MATHEMATIK 7

OBERSCHULE

RATIONALE ZAHLEN — A

GLEICHUNGEN — B

PROPORTIONEN · RECHENSTAB — C

PLANIMETRIE — D

STEREOMETRIE — E

DARSTELLENDE GEOMETRIE — F

AUFGABEN — Y

REGISTER — Z

MATHEMATIK

Lehrbuch für die Oberschule

Klasse 7

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1965

Verfasser:

Dr. Dieter Ilse, Dipl.-Math. Werner Tietz
Kapitel A, B; Abschnitte C 1 bis C 29

Rudolf Bittner
Abschnitte C 30 bis C 56

Dipl.-Math. Fritz Homagk
Kapitel D, E, F

Dr. Hans Wußing
Geschichtliche Überblicke

Für die Kapitel E, F und Y wurden teilweise auch die entsprechenden Abschnitte des Lehrbuches Rechnen, Messen, Konstruieren 7. Kl. (00 709) bearbeitet.

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Lehrbuch für die allgemeinbildende polytechnische Oberschule bestätigt.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Ursula Krüger (Red. Ass.)

Einband und Vorsatz: Werner Fahr

Zeichnungen und Grafiken: Klaus Boerger, Heinz Grothmann, Rudolf Schultz-Debowski

Kartengenehmigung für A 2 Nr. 1/8/64

Typografie: Volk und Wissen Verlag Berlin

Redaktionsschluß: 4. November 1964

ES 11 G · Bestell-Nr. 00 07 01-1 · 2,10 MDN · Lizenz 203. 1000/65 (E)

Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

Das farbige Griffregister auf dem Außenrand der Seiten dient dem bequemen und schnellen Auffinden der einzelnen Kapitel. Auf dem Vorsatz findest du hierzu eine Übersicht über die einzelnen Kapitel.
Jedes Kapitel ist durch Zwischenüberschriften und durch eine fortlaufende Numerierung mit schwarzen halbfetten Ziffern auf dem linken Rand in kleine Abschnitte (Lerneinheiten) untergliedert.
Innerhalb der Lerneinheiten werden die Beispiele, Übungen und Definitionen durch folgende blaue Marken gekennzeichnet:

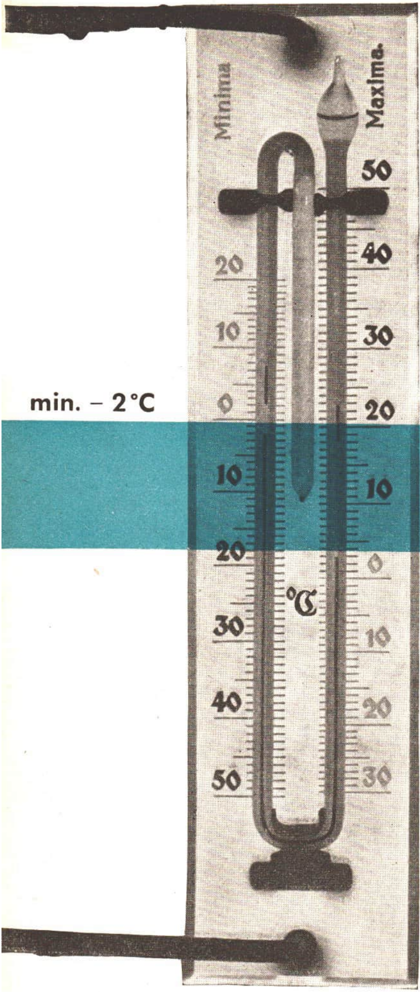
Beispiele	■
Übungen	●
Definitionen und Sätze	▶

Dabei werden mit vollen Dreiecken solche Definitionen und Sätze gekennzeichnet, die du dir fest einprägen mußt.
Durch die Ziffern in den blauen Marken werden auch die Übungen, Beispiele und Sätze numeriert.
Sämtliche Numerierungen werden jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt. Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnen dann alle Numerierungen von Neuem.
Hinweise auf Lerneinheiten (Abschnitte), Beispiele usw. werden im laufenden Text mit dem Buchstaben des betreffenden Kapitels angegeben.

Zum Beispiel:

Abschnitt C 23 ist die Lerneinheit 23 des Kapitels C,
Beispiel D 5 ist das Beispiel 5 im Kapitel D,
Übung A 13 ist die Übung 13 im Kapitel A.

min. – 2 °C



max. + 18 °C

RATIONALE ZAHLEN

A

Der Bereich der gebrochenen Zahlen Seite 6

Variablen für gebrochene Zahlen 8

Der Aufbau des Bereichs der rationalen Zahlen 8

Entgegengesetzte Zahlen 14

Variablen für rationale Zahlen 15

Absoluter Betrag 15

Ordnung 16

Rechenoperationen mit rationalen Zahlen 17

Addition 17

Subtraktion 21

Multiplikation 22

Division 27

Die gebrochenen Zahlen als Teilbereich der rationalen Zahlen 28

Das Rechnen mit 0 und 1 29

A

Der Bereich der gebrochenen Zahlen

1 In einem Kühlraum soll die Temperatur, die augenblicklich 4°C über dem Gefrierpunkt (über Null) beträgt, um 9 grd gesenkt werden. Welche Temperatur soll also im Kühlraum herrschen?

1 Zur Beantwortung der Frage im Beispiel 1 reichen die Zahlen, die wir bisher kennen, die natürlichen Zahlen und die gebrochenen Zahlen, nicht aus.

Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, ...

Im Bereich der natürlichen Zahlen können wir die Addition und die Multiplikation uneingeschränkt ausführen.

Addition: Wie wir auch immer die Summanden a und b aus dem Bereich der natürlichen Zahlen wählen, stets gibt es eine natürliche Zahl c, so daß gilt

$$a + b = c.$$

Multiplikation: Ebenso können wir immer zu zwei natürlichen Zahlen d und e eine weitere natürliche Zahl f finden, so daß gilt

$$d \cdot e = f.$$

Subtraktion: Bei der Subtraktion von natürlichen Zahlen müssen wir darauf achten, daß der Subtrahend nicht größer ist als der Minuend, da sonst die Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen nicht ausführbar ist.
Im Beispiel 1, bei dem die Temperatur von 4°C um 9 grd gesenkt werden soll, müßten wir die Aufgabe 4–9 lösen. In ihr ist aber der Subtrahend größer als der Minuend, sie ist daher im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar.

2 Division: Ebenso wie die Subtraktion ist auch die Division im Bereich der natürlichen Zahlen nicht uneingeschränkt ausführbar. Zu zwei natürlichen Zahlen a und b gibt es nicht immer eine dritte natürliche Zahl c, so daß gilt

$$a = b \cdot c \quad \text{bzw.} \quad a : b = c.$$

So hat z. B. die Aufgabe 21 : 13 im Bereich der natürlichen Zahlen keine Lösung.

1 **SATZ: Im Bereich der natürlichen Zahlen sind die Addition und die Multiplikation uneingeschränkt ausführbar.**
Die Subtraktion ist nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend kleiner oder gleich dem Minuenden ist.
Die Division ist nur dann ausführbar, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist.

3 Damit auch die Division uneingeschränkt ausführbar ist, haben wir einen neuen Bereich von Zahlen geschaffen und diese **gebrochene Zahlen** genannt.

2 **DEFINITION: Eine gebrochene Zahl ist eine Klasse von Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen.**

(1) **a)** Stelle fest, welche der folgenden Brüche jeweils in einer Klasse liegen, d.h. dieselbe gebrochene Zahl darstellen!

$\frac{3}{7}$; $\frac{105}{119}$; $\frac{20}{15}$; $\frac{51}{119}$; $\frac{12}{9}$; $\frac{45}{51}$; $\frac{68}{51}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{75}{35}$; $\frac{15}{17}$; $\frac{9}{21}$

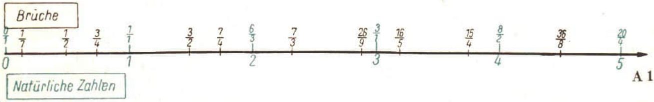
b) Wieviel verschiedene gebrochene Zahlen werden durch diese Brüche dargestellt?

3 **SATZ: Im Bereich der gebrochenen Zahlen sind die Addition, die Multiplikation und die Division uneingeschränkt ausführbar.**
Der Divisor darf dabei jedoch nicht Null sein.

4 Unter den gebrochenen Zahlen gibt es solche, die durch Brüche mit dem Nenner 1 dargestellt werden können. Bei allen Rechenoperationen lassen sich diese gebrochenen Zahlen durch natürliche Zahlen ersetzen. So können wir z. B. die gebrochenen Zahlen, die durch die Brüche in den beiden oberen Zeilen der folgenden Tabelle dargestellt werden, durch die jeweils ganz untenstehenden natürlichen Zahlen ersetzen:

$\frac{4}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{30}{6}$	$\frac{140}{7}$	$\frac{96}{16}$
—	—	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{20}{1}$	$\frac{6}{1}$
4	7	4	5	20	6

Wenn wir alle gebrochenen Zahlen, für die dieses möglich ist, durch natürliche Zahlen ersetzen, dann bilden die natürlichen Zahlen einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen. Jede natürliche Zahl ersetzt dabei eine ganz bestimmte gebrochene Zahl. Dagegen kann aber nicht jede gebrochene Zahl durch eine natürliche Zahl ersetzt werden. Zum Beispiel ersetzt 5 die durch $\frac{20}{4}$ dargestellte gebrochene Zahl, dagegen kann $\frac{7}{3}$ durch keine natürliche Zahl ersetzt werden. Diesen Sachverhalt veranschaulicht die Darstellung des Zahlenstrahls in Bild A 1.



A 1

4 **SATZ: Die natürlichen Zahlen sind ein Teilbereich der gebrochenen Zahlen.**

(2) Ersetze die durch folgende Brüche dargestellten gebrochenen Zahlen, wenn möglich, durch natürliche Zahlen!

$\frac{100}{7}$; $\frac{272}{17}$; $\frac{703}{11}$; $\frac{1\,249}{27}$; $\frac{2\,961}{47}$; $\frac{6\,731}{82}$; $\frac{10\,094}{103}$

A

Im Bereich der gebrochenen Zahlen ist die Subtraktion noch immer nicht uneingeschränkt ausführbar. Wir können auch hier, wie im Bereich der natürlichen Zahlen, zunächst nur solche Subtraktionsaufgaben lösen, in denen der Subtrahend nicht größer ist als der Minuend.

5 Variablen für gebrochene Zahlen

Bisher haben wir Variablen $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ nur für natürliche Zahlen verwendet, z. B. konnten in $2a + b$ für a und b die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt werden. Auch bei Brüchen wie $\frac{a}{b}, \frac{x}{y}, \ldots$ waren a, b, x, y Variablen für natürliche Zahlen.
Von jetzt an wollen wir Variablen für gebrochene Zahlen schreiben. Für a, b, c, x, y, z usw. dürfen also jetzt gebrochene Zahlen eingesetzt werden. Dabei müssen wir daran denken, daß wir die natürlichen Zahlen als einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen auffassen, d.h., daß die natürlichen Zahlen mit zu den gebrochenen Zahlen gehören.
Wenn für die Variablen nur natürliche Zahlen eingesetzt werden sollen, soll das künftig ausdrücklich vermerkt werden.

2 a) $2a + b$

Im Falle $a = 4$; $b = 5$ ergibt sich: $2a + b = 13$
Im Falle $a = 3$; $b = \frac{1}{4}$ ergibt sich: $2a + b = 6\frac{1}{4}$
Im Falle $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{8}$ ergibt sich: $2a + b = 1\frac{1}{8}$

b) $2a + b$ (a, b natürliche Zahlen)

3 Ergänze folgende Tabellen! Falls eine Aufgabe nicht lösbar ist, schreibe „n. l.“ in die Tabelle! Bedenke dabei, daß im Bereich der gebrochenen Zahlen jede Divisionsaufgabe (die Division durch Null ausgenommen) lösbar ist!

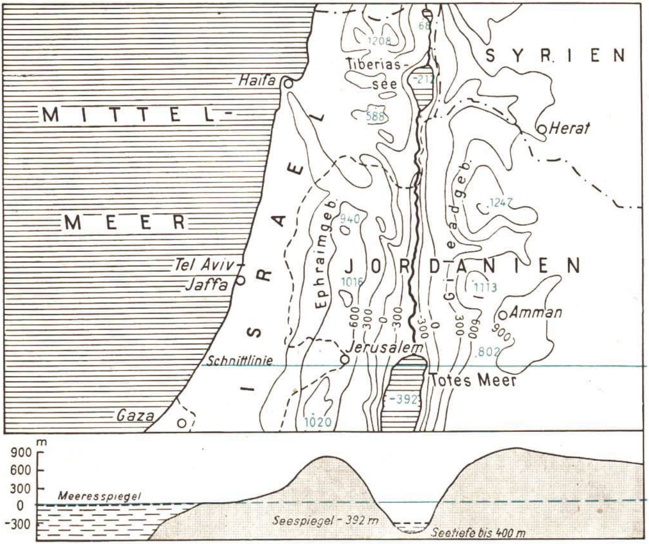
x	y	$x+y$	$x-y$	$x \cdot y$	$x:y$	$3x-y$	$5xy$	$3x:2y$
a) 36	45							
b) $\frac{7}{5}$	$\frac{2}{3}$							
c) 6	$\frac{8}{3}$							
d) $\frac{2}{5}$	4							
e) 0,9	$\frac{2}{5}$							

Aufgaben A 1 bis 6

Der Aufbau des Bereichs der rationalen Zahlen

6

Das Problem im Beispiel 1 führt zu der Aufgabe 4–9. Subtraktionsaufgaben wie diese, in denen der Subtrahend größer als der Minuend ist, treten in der Praxis häufig auf. In diesem Beispiel beträgt dann die Temperatur im Kühlraum $-5\,°C$. Man müßte also rechnen können: $4 - 9 = -5$



A 2

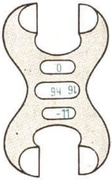
Das ist aber im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht möglich. Wir sind also gezwungen, über diesen Bereich hinaus einen neuen Zahlenbereich zu schaffen. Die Erweiterung werden wir in ähnlicher Weise durchführen wie die Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen zum Bereich der gebrochenen Zahlen. Daß diese Erweiterung notwendig ist, sollen uns noch folgende Beispiele zeigen:

3

a) Höhenangaben auf einer Landkarte mit Höhen unter Normal-Null[1] (Bild A 2).

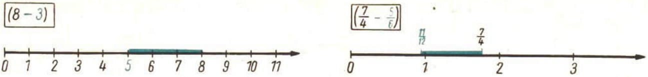
b) Ist ein Eisenträger 20 mm länger als vorgeschrieben, so sagt man, daß seine Länge um $+20$ mm vom vorgeschriebenen Maß abweicht. Ist er dagegen um 20 mm zu kurz, so sagt man, sie weiche um -20 mm davon ab.

c) Mit Hilfe einer Rachenlehre überprüfe man die Maßhaltigkeit von Werkstücken (Bild A 3). Die Öffnung mit der Aufschrift -11 ist $\frac{11}{1000}$ mm enger als das geforderte Maß.



A 3

[1] In Amsterdam ist eine Höhenmarke angebracht, die man mit Null bezeichnet. Alle Höhenangaben beziehen sich auf diesen Festpunkt.



A 4

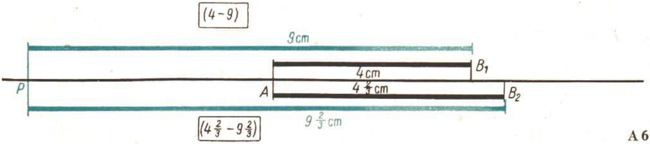
7 Subtraktionsaufgaben, in denen der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist, lassen sich am Zahlenstrahl darstellen (Bild A 4). Wie wir sehen, ist dem Ergebnis eindeutig ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.
Die unlösbare Subtraktionsaufgabe 4–9 aus dem Beispiel 1 können wir am Zahlenstrahl nicht darstellen. Wir können aber Strecken von 4 cm und 9 cm Länge wie im Bild A 4 abtragen, wenn wir statt des dort benutzten Zahlenstrahls eine Gerade verwenden.

A 5

Wir wählen auf einer Geraden einen Punkt aus und bezeichnen ihn mit *A* (Bild A 5). Von *A* ausgehend, tragen wir zunächst eine Strecke von 4 cm Länge nach rechts auf der Geraden ab. Dadurch erhalten wir einen eindeutig bestimmten Punkt *B*. Vom Punkt *B* aus tragen wir eine Strecke von 9 cm Länge nach links ab und erhalten den Punkt *P*.
Damit ist aber die Subtraktionsaufgabe 4–9 nicht ausgerechnet. Wir haben zwar einen Punkt erhalten, aber den Punkten auf der Geraden sind noch keine Zahlen zugeordnet. Im folgenden werden wir Zahlen schaffen, die wir diesen Punkten zuordnen.

Aufgaben A 7 bis 12

Bei jeder solchen Veranschaulichung durch Streckenabtragung entspricht der Differenz ein bestimmter Punkt *P* auf der verwendeten Geraden. Wären allen diesen Punkten Zahlen zugeordnet, so könnten wir mit diesen Zahlen uneingeschränkt subtrahieren.
Ein Punkt *P* auf der Geraden kann allerdings auch bei festem Punkt *A* durch die Veranschaulichung vieler Differenzen erhalten werden.



A 6

4 Die Veranschaulichung der Differenz (4 — 9) führt beispielsweise auf den gleichen Punkt *P* wie die Veranschaulichung der Differenz $\left(4\frac{2}{3} - 9\frac{2}{3}\right)$ (Bild A 6).[1]

[1] Von jetzt an setzen wir bei der Streckenabtragung die Differenzen gebrochener Zahlen in runde Klammern, um sie von Subtraktionsaufgaben im Bereich der gebrochenen Zahlen zu unterscheiden.

In diesem Beispiel wurde zum Minuenden und zum Subtrahenden dieselbe Zahl, nämlich $\frac{2}{3}$, addiert.

Auch wenn man in der Differenz (4–9) vom Minuenden und vom Subtrahenden die gleiche Zahl subtrahiert, gelangt man bei der Veranschaulichung wieder zu diesem Punkt *P*.

Subtrahieren wir beispielsweise jeweils $2\frac{1}{5}$, so lautet die Differenz $\left(1\frac{4}{5} - 6\frac{4}{5}\right)$. Bei ihrer Veranschaulichung erhält man tatsächlich denselben Punkt *P*.

(4) Veranschauliche die folgenden Differenzen durch Streckenabtragung!

a)	b)	c)	d)
$(5-3)$	$(3-5)$	$\left(2-\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}-2\right)$
$(9-7)$	$(7-9)$	$\left(\frac{13}{4}-\frac{11}{4}\right)$	$\left(\frac{11}{4}-\frac{13}{4}\right)$
$(4-2)$	$(2-4)$	$\left(\frac{19}{2}-9\right)$	$\left(9-\frac{19}{2}\right)$

Allgemein gilt:

Einer Differenz sei der Punkt *P* zugeordnet. Wird zum Minuenden und zum Subtrahenden dieser Differenz dieselbe Zahl addiert, so ist der neuen Differenz derselbe Punkt *P* zugeordnet.

Dasselbe gilt, wenn man vom Minuenden und vom Subtrahenden die gleiche Zahl subtrahiert.

Aufgaben A 13 bis 18

8 Wir fassen nun alle Differenzen gebrochener Zahlen, denen derselbe Punkt auf einer Geraden zugeordnet ist, zu einer Klasse zusammen. Jeder dieser Klassen ist dann eindeutig ein Punkt dieser Geraden zugeordnet. (Umgekehrt ist jedoch nicht jedem Punkt der Geraden eine Klasse von Differenzen gebrochener Zahlen zugeordnet. Den Beweis dafür werden wir in der achten Klasse führen.)

(5) Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

a	b	c	d	$(a-b)$	$(c-d)$	$a+d$	$b+c$
17	10	90	83	(17–10)	(90–83)	100	100
0	9	91	100				
$\frac{7}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{91}{60}$	$\frac{1}{6}$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$				
38	$\frac{4}{5}$	30	$\frac{14}{5}$				
$\frac{17}{9}$	0	$\frac{62}{9}$	5				
25,2	$\frac{17}{5}$	$\frac{117}{5}$	1,6				
$\frac{19}{2}$	9,5	18,4	$\frac{92}{5}$				
7	5	0	2				

A

Stelle fest, in welchen Zeilen der Tabelle Differenzen stehen, die demselben Punkt zugeordnet sind, die also in einer Klasse liegen!

Bei einem Vergleich der Spalten in der Übung 5 stellen wir fest:

5 **SATZ: Für Differenzen $(a - b)$ und $(c - d)$ von gebrochenen Zahlen, die in einer Klasse liegen, gilt:**

$$\boldsymbol{a + d = b + c.}$$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir leicht feststellen, ob zwei Differenzen derselbe Punkt zugeordnet ist.

6 Welche der folgenden Differenzen liegen jeweils in einer Klasse?

a) $(20 - 8)$ und $(16 - 4)$ **b)** $\left(\frac{17}{9} - \frac{4}{9}\right)$ und $\left(\frac{20}{9} - \frac{7}{9}\right)$

c) $\left(12{,}7 - \frac{25}{5}\right)$ und $\left(\frac{11}{5} - 2\right)$ **d)** $\left(\frac{17}{23} - \frac{65}{23}\right)$ und $\left(\frac{13}{23} - \frac{61}{23}\right)$

e) $(64{,}3 - 90{,}6)$ und $(24{,}1 - 40{,}8)$ **f)** $\left(\frac{128}{37} - \frac{56}{37}\right)$ und $\left(\frac{101}{37} - \frac{29}{37}\right)$

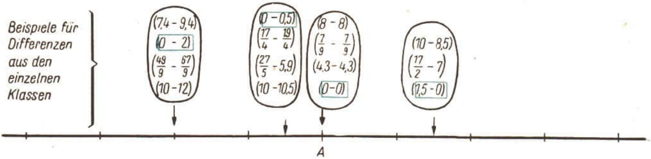
9 Wir hatten uns das Ziel gesetzt, einen Zahlenbereich zu schaffen, in dem wir uneingeschränkt subtrahieren können. Dazu müssen wir allen Punkten der gewählten Geraden, die bei der Streckenabtragung erfaßt wurden, Zahlen zuordnen. Das können wir folgendermaßen erreichen.

6 **DEFINITION: Jede Klasse von Differenzen, der einer der genannten Punkte eindeutig zugeordnet ist, wird rationale Zahl genannt. Alle Differenzen, die in einer Klasse liegen, stellen also ein und dieselbe rationale Zahl dar.**

7 **Durch die Zuordnung der rationalen Zahlen zu den entsprechenden Punkten wird die bei der Streckenabtragung verwendete Gerade zu einer Zahlengeraden (Bild A 7).**

Liegt der einer rationalen Zahl zugeordnete Punkt auf der Zahlengeraden rechts (links) vom Punkt A, so wollen wir dafür kürzer sagen: Die betreffende rationale Zahl liegt rechts (links) von A.

A 7

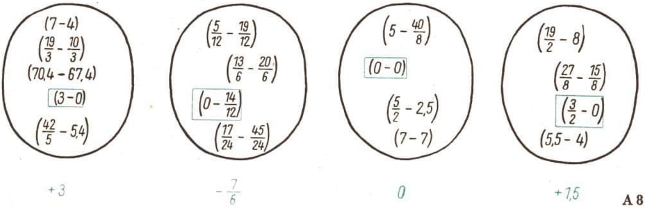


10 Wir werden nun mit den rationalen Zahlen rechnen lernen. Dazu wollen wir möglichst einfache Zeichen für diese neuen Zahlen einführen. In jeder Klasse von Differenzen gibt es eine solche Differenz, in der eine Null auftritt.

In jeder rechts von A liegenden rationalen Zahl kommt eine Differenz der Form $(a - 0)$ vor, wobei $a \neq 0$ gilt.
In jeder links von A liegenden rationalen Zahl kommt eine Differenz der Form $(0 - a)$ vor, wobei $a \neq 0$ gilt.
Nur in der dem Punkt A zugeordneten rationalen Zahl kommt die Differenz $(0-0)$ vor.

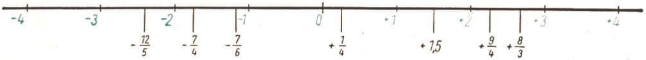
8 **DEFINITION: Die rationale Zahl, in der die Differenz $(a - 0)$ vorkommt, wird mit $+a$ (gelesen: plus a) bezeichnet.**
Die rationale Zahl, in der die Differenz $(0 - a)$ vorkommt, wird mit $-a$ (gelesen: minus a) bezeichnet.
Die rationale Zahl, in der die Differenz $(0 - 0)$ vorkommt, wird mit 0 (Null) bezeichnet.

In den Bezeichnungen $+a$ bzw. $-a$ für die rationalen Zahlen heißen die Zeichen „plus“ bzw. „minus“ die Vorzeichen der rationalen Zahlen. Nur die Null hat kein Vorzeichen.



A 8

Bei Verwendung der in der Definition 8 eingeführten Zeichen vereinfacht sich die Veranschaulichung der rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden.



Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden rechts von der Null liegen, heißen **positive rationale Zahlen.**
Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden links von der Null liegen, heißen **negative rationale Zahlen.**

In den folgenden Beispielen und Aufgaben sind bestimmte rationale Zahlen jeweils durch eine Differenz dargestellt. Wir wollen die Bezeichnungen dieser rationalen Zahlen finden.

5

a) $(36{,}2 - 14{,}2)$ Wir subtrahieren von dem Minuenden und von dem Subtrahenden 14,2. Das ergibt die Differenz $(22 - 0)$. Diese Differenz stellt dieselbe rationale Zahl dar, wie die gegebene Differenz $(36{,}2 - 14{,}2)$; denn es gilt ja $36{,}2 + 0 = 14{,}2 + 22$. (Vgl. Satz A 5!) Diese rationale Zahl wird mit $+22$ bezeichnet.

A

b) $(19 - 33)$ Wir subtrahieren vom Minuenden und vom Subtrahenden 19. Das ergibt die Differenz $(0-14)$. Durch diese beiden Differenzen wird dieselbe rationale Zahl dargestellt; denn es gilt $19 + 14 = 33 + 0$ (Vgl. Satz A 5!). Diese rationale Zahl wird mit -14 bezeichnet.

c) $\left(\frac{7}{5} - \frac{7}{5}\right)$ Wir subtrahieren vom Minuenden und vom Subtrahenden $\frac{7}{5}$. Das ergibt $(0 - 0)$. Durch beide Differenzen wird die rationale Zahl 0 dargestellt.

7 Verfahre entsprechend mit den folgenden Differenzen!

d) $(7{,}5 - 8{,}3)$ e) $(38 - 19)$ f) $\left(\frac{11}{4} - \frac{3}{4}\right)$ g) $(15 - 15)$ h) $(62{,}7 - 80)$

i) $(22 - 35)$ k) $\left(\frac{9}{5} - \frac{3}{2}\right)$ l) $\left(6{,}5 - \frac{13}{2}\right)$ m) $\left(\frac{42}{5} - 3{,}4\right)$ n) $\left(\frac{16}{5} - \frac{16}{5}\right)$

Veranschauliche diese rationalen Zahlen an der Zahlengeraden!

•

Aufgaben A 19 bis 21

11

ZUSAMMENFASSUNG: Alle Differenzen von gebrochenen Zahlen, die durch Addition oder Subtraktion derselben Zahl im Minuenden und im Subtrahenden auseinander hervorgehen, werden zu einer Klasse zusammengefaßt. Das sind alle die Differenzen, denen bei der Veranschaulichung durch Streckenabtragung (immer vom selben Anfangspunkt A aus) derselbe Punkt auf der gewählten Zahlengeraden zugeordnet ist.
Jede solche Klasse heißt rationale Zahl.
Die rationalen Zahlen werden an einer Zahlengeraden veranschaulicht.
Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden rechts von der Null liegen, heißen positive rationale Zahlen.
Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden links von der Null liegen, heißen negative rationale Zahlen.
Zur Bezeichnung der rationalen Zahlen verwenden wir die mit einem Vorzeichen versehenen gebrochenen Zahlen.

12 Entgegengesetzte Zahlen

8 Veranschauliche die folgenden rationalen Zahlen an einer Zahlengeraden!

a) $+5$ und -5 b) $-1{,}5$ und $+1{,}5$ c) $+\frac{3}{5}$ und $-\frac{3}{5}$

d) $-\frac{17}{10}$ und $+\frac{17}{10}$ e) $+1\frac{1}{3}$ und $-1\frac{1}{3}$ f) $-\frac{16}{5}$ und $+\frac{16}{5}$

9 **DEFINITION: Die rationalen Zahlen $+a$ und $-a$ heißen einander entgegengesetzte Zahlen.**
Einander entgegengesetzte Zahlen liegen auf der Zahlengeraden symmetrisch zur Null.
Die Zahl Null ist zu sich selbst entgegengesetzt.

Um die zu einer gegebenen rationalen Zahl entgegengesetzte Zahl zu bezeichnen, setzen wir vor die gegebene rationale Zahl das Minuszeichen. Zur besseren Übersicht setzen wir dabei die gegebene rationale Zahl in Klammern.

6 a) $-(+6) = -6$, denn -6 ist die zu $+6$ entgegengesetzte Zahl.

b) $-\left(-\frac{7}{4}\right) = +\frac{7}{4}$, denn $+\frac{7}{4}$ ist die zu $-\frac{7}{4}$ entgegengesetzte Zahl.

10 **SATZ: Es gilt stets: $-(+a) = -a$ und $-(-a) = +a$.**

Wenn vor einer rationalen Zahl das Vorzeichen „+" steht, so ist diese Zahl selbst gemeint.

7 a) $+(+3) = +3$; b) $+(-3) = -3$

11 **SATZ: Es gilt stets: $+(+a) = +a$ und $+(-a) = -a$. Da die Zahl Null zu sich selbst entgegengesetzt ist, gilt stets: $+0 = 0$ und $-0 = 0$.**

13 Variablen für rationale Zahlen

Im Abschnitt A 5 wurde festgelegt, daß für Buchstaben gebrochene Zahlen eingesetzt werden können. Die rationalen Zahlen wurden dann dadurch bezeichnet, daß vor diese Variablen ein Vorzeichen (+ oder −) gesetzt wurde. Daher bezeichnete $+a$ stets eine positive und $-a$ stets eine negative rationale Zahl.
Von jetzt an benutzen wir Buchstaben als Variablen für rationale Zahlen. Du kannst also künftig für die Variablen a, b, c usw. beliebige rationale Zahlen einsetzen. Die Variable a kann dabei eine positive oder eine negative rationale Zahl oder auch die rationale Zahl Null bedeuten.

8 a) Wenn wir in $-a$ für a die rationale Zahl $-\frac{3}{2}$ einsetzen, so erhalten wir

$$-\left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{3}{2}.$$

Also kann $-a$ durchaus eine positive rationale Zahl sein.

b) Wenn wir in $-a$ für a die rationale Zahl $+\frac{3}{2}$ einsetzen, so erhalten wir

$$-\left(+\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

In diesem Falle ist $-a$ eine negative rationale Zahl.

c) Wenn wir in $+a$ für a die rationale Zahl $-\frac{3}{2}$ einsetzen, so erhalten wir

$$+\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

d) Wenn wir in $+a$ für a die rationale Zahl $+\frac{3}{2}$ einsetzen, so erhalten wir

$$+\left(+\frac{3}{2}\right) = +\frac{3}{2}.$$

Sowohl $+a$ als auch $-a$ können eine positive oder eine negative rationale Zahl sein.

14 Der absolute Betrag einer rationalen Zahl

Mit Hilfe der Variablen für rationale Zahlen können wir den absoluten Betrag $|a|$ einer rationalen Zahl a wie folgt erklären:

12 **DEFINITION:**

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \text{ positiv oder gleich Null,} \\ -a, & \text{falls } a \text{ negativ.} \end{cases}$$

9 Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und vervollständige sie!

b	-7	$+13{,}5$	$-\frac{3}{8}$	0	$-2\frac{1}{3}$	19
$\lvert b\rvert$						

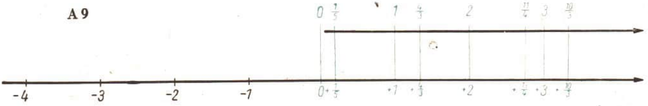
10 Trage auf einer Zahlengeraden die rationalen Zahlen ein, deren absolute Beträge gleich $+1$; $+3$; $+\frac{1}{2}$; $+0$; $+1{,}5$ sind!

Aufgabe A 22 bis 24

15 Die Ordnung der rationalen Zahlen

Beim Vergleich eines *Zahlenstrahls*, auf dem die gebrochenen Zahlen veranschaulicht sind, mit einer *Zahlengeraden*, auf der die rationalen Zahlen veranschaulicht sind, stellen wir fest:
Jeder positiven rationalen Zahl und der Null entspricht eine gebrochene Zahl und umgekehrt (Bild A 9).

A 9



Aus diesem Vergleich geht auch hervor, welche von zwei positiven rationalen Zahlen als größer zu bezeichnen ist.

9 $$+1 < +3, \text{ denn } 1 < 3; \quad +\tfrac{1}{5} < +\tfrac{4}{3}, \text{ denn } \tfrac{1}{5} < \tfrac{4}{3}.$$

Von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegt auf dem Zahlen*strahl* die kleinere stets *links* von der größeren.
Entsprechend liegt auf der Zahlen*geraden* die kleinere von zwei positiven rationalen Zahlen *links* von der größeren.

Damit wissen wir, wie die positiven rationalen Zahlen geordnet sind. Dieses Ordnungsprinzip wollen wir auf alle rationalen Zahlen übertragen. Wir erklären also:

13 **Von zwei verschiedenen rationalen Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.**

Daraus folgt:

Jede positive rationale Zahl ist größer als Null und auch größer als jede negative rationale Zahl. Jede negative rationale Zahl ist kleiner als Null.

Aufgaben A 25 bis 27

Wir wählen zwei beliebige negative Zahlen, z. B. -2 und -4. Nach unserem Ordnungsprinzip gilt:

$-4 < -2$, denn -4 liegt links von -2.

Vergleichen wir jedoch die absoluten Beträge dieser Zahlen, so stellen wir fest:

$|-4| > |-2|$.

14 **SATZ: Von zwei verschiedenen negativen rationalen Zahlen ist diejenige die kleinere, die den größeren absoluten Betrag hat.**

Aufgaben A 28 bis 38

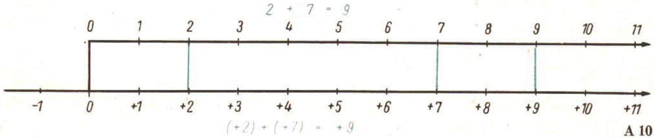
Die Addition rationaler Zahlen

16 Die Addition zweier positiver rationaler Zahlen

Da jeder positiven rationalen Zahl und der rationalen Zahl Null eine gebrochene Zahl entspricht und umgekehrt, führen wir die Addition positiver rationaler Zahlen auf die Addition gebrochener Zahlen zurück.

10 **a)** $(+2) + (+7) = +9$; denn $2 + 7 = 9$ (Bild A 10).

b) $(+3) + 0 = +3$; denn $3 + 0 = 3$.



A 10

Die im Beispiel 10 vorkommenden Pluszeichen haben verschiedene Bedeutung. Das zwischen den beiden rationalen Zahlen $+2$ und $+7$ stehende Pluszeichen gibt an, daß die beiden Zahlen addiert werden sollen.
Wir nennen dieses Pluszeichen deshalb **Rechenzeichen** oder **Operationszeichen.** Damit wir zwischen Operationszeichen und Vorzeichen genau unterscheiden können, setzen wir die rationalen Zahlen in Klammern.

Aufgaben A 39 und 40

Die Addition zweier *beliebiger* rationaler Zahlen werden wir nun wieder so festlegen, daß die Additionsregel für positive rationale Zahlen nicht verletzt wird.

17 Die Addition zweier negativer rationaler Zahlen

Um für die Addition zweier negativer rationaler Zahlen eine Regel zu gewinnen, erinnern wir uns daran, daß sich jede rationale Zahl durch Differenzen gebrochener Zahlen darstellen läßt.

A

Für die Summe

$$(-2)+(-7)$$

können wir auch schreiben:

$$(0-2)+(0-7) \text{ oder}$$
$$(2-4)+(8-15) \text{ oder}$$
$$(6-8)+(1-8) \text{ usw.}$$

In dieser Weise hätten wir auch bei der Addition zweier positiver rationaler Zahlen verfahren können.

In der Aufgabe des Beispiels 10

$$(+2)+(+7)$$

hätten wir die Summanden z. B. folgendermaßen durch Differenzen gebrochener Zahlen darstellen können:

$$(2-0)+(7-0) \text{ oder}$$
$$(4-2)+(15-8) \text{ oder}$$
$$(8-6)+(8-1) \text{ usw.}$$

Das Ergebnis $+9$ dieser Aufgabe erhalten wir aus den Differenzen, indem wir jeweils die beiden Minuenden und die beiden Subtrahenden addieren:

$$(2-0)+(7-0)=([2+7]-[0+0])=(9-0)$$
$$(4-2)+(15-8)=([4+15]-[2+8])=(19-10)$$
$$(8-6)+(8-1)=([8+8]-[6+1])=(16-7)$$

Jede der erhaltenen Differenzen liegt in derselben Klasse wie die Differenz $(9-0)$. Alle diese Differenzen stellen also dieselbe rationale Zahl $+9$ dar. Wir hätten auch beliebige andere Differenzen verwenden können, die die Zahlen $+2$ und $+7$ darstellen.

18 Wenn wir nun auch die Addition zweier negativer rationaler Zahlen so festlegen, daß in beliebigen Differenzen jeweils die beiden Minuenden und die beiden Subtrahenden addiert werden müssen, dann wird die Additionsregel für zwei positive Zahlen nicht verletzt.

Aufgabe	Darstellung durch Differenzen	Ergebnis
$(-2)+(-7)$	$(0-2)+(0-7)$ $(2-4)+(8-15)$ $(6-8)+(1-8)$	$([0+0]-[2+7]) = (0-9)$ $([2+8]-[4+15]) = (10-19)$ $([6+1]-[8+8]) = (7-16)$
$\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)$	$\left(0-\frac{3}{4}\right)+\left(0-\frac{2}{5}\right)$ $\left(\frac{7}{4}-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{3}{5}-1\right)$ $(1{,}25-2)+(3-3{,}4)$	$\left(0-\frac{23}{20}\right)$ $\left(\frac{47}{20}-\frac{7}{2}\right)$ $(4{,}25-5{,}4)$

Auch hier liegen in beiden Beispielen jeweils alle Differenzen in einer Klasse. Wir erhalten also als Ergebnis im ersten Beispiel die rationale Zahl -9, im zweiten Beispiel die rationale Zahl $-\frac{23}{20}$.

Also gilt:

$$(-2)+(-7)=-9 \text{ bzw. } \left(-\tfrac{3}{4}\right)+\left(-\tfrac{2}{5}\right)=-\tfrac{23}{20}$$

15 **SATZ: Zwei rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addiert, indem man die absoluten Beträge der Summanden addiert und vor das Ergebnis das gemeinsame Vorzeichen beider Summanden setzt.**

11 **a)** $(+3)+(+8)=+(+11)=+11$; **b)** $(-3)+(-8)=-(+11)=-11$

Aufgaben A 41 bis 44

19 Addition zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen

Sonderfall: Eine rationale Zahl und ihre entgegengesetzte Zahl sind zu addieren. Hierbei verfahren wir wie im Abschnitt A 18.

Aufgabe	Darstellung durch Differenzen	Ergebnis
$(+3)+(-3)$	$(3-0)+(0-3)$ $(7-4)+(4-7)$ $(19-16)+(2-5)$	$([3+0]-[0+3])=(3-3)$ $([7+4]-[4+7])=(11-11)$ $([19+2]-[16+5])=(21-21)$
$(-0{,}4)+(+0{,}4)$	$(0-0{,}4)+(0{,}4-0)$ $(10-10{,}4)+(10{,}4-10)$ $(28{,}3-28{,}7)+(7{,}3-6{,}9)$	$(0{,}4-0{,}4)$ $(20{,}4-20{,}4)$ $(35{,}6-35{,}6)$

Alle Differenzen in der letzten Spalte stellen die rationale Zahl Null dar.

16 **SATZ: Die Summe zweier entgegengesetzter rationaler Zahlen ist gleich Null.**

12 **a)** $(+5)+(-5)=0$; **b)** $(+a)+(-a)=0$

Es sollen nun beliebige rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen addiert werden.

Aufgabe	Darstellung durch Differenzen	Ergebnis
$(+9)+(-3)$	$(9-0)+(0-3)$ $(13-4)+(5-8)$	$(9-3)$ $(18-12)$ } Darstellungen der rationalen Zahl $+6$
$(+5)+(-8)$	$(5-0)+(0-8)$ $(12-7)+(6-14)$	$(5-8)$ $(18-21)$ } Darstellungen der rationalen Zahl -3

Fortsetzung der Tabelle von Seite 19

Aufgabe	Darstellung durch Differenzen	Ergebnis	
$(-7)+(+2)$	$(0-7)+(2-0)$ $(11-18)+(17-15)$	$(2-7)$ $(28-33)$	Darstellungen der rationalen Zahl -5
$(-3)+(+4)$	$(0-3)+(4-0)$ $(8-11)+(16-12)$	$(4-3)$ $(24-23)$	Darstellungen der rationalen Zahl $+1$

Wir erhalten auf diese Weise:

$$(+9)+(-3)=+6 \qquad (-7)+(+2)=-5$$
$$(+5)+(-8)=-3 \qquad (-3)+(+4)=+1$$

17 **SATZ: Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen und verschiedenen absoluten Beträgen werden addiert, indem von dem Summanden mit dem größeren absoluten Betrag die zum anderen Summanden entgegengesetzte Zahl durch Zerlegung in Summanden abgespalten wird. Das Ergebnis ist gleich der bei dieser Abspaltung übrigbleibenden rationalen Zahl.**

13 **a)** $(+9)+(-3)$

Wir spalten von $+9$ die Zahl $+3$ ab. Als Ergebnis bleibt $+6$.

b) $(+5)+(-8)$

Wir spalten von -8 die Zahl -5 ab. Als Ergebnis bleibt -3.

c) $(-7)+(+2)$

Wir spalten von -7 die Zahl -2 ab. Als Ergebnis bleibt -5.

d) $(-3)+(+4)$

Wir spalten von $+4$ die Zahl $+3$ ab. Als Ergebnis bleibt $+1$.

Aufgaben A 45 bis 52

20 Rechengesetze für die Addition rationaler Zahlen

Bei der Festlegung der Regeln für die Addition rationaler Zahlen spielte die Reihenfolge der Summanden keine Rolle.

18 **SATZ: Im Bereich der rationalen Zahlen gilt das Kommutationsgesetz der Addition:**

$$a+b=b+a.$$

Die Addition rationaler Zahlen soll nun auf mehr als zwei Summanden ausgedehnt werden. Für diesen Fall gilt das Assoziationsgesetz der Addition auch im Bereich der rationalen Zahlen.

11 Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und vervollständige sie!

a	b	c	$(a+b)$	$(a+b)+c$	$(b+c)$	$a+(b+c)$
$+3$	-4	$+7$	-1	$+6$	$+3$	$+6$
$-1{,}5$	$-2{,}7$	$+3{,}2$				
$-4\frac{1}{5}$	$+0{,}8$	$-\frac{3}{5}$				
$+7$	$-4{,}9$	$-4{,}9$				
$+\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$-0{,}5$				

Vergleiche die Ergebnisse in der fünften und in der siebenten Spalte!

19 **SATZ: Im Bereich der rationalen Zahlen gilt das Assoziationsgesetz der Addition:**

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Aufgaben A 53 bis 56

Die Subtraktion rationaler Zahlen

21 Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Subtrahieren heißt: Zu einer gegebenen Summe und zu einem gegebenen Summanden den anderen Summanden zu finden. Statt

$$x + b = a$$

schreiben wir

$$x = a - b.$$

Wie bisher wird auch hierbei a als Minuend, b als Subtrahend und $a-b$ als Differenz bezeichnet.

$$x + (-4) = -3$$
$$x = +1, \text{ denn } (+1) + (-4) = -3.$$

Gleichbedeutend damit ist:

$$x = (-3) - (-4) = +1.$$

Zum selben Ergebnis kommen wir auch durch folgende Rechnung:

$$(-3) + (+4) = (+1).$$

Daraus wird ersichtlich:

Die *Addition* von (+4) führt zum gleichen Ergebnis wie die *Subtraktion* von (—4). Auch in den folgenden Beispielen wird deutlich, daß man *subtrahieren* kann, indem man die *entgegengesetzte Zahl addiert.*

14

a) $(+5)-(+2)=+3$; denn $(+3)+(+2)=+5$	$(+5)+(-2)=+3$
b) $(+4)-(+9)=-5$; denn $(-5)+(+9)=+4$	$(+4)+(-9)=-5$
c) $(+8)-(-2)=+10$; denn $(+10)+(-2)=+8$	$(+8)+(+2)=+10$
d) $(-2)-(+9)=-11$; denn $(-11)+(+9)=-2$	$(-2)+(-9)=-11$
e) $(-14)-(-6)=-8$; denn $(-8)+(-6)=-14$	$(-14)+(+6)=-8$
f) $(-7)-(-12)=+5$; denn $(+5)+(-12)=-7$	$(-7)+(+12)=+5$

20 **SATZ: Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem man die zu ihr entgegengesetzte Zahl addiert.**

22 Da es zu jeder rationalen Zahl einschließlich der Null eine zu ihr entgegengesetzte Zahl gibt, und da auch im Bereich der rationalen Zahlen die Addition uneingeschränkt ausführbar ist, kann nunmehr festgestellt werden:

21 **SATZ: Im Bereich der rationalen Zahlen ist die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar.**

Aufgaben A 57 bis 62

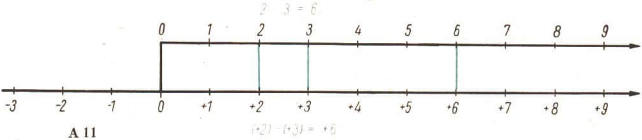
Die Multiplikation rationaler Zahlen

23 Das Produkt zweier positiver rationaler Zahlen

Die Multiplikation zweier positiver rationaler Zahlen legen wir so fest, daß sich die positiven rationalen Zahlen wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen verhalten.

15

$$(+2)\cdot(+3)=+6; \quad \text{denn} \quad 2\cdot 3=6 \quad \text{(Bild A 11)}$$



A 11

Das Produkt zweier positiver rationaler Zahlen ist also stets wieder eine positive rationale Zahl.

Ebenso gilt $(+4)\cdot 0=0$, denn $4\cdot 0=0$.

24 Die Multiplikation zweier beliebiger rationaler Zahlen wird ähnlich wie bei der Addition wieder so erklärt, daß die Regel für die Multiplikation positiver rationaler Zahlen nicht verletzt wird. Zu diesem Zweck müßten wir uns wieder der Darstellung rationaler Zahlen durch Differenzen gebrochener Zahlen bedienen.

Auf diesem Wege erhalten wir sämtliche Rechenregeln für die Multiplikation rationaler Zahlen. Das ist jedoch mit einem größeren Rechenaufwand verbunden; du wirst diesen Weg im Abschnitt A 29 in den Übungen A 14 bis A 17 finden.

25 Das Produkt zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen

Wir haben die Multiplikation zweier positiver rationaler Zahlen so festgelegt, daß diese sich wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen verhalten. Deshalb gilt:

$(+4) \cdot (+3) = +12$	$(+3) \cdot (+4) = +12$
$(+3) \cdot (+3) = +\ 9$	$(+3) \cdot (+3) = +\ 9$
$(+2) \cdot (+3) = +\ 6$	$(+3) \cdot (+2) = +\ 6$
$(+1) \cdot (+3) = +\ 3$	$(+3) \cdot (+1) = +\ 3$
$0 \cdot (+3) = 0$	$(+3) \cdot 0 = 0$

Wenn wir die Folge der Produkte in der gleichen Weise fortsetzten wollen, müssen wir festsetzen:

$(-1) \cdot (+3) = -3$	$(+3) \cdot (-1) = -3$
$(-2) \cdot (+3) = -6$	$(+3) \cdot (-2) = -6$
$(-3) \cdot (+3) = -9$	$(+3) \cdot (-3) = -9$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Wie in diesem Beispiel ist das Produkt zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen stets negativ.

22 **SATZ: Das Produkt zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen ist gleich der zum Produkt ihrer absoluten Beträge entgegengesetzten Zahl.**

16 **a)** $(-9) \cdot (+7)$

Das Produkt der Beträge ergibt: $(+9) \cdot (+7) = +63$.
Geht man zur entgegengesetzten Zahl von $+63$ über, so erhält man -63, also

$(-9) \cdot (+7) = -63.$

b) $\left(+\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{25}{9}\right)$

Das Produkt der Beträge ergibt:

$\left(+\frac{3}{5}\right) \cdot \left(+\frac{25}{9}\right) = +\frac{5}{3}.$

Geht man zur entgegengesetzten Zahl von $+\frac{5}{3}$ über, so erhält man $-\frac{5}{3}$, also

$\left(+\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{25}{9}\right) = -\frac{5}{3}.$

A

26 Das Produkt zweier rationaler Zahlen mit gleichen Vorzeichen

Die Multiplikation zweier positiver rationaler Zahlen haben wir bereits im Abschnitt A 23 festgelegt. Wir müssen nun noch festsetzen, wie zwei negative rationale Zahlen zu multiplizieren sind.

Nach der Regel für die Multiplikation zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen (Satz A 22) gilt:

$$\begin{array}{l|l} (-4)\cdot(+3) = -12 & (+3)\cdot(-4) = -12 \\ (-4)\cdot(+2) = -\ 8 & (+2)\cdot(-4) = -\ 8 \\ (-4)\cdot(+1) = -\ 4 & (+1)\cdot(-4) = -\ 4 \end{array}$$

Wir setzen die Folge der Produkte in der gleichen Weise fort:

$$\begin{array}{l|l} (-4)\cdot\ \ 0 \ = \ \ 0 & 0\ \ \cdot(-4) = 0 \\ (-4)\cdot(-1) = +\ 4 & (-1)\cdot(-4) = +\ 4 \\ (-4)\cdot(-2) = +\ 8 & (-2)\cdot(-4) = +\ 8 \\ (-4)\cdot(-3) = +12 & (-3)\cdot(-4) = +12 \\ \vdots \quad\ \ \vdots \quad\ \ \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots \quad\ \ \vdots \end{array}$$

Es gilt also der

23 **SATZ: Das Produkt zweier rationaler Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist gleich dem Produkt ihrer absoluten Beträge.**

17 **a)** $(+7)\cdot(+9) = +63$ **b)** $\left(+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(+\frac{25}{9}\right) = +\frac{5}{3}$

$(-7)\cdot(-9) = +63$ $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{25}{9}\right) = +\frac{5}{3}$

27 ZUSAMMENFASSUNG: Man multipliziert zwei rationale Zahlen, indem man zunächst das Produkt ihrer absoluten Beträge bildet.
Das Produkt der rationalen Zahlen ist positiv, wenn die beiden Faktoren gleiche Vorzeichen haben; es ist negativ, wenn die beiden Faktoren verschiedene Vorzeichen haben.

Aufgaben A 63 bis 69

28 Rechengesetze für die Multiplikation rationaler Zahlen

Beim Vergleich der links und rechts stehenden Produkte in den Abschnitten 25 und 26 erkennen wir, daß die Reihenfolge der Faktoren ohne Einfluß auf das Ergebnis ist.

24 **SATZ: Im Bereich der rationalen Zahlen gilt das Kommutationsgesetz der Multiplikation:**

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

A

Die Multiplikation rationaler Zahlen soll nun auf mehr als zwei Faktoren ausgedehnt werden. Für diesen Fall gilt das Assoziationsgesetz der Multiplikation auch im Bereich der rationalen Zahlen.

12 Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

a	b	c	$(a \cdot b)$	$(a \cdot b) \cdot c$	$(b \cdot c)$	$a \cdot (b \cdot c)$
-4	$+2$	-5	-8	$+40$	-10	$+40$
$+3$	$+8$	-4				
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$+\frac{5}{12}$				
$+3{,}5$	$+4{,}0$	$+0{,}1$				
$-\frac{4}{5}$	-20	-5				

Vergleiche jeweils die Ergebnisse in der fünften und in der siebenten Spalte!

25 **SATZ: Im Bereich der rationalen Zahlen gilt das Assoziationsgesetz der Multiplikation:**

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

13 Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

a	b	c	$(b + c)$	$a \cdot (b + c)$	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$a \cdot b + a \cdot c$
$+4$	$+3$	$+5$	$+8$	$+32$	$+12$	$+20$	$+32$
$+2$	-3	$+4$					
-3	$+5$	-6					
$+10$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{5}$					
$+\frac{5}{6}$	$-\frac{3}{12}$	$+\frac{1}{4}$					

Vergleiche jeweils die Ergebnisse in der fünften und in der achten Spalte!

26 **SATZ: Im Bereich der rationalen Zahlen gilt das Distributionsgesetz:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Wegen des Kommutationsgesetzes der Multiplikation gilt ebenso:

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Da die Subtraktion rationaler Zahlen auf die Addition der jeweils entgegengesetzten Zahlen zurückgeführt werden kann, gilt auch:

$$a(b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

29 In den folgenden Übungen 14 bis 17 wird nun ein Weg gezeigt, wie man die Rechenregeln für die Multiplikation rationaler Zahlen durch Zurückgehen auf die Darstellung durch Differenzen findet.

A

(14) Stelle die rationalen Zahlen + 2 und + 3 durch jeweils drei Differenzen gebrochener Zahlen dar!

Beispiel:

Die rationalen Zahlen + 2 und + 3 kannst du u.a. durch die folgenden Differenzen darstellen:

	+ 2	+ 3
a)	(2 — 0)	(3 — 0)
b)	(5 — 3)	(7 — 4)
c)	(3 — 1)	(9 — 6)

Das Produkt läßt sich dann folgendermaßen darstellen:

	(+ 2) · (+ 3)
a)	(2 — 0) · (3 — 0)
b)	(5 — 3) · (7 — 4)
c)	(3 — 1) · (9 — 6)

Wie müssen wir diese Differenzen multiplizieren, damit wir als Ergebnis eine Differenz erhalten, die die rationale Zahl + 6 darstellt?
In der Darstellung a) erhalten wir eine solche Differenz, wenn wir ähnlich wie bei der Addition jeweils die beiden Minuenden und die beiden Subtrahenden multiplizieren:

a′) (2 · 3 — 0 · 0) = (6 — 0)

Die erhaltene Differenz stellt also tatsächlich die rationale Zahl + 6 dar.

(15) Versuche nach diesem Verfahren die Differenzen unter b) und c) zu multiplizieren! Wird durch die erhaltenen Differenzen die rationale Zahl + 6 dargestellt?

Das richtige Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Differenzen folgendermaßen multiplizieren:

a″) ([2 · 3 + 0 · 0] — [2 · 0 + 0 · 3]) = (6 — 0)
b″) ([5 · 7 + 3 · 4] — [5 · 4 + 3 · 7]) = (47 — 41)
c″) ([3 · 9 + 1 · 6] — [3 · 6 + 1 · 9]) = (33 — 27)

Alle drei Differenzen stellen die rationale Zahl + 6 dar.

Falls du in der Übung 14 andere Differenzen gewählt hast, multipliziere sie nach demselben Verfahren und prüfe nach, ob die erhaltenen Differenzen die Zahl + 6 darstellen!

(16) Stelle folgende rationale Zahlen durch selbstgewählte Differenzen dar und multipliziere sie jeweils nach dem richtigen Verfahren aus der Übung 15!

(— 4) und (— 2); (— 3) und (— 7);

Anleitung: (— 4) wird z.B. dargestellt durch (2 — 6)
(— 2) wird z.B. dargestellt durch (5 — 7)
(— 4) · (— 2) wird dann dargestellt durch (2 — 6) · (5 — 7)
(2 — 6) · (5 — 7) = ([2 · 5 + 6 ·7] — [2 · 7 + 6 · 5]) = (52 — 44)

Die erhaltene Differenz stellt die rationale Zahl + 8 dar.

Also gilt: (— 4) · (— 2) = + 8.

(17) Zeige durch Rückgang auf die Darstellung durch Differenzen, daß das Produkt zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen negativ ist! Wähle dir dazu die Zahlen und die Darstellung durch Differenzen selbst!

A

Die Division rationaler Zahlen

30 Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Wir müssen also zu einem gegebenen Produkt und zu einem gegebenen Faktor den anderen Faktor finden. Statt $x \cdot b = a$ schreiben wir $x = a : b$. Dabei darf b nicht gleich Null sein.
Wie bisher wird auch hierbei a als Dividend, b als Divisor und $a : b$ als Quotient bezeichnet.

$$x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$x = +\frac{3}{4}\text{, denn } \left(+\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Gleichbedeutend damit ist:

$$x = \left(-\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{3}{4}.$$

Um eine Regel für die Division rationaler Zahlen zu finden, betrachten wir folgende Fälle:

(18)

a) $(+20) : \left(+\frac{1}{5}\right) = +100$; denn $(+100) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right) = +20$

b) $(-20) : \left(-\frac{1}{5}\right) = +100$; denn $(+100) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -20$

c) $(+20) : \left(-\frac{1}{5}\right) = -100$; denn $(-100) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = +20$

d) $(-20) : \left(+\frac{1}{5}\right) = -100$; denn $(-100) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right) = -20$

27 **SATZ: Man dividiert zwei rationale Zahlen, indem man zunächst den Quotienten ihrer absoluten Beträge bildet.**
Der Quotient der rationalen Zahlen ist positiv, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen haben; er ist negativ, wenn Dividend und Divisor verschiedene Vorzeichen haben.
Die Division durch Null ist auch im Bereich der rationalen Zahlen nicht erklärt.

Aufgaben A 70 bis 78

31 Wie im Bereich der gebrochenen Zahlen können wir auch im Bereich der rationalen Zahlen den Bruchstrich als Divisionszeichen auffassen:

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Aus der Regel für die Division rationaler Zahlen folgt:

$$\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b},$$

wobei $b \neq 0$ vorausgesetzt wird.

A

18 $\frac{+2}{-7} = (+2):(-7) = (-2):(+7) = \frac{-2}{+7} = -\frac{2}{7}$

Ist $a \neq 0$, so heißt $\frac{1}{a}$ bzw. $1 : a$ die zu a **reziproke Zahl** oder das **Reziproke** von a.

19

a	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{11}$
$\frac{1}{a}$ (Reziprokes von a)	$\frac{1}{3}$	3	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{11}{12}$

Im Bereich der rationalen Zahlen kann auch gekürzt und erweitert werden. Kürzungs- bzw. Erweiterungsfaktoren können beliebige rationale Zahlen, außer Null, sein.

20 a) $(+12):(+3) = +\frac{12}{3} = +4$

$\frac{(+12)\cdot(-2)}{(+3)\cdot(-2)} = +\frac{24}{6} = +4$

b) $(+7):(+9) = +\frac{7}{9}$

$\frac{(+7)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}{(+9)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\left(-\frac{7}{5}\right)}{\left(-\frac{9}{5}\right)} = +\frac{7\cdot 5}{9\cdot 5} = +\frac{7}{9}$

Die gebrochenen Zahlen als Teilbereich der rationalen Zahlen

32 Wir haben beim Aufbau des Bereichs der rationalen Zahlen die Ordnung und die Rechenoperationen so festgelegt, daß sich die positiven rationalen Zahlen beim Vergleichen und Rechnen wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen verhalten. Wir können deshalb die positiven rationalen Zahlen durch die ihnen jeweils zugeordneten gebrochenen Zahlen ersetzen.

bisherige Schreibweise	neue Schreibweise
$-3 < +5$	$-3 < 5$
$+\frac{2}{3} < +\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$
$(-4) + (+8) = +4$	$-4 + 8 = 4$
$(+8) + (-4) = (+8) - (+4) = +4$	$8 - 4 = 4$
$\left(+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(+\frac{2}{7}\right) = +\frac{8}{35}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7} = \frac{8}{35}$
$\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) = \left(+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(+\frac{2}{7}\right) = +\frac{8}{35}$	$\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7} = \frac{8}{35}$
$(+8):(-4) = -(+8):(+4) = -2$	$8:(-4) = -8:4 = -2$

Nach dieser Ersetzung können wir feststellen:

28 **SATZ: Die gebrochenen Zahlen bilden einen Teilbereich der rationalen Zahlen.**

Entsprechend können wir die natürlichen Zahlen als Teilbereich der Menge der gebrochenen Zahlen und damit auch als Teilbereich der Menge der rationalen Zahlen auffassen (siehe auch Bild A 13).

29 **SATZ: Die rationalen Zahlen . . ., − 3, − 2, − 1, 0, + 1, + 2, + 3, . . . heißen ganze Zahlen.**
Die rationalen Zahlen + 1, + 2, + 3, . . . können wir als positive ganze Zahlen oder auch als natürliche Zahlen bezeichnen.
Die rationalen Zahlen − 1, − 2, − 3, . . . heißen negative ganze Zahlen.

Mit den Regeln für die Division rationaler Zahlen folgt schließlich:

30 **Jede rationale Zahl läßt sich in der Form $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ darstellen, wobei p und q ganze Zahlen sind.**
Durch Kürzen kann man stets erreichen, daß in dieser Darstellung die ganzen Zahlen p und q zueinander teilerfremd sind.

Aufgaben A 79 und 80

Das Rechnen mit 0 und 1

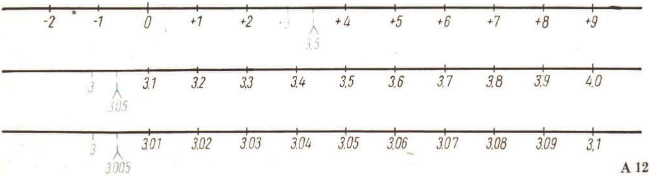
33 Auch im Bereich der rationalen Zahlen gilt stets

für das Rechnen mit 0:	für das Rechnen mit 1:
$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
$a - 0 = a$	$a : 1 = a$
$a \cdot 0 = 0$	$1 : a = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$
$a : 0$ nicht erklärt	
$0 : a = 0$	

Im Bereich der rationalen Zahlen können wir nicht von dem unmittelbaren Nachfolger $a + 1$ einer Zahl a sprechen.

21 Im Bereich der natürlichen Zahlen ist der unmittelbare Nachfolger der Zahl 3 die Zahl $3 + 1 = 4$. Im Bereich der rationalen Zahlen ist 4 jedoch nicht die auf 3 unmittelbar folgende Zahl; denn zwischen den rationalen Zahlen 3 und 4 liegen weitere rationale Zahlen, z. B. $3\frac{1}{3}$; 3,5; $\frac{30}{8}$.

19 Nenne weitere rationale Zahlen, die zwischen den rationalen Zahlen 3 und 4 liegen!



A 12

Im Bereich der rationalen Zahlen gibt es also keinen unmittelbaren Nachfolger von 3. So kann z. B. auch 3,1 nicht unmittelbarer Nachfolger von 3 sein. Denn die Zahl $\frac{3+3{,}1}{2} = 3{,}05$ ist ebenfalls größer als 3, aber kleiner als 3,1. Auf gleiche Weise können wir uns davon überzeugen, daß auch die Zahl 3,001 nicht unmittelbarer Nachfolger von 3 sein kann.
Ganz gleich, welche Zahl wir auch angeben, die größer als 3 ist, stets können wir also eine weitere rationale Zahl finden, die zwischen 3 und der angegebenen Zahl liegt (Bild A 12). Diese Überlegungen gelten für alle rationalen Zahlen.
Rationale Zahlen haben keinen unmittelbaren Nachfolger.

31 **Zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen gibt es unendlich viele andere rationale Zahlen.**

Übersicht über den Aufbau der Zahlenbereiche

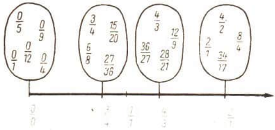
A 13

Natürliche Zahlen

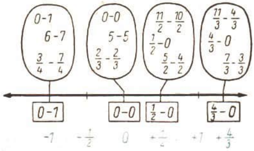
Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, . . .
Addition und Multiplikation sind uneingeschränkt ausführbar.

Gebrochene Zahlen

Eine gebrochene Zahl ist die Klasse aller Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen.
Addition, Multiplikation und Division (mit Ausnahme durch Null) sind uneingeschränkt ausführbar.
Die natürlichen Zahlen bilden einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen.



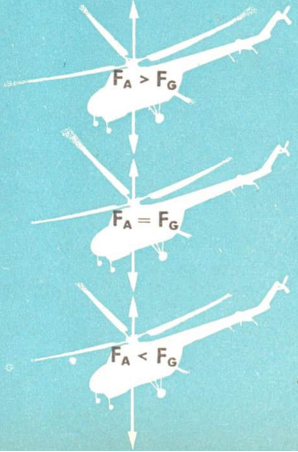
Eine rationale Zahl ist die Klasse aller Differenzen gebrochener Zahlen, die dadurch auseinander hervorgehen, daß man im Minuenden und im Subtrahenden die gleiche gebrochene Zahl addiert oder subtrahiert.



