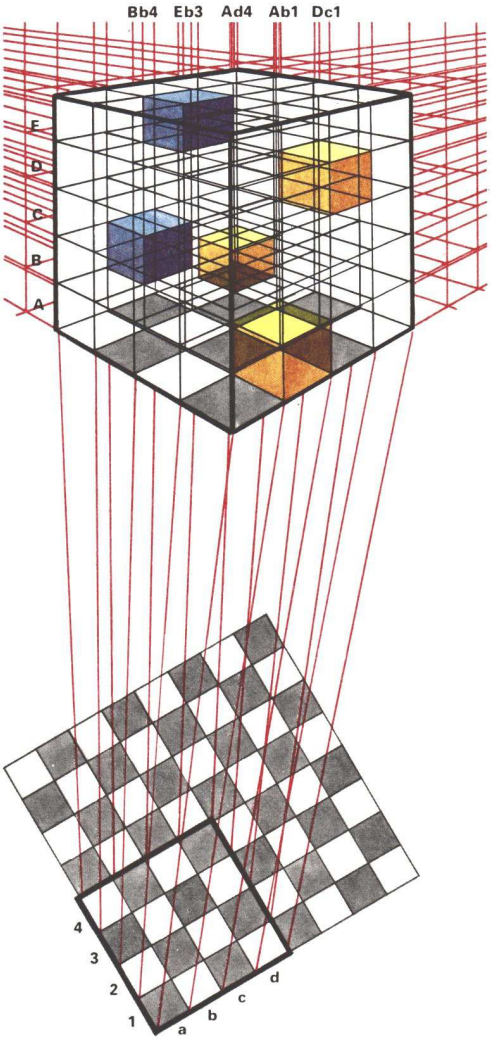
Wie ist das nun: Gibt's noch mehr Dimensionen?

Wir Menschen sind ja körperliche Wesen, sind also selbst dreidimensional. Wir können uns deshalb auch kaum vorstellen, daß etwas existiert, was mehr als drei Dimensionen besitzt. Zweidimensionale Lebewesen, die in einer Fläche leben müßten, würden auch uns Menschen nicht erkennen, da wir ja außerhalb ihrer Fläche im dreidimensionalen Raum leben. Andererseits könnte ein vierdimensionales Wesen aus jedem unserer verschlossenen Tresore Geld

entwenden, ohne daß der Tresor geöffnet wird. Seinen Diebstählen gegenüber wären wir genauso machtlos wie Menschen, die ihre Städte gegen Flugzeuge nur mit Stadtmauern verteidigen können. Wenn wir also auf unsere Vorstellungskraft, auf unser Anschauungsvermögen bauen, müssen wir sagen: Mehr als drei Dimensionen gibt es nicht!

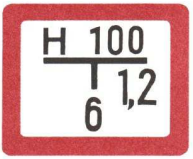
Nun wissen wir, daß man einen Punkt in der Ebene durch ein Zahlenpaar, im Raum durch ein Zahlentripel kennzeichnen kann. Und dadurch kann man Geometrie treiben ohne jedes Zeichnen, indem man einfach nur die Beziehungen zwischen den Zahlenpaaren untersucht, ob sich zwei Geraden schneiden oder nicht, ob ein Punkt auf einer Linie liegt oder nicht, ob eine Gerade senkrecht steht auf einer Ebene oder nicht, all das kann man durch die Zahlenpaare oder Zahlentripel beschreiben. Das entspricht dem Schachspielen ohne Brett, nur mit den Angaben „von d3 nach e4". Es hat vor einigen Jahren einen Verein gegeben, der sich mit dem Raumschach befaßte: Das Brett wurde ersetzt durch einen Würfel mit $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ „Feldern", also kleineren Würfeln. Ein Hantieren mit den Figuren in solch einem Kasten ist allerdings kaum möglich. Man muß daher in diesem Falle mit Buchstaben und Zahlen spielen, etwa „von Eb3 nach Db3" oder „von Ec4 nach Db3". (Wie liegen diese Felder zueinander?)

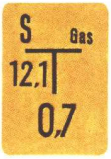
Genauso, wie man sich beim Schachspiel vom ebenen Brett löst, kann man auch bei der Geometrie die Beschränkung auf Zahlenpaare und Tripel aufgeben und mehr als drei Zahlen zusammenfassen. Bei vier Zahlen erhält man dann gewissermaßen Punkte eines vierdimensionalen Raumes, man erhält zum Beispiel vierdimensionale Würfel. Man braucht auch nicht bei vier Dimensionen aufzuhören. In diesem Sinne gibt es wirklich noch mehr als Breite, Tiefe



und Höhe, auch wenn wir es uns nicht vorstellen können und deshalb auch keinen neuen Namen dafür haben. Und solche „mehrdimensionalen Geometrien" sind nicht etwa Spielereien oder verrückte Ideen, sie sind vielmehr, unter anderem für die Physik, sehr notwendig. Freilich ist auch die Mathematik nicht davor sicher, von Scharlatanen mißbraucht zu werden, die von ihr und den Naturwissenschaften nichts verstehen und auch gar nichts verstehen wollen. Als solchen Leuten zu Ohren kam, daß sich die Mathematiker mit vier und mehr Dimensionen beschäftigten, sahen sie eine Möglichkeit, die „Geister" dort anzusiedeln, die sie Leichtgläubigen vorführen wollten. Denn sie konnten ja nun behaupten, es sei ganz verständlich, daß man die Geister nicht sähe – sie lebten eben in der vierten Dimension, in die wir nicht blicken können! Solchen Hokuspokus macht auch Wilhelm Busch lächerlich, wenn er von seinem verhinderten Dichter Balduin Bählamm schreibt:

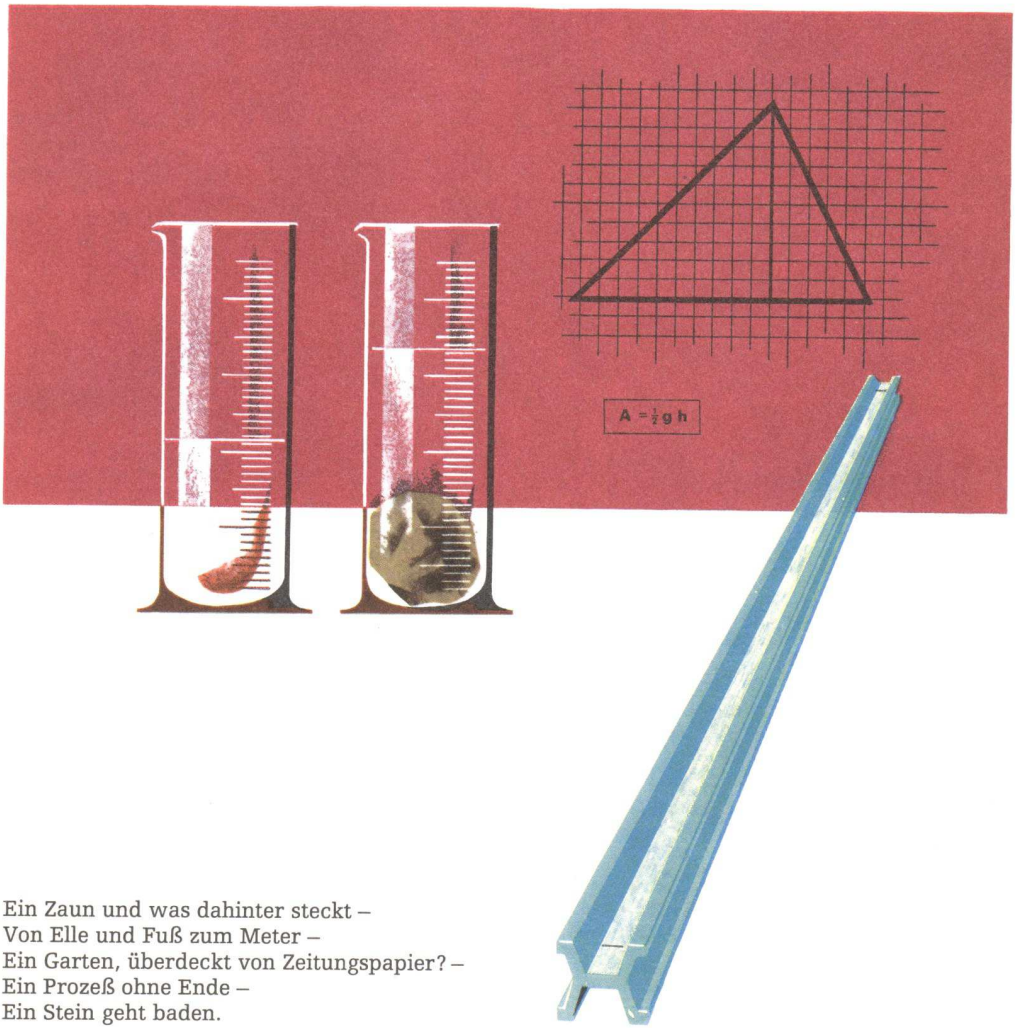
> Er zieht als freier Musensohn
> in die Poetendimension,
> die fünfte, da die vierte jetzt
> von Geistern ohnehin besetzt.





Hydranten, Hauptanschlüsse für Gas und Elektrizität muß man, auch bei schneebedeckter Straße, schnell finden können
Die Zahlen auf dem Hydrantenschild bedeuten:
Der Hydrant ist 6 m von der Hauswand entfernt, und zwar 1,2 m nach rechts, wenn man unmittelbar vor dem Schild steht und es anschaut. Stünde 1,2 auf der linken Seite des Schildes, so müßte man 1,2 m nach links gehen. Stünde weder rechts noch links eine Zahl, so läge der Hydrant unmittelbar vor dem Schild, im Abstand von 6 m. Die Angabe H 100 bezieht sich lediglich auf die Weite des Rohres, das angeschlossen werden kann

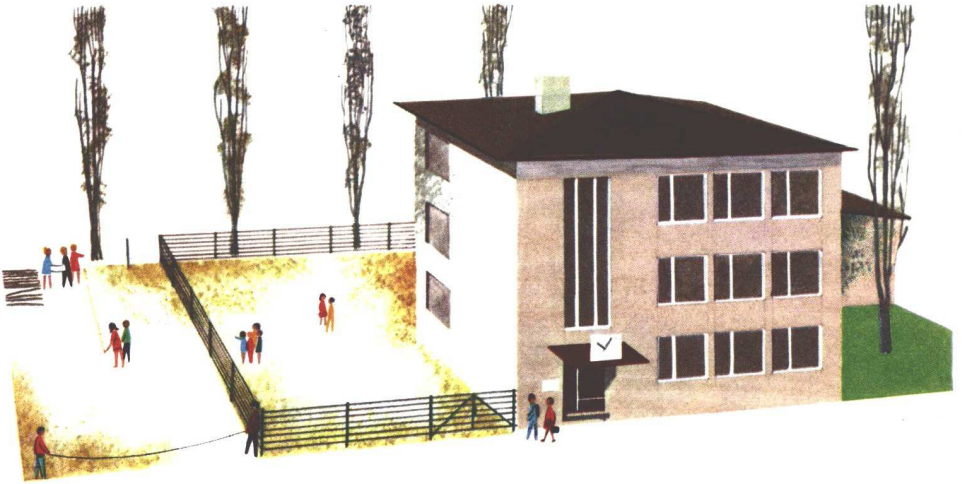
Messen ist gut – Berechnen ist besser

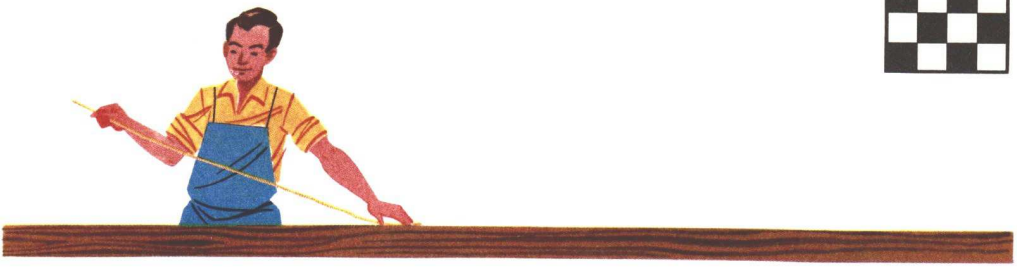


Ein Zaun und was dahinter steckt –
Von Elle und Fuß zum Meter –
Ein Garten, überdeckt von Zeitungspapier? –
Ein Prozeß ohne Ende –
Ein Stein geht baden.

In unserer Republik gibt es viele neue Schulen. Helle und freundliche Räume haben sie, mit vielen großen Fenstern. Die Lehrmittelräume sind modern eingerichtet und enthalten alles, was der Unterricht erfordert. Unser Bild zeigt so eine neue, schöne Schule, aber wenn wir genau hingucken, dann fehlt ihr doch etwas – nämlich der Schulgarten. Ein Stück Land, das neben dem Schulhof liegt und das die Form eines Rechtecks hat, ist dafür vorgesehen.

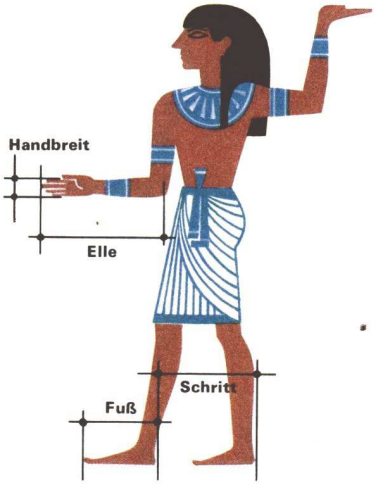
Die Schüler der 6. Klasse sind schon dabei, diesen Schulgarten einzurichten. Es gilt nicht nur, zu düngen und umzugraben, auch ein Zaun muß gesetzt werden. Dazu werden Pfosten und Latten gebraucht. Wieviel? Das hängt von der Länge des Zaunes ab. Also müssen die Schüler messen, und das tun sie mit dem 20-m-Meßband, das sie auch beim Weitsprung benutzen. Sie beginnen mit einer der beiden kürzeren Seiten des Landstückes: Der Anfang des Meßbandes wird dort angelegt, wo diese Seite am Zaun des Schulhofs beginnt, dann wird das Meßband ausgerollt, entlang der Seite gespannt und die Zahl abgelesen, die das Band am Ende der Zaunseite angibt: 18 m. Hätten sie mit dem Gliedermaßstab von 1 m Länge gemessen, Vater sagt noch Zollstock dazu, so hätten sie ihn gerade 18mal nacheinander auslegen können. Das alles ist gewiß ganz einfach; aber überlegen wir einmal, was wir eigentlich tun, wenn wir „messen". Wir vergleichen die Länge, in diesem Falle die der Zaunseite, mit einer anderen Länge, nicht mit der Länge des Meßbandes – das könnten wir auch tun –, sondern mit der Länge 1 m, die auf dem Meßband 20mal abgetragen ist. Und dabei stellen wir fest: Unsere kurze Zaunseite ist 18mal so lang wie diese „Einheitslänge" von 1 m. Dabei nennt man 18 die „Maßzahl" und Meter die „Maßeinheit". Bei der längeren Zaunseite kommen wir mit einer Meßbandlänge nicht aus. Wir müssen





es zweimal auslegen, und dann sind es noch einmal 2 m. Jetzt ist die Maßzahl also 42 bei gleicher Maßeinheit. Wir wissen jetzt also:
Eine Länge messen heißt:
Vergleichen mit einer Einheitslänge und feststellen, wie oft diese Einheitslänge in der zu messenden Länge enthalten ist.
Diese Einheitsstrecke muß nicht immer die Länge eines Meters, sondern kann auch eine andere Länge haben. Angenommen, wir besitzen kein Meßband, so können wir uns helfen, indem wir die Schritte zählen, die zum Abschreiten der Länge und der Breite gebraucht werden. Die Anzahl der Schritte ist die Maßzahl, die Schrittlänge ist die Maßeinheit. Ebenso mußten sich die Menschen in früheren Zeiten helfen: Die Finger, die Handspanne und der Fuß dienten als Einheitsmaß. Nun waren die Menschen aber nicht alle gleich groß, und da fielen die Maße oft recht unterschiedlich aus.

Später legten dann einzelne Städte und Länder eine Durchschnittsfußlänge oder -elle für ihren Bereich fest, und jedermann konnte sein eigenes Maß daran kontrollieren. Diese Maße haben sich lange Zeit hindurch erhalten.
Schließlich wurde aber mit der Entwicklung von Handel und Verkehr eine Maßeinheit gebraucht, die überall anerkannt und gültig war. Damit sie nicht verlorengehen konnte, sollte sie sich in der Natur immer wieder finden lassen. Aus diesem Grunde wählte man den vierzigmillionsten Teil des Erdumfangs als Längeneinheit und nannte diese Länge ein „Meter". Es wurde ein Metallstab aus sehr widerstandsfähigem Material hergestellt, auf dem durch zwei Striche die Länge des Meters festgelegt wurde. Man nennt diesen Stab das Urmeter. Diese Maßeinheit wurde 1872 auch in Deutschland als amtliches Längenmaß eingeführt. Später, als es bessere und genauere Verfahren



Hier wird die Länge eines Bandes kontrolliert. Zwei Nägel an der Wand eines mittelalterlichen Hauses legen die Elle fest

gab, den Erdumfang zu messen, stellte man fest, daß das Urmeter nicht genau der vierzigmillionste Teil des Erdumfangs war, sondern daß es um 0,2 mm zu kurz war.

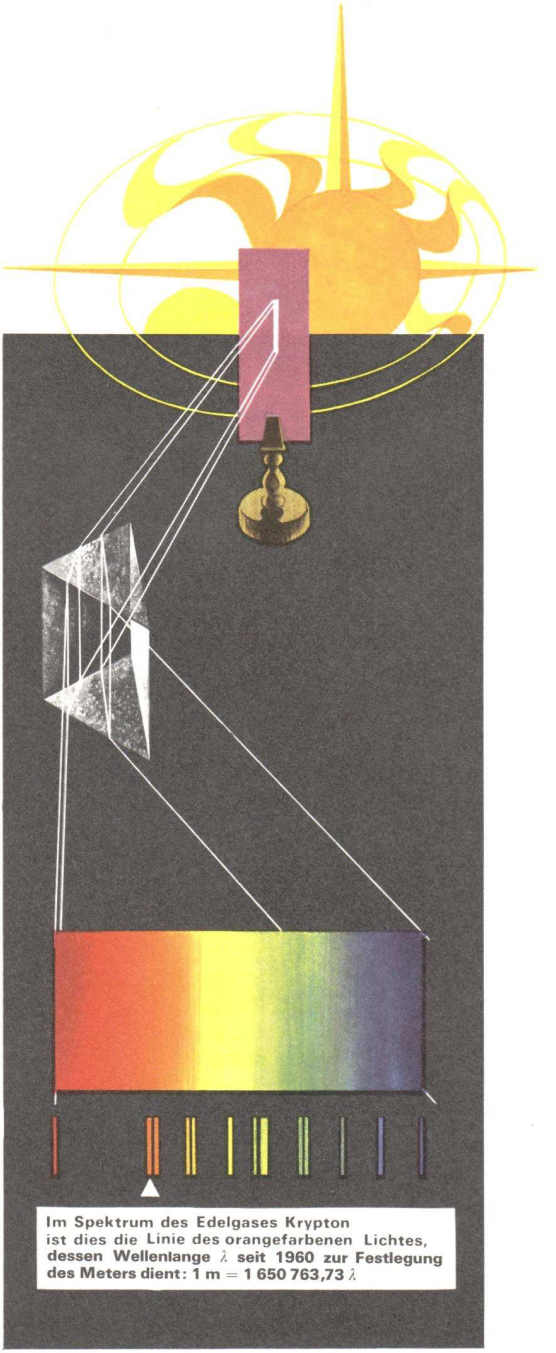
Wieviel Meter beträgt nun der Erdumfang?

Da sich aber auch dieser Metallstab noch ändert, zum Beispiel durch Temperaturschwankungen und Alterung des Materials bei langer Lagerung, hat man nach einem Maß gesucht, das beständiger ist.

Deshalb wurde das Urmeter mit der Wellenlänge eines ganz bestimmten orangenfarbigen Lichts ausgemessen und das Ergebnis 1960 auf der Internationalen Konferenz für Maß und Gewicht als Norm bestätigt.

Außer dem Meter verwenden wir noch andere Längeneinheiten, zum Beispiel das Kilometer (km) und das Millimeter (mm). Das geschieht eigentlich nur aus Bequemlichkeit, denn im Grunde genommen kämen wir mit einer einzigen Längeneinheit aus. Nur werden dann die Maßzahlen bei großen Längen, etwa der Entfernung Erde–Mond, sehr groß, und bei kleineren Längen, etwa dem Durchmesser einer Bleistiftmine, sehr klein.

Nun aber zurück zu dem Zaun, den die Schüler der 6. Klasse gewiß nicht in Millimetern messen werden. Da an einer der beiden längeren Seiten bereits der Zaun des Schulhofes steht, muß Material für wieviel Meter Zaunlänge beschafft werden? Die Pfähle sollen einen Abstand von 3 m haben, wieviel werden also benötigt? 26 Stück, denn $3 \cdot 26 = 78$. Wer diese Lösung findet, hat nicht gründlich genug gedacht: Zwar hat der Zaun von 78 m Länge 26 Teilstücke von 3 m Länge. Setzen wir nun an den Anfang jedes dieser 26 Stücke einen Pfahl, so kommen wir damit bis an den Anfang des letzten Stücks, und für dessen Ende brauchen wir noch einen 27. Pfahl! Allerdings kann es auch passieren,



Im Spektrum des Edelgases Krypton ist dies die Linie des orangefarbenen Lichtes, dessen Wellenlänge λ seit 1960 zur Festlegung des Meters dient: 1 m = 1 650 763,73 λ

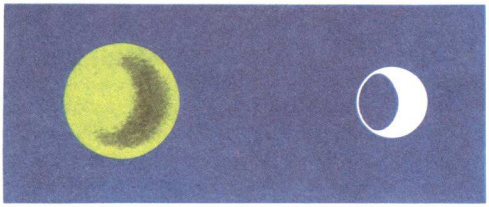
1 Lichtjahr	=	9 460 500 000 000 km
1 km	=	1000 m
1 m	=	10 dm
1 dm	=	10 cm
1 cm	=	10 mm

Dicke eines Menschenhaares: zwischen 0,07 mm und 0,17 mm

BERLIN

MOSKAU

Entfernung Berlin–Moskau: 1 600 km



Entfernung Erde–Mond:

kleinster Wert	363 500 km
größter Wert	406 000 km

daß wir mit 25 Pfählen auskommen, dann nämlich, wenn wir Anfang und Ende des Zauns an der bereits vorhandenen Umzäunung des Schulhofs festmachen können.

Nun gleich drei Fragen, ehe wir den Zaun verlassen:

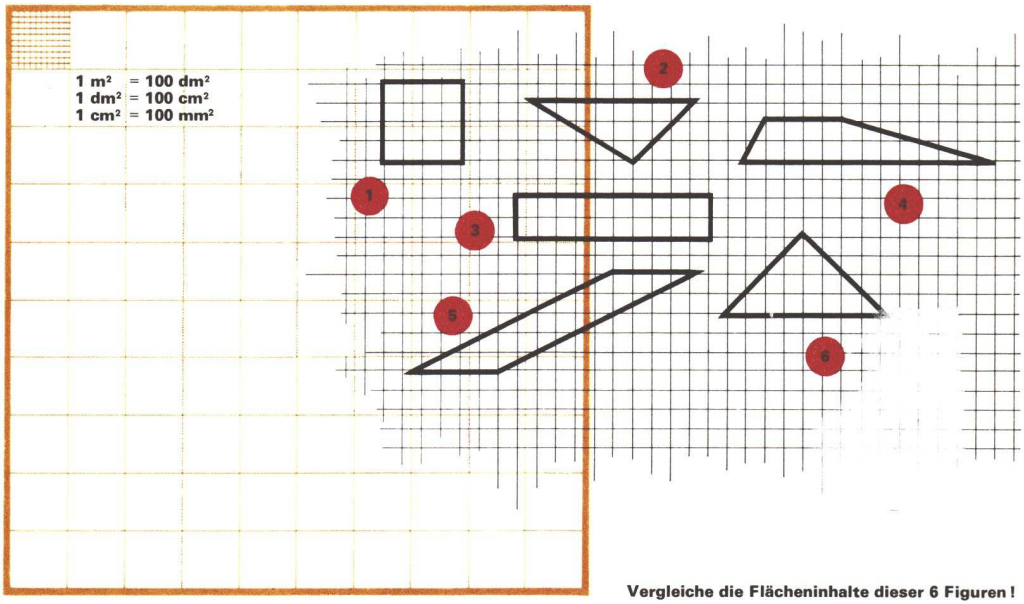
a) Wieviel Pfähle braucht man, wenn der Schulhofzaun noch nicht vorhanden ist?
b) In welchem Abstand muß man die Pfähle setzen, wenn für alle vier Seiten 50 Pfähle zur Verfügung stehen?
c) Wie wäre die Maßzahl für den Umfang des Schulgartens, wenn unsere Vorfahren die Einheitslänge so lang gemacht hätten, wie ein Blatt vom Papierformat A 4 hoch ist?

Eine Bodenprobe hat ergeben, daß der Schulgarten viel Düngekalk braucht. Wieviel, das hängt davon ab, wie der Boden beschaffen ist, aber auch davon, wie groß der Garten ist! Da nützt es nicht viel, wenn wir seinen Umfang wissen; denn schließlich streuen wir den Kalk nicht am Zaun entlang, sondern wir werfen ihn auf die ganze Fläche.

Zum Messen einer Fläche brauchen wir eine Flächeneinheit; denn hier gilt nun natürlich:

Fläche messen – Vergleichen mit einer Einheitsfläche. Die Längeneinheit 1 m können wir für einen solchen Vergleich nicht gebrauchen; denn wollen wir zwei geometrische Gebilde in ihrer Größe vergleichen, so müssen sie von gleicher Dimension sein. Wie groß diese Einheitsfläche (oder auch Flächeneinheit) ist, das ist – wie bei der Längeneinheit – ganz beliebig, ja sogar die Form dieser Einheitsfläche ist an sich willkürlich. Es hat aber viele Vorteile, wenn die Einheitsfläche ein Quadrat ist, dessen Seite so lang wie die Längeneinheit ist. Welche Vorteile, das wollen wir einmal überlegen!

Haben wir den Umfang des Gartens in Metern gemessen, so werden wir seine Fläche mit

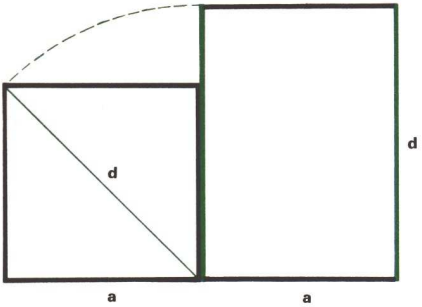


Vergleiche die Flächeninhalte dieser 6 Figuren!

einem Quadrat vergleichen, dessen Seite 1 m lang ist, mit einem sogenannten Meterquadrat. Um nun unsere Gartenfläche zu messen, müßten wir uns soviel Meterquadrate herstellen, etwa aus Zeitungspapier, daß wir den ganzen Garten damit bedecken können, und diese dann zählen; oder wir müßten mit ein und demselben Meterquadrat die Gartenfläche nacheinander auslegen und dabei zählen, wie oft wir es hinlegen konnten. In unserem Fall geht das 756mal, der Garten hat also einen Flächeninhalt von 756 (Maßzahl) m² (Maßeinheit). Sollen kleinere Rechteckflächen gemessen werden, etwa die eines Beetes oder einer Tischplatte, so braucht man im allgemeinen auch kleinere Flächeneinheiten, weil das Auslegen sonst nicht gelingt: Entweder bleibt ein Streifen unausgelegt, oder die Einheitsflächen stehen über. Dazu benutzt man Dezimeterquadrate, Zentimeterquadrate und so weiter, jedenfalls Quadrate, deren Seitenlänge eine Einheitslänge ist. Wichtig ist, daß diese Einheitslänge sowohl in der einen wie in der anderen Rechteckseite genau aufgeht, sich abtragen läßt, ohne daß ein Stück übersteht.

Ist es nun so, daß sich eine solche Einheitslänge immer finden läßt, gleichgültig, welche Form das Rechteck hat, wenn man nur die Einheitslänge genügend klein macht? Nein, das ist nicht der Fall! Auf Seite 63 oben sehen wir ein Rechteck mit den Seiten a und d; dabei sind a und d aus dem danebenstehenden Quadrat entnommen. Wie lang nun auch a sei, es gibt kein Einheitsquadrat, mit dem sich das Rechteck ganz auslegen läßt. Das läßt sich auf verschiedene Arten zeigen; eine davon ist auf Seite 63 angedeutet. Wohl aber kann man den nicht ausgelegten Streifen durch genügend kleine Quadrate so klein machen, wie man will.

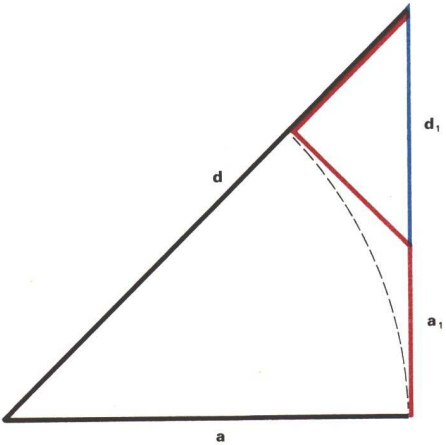
Nicht nur im Schulgarten müssen Flächen – ob sie Rechteckform haben oder nicht – in

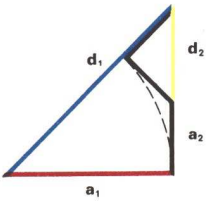


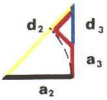
Die Länge e eines Einheitsquadrates müßte in a und d aufgehen: $a = p\,e$ $\quad d = q\,e$
(p und q natürliche Zahlen; $p < q < 2p$)
Dann müßten aber auch a_1 und d_1 Vielfache von e sein:

$$a_1 = d - a = qe - pe = (q-p)e = p_1 e \qquad d_1 = a - a_1 = pe - (qe - pe) = (2p - q)\,e = q_1 e$$

(p_1 und q_1 natürliche Zahlen)







Ebenso ergibt sich
$a_2 = p_2 e \qquad d_2 = q_2 e$
$a_3 = p_3 e \qquad d_3 = q_3 e$
... ...

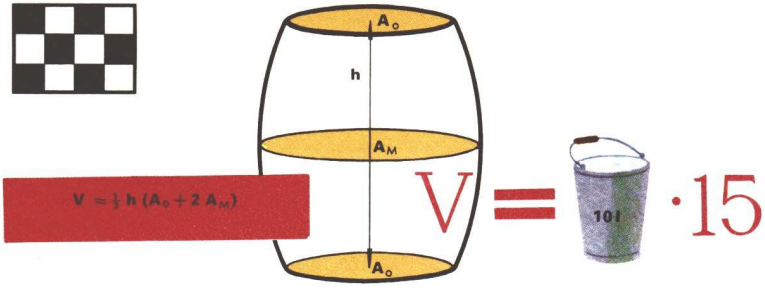
Dieser Prozeß nimmt kein Ende, weil die a_i als Katheten rechtwinkliger Dreiecke stets kleiner als die Hypotenusen d_i sind. Deshalb erhalten wir zwei absteigende unendliche Folgen:

$p > p_1 > p_2 > p_3 \ldots$
$q > q_1 > q_2 > q_3 \ldots$

Das ist aber für natürliche Zahlen p und q nicht möglich, weil es eine kleinste natürliche Zahl gibt. Also kann es eine solche Strecke e als Seite eines Einheitsquadrates nicht geben

ihrer Größe bestimmt werden: Beim Belegen eines Fußbodens, beim Verputzen eines Hauses, beim Stoffkauf für ein Kleid – überall steht man vor dieser Aufgabe. Aber niemand hantiert bei all diesen Gelegenheiten mit Einheitsquadraten oder anderen Flächen. Höchstens Meßband, Gliedermaßstab oder einen Meterstab (im Volksmund „Elle"; amtliche Bezeichnung „Langwarenmeßstab") sieht man. Tatsächlich kann man mit diesen Längenmeßgeräten, die sich ja viel handlicher als Quadrate gebrauchen lassen, auch Flächen bestimmen. Eins muß man aber dafür in Kauf nehmen: Man muß rechnen. Die Schüler der 6. Klasse können das. Sie haben ihren Schulgarten auch nicht mit Meterquadraten aus Zeitungspapier ausgelegt, sondern sie haben gerechnet: $18 \cdot 42 = 756$. Die beiden Maßzahlen der Rechteckseiten ergeben bei gleicher Benennung als Produkt die Maßzahl der Flächengröße. Die Flächeneinheit entspricht dann der Längeneinheit wie hier das Quadratmeter dem Meter. Und wie das Rechteck, so kann man auch viele andere Flächen nach gewissen Formeln berechnen. Wie gut ist es, daß wir die Formeln haben und daß wir damit rechnen können. Wir sollten einmal nachprüfen, ob es stimmt, daß jede Flächenmaßzahl aus dem Produkt von zwei Längenmaßzahlen entsteht.

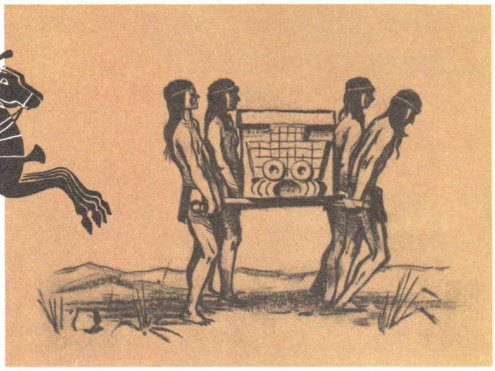
Bei Körpern und deren Rauminhalt ist es ganz entsprechend. Wenn bei dem Schulneubau 3200 m^3 Erdreich ausgehoben werden mußten, so enthält auch diese Angabe wieder eine Maßzahl und eine Maßeinheit. Auch hier wird wieder verglichen, und zwar der ganze Erdhaufen mit einem Würfel, dessen Kante die Einheitslänge 1 m hat. Wollten wir den Rauminhalt eines Körpers messen, so müßten wir ihn mit Einheitswürfeln geeigneter Größe auslegen. Das wäre nicht nur noch umständlicher als bei Flächen, sondern in vielen Fällen sogar un-

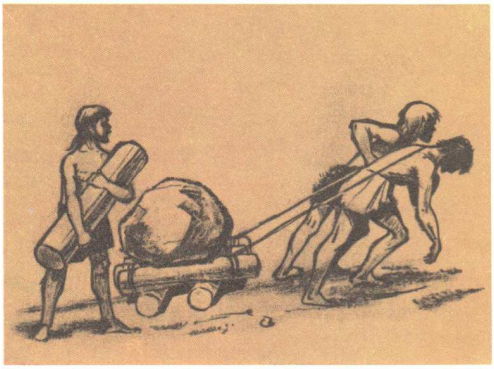


möglich. Zum Glück können wir auch hier berechnen, wenn wir vorher drei geeignete Längen gemessen haben.
Hier sollten wir ebenfalls, jeder für sich, wieder überprüfen, ob jede errechnete Maßzahl eines Rauminhalts aus dem Produkt von drei Längenmaßzahlen entsteht.
Nun ist aber das Berechnen keineswegs immer leichter, und deshalb kommt auch das Messen oft genug zu seinem Recht: Wenn man das Volumen eines Steins bestimmen will, so kann man ihn in einen Meßzylinder mit Wasser eintauchen und ablesen, um wieviel das Wasser steigt.
Im Schulgarten haben wir es oftmals mit Flüssigkeiten zu tun, nicht nur beim Sprengen und Gießen. Es steht schon ein Faß bereit, in dem die Spritzlösung für die Schädlingsbekämpfung hergestellt werden soll. Um die richtige Konzentration der Lösung zu bekommen, muß man den Rauminhalt des Fasses kennen. Dazu wird man es „auseimern": Es faßt 15 Eimer. Und wenn der betreffende Meßeimer 12 Liter aufnimmt, so enthält das Faß 180 Liter. Man benutzt ja bei Flüssigkeiten die Maßeinheit „Liter"; dabei kann man praktisch 1 Liter und 1 dm^3 gleichsetzen. Sicher hätte das Ausmessen mit einer Milchkanne sehr viel länger gedauert, möglich wäre es aber auch gewesen.
In modernen Molkereien benutzt man Flüssigkeitszähler.
An Tankstellen kann man solche Zähler ebenfalls sehen.
Kurzum:
Jedes Messen ist Vergleichen mit einer Einheit gleicher Dimension.
Berechnen ist meist leichter als Messen, auch wenn es manchmal schwerfällt.

Räder rollen – warum eigentlich?

Etwas zur Geschichte des Rades –
Von Figuren, die keine Kreise und doch überall gleich breit sind –
Warum die Modelleisenbahn manchmal von den Schienen springt –
Von Säbeln, Schrauben und Korkenziehern.

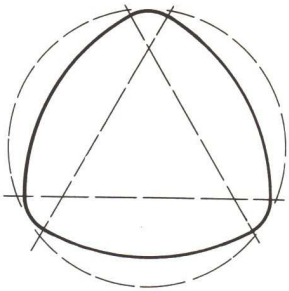


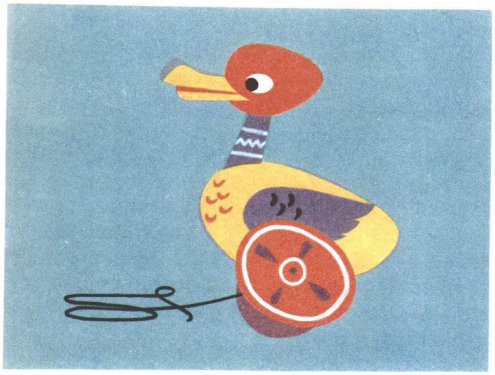


Räder rollen – das ist doch eigentlich selbstverständlich, nicht wahr? Man denkt dabei an die Räder eines Fahrrades, eines Autos oder einer Diesellok, mancher sicher auch an Rollschuhräder. Aber nicht nur bei Fahrzeugen findet man Räder: auch bei Dreh- und Bohrmaschinen, bei Turbinen, Kreissägen und an Mutters Nähmaschine – kurzum überall dort, wo Drehbewegungen erforderlich sind. Diese Räder könnten ebenfalls rollen, wenn man sie aus den Maschinen ausbauen würde.

Heute können wir uns eine Welt ohne Räder kaum vorstellen, und doch gab es Zeiten, in denen das Rad den Menschen unbekannt war. Das indianische Volk der Mayas, das in Mittelamerika lebte und auf einer sehr hohen Kulturstufe stand, kannte weder Rad noch Wagen, als seine Kultur vor etwa 500 Jahren von den spanischen Eroberern zerstört wurde. Die Maya-Arbeiter mußten riesige Steinblöcke zum Bau von gewaltigen und kunstvollen Tempeln nur mit eigener Muskelkraft, ohne Wagen und ohne Lasttier, heranschleppen.

Wann und wo ist nun aber das Rad erfunden worden? Altertumsforscher vermuten, daß vor mehr als 6000 Jahren die Sumerer in Mesopotamien am Persischen Golf (heute Republik Irak) die ersten Räder besaßen. Vorläufer der Räder waren sicherlich runde Baumstämme, die als Walzen benutzt wurden. Die ersten Räder waren Scheibenräder, annähernd kreisförmige Scheiben eines Baumstammes, oder man hatte sie, vor allem bei größeren Rädern, aus einem oder mehreren dicken Brettern zu einer Kreisscheibe zugeschnitten und zusammengefügt. Durchschnittlich betrug der Raddurchmesser etwa 50 bis 60 cm. Die Wagen waren noch schwerfällig und kaum zur Beförderung größerer Lasten fähig. Dennoch fanden Lastkarren und Kriegswagen mit Scheiben-

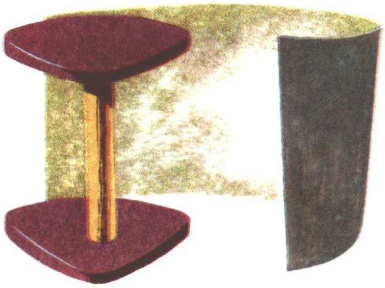




rädern und später auch mit Reifen aus Leder oder Eisen, mit Speichen und Naben unter den verschiedensten Völkern schnelle Verbreitung. Etwa um die gleiche Zeit kam die sich schnell drehende Töpferscheibe auf, die ja auf dem gleichen technischen Prinzip wie das Rad beruht. Mit ihr konnten die Töpfer Tongefäße in größerer Anzahl und viel gleichmäßiger als früher mit den Händen allein herstellen. Noch heute arbeitet man in den Porzellanmanufakturen mit der Töpferscheibe.

Alle diese Räder und Scheiben haben etwas gemeinsam: Sie sind kreisrund. Könnten die Räder aber nicht auch eine andere Form haben? Rollen soll ein Rad, denn die Reibung ist ja bei dieser Bewegung am geringsten. Ein „ovales Rad" ließe sich jedoch ebenfalls rollen. Die Spielzeugente wackelt lustig hin und her, wenn sie gezogen wird – mit zwei Scheibenrädern, die nicht kreisförmig sind. Natürlich rollen solche Räder viel ungleichmäßiger und viel schwerfälliger als kreisrunde. Wir können uns das an einem kleinen Versuch verdeutlichen. Legt man unter ein Buch zwei kreisrunde Bleistifte, so läßt sich das Buch leicht hin und her bewegen, so als ob es Räder bekommen hätte. Legte man jedoch ovale Zimmermannsbleistifte unter das Buch, so könnte man das Ganze mit etwas Geschick zum Rollen bringen, allerdings würde sich das Buch fortwährend heben und senken. Der Kreis hat nämlich eine wichtige Eigenschaft: Die Fläche, die er einschließt, ist überall „gleich dick" oder auch „gleich breit".

