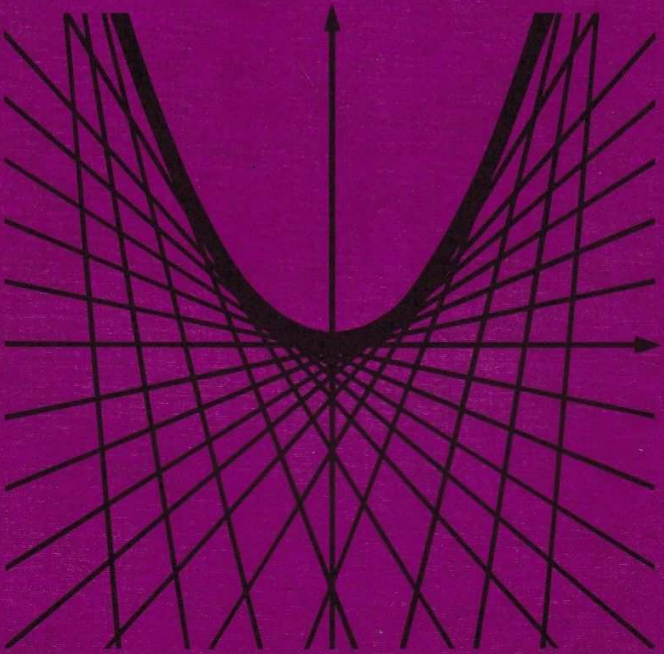
Mathematik 12



Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

Das Randregister auf dem Außenrand der Seiten dient dem bequemen und schnellen Auffinden der Kapitel. Auf dem Vorsatz finden Sie hierzu eine Übersicht über die einzelnen Kapitel.

Der Lehrteil gliedert sich in die Kapitel A bis D, der Aufgabenteil in die Kapitel a bis d. Dabei enthält zum Beispiel das Kapitel b die Aufgaben für das Kapitel B im Lehrteil.

Jedes Kapitel ist durch Zwischenüberschriften und durch eine fortlaufende Numerierung mit schwarzen halbfetten Ziffern in Lerneinheiten untergliedert.

Innerhalb der Lerneinheiten werden die Beispiele, Übungen Sätze und Definitionen durch folgende Marken gekennzeichnet:

■ Beispiele,

● Übungen,

▶ Definitionen und Sätze.

Durch die Ziffern in den Marken werden auch die Übungen, Beispiele und Sätze numeriert. Sämtliche Numerierungen werden jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt.

Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnen dann alle Numerierungen von neuem. Hinweise auf Lerneinheiten, Beispiele usw. werden im laufenden Text mit dem Buchstaben des betreffenden Kapitels angegeben.

Zum Beispiel:

Lerneinheit C 11 ist die Lerneinheit 11 des Kapitels C.

Beispiel D 5 ist das Beispiel 5 im Kapitel D.

Übung A 13 ist die Übung 13 im Kapitel A.

Im Aufgabenteil wurden mit kursiver Numerierung zusätzliche Aufgaben gekennzeichnet, die sich auf manchen Seiten des Aufgabenteils befinden. Bei diesen Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad im allgemeinen höher als bei den normalen, halbfett numerierten Aufgaben.

Vektorrechnung und analytische Geometrie A a

Kegelschnitte B b

Nichtrationale Funktionen C c

Differential- und Integralrechnung und Anwendungen D d

Register R

MATHEMATIK

Lehrbuch für die erweiterte Oberschule

Klasse 12

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1970

Autoren:
Dr. Brigitte Frank – Kapitel A, B, a, b
Dr. Kurt Ilgner, Dr. Günter Lorenz – Kapitel C, c
Dipl.-Math. Horst Lemke – Kapitel D
Werner Stoye – Kapitel d

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt.

1. Auflage
Ausgabe 1970
Lizenz Nr. 203 · 1000/70 (E)
ES 11 G
Redaktion: Karlheinz Martin
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Außentitel und Vorsatz: Manfred Behrendt
Typographie: Wolfgang Lorenz
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden (III/9/1)
Gesetzt aus der Bodoni
Redaktionsschluß: 12. März 1970
Bestell-Nr. 00 12 53–1
Preis: 4,— M

A. Vektorrechnung und analytische Geometrie

4 **Wiederholung aus Klasse 11 und Vertiefung**
Linearkombinationen von Vektoren (4) · Koordinatensysteme (6) · Parametergleichung einer Geraden und einer Ebene im Raum (9) · Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden des Raumes (12) · Lagebeziehungen zwischen Geraden des Raumes und Koordinatenebenen (15)

17 **Das Skalarprodukt**
Definition (17) · Eigenschaften des Skalarproduktes (20) · Einfache Anwendungen des Skalarproduktes (22) · Koordinatendarstellung (23)

24 **Anwendungen des Skalarproduktes (analytische Geometrie, physikalische Probleme)**
Schnittwinkel zweier Geraden (24) · Kugel und Kreis (28) · Lageverhältnisse von Kreis und Gerade (31) · Weitere Anwendungen (34)

38 **Das Vektorprodukt**
Definition (38) · Eigenschaften (41) · Anwendungen (43)

44 **Zusammenfassende Betrachtungen zum axiomatischen Aufbau der Vektorrechnung**

Flugmeldeeinrichtungen bilden einen wesentlichen Bestandteil der Ausrüstung unserer Luftverteidigung. Aber auch im zivilen Bereich haben solche Apparate zur Ortung und Leitung von Flugzeugen große Bedeutung. Das Bild zeigt einen Angehörigen der Nationalen Volksarmee an einem Ortungsgerät.

A

1 Linearkombinationen von Vektoren

Zur Wiederholung beschäftigen wir uns zunächst mit einigen wichtigen **DEFINITIONEN**:

1 **Eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer Ebene auf sich, bei der alle durch Original- und Bildpunkt bestimmten gerichteten Strecken parallelgleich sind, heißt *Verschiebung dieser Ebene.***

Mit anderen Worten:
Eine Verschiebung einer Ebene ist eine Menge geordneter Punktepaare [Originalpunkt; Bildpunkt]. Jedes dieser Punktepaare bestimmt eine gerichtete Strecke, wobei alle durch Original- und Bildpunkt bestimmten gerichteten Strecken parallelgleich sind. Zu der Menge müssen alle Punktepaare [Originalpunkt; Bildpunkt] der Ebene gehören, für die die durch Originalpunkt und Bildpunkt bestimmten gerichteten Strecken parallelgleich zu einer durch ein beliebiges anderes Punktepaar der Menge bestimmten gerichteten Strecke sind.

Jedes dieser Punktepaare nennt man einen Repräsentanten der Verschiebung. Wir bezeichnen die gerichtete Strecke von A nach B mit $\overline{AB}$, wobei die Reihenfolge der Buchstaben zu beachten ist. Mit $\overline{AB}$ (aber auch $\overline{BA}$) bezeichnet man außerdem die nichtgerichtete Strecke, die durch A und B bestimmt ist. Für Winkel und orientierte Winkel wurden im Gegensatz dazu in Klasse 11 unterschiedliche Zeichen eingeführt, z. B. $\sphericalangle(h; k)$ und $\measuredangle(h; k)$. Zur eindeutigen Festlegung des orientierten Winkels $\measuredangle(h; k)$ haben wir noch $-\pi < \measuredangle(h; k) \leqq \pi$ gefordert.

Zur Wiederholung wird auch die **Definition des Vektorraumes** angeführt:

2 **DEFINITION: Eine Menge, für deren Elemente eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen so definiert ist, daß für beliebige Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{r}$ der Menge und beliebige reelle Zahlen λ und μ die Gesetze**

(1°) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$,
(2°) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$,
(3°) zu je zwei Elementen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Menge existiert genau ein Element $\mathfrak{r}$ dieser Menge so, daß $\mathfrak{a} + \mathfrak{r} = \mathfrak{b}$ ist,
(4°) $1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$,
(5°) $(\lambda + \mu)\,\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}$,
(6°) $\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}$,
(7°) $\lambda(\mu\mathfrak{a}) = (\lambda\mu)\,\mathfrak{a}$

gelten, heißt *Vektorraum* und ihre Elemente *Vektoren*.

(1) *Welche Operationen wurden für Verschiebungen eingeführt?*
Wie wurden diese Operationen definiert? Geben Sie Auskunft über die Richtung der jeweils resultierenden Verschiebung!

Wir gehen jetzt vom Vektorraum der Verschiebungen des Raumes aus und bezeichnen

1. die Verschiebungen des Raumes als **Vektoren des Raumes**,
2. die identische Abbildung des Raumes auf sich als **Nullvektor**.

Für die Vektoren des Raumes kann genauso wie für die Vektoren einer Ebene der Begriff **Linearkombination** definiert werden.

3 **DEFINITION: Jeder Vektor $\mathfrak{b}$, der sich in der Gestalt**

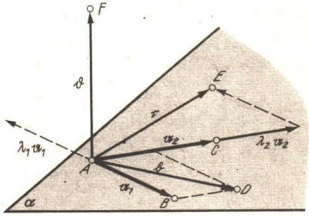
$$\boxed{\mathfrak{b} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{a}_n} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{ reelle Zahlen,}$$

schreiben läßt, heißt *Linearkombination der Vektoren.*
Die reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ heißen die *Koeffizienten* der Linearkombination.

(2) *Ist von zwei zueinander parallelen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ stets einer eine Linearkombination des anderen?*

(3) *Wiederholen Sie den für Vektoren einer Ebene geltenden Satz über die Zerlegbarkeit eines Vektors nach zwei nicht zueinander parallelen Vektoren!*

Wir betrachten nun zwei beliebige, nicht zueinander parallele Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Nach Wahl eines beliebigen Punktes A sind durch $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zwei Punkte B und C mit $\mathfrak{a}_1 = \overrightarrow{AB}$ und $\mathfrak{a}_2 = \overrightarrow{AC}$ und damit eine diese drei Punkte enthaltende Ebene α eindeutig bestimmt. In Analogie zu den in Klasse 11 für die Vektoren einer Ebene vorgenommenen Überlegungen können wir feststellen, daß für jeden Punkt D der Ebene α der Vektor $\mathfrak{b} = \overrightarrow{AD}$ auf eindeutige Weise als Linearkombination von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ dargestellt werden kann (im Bild A 1 ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 + 0{,}5\,\mathfrak{a}_2$). Umgekehrt ist für jede Linearkombination $\mathfrak{c} = \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2$, λ_1 und λ_2 beliebige reelle Zahlen, mit $\mathfrak{c} = \overrightarrow{AE}$ der Punkt E ein eindeutig bestimmter Punkt von α. Daraus folgt bereits, daß jeder Vektor $\mathfrak{d} = \overrightarrow{AF}$, für den F nicht in α liegt, nicht als Linearkombination von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ darstellbar ist. Es gilt demnach der



A 1

4 **SATZ: Im Raum gibt es zu zwei nicht zueinander parallelen Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ stets einen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Vektor $\mathfrak{a}_3$, der keine Linearkombination von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ ist.**

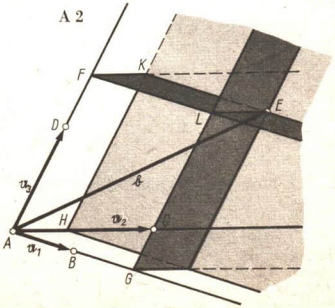
Dagegen läßt sich analog zum Fall der Vektoren einer Ebene zeigen:

5 **SATZ: Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ drei Vektoren, von denen keiner eine Linearkombination der beiden anderen ist, dann kann jeder Vektor $\mathfrak{b}$ auf eindeutige Weise als Linearkombination**

$$\mathfrak{b} = \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \lambda_3\mathfrak{a}_3$$

von $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ dargestellt werden.

A 2



A

Das Bild A 2 veranschaulicht drei Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$, von denen keiner eine Linearkombination der beiden anderen ist, einen Vektor $\mathfrak{b}$ und die entsprechenden Vektoren

(1) $\lambda_1 \mathfrak{a}_1 = \overrightarrow{AG},\ \lambda_2 \mathfrak{a}_2 = \overrightarrow{AH},\ \lambda_3 \mathfrak{a}_3 = \overrightarrow{AF}.$

Aus (1) folgt wieder

$$|\lambda_1| = \frac{|\overrightarrow{AG}|}{|\mathfrak{a}_1|},\ |\lambda_2| = \frac{|\overrightarrow{AH}|}{|\mathfrak{a}_2|},\ |\lambda_3| = \frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\mathfrak{a}_3|},$$

wobei gilt

$$\lambda_1 > 0\ (\lambda_1 < 0) \text{ für } \overrightarrow{AG} \uparrow\uparrow \mathfrak{a}_1 \left(\overrightarrow{AG} \uparrow\downarrow \mathfrak{a}_1\right),$$
$$\lambda_2 > 0\ (\lambda_2 < 0) \text{ für } \overrightarrow{AH} \uparrow\uparrow \mathfrak{a}_2 \left(\overrightarrow{AH} \uparrow\downarrow \mathfrak{a}_2\right),$$
$$\lambda_3 > 0\ (\lambda_3 < 0) \text{ für } \overrightarrow{AF} \uparrow\uparrow \mathfrak{a}_3 \left(\overrightarrow{AF} \uparrow\downarrow \mathfrak{a}_3\right).$$

4 *Wie lautet die Zerlegung des Nullvektors nach drei Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, von denen keiner eine Linearkombination der beiden übrigen ist?*

Für Vektoren einer Ebene hatten wir definiert:

6 **DEFINITION: Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn die Gleichung**

$$\lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$$

nur für

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \text{ gilt.}$$

Sind Vektoren nicht linear unabhängig, dann heißen sie *linear abhängig*.

Wir übernehmen diese Definition wörtlich für Vektoren des Raumes und können aus dem bisher Gesagten folgern, daß es im Raum Paare und Tripel linear unabhängiger Vektoren gibt, daß aber je vier Vektoren stets linear abhängig sind.

7 **DEFINITION: Jedes Tripel linear unabhängiger Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ nennt man eine *Basis* des Vektorraumes der Vektoren des Raumes und bezeichnet sie mit $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$.**
Ist $\mathfrak{b} = \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \lambda_3\mathfrak{a}_3$, so heißen die Zahlen λ_1, λ_2 und λ_3 die *Koordinaten* und die Vektoren $\lambda_1\mathfrak{a}_1$, $\lambda_2\mathfrak{a}_2$ und $\lambda_3\mathfrak{a}_3$ die *Komponenten* des Vektors $\mathfrak{b}$ bezüglich der Basis $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$.

Für die Angabe der Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{b}$ bezüglich einer Basis $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ verwendet man die Kurzschreibweise $\mathfrak{b}\ (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$.

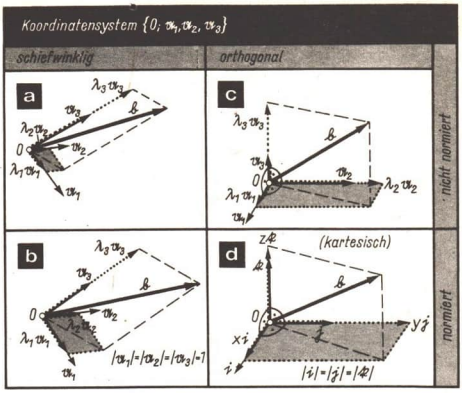
5 *Wie können die Koordinaten der Summe (Differenz) zweier Vektoren durch die Koordinaten dieser Vektoren ausgedrückt werden?*

6 *Wie groß sind die Koordinaten des Produktes eines Vektors $\mathfrak{a}$ mit einer reellen Zahl λ, wenn die Koordinaten von $\mathfrak{a}$ bekannt sind?*

Aufgaben a 1 bis 4

2 Koordinatensysteme

Wie im Falle der Ebene können wir durch die Wahl eines Punktes O und einer Basis $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ ein **Koordinatensystem** $\{O; \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ des Raumes festlegen. Für



A 3

jeden Punkt P des Raumes nennt man die Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 des Vektors $\overrightarrow{OP} = \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \lambda_3\mathfrak{a}_3$ bezüglich der Basis $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ seine **Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems** $\{O; \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ und schreibt sie kurz in der Gestalt $P\ (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ auf. Den Punkt O nennt man wieder den Koordinatenursprung und $\overrightarrow{OP}$ den **Ortsvektor** des Punktes P.

(7) *Ist die Zuordnung zwischen den Tripeln reeller Zahlen und* **a)** *den Vektoren des Raumes,* **b)** *den Punkten des Raumes umkehrbar eindeutig?*

Auch für zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ des **Raumes** versteht man unter dem **Winkel** zwischen ihnen [in Zeichen $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$] den Winkel, den für $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{AC}$ die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ im Punkte A miteinander bilden. Man bezeichnet alle Koordinatensysteme, in denen die Basisvektoren $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ nicht paarweise rechte Winkel miteinander bilden, als **schiefwinklige** (Bild A 3a). Stehen die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ paarweise senkrecht aufeinander, dann heißt $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ eine **orthogonale Basis** und jedes dieser Basis entsprechende Koordinatensystem $\{O; \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ ein **orthogonales** oder **rechtwinkliges Koordinatensystem** (Bild A 3c). Gilt für die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ einer Basis $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ oder eines Koordinatensystems $\{O; \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ die Beziehung $|\mathfrak{a}_1| = |\mathfrak{a}_2| = |\mathfrak{a}_3| = 1$, d. h., sind sie sogenannte **Einheitsvektoren**, dann heißt die Basis bzw. das Koordinatensystem **normiert** (Bild A 3b). Insbesondere nennt man normierte orthogonale Basen und Koordinatensysteme **orthonormiert** oder, wie im Falle der Ebene, **kartesisch** (Bild A 3 d). In der Praxis finden meist kartesische Koordinatensysteme Verwendung. Man bezeichnet in ihnen die Basisvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ entsprechend mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ und die Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von Vektoren und Punkten mit x, y, z, schreibt also

$$\overrightarrow{OP} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{x} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}.$$

Zur Berechnung der Koordinaten x, y und z eines Punktes P bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ denkt man sich,

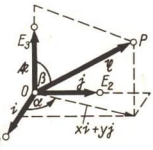
1) daß man die durch den Punkt O und die Punkte E_1, E_2 mit $\mathfrak{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\mathfrak{j} = \overrightarrow{OE_2}$ bestimmte Ebene von der Seite aus sieht, wo der Punkt E_3 mit $\mathfrak{k} = \overrightarrow{OE_3}$ liegt, und orientiert sie positiv,
2) daß die Benennung der Vektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ von vornherein so erfolgte, daß in der **orientierten** Ebene OE_1E_2 die Beziehung $\sphericalangle\,(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}) = +90°$ gilt (Bild A 4a).

Natürlich können die Koordinaten x, y und z eines Punktes P bezüglich $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ auch bei einer anderen gegenseitigen Lage der Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ berechnet werden (Bilder A 4b, c). Die entsprechenden Formeln für x, y und z unterscheiden sich von denen, die wir für die oben gewählte spezielle gegenseitige Lage von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ erhalten, nur durch Vorzeichen. Bei der von uns gewählten gegenseitigen Lage von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ können diese Vektoren entsprechend durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der **rechten** Hand veranschaulicht werden, weshalb man ein solches Koordinatensystem auch ein **Rechtssystem** nennt.

A 4

Wir bezeichnen nun den orientierten Winkel $\sphericalangle\,(\mathfrak{i}, x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j})$, also den Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{i}$ und $x\mathfrak{i} + y\mathfrak{i}$, den wir genauso wie im Falle der Ebene mit einem Vorzeichen versehen, mit α. Für den Winkel $\sphericalangle\,(\mathfrak{k}, \overrightarrow{OP})$ bzw. den Winkel $\sphericalangle\,(\mathfrak{k}, \mathfrak{r})$ wollen wir β schreiben. Dann lassen sich die Koordinaten x, y und z eines Punktes $P(x; y; z)$ bzw. die eines Vektors $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$ durch α, β und $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ bzw. $|\mathfrak{r}|$ ausdrücken und umgekehrt (Bild A 5).
Wir erhalten wegen

$$x = \left|x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}\right| \cdot \cos\alpha$$
$$y = \left|x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}\right| \cdot \sin\alpha$$
$$\left|x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right| \cdot \sin\beta$$



A 5

(2)
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \left|\overrightarrow{OP}\right| \sin\beta\cos\alpha \\ y &= \left|\overrightarrow{OP}\right| \sin\beta\sin\alpha \\ z &= \left|\overrightarrow{OP}\right| \cos\beta \end{aligned}}$$

bzw. (3)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= |\mathfrak{r}| \sin\beta\cos\alpha \\ y &= |\mathfrak{r}| \sin\beta\sin\alpha \\ z &= |\mathfrak{r}| \cos\beta \end{aligned}}$$

Eine weitere wichtige Beziehung erhalten wir durch Übertragen des Satzes des Pythagoras auf den Raum. Die Komponenten $x\mathfrak{i}$, $y\mathfrak{j}$ und $z\mathfrak{k}$ des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ eines jeden Punktes P stehen paarweise senkrecht aufeinander. Nach (2) gilt für die Koordinaten

$$x^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 \sin^2\beta\cos^2\alpha,\quad y^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 \sin^2\alpha\sin^2\beta \text{ und}$$
$$z^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 \cos^2\beta\,.$$

und für die Summe der Quadrate dieser Koordinaten

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 [\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \cos^2\beta]\,.$$

Da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, erhalten wir

(4) $$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = |\mathfrak{r}|^2}$$

Wir wenden diese Beziehung an, um den Abstand zweier Punkte zu berechnen.

1 Es soll der **Abstand zweier Punkte** $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$ voneinander berechnet werden.