Jede rationale Zahl läßt sich in der Form $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ darstellen, wobei p und q ganze Zahlen sind.
Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (mit Ausnahme durch Null) sind uneingeschränkt ausführbar.
Die gebrochenen Zahlen bilden einen Teilbereich der rationalen Zahlen.

Aufgaben A 81 bis 126


OM-SPE


$F_A > F_G$
$F_A = F_G$
$F_A < F_G$

GLEICHUNGEN

B

Die Begriffe „Gleichung“ und „Ungleichung“ Seite 34

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen 35

Umformen von Gleichungen 37

Anwendungsaufgaben 44

Die Begriffe „Gleichung“ und „Ungleichung“

B

1 Bei der Lösung von Aufgaben treten ständig Ausdrücke auf, in denen das Gleichheitszeichen verwendet wird.

1 a) $5+7=12$ b) $4+x=5{,}5$ c) $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot 8=-\frac{20}{3}$ d) $3x=21$

1 **DEFINITION: Ausdrücke, in denen das Gleichheitszeichen auftritt, heißen Gleichungen. Die durch das Gleichheitszeichen getrennten Teile einer Gleichung heißen linke bzw. rechte Seite dieser Gleichung.**

2 Bei der Behandlung von Gleichungen müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1. In der Gleichung kommt *keine Variable* vor.

a) $5+7=12$ b) $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot 8=-\frac{20}{3}$ c) $5=7$

2. In der Gleichung kommt *eine Variable* vor.

d) $x=7$ e) $4+x=5{,}5$ f) $3x=21$

In einer Gleichung können auch mehr als nur eine Variable auftreten.
Im ersten Fall, bei dem in der Gleichung keine Variable auftritt, ist die Gleichung entweder wahr oder falsch. So ist zum Beispiel die Gleichung $5=7$ eine **falsche Aussage**, dagegen $5+7=12$ eine **wahre Aussage**.
Von den im zweiten Fall angegebenen Gleichungen können wir weder sagen, daß sie wahr sind, noch daß sie falsch sind. Wenn wir aber für die Variablen bestimmte Zahlen einsetzen, entstehen entweder wahre oder falsche Aussagen.

2 Wir setzen für x in $x=7$ und in $4+x=5{,}5$ bestimmte Zahlen ein:

x	$x=7$		$4+x=5{,}5$	
-2	$-2=7$	falsch	$4+(-2)=5{,}5$	falsch
$-0{,}3$	$-0{,}3=7$	falsch	$4+(-0{,}3)=5{,}5$	falsch
0	$0=7$	falsch	$4+0=5{,}5$	falsch
$1{,}5$	$1{,}5=7$	falsch	$4+1{,}5=5{,}5$	wahr
7	$7=7$	wahr	$4+7=5{,}5$	falsch

Aufgabe B 1

3 Neben den Gleichungen haben wir auch schon Ausdrücke kennengelernt, in denen die Zeichen für „ist kleiner als“ (<) und „ist größer als“ (>) vorkommen.

2 **DEFINITION: Ausdrücke, in denen die Zeichen „<“ oder „>“ vorkommen, heißen Ungleichungen.**

Auch bei den Ungleichungen müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. In der Ungleichung kommt *keine Variable* vor.

a) $-2 < 1{,}5$ b) $\frac{8}{3} - (+4) > \frac{5}{3}$

2. In der Ungleichung kommt *eine Variable* vor.

c) $x < 1{,}5$ d) $\frac{8}{3} - x > \frac{5}{3}$

B

Im ersten Fall, bei dem in der Ungleichung keine Variable auftritt, können wir wieder von Wahrheit oder Falschheit dieser Ungleichung sprechen.
Die Ungleichung $-2 < 1{,}5$ ist eine wahre, die Ungleichung $\frac{8}{3} - (+4) > \frac{5}{3}$ dagegen eine falsche Aussage.
Im zweiten Fall werden die Ungleichungen erst dann wieder zu wahren oder falschen Aussagen, wenn wir für x bestimmte Zahlen einsetzen.

3 Wir setzen für x in $x < 1{,}5$ und in $\frac{8}{3} - x > \frac{5}{3}$ bestimmte Zahlen ein:
(Für das Wort „wahr“ wollen wir w und für „falsch“ f schreiben.)

x	$x < 1{,}5$		$\frac{8}{3} - x > \frac{5}{3}$	
-3	$-3 < 1{,}5$	w	$\frac{8}{3} - (-3) > \frac{5}{3}$	w
$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5} < 1{,}5$	w	$\frac{8}{3} - \left(-\frac{2}{5}\right) > \frac{5}{3}$	w
0	$0 < 1{,}5$	w	$\frac{8}{3} - 0 > \frac{5}{3}$	w
$1{,}5$	$1{,}5 < 1{,}5$	f	$\frac{8}{3} - 1{,}5 > \frac{5}{3}$	f
1	$1 < 1{,}5$	w	$\frac{8}{3} - 1 > \frac{5}{3}$	f

Aufgabe B 2

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

4 Kommt in einer Gleichung oder in einer Ungleichung eine Variable vor, so können wir für diese Variable Zahlen einsetzen. Dadurch entsteht entweder eine wahre oder eine falsche Aussage.
Wird eine Gleichung oder eine Ungleichung durch das Einsetzen einer bestimmten Zahl zu einer wahren Aussage, so sagt man: diese Zahl **erfüllt** die betreffende Gleichung oder Ungleichung.

1 Welche Zahlen erfüllen folgende Gleichungen?

a) $2x = 6$ b) $-\frac{1}{2}x = 5$ c) $2x + 1 = 5$ d) $9x = -6$

Gib Zahlen an, die folgende Ungleichungen erfüllen!

e) $x < -2$ f) $3x > 15$ g) $2{,}5x + 0{,}1 < 2{,}6$

Manche Gleichungen bzw. Ungleichungen werden von keiner Zahl, andere von nur einer Zahl und wieder andere von mehreren Zahlen erfüllt.

3 **DEFINITION: Eine Gleichung bzw. Ungleichung mit einer Variablen lösen, bedeutet, alle Zahlen zu finden, die die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung erfüllen. Jede solche Zahl heißt eine Lösung der gegebenen Gleichung oder Ungleichung.**

B

Wenn wir beim Einsetzen von Zahlen für eine Variable z. B. die Einschränkung vornehmen, daß nur natürliche Zahlen eingesetzt werden dürfen, so ergibt sich häufig der Fall, daß die Gleichung keine Lösung hat.

4 **a)** Welche natürliche Zahl erfüllt die Gleichung $3x = 4$?

Ergebnis: Es gibt keine natürliche Zahl, die mit 3 multipliziert 4 ergibt.

Wir sagen:

Die Gleichung ist im Bereich der natürlichen Zahlen **nicht lösbar.** Im Bereich der rationalen Zahlen dagegen hat die Gleichung die Lösung $\frac{4}{3}$.

b) Ermittle natürliche Zahlen, die die Ungleichung $4 + x < 3$ erfüllen!

Ergebnis: Diese Ungleichung ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Im Bereich der rationalen Zahlen hat die Ungleichung alle Zahlen, die kleiner sind als —1, als Lösungen.

2 Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

	Lösungen aus dem Zahlenbereich der			
	natürlichen Zahlen	gebrochenen Zahlen	ganzen Zahlen	rationalen Zahlen
$6 + x = 4$	n.l.	n.l.	—2	—2
$3 + x = 9$				
$2x = 5$				
$4x = 28$				
$-\frac{7}{5}x = \frac{7}{2}$				

Wenn nichts anderes gesagt wird, wollen wir in Zukunft die Lösungen stets aus dem Bereich der rationalen Zahlen wählen.

5 **ZUSAMMENFASSUNG: Die Zahlen, die eine gegebene Gleichung oder Ungleichung erfüllen, heißen Lösungen der Gleichung bzw. Ungleichung. Gibt es keine solche Zahl, so heißt die betreffende Gleichung bzw. Ungleichung nicht lösbar.**
Die Existenz und die Anzahl von Lösungen hängt davon ab, welcher Zahlbereich zugrunde gelegt wird.

Umformen von Gleichungen

6 Die Lösung einer Gleichung kann man in einfachen Fällen durch Probieren finden. In den meisten Fällen ist dieses Verfahren jedoch sehr umständlich. So wird man beispielsweise die Lösung der Gleichung

$$\frac{5}{29}x - 37{,}11 = 85{,}9$$

kaum durch Probieren finden. Die Lösung lautet nämlich 713,458.

3 Setze die Zahl 713,458 für x in die Gleichung

$$\frac{5}{29}x - 37{,}11 = 85{,}9$$

ein und überprüfe die Aussage!

Das Ermitteln der Lösung ist besonders einfach, wenn auf der einen Seite nur die Variable und auf der anderen Seite nur Zahlen stehen.

5 **a)** $x = \frac{7}{3}$
Wir erkennen sofort, daß $\frac{7}{3}$ die Lösung ist.
Durch Einsetzen ergibt sich nämlich die wahre Aussage: $\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

b) $x = \frac{4 \cdot 5}{12}$
Wir können den Bruch kürzen: $\frac{4 \cdot 5}{12} = \frac{5}{3}$.
Durch Einsetzen der Zahl $\frac{5}{3}$ ergibt sich die wahre Aussage: $\frac{5}{3} = \frac{4 \cdot 5}{12}$.

Aus jeder gegebenen lösbaren Gleichung läßt sich nun durch schrittweises Umformen eine Gleichung der Form $x = a$ oder $a = x$ gewinnen, die dieselbe Lösung wie die ursprünglich gegebene Gleichung hat. Dabei ist a eine feste rationale Zahl. Dieses schrittweise Umformen bezeichnet man als **Auflösen der Gleichung nach der betreffenden Variablen** oder als **Isolieren der Variablen.** Diese Variable wird oft mit x, aber auch mit anderen Buchstaben wie y, z, s, t, u, v, w bezeichnet.

7 Das Vertauschen der Seiten

Durch Vertauschen der Seiten einer gegebenen Gleichung *ohne Variable* erhalten wir eine neue Gleichung.

6 (1) $4 + 1 = 5$ (1 a) $5 = 4 + 1$

Beide Gleichungen stellen eine wahre Aussage dar.

4 **SATZ: Vertauscht man in einer Gleichung, die eine wahre Aussage darstellt, die Seiten, so erhält man wieder eine wahre Aussage.**

Enthält eine gegebene Gleichung eine Variable, so erhalten wir durch Vertauschen der Seiten eine Gleichung, die dieselbe Lösung besitzt wie die ursprüngliche Gleichung. Durch Einsetzen der Lösungen erhalten wir nämlich in beiden Fällen eine wahre Aussage.

7 (1) $x + 3 = 7$ (2) $7 = x + 3$

Die Lösung ist in beiden Fällen 4, denn durch Einsetzen erhalten wir die Aussagen:

(1a) $4 + 3 = 7$ (2a) $7 = 4 + 3$.

B

5 **DEFINITION: Zwei Gleichungen, die dieselben Lösungen haben, heißen gleichwertig oder äquivalent.**

Die Gleichungen $x + 3 = 7$ und $7 = x + 3$ sind also äquivalent.

6 **SATZ: Vertauscht man in einer Gleichung mit einer Variablen die Seiten, so erhält man eine äquivalente Gleichung.**

8 Addieren und Subtrahieren einer Zahl auf beiden Seiten

Wenn wir auf beiden Seiten einer Gleichung *ohne Variable* dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren, so erhalten wir eine neue Gleichung.

8 (1) $10 - 2 = 8$; (1 a) $10 - 2 + 5 = 8 + 5$

(1 b) $10 - 2 - 5 = 8 - 5$

Wir gelangen in jedem Fall zu einer wahren Aussage.

7 **SATZ: Addiert oder subtrahiert man in einer Gleichung, die eine wahre Aussage darstellt, auf beiden Seiten dieselbe Zahl, so erhält man wieder eine wahre Aussage.**

Enthält eine gegebene Gleichung *eine Variable*, so erhalten wir durch Addition oder Subtraktion derselben Zahl auf beiden Seiten dieser Gleichung auch wieder eine neue Gleichung.

9 (2) $x + 9 = 15$ (2 a) $x + 9 + 4 = 15 + 4$

(2 b) $x + 9 - 3 = 15 - 3$

Die Gleichungen (2 a) und (2 b) sind der Gleichung (2) äquivalent, d. h., sie haben dieselbe Lösung. Setzen wir nämlich die Lösung 6 ein, so erhalten wir die wahre Aussage:

(3) $6 + 9 = 15$

und nach Satz 7 sind dann auch

(3 a) $6 + 9 + 4 = 15 + 4$ und (3 b) $6 + 9 - 3 = 15 - 3$

wahre Aussagen. Also haben die Gleichungen (2), (2 a) und (2 b) dieselbe Lösung.

8 **SATZ: Addiert oder subtrahiert man in einer Gleichung, die eine Variable enthält, auf beiden Seiten dieselbe Zahl, so erhält man äquivalente Gleichungen.**

9 Multiplizieren mit einer Zahl und Dividieren durch eine Zahl auf beiden Seiten

Es sei eine Gleichung *ohne Variable*, die eine wahre Aussage darstellt, gegeben. Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl dividieren, so erhalten wir jeweils eine neue Gleichung, die wieder eine wahre Aussage darstellt. Dabei ist die Division durch 0 natürlich ausgeschlossen, während die Multiplikation mit 0 stets die wahre Aussage $0 = 0$ ergibt.

10 (1) $10 - 2 = 8$ (1 a) $4 \cdot (10 - 2) = 4 \cdot 8$
(1 b) $(10 - 2) : 7 = 8 : 7$

Die Gleichung (1 b) kann man auch in der Form $\frac{10-2}{7} = \frac{8}{7}$ schreiben.

9 **SATZ: Werden beide Seiten einer Gleichung, die eine wahre Aussage darstellt, mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl (außer Null) dividiert, so erhalten wir wieder eine wahre Aussage.**

Entsprechend können wir die Seiten einer Gleichung, die *eine Variable* enthält, mit einer Zahl multiplizieren oder durch eine Zahl außer Null dividieren.

11 (2) $x + 9 = 15$ (2a) $4 \cdot (x + 9) = 4 \cdot 15$
(2b) $(x + 9) : 7 = 15 : 7$

Alle Gleichungen haben die Zahl 6 als Lösung, sie sind also äquivalent. Wenn wir zur Überprüfung die Zahl 6 einsetzen, so erhalten wir in jedem Fall eine wahre Aussage.

Bemerkung: Bei der Division beider Seiten einer Gleichung müssen wir die Null selbstverständlich wieder ausschließen. Aber auch bei der Multiplikation muß jetzt die Null ausgeschlossen werden.
Multiplizieren wir nämlich beide Seiten einer Gleichung, die eine Variable enthält, mit Null, so erhalten wir die wahre Aussage $0 = 0$. In dieser Gleichung tritt aber die Variable nicht mehr auf.

10 **SATZ: Multiplizieren oder dividieren wir in einer Gleichung, die eine Variable enthält, beide Seiten mit derselben oder durch dieselbe von Null verschiedene Zahl, so erhalten wir äquivalente Gleichungen.**

10 Anwendung der Umformungsregeln

Wir wollen jetzt verschiedene Gleichungen auf die Form $x = a$ bringen. Wir wollen also die Gleichung so umformen, daß die Variable x allein auf einer Seite der Gleichung steht. Wir wollen also x isolieren.

12 $x + 16 = 23$

Wir subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung 16:

$$x + 16 - 16 = 23 - 16$$
$$\underline{\underline{x = 7}}$$

Die letzte Gleichung hat als Lösung die Zahl 7. Da die angegebene Umformung auf eine äquivalente Gleichung führt, ist 7 aber auch Lösung der ursprünglich angegebenen Gleichung.
Da man sich bei der Umformung jedoch verrechnet haben könnte, setzt man die gefundene Zahl in die gegebene Gleichung ein und prüft nach, ob sich wirklich eine wahre Aussage ergibt. Dieses Einsetzen heißt **Probe.**[1]

B

Probe: $7 + 16 = 23 \qquad 23 = 23$

Die erhaltene Aussage ist wahr. Die Zahl 7 ist also tatsächlich Lösung der gegebenen Gleichung.

13

$$5x = -12$$

Wir dividieren beide Seiten der Gleichung durch 5:

$$5x : 5 = -12 : 5$$
$$\underline{\underline{x = -\frac{12}{5}}}$$

Die Zahl $-\frac{12}{5}$ ist Lösung der letzten und damit auch der gegebenen Gleichung.

Probe: $5 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) = -12 \qquad -12 = -12$

11 Um die notwendigen Rechenoperationen kürzer angeben zu können, schreiben wir am Ende der Gleichung hinter einem senkrechten Strich auf, welche Rechenoperationen auf beiden Seiten der Gleichung auszuführen sind. Das Beispiel 13 erhält dann die Form:

$$5x = -12 \qquad |:5$$
$$\underline{\underline{x = -\frac{12}{5}}}$$

14

a) $\frac{x}{7} = 4 \qquad | \cdot 7$
$x = 4 \cdot 7$
$\underline{\underline{x = 28}}$

Probe:
$\frac{28}{7} = 4$
$4 = 4$

b) $\frac{11}{8}x = 2{,}5 \qquad | \cdot 8$
$11x = 2{,}5 \cdot 8$
$11x = 20 \qquad | :11$
$\underline{\underline{x = \frac{20}{11}}}$

Probe:
$\frac{11}{8} \cdot \frac{20}{11} = 2{,}5$
$\frac{20}{8} = 2{,}5$
$2{,}5 = 2{,}5$

c) $4x + 19 = 31 \qquad | -19$
$4x = 31 - 19$
$4x = 12 \qquad | :4$
$x = \frac{12}{4}$
$\underline{\underline{x = 3}}$

Probe:
$4 \cdot 3 + 19 = 31$
$12 + 19 = 31$
$31 = 31$

[1] In Klasse 8 werden wir lernen, daß eine solche Probe auch aus anderen Gründen notwendig ist.

Wir können die Umformungen auch in anderer Reihenfolge vornehmen. Im Beispiel 14c ergibt sich dann folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} 4x + 19 &= 31 && \mid :4 \\ x + \frac{19}{4} &= \frac{31}{4} && \mid -\frac{19}{4} \\ x &= \frac{31}{4} - \frac{19}{4} \\ x &= \frac{12}{4} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Der erste Lösungsweg ist in diesem Beispiel jedoch rechnerisch bequemer.

15

$$\begin{aligned} 6{,}2 &= 2{,}2 - 8x && \mid -2{,}2 \\ 6{,}2 - 2{,}2 &= -8x \\ 4 &= -8x && \mid :(-8) \\ -\frac{4}{8} &= x \\ -\frac{1}{2} &= x && \mid \text{Seiten vertauschen} \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 6{,}2 &= 2{,}2 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 6{,}2 &= 2{,}2 + 4 \\ 6{,}2 &= 6{,}2 \end{aligned}$$

12 Treten auf einer Seite einer Gleichung mehrere Summanden auf, die die Variable enthalten, so fassen wir diese gewöhnlich zusammen. Man nennt diesen Rechenschritt **Zusammenfassen.**

16

$$\begin{aligned} 5x + 2x + 8 - 4x &= 9 \\ 7x + 8 - 4x &= 9 \\ 3x + 8 &= 9 && \mid -8 \\ 3x &= 1 && \mid :3 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 8 - 4 \cdot \frac{1}{3} &= 9 \\ \frac{5 + 2 - 4}{3} + 8 &= 9 \\ \frac{3}{3} + 8 &= 9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

Auch wenn mehrere Summanden ohne Variable auf einer Seite vorhanden sind, fassen wir diese zuerst zusammen.

Aufgaben B 3 bis 12

13 Die Variable kann auch auf beiden Seiten einer gegebenen Gleichung vorkommen.

17

$$5x - 2 = 6 + 3x$$

Wir könnten diese Gleichung wie in den vorangegangenen Beispielen lösen, wenn die Variable nur an einer Stelle auftreten würde. Das können wir aber erreichen, wenn wir auf beiden Seiten $3x$ subtrahieren:

$$\begin{aligned} 5x - 2 - 3x &= 6 + 3x - 3x \\ 2x - 2 &= 6 && \mid +2 \\ 2x &= 8 && \mid :2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4 - 2 &= 6 + 3 \cdot 4 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

Wir haben also die Lösung der gegebenen Gleichung gefunden, d.h., die Subtraktion von $3x$ führte auf eine äquivalente Gleichung. Denn unabhängig davon, welche Zahl wir für x einsetzen, bedeutet die beiderseitige Subtraktion von $3x$, daß auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl subtrahiert wird. Nach Satz 8 erhalten wir dadurch eine äquivalente Gleichung.

4 Die Gleichung im Beispiel 17 können wir auch auf folgende Art lösen:

$$\begin{array}{rcll} 5x - 2 &=& 6 + 3x & \mid\ -5x \\ -2 &=& 6 + 3x - 5x & \\ -2 &=& 6 - 2x & \mid\ -6 \\ -8 &=& -2x & \mid\ :(-2) \\ 4 &=& x & \\ x &=& 4 & \end{array}$$

B

Vergleiche diesen Lösungsweg mit dem im Beispiel 17! Welcher Weg ist bequemer? Wähle stets den bequemsten Lösungsweg!

Tritt die Variable auf beiden Seiten der Gleichung auf, so formen wir diese zunächst so um, daß die Variable nur auf einer Seite der Gleichung vorkommt. Diesen Rechenschritt nennt man **Ordnen.**

11 **SATZ: Addieren oder subtrahieren wir auf beiden Seiten einer Gleichung ein Vielfaches $a \cdot x$ der Variablen ($a \neq 0$, a ist eine rationale Zahl), so erhalten wir eine äquivalente Gleichung.**

Wie wir in der Klasse 8 lernen werden, führt sowohl die Multiplikation mit der Variablen als auch die Division durch die Variable auf beiden Seiten nicht immer zu äquivalenten Gleichungen.

Aufgaben B 13 bis 17

14 Bei den in den Sätzen 4 bis 11 aufgestellten Regeln brauchen wir weder zwischen Addition und Subtraktion noch zwischen Multiplikation und Division zu unterscheiden. Statt die rationale Zahl a zu subtrahieren, können wir nämlich die Zahl $-a$ addieren. Statt durch die rationale Zahl a ($a \neq 0$) zu dividieren, können wir auch mit $\frac{1}{a}$ multiplizieren.

15 Die Angabe der im Laufe der Umformungen erforderlichen Rechenoperationen können wir dadurch verkürzen, daß wir mehrere Schritte zusammenfassen.

18 **a)**

$$\begin{array}{rcll} 15 - 6x &=& 51 - 5x & \mid\ +5x \\ 15 - x &=& 51 & \mid\ -15 \\ -x &=& 36 & \mid\ :(-1) \\ x &=& -36 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcll} 15 - 6x &=& 51 - 5x & \mid\ +5x - 15 \\ -x &=& 36 & \mid\ :(-1) \\ x &=& -36 & \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{rcl} 15 - 6(-36) &=& 51 - 5(-36) \\ 15 + 216 &=& 51 + 180 \\ 231 &=& 231 \end{array}$$

Bemerkung: Nach den Regeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen gilt:

$$\begin{array}{l} (+1) \cdot 5 = 5 \\ (-1) \cdot 5 = -5 \end{array} \quad \text{und entsprechend} \quad \begin{array}{l} (+1) \cdot x = x \\ (-1) \cdot x = -x \end{array}$$

16 Einige Bemerkungen zur Lösbarkeit von Gleichungen

Im Abschnitt B 4 konnten wir feststellen, daß eine Gleichung manchmal keine Lösung hat, wenn der Zahlbereich für die Variable eingeschränkt ist. Aber auch ohne Einschränkung des Zahlbereichs kann der Fall eintreten, daß eine Gleichung keine Lösung hat.

19 $$3x + 2 - x = 4 + 2x + 2$$

Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 2x + 6 \quad \mid -2x - 2 \\ 0 \cdot x &= 4 \end{aligned}$$

Es gibt keine rationale Zahl, die die letzte Gleichung erfüllt. Also ist auch die gegebene Gleichung nicht lösbar.

Andererseits kann eine Gleichung auch alle rationalen Zahlen als Lösungen besitzen.

20 $$7x + 4 - 3x = 12 - 6x - 8 + 10x$$

Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} 4x + 4 &= 4x + 4 \quad \mid -4x - 4 \\ 0 \cdot x &= 0 \cdot x \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung und damit auch die gegebene Gleichung wird von allen rationalen Zahlen erfüllt.

17 ZUSAMMENFASSUNG: Wir lösen eine gegebene Gleichung mit einer Variablen, in dem wir versuchen, sie auf die Form $x = a$ zu bringen. Dabei ist a eine bestimmte rationale Zahl.
Hierfür haben wir je nach Art der gegebenen Gleichung die folgenden Umformungsmöglichkeiten:

1. Wir können auf jeder Seite der Gleichung jeweils solche Glieder, die die Variable enthalten, und solche, die die Variable nicht enthalten, zusammenfassen.
2. Wir können auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren.
3. Wir können beide Seiten der Gleichung mit derselben von Null verschiedenen Zahl multiplizieren. Wir können auch beide Seiten durch dieselbe von Null verschiedene Zahl dividieren.
4. Wir können auf beiden Seiten der Gleichung beliebige Vielfache der Variablen addieren oder subtrahieren.
5. Wir können die Seiten vertauschen.

Durch diese Umformungen erhalten wir immer äquivalente Gleichungen. Die Reihenfolge der Umformungen wählen wir zweckmäßigerweise so, daß sich der bequemste Lösungsweg ergibt.
Zuletzt müssen wir stets die Probe ausführen, indem wir die erhaltene Zahl in die gegebene Gleichung einsetzen.

Anwendungsaufgaben

18 Häufig ist der Zusammenhang zwischen einer unbekannten Zahl und anderen bekannten Zahlen in einen Text eingekleidet. Um diese Aufgaben zu lösen, müssen wir die im Text gegebenen Beziehungen zwischen den Zahlen in Form einer Gleichung aufschreiben. Dabei bezeichnen wir die unbekannte Zahl durch eine Variable.

Treten die Zahlen im Zusammenhang mit Maßeinheiten auf, handelt es sich also um Größen, so müssen wir darauf achten, daß alle gleichartigen Größen auch in derselben Maßeinheit angegeben sind. Ist das nicht der Fall, so müssen Größen umgerechnet werden.

Die Probe muß stets anhand des Aufgabentextes durchgeführt werden. Das Einsetzen der gefundenen Zahl in die Gleichung genügt nicht als Probe; denn es könnte bei der Aufstellung der Gleichung bereits ein Fehler unterlaufen sein.

21 Drei Traktoristen pflügten an einem Tag 8,4 ha. Die Leistung des ersten war um 80 a größer als die des zweiten. Der zweite pflügte 50 a mehr als der dritte. Wieviel Hektar pflügte jeder?

Wir rechnen zunächst die Maßangaben 80 a und 50 a in Hektar um.

Dann ergibt sich aus dem Text, daß die gepflügte Ackerfläche des ersten Traktoristen um 0,8 ha größer als die des zweiten und die des zweiten um 0,5 ha größer als die des dritten ist.

Nun bezeichnen wir die Größe der Ackerfläche, die der dritte Traktorist gepflügt hat, mit x ha.

Die folgende Tabelle veranschaulicht noch einmal das Arbeitsergebnis:

	erster Traktorist	zweiter Traktorist	dritter Traktorist
Ackerfläche in ha	$x + 0,5 + 0,8$	$x + 0,5$	x

Da die drei Traktoristen zusammen 8,4 ha pflügten, erhalten wir folgende Gleichung:

Ansatz:

$$x + 0,5 + 0,8 + x + 0,5 + x = 8,4$$

Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} 3x + 1,8 &= 8,4 \quad &| -1,8 \\ 3x &= 6,6 \quad &| \ :3 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 2,2}} \end{aligned}$$

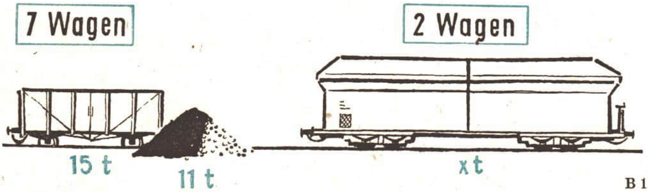
Wir setzen dieses Ergebnis in die Tabelle ein und erhalten:

	erster Traktorist	zweiter Traktorist	dritter Traktorist
Ackerfläche in ha	3,5	2,7	2,2

Durch Addition erhalten wir die in der Aufgabe angegebene Gesamtfläche von 8,4 ha. Außerdem pflügte der erste Traktorist auch wirklich 0,8 ha mehr als der zweite, denn $2{,}7 + 0{,}8 = 3{,}5$; der zweite pflügte 0,5 ha mehr als der dritte, denn $2{,}7 = 2{,}2 + 0{,}5$.

Antwortsatz: Der erste Traktorist pflügte 3,5 ha, der zweite 2,7 ha und der dritte 2,2 ha.

22 Die Deutsche Reichsbahn setzt neben modernen Großraumwagen auch Güterwagen alter Bauart mit weniger Laderaum ein. Die offenen Güterwagen alter Bauart können im allgemeinen mit 15 t beladen werden. Wir wollen ermitteln, wieviel Tonnen ein moderner Großraumwagen trägt.
Es sei bekannt, daß mit sieben Wagen alter Bauart 11 t weniger transportiert werden können als mit zwei Großraumwagen.



B 1

Lösung:

Die Ladung zweier Großraumwagen (Ladung: $2\,x$ t) ist gleich der Ladung von sieben Wagen alter Bauart (Ladung: $7 \cdot 15$ t), vermehrt um weitere 11 t (Bild B 1).

Ansatz:

$$2 \cdot x = 7 \cdot 15 + 11$$

Zusammenfassen:

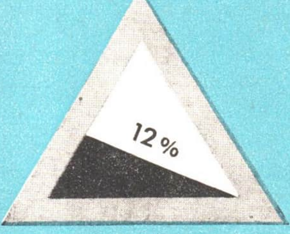
$$\begin{aligned} 2 \cdot x &= 105 + 11 \\ 2x &= 116 \qquad \mid :2 \\ x &= 58 \end{aligned}$$

Probe:

Mit sieben Wagen alter Bauart werden $7 \cdot 15\text{ t} = 105$ t befördert, mit zwei Großraumwagen $2 \cdot 58\text{ t} = 116$ t. Tatsächlich beträgt also der Unterschied der Gesamtladungen 11 t.

Antwortsatz: Ein Großraumwagen kann mit 58 t beladen werden.

Aufgaben B 18 bis 47


12 %

PROPORTIONEN
RECHENSTAB
PROZENTRECHNUNG

C

Der Verhältnisbegriff Seite 48

Absoluter und relativer Fehler 48

Proportionalität 50

Proportionen 56

Proportionen mit einer Variablen 58

Grafische Lösung von Aufgaben 61

Indirekte Proportionalität 62

Produktgleichungen mit einer Variablen 66

Der Rechenstab 68

Der Prozentbegriff 75

Grundaufgaben der Prozentrechnung 77

Grafische Darstellungen 80

Besondere Aufgaben aus der Prozentrechnung 83

Zinsrechnung 86

Zur Geschichte der rationalen Zahlen und der Proportionen 88

Der Verhältnisbegriff

1 Der durchschnittliche Ernteertrag an Weizen betrug in der DDR im Jahre 1953 rund 28 dt je Hektar, 1960 aber rund 35 dt je Hektar. Wir wollen die Erträge vergleichen.

Dazu können wir die Differenz der Zahlen bilden, die die Erträge angeben. Wir stellen fest: 1960 wurden je Hektar 7 dt mehr geerntet als im Jahre 1953.

Wir können aber auch den Quotienten der beiden Zahlen bilden und erhalten dann $\frac{28}{35}$, anders geschrieben 28 : 35. Diesen Quotienten können wir kürzen: $\frac{28}{35} = \frac{4}{5}$.

Wir sagen: Die Erträge der Jahre 1953 und 1960 **verhalten sich wie 4 zu 5.** Den Quotienten $\frac{4}{5}$ bzw. 4 : 5 (gelesen: 4 zu 5) nennen wir das **Verhältnis** dieser Erträge.

C

1 Beim 100 m-Lauf legte ein Schüler die Strecke in 12 s zurück. Bei normalem Wanderschritt benötigt man für 1 km durchschnittlich 12 min. In welchem Verhältnis stehen die Zeiten, die beim Kurzstreckenlauf und beim Wandern für 100 m benötigt werden? Beim Wandern benötigt man für 100 m Strecke 1,2 min.

Wir rechnen in gleiche Maßeinheiten um, 1,2 min = 72 s, und bilden das Verhältnis: $12 : 72 = 1 : 6$

Antwortsatz: Die beiden Zeiten verhalten sich wie 1 : 6.

2 Das Verhältnis der Zahlen 5,6 und 8,4 soll angegeben werden.

$$5{,}6 : 8{,}4 = \frac{5{,}6}{8{,}4} = \frac{56}{84} = \frac{2}{3} = 2 : 3$$

3 Das Verhältnis der Zahlen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$ soll angegeben werden.

$$\frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 4 : 5 = 0{,}8$$

1 **DEFINITION:**

Zwei Größenangaben können verglichen werden, indem man den Quotienten ihrer Maßzahlen bildet. Diesen Quotienten nennt man auch das Verhältnis dieser Zahlen. Dabei müssen Zahlenangaben für ein und dieselbe Größe in der gleichen Maßeinheit verwendet werden.

Die Verhältnisse sollen mit möglichst kleinen ganzen Zahlen dargestellt werden. Verhältnisse sind als Quotienten rationaler Zahlen selbst rationale Zahlen. Sie können also auch als Dezimalzahlen geschrieben werden.

Der absolute und der relative Fehler

2 Jürgen schätzt von einem Punkt im Gelände die Entfernung zum nächsten Telegrafenmast auf 90 m. Die Kontrolle mit dem Meßband ergibt jedoch eine Entfernung von 100 m (Bild C 1).

C 1

Gerhard schätzt die Breite eines Flusses auf 40 m. Beim Nachmessen auf einer Brücke stellt sich heraus, daß der Fluß 35 m breit ist (Bild C 1). Jürgen hat sich also um 10 m und Gerhard um 5 m verschätzt. Wer hat genauer geschätzt?
Ohne eingehende Überlegung könnten wir annehmen, daß Gerhard genauer geschätzt hat; denn sein Fehler beträgt nur 5 m, während sich Jürgen um das Doppelte, nämlich um 10 m, verschätzt hat. Dabei haben wir aber außer acht gelassen, daß die Strecke, die Jürgen schätzen mußte, viel länger ist als die von Gerhard geschätzte.
Um einen echten Vergleich der beiden Fehler anstellen zu können, bilden wir jeweils das Verhältnis des Fehlers zur richtigen Streckenlänge:

Jürgen	Fehler: 10 m	*Gerhard*	Fehler: 5 m
	richtige Länge: 100 m		richtige Länge: 35 m
	Verhältnis: $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$		Verhältnis: $\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

Wenn wir die beiden Verhältnisse vergleichen, so finden wir: $\frac{1}{10} < \frac{1}{7}$. Bei Jürgen ist also das Verhältnis des Fehlers zur gemessenen Entfernung kleiner als bei Gerhard.

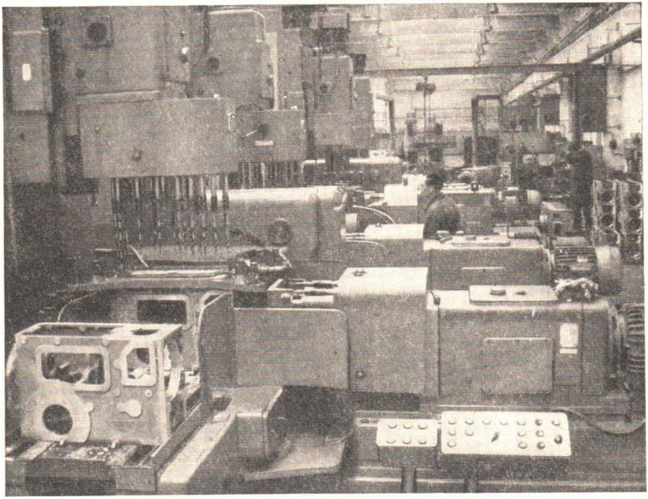
2 **DEFINITION: Die Differenz zwischen dem geschätzten Wert und dem richtigen Wert heißt absoluter Fehler. Je nach Vorzeichen dieser Differenz ist der absolute Fehler positiv oder negativ. Der absolute Fehler hat dieselbe Maßeinheit wie die betrachtete Größe.**

3 **DEFINITION: Das Verhältnis des absoluten Fehlers zum richtigen Wert heißt relativer Fehler. Der relative Fehler ist eine unbenannte Zahl.**

Der absolute Fehler beim Entfernungsschätzen beträgt bei Jürgen $90\text{ m} - 100\text{ m} = -10\text{ m}$ und bei Gerhard $40\text{ m} - 35\text{ m} = +5\text{ m}$. Die relativen Fehler betragen bei Jürgen $-\frac{1}{10}$ und bei Gerhard $+\frac{1}{7}$. Die Vorzeichen geben an, ob der Schätzwert nach oben (+) oder nach unten (—) vom richtigen Wert abweicht. Beim Vergleich der Fehlergröße betrachten wir jetzt nur die absoluten Beträge der Fehler. So hat Jürgen zwar einen größeren absoluten Fehler gemacht, denn $+10 > +5$, aber sein relativer Fehler ist kleiner als der von Gerhard, denn $+\frac{1}{10} < +\frac{1}{7}$.

Aufgaben C 1 bis 5

3 Eine automatische Taktstraße (Bild C 2) bearbeitet eine bestimmte Art von Werkstücken. Jeweils nach einer Stunde sind bei ununterbrochenem Einsatz der Taktstraße 30 Werkstücke fertig. Die folgende Tabelle gibt an, wieviel Werkstücke bei diesem Dauerbetrieb jeweils nach 1, 2, 3, ... Stunden fertig sind.



C 2

Arbeitszeit (in Stunden)	1	2	3	4	5	6	7	8
bearbeitete Werkstücke	30	60	90	120	150	180	210	240

In dieser Tabelle stehen die Maßzahlen von zwei Größen, und zwar ist jeder Maßzahl der ersten Zeile genau eine Maßzahl, nämlich die in derselben Spalte stehende, zugeordnet. So ist zum Beispiel der Maßzahl 5 (in Stunden) die Stückzahl 150 zugeordnet.
Aus der Tabelle entnehmen wir, daß die Anzahl der in einer bestimmten Zeit bearbeiteten Werkstücke durch Multiplikation der Arbeitszeit mit dem Faktor 30 berechnet werden kann. Das geht jedoch nur, weil die Arbeitsweise der Maschine regelmäßig war. Wenn dagegen die Taktstraße ab und zu angehalten werden muß und sie demzufolge nicht in jeder Stunde die gleiche Anzahl von Werkstücken bearbeitet, so können wir nicht die Anzahl der bearbeiteten Werkstücke berechnen. Die folgende Tabelle gibt einen solchen Verlauf wieder.

Arbeitszeit (in Stunden)	1	2	3	4	5	6	7	8
bearbeitete Werkstücke	30	58	72	118	150	193	205	220

4 Bezeichnen wir nun die Anzahl der Arbeitsstunden mit der Variablen t und die Anzahl der bearbeiteten Werkstücke mit n, so können wir bei einem regelmäßigen Arbeitsprozeß der Taktstraße die Anzahl der Werkstücke nach der Gleichung

$$n = 30 \cdot t$$

berechnen.

Für 7 Stunden ergibt sich beispielsweise:

$$n = 30 \cdot 7$$
$$n = 210,$$

also 210 Werkstücke.

5 Wenn wir in der ersten Tabelle in jeder Spalte die Verhältnisse aus der Anzahl der bearbeiteten Werkstücke und der Anzahl der erforderlichen Arbeitsstunden bilden, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 30 : 1 &= \tfrac{30}{1} = 30 \\ 60 : 2 &= \tfrac{60}{2} = 30 \\ 90 : 3 &= \tfrac{90}{3} = 30 \\ &\vdots \\ 240 : 8 &= \tfrac{240}{8} = 30. \end{aligned}$$

Alle diese Verhältnisse sind gleich.

In der zweiten Tabelle, bei unregelmäßiger Arbeit der Taktstraße, würden wir folgende Verhältnisse erhalten:

$$\begin{aligned} 30 : 1 &= \tfrac{30}{1} = 30 \\ 58 : 2 &= \tfrac{58}{2} = \tfrac{29}{1} = 29 \\ 72 : 3 &= \tfrac{72}{3} = 24 \\ 118 : 4 &= \tfrac{118}{4} = \tfrac{59}{2} = 29\tfrac{1}{2} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Wir wollen uns jetzt nur mit solchen Sachverhalten beschäftigen, bei denen die jeweils einander zugeordneten Zahlen stets in demselben Verhältnis stehen.

6 In der ersten Tabelle bilden wir nun Verhältnisse aus zwei Zahlen der ersten Zeile und den ihnen zugeordneten Zahlen der zweiten Zeile:

Arbeitszeit (in Stunden)	1	2	3	4	5	6	7	8
bearbeitete Werkstücke	30	60	90	120	150	180	210	240

a) 2 : 4 und 60 : 120; **b)** 8 : 5 und 240 : 150.

In beiden Fällen gehen die Verhältnisse durch Erweitern bzw. Kürzen auseinander hervor, so daß wir das Gleichheitszeichen setzen können:

a) $2:4=60:120$; b) $8:5=240:150$.

1 Bilde auf die gleiche Weise weitere Verhältnisse!

Das Verhältnis aus zwei beliebigen Maßzahlen der einen Größe ist gleich dem Verhältnis der entsprechenden Maßzahlen der anderen Größe. Daraus geht hervor:
Wenn die Maßzahlen der ersten Zeile verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ... werden, so werden auch die zugeordneten Maßzahlen der zweiten Zeile verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ...

C

Ebenso gilt:
Wenn die Maßzahlen der ersten Zeile halbiert, gedrittelt, geviertelt, ... werden, so werden auch die zugeordneten Maßzahlen der zweiten Zeile halbiert, gedrittelt, geviertelt, ...

Wir sagen auch:
Die Maßzahlen der beiden Größen wachsen bzw. fallen gleichmäßig (im gleichen Verhältnis).

7 Wenn sich die Maßzahlen zweier Größen so verhalten wie es im Abschnitt C 6 geschildert wurde, nennen wir sie künftig **proportional** (Kurzzeichen: $\sim$) zueinander.

4 a) Die Anzahl der produzierten Werkstücke n ist proportional zur Arbeitszeit t:

$n \sim t.$

b) Die Entlohnung p eines Genossenschaftsbauern ist proportional zur Anzahl der verrichteten Arbeitseinheiten n:

$p \sim n.$

c) Die Masse m eines Körpers ist proportional zum Volumen V:

$m \sim V.$

Der einheitliche Faktor, der den Zusammenhang zwischen den Maßzahlen proportionaler Größen angibt und den wir als gleiches Verhältnis einander zugeordneter Maßzahlen zweier proportionaler Größen kennengelernt haben, heißt **Proportionalitätsfaktor.**

4 **DEFINITION: Der Proportionalitätsfaktor ist der Faktor, mit dem man die Maßzahlen der einen Größe multiplizieren muß, um die zugeordneten Maßzahlen der zweiten Größe zu erhalten.**

5 Das Verhältnis aus der Anzahl der produzierten Werkstücke zur Anzahl der hierfür erforderlichen Arbeitsstunden ergibt den Proportionalitätsfaktor:

$\frac{n}{t} = k$ (In diesem Fall gilt $k = 30$).

Mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors können wir die Proportionalität $n \sim t$ als Gleichung $n = k \cdot t$ (im vorliegenden Falle $n = 30 \cdot t$) schreiben.

Es genügt nicht, wenn wir bequemer feststellen: „Proportionalität liegt vor, wenn gilt: Je größer die eine Maßzahl, desto größer auch die zugeordnete Maßzahl."

2 Weise das nach, indem du die zweite Tabelle im Abschnitt C 3 überprüfst! Bei diesem Sachverhalt bestand durch unregelmäßigen Produktionsablauf bekanntlich keine Proportionalität. Es gab nämlich keinen gemeinsamen Faktor.

8 Da wir bei der Proportionalität zweier Größen nur deren Maßzahlen vergleichen, können wir auch die Proportionalität zwischen Mengen beliebiger rationaler Zahlen untersuchen.

6 a)

5	10	15	20	25	30
0	0	0	0	0	0

b)

2	4	6	8	10	12
4	8	12	16	20	24

Die Zahlenfolgen in a) sind nicht proportional, die Zahlenfolgen in b) sind proportional.

Wir sprechen vorläufig nur dann von Proportionalität, wenn der einheitliche Faktor größer als Null ist.

9 ZUSAMMENFASSUNG: Eine Größe heißt zu einer anderen Größe proportional, wenn folgendes gilt:

1. Jeder Maßzahl x der ersten Größe ist genau eine Maßzahl y der zweiten Größe zugeordnet.
2. Jede Maßzahl y der zweiten Größe ergibt sich aus der zugeordneten Maßzahl x der ersten Größe durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor. Dieser Faktor heißt Proportionalitätsfaktor.

Der Proportionalitätsfaktor k ist gleich dem Verhältnis $y : x$ einer beliebigen Maßzahl der zweiten Größe zur zugeordneten Maßzahl der ersten Größe.

$$y \sim x; \qquad y = k \cdot x; \qquad y : x = k$$

Sind zwei Größen zueinander proportional, so ist das Verhältnis zweier beliebiger Maßzahlen der einen Größe gleich dem Verhältnis der entsprechenden Maßzahlen der anderen Größe.
Proportionalität tritt nicht nur als Zusammenhang zweier *Größen* auf. Wir können auch von der Proportionalität zweier Mengen von positiven rationalen Zahlen sprechen.

10 Bei der Untersuchung von Anwendungsbeispielen werden wir künftig zwei Fälle unterscheiden:

(1) Wir wissen bereits, daß bei dem betreffenden Sachverhalt Proportionalität vorliegt (vgl. hierzu Beispiel 4) oder wir nehmen Proportionalität zur Vereinfachung an (vgl. Beispiel 7).

(2) Wir müssen einen Sachverhalt erst daraufhin überprüfen, ob Proportionalität vorliegt (vgl. Beispiel 8). Dieser Aufgabe werden wir auch häufig im Physikunterricht begegnen.

7 Ein Pkw fährt eine längere Strecke auf der Autobahn. Seine Geschwindigkeit ist nahezu gleichbleibend (konstant) und beträgt $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Jeder Maßzahl der ersten Größe (Fahrzeit) ist genau eine Maßzahl der zweiten Größe (zurückgelegte Strecke) zugeordnet. Wenn wir gleichbleibende Geschwindigkeit voraussetzen (in Wirklichkeit handelt es sich dabei nur um einen Durchschnittswert), besteht Proportionalität zwischen der zurückgelegten Strecke s und der hierfür erforderlichen Zeit t: $s \sim t$.
Der Proportionalitätsfaktor ist gleich 90. Damit wird die Proportionalität durch die Gleichung $s = 90\,t$ ausgedrückt. Wir erkennen, daß der Proportionalitätsfaktor gerade gleich der Maßzahl der Geschwindigkeit ist, wenn man sie in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mißt. Messen wir dagegen die Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$, so wird die Proportionalität wegen $\frac{90\,\text{km}}{60\,\text{min}} = 1{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$ durch die Gleichung $s = 1{,}5\,t$ angegeben.
Wir sehen, daß zwei verschiedene Gleichungen denselben physikalischen Sachverhalt beschreiben. Damit nun keine Mißverständnisse entstehen, werden in der Physik und in der Technik die Proportionalitätsfaktoren mit den jeweiligen Maßeinheiten angegeben. In diesem Beispiel ist dann der Proportionalitätsfaktor gleich $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ oder $1{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Das bedeutet, daß die Zeit in der ersten Gleichung in Stunden und in der zweiten Gleichung in Minuten zu messen ist.

8 Bei einem Versuch wurde eine Schraubenfeder aus Stahl gedehnt. Und zwar wurde die Feder schrittweise stärker belastet und dabei jeweils die Verlängerung gegenüber der unbelasteten Feder gemessen.

a) Es ergab sich die folgende Tabelle:

Belastung F (in p)	50	100	150	200	300	400
Verlängerung l (in cm)	1,5	3,0	4,6	6,1	9,2	13,1

Jeder Maßzahl der ersten Größe (Belastung) ist genau eine Maßzahl der zweiten Größe (Verlängerung) zugeordnet.

b) Wir prüfen, ob Proportionalität vorliegt:

Wir bilden die Verhältnisse $\frac{F}{l}$ aus einander zugeordneten Maßzahlen:

$50 : 1{,}5 \approx 33{,}3 \approx 33$	$150 : 4{,}6 \approx 32{,}6 \approx 33$	$300 : 9{,}2 \approx 32{,}6 \approx 33$
$100 : 3{,}0 \approx 33{,}3 \approx 33$	$200 : 6{,}1 \approx 32{,}8 \approx 33$	$400 : 13{,}1 \approx 30{,}5$

Im Bereich bis 300 p liegt Proportionalität vor. Der Proportionalitätsfaktor beträgt mit der entsprechenden Maßeinheit etwa $33\,\frac{\text{p}}{\text{cm}}$ und besagt, daß sich die Feder durch die Belastung mit 33 p um 1 cm verlängert.

Die Abweichungen, die bei der Bildung der Verhältnisse im Bereich von 50 p bis 300 p auftreten, sind auf Meßungenauigkeiten zurückzuführen. Mit 400 p wurde die Schraubenfeder offensichtlich überbelastet. Die Feder dehnte sich übermäßig aus. Daraus folgt für den Bereich von 50 p bis 300 p:

$$F \sim l.$$

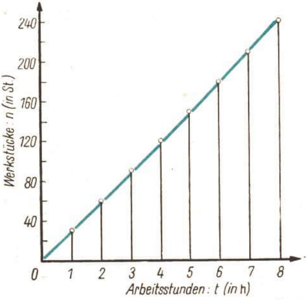
Unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors $33 \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}}$ gilt für diesen Bereich:

$$F = 33 \cdot l$$

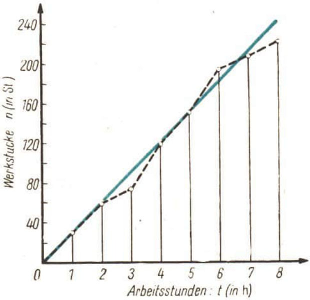
Aufgaben C 6 bis 19

11 Die grafische Darstellung der Proportionalität

Der Zusammenhang, in dem zwei zueinander proportionale Größen stehen, läßt sich in einer grafischen Darstellung veranschaulichen.
Durch einen gemeinsamen Anfangspunkt ziehen wir zwei zueinander senkrechte Strahlen. Jeden Strahl unterteilen wir und tragen die Maßzahlen der beiden Größen auf. Das Bild C 3 veranschaulicht die Herstellung des Diagramms für



C 3



C 4

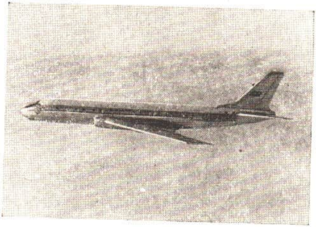
das Beispiel im Abschnitt C 3. Alle Punkte dieses Diagramms liegen auf einer Geraden. Das Bild C 4 zeigt das Diagramm für die zweite Wertetabelle im Abschnitt C 3, bei der bekanntlich keine Proportionalität vorliegt.
3 Zeichne auch Diagramme für die Sachverhalte in den Beispielen C 7 und C 8!

5 **SATZ: Die Proportionalität kann man in einem Diagramm darstellen. Das Diagramm besteht aus Punkten, die auf einer Geraden liegen, die stets durch den Anfangspunkt geht.**
(Den Beweis für diese Behauptung werden wir später kennenlernen.)

Umgekehrt können wir sagen:
Wenn die Punkte nicht auf einer Geraden liegen, die durch den Anfangspunkt geht, so liegt keine Proportionalität vor (Bild C 4).

Aufgaben C 20 bis 27

C 5



C 6

C

12 Das Turbinen-Propeller-Flugzeug Il 18 hat eine Reisegeschwindigkeit von 600 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, das Düsenverkehrsflugzeug TU 104 eine Reisegeschwindigkeit von 800 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (Bild C 5 und Bild C 6). Beide Geschwindigkeiten verhalten sich wie 800 : 600. Wir kürzen und erhalten:

$$800 : 600 = 120 : 90 = 60 : 45 = 20 : 15 = 4 : 3.$$

Entsprechend können wir auch erweitern:

$$4 : 3 = 8 : 6 = 12 : 9 = 24 : 18 = 40 : 30 = 80 : 60 = 180 : 135 = \ldots$$

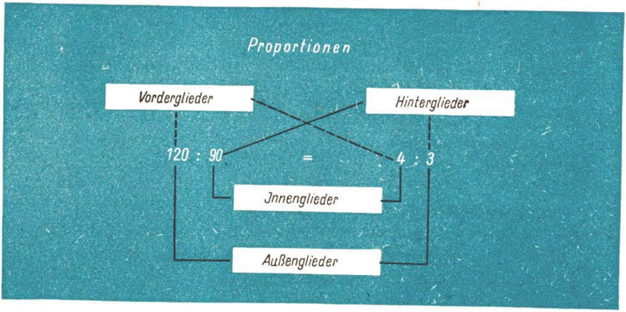
Wir erhalten eine Kette gleicher Verhältnisse. Aus ihr wollen wir zwei beliebige herausgreifen, etwa 120 : 90 und 4 : 3. Dann gilt folgende Gleichung:

$$120 : 90 = 4 : 3.$$

Wir lesen: „120 (verhält sich) zu 90 wie 4 zu 3."

Diese Gleichung wird **Verhältnisgleichung** oder **Proportion** genannt. 120, 90, 4 und 3 sind die **Glieder der Proportion.**

Die Glieder werden nach ihrer Anordnung in der Proportion benannt.



Die Proportion

$$3:4=6:8 \qquad (1)$$

ist eine wahre Aussage; denn beide Seiten dieser Gleichung stellen dieselbe rationale Zahl dar. Wir können die Gleichung (1) auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}. \qquad (2)$$

Wenn wir beide Seiten der Gleichung (2) mit dem Produkt $4 \cdot 8$ multiplizieren, erhalten wir wieder eine wahre Aussage:

$$3 \cdot 8 = 4 \cdot 6. \qquad (3)$$

Man nennt die Gleichung (3) die zur Gleichung (1) gehörige **Produktgleichung.**

13 Genauso erhalten wir für beliebige von Null verschiedene Zahlen a, b, c, d aus der Proportion

$$a:b=c:d$$

durch Multiplikation beider Seiten mit $b \cdot d$ die Produktgleichung

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

6 **SATZ: In jeder Proportion ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.**

14 Zu jeder Proportion gehört eine ganz bestimmte Produktgleichung. Aus $3:4= =6:8$ folgt eindeutig $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Das Umgekehrte gilt aber nicht, denn diese Produktgleichung könnte auch aus anderen Proportionen entstanden sein, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

I	II
a) $3:4=6:8$	**a)** $8:6=4:3$
b) $3:6=4:8$	**b)** $4:8=3:6$
c) $8:4=6:3$	**c)** $6:3=8:4$
d) $4:3=8:6$	**d)** $6:8=3:4$

Alle acht Proportionen ergeben dieselbe Produktgleichung $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$.

Die unter I und II aufgeführten Proportionen gehen aus der Proportion Ia) dadurch hervor, daß man die Glieder von Ia) in bestimmter Weise vertauscht. Die unter II stehenden Proportionen erhalten wir einfach durch Vertauschung der Seiten aus den unter I stehenden:

IIa) aus Id); IIb) aus Ib); IIc) aus Ic); IId) aus Ia).

Diese Umformungsmöglichkeit ist uns bereits bekannt. Dagegen entsteht

Ib) aus Ia) durch Vertauschen der Innenglieder,
Ic) aus Ia) durch Vertauschen der Außenglieder,
Id) aus Ia) durch Austauschen der Innenglieder gegen die Außenglieder.

Diese Vertauschungen der Glieder können wir bei jeder Proportion vornehmen.

Wir gehen von der Proportion $a : b = c : d$ aus und wenden die Umformungsregeln aus der Gleichungslehre an. Dabei sollen a, b, c, d wieder beliebige von Null verschiedene rationale Zahlen sein:

I a) $a : b = c : d$
$\quad a \cdot d = b \cdot c$ (Produktgleichung).

Diese Produktgleichung dividieren wir durch $c \cdot d$ und erhalten:

I b) $a : c = b : d$ (Vertauschen der Innenglieder von I a).

Wenn wir die Produktgleichung durch $a \cdot b$ dividieren, erhalten wir:

I c) $d : b = c : a$ (Vertauschen der Außenglieder von I a).

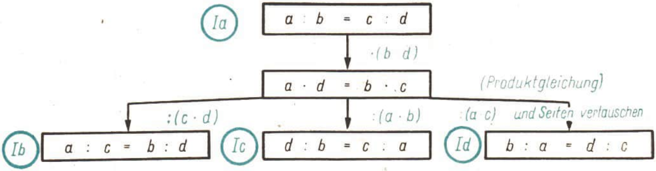
Dividieren wir schließlich die Produktgleichung durch $a \cdot c$, so erhalten wir:

$$d : c = b : a.$$

Vertauschen wir nun noch die Seiten dieser Gleichung, so ergibt sich:

I d) $b : a = d : c$ (Austausch der Innen- gegen die Außenglieder von I a).

Übersicht:



Aufgaben C 28 bis 33

15 **ZUSAMMENFASSUNG: Bringt man durch ein Gleichheitszeichen zum Ausdruck, daß zwei Verhältnisse dieselbe rationale Zahl darstellen, so erhält man eine Proportion (Verhältnisgleichung).**
In jeder Proportion ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.
In jeder Proportion kann man die Innenglieder untereinander, die Außenglieder untereinander oder die Innenglieder gegen die Außenglieder austauschen.

Proportionen mit einer Variablen

16 Im Abschnitt C 3 wurden in einer Tabelle die von einer automatischen Taktstraße bearbeiteten Werkstücke in 1, 2, 3, 4, ... Arbeitsstunden erfaßt. Bei kontinuierlicher Produktion bestand Proportionalität:

$$n \sim t.$$

Die Tabelle ergab:

Arbeitszeit t (in h)	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der bearbeiteten Werkstücke n	30	60	90	120	150	180	210	240

Der Proportionalitätsfaktor ist 30, also gilt:

$$n = 30 \cdot t.$$

Daraus folgt bei beiderseitiger Division durch t mit $t \neq 0$:

$$n : t = 30,$$

d.h., das Verhältnis aus einer beliebigen Maßzahl der zweiten Größe (bearbeitete Werkstücke) zur zugehörigen Maßzahl der ersten Größe (Arbeitszeit) ist stets gleich dem Proportionalitätsfaktor 30.

C

17 Wenn wir nun die Anzahl der bearbeiteten Werkstücke im Falle einer beliebigen Arbeitszeit berechnen wollen (wieder wird eine kontinuierliche Produktion vorausgesetzt), so bezeichnen wir die gesuchte Anzahl der Werkstücke mit der Variablen x. Dann muß das Verhältnis dieser gesuchten Stückzahl zur betreffenden Maßzahl der Arbeitszeit wie bei den in der Tabelle angegebenen Zahlen wieder 30 ergeben.

9 Wieviel Werkstücke werden in 5,5 h bearbeitet?

Ansatz:

$$x : 5{,}5 = 30$$

Wir lösen diese Gleichung:

$$\begin{aligned} x : 5{,}5 &= 30 \quad | \cdot 5{,}5 \\ x &= 165 \end{aligned}$$

Antwortsatz: In 5,5 Stunden werden also 165 Werkstücke bearbeitet.

18 Wenn wir schon vorher wissen, daß zwei Größen zueinander proportional sind, so benötigen wir nur zwei zusammengehörige Maßzahlen beider Größen. Aus diesen beiden Maßzahlen können wir den Proportionalitätsfaktor ermitteln.

10 Angenommen, es werden in 7 Stunden 210 Werkstücke bearbeitet. Wieviel Werkstücke werden in 5,5 h bearbeitet?

Aus der Erfahrung wissen wir: Arbeitszeit und Produktionsergebnis sind bei kontinuierlicher Arbeit proportional: denn bei doppelter (dreifacher) Arbeitszeit wird doppelt (dreifach) soviel geschafft.

Arbeitszeit t (in h)	5,5	7
Anzahl der bearbeiteten Werkstücke n	x	210

Wegen der Gleichheit der Verhältnisse ergibt sich eine Proportion:

$$x : 5{,}5 = 210 : 7.$$

Diese Proportion formen wir nach den Regeln der Gleichungslehre um und erhalten:

$$x = \frac{210}{7} \cdot 5{,}5.$$

Darin ist der Bruch $\frac{210}{7}$ der Proportionalitätsfaktor.

19 Wir hätten aus der verkürzten Tabelle auch andere Proportionen aufstellen können, z. B.:

a) $5{,}5 : x = 7 : 210$, b) $210 : 7 = x : 5{,}5$, c) $7 : 210 = 5{,}5 : x$.

Alle diese Proportionen führen auf dieselbe Produktgleichung:

$$7 \cdot x = 210 \cdot 5{,}5,$$

woraus sich nach Division durch 7 die Gleichung

$$x = \frac{210}{7} \cdot 5{,}5$$

ergibt.

Wir müssen bei der Aufstellung von Proportionen darauf achten, daß wir auf beiden Seiten die Maßzahl der zweiten Größe zur zugehörigen Maßzahl der ersten Größe oder auf beiden Seiten die Maßzahl der ersten Größe zur zugehörigen Maßzahl der zweiten Größe ins Verhältnis setzen. Andernfalls würden ja die beiden Verhältnisse nicht dieselbe rationale Zahl darstellen.

11 Eine quaderförmige Platte aus Gußstahl von 45 mm Dicke hat eine Masse von 3,5 kg. Dabei ist die Masse der Platte zur Dicke proportional. Die Platte wird auf 40 mm Dicke abgehobelt. Wie groß ist dann ihre Masse?

Ansatz:

Dicke (in mm)	45	40
Masse (in kg)	3,5	x

Überschlag: Die Dicke wird etwa um $\frac{1}{10}$ von 45 mm verringert. Also nimmt auch die Masse etwa um $\frac{1}{10}$ von 3,500 kg ab:

$$(3{,}5 - 0{,}35)\ \text{kg} = 3{,}15\ \text{kg}.$$

Proportion: $45 : 3{,}5 = 40 : x$

Produktgleichung: $45x = 3{,}5 \cdot 40 \quad | : 45$

$$x = \frac{3{,}5 \cdot 40}{45}$$

$$x = 3\frac{1}{9}$$

Antwortsatz: Die Platte wiegt nach dem Abhobeln rund 3,1 kg.

Aufgaben C 34 bis 51

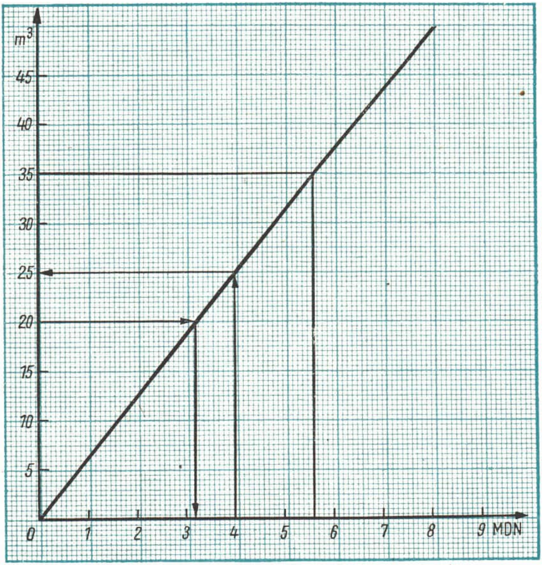
Die grafische Lösung von Aufgaben mit proportionalen Größen

20 Aufgaben, denen Proportionalität zugrunde liegt, können auch mit Hilfe von Diagrammen grafisch gelöst werden.

12 35 m³ Gas kosten 5,60 MDN. Stelle die Proportionalität grafisch dar und lies aus dem Diagramm Preise für andere Gasmengen ab!

Lösung: Auf dem nach rechts gerichteten Strahl tragen wir die Preise, auf dem senkrecht dazu verlaufenden die Gasmengen ab. Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, brauchen wir nur zwei Punkte der Geraden zu finden. Da 0 Kubikmeter Gas 0 MDN kosten, ist der Nullpunkt ein solcher Punkt. Aus der Aufgabe geht weiter hervor, daß 35 m³ Gas 5,60 MDN kosten. Wir errichten daher auf den Achsen in den Punkten, die dem Preis von 5,60 MDN bzw. der Gasmenge 35 m³ entsprechen, Senkrechte. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten ist der zweite Punkt der gesuchten Geraden, die wir nun einzeichnen können.