Ist nun der Kreis die einzige Figur, die überall „gleich breit" ist? Es gibt auch Figuren, die keine Kreise sind und doch diese Eigenschaft haben: zum Beispiel das oben abgebildete gleichmäßige Kreisbogendreieck. Von einem Kreisbogen bis zur gegenüberliegenden Ecke



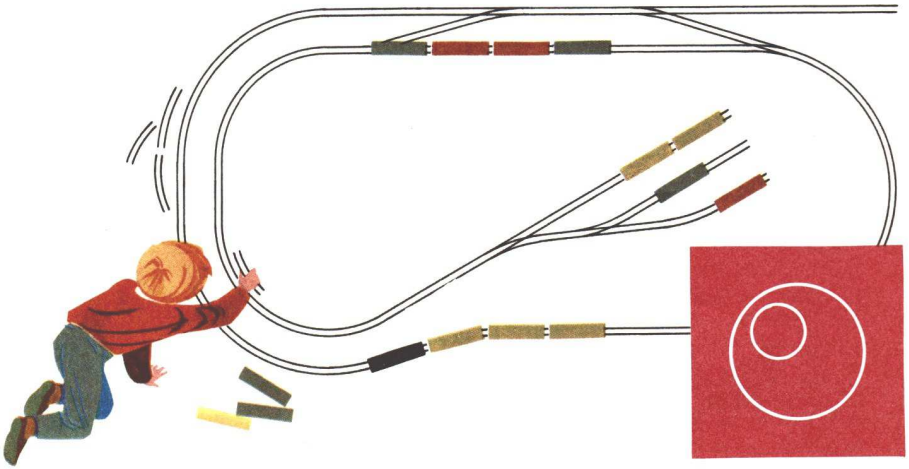
ist es immer gleich weit. Fertigen wir uns mehrere solcher Kreisbogendreiecke aus starker Pappe an und kleben sie aufeinander, so erhalten wir eine Walze. Man kann sich solche Walzen auch so herstellen, wie es die Abbildung zeigt. Auf ihnen läßt sich ein kleines Brettchen hin und her rollen, ohne daß es sich hebt oder senkt, genau wie bei Walzen mit kreisförmigem Querschnitt. Die Bewegung ist nur etwas ungleichmäßig. Und das wäre nicht einmal die einzige Möglichkeit für den Querschnitt einer solchen Walze! Als Formen für Räder lassen sich diese Figuren allerdings nicht verwenden, da es in ihnen keinen Punkt gibt, der von allen Punkten auf dem Rand gleich weit entfernt ist, durch den also die Achse des Rades verlaufen könnte.

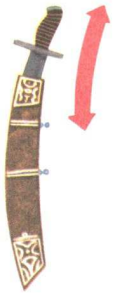
Der Kreis empfiehlt sich als Form des Rades aber nicht nur, weil er überall gleich breit ist. Auch die gleichmäßige Krümmung des Kreises ist bedeutungsvoll, denn gerade sie ermöglicht ein gleichmäßiges Rollen.

Wer eine elektrische Eisenbahn hat, der hat sicher schon festgestellt, was es mit der Krümmung auf sich hat.

Wir haben uns eine ganz übliche Streckenführung gebaut und mußten erleben, daß uns die Lok immer wieder aus den Schienen gesprungen ist. Haben wir sie etwa zu schnell in die Kurve fahren lassen? Als wir kürzlich an einer kreisförmigen Strecke nur aus gebogenen Gleisstücken spielten, passierte das nicht, obwohl die Lok damals genauso schnell fuhr. Warum ist sie denn da nie entgleist? Bei geradliniger Streckenführung, ja, da können wir das verstehen. Aber bei einem Rundkurs? Kurve ist schließlich Kurve.

Aber das ist eben ein Irrtum. Bei dem Rundkurs hatten wir ausschließlich gebogene Gleisstücke benutzt und dabei einen Schienenkreis





erhalten. Und bei nur kreisförmiger Streckenführung sind Entgleisungen fast so selten wie auf geradlinigen Strecken, eben deshalb, weil ein Kreis überall die gleiche Krümmung hat. Freilich: Unterscheiden sich zwei Kreise in ihren Radien, so haben sie verschiedene Krümmungen. Je größer der Radius des Kreises ist, desto geringer ist die Krümmung.

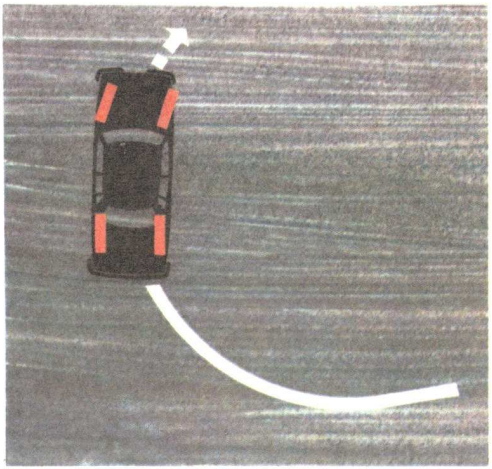
Daß die Krümmung eines bestimmten Kreises mit einem bestimmten Radius überall gleich ist, davon kann man sich leicht überzeugen. Legt man ein gebogenes Gleisstück von dem Schienensatz, aus dem unser Rundkurs aufgebaut wurde, an irgendeiner Stelle auf die Schienen dieses Rundkurses, so stellt man fest, daß es stets genau auf die darunterliegenden Schienen paßt.

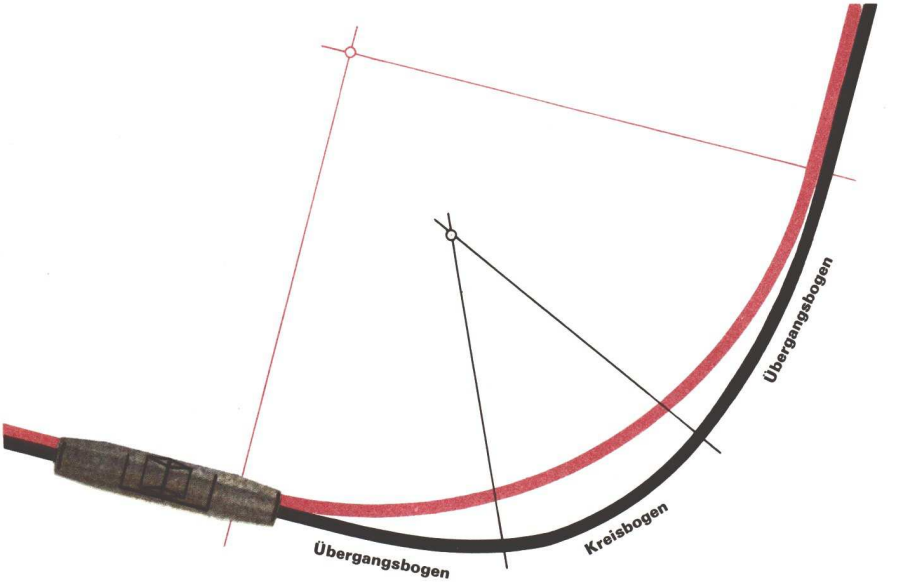
So etwas ist außer mit kreisförmig gebogenen Gleisstücken nur noch mit geradlinigen möglich. Wenn man ein gerades Gleisstück auf eine geradlinige Streckenführung legt, so paßt es ebenfalls überall. Auch die Gerade hat nämlich die Eigenschaft, daß ihre Krümmung sich nirgends ändert. Da man im allgemeinen eine Gerade als etwas Ungekrümmtes ansieht, sagt man auch: Eine Gerade hat überall die Krümmung Null.

Kreis und Gerade sind in der Ebene die einzigen Kurven mit fester Krümmung.

Ein Kraftfahrer, der die Stellung des Lenkrades seines Autos nicht verändert, fährt entweder ständig geradeaus (auf geradliniger Strecke) oder aber annähernd im Kreise, je nachdem, in welche Richtung die Vorderräder jeweils eingeschlagen sind.

Geht derselbe Kraftfahrer bei einer seiner Fahrten, zum Beispiel auf der Autobahn, in die Kurve, so dreht er sein Lenkrad recht langsam so lange, bis die Räder die richtige Stellung haben. Dadurch verändert er die Krümmung seines



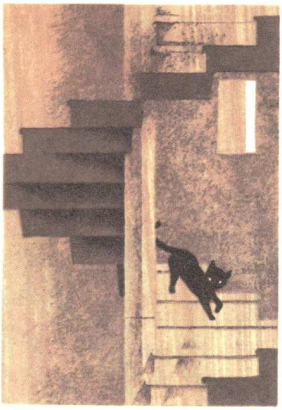


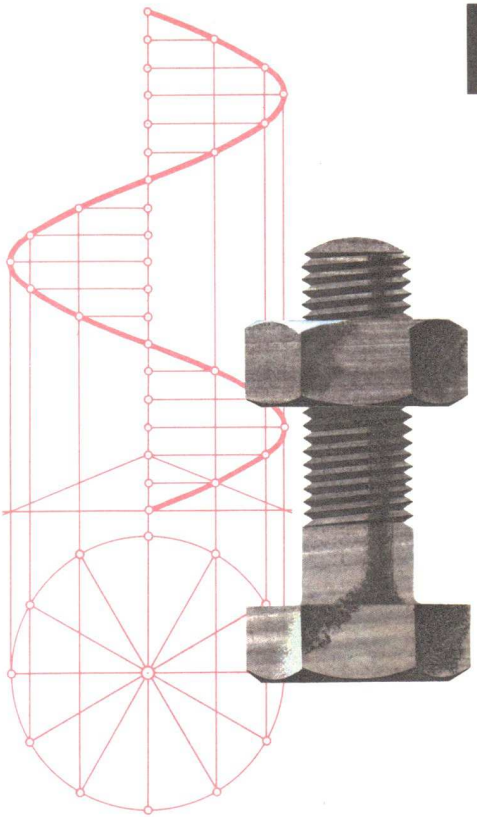
Fahrweges nur allmählich. Was würde wohl geschehen, risse er das Lenkrad zu schnell herum? Durch die zu starke Änderung der Krümmung des Fahrweges würde sich am Auto ein Krümmungsruck bemerkbar machen. Und dieser Krümmungsruck würde mit dafür sorgen, daß das Auto ins Schleudern geriete und sich vielleicht sogar überschlüge. Kein vernünftiger Autofahrer aber geht so in die Kurve, und deshalb kann man einen solchen Krümmungsruck beim Auto im allgemeinen nicht beobachten.

Nun hat es ein Autofahrer verhältnismäßig leicht, sein Fahrzeug ist nicht an Schienen gebunden. Aber in Straßenbahnen, vor allem auf älteren Strecken, spürt man diesen Krümmungsruck sehr deutlich: Die Wagen werden förmlich in die Kurve hineingerissen. Oft ist dabei schon ein Wagen entgleist – ganz abgesehen von dem gräßlichen Gequietsche. Um den Krümmungsruck zu vermindern, werden heutzutage vor den Kreiskurven Übergangsbogen gelegt, bei denen sich die Krümmung von Stück zu Stück nur sehr wenig ändert. Solche Übergangsbogen sind bei der Eisenbahn schon seit jeher üblich.

Nun läßt sich die Frage, warum die Lok unserer Spielzeugeisenbahn bei nur kreisförmiger oder nur geradliniger Streckenführung nicht so schnell entgleist, leicht beantworten. Es gibt hier keinen Krümmungsruck, der die Lok umwerfen könnte. Grenzen dagegen ein geradliniges und ein gebogenes Gleisstück aneinander, so ist durch den Krümmungsruck die Gefahr einer Entgleisung an dieser Stelle sehr groß. Noch größer ist sie an der Verbindungsstelle zweier gebogener Gleisstücke, die eine S-Kurve bilden.

Die Krümmung ist aber nicht nur in dem geschilderten Zusammenhang von Bedeutung. Sie



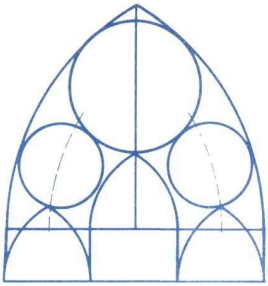


muß auch bei vielen anderen Dingen berücksichtigt werden. Sogar bei Säbeln ist die Krümmung wichtig. Damit Säbel in einer Scheide getragen werden können, müssen sie entweder gerade sein, wie zum Beispiel Ehrendolche, oder aber kreisbogenförmig wie die leicht gekrümmten Säbel, die Offiziere bei Paraden tragen. Noch viel stärker gekrümmt sind die bekannten Türkensäbel.

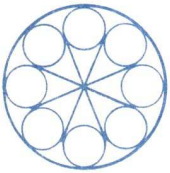
Sind Kreis und Gerade nun tatsächlich die einzigen Linien, die überall gleich gekrümmt sind, die man also in sich verschieben kann? Es gibt noch eine solche Kurve! Sie läßt sich allerdings auf einem Blatt Papier nicht zeichnen. Es ist nämlich eine räumliche Kurve: die Schraubenlinie. Auch diese Kurve läßt sich in sich verschieben. An einer Schraube können wir sie sehen. Auch ein Korkenzieher an einem Taschenmesser hat eine solche Form. Dreht man ihn in einen Flaschenkorken hinein, so folgt der ganze Korkenzieher dem Weg, den seine Spitze bahnt. Und er gleitet auch auf dem gleichen Wege wieder heraus, so daß der Korken nur wenig beschädigt wird.

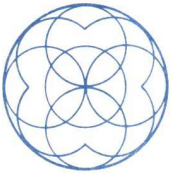
So ist das also mit der Krümmung. Als Form für ein Rad kommt nur eine Kurve in Frage, die sowohl überall gleiche Krümmung als auch überall gleiche Breite hat. Daher müssen Räder also schon kreisförmig sein, wenn sie gut rollen sollen.

Neben der praktischen Verwendung hatte das Rad vor Zeiten auch noch symbolische Bedeutung. Da die Menschen die Sonne als eine am Himmel dahinrollende Scheibe ansahen und die Räder der ältesten Wagen volle Scheiben ohne Speichen waren, wurde das Rad bei vielen Völkern ein Symbol für die Sonne oder auch für den Sonnengott. Später, als die Wagenräder Speichen hatten, wurden vor allem vierspeichige, aber auch sechs- und achtspei-

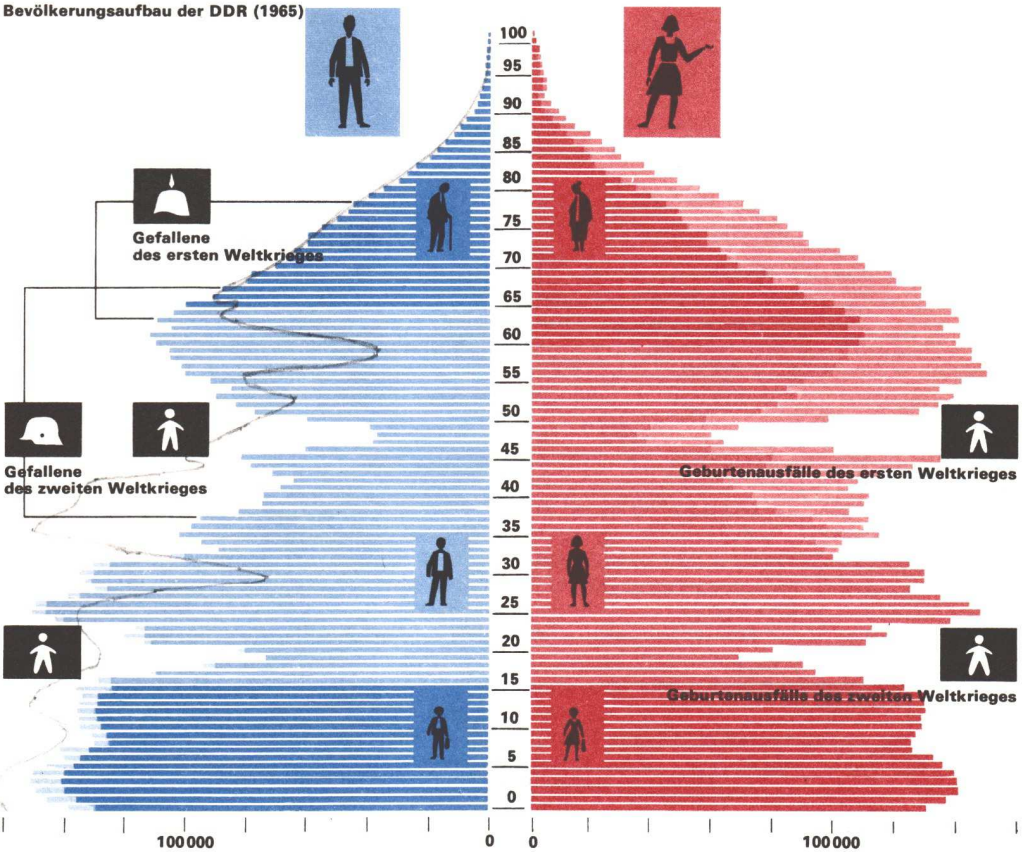


chige Räder Sonnensymbole. Vor vielen Jahrhunderten tanzten in zahlreichen Gegenden unserer Heimat die Gäste bei Hochzeitsfesten um ein brennendes altes Wagenrad, um den Sonnengott froh zu stimmen. Noch bis ins vorige Jahrhundert hatte sich dieser Brauch in einigen Dörfern rings um Berlin erhalten. Bei Sonnenwendfeiern wurde eine kreisförmige Holzscheibe, durch deren Mitte man einen Stock steckte, angezündet und dann so schnell im Kreis geschwungen, daß sie sich vom Stock löste und, sich drehend, hoch in die Luft flog.
Für Ornamente, für Schmuck und Verzierungen benutzten die Menschen seit alters Kreise oder Räder. Viele mittelalterliche Kirchen haben große runde Fenster. Ihre Ähnlichkeit mit Rädern ist so offensichtlich, daß sie den Namen „Radfenster" erhalten haben. Viele schöne Verzierungen kann man allein durch Kreise und Teile von Kreisen zeichnen! Wer Freude daran hat, versuche einmal selbst, solche Verzierungen zu entwerfen.

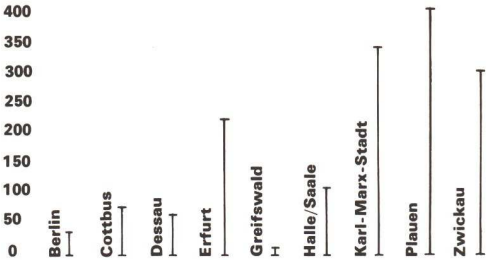


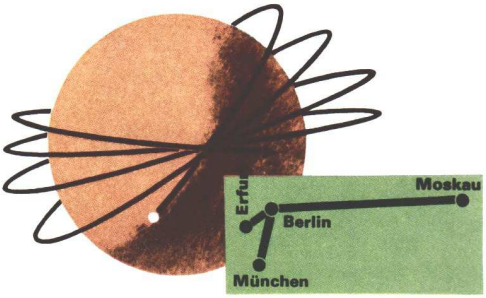


Zahlen zum Anschauen



Zahlen, zur besseren Sichtbarkeit versteckt –
Der Fehlerteufel schleicht sich ein –
Schaubilder als Helfer des Arztes –
Was eine Volkszählung ergibt –
Eine schiefe Windrose.



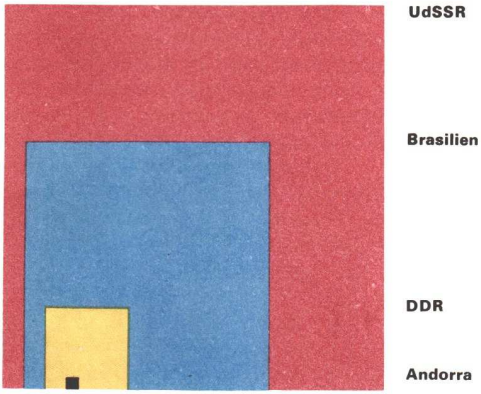


IN 6 STUNDEN
kreiste Wostok II etwa 4mal um die Erde
flog eine IL 14 von Berlin nach Moskau
fuhr ein D-Zug von Berlin nach Erfurt
fuhr ein Auto bei 100 km/h von Berlin nach München

Viele Menschen haben ein Hobby. Der eine sammelt Briefmarken, der andere Streichholzschachteln und mancher sogar – Zahlen. Zu den letzteren gehörte Carl Friedrich Gauß, einer der bedeutendsten Mathematiker. In sein Notizbuch trug er viele Tabellen von Zahlen ein. So finden wir darin die Schrittzahlen für Wege aufgeschrieben, die er täglich, oft vielleicht mehrmals am Tage, zurücklegen mußte. Das waren die Wege von der Göttinger Sternwarte zur Universität und viele andere. Weitere Tabellen zeigen uns die Lebensdauer bedeutender Männer, angegeben in Tagen. Aus diesen Tabellen geht hervor, daß beispielsweise der große englische Physiker und Mathematiker Isaac Newton 30 766 Tage gelebt hat. Bereits im Alter von 15 Jahren hatte Gauß sich umfangreiche Tabellen mit Primzahlen aufgestellt. Von solchen gesammelten Zahlen wurde er zu wertvollen Erkenntnissen über die Gesetzmäßigkeiten im Zahlenreich angeregt.

Zahlen kann man aber nicht nur in Tabellen, sondern auch noch auf eine andere Art sammeln. Der Mensch hat die Fähigkeit, viele Dinge, die er mit seinen Augen betrachten kann, sehr gut im Gedächtnis zu behalten, er versteht sie auch leichter. Deshalb hat er nach Möglichkeiten gesucht, sich die Zahlen anschaulich zu machen. Wir wollen uns einmal einige Sammlungen von Zahlen anschauen, die in dieser Art bearbeitet, zurechtgemacht worden sind.

Zunächst geht es um die Ortshöhen einiger Städte der DDR (über Normalnull). Wir sehen in dem Schaubild ganz deutlich, daß die Stadt Plauen (im Vogtland) die meisten anderen Städte weit überragt, vor allem Greifswald als Küstenstadt. Aber auch Berlin liegt noch ziemlich niedrig, Cottbus etwa doppelt, Halle etwa dreimal so hoch wie Berlin und Karl-Marx-Stadt wiederum gut dreimal so hoch wie Halle. Gewiß hätte man diese Kenntnisse auch einer Tabelle entnehmen können, aber so deutlich wären uns die Verhältnisse nicht geworden; denn in der Tabelle stehen nur die Zahlen beieinander, im Schaubild dagegen sind die Zahlen durch Strecken ersetzt, deren Längen den Zahlen entsprechen. Dazu muß man überlegen, welchen Bereich man darstellen will: In unserem Beispiel geht er von 0 m bis 360 m. Ferner ist zu bedenken, wieviel Platz man zur Verfügung hat, das heißt, wie lang die längste Strecke sein darf: Sind es zum Beispiel 10 cm, so empfiehlt es sich, trotzdem für die 360 m nur 9 cm zu nehmen, weil sich dadurch für je 20 m genau 0,5 cm und dann ein leichtes Rechnen ergibt. Und nun erkundige sich jeder nach der Höhe seines Wohnortes und trage sie ins Schaubild ein! Freilich, eine



UdSSR	22 403 000 km²
Brasilien	8 513 844 km²
DDR	107 834 km²
Andorra	465 km²

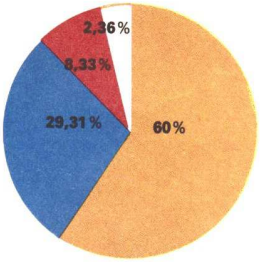
gewisse Ungenauigkeit wird man dabei in Kauf nehmen müssen.

Das nächste Schaubild zeigt sehr unterschiedliche Geschwindigkeiten. Deshalb wurde die lange Strecke, die dem sechsstündigen Weg von Wostok II entsprechen soll, mehrfach um die Erdkugel geschlungen, um dadurch einen Eindruck von der sehr großen Geschwindigkeit des Raumschiffes zu erwecken.

Man kann Zahlenunterschiede auch noch auf andere Weise sichtbar machen. Beim Melken mit der Hand schafft eine Person in 90 Minuten 12 Kühe, mit der Maschine 75 Kühe. In unserem Bild ist für die 12 handgemolkenen Kühe eine Milchkanne gezeichnet; für 75 Kühe muß man dann $6\frac{1}{4}$ Kanne abbilden. Das ist sehr eindrucksvoll dargestellt durch den Eimer, der gerade in die siebente Kanne ausgegossen wird. Dennoch kann man dagegen etwas einwenden: Wer sagt denn, daß die Milch im Eimer gerade $\frac{1}{4}$ Kanne füllt, und, vor allem, ob die Kanne noch leer ist? Deshalb wäre es vielleicht besser gewesen, wenn man für jeweils 3 Kühe eine Kanne genommen hätte.

Geht es in einem Schaubild beispielsweise um einen besseren Vergleich der Größe von Ländern, so liegt es nahe, auch für die Veranschaulichung nicht Strecken, sondern Flächen, etwa Quadrate, zu nehmen. Dabei werden aber mitunter Fehler gemacht, wie es das nebenstehende Schaubild zeigt, das wir – wie fast alle Beispiele auf diesen Seiten – einer Zeitschrift entnommen haben. Den Größen der UdSSR, Brasiliens, der DDR und Andorras entsprechen die vier Quadrate mit den Seitenlängen 68 mm, 43 mm, 14 mm und 2 mm. Das Quadrat für die UdSSR enthält demnach 4624 mm², das Brasiliens 1849 mm². Die UdSSR müßte also etwa $2\frac{1}{2}$mal so groß wie Brasilien sein. Mit Hilfe der Zahlen der Tabelle kann man errechnen, daß es auch tatsächlich so ist. Das Quadrat der DDR hat 196 mm², und das ist etwa der 24. Teil vom Quadrat der UdSSR. In Wirklichkeit ist aber die UdSSR nicht 24mal, sondern etwa 200mal so groß wie die DDR. Wie klein müßte also das DDR-Quadrat sein? Wir zeichnen es richtig ein und überprüfen auch die Verhältnisse zwischen den anderen Staaten!

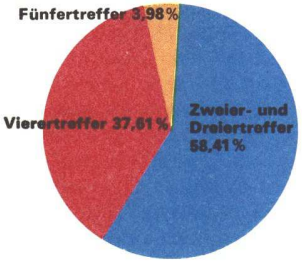
Daß die UdSSR sehr viel größer ist als die DDR, das war uns sicher bekannt. Aber kann man dem Schaubild ohne weiteres entnehmen, daß das UdSSR-Quadrat 200mal so groß ist wie das DDR-Quadrat? Wohl kaum! Und das liegt daran, daß Flächen in ihrer Größe sehr viel schwieriger abzuschätzen und zu vergleichen sind als Strecken.

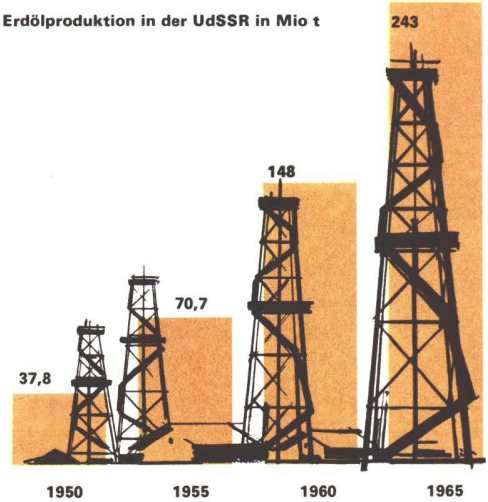


ZAHLENLOTTO

Das geschah 1963 mit dem Geld:

Gewinnausschüttung	60%
Reinertrag (gesellschaftlicher Nutzen)	29,31%
Provisionen für Annahmestellen	8,33%
Selbstkosten	2,36%





Man kann diese Schwierigkeit mindern, wenn man anstelle der Quadrate Rechtecke benutzt, die alle in einer Seitenlänge übereinstimmen. Für den Vergleich UdSSR – Brasilien müßte dann die andere Seite des UdSSR-Rechtecks $2\frac{1}{2}$mal so lang sein wie die des Brasilien-Rechtecks. Wären solche Rechtecke für den Vergleich UdSSR – DDR günstig?

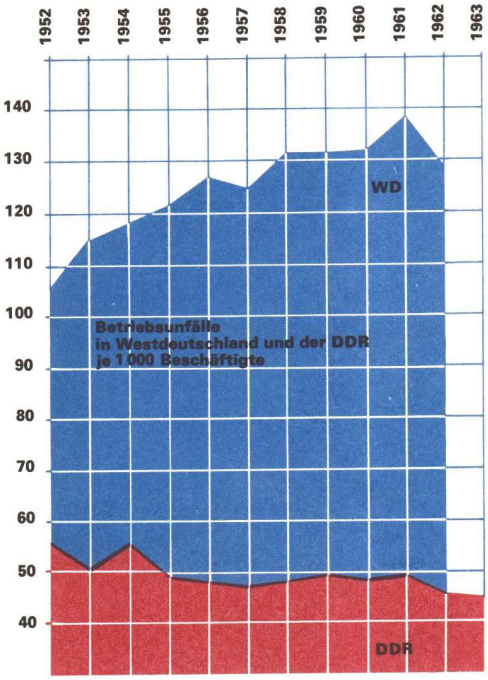
Man nennt solche Rechteck-Schaubilder auch Streifendiagramme, insbesondere dann, wenn die Rechtecke schmal sind. Eigentlich werden dabei aber auch nur Strecken benutzt und verglichen, wie bei unserem Beispiel mit den Ortshöhen. Die Streifen sind nur Umkleidungen, Ausschmückungen, die das Ganze deutlicher machen sollen. Dasselbe gilt übrigens auch, wenn den Streifen Figuren, Menschen, Schiffe oder andere Gegenstände zugeordnet sind oder wenn die Streifen gar durch entsprechende Figuren ersetzt werden.

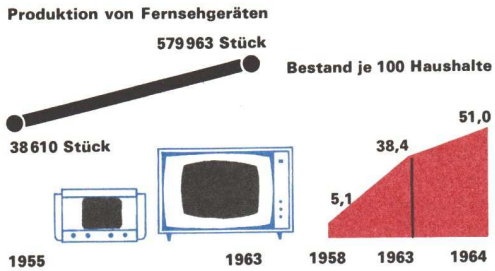
Will man Prozentangaben in einem Schaubild deutlich machen, so wählt man meist Kreisdiagramme. In den beiden, die hier abgebildet sind, geht es um das Zahlenlotto.

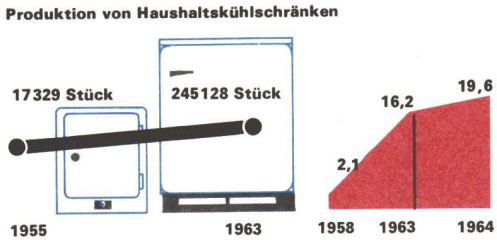
Überlegen wir einmal an ihnen, wie solch ein Kreisdiagramm aufgebaut ist und ob es die angegebenen Zahlen richtig darstellt.

Selbstverständlich muß man für Prozentangaben nicht Kreise nehmen, man kann auch Rechtecke anteilmäßig ausfüllen. Eins der beiden Kreisdiagramme ist hier auf ein Rechteck übertragen worden; für das andere machen wir es einmal selbst!

Den dargestellten Schaubildern liegen stets







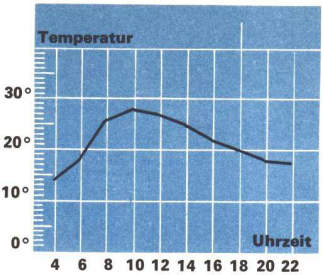
zwei Mengen zugrunde, deren Elemente einander zugeordnet sind:

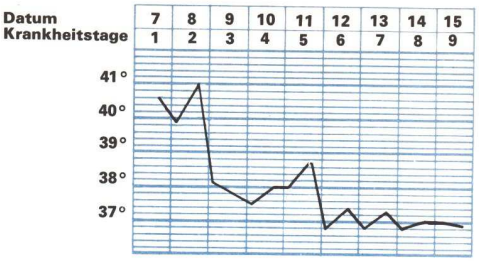
Städte – Höhenangaben
Fahrzeuge – Weglängen
Länder – Flächeninhalte
Melkmethoden – Anzahl von Kühen

Bei unseren bisherigen Beispielen waren also nur die Elemente der einen Menge meßbare Größen oder Zahlen. Sehr häufig gilt das aber auch für die andere Menge, etwa wenn es sich um Jahresangaben handelt. Man sagt im ersten Fall, das Diagramm habe eine Leiter, im anderen Fall spricht man von zwei Leitern.

Sehen wir uns das am Beispiel von Betriebsunfällen etwas näher an: Auf der waagerechten Skale (oder Achse) sind im gleichen Abstand die Jahre 1952 bis 1963 abgetragen, senkrecht über den Jahreszahlen jeweils die entsprechende Anzahl von Betriebsunfällen in der Deutschen Demokratischen Republik und in Westdeutschland; die Einteilung dafür ist auf der senkrechten Achse angegeben. Und dann sind die Endpunkte für die DDR und die für Westdeutschland durch eine Linie verbunden. Man kann einem solchen Schaubild sehr viel entnehmen: einmal, daß Betriebsunfälle in Westdeutschland sehr viel häufiger sind als in der DDR; zum anderen, daß die Anzahl der Betriebsunfälle in der DDR langsam zurückgegangen, in Westdeutschland dagegen stark angestiegen ist, jedenfalls bis 1961. Man muß solch ein Schaubild aber auch genau lesen. Wenn man nur oberflächlich hinsieht, könnte man meinen, in Westdeutschland kommen etwa 4- bis 5mal soviel Betriebsunfälle vor; in Wirklichkeit sind es aber knapp 3mal soviel. Wie kommt es zu diesem Irrtum?

Es hat also seine Vorteile, wenn man Punkte durch eine Linie verbindet: Man erkennt deut-





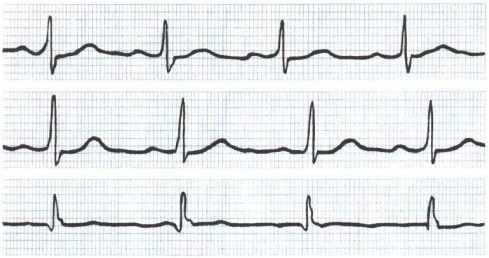
licher das Zunehmen oder Abnehmen und auch, ob das langsam oder schnell geht. Man muß aber beachten, daß eine solche Verbindungslinie nur dann gezogen wird, wenn das Schaubild auf zwei Skalen aufgebaut ist und Zwischenwerte sinnvoll sind.

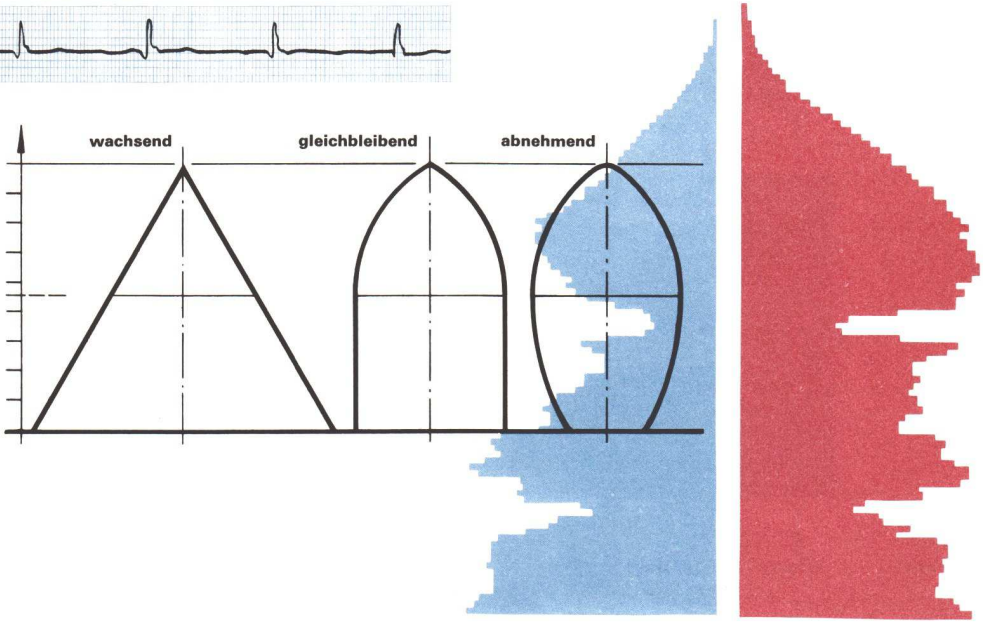
Bevor man aus dem mehr oder weniger starken Steigen oder Fallen der Linien Schlüsse zieht, sollte man sich aber das Schaubild genau ansehen, ob es auch dafür richtig entworfen ist. Sehen wir nur einmal auf das Schaubild zu den Fernsehempfängern und Kühlschränken: Man bekommt doch aus dem linken Teil den Eindruck, daß die Produktion der Kühlschränke von 1955 bis 1963 sehr viel langsamer gestiegen ist als die der Fernsehgeräte. Woher kommt dieser Eindruck, und ist er berechtigt? Nach dem rechten Teil des Schaubildes möchte man meinen, daß der Bestand beider Geräte im Jahre 1964 langsamer angestiegen ist als in den Jahren zuvor. Stimmt das, und wie kommt man zu dieser Meinung?

In jedem Wissenschaftsgebiet verwendet man solche Diagramme. Besonders häufig sind sie in der Wetterkunde, der Meteorologie, anzutreffen, wo man beispielsweise auch den Temperaturverlauf während eines Tages oder auch eines längeren Zeitraums in dieser Weise darstellt. Freilich darf man sich von den verbindenden Linien nicht dazu verleiten lassen, auch für die Zwischenzeiten, in denen gar keine Messungen erfolgt sind, Temperaturen abzulesen. Es ist ja durchaus möglich, daß die Temperaturänderungen zwischen den Messungen anders verlaufen sind, als das die Verbindungsstrecke angibt.

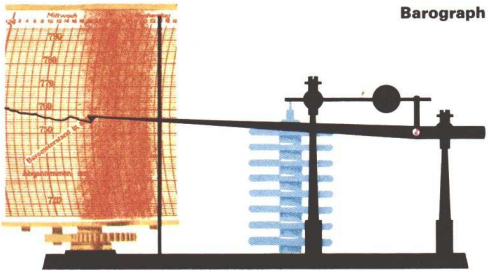
Bei Krankheiten ist es wichtig, die Körpertemperatur zu kennen. Im Krankenhaus wird sie deshalb zweimal am Tag bei jedem Patienten gemessen. Die Werte werden in besonders dafür vorgesehene Bogen eingetragen. Die so entstandenen Punkte werden dann durch Strecken verbunden, und es ergibt sich für mehrere Tage eine Fieberkurve, aus der der Arzt Hinweise für den Krankheitsverlauf und die Behandlung entnehmen kann. Es gibt auch Krankheiten, die eine ganz typische Fieberkurve haben. Aber auch hier ist es unwahrscheinlich, daß die Temperatur zwischen zwei Messungen genau der Verbindungsstrecke entspricht; deshalb wird man in kritischen Fällen auch nicht nur zweimal am Tag die Temperatur messen.

Es gibt schon eine ganze Reihe von Geräten, die derartige Kurven fortlaufend und selbständig aufzeichnen: Thermographen und Barographen. Sie notieren im Verlaufe eines Tages die jeweils herrschende Temperatur und den Luftdruck, so daß man wirklich für jeden Zeitpunkt genaue Werte hat. Beim Arzt finden wir ähnliche Geräte, zum Beispiel solche zur Auf-





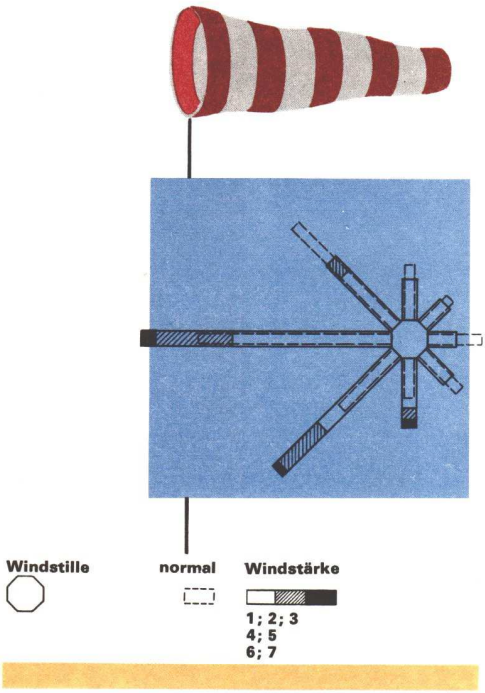
Die Änderung der Bevölkerung spiegelt sich im „Lebensbaum" wider



Barograph

nahme eines Elektrokardiogramms, kurz EKG genannt. Drei Linien zeigt das links oben stehende Bild; aus ihnen kann der Facharzt Rückschlüsse auf die Herztätigkeit des Patienten ziehen und erkennen, ob das Herz gesund ist oder welche Erkrankung hier vorliegt.