Der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$, dessen Betrag gleich dem Abstand dieser Punkte ist, hat die Koordinaten $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Wir berechnen seinen Betrag nach (4) und finden somit für den Abstand der Punkte P_1 und P_2 die Formel

$$\boxed{|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\,.$$

Aufgaben a 5 bis 9

3 Parametergleichung einer Geraden und einer Ebene im Raum

8 *Wie lautet die Parametergleichung einer Geraden g einer Ebene, die durch den Punkt P_0 dieser Ebene geht und den Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ hat? Wie wurde diese Gleichung gefunden?*

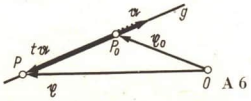
Es soll eine **Parametergleichung** für eine Gerade g im Raum aufgestellt werden. Dabei soll die Gerade durch einen ihrer Punkte P_0 und einen Vektor $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, dessen Repräsentant $[P_0; P_a]$ eine auf g liegende gerichtete Strecke bestimmt (Bild A 6), vorgegeben sein. Wir gehen wie in der Ebene vor, indem wir mit Hilfe eines Parameters t, der wieder alle reellen Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchläuft, die Menge aller Punkte dieser Geraden g erfassen:

(5) $$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t \cdot \mathfrak{a}}\,.$$

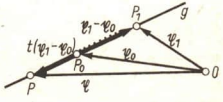
Dabei heißt $\mathfrak{a}$ der **Richtungsvektor** von g.
Ist die Gerade durch zwei ihrer Punkte P_0 und P_1 gegeben, so kann für $\mathfrak{a}$ wieder der Vektor $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0$ genommen und für (5) die Gleichung

(6) $$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)}$$

geschrieben werden (Bild A 7).



A 6



A 7

A

Auf analoge Weise wie für die Geraden des Raumes lassen sich auch für die **Ebenen des Raumes** Parametergleichungen aufstellen. Jede Ebene α ist durch drei ihrer Punkte P_0, A und B, die nicht auf derselben Geraden liegen, eindeutig bestimmt. Diese drei Punkte von α bestimmen ihrerseits drei Vektoren $\overrightarrow{P_0A}$, $\overrightarrow{P_0B}$ und $\overrightarrow{AB}$ des Raumes, von denen je zwei nicht parallel zueinander und damit linear unabhängig sind, während der dritte stets eine Linearkombination der beiden anderen ist; denn es gilt $\overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P_0B}$. Wir betrachten deshalb nur zwei dieser Vektoren, z. B. $\overrightarrow{P_0A}$ und $\overrightarrow{P_0B}$, und erinnern uns an das in Lerneinheit A 1 erzielte Ergebnis, daß

für jeden Punkt P von α der Vektor $\overrightarrow{P_0P}$ auf eindeutige Weise als Linearkombination von $\overrightarrow{P_0A}$ und $\overrightarrow{P_0B}$ dargestellt werden kann (Bild A 8)

und daß umgekehrt

für jede Linearkombination $\underline{r} = \lambda_1\overrightarrow{P_0A} + \lambda_2\overrightarrow{P_0B}$ mit $\underline{r} = \overrightarrow{P_0P}$ der Punkt P ein eindeutig bestimmter Punkt von α ist.

Aus diesen beiden Sachverhalten können wir schließen, daß durch die Beziehung $\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1\overrightarrow{P_0A} + \lambda_2\overrightarrow{P_0B}$ zwischen den Punkten P der Ebene α und den Koeffizienten λ_1, λ der Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{P_0A}$ und $\overrightarrow{P_0B}$, $-\infty < \lambda_1 < +\infty$, $-\infty < \lambda_2 < +\infty$, eine Zuordnung besteht, die umkehrbar eindeutig ist.

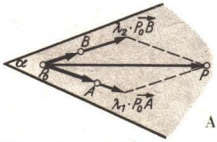
Geben wir also im Raum ein Koordinatensystem $\{O; \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$ vor und bezeichnen die Vektoren $\overrightarrow{P_0A}$ und $\overrightarrow{P_0B}$ mit $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ sowie den Ortsvektor von P_0 mit $\underline{r}_0$ und den Ortsvektor eines beliebigen Punktes P von α mit $\underline{r}$, dann ist

(7) $$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_0 + \lambda_1\mathfrak{a} + \lambda_2\mathfrak{b} \text{ mit } -\infty < \lambda_1 < +\infty,\ -\infty < \lambda_2 < +\infty}$$

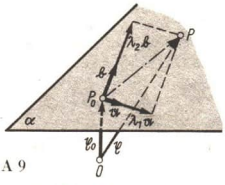
eine Gleichung der Ebene α (Bild A 9).

Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nennt man ein **Paar von Richtungsvektoren der Ebene** α, die Koeffizienten λ_1, λ_2 die **Parameter der Ebene** α **bezüglich** $\mathfrak{a}$ **und** $\mathfrak{b}$ und (7) eine **Parametergleichung der Ebene** α. Wir bezeichnen gewöhnlich die Parameter λ_1 und λ_2 von α mit u und v schreiben also für (7)

(8) $$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_0 + u\mathfrak{a} + v\mathfrak{b}}\ .$$



A 8



A 9

Wie in der analytischen Geometrie der Ebene kann man auch im Raum jede durch einen Punkt P_0 und einen Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ gegebene Gerade g als orientiert (mit einem Durchlaufssinn versehen) ansehen. Hierzu kann man z. B. festlegen, daß stets der dem Parameterwert t entsprechende Punkt vor jedem Punkt mit einem größeren und nach jedem Punkt mit einem kleineren Parameterwert als t liegen soll. Orientierte Geraden bezeichnet man auch als **Achsen**.

Durch die Angabe eines Koordinatensystems $\{O; \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$ sind die drei sogenannten Koordinatenachsen des Raumes festgelegt: die x-Achse durch O und den Richtungsvektor i, die anderen beiden Achsen entsprechend.

Außerdem werden durch das Koordinatensystem noch die drei sogenannten Koordinatenebenen festgelegt: die xy-Ebene durch den Punkt O und die Vektoren i und j, die anderen beiden Ebenen entsprechend.

Aufgaben a 10 bis 13

2 Gesucht sei eine Gleichung für die x-Achse.
Da diese durch den Koordinatenursprung geht und $\mathfrak{i}$ zum Richtungsvektor hat, ist $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i}$, $-\infty < x < +\infty$, eine Parametergleichung für die x-Achse, wobei die Abszisse x eines Punktes dieser Geraden gleichzeitig sein Parameterwert ist.
In Koordinatenschreibweise steht für

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} \quad \text{das System} \quad y = 0,\ z = 0,\ -\infty < x < +\infty.$$

Es zeigt, daß jeder Punkt P der x-Achse die Koordinaten $P(x\ ; 0; 0)$ hat.
Allgemein hat jede Parametergleichung für die x-Achse die Gestalt $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{r}_0$ der Ortsvektor eines Punktes dieser Geraden und $\mathfrak{a}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{i}$ ist.

3 Gesucht sei eine Gleichung der xy-Ebene.
Da diese Ebene durch O geht und $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ ein Paar von Richtungsvektoren für sie sind, ist $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}$ mit $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ eine Parametergleichung der xy-Ebene. In Koordinatenschreibweise steht für sie die Gleichung $z = 0$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, aus der folgt, daß für alle Punkte P der xy-Ebene die z-Koordinate gleich Null ist.
Allgemein hat jede Parametergleichung für die xy-Ebene die Gestalt

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + u\mathfrak{a} + v\mathfrak{b},$$

wobei $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0\,(x_0; y_0; 0)$ einen Punkt der xy-Ebene bestimmt und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Linearkombinationen von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ sind, für die $\mathfrak{a} \nparallel \mathfrak{b}$ gilt.
Beispielsweise kann $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0\,(1; 1; 0)$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{i} - \mathfrak{j}$ sein.
Bemerkung: Für die Geraden einer Ebene hatten wir aus der Parametergleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$ parameterfreie Gleichungen hergeleitet, z. B. die parameterfreie Punktrichtungsgleichung, die Achsenabschnittsgleichung u. a. Für die Geraden im Raum lassen sich im allgemeinen keine so einfachen parameterfreien Formen der Geradengleichung finden wie für die Geraden einer Ebene, denn aus dem der Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$ gleichwertigen System

$$(9)\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + ta_x, \\ y &= y_0 + ta_y, \\ z &= z_0 + ta_z \end{aligned}$$

erhalten wir durch Eliminieren von t stets zwei Beziehungen, z. B.

$$y - y_0 = \frac{a_y}{a_x}(x - x_0),\ z - z_0 = \frac{a_z}{a_x}(x - x_0) \quad \text{für } a_x \neq 0.$$

In speziellen Fällen lassen sich diese jedoch vereinfachen. Liegt beispielsweise die Gerade g in der xy-Ebene, dann ist für jeden ihrer Punkte $z = 0$ und damit in (9) $z_0 = a_z = 0$. Eliminiert man nun wie in der ebenen analytischen Geometrie aus den ersten beiden Gleichungen von (9) den Parameter t, dann erhält man für sie eine Gleichung der uns aus der ebenen Geometrie bekannten Form:

$$y - y_0 = \frac{a_y}{a_x}(x - x_0) \text{ oder } x = x_0 \text{ oder } y = mx + n \text{ oder } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Die Gerade g hat als Gerade des Raumes entsprechend die Gleichung:

$$y - y_0 = \frac{a_y}{a_x}(x - x_0),\quad z = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = x_0,\quad z = 0$$

$$\text{oder} \qquad y = mx + n,\quad z = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\quad z = 0.$$

Aufgaben a 14 bis 17

5 Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden des Raumes

(9) *Unter welcher Bedingung nennt man zwei Geraden des Raumes windschief zueinander?*

(10) *In welcher gegenseitigen Lage können sich zwei Geraden des Raumes befinden?*

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2 des Raumes durch die Parametergleichungen

(10) $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}, \ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o} \quad (g_1)$,
(11) $\bar{\mathfrak{r}} = \bar{\mathfrak{r}}_0 + \bar{t}\bar{\mathfrak{a}}, \ \bar{\mathfrak{a}} \neq \mathfrak{o} \quad (g_2)$.

Es ist zu untersuchen, welche gegenseitige Lage g_1 und g_2 zueinander haben, und es ist gegebenenfalls der einzige gemeinsame Punkt von g_1 und g_2, ihr sogenannter **Schnittpunkt**, zu berechnen.
Wie für die Geraden einer Ebene muß für einen gemeinsamen Punkt S von g_1 und g_2 die Beziehung $\mathfrak{r}_S = \bar{\mathfrak{r}}_S$ erfüllt sein, für die wir

(12a) $\boxed{\mathfrak{r}_0 + t_S\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{r}}_0 + \bar{t}_S\bar{\mathfrak{a}}}$ **oder** (12b) $\boxed{\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 = \bar{t}_S\bar{\mathfrak{a}} - t_S\mathfrak{a}}$

schreiben können (dabei sei mit t_S der Parameterwert für S auf g_1 und mit $\bar{t}_S$ der Parameterwert für S auf g_2 bezeichnet).
Zur Ermittlung der gegenseitigen Lage der Geraden g_1 und g_2 untersuchen wir, welche Beziehungen zwischen den Vektoren $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$, $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ bestehen können, die in die Gleichung (12b) eingehen:

Fall 1a: Es sei $\bar{\mathfrak{a}} \parallel \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 \parallel \mathfrak{a}$.
Dann existieren reelle Zahlen λ und μ, für die $\bar{\mathfrak{a}} = \lambda\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 = \mu\mathfrak{a}$ ist. Setzen wir in (12b) für $\bar{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ entsprechend $\lambda\mathfrak{a}$ und $\mu\mathfrak{a}$, dann geht (12b) über in die Gleichung

$$\mu\mathfrak{a} = (\bar{t}_S\lambda - t_S)\,\mathfrak{a} \quad \text{oder} \quad (\mu - \bar{t}_S\lambda + t_S)\,\mathfrak{a} = \mathfrak{o}.$$

Für diese Gleichung ist jedoch wegen $\lambda \neq 0$, $(\bar{\mathfrak{a}} \neq \mathfrak{o})$, jedes Zahlenpaar $[t_S; \bar{t}_S]$ mit $\bar{t}_S = \dfrac{\mu + t_S}{\lambda}$ und t_S eine beliebige reelle Zahl eine Lösung.

Die Geraden g_1 und g_2 haben folglich alle Punkte gemeinsam, sie sind identisch (Bild A 10 a).

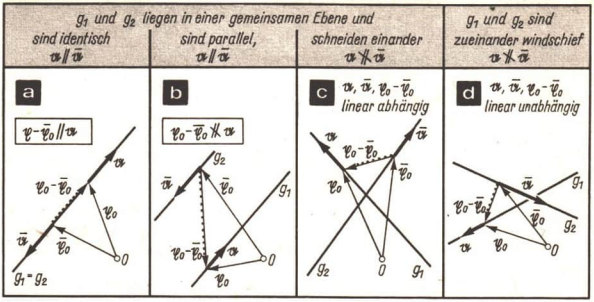
Fall 1b: Es sei $\bar{\mathfrak{a}} \parallel \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 \nparallel \mathfrak{a}$.
Weil dann für eine reelle Zahl λ die Gleichung $\bar{\mathfrak{a}} = \lambda\mathfrak{a}$ gilt, ist (12b) der Gleichung

$$\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 = (\bar{t}_S\lambda - t_S)\,\mathfrak{a}$$

äquivalent. Diese Gleichung kann jedoch von keinem Wertepaar $[t_S; \bar{t}_S]$ erfüllt werden, da sonst entgegen der Voraussetzung $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 \parallel \mathfrak{a}$ wäre! Es gibt also keinen Punkt S, der g_1 und g_2 gemeinsam ist. Wegen $\bar{\mathfrak{a}} = \lambda\mathfrak{a}$ liegen g_1 und g_2 jedoch in einer Ebene, und zwar in der durch den Punkt mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}_0$ und die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ bestimmten Ebene mit der Gleichung

(13) $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + u\mathfrak{a} + v(\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0)$.

Für $v = 0$ und $u = t$ mit $-\infty < t < +\infty$ ist nämlich (13) die Gleichung von g_1 und für $v = -1$ und $u = \lambda\bar{t}$ mit $-\infty < \bar{t} < +\infty$ die Gleichung von g_2, d. h., beide Geraden liegen in dieser Ebene. Als Geraden, die in derselben Ebene liegen und keinen gemeinsamen Punkt haben, sind g_1 und g_2 parallel zueinander, ohne identisch zu sein (Bild A 10b).



A 10

Fall 2a: Es sei $\bar{\mathfrak{a}} \nparallel \mathfrak{a}$, und die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ seien linear abhängig. Wegen der linearen Abhängigkeit von $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ gibt es dann drei reelle Zahlen λ_1, λ_2 und λ_3 mit $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$, für die gilt

(14) $\lambda_1 \mathfrak{a} + \lambda_2 \bar{\mathfrak{a}} + \lambda_3 (\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0) = \mathfrak{o}$.

In dieser Beziehung ist $\lambda_3 \neq 0$, da bei $\lambda_3 = 0$ die Gleichung (14) in die Beziehung $\lambda_1 \mathfrak{a} + \lambda_2 \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{o}$ mit $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ übergeht, was bedeutet, daß $\mathfrak{a} \parallel \bar{\mathfrak{a}}$ ist, entgegen der Voraussetzung.
Dividieren wir nun (14) durch λ_3, dann können wir dafür schreiben

(15) $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3} \bar{\mathfrak{a}} - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} \mathfrak{a}$.

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ sind die Koeffizienten $-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$ und $-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}$ der Linearkombination (14) für den Vektor $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ eindeutig bestimmt. Ist nämlich

(16) $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 = \mu_2 \bar{\mathfrak{a}} + \mu_1 \mathfrak{a}$

eine andere Linearkombination von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ für $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$, dann erhält man aus den Gleichungen (15) und (16) durch Subtraktion die Beziehung

$$\mathfrak{o} = \left(\mu_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) \bar{\mathfrak{a}} + \left(\mu_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) \mathfrak{a},$$

aus der wegen $\bar{\mathfrak{a}} \nparallel \mathfrak{a}$ folgt $\mu_2 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3} = \mu_1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0$, d. h., es ist $\mu_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$ und $\mu_1 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}$, wie behauptet wurde.
Aus der Gültigkeit der Beziehung (15) für die gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ und der eindeutigen Bestimmtheit der Koeffizienten der Linearkombination folgt aber, daß (12b) für genau ein Wertepaar $[t_S; \bar{t}_S]$ erfüllt ist, was bedeutet, daß die Geraden g_1 und g_2 genau einen gemeinsamen Punkt besitzen und somit einander schneiden (Bild A 10 c).
Die dem Schnittpunkt S von g_1 und g_2 entsprechenden Parameterwerte t_S und $\bar{t}_S$ berechnet man aus der Gleichung (12b), für die in Koordinatenschreibweise das System

A

(17) $$\boxed{\begin{aligned} x_0 - \bar{x}_0 &= \bar{t}_S\,\bar{a}_x - t_S\,a_x\,, \\ y_0 - \bar{y}_0 &= \bar{t}_S\,\bar{a}_y - t_S\,a_y\,, \\ z_0 - \bar{z}_0 &= \bar{t}_S\,\bar{a}_z - t_S\,a_z \end{aligned}}$$

geschrieben werden kann.

Fall 2b: Ist $\bar{\mathfrak{a}} \nparallel \mathfrak{a}$ und sind die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ linear unabhängig, dann ist die Gleichung (12b) für kein Zahlenpaar $[t_S; \bar{t}_S]$ erfüllt. Die Geraden g_1 und g_2 haben folglich keinen Punkt gemeinsam. Darüber hinaus liegen g_1 und g_2 nicht in derselben Ebene. Lägen sie nämlich in derselben Ebene, dann müßte sie diejenige sein, die durch den Punkt $\mathfrak{r}_0$ und die Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ von g_1 und g_2 bestimmt wird. Da dieser Ebene mit g_2 aber auch der Punkt $\bar{\mathfrak{r}}_0$ angehört, müßte $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ als Linearkombination von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ darstellbar sein, was der Voraussetzung widerspricht.
Damit ist gezeigt, daß in diesem letzten Falle g_1 und g_2 zwei **windschiefe Geraden** sind (Bild A 10 d).

6

4 Zwei Geraden g_1 und g_2 seien durch die Angabe je eines ihrer Punkte und eines ihrer Richtungsvektoren gegeben:
g_1 durch $\mathfrak{r}_0(0; 4; 1)$ und $\mathfrak{a}(0; 0; -2)$, g_2 durch $\bar{\mathfrak{r}}_0(0; -2; 4)$ und $\bar{\mathfrak{a}}(0; 1; 0)$.
Es soll ihre gegenseitige Lage ermittelt werden.
Man erkennt, daß $\mathfrak{a} \nparallel \bar{\mathfrak{a}}$ ist, d. h., g_1 und g_2 sind nicht parallel zueinander. Aus den Koordinaten des Vektors $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0$ [wir finden für ihn $(0; 6; -3)$] und den Koordinaten von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ können wir dann weiter ablesen, daß $\mathfrak{r}_0 - \bar{\mathfrak{r}}_0 = 6\,\bar{\mathfrak{a}} + \frac{3}{2}\,\mathfrak{a}$ ist.
Folglich schneiden g_1 und g_2 einander. Die Parameterwerte t_S und $\bar{t}_S$ für den Schnittpunkt berechnen wir aus dem Gleichungssystem (17), für das in diesem Falle steht

$$0 - 0 = \bar{t}_S \cdot 0 - t_S \cdot 0,$$
$$4 + 2 = \bar{t}_S \cdot 1 - t_S \cdot 0$$

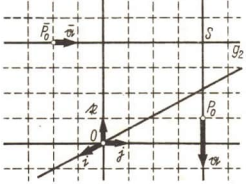
oder $$\bar{t}_S = 6,$$
$$1 - 4 = \bar{t}_S \cdot 0 - t_S \cdot (-2)$$

oder $$t_S = -\frac{3}{2}.$$

Das Bild A 11 veranschaulicht die gegenseitige Lage von g_1 und g_2.
Als Probe berechnen wir nach diesen Werten t_S und $\bar{t}_S$ auf zweierlei Weise die Koordinaten des Schnittpunktes

$$\mathfrak{r}_S = \mathfrak{r}_0 + t_S\,\mathfrak{a}, \quad \bar{\mathfrak{r}}_S = \bar{\mathfrak{r}}_0 + \bar{t}_S\,\bar{\mathfrak{a}}$$

und finden $\mathfrak{r}_S\,(0; 4; 4) = \bar{\mathfrak{r}}_S\,(0; 4; 4)$.



A 11

Aufgaben a 18 bis 21

7 Lagebeziehungen zwischen Geraden des Raumes und Koordinatenebenen

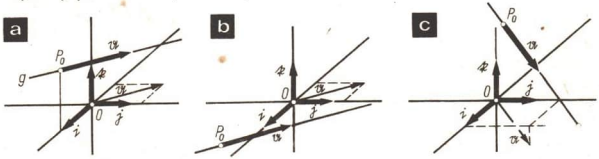
Gegeben sei eine Gerade g durch eine Parametergleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$. Zu ermitteln ist die gegenseitige Lage dieser Geraden und der Koordinatenebenen.
Wir untersuchen zunächst die gegenseitige Lage von g und der xy-Ebene. Gehen wir von der Gleichung $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}$ der xy-Ebene aus, dann müssen die gemeinsamen Punkte von g und der xy-Ebene der Gleichung

$$x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$$

genügen. Wir schreiben diese Gleichung in Koordinatenschreibweise

$$(18) \quad x = x_0 + ta_x,\ y = y_0 + ta_y,\ 0 = z_0 + ta_z$$

und untersuchen, unter welchen Bedingungen sie Lösungen $[x; y; t]$ besitzt.
a) Für $a_z = 0$ und $z_0 \neq 0$ ist (18) nicht lösbar, da die letzte Gleichung von (18) für kein t und damit (18) für kein Zahlentripel $[x; y; t]$ erfüllt ist. Es gibt also keinen Punkt auf g, der gleichzeitig Punkt der xy-Ebene ist. In diesem Falle ist folglich g parallel zur xy-Ebene (Bild A 12 a).