Aus der grafischen Darstellung können wir die Lösungen für Aufgaben folgender Art ablesen (Bild C 7):

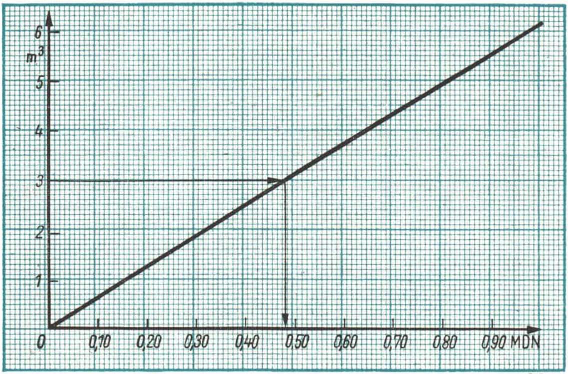


C 7

a) Wieviel MDN kosten 20 m³ Gas?
(Pfeilrichtung für das Ablesen → ↓ ; Ergebnis: 3,20 MDN.)

b) Wieviel Kubikmeter Gas kann man für 4 MDN verbrauchen?
(Pfeilrichtung für das Ablesen ← ↑; Ergebnis: 25 m³.)

Wir können auch andere Längeneinheiten auf den Achsen wählen, zum Beispiel wie im Bild C 8. Aus diesem Diagramm lassen sich die Ergebnisse genauer ab-



C 8

lesen als aus dem Diagramm mit kleineren Einheiten. Eine Änderung der Einheiten hat meist eine andere Neigung der Geraden zur Folge. Die Geradlinigkeit bleibt aber stets erhalten, ebenso die Tatsache, daß die Gerade durch den Nullpunkt verläuft.

Aufgaben C 52 bis 57

Die indirekte Proportionalität

21 Zwei Städte liegen 60 km voneinander entfernt. Legt man diese Entfernung mit einem Omnibus zurück, der mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, so benötigt man 1 h für diese Strecke. Fährt man auf einem Moped und hält die Geschwindigkeit $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ein, so benötigt man 2 h. Ein Radfahrer würde bei der Geschwindigkeit $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sogar 6 h benötigen.
Die folgende Tabelle gibt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit an, die man benötigt, um die Entfernung von 60 km zurückzulegen:

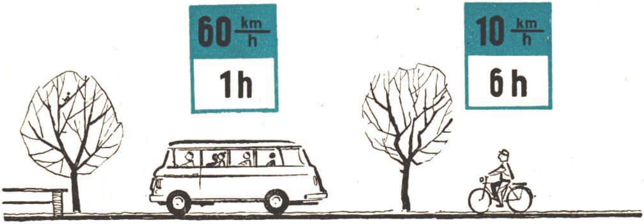


Tabelle 1

Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	10	20	30	40	50	60
Zeit t (in h)	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

Je größer die Geschwindigkeit ist, desto weniger Zeit wird benötigt.

Bilden wir wieder wie im Abschnitt C 5 Verhältnisse aus den Maßzahlen der zweiten Größe und den zugehörigen Maßzahlen der ersten Größe, so können wir feststellen, daß sie alle verschieden sind.

$$6 : 10 = \frac{6}{10} = \frac{36}{60}\,; \quad 3 : 20 = \frac{3}{20} = \frac{9}{60}\,; \quad 2 : 30 = \frac{2}{30} = \frac{4}{60}$$

Es gilt also **nicht:** $t \sim v$.

22 Wie im Abschnitt C 6 bilden wir nun Verhältnisse zweier Zahlen der ersten Zeile und der ihnen zugeordneten Zahlen der zweiten Zeile.

	(a)				(b)	
Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	10	20	30	40	50	60
Zeit t (in h)	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

(a) $10 : 30$ und $6 : 2$; (b) $60 : 50$ und $1 : \frac{6}{5}$.

Die Verhältnisse einander entsprechender Zahlen sind in diesem Falle also nicht gleich. Kehren wir aber in einem der beiden Verhältnisse die Reihenfolge der Glieder um, so erhalten wir:

(a) $10 : 30$ und $2 : 6$; (b) $60 : 50$ und $\frac{6}{5} : 1$.

Jetzt sind die Verhältnisse gleich, und wir können schreiben:

(a) $10 : 30 = 2 : 6$; (b) $60 : 50 = \frac{6}{5} : 1$.

Wir ergänzen nun die Tabelle in C 21 durch die Reziproken der Maßzahlen für die Geschwindigkeit.

Tabelle 2

Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	10	20	30	40	50	60
Reziprokes der Geschwindigkeit $\frac{1}{v}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{60}$
Zeit t (in h)	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

Jetzt gehen die Maßzahlen der Zeit in der dritten Zeile durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor aus den Reziproken der Maßzahlen für die Geschwindigkeit hervor. Es gilt also:

$$t \sim \frac{1}{v}.$$

Der Proportionalitätsfaktor 60 ist die Maßzahl der zurückgelegten Entfernung. Bezeichnen wir ihn mit s, so erhalten wir

$$t = s \cdot \frac{1}{v} \quad \text{oder} \quad t = \frac{s}{v}.$$

Wir sagen: Die Zeit und die Geschwindigkeit sind **umgekehrt** oder **indirekt proportional.** Im Gegensatz dazu wollen wir die früher behandelte Proportionalität jetzt **direkte Proportionalität** nennen.

23 Bilden wir in Tabelle 1 statt der Verhältnisse der einander zugeordneten Maßzahlen deren Produkte, so erhalten wir:

$$6 \cdot 10 = 3 \cdot 20 = 2 \cdot 30 = \frac{3}{2} \cdot 40 = \frac{6}{5} \cdot 50 = 1 \cdot 60 = 60.$$

Alle diese Produkte sind gleich dem Proportionalitätsfaktor $s = 60$. Das hätten wir auch an der Gleichung $t = s \cdot \frac{1}{v}$ erkennen können. Multiplizieren wir nämlich beide Seiten dieser Gleichung mit v, so ergibt sich $t \cdot v = s$.

7 **DEFINITION:**
Größen, bei denen die Produkte aus jeweils zwei zugeordneten Maßzahlen untereinander gleich sind, heißen produktgleiche Größen.
Indirekt proportionale Größen sind daher stets produktgleich.

24 Will man prüfen, ob zwei Größen indirekt proportional sind, darf man sich nicht auf die Feststellung beschränken: „Je größer die Maßzahl der einen Größe ist, desto kleiner ist die Maßzahl der anderen Größe."

13 Im Klassenschrank lag ursprünglich ein Vorrat von 50 Heften. Je nach Bedarf wurden davon Hefte an Schüler ausgegeben.

Anzahl der Hefte im Schrank	45	40	30	26	21	15	10
Anzahl der ausgegebenen Hefte	5	10	20	24	29	35	40

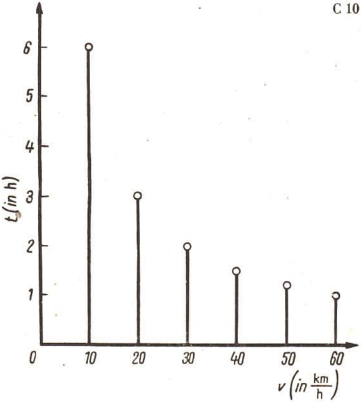
Auch hier gilt: Je größer die Anzahl der ausgegebenen Hefte ist, desto kleiner ist die Anzahl der Hefte im Schrank.

4 Prüfe selbst nach, ob im Beispiel 12 indirekte Proportionalität vorliegt, indem du die Produkte der jeweils zugeordneten Zahlen bildest!

Aus der Produktgleichheit zweier indirekt proportionaler Größen folgt:

Werden die Maßzahlen der einen Größe auf das Doppelte, Dreifache, Vierfache usw. vergrößert, so werden die zugeordneten Maßzahlen der anderen Größe auf die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel usw. verkleinert.

C 10



Genau wie die direkte Proportionalität tritt auch die indirekte Proportionalität nicht nur als Zusammenhang zweier Größen auf. Es gibt auch indirekte Proportionalität zwischen zwei Mengen rationaler Zahlen. Hierbei muß Produktgleichheit aller Paare einander zugeordneter Zahlen vorliegen.
Durch die grafische Darstellung der indirekten Proportionalität erhält man Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Das Bild C10 zeigt das Diagramm für den Sachverhalt im Abschnitt C 21.

25 ZUSAMMENFASSUNG: Zwei Größen heißen indirekt proportional, wenn die Maßzahlen y der einen Größe den Reziproken $\frac{1}{x}$ der zugehörigen Maßzahlen x der anderen Größe direkt proportional sind.
Der Proportionalitätsfaktor c ergibt sich als Produkt $x \cdot y$ zweier beliebiger einander zugeordneter Maßzahlen der beiden Größen.

$$y \sim \frac{1}{x}; \qquad y = c \cdot \frac{1}{x}; \qquad x \cdot y = c$$

Daraus folgt, daß alle Produkte aus jeweils zwei einander zugeordneten Maßzahlen untereinander gleich sind. Deshalb heißen indirekte proportionale Größen auch produktgleiche Größen.
Sind zwei Größen indirekt proportional, so ist das Verhältnis zweier beliebiger Maßzahlen der einen Größe gleich dem reziproken Verhältnis der entsprechenden Maßzahlen der anderen Größe.

Aufgaben C 58 bis 68

Produktgleichungen mit einer Variablen

26 Im Abschnitt C 21 wurden in der Tabelle 1 die erforderlichen Zeiten zum Durchfahren einer Strecke von 60 km in Abhängigkeit von der gewählten gleichmäßigen Geschwindigkeit angegeben. Es bestand indirekte Proportionalität:

$$t \sim \frac{1}{v}.$$

Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	10	20	30	40	50	60
Zeit t (in h)	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

C

Der Proportionalitätsfaktor ist 60, also gilt:

$$t = 60 \cdot \frac{1}{v}.$$

Daraus folgt bei beiderseitiger Multiplikation mit v:

$$v \cdot t = 60,$$

d.h., das Produkt aus zwei einander zugeordneten Maßzahlen ist stets gleich dem Proportionalitätsfaktor 60.

27 Wenn wir nun die erforderliche Zeit im Falle einer beliebigen anderen Geschwindigkeit berechnen wollen, so bezeichnen wir die gesuchte Stundenzahl mit x. Dann muß das Produkt aus der betreffenden Maßzahl der Geschwindigkeit und x wie bei den in der Tabelle 1 angegebenen Zahlen wieder 60 ergeben.

$\boxed{14}$ Welche Zeit benötigt ein Radfahrer für diese Strecke, der mit der Geschwindigkeit $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt?

Ansatz: $15 \cdot x = 60.$

Wir lösen diese Gleichung:

$$15 \cdot x = 60 \quad | :15$$
$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Antwortsatz: Der Radfahrer legt die Strecke von 60 km bei einer Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in 4 h zurück.

28 Wenn wir schon vorher wissen, daß zwei Größen indirekt proportional sind, benötigen wir nur zwei zugeordnete Maßzahlen beider Größen. Diese beiden Maßzahlen reichen aus, um aus ihnen durch Multiplikation das einheitliche Produkt als Proportionalitätsfaktor zu ermitteln.

$\boxed{15}$ Angenommen, ein Radfahrer legt bei der Geschwindigkeit $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ die Entfernung zwischen zwei Städten in 6 h zurück. Wieviel Stunden benötigt ein anderer Radfahrer, der mit der Geschwindigkeit $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, für diese Strecke?

Aus der Erfahrung wissen wir: Geschwindigkeit und benötigte Zeit für eine bestimmte Strecke sind indirekt proportional; denn bei doppelter (dreifacher) Geschwindigkeit benötigt man nur die halbe (den dritten Teil) der Zeit.

Ansatz:

Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	10	15
Zeit t (in h)	6	x

Überschlag: Die Geschwindigkeit wird auf das $1\frac{1}{2}$-fache $\left(\frac{3}{2}\text{-fache}\right)$ erhöht. Also wird nur das $\frac{2}{3}$-fache der Zeit benötigt:

$$\frac{2}{3} \cdot 6 = 4.$$

Lösung:

Wegen der Gleichheit der Produkte ergibt sich eine Produktgleichung:

$$10 \cdot 6 = 15 \cdot x \qquad | :15$$

$$\frac{10 \cdot 6}{15} = x$$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Antwortsatz: Der schnellere Radfahrer benötigt für diese Strecke nur 4 Stunden.
Bemerkung: Wir haben in diesem Beispiel nicht ausgerechnet, wie groß die Entfernung ist. Das ist auch nicht erforderlich, wenn nicht danach gefragt wird.

Aufgaben C 69 bis 85

29 Vergleich der direkten und indirekten Proportionalität

Direkte Proportionalität

a	1	2	3	3,5	10	$\frac{25}{2}$
b	6	12	18	21	60	75

Je *größer* die Werte von a sind, desto *größer* sind die Werte von b.

Werden die Werte von a verdoppelt, verdreifacht usw., so werden auch die entsprechenden Werte von b verdoppelt, verdreifacht usw.

Werden die Werte von a halbiert, gedrittelt usw., so werden auch die entsprechenden Werte von b halbiert, gedrittelt usw.

Indirekte Proportionalität

x	$\frac{1}{2}$	1	2	5	7,5	10
y	18	9	4,5	$\frac{9}{5}$	1,2	0,9

Je *größer* die Werte von x sind, desto *kleiner* sind die Werte von y.

Werden die Werte von x verdoppelt, verdreifacht usw., so werden die entsprechenden Werte von y halbiert, gedrittelt usw.

Werden die Werte von x halbiert, gedrittelt usw., so werden die entsprechenden Werte von y verdoppelt, verdreifacht usw.

Die Werte von b ergeben sich aus den entsprechenden Werten von a durch Multiplikation mit 6.

$$\boxed{b \sim a}$$

$$\boxed{b = k \cdot a \quad (k = 6)}$$

Die *Verhältnisse* einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor k:

$$\boxed{b : a = k}$$

Die Werte von y ergeben sich aus den *Reziproken* der entsprechenden Werte von x durch Multiplikation mit 9.

$$\boxed{y \sim \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{y = c \cdot \frac{1}{x} \quad (c = 9)}$$

Die *Produkte* einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor c:

$$\boxed{x \cdot y = c}$$

Mitunter werden verschiedene Variable nicht durch verschiedene Buchstaben bezeichnet, sondern durch kleine, tiefgestellte natürliche Zahlen unterschieden: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oder $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Eine solche tiefgestellte Zahl heißt **Index** (Mehrzahl: Indizes). Wir wollen bei dem hier angestellten Vergleich Variablen für einander zugeordnete Zahlen mit dem gleichen Index bezeichnen:

b_1 ist zugeordnet a_1

Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von a ist gleich dem Verhältnis der zugeordneten Werte von b.

Beispiel: $2 : 7 = 12 : 42$
allgemein: $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$

y_2 ist zugeordnet x_2

Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von x ist gleich dem *reziproken* Verhältnis der zugeordneten Werte von y:

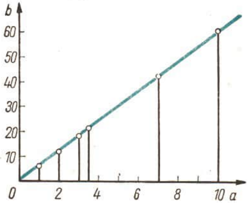
Beispiel: $2 : 10 = 0{,}9 : 4{,}5$
allgemein: $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$

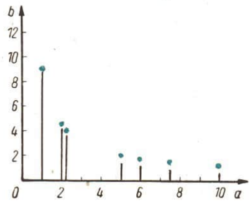
Grafische Darstellung

Alle Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

Es liegen nicht alle Punkte auf einer gemeinsamen Geraden.

Aufgaben C 86 bis 114





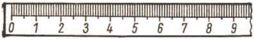
Der Rechenstab

Der Rechenstab ist ein Rechenhilfsmittel. Er ermöglicht ein schnelleres Rechnen, indem Rechenoperationen mechanisiert werden. Die Genauigkeit ist dabei geringer als bei schriftlichen Berechnungen. Sie genügt jedoch bei vielen praktischen Aufgaben.

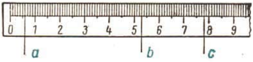
30 Gleichmäßig und ungleichmäßig geteilte Skalen

Um das Prinzip der Arbeitsweise des Rechenstabes verstehen zu lernen, stellen wir uns zunächst ein Modell her.

(5) Fertige dir mit Hilfe von Millimeterpapier und Pappe zwei Meßstreifen an, wie sie in Bild C 11 dargestellt sind!



C 11



C 12

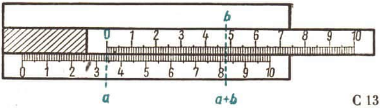
Der Meßstreifen in Bild C 11 stellt eine gleichmäßig geteilte Skale dar. Die Teilstriche stehen in gleichen Abständen. Auf dem Meßstreifen können wir Zahlen aufsuchen und ablesen. Dabei ist die Wahl der Einheit von großem Einfluß für das Ablesen.

Für die in Bild C 12 angedeuteten Teilstriche a, b, c erhalten wir die Zahlen $a = 0{,}6$; $b = 5{,}3$; $c = 7{,}8$. Die Teilstriche a, b, c können aber auch die Zahlen $a = 6$, $b = 53$ und $c = 78$ darstellen, und zwar dann, wenn wir den Marken 1, 2, 3, ... auf dem Meßstreifen in Bild C 12 die Zahlen 10, 20, 30, ... zuordnen.

Dieses Beispiel zeigt:

8 **Ein und derselbe Teilstrich gibt verschiedene Zahlen an, wenn verschiedene Einheiten zugrunde gelegt werden.**

31 Mit zwei dieser Meßstreifen, bei denen die Abstände der Teilstriche übereinstimmen, kann man mechanisch addieren (Bild C 13).



C 13

Die Vorrichtung wird so gebaut, daß eine Skale gegenüber der anderen beweglich ist. Um zwei beliebige Zahlen a und b zu addieren, verschiebt man die bewegliche Skale so, daß der Anfangspunkt der Skale über dem Teilstrich a der feststehenden Skale steht. Unter dem Teilstrich b der beweglichen Skale lesen wir auf der feststehenden Skale die Summe $a + b$ ab.

(6) Überlege, wie man zwei gleichmäßige Skalen zur Subtraktion von Zahlen verwenden kann! Stelle selbst Aufgaben und löse sie mit der Addiervorrichtung!

Soll mit einem entsprechenden Gerät die Multiplikation durchführbar sein, so müßten die Skalen so gewählt werden, daß bei einer Verschiebung der beweglichen Skale unter der Zahl b nicht die Summe, sondern das Produkt der Zahlen a und b erscheint, falls $a \cdot b$ berechnet werden soll.

32 In der folgenden Tabelle sind Paare natürlicher Zahlen zusammengestellt.

Jeder Zahl der oberen Zeile ist eine Zahl der unteren Zeile (die darunterstehende) zugeordnet.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

Wir multiplizieren in der unteren Zeile zwei beliebige Zahlen miteinander, z. B. $4 \cdot 16$. Wir erhalten das Produkt 64. Wie wir durch einen Vergleich mit der Tabelle feststellen können, entspricht der Aufgabe $4 \cdot 16 = 64$ in der unteren Zeile die Aufgabe $2 + 4 = 6$ in der oberen Zeile.
Wollen wir z. B. die Aufgabe $32 \cdot 128 = x$ lösen, so finden wir mit Hilfe der Tabelle die Lösung, indem wir die entsprechenden Zahlen in der oberen Zeile addieren und die Zahl in der unteren Zeile aufsuchen, die der Summe entspricht: $5 + 7 = 12$.
Der Zahl 12 entspricht in der unteren Zeile die Zahl 4 096, also $x = 4\,096$.

C

7 Löse auf diese Weise die Aufgaben **a)** $8 \cdot 16$; **b)** $8 \cdot 32$; **c)** $4 \cdot 128$; **d)** $8 \cdot 128$!

Wir erkennen:

9 **Die Multiplikation zweier Zahlen läßt sich auf die Addition zurückführen.**

8 Überzeuge dich davon, daß in der folgenden Tabelle die gleiche Gesetzmäßigkeit auftritt!

n	1	2	3	4	5	6	7	
10^n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	...

33 In der folgenden Tabelle sind die Zahlen in der oberen Zeile auf Tausendstel gerundet.

0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

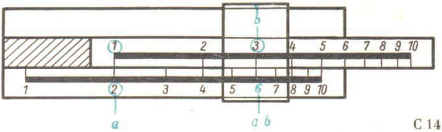
9 Überzeuge dich durch mehrere selbstgewählte Beispiele davon, daß auch in dieser Tabelle die gleiche Gesetzmäßigkeit gilt!

Die in dieser Tabelle angedeutete Gesetzmäßigkeit wird zur Konstruktion von Skalen für Rechenstäbe benutzt, mit denen man multiplizieren und dividieren kann. (Begründen können wir diese Gesetzmäßigkeit erst in späteren Klassen.)

10 **a)** Fertige eine Skale an, indem du die Zahlen der oberen Zeile der Tabelle jeweils mit 25 multiplizierst und die Ergebnisse auf einem Strahl in Zentimetern abträgst! Ordne den auf diese Weise gefundenen Punkten auf dem Strahl die entsprechenden Zahlen in der unteren Zeile der Tabelle zu!

b) Fertige eine zweite Skale vom gleichen Aufbau an und baue dir eine Rechenvorrichtung entsprechend Bild C 13!

Mit Hilfe dieses Rechengerätes können wir Multiplikations- und Divisionsaufgaben lösen.

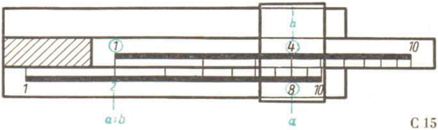


C 14

16 $2 \cdot 3 = x$

Aus der Tabelle in diesem Abschnitt entnehmen wir, daß der Multiplikation der Zahlen 2 und 3 die Addition der Zahlen 0,301 und 0,477 entspricht. Die Summe 0,778 finden wir mit dem selbstgebauten Gerät, indem wir die zugehörigen Strecken aneinanderfügen (Bild C 14). Die Beschriftung der Skalen ermöglicht es, das Produkt unmittelbar abzulesen.

17 $8 : 4 = x$



C 15

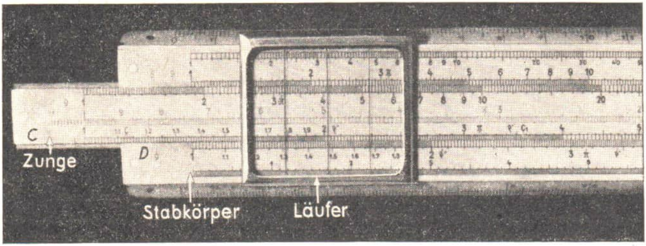
Aus der Tabelle entnehmen wir, daß dieser Division die Subtraktion der Zahlen 0,903 und 0,602 entspricht. Die Differenz 0,301 finden wir, indem wir die zugehörigen Strecken voneinander abziehen (Bild C 15). Die Beschriftung der Skalen ermöglicht es, den Quotienten unmittelbar abzulesen.

Die nach der Tabelle in diesem Abschnitt angefertigte Skale (Bild 14) ist ungleichmäßig geteilt.

34 Die Grundskalen des Rechenstabes

Wir verwenden zunächst am Rechenstab nur die Skalen C und D (Bild C 16). Beide Skalen stimmen in ihrer Unterteilung überein; wir wollen sie **Grundskalen** nennen.

C 16



Auf der Grundskale sind zehn Grundstriche aufgetragen, die mit großen Ziffern 1, 2, . . ., 8, 9, 10 beschriftet sind. Diese Grundstriche entsprechen den Zahlen 1, 2, . . ., 9, 10. Sie entsprechen aber auch den Zahlen, die zehnmal, hundertmal, tausendmal usw. so groß wie diese sind, und auch den Zahlen, die ein Zehntel, ein Hundertstel, ein Tausendstel usw. dieser Zahlen betragen.

18 Der Grundstrich, der die Ziffer 2 trägt, stellt beispielsweise die folgenden Zahlen dar:

. . .; 0,002; 0,02; 0,2; 2; 20; 200; 2 000; . . .

35 Beim Einstellen oder Ablesen einer Zahl auf der Grundskale des Rechenstabes berücksichtigen wir zunächst nicht ein eventuell vorhandenes Komma.

19 Die Zahl 1,98 besteht aus den Grundziffern 1 — 9 — 8. Wir sprechen zur Vereinfachung von der Zahl mit der Ziffernfolge 198. Die Ziffernfolge 1 — 9 — 8 steht zwischen den Grundstrichen 1 und 2.

Von einer Zahl werden nur die sogenannten *wesentlichen* oder *geltenden Ziffern* eingestellt oder abgelesen.
Die Grundziffer 0 ist für das Rechnen mit Hilfe des Rechenstabs unwesentlich, sofern sie als erste oder letzte Ziffer auftritt.

20 Die Zahl 1950 hat die wesentlichen Ziffern 195. Die Grundziffer 0 ist für das Rechnen mit dem Rechenstab unwesentlich.
Die Zahl 10,9 hat die wesentlichen Ziffern 109.
Die Zahl 0,184 hat die wesentlichen Ziffern 184. Die Grundziffer 0 vor dem Komma ist für die Einstellung unwesentlich.

36 Da die Abstände der Grundstriche bis 10 immer kleiner werden und zwischen den Grundstrichen immer weniger Zwischenstriche auftreten, können wir beim Ablesen und Einstellen von Ziffernfolgen nicht immer mit der gleichen Genauigkeit arbeiten.
Zwischen den Grundziffern 1 und 2 können wir noch jede Ziffernfolge mit drei geltenden Ziffern genau einstellen. Zwischen den Grundziffern 2 und 4 können wir eigentlich nur noch solche Ziffernfolgen mit drei geltenden Ziffern genau einstellen, die als Endziffer eine 2, 4, 6 oder 8 haben. Bei den Endziffern 1, 3, 5, 7 und 9 muß man schon die Mitte zwischen zwei Teilstrichen nach Augenmaß suchen.
In den übrigen Bereichen der Grundskale sind die Unterteilungen noch gröber. Wir müssen deshalb häufig runden.

Aufgaben C 115 bis 119

37 Multiplizieren mit Hilfe des Rechenstabes

Bei der Multiplikation werden mit Hilfe der beweglichen Zunge Strecken addiert (Vgl. Bild C 14). Auf der festen Grundskale D suchen wir einen der Faktoren auf und stellen den Anfangspunkt der Skale C darüber. Dann wird auf der Skale C der zweite Faktor mit Hilfe des Läuferstriches eingestellt. Unter dem Ablesestrich des Läufers werden auf der festen Skale D die Ziffern des Produkts abgelesen. Bei jeder Rechnung mit dem Rechenstab wird als erster Schritt ein Überschlag ausgeführt, um die Größenordnung des Ergebnisses zu ermitteln. Erst dann wird die Rechnung mit Hilfe des Rechenstabes ausgeführt.

21 $3{,}42 \cdot 0{,}224 = x$ *Überschlag:* $3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$

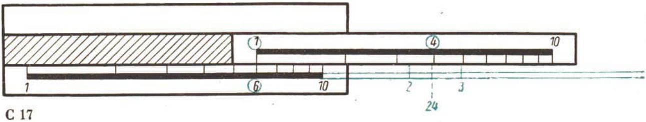
Einstellung: C 1 über D 342.
Läuferstrich über C 224.
Unter C 224 ablesen: D 766

Ergebnis: $x \approx 0{,}766$

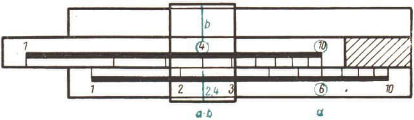
Als Schema für das Lösen der Aufgabe wollen wir uns merken:

Aufgabe	Überschlag	Ziffernfolge	Ergebnis
$3{,}42 \cdot 0{,}224$	$3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$	776	0,776

38 Beim Multiplizieren kann es vorkommen, daß die dem zweiten Faktor entsprechende Strecke auf der Skale C über das Ende der Skale D hinausragt.



C 17



C 18

Das Bild C 17 zeigt diesen Fall für die Aufgabe $6 \cdot 4 = x$. Für diese Aufgaben müßte rechts an die Skale D eine weitere Skale D angesetzt sein. Man behilft sich, indem man nicht den Punkt C 1 über D 6 stellt, sondern den Punkt C 10 (Bild C 18). Auf diese Weise kehrt man den Sachverhalt um. Man fügt nicht rechts an D eine weitere Skale D an, sondern man zieht C um eine volle Skalenlänge C zurück. Man nennt dieses Verfahren: **Multiplikation mit Rückschlag.**

22 $62{,}4 \cdot 5{,}37 = x$ *Überschlag:* $60 \cdot 5 = 300$

Einstellung: Es wird ein Rückschlag erforderlich.
Also C 10 über D 624.
Läuferstrich über C 537.
Unter C 537 ablesen: D 335

Ergebnis: $x \approx 335$

Aufgaben C 120 bis 126

39 Dividieren mit Hilfe des Rechenstabes

Bei der Division werden mit Hilfe der Zunge Strecken subtrahiert (Bild C 15). Mit dem Ablesestrich des Läufers stellen wir auf der festen Grundskale D den Dividenden ein. Nun suchen wir den Divisor auf der beweglichen Skale C auf und schieben ihn unter den Ablesestrich. Unter dem Anfangspunkt der Skale C können wir dann auf der Skale C den Quotienten ablesen. Die Größenordnung wird durch Überschlag ermittelt.

23 $51{,}7 : 1{,}74 = x$ *Überschlag:* $50 : 2 = 25$

Einstellung: Läuferstrich über D 517
C 174 über D 517
Unter C 1 ablesen: D 297

Ergebnis: $x \approx 29{,}7$

C

40 Beim Dividieren kann es vorkommen, daß die dem Divisor entsprechende Strecke links über den Anfang der Skale D hinausreicht. In diesem Fall wird der Quotient unter C 10 abgelesen.

24 $5{,}81 : 8{,}74 = x$ *Überschlag:* $6 : 9 \approx 0{,}67$

Einstellung: Läuferstrich über D 581
C 874 über D 581
Unter C 10 ablesen: D 665

Ergebnis: $x \approx 0{,}665$

Aufgaben C 127 bis 133

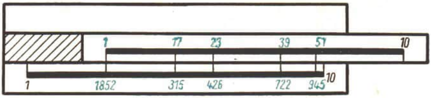
41 Der Rechenstab als Tabelle

Besonders rationell wird die Verwendung des Rechenstabes, wenn durch eine einzige Einstellung mehrere Ergebnisse, die gesucht sind, gefunden werden.
Dazu überlegen wir uns, daß bei einer gegebenen Zungeneinstellung die einander auf den Skalen C und D gegenüberliegenden Zahlen stets im gleichen Verhältnis zueinander stehen, unabhängig davon, an welcher Stelle der Skalen die beiden Zahlen abgelesen werden.
Es sei a eine Zahl der Skale D. Über a stehe der Anfangspunkt der Skale C. Ferner sei b eine beliebige Zahl der Skale C. Auf der Skale D stehe unter der Zahl b auf der Skale C die Zahl c. Dann ist nach den Regeln für das Rechnen mit dem Rechenstab $c = a \cdot b$. Schreiben wir diese Beziehung als Proportion, so erhalten wir: $1 : a = b : c$.

25 Rechne in Kilometer um: 1,7 sm; 2,3 sm; 3,9 sm; 5,1 sm!

Es gilt: 1 sm = 1,852 km.

Wir stellen C 1 über D 1852. Die Ergebnisse lassen sich nun der Reihe nach ohne weiteres Verschieben der Zunge ablesen (Bild C 19).



C 19

Unter	C 17	C 23	C 39	C 51
die Ziffernfolge	D 315	D 426	D 722	D 945

Ergebnis: Die Umrechnung ergibt 3,15 km; 4,26 km; 7,22 km und 9,45 km.

Aufgaben C 134 bis 136

C

Der Prozentbegriff

42 Die Zahl 100 als Vergleichszahl

Die Zahl 100 wird in der Praxis häufig als Vergleichszahl verwendet. Z.B.:

a) Für den PKW „Trabant 601" wird vom Herstellerwerk ein Kraftstoffnormverbrauch von 6,8 l für 100 km Fahrstrecke angegeben.

b) Die landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften sollen nach Möglichkeit 78 Rinder auf 100 ha landwirtschaftlicher Nutzfläche halten.

26 Ein Kraftfahrer hat mit seinem „Trabant" auf 375 km Fahrstrecke 27 l Kraftstoff verbraucht. Entspricht dieser Verbrauch dem angegebenen Normverbrauch?

Ansatz:

Fahrstrecke in km	100	375
Verbrauch in l	x	27

Fahrstrecke und Verbrauch sind proportional

Überschlag:

Da 100 km rund $\frac{1}{4}$ von 375 km sind, wird der Verbrauch etwa $\frac{1}{4}$ von 27 l betragen.
$27 : 4 \approx 7.$

Proportion:
$$375 : 27 = 100 : x$$
$$375 \cdot x = 100 \cdot 27$$
$$x = \frac{2\,700}{375}$$
(Rechenstab verwenden!)
$$x = 7{,}2$$

Antwortsatz: Der Verbrauch betrug 7,2 l je 100 km und war also um 0,4 l höher.

43 Beim Vergleich zweier Verhältnisse benutzt man die Zahl 100 ebenfalls als Vergleichszahl, und zwar in Form des Hauptnenners.

27 Von den 31 Schülern der Klasse 7a nahmen 24 an der Mathematikolympiade teil. In der Klasse 7b, in die 33 Schüler gehen, meldeten sich 26 Teilnehmer. In welcher Klasse war die Beteiligung größer?

Obwohl in der Klasse 7b 2 Schüler mehr teilnahmen als in der Klasse 7a, ist ihre bessere Beteiligung damit noch nicht erwiesen. Für die Einschätzung der Beteiligung muß vielmehr die Teilnehmerzahl auf die Gesamtzahl der Schüler in der betreffenden Klasse bezogen werden.
Wir bilden jeweils die Verhältnisse aus der Anzahl der Teilnehmer zur Anzahl der Schüler jeder Klasse.

Klasse 7a $\quad 24:31 = \frac{24}{31}$	Klasse 7b $\quad 26:33 = \frac{26}{33}$

Zum Vergleich dieser beiden Verhältnisse berechnen wir die Quotienten auf Hundertstel genau. (Die Rechnung erfolgt mit Hilfe des Rechenstabs.)

$\frac{24}{31} \approx 0{,}77 = \frac{77}{100}$	$\frac{26}{33} \approx 0{,}79 = \frac{79}{100}$

C

Antwortsatz: Es gilt $\frac{77}{100} < \frac{79}{100}$. Also war die Beteiligung in der Klasse 7b geringfügig höher.

Aufgaben C 137 bis 143

44 Der Prozentbegriff

Zum Vergleich zweier Verhältnisse rechneten wir die Quotienten in Dezimalzahlen um und rundeten auf Hundertstel.
Für 1 Hundertstel der betrachteten Größe sagt man 1 Prozent und schreibt dafür 1%. Das Wort „Prozent" geht auf die lateinische Sprache zurück. Die Wörter „pro centum" heißen „für hundert", sinngemäß also „Hundertstel".

10 **Ein Prozent einer Zahl ist der hundertste Teil dieser Zahl.**

$$1\,\%\ \text{von}\ a\ \text{sind}\ \frac{a}{100}.$$

28 $0{,}05 = \frac{5}{100}$, das sind 5% von 1; 75% von 1, das sind $\frac{75}{100} = 0{,}75$.

Unter Anwendung des Prozentbegriffes können wir im Beispiel C 27 die Beteiligung an der Olympiade folgendermaßen ausdrücken:
In der Klasse 7a nahmen 77% der Schüler und in der Klasse 7b sogar 79% der Schüler an der Olympiade teil.
Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein, die wir in jeder Aufgabe aus der Prozentrechnung benutzen:

Grundwert (*G*), Prozentwert (*P*), Prozentsatz (*p*)

Im Beispiel C 27 war:

der Grundwert	die gesamte Schülerzahl einer Klasse,
der Prozentwert	die Teilnehmerzahl dieser Klasse an der Mathematikolympiade,
der Prozentsatz	die Anzahl der „Hundertstel", also der Zähler des Bruches,

der beim Erweitern des Verhältnisses aus der Anzahl der Teilnehmer zur gesamten Schülerzahl einer Klasse auf den Nenner 100 entstand.

	Klasse 7a	Klasse 7b
Grundwert G	31	33
Prozentwert P	24	26
Prozentsatz p	77 $\left(\frac{24}{31} \approx 0{,}77\right)$	79 $\left(\frac{26}{33} \approx 0{,}79\right)$

11 **Der Prozentsatz p gibt die Anzahl der Hundertstel vom Grundwert an. Der Grundwert G ist diejenige Zahl, die dem Prozentsatz 100 entspricht.**
Der Prozentwert P ist diejenige Zahl, die dem Prozentsatz p von einem Grundwert G entspricht.

Aufgaben C 144 bis 147

C

45 Grundaufgaben der Prozentrechnung

Zwischen dem Prozentwert und dem Prozentsatz besteht Proportionalität.

29 Mit jedem Jahr wächst der Prozentsatz der Eisenbahnstrecken, auf denen die Züge von schnellen, sauberen Elektroloks gezogen werden. Um 1 % des gesamten Streckennetzes der DDR mit Normalspurweite zu elektrifizieren, müssen 149,34 km Strecke mit Oberleitungen versehen werden. Das Streckennetz hat nämlich eine Länge von 14 934 km, und 1 % dieser Strecke ist der hundertste Teil von 14 934, also 149,34 km. 2 % wären dann 2 Hundertstel von 14 934, also $2 \cdot 149{,}34$ km $= 298{,}68$ km. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick:

Prozentsatz	1	2	3	10	50	100
Streckenlänge (in km)	149,34	298,68	448,02	1 493,40	7 467	14 934

10 Zeige, daß Proportionalität vorliegt, indem du

a) mehrere Verhältnisse aus zugeordneten Zahlen bildest,

b) die Zahl 1 in der oberen Zeile verdoppelst, verdreifachst, . . . und das gleiche mit der zugeordneten Zahl tust!

Die Zahl, die 100 % zugeordnet ist, stellt den Grundwert G dar.

Da wir uns nun von der Proportionalität überzeugt haben, können wir die Tabelle kürzer schreiben und doch jeden Zwischenwert errechnen.

Prozentsatz	p	100
Streckenlänge (in km)	P	14 934

$(14\,934 = G)$

Es gilt also die Proportion

$$P : p = 14\,934 : 100$$

und, wenn wir für den Grundwert G schreiben,

$$P : p = G : 100.$$

Wenn von den drei Zahlen P, p, G zwei Zahlen bekannt sind, kann man die dritte meistens mit Hilfe dieser Proportion berechnen. (Eine Ausnahme wird im Abschnitt C 55 erläutert.)
Hierzu ist es erforderlich, daß wir uns zunächst überlegen, welche Zahl den Grundwert, welche den Prozentwert und welche den Prozentsatz angibt.

46 Gegeben: Grundwert und Prozentwert; Gesucht: Prozentsatz

30 Das Streckennetz der Deutschen Reichsbahn betrug im Jahre 1963 14 934 km. Bis zum Ende des Jahres 1963 waren davon 906 km elektrifiziert. Wieviel Prozent sind das?

Ansatz: Das gesamte Streckennetz entspricht dem Grundwert. Der Teil, der inzwischen elektrifiziert ist und von dem wir wissen wollen, wieviel Prozent er ausmacht, entspricht dem Prozentwert.

Prozentsatz	p	100
Streckenlänge (in km)	$P = 906$	$G = 14\,934$

Überschlag: Die Länge der elektrifizierten Strecke beträgt ungefähr $\frac{1}{15}$ der gesamten Streckenlänge. Es müssen also rund 7% sein, denn $7 \cdot 15 = 105$.

Proportion:
$$906 : p = 14\,934 : 100$$
$$14\,934 \cdot p = 906 \cdot 100$$
$$p = \frac{906 \cdot 100}{14\,934} \approx 6{,}06$$

Antwortsatz: Bis Ende 1963 waren rund 6,1% des Streckennetzes elektrifiziert.

Aufgaben C 148 bis 157

47 Gegeben: Grundwert und Prozentsatz; Gesucht: Prozentwert.

31 Im Jahre 1960 lag der Anteil der elektrifizierten Strecken der Deutschen Reichsbahn erst bei 4,7%. Die gesamte Streckenlänge in Normalspur betrug zu dieser Zeit 14 866 km. Welche Länge hatten die elektrifizierten Strecken?
Ansatz: Grundwert: 14 866 km; Prozentsatz: 4,7%

Prozentsatz	$p = 4{,}7$	100
Streckenlänge (in km)	P	$G = 14\,866$

Überschlag: 5% sind $\frac{1}{20}$ von 100%. Entsprechend bilden wir $\frac{1}{20}$ von 15 000. $\frac{1}{10}$ wäre 1 500, und $\frac{1}{20}$ ist dann die Hälfte, also 750. Es werden etwa 750 km sein.

Proportion:
$$P : 4{,}7 = 14\,866 : 100$$
$$100\,P = 14\,866 \cdot 4{,}7$$
$$P = \frac{14\,866 \cdot 4{,}7}{100} = 698{,}7 \text{ (Rechenstabgenauigkeit)}$$

Antwortsatz: Bis Ende 1960 waren rund 699 km des Streckennetzes elektrifiziert.

Aufgaben C 158 bis 165

48 Gegeben: Prozentwert und Prozentsatz; Gesucht: Grundwert.

32 In der Bezirksstadt Erfurt wohnen annähernd 186 500 Menschen. Das sind etwa 14,9% aller Einwohner des Bezirkes Erfurt. Wieviel Einwohner hat der Bezirk Erfurt?

Ansatz: Der Prozentsatz beträgt $p = 14{,}9$. Diesem entspricht die Anzahl der Einwohner Erfurts. Der Prozentwert ist demnach $P = 186\,500$. Der Grundwert G ist gesucht.

Prozentsatz	14,9	100
Anzahl der Einwohner	186 500	G

Überschlag: 100 ist etwa siebenmal so groß wie 15. Dann beträgt die Einwohnerzahl des Bezirkes Erfurt etwa $180\,000 \cdot 7 = 1\,260\,000$.

Proportion: $186\,500 : 14{,}9 = G : 100$

$$14{,}9\, G = 186\,500 \cdot 100$$

$$G = \frac{186500 \cdot 100}{14{,}9} \approx 1\,251\,000$$

Antwortsatz: Die Einwohnerzahl des Bezirks Erfurt beträgt rund 1 250 000.

49 Bequem lassen sich besonders solche Aufgaben berechnen, in denen Prozentzahlen auftreten, die sich nach der Umwandlung in Hundertstel weitgehend vereinfachen lassen. Man spricht in diesen Fällen von **bequemen Prozentsätzen.** Die folgende Tabelle enthält einige Beispiele.

Prozentsatz p	1	5	10	$12\frac{1}{2}$	20	25	$33\frac{1}{3}$	50	$66\frac{2}{3}$	75	100	150	200
	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2

33 Von 35 Schülern einer Klasse haben in der letzten Klassenarbeit 20% die Zensur 1 erhalten. Wieviel Schüler waren das?

20% sind $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.
Also rechnen wir: $35 \cdot \frac{1}{5} = 7$

Ergebnis: 7 Schüler haben die Zensur 1 erhalten.

Aufgaben C 166 bis 168

Diese bequemen Prozentsätze werden auch häufig für Überschläge benutzt.

34 In einer LPG konnte die durchschnittliche Milchleistung von 1900 kg je Kuh auf 2 790 kg je Kuh gesteigert werden. (Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit einer Milchkuh wird die ermolkene Milchmenge eines Jahres ermittelt.) Auf wieviel Prozent der früheren Leistung ist die jetzige Leistung gestiegen? (Runde auf ganze Prozente!)
Die Aufgabe geht von der früheren Leistung aus. Die Zahl 1 900 bildet also den Grundwert. Die Zahl 2 790 dagegen stellt den Prozentwert dar.

Überschlag: $\frac{2\,790}{1\,900} \approx \frac{3\,000}{2\,000} = \frac{3}{2}$

Die jetzige Leistung beträgt etwa 150% der früheren.

Proportion:
$$P : p = G : 100$$
$$2\,790 : p = 1\,900 : 100$$
$$1\,900 \cdot p = 2\,790 \cdot 100$$
$$p = \frac{2\,790 \cdot 100}{1\,900} \approx 146{,}8$$

Antwort: Die Milchleistung ist auf rund 147% der früheren Leistung gestiegen.

Diese Aufgabe zeigt, daß der Prozentwert auch größer sein kann als der Grundwert. Der Prozentsatz ist dann größer als 100%.

Wenn $P < G$, so $p < 100$,
wenn $P = G$, so $p = 100$,
wenn $P > G$, so $p > 100$.

Aufgaben C 169 bis 187

Grafische Darstellungen

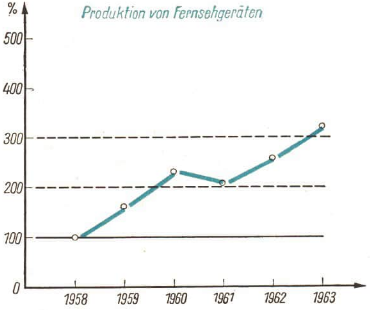
50 Für die grafische Darstellung von Zahlen, die eine Entwicklung zum Ausdruck bringen, werden häufig Linien- oder Flächendiagramme angewandt.
Aus Zahlentabellen kann man sich besonders dann, wenn es sich um große Zahlen handelt, nur mit Mühe einen Überblick verschaffen. Rechnet man die Zahlen in Prozente um, indem man willkürlich eine Zahl als Grundwert annimmt, so wird der Überblick schon besser. Das Diagramm hierzu läßt dann die Entwicklung auf den ersten Blick erkennen.
35 Die folgende Tabelle stellt den Bestand an Hochseeschiffen der DDR dar.
Diese Tabelle enthält nur kleine Zahlen. Sie ist recht übersichtlich und Prozent-

1953	2
1955	9
1957	21
1959	33
1961	61
1963	97

C 20

zahlen sind nicht unbedingt erforderlich. Der farbige Streckenzug wurde in der graphischen Darstellung im Bild C 20 nur zur besseren Übersicht eingetragen. Mathematisch ist er nicht gerechtfertigt; denn man darf nicht denken, daß sich beispielsweise der Bestand im Jahre 1958 auf den Mittelwert von 1957 und 1959 beläuft. Tatsächlich gab es im Jahre 1958 33 Schiffe, während der Mittelwert 27 anzeigt.

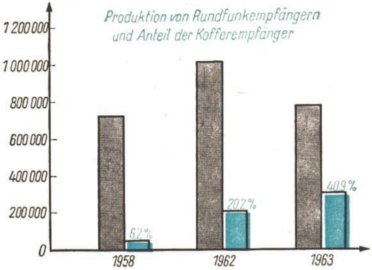
36 Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung bei der Produktion von Fernsehgeräten in der DDR. Da es sich um große, unübersichtliche Zahlen handelt, wurde die Produktionszahl von 1958 als Bezugszahl mit 100% festgesetzt und alle Zahlen wurden auf diese Zahl bezogen (Bild C 21).



1958	180 038	100%
1959	289 736	160,9%
1960	416 490	231,3%
1961	373 960	207,7%
1962	461 189	256,2%
1963	579 963	322,1%

C 21

37 Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung der Produktion von Rundfunkempfängern, wobei der Anteil an Kofferempfängern besonders vermerkt wurde.



	Rundfunkempfänger insgesamt	davon Kofferempfänger
1958	718 214	44 616
1962	1 075 370	217 209
1963	772 961	315 989

C 22

Das Diagramm im Bild C 22 soll verdeutlichen, wie der Anteil an Kofferempfängern an der Gesamtproduktion größer geworden ist. Hierzu wurde die Produktion eines jeden Jahres nacheinander als Grundwert (100%) angenommen und der Anteil der Kofferempfänger als Prozentsatz ausgedrückt.

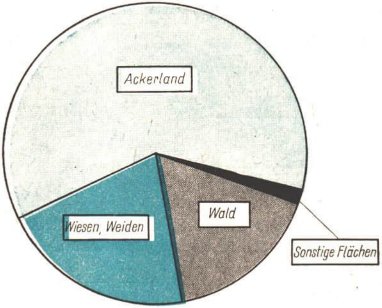
51 Für die grafische Darstellung von Zahlen, die eine Aufteilung zum Ausdruck bringen, wird häufig ein **Kreisdiagramm** gewählt. Die Gliederung wird durch Kreissektoren bestimmt, deren Zentriwinkel entsprechend den prozentualen Anteilen berechnet werden müssen. Die ganze Kreisfläche entspricht in diesem Fall 100%. Die Zentriwinkel α werden mit Hilfe folgender Proportion bestimmt:

$$\alpha : p = 360^\circ : 100,$$

also $$\alpha = 3{,}6^\circ\, p.$$

38 Drei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften haben sich zu einer LPG mit insgesamt 2 163 ha Fläche zusammengeschlossen. Davon sind 1 316 ha Ackerland, 450 ha Wiesen und Weiden und 362 ha Wald. Der verbleibende Rest entfällt auf Wege, bebautes Gelände und Ödland (Bild C 23).

C 23

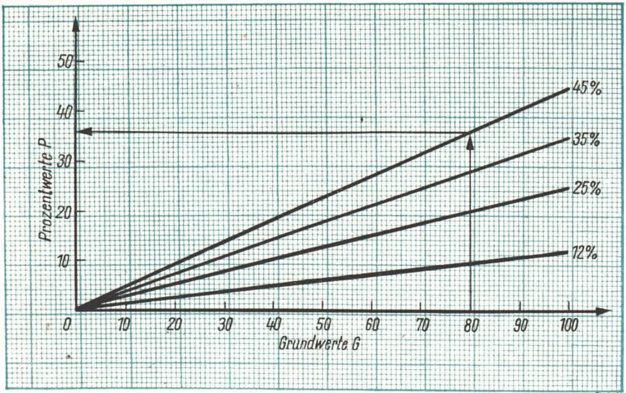


Wir rechnen nun:

2 163 ha $\triangleq$ 100%	100% $\triangleq$ 360°
1 316 ha $\triangleq$ 60,8%	60,8% $\triangleq$ 218,9°
450 ha $\triangleq$ 20,8%	20,8% $\triangleq$ 74,9°
362 ha $\triangleq$ 16,7%	16,7% $\triangleq$ 60,1°
35 ha $\triangleq$ 1,6%	1,6% $\triangleq$ 5,8°

Die Abweichungen von 100,0 % und 360,0°, die man beim Addieren der prozentualen Anteile bzw. der Zentriwinkel erhält, sind auf das Runden zurückzuführen.

Da der Prozentrechnung Proportionalität zugrunde liegt, erhalten wir bei einer grafischen Darstellung, auf deren Achsen die Grundwerte bzw. die Prozentwerte aufgetragen sind, für jeden einzelnen Prozentsatz wieder Geraden durch den Nullpunkt (Bild C 24). Mit Hilfe einer solchen Darstellung kann man zu einem



C 24

gegebenen Grundwert leicht den Prozentwert oder zum gegebenen Prozentwert den Grundwert ablesen.
Das Bild C 24 veranschaulicht die Aufgabe: Wieviel sind 45% von 80.

Besondere Aufgaben aus der Prozentrechnung

52 Bei verschiedenen Aufgaben wird nicht 100, sondern 1 000 als Vergleichszahl verwendet.

12 **Den tausendsten Teil einer Zahl *a* nennt man ein Promille, in Zeichen 1‰.**

39 Im Laufe des I. Quartals wurden in einer Stadt geboren:

Im Januar 145 Knaben und 135 Mädchen,
im Februar 142 Knaben und 136 Mädchen,
im März 152 Knaben und 140 Mädchen.

In welchem Monat war der Anteil der Knabengeburten am höchsten?

	Januar	Februar	März
Mädchen	135	136	140
Knaben	145	142	152
insgesamt	280	278	292
Anteil der Knabengeburten	$\frac{145}{280}$	$\frac{142}{278}$	$\frac{152}{292}$

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnen wir die Quotienten und finden

$$\frac{145}{280} \approx 0{,}518 \approx \frac{52}{100}; \quad \frac{142}{278} \approx 0{,}511 \approx \frac{51}{100}; \quad \frac{152}{292} \approx 0{,}521 \approx \frac{52}{100}.$$

Wenn wir die drei Ergebnisse miteinander vergleichen, so sehen wir, daß die Rundung auf Hundertstel zu grob ist. Mit den Prozentsätzen Januar 52%, Februar 51% und März 52% kann lediglich entschieden werden, daß der Anteil der Knabengeburten an der Gesamtzahl im Februar am kleinsten war.

Legen wir aber die Vergleichszahl 1 000 zugrunde, so erhalten wir:

$$0{,}518 = \frac{518}{1000}; \quad 0{,}511 = \frac{511}{1000}; \quad 0{,}521 = \frac{521}{1000}.$$

Wir schreiben:

C

Januar: 518‰; Februar: 511‰; März: 521‰

Antwortsatz: Der Anteil der Knabengeburten war im März am höchsten.

Aufgaben C 188 bis 192

53 Der **prozentuale Fehler** ist der in Prozenten angegebene relative Fehler (Vgl. Abschnitt C 2).

40 Die Lichtgeschwindigkeit c wird häufig mit $300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ angegeben. Ein genauerer Wert ist $299\,790\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Wie groß ist der Fehler, wenn mit dem Näherungswert $300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ gerechnet wird?

Der absolute Fehler beträgt: $(300\,000 - 299\,790)\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = +210\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Er scheint sehr groß zu sein.

Der relative Fehler beträgt: $\frac{+210}{299\,790} \approx \frac{+210}{300\,000} = +0{,}0007$. Der relative Fehler ist sehr klein. Der relative Fehler vermittelt über die Qualität einer Messung oder einer Schätzung eine klarere Vorstellung als der absolute Fehler.

Der prozentuale Fehler beträgt: $0{,}0007 = \frac{0{,}07}{100}$, das sind 0,07%.

Aufgaben C 193 bis 200

54 Besondere Beachtung verdienen in den Aufgabentexten die Wortverbindungen „Steigerung *um*" oder „Steigerung *auf*" bzw. „Senkung *um*" oder „Senkung *auf*".

41 Nach einer Preissenkung bei Herrenhalbschuhen *um* 18% beträgt der neue Preis für ein Paar 32,80 MDN. Wie hoch war der Preis vor der Preissenkung?

In dieser Aufgabe ist der alte Preis der Grundwert G, dem also 100% entsprechen. Der neue Preis ist ein um 18% verminderter Grundwert G_1, dem nur 82% entsprechen, denn es ist $100 - 18 = 82$. Der **verminderte Grundwert** ist die Differenz aus dem Grundwert und dem Prozentwert.

Gegeben: Verminderter Grundwert $G_1 = G - P = 32{,}80$;
Prozentsatz $p = 100 - 18 = 82$

Gesucht: Grundwert G

Proportion: $G_1 : p = G : 100$

$$G = \frac{G_1 \cdot 100}{p}$$

$$G = \frac{32{,}80 \cdot 100}{82} = 40{,}00$$

Antwortsatz: Der alte Preis betrug 40,00 MDN.

42 Ein Erzeugnis eines Betriebes wird mit 7,5% Gewinn an den Großhandel abgegeben. Der Betrieb erhält je Stück 56,70 MDN. Wie hoch sind die Selbstkosten und wie hoch ist der Gewinn des Betriebes je Stück?

Der Abgabepreis von 56,70 MDN liegt um den Gewinn von 7,5% höher als der Selbstkostenpreis. Hierbei handelt es sich um einen **vermehrten Grundwert** G_2, der die Summe aus dem Grundwert und dem Prozentwert darstellt.

C

Gegeben: Vermehrter Grundwert $G_2 = G + P = 56{,}70$;

Prozentsatz $p = 100 + 7{,}5 = 107{,}5$

Gesucht: Grundwert G

Proportion: $G_2 : p = G : 100$

$$G = \frac{G_2 \cdot 100}{p} = \frac{56{,}70 \cdot 100}{107{,}5} \approx 52{,}74$$

Antwortsatz: Der Selbstkostenpreis beträgt 52,74 MDN und der Gewinn je Stück 56,70 MDN — 52,74 MDN = 3,96 MDN.

55 Manche Aufgaben aus der Prozentrechnung führen infolge ihrer Fragestellung nicht auf direkte, sondern auf indirekte Proportionalität.

43 Die Normzeit für die Überholung einer Maschine beträgt 66 h. Die Überholung der Maschine konnte in 60 h vorgenommen werden. Welcher prozentualen Normerfüllung entspricht das?

Einem geringeren Zeitaufwand für die Reparatur muß natürlich eine erhöhte Normerfüllung zukommen. Bei halbem Zeitaufwand würde man eine doppelt so hohe Planerfüllung anrechnen. Es liegt demnach Produktgleichheit vor.

Zeitaufwand (in h)	66	60
Prozentsatz	100	p

Produktgleichung: $66 \cdot 100 = 60 \cdot p$

$$p = \frac{66 \cdot 100}{60} = 110$$

Antwortsatz: Die Reparaturzeit von 60 h entspricht einer Normerfüllung von 110%.

Bei solchen Aufgaben spiegelt die Fragestellung nicht genau den Sachverhalt wieder. Indirekte Proportionalität besteht nämlich zwischen Zeitaufwand und Leistung (erhöhte Leistung – weniger Zeit erforderlich). Dagegen besteht direkte Proportionalität zwischen der Leistung und der prozentualen Normerfüllung (erhöhte Leistung – erhöhte Normerfüllung).

Aufgaben C 201 bis 208

Zinsrechnung

56 Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung auf das Geldwesen, wobei der Prozentwert den Zinsen eines Geldbetrages für ein volles Jahr entspricht. Bei der Zinsrechnung wird die Zeit mit in Rechnung gesetzt.
In der Zinsrechnung werden nur ganze Zahlen als Grundbeträge verwendet.

C

Die folgende Tabelle enthält die besonderen Fachausdrücke in Gegenüberstellung zur Prozentrechnung.

Prozentrechnung		Zinsrechnung	
Grundwert	G	Grundbetrag	G
Prozentsatz	p	Zinssatz	p
Prozentwert	P	Zinsen	Z
		Zeit	t

Bei den folgenden Betrachtungen nehmen wir stets an, daß sich der Grundbetrag im Laufe eines Jahres nicht verändert. Für die Zinsrechnung gilt unter dieser Voraussetzung die Grundbeziehung

$$Z : p = G : 100,$$

mit deren Hilfe man die Zinsen für den Grundbetrag G beim Zinssatz p für die Laufzeit 1 Jahr berechnet. Aus der Proportion erhalten wir nach dem Auflösen nach Z:

$$Z = \frac{G \cdot p}{100}.$$

Als Zinssätze für Sparguthaben kommen nur die folgenden in Betracht:

Spareinlagen mit täglicher Kündigung werden mit 3% verzinst, Spareinlagen mit mindestens ein Jahr Laufzeit werden mit 4% verzinst und Spareinlagen mit mindestens dreijähriger Laufzeit werden mit 5% verzinst.

44 Am Anfang eines Jahres läßt sich jemand ein Sparbuch ausstellen und zahlt 250,00 MDN ein. Der Zinssatz beträgt 3%. Wieviel Zinsen erhielt der Sparer am Ende des Jahres, wenn er in der Zwischenzeit weder Geld eingezahlt noch abgeholt hat?

Gegeben: Grundbetrag $G = 250{,}00$; Zinssatz $p = 3$

Gesucht: Zinsen für 1 Jahr

$$Z = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{250{,}00 \cdot 3}{100} = 7{,}50$$

Antwortsatz: Die Zinsen betrugen 7,50 MDN.

57 Bei der Berechnung der Zinsen für mehrere Jahre werden die Zinsen eines Jahres mit der Anzahl t der Jahre multipliziert; denn es liegt wieder Proportionalität zwischen den Zinsen und der Zeit vor. Hierbei wird aber der vereinfachte Fall angenommen, daß der Grundbetrag über den betrachteten Zeitraum unverändert bleibt und daß die Zinsen nach jedem Jahr ausgezahlt werden. Häufig lassen Sparer die Zinsen zum Grundbetrag zuschlagen. Hierbei bringen die Zinsen im nächsten Jahr auch Zinsen. Aufgaben dieser Art werden erst in späteren Klassen behandelt.

C

Die Formel für die Jahreszinsen können wir folgendermaßen finden:

die Zinsen für ein Jahr betragen $Z_1 = \frac{G \cdot p}{100} \cdot 1$,

die Zinsen für zwei Jahre betragen $Z_2 = \frac{G \cdot p}{100} \cdot 2$,

die Zinsen für drei Jahre betragen $Z_3 = \frac{G \cdot p}{100} \cdot 3$ usw.

die Zinsen für t Jahre betragen $Z_t = \frac{G \cdot p}{100} \cdot t$.

58 In vielen Fällen ist es erforderlich, die Zinsen für einen kürzeren Zeitraum als ein Jahr zu berechnen. Dabei ist es in der DDR wie in vielen anderen Staaten üblich, das Jahr zu 360 Tagen in Rechnung zu setzen.
Als Zeitfaktor kommt bei der Berechnung von Zinsen für Teile des Jahres nur ein Bruch in Frage, der der Anzahl der Tage entspricht. Für 37 Tage multiplizieren wir beispielsweise die Zinsen eines Jahres mit $\frac{37}{360}$.

13 **Die Formel zur Berechnung der Zinsen lautet**

$$\mathbf{Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot t,} \qquad \mathbf{Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{360}.}$$

für mehrere Jahre
(*t* ist die Anzahl der Jahre)

für Tage
(*t* ist die Anzahl der Tage)

45 Ein Kredit von 1 284,00 MDN hat eine Laufzeit von 75 Tagen und wird mit 6% verzinst. Wieviel Mark müssen zurückgezahlt werden?

$$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{360} = \frac{1\,284 \cdot 6 \cdot 75}{100 \cdot 360} = 16{,}05$$

Antwortsatz: Es müssen 1 300,05 MDN zurückgezahlt werden.

Aufgaben C 209 bis 216

Zur Geschichte der rationalen Zahlen und der Proportionen

C

Heute sind im Schulunterricht die Begriffe „rationale Zahl" und „Proportion" genau getrennt. Beide Begriffe haben aber in der Geschichte der Mathematik bis ins 18. Jahrhundert hinein in dauernder Wechselwirkung gestanden. Daher soll auch in einem gemeinsamen Abschnitt von dem schwierigen Weg berichtet werden, den die Menschen bis zur Herausarbeitung dieser beiden grundlegenden Begriffe zurücklegen mußten.

Die Menschen hatten schon in der Urgesellschaft zählen gelernt. Es galt, Tauschgeschäfte zwischen den Viehzüchtern und Ackerbauern durchzuführen, Viehherden und Ackerbauprodukte zu zählen, Entfernungen in Tagereisen zu bestimmen und für Aussaat und Ernte einen Kalender zu führen. Dies alles machte die Kunst des Zählens, die Ausbildung von Zahlwörtern und die Anfänge des Rechnens zu dringenden gesellschaftlichen Bedürfnissen. Auch die Vorstellung von gebrochenen Zahlen hat sich bei den alten Völkern schon frühzeitig herausgebildet. Immer wieder traten solche Probleme auf wie die Aufteilung einer gemeinsamen Jagdbeute, eines gemeinsam erarbeiteten Ernteertrages und einer von einer Kriegerschar eingebrachten Beute. Schon die frühesten uns erhalten gebliebenen Dokumente der Mathematik wie die Keilschrifttexte aus Babylonien, einem Staat auf dem Gebiet des heutigen Staates Irak, und die Papyri aus dem alten Ägypten zeigen, daß man bereits im 3. und 2. Jahrhundert v. u. Z. Zeichen für Brüche besaß und mit Brüchen rechnen konnte. Freilich beherrschten nur wenige Menschen diese damals sehr schwierige Kunst. Es waren die sogenannten Schreiber, welche als Verwaltungsbeamte der ersten Klassenstaaten eine Vielzahl von Aufgaben zu erledigen hatten, die auch mathematische Kenntnisse erforderten. Die Schreiber hatten Arbeiter- und Kriegerheere mit Verpflegung, Waffen und Arbeitsgeräten auszurüsten, die Kanalbauten zur Bewässerung der Felder zu überwachen, Steuern einzutreiben usw.

Wenn man sich die alte Schreibweise für Brüche ansieht, so erkennt man ganz deutlich, daß die Brüche aus dem unmittelbaren praktischen Leben hervorgegangen sind.

Im alten Ägypten versah man um 1800 v. u. Z. zur Kennzeichnung eines Bruches eine Zahl mit dem vorgesetzten oder darübergesetzten Schriftzeichen für ein ganz kleines Hohlmaß, einem Punkt. Also bedeutete, wenn wir uns unserer heutigen Zahlzeichen bedienen, $\dot{3}$ soviel wie $\frac{1}{3}$, $\dot{4}$ soviel wie $\frac{1}{4}$ usw. Man rechnete nur mit Stammbrüchen, d. h. mit Brüchen, deren Zähler stets 1 ist. Auch dies weist auf die Entstehung der Brüche als Teile eines Ganzen hin. Für die Ägypter bildete daher $\frac{2}{5}$ kein Zahlenergebnis, sondern eine Aufgabe, nämlich die Zerlegung in Stammbrüche. Das Ergebnis lautet $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, wenn wir uns unserer heutigen Schreibweise bedienen.