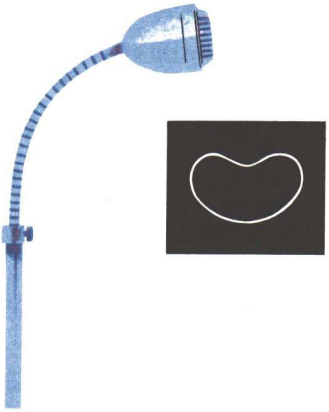
Sehr eindrucksvoll ist das Schaubild von Seite 73, das uns die altersmäßige Zusammensetzung der Bevölkerung der DDR im Jahre 1965 zeigt. Auf der senkrechten Achse sind die Lebensalter der Menschen aufgetragen, waagerecht die Anzahl der Menschen, die 1964 jeweils dieses Alter hatten; dabei stehen links die männlichen, rechts die weiblichen Personen, beide werden von der Mittelsenkrechten aus nach links oder rechts gezählt. So gab es 1965 zum Beispiel 111 000 Männer und 110 000 Frauen im Alter von 21 Jahren. Man erkennt am Schaubild sofort, daß der Altersaufbau ziemlich unregelmäßig ist; nicht, daß



Das nebenstehende Schaubild zeigt die Windverteilung während eines Sommermonats in Potsdam. Zum Vergleich ist zusätzlich die normale Windverteilung durch gestrichelt umrandete Streifen angegeben

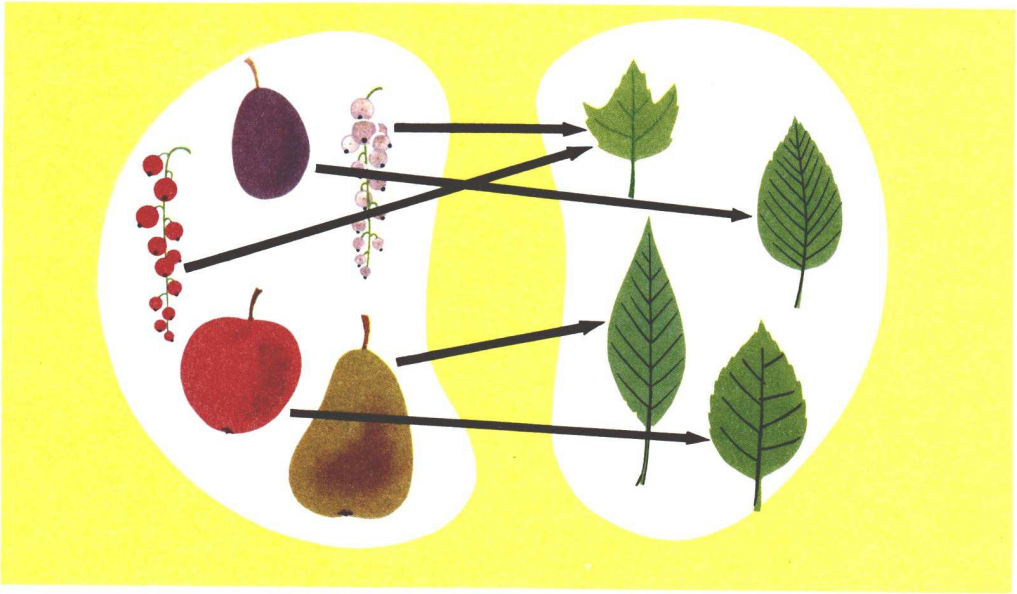
die Anzahlen mit zunehmendem Alter abnehmen, wundert uns, aber die tiefen Einschnitte weiter unten bedeuten erhebliche Abweichungen vom normalen Altersaufbau einer Bevölkerung. Hier kommen die großen Verluste an Menschen in den beiden Weltkriegen zum Ausdruck. Das zeigt uns deutlich, wie wichtig die Erhaltung des Friedens für die Entwicklung eines Volkes ist. Vergleiche auch einmal die Anzahlen für Männer und Frauen, insbesondere bei diesen Altersgruppen.

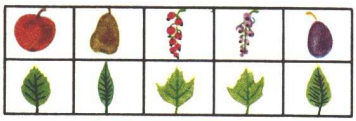
Bei der Bevölkerungspyramide wurden im Grunde ebenfalls zwei Achsen benutzt. Es gibt aber noch andere Möglichkeiten der Darstellung, die für manche Fälle zweckmäßiger sind. Wenn ein Flugplatz angelegt werden soll, so muß man beim Bau der Rollbahnen bedenken, daß Flugzeuge gegen den Wind starten und landen. Da man nun nicht für jede Windrichtung eine Startbahn bauen kann, muß man feststellen, aus welcher Richtung der Wind besonders häufig kommt. Diese Häufigkeit kann man in einem Schaubild erfassen, indem man die verschiedenen Windrichtungen durch Streifen, die Häufigkeit durch die Länge dieser Streifen darstellt. Wie wäre wohl nach unserem Bild die Hauptstartbahn anzulegen?



Eine solche Darstellung verwendet man auch für die Empfindlichkeit eines Mikrophons, die ja von der Richtung abhängig ist, aus der der Schall kommt. Die Kurve, die man so erhält, nennt man die „Charakteristik" des Mikrophons, spricht also beispielsweise von einer „nierenförmigen Charakteristik". Man bekommt auf diese Weise eine gute Vorstellung von der Verwendbarkeit des Mikrophons. Solche Darstellungen sind also für ihre Zwecke genauso anschaulich und zweckmäßig wie Schaubilder mit Strecken und Linien bei anderen Gelegenheiten.

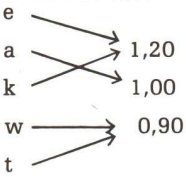
Überall Pärchen





Pärchen im Lokal –
Ein Fahrplan, mal ganz anders –
Ein super-durchdachter Schokoladenkauf –
Ein Sportverein hat Sorgen

„Hallo! Herr Ober! 3 Tassen Kaffee bitte!"
„Hier 4 Tassen bitte!"
„Und wir hätten gern 2 Tassen Kaffee!"
Wie sich der Kellner nur alle Bestellungen merken kann? Aber gucken wir nur richtig hin, er hat ja einen Block, auf dem er sich etwas notiert...! Und wie das klappt...! Er versieht sich auch nicht ein einziges Mal...! Ob er sich das alles ganz genau aufschreibt: Tisch Nummer 1 – 3 Tassen Kaffee; 4 Tassen für Tisch Nummer 3, Tisch Nummer 5 – 2 Tassen Kaffee und so weiter?
Aber soviel Zeit hat der Ober gar nicht; er notiert nur Zahlen. Wie mag er erkennen, welches die Tischnummer und welches die Anzahl der Tassen Kaffee ist, wenn da nur steht: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{2}$? Aus der Größe der Zahlen kann er es nicht sehen; er könnte verschiedene Farben benutzen oder die Tischzahl jeweils unterstreichen.
Aber es geht viel einfacher: Der Ober hält beim Notieren eine bestimmte Reihenfolge ein. Die erste Zahl ist die Nummer des Tisches, die zweite Zahl steht für die Anzahl der Tassen. Dabei ist die Reihenfolge der Zahlen in den Zahlpaaren wichtig! Tisch 1 will 3 Tassen haben und nicht etwa umgekehrt: Tisch 3 wartet keinesfalls auf 1 Tasse. Es würde eine schöne Aufregung geben, würde der Ober die Ordnung in den einzelnen Paaren durcheinanderbringen. Wir wollen deshalb von „geordneten Zahlenpaaren" sprechen und sie künftig [1; 3]... schreiben, auch wenn der Ober das nicht tut.
Nun geht der Ober an das Büfett, um seinen Gästen das Kuchensortiment nennen zu können. Er schreibt die Anfangsbuchstaben der Sorten und die Preise auf, damit die Gäste auswählen können: Erdbeertorte, Ananastorte, Kirschtorte, Warschauer Torte und Trüffeltorte.
Nun kann man im Stehen nicht sehr ordentlich schreiben und auf der Hand schon gar nicht; außerdem drängen sich gerade einige Käufer an den Stand, und da wird er auch schon angestoßen. Nun stehen die Preise nicht da, wo sie hingehören. Sie sind verrutscht und auch noch etwas durcheinandergekommen. Um die richtigen Preise für die entsprechenden Sorten zu haben, macht er Pfeile. Das sieht auf dem Zettel nun so aus:



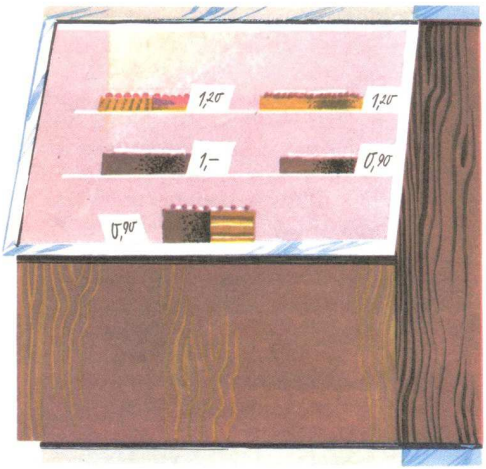
Wenn der Ober hier auch Pfeile gezeichnet hat, so stellt er durch diese Pfeile doch Paare dar. Denn es wird ja durch die Pfeile angegeben, wer zu wem gehört.

Schauen wir uns die beiden Beispiele noch etwas genauer an. In beiden Fällen erhielten wir eine Menge von geordneten Paaren:

1. Beispiel:
{ [1; 3] [3; 4] [5; 2] }

Zu Beispiel 1:
Die Tischnummern bilden eine Menge
$M_1 = \{1; 3; 5\}$.
Die Tassenzahlen bilden eine Menge
$M_2 = \{3; 4; 2\}$.
Die drei Paare entstanden dadurch, daß jedem Element von M_1 ein Element von M_2 zugeordnet wurde.

2. Beispiel:
[e; 1,20] [a; 1,00] [k; 1,20] [w; 0,90]
[t; 0,90]



Zu Beispiel 2:
Die Buchstaben bilden eine Menge
$M_3 = \{e; a; k; w; t\}$.
Die Preiszahlen bilden eine Menge
$M_4 = \{1{,}20; 1{,}00; 0{,}90\}$.
Die fünf Paare entstanden dadurch, daß jedem Element von M_3 ein Element von M_4 zugeordnet wurde.

Jede derartige Menge von geordneten Paaren nennen wir eine Funktion. Bei einer Funktion sind also jeweils zwei Mengen miteinander in Verbindung gebracht. Die eine Menge liefert den ersten Partner für die Paare. Sie heißt „Vorbereich", in unseren Beispielen waren M_1 und M_3 die beiden Vorbereiche. Die andere Menge, aus der die zweiten Partner stammen, heißt „Nachbereich". Dabei ist es durchaus möglich, daß ein Element aus dem Nachbereich mehrmals auftritt; im zweiten Beispiel waren das die Zahlen 0,90 und 1,20 für den Kuchenpreis. Das Umgekehrte wollen wir aber nicht zulassen: Ein Element aus dem Vorbereich soll nicht in Verbindung mit mehreren Elementen des Nachbereiches auftreten.
Wenn wir für 1,85 M eine Flasche Brause (0,35 M) und eine Schachtel Bonbons (1,50 M) holen, so können wir im Laden die folgende Zuordnung herstellen:

0,35	→ v	(Vita-Cola)
	→ o	(Orancia)
	→ a	(Ananas)
1,50	→ h	(Honigbonbons)
	→ s	(Sahnebonbons)

Wie lauten hier Vorbereich und Nachbereich? Wieviel Paare werden angegeben? Wollten wir eine derartige Menge von Paaren als Funktion bezeichnen?

Fahrplanblatt 12
von 12–24 Uhr
Gültig vom 24.12.99 bis 1.1.2000

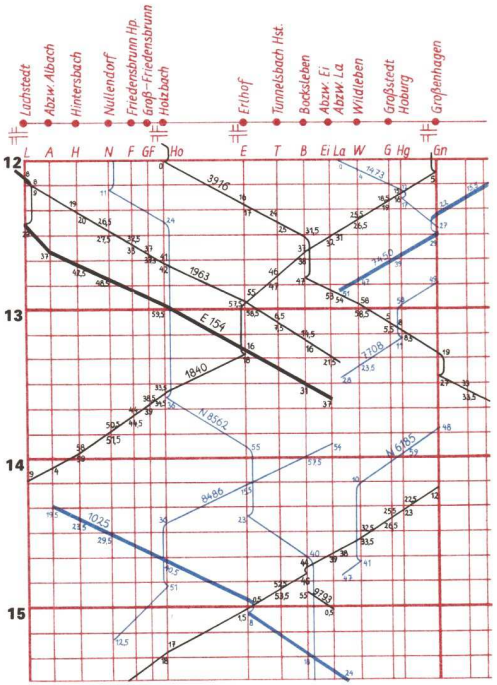
Reichsbahndirektion Eilstädt

N2

Lachstedt–Großenhagen

Zeichenerklärung
- Schnell- oder Eilzug
- Personenzug
- Eilgüterzug oder Viehzug
- Güterzug
- Streckenfernsprecher
- Schienenfreier Bahnsteigzugang
- N Güternahverkehr
- Abzw. Abzweigstelle
- Hp Haltepunkt
- Hst Haltestelle

Maßstab für Längen
1 : 300 000



702 r Lachstedt - Großenhagen

3916 2.	1963 2.	E 154 1. 2.	km		Zug Nr. Klasse	Rbd Eilstedt	Zug Nr. Klasse		1840 2.	6693 2.
11.27	12.08	11.47	0.0	ab		Lachstedt 712, 731, 744 c		an	14.09	15.51
11.38	12.19	Eilstedt-Spielberg	6.3			Hintersbach			13.58	15.40
11.46	12.27		10.2			Nullendorf			13.50	15.33
11.51	12.32		13.0			Friedensbrunn			13.44	15.27
11.56	12.37		15.0			Groß Friedensbrunn			13.38	15.22
12.00	12.41		17.4			Holzbach			13.33	15.17
12.16	12.58	12.16	26.7	an		Erlhof		ab	13.18	15.01
12.17	13.00	12.18		ab				an	12.55	15.00
12.24	13.07	...	30.6			Tunnelsbach			12.46	14.52
12.32	13.14	...						ab	12.40	14.46
12.47			34.5	an		Bocksleben		an	12.37	14.44
12.58	...	...	37.8	ab		Wildleben			12.26	14.33
13.05	...	...	40.9			Großstedt			12.18	14.25
13.08	...	...	44.7			Hoburg			12.15	14.22
13.10	...	...	50.5	an		Großenhagen		ab	12.05	14.12

In der Zensurenliste von S. 13 ist jedem Namen eine Deutschzensur zugewiesen. Vorbereich sind die Namen, Nachbereich die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5. Wieviel Paare ergeben sich (nur für Deutsch)? Ist das eine Funktion? Und nun bei Mathematik umgekehrt. Vorbereich sind die Zensuren, Nachbereich die Namen. Sind es jetzt genausoviel Paare? Können wir diese Paarmenge als Funktion bezeichnen?

Bei einer Altstoffsammlung wurden von den Gruppen einer Klasse verschiedene Papierstapel gesammelt. Sie sind in der Tabelle angegeben. Wir setzen den jeweiligen Erlös ein:

kg Altpapier	1	5	3,5	7	8	9,5	6	...
Erlös in M	0,15							...

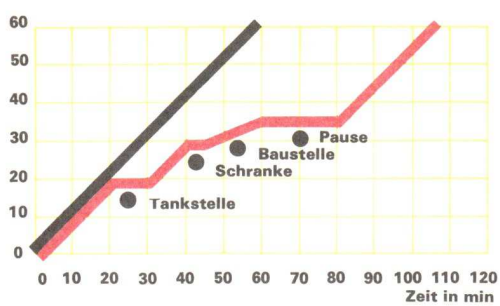
Bei solchen Tabellen haben wir es auch mit geordneten Paaren zu tun. Und solche Tabellen erleichtern uns die Arbeit sehr.

Wie lange würde es dauern, wenn die Sparkassenangestellte für jedes Konto die Zinsen ausrechnen müßte! Mit einer Tabelle hat sie es viel einfacher, und es entstehen nicht so leicht Fehler!

Mitunter sind aber Tabellen recht unübersichtlich:

Ein Kursbuch der Reichsbahn ist ebenfalls eine Tabelle. Wenn wir verreisen wollen, finden wir darin die Abfahrt- und Ankunftzeiten der Züge und dazu die Kilometerangabe für die Strecke. Das genügt für jeden Reisenden, nicht aber für den Fahrdienstleiter! Er muß den Verlauf der Fahrt überblicken können, muß für jeden Zeitpunkt wissen, wo sich dieser oder jener Zug befindet. Deshalb arbeitet er mit graphischen Fahrplänen.

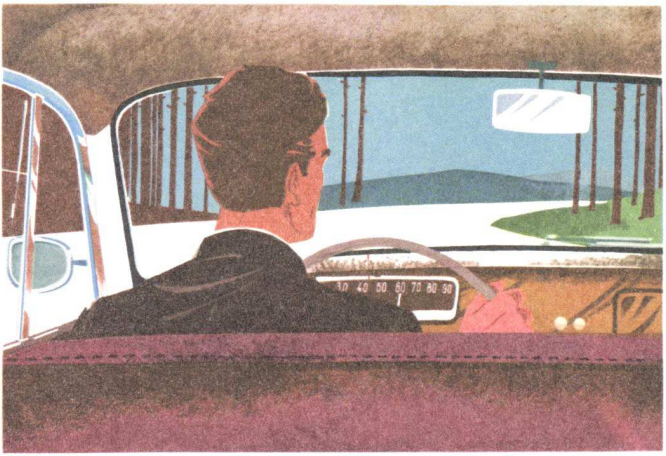
Sehen wir uns den obenstehenden an. In ihm finden wir viele Strecken, und mehrere solcher Strecken gehören immer zum gleichen Zug.



Da es bei Autofahrten meist nicht möglich ist, ständig die gleiche Geschwindigkeit beizubehalten, ergibt sich als Weg-Zeit-Diagramm keine Gerade

Was bedeuten wohl die Unterbrechungen an manchen Stellen? Was sagt es uns, daß manche Strecken flach, manche etwas steiler verlaufen? Wenn nun in einem solchen graphischen Fahrplan alle Züge (auch die Güterzüge), die zwischen Berlin und Halle kursieren, eingetragen sind, kann man leicht den Einsatz von Sonderzügen und Sonderfahrten auf dieser Strecke planen. Natürlich lohnen solche graphischen Fahrpläne nur, wenn, wie es bei der Reichsbahn der Fall ist, der Zugverkehr für längere Zeit gleich bleibt. Verreisen wir und unsere Eltern aber mit dem Auto, so ermitteln wir Fahrzeiten und Entfernungen anders. Wenn wir wissen, daß wir im Durchschnitt 60 km pro Stunde fahren, dann fahren wir in 2 Stunden 2 mal 60 km, in 3 Stunden 3 mal 60 km und in x Stunden x mal 60 km. Wir erhalten also Zahlenpaare, die alle die Form $[x; 60x]$ haben.

Wenn wir an die Stelle von x die Elemente aus dem Vorbereich setzen, so bekommen wir die Zahlenpaare selbst, also zum Beispiel $[2; 120]$ oder $[5; 300]$. Der Vorbereich enthält hier als Elemente alle diejenigen Zahlen, die als Fahrzeiten in Frage kommen, der Nachbereich diejenigen, die als Entfernungsangaben auftreten können. $[x; 60x]$ oder – wie man auch manchmal schreibt – $[x; y]$ mit $y = 60x$ gibt uns also eigentlich erst dann die Funktion an, wenn auch der Vorbereich hinzugesagt wird, zum Beispiel „$Vb = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$" oder „$0 \leqq x \leqq 6$ und x ganzzahlig". Wenn wir die sieben Zahlenpaare bilden, sehen wir, daß kein Element des Vorbereichs, aber auch keines aus dem Nachbereich mehrfach auftritt. Die Gleichung $y = 60x$, eine Gleichung mit zwei Variablen, nennt man auch das Bildungsgesetz für unsere Funktion. Für solche Funktionen kann man ebenfalls graphische Darstellungen anfer-



tigen. Wir nehmen wieder ein Beispiel: Wir wollen zum Weihnachtsfest für 15,–M Schokolade einkaufen. Eine Tafel Edelbitter kostet 3,–M, eine Tafel Vollmilch 2,–M. Welche Möglichkeiten gibt es, wenn das Geld restlos verbraucht werden soll? Da es nur ganze Tafeln gibt, läßt sich die Frage verhältnismäßig leicht durch Probieren beantworten. Keine Tafel Edelbitter kaufen, das geht nicht, denn $7\frac{1}{2}$ Tafeln Vollmilch bekommen wir nicht. Am besten ist, wir betrachten die Tabelle:

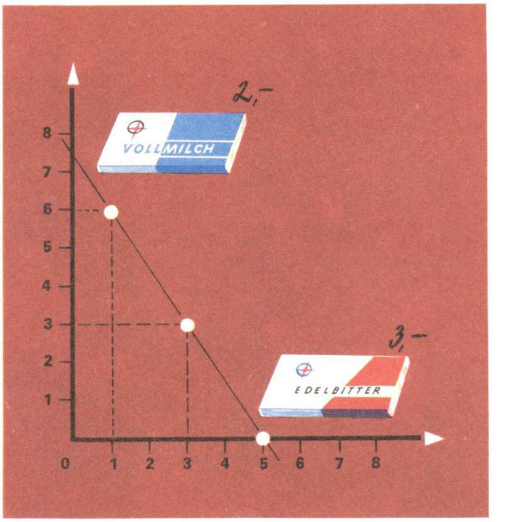
Edelbitter x	~~0~~	1	~~2~~	3	~~4~~	5
Vollmilch y	~~$7\frac{1}{2}$~~	6	~~$4\frac{1}{2}$~~	3	~~$1\frac{1}{2}$~~	0

Vor- und Nachbereich enthalten jeweils 3 Elemente. Benutzen wir wieder Variable x und y, so muß gelten

$3x + 2y = 15.$

Nehmen wir die Gleichung, ohne an unser Beispiel Schokolade zu denken, so können wir als Vor- und Nachbereich alle uns bekannten (nicht negativen) Zahlen zulassen. Dann gehören nicht nur die drei genannten Zahlenpaare zur Funktion, sondern auch die drei gestrichenen und viele, viele andere. Wenn man diese Zahlenpaare mit Hilfe eines Achsenkreuzes durch Punkte darstellt (wie bei den Fahrplänen und übrigens auch bei vielen Schaubildern), so liegen sie alle auf einer Geraden. Für unsere Schokoladen-Frage hätten wir auf dieser Geraden nun diejenigen Punkte suchen müssen, deren Zahlenpaare aus natürlichen Zahlen bestehen. Es sind dies die „Gitterpunkte" zum Achsenkreuz.

Nun hätte es doch sein können, daß wir nicht *genau* 15,–M für Schokolade ausgeben woll-

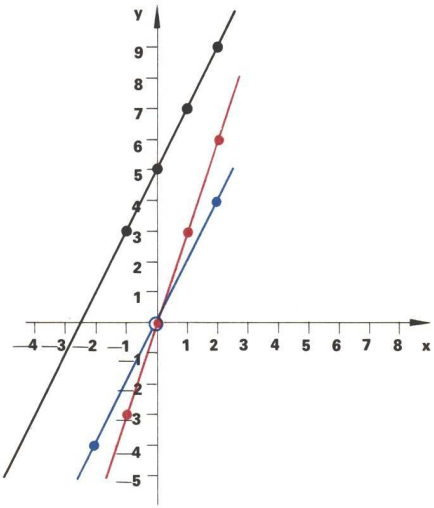


Erkundige dich nach den Preisen für verschiedene Schokoladentafeln. Durchdenke dann das gleiche Problem für je zwei Sorten, wenn ein Betrag von 20,–M zur Verfügung steht!

ten, sondern *höchstens* 15,–M. Welche Möglichkeiten hätten außer den drei in der Tabelle genannten noch bestanden? Offenbar werden sie uns ebenfalls durch Gitterpunkte angegeben, und zwar durch alle die, die innerhalb oder auf dem Rand des Dreiecks, das die gezeichnete Gerade mit dem Achsenkreuz bildet, liegen; denn jetzt muß ja gelten
$3x + 2y \leqq 15$.
Wir können uns leicht davon überzeugen, daß für alle Gitterpunkte, die außerhalb liegen, die Zahl 15 überschritten wird. Kann man jetzt die Menge der möglichen Zahlenpaare (wieviel sind es?) auch noch als Funktion bezeichnen?
Derartige Aufgaben, wo nur ein Höchst- oder ein Mindestmaß angegeben wird, sind sehr häufig und auch wichtig:
Der Vorstand eines Sportvereins macht sich Gedanken über die Höhe der Eintrittspreise, die für ein Gartenfest festgesetzt werden sollen. 150 Mitglieder und etwa 100 Gäste werden erwartet. Die Kosten sind mit 420,–M veranschlagt und sollen vom Eintrittsgeld bestritten werden. Die Gäste sollen etwas mehr bezahlen als die Mitglieder, aber höchstens das Doppelte. Für die beiden Eintrittspreise wählen wir die Variablen x (Mitglieder) und y (Gäste). Würden wir genau 420,–M einnehmen wollen, so müßte gelten: $150x + 100y = 420$. Wir werden aber so kalkulieren, daß mindestens 420,–M eingenommen werden, nach Möglichkeit also etwas mehr. Dann ergibt sich aber:

$$150 \cdot x + 100 \cdot y \geqq 420 \text{ oder}$$
$$1{,}5x + \quad y \geqq 4{,}2$$
$$y \geqq 4{,}2 - 1{,}5x$$

Zur Gleichung $150x + 100y = 420$ (oder $y = 4{,}2 - 1{,}5x$) gehört im umseitig stehenden Achsenkreuz die mit PQ bezeichnete Strecke. Wählen wir x-Wert und y-Wert von Punkten



$y = 2x + 5$

x	–1	0	1	2
y	3	5	7	9

$y = 3x$

x	–1	0	1	2
y	–3	0	3	6

$y = 2x$

x	–2	0	2
y	–4	0	4

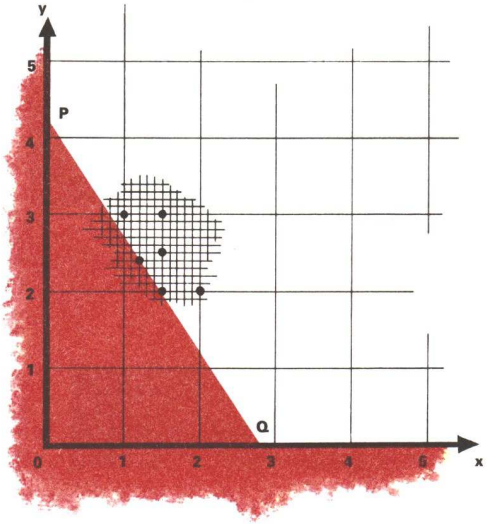
auf dieser Strecke, so ist der Gewinn genau 420,– M. Bei Punkten innerhalb des Dreiecks ist er sogar noch geringer. Da wir etwas mehr als 420,– M einnehmen wollen, müssen wir Punkte außerhalb des Dreiecks nehmen.
Zu den eingezeichneten gehören:

Preise in M

für	Mitglieder	1,00	1,50	1,20	2,00	1,50	1,50
	Gäste	3,00	2,00	2,40	2,00	2,50	3,00
Einnahme M		450	425	420	500	475	525

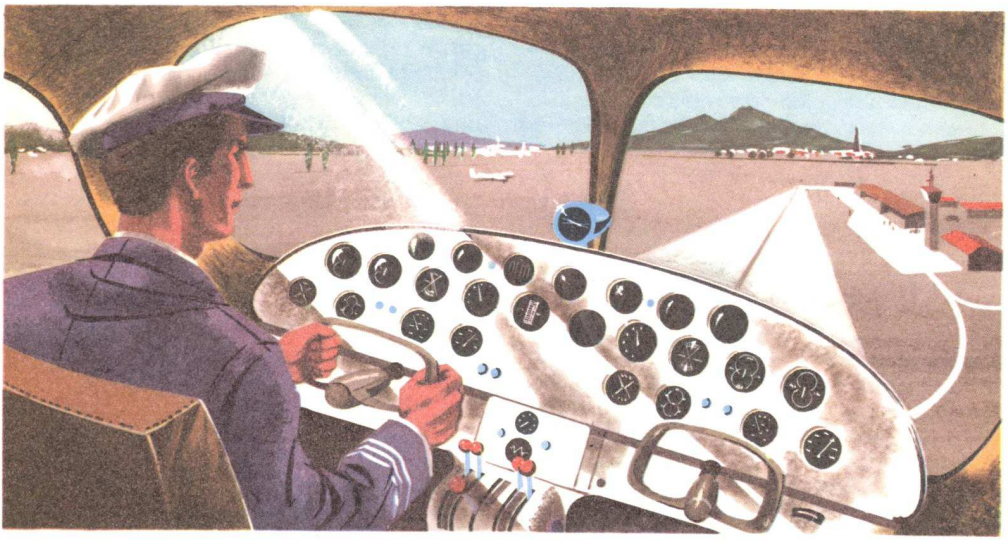
Der Vorstand schlägt seinen Sportfreunden vor, als Eintrittspreise 1,50 M für die Mitglieder und 2,00 M für die Gäste festzusetzen.

Paare, deren Punkte im rot dargestellten Gebiet liegen, können nicht benutzt werden; denn es muß ja gelten $y \geqq 4{,}2 - 1{,}5x$ und $y \geqq 0$; $x \geqq 0$



Wir wollen noch einmal zurückblicken:
Bei einer Funktion geht es um zwei Mengen, den Vorbereich und den Nachbereich. Zu jedem Element aus dem Vorbereich gehört genau ein Element aus dem Nachbereich. Es kann aber vorkommen, daß ein Element des Nachbereichs in mehreren Paaren auftritt, also verschiedene Partner aus dem Vorbereich hat.
Solche Zuordnungen lassen sich in verschiedener Form angeben:
Man kann die Paare direkt hinschreiben;
man kann sie durch eine Tabelle angeben;
man kann ein Diagramm oder eine graphische Darstellung zeichnen;
man kann die Paare mit Hilfe einer Gleichung gewinnen.
Wichtig ist nur, daß man immer erkennen kann, wer zu wem gehört!

Auf oder ab – oder auch beides

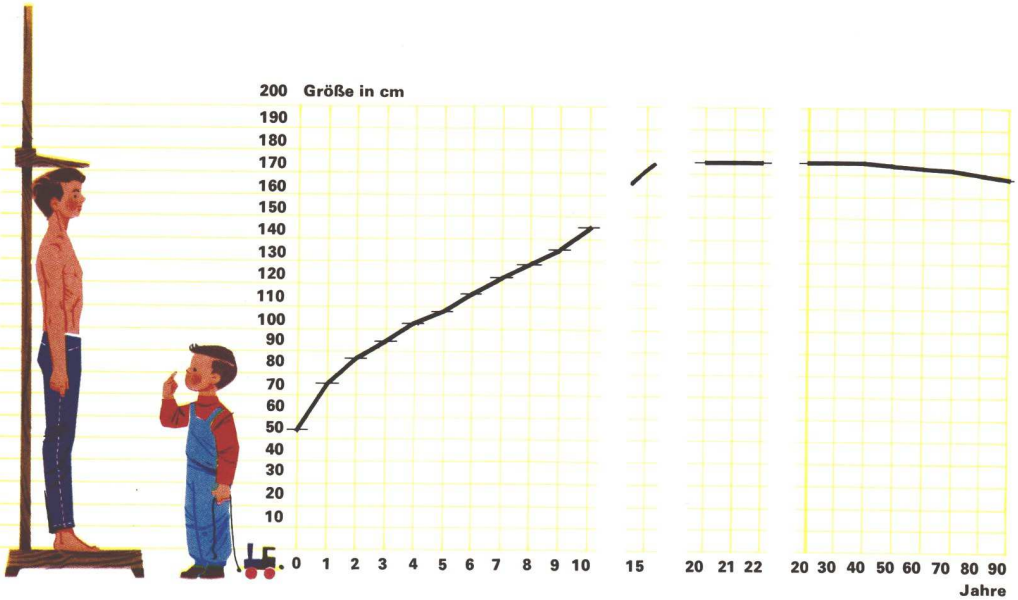


Ein Mensch wächst –
Von der Ausdehnung des Wassers –
Das Wachsen des Waldes, mathematisch betrachtet –
Von strahlenden Stoffen und dem Alter der Erde –
Ein Flugzeug landet, und sein Höhenmesser zeigt dennoch 200 m an?

Wenn die Anzahl der Lebensjahre eines Menschen wächst, dann nimmt auch seine Körperlänge zu, bis zu einem bestimmten Lebensalter, versteht sich, meistens bis zum zwanzigsten Lebensjahr. Das weiß jedermann weit und breit.
Nun gibt es Leute, die wollen diese Längenzunahme ganz genau kontrollieren. Jedes Jahr, wenn ihr Sohn oder ihre Tochter Geburtstag haben, dann wird irgendwo – an einem Türpfosten, an einem Wäschepfahl, der im Garten steht, oder sonstwo – ein Zeichen gemacht, das die jeweilige Größe angibt. Und so können denn Wolfgang oder Elvira feststellen, daß sie bei der Geburt 55 cm, als Einjährige 76 cm groß waren. Heute können sie sich kaum noch vorstellen, daß sie einmal so klein waren, aber sie sind inzwischen auch 22 Jahre alt geworden und 176 cm groß.
Die Tabelle gibt uns einen Überblick, wie ein Mensch wächst:

Alter [in Jahren]	Körpergröße [in cm]
0 (Geburt)	55
1	76
2	87
3	94
4	102
5	109
6	116
7	122
8	129
9	136
10	144
..	...
15	172
..	...
20	176
21	176
22	176

Diesen Zusammenhang zwischen Körperlänge und Alter hätten wir auch mit Hilfe der uns bekannten Zahlenpaare aufschreiben können: [0; 55]; [1; 76]; [2; 87]; usw. Wie man sieht, liefert dieser Zusammenhang eine Funktion, denn jedem Geburtstag, das heißt jedem abgeschlossenen Lebensjahr, und darüber hinaus jedem Zeitpunkt im bisherigen Leben von Wolfgang oder Elvira, ist eindeutig eine gewisse Länge zugeordnet. Was ist bei dieser Funktion der Vorbereich und was der Nachbereich?
Oft sagt man auch, die Körperlänge sei eine Funktion des Alters, wenn man die Abhängigkeit zwischen beiden meint. Dieser Ausdruck ist allerdings ungenau, denn nicht die Körperlänge ist eine Funktion, sondern die Paare [0; 55]; [1; 76]; [2; 87] bilden eine Funktion. Diese Pärchen haben wir in der Reihenfolge aufgeschrieben, daß die Zahlen, die an erster Stelle in den Pärchen stehen, größer werden. Offensichtlich nehmen dann auch die Zahlen, die an zweiter Stelle stehen, bis zum Paar [20; 176] zu. Man sagt daher auch, daß die Funktion wächst oder zunimmt. Damit meint man, daß die Zahlen, die in den Zahlenpaaren hinten stehen, größer werden, wenn die Zahlen vorn größer werden. Versuchen wir einmal, diese Funktion in einem rechtwinkligen Achsenkreuz graphisch darzustellen! Darf man eigentlich die zu den Pärchen gehörigen Punkte miteinander verbinden? Na selbstverständlich; denn der Mensch hatte ja auch jeweils zwischen den einzelnen Geburtstagen eine bestimmte Körperlänge. Die Abhängigkeit zwischen Körperlänge und Alter wird durch unsere Zahlenpaare nicht vollständig wiedergegeben; dazu brauchten wir eigentlich viel mehr solcher Pärchen. Da wir die „Zwischenpärchen" nicht kennen, ist es aber fraglich, ob die von uns gezeichnete Kurve genau angibt,



wie der Mensch zwischen seinen Geburtstagen gewachsen ist. Aber ungefähr wird sie schon stimmen. Kleiner geworden ist der Mensch dazwischen jedenfalls nicht, dessen sind wir sicher.

In der graphischen Darstellung äußert sich das Wachsen der Funktion durch das Ansteigen der Kurve.

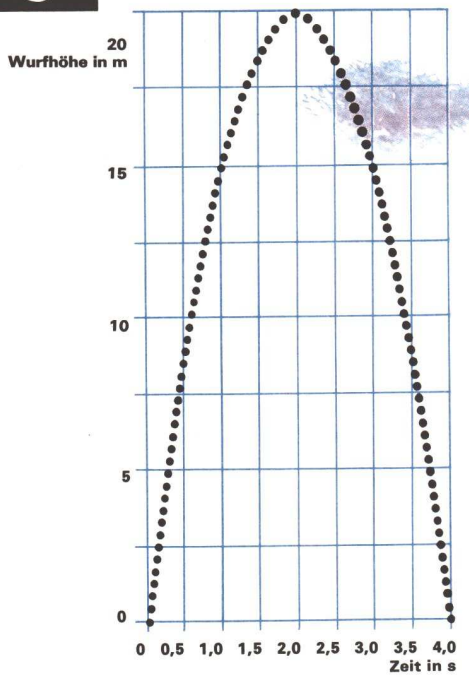
Vom Paar [20; 176] an nimmt die Funktion allerdings nicht mehr zu. Die Zahlen hinten bleiben gleich, obwohl sich die Zahlen vorn vergrößern. Wie verläuft nun die Kurve?

Ein Mensch behält etwa bis zum Alter von 45 Jahren seine einmal erreichte größte Körperlänge, dann nimmt sie langsam wieder ab. Falls also Wolfgang oder Elvira einmal 80 oder 90 Jahre alt werden sollten, müßten sie damit rechnen, daß sie dann nur noch 170 cm beziehungsweise 168 cm groß sein werden.

Schauen wir uns dazu die Fortsetzung der oberen Tabelle an!

Alter [in Jahren]	Voraussichtliche Körpergröße [in cm]
25	176
30	176
40	176
50	175
60	173
70	172
80	170
90	168

Nehmen wir alle diese Paare bis zu [90; 168] noch zu der Funktion hinzu, dann nimmt sie etwa vom Paar [40; 176] an wieder ab, das heißt: Die hinteren Zahlen in den Zahlenpaaren werden kleiner, wenn die vorderen größer

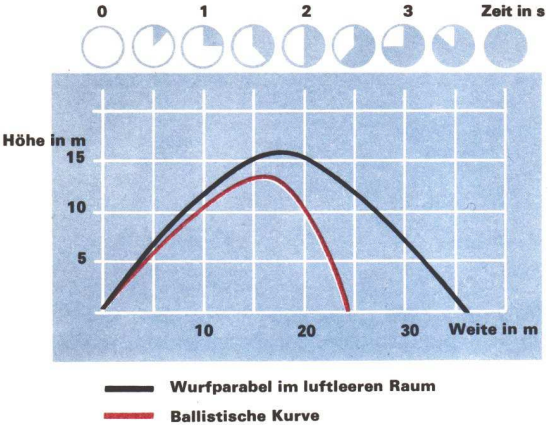


Senkrechter Wurf

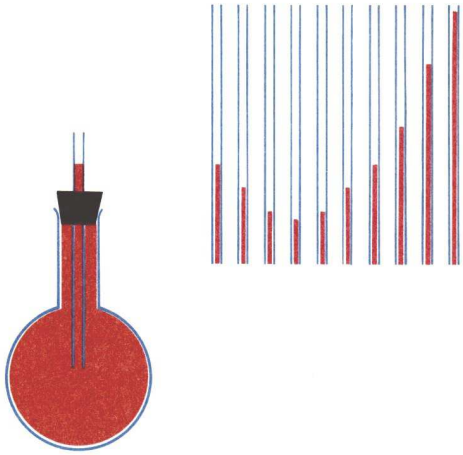
werden. In diesem Bereich fällt die Kurve zu dieser Funktion.
Die Funktion, die die Abhängigkeit zwischen der Körperlänge und dem Alter eines Menschen angibt, nimmt also in einem Teil des Vorbereichs zu, in einem anderen Teil nimmt sie ab, und in einem mittleren Teil nimmt sie weder zu noch ab. Die zugehörige Kurve steigt zunächst, verläuft dann parallel zur x-Achse (Vorbereichsachse) und fällt wieder ab.
Für Physiker, Chemiker, Biologen, ja für alle Naturwissenschaftler sind solche Überlegungen wichtig, denn mit Hilfe von Funktionen lassen sich oft sehr bequem Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Größen beschreiben; in unserem Beispiel vorhin waren es die Körperlänge eines Menschen und die Zeit. Bei vielen dieser Funktionen geht es ebenfalls auf und ab.

Denken wir nur daran, wie ein Ball fliegt, den wir senkrecht nach oben werfen. Er steigt zunächst, bis er den höchsten Punkt seiner Bahn erreicht hat, dann fällt er wieder. Zu jedem Zeitpunkt hat der Ball eine ganz bestimmte Höhe über dem Erdboden. Jedem Zeitpunkt ist also eindeutig eine Höhe zugeordnet, zum Beispiel so, wie es in der Tabelle angegeben ist.