A 12

b) Für $a_z = 0$ und $z_0 = 0$ ist nach (18) jeder Punkt von g ein Punkt der xy-Ebene, da jedem t nach (18_1) und (18_2) ein Wertepaar $[x; y]$ entspricht. Die Gerade g liegt also in der xy-Ebene (Bild A 12 b).
c) Für $a_z \neq 0$ hat (18) eine eindeutig bestimmte Lösung $[x; y; t]$

$$t = -\frac{z_0}{a_z},\ x = x_0 - z_0\frac{a_x}{a_z},\ y = y_0 - z_0\frac{a_y}{a_z},$$

in der t der Parameterwert des Schnittpunktes von g mit der xy-Ebene als Punkt von g ist und x, y die Parameterwerte dieses Punktes als Punkt der xy-Ebene sind (Bild A 12 c).
Gemeinsame Punkte von g und der xy- bzw. yz-Ebene ermittelt man analog.

5 Zu ermitteln sei die gegenseitige Lage der Geraden $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{r}_0(-4; 2; 1)$, $\mathfrak{a}(1; 1; 0)$ und der Koordinatenebenen.
a) Gemeinsame Punkte von g und der xy-Ebene genügen der Gleichung

$$x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$$

bzw. dem System (↗ Gleichung 18)

$$\begin{aligned} x &= -4 + t \\ y &= 2 + t \\ 0 &= 1 + t \cdot 0 \end{aligned}$$

Da es kein Zahlentripel gibt, das **alle drei** Gleichungen erfüllt, hat g mit der xy-Ebene keinen Punkt gemeinsam. Die Gerade g ist parallel zu dieser Ebene.

A

b) Gemeinsame Punkte von g und der xz-Ebene genügen der Gleichung

$$x\mathfrak{i} + z\mathfrak{k} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$$

bzw. dem System

$$\begin{aligned} x &= -4 + t \\ 0 &= 2 + t \\ z &= 1 + t \cdot 0 \end{aligned}$$

Der Punkt mit dem Parameterwert $t = -2$ liegt in der xz-Ebene und hat dort die Koordinaten $x = -6$, $z = 1$.

c) Den **Spurpunkt** von g auf der yz-Ebene, d. h. den Schnittpunkt der Geraden g mit der yz-Ebene, bestimmt man analog.

(11) *Fertigen Sie zum Beispiel A 5 eine Skizze an!*

(12) *Wie ist die Projektion* **a)** *eines Punktes,* **b)** *einer Geraden auf eine Ebene definiert?*

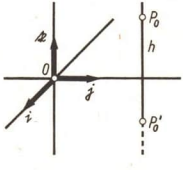
Gegeben sei eine Gerade g durch eine Parametergleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$. Zu ermitteln ist ihre **Projektion auf die xy-Ebene.**
Unter der Projektion eines Punktes P_0 mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}_0$ auf die xy-Ebene versteht man den Punkt P'_0, den diese Ebene mit der auf ihr senkrecht stehenden Geraden h durch P_0 gemeinsam hat (Bild A 13). Ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \tau\mathfrak{k}$ eine Parametergleichung von h und $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}$ eine Gleichung der xy-Ebene, dann kann der Schnittpunkt von h mit dieser Ebene aus der Gleichung

(19) $x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} = \mathfrak{r}_0 + \tau\mathfrak{k}$

bzw. dem System

(20) $$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \\ 0 &= z_0 + \tau \end{aligned}$$

A 13



ermittelt werden. Dem System (20) genügt wirklich nur ein Punkt, und zwar der Punkt P_0', dem auf h der Parameterwert $\tau = -z_0$ entspricht. In der xy-Ebene entsprechen ihm die Parameterwerte $x = x_0$, $y = y_0$, die gleichzeitig die x- und y-Koordinaten von P_0' sind. Wir haben also gefunden:

8 **SATZ: Die Projektion P_0' eines Punktes P_0 $(x_0; y_0; z_0)$ auf die xy-Ebene hat die Koordinaten P_0' $(x_0; y_0; 0)$.**

Da die Projektion g' einer Geraden g auf die xy-Ebene gleich der Gesamtheit der Projektionen der Punkte von g auf diese Ebene ist, betrachten wir nun einen beliebigen Punkt $P(x_0 + ta_x; y_0 + ta_y; z_0 + ta_z)$ von g. Seine Projektion P' hat die Koordinaten $P'(x_0 + ta_x; y_0 + ta_y; 0)$ und den Ortsvektor

(21) $\mathfrak{r}' = (x_0 + ta_x)\mathfrak{i} + (y_0 + ta_y)\mathfrak{j} = (x_0\mathfrak{i} + y_0\mathfrak{j}) + t(a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j})$,

für den wir kürzer

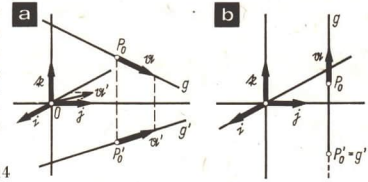
(22) $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0' + t\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{r}_0'(x_0; y_0; 0)$, $\mathfrak{a}'(a_x; a_y; 0)$

schreiben. Durchläuft nun P die Gerade g, dann durchläuft P' die Menge der durch die Gleichung (22) beschriebenen Punkte. Für $a_x^2 + a_y^2 \neq 0$ ist (22) die Gleichung der Geraden der xy-Ebene, die durch den Punkt P_0' und den Richtungsvektor $\mathfrak{a}'$ bestimmt wird; für $a_x = a_y = 0$ bestimmt (22) den Punkt P_0'. Bezeich-

nen wir $\mathfrak{r}_0'$ und $\mathfrak{a}'$ als die Projektionen der Vektoren $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{a}$ auf die xy-Ebene[1], dann haben wir gefunden:

9 **SATZ: Die Projektion einer Geraden g mit der Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$ auf die xy-Ebene ist für $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{o}$ die Gerade g' der xy-Ebene mit der Gleichung $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0' + t\mathfrak{a}'$, in der $\mathfrak{r}_0'$ und $\mathfrak{a}'$ entsprechend die Projektion von $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{a}$ auf die xy-Ebene sind (Bild 14a). Für $\mathfrak{a}' = \mathfrak{o}$ ist die Projektion von g der Punkt P'_0 (Bild A 14b).**

Die Projektionen von g auf die xz- bzw. yz-Ebene ermittelt man analog. Dabei ist zu beachten, daß die Projektion von P_0 auf die xz-Ebene der Punkt $P_0''(x_0;\ 0;\ z_0)$ und die Projektion von P_0 auf die yz-Ebene der Punkt $P_0'''(0;\ y_0;\ z_0)$ ist.



A 14

13 *Ermitteln Sie die Projektion* **a)** *des Vektors* $\mathfrak{a}(6; -3; 5)$, **b)** *der Geraden* $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + t(5\mathfrak{j} - 4\mathfrak{k})$, **c)** *der Geraden* $\mathfrak{r} = 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k} - t\mathfrak{j}$ *auf die xz-Ebene!*

Aufgaben a 22 bis 25

Das Skalarprodukt zweier Vektoren

8 Definition des Skalarproduktes

In der Physik versteht man unter der mechanischen Arbeit, die eine konstante Kraft $\mathfrak{F}$ verrichtet, wenn sie längs eines Weges $\mathfrak{s}$ wirkt, den Ausdruck

(23) $W = F \cdot s.$

In ihm ist

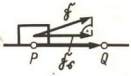
a) s die Länge des Weges $\mathfrak{s}$ (der Betrag des Vektors $\mathfrak{s} = \overrightarrow{PQ}$, wenn $\mathfrak{F}$ längs der gerichteten Strecke $\overline{PQ}$ wirkt),

b) F der Betrag (die Größe) der Kraft $\mathfrak{F}$, wenn Kraft- und Wegrichtung zusammenfallen.

Wirkt $\mathfrak{F}$ nicht in der Richtung von $\mathfrak{s}$, dann verrichtet nur die mit $\mathfrak{s}$ gleichgerichtete Komponente $\mathfrak{F}_\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{F}$ längs des Weges $\mathfrak{s}$ Arbeit (Bild A 15). In diesem Fall ist also in (23) für F der Betrag $F_\mathfrak{s}$ der Komponente $\mathfrak{F}_\mathfrak{s}$, d. h. $F_\mathfrak{s} = F \cos \sphericalangle (\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$, einzusetzen und die von $\mathfrak{F}$ längs $\mathfrak{s}$ verrichtete Arbeit W beträgt:

(24) $W = F \cdot s \cdot \cos \sphericalangle (\mathfrak{F}, \mathfrak{s}).$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung von (23), denn sie gilt auch dann, wenn $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ gleichgerichtet sind. In diesem Falle ist nämlich $\mathfrak{F}_\mathfrak{s} = F$ und $\cos \sphericalangle (\mathfrak{F}, \mathfrak{s}) = 1$, d. h., (24) nimmt die Gestalt (23) an.



A 15

[1] Allgemein versteht man unter der Projektion eines Vektors $\mathfrak{r} = \overrightarrow{AB}$ auf eine Ebene α den Vektor $\mathfrak{r}' = \overrightarrow{A'B'}$, für den A' und B' die Projektionen von A und B auf α sind.

A

In (24) ist W eine Funktion von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$, denn $F_{\mathfrak{s}}$, s und der Winkel $\sphericalangle(\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$ hängen nur von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ ab. Man schreibt für diese Funktion oft

$$W = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}$$

und nennt sie das **skalare Produkt** von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ (skalar — da W jeweils eine Zahl, ein Skalar, ist; Produkt — da diese Verknüpfung einige Rechenregeln mit der Multiplikation für reelle Zahlen gemeinsam hat).
Im Ausdruck (24) für die mechanische Arbeit sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ Elemente verschiedener Vektorräume. Im Vektorraum der Verschiebungen des Raumes, d. h. — wie wir jetzt kurz sagen — für die Vektoren des Raumes ist eine solche Produktbildung ebenfalls sinnvoll.
Wir vereinbaren wieder wie im Falle einer Ebene, daß der Nullvektor mit jedem Vektor des Raumes einen rechten Winkel bildet, und definieren:

10 **DEFINITION: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Vektoren des Raumes, dann heißt die mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ bezeichnete reelle Zahl**

(25) $$\boxed{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}$$

das *skalare Produkt* der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Aus dieser Definition kann man ablesen:

1. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} > 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$, $0 \leqq \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) < \frac{\pi}{2}$,
2. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} < 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$, $\frac{\pi}{2} < \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \pi$,
3. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ genau dann, wenn $\begin{cases} \text{a) } \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \text{ oder } \mathfrak{b} = \mathfrak{o}, \\ \text{b) } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o},\ \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o} \text{ und } \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Im Gegensatz zur Multiplikation der reellen Zahlen folgt also aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ **nicht** stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, sondern es folgt stets $\mathfrak{a}$ orthogonal $\mathfrak{b}$.[1]

14 *Welchen Wert hat das Skalarprodukt eines Vektors $\mathfrak{a}$* **a)** *mit sich selbst,* **b)** *mit* $-\mathfrak{a}$*?*

Für das Skalarprodukt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}$ eines Vektors $\mathfrak{a}$ mit sich selbst schreibt man auch $\mathfrak{a}^2$.

Aufgaben a 26 bis 29

9

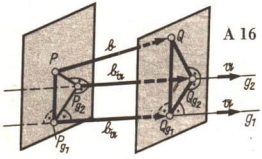
Für das Skalarprodukt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kann man einen anderen Ausdruck erhalten, wenn man sich auf den Begriff „Projektion eines Vektors $\mathfrak{b}$ auf einen Vektor $\mathfrak{a}$" stützt. Bevor wir diesen Begriff definieren, stellen wir zunächst folgende Überlegungen an.
Unter der Projektion eines Punktes auf eine Gerade g versteht man den Punkt P_g, den die zu g senkrechte Ebene durch P mit g gemeinsam hat. Es seien uns zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegeben, von denen $\mathfrak{a}$ kein Nullvektor sein möge.
Ferner sei g eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$, und es sei $\mathfrak{b} = \overrightarrow{PQ}$ eine Repräsentantendarstellung von $\mathfrak{b}$.

[1] Wir hatten ja vereinbart, daß $\mathfrak{o}$ zu jedem Vektor orthogonal ist.

Durch elementargeometrische Überlegungen kann man zeigen:

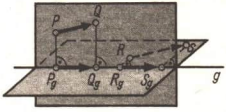
a) Für eine gerichtete Strecke $\overline{PQ}$ und zwei beliebige Geraden g_1 und g_2 mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ (d. h. $g_1 \parallel g_2$) sind die gerichteten Strecken $\overline{P_{g_1}Q_{g_1}}$ und $\overline{P_{g_2}Q_{g_2}}$ parallelgleich (Bild A 16).

b) Für zwei parallelgleiche Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ und jede beliebige Gerade g mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ sind die gerichteten Strecken $\overline{P_gQ_g}$ und $\overline{R_gS_g}$ parallelgleich (Bild A 17).



A 16

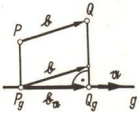
A 17



Deshalb sind für jedes Vektorpaar $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ alle den Repräsentanten $[P; Q]$ von $\mathfrak{b}$ durch Projektion auf die Geraden g mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ zugeordneten gerichteten Strecken $\overrightarrow{P_gQ_g}$ parallelgleich. Sie bestimmen also einen Vektor $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} = \overrightarrow{P_gQ_g}$, der nur von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ abhängt; man nennt ihn die **Projektion des Vektors $\mathfrak{b}$ auf den Vektor $\mathfrak{a}$**.

Zwischen den Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ besteht die Beziehung

(26) $\boxed{|\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| = |\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{b})}$



A 18

(Bild A 18). In ihr ist

$\sphericalangle (\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für $0 \leqq \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \frac{\pi}{2}$, da dann $\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$,

$\sphericalangle (\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle (-\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für $\frac{\pi}{2} < \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \pi$, da dann $\mathfrak{a} \uparrow\downarrow \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ ist, d. h., es gilt

(26′) $|\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| = |\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für $0 \leqq \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \frac{\pi}{2}$,

(26″) $|\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| = |\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (-\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = -|\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für $\frac{\pi}{2} < \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \pi$.

Daraus folgt entsprechend

(27′) $|\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| = |\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}})$ wegen $\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{b}$,

(27″) $|\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = -|\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| = |\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}})$ wegen $\mathfrak{a} \uparrow\downarrow \mathfrak{b}$.

Setzen wir jetzt die Gleichungen (27) in (25) ein, so erhalten wir für das Skalarprodukt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ den Ausdruck

(28) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \, |\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |\mathfrak{a}| \, |\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$.

Da wir auf analoge Weise für $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ die Beziehung

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{b}$$

herleiten könnten, haben wir damit folgenden Satz bewiesen:

11 **SATZ: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Vektoren mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$, so gilt für das Skalarprodukt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ dieser Vektoren die Gleichung**

$\boxed{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}}$ **bzw.** $\boxed{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{b}}$.

6 Die Projektion $\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}$ eines Vektors $\mathfrak{x} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$ auf den Basisvektor $\mathfrak{i}$ des Koordinatensystems $\{O; \mathfrak{i}; \mathfrak{j}; \mathfrak{k}\}$ ist $\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = x\mathfrak{i}$ (Bild A 19).
Folglich ist einerseits

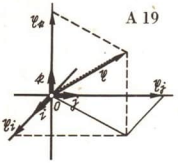
$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{x} = |\mathfrak{i}|\,|\mathfrak{x}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{i}, \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{i}, \mathfrak{x})$$

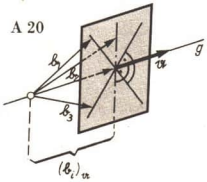
und andererseits

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}} = |\mathfrak{i}|\,|\mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{i}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}) = |\mathfrak{x}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{i}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{i}}) = x\,.$$

Aus der auf diese Weise erhaltenen Beziehung $|\mathfrak{x}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{i}, \mathfrak{x}) = x$ kann der Winkel zwischen $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{x}$ berechnet werden.
Analog findet man $\mathfrak{x}_{\mathfrak{j}} = y\mathfrak{j}$, $\mathfrak{x}_{\mathfrak{k}} = z\mathfrak{k}$ und entsprechend

$$\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{x} = |\mathfrak{x}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{j}, \mathfrak{x}) = y \text{ bzw. } \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x} = |\mathfrak{x}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{k}, \mathfrak{x}) = z\,.$$





Nach Satz A 11 haben alle Vektoren $\mathfrak{b}$ mit der gleichen Projektion $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ auf $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}$ das gleiche Skalarprodukt (Bild A 20). Daraus können wir insbesondere schließen, daß die skalare Multiplikation (Bildung des Skalarproduktes) nicht eindeutig umkehrbar ist, da es zu jedem vorgegebenen Wert λ des Skalarproduktes eines bekannten Vektors $\mathfrak{a}$ mit einem Vektor $\mathfrak{x}$ unendlich viele Vektoren $\mathfrak{x}$ gibt, für die $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = \lambda$ ist.

Aufgaben a 30 bis 33

10 Eigenschaften des Skalarproduktes

15 *Nennen Sie Gesetze, die*
a) *für die Multiplikation von reellen Zahlen,*
b) *für die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl gelten!*
Stellen Sie in einer Aufstellung den Gesetzen unter **a)** *die entsprechenden Gesetze unter* **b)** *gegenüber!*

12 **SATZ: Für die skalare Multiplikation gilt das *Kommutativgesetz*, d. h., für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist stets**

$$\boxed{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}}\,.$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der skalaren Multiplikation, denn wegen $\sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle (\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ ist

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |\mathfrak{b}|\,|\mathfrak{a}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}\,.$$

13 **SATZ: Für die skalare Multiplikation gilt bezüglich jeder reellen Zahl λ und jedes Paares von Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Beziehung**

$$(29) \qquad \boxed{\lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot(\lambda\mathfrak{b})}\,.$$

Beweis: Für $\lambda > 0$ ist wegen $|\lambda\mathfrak{a}| = \lambda\,|\mathfrak{a}|$ und $\sphericalangle(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$

$$(\lambda\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b} = |\lambda\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos\sphericalangle(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \lambda\,|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\,.$$

Für $\lambda < 0$ ist $|\lambda\mathfrak{a}| = -\lambda\,|\mathfrak{a}|$ und $\sphericalangle(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sphericalangle(-\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Folglich ist dann wegen $\sphericalangle(-\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \pi - \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$

$$\begin{aligned}(\lambda\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b} &= |\lambda\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos\sphericalangle(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = -\lambda\,|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos\sphericalangle(-\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\\ &= -\lambda\,|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\,[-\cos\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})] = \lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}),\end{aligned}$$

d. h., wieder gilt $\lambda(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b}$.
Für $\lambda = 0$ ist $\lambda(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$. Wegen $\lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ und damit $\lambda\mathfrak{a}$ orthogonal $\mathfrak{b}$ ist folglich $\cos\sphericalangle(\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$ und somit auch $(\lambda\mathfrak{a})\mathfrak{b} = 0$, *w. z. b. w.*
Die Beziehung $\lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\cdot(\lambda\mathfrak{b})$ beweist man analog.

14 **SATZ: Für die skalare Multiplikation gilt das Distributivgesetz, d. h., für drei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ist stets**

$$(30) \qquad \boxed{\mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} + \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}}\,.$$

Beweis: Für $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ ist (30) für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ erfüllt. Wir beweisen (30) für $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}$.
Nach Satz A 11 ist $\mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{c}}$.
Da allgemein für $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathfrak{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \overrightarrow{AC}$ die Beziehungen

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{c}} = \left(\overrightarrow{AC}\right)_{\mathfrak{c}} = \overrightarrow{A_gC_g}$$

und

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}} + \mathfrak{b}_{\mathfrak{c}} = \left(\overrightarrow{AB}\right)_{\mathfrak{c}} + \left(\overrightarrow{BC}\right)_{\mathfrak{c}} = \overrightarrow{A_gB_g} + \overrightarrow{B_gC_g} = \overrightarrow{A_gC_g}$$

gelten (wobei mit g eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{c}$ bezeichnet wurde, Bild A 21), ist

$$(31) \qquad (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{c}} + \mathfrak{b}_{\mathfrak{c}}\,.$$

Sind nun die Winkel $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$, $\sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ und $\sphericalangle(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ nicht größer als Rechte und damit die Vektoren $\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}}$, $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{c}}$ sowie $\mathfrak{c}$ gleichgerichtet, dann folgt aus (31) die Gleichung

$$(32) \qquad |(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{c}}| = |\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}| + |\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}}|\,.$$

Wir multiplizieren sie mit $|\mathfrak{c}|$

$$(33) \qquad |\mathfrak{c}|\,|(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{c}}| = |\mathfrak{c}|\,(|\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}| + |\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}}|)$$

und können für (33) wegen

$$\begin{aligned}\cos\sphericalangle(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}) &= \cos\sphericalangle(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{c}})\\ &= \cos\sphericalangle(\mathfrak{c}, [\mathfrak{a}+\mathfrak{b}]_{\mathfrak{c}}) = 1\end{aligned}$$

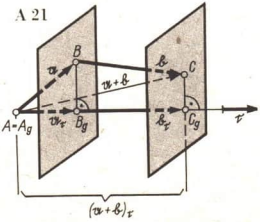
schreiben

$$(34) \qquad \mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}} + \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}}$$

oder

$$(35) \qquad \mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} + \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}\,.$$

A 21



Sind die Winkel $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$, $\sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ und $\sphericalangle(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ größer als Rechte, dann sind die Vektoren $\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}}$ und $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{\mathfrak{c}}$ untereinander gleichgerichtet, aber mit $\mathfrak{c}$ entgegengesetzt gerichtet. Aus (31) folgt demnach wieder (32) und (33), aus (33) aber dieses Mal wegen $\cos \sphericalangle(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}) = \cos \sphericalangle(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{c}}) = \cos \sphericalangle(\mathfrak{c}, [\mathfrak{a} + \mathfrak{b}]_{\mathfrak{c}}) = -1$ die Beziehung (34) und damit auch (35).
Wenn die Vektoren $\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}}$ und $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{\mathfrak{c}}$ nicht alle gleichgerichtet sind, beweist man den Satz analog.
Da das Skalarprodukt zweier Vektoren kein Vektor, sondern eine Zahl ist und außerdem für drei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Vektoren $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c}$ im allgemeinen nicht gleichgerichtet zu sein brauchen, gilt für die skalare Multiplikation von Vektoren **kein Assoziativgesetz.**

7 Bezeichnen wir den Vektor, der zu $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ addiert $\mathfrak{b}$ ergibt, mit $\mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$, d. h., setzen wir $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$, dann folgt aus

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}} \quad \text{wegen}$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$$

die Beziehung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}} = 0$.