In Babylon bezeichnete man den Bruch $\frac{1}{2}$ mit einem Zeichen, das ein zur Hälfte gefülltes Hohlmaß darstellt (Bild C 26).

Bild C 26: Entstehungsweise des babylonischen Schriftzeichens für den Bruch $\frac{1}{2}$.
Oben: Bildzeichen für das zur Hälfte gefüllte Gefäß
Unten: Schreibweise für $\frac{1}{2}$ in der entwickelten Keilschrift

Im alten Griechenland und im römischen Weltreich bezeichnete man ganze Zahlen und Brüche mit Buchstaben aus dem griechischen bzw. lateinischen Alphabet.
Dieser Bezeichnungsweise bedienten sich dort die Kaufleute, Steuereinnehmer, Verwaltungsbeamten usw. Für schwierige und umfangreiche Berechnungen, insbesondere für astronomische Rechnungen, erwies sich dieses Zahlsystem als viel schwerfälliger als dasjenige, das in Babylon benutzt wurde, obwohl das babylonische System älter war. Die Griechen übernahmen deshalb für astronomische Zwecke das babylonische Zahlsystem, das auch von unserem heutigen Dezimalsystem abweicht.

Während des 7. und 6. Jh. v.u.Z. verarbeiteten die griechischen Mathematiker das aus Babylonien und Ägypten übernommene mathematische Wissen im streng mathematischen Sinne. Sie lernten gedanklich zwischen Voraussetzung, Lehrsatz und Beweis zu unterscheiden. Dabei wurde auch die Frage aufgeworfen, was eigentlich unter dem Begriff „Zahl" zu verstehen sei. Mit diesem Problem befaßten sich z.B. THALES VON MILET (etwa 624–etwa 548 v.u.Z.), den die Griechen wegen seiner hohen Kenntnisse als einen der sieben Weltweisen bezeichneten, der große materialistische Philosoph DEMOKRITOS VON ABDERA (etwa 460–etwa 370 v.u.Z.), welcher eine Atomlehre ausgearbeitet hat, sowie PYTHAGORAS VON SAMOS (etwa 580–etwa 500 v.u.Z.) und seine Schüler, welche den politischen und religiösen Geheimbund der sogenannten *Pythagoräer* gegründet hatten. Nach Auffassung der Pythagoräer besaßen die Zahlen geheimnisvolle Kräfte und es kam darauf an, Beziehungen zwischen „befreundeten" und „unbefreundeten", zwischen „vollkommenen" und „unvollkommenen" Zahlen usw. zu entdecken. Natürlich hat diese Auffassung nichts mit Wissenschaft zu tun. Trotzdem sind, sozusagen unbeabsichtigt, aus der intensiven Beschäftigung mit den Zahlen bedeutende mathematische Ergebnisse hervorgegangen, die dann wieder die gesamte griechische Mathematik beeinflußt haben.

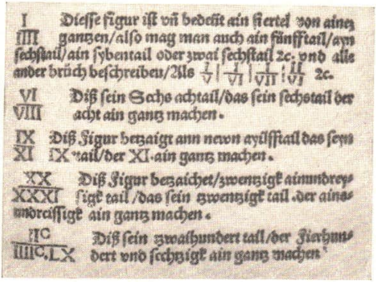
Nach griechischer Auffassung wurden nur die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . . unter dem Begriff „Zahl" (griech., arithmos) verstanden. (Bei den Pythagoräern galt sogar die 1 nicht als Zahl, sondern als Ursprung aller Zahlen.) Die griechische Zahldefinition lautet: „Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Vielheit". So steht es in den aus 13 Büchern bestehenden berühmten *Elementen*, in denen von dem Mathematiker EUKLEIDES VON ALEXANDRIA (etwa 365–etwa 300 v.u.Z.) fast alle damals bekannten mathematischen Kenntnisse aufgenommen worden sind.

Unsere heutigen Brüche galten also den griechischen Mathematikern nicht als Zahlen. Man behandelte sie als Verhältnisse von „Zahlen" (d.h. von ganzen positiven Zahlen). Das, was wir heute „Bruchrechnung" nennen, wurde mit Hilfe von Proportionen behandelt, mit ihrer Hilfe wurden das Kürzen und Erweitern von Brüchen gelehrt. Die Multiplikation von Brüchen wurde aufgefaßt als das Zusammensetzen von Verhältnissen.
Erst gegen Ende der Antike wurde diese enge Auffassung des Begriffs „Zahl" als natürliche Zahl wenigstens teilweise überwunden. Am weitesten gelangte in dieser Beziehung DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA (um 250 u.Z.). Er ließ auch positive gebrochene Zahlen als Lösungen von Gleichungen zu, gleichberechtigt neben den positiven ganzen Zahlen.
Doch kannte die alte griechische Mathematik in gar keiner Form den Begriff der negativen Zahl, wenn natürlich auch in den Kreisen der Kaufleute mit Schulden und Guthaben gerechnet worden ist. Aber unter den Bedingungen der Sklavenhaltergesellschaft, wo jede produktive Tätigkeit und jede Form der Arbeit als verächtlich galten, bestand eine tiefe Kluft zwischen Theorie und Praxis. Der in der Antike überaus einflußreiche Philosoph PLATON (427– etwa 347 v.u.Z.) hatte ausdrücklich gefordert, die Mathematik dürfe „nicht für die Zwecke des Krämers" benutzt und dadurch „hinabgewürdigt" werden. Auch EUKLEIDES war Anhänger der philosophischen Lehre von PLATON. Für ihn waren daher die mathematische Praxis und die kaufmännische Rechenkunst völlig uninteressant.
Die negativen Zahlen waren dagegen schon in der indischen und chinesischen Mathematik des 6. Jhs. u.Z. fester Bestandteil der Mathematik geworden. Sie verdanken ihre Einfüh-

Bild C 27: Blick in eine Rechenstube; gerechnet wird mit sog. Rechenpfennigen am Rechentisch, auf dem die Linien eines Abakus eingezeichnet sind. Darstellung in einem Rechenbuch aus dem Jahre 1518.

rung, wie man aus ihrer ursprünglichen Bezeichnung als „Schulden" ersehen kann, der kaufmännischen Praxis. Auch in der Mathematik der arabischen Länder, welche seit etwa 800 u.Z. einen großartigen Aufschwung nahm, waren die negativen Zahlen heimisch. Viele mathematische Werke waren ausdrücklich „für die Bedürfnisse der Kaufleute und Testamentsvollstrecker" verfaßt worden, so ein vorzügliches Lehrbuch der Algebra von AL-HWARAZMI (gest. um 840), der lange Zeit in Bagdad gewirkt hat.

Die Mathematiker Europas haben sich am Ende des Mittelalters, als auch in Europa die Wissenschaften nach und nach wieder belebt werden konnten, weitgehend an die arabischen Gelehrten angeschlossen. So übernahm man unter anderem die aus Indien stammenden Zahlzeichen, welche auch die arabischen Gelehrten verwendeten. Daher nennen wir unsere heutigen Zahlzeichen *arabische Ziffern.* Bei den engen Handelsbeziehungen zum Orient lernte man in Europa im 13. und 14. Jh. weiterhin die negativen Zahlen kennen. Sie setzen sich allerdings erst durch, als die Produktion und der Handel im 15. und 16. Jh. einen raschen Aufschwung nahmen, insbesondere nach der Entdeckung Amerikas. Während in den Handelskontoren negative Zahlen schon zum normalen Handwerkszeug der Buchhalter und großen Kaufherren geworden waren, gab es noch Ende des 16. Jhs. selbst führende Mathematiker, die die negativen Zahlen als „absurde" Zahlen bezeichneten. Immer noch war der Einfluß des idealistischen Philosophen PLATON sehr stark. Erst Ende des 17. Jhs. wurden die letzten Vorbehalte gegen die Anerkennung der negativen Zahlen als vollwertige Zahlen fallengelassen.



$\frac{I}{IIII}$ Diesse figur ist vñ bedeüt ain fiertel von ainez ganzen/also mag man auch ain fünfftail/ayn sechstail/ain sybentail oder zwai sechstail zc. vnd alle ander brüch beschreiben/Als $\frac{I}{V}$ | $\frac{I}{VI}$ | $\frac{I}{VII}$ | $\frac{II}{VI}$ zc.

$\frac{VI}{VIII}$ Diß sein Sachs achtail/das sein sechstail der acht ain ganz machen.

$\frac{IX}{XI}$ Diß Figur bezaigt ann newn ayilfftail das seyn IX tail/der XI. ain ganz machen.

$\frac{XX}{XXXI}$ Diß Figur bezaichet/zwentzigk ainunddreyssigk tail /das sein zwentzigk tail. der ainsundreissigk ain ganz machen.

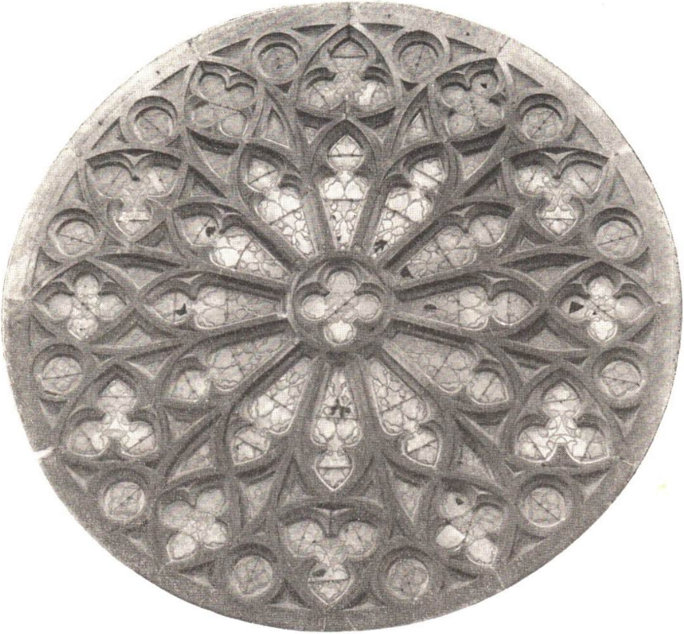
$\frac{IIC}{IIIIC.LX}$ Diß sein zwaihundert tail/der Fierhundert vnd sechzigk ain ganz machen

Bild C 28: Bruchschreibweise mit Bruchstrich und römischen Ziffern. Aus einem deutschen Rechenbuch vom Jahre 1514.

Verhältnisse und Proportionen haben also eine wesentliche Rolle als historisches Durchgangsstadium auf dem Wege zur Herausarbeitung des Begriffes der rationalen Zahl gespielt. Andererseits geht die Kenntnis vom direkten und indirekten proportionalen Zusammenhang bis weit in die Anfänge der Menschheitsgeschichte, bis ins 3. Jahrtausend v.u.Z. zurück. So rechneten die ägyptischen und babylonischen Schreiber mit der direkten Proportionalität von Feldgröße und Ernteertrag, von Bodengüte und Ernteertrag. Es gab, wie wir uns ausdrücken würden, feste Proportionalitätsfaktoren zur Umrechnung verschiedener Getreidearten ineinander. Die Entlohnung beim Transport von Baumaterial war direkt proportional nach der dabei zurückgelegten Entfernung gestaffelt.
Mit der Entwicklung der Technik und der Naturwissenschaft wurden seit der Antike im Mittelalter und in der Neuzeit Proportionen zu einem wesentlichen Mittel, um Naturvorgänge und Maschinenelemente mathematisch erfassen zu können. Schon ARCHIMEDES

Bild C 29: Handzeichnung von LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519); die Größenverhältnisse am menschlichen Kopf. Die Beschriftung ist nach Leonardos Gewohnheit in Spiegelschrift vorgenommen.

VON SYRAKUS (etwa 287–212 v.u.Z.) hatte die Hebelgesetze mit Hilfe der Proportionen studiert. Als die technische Entwicklung in Europa im 15. und 16. Jh. einen großen Aufschwung nahm, berechneten die Ingenieure die von ihnen konstruierten Windmühlen, Wasserräder, Bagger, Bohrmaschinen, Papiermühlen, Kräne usw. mit Hilfe von Proportionen. Das Rechnen mit Proportionen bildete auch die mathematische Grundlage der kaufmännischen Praxis, insbesondere der Zinsrechnung und der Wechselrechnung.
Zugleich spielte die Lehre von den Proportionen eine führende Rolle in der Kunst und im Bauwesen der Renaissance. Die einzelnen Teile eines Gebäudes, einer Plastik oder eines Gemäldes mußten in ganz bestimmten Größenverhältnissen zueinander stehen, damit das Ganze als schön, „der Regel entsprechend“, gelten konnte. Noch heute sagen wir von einem schönen Gegenstand, daß er „wohlproportioniert“ sei. Daher kommt es, daß sich solche großen Künstler wie LEONARDO DA VINCI (1452–1519) und A. DÜRER (1471–1528) ausführlich mit Proportionen beschäftigt haben. Der Ausdruck *proportio* ist im späten Mittelalter als lateinische Übersetzung des griechischen Wortes *logos* für Verhältnis als mathematischer Fachausdruck eingeführt worden. Die heute verwendete Schreibweise $a:b = c:d$ mit Gleichheitszeichen und Doppelpunkten stammt von dem deutschen Philosophen und Mathematiker G. W. LEIBNIZ (1646–1716), der sie 1693 zum erstenmal verwendete.



PLANIMETRIE

D

Zur Wiederholung	Seite 94
Sätze über den Kreis	96
Tangenten	97
Winkel im Kreis	99
Satz des THALES	99
Gemeinsame Tangenten zweier Kreise	101
Peripheriewinkelsatz	103
Dreieckstransversalen,	
Satz von PASCAL	106
Kreisberechnung	109
Flächeninhalt	110
Umfang	111
Ellipse	112
Zur Geschichte der Kreislehre	114

Zur Wiederholung

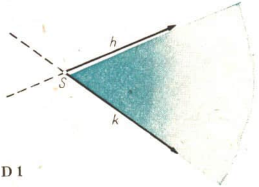
D

1. Durch zwei voneinander verschiedene Punkte A und B geht eine Gerade, aber auch nur eine einzige, nämlich die Gerade AB.
Wieviel Geraden gehen durch 4 Punkte, von denen keine 3 zusammen auf einer Geraden liegen?

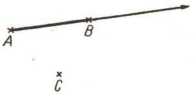
2. Zwei voneinander verschiedene Punkte A und B können durch die Strecke $\overline{AB}$ verbunden werden. Weitere Verbindungsstrecken gibt es nicht. Wir sagen daher, daß es *genau* eine Verbindungsstrecke gibt.
Wieviel Verbindungsstrecken besitzen 6 Punkte, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen?

3. Jede Strecke kann man mit beliebiger Genauigkeit abmessen. Untereinander kongruente Strecken besitzen die gleiche Länge. Erkläre den Unterschied zwischen einer Strecke und ihrer Länge! Erkläre den Begriff „messen"!

4. Zwei Strahlen h und k mit gemeinsamem Anfangspunkt bestimmen einen Winkel.
(Das Innere des Winkels ist der Teil der Ebene, der nicht die Verlängerungen von h und k über S hinaus enthält. (Vergleiche hierzu das Bild D 1!)
Wieviel Winkel bilden zwei Geraden, die einander in einem Punkt S schneiden?



D 1



D 2

5. Das Bild D 2 zeigt drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen.
$\vec{AB}$ ist der Strahl mit dem Anfangspunkt A, der auf der Geraden AB liegt und B enthält.
Welche weiteren Strahlen lassen sich durch die 3 Punkte in dieser Art bestimmen?

6. Jeden Winkel α ($\sphericalangle\, hk$) kann man mit beliebiger Genauigkeit messen.
Sein Gradmaß liegt zwischen 0° und 180°. Welches Gradmaß besitzen rechte Winkel?
Zwischen welchen Gradmaßen liegen die Gradmaße der spitzen Winkel und zwischen welchen die der stumpfen Winkel?

7. Zu einer Geraden g gibt es durch einen Punkt P, der nicht auf ihr liegt, eine Parallele g, aber auch nur eine (als anschaulich klar vorausgesetzter Grundsatz). Beschreibe ihre Konstruktion mit Hilfe von Zirkel und Lineal!

8. Je drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C bilden ein Dreieck ABC.

Dabei sind $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ sowie $\overline{CA}$ die Seiten und $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$ sowie $\gamma = \sphericalangle BCA$ die Innenwinkel des Dreiecks. Wie groß ist die Summe (der Gradmaße) der Innenwinkel?

Was sind Außenwinkel am Dreieck? Was kannst du über den Zusammenhang zwischen einem Außenwinkel und seinen nichtanliegenden Innenwinkeln eines Dreiecks aussagen?

9. Nenne die vier Kongruenzsätze für Dreiecke (besser Grundsätze über die Kongruenz von Dreiecken)! Erläutere die Abkürzungen sss, sws, wsw, ssw!

10. Was versteht man unter **a)** Nebenwinkeln, **b)** Scheitelwinkeln, **c)** Stufenwinkeln an geschnittenen Parallelen, **d)** Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen, **e)** entgegengesetzt liegenden Winkeln an geschnittenen Parallelen?

11. Die unter 10a) bis e) genannten Winkel sind jeweils Winkelpaare.
In welchen Winkelpaaren sind die beiden Winkel kongruent? Welche Winkelpaare ergänzen ihre Gradmaße zu 180°?

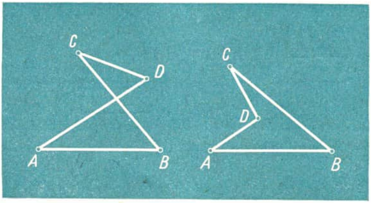
12. Beschreibe die Konstruktion
a) des Lotes von einem Punkt P außerhalb einer Geraden g auf diese Gerade,
b) der Senkrechten auf einer Geraden g in einem ihrer Punkte P,
c) der Winkelhalbierenden eines Winkels $\sphericalangle hk$,
d) der Mittelsenkrechten zu einer Strecke $\overline{AB}$!

13. a) Die Seiten a und b eines Dreiecks ABC seien kongruent. Was kannst du über die Winkel α und β aussagen?
b) Die Seite a sei größer als b. Was kannst du über α und β aussagen?
c) Es sei α kongruent zu β. Was kannst du über die Seiten a und b des Dreiecks aussagen?
d) Der Winkel α habe ein größeres Winkelmaß als β. Was kannst du über a und b aussagen?

14. Das Dreieck ABC sei gleichschenklig, $\overline{AB} = c$ sei die Basis. Was kannst du über die Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$, die Seitenhalbierende s_c und die Winkelhalbierende w_γ aussagen?

15. Je vier Punkte A, B, C, D einer Ebene, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen, bilden ein Viereck.

Nenne spezielle Vierecke! Wie groß ist die Summe der Gradmaße der Innenwinkel in diesen Vierecken? (Begründe deine Antwort!) Die Bilder D 3 und D 4 zeigen ein überschlagenes Viereck bzw. ein Viereck mit einspringender Ecke. Wie groß ist die Summe der Gradmaße der Innenwinkel im Viereck im Bild D 4? Nenne spezielle konvexe Vierecke!
Wie groß ist die Summe der Gradmaße der Innenwinkel im konvexen Viereck?
(Begründe die Antwort!)



D 3/4

In der Planimetrie (der Geometrie der Ebene) wollen wir uns mit ebenen Figuren, wie Geraden, Strecken, Punkten, Dreiecken, Vierecken, beschäftigen. Dabei werden wir geometrische Sätze kennenlernen. Um sicher zu gehen, daß diese geometrischen Sätze richtig sind, werden wir sie nach Möglichkeit beweisen. Dabei dürfen die als anschaulich klar vorausgesetzten Grundsätze und außerdem alle Sätze, die schon vorher bewiesen worden sind, benutzt werden.

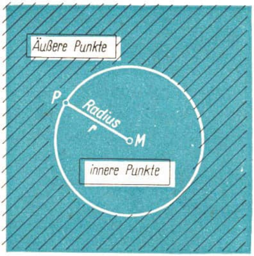
Sätze über den Kreis

1 Bewegst du einen Punkt P im gleichen Abstand r um einen zweiten Punkt M, so erhältst du als Bahnkurve einen Kreis.

1 **DEFINITION: Der Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt M gleichen Abstand r haben. Man nennt r den Radius oder Halbmesser und M den Mittelpunkt des Kreises (Bild D 5).**

Ein Punkt P heißt **innerer Punkt** des Kreises, falls $\overline{MP}$ kleiner als r ist. Ein Punkt P heißt **äußerer Punkt** des Kreises, falls $\overline{MP}$ größer als r ist.

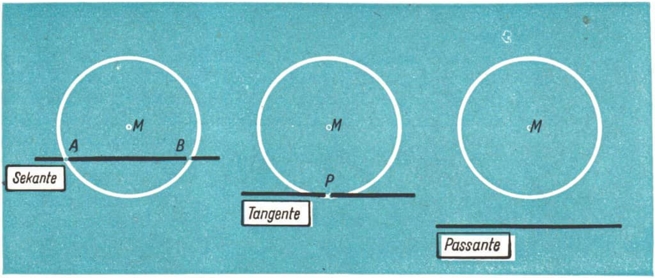
Denken wir uns eine Gerade über einen Kreis hinweg geschoben, so treten 3 Fälle auf (Bild D 6):



D 5

(1) Die Gerade heißt **Sekante**[1], wenn sie den Kreis schneidet, also zwei Punkte mit dem Kreis gemeinsam hat.

(2) Die Gerade heißt **Tangente**[2], wenn sie einen Punkt mit dem Kreis gemeinsam hat.



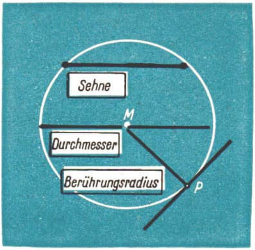
D 6

[1] secans (lat.), schneidend. [2] tangens (lat.), berührend.

(3) Die Gerade heißt **Passante**[1], wenn sie keinen Punkt mit dem Kreis gemeinsam hat.

2 **GRUNDSATZ: Eine Gerade hat nicht mehr als zwei Punkte mit einem Kreis gemeinsam.**

Die Verbindungsstrecke zweier verschiedener Kreispunkte heißt **Sehne** (Bild D 7).
Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne heißt **Durchmesser** des Kreises.



D 7

2. Tangenten

Ist P ein Punkt des Kreises, so nennt man die Strecke $\overline{MP}$ selbst (nicht nur ihre Länge) einen **Radius** des Kreises. Ist P Berührungspunkt einer Tangente, so heißt $\overline{MP}$ der **Berührungsradius** dieser Tangente an den Kreis.

3 **SATZ: Der Berührungsradius einer Tangente steht senkrecht auf dieser Tangente.**

Beweis:

Wir bezeichnen die Tangente mit g, den Berührungspunkt mit P.
Nehmen wir an, $\overline{MP}$ stünde nicht senkrecht auf g. Dann fiele das Lot von M auf g auch nicht mit $\overline{MP}$ zusammen. Wir erhielten einen Fußpunkt F (Bild D 8).

D 8

Verlängerten wir $\overline{PF}$ noch über F hinaus um sich selbst, so erhielten wir P' als Endpunkt.

In diesem Fall müßte gelten:

$$\triangle P'FM \cong \triangle FPM \text{ (nach sws);}$$

denn es wäre ja:

$$\begin{aligned} \overline{P'F} &= \overline{FP} \text{ (nach Konstruktion)} \\ \overline{MF} &= \overline{MF} \text{ und} \\ \sphericalangle P'FM &= \sphericalangle MFP \quad \text{(beides sind rechte Winkel).} \end{aligned}$$

Dann müßte auch gelten $\overline{MP'} = \overline{MP}$, da beide Strecken als homologe (gleichliegende) Stücke in kongruenten Dreiecken auftreten. Der Punkt P' müßte also

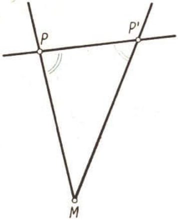
[1] passare (lat.), vorübergehen.

auf dem Kreis liegen und g hätte somit zwei Schnittpunkte mit dem Kreis und wäre daher Sekante und nicht Tangente. Das ist widersprüchlich, d.h., die Annahme, daß $\overline{MP}$ nicht senkrecht auf g steht, ist falsch. Der Berührungsradius $\overline{MP}$ muß senkrecht auf g stehen.

3 Es gilt auch die Umkehrung des Satzes D 3.

4 **SATZ: Bildet eine Gerade g durch den Endpunkt P eines Halbmessers $\overline{MP}$ einen rechten Winkel mit diesem, so ist g eine Tangente. Das heißt, die Gerade g hat nur P als einzigen Punkt mit dem Kreis gemeinsam.**

D 9



Beweis:

Nehmen wir an, es gäbe noch einen gemeinsamen Punkt P' auf dem Kreis und der Geraden (Bild D 9). Da $\overline{MP} = \overline{MP'}$ gilt ($\overline{MP}$ und $\overline{MP'}$ sind nämlich Radien des Kreises), so wäre dann $\triangle PMP'$ gleichschenklig, und es würde gelten $\sphericalangle MPP' = \sphericalangle MP'P$ (beide Winkel sind Basiswinkel im $\triangle PMP'$). Dann wäre jeder dieser Winkel ein rechter. Zwei rechte Winkel kann es in einem Dreieck aber nicht geben. Unsere Annahme war also falsch. Die Gerade g hat nur einen Punkt mit dem Kreis gemeinsam und ist daher Tangente.

5 **SATZ: Bildet eine Gerade g durch den Endpunkt P eines Halbmessers $\overline{MP}$ einen spitzen Winkel mit diesem, so ist g eine Sekante.**

Beweis:

Eine Passante kann g nicht sein, da sie einen Punkt, nämlich P, mit dem Kreis gemeinsam hat. Wäre sie Tangente, dann stünde der Radius $\overline{MP}$ senkrecht auf ihr. Sie muß also eine Sekante sein.

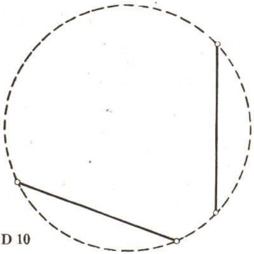
Die zu einer Strecke $\overline{AB}$ senkrechte Gerade durch den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ heißt **Mittelsenkrechte**.

1 Weise nach, daß alle ihre Punkte von A und B gleich weit entfernt sind!

Zeige, daß die Mittelsenkrechte alle Punkte der Ebene enthält, die von A und B gleich weit entfernt sind!

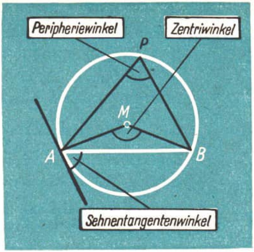
2 Zeige, daß der Mittelpunkt eines Kreises stets auf der Mittelsenkrechten jeder seiner Sehnen liegt!

Bestimme auf diese Weise den Mittelpunkt eines Kreises, von dem zwei Sehnen gegeben sind (Bild D 10)!



D 10

3 Beweise, daß gleich lange Sehnen eines Kreises gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben!

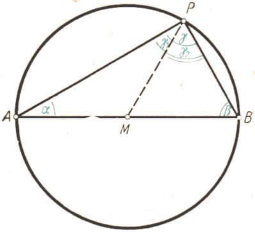


D 11

4 Winkel am Kreis

Enthält eine Sehne $\overline{AB}$ nicht den Mittelpunkt M des Kreises, so heißt der Winkel AMB **Zentriwinkel** (Bild D 11).
Liegt P auf dem Kreis, so heißt der Winkel APB **Peripheriewinkel** oder Umfangswinkel. Liegen der Scheitelpunkt P des Peripheriewinkels und der Mittelpunkt M des Kreises auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$, so bezeichnet man den Winkel AMB als den zum Winkel APB zugehörigen Zentriwinkel. Enthält eine Sehne $\overline{AB}$ nicht den Mittelpunkt M des Kreises und berührt eine Tangente g den Kreis in A, so heißt der kleinere von g und $\overrightarrow{AB}$ gebildete Winkel **Sehnentangentenwinkel.**

5 Satz des Thales:



D 12

6 **Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser ist ein rechter Winkel.**

Beweis:
Die Dreiecke AMP und MBP im Bild D 12 sind gleichschenklig. Ihre Spitze ist M. Es ist also $\alpha = \gamma_1$ und $\beta = \gamma_2$.
Es gilt: $\alpha + (\gamma_1 + \gamma_2) + \beta = 180°$. (Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt 180°.)

Also gilt: $\alpha + \gamma_1 + (\gamma_2 + \beta) = 180°$.

Durch Einsetzen von γ_1 für α und von γ_2 für β erhältst du:

$$2 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2 = 180°.$$

Daraus folgt aber

$$2 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) = 180°, \text{ also } \gamma = 90°.$$

6 Es gilt auch die Umkehrung des Satzes von Thales:

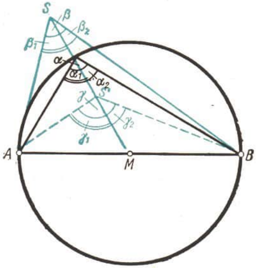
7 **Der Scheitelpunkt des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ liegt stets auf dem Kreis mit dem Radius $\frac{\overline{AB}}{2}$ um den Mittelpunkt von $\overline{AB}$.**

Beweis:

Wir nehmen an, daß es ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ gibt, in dem der Scheitelpunkt des rechten Winkels S nicht auf dem Kreis mit $\frac{\overline{AB}}{2}$ um den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ liegt. (Dieser Kreis wird auch der zu $\overline{AB}$ gehörige THALESkreis genannt.)

Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden (Bild D 13):

Erster Fall: Die Spitze S liegt außerhalb des Kreises.
Zweiter Fall: Die Spitze S' liegt innerhalb des Kreises.



D 13

Wir zeichnen die Verbindungsstrecke der Spitze mit dem Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ und erhalten durch Abtragen des Kreisradius von M aus den Punkt P.

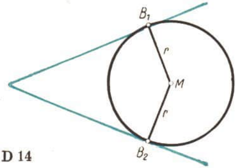
Es gilt dann nach dem Satz über die Außenwinkel:

$$\begin{array}{lll} \beta_1 < \alpha_1 & \text{bzw.} & \alpha_1 < \gamma_1 \text{ und} \\ \beta_2 < \alpha_2 & \text{bzw.} & \alpha_2 < \gamma_2.\ \text{Daraus folgt:} \\ \hline \beta < \alpha & \text{bzw.} & \alpha < \gamma. \end{array}$$

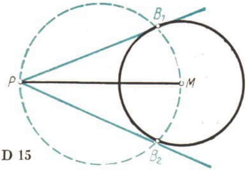
Nun ist α nach dem Satz des THALES ein rechter Winkel. Folglich können weder β noch γ rechte Winkel sein.

Der Fall, daß die Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks über $\overline{AB}$ nicht auf dem Thaleskreis liegt, kann also nicht eintreten.

7 Aus der Anschauung können wir entnehmen, daß es von einem Punkt P außerhalb des Kreises mit r um M zwei Tangenten gibt (Bild D 14).



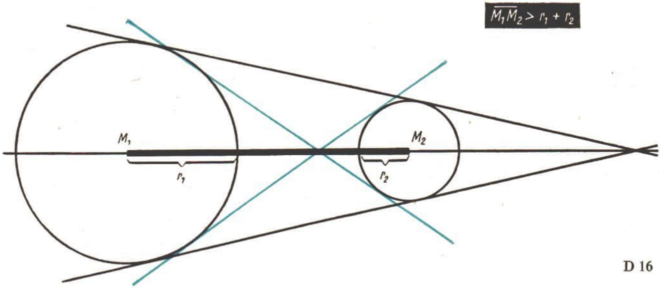
D 14



D 15

Da die Tangenten mit den Berührungsradien rechte Winkel bilden, findest du die Berührungspunkte B_1 und B_2 auf dem Thaleskreis über $\overline{PM}$.

Du zeichnest also $\overline{PM}$ und mit r den Kreis um M und außerdem den Thaleskreis über PM (Bild D 15). Die Schnittpunkte B_1 und B_2 beider Kreise sind die Berührungspunkte der Tangenten von P an den Kreis mit r um M.



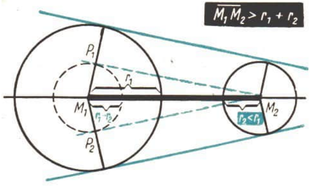
D 16

Zwei Kreise können als gemeinsame Tangenten zwei äußere und zwei innere Tangenten haben (Bild D 16). Je nachdem wie die beiden Kreise zueinander liegen, können wir mehrere Fälle unterscheiden.

Erster Fall:

Der Abstand der Mittelpunkte M_1 und M_2 ist größer als die Summe der Radien. Dieser Abstand $\overline{M_1M_2}$ wird auch Zentralstrecke genannt. Die Kreise schneiden einander nicht (Bild D 16).

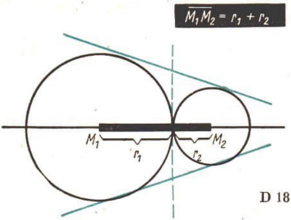
a) Die Konstruktion der äußeren Tangenten: Wir zeichnen einen Kreis mit $r_1 - r_2$ um M_1 und legen die Tangenten von M_2 an diesen Kreis. Die Berührungspunkte seien P_1 und P_2.
Die gemeinsamen Tangenten erhalten wir dann in den Parallelen zu diesen Tangenten im Abstand r_2 nach der entgegengesetzten Seite von M_1M_2. Man



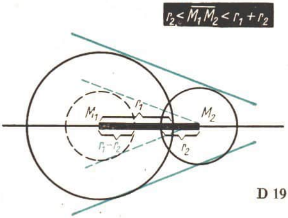
D 17

erhält ihre Berührungspunkte als Schnittpunkte der Kreise mit den Senkrechten in M_2, P_1 und P_2 auf P_1M_2 bzw. P_2M_2 (Bild D 17).

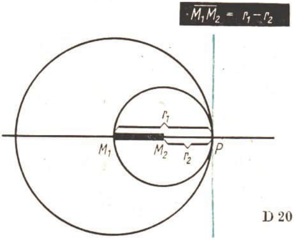
b) Die Konstruktion der inneren Tangenten: Wir zeichnen einen Kreis mit $r_1 + r_2$ um M_1 und legen von M_2 die Tangenten an diesen Kreis. Die Berührungspunkte seien P_1 und P_2.
Die gemeinsamen Tangenten erhalten wir dann als Parallelen zu P_1M_2 und P_2M_2 im Abstand r_2 nach der Seite von M_1 hin. Die Berührungspunkte er-



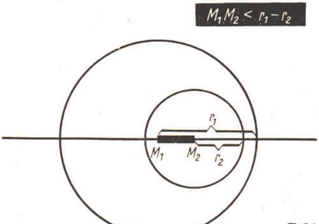
D 18



D 19



D 20



D 21

hält man als Schnittpunkte der Kreise mit den Senkrechten auf P_1M_2 und P_2M_2 in M_2 und P_1 bzw. P_2.

Zweiter Fall:

Die Länge der Zentralstrecke ist gleich der Summe der Radien. Die Kreise berühren einander in einem Punkt P von außen (Bild D 18).
Es gibt nur eine innere Tangente, die Senkrechte auf M_1M_2 in P.
Die Konstruktion der äußeren Tangenten erfolgt wie im ersten Fall.

Dritter Fall:

Die Zentralstrecke ist kleiner als die Summe der Radien, aber größer als der kleinere Radius.
Es gibt keine innere Tangente.
Die äußeren Tangenten konstruiert man wie im ersten Fall (Bild D 19).

Vierter Fall:

Es gilt $r_1 > r_2$, und die Länge der Zentralstrecke ist $r_1 - r_2$.
Die Kreise berühren einander von innen. Der Berührungspunkt ist P. Es gibt nur eine äußere Tangente, die Senkrechte auf M_1M_2 im Berührungspunkt P (Bild D 20).

Fünfter Fall:

Die Länge der Zentralstrecke ist kleiner als $r_1 - r_2$, aber ungleich 0. Es gibt keine gemeinsamen Tangenten. Eine solche Lage zweier Kreise nennt man **exzentrisch** (Bild D 21), wogegen zwei Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt **konzentrisch** liegen.

8 **SATZ: Der Peripheriewinkel über einer Sehne, dessen Scheitel mit M auf der gleichen Seite der Sehne liegt, ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.**

Beweis:

Die Sehne nennen wir $\overline{AB}$, den Mittelpunkt des Kreises M und den Punkt auf dem Kreis P. Der Punkt P ist der Scheitelpunkt des Peripheriewinkels.

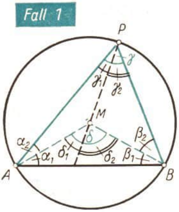
Wir müssen drei Fälle unterscheiden:

Erster Fall: M liegt innerhalb des Dreiecks ABP (Bild D 22)

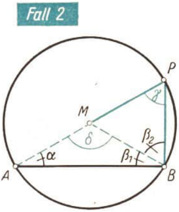
Zweiter Fall: M liegt auf einer Seite des Dreiecks ABP (Bild D 23)

Dritter Fall: M liegt außerhalb des Dreiecks ABP (Bild D 24).

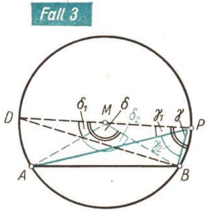
Für jeden Fall muß der Satz bewiesen werden.



D 22



D 23



D 24

Erster Fall:

Es gilt: $\alpha_2 = \gamma_1$ und $\beta_2 = \gamma_2$ (Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken).

Ferner gilt:

$\delta_1 = \alpha_2 + \gamma_1$ und $\delta_2 = \beta_2 + \gamma_2$ (Satz über die Außenwinkel).

Ersetzt du in den beiden Gleichungen α_2 durch γ_1 und β_2 durch γ_2, so erhältst du die Gleichung:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2 \cdot \gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2 = 2\,(\gamma_1 + \gamma_2) = 2 \cdot \gamma, \text{ also}$$
$$\delta = 2 \cdot \gamma.$$

Zweiter Fall:

Eigentlich müssen innerhalb dieses Falles noch zwei Unterfälle unterschieden werden. Der Mittelpunkt M kann auf $\overline{AP}$, aber auch auf $\overline{BP}$ liegen. In beiden Fällen verläuft der Beweis ähnlich. Wir wollen ihn also nur für einen Fall durchführen und nehmen an, M liege auf $\overline{AP}$.

Es gilt $\gamma = \beta_2$ (Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)
und $\delta = \beta_2 + \gamma$ (Satz über die Außenwinkel).

Ersetzt du in der letzten Gleichung β_2 durch γ, so erhältst du $\delta = \gamma + \gamma = 2 \cdot \gamma$.

Dritter Fall:

Wir nehmen an, der Mittelpunkt M liegt links von $\overline{AP}$. (Läge M rechts von $\overline{BP}$, verliefe der Beweis ähnlich.)
Wir verbinden M mit P und verlängern $\overline{MP}$ um sich selbst über M hinaus. Der Endpunkt D der verlängerten Strecke liegt dann auf dem Kreis.
Die Strecke $\overline{DB}$ ist eine Sehne, die den Mittelpunkt M nicht enthält. M liegt aber auf $\overline{DP}$. Fassen wir $\overline{DB}$ als Sehne auf, so erhalten wir nach „Fall 2" die Gleichung $\delta = 2 \cdot \gamma$. Der gleiche Fall liegt vor, wenn wir $\overline{DA}$ als Sehne auffassen.

Es gilt daher auch

$$\delta_1 = 2 \cdot \gamma_1.$$

Daraus folgt aber

$$\delta_2 = \delta - \delta_1 = 2 \cdot \gamma - 2 \cdot \gamma_1 = 2\,(\gamma - \gamma_1)$$
$$\delta_2 = 2 \cdot \gamma_2.$$

Damit haben wir den Peripheriewinkelsatz bewiesen.

Aus dem Satz D 8 folgt:

9 **Die Peripheriewinkel über derselben Sehne eines Kreises (deren Scheitel mit M auf der gleichen Seite der Sehne liegen) sind untereinander kongruent.**

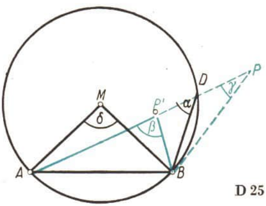
10 Es gilt auch die Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes.

10 **SATZ: Ist $\overline{AB}$ Sehne, die den Mittelpunkt M nicht enthält,
und gilt für einen Punkt P, der auf derselben Seite von AB wie M liegt, die Gleichung $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$,
so liegt P auf dem Kreis.**

Beweis:

Wir nehmen an, es gäbe ein Dreieck über $\overline{AB}$, in dem der dritte Punkt nicht auf dem Kreis liegt. Wir nehmen weiter an, daß in diesem Dreieck dennoch der Winkel, der der Seite $\overline{AB}$ gegenüber liegt, halb so groß wie der Zentriwinkel über $\overline{AB}$ ist. Weil sich der Schnittpunkt P der Geraden AP und BP auf derselben Seite von AB wie M befinden soll, können nicht beide Geraden Tangenten sein. Mindestens eine der beiden Geraden ist eine Sekante.

Wir nehmen an, daß AP den Kreis noch im Punkte D schneidet (Bild D 25).



D 25

Es gibt nun zwei Fälle:

Erster Fall: Der Punkt P liegt außerhalb des Kreises.

Zweiter Fall: Der Punkt P' liegt innerhalb des Kreises.

Es gilt:

$\gamma < \alpha$ bzw. $\alpha < \beta$ (nach dem Satz über die Außenwinkel). Da α gleich $\frac{\delta}{2}$ ist, kann weder β noch γ gleich $\frac{\delta}{2}$ sein. Das ist ein Widerspruch in unserer Annahme, die also falsch ist.

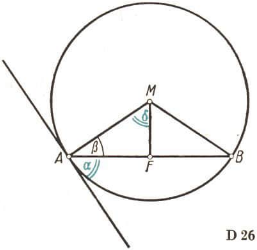
Es gibt kein Dreieck APB mit $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$, so daß M und P auf der gleichen Seite von AB liegen und P nicht Punkt der Kreislinie ist.

11 Die Sätze über den Sehnentangentenwinkel

11 **SATZ: Der Zentriwinkel einer Sehne, die den Mittelpunkt nicht enthält, ist doppelt so groß wie der zugehörige Sehnentangentenwinkel.**

Beweis:

Wir fällen vom Mittelpunkt M des Kreises das Lot auf $\overline{AB}$ und nennen den Fußpunkt F (Bild D 26).



D 26

Dann ist der Winkel $AMF = \delta$ halb so groß wie der Winkel AMB, da im gleichschenkligen Dreieck die Höhe auf der Basis mit der Winkelhalbierenden des Winkels an der Spitze zusammenfällt. Nun gilt $\alpha + \beta = 90°$ (der Berührungsradius steht senkrecht auf der Tangente) und $\beta + \delta = 90°$.

Wenn aber α und δ den Winkel β zu einem rechten Winkel ergänzen, müssen sie kongruent sein.

Es gilt also

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$

Da der Peripheriewinkel über einer Sehne halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel, gilt der folgende Satz:

12 **SATZ: Jeder Peripheriewinkel ist kongruent zu dem zugehörigen Sehnentangentenwinkel.**

Aufgaben D 1 bis 30

Dreieckstransversalen, Satz von Pascal

12 Schnittpunktsätze des Dreiecks (Wiederholung)

13 **SATZ: Die Seitenhalbierenden (Schwerelinien) eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt S. Dieser Punkt ist zugleich Schwerpunkt des Dreiecks.**

14 **SATZ: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. Dieser Punkt ist Mittelpunkt des Umkreises (d.h. des Kreises, der durch die Eckpunkte geht).**

15 **SATZ: Die Höhen eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen schneiden einander in einem Punkt.**

16 **SATZ: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. Dieser ist Mittelpunkt des Inkreises, d.h. des Kreises, der alle Seiten des Dreiecks berührt.**

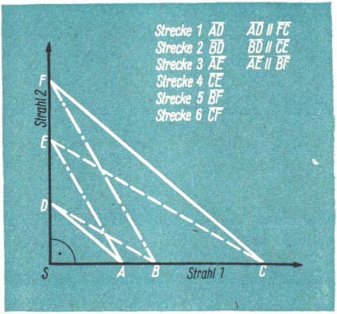
13 Satz des Pascal

D

Als Anwendung des Satzes D 15 wollen wir nun einen Satz von Pascal über parallele Strecken beweisen.

17 **SATZ: Hat von sechs Strecken jede mit zwei anderen einen Endpunkt gemeinsam und liegen je drei ihrer Endpunkte auf einem von zwei Strahlen, die einen rechten Winkel einschließen,**
so folgt aus der Parallelität zweier dieser Streckenpaare die Parallelität des dritten Streckenpaares (Bild D 27).

Beweis: (Hierzu soll das mehrfarbige Bild auf dem hinteren Buchdeckel verglichen werden.)



D 27

Die 6 Strecken sind $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$. Jeder Endpunkt gehört zu zwei Strecken. Wir setzen voraus, daß $\overline{AD} \parallel \overline{CF}$ und $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ ist. Das übrigbleibende Paar von Strecken ist also $\overline{AE}$, $\overline{BF}$. Wir müssen nun zeigen, daß diese beiden Strecken auch parallel sind.

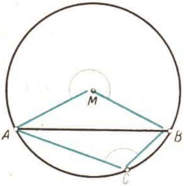
Den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABD nennen wir P,
den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ACE nennen wir P' und
den Höhenschnittpunkt des Dreiecks BCF nennen wir P''.

Wir wollen überlegen, wo diese Punkte P, P', P'' liegen.

Als erstes sehen wir, daß die Gerade FD, auf der der eine der beiden Strahlen liegt, Bestimmungslinie für alle drei Punkte ist. Eine weitere Bestimmungslinie für P ist das Lot von A auf $\overline{DB}$ bzw. auf seine Verlängerung. Sie fällt aber mit dem Lot von A auf $\overline{EC}$ zusammen, also fallen die Punkte P und P' zusammen. P' liegt aber auch auf dem Lot von B auf $\overline{DA}$ bzw. auf seiner Verlängerung. Dieses fällt wieder mit dem Lot von B auf $\overline{FC}$ zusammen, das Bestimmungslinie für P'' ist. Die Punkte P, P' und P'' sind also der gleiche Punkt, den wir nun einfach P nennen wollen.
Da P Höhenschnittpunkt in den Dreiecken ACE und BCF ist, liegen die Höhen in beiden Dreiecken auf $\overline{CP}$. Es gilt daher $\overline{CP} \perp \overline{BF}$ und $\overline{CP} \perp \overline{AE}$. Dann muß aber $\overline{BF}$ parallel zu $\overline{AE}$ sein, wie wir ja zu beweisen hatten.

14 Erweiterung des Satzes über die Peripheriewinkel (vgl. Satz D 8)

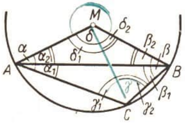
Liegen C und M nicht auf der gleichen Seite von AB, so versteht man unter dem zu $\sphericalangle ACB$ gehörenden Peripheriewinkel den Zentriwinkel, der C nicht im Innern enthält (Bild D 28). Solche überstumpfen Winkel kann man sich durch Drehen des Strahls $\overrightarrow{MB}$ in den Strahl $\overrightarrow{MA}$ entstanden denken. Dabei wird stets in der zum Uhrzeiger entgegengesetzten Richtung gedreht. Durch solche Drehungen erhält man auch Winkel, deren Maße größer oder gleich 180° sind. Auch für diese Winkelpaare gilt der Satz D 8.



D 28

18 **SATZ: Der Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.**

Beweis (Bild D 29):



D 29

Ist $\sphericalangle ACB$ ein rechter Winkel, so muß der Zentriwinkel ein gestreckter Winkel sein. (Umkehrung des Satzes von Thales: Die Scheitelpunkte der rechten Winkel aller rechtwinkligen Dreiecke liegen auf dem Thaleskreis.)
Wir wollen annehmen, daß M nicht auf $\overline{AB}$ liegt.

Es gilt dann (Bild D 29):

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \gamma_1 \\ \beta = \gamma_2\end{array}\right\} \text{ Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 180^\circ \text{ (Winkelsumme im Dreieck)}$$

Also gilt:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha + \beta = 180°.$$

Wir formen die linke Seite um und erhalten:

$$2(\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_2 + \beta_2 = 180°.$$

Es gilt also:

$$2(\alpha_1 + \beta_1) = 180° - (\alpha_2 + \beta_2) = \delta.$$

Es gilt andererseits:

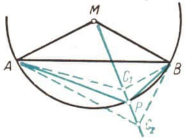
$$\begin{aligned} \sphericalangle BMA &= 360° - \delta = 2\left(180° - \frac{\delta}{2}\right) \\ &= 2[180° - (\alpha_1 + \beta_1)] \\ \sphericalangle BMA &= 2 \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Leite den Satz des THALES aus dem allgemeinen Satz über die Peripheriewinkel her!

15 Wir wollen nun zeigen, daß der Satz über die Peripherie- und Zentriwinkel einer Sehne auch dann umkehrbar ist, wenn der Zentriwinkel ein überstumpfer Winkel ist.

19 **SATZ: Ist $\overline{AB}$ eine Sehne im Kreis, die den Mittelpunkt M nicht enthält, und liegen C und M auf entgegengesetzten Seiten von $\overline{AB}$ und ist schließlich $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle BMA$, so liegt C auf dem Kreis.**

Beweis (Bild D 30):



D 30

Wir nehmen an, C würde nicht auf dem Kreis liegen.
Wir verbinden nun C mit M und tragen auf dieser Verbindungsstrecke von M aus den Radius ab. Der Endpunkt der so abgetragenen Strecke sei P; P liegt dann sicher auf dem Kreis.

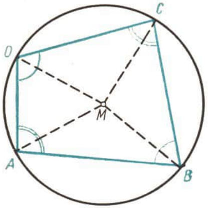
Es gilt: $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \sphericalangle BMA$.

Liegt nun C innerhalb des Kreises (C_1 in Bild D 30), so kannst du leicht zeigen, daß der Winkel AC_1B größer als der Winkel APB ist.
Liegt C außerhalb des Kreises (C_2 im Bild D 30), so kannst du auf ähnliche Weise zeigen, daß $\sphericalangle AC_2B$ kleiner als $\sphericalangle APB$ ist.
In keinem Falle ist der Winkel ACB halb so groß wie der Winkel BMA. Unsere Annahme war also falsch. Der Punkt C muß auf dem Kreisbogen liegen.

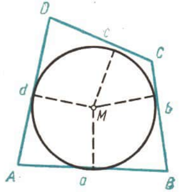
Liegen die vier Eckpunkte eines (konvexen) Vierecks auf einem Kreis, so nennt man es ein **Sehnenviereck**.

4 a) Zeige unter Benutzung des Satzes über die Peripherie- und Zentriwinkel, daß sich die einander gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck zu 180° ergänzen (Bild D 31).

b) Formuliere die Umkehrung dieses Satzes und beweise sie! (Vergleiche dazu den Beweis für die Umkehrung des Satzes von THALES!)



D 31



D 32

Ein Viereck, in das sich ein Kreis einbeschreiben läßt, heißt **Tangentenviereck** (Bild D 32).

5 Zeige, daß die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich sind ($a + c = b + d$)!

Aufgaben D 31 bis 59

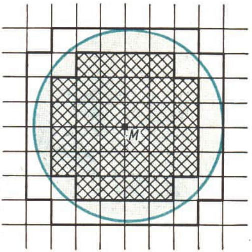
D

Kreisberechnung

6 Wie berechnet man den Flächeninhalt **a)** eines Parallelogramms, **b)** eines Dreiecks, **c)** eines beliebigen Vielecks? Teile einen vorgegebenen Kreis in 6; 8; 12; 16 Bögen, deren zugehörige Zentriwinkel jeweils untereinander gleich sind! Begründe das Konstruktionsverfahren!

7 Zeichne Kreise mit den Radien 1,0 cm; 2,0 cm; 3,0 cm; 4,0 cm auf Millimeterpapier! Ermittle durch Auszählen der Kästchen mit der Länge und Breite 0,5 cm, zwischen welchen Zahlen die Maßzahl des Flächeninhalts liegen muß (Bild D 33)!

Im Bild D 33 ist A_i die kreuzweise schraffierte Fläche und A die Kreisfläche. Die Fläche A_a, die den Kreis umschließt, wurde nur durch die starke Umrandung gekennzeichnet.



$A_i < A < A_a$

D 33

(8) Schätze ab, wie groß die Kreisflächen selbst sind, und stelle folgende Tabelle auf!

r^2 (in cm^2)	1^2	2^2	3^2	4^2
$A_{\text{Kreisfläche}}$				
$A_{\text{Kreisfläche}} : r^2$				

Welche Beziehung kannst du aus der Tabelle ersehen?

(9) Zeichne einen Kreis von 1,0 cm Radius und zähle aus,

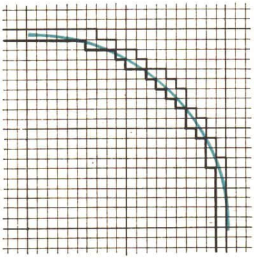
a) wieviel Quadrate von 1,0 cm Kantenlänge,
b) wieviel Quadrate von 5 mm Kantenlänge,
c) wieviel Quadrate von 1 mm Kantenlänge

ganz im Kreis liegen (A_i) und wieviel zum Überdecken nötig sind (A_a)! Gib A_i und A_a in Quadratzentimetern an!

16 Der Flächeninhalt einer Kreisfläche

D

Es gilt stets $A_{\text{Kreisfläche}} \sim r^2$.



D 34

Aus der Übung 9 geht hervor: Je kleiner du die Quadrate wählst, desto erschöpfender kannst du die Kreisfläche von innen her auslegen und um so weniger stehen die Quadrate beim Überdecken über. Das Bild D 33 zeigt das Auslegen und Überdecken einer Kreisfläche mit 2,0 cm Radius bei Verwendung von Quadraten mit der Kantenlänge 5 mm. Das Bild D 34 zeigt das Auslegen und Überdecken eines Teils dieses Kreises bei Verwendung von Quadraten mit der Kantenlänge 1 mm (Vergrößerung: zweifach).

Der schmale Rand, der den Unterschied zwischen der inneren Auslegung und der geringsten Überdeckung darstellt, wird also um so kleiner, je kleiner die Quadrate gewählt werden. Man kann auf diese Weise den Proportionalitätsfaktor π, der mit r^2 multipliziert den Flächeninhalt der Kreisfläche ergibt, mit beliebiger Genauigkeit bestimmen.[1]

Dabei braucht man nur noch A_i oder A_a durch r^2 zu dividieren, denn A_i und A_a unterscheiden sich bei sehr feiner Auslegung nur sehr wenig voneinander.

Es gilt dann $\dfrac{A_i}{r^2} < \pi < \dfrac{A_a}{r^2}$,

und wegen $A_i \approx A_a$ ist $\pi \approx \dfrac{A_i}{r^2}$.

[1] π ist ein Buchstabe aus dem griechischen Alphabet. Er wird „pi" gesprochen.

Aus der Proportionalität $\qquad A \sim r^2$

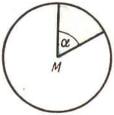
erhält man dann die Gleichung: $\qquad A = \pi \cdot r^2.$

17 Die Zahl π läßt sich nicht als Bruch darstellen. Sie ist näherungsweise 3,14 oder rund $\frac{22}{7}$. Genauere Berechnungen ergeben:

$$\pi \approx 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,4\ldots$$

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes (Bild D 35) verhält sich zum Flächeninhalt der Kreisfläche wie der Winkel α zu 360°:

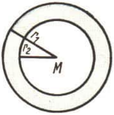
$$A_{\text{Ausschnitt}} : A_{\text{Kreisfläche}} = \alpha : 360.$$



D 35

(10) Stelle aus dieser Proportion die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreisausschnitts auf!

Den Flächeninhalt eines Kreisringes (Bild D 36) kann man durch die Bildung der Differenz zweier Kreisflächen bestimmen.



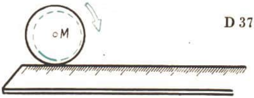
D 36

(11) Stelle die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreisringes auf, wenn mit r_1 der äußere und mit r_2 der innere Radius bezeichnet wird!

18 Der Umfang eines Kreises

(12) Schneide aus Pappe Kreise mit den Radien 1,0 cm; 2,0 cm; 3,0 cm; 4,0 cm; 5,0 cm; 6,0 cm!

Bestimme die Länge der **Peripherie** (den Kreisumfang), indem du die Kreise auf einem Lineal abrollen läßt (Bild D 37)! Stelle folgende Tabelle auf!



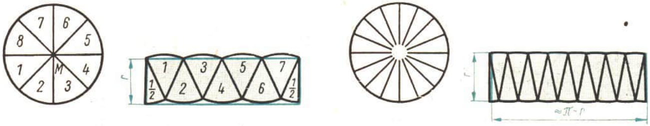
D 37

r (in cm)	1	2	3	4	5	6
Umfang u (in cm)						
$u:2r$						

Welche Proportion ergibt sich? Wie groß ist etwa der Proportionalitätsfaktor?

19 Wir schneiden einen Kreis in acht gleiche Kreisausschnitte und fügen die Teile wie im Bild D 38 aneinander.

D 38



Zerschneiden wir die Kreisausschnitte in immer kleinere Ausschnitte, so erhalten wir eine Figur, die mehr und mehr einem Parallelogramm ähnelt.
Setzen wir das Verfahren lange genug fort, so erhalten wir schließlich so etwas Ähnliches wie ein Rechteck, dessen Flächeninhalt aber gleich dem der Kreisfläche sein muß. Seine Höhe wäre gleich r, seine Breite gleich der Hälfte vom Kreisumfang u.

Dann gilt: $\frac{u}{2} \cdot r = A_{\text{Kreisfläche}}$, also $\frac{u}{2} r = \pi r^2$.

Daraus erhalten wir durch Umformen

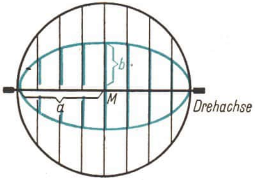
$$u = \frac{2\pi r^2}{r}, \quad \text{also}$$
$$\boldsymbol{u = 2\pi r.}$$

Aufgaben D 60 bis 102

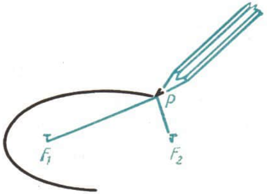
Die Ellipse

20 Drehen wir eine Kreisscheibe um einen Durchmesser, so erscheinen uns alle Sehnen, die zu diesem Durchmesser senkrecht liegen, verkürzt. Ist a der Radius des Kreises, b ein zur Mitte der Drehachse senkrechter, verkürzter Durchmesser, so ist das Verkürzungsverhältnis $b : a$ (Bild D 39).
Die aus dem Kreis entstandene Kurve heißt **Ellipse**, b ihre **kleine Halbachse** und a ihre **große Halbachse**.

Gärtner pflegen beim Anlegen von Blumenbeeten, die die Form einer Ellipse erhalten sollen, die folgende Konstruktion anzuwenden:



D 39



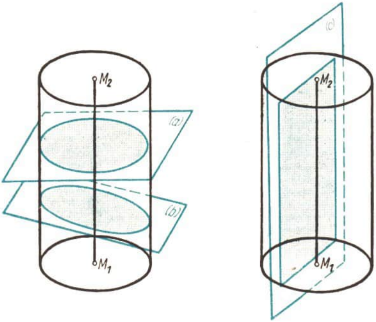
D 40

Gärtnerkonstruktion:

Man wählt zwei feste Punkte, die sogenannten **Brennpunkte** F_1 und F_2, und befestigt in ihnen eine Schnur, die länger als $\overline{F_1 F_2}$ sein muß. Dann zieht man bei gestraffter Schnur die Kurve aus (Bild D 40).
Die Summe der Abstände der einzelnen Punkte der Kurve von F_1 und F_2 bleibt dabei konstant, d.h. stets gleich groß. Die Summe der Abstände ist nämlich stets gleich der Länge des Fadens.

20 **DEFINITION: Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist.**

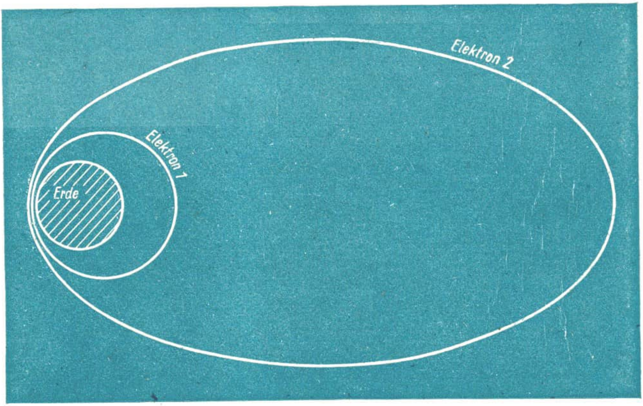
Die Summe der Abstände, also die Länge des Fadens bei der Gärtnerkonstruktion, ist stets $2a$. Vergleiche mit Bild D 40: $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a$.



D 41

(13) **Zeichne nach der Gärtnerkonstruktion eine Ellipse, bei der die Brennpunkte F_1 und F_2 einen Abstand von 6,0 cm haben und $2a = 10,0$ cm beträgt!**

Bild D 42: Die Bahnen der künstlichen Satelliten sind im allgemeinen Ellipsen. Unser Bild stellt die Bahnen der beiden sowjetischen Forschungssatelliten „Elektron 1“ und „Elektron 2“ um die Erde dar.



21 Wenn wir durch einen geraden Kreiszylinder ebene Schnitte legen, so können wir je nach der Lage der Schnittebene verschiedene Schnittfiguren erhalten. Im Bild D 41 ergibt der Schnitt (a), der parallel zur Grundfläche erfolgte, einen Kreis. Der Schnitt (b), der geneigt zur Ebene der Grundfläche liegt, ergibt eine Ellipse.

14 Was für eine Schnittfigur ergibt der Schnitt (c) in Bild D 41, der senkrecht zur Grundfläche erfolgte? Fertige Dir aus Knetmasse einen geraden Kreiszylinder an und führe die verschiedenen Schnitte aus!

Der Schatten eines kreisförmigen Schildes, das von der Sonne beschienen wird, hat häufig die Gestalt einer Ellipse. Man sagt: Die Sonnenstrahlen „projizieren" den Kreis auf eine Ebene, sie „entwerfen" ein Bild.

15 Fertige dir aus Pappe eine Kreisscheibe an! Halte die Scheibe in verschiedenen Stellungen ins Sonnenlicht und beobachte die verschiedenen Schattenrisse, die von der Kreisscheibe entworfen werden!

D Zur Geschichte der Kreislehre

Der Kreis gehört zu den Figuren, um deren Inhalts- und Umfangsberechnung sich die Menschen schon vor sehr langer Zeit bemühten. Der Grund hierfür ist in der Bedeutung kreisförmiger Gegenstände, z. B. der Töpferscheibe und des Wagenrades, zu suchen. Die Verbreitung des Wagenrades, dessen Erfindung naturgemäß in Steppengegenden und nicht in waldreicher Gegend geschehen mußte, begann im Gebiet zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris (dem heutigen Irak) schon um 3500 v. u. Z., in Südrußland um 2000 v. u. Z. und in den waldreichen Gegenden Mittel- und Nordeuropas um 1000 v. u. Z.

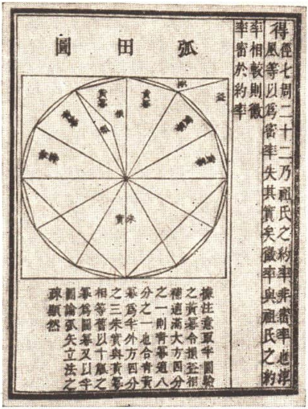
Ursprünglich wurde die Konstruktion des Kreises mit Hilfe eines gespannt gehaltenen Seiles ausgeführt, dessen eines Ende an einem festen Stab befestigt war. Die aus der griechischen Sprache stammenden Wörter „Zentrum" und „Peripherie" bedeuten eigentlich „Stab" bzw. das „Herumgetragene".

Für die alten Völker stellte die Berechnung des Verhältnisses der Maßzahlen von Kreisumfang und Durchmesser, also die Bestimmung der Zahl π, ein sehr schwieriges Problem dar.

Im alten Babylon, einem wichtigen Kulturzentrum des Altertums am Ufer des Euphrat, verwendeten die Mathematiker im zweiten Jahrtausend vor unserer Zeitrechnung für π die grobe Näherung 3. Dagegen rechneten in Ägypten manche Mathematiker schon mit der besseren Annäherung $\pi \approx 3{,}1604938$. Bei der Umfangsbestimmung eines Kreises mit dem Durchmesser 10 cm hätte also der babylonische Rechner als Kreisumfang $3 \cdot 10$ cm $= 30$ cm berechnet, der altägyptische Rechner $3{,}1604938 \cdot 10$ cm $\approx 31{,}6$ cm und wir würden $3{,}1416 \cdot 10$ cm $\approx 31{,}4$ cm ermitteln.