Zeit [in Sekunden]	Wurfhöhe [in Meter]
0	0
0,5	8,75
1,0	15,00
1,5	18,75
2,0	20,00
2,5	18,75
3,0	15,00
3,5	8,75
4,0	0



Schräger Wurf



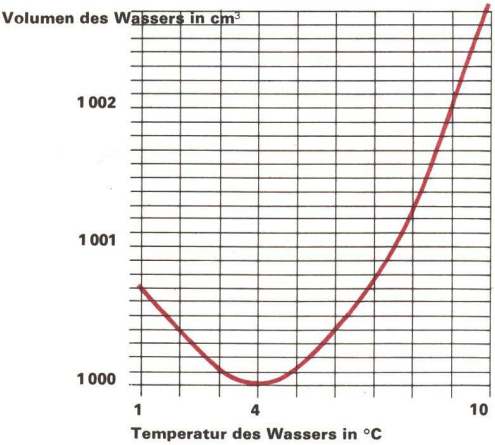
Wird das Wasser im Kolben von 1 °C auf 10 °C erwärmt, so ergeben sich in den Röhrchen unterschiedliche Höhen

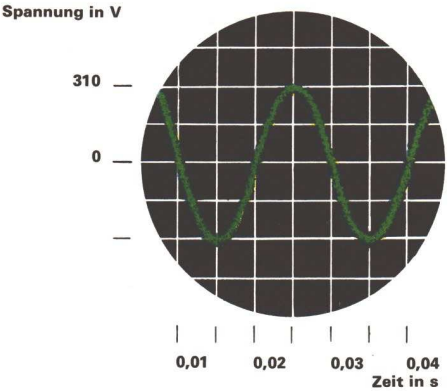
In diesem Fall wächst die Funktion von der Zahl 0 bis zur Zahl 2 des Vorbereichs, von 2 bis 4 dagegen nimmt sie ab. Zeichnet man das graphische Bild dieser Funktion, so erhält man die abgebildete Kurve. Es ist eine Parabel. Sie steigt zunächst an und fällt dann im gleichen Maß wieder ab.

Wenn der Ball schräg hochgeworfen wird, erhält man für die Abhängigkeit der Wurfhöhe von der Zeit eine ganz ähnliche Kurve. Aus dieser graphischen Darstellung kann man entnehmen, wie hoch der Ball in jedem Augenblick ist.

Die Bahnkurve des Balls, in der die Abhängigkeit der Höhe von der Weite zum Ausdruck kommt, kann man annähernd durch die gleiche Parabel (schwarz) beschreiben. Berücksichtigt man allerdings den Luftwiderstand, erhält man als Bahnkurve etwa die rot gezeichnete Linie, die man als ballistische Kurve bezeichnet.

Nicht auf und ab, sondern ab und auf geht es bei dem folgenden kleinen Gedankenexperiment. Wir füllen zehn gleich große dünne Röhrchen jeweils bis zur Hälfte mit Leitungswasser und bringen das Wasser in jedem Röhrchen auf eine andere Temperatur. Das erste kühlen wir auf 1 °C ab, das nächste auf 2 °C und so weiter, schließlich das letzte auf 10 °C. Obwohl in alle Röhrchen gleich viel Wasser gefüllt wurde, steht es danach in ihnen nicht mehr überall gleich hoch, wie die Zeichnung zeigt. Das Wasser nimmt bei 4 °C das kleinste Volumen ein. Erwärmt man Wasser von 4 °C, so dehnt es sich aus, sein Volumen wird größer. Kühlt man es ab, so wird sein Volumen auch größer. Diese sehr merkwürdige Eigenschaft hat unter den Flüssigkeiten allein das Wasser. Der Zeichnung können wir viele Paare der Funktion entnehmen, die die Abhängigkeit des





Volumens von der Temperatur beschreibt. In welchem Teil des Vorbereichs nimmt die Funktion zu, in welchem nimmt sie ab?

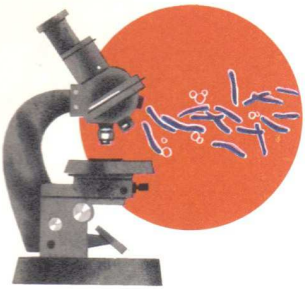
Ob man wohl Wasser auch als Thermometerflüssigkeit verwenden könnte?

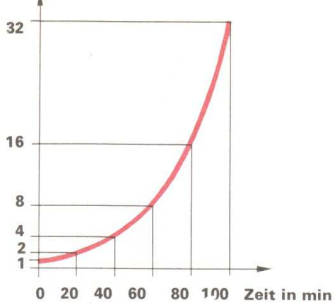
Man nutzt doch zur Messung von Temperaturen vielfach gerade die Änderung des Volumens einer Flüssigkeit, meist Quecksilber oder Alkohol, aus. Von der Länge der Flüssigkeitssäule im Röhrchen eines Thermometers schließt man auf die jeweilige Temperatur. Wäre das bei Wasser auch immer möglich? Nein, das geht nicht, denn würde zum Beispiel in unserem Thermometerröhrchen das Wasser gerade so hoch stehen wie im zweiten Röhrchen von links der umseitigen Abbildung, so hätte es entweder eine Temperatur von 6 °C oder aber von 2 °C. Von welcher Temperatur an wäre es theoretisch möglich, Wasser für ein Thermometer zu nehmen?

Bei Funktionen, die sowohl abnehmen als auch zunehmen, kann man also aus dem hinteren Wert in den Zahlenpaaren der Funktion nicht immer eindeutig auf den vorderen Wert schließen. Es gibt sogar Funktionen, bei denen es ständig auf und ab geht. Ein Beispiel dafür ist die Wechselspannung, die wir der Steckdose entnehmen. Die graphische Darstellung gibt an, wie sie sich mit der Zeit ändert.

Zu jedem Zeitpunkt gibt es einen ganz bestimmten Spannungswert, den man der Kurve entnehmen kann. Es sollen nun aus der Zeichnung mindestens drei Paare angegeben werden, die zu dieser Funktion gehören, danach je zwei Teile des Vorbereichs, in denen die Funktion ab- beziehungsweise zunimmt! Wann beträgt die Spannung genau 220 Volt?

Es gibt in der Natur aber auch viele Vorgänge, bei denen es nur aufwärts geht oder nur abwärts. Aufwärts geht es vor allem bei Vor-





gängen, bei denen etwas wächst, abwärts vor allem bei solchen, bei denen etwas zerfällt.

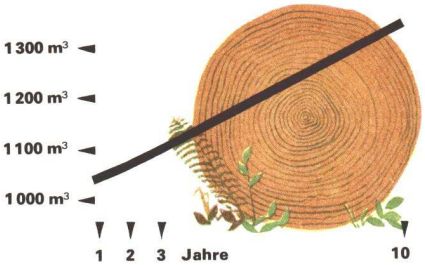
Wenn zum Beispiel die Milch sauer wird oder Menschen und Tiere an ansteckenden Krankheiten leiden, dann sind das Auswirkungen der Lebenstätigkeit winziger einzelliger Lebewesen, der Bakterien. Allerdings sind Bakterien keinesfalls nur schädlich! Ohne Bakterien könnte der Mensch überhaupt nicht leben; denn bei der Verdauung helfen uns sehr nützliche Bakterien. Bei der Herstellung von Käse und sogar bei der Bereitung des Sauerteigs für Brot braucht man Bakterien. Bakterien vermehren sich sehr, sehr rasch. Sie teilen sich in der Mitte, und aus einer Zelle entstehen zwei neue Zellen. Jede dieser neuen Zellen kann sich bei günstigen Bedingungen bereits nach 20 Minuten wieder in zwei Teile spalten. Die Anzahl der Bakterien, die aus einer einzigen Zelle innerhalb einiger Stunden entstehen kann, ist beträchtlich. Nicht zuletzt deshalb können krankheitserregende Bakterien ja auch so gefährlich sein. Wie dieses Anwachsen vor sich geht, können wir uns leicht ausrechnen.

Zeit [in Minuten]	Zahl der Bakterien, die durch Vermehrung aus einer Zelle entstanden sind
0	1
20	2
40	4
60	8
80	16
100	32
usw.	usw.

Die Vermehrung von Bakterien wird also durch eine nur wachsende Funktion beschrieben. Aus wieviel Zahlenpaaren besteht die Funktion, die die Vermehrung unter (den schon erwähnten) günstigen Bedingungen aus einer Zelle innerhalb von vier Stunden angibt?

Auch der Holzbestand eines Waldes wird von Jahr zu Jahr größer. Das ist besonders wichtig, da der Wald ja nicht nur unserer Erholung dient, sondern auch einen sehr großen volkswirtschaftlichen Nutzen hat. Die Bäume wachsen nach Art und Alter verschieden stark – Pappeln schneller als Fichten und diese wieder schneller als Buchen oder Kiefern. Wir wollen einmal annehmen, daß der Zuwachs eines Mischwaldes durchschnittlich $\frac{3}{100}$ des vorhandenen Holzbestandes beträgt. Aus $1000\,m^3$ Holz werden dann nach 1 Jahr $1030\,m^3$, nach 2 Jahren $1061\,m^3$, nach 3 Jahren $1093\,m^3$ usw. Nach 10 Jahren sind es schon $1344\,m^3$. Auch dieses Wachstum läßt sich durch eine wachsende Funktion beschreiben. Die Funktion liefert graphisch wieder eine steigende Kurve (siehe Seite 96). Warum dürfen wir übrigens hier die entsprechenden Punkte miteinander verbinden?

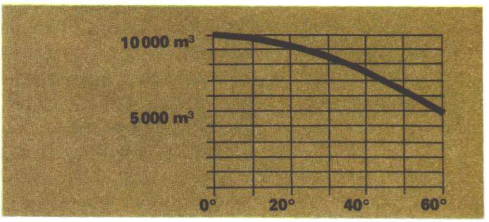
Der Holzertrag, den der Förster aus einem Waldstück nach 20 Jahren erwarten kann, hängt nun aber nicht nur vom Wachstum des Waldes, sondern auch von der Größe seiner Anbaufläche ab. Das ist doch selbstverständlich, nicht wahr? Je größer die Fläche, auf der der Wald Baum für Baum steht, alle in gehörigem Abstand, damit jeder auch genügend Licht und Luft bekommt, desto mehr Holz erhält man. Wenn man die Anbaufläche verdoppeln, verdreifachen, verzehnfachen würde, so könnte man auch mit einer doppelten, dreibeziehungsweise zehnfachen Holzausbeute rechnen. Die Abhängigkeit des zu erwartenden Holzertrages von der Anbaufläche des Waldes kann also durch eine wachsende Funktion ausgedrückt werden. Diese Funktion ist besonders einfach, da sich beide Größen, die



Anbaufläche und der Holzertrag, im gleichen Verhältnis verändern. Man spricht hier auch von Proportionalität zwischen beiden Größen.

Kann man aus der Größe der Anbaufläche immer auf die zu erwartende Holzmenge schließen? Das hängt davon ab, ob der Wald in einer ebenen oder in einer gebirgigen Landschaft steht. Wenn die Anbaufläche des Waldes nämlich ansteigt, dann wachsen die Bäume ja nicht mehr senkrecht zum Waldboden, sondern stets in Richtung vom Erdmittelpunkt weg. Diese Erscheinung nennt man Geotropismus. Da natürlich der Abstand zwischen den Bäumen nicht kleiner werden darf, muß man also von vornherein mit weniger Bäumen, also mit weniger Holz rechnen. Je steiler die Anbaufläche ansteigt, desto geringer wird der Holzertrag sein. Dieser ist also abhängig von dem Winkel, unter dem die Anbaufläche ansteigt. Aus der Tabelle kann man ersehen, daß hier die Zahlen des Nachbereichs kleiner werden, wenn die Zahlen des Vorbereichs größer werden. Diese Abhängigkeit liefert also eine nur abnehmende Funktion, deren zugehörige Kurve fällt.

Auch das ist Geotropismus



Holzausbeute auf gleich großen, aber verschieden geneigten Waldflächen (unter sonst gleichen Bedingungen)

Neigungswinkel [in °]	Holzausbeute [in m³]
0	10 000
10	9850
20	9400
30	8660
40	7660
50	6428
60	5000

Und wie ist es nun mit dem folgenden Beispiel? Es gibt gewisse Stoffe, die kleine Teilchen ausstrahlen. Man nennt sie radioaktive Elemente. Sie werden für die Heilung bestimmter Krankheiten, zur Gewinnung elektrischer Energie und für vieles andere mehr ausgenutzt. Durch diese Strahlung wird die Masse der radioaktiven Elemente ständig kleiner. Jeder dieser Stoffe, ob es nun Uran, Radium oder radioaktives Kobalt ist, zerfällt in einer ganz bestimmten Zeit auf jeweils die Hälfte der gerade vorhandenen Masse; diese Zeit heißt Halbwertszeit. Der Teil, der dabei zerfällt, wandelt sich in ein anderes Element um. Das Tempo des Zerfalls ist von Material zu Material verschieden. Radioaktives Natrium zerfällt zum Beispiel in 15 Stunden auf die Hälfte seiner Ausgangsmenge. Von 20 g radioaktivem Natrium sind nach 15 Stunden also nur noch 10 g übrig, nach 30 Stunden noch 5 g, nach 45 Stunden 2,5 g, nach 60 Stunden 1,25 g und so weiter. Jedem Zeitpunkt

HALBWERTZEITEN

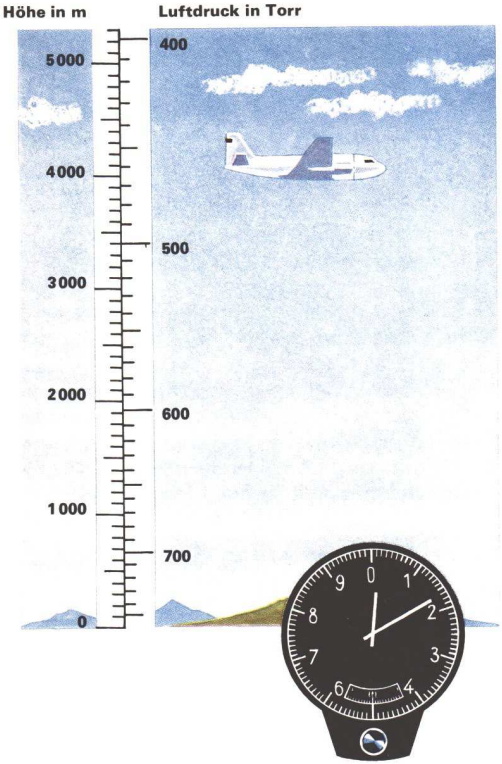
Stickstoff	10 Minuten
Natrium	15 Stunden
Radium	1590 Jahre
Kohlenstoff	5570 Jahre
Uran	4500000000 Jahre

entspricht eindeutig eine gewisse Menge Natrium. Dieser Zerfallsvorgang liefert wieder eine abnehmende Funktion. Kann man hierbei aus der Masse des noch vorhandenen Natriums auf die seit Beginn des Zerfalls vergangene Zeit schließen? Wieviel Zeit ist etwa vergangen, wenn von 20 g radioaktivem Natrium nur noch 0,6 g übrig sind?

Bei dieser Funktion kann man also wie beim Thermometer aus dem hinteren Wert in den Zahlenpaaren der Funktion ganz eindeutig den vorderen bestimmen. Das liegt natürlich daran, daß die Funktion nur ständig abnimmt. Genauso wäre es, wenn sie nur zunehmen würde.

Dieser Zusammenhang zwischen der Masse eines radioaktiven Stoffes und der Zeit, die seit dem Beginn des Zerfalls vergangen ist, hat große Bedeutung für die Erdwissenschaftler und Altertumsforscher. Lange Zeit konnte man das Alter von Gesteinen nur sehr ungenau ermitteln. Die Entdeckung radioaktiver Elemente half den Wissenschaftlern, das Alter dieser Gesteinsschichten ziemlich genau festzustellen. Die Halbwertszeiten der radioaktiven Elemente der Erdrinde lassen sich leicht bestimmen. Aus der Masse des Elements, in das sich der radioaktive Stoff umwandelt, und aus der noch vorhandenen radioaktiven Masse kann man auf die Zeitdauer schließen, während der die Umwandlung ungestört vor sich gegangen ist. Mit anderen Worten: Man kann das Alter des Gesteins, ja sogar die Zeit berechnen, die seit der Erkaltung der Erdoberfläche vergangen ist: zwei Milliarden Jahre, eine unvorstellbar lange Zeit. Sogar die Bestimmung des Alters von Knochenfunden, Holzresten und Werkzeugen aus vergangenen Jahrtausenden ist durch die Kenntnisse von den radioaktiven Elementen möglich. So ist es zum Beispiel gelungen, das Alter eines ausgegrabenen Beils festzustellen. Auf dem Beil stand zwar nicht „Hergestellt 3000 Jahre vor der Zeitrechnung", aber es enthielt eine „Uhr", die seit seiner Herstellung ununterbrochen lief. Das Eisen enthielt winzige Spuren radioaktiven Kohlenstoffs. Aus der noch vorhandenen Strahlung ließ sich dann das Alter dieses Werkzeuges bestimmen.

Wer schon einmal mit einer IL 14 geflogen ist, dem ist sicher die kleine Uhr an der Stirnwand der Passagierkabine aufgefallen. Wenn sich das Flugzeug von der Rollbahn hebt, kann man beobachten, daß sich der Zeiger der „Uhr" zu drehen beginnt. Diese Uhr ist aber eigentlich gar keine Uhr im üblichen Sinne, sondern ein Höhenmesser, an dem man die jeweilige Flughöhe ablesen kann. Genaugenommen zeigt sie nur den Luftdruck an, aber daraus kann man auf die Höhe schließen, in der man sich jeweils befindet.



Wir wollen uns einmal den Zusammenhang zwischen Luftdruck und Höhe an der graphischen Darstellung ansehen. Wie wir sehen, entspricht jeder Höhe bei 0 °C eindeutig ein gewisser Luftdruck, der bei zunehmender Höhe abnimmt. Die Werte für den Luftdruck sind bei dieser Zuordnung in Beziehung zueinander zu sehen: Wenn bei 0 m der Luftdruck 760 Torr beträgt, dann ist er in 500 m Höhe etwa 716 Torr. Beträgt er bei 0 m dagegen 20 Torr mehr, so auch in 500 m Höhe.

Es liegt also eine nur abnehmende Funktion vor, so daß auch umgekehrt, also vom Luftdruck her, die Höhe bestimmt werden kann. Um eine größere Genauigkeit zu erreichen, müssen allerdings noch die Temperaturen in der Atmosphäre gemessen werden. Wenn die Maschine schließlich am Reiseziel, nehmen wir an, es ist Erfurt, landet, sieht man, daß der Zeiger bei 200 m Höhe stehenbleibt. Was ist denn da los, der Zeiger müßte doch nun auf 0 m stehen? Wer ein bißchen nachdenkt, kommt bestimmt hinter das Geheimnis.

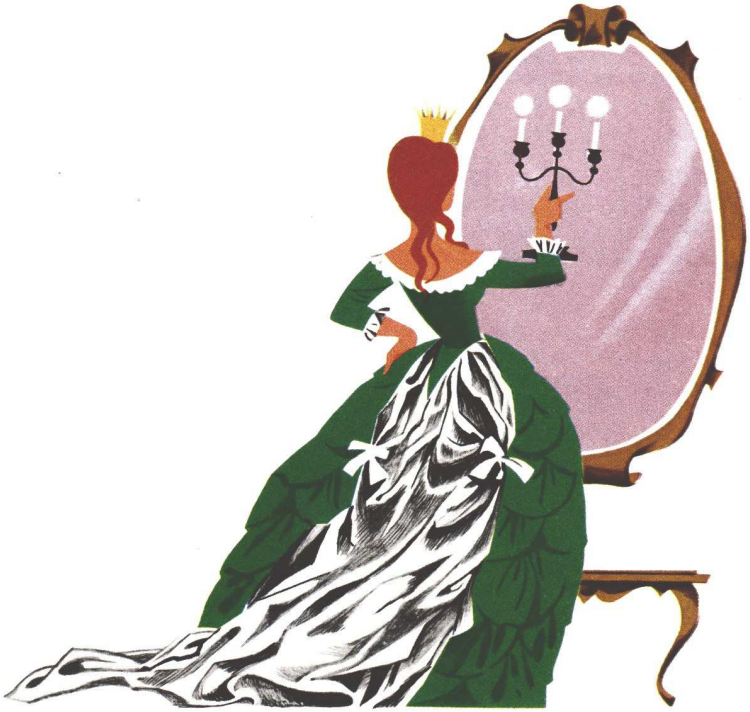
Als Faustregel kann man sich leicht merken, daß bei geringen Höhenunterschieden die Druckabnahme proportional der Höhenzunahme ist. Bei einer Höhenzunahme von etwa 11 m sinkt der Luftdruck um 1 Torr. Wer Spaß daran hat, der soll einmal mit Hilfe des Barometers die Höhe seines Wohnhauses feststellen. Man mißt dazu den Luftdruck parterre und auf dem Dachboden.

Durch Funktionen kann man viele Vorgänge in der Natur und in der Technik beschreiben. Hier haben wir nur einige wenige Beispiele kennengelernt.

Man muß sich nur einmal umschauen und versuchen, selbst welche zu finden. In jedem dieser Fälle kann man dann überlegen, ob es „auf" oder „ab" oder „auf und ab" heißt.

Erwärme in einem Topf Wasser auf 50 °C. Ermittle mit einem Thermometer, wie schnell sich das Wasser abkühlt. Miß die Temperatur von Minute zu Minute. Trage die Werte in eine Wertetabelle ein, und fertige eine graphische Darstellung dazu an!

Spieglein, Spieglein an der Wand...



Wir schreiben im Spiegel –
Verdrehte Buchstaben und solche, die dabei normal bleiben –
Wer gehört zu wem? Jeder Punkt hat seinen Partner! –
Von Pflanzen mit schiefen Blättern –
Vom Schneekristall zur Bockwurst –
Wir durchmustern den Küchenschrank –
Die widerspenstigen Handschuhe.

... wer ist die Schönste im ganzen Land? Schneewittchens Stiefmutter, die stolze, kaltherzige Königin, befragte ihren Spiegel sehr oft. Aber das war in einem alten Märchen so – und wie ist es heute? Wollen wir nicht auch täglich irgendeine Auskunft von unserem Spiegel? Ja, wir sind geradezu auf ihn angewiesen. Freilich betrügt er uns auch ein wenig, der Spiegel: Er vertauscht nämlich die Seiten, macht aus einem Rechtshänder einen Linkshänder. Wenn Vater sich rasiert, wirkt sich dieser Betrug durch die lange Gewöhnung nicht so aus. Wenn er aber beim Anziehen einen Kragenknopf abgerissen hat und diesen vor dem Spiegel annähen will, dann wird er dabei etwas Mühe haben, genauso wie mit dem Schlips, den er Onkel Emil um den Hals binden soll. Dabei hilft es ihm wenig, daß es am eigenen Hals sehr gut klappt.

Wir wollen diese kleinen Schwindeleien eines Spiegels einmal untersuchen. Dazu nehmen wir selbst einen Spiegel zur Hand, etwa von der Größe eines Schreibheftes oder Zeichenblocks, stellen ihn aufrecht vor uns auf den Tisch, legen ein Blatt Schreibpapier davor und versuchen, die beiden Wörter VATER und SOHN auf das Papier zu schreiben, aber so, daß wir sie im Spiegel lesen können. Wenn uns das gelungen ist, steht auf dem Papier: VATER SOHN. Es steht also gerade alles auf dem Kopf, oben und unten sind vertauscht. Dabei sind einige Buchstaben ganz normal geblieben, andere sind verdreht. Am schwersten ist es uns sicher gefallen, das S zu schreiben.

Jetzt wollen wir den Spiegel links vom Papier aufstellen und die beiden Wörter noch einmal schreiben, wieder so, daß wir sie im Spiegel lesen können. Das ist etwas schwerer als vorher, müssen wir doch von rechts nach links schreiben und bei jedem einzelnen Buchstaben rechts und links vertauschen. Schließlich steht aber doch eine zweite Spiegelschrift von VATER und SOHN da: VATER SOHN.

Auf unserem Blatt haben wir jetzt zweimal neun „Buchstaben". Wenn wir sie uns genauer anschauen, so sehen wir:

Oben-Unten-Tausch
ändert nichts an: E O H

Links-Rechts-Tausch
ändert nichts an: VATOH

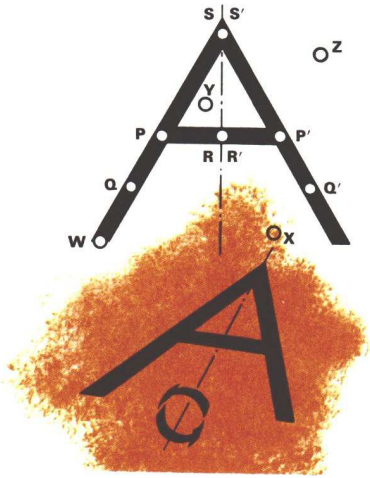
Beide Vertauschungen
ändern nichts an: O H

Jede der beiden
Vertauschungen
ändert etwas an: R S N

Und nun sehen wir uns die übrigen 17 Großbuchstaben des Alphabets an und ordnen sie in diese vier Gruppen ein!

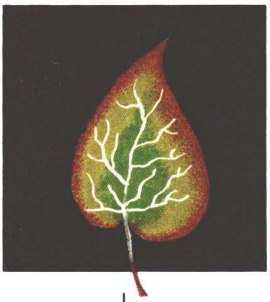
ABCDEFGHIJKLMNOPQRS TUVWXYZ

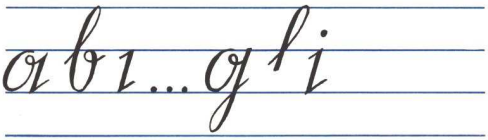
Solche Figuren wie E, V, H nennt man achsensymmetrisch: E und A haben genau eine Symmetrieachse oder Spiegelachse. H und X haben zwei Spiegelachsen, die beide senkrecht aufeinanderstehen. R und L haben gar keine Spiegelachsen. Bleiben wir noch etwas beim A: Jeder Punkt dieser Figur bekommt durch die Spiegelung an der Achse seinen Partner, seinen Spiegelpunkt zugewiesen. Nur die Punkte der Achse machen eine Ausnahme: Sie haben sich selbst als Spiegelpunkt.
Natürlich ergeben sich bei verschiedenen Achsen auch verschiedene Punktepaare: Spiegele das H einmal am Querbalken, das andere Mal an der zweiten Symmetrieachse. Welche Punkte bilden jeweils ein Paar? Gibt es Paare, die zu beiden Spiegelungen gehören?
Und nun können wir noch etwas weiter denken: Wir wollen die Spiegelachse des A ansehen als Spiegelachse für die ganze Ebene, in der das A liegt. Dadurch bekommen alle Punkte dieser Ebene, ob sie nun zu A gehören oder nicht, ihren Partner; nur die auf der Achse haben auch jetzt sich selbst als Spiegelbild.
Wenn man in den Spiegel guckt, so weiß man genau: Das im Spiegel, das ist nur mein Spiegelbild. Der Richtige, das Original, der steht hier vor dem Spiegel. Beim Spiegeln des A oder der ganzen Ebene kann man diese Trennung nicht machen. Beide Hälften sind gleichberechtigt, jede Hälfte ist das Spiegelbild der anderen. Jeder Punkt ist Original, ist aber auch Bildpunkt. Man sagt deshalb auch: Die ganze Ebene (und damit auch jede Teilfigur wie das A) wird auf sich abgebildet.
Die Punktepaare einer solchen Spiegelung werden uns deutlich, wenn wir uns die Ebene oder nur die Figur um die Achse geklappt denken. Dieses Klappen geht dann nämlich gerade von jedem Punkt zu seinem Bildpunkt.



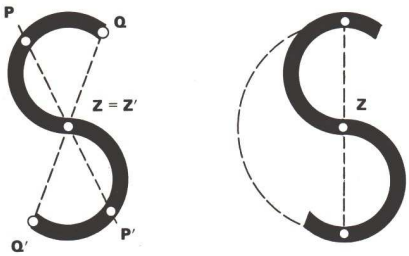
Bestimme W', X', Y', Z'!

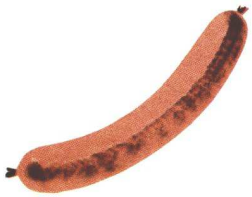
In der Natur finden wir viele achsensymmetrische Figuren. Bei Pflanzenblättern sind sie so häufig, daß eine Pflanzenfamilie – die Begonien – durch ihre unsymmetrischen Blätter besonders auffällt und daher den Namen „Schiefblattgewächse" bekommen hat. Auch an Bauwerken und Möbeln finden wir immer wieder symmetrische Figuren. Einige sind hier abgebildet, viele andere lassen sich leicht finden. Freilich müssen wir bei vielen dieser Gegenstände etwas großzügig sein und über kleinere Abweichungen hinwegsehen.
Unter den Buchstaben gibt es auch solche, die keine Symmetrieachse haben. R und S gehören zu ihnen. Bei der ersten VATER-SOHN-Spiegelung erschien das R als Ꙗ, bei der zweiten als Я. Das S dagegen erschien beide Male als Ƨ. Im Gegensatz zum R hat nämlich das S ein Symmetriezentrum. Der Zeichnung, in der





dieses Zentrum Z genannt ist, können wir entnehmen, wie zwei zentralsymmetrische Punkte zu diesem Punkt Z liegen.
Unsere Großeltern – vielleicht auch noch unsere Eltern – lernten und schrieben deutsche Schrift. In dieser Schrift ist das (kleine) h ein zentralsymmetrischer Buchstabe. Zur Hälfte ist es abgebildet. Vervollständige es!
Auch bei dieser Art der Symmetrie hat jeder Punkt einer zentralsymmetrischen Figur seinen Partner, nur das Zentrum ist sich selbst zugeordnet. Und auch jetzt können wir unsere Überlegungen, die wir bei S angestellt haben, auf die ganze Ebene übertragen, in der zum Beispiel das S liegt: Außer dem Zentrum Z hat jeder Punkt der Ebene einen anderen Punkt als Bildpunkt. Wer zu wem gehört, das zeigt uns eine Drehung der Ebene um das Symmetriezentrum Z, und zwar eine Drehung um 180°. Wenn wir diese Drehung durch einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt Z andeuten, dann sind Anfangs- und Endpunkt dieses Halbkreises ein zentralsymmetrisches Punktepaar (in bezug auf Z).
Auf Seite 104 sind einige Figuren abgebildet, solche, die uns vom Geometrieunterricht her bekannt sind, und solche, die Gegenständen aus Natur und Technik nachgebildet sind. Wir untersuchen sie auf Zentralsymmetrie und schauen uns auch zu Haus und auf der Straße nach derartigen Figuren um!
Vorhin (Seite 100) haben wir alle großen Druckbuchstaben in vier Gruppen eingeteilt:
solche mit einer waagerechten Symmetrieachse,
solche mit einer senkrechten Symmetrieachse,
solche mit einer senkrechten und einer waagerechten Symmetrieachse,
solche mit keiner Symmetrieachse.
Welche Buchstaben der vierten Gruppe haben





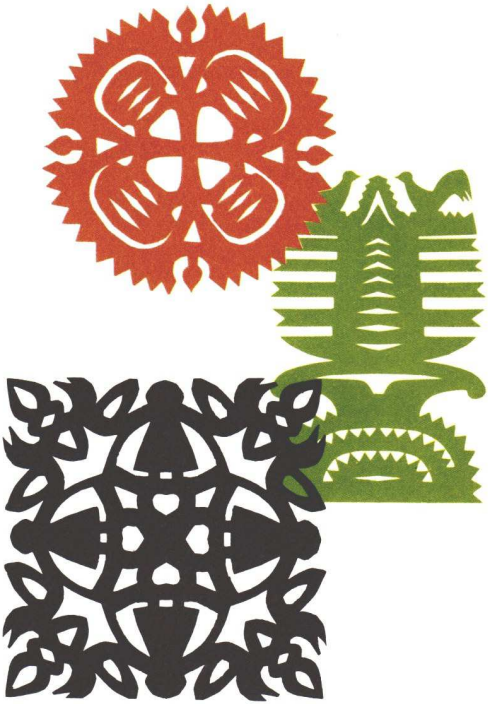
Vervollständige die Abbildung so, daß einmal ein achsensymmetrisch, ein anderes Mal ein zentralsymmetrisch liegendes Bockwurstpaar entsteht!

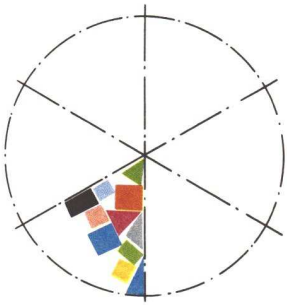
ein Symmetriezentrum? Gibt es außer diesen noch andere zentralsymmetrische Buchstaben? Wem ist schon aufgefallen, daß auch alle vier Buchstaben aus der dritten Gruppe zentralsymmetrisch sind? Sie haben zwei Symmetrieachsen, die senkrecht aufeinanderstehen. Der Schnittpunkt dieser Achsen ist das Symmetriezentrum. Tatsächlich ist das immer so bei Figuren mit zwei senkrechten Achsen.

Aus zusammengefaltetem Papier kleine Papierdecken schneiden, das macht Spaß. Bei zweimaligem Falten (senkrecht zueinander) hat das Papierdeckchen zwei Achsen, deren Schnittpunkt Symmetriezentrum ist. Das ist nicht nur eine Spielerei. Wenn man etwas Ähnliches mit Stoff und Farbe macht, kann man hübsche Muster bekommen. Übrigens kann man auch öfter als zweimal falten und dann schneiden. Wie es aber dann mit Symmetrieachsen und Zentrum aussieht, das wollen wir selbst ausprobieren und überlegen. Ganz etwas Ähnliches, sogar bunt, bietet uns übrigens der Blick in ein Kaleidoskop. Hier werden die Figuren allerdings aus einigen gefärbten Glasstückchen durch Spiegelung erzeugt.

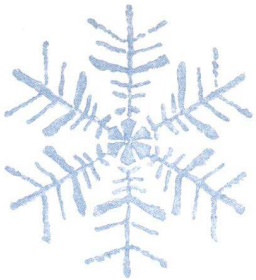
Das Schneekristall ist ebenfalls solch eine Figur. Es hat sechs Symmetrieachsen, die sich alle in einem einzigen Punkt schneiden. Dieser Punkt ist gleichzeitig Symmetriezentrum: Eine Drehung um 180° bringt die Figur mit sich selbst zur Deckung. Wir brauchen aber gar nicht einmal so weit zu drehen: Schon bei einer Drehung um 60°, aber auch um 120° ist die Figur in sich selbst übergegangen. Freilich gehören zu dieser Drehung andere Punktepaare.

Wir wollen uns das Schneekristall einmal vereinfacht aufzeichnen, als drei Durchmesser eines Kreises, die sechs Zentriwinkel von je 60° bilden. Die sechs Endpunkte bezeichnen wir – linksherum – mit E_1, E_2 bis E_6. Damit



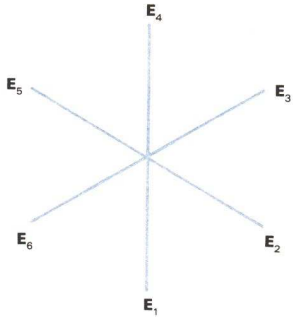


Setze zwei rechteckige Taschenspiegel so auf die Figur, daß gerade der bunte Kreissektor eingeschlossen wird!



uns die Drehungen deutlicher werden, pausen wir das Ganze auf Pergamentpapier durch, das wir mit einer Stecknadel (Reißnagel) im Schnittpunkt als Zentrum befestigen. Zu einer 60°-Drehung gehören offenbar die Punktepaare

$[E_1; E_2], [E_2; E_3], \ldots [E_5; E_6], [E_6; E_1]$.

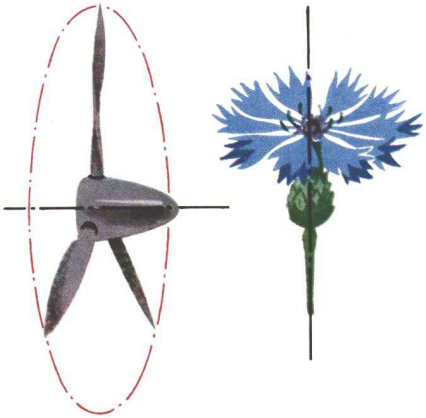


Wie steht es bei den Drehungen um 120°, 180°, 240°, 300°, 360° (alle linksherum) und bei einer 120°-Drehung rechtsherum? Gibt es eine Linksdrehung, die dieselben Punktepaare wie diese Rechtsdrehung hat? Wem das Zusammenstellen der Paare Spaß macht, der versuche es auch für die sechs Klappungen; wir nehmen dabei wieder nur die Punkte E_1 bis E_6. Für eine seien zwei Paare angegeben: $[E_2; E_6]$ und $[E_6; E_2]$. Welche ist es, und wie heißen die anderen vier Paare dieser Klappung?

Auf Seite 104 sind noch mehr solche drehsymmetrische Figuren zu finden. Eine von ihnen ist nicht zentralsymmetrisch. Auch in unserer nächsten Umgebung finden wir viele derartige Figuren, beispielsweise an Rädern.

Damit sind wir aber gleich bei einer neuen Sache: Alle Gegenstände aus unserer Umwelt, ob nun Schneekristall oder Zahnrad, sind Körper, also dreidimensional. Als wir aber unsere symmetrischen Figuren betrachtet haben, handelte es sich immer um ebene Flächen, die wir um eine Gerade geklappt oder um einen Punkt gedreht haben. Dennoch, auch das Zahnrad als Körper ist beispielsweise drehsymmetrisch, nicht nur seine Vorderansicht. Nur drehen wir es nicht um einen Punkt, sondern um seine Achse, also um eine Gerade.

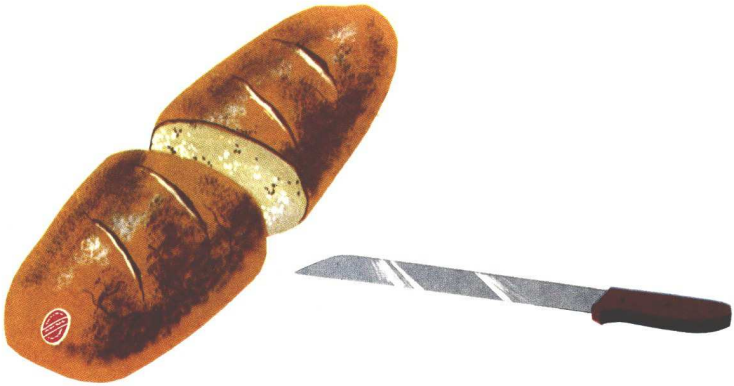
Wir sind also bei beidem, bei dem symmetrischen Gegenstand und seinem Drehzentrum, um eine Dimension höher gestiegen. Und ge-

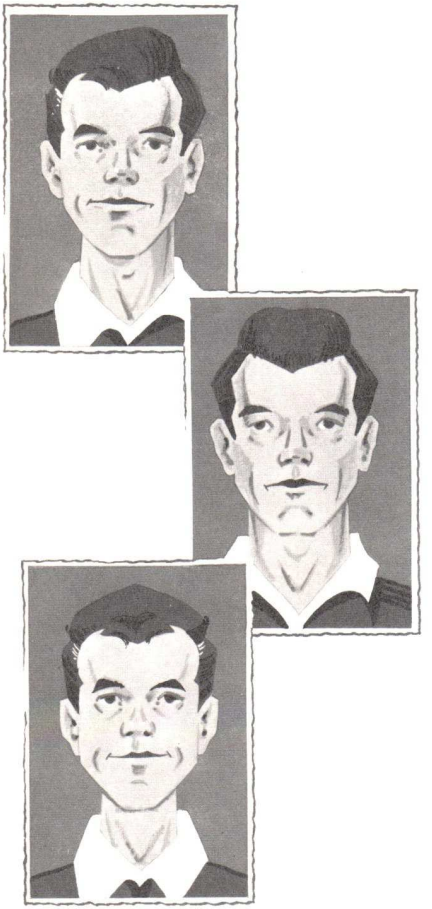


nauso ist es bei den vielen anderen drehsymmetrischen Körpern: Bei einem Autoreifen und einer Luftschraube, bei einer Blume und einem Apfel, bei einer Torte und einer Zuckerdose. Sie alle sind im Raum drehsymmetrisch, so wie es das regelmäßige Sechseck und das gleichseitige Dreieck in der Ebene sind.
Wie aber steht es bei einer Kaffeekanne? Mit einer Drehung ist hier offenbar nichts zu machen, denn wie sollte die Achse liegen? Dennoch ist sie symmetrisch: Wir brauchen die Kanne ja nur senkrecht durchzuschneiden, so daß man auch Henkel und Tülle in zwei gleiche Hälften zerlegt. Freilich, bei der Kaffeekanne können wir dieses Experiment nur gedanklich ausführen, wohl aber geht es bei einem Brot oder einem einzelnen Tortenstückchen. Sie alle besitzen eine Symmetrieebene, die uns durch den Schnitt, auch den gedachten bei der

Kaffeekanne, gezeigt wird. Wir brauchen aber gar nicht immer zu schneiden: Wenn wir unsere beiden Hände in gleicher Weise vor uns auf den Tisch legen, dann liegen beide zueinander symmetrisch. Sie haben eine Symmetrieebene, die mitten zwischen beiden Händen senkrecht auf dem Tisch steht. Und wenn wir nicht schief sitzen, dann geht diese Ebene auch durch Mund und Nase hindurch und teilt den ganzen Körper, jedenfalls äußerlich, in zwei symmetrische Hälften. Bei den inneren Organen stimmt das nicht ganz: Wir müßten dann entweder zwei Herzen haben, oder unser Herz müßte schön in der Mitte liegen. Auch die meisten tierischen Körper sind ebenensymmetrisch: der Hund, die Gans, die Wespe und viele andere.