Damit ist gezeigt, daß für $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ jeder Vektor $\mathfrak{b}$ in zwei zueinander orthogonale Komponenten $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$ zerlegt werden kann, von denen $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ zu $\mathfrak{a}$ parallel und $\mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$ zu $\mathfrak{a}$ orthogonal ist.

Aufgaben a 34 bis 36

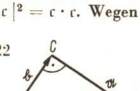
11 Einfache Anwendungen des Skalarprodukts

Mit Hilfe unserer bisherigen Kenntnisse über das Skalarprodukt lassen sich bereits einige sehr einfache Beweise für Sätze aus der ebenen und räumlichen Geometrie sowie der Trigonometrie führen.

8 SATZ des Pythagoras: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich der Summe der Quadrate über den Katheten.
Beweis: Das Quadrat über der Hypotenuse hat den Wert $|\mathfrak{c}|^2 = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$. Wegen $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ (Bild A 22) können wir dafür schreiben

$$\begin{aligned} |\mathfrak{c}|^2 = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} &= (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \\ &= (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{a} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{b} \\ &= \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}. \end{aligned}$$

A 22



Da jedoch $\mathfrak{a}$ orthogonal zu $\mathfrak{b}$ ist, gilt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} = 0$. Somit erhalten wir

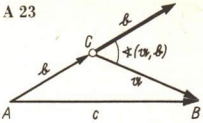
$$|\mathfrak{c}|^2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2, \qquad w.\ z.\ b.\ w.$$

9 Der Satz des Pythagoras ist ein Spezialfall des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie. Bezeichnen wir für ein beliebiges Dreieck ABC wie üblich
a) die Längen der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ entsprechend mit c, a bzw. b,
b) die Maßzahlen für die Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ACB$ entsprechend mit α, β bzw. γ,
dann gilt für das $\triangle ABC$

SATZ: In jedem Dreieck ABC ist

$$(36)\quad \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha,\\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2\,ac\cos\beta,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma \end{aligned}$$

A 23



Beweis: Wir beweisen die Gültigkeit von (36_3). Wegen $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ist stets (Bild A 23)

$$\mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + 2\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2 + 2\,|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Wir gehen nun zu der oben vereinbarten Schreibweise über:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\cos(180^\circ - \gamma) = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma\,.$$

Die Beziehungen (36_1) und (36_2) beweist man analog, indem man von den Darstellungen $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} - \mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - \mathfrak{b}$ ausgeht.

Aufgaben a 37 und 38

12 Koordinatendarstellung des Skalarproduktes

(16) *Beweisen Sie mit Hilfe der für die skalare Multiplikation geltenden Gesetze für beliebige Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ *und* $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ *das erweiterte Distributivgesetz*

$$(37)\quad \begin{aligned} &(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3)\cdot(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3) =\\ &= \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\cdot\mathfrak{b}_3\,! \end{aligned}$$

Für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ hat das Skalarprodukt von $\mathfrak{a}$ mit sich selbst den Wert

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{a}|\cos\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = |\mathfrak{a}|^2.$$

Demzufolge ist für die Basisvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ der orthonormierten Basis $\{\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ der Vektoren des Raumes

$$(38)\quad \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i} = |\mathfrak{i}|^2 = 1,\ \mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j} = |\mathfrak{j}|^2 = 1,\ \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k} = |\mathfrak{k}|^2 = 1\,.$$

Außerdem können wir für diese Vektoren noch folgende Produkte berechnen:

$$(39)\quad \begin{aligned} \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{j} &= |\mathfrak{i}|\,|\mathfrak{j}|\cos\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}) = 0\,,\\ \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{k} &= |\mathfrak{i}|\,|\mathfrak{k}|\cos\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{k}) = 0\,,\\ \mathfrak{j}\cdot\mathfrak{k} &= |\mathfrak{j}|\,|\mathfrak{k}|\cos\sphericalangle(\mathfrak{j}, \mathfrak{k}) = 0\,, \end{aligned}$$

denn $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ stehen paarweise senkrecht aufeinander. Es seien nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige, durch ihre Koordinaten $\mathfrak{a}(a_x, a_y, a_z)$ und $\mathfrak{b}(b_x, b_y, b_z)$ bezüglich $\{\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ gegebene Vektoren. Ihr Skalarprodukt ist

$$(40)\quad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = (a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k})\cdot(b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k})\,.$$

Für diesen Ausdruck können wir auf Grund des erweiterten Distributivgesetzes (37) und der Beziehungen (38) und (39)

$$(41)\quad \boxed{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

schreiben und haben damit eine **Darstellung des Skalarproduktes zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch ihre Koordinaten** gefunden. Insbesondere ist für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\mathfrak{a}|^2,$$

woraus man für den Betrag eines Vektors $\mathfrak{a}$ die einprägsame Formel

(42) $$\boxed{|\mathfrak{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}_x^2 + \boldsymbol{a}_y^2 + \boldsymbol{a}_z^2} = \sqrt{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}}}$$

erhält.

Ferner ergibt sich aus der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eine Formel für die **Berechnung des Winkels** $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ **zwischen** $\mathfrak{a}$ **und** $\mathfrak{b}$, denn aus

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

und (41) folgt für $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$

(43) $$\boxed{\cos \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|}}$$

oder

(44) $$\boxed{\cos \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\boldsymbol{a}_x \boldsymbol{b}_x + \boldsymbol{a}_y \boldsymbol{b}_y + \boldsymbol{a}_z \boldsymbol{b}_z}{\sqrt{\boldsymbol{a}_x^2 + \boldsymbol{a}_y^2 + \boldsymbol{a}_z^2}\,\sqrt{\boldsymbol{b}_x^2 + \boldsymbol{b}_y^2 + \boldsymbol{b}_z^2}}}$$

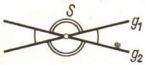
Aus diesen Formeln läßt sich der **nichtorientierte Winkel** zwischen zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ leicht berechnen. Ist einer der beiden Vektoren der Nullvektor, dann ist diese Formel nicht anwendbar, und der Winkel zwischen ihnen ist laut Definition $\frac{\pi}{2}$. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vom Nullvektor verschieden, dann sind sie genau dann orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet.

Aufgaben a 39 bis 45

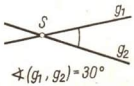
Anwendung des Skalarproduktes in der analytischen Geometrie und auf physikalische Probleme

13 Schnittwinkel zweier Geraden

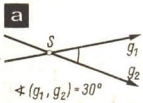
Wenn zwei Geraden einander schneiden, dann zerlegt der Schnittpunkt die beiden Geraden in je zwei Strahlen. Fassen wir nun je einen solchen Strahl der einen Geraden mit je einem Strahl der anderen Geraden zusammen, dann entstehen vier Winkel mit gemeinsamem Scheitel (dem Schnittpunkt), aus denen wir zwei Paare von Scheitelwinkeln, aber auch zwei Paare von Nebenwinkeln bilden können (Bild A 24).



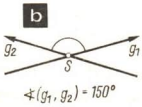
A 24



A 25



A 26



Da Scheitelwinkel einander kongruent sind, bestimmen zwei einander schneidende Geraden somit genau zwei Winkel im allgemeinen unterschiedlicher Größe, die sich als Nebenwinkel zu 180° ergänzen. Als **Schnittwinkel** $\sphericalangle(g_1, g_2)$ **zweier (nichtorientierter) Geraden** g_1 und g_2 bezeichnet man den kleineren dieser beiden Nebenwinkel oder, falls beide rechte Winkel sind, einen beliebigen davon (Bild A 25).
Ist auf beiden Geraden eine Orientierung festgelegt, dann bezeichnet man als **Schnittwinkel** $\sphericalangle(g_1, g_2)$ **der orientierten Geraden** g_1 **und** g_2 den Winkel, der von den beiden Strahlen gebildet wird, auf denen der Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 **vor** allen anderen Punkten dieser Strahlen liegt (Bild A 26).
Zur Berechnung dieser Schnittwinkel zweier Geraden findet das Skalarprodukt, insbesondere die Formel (43) bzw. (44) Anwendung.

Neben dem Schnittwinkel zweier Geraden betrachtet man oft noch den Schnittwinkel $\sphericalangle(g_1, g_2)$ nichtorientierter bzw. orientierter Geraden g_1 und g_2 in einer orientierten Ebene. Da er sich aber nicht allein mit Hilfe des Skalarproduktes berechnen läßt, sei hier nicht darauf eingegangen.

Wir nehmen an, daß die einander schneidenden Geraden g_1 und g_2 durch Parametergleichungen

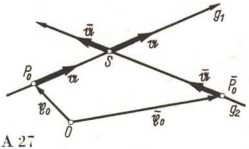
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a} \text{ für } g_1$$

und

$$\bar{\mathfrak{r}} = \bar{\mathfrak{r}}_0 + \bar{t}\,\bar{\mathfrak{a}} \text{ für } g_2$$

gegeben seien, in denen $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ beliebig gewählte Richtungsvektoren von g_1 bzw. g_2 sind.
Ist nun S der Schnittpunkt der gegebenen Geraden, dann können die vier Winkel, die von den sich zu g_1 und g_2 ergänzenden Strahlen mit dem Anfangspunkt S gebildet werden, wie folgt durch die Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ von g_1 und g_2 ausgedrückt werden (Bild A 27):

$$\sphericalangle(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}),\ \sphericalangle(\mathfrak{a}, -\bar{\mathfrak{a}}),$$
$$\sphericalangle(-\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}),\ \sphericalangle(-\mathfrak{a}, -\bar{\mathfrak{a}}).$$



A 27

Dabei bestehen zwischen diesen Winkeln folgende Beziehungen

$$\sphericalangle(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) = \sphericalangle(-\mathfrak{a}, -\bar{\mathfrak{a}}),$$
$$\sphericalangle(-\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) = \sphericalangle(\mathfrak{a}, -\bar{\mathfrak{a}})$$

und

$$\sphericalangle(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) + \sphericalangle(-\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) = 180°.$$

Für nichtorientierte Geraden g_1 und g_2 ist der Schnittwinkel $\sphericalangle(g_1, g_2)$ von g_1 und g_2 als derjenige der Winkel $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ und $\sphericalangle(-\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ definiert, dessen Größe 90° nicht übersteigt und für den folglich der Kosinuswert für diesen Winkel nichtnegative Werte annimmt. Da sich wegen

$$\cos\sphericalangle(-\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) = \frac{-\mathfrak{a}\cdot\bar{\mathfrak{a}}}{|-\mathfrak{a}|\,|\bar{\mathfrak{a}}|} = -\frac{\mathfrak{a}\cdot\bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{a}|\,|\bar{\mathfrak{a}}|} = -\cos\sphericalangle(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$$

die cos der betrachteten Winkel nur durch das Vorzeichen unterscheiden, gilt für den Schnittwinkel der nichtorientierten Geraden g_1 und g_2 die Beziehung:

$$(45)\qquad \boxed{\cos\sphericalangle(g_1, g_2) = |\cos\sphericalangle(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})| = \left|\frac{\mathfrak{a}\cdot\bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{a}|\,|\bar{\mathfrak{a}}|}\right|}.$$

A

In dieser Beziehung sind $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ beliebig, aber fest gewählte Richtungsvektoren der Geraden g_1 und g_2. Da jedoch jeder andere Richtungsvektor $\mathfrak{a}'$ von g_1 und $\bar{\mathfrak{a}}'$ von g_2 in der Gestalt $\mathfrak{a}' = \lambda\mathfrak{a}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}' = \bar{\lambda}\,\bar{\mathfrak{a}}$ geschrieben werden kann, wobei λ bzw. $\bar{\lambda}$ eine von Null verschiedene reelle Zahl ist, und immer

$$(46)\qquad |\cos \sphericalangle (\mathfrak{a}', \bar{\mathfrak{a}}')| = \left|\frac{\mathfrak{a}' \cdot \bar{\mathfrak{a}}'}{|\mathfrak{a}'|\,|\bar{\mathfrak{a}}'|}\right| = \left|\frac{\lambda\mathfrak{a} \cdot \bar{\lambda}\,\bar{\mathfrak{a}}}{|\lambda\mathfrak{a}|\,|\bar{\lambda}\bar{\mathfrak{a}}|}\right| = \left|\frac{\lambda\bar{\lambda}}{|\lambda|\,|\bar{\lambda}|}\right| \cdot \left|\frac{\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{a}|\,|\bar{\mathfrak{a}}|}\right| =$$

$$= \left|\frac{\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{a}|\,|\bar{\mathfrak{a}}|}\right| = |\cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})|$$

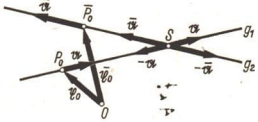
ist, kann der Schnittwinkel $\sphericalangle (g_1, g_2)$ von g_1 und g_2 nach (45) ausgehend von jedem beliebigen Paar Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ von g_1 und g_2 berechnet werden.

Sind die Geraden g_1 und g_2 orientiert und entspricht die Orientierung von g_1 und g_2 dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}$ (Bild A 28), dann berechnet man den Schnittwinkel der orientierten Geraden g_1 und g_2 nach der Formel

$$(47)\qquad \boxed{\cos \sphericalangle (g_1, g_2) = \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{a}| \cdot |\bar{\mathfrak{a}}|}}\,.$$

Auch diese Formel gilt unabhängig von der Wahl der Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ von g_1 und g_2, weil als Richtungsvektor der durch die Angabe von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ orientierten Geraden nur solche Vektoren $\mathfrak{a}'$ und $\bar{\mathfrak{a}}'$ zugelassen werden, für die λ bzw. $\bar{\lambda}$ positiv ist [vgl. Formel (46)].

A 28



Aufgaben a 46 bis 50

14

Bei der Definition des Schnittwinkels zweier Geraden g_1 und g_2 gingen wir davon aus, daß g_1 und g_2 einen gemeinsamen Punkt haben. Dabei schlossen wir den Fall nicht aus, daß beide Geraden als Punktmengen miteinander identisch sind. Für zwei zusammenfallende Geraden g_1 und g_2 sind die Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ stets parallel zueinander, d. h., es gibt stets eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$ so, daß $\bar{\mathfrak{a}} = \lambda\mathfrak{a}$ ist. Setzt man diesen Wert für $\bar{\mathfrak{a}}$ in (45) ein, dann erhält man für den Schnittwinkel $\sphericalangle (g_1, g_2)$ der zusammenfallenden Geraden g_1 und g_2

$$|\cos \sphericalangle (g_1, g_2)| = \left|\frac{\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{a}|\,|\bar{\mathfrak{a}}|}\right| = \left|\frac{\mathfrak{a} \cdot \lambda\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|\,|\lambda\mathfrak{a}|}\right| = \left|\frac{\lambda}{|\lambda|}\right| \cdot \frac{|\mathfrak{a}|^2}{|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{a}|} = 1\,,$$

d. h., es ist $\sphericalangle (g_1, g_2) = 0$.
Sind die als Punktmengen zusammenfallenden Geraden g_1 und g_2 orientierte Geraden, dann ist für sie

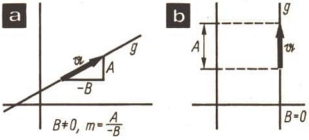
$$\cos \sphericalangle (g_1, g_2) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \lambda\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|\,|\lambda\mathfrak{a}|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm 1$$

und damit $\sphericalangle (g_1, g_2) = 0$, wenn die Orientierungen von g_1 und g_2 übereinstimmen, und $\sphericalangle (g_1, g_2) = 180°$, wenn g_1 und g_2 entgegengesetzt orientiert sind.
Für Geraden, deren Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ senkrecht aufeinander stehen, ist wegen $\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{o}$ nach (45) und (47) $\cos \sphericalangle (g_1, g_2) = 0$ und damit $\sphericalangle (g_1, g_2) = 90°$ unabhängig davon, ob g_1 und g_2 orientierte Geraden sind oder nicht.

In diesem Falle sagt man, die **Geraden g_1 und g_2 stehen aufeinander senkrecht** bzw. **sie sind zueinander orthogonal.**
Sind g_1 und g_2 Geraden der xy-Ebene, dann können sie durch allgemeine Geradengleichungen

$$(48)\quad \begin{aligned} Ax + By + C &= 0,\ z = 0\ (g_1) \\ \bar{A}x + \bar{B}y + \bar{C} &= 0,\ z = 0\ (g_2) \end{aligned}$$

gegeben werden. Weil für die durch die Gleichungen (48) gegebenen Geraden für beliebiges $\bar{B}$ und B die Vektoren $\mathfrak{a}(-B; A)$ und $\bar{\mathfrak{a}}(-\bar{B}; \bar{A})$ Richtungsvektoren entsprechend von g_1 und g_2 sind (Bild A 29), kann wegen



A 29

$$\frac{\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{a}|\,|\bar{\mathfrak{a}}|} = \frac{B\bar{B} + A\bar{A}}{\sqrt{A^2 + B^2}\,\sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}}$$

für (45)

$$(49)\quad \cos \sphericalangle (g_1, g_2) = \left| \frac{A\bar{A} + B\bar{B}}{\sqrt{A^2 + B^2}\,\sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}} \right|$$

geschrieben werden.
Sind g_1 und g_2 orientierte Geraden, dann müssen wir zunächst untersuchen, welcher der Richtungsvektoren $\mathfrak{a}(-B; A)$ und $-\mathfrak{a}(B; -A)$ die Orientierung von g_1 und welcher der Richtungsvektoren $\bar{\mathfrak{a}}(-\bar{B}; \bar{A})$ und $-\bar{\mathfrak{a}}(\bar{B}; -\bar{A})$ die Orientierung von g_2 bestimmt. Wird die Orientierung von g_1 und g_2 entsprechend durch die Richtungsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ festgelegt, dann kann für (47) die Formel

$$\cos \sphericalangle (g_1, g_2) = \frac{A\bar{A} + B\bar{B}}{\sqrt{A^2 + B^2}\,\sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}}$$

geschrieben werden, und es ist

$\sphericalangle (g_1, g_2)$ spitz für $A\bar{A} + B\bar{B} > 0$,
$\sphericalangle (g_1, g_2)$ stumpf für $A\bar{A} + B\bar{B} < 0$,
$\sphericalangle (g_1, g_2)$ ein rechter Winkel für $A\bar{A} + B\bar{B} = 0$.

Besonders einfach ist die Schnittwinkelberechnung, wenn g_1 und g_2 durch die Normalformen ihrer Geradengleichungen

$$y = mx + n,\ z = 0\ (g_1),\ y = \bar{m}x + \bar{n},\ z = 0\ (g_2)$$

gegeben sind. Man erhält dann für den Winkel zwischen den nichtorientierten Geraden g_1 und g_2:

$$\tan \alpha = \left| \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right| = \left| \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \right| = \left| \frac{\sqrt{1 - \dfrac{(m\bar{m} + 1)^2}{(m^2 + 1)(\bar{m}^2 + 1)}}}{\dfrac{m\bar{m} + 1}{\sqrt{m^2 + 1}\,\sqrt{\bar{m}^2 + 1}}} \right| = \left| \frac{m - \bar{m}}{m\bar{m} + 1} \right|.$$

Die Geraden g_1 und g_2 sind parallel, wenn $m = \bar{m}$ ist, sie stehen senkrecht aufeinander bei $m = -\dfrac{1}{\bar{m}}$.

Aufgaben a 51 bis 56

15 Kugel und Kreis

(17) *Wiederholen Sie die Definition des Kreises!*
Wiederholen Sie die Definition der Kugel als ein Gebilde, das durch Rotation gewonnen werden kann!
Geben Sie eine Definition der Kugel als Punktmenge des Raumes!