Viele Sätze über den Kreis, z. B. der sogenannte THALESsatz, wurden von babylonischen Mathematikern des 2. und 1. Jahrtausends v. u. Z. nachgewiesen. Aber erst die griechischen Mathematiker brachten die Kreislehre in eine zusammenhängende, streng systematische und auf Festlegungen und Beweisen aufbauende Darstellung. THALES VON MILET (etwa 624 bis etwa 548 v. u. Z.) z. B. soll, wie die Überlieferung berichtet, als erster wirklich bewiesen haben, daß der Durchmesser die Kreisfläche halbiert; aber natürlich war von dieser

Bild D 43: Chinesische Methode der Kreisberechnung durch Einbeschreiben regulärer Polygone. 3. Jahrhundert u. Z.



Eigenschaft genau so wie vom Inhalt des nach THALES benannten Satzes schon viel früher Gebrauch gemacht worden. Später ist die Kreislehre, soweit sie damals bekannt war, durch EUKLEIDES VON ALEXANDRIA (etwa 365–300 v. u. Z.) in seinem berühmten Werk *Elemente* dargestellt worden. Dieses Werk, das aus 13 Bänden besteht, stellt eine Zusammenfassung der griechischen Mathematik dar. EUKLEIDES erklärt den Kreis folgendermaßen: „Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkt bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind."

Diese Definition ist dadurch auffällig, daß die Entstehung des Kreises durch Bewegung um einen Mittelpunkt gar nicht erwähnt wird. Eine solche Definition gab erst der in Alexandria wirkende Ingenieur HERON VON ALEXANDRIA (um 100 u. Z.), der die Bedürfnisse der praktischen Mathematik seiner Zeit berücksichtigen wollte. Dagegen hat die gesamte antike Mathematik niemals einen Fachausdruck für Radius entwickelt. Alle Sätze über den Kreis wurden mit Hilfe des Durchmessers formuliert.

Nach der Definition des Kreises behandelt EUKLEIDES in seinem Werk *Elemente* die Größenverhältnisse mehrerer Kreissehnen in bezug auf ihre Abstände vom Mittelpunkt. Dann folgen der Satz über den rechten Winkel zwischen Tangente und Berührungsradius (Satz D 3) und der Zusammenhang zwischen Peripherie- und Zentriwinkel des gleichen Bogens (Satz D 8).

Aber auch diese Erkenntnisse waren schon lange vor EUKLEIDES bekannt. Weiterhin führt er den Satz vom Sehnentangentenwinkel, die gegenseitige Lage mehrerer Kreise, die Konstruktion der Tangenten von einem Punkte an einen Kreis, ferner noch eine Fülle, im Geometrieunterricht unserer Zeit nicht mehr behandelter spezieller Probleme und Fragestellungen an.

Die Berechnung des Flächeninhaltes und des Umfanges eines Kreises stellten auch in der alten griechischen Mathematik zentrale Probleme dar. Bereits HIPPOKRATES VON CHIOS (um 440 v. u. Z.) beschäftigte sich mit der sogenannten *Quadratur des Kreises*. Darunter verstand man das Problem, zu einem vorgegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat mit

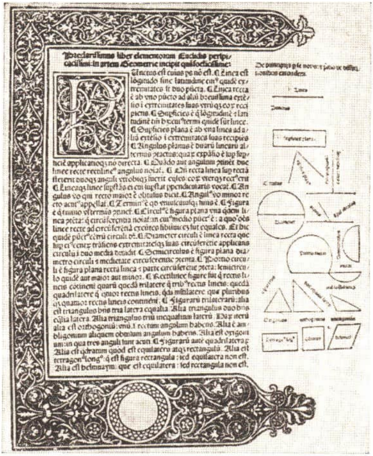


Bild D 44: Seite aus der ersten europäischen Druckausgabe (1482) der „Elemente“ von EUKLEIDES in lateinischer Sprache. Diese Seite enthält die grundlegenden Definitionen der Elementargeometrie, darunter des Kreises.

Hilfe von Zirkel und Lineal zu konstruieren. HIPPOKRATES wie auch viele andere bemühten sich vergeblich um die Lösung dieses Problems. HIPPOKRATES konnte aber beweisen, daß sich Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Dieser Satz ist ebenfalls in dem Buch *Elemente* von EUKLEIDES enthalten. Das Problem der Quadratur des Kreises ist seit der Antike fortgesetzt behandelt worden. Wohl fand man zum Teil recht genaue Näherungskonstruktionen, aber man konnte keine genaue Konstruktion finden und andererseits lange Zeit nicht beweisen, daß die Quadratur des Kreises unmöglich ist. Der erste Beweis für die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises gelang erst 1882 dem deutschen Mathematiker F. LINDEMANN (1852–1939).

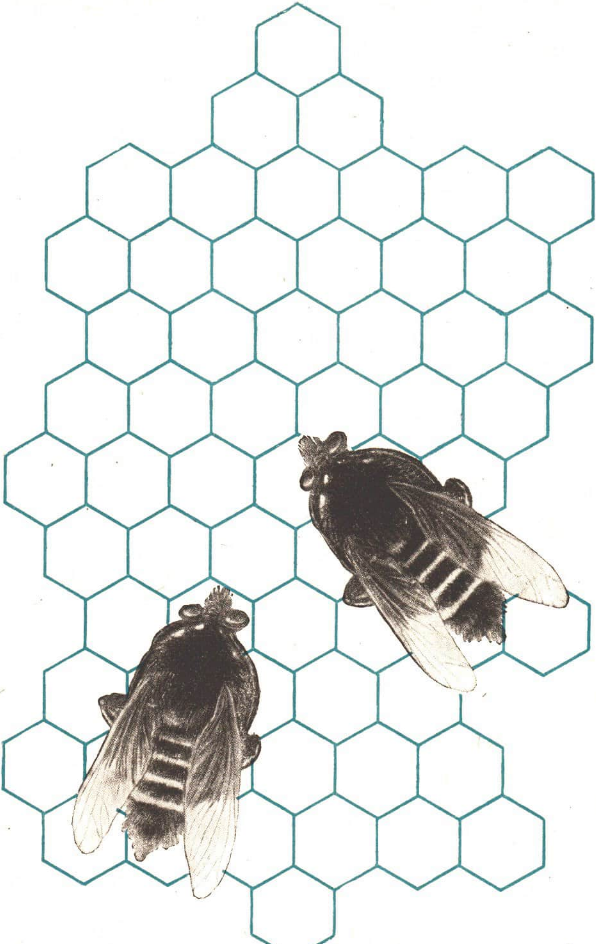
Der von HIPPOKRATES bewiesene Satz, daß sich Kreise wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, ist allerdings nicht geeignet, die Fläche des Kreises wirklich zu berechnen. Dieser Mangel war in den Augen von EUKLEIDES völlig unerheblich. In der damaligen Zeit herrschte in den Kreisen der Sklavenhalter und Aristokratie die Meinung vor, daß jede Anwendung der Mathematik in der Praxis, mit Ausnahme der Anwendung in der Astronomie, eine Entweihung bedeute. Erst durch den bedeutendsten Mathematiker der Antike, ARCHIMEDES VON SYRAKUS (etwa 287–212 v. u. Z.), der dagegen auch an den Problemen der Praxis stark interessiert war, wurde die wirkliche Bestimmung des Flächeninhalts und des Umfangs des Kreises, d. h. die genauere Berechnung der Zahl π, wieder in Angriff genommen. ARCHIMEDES fand, indem er einem Kreis regelmäßige Vielecke umbeschrieb bzw. einbeschrieb, daß der Wert von π zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liegt. (Vgl. mit dem Abschnitt D 16.) Schreibt man diese Werte in Dezimalzahlen, so erhält man die Abschätzung

$$3{,}140845\ldots < \pi < 3{,}142857\ldots$$

Auch in der indischen Mathematik der ersten Jahrhunderte u.Z. ist an der Bestimmung des Zahlenwertes der Zahl π energisch gearbeitet worden. ÂRYABHATA (geb. 476 u.Z.) fand den ganz ausgezeichneten Wert $\pi \approx 3{,}1416$.
Große Teile der indischen Mathematik, darunter die Ergebnisse über die Kreisberechnung, sind zusammen mit den Ergebnissen der griechischen Mathematik in die von den arabisch schreibenden Gelehrten entwickelte hochstehende Mathematik der islamischen Länder eingegangen. In Bagdad gab es um 800 u.Z. unter der Herrschaft des Kalifen HARUN AR-RASCHID, der uns auch durch die wunderbaren *Märchen aus 1001 Nacht* bekannt ist, ein großes Übersetzungsbüro, in dem unter anderem auch die Elemente von EUKLEIDES und ein Teil der Werke von ARCHIMEDES übersetzt worden sind.
In dieser Zeit war in Europa das Niveau der Wissenschaften, darunter auch der Mathematik, sehr niedrig; zum Teil lag es an der wissenschaftsfeindlichen Haltung der christlichen Kirche, zum Teil an dem niedrigen Stand der Produktion im Feudalismus. Erst im 14. und 15. Jh. entwickelten sich in Europa Handel und Produktion wesentlich vorwärts und damit stieg auch das Interesse an den Wissenschaften. Über Sizilien und Spanien, die geographischen Berührungspunkte mit dem islamischen Weltreich, wurden die europäischen Gelehrten mit der außerordentlich hochentwickelten arabischen Mathematik, z.B. mit den aus Indien stammenden Zahlzeichen, vertraut. Die Leistungen von ARCHIMEDES und EUKLEIDES wurden nun auch in Europa bekannt, und die Kreislehre wurde wieder zum Gegenstand weit ausgedehnter Forschungen. Das besondere Interesse galt der genaueren Berechnung des Wertes von π. Der französische Mathematiker FRANCOIS VIETA (1540–1603) berechnete Ende des 16. Jahrhunderts π auf 9 Dezimalen genau und gab die Grenzen mit

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537$$

an. Etwa um dieselbe Zeit berechnete der in Holland wirkende Mathematiker LUDOLPH VAN CEULEN (1540–1610) π bis auf 32 Stellen und fügte dann noch 3 weitere Stellen hinzu. Daher hieß die Zahl π in älteren mathematischen Schriften auch die LUDOLPHsche Zahl. Die Verwendung des Symbols π geht auf den genialen Schweizer Mathematiker L. EULER (1707–1783) zurück. Während VIETA, VAN CEULEN und viele andere bei der Berechnung von π an die Methode von ARCHIMEDES anknüpften, d.h. durch Vergleich der Längen ein- und umbeschriebener regelmäßiger Vielecke mühsam Dezimale um Dezimale berechnen mußten, beruhen die modernen Verfahren zur Bestimmung von π auf Methoden der höheren Mathematik und insbesondere auf der Verwendung unendlicher Reihen und werden heutzutage mit Rechenautomaten ausgeführt. Heute kann π mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden, z.B. war π 1946 bis auf 808 Stellen bekannt.



STEREOMETRIE

E

Prismen	Seite 120
Volumen	121
Oberflächeninhalt	124
Zylinder	125
Volumen	126
Oberflächeninhalt	127

Prismen

(1) Nenne mehrere geometrische Körper!
Berechne das Volumen eines Quaders mit den Seitenlängen 6,0 cm, 7,0 cm und 8,0 cm!
Erkläre, was man unter dem Neigungswinkel zweier Ebenen versteht!

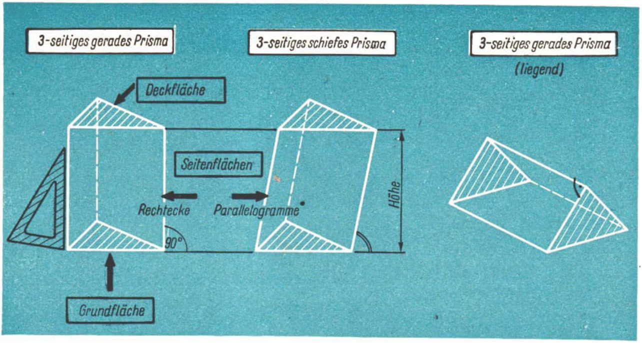
1 Die gemeinsame Bezeichnung **Prismen** führen alle Körper, deren Grund- und Deckfläche kongruente, parallel liegende Vieleckflächen und deren Seitenflächen Parallelogramme sind.
Quader und **Würfel** sind zwei spezielle Prismen.
Beim Quader werden die Grund- und Deckfläche von zwei Rechtecken gebildet; auch die Seitenflächen sind Rechtecke.
Beim Würfel werden die Grund- und Deckfläche von zwei Quadraten gebildet; auch die Seitenflächen sind Quadrate.


E 1

2 Die verschiedenartigsten Prismen begegnen uns in der Technik, z. B. als kantige Säulen, Keile, Balken, Profilstähle, Dämme (Bild E 1). Sind die Grundflächen drei-, vier-, fünf-, . . ., n-Eckflächen, dann spricht man von drei-, vier-, fünf-, . . ., n-seitigen Prismen. Die Prismen brauchen dabei keineswegs immer auf der Grundfläche zu stehen. Sie können auch auf einer Seitenfläche liegen; denn die Gestalt eines Körpers hängt nicht von seiner Lage im Raum ab (Bild E 2).

▶1 **DEFINITION: Ein Prisma ist ein Körper, der von zwei in parallelen Ebenen liegenden kongruenten Vieleckflächen (Grund- bzw. Deckfläche) und von Parallelogrammflächen (Seitenflächen) begrenzt wird.**

Der Abstand der Grund- von der Deckfläche wird als Höhe des Prismas bezeichnet. Bei **geraden Prismen** ist die Höhe gleich der Länge der Seitenkante, bei schiefen Prismen ist sie kleiner als die Seitenkante. Gerade Prismen haben Rechtecke als Seitenflächen. Wir werden uns in dieser Klasse nur mit geraden Prismen beschäftigen.



E 2

3 Volumenberechnung gerader Prismen

Das Volumen eines Quaders berechnet man nach der Formel $V = a \cdot b \cdot c$. In dieser Formel sind a, b und c die Kantenlängen des Quaders. Das Volumen eines Würfels berechnet man nach der Formel $V = a^3$.

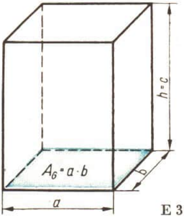
Um zu einer gemeinsamen Volumenformel für alle Prismen zu gelangen, verändern wir diese beiden Formeln. Wir berechnen für beide Körper zunächst den Inhalt der Grundfläche A_G und multiplizieren diese mit der Höhe h des jeweiligen Körpers (Bild E 3).

Quader: $V = (a \cdot b) \cdot c; \quad a \cdot b = A_G$ und $c = h$

$V = A_G \cdot h$

Würfel: $V = a^3 = (a \cdot a) \cdot a; \quad a \cdot a = A_G$ und $a = h$

$V = A_G \cdot h$

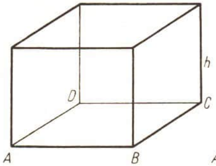


E 3

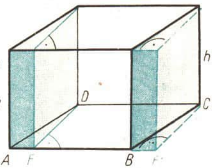
Beide Formeln erhielten auf diese Weise die Form:

$$V = A_G \cdot h.$$

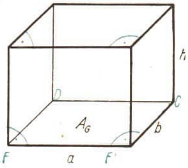
4 Das Volumen eines 4seitigen geraden Prismas, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, soll nun bestimmt werden (Bild E 4).
Hierzu verwandeln wir das Prisma in einen Quader (Bild E 5). Wir fällen von D das Lot auf AB und erhalten den Fußpunkt F. Nun schneiden wir ein dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche AFD durch einen zur Grundfläche senkrechten Schnitt ab und setzen es an die entgegengesetzte Seitenfläche an (Bild E 6). Auf diese Weise erhalten wir einen Quader mit der gleichen Höhe h und der (rechteckigen) Grundfläche $FF'CD$. Sein Volumen muß dann gleich dem Volumen des Ausgangsprismas sein. Die Grundfläche des Quaders hat den gleichen Inhalt wie die des ursprünglichen Prismas.



E 4



E 5



E 6

Ist nun a die Breite, b die Tiefe und h die Höhe dieses Quaders, so ist sein Volumen:

$$V = a \cdot b \cdot h = (a \cdot b) \cdot h.$$

Das Produkt $(a \cdot b)$ ist aber der Flächeninhalt seiner Grundfläche A_G. Es gilt demnach

$$V = A_G \cdot h.$$

Das Volumen eines geraden Prismas, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, berechnet man also als Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche und der Länge der Höhe.

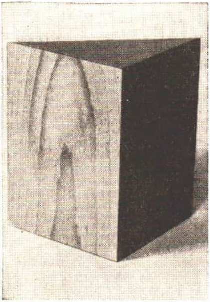
5 Das Volumen eines dreiseitigen Prismas soll bestimmt werden (Bild E 7).
Wir denken uns ein zweites gleich großes Prisma mit kongruenter Grundfläche und kongruenter Höhe mit dem ersten zusammengesetzt (Bild E 8). Auf diese Weise erhalten wir ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist (Bild E 9).

2 Es kann sich im Spezialfall auch ein Quader ergeben. Wie muß in diesem Fall die Grundfläche des dreiseitigen Prismas beschaffen sein?

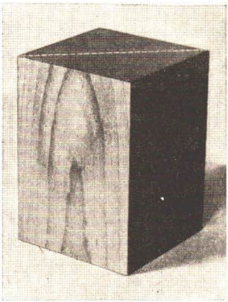
Sein Volumen ist dann: $V = A_G' \cdot h$

$$V = (A_G + A_G) \cdot h = 2\,A_G \cdot h.$$

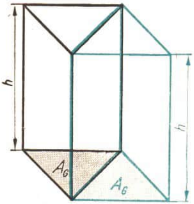
E 7



E 8



E 9

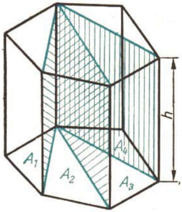


Das Volumen des ursprünglichen Prismas ist natürlich gerade halb so groß. Es gilt also wieder

$$V = A_G \cdot h.$$

Das Volumen eines dreiseitigen geraden Prismas berechnet man auch als Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche und der Länge der Höhe.

6 Wir betrachten nun beliebige gerade Prismen.
Ein beliebiges gerades Prisma können wir durch geeignete Schnitte in dreiseitige Prismen zerlegen. Das sechsseitige Prisma in Bild E 10 können wir zum Beispiel in vier dreiseitige Prismen mit den Grundflächen A_1, A_2, A_3 und A_4 zerlegen. Die Grundfläche A_G des sechsseitigen Prismas entspricht also der Summe



E 10

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Wir berechnen nun die Volumina V_1, V_2, V_3 sowie V_4 der Teilprismen und addieren sie.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$
$$V = A_1 h + A_2 h + A_3 h + A_4 h$$

Wir müßten also für jedes dreiseitige Prisma das Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche und der Höhe berechnen. Zum gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir zuerst die gesamte Grundfläche A_G durch Bildung der Summe

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

bestimmen und dann diese mit h multiplizieren. Wir sind dazu wegen des Distributionsgesetzes

$$ab + ac = a(b + c)$$

berechtigt.

Entsprechend schreiben wir also:

$$V = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)\, h$$
$$V = A_G \cdot h.$$

Wir haben damit eine Formel zur Berechnung des Volumens von jedem beliebigen geraden Prisma gefunden, denn jedes gerade Prisma läßt sich in dreiseitige gerade Prismen zerlegen.

1 **SATZ: Das Volumen eines geraden Prismas ist das Produkt aus Grundfläche und Höhe:**

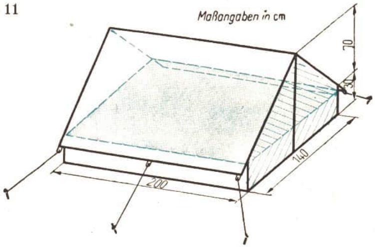
$$V_{\text{Prisma}} = A_G \cdot h.$$

1 Ein Zelt habe die in Bild E 11 angegebenen Maße. Berechne den Luftraum, den es umschließt!

E

Wir denken uns das Zelt in zwei Körper zerlegt, in einen Quader und in ein dreiseitiges liegendes Prisma.

E 11



Quader: $V_1 = a \cdot b \cdot c; \quad a = 140\ \text{cm}; \quad b = 30\ \text{cm}; \quad c = 200\ \text{cm}$

$V_1 = 140 \cdot 30 \cdot 200\ \text{cm}^3$

$V_1 = 840\,000\ \text{cm}^3 = 840\ \text{dm}^3$

Prisma: $V_2 = A_G \cdot h; \quad A_G = \frac{1}{2} \cdot 140 \cdot 70\ \text{cm}^2 = 4\,900\ \text{cm}^2; \quad h = 200\ \text{cm}$

$V_2 = 4\,900 \cdot 200\ \text{cm}^3$

$V_2 = 980\,000\ \text{cm}^3 = 980\ \text{dm}^3$

Gesamtvolumen: $V = V_1 + V_2$

$= 840\ \text{dm}^3 + 980\ \text{dm}^3$

$V = 1\,820\ \text{dm}^3 = 1{,}82\ \text{m}^3$

E

3 Zeige, daß die Formel zur Berechnung des Volumens eines Prismas auch für den Quader gilt!
Zeige, daß das Volumen eines Quaders nicht davon abhängig ist, welche Seite des Quaders wir als Grundfläche annehmen!

4 Erkläre, wieso man jedes n-seitige Prisma ($n \geqq 3$) in 3seitige Prismen zerlegen kann!

7 Oberflächeninhalt gerader Prismen

Die Oberfläche eines Prismas setzt sich aus der Grund- und Deckfläche und aus den Seitenflächen zusammen. Die Oberfläche des in Bild E 10 dargestellten sechsseitigen geraden Prismas besteht zum Beispiel aus zwei Sechsecken und aus sechs Rechtecken. Wir berechnen also zunächst den Inhalt der Grundfläche A_G. Da die Deckfläche und die Grundfläche kongruent sind, brauchen wir nur A_G zu verdoppeln. Nun werden noch die sechs Recktecke berechnet, die die Seitenflächen bilden. Wir erhalten dann als Oberfläche A_O dieses Prismas

$$A_O = 2 \cdot A_G + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

5 Wie lautet die Formel für den Oberflächeninhalt eines 3seitigen, 5seitigen, 8seitigen Prismas?

(6) Die Formel für den Inhalt der Oberfläche eines Quaders ist

$$A_O = 2 \cdot ab + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c.$$

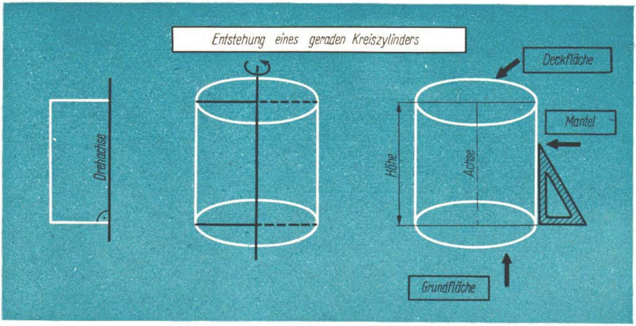
Leite diese Formel als Spezialfall der Formel für den Oberflächeninhalt gerader Prismen her!

Aufgaben E 1 bis 23

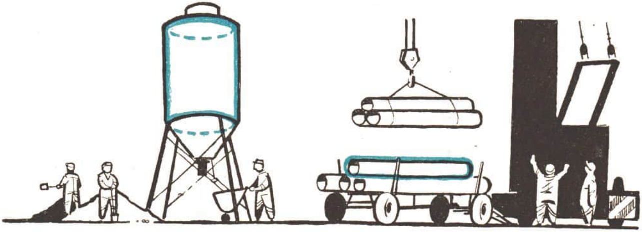
Zylinder

8 Läßt man ein Rechteck um eine seiner Seiten rotieren, so entsteht ein gerader **Kreiszylinder** (Bild E 12). Er wird durch zwei gleichgroße Kreisflächen und von einer gekrümmten Fläche, dem **Mantel,** begrenzt. Die zur Achse parallelen Strecken auf dem Mantel heißen **Mantelstrecken.**

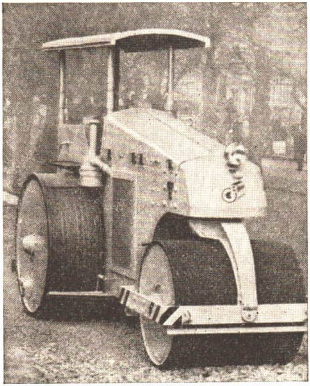
E 12



E 13



E



Achse und Mantelstrecken stehen senkrecht auf der Grund- und Deckfläche (Bild E 13). Zylinderförmige Körper finden wir in der Technik (Bild E 14), zum Beispiel auch als Behälter, Rohre, Scheiben, Draht.

E 14

9 Volumenberechnung gerader Kreiszylinder

Im Bild E 15 wurde einem geraden Kreiszylinder zuerst ein regelmäßiges n-seitiges Prisma (in diesem Fall ein regelmäßiges 8seitiges Prisma) umbeschrieben und dann einbeschrieben.

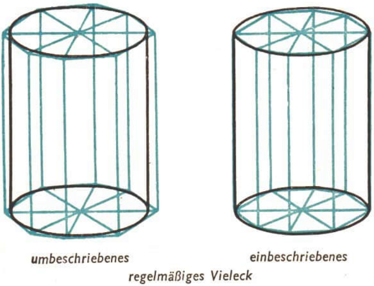
E

Das Volumen V_n' des einbeschriebenen Prismas beträgt:

$$V_n' = A_n' \cdot h.$$

Das Volumen V_n des umbeschriebenen Prismas beträgt:

$$V_n = A_n \cdot h.$$



E 15

Es ist klar, daß außerdem gelten muß:

$$V_n' < V_{\text{Zyl.}} < V_n,$$

also

$$A_n' \cdot h < V < A_n \cdot h.$$

Wenn wir nun durch h, das ja positiv und ungleich Null ist, dividieren, so erhalten wir:

$$A_n' < \frac{V}{h} < A_n.$$

Wenn wir nun Prismen mit sehr vielen Ecken und immer kleineren Seitenflächen einbeschreiben und umschreiben, so wird der Unterschied zwischen A_n' und A_n immer geringer.

Wir erhalten als Grenzwert für die Grundfläche A_G des Zylinders gerade den Inhalt $A_G = \pi r^2$. Das entspricht der Berechnung des Inhalts der Kreisfläche im Abschnitt D 16.

Es gilt also: $\frac{V}{h} = A_G$ und damit $V = A_G \cdot h$.

2 **SATZ: Das Volumen eines geraden Kreiszylinders ist das Produkt aus der Grundfläche und der Höhe.**

$$\mathbf{V_{\text{Zyl.}} = A_G \cdot h = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.}$$

2 Wie groß ist das Volumen eines Rundstabes, dessen Durchmesser 40 mm und dessen Länge 250 mm beträgt?

Gegeben: $d = 40$ mm $= 4{,}0$ cm; $h = 250$ mm $= 25{,}0$ cm. Gesucht: V (in cm³).

$$V = A_G \cdot h = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h$$

Wir berechnen A_G mit Hilfe der Zahlentafel:

$$A_G = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} 4^2 \text{ cm}^2$$
$$A_G = 12{,}566 \text{ cm}^2$$

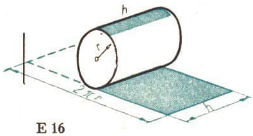
Einsetzen: $V = 12{,}566 \cdot 25$ cm³ (Überschlag: $13 \cdot 25 = 325$)
$V = 314{,}15$ cm³

Antwortsatz: Das Volumen des Rundstabes beträgt rund 314 cm³.

10 Oberflächeninhalt gerader Kreiszylinder

Die Oberfläche eines Zylinders besteht aus der Grund- und Deckfläche sowie aus dem Mantel. Die Grund- und die Deckfläche haben den gleichen Flächeninhalt A_G.

Wenn wir den Mantel wie in Bild E 16 in die Ebene abwickeln, so erhalten wir



E 16

eine rechteckige Fläche. Der Flächeninhalt des Mantels ist offenbar gleich dem Flächeninhalt der abgewickelten rechteckigen Fläche. Eine Seite dieses Rechtecks ist gleich h, die andere gleich dem Umfang der Grundkreisfläche, also gleich $2\pi r$.

Der Mantel A_M hat demnach den Flächeninhalt:

$$A_M = 2\pi r h.$$

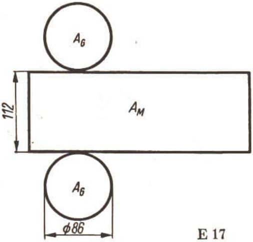
Dann ergibt sich für die Oberfläche des Zylinders:

$$A_{O\,\text{Zyl.}} = 2A_G + A_M$$
$$A_{O\,\text{Zyl.}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

3 Eine Konservendose ist 112 mm hoch und hat einen Durchmesser von 86 mm (Bild E 17).

a) Die Dose soll mit einem Papierstreifen als Etikett umklebt werden. Wieviel Papier braucht man für eine Dose?

b) Wieviel Blech wird zur Herstellung einer Dose gebraucht? (Auf den Mehrverbrauch an Blech, der durch das Falzen entsteht, wird in diesem Beispiel nicht eingegangen.)



E 17

Gegeben: $d = 86$ mm; $h = 112$ mm

Gesucht: A_M (in mm², umrechnen in dm²); A_O (in mm², umrechnen in dm²)

a) Berechnung von A_M (in mm²):

$$A_M = \pi \cdot 86 \cdot 112 \text{ mm}^2 = \pi \cdot 9\,632 \text{ mm}^2 \quad (\text{Ü} : 3 \cdot 10\,000 = 30\,000)$$

Berechnung mit Hilfe der Zahlentafel:

$$\begin{aligned} 9\,600\,\pi &= 30\,159 \\ 32\,\pi &= 100{,}53 \\ \hline 9\,632\,\pi &= 30\,259{,}53 \\ A_M &\approx 30\,260 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Antwortsatz: Für das Etikettieren einer Dose werden rund 3,0 dm² Papier benötigt.

b) Berechnung von A_O (in mm²):

$$A_O = 2A_G + A_M = 2 \cdot \frac{\pi}{4}\, d^2 + A_M$$
$$A_O = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 86^2 \text{ mm}^2 + 30\,259{,}53 \text{ mm}^2$$

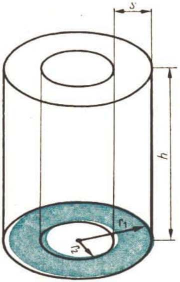
Berechnung mit Hilfe der Zahlentafel:

$$\frac{\pi}{4} \cdot 86^2 = 5\,808{,}8 \quad | \quad \cdot 2$$

$$2\,\frac{\pi}{4} \cdot 86^2 = 11\,617{,}6$$

$$A_O = 11\,617{,}6 \text{ mm}^2$$
$$+\,30\,259{,}53 \text{ mm}^2$$
$$A_O \approx 41\,877 \text{ mm}^2$$

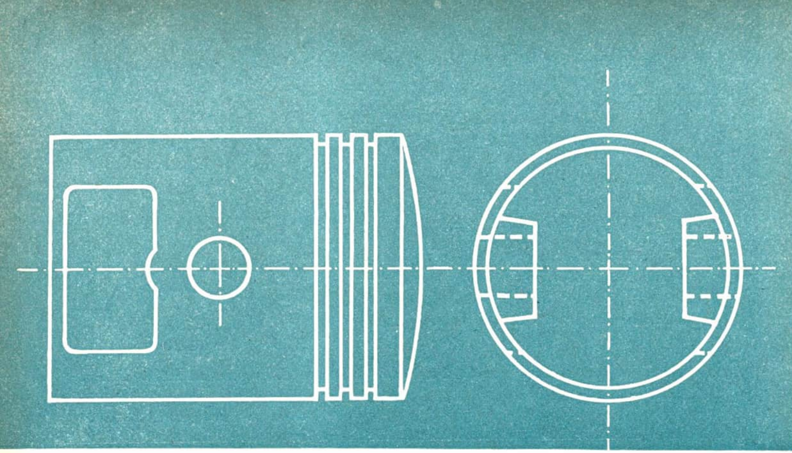
Antwortsatz: Zum Herstellen einer Dose werden ohne Berücksichtigung des Zuschlags für das Falzen rund 4,2 dm² Blech benötigt.

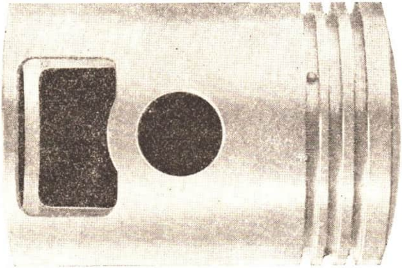


E 19

(7) Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen eines geraden Hohlzylinders (Bild E 19)!

Aufgaben E 24 bis 51





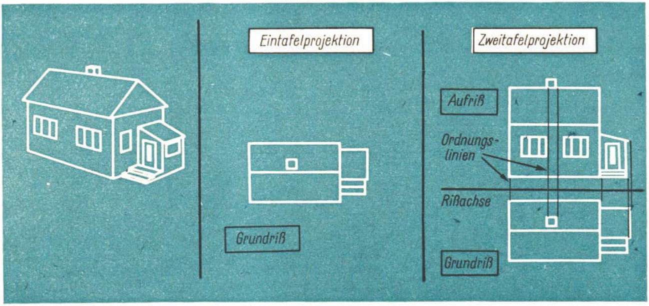
DARSTELLENDE GEOMETRIE

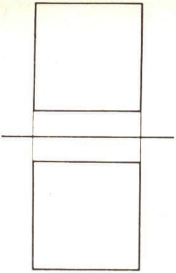
Grundriß, Aufriß, Kreuzriß	Seite 131
Schrägriß	134
Kavalierperspektive	135
Die Abbildung des Kreises in Kavalierperspektive	136

Grundriß, Aufriß, Kreuzriß

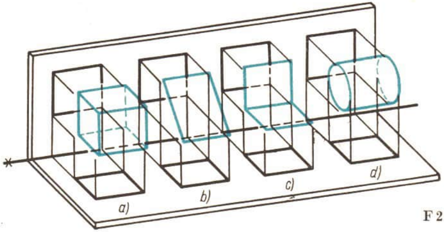
1 Das Bild F 1 macht deutlich, daß uns ein Zweitafelbild nicht immer einen klaren Eindruck von dem dargestellten Gegenstand vermittelt. Der Gegenstand, der im Bild F 1 dargestellt wird, kann nämlich ein Würfel, ein schiefgestelltes Rechteck, eine aus zwei Quadraten zusammengesetzte Figur oder ein liegender Zylinder sein (Bild F 2).
In solchen Fällen fügt man daher eine dritte Ansicht, meist die Seitenansicht von links, hinzu. Diese Ansicht nennt man den **Kreuzriß**. Wir denken uns den Kreuzriß auf einer ebenen Fläche entstanden, die senkrecht zur Grund- und

F





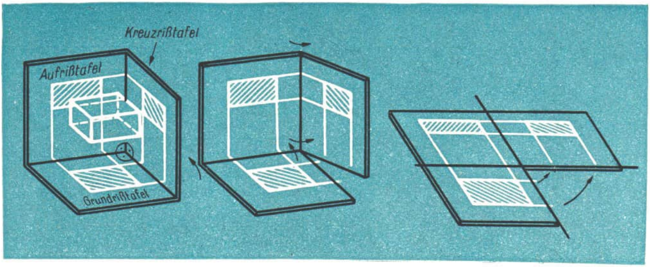
F 1

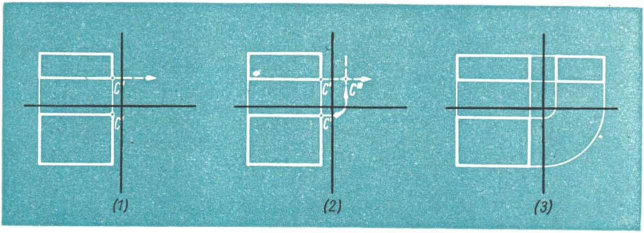


F 2

Aufrißtafel steht. Sie wird Kreuzrißtafel genannt. Grundrißtafel, Aufrißtafel und Kreuzrißtafel stoßen aneinander wie die Wände eines Zimmers oder die Wände einer Schachtel; sie bilden eine **rechtwinklige räumliche Ecke.**

Beim Zeichnen liegen alle drei Rißtafeln in einer Ebene (Bild F 3).
Die Punkte des Kreuzrisses werden mit den gleichen Buchstaben oder Ziffern wie die entsprechenden Punkte des Originals bezeichnet, hinzugefügt werden drei hochgestellte Striche (in Bild F 4 zum Beispiel C''', gesprochen: C-drei-Strich). Körperkanten und Umrißlinien, die von der linken Seite aus sichtbar sind, werden mit Vollinien, verdeckte Körperkanten mit Strichlinien gezeichnet.





F 3 und 4

Das Bild F 4 zeigt, wie aus dem Grundriß-Aufrißbild punktweise der Kreuzriß konstruiert wird. Der Kreuzriß eines jeden Punktes ist dem Grundriß-Aufrißbild des gleichen Punktes eindeutig zugeordnet. Allgemein gilt:

1 **Wenn zwei Risse eines Punktes gegeben sind, so ist der dritte Riß durch die beiden anderen Risse festgelegt.**

2 Auch für die Projektion im Kreuzriß gilt, was schon für den Grundriß und den Aufriß gezeigt wurde:

Liegt eine Strecke des Originals zur Rißtafel

parallel	geneigt	senkrecht,

so ist die Projektion auf diese Tafel

kongruent	verkürzt	ein Punkt.

Liegt eine ebene Figur zur Rißtafel

parallel	geneigt	senkrecht,

so ist die Projektion auf diese Tafel

kongruent	verkleinert	eine Strecke.

Aufgaben F 1 bis 10

(1) Stelle folgende Körper im Dreitafelverfahren dar!

a) Quader: $a = 3{,}0$ cm; $b = 2{,}5$ cm; $c = 5{,}2$ cm.

b) Zylinder: $d = 3{,}5$ cm; $h = 5{,}2$ cm.

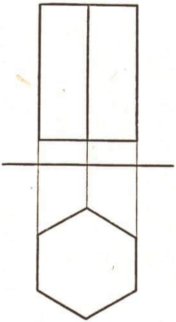
c) Dreiseitiges Prisma: die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 3{,}0$ cm, die Höhe beträgt 4,8 cm.

(2) Wie wird eine Strecke im Grundriß, wie im Aufriß und wie im Kreuzriß abgebildet, wenn sie

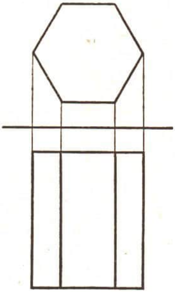
a) parallel zur Rißachse liegt;

b) parallel zur Grundrißtafel, aber senkrecht zur Aufrißtafel liegt;

F 5



F 6



c) wenn sie geneigt zur Grundrißtafel und parallel zur Aufrißtafel liegt?

(3) Wie heißen die Körper, die in den Bildern F 5 und F 6 im Grundriß-Aufrißverfahren dargestellt werden? Entnimm die Maße und berechne für die Körper, die in den Bildern F 5 und F 6 dargestellt werden, das Volumen und den Inhalt einer Seitenfläche!

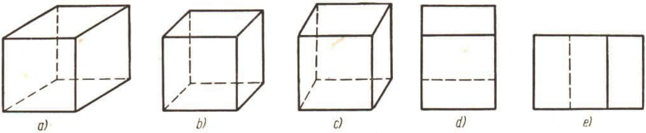
Schrägriß

3 Die Darstellung im Grund- und Aufriß ist weitgehend maßgerecht, aber wenig anschaulich.
Zur Ergänzung der Darstellung eines Körpers im Grund- und Aufriß wird deshalb häufig ein anschaulicher Schrägriß beigefügt.
Unter dem Schrägriß eines Körpers versteht man das Bild, das bei beliebiger Parallelprojektion auf eine Tafel entsteht. Wenn wir die Lage des Körpers oder die Richtung der Projektionsstrahlen verändern, so können wir die verschiedenartigsten Bilder des Körpers erhalten.

(4) Fertige dir ein Würfelmodell aus Draht an! Halte das Modell ins Sonnenlicht und verwende als Projektionsebene ein Blatt Papier! Durch Drehen des Modells oder der Projektionsebene erhältst du verschiedene Bilder des Würfels.

4 Bei geeigneter Drehung des Körpers in der Übung 5 kann man vom Würfel Projektionen erhalten, die den Bildern F 7a bis e entsprechen. In allen diesen Bildern liegt eine Fläche parallel zur Projektionsebene. Ihre Projektion entspricht dem Aufriß dieses Würfels. Die Strecken, die beim Gegenstand senkrecht zu dieser Fläche verlaufen, werden in bestimmten Richtungen verkürzt angetragen. Diese Strecken werden **Tiefenstrecken** genannt, da sie sozusagen in die Tiefe des Raumes führen. Dagegen nennt man die Strecken, die parallel zur Projektionsebene liegen, **Frontstrecken.**

F 7



Der Eindruck, den wir beim Betrachten der Bilder F 7a bis e haben, entspricht bei F 7a bis c einer Ansicht des Würfels schräg von rechts oben, bei 7d schräg von oben und bei 7e schräg von der Seite.

(5) Lege einen Würfel auf den Tisch und betrachte ihn von verschiedenen Seiten! Wähle Blickrichtungen, aus denen du den Würfel wie in den Bildern F 7 siehst!

Zur Anfertigung solcher Schrägrisse gibt man den **Verzerrungswinkel** α und das **Verkürzungsverhältnis,** in dem die Tiefenstrecken zur wahren Länge dieser Strecken stehen, an. Das Bild F 8 veranschaulicht das an einem Quader, dessen Grundfläche 40 mm · 60 mm mißt und dessen Höhe 30 mm beträgt. Der Verzerrungswinkel beträgt $\alpha = 60°$ und das Verkürzungsverhältnis 1 : 3.

5 Kavalierperspektive

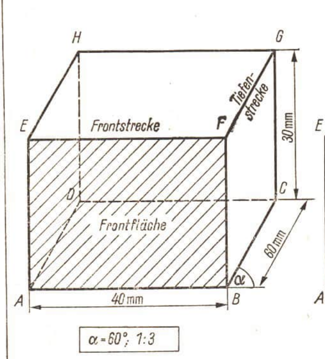
Besonders anschaulich wirkt eine Darstellung, bei der die Tiefenstrecken unter 45° geneigt und auf die Hälfte verkürzt sind. Sie wird **Kavalierperspektive**[1] genannt. Die Frontstrecken werden in wahrer Größe abgebildet. Das Bild F 9 zeigt denselben Quader wie das Bild F 8 in Kavalierperspektive.

Als Frontstrecken werden $\overline{AB}$, $\overline{EF}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ in wahrer Größe abgebildet. Sie begrenzen die Seitenfläche $ABFE$. Wir können also kürzer sagen: Die Frontfläche $ABFE$ ergibt bei der Projektion ein kongruentes Bild. Das gleiche gilt für die Frontfläche $DCGH$. Die Tiefenstrecken $\overline{BC}$, $\overline{FG}$, $\overline{AD}$ und $\overline{EH}$ werden auf die Hälfte verkürzt mit dem Verzerrungswinkel 45° angetragen.
Bei der Abbildung in Kavalierperspektive werden ebenfalls die sichtbaren Kanten und Umrißlinien des Körpers mit Vollinien, die unsichtbaren Kanten mit Strichlinien gezeichnet. Punkte, Linien und Flächen erhalten die gleiche Buchstabenbezeichnung wie der Gegenstand.

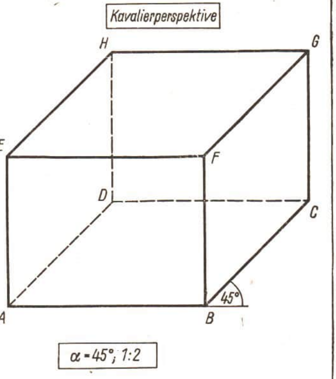
1 Ein dreiseitiges Prisma mit dem Dreieck aus $a = 2{,}0$ cm, $b = 4{,}0$ cm und $c = 3{,}9$ cm als Grundfläche sowie der Höhe $h = 4{,}0$ cm soll in Kavalierperspektive gezeichnet werden.

[1] Diese Bezeichnung stammt wahrscheinlich aus der Praxis des Festungsbaues im 18. Jahrhundert.

F 8



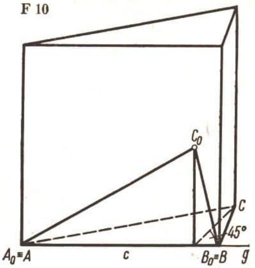
F 9



Konstruktion:

Wir zeichnen zunächst das Dreieck der Grundfläche in wahrer Größe als Hilfsfigur $A_0B_0C_0$. Dabei nehmen wir eine Seite (in Bild F 10 die Seite c) parallel zur Rißachse g an. Dann fällen wir von C_0 das Lot auf die Seite c. Dieses Lot wird als Tiefenstrecke unter 45° und auf die Hälfte verkürzt abgebildet. Nun werden die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ als Verbindungsstrecken gezeichnet. Schließlich werden von den einzelnen Punkten des Grundrisses die Höhen aufgetragen.

F 10



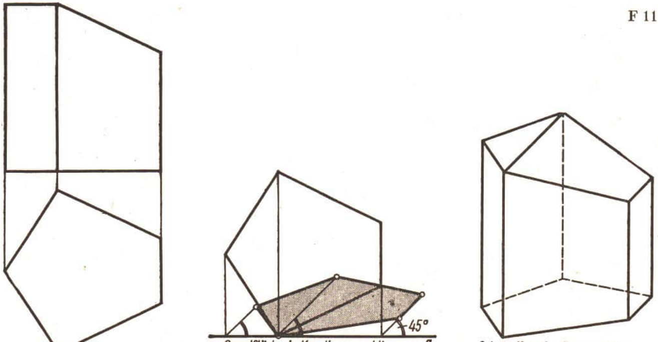
$\boxed{2}$ Von einem Werkstück sind der Grundriß und der Aufriß gegeben. Es soll das Schrägbild konstruiert werden.
Der Konstruktionsweg kann aus der Darstellung im Bild F 11 entnommen werden.

Aufgaben F 11 bis 19

6 Die Abbildung des Kreises in Kavalierperspektive

Kreise, die parallel zur Aufrißtafel liegen, werden als kongruente Kreise abgebildet. Es sind **Frontflächen.**
Hat der Kreis eine parallele Lage zur Grundrißtafel, so zeichnet man zunächst wieder eine Hilfsfigur. Der waagerecht liegende Durchmesser des Hilfskreises

F 11

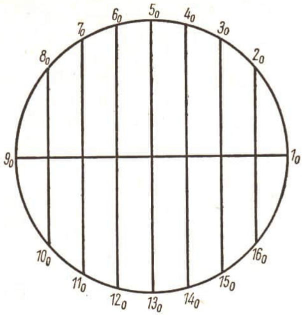


Grundriß - Aufriß - Bild

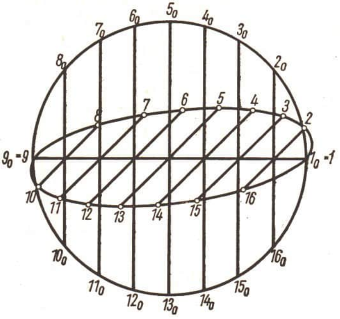
Grundfläche in Kavalierperspektive aus dem Grundriß

Schrägriß in Kavalierperspektive

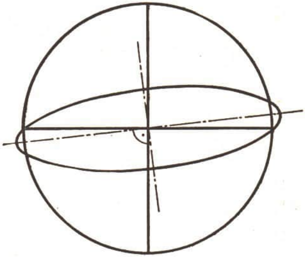
F



F 12



F 13

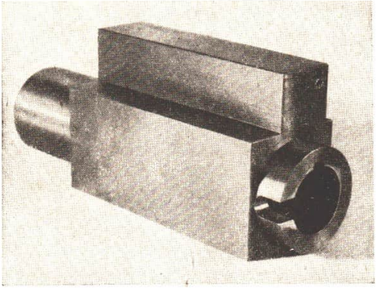


F 14

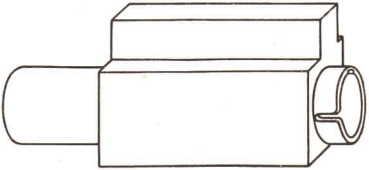
dient als Grundlinie der Konstruktion. Diesen Durchmesser unterteilt man gleichmäßig und errichtet in den Teilpunkten senkrechte Sehnen (Bild F 12). Die Sehnen sind im gesuchten Kreis Tiefenstrecken. Sie werden von der Grundlinie aus auf die Hälfte verkürzt und unter einem Winkel von 45° abgebildet. Verbindet man nun die Endpunkte der Tiefenstrecken, so erhält man eine geschlossene Kurve, die zwei Symmetrieachsen hat und etwas über die Hilfsfigur, den Kreis, hinausragt (Bild F 13). Diese Kurve ist eine Ellipse.

Der Mittelpunkt M_0 des Kreises wird als Mittelpunkt M der Ellipse abgebildet ($M_0 = M$), der Kreisdurchmesser 1_0; 9_0 als Ellipsendurchmesser 1; 9, der Kreisdurchmesser 5_0; 13_0 als Ellipsendurchmesser 5; 13. Die Bilder paralleler Kreissehnen sind parallele Sehnen der Ellipse.

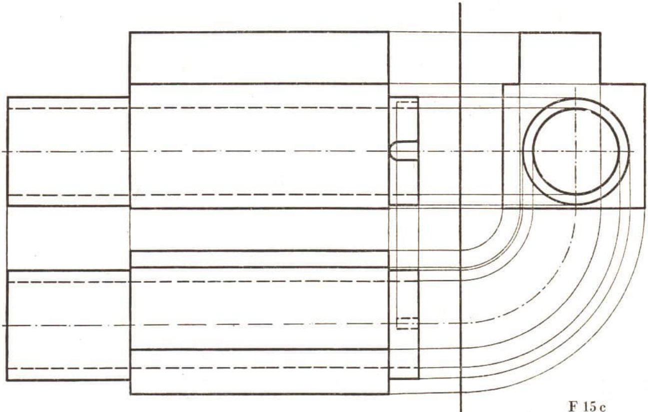
Die große Achse der Ellipse liegt bei dieser Abbildung nicht in der Richtung der Grundlinie der Konstruktion, sondern ist gegen diese um einen Winkel von etwa 7° entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gedreht (Bild F 14).



F 15 a



F 15 b



F 15 c

F

AUFGABEN

A. Rationale Zahlen

1. Sind die folgenden Aufgaben im Bereich der natürlichen Zahlen lösbar? Schreibe das Ergebnis nieder oder die Abkürzung „n. l." (nicht lösbar)!

a) 17 — 15 **b)** 418 — 418 **c)** 309 — 390 **d)** 172 — 86 **e)** 100 — 107 **f)** 152 — 159

2. Verfahre mit den folgenden Aufgaben wie mit Aufgabe 1!

a) 90 — 0 **b)** 0 — 90 **c)** 377 — 291 **d)** 203 — 117 **e)** 86 — 0 **f)** 6411 — 6325

3. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie! Falls eine Aufgabe im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar ist, schreibe „n. l." in die entsprechende Spalte! Bedenke dabei, daß im Bereich der gebrochenen Zahlen jede Divisionsaufgabe lösbar ist!

	a	b	$a+b$	$a-b$	$a \cdot b$	$a:b$	$2a+b$	$3a-2b$	$2a \cdot b$
a)	102	17							
b)	81	$\frac{4}{9}$							
c)	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$							
d)	1,8	4,5							
e)	$\frac{5}{28}$	$\frac{7}{10}$							

Löse die folgenden Aufgaben! Hinter Aufgaben, die im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar sind, schreibe die Abkürzung „n. l."!

4. a) $\frac{17}{3} - \frac{5}{6}$ **b)** $\frac{1}{3} - \frac{2}{5}$ **c)** $\frac{25}{14} - \frac{9}{7}$ **d)** $\frac{8}{9} - \frac{4}{7}$ **e)** $\frac{5}{9} - \frac{23}{36}$ **f)** $\frac{3}{8} - \frac{53}{120}$

5. a) $\frac{34}{51} - \frac{16}{24}$ **b)** $\frac{2}{7} - \frac{37}{105}$ **c)** $2\frac{9}{10} - \frac{12}{5}$ **d)** $\frac{15}{7} - \frac{7}{3}$ **e)** $\frac{8}{13} - \frac{7}{12}$ **f)** $\frac{8}{45} - \frac{1}{9}$

6. a) $\frac{4}{3} - \frac{7}{4}$ **b)** $\frac{49}{60} - \frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{14} - \frac{4}{7}$ **d)** $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ **e)** $\frac{9}{12} - 2\frac{1}{8}$ **f)** $\frac{2}{15} - \frac{4}{17}$

7. Ein Thermometer zeigt

a) -5 °C, und die Temperatur steigt um 8 grd,
b) $+8$ °C, und die Temperatur fällt um 9 grd,
c) $+11$ °C, und die Temperatur steigt um 6 grd,
d) -4 °C, und die Temperatur fällt um 2 grd,
e) $+23$ °C, und die Temperatur fällt um 4 grd,
f) 0 °C, und die Temperatur steigt um 3 grd,
g) $+2$ °C, und die Temperatur fällt um 2 grd,
h) -13 °C, und die Temperatur steigt um 5 grd.

Berechne jeweils den Stand des Thermometers!

8. Stelle folgende Subtraktionsaufgaben am Zahlenstrahl dar!

a) 5 — 2 **b)** $6 - \frac{2}{5}$ **c)** $\frac{9}{8} - 1$ **d)** $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$ **e)** 6 — 6 **f)** 7 — 5 **g)** $3 - \frac{4}{3}$

h) $\frac{15}{4} - 3$ **i)** $\frac{17}{10} - \frac{3}{5}$ **k)** $\frac{5}{8} - \frac{5}{8}$

Zeichne für die Aufgaben 9 bis 12 je eine Gerade, wähle darauf einen Punkt A und trage entsprechend den Erläuterungen im Abschnitt A 7 (Bild A 4) Strecken ab, die die jeweils angegebenen gebrochenen Zahlen darstellen! In welchen Fällen liegt der Punkt P rechts, in welchen links vom Punkt A?

9. **a)** $(8-2)$ **b)** $(2-8)$ **c)** $(3-5)$ **d)** $(7-10)$ **e)** $(6-6)$

10. **a)** $\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)$ **b)** $\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\right)$ **c)** $\left(4-\frac{3}{4}\right)$ **d)** $\left(\frac{5}{8}-\frac{8}{5}\right)$ **e)** $\left(\frac{9}{3}-3\right)$

11. **a)** $(5-3)$ **b)** $(9-5)$ **c)** $\left(2-\frac{3}{2}\right)$ **d)** $\left(\frac{3}{2}-2\right)$ **e)** $\left(6-\frac{13}{5}\right)$

12. **a)** $\left(\frac{13}{4}-\frac{11}{4}\right)$ **b)** $\left(\frac{11}{4}-\frac{13}{4}\right)$ **c)** $(2-4)$ **d)** $(4-2)$ **e)** $\left(\frac{19}{2}-9\right)$

13. Bilde zu den Aufgaben 11 und 12 jeweils zwei weitere Differenzen, denen derselbe Punkt P zugeordnet ist!

14. Addiere zum Minuenden und zum Subtrahenden der Differenz $(7-5)$ jeweils

a) 2, **b)** $\frac{1}{2}$, **c)** $\frac{3}{5}$, **d)** 6!

Veranschauliche die erhaltenen Differenzen jeweils durch Streckenabtragung!

15. Verfahre mit der Differenz $\left(1-\frac{8}{5}\right)$ wie in Aufgabe 14 a) bis d)!

16. Subtrahiere von den Minuenden und Subtrahenden der Differenzen $(8-5)$ und $\left(\frac{19}{4}-\frac{23}{4}\right)$ jeweils

a) 3, **b)** $\frac{3}{4}$, **c)** 1, **d)** $\frac{7}{2}$!

Veranschauliche die erhaltenen Differenzen jeweils durch Streckenabtragung!

Welche Differenzen der Paare in den Aufgaben 17 und 18 sind auf einer Geraden jeweils demselben Punkt P zugeordnet? (Vorausgesetzt wird, daß bei jeder Darstellung derselbe Anfangspunkt A gewählt wird.)

17. **a)** $(8-7)$ und $(4-3)$ **b)** $(9-2)$ und $(15-9)$ **c)** $\left(35-\frac{3}{2}\right)$ und $\left(70-\frac{73}{2}\right)$

18. **a)** $\left(\frac{14}{3}-\frac{7}{9}\right)$ und $\left(\frac{31}{6}-\frac{23}{18}\right)$ **b)** $(7-11)$ und $(14-17)$ **c)** $(4-8)$ und $(17-22)$

Zeichne auf Millimeterpapier eine Zahlengerade (Einheit 1 cm) und gib auf ihr die rationalen Zahlen der Aufgaben 19 und 20 möglichst genau an!

19. **a)** -5 **b)** $+4$ **c)** $+2$ **d)** -3 **e)** $+5$ **f)** -1 **g)** 0
h) $-3\frac{1}{2}$ **i)** $+4\frac{1}{4}$ **k)** $+5\frac{1}{3}$ **l)** $+\frac{1}{2}$ **m)** $-3\frac{4}{5}$ **n)** $+1\frac{1}{3}$ **o)** $-\frac{3}{4}$

20. **a)** $+0{,}5$ **b)** $-0{,}5$ **c)** $+3{,}9$ **d)** $-2{,}4$ **e)** $-1{,}75$ **f)** $+2{,}55$ **g)** $-4{,}4$
h) $-1{,}5$ **i)** $+3\frac{3}{4}$ **k)** -2 **l)** $+0{,}6$ **m)** $-1{,}33$ **n)** $-4{,}5$ **o)** $+1\frac{4}{5}$

Y

Y 1

21. Gib an, welche rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden im Bild Y 1 durch große Striche gekennzeichnet sind!

22. Bestimme die zu folgenden rationalen Zahlen entgegengesetzten Zahlen! Stelle beide jeweils auf der Zahlengeraden dar!

a) -5 **b)** $-3\frac{1}{2}$ **c)** $+4\frac{1}{4}$ **d)** $+\frac{17}{3}$ **e)** $-3\frac{4}{5}$ **f)** $+2{,}55$ **g)** $-1{,}33$

23. Gib die Beträge der folgenden rationalen Zahlen an!

a) $+27{,}8$ b) $-\frac{107}{11}$ c) $-1403{,}78$ d) $+17{,}51$ e) -7 f) $+7$

24. Übertrage die Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

a)

x	$+7$	$-\frac{7}{8}$	$-0{,}3$	$+20{,}4$	$+\frac{19}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$-0{,}7$	$-8\frac{1}{3}$	$+2$	0
$+x$										
$-x$										
$\|x\|$										

b)

m	-27	$+34{,}8$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{7}$	$+5\frac{1}{4}$	$-0{,}3$	$+4$	-4	$+1{,}4$	$-1{,}4$
$+m$										
$-m$										
$\|m\|$										

25. Welche der rationalen Zahlen liegt auf der Zahlengeraden weiter rechts?

a) $+5;\ +4$ b) $-3;\ -2$ c) $-5;\ +4$ d) $+3;\ -2$ e) $0;\ -5$
f) $+\frac{1}{2};\ +\frac{3}{4}$ g) $-\frac{5}{8};\ -\frac{3}{5}$ h) $+\frac{1}{2};\ -\frac{3}{4}$ i) $+\frac{5}{8};\ -\frac{3}{5}$ k) $+3;\ 0$

26. Nenne drei positive und drei negative Zahlen, die

a) größer sind als -6, b) kleiner sind als $+5$, c) kleiner sind als 0!

27. Ordne die folgenden rationalen Zahlen ihrer Größe nach! Beginne mit der kleinsten!

a) $-11;\ +10;\ -5;\ +15;\ -16;\ +3;\ -19;\ -8;\ -2;\ -17;\ +6;\ 0;\ -1$
b) $-\frac{5}{6};\ -2\frac{11}{12};\ -1\frac{5}{6};\ +\frac{5}{24};\ +2\frac{1}{4};\ +2\frac{2}{3};\ 0;\ -\frac{7}{8};\ +1;\ -1\frac{1}{12}$

28. Übertrage die Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

a)

a	b	$a \lesseqgtr b$	$\|a\| \lesseqgtr \|b\|$
$+3$	$+7$	$+3 < +7$	$\|+3\| < \|+7\|$
$+2$	$+5$		
0	$+4\frac{1}{3}$		
$+\frac{11}{5}$	0		
$+7{,}3$	$+\frac{73}{10}$		
$+6{,}8$	$+0{,}6$		
$+\frac{7}{3}$	$+2\frac{1}{3}$		
$+40{,}1$	$+40{,}01$		

b)

x	y	$x \lesseqgtr y$	$\|x\| \lesseqgtr \|y\|$
-3	-7		
-2	-5		
0	$-4\frac{1}{3}$		
$-\frac{11}{5}$	0		
$-7{,}3$	$-\frac{73}{10}$		
$-6{,}8$	$-0{,}6$		
$-\frac{7}{3}$	$-2\frac{1}{3}$		
$-40{,}1$	$-40{,}01$		

29. Untersuche die Zahlen m und n sowie die absoluten Beträge $|m|$ und $|n|$ in der gleichen Weise wie in Aufgabe 28 a) und b)!

m	n
-2	$+5$
-4	$+2$
$-3\frac{1}{4}$	$-12{,}75$

m	n
$+16{,}2$	$-16{,}2$
$-\frac{31}{9}$	$-\frac{32}{9}$
-13	$+12$

m	n
-7	-9
0	$+5\frac{1}{2}$
$+7$	$+9$

m	n
$+0{,}01$	0
$-0{,}01$	0
0	$-5\frac{1}{2}$

30. Nenne jeweils fünf rationale Zahlen, die folgende Ungleichungen erfüllen, und veranschauliche sie an der Zahlengeraden!

a) $+3 < x < +5$ **b)** $0 < a < +7$ **c)** $-12 < m < -7{,}5$
d) $-\frac{21}{4} < b < 0$ **e)** $-\frac{7}{4} < y < +\frac{3}{2}$

31. Nenne jeweils fünf Zahlen (falls diese existieren), die die folgenden Ungleichungen erfüllen! Kennzeichne das Stück der Zahlengeraden, aus dem du die gesuchten Zahlen wählen kannst!

a) $|x| < +3$ **b)** $|a| < +\frac{4}{3}$ **c)** $|l| < +\frac{1}{2}$ **d)** $|y| < 0$

32. Für zwei rationale Zahlen m und n gilt

a) $|m| = |n|$ **b)** $|m| < |n|$ **c)** $m > n$.

Gilt dann im Fall

a) auch $m = n$ **b)** auch $m < n$ **c)** auch $|m| > |n|$?

Begründe deine Angaben durch Zahlenbeispiele!

33. Gib die folgenden Höhenangaben mit rationalen Zahlen an:

a) 165 m über dem Meeresspiegel, **b)** 20 m unter dem Meeresspiegel,
c) 7650 m über dem Meeresspiegel, **d)** 496 m unter dem Meeresspiegel!

34. Gib die Höhenangaben als rationale Zahlen an!

a) Brocken 1142 m über dem Meeresspiegel,
b) Spiegel des Kaspischen Meeres 28 m unter dem Meeresspiegel,
c) Spiegel des Toten Meeres 394 m unter dem Meeresspiegel,
d) Tschomolungma 8882 m über dem Meeresspiegel.

35. Die Länge eines Eisenträgers wurde fünfmal gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte: 8015 mm, 8009 mm, 8012 mm, 8013 mm, 8011 mm. Ermittle den Durchschnitt und gib die Abweichungen der Meßwerte vom Durchschnitt mit rationalen Zahlen an!

36. Der Rundfunk bringt regelmäßig Wasserstandsmeldungen. Die darin genannten rationalen Zahlen geben an, um wieviel Zentimeter der für den betreffenden Tag gemeldete Wasserstand (in Metern) vom Wasserstand des Vortages abweicht.

Beispiele: Torgau 3,60; +5. Der Wasserstand des Vortages betrug 3,55 m.
Dresden 2,15; −8. Der Wasserstand des Vortages betrug 2,23 m.

Gib für die folgenden Orte an der Elbe den Wasserstand des Vortages an!

Schöna 3,11; −8, Dresden 2,73; −15, Torgau 3,70; ±0,
Wittenberg 4,09; +15, Roßlau 3,33; +7, Magdeburg 2,86; ±0,
Tangermünde 4,06; −2, Wittenberge 3,72; −3.

37. An einem Pegel (Wasserstandsmesser) wurden an den sieben Tagen einer Woche folgende Wasserstände gemessen: 315 cm, 329 cm, 334 cm, 318 cm, 326 cm, 330 cm, 323 cm. Der mittlere Wasserstand des Jahres an diesem Pegel ist 326 cm. Gib die Abweichungen der einzelnen Pegelstände vom mittleren Wasserstand mit rationalen Zahlen an!