Und wie steht es mit dem Geschirr im Küchenschrank? Durchmustern wir ihn einmal vom





Der menschliche Kopf ist – ebenso wie der gesamte übrige Körper – nicht streng symmetrisch. Das wird deutlich, wenn man die Fotografie eines Gesichtes mit Bildern vergleicht, die man durch Spiegeln der rechten bzw. linken Gesichtshälfte hergestellt hat

Kaffeelöffel über den Quirl bis zur Bratpfanne, ob Ebenensymmetrie, Drehsymmetrie oder vielleicht sogar beides vorliegt. Und das gleiche überlegen wir dann für kleine und große Gebäude, für Autos und Flugzeuge und machen uns auch hier klar, welche Punkte jeweils ein symmetrisches Paar bilden.

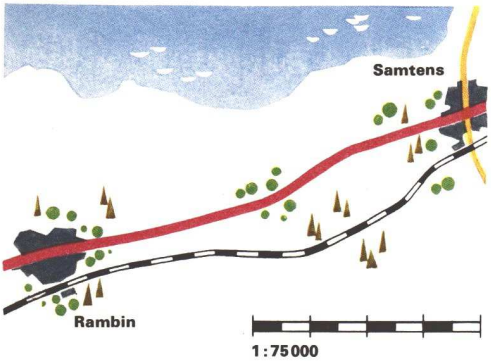
Wir haben natürlich längst gemerkt, daß die Ebenensymmetrie für die Körper das ist, was die Achsensymmetrie für ebene Figuren. Auch hier sind wir eine Dimension höher gestiegen: Von der Symmetrieachse zur Symmetrieebene, vom symmetrischen A zur symmetrischen Kaffeekanne. Nun konnten wir aber das A um seine Symmetrieachse klappen und es auf diese Weise mit sich selbst zur Deckung bringen. Kann man die Kaffeekanne auch um ihre Symmetrieebene klappen? Oder: Kann man die rechte Hand irgendwie so bewegen, daß sie an der Stelle der linken liegt, aber genau so, wie die linke vorher lag? Das geht nicht, ohne sich die Arme zu verrenken? Na, dann versuchen wir es mit einem Paar Handschuhe! Aber nicht das Innere nach außen kehren! Das ist kein Klappen, denn dabei werden Innen und Außen vertauscht.

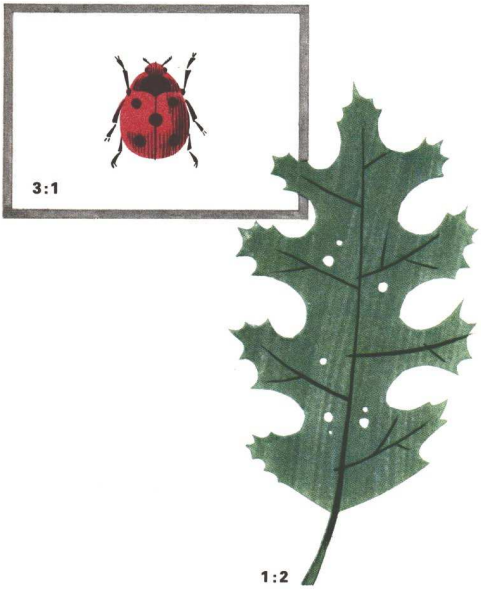
Es wird uns nicht gelingen, den rechten Handschuh durch eine Klappung an der Symmetrieebene zu einem linken zu machen (oder umgekehrt). Und warum nicht?

Das Klappen des Buchstaben A um seine Spiegelachse konnte nicht in der A-Ebene durchgeführt werden, es mußte durch den umliegenden Raum gehen. Dieser hat drei Dimensionen. Nun sind wir aber bei der räumlichen Symmetrie in allem eine Dimension höher gegangen. Daher müßte ein Klappen des rechten Handschuhs an der Spiegelebene durch einen vierdimensionalen Raum erfolgen. Das aber ist nicht möglich.

Wespen – groß wie Lerchen?

Das Gedrängel auf Rügen –
Schmidts Reisrekord und Rührei vom Strauß –
Gulliver, Liliput und die Mathematik –
Die Kleinsten fressen am meisten –
Weltmeister im Weitsprung: der Floh –
Grenzen maßstäblicher Veränderung.





In vielen Familien werden in den Wintermonaten Pläne für die nächste Sommerreise geschmiedet; schließlich ist ja die Vorfreude beinahe ebensoschön wie die Reise selbst. Natürlich wird dabei auch die Reise des vergangenen Jahres noch einmal ganz genau durchgesprochen, und jeder sucht mit seinem „Weißt du noch ..." die anderen zu übertönen. Da werden die Fotos hervorgeholt, damit man sich noch besser erinnern kann, Wanderkarten – halt! Bleiben wir einmal bei der Wanderkarte: Wenn wir eine Karte von der Insel Rügen, wo wir vielleicht unseren letzten Urlaub verbracht haben, zur Hand nehmen, so entdecken wir auf ihr die Angabe „Maßstab 1 : 75 000". Das bedeutet: Einer Strecke von 1 cm Länge auf der Karte entsprechen 75 000 cm = 750 m in der Wirklichkeit. Auf der Karte sind beispielsweise Rambin und Samtens 8 cm voneinander entfernt; in der Natur beträgt demnach die Entfernung zwischen diesen beiden Orten 75 000mal soviel, also 75 000 · 8 cm = 600 000 cm oder 6 km. Allgemein kann man auch sagen, daß die Längen auf der Karte sich zu den entsprechenden Längen in der Natur wie 1 : 75 000 verhalten, also nur den 75 000sten Teil der Längen in der Wirklichkeit betragen – oder umgekehrt: auf der Insel Rügen ist alles 75 000mal so groß wie auf unserer Wanderkarte.

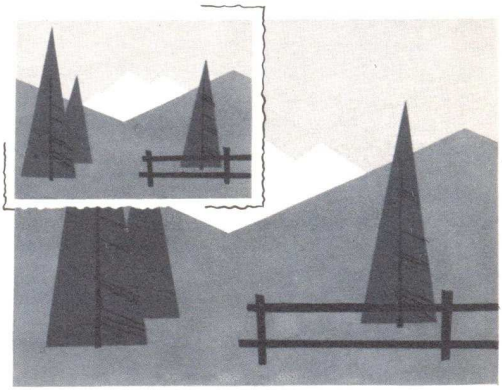
Wie ist das nun – könnte man wohl auch mit 75 000 solcher Karten die ganze Insel Rügen bedecken? Eine so einfache Folgerung kann man leider nicht ziehen, man käme zu einem ganz falschen Ergebnis. Der Maßstab gibt an, in welchem Verhältnis die *Längen* vergrößert oder verkleinert worden sind; bei der Bedeckung geht es aber um die *Fläche*, und Flächen verändern sich nicht im gleichen Maße wie Längen. Sonst hätten ja auch die

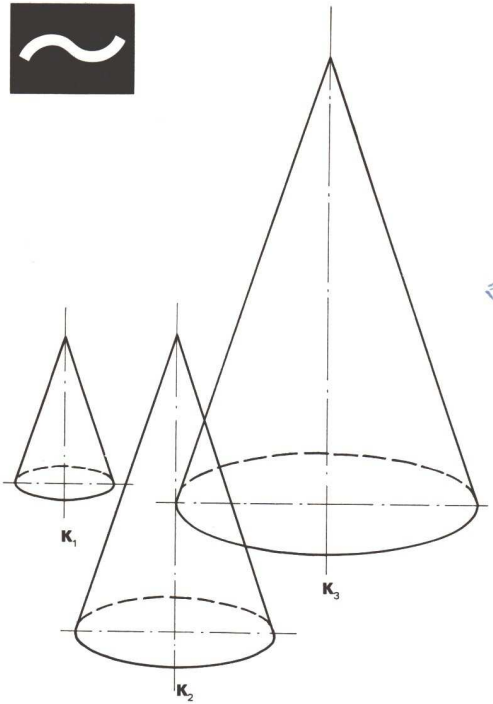
etwa 90 000 Menschen, die auf Rügen leben, nicht genügend Platz: Für jeden einzelnen stünde nicht einmal soviel Platz zur Verfügung wie für einen Menschen auf unserer Wanderkarte – ganz zu schweigen von all den Häusern, Bäumen, Tieren und so weiter. Ein solches Gedränge herrscht aber auf Rügen nicht einmal bei schönstem Sommerwetter am Strand!

Wie ändern sich nun aber Flächen, wenn alle Längen im gleichen Maßstab verändert werden? Kommen wir noch einmal auf unsere Ferienfotos zurück, auf die Vergrößerungen, die wir gemacht haben. Für 100 Blatt Vergrößerungspapier im Format 9×12, also Rechtecke mit 9 cm und 12 cm Seitenlängen, bezahlten wir 4,– M. Wollten wir dagegen Bilder im Format 18×24 herstellen – jede Seite ist also jetzt doppelt so lang, das heißt, es liegt eine Vergrößerung im Maßstab 2 : 1 vor –, so bezahlten wir für 100 Blatt 16,– M, also das Vierfache. Die Fläche ist nämlich bei Verdopplung der Seitenlängen vervierfacht worden. Und das muß man auch beim Vergrößern beachten: Mußten wir beispielsweise beim Format 9×12 etwa 5 s belichten, so brauchten wir für dieselbe Aufnahme beim Format 18×24 eine Belichtungszeit von 20 s, weil die Fläche, auf die sich dasselbe Licht aus dem Vergrößerungsapparat verteilen muß, jetzt viermal so groß geworden ist. Bei einer Vergrößerung im Maßstab 3 : 1 wächst die Fläche sogar auf das 9fache, bei einer 5fachen Seitenvergrößerung auf das 25fache. Erst 5 625 000 000 Wanderkarten würden also die Insel Rügen bedecken, weil $75\,000 \cdot 75\,000 = 75\,000^2 = 5\,625\,000\,000$ ist. Vergrößert man allgemein sämtliche Längen auf das k-fache, so wächst die Fläche auf das k^2-fache.

Die Erklärung mit dem Vergrößerungspapier ist einleuchtend. Aber wie nun stellt sich dasselbe Problem bei Körpern dar?

Folgende Geschichte soll sich tatsächlich zugetragen haben: Es war um die Weihnachtszeit, und Frau Schmidt hatte noch einige Einkäufe zu tätigen. Sie überließ ihren Kindern den „Küchendienst"; es sollte ein Reisgericht geben. Die beiden Schmidt junior gingen nun höchst





Die Kegel K_1, K_2 und K_3 sind einander ähnlich: $K_1 \sim K_2$; $K_1 \sim K_3$; $K_2 \sim K_3$

„wissenschaftlich" ans Kochen. Sie überlegten, wieviel Reis sie in den Topf geben mußten, wenn sie einen Topf voll gekochtem Reis haben wollten. Sie schätzten, daß ein Reiskorn nach dem Quellen ungefähr doppelt so lang ist wie vorher, und sie setzten deshalb den Topf halb mit Reis gefüllt an. Na, das gab eine schöne Bescherung! Als Frau Schmidt vom Einkaufen zurückkam, waren fast alle Töpfe voller Reis, und tagelang gab es bei Schmidts nur noch Reis, so daß ihn nachher schon keiner mehr sehen wollte. Die beiden hatten nicht bedacht, daß sich das Reiskorn beim Quellen nicht nur in einer Richtung ausdehnt, sondern in jeder Dimension.

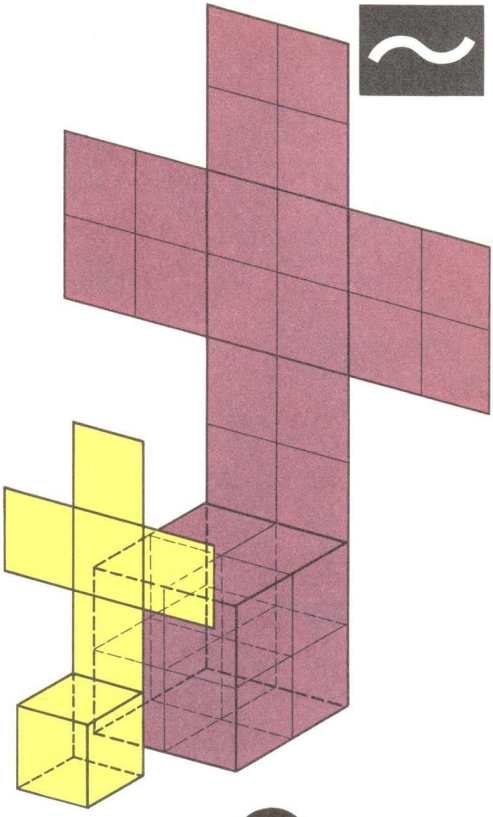
Was das aber für den Rauminhalt bedeutet, sehen wir uns am besten an einem Würfel an: Haben wir einen Würfel mit 1 cm Kantenlänge, so beträgt sein Inhalt 1 cm^3. Verdoppeln wir die Kantenlänge auf 2 cm, so ist der Inhalt $2 \cdot 2 \cdot 2\,cm^3 = 2^3\,cm^3 = 8\,cm^3$, hat sich also verachtfacht. Wählen wir die Kantenlänge 4 cm, so wird das Würfelvolumen $4^3\,cm^3$, ist also auf das 64fache des Ausgangswertes gestiegen.

Allgemein wächst bei Vergrößerung aller Längen auf das k-fache das zugehörige Volumen auf das k^3-fache.

Sicher können wir nun selbst die folgende Frage beantworten: Ein Straußenei ist – jedenfalls nahezu – ein maßstäblich vergrößertes Hühnerei, und zwar im Maßstab 3 : 1, das heißt: Das Straußenei ist etwa 3mal so lang wie das Hühnerei. Wenn man sich nun aus einem solchen Straußenei Rührei macht – wieviel Hühnereiern entspricht das?

Bis jetzt haben wir Flächen- und Rauminhalte getrennt betrachtet. Vergleichen wir aber nun einmal Oberfläche und Rauminhalt bei Vergrößerung eines Würfels miteinander:

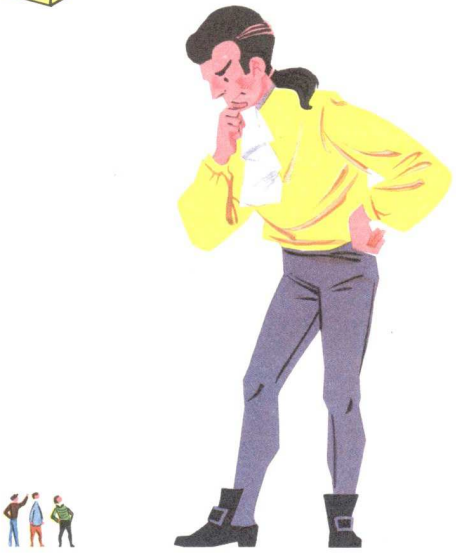
Kantenlänge [in cm]	Oberfläche [in cm^2]	Volumen [in cm^3]	Auf jedes cm^3 Volumen entfallen
1	6	1	6 cm^2 Oberfläche
2	24	8	3 cm^2 Oberfläche
3	54	27	2 cm^2 Oberfläche
6	216	216	1 cm^2 Oberfläche

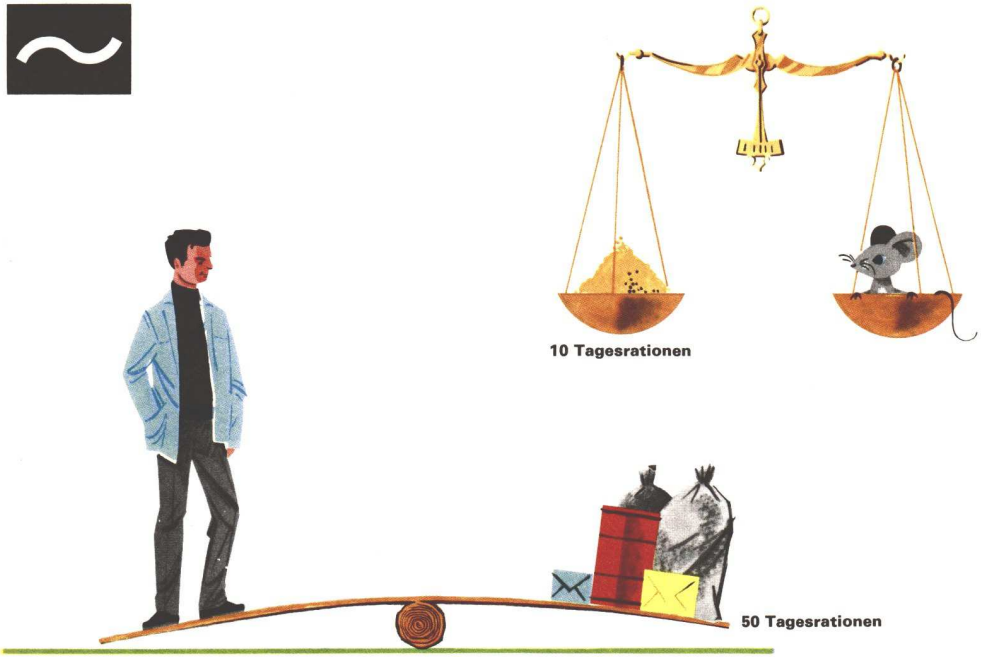


Bei einer maßstäblichen Vergrößerung entfällt also immer weniger Oberfläche auf das gleiche Volumen, und umgekehrt gehört bei einer maßstäblichen Verkleinerung immer mehr Oberfläche zum gleichen Volumen. Und das gilt nicht nur für Würfel, sondern auch für Kugeln, für Eier – kurz: für alle Körper, die die gleiche Form haben.

Solche Körper, die durch maßstäbliche Vergrößerung oder Verkleinerung auseinander hervorgehen, nennen wir auch *einander ähnlich.* Auch ebene Figuren, die durch maßstäbliche Veränderungen auseinander entstehen, heißen einander ähnlich. So sind beispielsweise alle Quadrate einander ähnlich, ebenso alle Kreise; das Bildformat 9×12 ist ähnlich dem Bildformat 18×24, und falls es sich um Vergrößerungen der gleichen Aufnahme handelt, so sind auch die Bilder einander ähnlich.

Die Frage mit Straußenei und Hühnerei werden wir uns inzwischen überlegt haben – aber wie steht es denn überhaupt mit maßstäblichen Veränderungen in der Natur? Das Buch von Jonathan Swift, der von den Reisen Gullivers erzählt, kennt wohl jeder. Gulliver wurde zuerst in das Land Liliput verschlagen, in dem alles gegenüber unserer Menschenwelt im Maßstab $1:12$ verkleinert war. Wir können uns nun selbst erklären, warum dort in einem Vertrage festgelegt wurde, daß Gullivers Essenportionen den Portionen von $12^3 = 1728$ Liliputanern entsprechen sollten. Für wieviel Liliputaneranzüge hätte dann der Stoff gereicht, den Gulliver für einen Anzug brauchte? Bei dem Vertrag über das Essen hat sich allerdings die Regierung von Liliput etwas geirrt: Für die Brennstoffmenge, die man für einen Ofen braucht, um ein Zimmer warm zu halten, ist ja auch nicht nur die Größe, das Volumen des Zimmers entscheidend; es kommt vielmehr

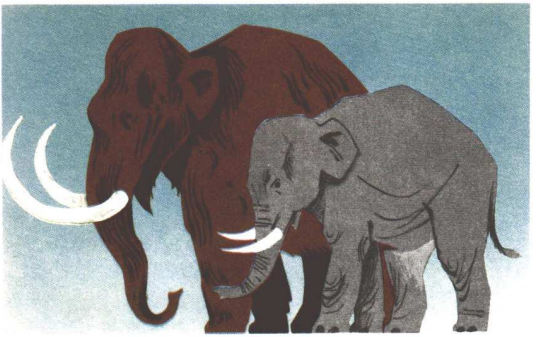




vor allem auch darauf an, wie groß die Fläche ist, von der die Wärme an die Umgebung abgegeben wird. Denken wir dabei an Wohnungen mit Außenwänden! Nun soll aber die Nahrung unserem Körper nicht nur die Energie für alle Bewegungen liefern. Sie dient vielmehr vor allem auch dazu, den Körper auf der Temperatur zu halten, auf der allein er lebensfähig ist. Diese normale Körpertemperatur beträgt für den Menschen ungefähr 37 °C. Die zur Erhaltung dieser Temperatur notwendige Wärme wird in den Körperzellen erzeugt, und je mehr Körperzellen vorhanden sind – je größer also das Volumen ist –, desto größer ist die erzeugte Wärmemenge. Da die Liliputaner aber im Verhältnis zu ihrem Körpervolumen eine viel größere Oberfläche als der Mensch Gulliver haben, ist bei ihnen die Wärmeabgabe im Verhältnis zur Größe des „Ofens" größer als bei Gulliver; sie müßten also mehr essen als nur den 1728. Teil von Gullivers Nahrungsmenge. Oder umgekehrt: Gulliver benötigt nicht 1728 Liliputanerportionen, sondern weniger.

Hier liegt auch eine Ursache dafür, daß die meisten kleinen Tiere soviel Nahrung brauchen. Die Nahrung einer Maus für einen Tag macht beispielsweise etwa ein Zehntel ihrer Körpermasse aus, während die menschliche Nahrungsmenge für einen Tag nur etwa ein Fünfzigstel der Körpermasse beträgt. Und die noch kleinere Spitzmaus – ein Insektenfresser wie Igel und Maulwurf, also nicht verwandt mit der Maus! – frißt pro Tag sogar mindestens die Hälfte von dem, was sie selbst wiegt.

Dabei wird uns klar, warum große Tiere in kalten Gegenden besser fortkommen können als kleinere. In den Polargegenden sind die Tiere meist größer als ihre Artgenossen in wärmeren Gebieten, und in der Eiszeit vor vielen tausend Jahren waren fast alle Tiere größer als die heute lebenden Arten. Jetzt verstehen wir auch, welche Folgen eine plötzliche Vergrößerung – etwa im Maßstab 12 : 1 – für eine Spitzmaus oder auch für jedes andere Tier hätte. Der Wärmehaushalt würde gestört, denn das Volumen und damit der wärmeerzeugende „Ofen" wäre auf das 1728fache gewachsen, die wärmeabgebende Körperoberfläche aber nur



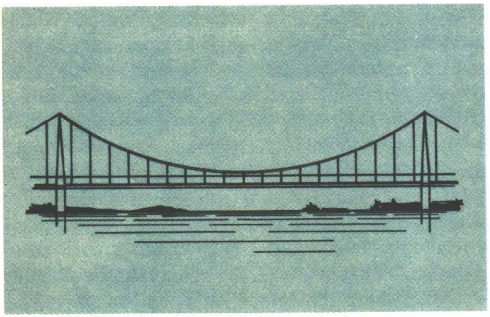
Größenvergleich zwischen Mammut aus der Eiszeit und dem heute lebenden Elefanten

auf das 144fache. Innere Überhitzung, also Fieber, und damit der Tod wäre die Folge. Umgekehrt würde die Spitzmaus gewiß erfrieren, wenn man sie maßstäblich wesentlich verkleinerte!

Mit maßstäblichen Veränderungen in der Natur ist das also so eine Sache! Zwerge mit unserem Körperbau wären gar nicht lebensfähig – ebensowenig wie Riesen. Auch die Reise Gullivers in das Riesenland Brobdingnag, in dem sein Kuchen von Wespen gefressen wird, die so groß sind wie bei uns die Lerchen, ist also ein Märchen – genau wie die hübsche Geschichte von Nils Holgersson, die Selma Lagerlöf geschrieben hat. Nils Holgersson, den ein Wichtelmännchen zur Strafe für seine Bosheit so klein zauberte, daß er auf dem Rücken des Gänserichs Martin durch ganz Schweden reisen konnte, wäre sicher schon in der ersten Nacht jämmerlich erfroren, und auch das zaubernde Wichtelmännchen könnte gar nicht existieren.

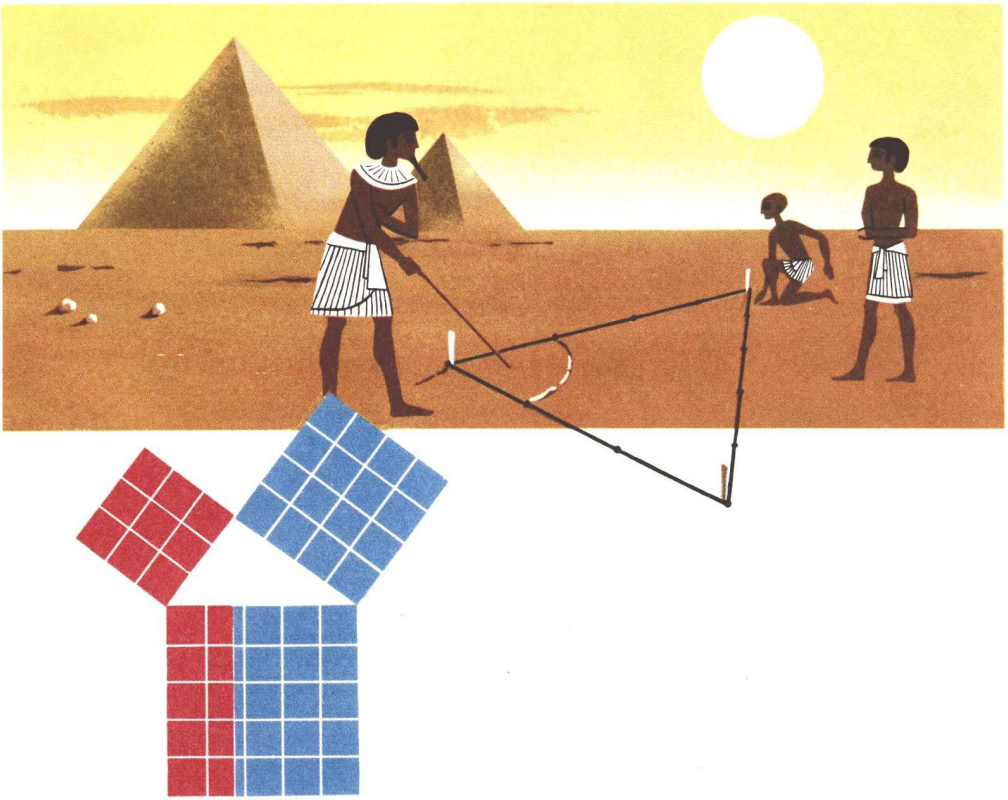
Daß beliebige maßstäbliche Veränderungen in der Natur nicht möglich sind, daß zu jedem Lebewesen vielmehr ganz bestimmte Größenverhältnisse gehören, liegt übrigens nicht nur am Wärmehaushalt. Die großen Wespen in Brobdingnag wären nämlich nicht einmal fähig, sich in der Luft zu halten, wenn sie lediglich vergrößerte Abbilder unserer Wespen wären; die Flügel würden ihnen einfach wegbrechen. So wie Längen, Flächen und Rauminhalte nicht in gleichem Maße wachsen, so ist das nämlich auch mit Größen, die mit ihnen zusammenhängen – Größen wie Dehnbarkeit, Festigkeit, Tragfähigkeit, Gewicht und so weiter. Das bedeutet, daß zum Beispiel auch in der Beweglichkeit beim Vergrößern oder Verkleinern erhebliche Veränderungen eintreten würden.

Die Springkünste der Känguruhs kann man in vielen Tierparks oder Zoologischen Gärten bewundern. Känguruhs bringen es bei ihren weitesten Sprüngen auf ungefähr 10 m, bewältigen also etwa das 5fache ihrer Körperlänge. Gegen Insekten wie die Grashüpfer oder gar den Floh sind sie aber armselige Stümper. So ein Floh, wenn er gut in Form ist, schafft nämlich das 200fache seiner Körperlänge. Bei

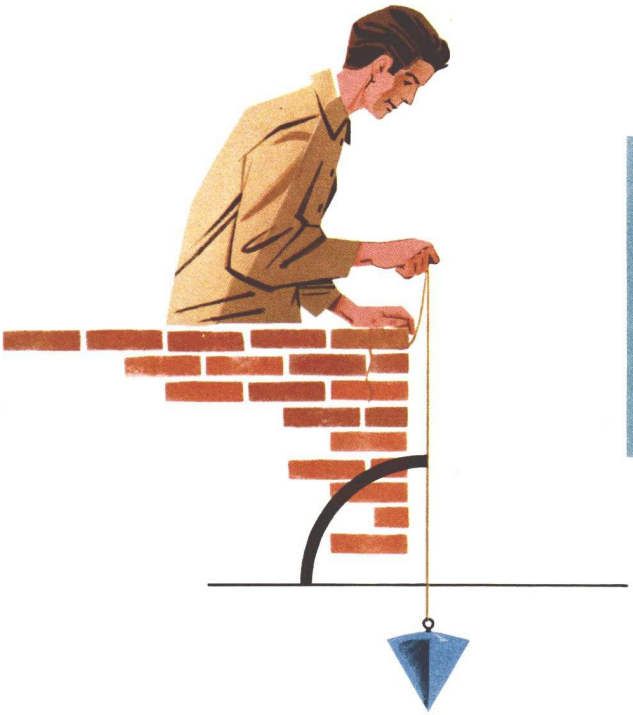


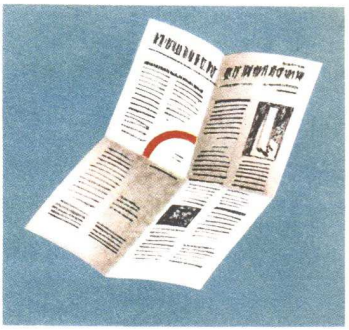
gleicher Sprungleistung müßte das Känguruh 400 m meistern. Warum tut es das nicht?
Die Sache ist ganz ähnlich wie mit den Wespen in Brobdingnag: Bei dieser Körpergröße, mit der ja ein entsprechendes Gewicht verbunden ist, wären Muskeln, Gelenke und so weiter einer solchen Beanspruchung gar nicht gewachsen. Und selbst wenn ein Känguruh mit einer besonderen Vorrichtung – einer Art Trampolin – so springen würde, daß es der Sprungweite und Sprunghöhe eines Flohes entspräche, so zöge sich das Tier beim Aufprall mindestens einige Knochenbrüche zu. Denn auch die Widerstandsfähigkeit des Körpers und insbesondere die Festigkeit der Knochen wachsen nicht in gleichem Maße wie das Gewicht.
Daß Größe und Belastbarkeit sich nicht in gleichem Maße ändern, ist auch in der Technik von Bedeutung: Über einen kleinen Bach legt man ein Brett als Steg. Aber über einen breiten Fluß kann man nicht einfach eine Brücke in Form eines – zum Beispiel im Maßstab 100:1 – vergrößerten Steges bauen. Eine Brücke sieht ganz anders aus und hat mit einem Steg gar keine Ähnlichkeit.
Wie ist's, wollen wir noch selbständig einige Beobachtungen anstellen? Sind beispielsweise die Schüsseln eines Satzes, wie sie in Mutters Küchenschrank stehen, oder die hübschen Schachtelpuppen aus der Sowjetunion, die „Matrjoschkas", die der Vater als Andenken von seiner Reise mitbrachte, ähnliche Körper? Ist also hier ein größerer Körper aus einem kleineren durch maßstäbliche Vergrößerung entstanden beziehungsweise ein kleinerer aus einem größeren durch maßstäbliche Verkleinerung? Wir achten dabei aber bitte nur auf die äußere Form, also beispielsweise nicht auf die Dicke der Wandung!

Gibt es auch linke Winkel?



Ein Verkehrsunfall und rechte Winkel –
Von den Zahlen 3, 4 und 5 der altägyptischen Seilspanner –
Was Thales und Pythagoras aus Ägypten nach Griechenland mitbrachten –
Auch ein Wanderstock kann Kummer machen –
Eine quadratische Tischdecke und ein kreisrunder Tisch?

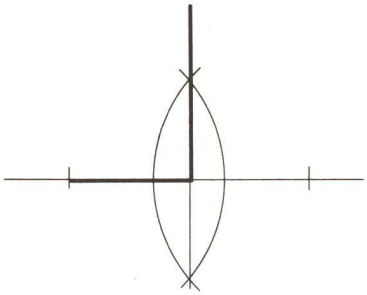




Wenn jemand von uns verlangt, zu prüfen, ob in einem Rechteck unten der linke Winkel auch wirklich ein rechter Winkel ist, ehrlich gesagt, wir würden ihn wohl ein bißchen erstaunt angucken. Gibt es denn überhaupt linke Winkel?

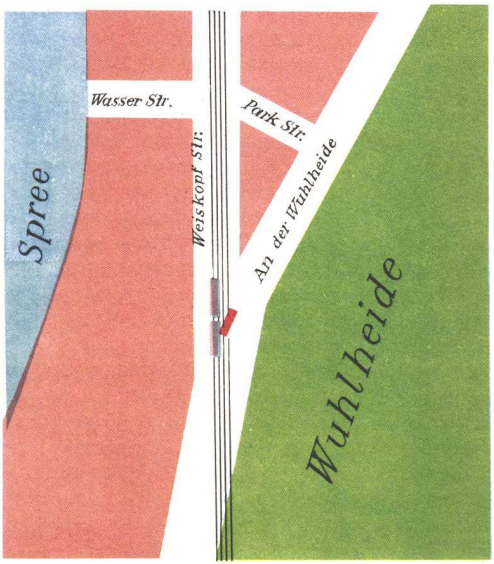
In einem Rechteck müssen doch alle Winkel an den Ecken rechte Winkel sein, ganz gleich, ob sie links oder rechts liegen. Der Name „rechter Winkel" hängt ja auch gar nicht mit „rechts" oder „links" zusammen, sondern mit „senkrecht". Er ist abgeleitet von dem Wort „Richtblei", so nannte man früher nämlich das Bleilot bei den Bauleuten, die damit die Richtung einer Senkrechten bestimmten.

Wie können wir überprüfen, ob der links liegende Winkel wirklich so groß ist wie ein rechter Winkel? Da gibt es mehrere Möglichkeiten: mit einem Zeichendreieck oder mit einem Winkelmesser. Auch die Konstruktion eines Vergleichswinkels mit Hilfe von Zirkel und Lineal wäre denkbar. Es geht aber noch einfacher. Wenn man zum Beispiel ein Blatt Papier so faltet, daß die beiden entstehenden Hälften genau aufeinander passen, so bildet die Bruchkante mit dem Rand des Blattes einen rechten Winkel. Die Bruchkante steht senkrecht auf der Randkante. Wenn man das Blatt Papier auseinanderfaltet, sieht man, daß eigentlich vier rechte Winkel entstanden sind,



zwei rechts und zwei links von der Bruchkante. Wenn wir eine Zeitung auseinanderfalten, finden wir sehr viele solcher rechter Winkel, die durch das Zusammenfalten des Papiers in der Druckerei entstanden sind.
Dabei ist es nicht wichtig, wo diese Winkel liegen. Da sie alle gleich groß sind, erhalten sie alle den gleichen Namen: „rechter Winkel". Den Namen „linker Winkel" zur Festlegung der Größe eines Winkels gibt es natürlich ebensowenig wie ein Linkseck. Mit „linker Winkel" sollte auch nur die Lage des Winkels näher beschrieben werden.
An vielen Gegenständen um uns herum finden wir rechte Winkel. In jedem Zimmer gibt es eine Fülle solcher Winkel. Die Möbel, die Türen und die Fenster haben Ecken, an denen sich rechte Winkel befinden. Auch zwischen den Wänden und dem Fußboden des Zimmers lassen sich rechte Winkel nachweisen. Mauersteine zum Bauen, Pflastersteine für den Gehweg, Schachteln und Koffer – überall finden wir rechte Winkel. Sogar im Straßenverkehr ist der rechte Winkel von Bedeutung.

„Großer Sachschaden entstand am Donnerstag bei einem Verkehrsunfall in Berlin-Oberschöneweide. Der Fahrer einer aus der Weiskopfstraße kommenden Straßenbahn hatte einen von links kommenden Pkw auf der Straße An der Wuhlheide nicht beachtet."



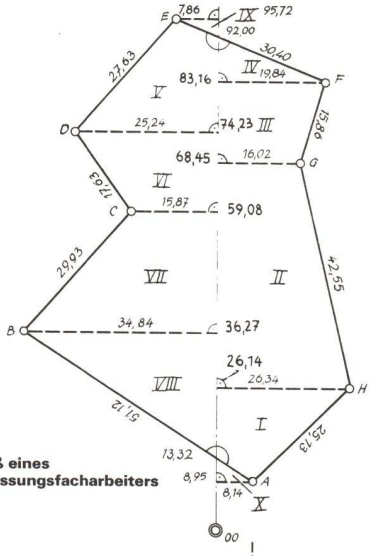
An dieser unübersichtlichen Straßenkreuzung ist früher so mancher Verkehrsunfall passiert. Der Straßenbahnfahrer mußte sich fast den Kopf verrenken, wenn er die Straße An der Wuhlheide überqueren wollte. Inzwischen aber hat die Straßenbahn an dieser Stelle die Vorfahrt.
Der Winkel, unter dem die Weiskopfstraße in

die Straße An der Wuhlheide einmündet, ist zu spitz. Ja, würden die beiden Straßen unter einem rechten Winkel aufeinanderstoßen, könnte der Straßenbahnfahrer besser in die Straße einsehen. Ob zwei Straßen unter einem rechten Winkel einander kreuzen oder nicht, ist also gar nicht so unwichtig für den Straßenverkehr, wie man zunächst vermuten könnte. Die meisten Straßen stoßen jedoch rechtwinklig aufeinander. Es gibt sogar Städte, deren Stadtpläne große Ähnlichkeit mit einem Schachbrett haben: Alle sich kreuzenden Straßen schneiden einander dort unter einem rechten Winkel.

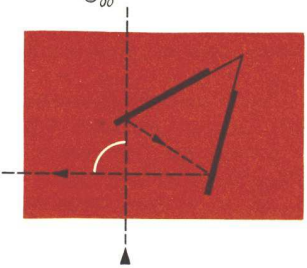
Rechte Winkel sind aus vielen Gründen sehr vorteilhaft.

Es ist leicht, eine ebene Fläche mit Figuren, an denen nur rechte Winkel vorhanden sind, also mit Quadraten und Rechtecken, auszufüllen. Ebenso kann man auch einen Raum leicht mit Körpern ausfüllen, deren Kanten nur rechte Winkel bilden, nämlich mit Würfeln und Quadern. Mauersteine lassen sich sehr bequem nebeneinander und aufeinander packen. Die meisten Verpackungsmaterialien haben die Form eines Quaders, weil man sie so sehr einfach in größeren Kartons und diese wieder in größeren Kisten unterbringen kann. Sie lassen sich sehr leicht stapeln. Diese kleinen und großen Kartons haben noch einen weiteren Vorteil: Wegen der rechten Winkel läßt sich ihr Rauminhalt leicht berechnen.

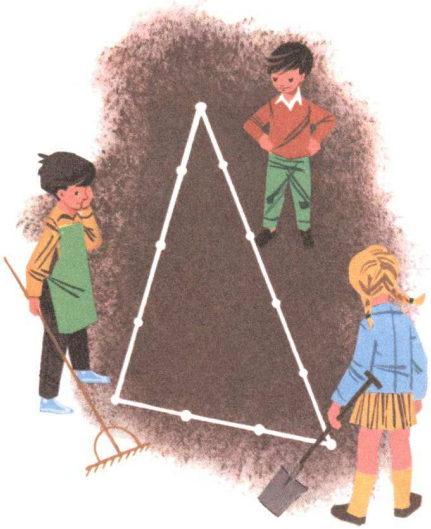
Bei der Vermessung großer Flächen, zum Beispiel der Felder einer LPG, spielt der rechte Winkel eine große Rolle. Um im Gelände einen rechten Winkel abzustecken, kann man ein Winkelkreuz benutzen oder einen Winkelspiegel, mit dem man „um die Ecke gucken" kann. Überlege an der Abbildung, welchen Winkel die beiden Spiegel einschließen!



Feldriß eines Vermessungsfacharbeiters



Strahlengang im Winkelspiegel



Heute benutzt man statt des Winkelspiegels Geräte, die Prismen enthalten. Soll der Vermessungsfachmann die Größe eines solchen Feldes bestimmen, so ist er bestrebt, das Feld in Dreiecke und Trapeze mit rechten Winkeln zu zerlegen, da dann die Berechnung der Fläche sehr einfach wird.

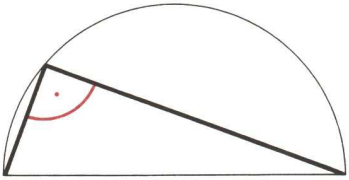
Das machten vermutlich sogar schon die alten Ägypter vor mehreren tausend Jahren so. Zur Vermessung der alljährlich vom Nil überschwemmten Gebiete, so wird berichtet, steckten sie lauter Dreiecke mit rechten Winkeln ab, allerdings weder mit Winkelkreuzen noch mit Winkelspiegeln. Ihr Verfahren war sehr einfach. In ein längeres Seil wurden in gleichen Abständen 13 Knoten geschlagen, so daß 12 gleichlange Seilstrecken entstanden. Der 1. und der 13. Knoten wurden miteinander verbunden. Dann wurde die Schnur so gespannt, wie man es auf der Zeichnung sieht. Die entstehende Figur ist ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5. Die Ägypter wußten, daß am vierten Knoten, also dort, wo die Seiten 3 und 4 zusammenstoßen, ein rechter Winkel entsteht. Auch beim Bau von Tempeln und Pyramiden wandten sie dieses Verfahren an. Es war fast eine Zeremonie, wenn bei der feierlichen Grundsteinlegung eines solchen Tempels die „Seilspanner" auftraten und an einer Fluchtlinie mit Hilfe einer solchen Knotenschnur einen rechten Winkel festlegten. Diese „Seilspanner" waren keine gewöhnlichen Handwerker, sie gehörten einer bestimmten Zunft der Priesterkaste an. Sie achteten auch darauf, daß die Geheimnisse ihres Wissens nicht allgemein bekannt wurden.