Für einen Punkt P des Raumes mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$ beträgt der Abstand vom Ursprung O

$$|\mathfrak{r}| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

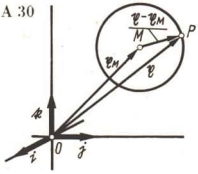
und der Abstand von einem Punkt M mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{r}_M = x_M\mathfrak{i} + y_M\mathfrak{j} + z_M\mathfrak{k}:$$
$$|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M| = \left|\overrightarrow{P_MP}\right| = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2}\,.$$

Betrachten wir nun **alle** Punkte P, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben, dann genügen diese Punkte der Gleichung

(50) $\boxed{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M| = r}$,

A 30



für die wir auch

(51) $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) = r^2$

oder, in Koordinatenschreibweise,

(52) $\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2}$

schreiben können.
Da umgekehrt auch jeder Punkt P, der den Gleichungen (50) bis (52) genügt, vom Punkt M den Abstand r hat, ist jede dieser Beziehungen eine Gleichung für die Kugel $K(M, r)$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r (Bild A 30). Dabei sind (50) und (51) vektorielle Gleichungen und (52) eine vektorfreie, implizite Gleichung für diese Kugel.
Hat die Kugel $K(M, r)$ den Ursprung zum Mittelpunkt, d. h. ist $M = 0$, dann haben (51) und (52) die besonders einfache Gestalt

(53) $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = r^2$

und

(54) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Auf Grund der bisher angestellten Überlegungen können wir auch für die Menge der Punkte, die entweder auf oder im Innern einer Kugel liegen (also einen sogenannten Kugelkörper bilden), eine Ungleichung angeben. Ist M der Mittelpunkt der betrachteten Kugel und r ihr Radius, dann ist für die Punkte der Kugel der Abstand von M gleich r und für die Punkte des Inneren der Kugel kleiner als r, wobei umgekehrt auch jeder Punkt, dessen Abstand von M kleiner als r ist, zum Inneren der Kugel gehört. Für den Kugelkörper kann also als Ungleichung die Beziehung

(55) $|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M| = \left|\overrightarrow{MP}\right| \leqq r$

oder die dazu äquivalenten Ausdrücke

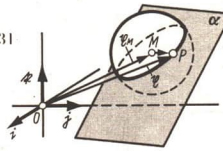
(56) $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) \leqq r^2$

(57) $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 \leqq r^2$

hingeschrieben werden. Dabei gilt das Gleichheitszeichen für die Punkte der betrachteten Kugel und das Ungleichheitszeichen für die Punkte des Innern dieser Kugel. Für $M = 0$ gehen die Beziehungen (55) bis (57) entsprechend über in die Ungleichungen

$$|\mathfrak{r}| \leqq r, \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} \leqq r^2, x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2.$$

A 31



Sieht man den Kreis als eine Punktmenge des Raumes an, dann unterscheiden sich die Definitionen von Kugel und Kreis nur dadurch, daß man zur Kugel $K(M, r)$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r alle Punkte des Raumes zählt, die von M den Abstand r haben, und zu einem Kreis $k_\alpha(M, r)$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r nur diejenigen Punkte mit dem Abstand r von M, die in der den Kreis enthaltenden Ebene α liegen (Bild A 31). Nach dieser Definition müssen folglich die Punkte des betrachteten Kreises sowohl der Kugelgleichung

(58) $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) = r^2$

als auch einer Gleichung der Ebene α, z. B.

(59) $\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}}_0 + u\mathfrak{a} + v\mathfrak{b}, -\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$

genügen, wobei $\bar{\mathfrak{r}}_0$ ein beliebiger Punkt von α und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren von α sind. Als vektorielle Gleichung des Kreises $k_\alpha(M, r)$ ist hier also das System der Gleichungen (58) und (59) aufzufassen.

In den meisten Fällen stehen für die Ebene α Angaben zur Verfügung, die es ermöglichen, der Kreisgleichung (58) bis (59) eine einfachere Gestalt zu geben.

Liegt beispielsweise der betrachtete Kreis in der xy-Ebene, dann kann als Parametergleichung (59) für diese Ebene die Gleichung

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} \text{ mit } -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

oder die ihr entsprechende vektorfreie Gleichung $z = 0$ geschrieben werden. Da auch der Mittelpunkt M des Kreises in der xy-Ebene liegt, ist für ihn ebenfalls $z_M = 0$. Wir setzen in (58) $z = z_M = 0$ und erhalten für diese Gleichung in Koordinatenschreibweise die Beziehung

(60) $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$

(60) ist zusammen mit der Gleichung $z = 0$ die Gleichung des Kreises $k_{z=0}(M, r)$ der xy-Ebene mit dem Mittelpunkt $M(x_M; y_M; 0)$ und dem Radius r bezüglich des Koordinatensystems $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$. Hat der betrachtete Kreis den Ursprung zum Mittelpunkt, vereinfacht sich seine Gleichung zu

(61) $x^2 + y^2 = r^2, \; z = 0.$

Liegt der betrachtete Kreis in einer Ebene, die parallel zur xy-Ebene liegt, dann kann für diese Ebene für (59) die Gleichung

$$\mathfrak{r} = z_M \mathfrak{k} + x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} \quad \text{mit} \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

hingeschrieben werden, die der vektorfreien Gleichung

$$z = z_M, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

äquivalent ist.

Für den betrachteten Kreis ergibt sich analog zum Falle der xy-Ebene die Gleichung

(62) $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2, \; z = z_M.$

Bemerkung: Die Kreisgleichungen (58) und (59), (60) mit $z = 0$, (61) und (62) wurden hergeleitet für den Fall, daß wir den betrachteten Kreis als Punktmenge

im Raum auffassen. Stellt man bei der Lösung einer konkreten Aufgabe Betrachtungen nur in einer bestimmten Ebene an und gibt in dieser Ebene ein kartesisches Koordinatensystem $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}\}$ vor, dann hat der Kreis $k(M, r)$ dieser Ebene mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r als Menge der Punkte P dieser Ebene mit dem Abstand r von M lediglich die Beziehung

$$|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M| = r$$

oder

$$(63) \quad (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M)(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) = r^2$$

bzw.

$$(64) \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

zur Gleichung.

Analog zur Kugel stellt auch beim Kreis jede der Beziehungen

$$|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M| \leqq r, \; (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) \leqq r^2,$$
$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 \leqq r^2$$

eine Ungleichung für die Punkte der Kreisfläche eines in der xy-Ebene gelegenen Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r dar. Dabei gilt das Gleichheitszeichen wieder für Punkte des Kreises und das Ungleichheitszeichen für die im Innern des Kreises gelegenen Punkte.

Jede Gleichung der Gestalt

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

kann in der Gestalt

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$$

geschrieben werden und ist für $a^2 + b^2 + c^2 > d$ die Gleichung einer Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ und dem Mittelpunkt $M(-a; -b; -c)$.

Aufgaben a 57 bis 60

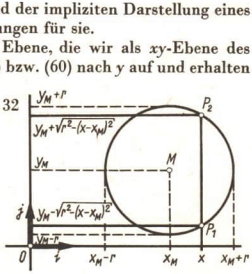
16

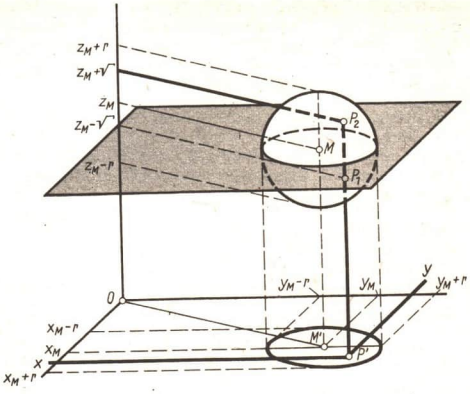
Häufig benötigt man neben der vektoriellen und der impliziten Darstellung eines Kreises und einer Kugel noch explizite Gleichungen für sie.
Wir betrachten zunächst einen Kreis in einer Ebene, die wir als xy-Ebene des Raumes auffassen. Wir lösen die Beziehung (64) bzw. (60) nach y auf und erhalten dafür die Gleichung

$$(65) \quad \boxed{y = y_M \pm \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}},$$

die allen x-Werten zwischen $x_M - r$ und $x_M + r$ zwei y-Werte zuordnet (Bild A 32).
(65) und $z = 0$ ist eine explizite Gleichung für den Kreis der betrachteten Ebene mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

A 32





A 33

Auf analoge Weise wie für den Kreis kann eine explizite Gleichung für die **Kugel** gewonnen werden, und zwar kann die Gleichung (52) in der Gestalt

(66) $z = z_M \pm \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2 - (y - y_M)^2}$

geschrieben werden. Durch diese Beziehung zwischen den Koordinaten x, y, z der Punkte der betrachteten Kugel werden jedem Paar von x- und y-Werten entsprechend aus den Intervallen $\langle x_M - r;\ x_M + r\rangle$ und $\langle y_M - r;\ y_M + r\rangle$, die der Beziehung

(67) $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 < r^2$ bzw. $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

genügt, zwei z-Werte bzw. der Wert z_M zugeordnet (Bild A 33).

Aufgaben a 61 bis 64

17 Lageverhältnisse von Kreis und Gerade

In dieser und den folgenden Lerneinheiten wollen wir als Anwendungen des bisher Erarbeiteten einige Aufgabenstellungen der Elementargeometrie analytisch behandeln. Deshalb setzen wir voraus, daß uns eine Ebene gegeben sei, die wir unabhängig von ihrer Lage im Raum betrachten, und wählen in ihr ein kartesisches Koordinatensystem $\{O;\ \mathrm{i},\ \mathrm{j}\}$. Zur Anwendung können dann alle Arten von Geradengleichungen kommen, wie sie in Klasse 11 hergeleitet wurden, sowie die verschiedenen Formen der Kreisgleichung für Kreise der xy-Ebene.
Als erstes soll in der gegebenen Ebene die gegenseitige Lage von Gerade und Kreis untersucht werden.
Bei der analytischen Behandlung dieser Fragestellung gehen wir davon aus, daß uns ein Kreis $k(M, r)$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gegeben sei sowie eine Gerade g. Als Gleichung für den Kreis können wir verwenden:

(68) $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M)^2 = r^2$ oder $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

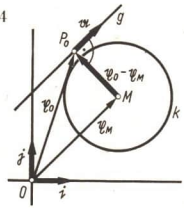
Für g erhalten wir eine für die Untersuchung dieses Problems geeignete Parameterstellung

(69) $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}, \quad -\infty < t < +\infty,$

wenn wir $\mathfrak{r}_0$ als Ortsvektor des Lotfußpunktes P_0 von M auf g und den Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ als Einheitsvektor auffassen (Bild A 34), was ja immer möglich ist (wenn g durch M geht, sei $P_0 = M$). Alle Punkte P, die sowohl auf $k(M, r)$ als auch auf g liegen, müssen der Kreisgleichung (68) und auch der Geradengleichung (69) genügen und somit das Gleichungssystem

(70) $$\begin{aligned} &(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M)^2 = r^2, \\ &\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a} \end{aligned}$$

erfüllen.



A 34

Zur Lösung dieses Systems setzen wir den Wert für $\mathfrak{r}$ aus der zweiten Gleichung in die erste ein

$$(\mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a} - \mathfrak{r}_M)^2 = r^2$$

und schreiben dafür

$$(t\mathfrak{a} + \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M)^2 = r^2$$

oder, indem wir das skalare Quadrat auf der linken Seite nach dem erweiterten Distributivgesetz für die skalare Multiplikation umformen,

$$t^2\mathfrak{a}^2 + 2(t\mathfrak{a}) \cdot (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M) + (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M)^2 = r^2.$$

In dieser Beziehung ist wegen der speziellen Wahl von $\mathfrak{a}$ und P_0 auf g

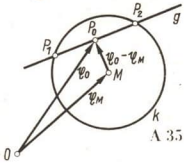
$$\mathfrak{a}^2 = 1,$$

und der Vektor $t\mathfrak{a}$ ist orthogonal zu $\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M$, d. h., es gilt $(t\mathfrak{a}) \cdot (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M) = 0$. Damit haben wir für das System (70) die Gleichung

(71) $t^2 = r^2 - (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M)^2$

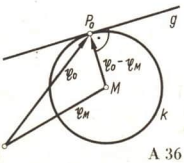
erhalten. Diese Gleichung hat

1) zwei Lösungen $t_{1,2} = \pm\sqrt{r^2 - (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M)^2}$, wenn für den gegebenen Kreis k und die Gerade g die Beziehung $r^2 > (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M)^2$ gilt, d. h., wenn der Abstand des Punktes P_0 der Geraden g vom Mittelpunkt M des Kreises kleiner als der Radius von $k(M, r)$ ist, wenn also P_0 ein innerer Punkt von $k(M, r)$ ist. In diesem Falle haben Kreis und Gerade die den Parameterwerten t_1 und t_2 auf g entsprechenden Punkte gemeinsam; P_1 und P_2 liegen auf g bezüglich P_0 symmetrisch (Bild A 35);



A 35

2) die Doppellösung $t = 0$, wenn $r^2 = (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M)^2$, d. h., wenn P_0 ein Punkt von $k(M, r)$ ist (Bild A 36). P_0 ist damit der einzige gemeinsame Punkt von k und g, d. h., g ist Tangente an $k(M, r)$ in P_0[1];



A 36

[1] Da natürlich auch in diesem Fall $\mathfrak{a}$ orthogonal $\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M$ ist, können wir weiter schließen, daß der Berührungsradius einer Tangente stets senkrecht auf dieser Tangente steht.

3) keine Lösung für $r^2 < (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M)^2$, d. h., wenn der Abstand von P_0 zu M größer als der Kreisradius r ist und P_0 damit außerhalb von $k(M, r)$ liegt (Bild A 34). $k(M, r)$ und g haben in diesem Falle keinen gemeinsamen Punkt.

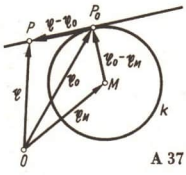
Aufgaben a 65 bis 68

A

18 Tangenten an einen Kreis

Bei der Lösung praktischer Aufgaben ist es oft erforderlich, für die Tangente an einen gegebenen Kreis $k(M, r)$ durch einen bestimmten Punkt P_0 von $k(M, r)$ eine Gleichung aufzustellen.
Ist P_0 der Berührungspunkt der Tangente und des Kreises $k(M, r)$, dann ist für alle Punkte P dieser Tangente der Vektor $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$ Richtungsvektor und damit orthogonal zum Vektor $\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M$ (Bild A 37), d. h., es gilt

(72) $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) \cdot (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M) = 0$.



A 37

Da diese Bedingung für alle Punkte der betrachteten Tangente und darüber hinaus nur für diese Punkte gilt, ist (72) eine parameterfreie Gleichung der Tangente an $k(M, r)$ im Punkte P_0. Wir formen (72) folgendermaßen um:

$$[(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) - (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M)] \cdot (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M) = 0\,,$$
$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) \cdot (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M) - (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M)^2 = 0\,,$$
$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M)(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M) = r^2\,,$$

und schreiben dafür in Koordinatenschreibweise

(73) $(x - x_M)(x_0 - x_M) + (y - y_M)(y_0 - y_M) = r^2$

Weil (73) aus (72) durch äquivalente Umformungen hervorging, ist (73) ebenfalls eine Gleichung der betrachteten Tangente. Wir können also feststellen, daß für den Kreis $k(M, r)$ mit der Gleichung

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M)(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M) = r^2 \quad \text{oder} \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

die Tangente an ihn im Punkte P die folgende Gleichung hat:

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_M)(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_M) = r^2 \quad \text{oder} \quad (x - x_M)(x_0 - x_M) + (y - y_M)(y_0 - y_M) = r^2.$$

(18) *Stellen Sie für einen Kreis $k(M, r)$, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist, der vektoriellen und der vektorfreien Kreisgleichung die entsprechende Tangentengleichung gegenüber!*

10 Gesucht ist eine Gleichung der Tangente an den Kreis $k(M, r)$ mit $M(-1; 2)$ und $r = \sqrt{5}$ durch den Kreispunkt $P_0(0; 0)$.
Wir setzen in (73) die entsprechenden Zahlen für x_M, y_M, x_0, y_0 und r ein und erhalten als Gleichung für die angegebene Tangente

$$(x + 1)(0 + 1) + (y - 2)(0 - 2) = 5 \quad \text{bzw.} \quad x - 2y = 0.$$

11 Gegeben sei ein Kreis $k(M, r)$ durch seine Gleichung $x^2 + y^2 = 9$ und ein Punkt $P_1(5; 0)$ außerhalb von $k(M, r)$. Gesucht ist je eine Gleichung für die Tangenten von P_1 an $k(M; r)$.

A

Lösung: Wir berechnen die Koordinaten der Tangentenberührungspunkte $(P_0)_1$ und $(P_0)_2$, die den Gleichungen

$$x_0^2 + y_0^2 = 9 \quad \text{und} \quad 5 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 = 9$$

genügen müssen (P_1 liegt auf diesen Tangenten!).

Aus diesen Gleichungen folgt

$$x_0 = \frac{9}{5} \quad \text{und} \quad y_0^2 = 9 - \frac{81}{25} = \frac{9}{25}(25 - 9) = \frac{9 \cdot 16}{25},$$

$$\text{d. h.} \quad x_0 = \frac{9}{5} \quad \text{und} \quad (y_0)_{1,2} = \pm \frac{12}{5}.$$

Die gesuchten Tangentengleichungen lauten also:

$$\frac{9}{5}x + \frac{12}{5}y = 9 \quad \text{und} \quad \frac{9}{5}x - \frac{12}{5}y = 9$$

bzw.

$$3x + 4y = 3 \text{ und } 3x - 4y = 3.$$

Aufgaben a 69 bis 75

19 Weitere Anwendungen des Skalarproduktes in der Geometrie

(19) *Geben Sie einige Sätze über Beziehungen zwischen Strecken und Winkeln am Kreis an (z. B. den Peripheriewinkelsatz oder die Sätze über den Sehnentangentenwinkel)!*

In Lerneinheit A 17 hatten wir bereits einen vektoriellen Beweis dafür gefunden, daß die Tangente an den Kreis stets senkrecht auf dem Berührungsradius steht. Hier nun weitere Beispiele für vektorielle Beweise von Sätzen über den Kreis.

12 SATZ des Thales: Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel.

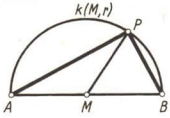
Beweis: Gegeben sei der Kreis $k(M, r)$, sein Durchmesser $\overline{AB}$ und ein beliebiger Punkt P von $k(M, r)$ (Bild A 38). Zu zeigen ist, daß

$$\sphericalangle APB = 90^\circ \text{ ist, d. h. } \overrightarrow{AP} \text{ orthogonal } \overrightarrow{BP},$$

was mit $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

gleichbedeutend ist.

A 38



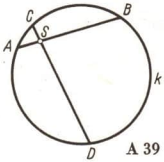
Wir setzen $\overrightarrow{MA} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{MP} = \mathfrak{b}$. Dann ist $\overrightarrow{MB} = -\mathfrak{a}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MB} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ und

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (\mathfrak{b} - \mathfrak{a})(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2 = r^2 - r^2 = 0,$$

was zu zeigen war.

Aufgaben a 76 bis 78

Häufige Anwendung finden in der Geometrie die folgenden drei Sätze über Strecken am Kreis.

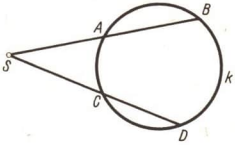


A 39

13 SEHNENSATZ: Wenn zwei Sehnen $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ eines Kreises einander im Punkt S schneiden (Bild A 39), dann ist das Produkt der Abschnitte $\overline{AS}$ und $\overline{SB}$ der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte $\overline{CS}$ und $\overline{SD}$ der anderen Sehne[1]:

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}\,.$$

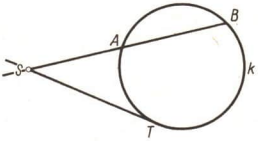
A 40



14 SEKANTENSATZ: Schneiden zwei Sekanten eines Kreises $k(M, r)$ mit dem gemeinsamen Punkt S den Kreis entsprechend in den Punkten A und B bzw. C und D (Bild A 40), dann gilt die Beziehung

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}\,.$$

A 41

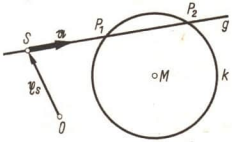


15 SEKANTENTANGENTENSATZ: Hat eine Tangente an einen Kreis $k(M, r)$ mit diesem den Punkt T und mit einer Sekante an $k(M, r)$ einen Punkt S gemeinsam, und bezeichnet man die Schnittpunkte dieser Sekante mit dem Kreis mit A bzw. B (Bild A 41), dann gilt die Beziehung

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{ST}^2.$$

Für diese drei Sätze läßt sich in der analytischen Geometrie ein einfacher Beweis angeben:

A 42



Beweis:
Wir betrachten zunächst einen Kreis $k(M, r)$, einen beliebigen Punkt S und eine beliebige Gerade g durch S (Bild A 42). Für diese Gerade stellen wir eine Punktrichtungsgleichung auf

(74) $\quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_S + t\mathfrak{a}\,,$

in der $\mathfrak{r}_S$ der Ortsvektor von S und $\mathfrak{a}$ ein Einheitsvektor sein soll; durch diese Wahl des Richtungsvektors ist wegen

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_S)^2 = t^2\mathfrak{a}^2 \text{ mit } \mathfrak{a}^2 = 1$$

der Parameter t gleich dem mit Vorzeichen versehenen Abstand des Punktes P auf g von S.

[1] Richtiger müßte es heißen: „Das Produkt der Längen der Abschnitte" und in der Gleichung „Länge $\overline{SA}$" statt „$\overline{SA}$".