38. Eine LPG soll nach ihrem Plan monatlich 500 hl Milch abliefern. Schreibe unter Verwendung rationaler Zahlen, mit wieviel Hektoliter Milch die LPG den Monatsplan übererfüllte bzw. nicht erfüllte, wenn sie im Januar 450 hl, im Februar 530 hl und im März 570 hl Milch lieferte!

39. a) $(+2) + (+1)$ **b)** $\left(+5\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right)$ **c)** $(+135{,}76) + (+198{,}39)$
d) $\left(+\frac{4}{3}\right) + \left(+\frac{13}{6}\right)$ **e)** $(+3{,}25) + \left(+\frac{11}{4}\right)$ **f)** $(+6135) + (+17080)$

40. a) $(+7{,}5) + \left(+\frac{9}{2}\right)$ **b)** $(+4) + (+4)$ **c)** $(+958) + (+6324)$
d) $(+18) + \left(+\frac{17}{5}\right)$ **e)** $(+11{,}5) + \left(+\frac{23}{2}\right)$ **f)** $(+530) + (+421)$

41. **a)** $(+42)+(+28)$ **b)** $\left(+31\frac{7}{10}\right)+(+19)$ **c)** $(+4108{,}9)+(+992{,}3)$
d) $(+12{,}5)+\left(+\frac{7}{2}\right)$ **e)** $\left(-\frac{15}{8}\right)+\left(-\frac{7}{4}\right)$ **f)** $(+18)+(+18)$

42. **a)** $(+4)+(+9)$ **b)** $\left(+\frac{15}{8}\right)+\left(+\frac{7}{4}\right)$ **c)** $(-18)+(-18)$
d) $\left(-\frac{3}{5}\right)+(-0{,}8)$ **e)** $\left(-\frac{22}{13}\right)+\left(-\frac{4}{13}\right)$ **f)** $(+17{,}3)+(+11{,}4)$

43. **a)** $(-0{,}3)+(-1{,}8)$ **b)** $\left(+\frac{22}{13}\right)+\left(+\frac{4}{13}\right)$ **c)** $(+12{,}5)+(+17{,}3)$
d) $\left(+4\frac{2}{5}\right)+\left(+3\frac{1}{10}\right)$ **e)** $\left(-\frac{53}{41}\right)+\left(-\frac{102}{41}\right)$ **f)** $(-12{,}5)+(-17{,}3)$

44. Zerlege die folgenden rationalen Zahlen jeweils in zwei Summanden, die dasselbe Vorzeichen wie die gegebene Zahl haben!
Beispiele: $+13{,}8=(+11{,}0)+(+2{,}8)$; $-\frac{9}{13}=\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{4}{13}\right)$
a) $+11$ **b)** -15 **c)** $-\frac{8}{3}$ **d)** $+23{,}4$ **e)** $+104{,}08$
f) $+9\frac{2}{5}$ **g)** $-9\frac{2}{5}$ **h)** $+12{,}8$ **i)** $-\frac{35}{11}$ **k)** $-96{,}89$

45. **a)** $(+3)+(+4)$ **b)** $(-5)+(-3)$ **c)** $(+4)+(-3)$ **d)** $(-3)+(+2)$
e) $(-1)+(+5)$ **f)** $(-1)+(-2)$ **g)** $(+2)+(-2)$ **h)** $(-5)+(+6)$

46. **a)** $0+(+6)$ **b)** $0+(-5)$ **c)** $(+5)+(-6)$ **d)** $(-4)+(+4)$
e) $\left(+13\frac{1}{2}\right)+(-5)$ **f)** $\left(-9\frac{7}{10}\right)+(-9)$ **g)** $\left(-14\frac{3}{4}\right)+(-9)$ **h)** $\left(+5\frac{1}{2}\right)+(-2)$

47. **a)** $(+30)+\left(+10\frac{11}{12}\right)$ **b)** $\left(-15\frac{7}{8}\right)+(+16)$ **c)** $\left(+25\frac{10}{17}\right)+(-36)$
d) $(+20)+\left(-15\frac{4}{5}\right)$ **e)** $\left(-33\frac{5}{7}\right)+(-27)$ **f)** $(-23)+\left(+24\frac{1}{2}\right)$

48. **a)** $(-135{,}76)+(-198{,}39)$ **b)** $(+128{,}45)+(-79{,}376)$ **c)** $(+566{,}39)+(+119{,}45)$
d) $(-411{,}106)+(+266{,}3)$ **e)** $(+386{,}76)+(-212{,}68)$ **f)** $(-91{,}6)+(-99{,}305)$

49. **a)** $(+596{,}22)+(+498{,}69)$ **b)** $(-42{,}98)+(-40{,}374)$ **c)** $(-21{,}99)+(+21{,}88)$
d) $(-158{,}39)+(-272{,}00)$ **e)** $(-59{,}697)+(+80{,}102)$ **f)** $(-21{,}99)+(-21{,}88)$

50. **a)** $\begin{array}{r}(+4075)\\ \underline{+(+6987)}\end{array}$ **b)** $\begin{array}{r}(-3643)\\ \underline{+(-5479)}\end{array}$ **c)** $\begin{array}{r}(+5246)\\ \underline{+(-2625)}\end{array}$ **d)** $\begin{array}{r}(-7532)\\ \underline{+(+9611)}\end{array}$

51. **a)** $\begin{array}{r}(-40{,}53)\\ \underline{+(+62{,}25)}\end{array}$ **b)** $\begin{array}{r}(+81{,}06)\\ \underline{+(-59{,}75)}\end{array}$ **c)** $\begin{array}{r}(-17{,}66)\\ \underline{+(-84{,}34)}\end{array}$ **d)** $\begin{array}{r}(-93{,}46)\\ \underline{+(+27{,}19)}\end{array}$

52. **a)** $\begin{array}{r}(+97{,}16)\\ \underline{+(-35{,}68)}\end{array}$ **b)** $\begin{array}{r}(-68{,}48)\\ \underline{+(-89{,}76)}\end{array}$ **c)** $\begin{array}{r}(+54{,}81)\\ \underline{+(-73{,}85)}\end{array}$ **d)** $\begin{array}{r}(+59{,}36)\\ \underline{+(+46{,}78)}\end{array}$

53. Überprüfe die Gültigkeit der Gleichung $a+b=b+a$, indem du beispielsweise die folgenden Zahlen für die Variablen einsetzt!
a) $a=7;\quad b=-4$ **b)** $a=-5;\quad b=3$
c) $a=-8;\quad b=-6$ **d)** $a=1;\quad b=0$
Formuliere das Gesetz der Addition, das durch die Gleichung $a+b=b+a$ ausgedrückt wird!

54. Errechne unter Anwendung des Kommutations- und des Assoziationsgesetzes auf kürzestem Wege folgende Summen!
a) $(-12)+(+11)+(-8)+(+39)$ **b)** $(+45)+(-9)+(-91)+(+5)$
c) $(-5{,}4)+(+0{,}2)+(-0{,}6)+(0{,}08)$ **d)** $(+0{,}65)+(-1{,}9)+(-0{,}1)+(-0{,}65)$
e) $\left(-2\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)+(-0{,}5)+\left(+1\frac{1}{6}\right)$ **f)** $(+0{,}25)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-3\frac{1}{8}\right)+\left(-5\frac{3}{4}\right)$
g) $(-0{,}1)+\left(+8\frac{1}{3}\right)+\left(+11\frac{2}{3}\right)+(+4{,}4)$ **h)** $(+5{,}2)+(-0{,}6)+\left(+\frac{3}{5}\right)+(-3{,}2)$

55. Kann $a + b$ kleiner als a sein? Gib Zahlenbeispiele!

56. Kann $(+1) + |a|$ kleiner als Null sein?

57. a) $(+5) - (+3)$ b) $(-4) - (-7)$ c) $(+6) - (-2)$ d) $(-4) - (+4)$
e) $(+1) - (+4)$ f) $(-9) - (-2)$ g) $(+2) - (-5)$ h) $(-6) - (+3)$
i) $(+2) - 0$ k) $(-2) - 0$ l) $(+3) - (-1)$ m) $(-7) - (+1)$

58. a) $\left(-43\frac{1}{2}\right) - \left(+22\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(+16\frac{15}{16}\right) - \left(+14\frac{3}{4}\right)$ c) $\left(-16\frac{3}{4}\right) - \left(-17\frac{3}{8}\right)$
d) $(-20) - \left(+22\frac{1}{5}\right)$ e) $(+28) - \left(-15\frac{7}{10}\right)$ f) $\left(+14\frac{1}{9}\right) - \left(-14\frac{1}{7}\right)$
g) $\left(-7\frac{3}{4}\right) - \left(+7\frac{3}{8}\right)$ h) $\left(-7\frac{3}{4}\right) - \left(-7\frac{7}{12}\right)$ i) $\left(+3\frac{3}{4}\right) - \left(+2\frac{1}{8}\right)$

59. a) $(+12{,}345) - (+98{,}765)$ b) $(-134{,}67) - (+256{,}00)$ c) $(-12{,}345) - (+98{,}765)$
d) $(+963{,}21) - (+975{,}21)$ e) $(-12{,}345) - (-98{,}765)$ f) $(-0{,}3456) - (-0{,}7891)$
g) $(+12{,}345) - (-98{,}765)$ h) $(-2{,}468) - (+1{,}357)$ i) $(+45{,}678) - (-54.321)$

60. a) $\begin{array}{r}(+2\,143)\\ -(+1\,056)\\ \hline\end{array}$ b) $\begin{array}{r}(+4\,268)\\ -(-2\,112)\\ \hline\end{array}$ c) $\begin{array}{r}(-1\,798)\\ -(+7\,236)\\ \hline\end{array}$ d) $\begin{array}{r}(-3\,927)\\ -(-7\,256)\\ \hline\end{array}$

61. a) $\begin{array}{r}(-3\,579)\\ -(-3\,208)\\ \hline\end{array}$ b) $\begin{array}{r}(+8\,645)\\ -(+6\,957)\\ \hline\end{array}$ c) $\begin{array}{r}(+5\,091)\\ -(-4\,243)\\ \hline\end{array}$ d) $\begin{array}{r}(-2\,874)\\ -(+8\,427)\\ \hline\end{array}$

62. a) $\begin{array}{r}(+386{,}76)\\ -(-212{,}68)\\ \hline\end{array}$ b) $\begin{array}{r}(+566{,}39)\\ -(+915{,}27)\\ \hline\end{array}$ c) $\begin{array}{r}(-411{,}61)\\ -(+256{,}03)\\ \hline\end{array}$ d) $\begin{array}{r}(+128{,}45)\\ -(-679{,}37)\\ \hline\end{array}$

63. a) $(-7)\ (+3)$ b) $(-3) \cdot (+18)$ c) $(+3) \cdot (-9)$ d) $(+9) \cdot (+3)$
e) $(-11) \cdot (-11)$ f) $(-2) \cdot (-83)$ g) $(-9) \cdot (+8)$ h) $(-14) \cdot (-1)$

64. a) $(-15) \cdot (+12)$ b) $(-4) \cdot (-5)$ c) $(-13) \cdot (-11)$ d) $(+1) \cdot (-1)$
e) $(+6) \cdot (-13)$ f) $(-4) \cdot (+27)$ g) $(+9) \cdot (-18)$ h) $(+3) \cdot (-258)$

65. a) $(+3) \cdot (-48)$ b) $(-72) \cdot (-5)$ c) $(-2) \cdot (+579)$ d) $(-798 \cdot (-2)$
e) $(+17) \cdot (-14)$ f) $(-19) \cdot (-7)$ g) $(+206) \cdot (-4)$ h) $(-831) \cdot (+3)$

66. a) $(+5) \cdot (-8)$ b) $(-3) \cdot (-6)$ c) $(-0{,}4) \cdot (+2)$ d) $(-1{,}5) \cdot (+0{,}5)$
e) $(+4) \cdot (+7)$ f) $(-8) \cdot (+9)$ g) $(-2{,}5) \cdot (-1{,}2)$ h) $(+1{,}5 \cdot (-0{,}5)$

67. a) $(-8) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $(-12) \cdot \left(+\frac{3}{4}\right)$ c) $\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot (+2)$ d) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{8}{7}\right)$
e) $(-1) \cdot (-1)$ f) $(+1) \cdot (+1)$ g) $(-6) \cdot (-1)$ h) $(-5) \cdot (+1)$

68. Berechne $x = ab$ für folgende Werte von a und b!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
a	10	-11	-6	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	0,1
b	-8	-5	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0,1	$-0{,}01$

69. Berechne für die folgenden Werte von a und b jeweils die Produkte

a) $a \cdot b$, b) $(-a) \cdot (-b)$, c) $(-a) \cdot b$, d) $a \cdot (-b)$, e) $-(a \cdot b)$!

a	-3	$+3$	-3	$+\frac{1}{4}$	$-0{,}8$	-4	$+\frac{7}{12}$	$-\frac{9}{13}$	$-\frac{3}{5}$
b	$+6$	-6	-6	$-\frac{2}{5}$	$+0{,}5$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{12}{7}$	$+\frac{26}{3}$	$-\frac{4}{7}$

70. a) $(+48):(-6)$ b) $(+72):(+8)$ c) $(+96):(+12)$ d) $(+64):(-16)$
e) $(+119):(-17)$ f) $(+92):(-4)$ g) $(-108):(+18)$ h) $(-105):(-21)$

71. a) $(-104):(+8)$ b) $(-75):(+15)$ c) $(+98:(-49)$ d) $(-246):(-82)$
e) $(+114):(-19)$ f) $(-81):(-27)$ g) $(-189):(+7)$ h) $(-91):(+13)$

72. a) $(+126):(-14)$ b) $(-376):(+94)$ c) $(-2\,075):(-1)$ d) $(+10\,305):(-1)$
e) $(-898):(+1)$ f) $(+11):(+33)$ g) $(-7):(-28)$ h) $(+6):(-78)$

73. a) $(-9):(+45)$ b) $(-14):(-84)$ c) $(-24):(+72)$ d) $(-27):(+65)$

74. a) $(+846\,(:(-47)$ b) $(-98):(+294)$ c) $(+1\,645):(-35)$ d) $(-1029):(+21)$
e) $(+688):(+86)$ f) $(-54):(+351)$ g) $(+78):(+507)$ h) $(-132):(-528)$

75. a) $(-28{,}5):(13{,}5)$ b) $(+308{,}4):(-29{,}2)$ c) $(+31{,}2):(-0{,}12)$ d) $(+11{,}78):(-5{,}12)$
e) $(-24{,}8):(0{,}8)$ f) $(-5{,}8):(+17{,}4)$ g) $(-2{,}75):(+0{,}25)$ h) $(+4{,}95):(-33)$

76. a) $\left(+\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(-2\frac{2}{3}\right):\left(+1\frac{5}{8}\right)$ c) $\left(-9\frac{1}{2}\right):\left(+6\frac{2}{3}\right)$ d) $\left(+5\frac{1}{6}\right):\left(-3\frac{3}{4}\right)$
e) $\left(-\frac{7}{8}\right):\left(+\frac{5}{12}\right)$ f) $\left(+9\frac{1}{3}\right):\left(-2\frac{3}{4}\right)$ g) $\left(-3\frac{5}{9}\right):\left(+5\frac{1}{3}\right)$ h) $\left(+\frac{12}{22}\right):(-1)$

77. a) $(-1)\cdot\left(+5\frac{1}{7}\right)$ b) $\left(+23\frac{9}{13}\right)\cdot(-1)$ c) $\left(+\frac{23}{48}\right)\cdot\left(-\frac{48}{23}\right)$ d) $(-1)\cdot(-56{,}78)$
e) $\left(-48\frac{17}{25}\right)\cdot(+1)$ f) $\left(-\frac{34}{21}\right)\cdot\left(+\frac{21}{34}\right)$ g) $(+1\,079):0$ h) $(+271):(+1)$

78. a) $(+1):(+43)$ b) $(-409):(+1)$ c) $(+1):\left(-\frac{2}{3}\right)$ d) $(+397):(-1)$

79. Bestimme die Differenz $x - y$ für folgende Zahlenwerte von x und y!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
x	7	-8	$\frac{3}{4}$	3,9	0	$-3{,}18$	3,18	3,18
y	-3	-5	$-\frac{5}{6}$	1,1	$-3{,}2$	3,18	$-3{,}18$	3,18

80. Berechne $x = \frac{a}{b}$ für folgende Zahlenwerte von a und b!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
a	10	8	1	$-\frac{3}{5}$	-1	-1	-2	15,42	5,36
b	1	-1	-1	-1	-5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$-0{,}1$	-100

81. a) $|a| - |b| + |c|$ für $a = -8$; $b = -5$; $c = 1$
b) $|x| - |y| + |z|$ für $x = 3$; $y = -2$; $z = -6$
c) $|a - b| - |c + d|$ für $a = -5$; $b = 4$; $c = 1$; $d = -3$
d) $\frac{|a+x|}{2} - \frac{|a-x|}{2}$ für $a = -2$; $x = -6$

82. a) $3|a| + 5|b|$ für $a = -2$; $b = -1$ c) $4|a| + 8 - a$ für $a = -2$
b) $|2x - 3y|$ für $x = 0{,}5$; $y = -0{,}7$ d) $-3|x| + 2x - 1$ für $x = -5$

83. Es gelte: $-3(a - b) > 0$.
Folgt daraus
$a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$?

84. Kennzeichne auf jeweils einer Zahlengeraden die Abschnitte, in denen die rationalen Zahlen liegen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

Y

a) $-2 < x < 2$ **b)** $c < x < 4$ **c)** $1 < x < 3$ **d)** $-\frac{3}{5} < x < 1{,}5$
e) $|x| < 2$ **f)** $|x-2| < 2$ **g)** $1 < |x| < 3$

85. Schreibe als Summen!
Beispiel: $8 - 3 = 8 + (-3)$
a) $17 - 8$ **b)** $4{,}5 - 9{,}7$ **c)** $\frac{15}{3} - \frac{17}{6}$ **d)** $a - b$ **e)** $-8 - b$

86. Schreibe als Differenzen!
Beispiel: $\frac{7}{2} + \frac{9}{4} = \frac{7}{2} - \left(-\frac{9}{4}\right)$
a) $8 + 5$ **b)** $-7 + 3$ **c)** $5{,}93 + 11{,}32$ **d)** $-\frac{17}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right)$ **e)** $a + b$

Benutze das Kommutations- und das Assoziationsgesetz der Addition, um folgende Aufgaben möglichst vorteilhaft rechnen zu können!

87. a) $(+231) + (+188)$ **b)** $(-496) + (+347)$ **c)** $(+5{,}64) + (7{,}33)$

88. a) $(-157) + (+209)$ **b)** $(+2\,099) + (-738) + (-1\,245)$
c) $\left(+9\frac{1}{2}\right) + \left(-4\frac{3}{4}\right) + \left(+1\frac{1}{4}\right)$ **d)** $(-10{,}15) + (+22{,}30) + (-12{,}15)$

89. a) $(+11) + (-72) + (+83) + (-11) + (-32) + (+56)$
b) $(-2{,}85) + (+97) + (+41{,}37) + (-13{,}96) + (+17{,}69) + (-0{,}11)$
c) $(+12{,}28) + \left(-80\frac{3}{4}\right) + (+101{,}50) + \left(-\frac{1}{4}\right) + (+0{,}25)$
d) $\left(-\frac{7}{9}\right) + \left(+15\frac{2}{5}\right) + \left(-29\frac{2}{9}\right) + \left(-1\frac{1}{5}\right) + \left(-49\frac{4}{5}\right)$
e) $(+3{,}3) + \left(-12\frac{4}{5}\right) + \left(-31\frac{3}{5}\right) + (+59{,}8) + (-8{,}7)$

90. a) $(+437) - (+188)$ **b)** $\left(-\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{11}{12}\right)$ **c)** $(+23) - \left(-18\frac{3}{4}\right)$

91. a) $(-139) - (-139) - (+572)$ **b)** $(-2{,}54) - (-11{,}23) - (+4{,}78)$
c) $\left(+3\frac{2}{5}\right) - \left(-8\frac{3}{10}\right) - \left(+6\frac{7}{10}\right)$ **d)** $\left(-4\frac{1}{2}\right) - (+1{,}25) - (-7)$

92. a) $(-559) - (-141) - (-428) - (-19)$ **b)** $(+18{,}72) - (+1{,}63) - (+9{,}48) - (+8{,}55)$
c) $(-79{,}5) - \left(-32\frac{1}{4}\right) - (+19{,}25) - \left(-48\frac{3}{4}\right) - (+5{,}75)$
d) $(+473{,}63) - (+208{,}17) - (-89{,}41) - (-17{,}09) - (+473{,}65)$
e) $\left(+17\frac{3}{4}\right) - (+6{,}25) - \left(-8\frac{1}{2}\right) - (+0{,}75) - \left(-22\frac{1}{4}\right)$

93. a) $(-2\,579) - (+3\,649)$ **b)** $(+10\,809) - (+954) + (-8006)$
c) $(+59\,076) + (-61\,807)$ **d)** $(-17\,032) + (-268) - (-17\,300)$

94. a) $(-409{,}78) - (-731{,}25)$ **b)** $(+560{,}70) - (+345{,}00) - (+222{,}92)$
c) $\left(+364\frac{4}{5}\right) + (-122{,}9)$ **d)** $\left(-4\frac{2}{7}\right) - \left(-2\frac{3}{14}\right) + \left(+8\frac{5}{7}\right)$

95. a) $\left(-17\frac{1}{2}\right) - \left(+24\frac{3}{4}\right)$ **b)** $(+28{,}9) + \left(-17\frac{3}{5}\right) - \left(-9\frac{3}{10}\right)$
c) $(+7\,954) - (-2047) - (+4643) + (-6009) + (+3\,406)$
d) $(-82{,}56) + (-34{,}67) - (+25{,}17) - (-50{,}78) + (-49{,}49)$

96. Bilde je zwei Additions- und je zwei Subtraktionsaufgaben mit folgenden Ergebnissen!
a) -5 **b)** $+18$ **c)** -31 **d)** 0 **e)** -60 **f)** $+73$
g) -95 **h)** $+23$ **i)** -20 **k)** $-3\frac{1}{5}$ **l)** $+6\frac{6}{7}$ **m)** $-19\frac{3}{4}$

Benutze das Kommutations- und das Assoziationsgesetz der Multiplikation, um möglichst vorteilhaft rechnen zu können!

97. a) $(-7) \cdot (+3)$ **b)** $(-3) \cdot (+18)$ **c)** $(+3) \cdot (-9)$ **d)** $(+9) \cdot (+3)$
e) $(-11) \cdot (-11)$ **f)** $(-2) \cdot (-83)$ **g)** $(-9) \cdot (+8)$ **h)** $(-14) \cdot (-1)$

Y

98. a) $(-15)\cdot(+12)$ b) $(-4)\cdot(-5)$ c) $(-13)\cdot(-11)$ d) $(+1)\cdot(-1)$
e) $(+6)\cdot(-13)$ f) $(-4)\cdot(+27)$ g) $(+9)\cdot(-18)$ h) $(+3)\cdot(-258)$

99. a) $(-2)\cdot(+579)$ b) $(-798)\cdot(-2)$ c) $(+17)\cdot(-14)$
d) $(-19)\cdot(-7)$ e) $(+206)\cdot(-4)$ f) $(-831)\cdot(+3)$

100. a) $(-7)\cdot(+8)\cdot(-3)$ b) $(+2{,}6\cdot(-4)\cdot(+5)$ c) $(-13)\cdot(+2{,}5)\cdot(-1{,}2)$
d) $(+5)\cdot(-1)\cdot(+19)$ e) $(-5)\cdot(+9)\cdot(-1{,}7)$ f) $(+4{,}9)\cdot(-7)\cdot(+2{,}1)$

101. a) $(-9)\cdot(+3)\cdot(-6)$ b) $(+4{,}5)\cdot(-6)\cdot(+8)$ c) $(-7{,}3)\cdot(+6)\cdot(-5)$

102. a) $(+6)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(+7)$ b) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(+7)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ c) $(+27)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)$
d) $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(+94)\cdot\left(+\frac{5}{3}\right)$ e) $\left(+\frac{5}{6}\right)\cdot(-42)\cdot(-1)$ f) $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(+\frac{5}{6}\right)\ (-23)$
g) $\left(+\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ h) $\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(+\frac{23}{27}\right)\cdot\left(+\frac{9}{4}\right)$ i) $\left(+\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)$

103. a) $(+11{,}07)\cdot(-9{,}27)\cdot(+2{,}19)$ b) $(+7{,}04)\cdot(-93{,}75)\cdot(+13{,}11)$
c) $(-6{,}38)\cdot(+0{,}93)\cdot(-8{,}63)$ d) $(+876{,}5)\cdot(+831{,}4)\cdot(-101{,}4)$

104. a) $(+74{,}6)\cdot(-0{,}79)\cdot(+17{,}9)$ b) $(-16{,}61)\cdot(+14{,}35)\cdot(-24{,}18)$
c) $(-3{,}675)\cdot(+8{,}177)\cdot(-0{,}507)$ d) $(+91{,}78)\cdot(-8{,}11)\cdot(-18{,}57)$

105. a) $(+4)\cdot 0$ b) $(-7)\cdot 0$ c) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0$ d) $0\cdot(-2)$
e) $0\cdot(-100)$ f) $0\cdot(+1)$ g) $(-1)\cdot 0$ h) $(+1\,000)\cdot 0$

106. Beachte bei den folgenden Aufgaben, daß zuerst multipliziert werden muß!
a) $(-5)\cdot(-4)+(+3)\cdot(-2)$ b) $(+12)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-(-15)\cdot\left(-1\frac{1}{5}\right)$
c) $\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot(-16)+(+0{,}5)\cdot(-5)\cdot(-4)$ d) $(-1)-\left(-5\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{4}{11}\right)$

107. Führe zunächst die Rechnungen in den eckigen Klammern aus!
a) $[(+10)-(-3)]\cdot(-6)$ b) $[(-3)\cdot(-4)-(+5)]\cdot[(-8)-(+2)\cdot(-6)]$

108. a) $(+2)\cdot\left(-\frac{11}{8}\right)\cdot\left(-\frac{5}{22}\right)\cdot\left(+\frac{7}{10}\right)\cdot\left(+\frac{5}{14}\right)\cdot(-7)$
b) $(+80)\cdot(-91)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(-5)\cdot\left(-\frac{3}{25}\right)$
c) $\left(-5\frac{3}{8}\right)\cdot\left(+2\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-3\frac{5}{9}\right)$
d) $\left(-2\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-3\frac{1}{8}\right)\cdot\left(+1\frac{3}{10}\right)\cdot\left(-4\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-4\frac{3}{10}\right)$
e) $\left(-7\frac{3}{11}\right)\cdot\left(+4\frac{8}{5}\right)\cdot\left(+3\frac{2}{5}\right)\cdot\left(+\frac{4}{9}\right)\cdot\left(-4\frac{1}{4}\right)\cdot\left(+\frac{21}{37}\right)\cdot\left(-1\frac{4}{7}\right)$

109. Gib eine Regel an, nach der das Vorzeichen eines Produktes rationaler Zahlen bestimmt wird!

110. a) $(+3)^5$ b) $(+1)^7$ c) $(-5)^4$ d) $(+1)^6$ e) $(-4)^3$
f) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$ g) $\left(+\frac{2}{3}\right)^4$ h) $\left(-\frac{7}{8}\right)^2$ i) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ k) $\left(+\frac{3}{5}\right)^4$

111. a) $(-3)^2$ b) $(-2)^3$ c) $(-3)^4$ d) $(-5)^2$ e) $(-0{,}3)^2$
f) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ i) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ k) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

112. In welchen Fällen ist die Potenz einer rationalen Zahl positiv, in welchen Fällen negativ?

113. Was ist größer, die Differenz der rationalen Zahlen (-16) und (-28) oder die Summe der rationalen Zahlen 23 und (-45)?

114. Vermindere das Produkt aus (-3) und (-9) um 28 und multipliziere dann mit 14,62!

115. Setze in den folgenden Aufgaben für die Variable x die richtigen Zahlen ein!

a)	$12 + (-16) = x$	f)	$x \cdot (-7) = (-301)$
b)	$x : 13 = (-9)$	g)	$(-32) - (-71) = x$
c)	$(-58) - x = 0$	h)	$x : (-47) = (-15)$
d)	$19 \cdot (-14) = x$	i)	$(-63) + x = 0$
e)	$x + 126 = 39$	k)	$x \cdot 23 = (-184)$

116. Vermehre den Quotienten aus (-3) und 9 um $\left(-1\frac{1}{2}\right)$!

117. Wie groß ist der Quotient aus dem Produkt der rationalen Zahlen (-4), (-3) und 2 und der Summe von (-50) und 14?

118. Durch welche Zahl muß man den Quotienten aus der Summe und der Differenz der rationalen Zahlen (-8) und 3 dividieren, um als Ergebnis (-1) zu erhalten?

Y 2

119. In Hauptwetterstationen, die Tag und Nacht besetzt sind, wird die Temperatur an einem Tage viermal gemessen (um 7.00 Uhr, 13.00 Uhr, 19.00 Uhr und 1.00 Uhr). Aus diesen Werten wird die sogenannte mittlere Temperatur des Tages (durchschnittliche Temperatur) bestimmt. Die Temperaturwerte werden dabei bis auf eine Stelle nach dem Komma genau angegeben.

An mehreren Tagen werden folgende Temperaturen gemessen!

a)	+11,8 °C,	+22,5 °C,	+16,3 °C,	+9,7 °C
b)	− 3,9 °C,	+ 8,4 °C,	+ 6,6 °C,	−2,8 °C
c)	− 6,1 °C,	+ 2,0 °C,	0 °C,	−4,2 °C
d)	−12,3 °C,	−10,5 °C,	− 7,4 °C,	−9,6 °C

Berechne für jeden Tag die mittlere Temperatur!

120. Berechne Summe, Differenz, Produkt und Quotient der rationalen Zahlen 4 und (-2) und addiere die Ergebnisse!

121. Die bisher beobachtete höchste Temperatur der arabischen Wüste betrug +56,6 °C, die bisher tiefste auf der nördlichen Halbkugel −78,0 °C.

Wieviel Grad beträgt der Unterschied zwischen diesen Temperaturen?

122. Der Durchmesser einer Welle wurde fünfmal gemessen. Dabei ergaben sich folgende Werte: 32,25 mm, 32,27 mm, 32,26 mm, 32,29 mm, 32,28 mm. Ermittle den Durchschnitt und gib die Abweichungen der einzelnen Meßwerte vom Durchschnitt mit rationalen Zahlen an!

123. In a) $-2x$ und b) $\frac{x-1}{2}$ sollen für x Zahlen eingesetzt werden. Suche je eine Zahl, die den jeweiligen Ausdruck positiv, negativ bzw. gleich Null werden läßt!

Y

124. Setze für x Zahlen ein, so daß $\frac{5}{x-2}$ **a)** positiv; **b)** negativ wird!
c) Für welchen Wert von x hat $\frac{5}{x-2}$ keinen Sinn?

125. **a)** Gib für a Zahlen an, die die folgenden Ausdrücke erfüllen:
$a < 2a$; $a = 2a$; $a > 2a$.
b) Welche rationale Zahl erfüllt die Gleichung $(x+2)^2 = 0$?

B. Gleichungen

1. Setze in die folgenden Gleichungen für x nacheinander die rationalen Zahlen -4; $-2{,}1$; $-1{,}2$; 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 4; 7; $\frac{1}{6}$; $1{,}2$ ein und stelle fest, ob dadurch eine wahre Aussage oder eine falsche Aussage entsteht!
a) $3x = 12$ **b)** $\frac{1}{2}x = 2$ **c)** $5{,}1 + x = 6{,}3$ **d)** $7x = 8{,}4$

2. Setze in die folgenden Ungleichungen für a nacheinander die rationalen Zahlen -3; $\frac{3}{4}$; -1; $\frac{1}{5}$; $1{,}5$; 0; $\frac{7}{3}$ ein und stelle fest, ob dadurch eine wahre Aussage (w) oder eine falsche Aussage (f) entsteht!
a) $a > -3$ **b)** $a + 1 < 3{,}5$ **c)** $-4 < 2a$

3. **a)** $x + 20 = 50$ **b)** $x - 4 = 16$ **c)** $42 + z = 65$
d) $y + 14 = 32$ **e)** $y - 36 = 70$ **f)** $18 + w = 20$

4. **a)** $24 + x = 126{,}9$ **b)** $x - 6{,}7 = 19$ **c)** $19{,}8 + a = 21{,}5$
d) $2\frac{1}{2} + h = 9\frac{3}{4}$ **e)** $16\frac{4}{5} + h = 22\frac{3}{10}$ **f)** $8\frac{2}{3} + x = 10\frac{4}{5}$

5. **a)** $x + 4{,}16 = 16{,}46$ **b)** $x - 3\frac{1}{2} = 10\frac{3}{4}$ **c)** $24{,}37 + z = 36{,}15$
d) $f - 4\frac{3}{4} = 7\frac{1}{6}$ **e)** $13\frac{1}{2} + b = 42$ **f)** $9{,}3 + y = 18{,}2$

6. **a)** $100 - z = 66$ **b)** $15 - z = 12$ **c)** $34 = 36 - x$
d) $-x + 81 = -19$ **e)** $-c - 3\frac{1}{2} = -14$ **f)** $15{,}95 - x = 12{,}05$

7. **a)** $18\frac{3}{4} = 20\frac{1}{2} - p$ **b)** $17 = 39\frac{3}{8} - x$ **c)** $28{,}25 - s = 12{,}5$
d) $24 - e = 25{,}85$ **e)** $38\frac{7}{8} - x = 40\frac{3}{4}$ **f)** $12{,}5 = -18{,}3 - x$

8. **a)** $4x = 12$ **b)** $36 = 6k$ **c)** $7x = 24\frac{1}{2}$
d) $14x = 154$ **e)** $2{,}3x = 18{,}4$ **f)** $4z = 9\frac{1}{3}$

9. **a)** $0{,}5w = 48$ **b)** $2x = 3\frac{1}{3}$ **c)** $3\frac{2}{3}z = 18\frac{1}{3}$
d) $3x = 2\frac{5}{6}$ **e)** $18x = 27$ **f)** $6\frac{1}{3}x = 25\frac{1}{3}$

10. **a)** $\frac{3}{8}u = 1\frac{1}{5}$ **b)** $3\frac{3}{4} = \frac{5}{9}t$ **c)** $8\frac{1}{3}p = 15$
d) $6\frac{1}{4}x = 6\frac{2}{3}$ **e)** $\frac{3}{14} = 2\frac{4}{7}x$ **f)** $9\frac{4}{5}x = 14$

11. **a)** $\frac{x}{24} = 3$ **b)** $\frac{m}{24} = \frac{1}{2}$ **c)** $38 = \frac{x}{2}$ **d)** $\frac{x}{0{,}25} = 8$
e) $\frac{x}{0{,}4} = 90$ **f)** $80 = \frac{t}{0{,}8}$ **g)** $\frac{x}{1{,}6} = 60$ **h)** $70 = \frac{z}{1{,}24}$

12. **a)** $\frac{x}{6{,}1} = 0{,}05$ **b)** $0{,}7 = \frac{x}{1{,}9}$ **c)** $\frac{x}{\frac{1}{2}} = 3$ **d)** $\frac{u}{\frac{3}{4}} = 2$
e) $\frac{x}{\frac{7}{10}} = 5$ **f)** $\frac{n}{1\frac{1}{6}} = 2$ **g)** $\frac{x}{\frac{4}{9}} = 11\frac{1}{4}$ **h)** $\frac{2y}{1\frac{1}{2}} = 1$

13. a) $3x + 4 = 2x + 7$ b) $5x - 11 = 3x + 15$
c) $16 + 8u = 25 + u$ d) $9 + 5p - 6 = 3p - 11$

14. a) $25 + 6x = 29 + 2x$ b) $6x - 16 = 20 - 3x$
c) $8x + 20 - 4x = 98 - 9x$ d) $15v - 29 - 7v = 17 + 4v + 14$

15. a) $8x = 9x + 17 + 7x - 10x + 31$ b) $8 - 7z + 12 + 9z - 35 + 4z = z$
c) $3x + 20 - 6x + 8x = 2x + 36 - 1$

16. a) $4x + 13 - 7x + 36 + 4x = 14x + 42 - 34 + 30x + 19\frac{1}{2}$
b) $3x + 21 - 8x + 30 - x = 71 - 12x + 19 + 4x - 35\frac{2}{3}$
c) $13 + 34a - 5 + 23 - 14a - 97 = 20a + 29 - 10a$
d) $7 - 5x + 8 + 3x - 5 + 8x = x$

17. a) $3k + 2 + k + 8 + 11k + 4 = k + 16 + 4k - 12 - 3k - 4 - k$
b) $0{,}23l + 4{,}7 - 0{,}19l - 3{,}4 = 0{,}18l + 5{,}7 - 0{,}25l$
c) $0{,}56x + 8{,}9 + 1{,}14x - 6{,}5 + 8{,}8x - 19{,}7 + 12{,}4x - 0{,}9x = 4{,}7$

18. Stelle Gleichungen auf, die folgende Zahlen als Lösung haben:

a) 3 b) $-1{,}5$ c) $\frac{1}{3}$ d) 0,5

19. Welche Zahl ergibt, wenn man sie um 45 vermindert, 44?

20. Eine bestimmte Zahl wird um $13\frac{3}{5}$ vermehrt. Dadurch erhält man $27\frac{1}{2}$. Wie heißt diese Zahl?

21. Welche Zahl muß man um 63 vermindern, damit man 77 erhält?

22. Die Summe zweier Zahlen beträgt 85,17. Ein Summand heißt 18,83. Berechne den anderen Summanden!

23. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 95.

a) Berechne den Minuenden, wenn der Subtrahend $15\left(28, 44\frac{2}{3}\right)$ ist!

b) Berechne den Subtrahenden, wenn der Minuend $113\left(129, 134\frac{7}{8}\right)$ ist!

24. Wenn man das Dreifache einer Zahl um 16 vermindert, erhält man 26. Wie heißt diese Zahl?

25. Das Fünffache einer Zahl wird um 12 vermehrt. Dadurch erhält man 62. Wie heißt die Zahl?

26. Wenn man den fünften Teil einer Zahl um $2\frac{1}{2}$ vermehrt, so erhält man $3\frac{1}{2}$. Wie heißt die Zahl?

27. Vermindert man den dritten Teil einer Zahl um 5, so erhält man -3. Wie heißt die Zahl?

28. Vermehrt man das Dreifache einer Zahl um 4,2, so erhält man ebensoviel wie bei der Verminderung dieser Zahl um 0,2. Wie heißt sie?

Y

29. Ich habe mir eine Zahl aufgeschrieben. Sie wurde verdoppelt und das Ergebnis um 13 vermindert. Der gleiche Wert ergab sich, als ich das Fünffache der aufgeschriebenen Zahl um 55 verminderte. Welche Zahl habe ich mir notiert?

30. Die Summe dreier Zahlen beträgt 40. Die zweite Zahl ist um 3 größer als die erste, die dritte ist um 8 kleiner als die erste Zahl. Wie heißen diese drei Zahlen?
Vergleiche mit dem Beispiel B 21!

31. Die Summe dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen beträgt 45. Wie heißen diese drei Zahlen?

32. In den folgenden Aufgaben ist die Gleichung gegeben. Drücke die gegebenen Beziehungen jeweils in Worten aus!

Beispiel: $x + 2x = 60 - 3x$

Lösung: Ich erhalte dasselbe Ergebnis, wenn ich eine Zahl um ihr Doppeltes vermehre oder wenn ich ihr Dreifaches von 60 subtrahiere.

a) $35 + 3x = 10x$ b) $4x - 3 = 9x - 8$ c) $12 + 2x = 8x - 12$

d) $x + 10x + 100x = 37$ e) $x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x = 10$ f) $\frac{1}{10}x + 3 = \frac{1}{100}x - 6$

33. Zwei Strecken sind zusammen 24 cm lang. Die eine ist doppelt so lang wie die andere. Wie lang ist jede der beiden Strecken?

34. In einem Rechteck mit dem Umfang 26 cm ist die eine der beiden Seiten um 3 cm länger als die andere. Wie lang sind die Rechteckseiten?

35. Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umfang von 64 mm. Die beiden Schenkel sind je eineinhalbmal so lang wie die Basis. Wie lang sind die Dreieckseiten?

36. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist ebenso lang wie die eines Quadrates. Die Summe aller Seiten des Dreiecks und des Quadrates beträgt 71,4 cm.

a) Berechne die Länge einer Seite!

b) Berechne die Umfänge des Dreiecks und des Quadrates!

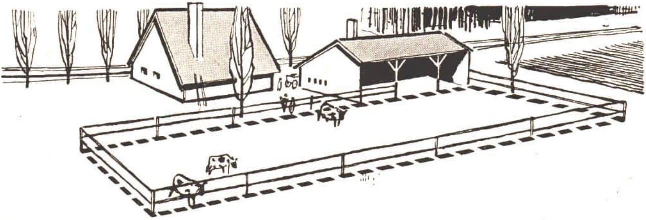
37. Von einem Nebenwinkelpaar ist der eine Winkel dreimal so groß wie der andere. Wie groß sind die beiden Winkel?

38. In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Summe aus einem Basiswinkel und dem Winkel an der Spitze 110°. Wie groß ist der Basiswinkel?

39. In einem Dreieck ist der Außenwinkel von α um 28° kleiner als der Außenwinkel von γ, der Außenwinkel von β um 50° kleiner als der Außenwinkel von γ. Wie groß sind die drei Außenwinkel und die drei Innenwinkel?

40. In einem Dreieck ist β dreimal so groß wie α und γ um 5° größer als α. Wie groß sind α, β und γ?

41. Rudolf und Elke haben zusammen 44,20 MDN gespart. Rudolf hat in seiner Sparbüchse 4,60 MDN weniger als die dreifache Sparsumme seiner Schwester Elke. Wieviel Geld hat jedes der beiden Geschwister?



Y 3

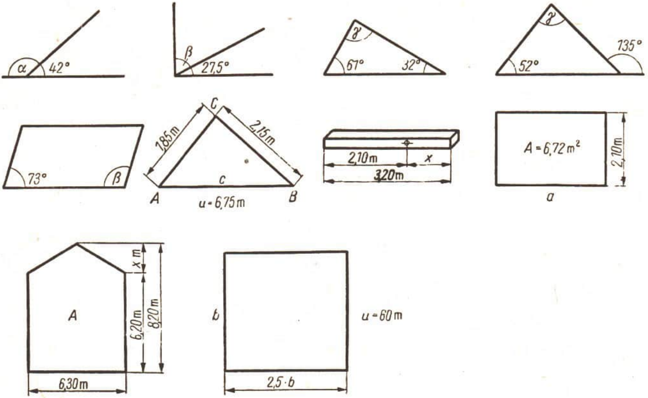
Y

42. Die Weidefläche einer LPG hat die Form eines Rechtecks. Der Umfang beträgt 2 880 m. Die Koppel ist fünfmal so lang wie breit. Berechne den Flächeninhalt (Bild Y 3)!

43. 14 Lehrlinge werden in einem VEG ausgebildet. Es sind zweieinhalbmal soviel Mädchen wie Jungen. Wieviel Jungen und wieviel Mädchen sind dort tätig?

44. Im zweiten Vierteljahr stellte ein volkseigenes Maschinenwerk monatlich durchschnittlich 14 Maschinen mehr her als der Monatsdurchschnitt im ersten Vierteljahr ergab. So wurden im ersten Halbjahr 282 Maschinen produziert. Wie hoch war der Monatsdurchschnitt im ersten Vierteljahr?

45. Der Versteckbolzen einer Anhängerkupplung von 22 mm Durchmesser hält einen Zug von 25 600 kp aus. Aus Sicherheitsgründen darf die Belastung aber nur $\frac{1}{4}$ davon betragen. Wie hoch ist diese?



Y 4

46. Berechne für die im Bild Y 4 dargestellten Sachverhalte jeweils die richtigen Werte für die angegebenen Variablen!

C. Proportionen, Rechenstab, Prozentrechnung

1. Markiere auf einem Blatt Papier zwei Punkte, deren Entfernung nach Augenmaß
a) 5 cm, **b)** 7 cm, **c)** 10 cm beträgt!

Miß diese Entfernungen mit dem Lineal nach und berechne jeweils den absoluten und den relativen Fehler!

2. Schätze die Masse verschiedener Gegenstände (z. B. Buch, Kugelschreiber, Tuschkasten usw.)! Bestimme dann ihre Masse durch Wägung und berechne jeweils den absoluten und den relativen Fehler!

3. Schätze die Länge und Breite der Wandtafel und kontrolliere durch Messung! Wie groß sind der absolute und der relative Fehler?

4. Bei den meisten Menschen ist die Entfernung der Mittelfingerspitzen bei ausgebreiteten Armen gleich der Körpergröße. Wie groß ist bei dir die absolute und die relative Abweichung?

5. Von folgenden Größen ist ein grober Meßwert und der absolute Fehler gegenüber einer genaueren Messung gegeben. Berechne jeweils den relativen Fehler!

Größe	Meßwert	absoluter Fehler
Länge	48,0 m	+0,5 m
Länge	48,0 m	−0,05 m
Fläche	120,0 m²	−0,5 m²
Masse	2,4 kg	+0,05 kg
Masse	2,40 kg	−0,005 kg
Zeit	3 min 20 s	+5 s

6. Stelle für die folgenden Aufgaben Gleichungen auf!

a) $\frac{1}{2}$ l Vollmilch kostet 34 Pf.

b) Für 1 ha Maisanbau benötigt man durchschnittlich 25 kg Saatgut.

c) 50 m Anzugstoff kosten 2000,– MDN.

d) Mit einem Mähdrescher können bei kontinuierlicher Arbeit in 8 h durchschnittlich $3\frac{1}{2}$ ha Getreide gemäht werden.

7. Berechne mit Hilfe der Gleichungen, die du in der Aufgabe C 6 aufgestellt hast, die folgenden Aufgaben!

a) Wieviel MDN kosten $3\frac{1}{4}$ l Milch?

b) Wieviel Saatgut benötigt man für den Anbau von Mais auf einer Fläche von 7,3 ha?

c) Wieviel MDN kosten 3,25 m Anzugstoff?

d) Wieviel Hektar Getreide können in 3 h mit dem Mähdrescher abgeerntet werden?

8. Wir betrachten den Umfang u und den Flächeninhalt A von Quadraten mit den Seitenlängen $a = 1$ cm, 2 cm, 3 cm, ...

a) Stelle in zwei Wertetabellen die zugeordneten Maßzahlen von a und u bzw. von a und A gegenüber!

b) Prüfe nach, ob in beiden Fällen Proportionalität vorliegt!

c) Bilde Verhältnisse aus einander zugeordneten Maßzahlen und ermittle eventuell vorhandene Proportionalitätsfaktoren!

d) Stelle Gleichungen auf!

9. Stelle fest, ob die in den folgenden Tabellen untereinanderstehenden Zahlenfolgen proportional sind und ermittle den Proportionalitätsfaktor!

a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

b)

2	4	6	8	10	12	14	16
5	10	15	20	25	30	35	40

c)

12	18	24	30	36	42	48
6	9	12	15	16	21	22

Y

d)

2	4	8	16	32	64	128
1	3	9	27	81	243	729

10. Ergänze die folgenden Tabellen und stelle fest, ob Proportionalität vorliegt!

a)

x	1	2	3	4	5	6
$3x$						

b)

a	5	10	15	20	25	30
$0 \cdot a$						

c)

p	2	4	6	8	10	12
$1{,}5\,p$						

11. Die von den Mitgliedern landwirtschaftlicher Produktionsgenossenschaften verrichtete Arbeit wird nach Arbeitseinheiten bewertet.

a) Die Genossenschaftsmitglieder Richter, Junge und Platen waren an einem Tage zum Pflügen eingesetzt. Nach Feierabend verbucht der Brigadier folgendes:

	Junge	Richter	Platen
Größe des gepflügten Feldstückes (in ha)	0,70	0,80	0,65
Anzurechnende Arbeitseinheiten	1,4	1,6	1,3

Sind die angerechneten Arbeitseinheiten zu den Größen der Feldstücke proportional?

b) Sprich das Ergebnis über den Zusammenhang der anzurechnenden Arbeitseinheiten mit der Größe der bearbeiteten Feldstücke bei derselben Feldarbeit in einem Satz aus!

c) Das Ergebnis eines anderen Arbeitstages ist folgendes:

	Junge	Richter	Platen
Größe des bearbeiteten Feldes (in ha)	4,4	5,2	4,0
Anzurechnende Arbeitseinheiten	1,1	1,3	1,2

Verfahre wie bei **a)**!

12. Kiefernkantholz wiegt

beim Querschnitt 8 cm × 8 cm und 1 m Länge 4,20 kg,
beim Querschnitt 12 cm × 12 cm und 1 m Länge 9,45 kg,
beim Querschnitt 8 cm × 8 cm und 2 m Länge 8,40 kg.

Y

Vergleiche das Verhältnis der Massen **a)** mit dem Verhältnis der Querschnittsbreiten, **b)** mit dem Verhältnis der Längen und **c)** mit dem Verhältnis der Querschnittsflächen! In welchem Falle besteht Proportionalität?

13. Zeichne acht gleichschenklige Dreiecke mit den Basiswinkeln 80°, 70°, . . ., 20°, 10° und markiere jeweils gleichfarbig

a) die Basiswinkel, **b)** die Innenwinkel an der Spitze,
c) die Außenwinkel an der Spitze!

Miß und berechne die Winkel an der Spitze und stelle die Ergebnisse in einer Zahlentabelle wie der folgenden zusammen:

Basiswinkel	10°	20°	…	80°
Innenwinkel an der Spitze	160°			
Außenwinkel an der Spitze	20°			

Vergleiche **a)** mit **b)**, **a)** mit **c)** und **b)** mit **c)**! In welchen Fällen besteht Proportionalität? Begründe deine Erkenntnisse!

14. Gegeben ist die Zahlenfolge 2; $\frac{7}{5}$; $\frac{16}{3}$; 6; 8,2 und der Proportionalitätsfaktor $k = 3$. Schreibe die Folge auf, die zur gegebenen Folge proportional ist!

15. Durch welche Zahlen muß man die folgende Tabelle ergänzen, damit zwei proportionale Zahlenfolgen entstehen? Gib den Proportionalitätsfaktor an!

1	2,5	$\frac{18}{7}$		5	$\frac{85}{12}$	
	0,5		0,64	1		2,02

16. Ändere die Zahlenfolgen so, daß proportionale Folgen entstehen! Gib dann den Proportionalitätsfaktor an!

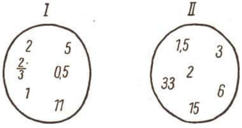
a)

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{14}$

b)

1,0	1,1	2,0	2,5	3,0	3,1	4,0	4,5	5,0
0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

17. Die unter II aufgeführten Zahlen sollen den unter I aufgeführten Zahlen so zugeordnet werden, daß Proportionalität entsteht!
Gib den Proportionalitätsfaktor an! (Bild Y 5)



Y 5

18. In der folgenden Tabelle ist die Masse von Stahl in Abhängigkeit vom Volumen dargestellt.

Volumen des Stahls (in cm³)	1	2	3	4	5	6	7		9	
Masse des Stahls (in g)	7,8	15,6	23,4	31,2	39	46,8		62,4		78

Welche Masse entspricht dem Volumen von 4 cm³?
Welches Volumen entspricht der Masse von 23,4 g?
Ist die Masse dem Volumen proportional?
Wie groß ist der Proportionalitätsfaktor?
Welche Zahlen müssen in den freien Feldern stehen?

19. Die folgende Tabelle gibt den Kraftstoffverbrauch in Kilogramm je Stunde für Motoren in Abhängigkeit von deren Leistung an.

Leistung (in PS)	5	10	25	50	100
Kraftstoffverbrauch (in kg)	1,6	3,0	7,0	13,0	25,0

Wie ändert sich der Kraftstoffverbrauch mit der Leistung des Motors?
Ist der Verbrauch der Leistung des Motors proportional?

20. Zwischen den nach Celsius und den nach Reaumur gemessenen Temperaturwerten besteht die Beziehung, daß 5 °C immer 4 °R entsprechen.

a) Ergänze und erweitere folgende Wertetabelle!

°C	−5	5	10	12	40	100
°R	−4	4	8			

b) Bestätige die Proportionalität zwischen Celsius- und Reaumurwerten! Gib den Proportionalitätsfaktor an!

c) Zeichne eine grafische Darstellung (waagerechter Strahl: Celsiusgrade; lotrechter Strahl: Reaumurgrade)!

d) Zeichne nochmals eine grafische Darstellung wie unter **c)**, diesmal aber mit den Reaumurgraden auf dem waagerechten und den Celsiusgraden auf dem lotrechten Strahl! Wodurch unterscheiden sich die beiden Diagramme?

Verfahre mit den Aufgaben 21 bis 25 wie mit der Aufgabe 20! Fertige jeweils eine passende Wertetabelle an!

21. Eine Gruppe Junger Pioniere legt auf einer Wanderung in $\frac{3}{4}$ h eine Strecke von 3,750 km zurück.

22. Der Fahrpreis für 1 km beträgt bei der Deutschen Reichsbahn in der zweiten Klasse 8 Pf und in der ersten Klasse 11,6 Pf.

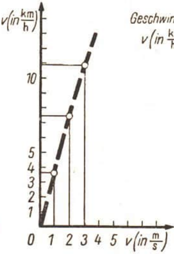
23. Ein Gummiseil erfährt bei einer Belastung mit 5 kp eine Verlängerung um 8 cm.

24. 3 cm³ eines Stoffes haben eine Masse von 8,4 g.

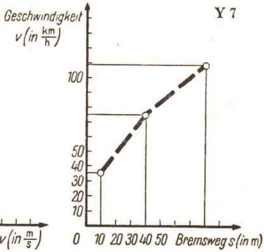
25. Ein elektrischer Heizofen verbraucht in 3 Stunden 4,5 kWh, für die 36 Pf berechnet werden. Hinweis: Hierbei müssen 3 Vergleiche vorgenommen werden.

1. Energieverbrauch und Betriebsdauer, 2. Energieverbrauch und Kosten, 3. Betriebsdauer und Kosten.

26. In den Bildern Y 6 und Y 7 sind für zwei verschiedene Sachverhalte die Zusammenhänge grafisch dargestellt. In welchem Fall liegt Proportionalität vor, in welchem nicht? Bestätige deine Antwort auch rechnerisch, indem du aus den grafischen Darstellungen zusammengehörende Werte abliest und den Verhältnisvergleich durchführst!



Y 6



Y 7

Y

27. Stelle mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors für die folgenden proportionalen Größen eine Wertetabelle auf! Fertige zu jedem Beispiel eine grafische Darstellung an!

a) Saatgutmenge bei Mais und Größe des bestellten Feldes; Proportionalitätsfaktor: 25 kg Mais je Hektar des Feldes.

b) „Schußzahl" beim Weben und Länge des gewebten Stoffes; Proportionalitätsfaktor: 2 200 „Schuß" für jeden Meter Stoff.

c) Gedüngte Getreideanbaufläche und Superphosphatmenge; Proportionalitätsfaktor: 2,1 dt Superphosphat je Hektar Anbaufläche.

d) Transportierter Sand und Anzahl der Fahrten eines LKW; Proportionalitätsfaktor: 3,5 t bei einer Fahrt.

e) Kubikmeter gefördertes Wasser und Pumpzeit einer Pumpe im Pumpspeicherwerk Niederwartha; Proportionalitätsfaktor: 9,8 m^3 Wasser je Sekunde Pumpzeit.

28. Wie heißen Vorder- und Hinterglieder, Innen- und Außenglieder bei folgenden Proportionen?

a) $0{,}18 : 0{,}21 = 6 : 7$ **b)** $9{,}5 : 1{,}9 = 5 : 1$ **c)** $\frac{3}{4} : \frac{9}{20} = 5\frac{5}{6} : 3\frac{1}{2}$

29. Suche zu folgenden Verhältnissen ein zweites, das dieselbe rationale Zahl darstellt, und vereinige beide dann zu einer Proportion! Schreibe jede Proportion auch als eine Gleichung zwischen zwei Brüchen!

a) $7{,}2 : 24$ **b)** $32 : 15{,}2$ **c)** $\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$ **d)** $26 : 0{,}36$

30. Bilde jeweils alle möglichen Proportionen durch Austauschen der Glieder und stelle die Produktgleichung auf!

a) $45 : 75 = 42 : 70$ **b)** $136 : 51 = 176 : 66$ **c)** $1000 : 1 = 27\,000 : 27$
d) $1 : 5 = 12 : 60$ **e)** $3 : 7 = \frac{3}{14} : \frac{1}{2}$ **f)** $3\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4} = 1\frac{3}{7} : \frac{15}{28}$
g) $0{,}95 : 1{,}75 = 11{,}4 : 21$ **h)** $0{,}8 : 2{,}8 = 2{,}5 : 8{,}75$

31. Prüfe mit Hilfe der Produktgleichungen, ob folgende Gleichungen wahre Aussagen sind!

a) $\frac{3}{4} : 1 = 1\frac{1}{2} : 2$ **b)** $1{,}2 : 1{,}5 = 2{,}1 : 2{,}8$ **c)** $2{,}2 : 0{,}11 = 2 : 0{,}1$
d) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$ **e)** $10 : 1{,}2 = 25 : 3$ **f)** $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{2}{25} : \frac{3}{10}$

32. Bilde zu folgenden Produktgleichungen Proportionen!

a) $15 \cdot 42 = 35 \cdot 18$ **b)** $54 \cdot 55 = 66 \cdot 45$
c) $2{,}5 \cdot 0{,}018 = 0{,}15 \cdot 0{,}3$ **d)** $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{7} = \frac{5}{7} \cdot 4\frac{1}{2}$

33. Stelle mit Hilfe der folgenden Zahlen jeweils alle möglichen Proportionen auf!

a) 0,16; 0,32; 0,4 und 0,8 **b)** 44; 4; 11 und 16
c) $3\frac{1}{3}$; $5\frac{1}{4}$; $4\frac{1}{2}$ und $3\frac{8}{9}$ **d)** $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}$ und $\frac{3}{10}$

34. Löse folgende Gleichungen!

a) $x : 15 = 4 : 12$ **b)** $8 : x = 24 : 3$ **c)** $3 : 7 = x : 21$
d) $2 : 1 = 8 : x$ **e)** $7x : 42 = 45 : 27$ **f)** $0{,}42 : 0{,}70 = x : 0{,}20$
g) $\frac{5}{8} : x = \frac{5}{28} : \frac{8}{63}$ **h)** $5{,}2 : 2{,}6 = \frac{7}{3} : x$ **i)** $x : 1\frac{3}{7} = 1\frac{3}{15} : 1\frac{1}{3}$

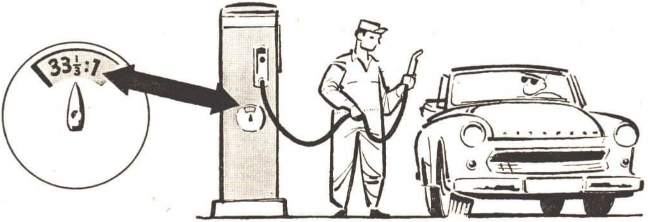
Y

35. Einem Haushalt wurden für den Verbrauch von 14 m^3 Wasser in einem Monat 3,78 MDN berechnet. Wieviel Kubikmeter sind im vorausgegangenen Monat verbraucht worden, wenn 4,59 MDN bezahlt wurden?

36. Für viele Zweitaktmotoren werden Benzin und Öl im Verhältnis 25 : 1 gemischt.

a) Wieviel Liter Benzin muß man demnach mit 1,25 l Öl mischen?

b) Wieviel Liter Öl muß man demnach mit 120 l Benzin mischen?



Y 8

37. Einige Zweitaktmotoren erhalten ein Gemisch im Verhältnis $33\frac{1}{3} : 1$. Beantworte die Fragen in Aufgabe 36a und b für dieses Mischungsverhältnis!

38. In 5 kg Messing Ms 60 sind rund 3 kg Kupfer und rund 2 kg Zink enthalten. Berechne die Kupfer- und die Zinkmenge in 1 t Messing!

39. Eine Gießpfanne enthält 125 kg Rotguß. Diese Legierung besteht zu 43 Teilen aus Kupfer, zu 5 Teilen aus Zinn und zu 2 Teilen aus Zink. Berechne die Anteile in Kilogramm!

40. Unter der Steigung einer Treppe versteht man das Verhältnis der Höhe ihrer Stufen zu deren Breite. Welchen Höhenunterschied überwindet eine Treppe, deren Stufen eine Höhe von 15 cm und eine Breite von 35 cm haben, bei einer waagerechten Entfernung von 2,45 m?

41. Welche Streckenlänge auf einer Landkarte entspricht einer Entfernung von 600 m in der Natur bei folgenden Maßstäben?

    a) 1 : 10 000 **b)** 1 : 50 000 **c)** 1 : 100 000

42. Der Maßstab einer Landkarte ist 1 : 25 000. Wie groß sind die Entfernungen in der Natur, denen auf der Karte folgende Streckenlängen entsprechen?

    a) 2 cm **b)** 5 cm **c)** 8 cm

43. Für 55 Kilowattstunden Elektroenergie bezahlt man 4,40 MDN.
    Wieviel MDN kosten 75 Kilowattstunden?

44. 72 m^3 Stadtgas kosten 11,52 MDN. Wieviel MDN kosten 106 m^3 Gas?

45. In 800 g einer Lösung sind 50 g Salz enthalten. Wieviel Gramm Salz enthalten 240 g dieser Lösung?

46. Auf 6 ha Ackerfläche wurden 10,8 dt Getreide ausgesät. Wieviel Getreide benötigt man, um 15 ha zu besäen?

47. Für die Herstellung von 800 Heften benötigt man 68,8 kg Papier. Wieviel Kilogramm Papier wird bei der Herstellung von 1200 Heften verbraucht?

Y

48. 15 Liter Petroleum wiegen 12,3 kg. Wie groß ist die Masse von 35 l Petroleum?

49. Aus 24 kg Baumwollsamen lassen sich 5,4 kg Öl gewinnen. Wieviel Kilogramm Samen braucht man zur Gewinnung von 7,2 kg Öl?

50. In 100 m^3 Luft sind 21 m^3 Sauerstoff enthalten. Wieviel Kubikmeter Sauerstoff sind in einem Raum enthalten, der 10 m lang, 8 m breit und 3,25 m hoch ist?

51. Ein Stück Stahl mit einem Volumen von 60 cm^3 wiegt 468 g. Wieviel wiegt ein Stahlstück mit einem Volumen von 25 cm^3.

Fertige für die Aufgaben C 52 bis 55 grafische Darstellungen an! (Verwende Millimeterpapier!) Ermittle die gefragten Größen jeweils grafisch!

52. 35 dt Siebbraunkohle kosten 94,50 MDN. Wieviel MDN kosten 20 dt? Wieviel Dezitonnen erhält man für 54 MDN?

53. 150 dt Rüben ergeben 25 dt Zucker. Wieviel Dezitonnen Zucker ergeben 60 dt Rüben? Wieviel Dezitonnen Rüben sind zur Gewinnung von 15 dt Zucker notwendig?

54. Aus 5 dt Leinsamen können 165 kg Öl gewonnen werden. Wieviel Kilogramm gewinnt man aus 3 dt Leinsamen? Ermittle die nötige Leinsamenmenge für 1 dt Öl!

55. Ein Arbeiter erhält einen Zeitlohn von 2,70 MDN je Stunde. Wie hoch ist sein Lohn für eine 40stündige Arbeit? Wie lange hat er für 13,50 MDN Lohn gearbeitet?

56. Ein Rennfahrer fährt auf einer Autorennstrecke bei einer bestimmten Durchschnittsgeschwindigkeit eine Strecke von 400 km in $2\frac{1}{2}$ h. Wie lang ist die Fahrstrecke bei 2 h? Ermittle die Fahrzeit für 450 m!

57. Ein Verkehrsflugzeug mit Kolbenmotoren legt 500 km in 90 Minuten zurück. Das sowjetische Düsenverkehrsflugzeug TU 104 benötigt für die gleiche Strecke 40 Minuten. Ermittle für beide Typen die Flugzeit für 300 km! Welche Strecken legen beide in 2 Stunden zurück?

58. Ergänze die folgenden Sätze!

a) Je mehr Personen von einem bestimmten Vorrat verpflegt werden, desto ... Zeit reicht er.
b) Je höher die Geschwindigkeit eines Zuges, Kraftwagens oder Motorrades ist, desto ... Zeit wird benötigt, um eine bestimmte Strecke zurückzulegen.
c) Je mehr Helfer mitarbeiten, desto ... Zeit benötigt man für eine Arbeit.