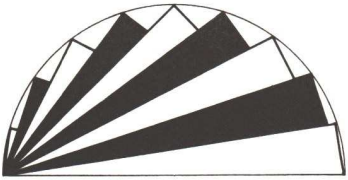
Eine solche 12teilige Knotenschnur läßt sich leicht nachmachen. Versuchen wir es einmal! Man kann dazu auch die mit Löchern versehenen Stäbe eines Stahlbaukastens benutzen. Aber wir müssen aufpassen, daß auch wirklich ein rechtwinkliges Dreieck zustande kommt. Dürfen wir die Stäbe mit 3, 4 und 5 Löchern nehmen und miteinander durch Schrauben verbinden? Denken wir an die 13 Knoten!

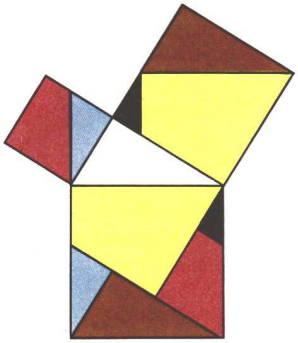
Die Ägypter waren sicher nicht die einzigen, die ein solch einfaches Verfahren kannten. Die Inder benutzten vor mehr als 2500 Jahren zum Abstecken von rechten Winkeln bei den Grundrissen von Altären, aber auch zur Vermessung von Feldern Dreiecke mit den Seiten 5, 12 und 13 oder aber 15, 36 und 39.

Diese Zahlen wurden bald auch in Griechenland bekannt. Wahrscheinlich kannte sie schon der berühmte griechische Kaufmann und Mathematiker Thales von Milet, der auf sei-

SATZ DES THALES
Alle Umfangwinkel über dem Durchmesser eines Kreises sind rechte Winkel

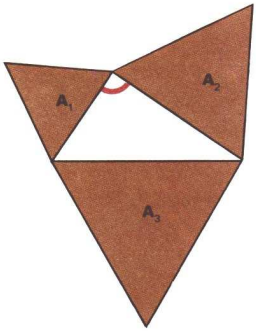


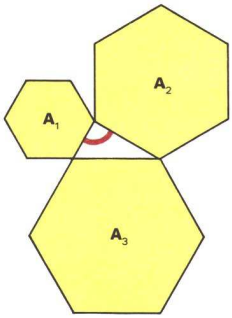




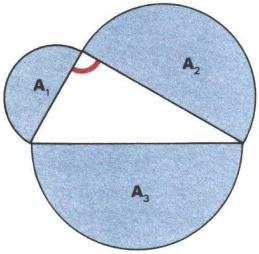
SATZ DES PYTHAGORAS
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse

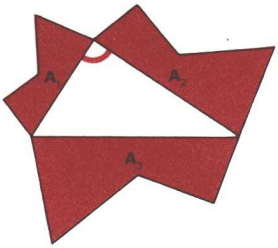
nen vielen Reisen auch nach Ägypten kam und dort von den Künsten der „Seilspanner" erfuhr. Thales wurde angeregt, sich mehr und tiefer mit Mathematik zu beschäftigen. Er wußte bereits, daß alle Winkel im Halbkreis, alle Winkel also, deren Schenkel durch die Endpunkte des Durchmessers gehen und deren Scheitel auf der Kreislinie liegen, rechte Winkel sind.
Über dem Durchmesser lassen sich also im Kreis unzählig viele rechtwinklige Dreiecke bilden.
Der berühmte Mathematiker Pythagoras von Samos war ein Schüler von Thales. Es ist möglich, daß Thales ihm von den oben genannten Zahlen berichtet hat. Auf alle Fälle hat Pythagoras auf eigenen Reisen nach Ägypten die Anwendung dieser Zahlen kennengelernt, und das ließ ihm keine Ruhe. Er untersuchte eine Vielzahl von rechtwinkligen Dreiecken, ihre Katheten und ihre Hypotenusen. Schließlich fand er eine gewisse Gesetzmäßigkeit: Die Flächen der Quadrate, die über den Katheten errichtet werden können, sind zusammen so groß wie die Fläche des Quadrats, das man über der Hypotenuse errichten kann.
Das war etwas viel Allgemeineres als das, was den Ägyptern und Indern bekannt war, ja eigentlich auch noch genau das Umgekehrte. In Ägypten und Indien hatte man gesagt, ein rechtwinkliges Dreieck liege vor, wenn die Seiten ganz bestimmte Längen hätten. Pythagoras sagte umgekehrt: In jedem rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die drei Seiten so, daß die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat ist.
Heutzutage wissen wir, daß Pythagoras wahrscheinlich nicht der erste war, der auf diese Vermutung gekommen ist. Untersuchungen an alten babylonischen Keilschrifttafeln haben





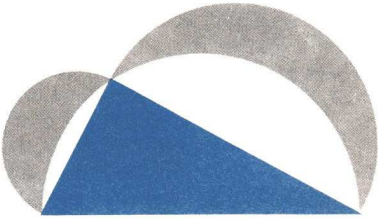
In jedem Falle gilt $A_1 + A_2 = A_3$



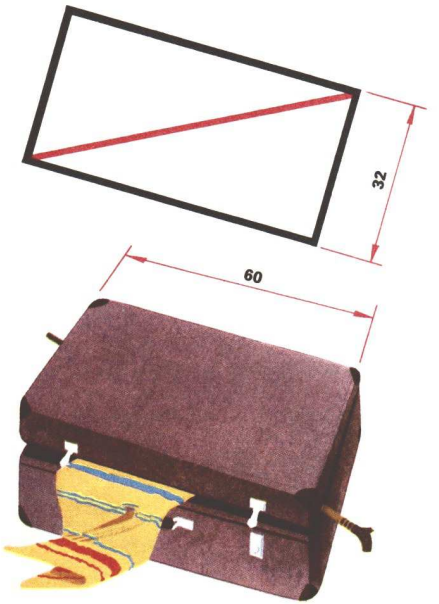


nämlich ergeben, daß in dieser Hinsicht schon mehr als 1000 Jahre vor Pythagoras Überlegungen angestellt worden sind. Wahrscheinlich aber hat Pythagoras oder einer seiner Schüler diese Vermutung bewiesen. Wir wissen allerdings nicht, wie dieser Beweis geführt worden ist. Inzwischen kennt man sehr viele Beweise für den Satz des Pythagoras – so nennt man nämlich seither diese Vermutung. Einer der Beweise dieses Satzes ist auf Seite 122 angedeutet. Überlege, wie man ihn aufschreiben könnte!

Ein derartiger Satz gilt aber nicht nur für Quadrate über den Katheten und der Hypotenuse. Er gilt auch, wenn ganz andere Figuren über den Katheten und der Hypotenuse errichtet

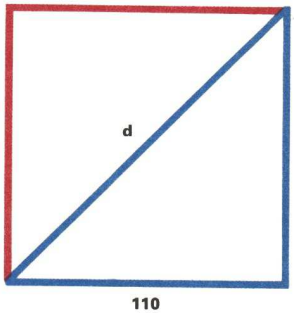


Die Möndchen des Hippokrates
Die grauen Möndchen haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das blaue Dreieck!



werden. Es können gleichseitige Dreiecke, regelmäßige Sechsecke, ja sogar beliebige, allerdings regelmäßige Vielecke sein.
Auch Halbkreise sind möglich und sogar ganz beliebige, unregelmäßige Vielecke, sofern diese nur alle die gleiche äußere Form haben, also einander ähnlich sind.

Als wir im letzten Sommer aus dem Ferienlager nach Hause fuhren, wollten wir unbedingt einen geschnitzten Wanderstock mitnehmen. Damit bei der Rückfahrt sich niemand an dem Stock aufspießen konnte, mußten wir ihn im Koffer verstauen. Der Koffer hatte eine Breite von 60 cm, eine Tiefe von 32 cm und eine Höhe von 18 cm. Der Stab war aber 70 cm lang. Konnten wir den Stock flach auf den Boden des Koffers legen? Daß es überhaupt nur gehen würde, wenn wir den Stab schräg hineinlegten, war uns klar. Wir probierten es, aber es klappte nicht. Der Stock war zu lang.
Hätten wir das auch ohne Probieren herausfinden können? Wie lang durfte der Stab höchstens sein, damit man ihn auf den Boden legen konnte? Diese Frage läßt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras beantworten.
Der Boden des Koffers läßt sich als ein Rechteck mit den Seiten 60 cm und 32 cm auffassen. Die Diagonalen sind die längsten Strecken innerhalb eines jeden Rechtecks. Wir betrachten also eine der Diagonalen. Sie zerlegt unser Rechteck in 2 rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten der Länge 60 cm und 32 cm. Die Hypotenuse des Dreiecks ist die Diagonale des Rechtecks. Nach dem Satz des Pythagoras ist das Quadrat über der Hypotenuse so groß wie die Summe der Quadrate über den Katheten, also $60^2 + 32^2 = 3600 + 1024 = 4624$.
Wie lang muß nun die Hypotenuse sein, damit ihr Quadrat einen Flächeninhalt von 4624 cm² hat? 70 cm ist zu lang, denn dann wäre er 4900 cm². Auch 69 cm ist noch zu groß.
Ein Quadrat mit der Seitenlänge 68 cm hat aber gerade als Flächeninhalt 4624 cm². Der Stock hätte also höchstens 68 cm lang sein dürfen, wenn er flach auf den Boden des Koffers gelegt werden sollte. Wir entschieden uns dafür, den Stock unten etwas zu kürzen. Wir hätten ihn allerdings auch in voller Länge in den Koffer hineinbekommen, wenn auch das Einpacken der übrigen Sachen dadurch schwieriger geworden wäre. Wie würde der Stock dann liegen, wie lang könnte er höchstens sein?
Man kann also in einem rechtwinkligen Dreieck die Länge der Hypotenuse berechnen, wenn man die Längen der Katheten kennt. Ebenso läßt sich die Länge einer Kathete berechnen, wenn die Länge der anderen Kathete und der Hypotenuse bekannt ist. Wie lang ist eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn dessen andere Kathete die Länge 12 cm und die Hypotenuse die Länge 15 cm hat?



Auf eine ähnliche Aufgabe kommen wir, wenn wir Mutter zu ihrem Geburtstag eine Tischdecke kaufen wollen. Nehmen wir an, sie wünscht sich für ihren 55 cm hohen Tisch, dessen kreisförmige Platte einen Durchmesser von 70 cm hat, eine dazu passende, allerdings quadratische Decke. Die Decke soll am Tischrand genügend lang herunterhängen. In einem Textilgeschäft werden uns quadratische Tischdecken mit den Seitenlängen 90 cm, 100 cm, 110 cm, 120 cm und 140 cm angeboten. Welche davon sollten wir wohl nehmen?
Die ersten beiden Tischdecken wohl nicht, da sie an vier Stellen des Tisches nur 10 cm beziehungsweise 15 cm herunterhängen würden. Das scheint uns zuwenig zu sein.
Die Decke darf selbstverständlich in der Diagonale nicht länger sein als 180 cm, sonst stößt sie auf dem Fußboden auf. Wir werden uns also sicherlich für eine der Decken mit den Seitenlängen 110 cm oder 120 cm entscheiden müssen. Daher berechnen wir einfach im Kopf die Längen der Diagonalen dieser Tischdecken.

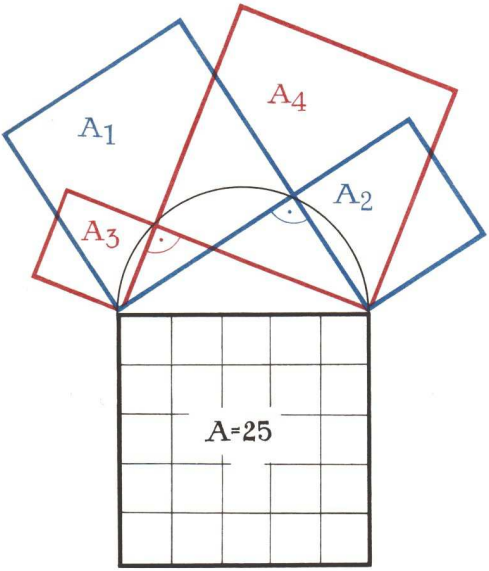
$d^2 = 110^2 + 110^2 = 12\,100 + 12\,100 = 24\,200$

Welche Zahl hat als Quadrat 24 200? So schnell bekommen wir das nicht heraus, deshalb begnügen wir uns mit einem angenäherten Ergebnis. Die Zahl muß größer sein als 150 und kleiner als 160, denn $150^2 = 22\,500$ und $160^2 = 25\,600$. Für die andere Decke machen wir es genauso:

$d^2 = 120^2 + 120^2 = 14\,400 + 14\,400 = 28\,800$

Hier ist d etwas kleiner als 170, weil $170^2 = 28\,900$ ist. Diese Decke würde mit ihren vier Zipfeln bis fast auf den Fußboden reichen. Für uns kommt also nur die Tischdecke mit der Seitenlänge von 110 cm in Frage.
Hätten wir übrigens auch die genaue Länge der Diagonalen unserer Tischdecke berechnen

können? Das ist gar nicht so einfach! Auf alle Fälle erhält man keine ganze Zahl, denn $155^2 = 24\,025$ und $156^2 = 24\,336$. Die Diagonale ist also länger als 155 cm und kürzer als 156 cm. Diese Decke hängt also überall höchstens 43 cm herunter. Ihre herunterhängenden Zipfel sind mindestens 12 cm vom Fußboden entfernt.
An diesem Beispiel sehen wir, daß die Längen der Katheten und Hypotenusen nicht immer ganze Zahlen sind. Allerdings sind die rechtwinkligen Dreiecke, in denen die Seitenlängen ganze Zahlen sind, besonders interessant. Man nennt solche Zahlen a, b, c, die in der Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ stehen, pythagoreische Zahlen. Man sagt auch, sie bilden ein pythagorei-



$A_1 + A_2 = A$
$A_3 + A_4 = A$
Es gibt beliebig viele rechtwinklige Dreiecke, deren Kathetenquadrate zusammen einen Flächeninhalt von 25 cm² haben

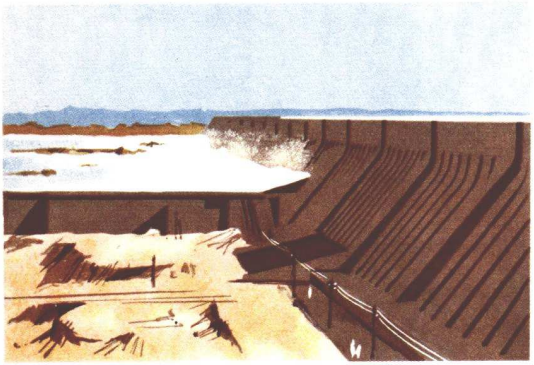
PYTHAGOREISCHE ZAHLENTRIPEL

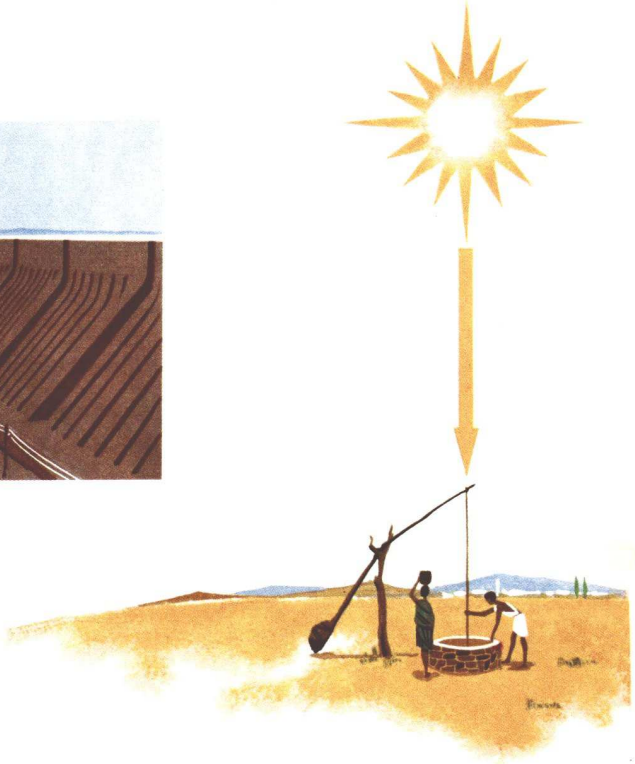
3	5	7	9	11	20
4	12	24	40	60	99
5	13	25	41	61	101

sches Zahlentripel. 3, 4 und 5 oder aber 5, 12 und 13 sind solche pythagoreische Zahlentripel, denn es ist $3^2 + 4^2 = 5^2$ und $5^2 + 12^2 = 13^2$.
Eine ganze Reihe solcher Zahlentripel sind in der unten stehenden Tabelle verzeichnet. Aus jedem Tripel erhält man beliebig viele neue Tripel pythagoreischer Zahlen, indem man jede der Zahlen mit einer bestimmten ganzen Zahl multipliziert. Aus 8, 15 und 17 erhält man zum Beispiel durch Multiplikation mit 4 die Zahlen 32, 60 und 68, die, wie wir vom Kofferpacken her wissen, ein pythagoreisches Zahlentripel bilden, denn: $32^2 + 60^2 = 68^2$. Wir probieren es einmal selbst mit den anderen Zahlen!
Diese pythagoreischen Zahlen haben sehr interessante Eigenschaften. Eine der beiden „Kathetenzahlen" muß stets durch 4 teilbar sein. Ja, es läßt sich sogar noch mehr sagen: In jedem pythagoreischen Zahlentripel treten als Teiler die Zahlen 3, 4 und 5 auf. Das heißt nicht etwa, daß die 3 immer als Teiler einer „Kathetenzahl" auftritt und die 5 als Teiler einer „Hypotenusenzahl". An dem Beispiel 8, 15 und 17 erkennen wir, daß die 3 und die 5 Teiler der „Kathetenzahl" 15 sind und daß die 4 ein Teiler der anderen „Kathetenzahl" 8 ist.
Und bei den pythagoreischen Zahlen 11, 60 und 61 sind 3, 4 und 5 sogar Teiler der gleichen „Kathetenzahl", nämlich der 60.
Das ist doch eine ganz merkwürdige Sache! In jedem pythagoreischen Zahlentripel kommen die Grundzahlen 3, 4 und 5 des ältesten und einfachsten Beispiels, das schon die Ägypter kannten, vor – wenn auch nur als Teiler der Zahlen. Von diesen seltsamen Gesetzmäßigkeiten bei den pythagoreischen Zahlen haben die ägyptischen Priester allerdings sicher noch nichts geahnt, als sie ihre geheimnisvollen Zahlen 3, 4 und 5 beim Abstecken rechter Winkel verwendeten.

Auch Schatten haben gute Seiten

Von einer großartigen Leistung vor 2000 Jahren –
Ein ehrgeiziger Versuch
während der Sommerferien –
Sonnenuhren, selbstgebaut –
Thales mißt die Pyramiden –
Wie gut,
daß die Sonne auch den Mond bescheint.

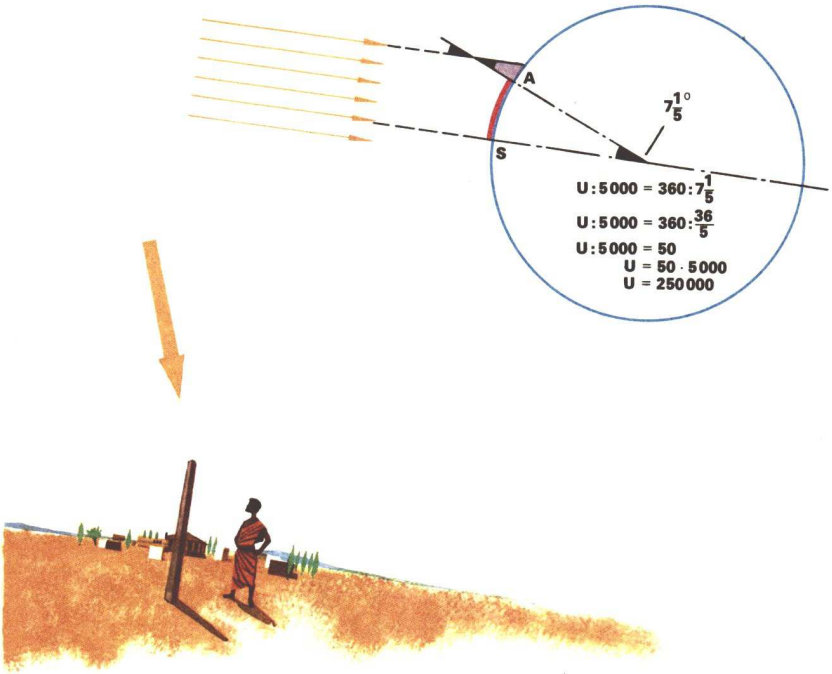




Assuan – Stadt am Nil, der seit uralten Zeiten die Wüste durchfließt und an seinem schmalen Uferstreifen üppig wucherndes Leben ermöglicht. Dort in Assuan ist ein gewaltiger Staudamm emporgewachsen. Er speichert die Fluten des Nils und macht damit mehr als drei Millionen Hektar Land fruchtbar, Land, das von den senkrecht herabfallenden Sonnenstrahlen ausgedörrt ist, Wüste ist. Die Kraftwerke am Fuße des Staudamms werden mehr elektrische Energie erzeugen als alle ägyptischen Kraftwerke vorher zusammen.

Die Stadt Assuan ist aber auch noch verknüpft mit einer anderen menschlichen Großtat, einer Großtat des menschlichen Geistes, bei der gerade die Sonne eine entscheidende Rolle spielte. Allerdings hieß Assuan noch Syene, als vor über 2000 Jahren der griechische Mathematiker Eratosthenes den Umfang der Erde ermittelte. Eratosthenes lehrte damals schon, daß die Erde Kugelgestalt habe, während es im Mittelalter, also viele Jahrhunderte später, Leute gab, die das bestritten. Er hatte gehört, daß zur Sommersonnenwende in der Nähe von Syene senkrechte Mauern und Säulen keinen Schatten werfen, weil die Sonne senkrecht über ihnen steht. In Alexandria, der großen Hafenstadt am Mittelmeer, die nahezu auf dem gleichen Meridian (Längenkreis) liegt, ließen sich jedoch zur gleichen Zeit Schatten feststellen. Eratosthenes wußte das genau, denn er lebte in Alexandria, und er wußte auch, daß beide Orte 5000 Stadien voneinander entfernt waren; das Stadion war ein griechisches Längenmaß und entspricht 184,3 m.

Wie aber nutzte Eratosthenes diese Tatsachen aus, um den Umfang der Erdkugel zu bestimmen? In Syene ließ er durch Schattenmessungen genau den Tag des höchsten Sonnenstandes ermitteln und maß in Alexandria am gleichen

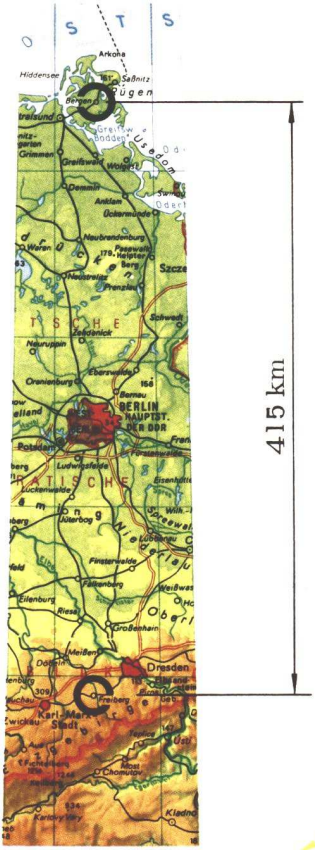


Tag mittags die Schattenlänge eines senkrecht stehenden Stabes. Daraus und aus der Länge des Stabes selbst erfuhr er, welchen Winkel die Sonnenstrahlen mit dem Stab bildeten. Für den Tag, an dem die Sonne in Syene genau senkrecht stand, der Stab dort also keinen Schatten warf, erhielt er 7°12′ oder $7\frac{1}{5}$°. Das war aber gleichzeitig auch der Winkel zwischen Alexandria und Syene, wenn man sich beide Orte mit dem Erdmittelpunkt verbunden dachte. Und da 360° gerade das Fünfzigfache von $7\frac{1}{5}$° ist, muß auch der Erdumfang das Fünfzigfache der Entfernung Alexandria–Syene betragen. Eratosthenes errechnete also den Erdumfang mit 250 000 Stadien, das entspricht rund 46 000 km.

Und das vor 2200 Jahren – ist das nicht großartig?

Nicht nur die Gedankenleistung, die hinter dieser Messung steckt, auch die Genauigkeit ist bewundernswert. Gewiß, der von Eratosthenes ermittelte Wert weicht um 6000 km vom wahren Wert, wie wir ihn modernen Meßmethoden verdanken, ab; das ist immerhin eine Strecke, die der Entfernung Berlin–Irkutsk entspricht. Verglichen mit den 40 000 km des Erdumfangs aber beträgt die Abweichung nur 15% – und das bei den primitiven Hilfsmitteln, mit denen Eratosthenes auskommen mußte!

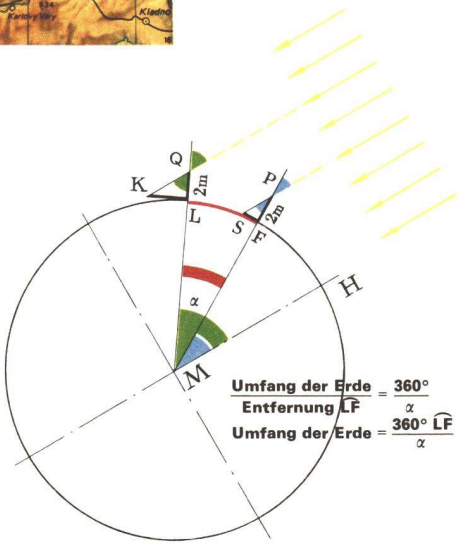
Wollen wir nicht solch eine Messung einmal selbst ausprobieren? Dazu braucht man durchaus nicht nach Ägypten zu fahren, sondern kann in unseren Breiten bleiben, in denen die Sonne nie senkrecht steht. Man muß nur das Verfahren etwas abwandeln: Schüler einer achten Klasse waren von dieser Möglichkeit so begeistert, daß sie es in ihrem Ferienlager auf der Insel Rügen versucht haben. Ein Mitschüler, der seine Ferien in Freiberg, also nahezu auf dem gleichen Längengrad, verbrachte,

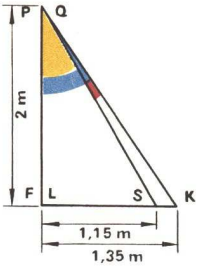


mußte ihnen dabei helfen. Wir machen uns die Verhältnisse am besten an einer kleinen Skizze klar: Der Kreis sei ein Schnitt durch die Erde, L das Lager auf Rügen, und F bezeichnet Freiberg. Die Strecken $\overline{FP}$ und $\overline{LQ}$ sollen zwei Stäbe von je 2 m Länge darstellen, die in L und F senkrecht stehen. Obwohl beide gleich lang sind, haben sie doch zur gleichen Zeit verschiedene Schattenlängen, die hier mit $\overline{FS}$ und $\overline{LK}$ bezeichnet sind. In L bilden die Sonnenstrahlen mit dem Stab den grün gezeichneten Winkel, in F den blau gezeichneten. (Würde die Sonne zur Zeit der Messung senkrecht über dem Äquator stehen, wären diese beiden Winkel gerade die geographischen Breiten von L und F.) Beide Winkel kann man durch Schattenmessung in L und F bestimmen, und diese Winkel treten am Mittelpunkt des Kreises, also der Erde, noch einmal auf. Als Differenz dieser beiden Winkel ergibt sich der rot gezeichnete Winkel α, also der Winkel zwischen $\overline{ML}$ und $\overline{MF}$. Er entspricht dem Winkel von $7\frac{1}{5}°$ in der Messung von Eratosthenes, verhält sich also zum Vollwinkel wie die Entfernung L–F zum gesuchten Erdumfang.

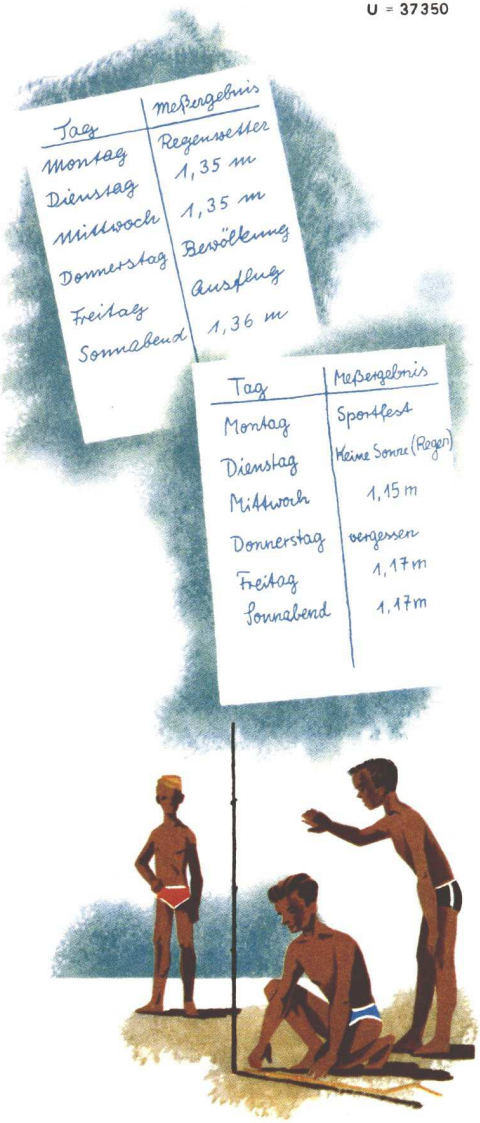
In beiden Orten wurden nun an jedem Tag einer vorher bestimmten Woche pünktlich mittags um 12 Uhr die Schattenlängen gemessen. Denn gewiß wäre es unklug gewesen, sich auf einen einzigen Tag festzulegen – wie leicht kann es trübe sein. Versuchen wir nun einmal die Berechnung für die am Mittwoch gemessenen Werte:

Um den Differenzwinkel α (rot) zeichnerisch zu bestimmen, zeichnen wir einen rechten Winkel, dessen einer Schenkel 20 cm lang ist und dem 200 cm langen Stab entspricht. Auf den anderen Schenkel zeichnen wir die Schattenlängen im gleichen Maßstab, also mit 13,5 cm (135 cm gemessen) und 11,5 cm (115 cm ge-





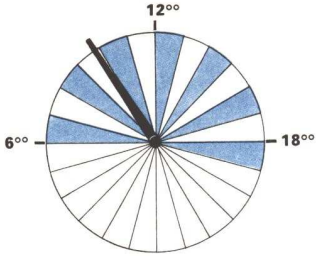
$$U = \frac{360° \cdot 415}{4°}$$
$$U = 37350$$

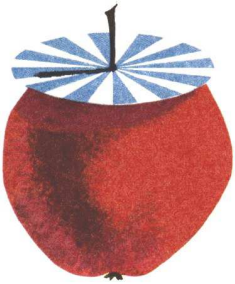


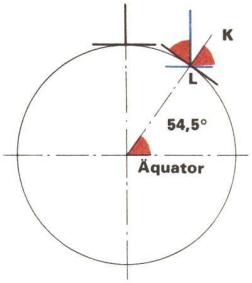
messen). Wenn wir die Endpunkte verbinden, erhalten wir zwei ineinanderliegende rechtwinklige Dreiecke. Mit dem Winkelmesser ergibt sich 4° für den Winkel α als Differenz zwischen dem gelb und dem blau gezeichneten Winkel. Wenn wir nun noch die Entfernung von L und F auf einer Landkarte bestimmen – sie beträgt 415 km –, haben wir alles für die Berechnung des Erdumfanges beisammen und erhalten schließlich 37 350 km. Wenn wir unsere recht ungenauen Messungen bedenken, müssen wir uns freilich mit der Angabe „rund 37 000 km" zufriedengeben.

Als unsere Freunde auf Rügen diesen Wert errechnet hatten, platzten sie beinahe vor Stolz über den geringen Fehler von 7%. Daß er geringer war als bei Eratosthenes, hatten sie allerdings vornehmlich der Tatsache zu verdanken, daß sie die Entfernung zwischen ihrem Lager und Freiberg so genau kannten. Eratosthenes hatte ja mit 5000 Stadien nur einen recht groben Näherungswert für die Entfernung Alexandria–Syene zur Verfügung.

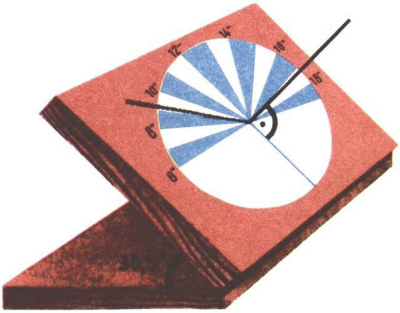
In einem solchen Lager an der Ostsee kann man auch noch andere Vorzüge des Schattens kennenlernen – nicht nur, daß man in seine angenehme Kühle flüchten kann, wenn es sehr heiß ist, aber das kommt ja an der See selten vor. Beim Baden und Spielen am Strand vergeht die Zeit wie im Fluge, und um nicht zu spät zu den Mahlzeiten zu kommen, wird eine Uhr benötigt. Aber mit Armbanduhren ist das so eine Sache: Selbst wenn sie wasserdicht sind, sollte man ihnen nicht unbedingt ein Bad im salzigen Ostseewasser verordnen. Und am Strand hinlegen? Mancher hat schon stundenlang im Sand gesucht, um solch einen kleinen Gegenstand wiederzufinden, selten mit Erfolg. Aber wie wäre es mit einer Sonnenuhr? Auch im Lager auf Rügen hat man sich über-



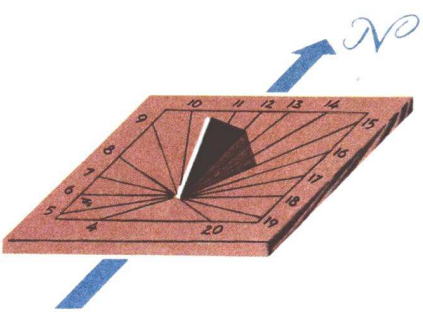


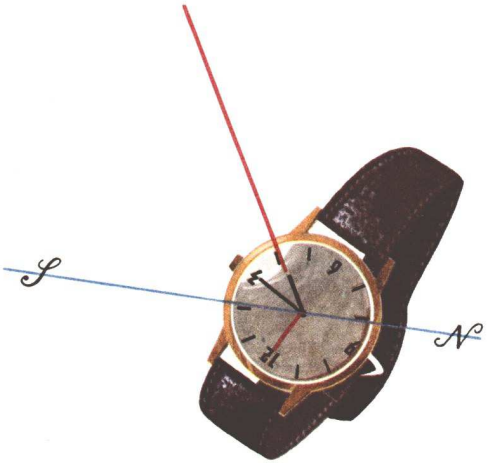


legt, wie man sich solch ein nützliches Gerät bauen kann. Überlegen wir mit:
An jedem Tag geht die Sonne im Osten auf und im Westen unter. Sie bewegt sich also scheinbar im Kreis um uns herum. Man kann auch sagen: Die Sonne beschreibt in 24 Stunden einen Winkel von 360°. In einer Stunde rückt sie also um den vierundzwanzigsten Teil des Vollwinkels von 360° weiter. Da $360:24 = 15$ ist, wird also dabei ein Winkel von 15° zurückgelegt.
Unsere Freunde am Strande der Ostsee kommen auf die Idee, auf ein Stück Pappe einen Kreis zu zeichnen, der in 24 Teile geteilt wird. An die Teilstriche schreiben sie die Zahlen von 1 bis 24. Denn wenn auch nachts keine Sonne am Himmel steht und es infolgedessen keinen Schatten gibt, so wissen sie nun doch wenigstens, wo die Sonne gerade stehen muß. Im Mittelpunkt des Kreises wird ein Nagel befestigt, und am nächsten Morgen, pünktlich um 7 Uhr, wird die Uhr in die Sonne gelegt, und zwar so, daß der Schatten des Nagels durch die 7-Uhr-Markierung geht. Voller Spannung erwarten alle, daß die Lageruhr 8 Uhr anzeigt. Aber enttäuscht müssen sie feststellen, daß ihre Uhr nicht stimmt. Sie drehen sie etwas, daß der Schatten auf die 8-Uhr-Linie fällt, aber um 9 Uhr gibt es eine neue Enttäuschung. Was ist wohl die Ursache für den Mißerfolg? Mit einem Ball und einem Stäbchen kann man sich das klarmachen; wir können auch einen Apfel nehmen, der die Erdkugel darstellen soll: Der Stiel des Apfels soll die Richtung der Erdachse haben, also senkrecht auf der Äquatorebene stehen. Auf diesen Stiel stecken wir eine kleine Pappscheibe, die, wie unsere Sonnenuhr, in 24 gleiche Teile geteilt ist. Drehen wir den Apfel um seine Achse, dann können wir uns vorstellen, daß jede der 23 Linien einmal von dem Schatten des Stieles bedeckt wird. Wenn wir nun den Apfel so langsam rotieren lassen, wie die Erdkugel sich dreht, nämlich in 24 Stunden einmal herum, dann entsprechen 15° einer Stunde.



Bis hierher scheint doch alles in Ordnung zu sein! Die Sache hat aber einen Haken: Unsere Strand-Sonnenuhr hat gar nicht so gelegen wie die Pappscheibe auf dem Apfel; schließlich liegt Rügen ja nicht am Nordpol, sondern auf dem 54. Breitengrad. Und was sich damit ändert, zeigt uns am besten eine Figur, in der die Erde wieder einfach durch einen Kreis dargestellt wird. Wir denken uns die kleine Sonnenuhr zunächst am Pol und dann – blau gezeichnet – in den Punkt L (unseren gegenwärtigen Aufenthalt) gelegt. Die Gerade, die durch L und den Mittelpunkt der Erde geht, bildet mit der Äquatorebene einen Winkel von 54,5°; das ist gleichzeitig die Angabe für den





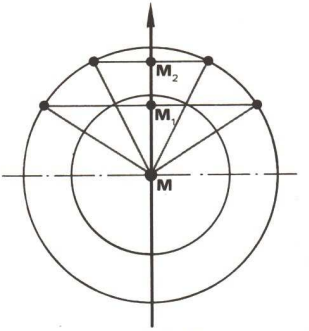
Breitenkreis, auf dem wir uns befinden. Die Sonnenuhr lag aber nicht so, ihr schattenwerfender Stab (bezeichnet mit KL) stand senkrecht zur Erdoberfläche. Wenn die Uhr die richtige Zeit anzeigen soll, muß sie also angehoben werden, und zwar so, daß sie mit der Horizontalen einen Winkel von 35,5° bildet. Wie kommt dieser Winkel zustande?

Am Strand macht allerdings die Bestimmung eines solchen Winkels einige Schwierigkeiten. Da ist es schon besser, wenn wir auf einem Brett einen Stab anbringen, der schon mit der Ebene einen Winkel von 54,5° bildet, also parallel mit der Erdachse verläuft. Es braucht auch kein Nagel oder Stab zu sein, dessen Neigung sich ja leicht verändern kann. Am einfachsten ist es, ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von 54,5° zu nehmen und auf ein Brett zu montieren. Da die Ebene der Uhr bei einer solchen Bauweise nicht mehr parallel zur Äquatorebene liegt, sind die Stundenwinkel allerdings nicht mehr gleich groß. Sie müssen deshalb besonders konstruiert werden. Noch einfacher ist es freilich, wenn man die Stundenlinien durch den Vergleich mit einer gewöhnlichen Uhr bestimmt.

Wenn das Ganze nun doch auf einen Vergleich mit einer gewöhnlichen Uhr herauskommt – könnte man da nicht auch mit einem senkrecht stehenden Schattenstab zum Ziel kommen? Sicher, doch würde eine solche Uhr nur während einer kurzen Zeit im Jahr „richtig gehen", weil sich die Stundenlinien mit dem Wechsel der Jahreszeiten stark verschieben. Bei einem Schattenstab oder einer Dreieckskante mit entsprechender Neigung aber zeigt die Uhr das ganze Jahr über die richtige Zeit an, und sie tut das sogar an allen Orten, die auf dem gleichen Breitengrad liegen.