Hat g mit $k(M, r)$ gemeinsame Punkte, so müssen diese der Geradengleichung (74) und der Kreisgleichung

(75) $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_M)^2 = r^2$

genügen. Wir setzen $\mathfrak{x}$ aus (74) in (75) ein und erhalten die Beziehung

$$(\mathfrak{x}_S + t\mathfrak{a} - \mathfrak{x}_M)^2 = r^2,$$

die wegen $\mathfrak{a}^2 = 1$ gleichbedeutend ist mit

(76) $t^2 + 2t\,(\mathfrak{x}_S - \mathfrak{x}_M) \cdot \mathfrak{a} + (\mathfrak{x}_S - \mathfrak{x}_M)^2 - r^2 = 0.$

Diese quadratische Gleichung für t hat entweder zwei verschiedene reelle, zwei zusammenfallende reelle oder keine reellen Lösungen, und dementsprechend haben g und $k(M, r)$ entweder zwei Punkte, einen oder keinen Punkt gemeinsam, ist g also Sekante, Tangente oder Nichtschneidende für $k(M, r)$. In den ersten beiden Fällen, wenn g Sekante oder Tangente an $k(M, r)$ ist, ist nach dem Vietaschen Wurzelsatz das absolute Glied von (76) gleich dem Produkt t_1t_2 der Wurzeln t_1 und t_2 dieser Gleichung, d. h., es gilt die Beziehung

(77) $t_1t_2 = (\mathfrak{x}_S - \mathfrak{x}_M)^2 - r^2.$

Mit der Herleitung dieser Beziehung haben wir die angeführten drei Sätze bereits fast vollständig bewiesen. Um uns davon zu überzeugen, stellen wir zunächst fest, daß für **jede** Gerade durch S, die $k(M, r)$ schneidet oder berührt, die rechte Seite von (77) den gleichen Wert hat. Der Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ von g ist in (77) nämlich nicht mehr enthalten, r ist die Länge der Radien von $k(M, r)$ und $(\mathfrak{x}_S - \mathfrak{x}_M)^2$ das Quadrat des Abstandes des Punktes S vom Kreismittelpunkt M. Damit ist das Produkt t_1t_2 für alle Sekanten und Tangenten an $k(M, r)$ durch S konstant[1].
Weil wir als Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ von g einen Einheitsvektor gewählt hatten und dem Parameterwert $t = 0$ den Punkt S zuordneten [↗ (74)] ist $|t|$ gleich der Länge der Strecke $\overline{P_SP}$ für jeden Punkt P von g. Wir gehen jetzt statt von (77) von der Gleichung

(78) $|t_1|\,|t_2| = |(\mathfrak{x}_S - \mathfrak{x}_M)^2 - r^2|$

aus und betrachten folgende Fälle:

1. Der Punkt S liegt innerhalb von $k(M, r)$, und durch S gehen zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ des Kreises. Sind dann t_A und t_B bzw. $\bar{t}_C$ und $\bar{t}_D$ die Parameterwerte, die den Kreispunkten A und B auf der Sehne $\overline{AB}$ bzw. den Kreispunkten C und D auf der Sehne $\overline{CD}$ entsprechen, dann gilt nach (78)

$$|t_A|\,|t_B| = |\bar{t}_C| \cdot |\bar{t}_D|$$

oder, in der üblichen Schreibweise,

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}.$$

Damit ist der Sehnensatz bewiesen.

2. Der Punkt S liegt außerhalb von $k(M, r)$, und durch S gehen zwei Sekanten g_1 und g_2, die mit $k(M, r)$, die Punkte A und B bzw. C und D gemeinsam haben. Sind t_A, t_B, $\bar{t}_C$, $\bar{t}_D$ die Parameterwerte, die den Punkten A und B auf g_1 bzw. C und D auf g_2 entsprechen, dann gilt wieder nach (78)

$$|t_A|\,|t_B| = |\bar{t}_C|\,|\bar{t}_D| \quad \text{bzw.}$$
$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD},$$

d. h., es gilt der Sekantensatz.

[1] Diese durch den Kreis $k(M, r)$ und den Punkt S bestimmte Konstante nennt man die Potenz des Punktes S bezüglich des Kreises $k(M, r)$.

3. Der Punkt S liegt außerhalb von $k(M, r)$, g_1 ist eine Sekante durch S, die mit $k(M, r)$ die Punkte A und B gemeinsam hat, und g_2 eine Tangente von S an $k(M, r)$ im Kreispunkt T. Sind t_A, t_B und $\bar{t}_T$ die Parameterwerte, die den Punkten A und B auf g_1 bzw. dem Punkte T auf g_2 entsprechen, dann gilt nach (78)

$$|t_A|\,|t_B| = |\bar{t}_T|^2,$$

da (78) auch den Fall der Tangente, der Doppellösung für (76), miterfaßt.
In der üblichen Schreibweise ist folglich

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{ST}^2,$$

d. h., es gilt der Sekantentangentensatz.

(20) *Beweisen Sie einen der Sätze in den Beispielen A 13, 14 und 15 elementargeometrisch! (Verwenden Sie dabie die Ähnlichkeit gewisser Dreiecke, z. B. der Dreiecke $\triangle SAC$ und $\triangle SDB$ im Falle des Sekantensatzes!)*

21 Anwendungen des Skalarproduktes in der Physik

Bei der Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ waren wir davon ausgegangen, daß in der Physik die mechanische Arbeit W einer Kraft $\mathfrak{F}$ längs des Weges $\mathfrak{s}$ gleich $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = F s \cos \sphericalangle (\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$ ist und hatten $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gesetzt. Aus dieser Definition des Skalarproduktes $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ hatten wir die dafür gültigen Rechenregeln wie $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$, $(\lambda\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot (\lambda\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ hergeleitet und u. a. gezeigt, daß $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_a = \mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{b}$ ist, wobei mit $\mathfrak{b}_a$ die Projektion von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}$ bezeichnet wurde.
Bei dem Skalarprodukt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ handelt es sich um eine multiplikative Verknüpfung zweier Elemente ein und desselben Vektorraumes. Bei der Produktbildung $W = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = F s \cos \sphericalangle (\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$ sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ Elemente verschiedener Vektorräume. Das hat aber keinen wesentlichen Einfluß auf die für die Arbeit als „Skalarprodukt" von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ herleitbaren Rechenregeln. Durch eine fast wörtliche Wiederholung der von uns für das Skalarprodukt zweier Vektoren geführten Beweise erhält man für die Arbeit die gleichen Gesetzmäßigkeiten:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{F}_s \cdot \mathfrak{s}; \\ (79)\qquad &\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{F}; \\ &(\lambda\mathfrak{F}) \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{F} \cdot (\lambda\mathfrak{s}) = \lambda\,(\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}) \end{aligned}$$

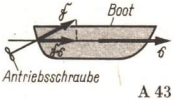
und zwei Distributivgesetze

$$(80)\qquad \mathfrak{F} \cdot (\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2) = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}_2;\ (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{s} + \mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{s},$$

da es sich wieder, wie bei der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl, um eine Verknüpfung zweier Elemente verschiedener Mengen handelt.
Alle diese Beziehungen drücken einen physikalischen Sachverhalt aus, und ihrer praktischen Anwendung zum Zwecke der Arbeitserleichterung, der Erhöhung des Nutzens oder aus technischen Gründen begegnet man täglich:

16 Beim Bewegen schwerer Güter (Kohlen, Erdmassen, Werkstücke usw.) längs eines Weges $\mathfrak{s}$ ist es, physikalisch gesehen, gleichgültig, ob wir das zu bewegende Gut durch einmalige Kraftanwendung im ganzen transportieren oder ob wir das Gut zerlegen und durch Anwenden geringerer Kraft die Einzelbestandteile transportieren [↗ (79_3) oder (80_2)].

17 Wenn ein Boot durch einen Motor angetrieben wird (Bild A 43), dann verrichtet nur die Kraftkomponente $\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}$ von $\mathfrak{F}$ Arbeit, die längs des Weges $\mathfrak{s}$ gerichtet ist [↗ (79_1)].



A 43

Im zweiten Beispiel kommt zum Ausdruck, daß von der erzeugten Kraft $\mathfrak{F}$ nur die zu $\mathfrak{s}$ parallele Komponente $\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}$ von $\mathfrak{F}$ wirkt, während die zu $\mathfrak{s}$ orthogonale Komponente $\mathfrak{F}_{\perp\mathfrak{s}}$ wirkungslos bleibt. Man muß also bestrebt sein, $\mathfrak{F}_{\perp\mathfrak{s}}$ so klein wie möglich zu halten.

21 *Erläutern Sie den physikalischen Sinn der Beziehungen*

$$(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n) \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{s} + \mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{s} + \cdots + \mathfrak{F}_n \cdot \mathfrak{s}$$

und

$$\mathfrak{F} \cdot (\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \cdots + \mathfrak{s}_n) = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}_2 + \cdots + \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}_n!$$

Aufgaben a 79 bis 81

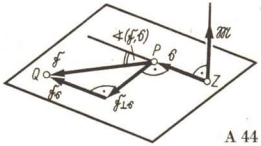
Das Vektorprodukt

22 Definition des Vektorproduktes

22 *Was versteht man unter dem Drehmoment einer Kraft?*

Mit der Arbeit W, die eine längs eines Weges $\mathfrak{s}$ wirkende Kraft verrichtet und die nach der Formel $W = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = F\,s \cos \sphericalangle(\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$ berechnet wird, haben Sie eine multiplikative Verknüpfung zweier vektorieller Größen kennengelernt, deren Ergebnis stets ein Zahlenwert ist. Ihr entspricht die Bildung des Skalarprodukts $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ zweier Vektoren.

Das Drehmoment einer Kraft ist ebenfalls eine multiplikative Verknüpfung zweier vektorieller Größen. Man berechnet seinen Betrag M für eine Kraft $\mathfrak{F}$, die an einem vom Drehzentrum Z ausgehenden Hebelarm $\mathfrak{s}$ angreift (Bild A 44), nach der Formel



A 44

$$(81) \quad M = |\mathfrak{F}_{\perp\mathfrak{s}}|\,|\mathfrak{s}| = |\mathfrak{F}|\,|\mathfrak{s}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}),$$

da beim Drehmoment nur die zu $\mathfrak{s}$ orthogonale Komponente der Kraft $\mathfrak{F}$ wirksam wird (bei der Arbeit war es die zu $\mathfrak{s}$ parallele Komponente!). Ferner ist das Drehmoment im Gegensatz zur Arbeit eine gerichtete Größe. Man veranschaulicht es wie einen Vektor $\mathfrak{M}$ der Länge M, der zu den „Vektoren" $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{F}$ orthogonal ist und mit diesen in der Reihenfolge $\mathfrak{s}, \mathfrak{F}, \mathfrak{M}$ ein Rechtssystem bildet.

Da Produktbildungen der Gestalt (81) in der Physik noch an einigen anderen Stellen auftreten, definiert man in der Mathematik für Vektoren analog dazu das sogenannte Vektorprodukt zweier Vektoren und untersucht seine Eigenschaften. Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Vektoren des Raumes und $[O; A]$ bzw. $[O; B]$ Repräsentanten dieser Vektoren, d. h., es gelte $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{OB}$.

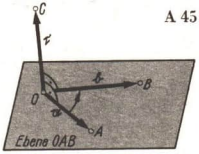
15 **DEFINITION: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei nicht zueinander parallele Vektoren des Raumes, dann nennt man *Vektorprodukt* von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (in Zeichen $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, gelesen „$\mathfrak{a}$ kreuz $\mathfrak{b}$") denjenigen Vektor $\mathfrak{c}$, der durch die nachstehenden drei Bedingungen eindeutig bestimmt ist:**

1. der Vektor $\mathfrak{c}$ hat den Betrag

$$\boxed{|\mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\,\sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})};$$

2. der Vektor $\mathfrak{c}$ ist orthogonal zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$,

3. die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bilden in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem, d. h., wenn man für $\mathfrak{c} = \overrightarrow{OC}$ schreibt und von C aus auf die Ebene OAB mit $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{OB}$ blickt, dann ist in der positiv orientierten Ebene OAB der orientierte Winkel $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ positiv (Bild A 45).



A 45

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei zueinander parallele Vektoren, dann sind für sie zwei Fälle möglich:

(82) 1. Mindestens einer der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist der Nullvektor, z. B. sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Dann ist $|\mathfrak{a}| = 0$ und $\sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 1$.[1]

2. $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{b}$. Dann ist $|\mathfrak{a}| \neq 0$, $|\mathfrak{b}| \neq 0$ und $\sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$ wegen $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0°$ bzw. $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 180°$.

Für parallele Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist also stets $|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\,\sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$. Deshalb ergänzt man die obige Definition folgendermaßen:

16 **DEFINITION: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei zueinander parallele Vektoren, dann ist ihr *Vektorprodukt* $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ der Nullvektor.**

18 Damit ist das Vektorprodukt für zwei beliebige Vektoren des Raumes definiert.

Nach der Definition des Vektorproduktes zweier Vektoren ist

$$|\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}| = |\mathfrak{i}|\,|\mathfrak{i}|\,\sin \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{i}) = 0, \quad |\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}| = |\mathfrak{i}|\,|\mathfrak{j}|\,\sin \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}) = 1$$

und

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k}.$$

Diese etwas lange Definition für das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kann man kürzer schreiben. Zu diesem Zweck bezeichnet man mit $\mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ einen Einheitsvektor, der orthogonal zu den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist und im Falle $\mathfrak{a} \nparallel \mathfrak{b}$ die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Reihenfolge $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ zu einem Rechtssystem ergänzt. Nach dieser Vereinbarung kann das Vektorprodukt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ zweier beliebiger Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch die Gleichung

(83) $$\boxed{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\,\sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}$$

definiert werden.

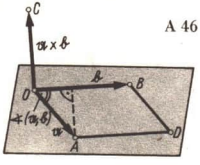
Aufgaben a 82 bis 86

[1] Wir hatten ja vereinbart, daß $\mathfrak{o}$ zu jedem Vektor orthogonal ist.

23 Geometrische Deutung des Vektorproduktes

Für den Betrag $|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|$ des Vektorproduktes kann eine geometrische Deutung gegeben werden. Nach (83) ist

$$|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}|\ |\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$



A 46

Schreiben wir wie oben für $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OA}$, für $\mathfrak{b} = \overrightarrow{OB}$ sowie für $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overrightarrow{OD}$, dann bestimmen die Punkte O, A, D, B für $\mathfrak{a} \nparallel \mathfrak{b}$ in der Ebene OAB ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt unabhängig von der Wahl des Punktes O gleich $|\mathfrak{b}|\ |\mathfrak{a}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ und damit gleich $|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|$ ist (Bild A 46). Für $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$ entartet dieses Parallelogramm zu einer doppelt überdeckten Strecke; sein „Flächeninhalt" ist Null und damit wieder gleich $|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|$. Bezeichnet man also das durch den beliebig gewählten Punkt O und die Vektoren $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{OB}$ bestimmte Parallelogramm $OADB$ als ein „von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespanntes Parallelogramm", dann haben wir gefunden:

> Der Betrag $|\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}|$ des Vektorproduktes zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt eines beliebigen, von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Da der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC gleich der Hälfte des Flächeninhalts eines von den Vektoren $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{AC}$ aufgespannten Parallelogramms ist, kann mit Hilfe des Vektorproduktes auch der Flächeninhalt von Dreiecken berechnet werden.

Er ist für das $\triangle ABC$ gleich $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Ferner können wir aus (83) ablesen:
Das Vektorprodukt $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist genau dann gleich dem Nullvektor, wenn $\mathfrak{a}$ parallel zu $\mathfrak{b}$ ist. Einerseits war nämlich für $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$ stets $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ und für $\mathfrak{a} \nparallel \mathfrak{b}$ stets $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$; im letzten Fall ist immer $|\mathfrak{a}| \neq 0$, $|\mathfrak{b}| \neq 0$ und $\sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \neq 0$. Andererseits kann man aus (81) sofort ablesen, daß auch die Umkehrung dieses Sachverhalts richtig ist, denn aus $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ folgt $|\mathfrak{a}|\ |\mathfrak{b}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$, was nur für einen der Fälle (82) möglich ist.
Wir können also wiederholend feststellen:

1. Im Bereich der reellen Zahlen ist $a \cdot b = 0$ äquivalent $a = 0$ oder $b = 0$.
2. Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl ist $\lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ äquivalent $\lambda = 0$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.
3. Bei der skalaren Multiplikation zweier Vektoren ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ äquivalent $\mathfrak{a}$ orthogonal $\mathfrak{b}$.
4. Bei der vektoriellen Multiplikation (Bildung des Vektorproduktes) zweier Vektoren ist $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ äquivalent $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$.

19 Im Bereich der reellen Zahlen gibt es für die Gleichung $5x = 0$ eine Zahl x, die diese Gleichung erfüllt, und zwar $x = 0$. Im Raum der Vektoren gibt es für die Gleichung $\mathfrak{i}\times\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ unendlich viele $\mathfrak{x}$, die diese Gleichung erfüllen. Nach (83) ist

$$\mathfrak{i}\times\mathfrak{x} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{i},\mathfrak{x}}\ |\mathfrak{i}|\ |\mathfrak{x}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{x}) = \mathfrak{n}_{\mathfrak{i},\mathfrak{x}}\ |\mathfrak{x}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{x})$$

und $\mathfrak{i}\times\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ folglich gleichbedeutend mit $|\mathfrak{x}| \sin \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{x}) = 0$. Diese letzte Gleichung ist aber erfüllt für $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ und für $\mathfrak{x} \parallel \mathfrak{i}$. Damit ist gezeigt, daß die Vektoren $\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{i}$ mit $-\infty < \lambda < +\infty$ Lösungen von $\mathfrak{i}\times\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ sind und nur diese.

(23) *Formulieren Sie die Beziehung „$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ äquivalent $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$“ unter Verwendung der Wörter „notwendig und hinreichend“!*

(24) *Berechnen Sie* **a)** *für $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ die Produkte $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} \times (-\mathfrak{a})$,*
b) *für $\mathfrak{a}$ orthogonal $\mathfrak{b}$ das Produkt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$!*

Aufgaben a 87 bis 89

24 Eigenschaften des Vektorproduktes

17 **SATZ: Für die vektorielle Multiplikation hat das Kommutativgesetz keine Gültigkeit, aber es gilt stets $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$.**

18 **SATZ: Für die vektorielle Multiplikation gelten bezüglich jeder reellen Zahl λ und jedem Paar von Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Beziehungen**

(84) $\boxed{(\lambda\mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \lambda(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})}$ **und** $\boxed{\mathfrak{a} \times (\lambda\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})}$.

19 **SATZ: Für die vektorielle Multiplikation gilt das Distributivgesetz, d. h., für drei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ist stets**

$\boxed{\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}}$ **und** $\boxed{(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \times \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}}$.

Aber genauso wie für die skalare Multiplikation gilt das Assoziativgesetz für die vektorielle Multiplikation nicht.

20 **SATZ: Für drei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ist**

(85) $\boxed{\textit{nicht:}\ \text{stets}\ \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}}$.

Die Sätze A 17 bis 19 beweisen wir hier nicht. Dafür, daß das Assoziativgesetz (der Satz A 20) nicht gilt, genügt die Angabe eines einzigen Tripels $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ von Vektoren, für das (85) nicht gilt.
Wir wählen $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{i}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{j}$ und berechnen für dieses spezielle Tripel $[\mathfrak{a}; \mathfrak{b}; \mathfrak{c}]$ die Vektoren $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$, d. h. $\mathfrak{i} \times (\mathfrak{i} \times \mathfrak{j})$ und $(\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}) \times \mathfrak{j}$. Einerseits ist $\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{o}$, und deshalb gilt

$$(\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}) \times \mathfrak{j} = \mathfrak{o} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{o} .$$

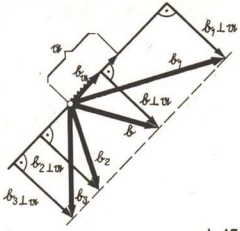
Andererseits ist nach (83) und der Definition des Vektors $\mathfrak{k}$ in einem kartesischen Koordinatensystem

(86) $\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k}\,|\,\mathfrak{i}\,|\,|\,\mathfrak{j}\,|\,\sin \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}) = \mathfrak{k}$,
(87) $\mathfrak{i} \times \mathfrak{k} = -\mathfrak{j}\,|\,\mathfrak{i}\,|\,|\,\mathfrak{k}\,|\,\sin \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{k}) = -\mathfrak{j}$

und folglich $\mathfrak{i} \times (\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}) = \mathfrak{i} \times \mathfrak{k} = -\mathfrak{j} \neq \mathfrak{o}$. Damit ist gezeigt, daß (85) im allgemeinen nicht gilt.
Bemerkung: In Lerneinheit A 10 hatten wir gefunden, daß man nach einem Vektor $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ jeden Vektor $\mathfrak{b}$ so in zwei zueinander orthogonale Komponenten $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$ zerlegen kann, daß $\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} \parallel \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$ orthogonal zu $\mathfrak{a}$ sind. Schreibt man nun für $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$, dann erhält man für das Vektorprodukt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ den Ausdruck
(88) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_{\perp\mathfrak{a}}$,
denn es ist $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{o}$. Aus (88) können wir schließen, daß alle Vektoren $\mathfrak{b}$, deren zu $\mathfrak{a}$ orthogonale Komponente gleich ist, mit $\mathfrak{a}$ dasselbe Vektorprodukt haben

(Bild A 47). Demzufolge ist die vektorielle Multiplikation genauso wie die skalare nicht umkehrbar.

Die Komponentendarstellunng des Vektorproduktes: Es seien zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch ihre Koordinaten $\mathfrak{a}(a_x;\, a_y;\, a_z)$ und $\mathfrak{b}(b_x;\, b_y;\, b_z)$ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $\{O;\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k}\}$ gegeben. Wir wollen nun zeigen, daß man mit Hilfe der angeführten Eigenschaften der vektoriellen Multiplikation die Koordinaten des Vektorproduktes $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ dieser Vektoren aus den angegebenen Koordinaten für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ berechnen kann.