59. Sprich die Beziehungen in Aufgabe 58 aus, indem du mit „je weniger", „je geringer" beginnst!

60. Bilde entsprechend Aufgabe 58 weitere Aussagen, denen indirekte Proportionalität zugrunde liegt!

61. In den folgenden Beispielen für indirekte Proportionalität ist mit Hilfe des gegebenen konstanten Produktes eine Wertetabelle für die genannten Größen aufzustellen. Gib diesen Größen dabei richtige Benennungen!

a) Anzahl der Tiere und Liegefläche je Tier in einem Rinderstall; konstantes Produkt: 180 m² Stallgröße.
b) Geschwindigkeit und Fahrzeit eines Kraftwagens; konstantes Produkt: 36 km Fahrstrecke.
c) Anzahl und Inhalt der aus einem Faß abgefüllten Flaschen; konstantes Produkt: 50 l Faßinhalt.

62. In den nachfolgenden Beispielen sind die Größen jeweils indirekt proportional. Stelle jedesmal eine Wertetabelle auf und bestimme das konstante Produkt! Gib dem Produkt nach Möglichkeit auch eine sachliche Deutung!

a) Fassungsvermögen eines LKW und Anzahl der Fahrten beim Abtransport von Schutt: Bei 1,75 m³ Fassungsvermögen sind 16 Fahrten nötig.
b) Anzahl der laufenden Drehmaschinen und Arbeitszeit bei einer bestimmten Produktionsauflage: Wenn 3 Drehmaschinen arbeiten, werden 60 h benötigt.
c) Abstand und Anzahl der Pflanzen für eine bestimmte Beetumrandung: Bei einem Abstand von 10 cm braucht man 160 Stück.
d) Breite und Anzahl der Bretter zur Herstellung einer bestimmten Bretterwand: Bei 20 cm breiten Brettern benötigt man 36 Stück.
e) Futterverbrauch je Tag und Anzahl der Futtertage bei einer bestimmten Silogröße: Bei einem Tagesverbrauch von 8 dt reicht der Vorrat für 200 Tage.

63. Mehrere Rechtecke haben jeweils den Flächeninhalt 12 m².

a) Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

Länge der einen Seite a (in m)	1	2	3	4	6	8	10	12
Länge der benachbarten Seite b (in m)								

b) Erweitere die Tabelle durch eine Zeile für die Werte von $\frac{1}{b}$!

c) Bilde Verhältnisse beliebiger Werte von a und der entsprechenden Werte von $\frac{1}{b}$!

d) Welche Beziehung besteht zwischen den Werten von a und von b?

e) Formuliere diese Beziehung in Form einer Gleichung!

64. Prüfe, ob die Zahlenfolgen direkt oder indirekt proportional sind!

a)

10	8	5	4	2	1	0,5	0,1
0,1	0,125	0,2	0,25	0,5	1	2	10

b)

300	280	250	210	190	160	120	100	70	30
50	70	100	140	160	190	230	250	280	320

c)

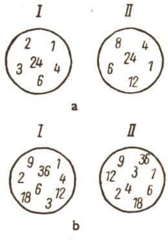
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

d)

2	4	6	8	10	20	30	40	50	100
0,25	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	0,05	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{80}$	0,01	$\frac{1}{200}$

e)

40	35	30	25	20	15	10	5
10	8,75	$\frac{15}{2}$	6	5	3,75	$\frac{5}{2}$	1,25



Y 9

65. Gib in den Bildern Y 9 a und b eine Zuordnung der Zahlen der zweiten Menge zu den Zahlen der ersten Menge an, so daß die Zahlenmengen indirekt proportional sind!

66. In der folgenden Tabelle ist der Zusammenhang zwischen der Zeit t, die für die Herstellung eines bestimmten Einzelteils benötigt wird (Vorgabezeit), und der Menge n der in einer Stunde hergestellten Teile (Stundennorm) angegeben.

t (in min)	60	40	30	24	20	16	12		8		4
n (in $\frac{\text{St}}{\text{h}}$)	2	3	4	5	6	7,5		12		20	

a) Beschreibe die Abhängigkeit der betrachteten Größen!

b) Formuliere diese Abhängigkeit mit Hilfe einer Gleichung!

c) Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

Y

67. In welcher Abhängigkeit stehen die folgenden Größen?

a) Die Anzahl der Telegrafenmasten für eine bestimmte Leitungslänge und der gleichbleibende Abstand zwischen je zwei Masten.

b) Die Länge eines Hebelarmes und die an diesem angreifende Kraft, falls der Hebel im Gleichgewicht ist.

c) Die gleichbleibende Geschwindigkeit und die Zeit, die erforderlich ist, um einen bestimmten Weg zurückzulegen.

68. Gib für die Zahl 252 in einer Tabelle alle Möglichkeiten an, diese Zahl als Produkt aus zwei natürlichen Zahlen zu schreiben! Welchen Zusammenhang zwischen den Faktoren kannst du aus der Tabelle ablesen?

69. Bei einer Kundgebung ist eine Kolonne, die in Zwölferreihen marschiert, etwa 120 m lang. Welche Länge hätte sie **a)** bei Sechserreihen, **b)** bei Reihen zu 18?

70. 5 Schüler graben im Schulgarten eine Versuchsfläche in 12 h um. In welcher Zeit schaffen die gleiche Arbeit **a)** 6, **b)** 10, **c)** 4 Schüler?

71. 4 Schüler haben die Hälfte des Schulgartens in insgesamt 18 h umgegraben. Die andere Hälfte des Gartens soll in 8 h umgegraben sein. Wieviel Schüler müssen graben?

72. Eine Gruppe Junger Pioniere legte bei einer Wanderung in einer Stunde durchschnittlich 4,4 km zurück. Die Wanderung dauerte $2\frac{1}{2}$ h, wenn man die Pausen nicht mit einrechnet.

a) In welcher Zeit würde ein Radfahrer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ diese Wanderstrecke durchfahren?

b) Wieviel Zeit benötigt ein Motorradfahrer bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, wenn er die gleiche Strecke durchfährt?

73. Ein Lastkraftwagen durchfährt eine Strecke in $2\frac{3}{4}$ h, wenn seine Durchschnittsgeschwindigkeit $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt. Welche Zeit braucht ein anderer Kraftfahrer bei einer mittleren Geschwindigkeit von $55\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ für die gleiche Strecke?

74. Ein D-Zug erreicht sein Ziel in 110 min bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) In welcher Zeit durchfährt ein Personenzug bei einer mittleren Geschwindigkeit von $33\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ die gleiche Strecke?

b) Ein anderer Personenzug braucht nach dem Fahrplan 3 h, ein Schnelltriebwagen benötigt 80 min für die gleiche Strecke.

Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit für den zweiten Personenzug und für den Schnelltriebwagen?

75. Die Tankstelle einer RTS hat einen Vorrat an Dieselkraftstoff für 20 Tage, wenn sie täglich 1 200 l abgibt. Während der Ernte werden aber im Durchschnitt täglich 1 500 l gebraucht. Wie lange reicht der Vorrat?

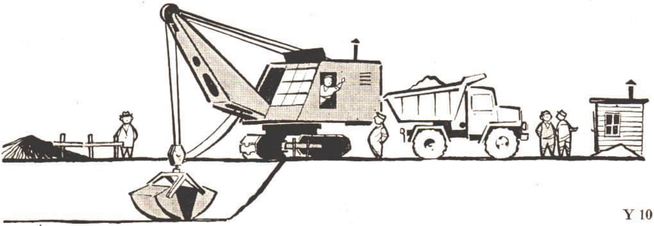
76. **a)** Ein Mäher mäht mit der Sense eine Wiese von 28 a in 8 h. Wie lange braucht er für 1 ha?

b) Mit einem Grasmäher, der eine Arbeitsbreite von 1,20 m hat, kann man in 8 h 3 ha mähen. Wie lange braucht man für 1 ha?

c) Vergleiche die Arbeitszeiten je Hektar in **a)** und **b)** mit den in 8 h gemähten Flächen!

77. An einem Wege soll zu beiden Seiten ein Wassergraben mit gleicher Querschnittsfläche ausgehoben werden. An dem Graben auf der rechten Seite arbeiten 5 Arbeiter 6 Tage. Auf der linken Seite werden 3 Arbeiter eingesetzt. Wie lange arbeiten diese an dem Graben?

Y



Y 10

78. Für einen Neubau wird eine Baugrube für das Fundament von einem Bagger ausgehoben. Das Erdreich wird durch Lastkraftwagen abgefahren. Nachdem 10 Fahrzeuge insgesamt 48 h lang gefahren sind, ist etwa die Hälfte der Grube ausgehoben. Für die zweite Hälfte setzt man 6 Lastkraftwagen mit Hängern ein. In wieviel Stunden ist der Rest abgefahren? (LKW und Hänger mögen jeweils die gleiche Ladefähigkeit haben.)

79. Eine Treppe soll statt mit 24 Stufen zu je 18 cm Höhe mit Stufen aufgebaut werden, die 2 cm niedriger sind.

80. Wenn man einen Flur mit quadratischen Platten von der Größe 20 cm × 20 cm auslegt, braucht man 1 536 Stück. Es stehen aber nur solche von 25 cm × 25 cm zur Verfügung. Wieviel Platten sind nötig, wenn der Abfall in jedem Falle gleich groß ist?

81. Ein Baumstamm gibt 14 Bretter von 4 cm Dicke. Wieviel Bretter von 3,5 cm Dicke hätten daraus geschnitten werden können? (Der Schnittverlust bleibt unberücksichtigt.)

82. Auf der Achse eines Motors, der in der Minute 1 200 Umdrehungen macht, sitzt eine Riemenscheibe von 150 mm Durchmesser. Von ihr läuft ein Treibriemen über eine zweite Riemenscheibe. Diese soll 240 Umdrehungen je Minute machen. Wie groß muß der Durchmesser der zweiten Scheibe sein, wenn der Riemenschlupf unwesentlich ist?

83. Vorteilhafter als Riementriebe sind Zahnradtriebe. Das Zahnrad auf einer Motorwelle hat 24 Zähne, am getriebenen Zahnrad sind es 75 Zähne. Die Drehzahl des Motors beträgt 900 Umdrehungen je Minute. Wie groß ist die Drehzahl des getriebenen Zahnrads?

84. Bei einem zweiseitigen Handbremshebel ist der Arm, an dem die Handkraft mit 20 kp ansetzt, 550 mm lang. Der andere Arm, der einen Zug bewirkt, mißt 100 mm. Berechne die Zugkraft!

85. Bei einer Fußbremse gelten folgende Werte: Fußkraft 35 kp, Kraftarm 400 mm, Zugarm 85 mm.

86. 1 Seemeile (sm) ist gleich 1 852 m. Gib die Länge des Erdumfanges (rund 40 000 km) in Seemeilen an!

87. Die durchschnittlichen Geschwindigkeiten eines Lastkraftwagens und eines Personenkraftwagens verhalten sich wie 2:3. In welcher Zeit fährt der PKW die Strecke Eisenach–Dresden (Autobahn), wenn der LKW 4 h 40 min benötigt?

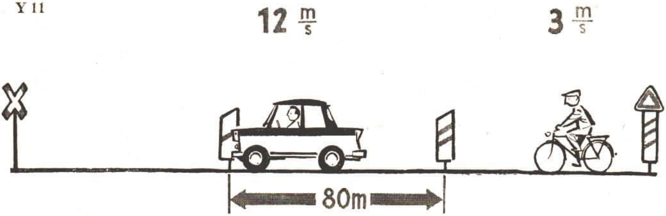
Y

88. Ein Radfahrer fährt auf der Straße von Halle nach Sangerhausen durchschnittlich 14,4 km in der Stunde. Um 15 Uhr war er 3,6 km hinter Halle. Wann kann er in Sangerhausen eintreffen, wenn die Entfernung zwischen beiden Städten 50,4 km beträgt?

89. Ein Personenkraftwagen verbraucht 10,5 l Benzin auf einer Fahrt von 100 km. Man will eine Strecke von 140 km fahren.

90. Der Wasserhahn tropft. In 90 min läuft das Litermaß voll. Berechne den eintretenden Wasserverlust in **a)** einem Tag, **b)** einem Monat, **c)** einem Jahr!

Y 11



91. Vor Bahnübergängen stehen drei-, zwei- und einstreifige Baken. Ein Streifen entspricht 80 m Entfernung. Wieviel Zeit braucht ein Radfahrer (Autofahrer) bei einer Geschwindigkeit von $3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ von der dreistreifigen Bake bis zum Gleiskörper?

92. Die Lufthülle drückt auf 10 cm² durchschnittlich mit 10,33 kp. Der menschliche Körper hat eine Oberfläche von etwa 1,5 m². Welche Kraft drückt auf die Oberfläche eines Menschen?

93. Zum Streichen von 20 m² Fußboden sind 5,4 kg Vorstreichfarbe erforderlich. Welche Menge wird zum Streichen **a)** von 37,70 m², **b)** von 49,80 m² gebraucht?

94. Vier Maler können das Innere einer Messehalle von einem Gerüst aus in 12 Arbeitstagen, das heißt in 96 h, streichen. Wieviel Maler müssen für eine zweite und dritte Schicht herangezogen werden, wenn das Gerüst nach 4 Tagen abgebaut werden muß?

95. Ein Bockgerüst für Maurerarbeiten ist 1,50 m breit und 5,00 m lang. Auf ihm arbeitet eine Dreiergruppe. Ein Mann wiegt durchschnittlich 75 kg. Außerdem stehen auf dem Gerüst zwei gefüllte Mörtelkästen $\left(\text{Eigenmasse des Kastens 20 kg, Inhalt 100 l, Dichte des Mörtels } 1{,}75\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right)$.
Berechne **a)** die Gerüstfläche, **b)** die zulässige Belastung $\left(300\,\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}\right)$, **c)** die Masse der beiden Mörtelkästen mit Mörtel, **d)** die Gesamtbelastung, **e)** die Anzahl der Ziegel (1 Ziegel $\triangleq$ 3 kg), die noch gelagert werden könnten!

96. Einer LPG stehen für 34 ha Haferanbaufläche 40 dt Kalkstickstoff zur Verfügung. Wieviel Dezitonnen Kalkstickstoff sind auf einen Schlag von 8,6 ha zu streuen?

97. Mit drei gekoppelten Eggen muß man 65mal über ein Feld fahren. Wie oft muß man mit fünf gekoppelten Eggen fahren?

98. Ein Mähdrescher hat eine Masse von 5 000 kg (ohne Betriebsstoff und ohne Kühlwasser). Um ein Versacken des Mähdreschers zu vermeiden, müssen die Reifen der Räder mit möglichst großer Fläche auf dem Erdreich aufliegen. Die 4 Räder liegen insgesamt mit einer Fläche von 2 400 cm² auf.

a) Wie groß ist der Druck in $\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$?

b) Um wieviel $\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ erhöht sich der Druck für die gleiche Auflagefläche, wenn zur Masse des Mähdreschers 13 dt Korn im gefüllten Bunker, 130 l Benzin $\left(\varrho = 0{,}88\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ und 40 l Kühlwasser hinzukommen?

99. Ein Hektar Zuckerrüben muß in der Wachstumszeit mindestens 4 000 000 l Wasser bekommen. Wieviel Liter Niederschläge je Quadratmeter sind das?

Y

100. Die Mähvorrichtung des Mähdreschers kann hydraulisch gehoben werden. Dabei drückt eine Pumpe mit einem Druck von $20\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ Öl in den hydraulischen Zylinder (Innendurchmesser 100 mm). Welche Druckkraft wird dadurch im hydraulischen Zylinder erzeugt?

101. Ein Gestüt ist mit 63 Pferden besetzt. Sein Futtervorrat reicht für 72 Tage. 9 Pferde werden verkauft. Wie lange reicht jetzt der Futtervorrat?

102. Das volkseigene Gut Neuendorf lieferte dem VEAB an einem Tage 186 dt Roggen ab und erhielt dafür 3 906 MDN.

a) Wieviel MDN erbrachte eine Lieferung am nächsten Tage, die 209 dt betrug?
b) Für eine dritte Lieferung erhielt das VEG 7 266 MDN. Für wieviel Dezitonnen war der Preis berechnet?

103. Eine LPG bewirtschaftet 3 Teiche: Teich I 1,9 ha, Teich II 0,7 ha, Teich III 2,3 ha. Abzuliefern sind im Jahre 150 kg Karpfen je Hektar. Da die LPG die Teiche gut betreute, konnte sie 360 kg Karpfen je Hektar fischen.

a) Wie hoch war das Ablieferungssoll?
b) Wieviel Kilogramm fischte die LPG? Vergleiche mit dem Soll!
c) 52 kg verbrauchten die Mitglieder selbst. Den anderen Teil lieferten sie ab. Die LPG lieferte 1 480 kg Karpfen über 1 kg Masse je Karpfen ab, 1 kg zu 2,50 MDN, den Rest unter 1 kg Masse, 1 kg zu 2,10 MDN. Berechne die Einnahme aus dem Fischverkauf!

104. Beim Handmelken rechnet man mit 0,8 kg Milch je Minute.

a) Wieviel Kilogramm Milch melken 3 Melker in $\frac{3}{4}$ h?
b) In welcher Zeit werden 12 kg Milch von 3 Melkern gemolken?

105. Auf einem volkseigenen Gut wurden von 5 Melkern 35 Kühe in $1\frac{1}{4}$ h mit der Hand gemolken.

a) Wieviel Kühe wurden in 1 h gemolken?
b) Wieviel Kühe hat ein Melker je Stunde gemolken?
c) Nach der Anschaffung einer Melkmaschine benötigten 2 Melker für 39 Kühe $1\frac{1}{2}$ h. Wieviel Kühe konnten nun in einer Stunde gemolken werden?

106. In einer Braunkohlengrube fördert ein Schaufelradbagger in 24 min 280 t Rohbraunkohle.

a) Wieviel Tonnen Rohbraunkohle fördert der Schaufelradbagger in 1 h?
b) Wieviel Großraumwagen mit einer Lademasse von 60 t sind jede Stunde erforderlich, um die Braunkohle abzutransportieren?

107. Eine Brigade von 9 Schaltungsmonteuren erfüllte einen Arbeitsauftrag in 46 h.

a) In welcher Zeit kann der Auftrag von 12 Monteuren erledigt werden?
b) Welche Zeit würden 7 Monteure dafür benötigen?
c) Wieviel Arbeitsstunden werden eingespart, wenn 8 Monteure den Auftrag ebenfalls in 46 h erledigen?

Y

108. Mit 12 Drehmaschinen kann eine Serie von Kleinmaschinenteilen in 22 h gefertigt werden.

a) Wieviel Stunden dauert die Fertigung, wenn 2 Drehmaschinen wegen notwendiger Reparaturen für diesen Auftrag ausfallen?
b) Um wieviel Stunden verschiebt sich der Abschluß der Fertigung?

109. Wieviel Zähne haben 300 mm lange Sägeblätter, wenn **a)** bei grober Teilung 16 Zähne, **b)** bei mittlerer Teilung 22 Zähne, **c)** bei feiner Teilung 32 Zähne auf 25 mm Länge des Sägeblattes kommen?

110. Ein [-Stahl 10 (lies: U-Stahl 10) von 2,50 m Länge wiegt 26,5 kg. Wieviel wiegt ein Träger von 3,70 m Länge gleichen Profils?

111. Eine Bohrspindel macht 400 Umdrehungen in der Minute. Sie wird durch einen Motor mit 1 400 Umdrehungen je Minute angetrieben. Auf der Achse des Motors sitzt ein Zahnrad mit 36 Zähnen. Berechne die Anzahl der Zähne, die das Zahnrad auf der Bohrspindelachse hat!

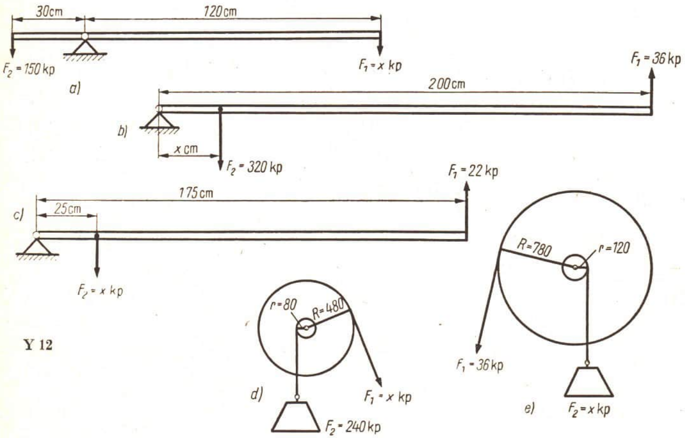
112. Bei 250 Umdrehungen in der Minute beträgt die Riemengeschwindigkeit eines Motors $7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wie groß ist sie bei 900 Umdrehungen je Minute?

113. Ein Rundstahl von 1 340 mm Länge wird bei einer Schnittgeschwindigkeit von $11\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$ in 2 h 50 min abgedreht.

a) Welche Zeit wird unter gleichen Bedingungen für einen Stahl von 1 620 mm Länge gebraucht?

b) Welche Zeit wird zum Abdrehen eines Stahls von 1 340 mm Länge gebraucht, wenn die Schnittgeschwindigkeit durch Einsatz von Schnellarbeitsstahl auf $21\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$ gesteigert wird?

114. Stelle mit Hilfe der Bilder Y 12a bis e Ansätze auf und bestimme jeweils den Wert von x!



Y 12

115. Stelle nacheinander mit dem Läufer auf der Skale D die folgenden Zahlen ein!

a) 1,07; 1,075; 10,2; 10,24; 100,9; 1085; 0,109; 0,015
b) 1,17; 119,2; 0,114; 112,5; 11,5; 1150; 0,115; 0,0115
c) 123,4; 12,7; 1364; 0,131; 1,482; 14,82; 148,2; 1482
d) 1,56; 17,8; 0,184; 0,0199; 1950; 19500; 195 000

116. Stelle den Läufer beliebig in dem Bereich von 1 bis 2 auf der Skale D ein und lies die entsprechenden Ziffernfolgen ab!

117. Stelle nacheinander mit dem Läufer auf der Skale D die folgenden Zahlen ein!

a) 2,01; 202; 2 030; 0,204; 2 080; 20 900; 0,209; 0,0209
b) 210; 211; 212; 218; 219; 223; 2 345; 243; 255; 267
c) 289; 301; 327; 383; 338; 399

118. Stelle den Läufer beliebig in dem Bereich zwischen 2 und 4 ein und lies die entsprechenden Ziffernfolgen ab!

119. Stelle nacheinander die Zahlen mit folgender Ziffernfolge ein!

a) 405; 410; 415; 583; 792; 995; 475; 480; 483

b) 763; 666; 801; 870; 807; 708; 780; 958

Berechne folgende Produkte mit Hilfe des Rechenstabes!

120.	**a)** $437 \cdot 11{,}9$	**b)** $31{,}4 \cdot 2{,}98$	**c)** $235{,}4 \cdot 0{,}402$	**d)** $108{,}2 \cdot 0{,}52$
121.	**a)** $22{,}4 \cdot 247$	**b)** $12{,}4 \cdot 97{,}6$	**c)** $0{,}493 \cdot 0{,}439$	**d)** $5{,}28 \cdot 297$
122.	**a)** $82{,}4 \cdot 76{,}5$	**b)** $99{,}7 \cdot 0{,}0109$	**c)** $0{,}837 \cdot 102$	**d)** $52{,}3 \cdot 19{,}5$
123.	**a)** $1{,}68 \cdot 3{,}74$	**b)** $2{,}14 \cdot 4{,}25$	**c)** $3{,}21 \cdot 2{,}76$	**d)** $0{,}324 \cdot 23{,}4$
124.	**a)** $0{,}144 \cdot 74{,}5$	**b)** $0{,}0322 \cdot 0{,}274$	**c)** $420 \cdot 1{,}9$	**d)** $54{,}6 \cdot 0{,}166$
125.	**a)** $315 \cdot 0{,}263$	**b)** $17{,}61 \cdot 41{,}3$	**c)** $2450 \cdot 2{,}77$	**d)** $0{,}1985 \cdot 3{,}96$
126.	**a)** $4{,}3 \cdot 6{,}7$	**b)** $5{,}95 \cdot 8{,}47$	**c)** $73{,}2 \cdot 0{,}69$	**d)** $40{,}7 \cdot 83{,}5$

Berechne folgende Quotienten mit Hilfe des Rechenstabes!

127.	**a)** $0{,}912 : 0{,}605$	**b)** $8{,}53 : 0{,}541$	**c)** $91{,}3 : 0{,}47$	**d)** $733 : 3{,}14$
128.	**a)** $4\,520 : 25{,}7$	**b)** $426 : 60{,}9$	**c)** $0{,}615 : 72{,}1$	**d)** $3{,}14 : 6{,}25$
129.	**a)** $1\,864 : 389$	**b)** $22{,}9 : 70{,}8$	**c)** $0{,}837 : 102$	**d)** $102 : 0{,}837$
130.	**a)** $3 : 2{,}4$	**b)** $8{,}4 : 3{,}8$	**c)** $637 : 3{,}41$	**d)** $0{,}742 : 0{,}628$
131.	**a)** $83{,}4 : 0{,}643$	**b)** $743 : 0{,}567$	**c)** $96{,}2 : 4\,540$	**d)** $2{,}27 : 37{,}5$
132.	**a)** $6{,}4 : 7{,}8$	**b)** $14{,}2 : 18{,}9$	**c)** $58{,}3 : 0{,}643$	**d)** $31{,}8 : 5{,}1$
133.	**a)** $239 : 72{,}6$	**b)** $2{,}38 : 63{,}9$	**c)** $0{,}357 : 46{,}5$	**d)** $0{,}827 : 0{,}895$

134. Fertige eine Umrechnungstabelle von Millibar auf Torr mit Hilfe des Rechenstabs an! Wähle den Bereich 860, 870, . . ., 1 040, 1 050 Millibar! Es gilt: 1 mb = 0,75 006 Torr.

135. Fertige eine Wertetabelle an, indem du den Zahlen $a = 0{,}443;\ 0{,}448;\ 0{,}453;\ \ldots;\ 0{,}493;\ 0{,}499$ die Zahlen $3{,}14 \cdot a$ zuordnest!

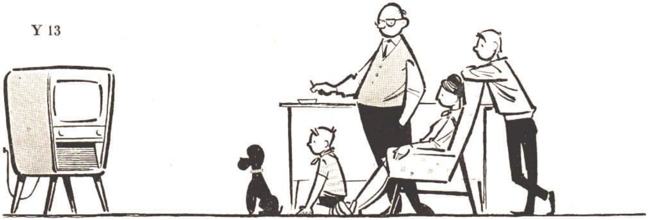
136. Stelle eine Tabelle zur Umrechnung von Zoll (Kurzzeichen: ″) in Millimeter auf! (1″ = 25,4 mm).

137. In der zweiten Hälfte des Jahres 1964 konnte festgestellt werden, daß in der DDR auf 100 Haushalte bereits 42 Fernsehgeräte kommen.

a) Wieviel Fernsehgeräte entfallen nach dieser Statistik auf einen Ort mit 740 Haushalten?

Y

Y 13



b) In einem anderen Ort mit 1 420 Haushalten sind 692 Fernsehgeräte angemeldet. Liegt die Anzahl an Geräten je 100 Haushalte unter oder über dem DDR-Durchschnitt?

138. Gib für die Zahlen in der folgenden Tabelle die Verhältnisse der Zahlen a zu den zugeordneten Zahlen b an! Verwandle die Brüche dann in Hundertstel! (Rechne mit Hilfe des Rechenstabs!)

a	13	15	8	31	24	18,2	26
b	39	70	49,2	76	31	53,6	33

139. Ordne folgende Zahlen nach ihrer Größe!

a) $\frac{7}{10}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{17}{20}$; $\frac{18}{25}$; $\frac{29}{49}$; $\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{6}$; $\frac{76}{83}$; $\frac{24}{31}$; $\frac{17}{19}$; $\frac{26}{33}$; $\frac{81}{100}$

140. Die folgende Tabelle zeigt die Planerfüllung von drei landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften in der Rinderablieferung.

	LPG der Gemeinde A	LPG der Gemeinde B	LPG der Gemeinde C
Planerfüllung nach dem ersten Quartal	53 dt	43,2 dt	102 dt
Jahresplan	240 dt	144 dt	360 dt

Welche LPG hat ihren Plan in der Rinderablieferung nach dem ersten Quartal am besten erfüllt?

141. Bei einem Schulsportfest gewannen 30 von 260 Schülern der Schule A einen Preis. Von 225 Schülern der Schule B wurden 36 Schüler mit einem Preis ausgezeichnet. Welche Schule hat das bessere Ergebnis erzielt?

142. 50 Schüler einer Schule A besuchten den Schwimmunterricht. Nach einem halben Jahr legten 37 davon die Freischwimmerprüfung ab. Von 76 Schülern einer Schule B legten nach dem gleichen Zeitraum 57 die Prüfung ab. In welcher Schule wurde das bessere Ergebnis erzielt?

143. In einem Betrieb arbeiten insgesamt 835 Arbeiter und Angestellte, davon 171 Frauen. In einem zweiten Betrieb des gleichen Industriezweiges sind von 917 Arbeitern und Angestellten 211 Frauen. In welchem Betrieb liegt der Anteil der weiblichen Beschäftigten an der Gesamtzahl der Beschäftigten höher?

144. Bestimme 1% von 324; 78; 21,5; 7,9; 0,52; 36 598!

145. Schreibe in Prozenten!

a) 0,01; 0,03; 0,06; 0,81; 0,1; 0,15; 0,21; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 1

b) 0,02; 0,33; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; 1; 2; $\frac{3}{2}$; 3,5

146. Schreibe als Bruch!

a) 1%; 2,5%; 5%; $8\frac{1}{3}$%; 25%; 50%; 75%; 100%

b) 12,5%; $33\frac{1}{3}$%; 67%; 89,2%; 105%; 200%; 125%; 500%

147. Schreibe die Ergebnisse der Aufgabe 138 als Prozente!

148. Gib folgende Verhältnisse in Prozenten an!

a) 1:4 b) 5:8 c) 16:28 d) 3:5 e) 13:50 f) 128:91

g) 21,6:48 h) $0,75:\frac{7}{8}$ i) 374,6:480

Y

C. PROZENTRECHNUNG

Berechne in den Aufgaben 149 bis 154 den Prozentsatz auf Zehntel genau!

149. **a)** 26 MDN von 104 MDN **b)** 54 MDN von 90 MDN **c)** 21 m von 700 m
d) 36 m von 900 m **e)** 42 kg von 280 kg **f)** 39 kg von 260 kg

150. **a)** 82,50 MDN von 660 MDN **b)** 85,80 MDN von 2 640 MDN **c)** 9,3 dt von 12 dt
d) 0,70 dt von 56 dt **e)** 6,27 ha von 38 ha **f)** 31,32 ha von 135 ha

151. **a)** 5 MDN von 70 MDN **b)** 15 g von 68 g **c)** 270 MDN von 4368 MDN
d) 92 m von 155 m **e)** 16 t von 353 t **f)** 850 kg von 1340 kg

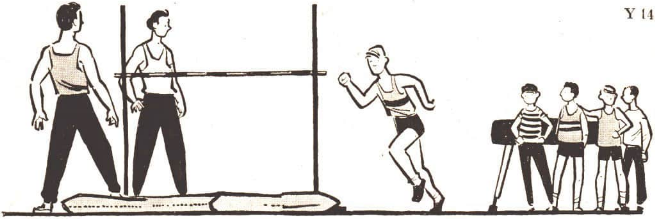
152. **a)** 50 MDN von 40 MDN **b)** 80 MDN von 40 MDN **c)** 1 023 kg von 825 kg
d) 40 m^3 von 40 m^3 **e)** 96 m^3 von 64 m^3 **f)** 27,44 a von 22,4 a

153. **a)** 78 cm von 1,35 m **b)** 629 m von 1,2 km **c)** 19 mm von 3 cm
d) 94 Pf von 3,36 MDN **e)** 45 dm von 6,0 m **f)** 843 p von 2,3 kp

154. **a)** $1\frac{3}{5}$ von 125 **b)** $6\frac{3}{4}$ von $40\frac{1}{2}$ **c)** $6\frac{1}{5}$ von 1 450 **d)** $4\frac{5}{8}$ von $64\frac{3}{4}$
e) $2\frac{4}{9}$ von 84 **f)** $283\frac{9}{40}$ von $217\frac{4}{5}$ **g)** $8\frac{7}{8}$ von $40\frac{3}{5}$ **h)** $9\frac{5}{7}$ von $37\frac{3}{8}$

155. **a)** Bei einem Schulsportfest erreichten im Hochsprung von 64 Jungen der 7. Klasse 8 Jungen die Höhen 1,20 m bis 1,35 m, 14 Jungen die Höhen 1,10 m bis 1,20 m, 33 Jungen die Höhen 1,00 m bis 1,10 m. Die Leistungen der übrigen Schüler lagen unter 1,00 m. Wieviel Prozent der Schüler entfielen auf jede Leistungsstufe?

b) Von 58 Mädchen der 7. Klassen erreichten im Weitsprung 6 Schülerinnen die Weiten 3,40 m bis 3,60 m, 17 Schülerinnen die Weiten 3,00 m bis 3,40 m, 35 Schülerinnen die Weiten 2,75 m bis 3,00 m. Berechne die Prozentsätze!



Y 14

156. **a)** Ein Schulheft hat 32 Seiten. Wieviel Prozent des Heftes werden nicht ausgenutzt, wenn eine halbe Seite nicht beschrieben wird?

b) Eine Schule wird von 750 Schülern besucht. Nehmen wir einmal an, daß jeder Schüler im Jahr durchschnittlich 20 Hefte verbraucht. Für wieviel Hefte würde das nicht ausgenutzte Papier reichen, wenn alle Schüler dieser Schule je Heft eine halbe Seite frei ließen?

c) Wie teuer ist das nicht ausgenutzte Papier, wenn wir den Preis für ein Heft mit 10 Pf ansetzen?

157. **a)** In einer Hühnerfarm wurden 120 Eier in die Brutmaschine eingelegt. Aus 108 Eiern schlüpften Küken. Berechne den Prozentsatz!

b) Ein anderes Mal schlüpften aus 150 Eiern 129 Küken. Berechne ebenfalls den Prozentsatz!

Berechne in den Aufgaben 158 bis 161 den Prozentwert! Die Stellenzahl hinter dem Komma hängt von der Umrechnungszahl der jeweiligen Größe ab.

158. a) 2% von 4 500 MDN b) 4% von 360 MDN c) 5% von 332 hl
d) 9% von 780 hl e) 6% von 480 hl f) 14% von 43 t

159. a) 9% von 8,20 MDN b) 5% von 6,75 dt c) 3% von 18,7 t
d) 8% von 40,50 hl e) 65% von 65 m f) 72% von 48,3 kg

160. a) 6,25% von 540 MDN b) 8,4% von 2 340 hl c) 2,1% von 750 a
d) 5,2% von 340 hl e) 3,45% von 460 kg f) 4,75% von 860 hl

161. a) $4\frac{1}{2}$% von 460 kg b) $2\frac{1}{4}$% von 160 kg c) $5\frac{3}{4}$% von 68 l
d) $9\frac{1}{4}$% von 480 dt e) $6\frac{1}{5}$% von 20 ha f) $4\frac{3}{8}$% von 6 300 kg

162. Bestimme 32% von 64 und 64% von 32!
Erkläre, warum die Prozentwerte bei beiden Aufgaben gleich sind! Für welche Aufgaben kann man diese Eigenschaft ausnutzen? Gib Beispiele für derartige Aufgaben an!

163. Die Luft, die wir einatmen, besteht aus etwa 20,9% Sauerstoff und 78,1% Stickstoff. Außerdem sind geringe Beimengungen anderer Gase darin enthalten.

a) Wieviel Kubikmeter Sauerstoff und wieviel Kubikmeter Stickstoff enthält ein Klassenzimmer mit 230 m³ (215 m³; 192 m³) Volumen?

b) Wieviel Kubikmeter Sauerstoff enthält ein Zimmer, das 4,20 m lang, 3,60 m breit und 2,80 m hoch ist?

c) Führe die gleichen Berechnungen für dein Klassenzimmer und dein Wohnzimmer durch!

164. Lindenblüten verlieren beim Trocknen 74% ihrer Masse. Wieviel Masse verlieren 350 kg frische Lindenblüten beim Trocknen?

165. Die Erdoberfläche beträgt etwa 510 Millionen km². Das Festland nimmt annähernd 29% der Erdoberfläche ein. Es ist die ungefähre Größe der Fläche zu berechnen, die vom Festland auf der Erdoberfläche eingenommen wird.

In den Aufgaben 166 und 167 ist der Grundwert zu berechnen.

166. a) 2% $\widehat{=}$ 16 MDN b) 3% $\widehat{=}$ 27 MDN c) 8% $\widehat{=}$ 240 MDN
d) 5,5% $\widehat{=}$ 434,5 t e) 75% $\widehat{=}$ 0,6 t f) 87,5% $\widehat{=}$ 630 l

167. a) $\frac{1}{2}$% $\widehat{=}$ 0,50 MDN b) $\frac{5}{6}$% $\widehat{=}$ 45 kg c) $\frac{3}{4}$% $\widehat{=}$ 1,20 MDN
d) $\frac{4}{5}$% $\widehat{=}$ 36 kg e) $1\frac{1}{2}$% $\widehat{=}$ 7,5 l f) $\frac{3}{5}$% $\widehat{=}$ 12 kg

168. Messing besteht aus Kupfer und Zink. Man hat 195 kg Kupfer zur Verfügung und will eine Legierung herstellen, die 65% Kupfer enthält.

a) Wieviel Kilogramm Messing können hergestellt werden?

b) Wieviel Kilogramm Zink werden dazu benötigt?

169. Ergänze die Tabelle im Abschnitt C 49 durch weitere bequeme Prozentsätze!

Bestimme in den Aufgaben 170 und 171 den Prozentsatz! (Rechne im Kopf oder mit Hilfe des Rechenstabs!)

170. a) 8 ha von 80 ha b) 14 dt von 56 dt c) 9 m von 27 m
d) 46 km² von 69 km² e) 700 MDN von 1 000 MDN f) 36 hl von 90 hl

171. a) 14 kg von 42 kg b) 20 kg von 30 kg c) 15 kg von 20 kg
d) 2,1 dt von 7 dt e) 72 dt von 80 dt f) 22,5 hl von 75 hl

Bestimme in den Aufgaben 172 bis 174 den Prozentwert! (Rechne im Kopf oder mit Hilfe des Rechenstabs!)

172. a) 10% von 658,40 MDN b) 50% von 1 256,48 ha c) $12\frac{1}{2}$% von 5,2 cm
d) $33\frac{1}{3}$% von 6 789 m e) 25% von 987,40 hl f) $12\frac{1}{2}$% von 1 490 l

173. a) $12\frac{1}{2}$% von 1 840 l b) 75% von 938,40 km² c) 10% von 0,4 kg
d) $66\frac{2}{3}$% von 549,60 MDN e) 50% von 1 025 t f) 30% von 9,50 a

174. a) 20% von 279,50 MDN b) $66\frac{2}{3}$% von 240,3 t c) $33\frac{1}{3}$% von 6 648 MDN
d) 25% von 27,70 dt e) 70% von 30 m³ f) $12\frac{1}{2}$% von 174,80 a

Bestimme in den Aufgaben 175 und 176 den Prozentsatz angenähert durch einen Überschlag!

175. a) 16 MDN von 33 MDN b) 15 MDN von 59 MDN c) 37 hl von 78 hl
d) 23 kg von 68 kg e) 37 kg von 139 kg f) 36 kg von 55 kg

176. a) 21 ha von 103 ha b) 9 ha von 73 ha c) 29 ha von 39 ha
d) 65 l von 207 l e) 12 t von 125 t f) 64 t von 81 t

Berechne in den Aufgaben 177 und 178 den Prozentsatz mit Hilfe des Rechenstabs!

177. a) 25% von 83,20 MDN b) 7,5% von 188 MDN c) 26,7% von 360 MDN
d) $6\frac{1}{4}$% von 17,40 MDN e) $12\frac{1}{2}$% von 296 MDN f) 125% von 750 MDN

178. a) 45% von 486 kg b) 17,5% von 92 kg c) $16\frac{2}{3}$% von 39 kg
d) $66\frac{2}{3}$% von 46,2 dt e) 250% von 43,8 t f) $133\frac{1}{3}$% von 74,1 t

179. Wieviel getrocknete Kamille erhält man aus 40 kg frischer, wenn sie beim Trocknen 84% ihrer Masse verliert?

180. Eine Klassenarbeit wird bei fehlerfreier Lösung mit 60 Punkten bewertet. Die Noten werden nach folgender Tabelle festgelegt:

0 bis 39,9% der Gesamtpunktzahl: Note 5
40 bis 54,9% der Gesamtpunktzahl: Note 4
55 bis 74,9% der Gesamtpunktzahl: Note 3
75 bis 93,9% der Gesamtpunktzahl: Note 2
94 bis 100% der Gesamtpunktzahl: Note 1

Für wieviel Punkte wird die Note 1 (2, 3, 4, 5) erteilt?

181. Rohbaumwolle wird in Ballen zu etwa 180 kg geliefert. Wieviel Kilogramm Garn kann man aus einem solchen Ballen produzieren, wenn mit 6% Abfall gerechnet werden muß?

182. Vier Siemens-Martin-Öfen benötigen eine tägliche Erzmenge von 9 200 t, woraus 20% SM-Stahl gewonnen wird. Wie groß wird die tägliche Produktionsleistung in Tonnen, wenn noch zwei weitere Öfen in Betrieb genommen werden? (Alle Öfen sollen die gleiche Kapazität besitzen!)

183. Von 2 000 untersuchten Weizenkörnern waren 1 800 keimfähig. Die Keimfähigkeit der Körner ist in Prozenten anzugeben.

184. Ein Schütze erzielt von 50 Schüssen 37 Treffer. Ein zweiter Schütze erzielt unter den gleichen Bedingungen von 50 Schüssen 41 Treffer. Gib die Treffsicherheit der beiden Schützen in Prozenten an!

185. Stelle folgendes Experiment an: Führe mit einem Würfel viele Würfe aus. Notiere dabei, wie oft die Augenzahl 1, 2, 3, 4, 5, 6 auftritt! Gib das Auftreten der verschiedenen Augenzahlen in Prozenten an!

Y

186. Ermittle die Anzahl der Schüler deiner Klasse, die im Januar, Februar, . . ., Dezember Geburtstag haben und gib die entsprechenden Prozentsätze dafür an!

187. Bestimme den prozentualen Kupfergehalt eines Kupfererzes, wenn man aus 45 t Erz 8,9 t Kupfer erhält!

188. Ersetze die folgenden Prozente durch Promille!

a) 0,12% **b)** 3% **c)** 7,2% **d)** 20% **e)** 82,7% **f)** 100% **g)** 0,09%

189. Ersetze die folgenden Promille durch Prozente!

a) 222‰ **b)** 85‰ **c)** 10‰ **d)** 7‰ **e)** 0,5‰ **f)** 100‰ **g)** 1‰

190. Berechne in Promille und in Prozenten!

a) 45 von 7 326 **b)** 0,06 von 123 **c)** 2,33 von 1,98 **d)** 12,1 von 999,9

191. Berechne 2‰ von **a)** 3 825, **b)** 736, **c)** 67,9, **d)** 4,75, **e)** 140!

192. Berechne jeweils den Grundwert!

a) 24,7 sind 2‰ vom Grundwert; **b)** 0,82 sind 3‰ vom Grundwert; **c)** 1,77 sind 6,1‰ vom Grundwert.

193. Bei einer Blutprobe, die zwei Stunden nach einem Verkehrsunfall durchgeführt wurde, wurden bei dem Kraftfahrer, der den Unfall verschuldete, in 120 g Blut 95 mg Alkohol festgestellt. Die Alkoholkonzentration zur Zeit der Blutuntersuchung ist in Promille zu bestimmen!

194. Die Zahlen **a)** 123,45; **b)** 123,458; **c)** 1 234,57; **d)** 12,34; **e)** 1,23 werden auf Einer gerundet. Die Zahlen **f)** 0,234; **g)** 2,34; **h)** 23,45; **i)** 234,57; **k)** 2 345,67 werden auf Zehntel gerundet. Welche prozentualen Fehler gehen in eine Rechnung ein, wenn mit den gerundeten Zahlen gerechnet wird?

195. Ein Werkstück, das für ein Präzisionsinstrument benötigt wird, soll eine Länge von 5,6500 Millimeter haben. Bei der Gütekontrolle wird festgestellt, daß das Werkstück eine Länge von 5,6492 Millimeter besitzt. Wie groß ist der prozentuale Fehler?

196. Die Länge des Äquators beträgt nach neuesten Berechnungen 40 067,59 km. Welchen prozentualen Fehler begeht man, wenn man mit der Länge von 40 000 km rechnet?

197. Die folgende Tabelle gibt die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne in Mill. km an. Berechne die prozentualen Fehler, die bei Berechnungen auftreten, wenn du die Stellen hinter dem Komma vernachlässigst!

Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
57,74	108,14	149,50	227,80	777,84	1 426,10	2 867,83	4 493,65	5 899,04

198. Zeichne auf einem großen Blatt Papier Strecken verschiedener Länge! Schätze die Länge der einzelnen Strecken und notiere die Ergebnisse in Form einer Tabelle! Miß die jeweilige Länge der Strecken (auf Millimeter genau) und trage die Ergebnisse in die Tabelle ein!
Bestimme die prozentualen Fehler deiner Schätzungen!

199. Miß mit dem Meßschieber mindestens fünfmal die Länge eines selbstgewählten Gegenstandes! Ermittle den Mittelwert für die Länge des Gegenstandes! Gib den prozentualen Fehler deiner Messungen an, indem du den Mittelwert als genaue Maßzahl für die Länge des Gegenstandes annimmst!

Y

200. Der prozentuale Fehler einer Längenmessung beträgt 1,7%. Der Mittelwert für die Länge des Gegenstandes beträgt 43,7 cm. In welchen „Schranken" bewegen sich die einzelnen Messungen?

201. Rechne im Kopf: Wieviel Prozent vom Selbstkostenpreis entspricht der Verkaufspreis eines Erzeugnisses bei **a)** 5%; **b)** 7,5%; **c)** 18%; **d)** 45% Gewinn?

202. Berechne den Selbstkostenpreis bei folgenden Angaben!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Verkaufspreis in MDN	1 846	1 022	460,50	915,80	78,40	3 804,50
Gewinn in %	3	12	7,5	$8\frac{1}{3}$	5	12,5

203. Der Jahresumsatz einer Konsum-Verkaufsstelle in Höhe von 227 398,00 MDN liegt 9% über dem des Vorjahres. Wie hoch war der vorjährige Umsatz?

204. Rechne wie in der vorigen Aufgabe mit

a) 310 561,00 MDN und 11,5%;

b) 389 438,00 MDN und 16,67%!

205. Rechne im Kopf: Wieviel Prozent entspricht der neue Verkaufspreis eines Erzeugnisses nach einer Preissenkung um **a)** 5%; **b)** 7,5%; **c)** 18%; **d)** 22,5% gegenüber dem alten Preis?

206. Wie groß ist in den folgenden Fällen die Bruttomasse? (Die Bruttomasse ergibt sich aus der Summe von Nettomasse und der Masse der Verpackung.)

	a)	b)	c)	d)
Nettomasse (in kg)	1 028	3 353	646,5	2358
Verpackung (in % der Bruttomasse)	4,5	2,75	3,5	8,5

207. Die geplante Zeit für den Bau einer Maschinenhalle betrug 160 Tage. Tatsächlich wurden 151 Tage für den Bau benötigt.

a) Wieviel Prozent beträgt die zeitliche Einsparung?

b) Wieviel Prozent beträgt die Übererfüllung, wenn man 160 Tage mit 100% annimmt?

208. Wie schnell ist ein Kraftfahrer im Durchschnitt gefahren, wenn er für eine Strecke von 135 km von der geplanten Zeit von 2 Stunden 10% eingespart hat?

209. Wie hoch sind die jährlichen Zinsen für 1 800 MDN bei 3% Verzinsung?

210. Berechne die Zinsen für ein Jahr im Kopf, wenn die folgenden Grundbeträge G mit 3% (4%, 5%) verzinst werden!

a) 378 **b)** 514 **c)** 933 **d)** 427 **e)** 1 360 **f)** 2 369 **g)** 673 **h)** 71 **i)** 32

211. Von einer Bank wird ein Darlehen von 12 550 MDN zu einem Zinssatz von 6% für 8 Jahre ausgeliehen. Wieviel Zinsen sind insgesamt an die Bank zu zahlen?

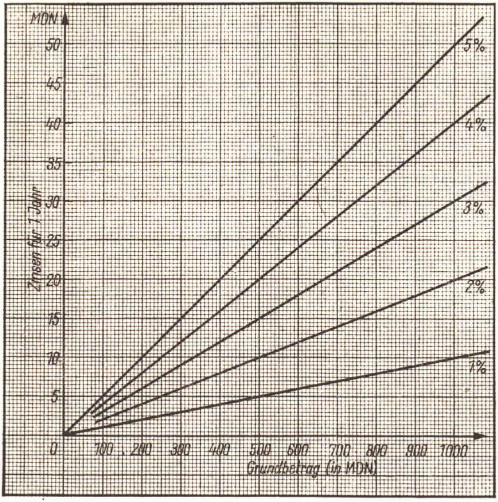
212. Berechne die Zinsen nach den folgenden Angaben im Kopf!

	a)	b)	c)	d)
G (in MDN)	2 500	780	625	1 230
p (in %)	4	3	5	4,5
t (in Jahren)	3	3	6	6

213. Ein Sparer, der regelmäßig in jedem Jahr die Zinsen abholte, erhielt bei 3% in 10 Jahren insgesamt 300 MDN. Wie hoch war der Grundbetrag, der in dieser Zeit nicht verändert wurde?

214. Ein Darlehen von 8 000 MDN wurde bereits nach 60 Tagen zurückgezahlt. Wieviel Zinsen sind zu bezahlen, wenn es mit 6% verzinst wurde?

Y



Y 15

215. Zeichne wie im Bild Y 15 ein Diagramm auf Millimeterpapier! Lies die Zinsen für 1 Jahr aus dem gezeichneten Diagramm ab!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Grundbetrag in MDN	400	500	900	700	950	650
Zinssatz	1	2	4	3	5	2

216. Berechne die Zinsen nach den folgenden Angaben!

	a)	b)	c)	d)	e)
G (in MDN)	4 800	563	12 680	93	8 620
p (in %)	3	3	4,5	3	6
t (in Tagen)	48	192	215	300	210

217. a) Eine Zahl wird um 25 % vergrößert. Um wieviel Prozent muß man die neue Zahl verkleinern, damit man wieder die ursprüngliche Zahl erhält?

b) Eine Zahl wird um 25 % verkleinert. Um wieviel Prozent muß man die neue Zahl vergrößern, damit man die ursprüngliche Zahl erhält?

218. a) Um wieviel Prozent vergrößert sich das Volumen eines quaderförmigen Körpers, wenn man die Kanten von 9 cm, 11 cm und 13 cm (21 cm, 22 cm, 23 cm) jeweils um 20 % (25 %) vergrößert?

Y

b) Um wieviel Prozent verkleinert sich das Volumen des Körpers, wenn die gegebenen Kanten jeweils um 20 % (25 %) verkleinert werden?

c) Um wieviel Prozent vergrößert sich die Oberfläche des gegebenen Körpers in den beiden Fällen der Aufgabe a)?

d) Um wieviel Prozent verkleinert sich die Oberfläche des gegebenen Körpers bei der Verkleinerung der Kanten nach Aufgabe b)?

219. Aus 4 t Blütenblätter von Rosen erhält man 1 kg Rosenöl. Berechne die Ausbeute an Rosenöl in Promille!

220. Zwei Schüler einer Klasse haben im letzten Zeugnis im Fach Mathematik die Note 1 erhalten. Wieviel Schüler waren insgesamt in dieser Klasse, wenn die Note 1 von 6,25 % aller Schüler erreicht wurde?

221. Eine Leine mit einer Länge von 22,8 m wird so in zwei Teile geteilt, daß der größere Teil 20 % länger ist als der kürzere. Wie lang ist jeder Teil?

222. Die Längen der größten Flüsse Sibiriens betragen: Ob mit Irtysch 5 206 km, Amur mit Amgun 4 478 km, Lena 4 264 km, Jenissei 3 807 km. Gib die Flußlängen in Prozenten an:

a) bezogen auf die Länge des Ob (mit Irtysch), **b)** bezogen auf die Länge des Jenissei,

c) bezogen auf die Länge der Elbe, die 1 165 km beträgt!

223. Die Landfläche der Erde von 148 439 000 km² verteilt sich wie folgt:

Europa (ohne UdSSR)	4 955 000	Südamerika	17 793 000
UdSSR	22 402 000	Afrika	30 366 000
Asien (ohne UdSSR)	26 940 000	Australien und Ozeanien	8 558 000
Nordamerika	24 248 000	Antarktika	13 177 000

Berechne die einzelnen Anteile in Prozenten (Rechenstab) und stelle die Verteilung in einem geeigneten Diagramm dar!

224. In der folgenden Tabelle ist der atmosphärische Druck (in Millibar) in verschiedenen Höhen (in Kilometern) angegeben. **a)** Berechne die prozentuale Abnahme des Druckes bezogen auf die Höhe Null! **b)** Berechne die prozentuale Zunahme des Druckes bezogen auf die Höhe 70!

Höhe	0	10	30	40	50	70
Druck	1 013	252	56,8	12,0	1,00	0,14

225. Ein Kilogrammstück hat am Nordpol ein Gewicht von 1,002 kp, am Äquator ein Gewicht von 0,997 kp. Auf dem Mond hätte es ein Gewicht von etwa 0,169 kp. Um wieviel Prozent weichen die Gewichte von einem Kilopond ab?

226. Für die Herstellung von Socken wird ein Mischgarn verwendet, das Dederon und Baumwolle im Verhältnis 4:21 enthält. Wieviel Gramm Dederon sind in einer Spule (Cope) mit 60 g Mischgarn enthalten? Gib auch die prozentuale Zusammensetzung an!

Y

227. Bei einer Auslastung von 88 % verarbeitet eine Karde-Maschine 4,3 kg Baumwolle in 1 h. Wieviel Kilogramm würden bei voller Auslastung in 8 h verarbeitet werden?

228. Das Soll für die Milchablieferung eines landwirtschaftlichen Betriebes gilt für Milch mit einem normalen Fettgehalt von 3,5 %. Liefert ein Betrieb Milch mit einem anderen Fettgehalt ab, so wird auf 3,5 % Fettgehalt umgerechnet.

a) Wieviel Kilogramm Milch werden einer LPG angerechnet, die 480 kg Milch mit einem Fettgehalt von 4,0 % abgeliefert hat?

b) Eine andere LPG lieferte 560 kg Milch mit einem Fettgehalt von 3,8 % ab. Wieviel Kilogramm Milch werden ihr angerechnet?

c) Mit wieviel Kilogramm werden 600 kg Milch bei einem Fettgehalt von 3,1% (4,1%) Fettgehalt angerechnet?

229. Einer Molkerei wurde von mehreren LPG Milch angeliefert:
315 kg (Fettgehalt 3,5%), 616 kg (Fettgehalt 3,6%), 535 kg (Fettgehalt 4,1%), 208 kg (Fettgehalt 3,4%), 412 kg (Fettgehalt 3,8%).
Wieviel Kilogramm Milch wurden den einzelnen LPG angerechnet?

230. Ein Bauer liefert 71,5 kg Milch mit normalem Fettgehalt ab. Wieviel Kilogramm Butter kann man daraus gewinnen, wenn mit einer Butterausbeute von 4% gerechnet wird!

231. Die landwirtschaftliche Nutzfläche einer LPG gliedert sich wie folgt: 432,5 ha Ackerland, 91,7 ha Grünland, 58,6 ha Gartenland, 72,8 ha Wald und 4,2 ha Hof- und Gebäudeflächen.

a) Wieviel Prozent der landwirtschaftlichen Nutzfläche entfallen auf die einzelnen Flächen?

b) Stelle die Aufgliederung durch ein Diagramm dar!

232. Zur Unkrautbekämpfung werden $2\frac{1}{2}$ kg eines Unkrautvernichtungsmittels in 200 l Wasser aufgelöst. Wieviel prozentig ist die Lösung?
Beachte: Der Grundwert ist die Maßzahl der Masse der Lösung, die sich aus der Masse des Wassers und der gelösten Chemikalien zusammensetzt.

233. Ein Traktorist hackt mit seinem Vielfachgerät Kartoffeln. Dabei schafft er in einer Schicht 6,09 ha und verbraucht 5,9 l Treibstoff je Hektar. Die vorgesehene Leistungsnorm beträgt 5,85 ha je Schicht bei einem Treibstoffverbrauch von 6,3 l je ha.

a) Mit wieviel Prozent erfüllt der Traktorist seine Norm in bezug auf die bearbeitete Fläche?

b) Wieviel Liter Treibstoff sparte er beim Hacken von 6,09 ha ein?

234. Auf einer Grünfutterfläche wird ein Gemisch von 30% Rotklee, 20% Weißklee, 5% Schwedenklee und 45% Weidelgras ausgesät.

a) Für 1 ha benötigt man zur Aussaat 21 kg dieses Gemisches.
Wieviel Kilogramm jeder Sorte muß man also nehmen?

b) Wieviel Kilogramm der einzelnen Sorten braucht man für ein $13\frac{1}{2}$ ha großes Feld?

235. Die folgende Tabelle zeigt die Weltproduktion an Weizen und den Anteil der sozialistischen Länder daran in Prozenten. Berechne die Weizenproduktion der sozialistischen Länder in Mill. Tonnen und veranschauliche das Zahlenmaterial in geeigneter Weise!

Jahr	Weltproduktion in Mill. Tonnen	Sozialistische Länder in %
1934/38	167,6	23
1950	174,2	33
1955	206,5	41
1960	244,8	47
1961	236,7	50

236. Die bewaldeten Teile zweier Forstreviere machen zusammen 430 ha aus. Die Waldfläche des zweiten Reviers ist 18% kleiner als die des ersten. Im ersten Revier werden 40 ha Wald gerodet. Um wieviel Prozent ist nunmehr die bewaldete Fläche des zweiten Reviers noch kleiner als die des ersten?

237. Bronze ist eine Legierung aus Kupfer und Zinn. Wieviel Kilogramm Bronze könnte man aus 213 kg Kupfer herstellen, wenn die Legierung 85% Kupfer und 15% Zinn enthalten soll? Berechne auch, wieviel Kilogramm Zinn benötigt würden!

Y

238. Messing ist eine Legierung aus Kupfer und Zink. Es stehen 213 kg Kupfer zur Verfügung. Man braucht eine Legierung mit 61 % Kupferanteil. Berechne, wieviel Kilogramm Messing hergestellt werden können und wieviel Zink man dazu benötigt!

239. Wieviel Tonnen Kupfer können aus einer Ladung von 64 t Kupfererz gewonnen werden, wenn die Ausbeute etwa 1,5 % beträgt?

240. Der Rohling einer Welle wiegt 67,0 kg. Nach der Bearbeitung auf der Drehmaschine wiegt die fertige Welle noch 61,5 kg. Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

241. Der Umsatz einer Verkaufsstelle war im Monat Juli um 644 MDN höher als im Monat Juni. Das sind 2,8 % des Gesamtumsatzes im Monat Juli. Die Umsatzsteigerung im August betrug gegenüber dem Monat Juli 11,4 %. Wie hoch war der Umsatz in den Monaten Juni bis August insgesamt?

242. Die Konsumgenossenschaft zahlte im Jahre 1964 in Berlin 1,6 % des Umsatzes von 1963 an ihre Mitglieder zurück. Die Rückvergütung für die Familie A betrug 57,50 MDN, für die Familie B 67,80 MDN. Für wieviel MDN hatten die beiden Familien im Konsum eingekauft?

243. Von 1 200 Stück eines Erzeugnisses, die in der Abteilung A eines Betriebes angefertigt wurden, waren 26 Ausschuß. In der Abteilung B des gleichen Betriebes mußten von 1 400 Stück des gleichen Erzeugnisses 39 als Ausschuß zurückgewiesen werden.

Welche Abteilung hat die geringere Ausschußquote?

244. Ein Betrieb erhöht seine Produktion jährlich um durchschnittlich 8 %. Wie hoch ist die Produktionssteigerung Ende 1970 gegenüber Anfang 1965?
(Beachte: Die jährliche Produktionssteigerung geht jeweils vom Jahresbeginn aus.)

245. In einem Betrieb beträgt der durchschnittliche Ausschuß nicht mehr als 1,2 %. Bei welcher Stückzahl ist mit 300 unbrauchbaren Erzeugnissen zu rechnen?

246. In einem Betrieb wurden in einem bestimmten Zeitraum die Selbstkosten für alle Erzeugnisse um durchschnittlich 2,7 % gesenkt. Die Selbstkosten betrugen für die einzelnen Erzeugnisse der Reihe nach: 91,75 MDN; 146,50 MDN; 157,32 MDN; 199,62 MDN und 201,80 MDN. Um wieviel wurden die Selbstkosten bei den einzelnen Erzeugnissen im Durchschnitt gesenkt?

247. Ein Betrieb fertigte im ersten Quartal 200 t Waren an, darunter 80 % der Waren erster Qualität. Im zweiten Quartal wurden 300 t produziert, darunter 90 % erster Qualität. Wieviel Prozent Ware erster Qualität wurden durchschnittlich in beiden Quartalen produziert?
(Beachte: Die Antwort, daß die durchschnittliche Produktion von Waren erster Qualität 85 % beträgt, wäre falsch!)

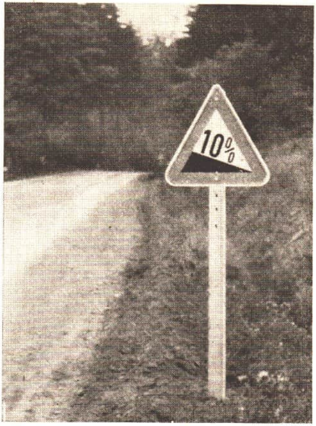
248. In einem Betrieb konnten die Selbstkosten für die Produktion eines Werkstückes durch einen Verbesserungsvorschlag um 9,5 % auf 37,79 MDN gesenkt werden. Wieviel MDN wurden dadurch an jedem Werkstück eingespart?

249. Das Kraftwerk Hirschfelde hat eine installierte Leistung von rund 330 MW. Die Leistung des Großkraftwerkes Vetschau ist um 264 % und die Leistung von Lübbenau um 294 % höher als die Leistung von Hirschfelde. Berechne die Leistungen von Vetschau und Lübbenau!

Y

250. **a)** Wieviel Prozent Alkohol besitzt eine Mischung von 165 cm³ Alkohol und 782 cm³ Wasser?
b) Welche Konzentration erhält man, wenn man 7 Liter 60prozentige und 33 Liter 10prozentige Salzsäure mischt?

251. Zucker gewinnt man aus Zuckerrohr und aus Zuckerrüben. Zuckerrohr enthält 14 bis 26 % und Zuckerrüben enthalten 16 bis 18 % Zucker. Wieviel Zuckerrohr von rd. 23 % Zuckergehalt werden für 12 t Zucker benötigt? Wieviel Zuckerrüben von durchschnittlich 17 % Zuckergehalt würde man dafür benötigen?



Y 16

252. Der Salzgehalt einer Lösung beträgt 8 ‰. Wieviel Salz enthalten 2,5 kg dieser Lösung? Rechne diese Aufgabe auch, indem du die gegebenen Promille in Prozent umrechnest!

253. Eine Bergstraße fällt zunächst auf 230 m Länge um 22 m Höhe ab und dann auf 1 400 m Länge um 108 m Höhe. Wieviel Prozent Gefälle hat diese Straße bezogen auf die gesamte Strecke (Bild Y 16)?

254. Obligationen sind Wertpapiere, die von unseren Sparkassen und Banken zur Finanzierung des Wohnungsbaues ausgegeben werden. Obligationen werden mit 4% verzinst. Wieviel Zinsen erhält ein Inhaber von Obligationen im Werte von 5 500 MDN im Laufe von 6 Jahren?

255. Wie lange wurde ein Darlehen von 7 500 MDN ausgeliehen, wenn bei einer Verzinsung mit 4% 125,00 MDN Zinsen zu zahlen waren?

256. In welcher Zeit erbringen 448 MDN Zinsen in Höhe von 1,40 MDN, wenn der Zinsfuß 4,5% beträgt?

257. Welcher Grundbetrag bringt in 6 Monaten Zinsen in Höhe von 46,80 MDN, wenn der Zinsfuß 4% beträgt?

258. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Spareinlagen bei den Kreditinstituten der DDR (ohne Postsparkasse und Reichsbahnsparkasse) insgesamt und prozentual davon bei den Sparkassen in den Jahren 1950 und 1955 bis 1963 an.

Berechne die Spareinlagen in den Sparkassen und die Zinsen, die annähernd in den einzelnen Jahren von den Sparkassen ausgeschüttet wurden, wenn ein Zinssatz von 3% zugrunde gelegt wird. Veranschauliche die Spareinlagen insgesamt durch ein Diagramm!