Freilich muß man dazu die Uhr richtig aufstellen: Das Zifferblatt muß vollkommen waagerecht liegen, und vor allem muß die Kante, die den Schatten wirft, genau in Nord-Süd-Richtung zeigen. Wenn man keinen Kompaß hat, um diese Richtung zu bestimmen, kann man sich auch hier wieder den Schatten zunutze machen. Besonders einfach geht es mit einer Armbanduhr: Man hält sie so, daß der kleine Zeiger zur Sonne gerichtet ist; das hat man erreicht, wenn der Schatten des Zeigers nicht mehr zu sehen ist. Die Halbierende des Winkels zwischen dem kleinen Zeiger und der 12-Uhr-Richtung auf dem Zifferblatt zeigt dann nach Süden.

Ohne Uhr findet man die Nord-Süd-Richtung als Richtung, in der der Schatten am kürzesten ist. Nun wäre es freilich sehr umständlich, die Richtung des kürzesten Schattens durch ständige Messungen festzustellen. Recht einfach und genau ist aber folgendes Verfahren:



N

Sonnenuhr
am Rathaus in Stolberg/Harz

Wir zeichnen uns auf ein Stück Pappe zwei konzentrische Kreise und befestigen im Mittelpunkt einen Nagel. Die Radien müssen allerdings etwas größer sein als der kürzeste Schatten, den der Nagel mittags wirft und der genau nach Norden zeigt. Vormittags und nachmittags gibt es nun für jeden Kreis zwei Schattenlängen, die gleich dem Radius sind. Wenn wir die vier Punkte auf den Kreisen markieren, wo diese Schatten enden, können wir zwei parallele Sehnen zeichnen, und die Halbierungspunkte (M_1, M_2) dieser Sehnen legen dann die Nord-Süd-Richtung fest. Freilich würde man auch mit einem einzigen Kreis zum Ziel kommen, denn die Nord-Süd-Richtung muß ja auch durch den Mittelpunkt des Kreises gehen. Zwei Kreise aber bieten eine zusätzliche Kontrollmöglichkeit.

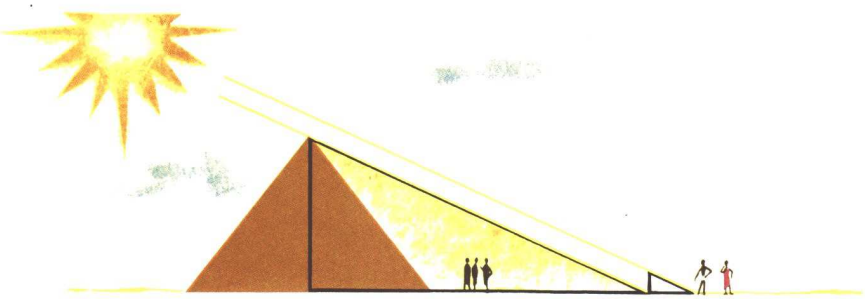
Nachdem die Sonnenuhr fertig war, war man übrigens auf Rügen bei Sonnenschein immer besonders pünktlich. Schließlich sollte niemand sagen können, die selbstgebaute Sonnenuhr sei offenbar nichts wert.

Unsere Überlegungen über die Nützlichkeit von Schatten begannen in Ägypten und mit dem griechischen Mathematiker Eratosthenes. Auch von einem anderen griechischen Mathematiker erzählt man eine Geschichte, die in Ägypten spielt und bei der es ebenfalls um Schatten geht: Thales von Milet, der noch früher als Eratosthenes, nämlich vor rund 2500 Jahren, lebte, wurde aufgefordert, die Höhe der Cheopspyramide zu bestimmen. Nun bestieg er nicht etwa mit Leitern, Seilen und Stangen diese Pyramide, um ein Maßband herunterzulassen. Das wäre auch schlecht möglich gewesen, und erlaubt hätten es ihm die Ägypter gewiß auch nicht, denn für sie war ja die Pyramide ein heiliges Bauwerk. Er steckte vielmehr einen Stock in den Wüstensand

Die Sonnenuhr von Seite 127 steht auf dem Fučik-Platz in Dresden

Sonnenuhr im Wörlitzer Park bei Dessau

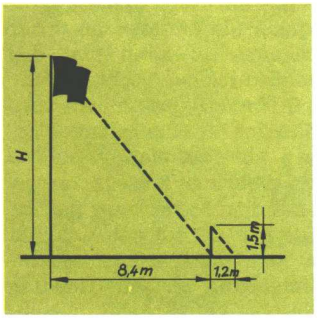
Taschensonnenuhr aus Elfenbein



und sagte: „So wie sich die Länge dieses Stockes zur Länge seines Schattens verhält, so verhält sich die Höhe der Pyramide zur Länge ihres Schattens." Das gab aber eine ganz einfache Rechnung, und eine solche Höhenbestimmung können wir überall durchführen, wenn nur die Sonne scheint.

Wenn uns interessiert, wie hoch der Fahnenmast in unserem Ferienlager ist, so nehmen wir einen Stab und stecken ihn am Ende des Fahnenmastschattens senkrecht in den Boden. Er ragt 1,5 m aus dem Boden, sein Schatten ist 1,2 m lang, und die Länge des Mastschattens beträgt 8,4 m. Nun kann man nach einer maßstäblichen Zeichnung die gesuchte Höhe des Fahnenmastes ablesen oder auch rechnen: Da der Mastschatten siebenmal so lang ist wie der Stabschatten, ist auch der Mast siebenmal so hoch wie der Stab. Demnach ist der Fahnenmast 10,5 m hoch.

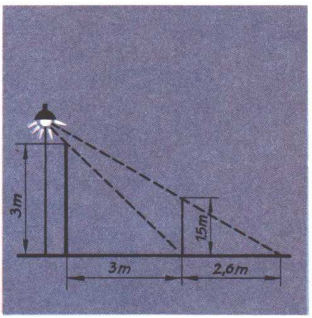
Klappt das wirklich nur bei Sonnenschein und nicht auch mit einer Laterne? Da Probieren bekanntlich über Studieren geht, versuchen wir es einmal mit dem ungefähr 3 m hohen Eingangstor zum Lager: Sein Schatten, der durch die Lampe am Tor erzeugt wird, ist 3 m lang. Setzen wir einen Stab von 1,5 m Länge an das Ende des Torschattens, so ist sein Schatten 2,6 m lang. Stellen wir hier dieselbe Rechnung an wie beim Fahnenmast, erhalten wir für die Höhe des Tores ungefähr 1,7 m. Aber das kann nicht stimmen. Warum versagt unsere Methode hier? Bedingung ist, daß die Lichtstrahlen parallel verlaufen. Das Sonnenlicht kann man als parallele Lichtstrahlen auffassen; schließlich beträgt ja der Sonnendurchmesser das 108,7fache des Erddurchmessers, und die Sonne ist rund 149,5 Millionen km von uns entfernt. Die Lampe aber ist eine ganz kleine Lichtquelle und hängt dicht am Tor.

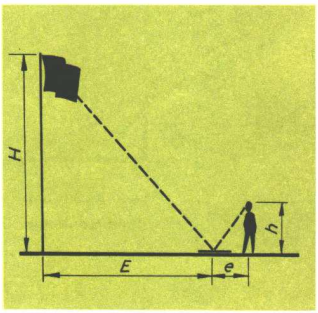


$$\frac{H}{1{,}5\,m} = \frac{8{,}4\,m}{1{,}2\,m}$$

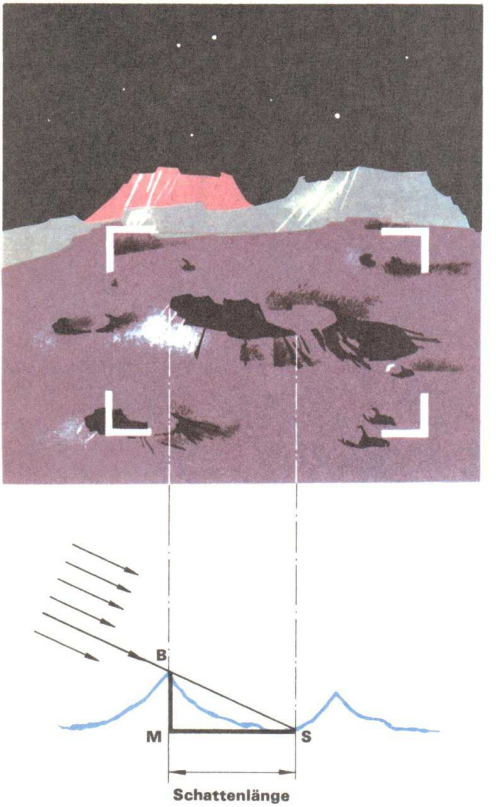
$$H = \frac{8{,}4\,m \cdot 1{,}5\,m}{1{,}2\,m}$$

$$H = 10{,}5\,m$$





Man kann eine Höhenbestimmung auch ohne Sonne mit Hilfe eines Spiegels durchführen
H : h = E : e

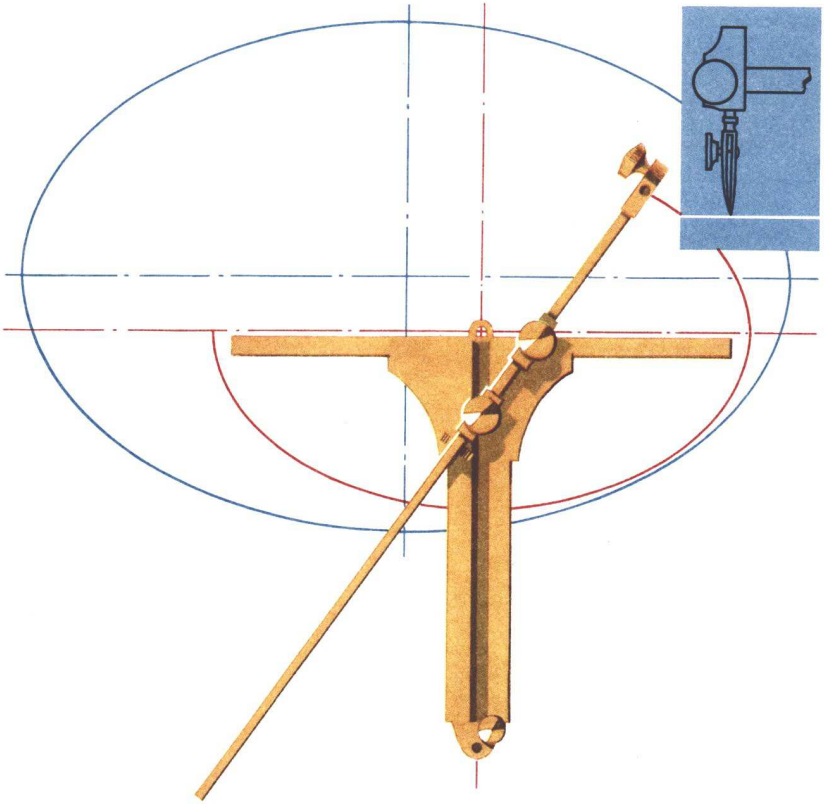


Das Licht wird oben durch den Lampenschirm abgefangen und als weit auseinandergehendes Lichtbündel zur Erde geworfen; von parallelen Strahlen kann hier keine Rede sein.

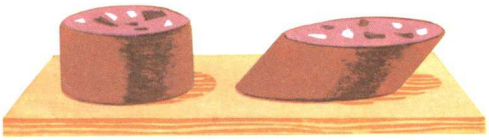
Die Schattenmessung ist auch heute noch keineswegs überholt. Man mißt mit Hilfe des Schattens beispielsweise die Höhe der Berge auf dem Mond. Das klingt unwahrscheinlich, nicht wahr? Wie konnte die Höhe der Berge gemessen werden, bevor ein Mensch den Mond betreten hatte? Schließlich ist aber die Stellung des Mondes bekannt und die Lage der Berge auch. Daraus kann man den Winkel bestimmen, unter dem die Sonnenstrahlen zu einem bestimmten Zeitpunkt auf den Gipfel des untersuchten Mondberges fallen. Die Sonne erzeugt auf dem Mond einen Schatten des Berges, und wir können uns nun ein rechtwinkliges Dreieck entstanden denken: Seine Ecken sind die Spitze des Berges (B), der Fußpunkt des Lotes auf die Mondebene (M) und das Ende des Schattens (S). $\overline{MS}$ läßt sich von der Erde aus messen; man benutzt dazu ein Okularmikrometer. Da der Winkel als Einfallswinkel der Sonnenstrahlen bekannt ist, kann man das Dreieck BMS in maßstäblicher Verkleinerung zeichnen und die Höhe $\overline{MB}$ bestimmen oder auch berechnen. Freilich ist eine genaue Messung sehr schwierig, aber auf diese Weise hat man die Höhen von mehreren tausend Bergen festgestellt. Da es auf dem Mond keine großen ebenen Flächen wie bei uns auf der Erde die Meere gibt, kann man diese Höhen nur in bezug auf ihre Umgebung messen. Gewisse Gebiete hat man deshalb willkürlich zur „Nullebene" erklärt.

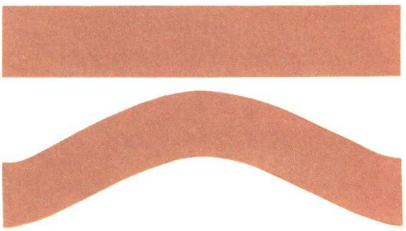
Wir sehen, wie auch heute noch – ebenso wie vor 2500 Jahren – der Schatten als Hilfsmittel von den Wissenschaftlern genutzt wird. Ja, Schatten haben auch gute Seiten!

Von der Wurst zum Sputnik



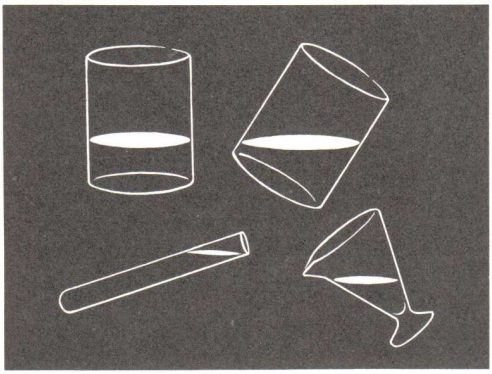
Die Ellipse, eine schräge Verwandte des Kreises –
Eine Leine und zwei Pflöcke –
Im Brennpunkt ist's heiß oder laut –
Planeten, Satelliten und ihre Straßen.





So sehen die aufgeschnittenen Wursthäute aus. Welche Haut ist größer?

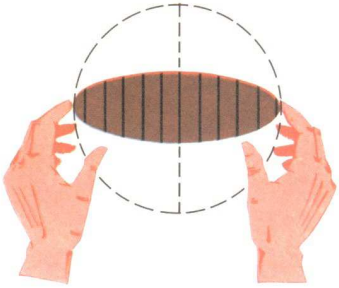
Auch wenn man ein kegelförmiges Gefäß, etwa einen Meßbecher, nimmt, entsteht beim Schräghalten eine Ellipse. Das ist verwunderlich! Man könnte doch erwarten, daß dort, wo der Meßbecher schmaler wird, also nach unten zu, auch die Flüssigkeitsoberfläche schmaler wird



Vor uns liegt eine runde, schöne, appetitliche Wurst. Wir wollen uns ein paar Scheiben abschneiden; führen wir gerade Schnitte aus, erhalten wir kreisrunde Scheiben, Scheiben mit einer Kreisfläche. Ein schräger Schnitt liefert uns eine längliche Scheibe, die – wir haben dieselbe Wurst geschnitten – größer ist als der Kreis und deren Begrenzungslinie wir Ellipse nennen. Die Ellipse begegnet uns noch bei vielen anderen Gelegenheiten: Nehmen wir ein Wasserglas und füllen es etwa zur Hälfte mit Wasser! Wenn das Glas auf dem Tisch steht, ist die Begrenzungslinie zwischen der Wasserfläche und dem Glas ein Kreis. Wenn wir das Glas aber schräg halten, wird aus dem Kreis eine Ellipse – wie bei der Wurst. Diese Ellipse wird um so länglicher, je schräger das Glas gehalten wird – bis das Wasser schließlich auszulaufen beginnt. Wenn man ein ganz schlankes Glas nimmt, etwa ein Reagenzglas, wie es für chemische Versuche benutzt wird, dann kann man sehen, daß es sehr, sehr schmale Ellipsen gibt.

Ellipsen sieht man sehr oft, immer dann nämlich, wenn man schräg auf einen Kreis blickt. Das kann man an einem Fahrrad genauso beobachten wie an einem Blumentopf. Sehen wir uns daraufhin die Abbildungen unseres Buches noch einmal an. Sehr häufig werden wir dort, wo wir Kreise erwarten, zum Beispiel bei Rädern, Ellipsen finden. Das gilt sogar für die Zeichnung, mit der wir den geraden Schnitt durch die Wurst, durch den ein Kreis entstanden ist, dargestellt haben. Aber wenn wir diese Ellipse auf der Zeichnung sehen, dann haben wir alle die Vorstellung, das sei ein Kreis. Würden wir die Wurst tatsächlich so halten wie auf der Abbildung, so sähen wir, daß die Schnittfläche eine Ellipse ist.

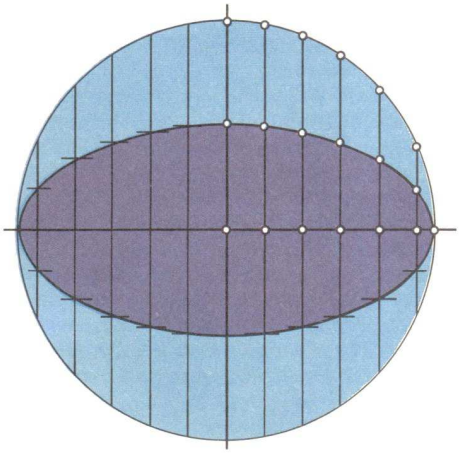
Nehmen wir einen flachen Teller oder eine

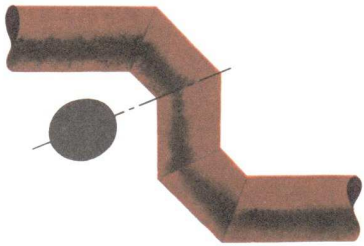


Schallplatte zur Hand, noch besser wäre eine entsprechend große Pappscheibe, auf der wir Striche ziehen können: Die Kreisgestalt sehen wir nur, wenn wir ganz gerade daraufschauen, also von oben, wenn die Scheibe auf dem Tisch liegt. Sobald wir aber die Scheibe zwischen den Fingern um einen ihrer Durchmesser ein Stückchen drehen, dann erscheint der Kreis nur noch als Ellipse. Diese Ellipse ist wieder um so schmaler und länglicher, je mehr man dreht, bis schließlich nur noch der Rand als Strich zu sehen ist. Auf die Pappscheibe können wir uns zwei Durchmesser zeichnen, die aufeinander senkrecht stehen; bei einem Teller wird das schlecht gehen. Wenn wir nun das Ganze wiederholen und dabei um einen der beiden gezeichneten Durchmesser drehen, sehen wir diesen Durchmesser immer in der gleichen Länge, während sich der andere mehr und mehr verkürzt. Diese beiden Durchmesser nennt man auch Hauptachse und Nebenachse der Ellipse.

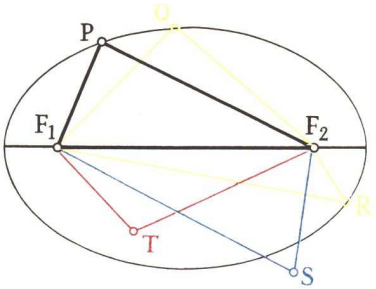
Mit diesem Drehen und schrägen Ansehen eines Kreises hängt ein Verfahren zum Zeichnen von Ellipsen eng zusammen: Auf unserer Pappscheibe ziehen wir parallel zu dem Durchmesser, der eben beim Drehen zur Nebenachse geworden ist, etwa zehn Sehnen, auf jeder Seite fünf und alle ungefähr im gleichen Abstand. Wenn wir nun wieder wie vorhin drehen, so werden auch diese Sehnen kürzer, und zwar alle im gleichen Verhältnis wie auch der Kreisdurchmesser. Ist also zum Beispiel die Nebenachse nur halb so lang wie der ursprüngliche Kreisdurchmesser, so sind es auch alle zehn Ellipsensehnen, verglichen mit den ursprünglichen Kreissehnen.

Das nutzen wir zum Zeichnen einer Ellipse aus:





Ist bei einem Rohr mit kreisförmigem Querschnitt eine Richtungsänderung nötig und kann man das Rohr nicht biegen, so werden schräg geschnittene Rohrstücke in geeigneter Weise aneinandergefügt. Die „Nahtlinien" sind Ellipsen



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{RF_1} + \overline{RF_2}$$
$$\overline{SF_1} + \overline{SF_2} > \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$$
$$\overline{TF_1} + \overline{TF_2} < \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$$

Auf unserer Kreisscheibe werden ja die zehn Sehnen und der eine Durchmesser von dem anderen Durchmesser halbiert. Von diesen 22 Hälften markieren wir jeweils die Mittelpunkte. Wenn wir nun diese 22 Punkte und dazu die beiden Endpunkte des anderen Durchmessers, der zur Hauptachse wird, miteinander verbinden, bekommen wir eine Ellipse. Die Rundung müssen wir freilich aus freier Hand und mit etwas Gefühl herstellen. Eine mehr oder weniger schmale Ellipse wäre entstanden, wenn wir, anstatt zu halbieren, die Sehnen in einem anderen Verhältnis verkürzt hätten.

Nun schneiden wir die gezeichnete Ellipse aus: Ob es uns wohl gelingt, sie so zu halten, daß sie uns wiederum als Kreis erscheint?

Wir wollen noch eine andere Art des Zeichnens von Ellipsen betrachten, die häufig leichter auszuführen ist. In früheren Jahrhunderten, als ganz regelmäßig gestaltete Gartenanlagen Mode waren, hat man gern elliptische Blumenbeete und Hecken angelegt, und man spricht deshalb von der „Gärtnerkonstruktion". Das, was der Gärtner mit Pflöcken und Schnur macht, wollen wir mit zwei Reißbrettstiften machen, jedoch einen geschlossenen Faden nehmen. Auch auf diese Weise kann man mehr oder weniger schlanke Ellipsen zeichnen, man braucht ja nur die Stifte weiter auseinander oder dichter zusammenzusetzen, darf aber dabei die Länge des Fadens nicht verändern. Natürlich kann man auch umgekehrt einen längeren oder kürzeren Faden nehmen und die Stifte an derselben Stelle stehen lassen. Was passiert dann?

Wir wollen uns die so entstandene Ellipse noch etwas näher ansehen: Das in der Abbildung gezeichnete Dreieck PF_1F_2 entspricht dem gespannten Faden. Da dieser bei ein und derselben Ellipse stets die gleiche Länge behält, hat das Dreieck PF_1F_2 auch immer den gleichen Umfang, gleichgültig, welchen Punkt auf der Ellipse wir als P annehmen. Und da auch die Strecke $\overline{F_1F_2}$ ihre Länge nicht verändert, bleibt die Summe $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ der beiden anderen Dreiecksseiten stets erhalten, auch wenn jede einzelne dieser Seiten für sich beim Wandern von P ihre Länge ändert; das sollte jeder einmal selbst nachprüfen! Wir können also sagen: Für alle Punkte ein und derselben Ellipse ist die Summe der Abstände von den Punkten F_1 und F_2 dieselbe. Und da diese Summe für alle Punkte außerhalb der Ellipse größer, für alle Punkte im Inneren kleiner ist, können wir noch genauer sagen:

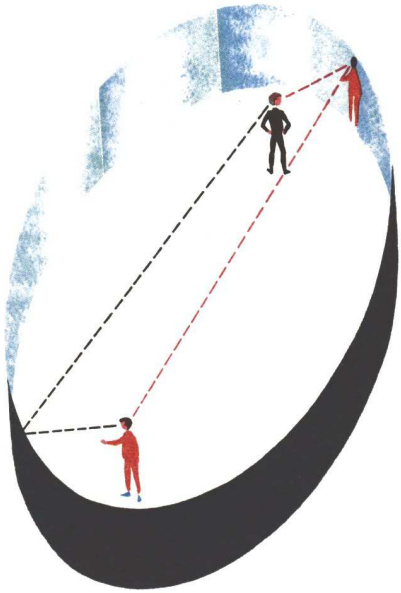
Eine Ellipse ist gerade diejenige Menge von Punkten, die sämtlich von zwei festen Punkten

ein und dieselbe bestimmte Abstandssumme haben.

Wie eine Ellipse aussieht, ist demnach durch zwei Längenangaben völlig festgelegt, nämlich durch den Abstand $\overline{F_1F_2}$ und durch die Summe $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$. Wollen wir auch noch festlegen, wo auf unserem Papier die Ellipse liegen soll, so müssen wir die beiden Punkte F_1 und F_2 irgendwo so markieren, daß sie den geforderten Abstand haben. Diese beiden Punkte nennt man übrigens die Brennpunkte der Ellipse.
Nun können wir sicher die folgenden Fragen leicht beantworten:

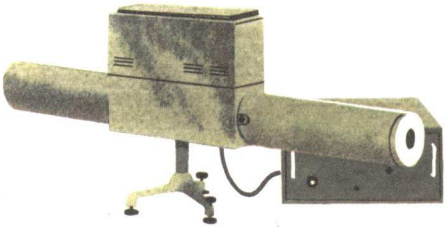
1. Welcher Ellipsenpunkt liegt am dichtesten bei F_1?
   Welcher ist am weitesten von F_2 entfernt?
2. Gibt es Ellipsenpunkte, die von F_1 und F_2 gleich weit entfernt sind?
3. Welche Bedingung muß für die Längen $\overline{F_1F_2}$ und $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ erfüllt sein, damit sie wirklich eine Ellipse bestimmen?
4. Zeichne eine Ellipse, für die $\overline{F_1F_2} = 7$ cm und $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 11$ cm ist!
5. Hat eine Ellipse Symmetrieachsen?
6. Stell dir eine Ellipse so stark vergrößert vor, daß du auf ihr mit dem Fahrrad entlangfahren kannst. Wo mußt du den Lenker am stärksten einschlagen? Wo kannst du am schnellsten fahren?
7. Gibt es Ellipsen, bei denen die Strecke $\overline{F_1F_2}$ waagerecht liegt, die aber dennoch höher als breit sind?

Wir haben vorhin den Begriff „Brennpunkt" genannt. Bisher kannten wir diesen Begriff nur in einem anderen Zusammenhang: „Unsere Reporter waren stets an den Brennpunkten der Friedensfahrt zu finden" oder „Die Erzeugnisse des Maschinenbaus standen auf der Messe in



Brno im Brennpunkt des Interesses". Die Linsen im Fotoapparat vereinigen die Lichtstrahlen in ihrem Brennpunkt und können als „Brenngläser" wirken. Tatsächlich haben die Ellipsenbrennpunkte ähnliche Eigenschaften. Stellen wir uns einmal eine recht große Ellipse vor, etwa $\overline{F_1F_2} = 15$ m. Längs dieser Ellipse sollen etwa 2 m hohe, entsprechend gekrümmte Spiegel stehen, die Spiegelfläche zum Inneren des so entstehenden „elliptischen Zylinders" gerichtet. Wenn nun in jedem Brennpunkt eine Person steht, so können sich diese beiden immer sehen, gleich nach welcher Richtung sie blicken. Alle Lichtstrahlen nämlich, die von einem Brennpunkt ausgehen, werden von der Ellipse so reflektiert, daß sie zum anderen Brennpunkt hingelenkt werden. Warum muß man bei einem elliptischen Zylinder statt von Brennpunkten von Brennlinien sprechen?

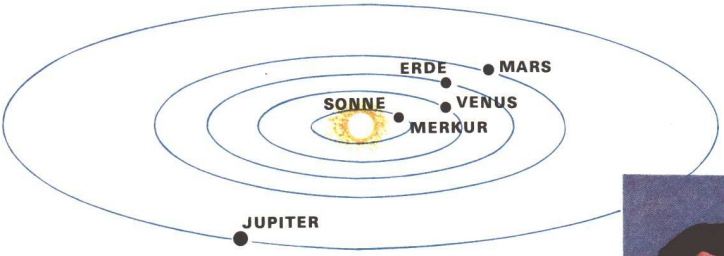
Gaslaser ZGL 900 – v des VEB Carl Zeiss Jena

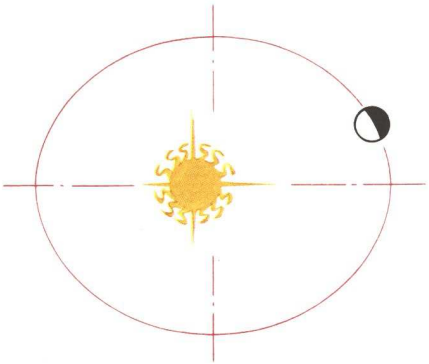


Was für Lichtstrahlen gilt, gilt natürlich auch für den Schall: Wenn in dem einen Brennpunkt einer Ellipse ganz leise gesprochen wird, so hört man es in dem anderen sehr gut, was sonst bei dieser Entfernung gar nicht möglich wäre. Allerdings braucht man dazu keine Spiegelwände. Früher hat man zuweilen Hecken entsprechend angepflanzt und beschnitten und in den Brennpunkten der so geschaffenen Ellipse Bänke aufgestellt. Dabei brauchte die Ellipse gar nicht voll ausgeführt zu sein – es reichten schon einige Bogen, damit man auf einer Bank jedes Gespräch, das auf der anderen geführt wurde, verstand. Auch in manchen Kuppelbauten wie Schlössern und Kirchen finden sich solche Erscheinungen; hier spricht man von „Flüstergalerien".

Gewiß ist das nur eine Spielerei, auch wenn im siebzehnten Jahrhundert einmal vorgeschlagen wurde, dieses Phänomen zur Verständigung in Festungen auszunutzen, also an eine Art Vorläufer des Telefons gedacht war.

Eine wichtige Anwendung dieser Brennpunkteigenschaften der Ellipse hat sich aber gerade in jüngster Zeit ergeben, beim sogenannten Laser (sprich: Leser). Es geht dabei um Geräte, die ganz schmale Bündel von Licht aussenden, das sich nicht zerstreut, sondern auch noch in großer Entfernung vom Gerät als schmales Bündel zusammenbleibt. Die Energie dieses Lichtbündels ist so groß, daß man damit beispielsweise winzige, nur unter dem Mikroskop wahrnehmbare Löcher in härteste Materialien wie Metall, Korund oder Diamant „einbrennen" kann. Auch zu Heilzwecken kann man eine solche Anordnung nutzen: Bei der Netzhautablösung, einer schweren Erkrankung des Auges, die meist zur Erblindung führt,



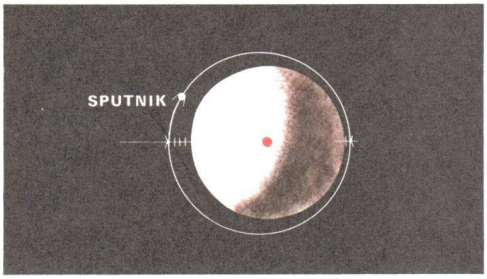


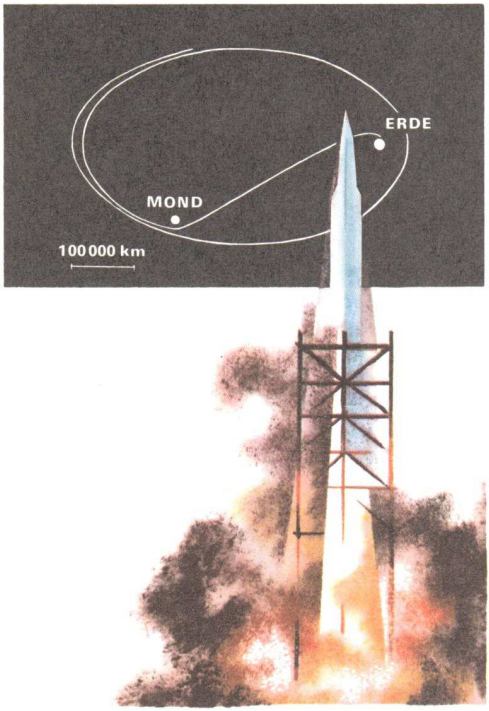
Johannes Kepler 1571 bis 1630

kann man mit einem solchen Laserstrahl die Netzhaut wieder auf ihrer Unterlage anheften. Zur Erzeugung eines Laserstrahls wird mitunter ein stabförmiger Rubinkristall, also ein – meist künstlich hergestellter – Edelstein, benutzt, der in einer Brennlinie eines innen verspiegelten elliptischen Zylinders angebracht wird. In der anderen Brennlinie befindet sich eine stabförmige Blitzlichtlampe, deren Lichtblitze voll auf den Rubin konzentriert werden und ihn dadurch zum Aussenden des Laserstrahls anregen, der aus einem Ende des Kristalls austritt.

Auch in einem anderen Zusammenhang begegnet uns die Ellipse, und hier spielt sie ebenfalls eine bedeutende Rolle: Unsere Erde bewegt sich um die Sonne. Ein solcher Umlauf dauert ein Jahr. Der Weg, den unsere Erde bei dieser Jahreswanderung zurücklegt, hat die Form einer Ellipse. Allerdings ist diese Ellipse recht „dick", sie unterscheidet sich nur wenig von einem Kreis: der kleinste Sonnenabstand der Erde ist 147,1 Millionen km, der größte 152,1 Millionen km. Wenn auch 5 Millionen km Unterschied, für sich betrachtet, sehr viel sind, im Verhältnis zu den beiden genannten Abständen ist das gering.

Daß die Erdbahn eine Ellipse ist, hat vor über 300 Jahren der große Mathematiker und Astronom Johannes Kepler entdeckt, und er fand auch heraus, daß die Erde umso schneller wandert, je näher sie der Sonne ist. Und was für die Bewegung der Erde gilt, das gilt auch für alle anderen Planeten: Merkur zum Beispiel, der sonnennächste Planet in unserem Planetensystem, bewegt sich auf einer Ellipse, bei der die größte Sonnenferne immerhin $1\frac{1}{2}$mal so groß ist wie die größte Sonnennähe.





Noch weit ausgeprägter ist die Ellipsengestalt der Flugbahnen mancher Erdsatelliten. Als künstliche Himmelskörper müssen sie den gleichen Gesetzen gehorchen wie die Planeten, nur daß sie sich um die Erde bewegen; in dem einen Brennpunkt ihrer ellipsenförmigen Bahn steht also die Erde. Da hierbei aber die Entfernungen wesentlich kleiner sind als bei den Planeten im Sonnensystem, müssen wir uns etwas genauer ausdrücken: Der eine Brennpunkt ist der Erdmittelpunkt.

Als der erste Sputnik im Oktober 1957 von der Sowjetunion gestartet wurde, konnte man in den Zeitungen lesen: größte Erdnähe 230 km, größte Erdferne 940 km. Der eine Wert ist viermal so groß wie der andere, und daraus könnte man schließen, daß die Bahnellipse verhältnismäßig länglich war. Das war aber gar nicht der Fall! Man muß nämlich bedenken, daß die beiden Angaben von der Erdoberfläche aus zu zählen sind. Für die Ellipsengestalt sind aber die Abstände vom Brennpunkt aus zu messen, das heißt man muß zu beiden Angaben den Erdradius mit 6370 km Länge addieren: 6600 km und 7310 km unterscheiden sich zwar auch noch um 710 km, der eine Wert ist aber keineswegs mehr viermal so groß wie der andere. Bei Lunik 3 dagegen, der erstmals die Rückseite des Mondes fotografierte, betrugen Erdnähe und Erdferne 40 800 km beziehungsweise 468 000 km. Dieses Verhältnis von ungefähr 1 : 11 wird auch kaum geändert, wenn jeweils der Erdradius addiert wird: Die Ellipsenform ist hier also sehr deutlich.

Ob an der Wurst oder beim Sputnik – die Eigenschaften der Ellipse sind in allen Fällen die gleichen, und es gäbe heute keine Weltraumschiffe, wenn diese Eigenschaften nicht lange vorher bereits erforscht und erkannt worden wären!

Achtung, Kurve!

Von sichtbaren und unsichtbaren Kurven –
Verzwickte Bewegungen –
Fahr-Rad – Kurven, aber gelenkt wird nicht –
Was zwei Schweizer Brüder vor 250 Jahren entdeckten –
Der Käfer und die Schallplatte –
Das Gesicht der Sonnenblume.

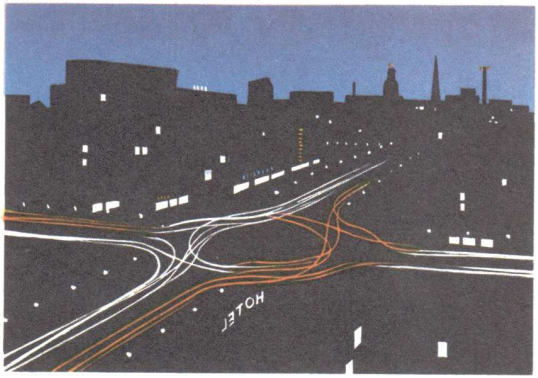
Rechtskurve

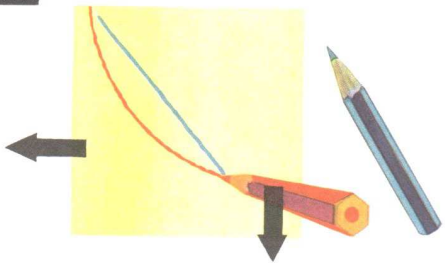
Doppelkurve, nach rechts beginnend

Wenn ein Autofahrer diese Warnzeichen auf einer Landstraße sieht, wird er sehr vorsichtig. Saust er nämlich zu schnell in die Kurve, die dieses Schild ankündigt, würde der Wagen mit großer Wucht aus der Kurve hinausgetragen werden.

Was ist das eigentlich, eine Kurve? „Eine Kurve, das ist die Stelle, wo man vom letzten Wagen des Zuges die Lokomotive sehen kann", würde vielleicht ein Pfiffiger sagen, und da hätte er nicht einmal ganz unrecht. Meist denkt man bei Kurven an krumme Linien oder sogar nur an einen bestimmten gekrümmten Teil einer Linie, wie das auch die Verkehrspolizei mit dem Schild „Kurvenreiche Strecke" andeutet. Wir dagegen wollen alle Linien als Kurven ansehen, gleichgültig, ob sie überall gekrümmt sind oder auch nur zum Teil, oder aber auch gar nicht. Auch eine Gerade wollen wir eine Kurve nennen.

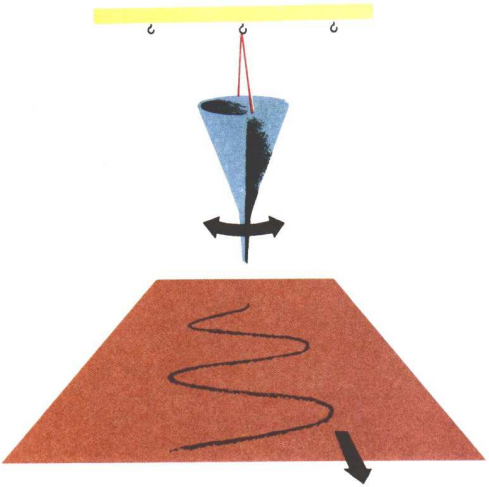
Eine Landstraße besteht dann also nicht aus geradlinigen Stücken und Kurven, sondern die ganze Landstraße stellt von ihrem Anfang bis zu ihrem Ende eine Kurve dar. Allerdings muß man davon absehen, daß diese Landstraße mehrere Meter breit ist. Auch die schmalen Bänder der Eisenbahnlinien und die etwas breiteren der Autobahnen beschreiben solche Kurven. Wir finden sie im Atlas oder auf Landkarten annähernd naturgetreu aufgezeichnet. Noch besser kann man diese Kurven auf der Erdoberfläche von einem Flugzeug aus betrachten. Dann sieht man auch die Autos als winzige Punkte sich längs dieser Straßenkurven bewegen. Einen kleinen Eindruck gewinnt man schon, wenn man einmal vom obersten Stockwerk eines Hochhauses, beispielsweise vom Kindercafé im Berliner „Haus des Kindes" oder vom Fernsehturm im Zentrum Berlins aus einen Blick auf die Straßen wirft. Dann sieht man

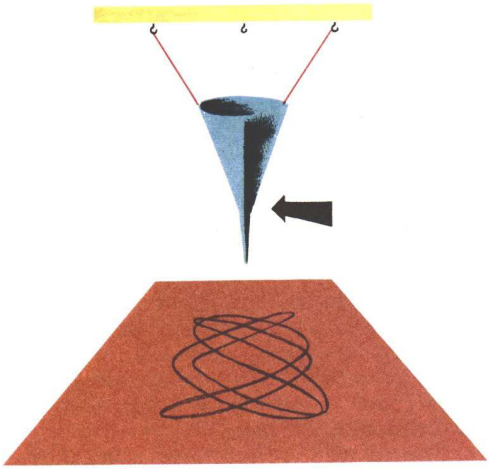




Zieht man das Papier gleichbleibend schnell fort, so entsteht eine Strecke (blau);
zieht man es dagegen gleichmäßig schneller werdend fort, so entsteht ein Parabelbogen (rot)

vielleicht sogar, daß mancher Kreisverkehr unten oftmals gar kein „Kreis"-Verkehr ist.
Von dort oben kann man die Bewegungskurven verfolgen, die die vielen Autos beim Fahren beschreiben. Im großen und ganzen sind diese Kurven durch die Straßen schon festgelegt, aber ein Auto könnte ja auch im Zickzackkurs die Straße entlangfahren. Die eigentliche Bewegungskurve eines Autos ist genaugenommen unsichtbar, denn von ihr ist ja stets nur die Stelle sichtbar, an der sich das Auto jeweils befindet. Höchstens, wenn aus dem fahrenden Auto Öl auf die Fahrbahn tropft, ist die Bewegungskurve deutlich zu sehen. Das Auto zeichnet in diesem Falle seine Bewegungskurve selbst auf.
Nachts lassen sich solche Bewegungskurven von Autos auch fotografisch aufzeichnen. Das Bild zeigt, wie es aussieht, wenn man den Straßenverkehr von oben fotografiert und dabei den Verschluß des Fotoapparates lange offenhält. Die Bewegungskurven der Autos zeichnen sich selbst durch die hellen Scheinwerfer und die roten Rücklichter auf dem Film auf. Die fahrenden Autos werden dabei nicht abgebildet, wohl aber die Spuren ihrer Bewegung. Stimmen übrigens die abgebildeten Bewegungskurven mit den wirklichen in der Form überein?
Besonders interessant und überraschend können solche Bewegungskurven sein, wenn gleichzeitig zwei Bewegungen ausgeführt werden. Was für eine Kurve entsteht zum Beispiel, wenn man auf einem Blatt Papier von oben nach unten gleichbleibend langsam eine gerade Linie zeichnet und außerdem noch das Blatt nach links fortzieht? Probieren wir es einmal! Damit die Kurven auch schön aussehen, sollten wir uns beim Wegziehen des Papiers helfen lassen. Welche Kurven entstehen können, zeigt die Zeichnung.
Verzwickter wird es schon, wenn man den Blei-





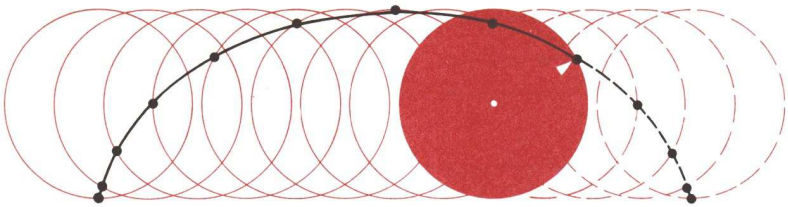
stift längs einer Strecke immer hin und her bewegt und dabei gleichzeitig wieder das Blatt Papier fortziehen läßt. Man muß sich allerdings große Mühe geben, wenn man ein einigermaßen schönes Bild von der Kopplung dieser beiden Bewegungen haben will. Einfacher ist es, man macht es so wie es die Abbildung zeigt: Ein Trichter, mit losem Sand gefüllt, schwingt hin und her, und ein Brett wird gleichmäßig darunter hinweggezogen. Es überlagert sich dann die Hin- und Herbewegung des Trichters mit der geradlinigen Bewegung des Brettes. Die Wellenlinie, die dabei entsteht, nennt man Sinuskurve.