A 47

Zu diesem Zwecke schreiben wir $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ in der Gestalt

(89) $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = (a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k})\times(b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k})$

und versuchen, die rechte Seite dieser Beziehung als Linearkombination von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ darzustellen. Es gilt:

$$
(90)\quad
\begin{aligned}
&(a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k})\times(b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k})\\
&= a_xb_x(\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}) + a_xb_y(\mathfrak{i}\times\mathfrak{j}) + a_xb_z(\mathfrak{i}\times\mathfrak{k})\\
&+ a_yb_x(\mathfrak{j}\times\mathfrak{i}) + a_yb_y(\mathfrak{j}\times\mathfrak{j}) + a_yb_z(\mathfrak{j}\times\mathfrak{k})\\
&+ a_zb_x(\mathfrak{k}\times\mathfrak{i}) + a_zb_y(\mathfrak{k}\times\mathfrak{j}) + a_zb_z(\mathfrak{k}\times\mathfrak{k})\,.
\end{aligned}
$$

In (90) ist nach der Definition des Vektorproduktes

$$\mathfrak{i}\times\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\times\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\times\mathfrak{k} = \mathfrak{o}\,.$$

Nach (86) und (87) ist weiter $\mathfrak{i}\times\mathfrak{j} = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{i}\times\mathfrak{k} = -\mathfrak{j}$. Außerdem gilt $\mathfrak{j}\times\mathfrak{i} = -\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}\times\mathfrak{i} = \mathfrak{j}$. Zu berechnen bleibt folglich nur noch $\mathfrak{j}\times\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}\times\mathfrak{j}$, wobei wieder

$$\mathfrak{j}\times\mathfrak{k} = -\mathfrak{k}\times\mathfrak{j}$$

gilt. Nach (83) ist

(91) $\mathfrak{j}\times\mathfrak{k} = \mathfrak{i}\,|\,\mathfrak{j}\,|\,|\,\mathfrak{k}\,|\sin\sphericalangle(\mathfrak{j},\mathfrak{k}) = \mathfrak{i}\,.$

Die Tabelle (92) faßt diese Zwischenergebnisse noch einmal in übersichtlicher Form zusammen:

(92)

	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{o}$	$\mathfrak{k}$	$-\mathfrak{j}$
$\mathfrak{j}$	$-\mathfrak{k}$	$\mathfrak{o}$	$\mathfrak{i}$
$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{j}$	$-\mathfrak{i}$	$\mathfrak{o}$

Nach (92) können wir nun für (90) schreiben

$$
\begin{aligned}
&(a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k})\times(b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k}) =\\
&= a_xb_y\mathfrak{k} - a_xb_z\mathfrak{j} - a_yb_x\mathfrak{k} + a_yb_z\mathfrak{i} + a_zb_x\mathfrak{j} - a_zb_y\mathfrak{i} =\\
&= (a_yb_z - a_zb_y)\,\mathfrak{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\mathfrak{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\mathfrak{k}
\end{aligned}
$$

und finden damit für das Vektorprodukt $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ den Ausdruck

(93) $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\,\mathfrak{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\mathfrak{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\mathfrak{k}\,.$

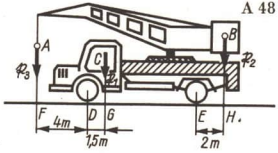
Aufgaben a 90 bis 97

25 Anwendungen des Vektorproduktes

Das Vektorprodukt findet in Mathematik und Physik vielfältig Anwendung. Seine Verwendung bei der Berechnung von Flächen (Parallelogrammen, Dreiecks-, Vielecksflächen) sahen wir bereits. Zu den weiteren Verwendungsmöglichkeiten als weiteres Beispiel die **Berechnung von Drehmomenten.**

20 Ein Kran sei auf einen Lkw montiert. Das Gesamtgewicht von Lkw und Kran betrage $|\mathfrak{P}_1| = 2$ t und greife am Punkte C an (Bild A 48). Das Gewicht des Gegengewichts des Krans betrage $|\mathfrak{P}_2| = 2$ t. Zu bestimmen ist der kleinstmögliche Abstand $\overline{DE}$ zwischen den Achsen des Lkw und das größtmögliche Gewicht $\mathfrak{P}_3$ einer zu hebenden Last A, bei denen der Lkw weder mit noch ohne Last nach hinten oder vorn überkippt.

A 48



Am Lkw mit dem montierten Kran greifen folgende Kräfte an:

$\mathfrak{P}_1$ – das Gewicht des Lkws einschließlich des Gewichts des Krans ohne das Gewicht des Gegengewichts B;

$\mathfrak{P}_2$ – das Gewicht des Gegengewichts B;

$\mathfrak{P}_3$ – das Gewicht der Last, wenn der Kran eine Last hebt.

Bei angehängter Last A kann der Lkw im Gegenuhrzeigersinn um den Berührungspunkt D mit der Erde kippen.

Auf den Lkw wirkt keine, eine Drehung um D hervorrufende Kraft, wenn die Summe der Drehmomente aller Kräfte bezüglich D gleich Null ist, sich die Drehung aller dieser Kräfte aufhebt. Die Bedingung dafür ist in unserem konkreten Fall die Erfüllung der Gleichung

$$\mathfrak{P}_3 \times \overrightarrow{DF} = \mathfrak{P}_1 \times \overrightarrow{DG} + \mathfrak{P}_2 \times \overrightarrow{DH} \tag{94}$$

bzw.

$$|\mathfrak{P}_3| \cdot 4 = |\mathfrak{P}_1| \cdot 1{,}5 + |\mathfrak{P}_2| \left(\left|\overrightarrow{DE}\right| + 2\right). \tag{95}$$

Wenn keine Last A befestigt ist, kann der Lkw unter der Wirkung des Gegengewichts B im Uhrzeigersinn um den Berührungspunkt E des Hinterrades mit der Erde kippen. (Andere Möglichkeiten des Abkippens des Lkws lassen wir hier als für die Praxis uninteressant außer acht.) Auf den unbelasteten Lkw erfolgt keine derartige Drehwirkung, wenn analog zu (94) die Beziehung

$$\mathfrak{P}_1 \times \overrightarrow{EG} = \mathfrak{P}_2 \times \overrightarrow{EH} \quad \text{bzw.} \quad |\mathfrak{P}_1| \left(\left|\overrightarrow{DE}\right| - 1{,}5\right) = |\mathfrak{P}_2| \cdot 2 \tag{96}$$

gilt.

Aus (95) und (96) berechnen wir $\left|\overrightarrow{DE}\right|$ und $|\mathfrak{P}_3|$ durch Einsetzen von $|\mathfrak{P}_1| = 2$ und $|\mathfrak{P}_2| = 2$ zu $\left|\overrightarrow{DE}\right| = 3{,}5$ m, $|\mathfrak{P}_3| = 3{,}5$ t. Damit haben wir das Höchstgewicht $\mathfrak{P}_3$ und die kleinstmögliche Entfernung der Räder des Lkws gefunden, bei denen der unbelastete und der belastete Autokran weder nach vorn noch nach hinten überkippt.

Aufgaben a 98 bis 100

26 Wiederholungsfragen

(25) 1) a) *Unter welcher Bedingung heißen zwei gerichtete Strecken parallelgleich?*
b) *Was versteht man unter einer Verschiebung des Raumes?*
c) *Was ist ein Repräsentant einer Verschiebung?*
2) a) *Welche Operationen sind in der Menge der Verschiebungen definiert?*
b) *Wiederholen Sie die Definition der Summe (der Differenz) zweier Verschiebungen und des Produktes einer Verschiebung mit einer reellen Zahl!*
3) *Zählen Sie die wichtigsten Rechengesetze auf, die in der Menge der Verschiebungen bezüglich der Addition und Subtraktion zweier Verschiebungen sowie der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl gelten!*

In Klasse 11 hatten wir im Stoffgebiet „Vektorrechnung" festgestellt, daß es außer der Menge der Verschiebungen des Raumes auch noch andere Mengen gibt, für deren Elemente eine „Addition", „Subtraktion" und „Multiplikation mit einer reellen Zahl" definiert werden kann, so daß in allen diesen Mengen bezüglich dieser Operationen die in der Definition A 2 auf Seite 4 aufgeführten Rechengesetze gelten. In der Mathematik sagt man nun, daß diese Mengen die gleiche Struktur haben (den gleichen inneren Aufbau) und führt für sie den Sammelbegriff „Vektorraum" ein.

Im weiteren Verlauf des Unterrichts haben wir von den Begriffen „Vektorraum" und „Vektor" nur insofern Gebrauch gemacht, als wir die Menge der Verschiebungen der betrachteten Ebene oder des Raumes jetzt „Vektorraum der Verschiebungen dieser Ebene des Raumes" und die Verschiebungen selbst „Vektoren" nannten. Deshalb entsteht die ganz natürliche Frage, welchen Nutzen die Einführung der Begriffe „Vektorraum" und „Vektor" denn eigentlich bringt. Um diese Frage beantworten zu können, stellen wir folgende Überlegungen an:

1. In der analytischen Geometrie von Ebene und Raum haben wir bedeutend mehr Rechenregeln für die Verschiebungen als die Gesetze 1°—7° verwendet, so z. B. die Regeln:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{o} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a},\ \mathfrak{a} - \mathfrak{o} = \mathfrak{a},\ \mathfrak{o} - \mathfrak{a} = -\mathfrak{a},\ \mathfrak{a} = -(-\mathfrak{a}) \\ (97)\quad &\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (-\mathfrak{a}),\ -(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = -\mathfrak{a} + \mathfrak{b},\ -(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = -\mathfrak{a} - \mathfrak{b} \\ &0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o},\ \lambda\mathfrak{o} = \mathfrak{o},\ -1\mathfrak{a} = -\mathfrak{a}\,. \end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser Regeln mußte für Verschiebungen **bewiesen** werden.

2. Auch für die an einem Punkt angreifenden Kräfte gelten außer den Rechengesetzen 1°—7° die Rechenregeln (97) und werden bei praktischen Berechnungen ständig verwendet.

Wenn zu zwei an einem Punkt angreifenden Kräften $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ eine Kraft $\mathfrak{K}$ ermittelt werden soll, die diese Kräfte aufhebt (d. h. $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}$ sollen im Gleichgewicht stehen), dann bestimmt man die resultierende Kraft $\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$ der Teilkräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ und weiß, daß z. B. die dazu entgegengesetzte Kraft $\mathfrak{K} = -(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2)$ das Geforderte leistet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + -(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2) &= \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + (-\mathfrak{K}_1) + (-\mathfrak{K}_2) = \\ &= \mathfrak{K}_1 + (-\mathfrak{K}_1) + \mathfrak{K}_2 + (-\mathfrak{K}_2) = \mathfrak{o}\,. \end{aligned}$$

Bei dieser Umformung wird wesentlich verwendet, daß für beliebige Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ stets $-(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2) = (-\mathfrak{K}_1) + (-\mathfrak{K}_2)$ gilt. Das ist eine der angeführten

Regeln, und sie muß für die an einem Punkt angreifenden Kräfte theoretisch begründet oder zumindest experimentell bestätigt werden.

3. Analog ist das Vorgehen im Bereich (der Menge) der reellen Zahlen. Nachdem definiert wurde, was eine reelle Zahl ist (z. B. eine Klasse von gewissen Intervallschachtelungen), weist man zunächst nach, daß in der Menge der reellen Zahlen die Rechengesetze 1°–7° gelten. Danach zeigt man, gestützt auf diese Gesetze, daß für die reellen Zahlen u. a. alle die Rechenregeln (97) gelten, die wir für die Verschiebungen hergeleitet hatten. In den drei betrachteten Mengen ist das Vorgehen also ganz analog. Zuerst definiert man, gestützt auf Vorhergeganges, was man unter einer Verschiebung, einer Kraft, einer reellen Zahl verstehen will. Dann zeigt man, wieder gestützt auf Bekanntes, die Gültigkeit der Gesetze 1°–7° in diesen Mengen. Danach zeigt man, daß in den betrachteten Mengen außerdem noch gewisse Rechenregeln gelten, und zwar alle Rechenregeln (97) in allen drei betrachteten Mengen gleichermaßen. Dieses Ergebnis legt die Vermutung nahe, daß die Gültigkeit dieser Rechenregeln keine spezifische Eigenschaft der Menge der Verschiebungen, der Menge der an einem Punkt angreifenden Kräfte und der Menge der reellen Zahlen ist, sondern daß in allen Mengen der gleichen Struktur, in allen Vektorräumen, diese Rechenregeln gelten.

Aufgabe a 101

27

Wir wollen uns an einigen Beispielen davon überzeugen, daß diese Vermutung richtig ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, uns sei ein beliebiger Vektorraum $\mathfrak{M}$ gegeben, d.h. eine Menge von Elementen, auf die die Definition des Vektorraumes zutrifft. Wir bezeichnen die Elemente der Menge, die ja als Elemente eines Vektorraumes Vektoren sind, wie üblich mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{x}$ usw. und zeigen, daß in $\mathfrak{M}$ für beliebige Elemente $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{M}$ beispielsweise die Rechenregeln (98) gelten:

(98) $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{o} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, 0\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

Mit $\mathfrak{o}$ bezeichnen wir im Vektorraum der Verschiebungen die identische Abbildung, die wir auch Nullverschiebung nannten; im Vektorraum der Kräfte ist $\mathfrak{o}$ eine Kraft mit dem Betrag 0; im Vektorraum der reellen Zahlen ist $\mathfrak{o}$ die Zahl 0. Aus den Gesetzen 1°–7° geht nicht unmittelbar hervor, ob jeder Vektorraum $\mathfrak{M}$ einen Vektor $\mathfrak{o}$ enthält, für den $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{o} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ ist für jedes beliebige Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}$. Wir müssen also zeigen

41 **SATZ: In jedem Vektorraum $\mathfrak{M}$ gibt es ein Element $\mathfrak{o}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}$ die Beziehung $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{o} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ erfüllt ist.**

Beweis: Wir wählen in $\mathfrak{M}$ ein Element $\mathfrak{b}$ und betrachten für dieses Element die Gleichung $\mathfrak{b} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$. Nach 3° hat diese Gleichung eine eindeutig bestimmte Lösung, die wir mit $\mathfrak{o}$ bezeichnen. Es bleibt nun zu zeigen, daß auch für jedes beliebige Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}$ die Beziehung $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ gilt, wobei $\mathfrak{o}$ Lösung von $\mathfrak{b} + \mathfrak{o} = \mathfrak{b}$ ist. Nach 3° hat für das gewählte Element $\mathfrak{b}$ und jedes beliebige Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}$ die Gleichung $\mathfrak{b} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ eine Lösung. Wir können also nach 1° und 2° für $\mathfrak{a} + \mathfrak{o}$ schreiben

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = (\mathfrak{b} + \mathfrak{x}) + \mathfrak{o} = \mathfrak{b} + (\mathfrak{x} + \mathfrak{o}) = \mathfrak{b} + (\mathfrak{o} + \mathfrak{x}) = (\mathfrak{b} + \mathfrak{o}) + \mathfrak{x} = \mathfrak{b} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a}.$$

Damit ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{M}$ und nach 1° damit auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{o} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Daß darüber hinaus $\mathfrak{o}$ der einzige Vektor von $\mathfrak{M}$ mit dieser Eigenschaft ist, kann

A

man indirekt beweisen. Man nimmt an, es gäbe einen zweiten Vektor $\mathfrak{o}'$ in $\mathfrak{M}$ mit der gleichen Eigenschaft. Dann gilt für ihn $\mathfrak{o} = \mathfrak{o} + \mathfrak{o}'$ (1°) $\mathfrak{o}' + \mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$, d. h., $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{o}$ sind einander gleich. Man kann also für den beliebigen Vektorraum $\mathfrak{M}$ definieren:

22 **DEFINITION: *Nullvektor* des Vektorraumes $\mathfrak{M}$ heißt der Vektor von $\mathfrak{M}$, der für jedes Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{M}$ der Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ genügt.**

21 Im Vektorraum der n-Tupel ist das n-Tupel $(0, 0, ..., 0)$ der Nullvektor, denn für jedes n-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_n)$ gilt $(a_1, a_2, ..., a_n) + (0, 0, ..., 0) = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

22 Im Vektorraum der Polynome $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ höchstens n-ten Grades ist das Polynom 0 (d. h. das Polynom mit $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$) der Nullvektor, denn es gilt $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + 0 = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ für jedes Polynom dieses Raumes.

Weiter wollten wir beweisen:

23 **SATZ: Ist $\mathfrak{M}$ ein beliebiger Vektorraum und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{M}$, dann ist $0\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.**

Beweis: Nach 4° ist $\mathfrak{a} = 1\mathfrak{a}$. Im Bereich der reellen Zahlen ist $1 + 0 = 1$. Folglich können wir schreiben

$$\mathfrak{a} \overset{(4°)}{=} 1\mathfrak{a} = (1 + 0)\mathfrak{a} \overset{(5°)}{=} 1\mathfrak{a} + 0\mathfrak{a} \overset{(4°)}{=} \mathfrak{a} + 0\mathfrak{a}\,.$$

Da nun aber in jedem Vektorraum nur der Vektor $\mathfrak{o}$ die Eigenschaft besitzt, daß für jedes Element die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{o}$ besteht, muß $0\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ sein, *w. z. b. w.*

Hinweis: Hier wird die Eindeutigkeit des Nullvektors von $\mathfrak{M}$ verwendet.

Aufgaben a 102 bis 104

28

Abschließend wollen wir auf die Frage nach dem Nutzen zurückkommen, den die Einführung der Begriffe „Vektorraum" und „Vektor" bringt.

In der Lerneinheit A 27 haben wir an einigen Beispielen gezeigt, daß in jedem Vektorraum (d. h. in jeder Menge $\mathfrak{M}$, in der die Rechengesetze 1°–7° gelten) als Folgerung allein der Rechengesetze 1°–7° die Rechenregeln (97) Gültigkeit haben.[1] Deshalb können wir jetzt als bewiesen ansehen, daß in jedem konkreten Vektorraum, z. B. dem Vektorraum der n-Tupel und dem Vektorraum der Polynome höchstens n-ten Grades, alle Rechenregeln (97) gelten. Das ist eine große Zeitersparnis, wenn man bedenkt, daß es sehr viele Mengen gibt, die Vektorräume sind.

Der allgemein geführte Beweis der Rechenregeln (97) ist aber nur der Beginn einer sehr umfangreichen allgemeinen Theorie der Vektorräume. Ein weiteres Beispiel aus dieser Theorie ist Ihnen noch zugänglich: Das Einführen und Verwenden von Koordinaten in allen Vektorräumen.

Im Vektorraum der Verschiebungen einer Ebene und im Vektorraum der Verschiebungen des Raumes haben wir den Begriff „linear unabhängig" eingeführt und bewiesen:

[1] $\mathfrak{M}$ nennt man einen **abstrakten** Vektorraum im Gegensatz zu den **konkreten** Vektorräumen, seinen **Modellen**.

1. Im Vektorraum der Verschiebungen einer Ebene gibt es zwei linear unabhängige Vektoren, und drei Vektoren sind stets linear abhängig.
2. Im Vektorraum der Verschiebungen des Raumes gibt es drei linear unabhängige Vektoren, und vier Vektoren sind stets linear abhängig.

Gestützt auf den Begriff „linear unabhängig", führten wir in diesen beiden Vektorräumen die Begriffe „Basis" und „Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis" ein. Den Begriff „linear unabhängig" kann man auf die Vektoren des abstrakten Vektorraumes $\mathfrak{M}$ wörtlich übertragen.

24 **DEFINITION: Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn die Gleichung**

$$\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ gilt. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ heißen *linear abhängig*, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Damit kann dieser Begriff auch auf die uns bekannten Beispiele für Vektorräume angewendet werden.

23 Man kann zeigen: Im Vektorraum der n-Tupel gibt es n linear unabhängige Vektoren, und $n + 1$ Vektoren sind stets linear abhängig.
Für den Beweis des 1. Teils dieser Behauptung genügt es, n linear unabhängige Vektoren dieses Raumes anzugeben, z. B. die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= (1,0, \ldots, 0) \\ \mathfrak{a}_2 &= (0,1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ \mathfrak{a}_n &= (0,0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig, denn für $\lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ steht $\lambda_1(1,0, \ldots, 0) + \lambda_2(0,1, \ldots, 0) + \cdots + \lambda_n(0,0, \ldots, 1) = (0,0, \ldots, 0)$
bzw. das System

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \cdots + \lambda_n \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \cdots + \lambda_n \cdot 0 &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \cdots + \lambda_n \cdot 1 &= 0\,, \end{aligned}$$

dessen einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ ist.
Den 2. Teil der Behauptung können wir hier nicht beweisen.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes nennt man seine **Dimension.**
Da sich nun zeigen läßt, daß genauso wie in den Vektorräumen der Verschiebungen in jedem n-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{M}$ jeder Vektor $\mathfrak{a}$ als Linearkombination $\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n$ von n beliebigen, linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ geschrieben werden kann, definiert man

25 **DEFINITION: Ist $\mathfrak{M}$ ein n-dimensionaler Vektorraum und sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ n linear unabhängige Vektoren von $\mathfrak{M}$, dann heißt dieses n-Tupel von Vektoren eine *Basis* von $\mathfrak{M}$, und man bezeichnet sie mit $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$.**
Ist $\mathfrak{b}$ ein beliebiger Vektor von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{b} = \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathfrak{a}_n$, dann heißen die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die *Koordinaten* von $\mathfrak{b}$ bezüglich $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$.

Man kann dann die Koordinatenmethode in *jedem beliebigen* konkreten Vektorraum anwenden.

A

24 Der Vektorraum der n-Tupel ist nach Beispiel A 23 n-dimensional, und die im Beispiel A 23 angegebenen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bilden eine Basis dieses Raumes. Jeden Vektor $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kann man nach den in diesem Raum definierten Operationen folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{a} = a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + a_n(0,0,\ldots,1) = \\ = a_1\mathfrak{a}_1 + a_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + a_n\mathfrak{a}_n.$$

Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind die Koordinaten von $\mathfrak{a}$ bezüglich der gewählten Basis.

25 Ein System von n an einem Punkt angreifenden Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ist genau dann im Gleichgewicht, wenn ihre Resultierende $\mathfrak{F}$ gleich Null ist, d. h., wenn gilt

(99) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{o}$. Sind die Kräfte $\mathfrak{F}_i$ durch ihre Koordinaten $\mathfrak{F}_i(X_i; Y_i; Z_i)$ bezüglich dreier an einem Punkt angreifender und nicht in einer Ebene wirkender Kräfte gegeben, dann kann man für (99) das System

(100) $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \ \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \ \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$ schreiben.