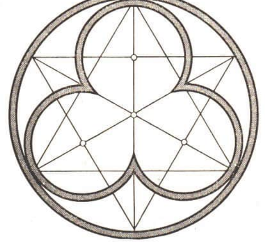
Jahr	Spareinlagen insgesamt in Mill. MDN	Davon bei den Sparkassen in %
1950	1 270	83,2
1955	4 927	74,9
1956	6 062	74,6
1957	8 970	74,8
1958	11 244	74,6
1959	14 010	74,5
1960	17 053	74,7
1961	19 654	74,3
1962	21 000	74,8
1963	23 060	75,0

D. Planimetrie

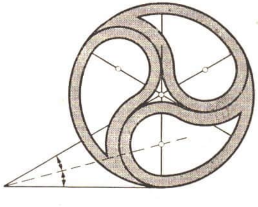
1. Zeichne in ein Rundfenster mit dem Durchmesser 12 cm einen Dreipaß (Bild Y 17)!

2. Die Dicke der Fischblasenwände eines Rundfensters mit dem Durchmesser 10 cm soll 5 mm betragen. Zeichne das Fenster (Bild Y 18)!

3. Zwei parallele Wellen, deren Mitten 1500 mm voneinander entfernt sind, sollen durch einen Riemen **a)** für Gleichlauf, **b)** für Gegenlauf miteinander verbunden werden. Fertige eine Maßstabszeichnung mit zwei Riemenscheiben, die Durchmesser von 250 mm bzw. 500 mm haben!



Y 17



Y 18

4. Zwei Kreisbogen schneiden einander unter **a)** 45°, **b)** 90°, **c)** 115°. Wie groß ist der Winkel zwischen den zum Schnittpunkt gehörigen Radien?
Hinweis: Als Winkel, unter dem sich zwei Kurven schneiden, versteht man den Winkel, den die beiden im Schnittpunkt an die Kurven gelegten Tangenten bilden.

5. Beweise, daß zwei Kreise einander zweimal unter gleichem Winkel schneiden!

6. Konstruiere Kreispaare, die einander unter einem Winkel von **a)** 90°, **b)** 30°, **c)** 60° schneiden!

7. Gegeben ist ein Punkt auf einem Kreis. Konstruiere Kreise, die den gegebenen Kreis in dem angegebenen Punkt unter Winkeln von **a)** 90°, **b)** 45° schneiden! Untersuche, ob die Aufgabe eindeutig bestimmt ist!

8. Gegeben ist ein Kreis, auf ihm ein Punkt P und **a)** außerhalb, **b)** innerhalb des Kreises ein Punkt Q. Konstruiere einen Kreis, der den gegebenen in P unter einem gegebenen Winkel α schneidet, und der durch Q geht!

9. Gegeben ist ein Kreis, auf ihm ein Punkt und eine beliebige, nicht durch P gehende Gerade g. Konstruiere den Kreis, der den gegebenen Kreis in P unter einem gegebenen Winkel α schneidet und der g berührt!

10. An zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 ist eine gemeinsame äußere Tangente T_1T_2 gelegt. Was für ein Viereck ist $M_1T_1T_2M_2$ und welche Stücke sind in ihm als bekannt anzusehen? Nimm an, **a)** die beiden Kreise schneiden einander nicht, **b)** die beiden Kreise schneiden einander!

11. Verschiebe in der zu Aufgabe 10 gezeichneten Figur $\overline{T_1T_2}$ parallel zu sich, bis die Strecke durch den Mittelpunkt des kleineren Kreises geht! Dann zerfällt das Viereck $M_1T_1T_2M_2$ in ein Rechteck und in ein Dreieck. Gib an, welche Stücke des auf diese Weise gewonnenen Dreiecks bekannt sind!

12. Konstruiere die gemeinsame äußere Tangente T_1T_2 an zwei Kreise, indem du erst ein rechtwinkliges Dreieck über dem Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise konstruierst und dann T_1 und T_2 aufsuchst!

Y

13. Führe die Konstruktion der äußeren gemeinsamen Tangente für den Fall durch, daß beide Kreise einander äußerlich berühren!

14. Was wird aus der Konstruktion der äußeren gemeinsamen Tangente, **a)** wenn der eine Kreis den anderen innerlich berührt, **b)** wenn der eine Kreis ganz innerhalb des anderen liegt, **c)** wenn beide Kreise gleichen Radius haben?

15. Gegeben sind zwei Kreise, die einander nicht schneiden und verschiedene Radien haben. Was ist von dem Schnitt der gemeinsamen äußeren Tangenten zu sagen, wenn der Kreis mit kleinerem Radius näher und näher an den größeren herankommt, ihn schneidet, ihn schließlich innerlich berührt?

16. Gegeben sind zwei Kreise, die einander nicht schneiden und die gleiche Radien haben. Beantworte dieselben Fragen wie in Aufgabe 15!

17. Gegeben sind zwei Kreise, die einander nicht schneiden. Wie bewegt sich der Schnittpunkt der gemeinsamen äußeren Tangenten, wenn der Radius des einen Kreises bei festliegendem Mittelpunkt **a)** größer und größer, **b)** kleiner und kleiner und **c)** schließlich Null wird?

18. An zwei einander nicht schneidende Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 ist eine gemeinsame innere Tangente T_1T_2 gelegt. Untersuche, was an die Stelle des Trapezes im Falle der äußeren Tangente getreten ist, und was in der betreffenden Figur bekannt ist!

19. Verschiebe in der zu Aufgabe 18 gezeichneten Figur $\overline{T_1T_2}$, bis die Strecke durch den Mittelpunkt des kleineren Kreises geht! Dadurch wird ein konstruierbares Dreieck gebildet. Welche Stücke dieses Dreiecks kannst du ermitteln?

20. Benutze die Überlegung von Aufgabe 19, um die gemeinsame innere Tangente zweier Kreise zu konstruieren, die einander nicht schneiden!

21. Was wird aus der Konstruktion der gemeinsamen inneren Tangente, wenn **a)** die Kreise sich äußerlich berühren, **b)** die Kreise einander schneiden, **c)** ein Kreis ganz innerhalb des anderen liegt?

22. Gegeben sind zwei Kreise, die einander nicht schneiden und die verschiedene Radien haben. Was ist von dem Schnitt der gemeinsamen inneren Tangenten zu sagen, wenn die Kreise einander bei unverändertem Radius allmählich nähern, bis sie einander von außen berühren?

23. Gegeben sind zwei Kreise mit gleichen Radien, die einander nicht schneiden! Die Kreise nähern einander bis zur Berührung. Wie bewegt sich der Schnittpunkt der gemeinsamen inneren Tangenten? Welcher Satz ist über den Schnitt der gemeinsamen inneren Tangenten von Kreisen mit gleichen Radien auszusprechen?

24. Gegeben sind zwei Kreise, die einander nicht schneiden. Wie bewegt sich der Schnittpunkt der gemeinsamen inneren Tangenten, wenn der Radius des einen Kreises bei festbleibendem Mittelpunkt **a)** größer und größer, **b)** kleiner und kleiner und **c)** schließlich Null wird?

25. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r_1. Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kreise mit dem Radius r_2 (wobei **a)** $r_1 > r_2$, **b)** $r_1 < r_2$ ist), die den ersten Kreis von innen berühren?

26. Beantworte die Frage der Aufgabe 25, wenn es sich um äußere Berührung handelt!

27. Gegeben sind zwei Kreise. Es sind die Punkte zu ermitteln, von denen aus beide unter dem gleichen Winkel erscheinen. Erörtere die möglichen Fälle!

28. Gegeben sind zwei **a)** einander nicht schneidende, **b)** einander schneidende Kreise. Welche Bedingungen gelten für die Umfangspunkte kleinster und größter Entfernung?

29. Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien r_1 bzw. r_2 und dem Mittelpunktabstand a. Wann schneiden einander die Kreise, wann schneiden sie einander nicht, wann berühren sie einander innerlich, wann äußerlich?

Y

30. Gegeben sind drei Punkte. Konstruiere drei Kreise, die sich in den gegebenen Punkten berühren! Erörtere alle möglichen Fälle!

31. Ein Dreieck ist zu zeichnen aus:

a) $c = 43$ mm; $h_c = 36$ mm; $\gamma = 60°$, **b)** $c = 60$ mm; $s_c = 40$ mm; $\gamma = 72°$.

Anleitung: Betrachte γ als Winkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte der Seite c gehen!

32. Konstruiere ein Parallelogramm, wenn

$a = 56$ mm; $b = 40$ mm und $\sphericalangle (e, f) = 112° (= \sphericalangle AEB)$ gegeben sind!

Anleitung: Beachte, daß die Parallelen zu den Seiten durch den Schnittpunkt E der Diagonalen die Parallelogrammseiten halbieren! Das Dreieck AEB läßt sich aus a, $\sphericalangle (e, f) = 112°$ und $\frac{b}{2}$ als Seitenhalbierende zeichnen.

33. Von einem Parallelogramm sind gegeben:

$e = 48$ mm; $\alpha = 115°$ und $\sphericalangle (e, f) = 115°$.

Anleitung: Durch e sind die Eckpunkte A und C festgelegt. Die erste Bestimmungslinie für Eckpunkt B ist der Kreisbogen für $\beta = 180° - \alpha$, die zweite Bestimmungslinie der freie Schenkel des Winkels (e, f), der im Mittelpunkt von e an $\overline{AC}$ angetragen wird.

34. Lege an einen Kreis mit $r = 25$ mm im Kreispunkt B die Tangente!

35. Konstruiere von einem Punkt P, der 48 mm vom Mittelpunkt des Kreises mit $d = 50$ mm entfernt ist, die Tangenten an den Kreis!

36. Zeichne mit dem Radius $r = 22$ mm einen Kreis, der

a) durch zwei gegebene Punkte geht,

b) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt,

c) zwei nichtparallele Geraden zu Tangenten macht,

d) eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkt berührt!

Überlege bei der Wahl der noch freien Bestimmungslinien, unter welchen Bedingungen die Zeichnung nur möglich ist!

37. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g und einen gegebenen Kreis in einem bestimmten Punkt P berührt!

Anleitung: Da der gegebene Berührungspunkt P des verlangten Kreises gleichzeitig Berührungspunkt der gemeinsamen Tangente t beider Kreise ist, muß der Mittelpunkt M_2 auf dem verlängerten Berührungsradius $\overline{M_1P}$ und auf der Halbierenden des Winkels (g, t) liegen.

38. Konstruiere einen Kreis, **a)** durch den zwei gegebene Parallelen Tangenten werden, **b)** der zwei gegebene Parallelen und eine gegebene Transversale berührt, **c)** der mit zwei gegebenen Parallelen je einen Punkt gemeinsam hat und durch den gegebenen Punkt P geht, **d)** der eine gegebene Gerade im Punkt B berührt und durch den Punkt P außerhalb der Geraden geht.

Y

39. Zeichne ein Dreieck ABC aus folgenden Stücken!

a) $c = 44$ mm; $h_c = 26$ mm; $b = 32$ mm

b) $h_c = 34$ mm; $\alpha = 80°$; $\beta = 31°$

c) $c = 55$ mm; $b = 38$ mm; $h_a = 26$ mm

d) $b = 80$ mm; $c = 38$ mm; $h_c = 54$ mm

e) $a = 59$ mm; $h_b = 54$ mm; $\alpha = 63°$

40. Zur Konstruktion eines Dreiecks ABC mit $\gamma = 90°$ sind folgende Stücke gegeben.

a) $b = 72$ mm; $h_b = 43$ mm **b)** $c = 85$ mm; $h_a = 37$ mm
c) $h_c = 30$ mm; $\alpha = 43°$ **d)** $b = 70$ mm; $h_c = 29$ mm

41. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC ist aus folgenden Stücken zu konstruieren.

a) $c = 46$ mm; $h_c = 40$ mm **b)** $a = 38$ mm; $h_c = 16$ mm
c) $a = 45$ mm; $h_a = 42$ mm **d)** $h_a = 43$ mm; $\alpha = 52°$

42. Konstruiere ein Dreieck ABC aus folgenden Stücken!

a) $c = 95$ mm; $s_c = 47$ mm; $b = 81$ mm
b) $a = 37$ mm; $s_a = 70$ mm; $\gamma = 80°$
c) $c = 54$ mm; $s_b = 62$ mm; $\alpha = 118°$
d) $\alpha = 50°$; $s_c = 46$ mm; $h_c = 40$ mm

43. Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist zu konstruieren.

a) $a = 5$ cm **b)** $a = 38$ mm **c)** $c = 4$ cm **d)** $c = 51$ mm

44. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ aus folgenden Stücken!

a) $s_a = 85$ mm; $a = 47$ mm **b)** $w_a = 68$ mm; $\alpha = 32°$
c) $w_\beta = 6$ cm; $\alpha = 37°$ **d)** $w_\gamma = 42$ mm; $h_c = 4$ cm

45. Konstruiere Dreiecke ABC aus folgenden Stücken!

a) $w_\gamma = 40$ mm; $a = 45$ mm; $\beta = 58°$ **b)** $w_\beta = 61$ mm; $c = 71$ mm; $\alpha = 57°$
c) $w_\alpha = 59$ mm; $\alpha = 35°$; $\beta = 50°$ **d)** $c = 43$ mm; $\varrho = 13$ mm; $\alpha = 78°$
e) $b = 79$ mm; $\varrho = 18$ mm; $\gamma = 35°$ **f)** $w_\beta = 43$ mm; $\alpha = 78°$; $\gamma = 42°$

46. Zeichne gleichschenklige Dreiecke aus folgenden Stücken!

a) $c = 44$ mm; $\varrho = 16$ mm **b)** $w_\gamma = 37$ mm; $\gamma = 80°$
c) $\alpha = 65°$; $\varrho = 20$ mm **d)** $\gamma = 70°$; $\varrho = 12$ mm

47. Dreiecke sollen aus folgenden Stücken gezeichnet werden (r ist der Umkreisradius).

a) $a = 100$ mm; $r = 51$ mm; $\gamma = 40°$
b) $c = 72$ mm; $r = 37$ mm; $\alpha = 36°$
c) $c = 65$ mm; $r = 39$ mm; $b = 30$ mm
d) $c = 60$ mm; $r = 32$ mm; $h_c = 33$ mm

48. Von einem Dreieck kennt man die Eckpunkte A und B und den Höhenschnittpunkt H, der auf einer Senkrechten

a) auf der Strecke $\overline{AB}$ zwischen A und B,

b) auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über A hinaus liegen soll.

Zeichne das Dreieck!

Anleitung zu 48 b): α muß ein stumpfer Winkel sein, und H kann nicht zwischen C und der Verlängerung von $\overline{AB}$ liegen. Das verlängerte Lot von H auf die Verlängerung von $\overline{AB}$ ist Bestimmungslinie für C und h_c. Die Gerade von H durch A legt die Richtung der Höhe h_a von A aus fest. Das Lot von B auf h_a schneidet die Höhe h_c im Eckpunkt C.

49. In einem Dreieck ABC beträgt die Seite $\overline{AB} = 60$ mm; der Schnittpunkt O der Winkelhalbierenden bildet die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks über $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ als Grundseite. Zeichne das Dreieck, wenn $\overline{AO} = \overline{DO} = 18$ mm beträgt!

Y

50. Bei einem neuzeitlichen Satteldach ist die Höhe des Giebels gleich der Hälfte der Hausbreite, die 7,80 m beträgt. Fertige eine Maßstabzeichnung!

51. Wie groß ist bei einem regelmäßigen 8-, 9-, 10-, 12- und 15-Eck der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks?

52. Stelle eine Tabelle für die Größe der n-Ecks-Winkel bei dem regelmäßigen 5-, 10-, 20-, 40-, 60-, 80- und 100-Eck auf!

53. Wie groß sind bei einem Kreis mit $r = 10$ cm die Umfänge der regelmäßigen ein- und umbeschriebenen n-Ecke, wenn $n = 6, 8, 12, 16$ und 24 ist? Ermittle diese Zahlen aus einer möglichst genauen Zeichnung!

54. Zeichne um einen Kreis mit $\varrho = 22$ mm ein bei B rechtwinkliges Tangentenviereck mit $a = 62$ mm und $b = 38$ mm!

55. a) Lege in einen Kreis mit $r = 24$ mm ein Sehnentrapez, das die beiden Parallelen von 44 mm und 34 mm Länge hat!

b) Konstruiere das Tangentenviereck, dessen Seiten denen des Sehnenvierecks parallel sind!

c) Ziehe durch die Eckpunkte des Sehnentrapezes die Tangenten an den Kreis!

d) Begründe die besondere Form dieses Tangentenvierecks!

56. Tangentenvierecke $ABCD$ sind aus den folgenden Stücken zu konstruieren.

a) $a = 3$ cm; $c = 3{,}7$ cm; $d = 2{,}5$ cm; $\delta = 90°$

b) $a = 40$ mm; $b = 16$ mm; $c = 24$ mm; $\beta = 118°$

57. Um einen Kreis mit $\varrho = 20$ mm ist

a) ein Rhombus mit $\delta = 70°$, **b)** ein Drachenviereck mit $\alpha = 70°$

zu zeichnen, bei dem der durch die Figur begrenzte Teil der Symmetrieachse 9 cm beträgt.

58. Zeichne aus $a = 37$ mm; $\alpha = 70°$; $\beta = 110°$ sowie

a) $r = 25$ mm das Sehnenviereck, **b)** $b = 40$ mm das Tangentenviereck!

Anleitung zu b): Wie findet man den Kreis, der die Schenkel eines Winkels berührt?

59. a) In einen Kreis mit dem Radius $r = 25$ mm soll ein Sehnenviereck gezeichnet werden, das die Seiten $a = 50$ mm, $c = 20$ mm und $d = 30$ mm hat.

b) Zeichne dazu das Tangentenviereck, dessen Seiten denen des Sehnenvierecks parallel laufen!

c) Warum ist kein Tangentenviereck möglich, dessen Seiten durch die Ecken des Sehnenvierecks gehen?

60. Berechne den Umfang eines Kreises mit

a) dem Durchmesser $d = 9$ cm (21 cm; 38,5 cm; 78 mm; 2,52 m),

b) dem Radius $r = 8$ cm (56 cm; 45,6 m; 185 m)!

In welchen Fällen wird man mit $\frac{22}{7}$ rechnen?

Y

61. Berechne den Kreisumfang mit Hilfe der Zahlentafeln!

a) $d = 850$ cm (6,5 cm; 0,24 m; 4 400 cm) **b)** $r = 48$ cm (3,4 cm; 83 cm; 3 200 m)

62. a) Miß den Durchmesser der Räder eines Fahrrades! Wieviel Umdrehungen machen sie auf einer 45 km langen Strecke?

b) Führe die Berechnung für den Fall durch, daß $d = 73$ cm ist!

63. Der Durchmesser des Triebrades einer Personenzuglokomotive mißt 1,75 m.

a) Wie oft dreht sich das Triebrad bei einer Fahrt von Berlin nach Wittenberg (95 km)?

b) Welche Strecke legt die Lokomotive bei 100 Umdrehungen zurück?

64. Gas- und Wasserleitungsrohre haben u.a. folgende äußere Rohrdurchmesser: 56 mm; 118 mm; 274 mm; 429 mm; 738 mm; 1 256 mm. Berechne jedesmal den Umfang des Rohres!

65. Wie groß ist **a)** der Durchmesser, **b)** der Radius eines Kreises, dessen Umfang 25,12 cm (84,78cm; 187 cm; 737,9 m; 1 000 m) mißt?

66. Wie groß ist in einem Kreis mit dem Radius $r = 14$ cm ein Bogen, der zu dem Zentriwinkel

a) $\alpha = 60°$ **b)** $\alpha = 45°$ **c)** $\alpha = 59°$ **d)** $\alpha = 36°$ **e)** $\alpha = 24°$
f) $\alpha = 63°$ **g)** $\alpha = 144°$ **h)** $\alpha = 225°$ **i)** $\alpha = 168°$ gehört?

67. Ein Tischler soll einen Tisch mit kreisförmiger Platte für 8 Personen anfertigen. Wie groß muß er den Durchmesser nehmen, wenn auf jede Person 80 cm gerechnet werden?

68. Wie groß ist jeweils der Durchmesser, wenn **a)** ein Wagenrad einen Umfang von 3,77 m, **b)** ein Baum einen Umfang von 2,35 m, **c)** das Abfallrohr einer Regenrinne einen Umfang von 47,1 cm, **d)** ein Zylinder einen Umfang von 2,83 m hat?

69. Wieviel Tulpenzwiebeln pflanzt ein Gärtner auf den Rand eines kreisförmigen Beetes von 1,50 m Radius, wenn er die Zwischenräume 12 cm groß nimmt?

70. Der Umfang einer Maschinenwelle beträgt 1 365 mm. Wie groß ist ihr Durchmesser?

71. Welchen Umfang hat ein Rundstahl mit 5 (8, 10, 11, 16, 25, 29, 38, 46, 72, 155) mm Durchmesser? Rechne mit der Zahlentafel und stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen!

72. Der große Zeiger einer Armbanduhr ist 11 mm lang. Welchen Weg beschreibt seine Spitze **a)** an einem Tag, **b)** in einer Woche, **c)** in einem Jahre?

73. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius

a) $r = 7$ cm, **b)** $r = 35$ cm, **c)** $r = 4{,}2$ cm, **d)** $r = 5{,}6$ cm!

74. Der Durchmesser eines Kreises beträgt **a)** $d = 12$ cm, **b)** $d = 16$ cm, **c)** $d = 27$ cm, **d)** $d = 45$ m, **e)** $d = 32$ mm. Berechne den Flächeninhalt!

75. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Umfang von

a) 1,56 m, **b)** 3,25 m, **c)** 18,7 cm, **d)** 2 m, **e)** 56,6 cm **f)** 12,56 m, **g)** 345,40 m!

76. Ein Quadrat und ein Kreis haben den gleichen Umfang von 110 cm. Welche Fläche ist größer?

77. Zeichne drei Kreise, deren Radien 2 cm, 4 cm und 6 cm messen! Berechne **a)** die Umfänge, **b)** die Inhalte der Kreise und vergleiche die Ergebnisse mit Hilfe einer Proportion!

78. Der Stamm einer alten Eiche im Park von Muskau in der Lausitz hat einen Umfang von 7,85 m. Berechne seinen Querschnitt!

79. Die Seite einer quadratischen Marmorplatte mißt 89 cm. Aus ihr wird die größtmögliche Kreisfläche als Tischplatte ausgeschnitten. Berechne **a)** die Tischfläche, **b)** den Abfall! **c)** Wieviel Prozent beträgt der Abfall?

80. Eine Zugstange aus Stahl hat einen Umfang von 9,60 cm. Die höchstzulässige Zugkraft für 1 cm^2 Querschnitt beträgt 825 kp. Wieviel Kilopond darf der auf die Stange ausgeübte Zug höchstens betragen?

81. Wie groß ist der Blechbedarf für 20 kreisförmige Blechscheiben mit einem Durchmesser von 27 (105, 17, 43, 33) mm, wenn der Verschnitt 10 % beträgt?

82. Die Bühne eines Freilichttheaters hat die Form eines Halbkreises von 41 m Durchmesser. Wie groß ist die Fläche?

83. In einer Gärtnerei wird in der heißen Jahreszeit der Boden durch Beregnungsapparate künstlich bewässert. Wie groß ist die kreisförmige Fläche, die beregnet wird, wenn der Wasserstrahl 10 m weit reicht?

Y

84. Der Kolben einer Dampfmaschine hat einen Durchmesser von 540 mm. Berechne den Querschnitt!

85. Wie groß ist der Flächeninhalt des Kreisringes mit den Radien

a) $r_1 = 9$ cm, $r_2 = 7$ cm; **b)** $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 9$ cm **c)** $r_1 = 1{,}6$ cm; $r_2 = 1{,}4$ cm?

d) Berechne für die Kreisringe der Aufgaben 85 a bis c jeweils die Breite des Ringes!

86. Der äußere Durchmesser einer Unterlegscheibe beträgt 126 mm und der innere Durchmesser 94,2 mm. Welchen Flächeninhalt hat die Scheibe?

87. Ein Rohr hat einen äußeren Durchmesser von 11,5 cm und eine Wanddicke von 1,5 cm. Berechne die lichte Weite und die Fläche des Querschnittes (Skizze)!

88. Berechne die Querschnittsfläche von Stahlrohren mit folgenden Maßen:

Außendurchmesser	22 mm	16 mm	18 mm	28 mm	50 mm
Wanddicke	2 mm	2,5 mm	3 mm	6 mm	7 mm

89. Berechne den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, wenn folgende Stücke gegeben sind:

a) Radius $r = 25$ cm, Zentriwinkel $\alpha = 60°$, **b)** Radius $r = 32$ cm, Zentriwinkel $\alpha = 72°$,
c) Radius $r = 40$ cm, Zentriwinkel $\alpha = 112°$, **d)** Radius $r = 56$ cm, Bogen $b = 88$ cm,
e) Radius $r = 62$ cm, Bogen $b = 57$ cm!

90. a) Wieviel Meter würde der Erdäquator bei Vergrößerung des Erdradius um 1 m länger werden?

b) Wieviel Meter länger müßte der Erdradius gemacht werden, wenn der Erdäquator um 1 km länger werden sollte?

Die Erde ist als Kugel anzunehmen ($r = 6\,370$ km ; $\pi \approx 3{,}14$).

91. Wir stellen uns vor, ein Mensch gehe auf dem Äquator um die Erde. Um wieviel ist der Weg, den sein Kopf in Augenhöhe zurücklegt, länger als der, den seine Füße beschreiben? Die Erde ist als Kugel anzunehmen, $r = 6\,370$ km; mittlere Entfernung des Kopfes in Augenhöhe von den Fußsohlen $x = 1{,}60$ m; $\pi \approx 3{,}14$.

92. Der Radius r eines Kreises wird um 1, 2, 3, . . ., 10 cm verlängert. Wie groß sind die Zunahmen des Kreisumfangs? Stelle diese Zunahme als Kreise mit dem Radius x dar!

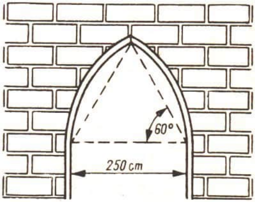
93. Aus Blechtafeln sollen Wellbleche geformt werden, deren Querschnitt sich aus aneinandergefügten Halbkreisen von gleichem Radius zusammensetzt (Trägerwellbleche).

a) Wie lang müssen die Blechtafeln genommen werden, wenn die Wellbleche 2 m lang werden sollen und der Durchmesser ihrer Halbkreise 4 cm (6 cm, 7 cm, 8 cm, 10 cm) beträgt?

b) Berechne die Länge x der Blechtafel, die man laufend für 1 m Wellblech braucht, wenn der Durchmesser der Halbwelle d beträgt!
($d = 4$ cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 10 cm.)

c) Welchen Einfluß hat der Durchmesser d der Halbwellen des Wellblechs auf die gesuchte Länge x der ebenen Blechtafel?

d) Vergleiche die für das Wellblech erforderliche Länge x der ebenen Blechtafel mit derjenigen, die erforderlich ist, um die Länge l des Wellblechs in einem Halbkreisbogen zu überspannen!



Y 19

Y

94. Berechne die Bogenlängen und die Fläche eines normalen (nicht überhöhten) gotischen Spitzbogens mit den im Bild Y 19 angegebenen Maßen!

95. Ein Handwerker berechnet den Umfang von Kreisscheiben nach einer Faustformel, indem er den Durchmesser der Kreisscheibe mit 3 multipliziert und zum erhaltenen Produkt 5 % desselben addiert. Welchen Näherungswert von π benutzt er?

96. Wir sollen nachprüfen, ob ein Fahrradkilometerzähler bei einem wirksamen Raddurchmesser von 69 cm die zurückgelegte Wegstrecke richtig angibt, wenn das fünfzackige Rad des Zählers bei jeder Radumdrehung durch einen an einer Radspeiche angebrachten Dorn um eine Zacke weiter gedreht wird und 92 Umdrehungen des Zackenrades erforderlich sind, damit der Zähler 1 km mehr anzeigt.

a) Wie groß ist die bei einer Radumdrehung zurückgelegte Wegstrecke?
b) Wieviel Meter hat das Rad zurückgelegt bei 92 Umdrehungen des Zackenrades?
c) Wieviel Prozent beträgt der relative Fehler in der Anzeige des Kilometerzählers?

97. Ein Kraftwagen biegt an einer rechtwinkligen Straßenkreuzung nach rechts ein; das rechte Hinterrad beschreibt dabei einen Viertelkreis mit dem Radius 3,5 m. Der Kraftwagen hat eine Spurweite von 1,20 m.

a) Wie lang sind die von den Hinterrädern beim Einbiegen beschriebenen Kreisbögen?
b) Wie oft muß sich jedes der beiden Hinterräder auf seiner Kreisbahn drehen, wenn der Durchmesser der Hinterräder 60 cm beträgt?

98. Ein doppelgleisiger Eisenbahndamm beschreibt einen 540 m langen Kreisbogen mit einem Krümmungsradius von 600 m, bezogen auf die Mittelachse des Dammes.

a) Bestimme den zugehörigen Zentriwinkel durch Rechnung und Zeichnung!
b) Die Mittelachsen der beiden Gleise haben im Bogen einen Abstand von 1,90 m von der Mittelachse des Dammes. Um wieviel ist der Bogen des Außengleises länger als der des Innengleises?

99. Eine Autobahnstrecke ändert an einer Stelle ihre Richtung um 40°. Bei Planung der Strecke hat man zwischen den beiden Möglichkeiten zu entscheiden, den Krümmungsradius des Bogens entweder 800 m oder 1 200 m lang zu wählen (bezogen auf die Mittelachse der Bahn).

a) Bestimme für beide Werte des Radius die Bogenlängen durch Rechnung und Zeichnung!
b) Um wieviel ist in beiden Fällen die Außenkante der 12 m breiten Fahrbahn länger als die Innenkante?

100. Der Trog des Schiffshebewerkes Niederfinow hängt an 256 Seilen, die zu je zweien über Seilscheiben von 3,5 m Durchmesser laufen.

a) Wie oft dreht sich eine Seilscheibe bei dem 35,71 m hohen Auf- oder Abstieg des Troges?
b) Um wieviel Grad dreht sie sich während einer Sekunde, wenn die ganze Bergfahrt 5 min dauert?

101. Ergänze die folgende Tabelle für nahtlose Gasrohre (Angaben in mm)!

D	t	d	A_q	A	D	t	d	A_q	A
10	2				26,75	2,75			
13,25	2,25				33,5	3,25			
16,75	2,25				42,25	3,25			
21,25	2,75				48,25	3,5			

Erklärungen:
D = Außendurchmesser,
d = Innendurchmesser,
t = Wanddicke,
A = lichter Rohrquerschnitt,
A_q = Wandquerschnitt

102. Wieviel Menschen haben auf einer kreisrunden Fläche **a)** von 1 km, **b)** von 100 m Radius Platz, wenn man vier Personen auf 1 m² rechnet?

Y

E. Stereometrie

1. Berechne das Volumen und den Flächeninhalt der Oberfläche von folgenden Körpern!

a) Würfel: $a = 3{,}5$ cm (7 dm; 0,9 m)

b) Quader: $a = 9{,}1$ cm (5,2 dm), $b = 3{,}4$ cm (28 cm), $c = 5$ cm (10,5 cm)

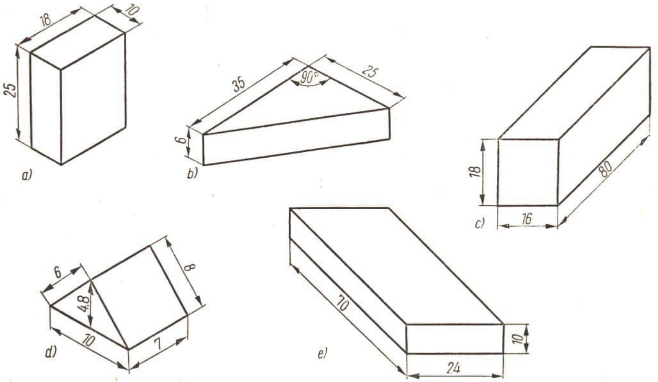
2. Berechne das Volumen eines Prismas mit der Grundfläche 14 cm² und der Höhe 7 cm!

3. Berechne die Oberfläche eines dreiseitigen Prismas! Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 3 cm und 4 cm und der Hypotenuse 5 cm. Die Höhe des Prismas beträgt 12 cm. Zeichne vorher das Netz dieses Körpers!

4. Durch ein gerades, dreiseitiges Prisma werden Schnitte gelegt: **a)** parallel zur Grundfläche, **b)** senkrecht zur Grundfläche. Welche geometrischen Figuren stellen die Schnittflächen dar?

5. Ermittle das Volumen und den Inhalt der Oberfläche von den Prismen, die in der Abbildung Y 20 mit einigen Maßen gegeben sind!

Y 20



6. Berechne das Volumen eines geraden Prismas, dessen Körperhöhe $H = 15{,}0$ cm beträgt und dessen Grundfläche ein Trapez mit den parallelen Seiten $a = 7{,}5$ cm und $c = 3{,}3$ cm sowie der Höhe $h = 4{,}2$ cm ist!

Y

7. Berechne Oberfläche und Volumen von Prismen, deren Grundflächen rechtwinklige Dreiecke sind! (Der rechte Winkel liegt bei *C*.)

a) $a = 4$ cm	**b)** $a = 1{,}3$ cm	**c)** $a = 7{,}2$ cm	**d)** $a = 5{,}3$ cm
$b = 9$ cm	$b = 1{,}8$ cm	$b = 35$ mm	$b = 5{,}3$ cm
$h_k = 12$ cm	$h_k = 6{,}2$ cm	$h_k = 40$ cm	$h_k = 53$ mm

8. Berechne Volumen und Oberfläche eines quadratischen Prismas!

a) $a = 7$ cm	**b)** $a = 16$ cm	**c)** $a = 3{,}4$ cm
$h_k = 9$ cm	$h_k = 4$ cm	$h_k = 15{,}7$ cm

9. Die Grundfläche eines Prismas ist ein Dreieck, von dem eine Seite g und die zugehörige Höhe h_g bekannt sind. Außerdem ist die Körperhöhe h_k gegeben. Berechne jeweils das Volumen!

a) $g = 8$ cm	**b)** $g = 4{,}2$ cm	**c)** $g = 6{,}5$ cm
$h_g = 5$ cm	$h_g = 3{,}4$ cm	$h_g = 83$ mm
$h_k = 15$ cm	$h_k = 30$ cm	$h_k = 24$ mm

10. Berechne das Volumen eines Prismas! Seine Grundfläche ist ein Parallelogramm, dessen Grundseite g und die zugehörige Höhe h_g gegeben sind. Die Körperhöhe ist h_k.

a) $g = 35$ cm	**b)** $g = 4{,}5$ cm	**c)** $g = 1{,}5$ cm
$h_g = 10$ cm	$h_g = 37$ mm	$h_g = 2{,}4$ cm
$h_k = 25$ cm	$h_k = 7$ cm	$h_k = 40$ cm

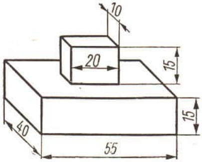
11. Berechne das Volumen eines Prismas, dessen Grundfläche ein Trapez ist! Die beiden parallelen Seiten sind a und c, ihr Abstand ist h und die Körperhöhe ist h_k.

a) $a = 8$ cm	**b)** $a = 3{,}9$ cm	**c)** $a = 28$ mm
$c = 5$ cm	$c = 5{,}4$ cm	$c = 1{,}7$ cm
$h = 6$ cm	$h = 2{,}6$ cm	$h = 7{,}3$ cm
$h_k = 11$ cm	$h_k = 8{,}5$ cm	$h_k = 98$ mm

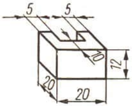
12. Ermittle die Summe der Seitenflächen eines geraden Prismas, das ein Parallelogramm mit Seiten von 6 cm und 15 cm Länge als Grundfläche hat und dessen Höhe 10 cm beträgt! Weshalb reichen die angeführten Werte für die Bestimmung der Oberfläche dieses Prismas nicht aus? Wie groß kann die Oberfläche eines geraden Prismas höchstens sein, das diesen Bedingungen entspricht?

13. Ermittle aus den Maßen der in den Bildern Y 21 und Y 22 gegebenen Körper deren Volumina, indem du die Körper als aus rechtwinkligen Quadern zusammengesetzt betrachtest!

14. Das Becken eines Schwimmbads hat die Form eines Quaders mit den Maßen 50 m × 20 m × 3 m. Bestimme, in welcher Zeit das Becken bis zu einer Höhe von 2,8 m mit Wasser gefüllt wird, wenn dem Becken in 1 Minute 6,7 Kubikmeter Wasser zufließen!



Y 21



Y 22

15. Unter der Dichte ϱ versteht man das Verhältnis der Masse m eines Körpers zu seinem Volumen V:

$\varrho = \frac{m}{V}$. Maßeinheiten der Dichte sind: $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

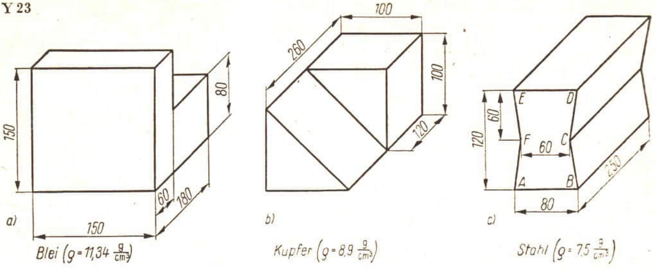
Bei Verwendung welcher Maßeinheiten stimmen die Dichteangaben eines Stoffes zahlenmäßig überein?

16. Welche Masse haben die Prismen in den Bildern Y 20, 21 und 22, wenn sie

a) aus Stahl $\left(\varrho = 7{,}6\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ **b)** aus Aluminium $\left(\varrho = 2{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ bestehen?

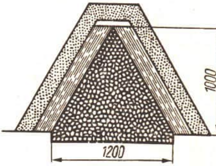
17. Ermittle nach den Maßen der Körper, die im Bild Y 23 dargestellt sind, ihre Volumina und ihre Massen! Betrachte dabei alle Prismen als gerade Prismen!

Y 23



18. Der Querschnitt einer Kartoffelmiete hat ungefähr die Form eines gleichschenkligen Dreiecks (Bild Y 24). (Die Kartoffeln werden durch eine Schicht Stroh und eine Schicht Erde vor Witterungsschäden geschützt.) Wieviel Dezitonnen Kartoffeln können in einer 50 m langen Miete gelagert werden, wenn 7,5 dt Kartoffeln etwa 1 m³ Raum einnehmen?

Y 24

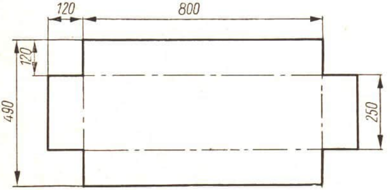


19. Für den Neubau einer Straße muß ein Damm aufgeschüttet werden. Sein Querschnitt ist ein Trapez. Die Dammsohle ist 38 m, die Krone ist 12 m breit und die Höhe beträgt 7,20 m.
a) Wieviel Kubikmeter Erde sind für 2 km Dammlänge aufzuschütten?
b) Wieviel Fuhren sind das, wenn man mit einer Fuhre 2 m³ Erde befördern kann?

20. Wie ändert sich das Volumen eines geraden Prismas, das als Grundfläche ein Rechteck hat, wenn wir: **a)** ohne seine Grundfläche zu ändern, seine Höhe verdreifachen, **b)** ohne seine Höhe zu ändern, jede Seite seiner Grundfläche verdoppeln?

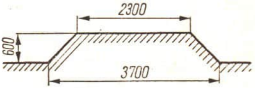
21. Im Bild Y 25 ist das Netz einer rechtwinkligen Schachtel gegeben. Ermittle nach den gegebenen Maßen ihr Volumen und den Flächeninhalt der Seitenflächen!

22. Im Bild Y 26 ist der Querschnitt einer Erdaufschüttung gegeben. Wieviel Kubikmeter Erde entfallen auf einen laufenden Meter der Aufschüttung?



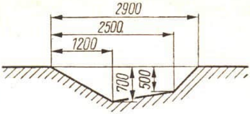
Y 25

Y 26



Y

23. Ein Flußbett hat im Querschnitt die Form und die Maße, wie sie im Bild Y 27 angegeben sind. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Bestimme, wieviel Wasser durch dieses Flußbett während einer Minute fließt!



Y 27

24. Berechne Mantel, Oberflächeninhalt und Volumen folgender Zylinder!

a) $r = 5{,}0$ cm; $h = 10{,}0$ cm **b)** $d = 15{,}0$ cm; $h = 2{,}0$ cm
c) $r = 2{,}5$ cm; $h = 60{,}0$ cm **d)** $r = 7{,}5$ cm; $h = 5{,}0$ cm

25. Wieviel Milliliter Wasser fassen folgende Standzylinder?

a) $d = 2{,}0$ cm; $h = 12{,}0$ cm **b)** $d = 2{,}5$ cm; $h = 18{,}0$ cm
c) $d = 3{,}2$ cm; $h = 26{,}0$ cm **d)** $d = 4{,}0$ cm; $h = 190$ mm

26. Ein zylindrischer Brunnen soll gegraben werden ($d = 1{,}50$ m).

a) Wieviel Kubikmeter Erdreich sind auszuschachten, wenn man 12 m tief graben muß?
b) Wieviel Fuhren sind das, wenn 1 Wagen 2 m³ faßt?

27. Aluminiumtöpfe haben folgende Innenmaße:

d	14 cm	16 cm	18 cm	20 cm	22 cm	24 cm
h	10 cm	11 cm	12 cm	13 cm	14 cm	15 cm

Wieviel Liter faßt jeder Topf?

28. Zwei Hohlmaße haben folgende Innenmaße:

Halblitermaß: $d = 69$ mm; $h = 134$ mm, Viertellitermaß: $d = 55$ mm; $h = 106$ mm.

Untersuche, ob man die Maße bis zum Rand füllen muß!

29. Bechergläser für den Chemieunterricht haben folgende Maße:

Höhe	70 mm	100 mm	160 mm	200 mm
Weite	30 mm	50 mm	80 mm	100 mm

Wieviel fassen die einzelnen Gläser?

30. Ein zylinderförmiges Gefäß ist 4,00 m hoch und hat einen Durchmesser von 1,40 m. Wieviel solcher Gefäße werden in einem Chemiewerk benötigt, um 46 m³ Salzsäure zu lagern?

31. Bis zu welcher Höhe füllt 1 Liter Wasser ein Gefäß von der Form eines Zylinders, wenn der Halbmesser des Grundkreises 4,0 cm beträgt?

32. Ein Rechteck mit den Seiten a und b wird um die Seite a gedreht. Wie groß sind Volumen und Oberfläche des entstandenen Zylinders?

a) $a = 9$ cm; $b = 7$ cm **b)** $a = 15$ cm; $b = 18$ cm

33. Ein 6,00 m langes Kupferrohr hat einen äußeren Durchmesser von 36 mm, einen inneren Durchmesser von 30 mm. Berechne **a)** seinen Querschnitt, **b)** seine Masse $\left(\varrho_{\text{Kupfer}} = 8{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$!

34. Du füllst in 3 Standzylinder mit den lichten Weiten **a)** $d = 2{,}8$ cm, **b)** $d = 3{,}4$ cm, **c)** $d = 4{,}1$ cm je 75 cm³ Wasser. Wie hoch steht das Wasser in jedem Zylinder?

Y

35. Wie groß ist der Umfang von Kreissägeblättern, die den Durchmesser **a)** 25 cm, **b)** 40 cm, **c)** 60 cm haben?

36. In einem Ölwerk wird das Speiseöl in zylindrische Fässer abgefüllt ($d = 86$ cm; $h = 120$ cm). Wieviel Fässer kann man aus einem quaderförmigen Ölbehälter ($l = 2{,}20$ m; $b = 2{,}20$ m; $h = 2{,}00$ m) zum Versand fertig machen? Runde das Ergebnis!

37. Läßt sich ein Faß, dessen größter Umfang 7 m beträgt, durch eine 2 m breite Kellertür bringen?

38. Ein zylinderförmiger Maissilo einer LPG ist 4,2 m hoch und hat einen Durchmesser von 3,5 m.

a) Wie groß ist sein Volumen?

b) Wieviel Tage reicht der Inhalt, wenn täglich 0,25 m³ Futter verbraucht werden?

39. Eine Anschlagsäule hat einen Durchmesser von 1,40 m und ist über dem Sockel 2,50 m hoch. Wie groß ist die Fläche zum Bekleben?

40. Welche Außendurchmesser haben Stahlrohre mit einem äußeren Querschnittsumfang von 69,1 (157,1, 44,0, 182,2, 88,0, 37,7, 150,8, 56,6, 94,2, 141,4) mm? Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen!

41. Ein Werkstück aus Grauguß $\left(\varrho = 7{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ mit der Masse 80 kg erhält durch Bearbeitung die Form eines Zylinders. Der Durchmesser beträgt nun 25 cm und die Höhe 20 cm. Berechne die Masse des Werkstückes! Wieviel Prozent beträgt der Bearbeitungsabfall?

42. Aus einem Kupferbarren (100 mm × 100 mm × 700 mm) wird Kupferdraht hergestellt. Berechne die Länge, wenn der Durchmesser **a)** 6 mm, **b)** 0,08 mm beträgt!

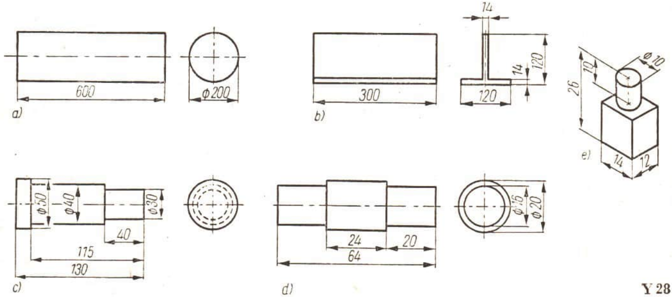
43. Wieviel Kilogramm wiegt der Bleimantel eines Kabels von 3 km Länge und einer Wanddicke von 3 mm? Der Durchmesser des Kabels ohne Mantel beträgt 44 mm, die Dichte von Blei $\varrho = 11{,}34\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

44. Ein Stück Blech soll zu Wellblech, dessen Querschnitt sich aus aneinandergefügten Halbkreisen mit dem Radius $r = 2$ (3; 3,5; 4; 5) cm zusammensetzt, geformt werden.

a) Fertige dazu eine Zeichnung an und berechne ($r = 2$ cm), wieviel Meter glattes Blech man zu 1 m Wellblech braucht!

b) Untersuche, ob man Blech spart, wenn man der Rechnung einen anderen der angeführten Radien zugrunde legt!

45. Auf ein Stahlrohr, das als Stütze verwendet wird ($d_1 = 60$ mm, $d_2 = 30$ mm), wirkt eine Kraft $F = 1500$ kp. Wie groß ist der Druck?



Y 28

46. Berechne das Volumen und die Masse der Werkstücke aus Stahl $\left(\varrho = 7{,}85\ \frac{g}{cm^3}\right)$ in den Bildern Y 28a bis e (Maßangaben in mm)!

47. Konstruiere ein Netz eines Zylinders, dessen Grundfläche 50 cm² beträgt und dessen Mantel 25 cm² mißt!

48. Der Mantel eines Zylinders beträgt 200 cm². Kann der Umfang der Grundfläche 400 cm lang sein?

49. Stelle zwei Zylinder mit gleichem Volumen dar, bei denen sich die Durchmesser der Grundfläche wie 1:2 verhalten!

50. Wie ändert sich das Volumen eines Zylinders, wenn wir:

a) ohne seine Höhe zu ändern, den Radius seiner Grundfläche verdoppeln;

b) ohne seine Grundfläche zu ändern, seine Höhe halbieren;

c) den Radius seiner Grundfläche verdreifachen und als Höhe nur den vierten Teil nehmen?

51. Konstruiere das Netz eines Zylinders, dessen Grundfläche 50 cm² und dessen Volumen 560 cm³ beträgt!

Darstellende Geometrie

1. Zeichne Grundriß, Aufriß und Kreuzriß eines Punktes P, der 2,5 cm über der Grundrißtafel, 3 cm vor der Aufrißtafel und 2 cm vor der Kreuzrißtafel liegt!

2. Wo liegen die drei Risse eines Punktes, der sich **a)** auf der Grundrißtafel, **b)** auf der Aufrißtafel und **c)** auf der Kreuzrißtafel befindet? Fertige Skizzen an!

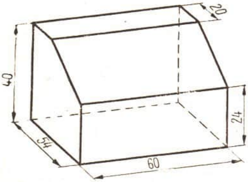
3. Eine Strecke steht senkrecht zur Grundrißtafel. Welche Lage hat sie zu den anderen Bildtafeln und wie wird sie in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß abgebildet?

4. Untersuche Grundriß, Aufriß und Kreuzriß einer Strecke (Fläche), die

a) auf der Aufrißtafel, **b)** auf der Kreuzrißtafel senkrecht steht!

5. Eine ebene Figur, zum Beispiel ein Quadrat, ist zur Aufrißtafel parallel. Welche Lage hat die Figur zu den anderen Bildtafeln? Wie wird sie in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß abgebildet?

6. Zeichne Grundriß, Aufriß und Kreuzriß eines Quaders ($a = 60$ mm, $b = 45$ mm, $c = 35$ mm) in Parallelstellung!



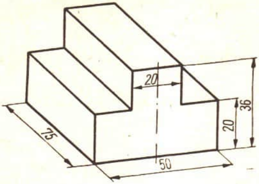
Y 29

7. Zeichne Grundriß, Aufriß und Kreuzriß des im Bild Y 29 im Schrägbild dargestellten Körpers, wenn er

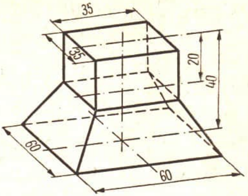
a) in Parallelstellung,

b) gegenüber der Parallelstellung um 45° auf der Grundrißtafel im Uhrzeigersinn gedreht ist!

Y



Y 30

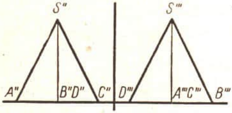


Y 31

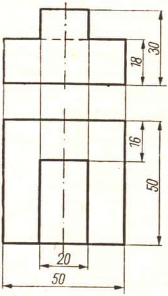
8. Zeichne die in den Bildern Y 30 und Y 31 im Schrägbild dargestellten Werkstücke in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß!

9. Zeichne den Grundriß des in Bild Y 32 in Aufriß und Kreuzriß gegebenen Körpers!

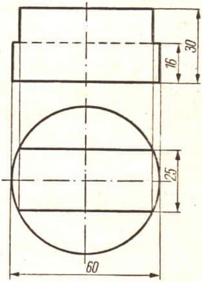
10. Zeichne den Kreuzriß der in den Bildern Y 33 und Y 34 in Grundriß und Aufriß gegebenen Körper!



Y 32



Y 33



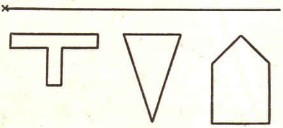
Y 34

11. Zeichne einen Würfel von 5 cm Kantenlänge in Kavalierperspektive!

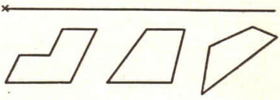
12. Zeichne einen Quader, dessen Kanten 2,8 cm, 4,4 cm und 6,2 cm lang sind, wenn er **a)** auf seiner größten Fläche, **b)** auf seiner kleinsten Fläche steht!

13. Zeichne eine quadratische Pyramide (Länge der Kanten an der Grundfläche 4,0 cm, Höhe 6,5 cm) in Parallelstellung, wenn sie **a)** mit ihrer Grundfläche, **b)** mit ihrer Spitze auf der Grundrißtafel steht?

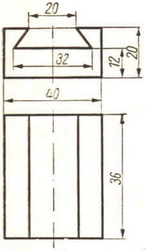
14. Im Bild Y 35 werden ebene Figuren auf der Grundrißebene gezeigt. Bilde sie in natürlicher Größe in Kavalierperspektive ab!



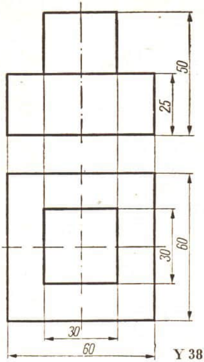
Y 35



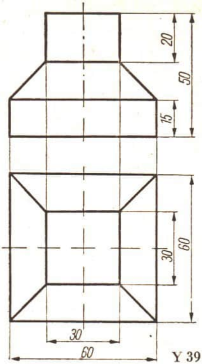
Y 36



Y 37



Y 38



Y 39

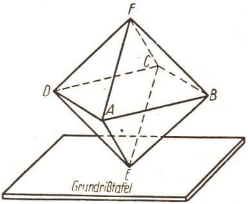
15. Das Bild Y 36 zeigt ebene, auf der Grundrißtafel liegende Figuren in Kavalierperspektive. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der Figuren!
Anmerkung: Überlege, wie die Darstellung in Kavalierperspektive entstanden ist! Gehe von der Abbildung aus und verfolge den Gang der Konstruktion zurück!

16. Zeichne die in den Bildern Y 37 bis Y 39 in Grundriß und Aufriß gegebenen Werkstücke in Kavalierperspektive!

17. Zeichne einen Würfel von 4,2 cm Kantenlänge, der „über Eck“ steht, das heißt, der gegenüber der Parallelstellung um 45° gedreht ist!

18. Ein regelmäßiges Sechseck (Seitenlänge 3 cm) liegt in einer Höhe von 4,5 cm über der Grundrißtafel. Bilde es in Kavalierperspektive ab!
Anmerkung: Fasse das Sechseck als Deckfläche eines 4,5 cm hohen geraden Prismas auf!

Y 40



19. Im Bild Y 40 ist ein Körper in Kavalierperspektive dargestellt. Zeichne Grundriß und Aufriß!

20. Zeichne einen Kreis ($d = 6$ cm) mit einbeschriebenem regelmäßigem Sechseck und konstruiere das Bild des Kreises in Kavalierperspektive mit Hilfe dieser Figur!

21. Zeichne einen geraden Kreiszylinder ($d = 6{,}0$ cm; $h = 8{,}5$ cm) in Kavalierperspektive, wenn er **a)** auf der Grundrißtafel steht, **b)** so auf der Grundrißtafel liegt, daß seine Grundfläche parallel zur Aufrißtafel ist!

22. Zeichne einen geraden, auf der Grundrißtafel stehenden Kreiskegel ($d = 7{,}2$ cm; $h = 5{,}6$ cm) in Kavalierperspektive!

23. Ein gerader Kreiskegel ($d = 8$ cm; $h = 12$ cm) wird in 6 cm Höhe abgestumpft. Die Deckfläche hat einen Durchmesser von 4 cm. Stelle den Körper in Kavalierperspektive dar!

24. Ein gerader Kreiszylinder ($d = 6$ cm; $h = 8$ cm) liegt so auf der Grundrißtafel, daß seine Achse parallel zur Rißachse ist. Zeichne den Körper in Kavalierperspektive!

A

B

C

D

E

F

Y

Z

REGISTER

Wie findest du was?

Angenommen, du willst wissen, was eine Passante ist. Du suchst das Stichwort und findest: Passante **D** Seite 96, 97. Der Buchstabe **D** sagt Dir, daß du die Information im Kapitel **D** findest. Du suchst mit Hilfe der Marken auf der linken Seite das Kapitel **D** und schlägst die Seite 96 auf.
Manche Wörter stehen auch in Wortverbindungen, z. B. Kreisumfang. Du suchst das Wort „Kreis", dann die Zeile „-umfang" und findest: Kapitel **D**, Seite 111, 112.

Absoluter Betrag **A** Seite 15, 16
Absoluter Fehler **C** Seite 49 (▷2)
Äquivalent, gleichwertig **B** Seite 38 (▷5)
Assoziationsgesetz
– der Addition **A** Seite 21
– der Multipl. **A** Seite 25

Bequeme Prozentsätze **C** Seite 79
Berührungsradius **D** Seite 97
Brennpunkt **D** Seite 112

Diagramm **C** Seite 55 (▷5)
Direkte Proportionalität **C** Seite 64, 67
(siehe auch „Proportionalität")
Distributionsgesetz **A** Seite 25
Durchmesser **D** Seite 97

Ellipse **D** Seite 112
Entgegengesetzte Zahlen **A** Seite 14, 19, 21

Fehler,
absoluter **C** Seite 49 (▷2)
prozentualer **C** Seite 84
relativer **C** Seite 49 (▷3)
Frontstrecken **F** Seite 134

Ganze Zahlen **A** Seite 29 (▷29)
Gärtnerkonstruktion **D** Seite 112
Gebrochene Zahlen **A** Seite 7 (▷2, ▷3), 8, 14, **30**
Gleichungen **B** Seite 34 (▷1)
Gleichwertig, äquivalent **B** Seite 38 (▷5)
Grundwert **C** Seite 76, 77
vermehrter – **C** Seite 85
verminderter – **C** Seite 84

Halbachse **D** Seite 112
Halbmesser (Radius) **D** Seite 96

Indirekte Proportionalität **C** Seite 62, **64** (▷7), 67

Klasse **A** Seite 7, 11, 12, 14
Kommutationsgesetz
– der Addition **A** Seite 20
– der Multipl. **A** Seite 24
Kreis **D** Seite 96 (▷1)
– diagramm **C** Seite 82
– flächeninhalt **D** Seite 110, 111
– ring **D** Seite 111
– umfang **D** Seite 111, 112
– zylinder **E** Seite 125
Kreuzriß **F** Seite 131, 132

Lösung **B** Seite 36 (▷3)

Mantel **E** Seite 125
Mittelpunkt **D** Seite 96
Mittelsenkrechte **D** Seite 98, 106

Natürliche Zahlen **A** Seite **6**, **7**, (▷1, ▷4)

Operationszeichen **A** Seite 17
Ordnung **A** Seite 16

PASCAL, Satz des **D** Seite 106
Passante **D** Seite 96, 97
Peripheriewinkel **D** Seite 99
– satz **D** Seite 103, 104, 107
Prisma **E** Seite 120
–, Volumen **E** Seite 123
–, Oberfläche **E** Seite 124
Probe **B** Seite 40
Produktgleichung **C** Seite 57, 58, 66
Produktgleichheit **C** Seite 64 (▷7), 65, 67
Promille **C** Seite 83
Proportion **C** Seite 56, 57
Proportionalität
–, direkte **C** Seite 50 bis 55, **64**, 67
–, indirekte **C** Seite 62, **64** (▷7), 67
-sfaktor **C** Seite 52 (▷4), 53
Prozent **C** Seite 76 (▷10)
– satz **C** Seite 76, 77 (▷11)
– wert **C** Seite 76, 77 (▷11)
Prozentualer Fehler **C** Seite 84

Quader **E** Seite 120

Radius **D** Seite 96
Rationale Zahlen **A** Seite 12, 14 (▷6)
–, Addition **A** Seite 17 bis 21
–, Division **A** Seite 27
–, Multipl. **A** Seite 22 bis 26
–, Subtraktion **A** Seite 21, 22
Räumliche Ecke **F** Seite 132
Rechenstab **C** Seite 68 bis 74
Rechenzeichen **A** Seite 17
Relativer Fehler **C** Seite 49 (▷3)
Reziprokes **A** Seite 28, **C** Seite 64

Schrägriß **F** Seite 134
Sehne **D** Seite 97
Sehnentangentenwinkel **D** Seite 99, 105
Sehnenviereck **D** Seite 108
Seitenhalbierende **D** Seite 106
Sekante **D** Seite 96
Skale
–, gleichmäßig **C** Seite 69
–, ungleichmäßig geteilte **C** Seite 71

Tangente **D** Seite 96
Tangentenviereck **D** Seite 109
Teilbereich **A** Seite 7
THALES, Satz des **D** Seite 99
Tiefenstrecken **F** Seite 134

Umfangswinkel **D** Seite 99
Ungleichungen **B** Seite 34 (▷2)

Variable **A** Seite 8, 15
Verhältnis **C** Seite 48 (▷1)
-gleichung **C** Seite 56
Verkürzungsverhältnis **F** Seite 135
Vermehrter Grundwert **C** Seite 85
Verminderter Grundwert **C** Seite 84
Verzerrungswinkel **F** Seite 135
Vorzeichen **A** Seite 13, 14, 17

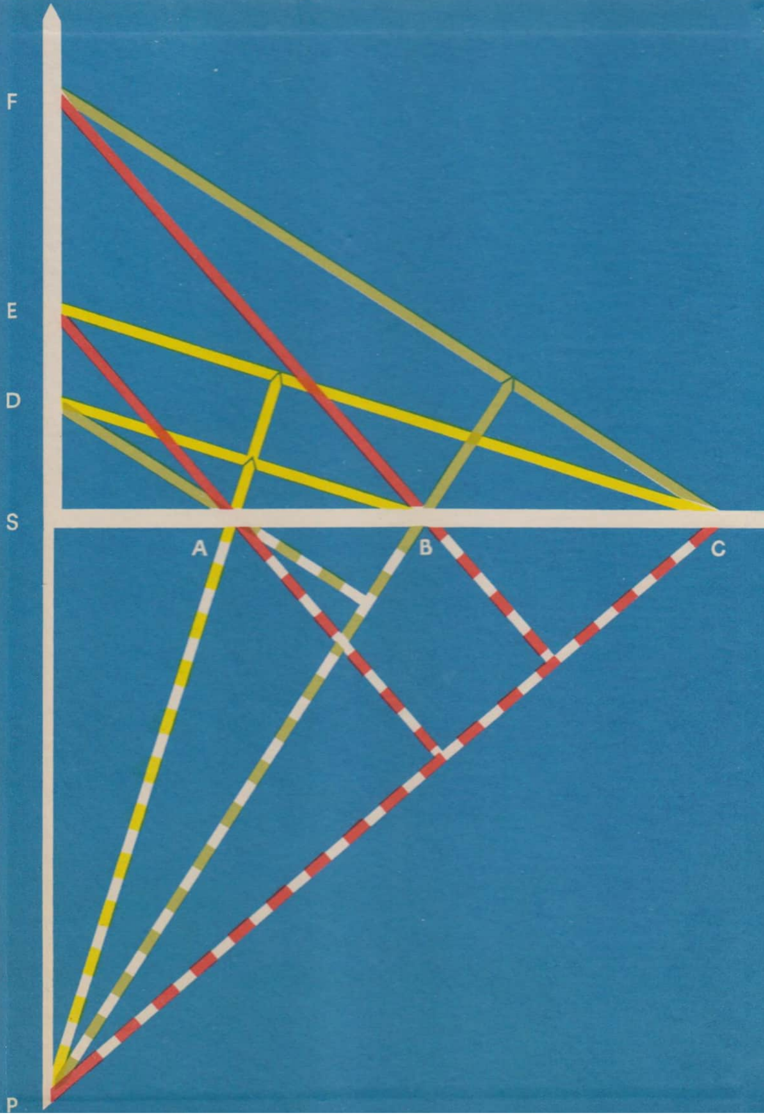
Würfel **E** Seite 120

Zahlen
ganze – **A** Seite 29 (▷29)
gebrochene – **A** Seite **7** (▷2, ▷3), 8, 14, **30**
natürliche – **A** Seite **6**, **7** (▷1, ▷4)
rationale – **A** Seite 12, 14 [(▷6)
reziproke – **A** Seite 28, **C** Seite 64
-strahl **A** Seite 10
Zentriwinkel **D** Seite 99
Ziffernfolge **C** Seite 72
Zinsen **C** Seite 86
Zylinder **E** Seite 125

Z

BILDNACHWEIS

Kapitel A: Boerger; Kapitel B: Boerger; Kapitel C: Zentralbild; Kapitel D: Deutsche Fotothek Dresden; Kapitel E: Zentralbild; Kapitel F: Volk und Wissen (Seifert). Kartenausschnitt (Bild A 2): Kartographisches Institut Gotha; Bild C 2: Zentralbild; Bild C 5: Heinz A. F. Schmidt; Bild C 6: Heinz A. F. Schmidt; Bild C 16: Volk und Wissen (Seifert); Bild C 26: Reproduktion aus: B. L. van der Waerden; Science awakening. Groningen 1954, S. 40; Bild C 27: Reproduktion aus: K. Menninger; Zahlwort und Ziffer. Göttingen 1958, S. 173; Bild C 28: Reproduktion aus: D. E. Smith; History of Mathematics, New York-Baltimore 1923, Vol. II, S. 317; Bild C 29: Reproduktion aus: Richter; The literary works of Leonardo da Vinci. London 1883, S. 176; Bild D 43: Reproduktion aus: J. Needham; Science and Civilisation in China. Vol. III, Cambridge 1959, S. 29; Bild D 44: Reproduktion aus: D. E. Smith; History of Mathematics. New York-Baltimore, Vol. I, 1923, S. 250; Bild E 7: Volk und Wissen (Seifert); Bild E 8: Volk und Wissen (Seifert); Bild E 14: Zentralbild; Bild F 15: Kurt R. Schmidt; Bild Y 16: Werner Wunderlich.


F
E
D
S
A
B
C
P

00 07 01–1
2,10 MDN