Wenn wir statt des Trichters eine abgeblendete Taschenlampe und statt des Brettes eine Fotoplatte benutzen, dann würden sich beide Bewegungen zusammen (ganz ähnlich wie bei den Rücklichtern der Autos) in Form solcher Sinuskurven von selbst auf dem Film aufzeichnen.

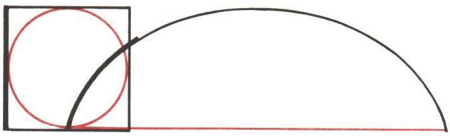
Ganz verzwickt wird es aber, wenn man den Trichter mit dem Sand pendeln läßt und gleichzeitig auch noch hin und her bewegt, und zwar senkrecht zur Schwingungsrichtung des Pendels. Genau das gleiche erreicht man, wenn man den Trichter wie in der Abbildung aufhängt. Stößt man den Trichter dann zum Beispiel von vorn rechts an, so führt er gleichzeitig zwei Bewegungen aus: Einmal schwingt er von vorn nach hinten und gleichzeitig von rechts nach links. Interessante und überraschende Linien entstehen bei diesen verwickelten Bewegungen.

Es gibt aber noch viel mehr solcher interessanter Bewegungskurven.

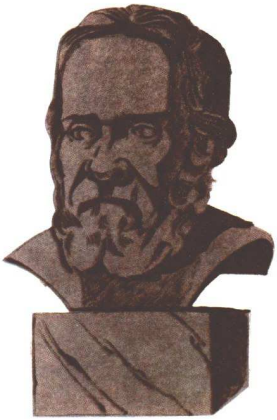
Welche Kurve beschreibt zum Beispiel das Ventil am Vorderrad eines Fahrrades? Einen Kreis? Das stimmt auch, aber nur, wenn sich das Vorderrad dreht und man das ganze Fahr-



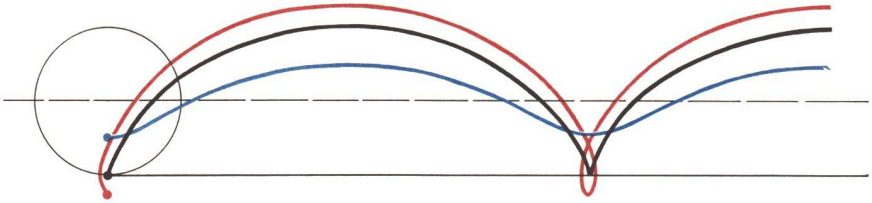
rad vorn anhebt. Wie sieht aber die Bewegungskurve des Ventils aus, wenn man fährt?
Wir wollen das durch einen kleinen Versuch herausfinden. Wir schneiden uns dazu aus Pappe eine kleine Kreisscheibe mit einem Durchmesser von 3 cm aus. Außerdem brauchen wir noch ein etwa 10 cm bis 15 cm langes, schmales Stück Pappe mit einer geraden Kante. Auf einem großen Blatt Papier rollen wir nun die kleine Kreisscheibe (Vorderrad) an dieser Kante (Straße) ab. Damit die Scheibe auf keinen Fall an der Kante entlanggleitet, rauhen wir sowohl den Rand des schmalen Stücks Pappe als auch den der Kreisscheibe etwas an. Genau wie es die Zeichnung zeigt, markieren wir uns auf dem Papier nacheinander die verschiedenen Lagen ein und desselben Randpunktes (Ventil). Verbinden wir dann die einzelnen Punkte miteinander, so erhalten wir die Bewegungskurve eines Kreispunktes beim Abrollen des Kreises auf einer Geraden. Hat sich die Kreisscheibe einmal um sich selbst gedreht, dann ist die Rollstrecke gleich dem Umfang des Kreises und der Bogen das Vierfache des Kreisdurchmessers. Rollt sie weiter, so wiederholt sich das Spiel. Es ergeben sich lauter gestreckte Bogen, die in Spitzen auf der Geraden aufsetzen. Diese Bewegungskurve soll als erster der italienische Physiker und Astronom Galileo Galilei entdeckt haben. Er hat ihr den Namen Zykloide gegeben, was soviel wie „vom Kreis erzeugt" heißt. Man nennt sie auch einfach Radkurve. Galilei war so begeistert von der Zykloide, daß er Brückenbogen die Form dieser Kurven geben wollte.
Die Bewegungskurve des Fahrradventils müßte also etwa eine Zykloide sein. Ganz genau stimmt das freilich nicht, denn das Ventil berührt ja beim Rollen des Rades gar nicht den Erdboden. Wir müßten eigentlich untersuchen,



Der Zykloidenbogen ist ebenso lang wie der Umfang des Quadrats; die darunterliegende Strecke ist ebenso lang wie die Kreislinie



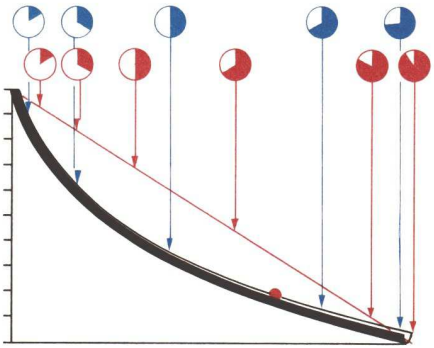
Galileo Galilei 1564 bis 1642



welche Kurve ein Punkt im Innern des Kreises beim Abrollen des Kreises auf einer Geraden beschreibt. Um das herauszufinden, bohren wir ein winziges Loch durch die Scheibe (aber nicht durch deren Mittelpunkt!). So können wir bequem die verschiedenen Lagen dieses Punktes mit einem gut gespitzten Bleistift auf dem Papier markieren. Diesmal erhalten wir eine flache Radkurve ohne Spitzen. Sie heißt auch gestreckte Zykloide. Sie ist um so gestreckter, je dichter der innere Punkt am Mittelpunkt liegt. Welche Kurve wäre übrigens entstanden, wenn wir das Loch doch im Mittelpunkt der Kreisscheibe gemacht hätten?

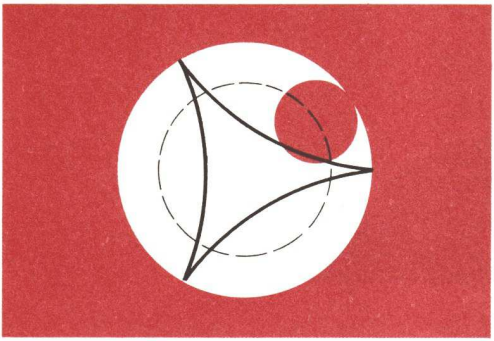
Wie würde wohl die Bewegungskurve eines Punktes aussehen, der außerhalb eines auf einer Geraden abrollenden Kreises liegt, mit dem Kreis aber fest verbunden ist? Wir können sie uns genauso wie die beiden anderen Kurven verschaffen. Freilich müssen wir dazu einen Punkt außerhalb der Kreisscheibe festlegen, zum Beispiel so, wie es die Abbildung oben andeutet. Wir erhalten eine verschlungene Radkurve.

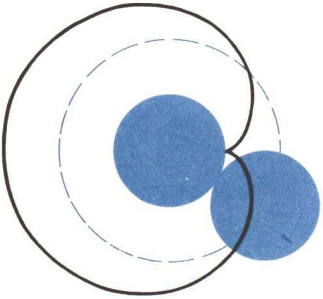
Die spitze Radkurve hat übrigens noch eine interessante Eigenschaft. Soll eine Kugel in einer Fallrinne von einem Punkt A in kürzester Zeit zu einem anderen Punkt B rollen, so gibt man der Rinne die Form eines halben Bogens einer nach unten durchgebogenen spitzen Radkurve. Die Kugel kommt dann früher in B an als längs jeder anderen Rinne, die die beiden Punkte miteinander verbinden würde. Das ist doch recht merkwürdig. Denn zunächst denkt man doch, daß die Kugel auf dem kürzesten Weg am schnellsten von A nach B rollen müßte, also längs der Strecke $\overline{AB}$. Aber hier kommt es ja gar nicht auf den kürzesten Weg, sondern auf die kürzeste Zeit an. Die Kugel erreicht jede Geschwindigkeit in kürzerer Zeit auf einer



zykloidenförmigen Rinne als auf einer geradlinigen Bahn, weil sie schneller „auf Touren kommt". So ist die Kugel trotz des Umweges früher am Ziel als auf dem kürzesten Weg. Diese Eigenschaft der spitzen Radkurve haben zwei Schweizer Mathematiker, die Brüder Jacob und Johann Bernoulli, schon vor 250 Jahren herausgefunden.

Bisher haben wir untersucht, welche Kurve ein Ventil eines Fahrrades beschreibt, das auf einer ebenen Straße fährt. Wie ist es aber, wenn das Rad auf einer gekrümmten Fläche rollt? Artisten zeigen mitunter in einem Hohlzylinder aus Stahl ihre Kunststücke. Mit einem Motorrad drehen sie auf den gebogenen Innenwänden ihre Runden. Jedes Rad rollt etwa auf einer Kreislinie ab, die durch die Form des Stahlzylinders gegeben ist, und zwar im Innern des Kreises. Wie sieht da wohl die „Ventilkurve" aus? Wir werden genauso vorgehen wie bei den vorigen Radkurven. Aus einem

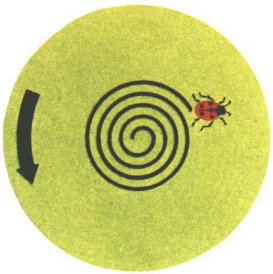




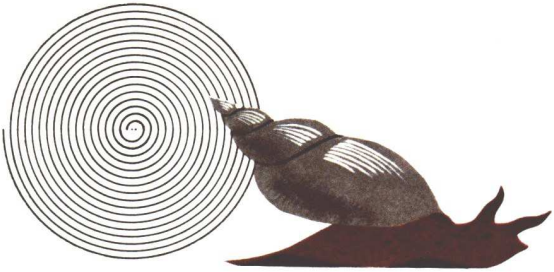
oben: Hypozykloide mit drei Spitzen
unten: Herzkurve als Beispiel für eine Epizykloide

großen Stück Pappe schneiden wir dazu ein kreisförmiges Loch mit einem Durchmesser von 9 cm aus und legen es auf ein entsprechend großes Stück Papier. Nun rollen wir die kleine Kreisscheibe, die wir uns vorhin angefertigt haben, am Rand des Kreisloches ab. Dabei markieren wir wieder den Weg, den ein Randpunkt bei diesem Abrollen zurücklegt. Eine solche Kurve nennt man innere Radkurve oder auch Hypozykloide.

● Welche Kurve entsteht nun, wenn der Lochdurchmesser doppelt so groß ist wie der Durchmesser der Kreisscheibe? Wie groß muß der Lochdurchmesser sein, damit eine innere Radkurve aus genau vier Bogen, die sich gegenseitig nicht schneiden, entsteht? Wie groß muß dieser Durchmesser sein, so daß der auf der Kreisscheibe markierte Randpunkt erst nach zwei Umläufen wieder in seine Ausgangslage zurückkehrt und die Kurve aus fünf Bogen besteht?



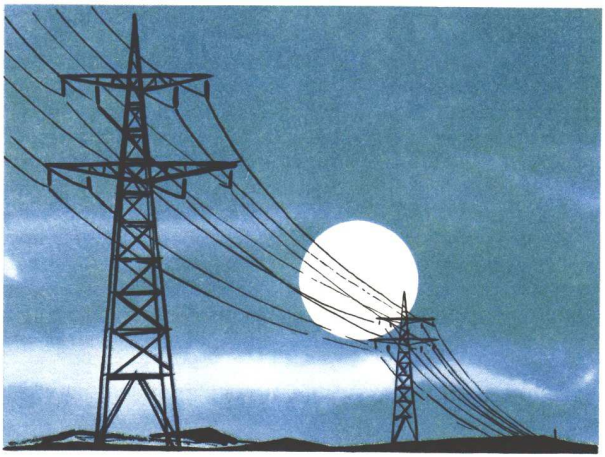
Es gibt übrigens auch innere Radkurven, bei denen dieser Punkt nie wieder in seine Ausgangslage zurückkehrt.
Bei den Hypozykloiden gibt es auch gestreckte und verschlungene Kurven. Die Bewegungskurve des Motorradventils ist annähernd eine Hypozykloide, genaugenommen eine flache Hypozykloide.
Natürlich kann man einen Kreis auch von außen auf einem anderen Kreis abrollen. Die so entstehenden Kurven heißen äußere Radkurven oder Epizykloiden. Unter ihnen ist besonders die Kurve interessant, die entsteht, wenn der abrollende Kreis genauso groß wie der feste Kreis ist. Sie besteht nur aus einem einzigen Bogen und ähnelt in ihrer Form dem Umriß eines Herzens. Daher heißt sie auch Herzlinie.
Recht ausgefallene und merkwürdige Kurven haben wir also beim Rollen eines Kreises gefunden, und wir haben feststellen müssen, daß man schon genau hinschauen und nachdenken muß, wenn man die Bewegungskurve eines Punktes, der gleichzeitig zwei oder gar noch mehr Bewegungen ausführt, herausfinden will. Phantasie gehört auch dazu.
Wie sieht wohl die Bewegungskurve eines Käfers aus, der auf einer Kreisscheibe vom Mittelpunkt auf kürzestem Weg an den Rand der Scheibe kriecht? Das wäre natürlich eine gerade Linie. Was aber, wenn sich die Kreisscheibe auch noch gleichzeitig um ihren Mittelpunkt dreht? Wir wollen dabei annehmen, daß der Käfer sich unterwegs nirgendwo ausruht, sondern gleichbleibend schnell nach außen krabbelt. Seine Bewegungskurve würde vom Mittelpunkt der Kreisscheibe ausgehen und sich um ihn herumwinden, so etwa wie die Aufzugsfeder eines Spielzeugautos oder einer Uhr. Eine solche Kurve heißt Spirale.

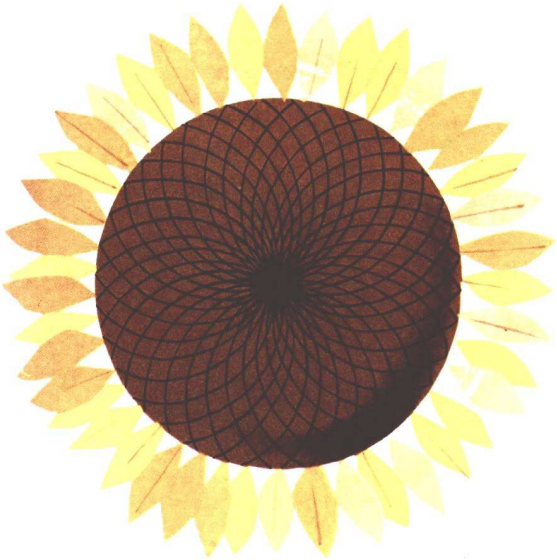


Die Rillen einer Schallplatte verlaufen, jedenfalls auf den ersten Blick gesehen, alle kreisförmig. Das stimmt aber nicht. Es sind auch gar nicht viele Rillen, sondern nur eine einzige, die spiralförmig verläuft. Gerade diese eine „Rillenspirale" durchläuft ja der Saphir des Plattenspielers. Welche Bewegungskurve beschreibt übrigens dabei der Saphir selbst?

Spiralen findet man auch in der Natur. Schauen wir uns einmal eine Sonnenblume genauer an. Wenn wir aufmerksam die Samenkörnchen im „Gesicht" der Sonnenblume betrachten, sehen wir, daß sie in Form von Spiralen angeordnet sind. Auch die Kammern von Muscheln einiger Meerestiere sind spiralförmig angeordnet. Man muß schon einen Blick dafür haben und sehr genau beobachten können, um diese Spiralen zu erkennen.

Ganz deutlich dagegen und jedem auf den ersten Blick erkennbar sind die Kurven, die von durchhängenden Telefondrähten gebildet werden. Scheinbar auf und ab laufen die Drähte, wenn wir sie aus dem fahrenden Zug betrachten. Wäscheleinen, überhaupt alle Seile und auch Ketten, die an zwei Enden aufgehängt sind, hängen infolge ihres Gewichts ebenso durch wie die Telefondrähte. Man nennt Kurven dieser Form Kettenlinien. Auch bei den Freiluftleitungen, die an den großen Hochspannungsmasten aufgehängt sind, finden wir sie. Ganz besonders gewaltig und imposant sind die Kettenlinien, die von den Kabeln großer Hängebrücken gebildet werden. An diesen riesigen Kabeln, die aus vielen Tausenden von Einzeldrähten bestehen, ist die Fahrbahn aufgehängt. Solche Brücken baut man meistens, wenn sehr große Weiten überbrückt werden sollen. In weitem Schwung verlaufen die Kettenlinien dieser Hängebrücken durch die Landschaft.





Seite 9:
Bei 39 Kamelen erhalten 4 Söhne jeweils $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$.

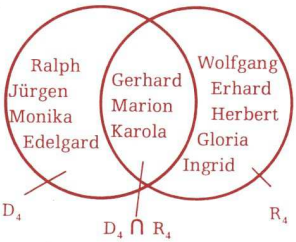
Seite 12:

S und J:	Wolfgang, Siegfried, Peter
S, aber nicht J:	Christa, Monika
S, aber nicht M:	Wolfgang, Siegfried, Peter
Nicht S und nicht M:	Gisela, Manfred, Astrid, Horst Jutta
Nicht S, aber J:	–

Seite 13

Zu S – nicht zu J:	Ja
Zu M – nicht zu S:	Nein
Zu M – zu S:	Ja
Zu J – zu M:	Nein
Nicht zu S – nicht zu M:	Ja
Auf keinem der Zettel?	Nein
Auf mehreren Zetteln?	Nein

Seite 14:
I: Peter, Wolfgang, Kurt, Ingrid
II: Friedhelm, Jürgen, Monika, Edelgard
III: Alfred, Dagmar
IV: Inge



$R_2 \cap E_3$:	Peter, Kurt, Angela
$R_2 \cap D_1$:	Rainer, Susi
$E_2 \cap D_3$:	Alfred, Doris
$R_3 \cap S$:	Alfred, Ralph, Friedhelm, Jürgen, Monika, Dagmar, Edelgard, Inge
$J \cap M$:	leer
$D_1 \cap R_4$:	leer
$R_3 \cap D_4$:	Ralph, Jürgen, Monika, Edelgard
$D_2 \cap R_2 \cap E_2$:	Gerald, Helga

Sofort sieht man:

$J \cap M$	ist leer.
$R_3 \cap S$	ist höchstwahrscheinlich nicht leer, weil es mindestens einen Schüler geben wird, der in Mathematik eine Drei hat.

Seite 16:
Molich; Muddel; Mueller, Gerald; Mueller, Gerhard; Murks; Muskel.

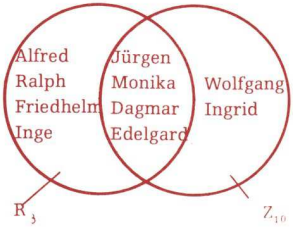
Seite 17:
An dritter Stelle stände Jürgen Weiß.

Die kleinste Summe 3 ergibt sich für drei Zensuren 1. Die größte Summe 15 ergibt sich für drei Zensuren 5. Bessere Zensuren kann niemand haben, schlechtere auch nicht.

Leere Z-Mengen:	Z_3, Z_{14}, Z_{15}
Ein einziger Schüler:	Z_9
Am meisten Schüler:	Z_{10}

Nein, denn es sind 13 Mengen, aber 27 Schüler.

Seite 19:



Seite 21:
a) Helgas Satz ist überflüssig.
b) Drei Möglichkeiten hätten dann bestanden:
$D \succ J \succ H \succ S \succ K$
$D \succ J \succ S \succ H \succ K$
$D \succ J \succ S \succ K \succ H$
Jetzt ist aber Helgas Satz nicht mehr überflüssig.

Mit dem größten beginnend: Fritz, Fridolin, Fred, Frank, Franz.

Seite 22:

Bisher wurden fünf Spiele ausgetragen, eins fehlt noch.
Bisherige Reihenfolge: Schachert, Schachlis, Schachner, Schachtel, Schachbum, Schachmat.
Sie bleibt erhalten, wenn beim Nachholen Schachert gegen Schachmat gewinnt.
Verliert er dagegen, stürzt alles zusammen. Das zeigt, wie unvollkommen das Ordnungsprinzip ist.

Seite 28:

Will man nicht abzählen, so setzt man (in Gedanken) auf jede Untertasse genau eine Tasse, dazu genau einen Löffel, dazu genau ein Tortenstück usw. Dabei sieht man, ob etwas fehlt, ob es aufgeht, ob etwas übrigbleibt.
So ergibt sich:

Ts ~ K?	Nein	U ~ L?	Nein
K ~ T?	Ja	L ~ Z?	Nein
T ~ U?	Ja		

Seite 32:

Die Zahl von Archimedes füllt 8 Millionen Bibliotheken.

Seite 34:

Figur (1): Nachziehen möglich, wenn links unten oder rechts unten begonnen wird.
(Unten links und rechts 3 Linien, sonst 2 oder 4 Linien.)

Figur (2): Nachziehen möglich, wenn links unten oder oben begonnen wird.
(Unten links und oben 3 Linien, sonst 2 oder 4.)

Seite 35:

Figur (7): Zweimal 3 Linien, sonst 2 und 4 Linien.
Nachziehen möglich. Anfang nicht beliebig.

Figur (8): Viermal 3 Linien.
Nachziehen nicht möglich.

Figur (9): Nur 2 oder 4 Linien.
Nachziehen möglich. Anfang beliebig.

Figur (10): Nur 2 oder 4 Linien.
Nachziehen möglich. Anfang beliebig.

Figur (11): Viermal 3 Linien.
Nachziehen nicht möglich.

Figur (12): Zweimal 3 Linien, zweimal 5 Linien.
Nachziehen nicht möglich.

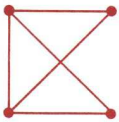
Figur (13): Zweimal 3 Linien, sonst 2 und 4 Linien.
Nachziehen möglich. Anfang nicht beliebig.

Figur (14): Nur 2 oder 4 Linien.
Nachziehen möglich. Anfang beliebig.

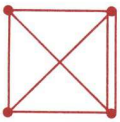
Seite 36:

Niemand. Nur durch Weglassen oder doppeltes Ziehen einer Verbindungslinie ist zu helfen:

So



oder so



Seite 38

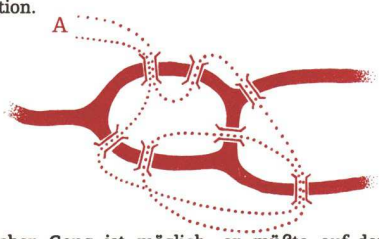
Es kann uns nicht gelingen.

So sind auch die Ketten der Abflußstopfen für Waschbecken und Badewannen gefertigt.

Seite 39

Er war nicht möglich, weil von drei Punkten 3 und von einem Punkt 5 Linien ausgehen.
Zusatzfragen:
1. Ja

2. Es gibt mehrere Möglichkeiten. Einen Weg zeigt die Illustration.



3. Ja
4. Ein solcher Gang ist möglich, er müßte auf dem Hof H beginnen und könnte verlaufen:
$H - H_3 - H_2 - H_1 - H - S - H_1 - H - P$.

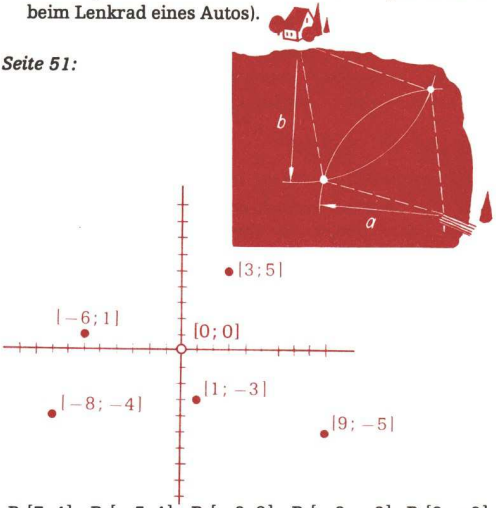
Seite 40:
Eine Reise, bei der jeder Eckpunkt genau einmal durchwandert wird, ist: A – B – C – D – E – F – G – H – J – K – L – M – N – O – P – Q – R – S – T – U – A
Eine Reise, bei der jede Kante genau einmal durchlaufen wird, ist nicht möglich, da von jedem der 20 Eckpunkte 3 Kanten ausgehen.

Seite 41:
Zusatzfragen:
1. K – L – M – N – O – P – Q – R – S – T – U – A – B – C – D – E – F – G – H – J – K
   A – U – T – S – R – Q – P – O – N – M – L – K – J – H – G – F – E – D – C – B – A
2. A – B – C – D – E – F – T – U – N – M – L – K – J – H – G – R – S – O – P – Q
   A – B – C – D – E – F – T – U – N – M – L – K – J – H – G – R – Q – P – O – S, es gibt noch einen zweiten Weg:
   A – B – C – K – J – Q – R – G – H – D – E – F – T – U – N – M – L – P – O – S

Beginn mit A – B – C und Ende in D nicht möglich.
A – B – C – K – L – P – O – N – U – T – S – R – G – F – E – D – H – J – Q (M wurde ausgelassen)
Nur beim Oktaeder ist eine Rundreise durch alle Kanten möglich.

Seite 47:
1. Die entstehende Fläche hat annähernd die Form eines Kegelmantels.
2. Verschiebung der geraden Linie in ihrer Richtung; man sagt auch: Verschiebung in sich (z. B. bei den Beinen eines Fotostativs).
   Drehung der Kreislinie um ihren Mittelpunkt (z. B. beim Lenkrad eines Autos).

Seite 51:



$P_1[7;4]$; $P_2[-5;4]$; $P_3[-3;0]$; $P_4[-3;-2]$; $P_5[3;-3]$; $P_6[0;-6]$; $P_7[0;3]$

Seite 60:
Der Fehler beträgt 40000000 · 0,2 mm = 8000000 mm oder 8 km. Also beträgt der Erdumfang 40 008 000 m.

Seite 61:
a) Der Umfang des Gartens beträgt 120 m, also braucht man 40 Pfähle (120 : 3).
b) Wenn man formal rechnet, kommt man auf 2,4 m (120 : 50). Würde man die Pfähle in diesem Abstand setzen, dann stehen an drei Ecken keine Pfähle! Man könnte sich helfen, indem man die 4 Eckpfähle zuerst

setzt, dann bleiben 46 Pfähle übrig; für eine lange und eine kurze Seite zusammen also 23 Pfähle. Es ist zweckmäßig, wenn man die Pfähle den Seitenverhältnissen entsprechend verteilt. Die Seiten verhalten sich wie 7 : 3. Man kommt diesem Verhältnis nahe, wenn man auf den kürzeren Seiten je 7 Pfähle im Abstand von 2,25 m und auf den längeren Seiten je 16 Pfähle im Abstand von $\frac{42}{17}$ m, also rund 2,47 m setzt.

c) Es ergibt sich $120\,000 : 297 = 404{,}\overline{04}$, also beträgt der Umfang des Schulgartens dann rund 404,04 Längeneinheiten.

Bei der Verwendung von Quadraten als Einheitsflächen entstehen einfachere Formeln und somit einfachere Rechnungen.

Seite 62:

Es ist $A_1 = A_4 = A_6$

$A_2 = \frac{3}{4} A_1$

$A_3 = A_5 = \frac{5}{4} A_1$

Daß es Einheitsquadrate zum Auslegen des Rechtecks nicht geben kann, zeigen auch die folgenden Überlegungen; sie sind nicht leicht, wie es auch die von Seite 63 nicht sind.

Wenn es ein solches Quadrat (Seitenlänge e) gäbe, müßten sowohl a als auch d Vielfache von e sein, das heißt $d = m \cdot e$ und $a = n \cdot e$ (m, n natürlich). Somit wäre $\frac{d}{a} = \frac{m \cdot e}{n \cdot e} = \frac{m}{n}$ eine rationale Zahl.

Nun ist aber $d = a\sqrt{2}$, also $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$, d. h. irrational.

Es kann somit ein solches Quadrat nicht geben.

Seite 75:

	Fläche gezeichnet Ist	Fläche gezeichnet Soll	Die UdSSR hat die
UdSSR	$68^2 mm^2$	$68^2 mm^2$	1fache Größe
Brasilien	$43^2 mm^2$	$42^2 mm^2$	2,63fache Größe
DDR	$14^2 mm^2$	$4{,}72^2 mm^2$	208fache Größe
Andorra	$2^2 mm^2$	$0{,}31^2 mm^2$	48 178fache Größe

Seite 76:

Anschaulicher, ja! Denn, würde die DDR durch ein Rechteck von nur 1 mm Breite dargestellt, so brauchte man für die UdSSR für ein Rechteck mit gleicher Breite schon eine Länge von 208 mm oder 20,8 cm.

Günstiger, nein! Besonders für Veröffentlichungen auf kleinen Blattgrößen.

Seite 77:

Die Grundlinie entspricht bereits 30 Unfällen.

Seite 78:

Die Produktion von Kühlschränken ist gegenüber der Produktion von Fernsehgeräten tatsächlich langsamer gestiegen, (227 799 Kühlschränken stehen 541 353 Fernsehgeräte gegenüber). Deshalb ist die Höhenzunahme bei dem Schaubild für die Fernsehgeräte auch ungefähr doppelt so groß wie bei den Kühlschränken.

Die Schaubilder auf der rechten Seite vermitteln einen falschen Eindruck. Er entsteht dadurch, daß dem Zeitraum von fünf Jahren (1958 bis 1963) die gleiche Breite entspricht wie dem Zeitraum von einem Jahr.

Seite 80:

Die Hauptstartbahn müßte in Ost-West-Richtung angelegt werden.

Seite 83:

Vorbereich {0,35; 1,50}

Nachbereich {v; o; a; h; s}

5 Paare werden angegeben.

Diese Menge von Paaren ist keine Funktion.

Seite 84:
Es gibt soviel Paare wie Schüler, in diesem Fall 27 Paare. Die Menge aller Paare bildet eine Funktion.
Es gibt soviel Paare wie Schüler, in diesem Fall 27 Paare. Diese Paarmenge ist keine Funktion, denn zu jeder der Noten 1 bis 4 gibt es mehrere Namen.

Seite 85:
Eine Unterbrechung zeigt an, daß der Zug hält.
Der Anstieg der Strecke ist ein Maß für die Geschwindigkeit.

Seite 87:
Es ergeben sich 26 Möglichkeiten, wenn man annimmt, daß mindestens eine Tafel Schokolade gekauft wird.
Diese Zahlenpaare bilden keine Funktion, da zu jedem Wert des Vorbereichs mehrere Werte des Nachbereichs gehören.

Seite 90:
Der Vorbereich dieser Funktion ist die Menge aller Zahlen von 0 bis 22, ihr Nachbereich ist die Menge aller Zahlen von 55 bis 176.

Seite 94:
Die Funktion nimmt in dem Teil von 1 bis 4 des Vorbereichs ab, während sie in dem Teil von 4 bis 10 zunimmt.
Es wäre theoretisch möglich, Wasser als Thermometerflüssigkeit zu verwenden, allerdings nur zur Messung von Temperaturen, die höher als 8 °C sind, da es im Bereich zwischen 0 °C und 8 °C zu jeder Wasserhöhe im Thermometerröhrchen zwei Temperaturwerte gibt. Es gibt aber auch Gründe, die gegen die Verwendung von Wasser für die Messung von Temperaturen über 8 °C sprechen.

Solche Paare sind z. B. [0,025; 310], [0,01; 0], [0,015; −310], usw. Ein Teil des Vorbereichs, in dem die Funktion nur zunimmt, ist z. B. die Menge aller Zahlen zwischen 0,015 und 0,025, ein Teil, in dem sie nur abnimmt, die Menge aller Zahlen zwischen 0,025 und 0,035. Die Spannung beträgt 220 V, z. B. zum Zeitpunkt 0,0225 oder zum Zeitpunkt 0,0275. Es gibt aber weitaus mehr Zeitpunkte, an denen die Spannung gerade 220 V beträgt.

Seite 95:
Die Funktion, die diese Vermehrung beschreibt, besteht aus 13 Paaren. Nach 4 Stunden, d. h. nach 240 Minuten, erfolgen im günstigsten Fall zu $\frac{240}{20} = 12$ Zeitpunkten derartige Zellteilungen. Daher gibt es neben dem Zahlenpaar [0; 1] noch 12 weitere solcher Paare. Das letzte Zahlenpaar ist [240; 4096].

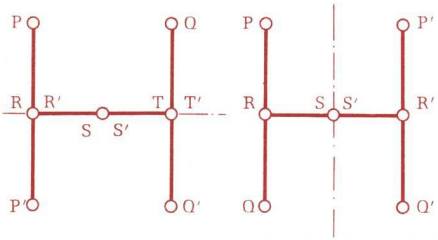
Die Punkte dürfen wir deshalb durch einen Kurvenzug verbinden, weil es bei dem betrachteten Mischwald zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten Holzertrag gibt und weil zu dicht beieinander liegenden Zeitpunkten auch sehr wenig voneinander abweichende Holzerträge gehören.

Seite 97:
Ja! Und zwar deshalb, weil der Zusammenhang zwischen vorhandener Masse und vergangener Zeit durch eine nur abnehmende Funktion beschrieben wird. Es gibt zu jedem Wert der Masse auch nur genau einen Zeitwert.

Es dauert etwa 120 Stunden, bis von 20 g radioaktivem Natrium nur noch 0,6 g übrig sind.

Seite 98:
Da der Erfurter Flugplatz etwa 200 m höher liegt als der Flugplatz, auf dem die Maschine gestartet war, blieb der Zeiger bei 200 m stehen. Soll der Höhenmesser stets die genaue Höhe über dem Erdboden (über Grund) angeben, dann müßte er ständig reguliert (nachgestellt) werden, entsprechend dem Höhenunterschied der verschiedenen Orte, die das Flugzeug überfliegt.

Seite 101:



Lediglich der Schnittpunkt S beider Achsen bildet mit sich selbst ein „Paar", das zu beiden Spiegelungen gehört.

Seite 104:
N, S, Z

Seite 105:
Zur Linksdrehung um 300° gehören z. B. $[E_1; E_6]$ und $[E_5; E_4]$.
Zur Rechtsdrehung um 120° gehören z. B. $[E_1; E_5]$ und $[E_4; E_2]$.
Die gleichen Punktepaare hat die Linksdrehung um 240°.
$[E_2; E_6]$ und $[E_6; E_2]$ gehören zu derjenigen Klappung, die die Verbindungsgerade von E_1 und E_4 als Achse hat. Die anderen vier Paare sind $[E_1; E_1]$, $[E_3; E_5]$, $[E_4; E_4]$ und $[E_5; E_3]$.

Seite 112:
Ein Straußenei entspricht $3^3 = 27$ Hühnereiern.

Seite 113:
144 Liliputaneranzüge.

Seite 120:
Die beiden Spiegel bilden einen Winkel von 45°.

Seite 124:
Der Stock hätte dann nicht flach auf dem Boden des Koffers gelegen, sondern etwa von einer unteren Ecke des Koffers zur gegenüberliegenden oberen Ecke (also in Richtung einer räumlichen Diagonale des quaderförmigen Koffers).
Es läßt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras abschätzen, wie lang der Stock höchstens sein könnte:
$68^2 + 18^2 = 4624 + 324 = 4948$.
$70^2 = 4900$; $71^2 = 5041$.
Die räumliche Diagonale ist also länger als 70 cm und kürzer als 71 cm. Der Stock wäre also gerade noch in den Koffer hineingegangen.

Die andere Kathete ist 9 cm lang, denn es ist
$15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 = 9^2$.

Seite 133:
Wenn der Stab auf Rügen senkrecht zur Erdoberfläche steht, dann bildet er mit der Äquatorebene einen Winkel von 54,5°.
Er soll mit ihr aber einen Winkel von 90° bilden, d. h. parallel zur Erdachse stehen. Es fehlen also noch 35,5°, um die er geneigt werden muß. Wir müssen also die Ebene der Sonnenuhr ebenfalls um 35,5° neigen.

Seite 138
Das schräg geschnittene Wurststück ist niedriger, hat dafür aber, begrenzt durch die Ellipse, die größere Grundfläche; daher hat seine abgewickelte Haut den größeren Umfang. Im Flächeninhalt aber sind beide Häute gleich; die Mantellinien der beiden Zylinder sind gleich lang.

Seite 140:
Es gelingt! Freilich ist es nicht der alte Kreis, sondern ein kleinerer. Sein Durchmesser ist die Nebenachse der Ellipse.

Der Faden muß länger sein als der doppelte Abstand der Stifte; nach oben gibt es jedoch keine Grenze. Ist er nur wenig länger, ist die Ellipse klein und schlank. Je länger der Faden ist, desto mehr nähert sich die Ellipse einem Kreis.

Seite 141:
1. Der nähere der beiden Endpunkte der Hauptachse. Er ist auch am weitesten von F_2 entfernt.

2. Die beiden Endpunkte der Nebenachse.
3. $0 < \overline{F_1F_2} < \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$.
5. Haupt- und Nebenachse.
6. Die stärkste Krümmung bei den Endpunkten der Hauptachse (Hauptscheitel) erfordert dort den stärksten Lenkereinschlag; die schwächste Krümmung bei den Endpunkten der Nebenachse (Nebenscheitel) gestattet dort die höchste Geschwindigkeit.
   Planeten und Satelliten haben jedoch in einem Hauptscheitel die größte, in dem anderen die kleinste Geschwindigkeit.
7. Nein!

Sämtliche Querschnitte eines elliptischen Zylinders sind Ellipsen. Alle ihre Brennpunkte bilden die beiden Brennlinien des Zylinders.

Seite 147:
Die abgebildeten Bewegungskurven sind gegenüber den wirklichen verkleinert, ja sogar verzerrt. Dennoch kann man recht gut erkennen, welchen ungefähren Weg die Autos zurückgelegt haben.

Seite 150:
Der Mittelpunkt der Kreisscheibe bewegt sich auf einer Geraden, die parallel zur gegebenen Geraden verläuft.

Seite 151:
Wenn der Lochdurchmesser doppelt so groß ist wie der Durchmesser der Kreisscheibe, so bewegt sich jeder Randpunkt der Kreisscheibe auf einem Durchmesser des kreisförmigen Loches.

Eine vierspitzige Hypozykloide, eine Sternkurve (Astroide), erhält man, wenn der Lochdurchmesser viermal so groß ist, also 12 cm beträgt.

Eine Hypozykloide aus fünf Bogen, die durch zwei Umläufe entsteht, ergibt sich, wenn der Lochdurchmesser $\frac{5}{2}$mal so groß ist, also 7,5 cm beträgt.

Seite 152:
Der Saphir beschreibt beim Abspielen einer Platte in der Ebene, in der sich die Platte befindet, einen Kreisbogen.