In der Praxis wählt man als Basis des Vektorraumes der an einem Punkt angreifenden Kräfte drei paarweise senkrecht zueinander wirkende Kräfte vom Betrag 1. Die rechnerische Auswertung des Systems (100) ist oft bedeutend einfacher als die graphische Auswertung der Gleichung (99).

In den letzten drei Lerneinheiten wurde ein Vorgehen skizziert, das für die Mathematik typisch ist:

1. Man findet, daß es Mengen gibt, in denen gleiche Gesetzmäßigkeiten auftreten, und stellt diese Gesetzmäßigkeiten durch vergleichende Betrachtungen heraus.
2. Man betrachtet eine Menge von Elementen, die nicht näher definiert wird, und von der man nur voraussetzt, daß in ihr die unter 1. herausgestellten Gesetzmäßigkeiten gelten. In dieser Menge versucht man, alle Folgerungen zu finden, die sich aus diesen Gesetzmäßigkeiten ergeben, und weiß dann, daß diese Folgerungen in allen konkreten Mengen gelten müssen, in denen die als gültig angenommenen Gesetzmäßigkeiten gelten.

Dieses Vorgehen heißt **Axiomatisierung einer Theorie**. Die Definition A 2 des Vektorraumes nennt man eine **axiomatische Definition**, da sie bezüglich der Eigenschaften der Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ nichts weiter aussagt, als daß für diese die Rechengesetze 1°–7° gelten sollen.

Die Rechengesetze 1°–7°, das einzige, was wir über die Eigenschaften der Elemente von $\mathfrak{M}$ wissen, nennt man die **Grundgesetze** eines Vektorraumes oder seine **Axiome**. Aus ihnen allein können die Rechenregeln (97) hergeleitet und die Begriffe „linear unabhängig", „Basis", „Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis" und viele andere mehr definiert werden. Diese Rechenregeln gelten demzufolge in jedem konkreten Vektorraum, und diese Begriffe haben folglich in jedem konkreten Vektorraum einen Sinn.

Bemerkung: Das Einführen von Koordinaten in Ebene und Raum, die Herleitungen der Gleichungen für Geraden in Ebene und Raum, von Gleichungen für eine Ebene, eine Kugel u. ä. gehören nicht zur Theorie der Vektorräume. Es ist vielmehr eine Anwendung der konkreten Vektorräume der Verschiebungen der betrachteten Ebene bzw. des Raumes auf die Geometrie dieser Ebene bzw. des Raumes. Diesen Abschnitt der Geometrie nennt man **analytische Geometrie**.

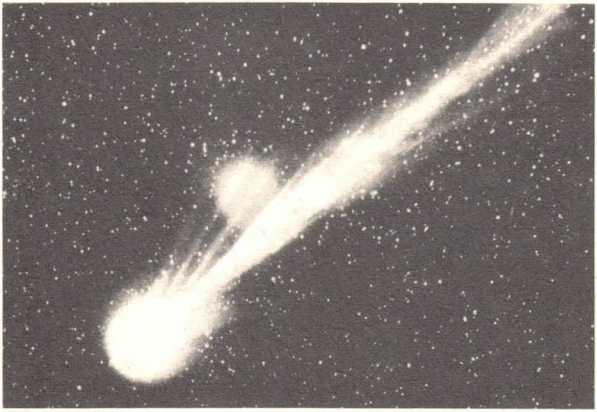
Aufgaben a 105 bis 108

B. Kegelschnitte

50 **Definition und Konstruktion der Kegelschnitte**
Wiederholung (50) · Definition der Kegelschnitte (51) · Ortsdefinition der Ellipse (55) · Ortsdefinition der Hyperbel (59) · Ortsdefinition der Parabel (61)

63 **Gleichungen der Kegelschnitte**
Mittelpunktsgleichungen der Ellipse (63) · Mittelpunktsgleichung der Hyperbel (65) · Scheitelgleichung der Parabel (66) · Gleichungen für Kegelschnitte in achsenparalleler Lage zum Koordinatensystem (67) · Aufstellen von Kegelschnittsgleichungen (68) · Kegelschnitt und Gerade (70) · Eigenschaften der Kegelschnitte (75) · Gemeinsame Scheitelgleichung der nicht entarteten Kegelschnitte (79)

Zu den einstmals so rätselhaften und auch heute noch interessanten Objekten des gestirnten Himmels gehören die Kometen. Oft tauchen sie unerwartet auf, bewegen sich dann auf vollkommen ungewöhnlichen Bahnen am Himmel, um ebenso plötzlich wieder zu verschwinden. Das NEWTONsche Gravitationsgesetz gab die Grundlage für die Möglichkeit einer Bahnbestimmung und damit für das Verständnis der räumlichen Bewegung. Die Bahnen, auf denen sie sich bewegen, sind Kegelschnitte.



1 Zur Wiederholung

Pyramiden (darunter das Tetraeder), Pyramidenstümpfe, Prismen (darunter Quader und damit auch Würfel) werden **ebenflächig begrenzte Körper** genannt, weil sich ihre Oberfläche ausschließlich aus ebenen Flächenstücken zusammensetzt. Kugeln und ihre Teile (Kugelsegment und -sektor), Zylinder, Kegel und Kegelstümpfe werden **krummflächig begrenzte Körper** genannt, weil ihre Oberfläche ganz oder teilweise aus gekrümmten Flächen besteht.

B

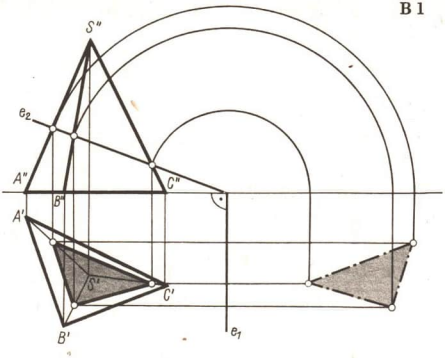
Unter einem Körper verstehen wir den Teil des Raumes, der aus der Begrenzungsfläche und den im Innern dieser Begrenzungsfläche liegenden Punkten besteht.
Ebenso wie es in der Ebene oft zweckmäßig ist, zwischen einer Fläche (Dreiecksfläche, Kreisfläche, ...) und der sie begrenzenden Linie (Dreieck, Kreis, ...) zu unterscheiden, betrachtet man im Raum neben den Körpern in der oben angeführten Auffassung auch gesondert deren Begrenzungsflächen und unterscheidet so z. B. zwischen Kugelkörper und Kugel, Prismenkörper und Prisma usw. Wir werden im folgenden i. a. jeweils nur die Bezeichnungen Kugel, Prisma usw. verwenden, müssen aber darauf achten, daß bei mathematischen Fragestellungen aus dem Zusammenhang ersichtlich wird, um welche Auffassung des Begriffs „Kreis" („Kugel") es sich gerade handelt.

(1) a) *Was versteht man unter einer senkrechten Eintafelprojektion? Erläutern Sie in diesem Zusammenhang die Begriffe „Grundriß" und „Höhenmaßstab"!*
b) *Zeichnen Sie den Grundriß einer Geraden, wenn Ihnen von zwei Punkten derselben die Grundrisse bekannt sind!*
c) *Was versteht man unter dem Grundrißspurpunkt einer Geraden, was unter der Grundrißspurgeraden einer Ebene?*
d) *Wie ermittelt man bei der senkrechten Eintafelprojektion*
(1) den Neigungswinkel einer Geraden AB gegen die Grundrißebene,
(2) die wahre Länge einer Strecke $\overline{AB}$,
wenn die Punkte A und B durch ihre Grundrisse und Höhen gegeben sind?
e) *Wie ermittelt man bei der senkrechten Eintafelprojektion*
(1) den Neigungswinkel einer Ebene ABC zur Grundrißebene,
(2) die wahre Gestalt einer ebenen Figur, z. B. des Dreiecks ABC,
wenn die Punkte A, B und C durch ihre Grundrisse und Höhen gegeben sind?
f) *Beschreiben Sie das Verfahren der senkrechten Zweitafelprojektion!*

1 Eine dreiseitige Pyramide $ABCS$ sei durch Grund- und Aufriß gegeben und eine projizierende Ebene ε bezüglich der Aufrißtafel durch ihre Spuren e_1 und e_2 (Bild B 1). Die Pyramide $ABCS$ werde von ε in allen drei Seitenflächen geschnitten. Zu konstruieren ist der Grundriß und die wahre Größe der Schnittfigur.
Lösung: Da ε die Körperkanten in den Eckpunkten A_0, B_0 und C_0 der Schnittfigur schneidet, können die Aufrisse dieser Eckpunkte als Schnittpunkte von e_2 mit $\overline{A''S''}$, $\overline{B''S''}$, $\overline{C''S''}$ sofort ermittelt werden. Aus diesen Aufrissen und dem Grundriß von $ABCS$ bestimmt man den Grundriß der Eckpunkte A_0, B_0, C_0.
ε ist bezüglich der Aufrißebene projizierende Ebene. Durch Klappung von ε um die Spur e_1 finden wir die wahre Größe der Schnittfigur $A_0B_0C_0$.

Aufgaben b 1 bis 7

B 1



2 Definition der Kegelschnitte

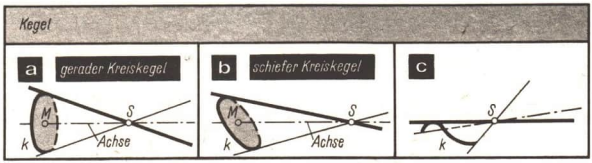
Wir werden uns jetzt mit den Schnittfiguren befassen, die entstehen, wenn man einen geraden Kreiskegel mit einer Ebene schneidet.

(2) *Wiederholen Sie die Definition des geraden Kreiskegels!*

In der täglichen Praxis ist es im allgemeinen ausreichend, einen Kegel als endliche Figur anzusehen. Bei technischen Fragestellungen ist es jedoch manchmal nötig, unter einem Kegel ein unendliches Gebilde zu verstehen. Dann benutzt man die in der Mathematik übliche, durch Abstraktion gewonnene

1 **DEFINITION: Ein *Kegel* ist die Gesamtheit der Geraden, die einen Punkt *S* des Raumes mit den Punkten einer Kurve *k* verbinden. Ist *k* eine ebene Kurve, dann darf *S* nicht in der Ebene von *k* liegen. *S* heißt die *Spitze*, *k* eine *Leitkurve* und die Geraden die *Mantellinien* des Kegels.**
Ist *k* ein Kreis, so heißt der Kegel *Kreiskegel* und der Kreis ein *Grundkreis* des Kegels. Die Verbindungsgerade der Spitze *S* mit dem Mittelpunkt eines Grundkreises heißt die *Achse* des Kreiskegels.
Der Kreiskegel heißt *gerade* oder *schief*, je nachdem die Achse auf der Grundkreisebene senkrecht steht oder nicht (Bild B 2).

B 2



Da von den Kegeln im weiteren nur gerade Kreiskegel betrachtet werden, bezeichnen wir diese kurz als „Kegel".

Wir wollen nun untersuchen, welche Schnittfiguren entstehen, wenn ein Kegel K mit einer Ebene ε geschnitten wird. Zu diesem Zweck nehmen wir an:

1. Der Kegel K sei durch seinen Grund- und Aufriß bei senkrechter Zweitafelprojektion gegeben, wobei die Tafeln so liegen sollen, daß der Grundkreis k von K in der Grundrißebene liegt.
2. Die Ebene ε sei durch ihre Spuren e_1 und e_2 gegeben, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß ε senkrecht zur Aufrißebene verläuft und damit projizierende Ebene bezüglich dieser ist.

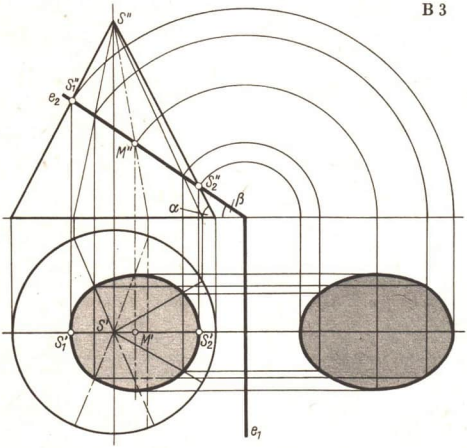
Wir bezeichnen mit

α den Neigungswinkel der Mantellinien von K mit der Ebene des Grundkreises k von K und mit

β den Neigungswinkel von ε zur Ebene von k.

Außerdem möge zunächst ε nicht durch die Spitze S des Kegels gehen.

B 3



1. Fall: $0 \leqq \beta < \alpha$. Wir konstruieren zunächst für $\beta > 0$ zum Aufriß der Schnittfigur ihren Grundriß. Zu diesem Zweck halbieren wir die Strecke $\overline{S_1''S_2''}$ des Aufrisses durch den Punkt M'' (Bild B 3) und wählen die weiteren zur Grundrißkonstruktion bestimmten Aufrißpunkte so, daß sie symmetrisch zu M'' gelegene Punktepaare der Strecken $\overline{S_1''M''}$ und $\overline{M''S_2''}$ bilden. Den Grundriß eines solchen Punktes finden wir als Schnittpunkt der zugehörigen Ordnungslinie und des Grundrisses der durch ihn hindurchgehenden Mantellinie des Kegels. Durch Klappen der Schnittebene ε um e_1 ermitteln wir dann die wahre Gestalt der Schnittfigur.

Der eingeschlagene Konstruktionsweg läßt uns folgende Eigenschaften der Schnittfigur erkennen:

a) Sie ist eine endliche, geschlossene Kurve.
b) Sie hat zwei senkrecht zueinander verlaufende Symmetrieachsen und ist folglich zentralsymmetrisch. Ihr Mittelpunkt ist M.
c) Die maximale und die minimale Entfernung der Kurvenpunkte von M wird in den Punkten auf den beiden Symmetrieachsen angenommen.

(3) *Ermitteln Sie konstruktiv den Grundriß und die wahre Gestalt der Schnittfigur von K und ε, wenn ε nicht durch S von K geht und $\beta = 0$ ist!*

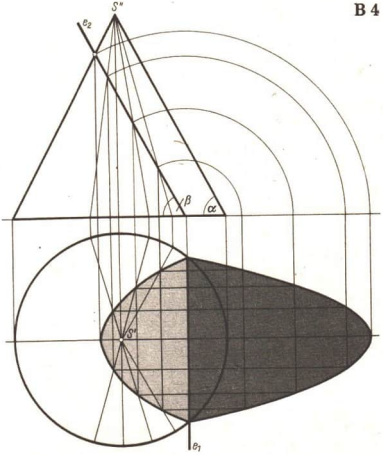
▶ 2 **DEFINITION: Es sei K ein gerader Kreiskegel, dessen Mantellinien zur Ebene des Grundkreises den Neigungswinkel α haben, und ε eine Ebene, deren Neigungswinkel zur Grundkreisebene von K β beträgt. Geht ε nicht durch die Spitze S von K und ist $0 \leqq \beta < \alpha$, dann heißt die Schnittfigur von K und ε eine *Ellipse*.**[1]

Die auf den Symmetrieachsen der Ellipse gelegenen Kurvenpunkte heißen **Scheitel** der Ellipse. Die Strecken, die den Mittelpunkt M der Ellipse mit je einem Scheitel verbinden, heißen die **Halbachsen** der Ellipse. Die beiden Scheitel maximaler Entfernung von M nennt man die **Hauptscheitel** der Ellipse und ihre Verbindungsstrecke die **Hauptachse**, die beiden Scheitel minimaler Entfernung von M heißen die **Nebenscheitel** der Ellipse und ihre Verbindungsstrecke die **Nebenachse** der Ellipse.
Für $\beta = 0$ ist die Schnittfigur von K und ε ein Kreis. Der Kreis ist demnach ein Sonderfall der Ellipse, und zwar eine Ellipse, deren Haupt- und Nebenachse gleich lang sind.

Aufgaben b 8 und 9

3

2. Fall: $\beta = \alpha$. Wir konstruieren wieder zum Aufriß den Grundriß der Schnittfigur und ermitteln ihre wahre Gestalt (Bild B 4), wobei hier die Aufrißpunkte beliebig gewählt werden können. Aus der Konstruktion ergeben sich für die Schnittfigur folgende Eigenschaften:
a) Sie besteht aus einem beiderseits ins Unendliche verlaufenden Kurvenbogen (Ast), ist also keine geschlossene Kurve.



B 4

[1] ἡ ἔλλειψις (griech.), Mangel.

b) Sie besitzt nur eine Symmetrieachse. Die Kurve ist folglich nicht zentralsymmetrisch und hat keinen Mittelpunkt.

3 **DEFINITION: Es sei K ein gerader Kreiskegel, dessen Mantellinien zur Grundkreisebene den Neigungswinkel α haben, und ε eine Ebene, deren Neigungswinkel zur Grundkreisebene von K β beträgt. Geht ε nicht durch die Spitze von K und ist $\beta = \alpha$, dann heißt die Schnittfigur von K und ε eine *Parabel*.**[1]

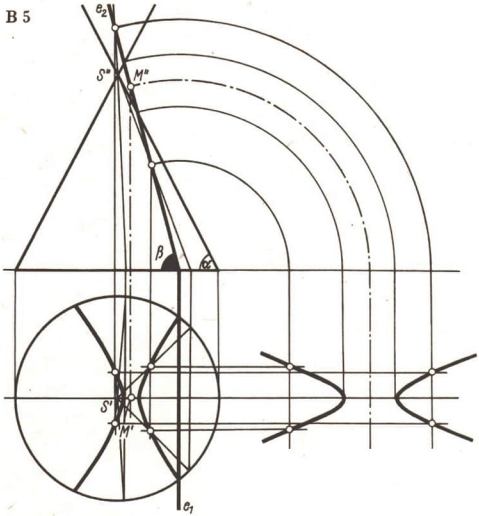
Der auf der Symmetrieachse der Parabel gelegene Punkt der Parabel heißt ihr **Scheitel.**

3. Fall: $\frac{\pi}{2} \geqq \beta > \alpha$. Das Bild B 5 zeigt den Aufriß, den Grundriß und die wahre Gestalt der Schnittfigur von K und ε, die analog dem ersten Falle konstruiert wurden. Aus der Konstruktion ergibt sich hier für die Schnittfigur:

a) Sie ist eine nicht geschlossene Kurve, die aus zwei beiderseits ins Unendliche gehenden Kurvenbögen (Ästen) ohne gemeinsame Punkte besteht.
b) Sie hat zwei senkrecht aufeinanderstehende Symmetrieachsen. Damit ist sie zentralsymmetrisch und hat einen Mittelpunkt.
c) Eine Symmetrieachse enthält keinen Kurvenpunkt. Die andere, die sogenannte Hauptsymmetrieachse, enthält zwei zu verschiedenen Ästen gehörende Kurvenpunkte, deren Entfernung gleich dem minimalen Abstand der Äste ist.

[1] ἡ παραβολή (griech.), Gleichheit.

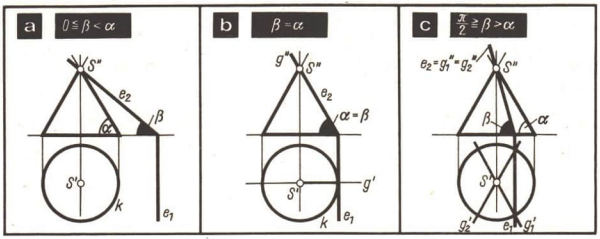
B 5



4 **DEFINITION: Es sei K ein gerader Kreiskegel, dessen Mantellinien zur Ebene des Grundkreises den Neigungswinkel α haben, und ε eine Ebene, deren Neigungswinkel zur Grundkreisebene von K β beträgt. Geht ε beim Schnitt mit K nicht durch die Spitze von K und ist $\alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$, dann heißt die Schnittfigur von K und ε eine *Hyperbel*.[1]**

Die auf der Hauptsymmetrieachse gelegenen Kurvenpunkte heißen die **Scheitel** der Hyperbel, die Verbindungsstrecken der Scheitel mit dem Mittelpunkt M der Hyperbel die **Halbachsen** und die Verbindungsstrecke der Scheitel die **Achse** oder **Hauptachse** der Hyperbel.

Neben den drei Schnittfiguren Ellipse (mit einem Sonderfall, dem Kreis), Parabel, Hyperbel sind noch andere Figuren möglich. Man erhält sie, wenn die Ebene ε den Kegel K in seiner Spitze S schneidet. Im Fall $0 \leqq \beta < \alpha$ haben ε und K nur **den Punkt S** gemeinsam (Bild B 6a).
Im Fall $\beta = \alpha$ berührt die Ebene ε den Kegel längs einer Mantellinie, so daß man als Schnittfigur **eine Gerade g** erhält (Bild B 6b).



B 6

Im Fall $\frac{\pi}{2} \geqq \beta > \infty$ hat die Ebene ε mit dem Kegel zwei Mantellinien gemeinsam. Die Schnittfigur ist ein **Geradenpaar g_1 und g_2** durch S (Bild B 6c).
Den Punkt, eine Gerade und ein Geradenpaar nennt man **entartete Kegelschnitte.**

5 **DEFINITION: Jede Kurve, die beim Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene entsteht, heißt ein *Kegelschnitt*.**

Im weiteren wollen wir aber zur Abkürzung der Sprechweise unter einem „Kegelschnitt" stets einen nichtentarteten Kegelschnitt verstehen.

Aufgaben b 10 bis 12

4 Ortsdefinition der Ellipse

„Geometrischer Ort" ist eine veraltete Bezeichnung für eine Menge aller der Punkte, die gewissen geometrischen Bedingungen genügen. So sagte man früher: Ein Kreis ist der geometrische Ort der Punkte einer Ebene, die von einem festen

[1] ἡ ὑπερβολή (griech.), Überschuß.

Punkt dieser Ebene, dem Mittelpunkt des Kreises, konstanten Abstand haben. Heute setzt man in dieser Definition des Kreises für „der geometrische Ort" die Worte „die Menge aller der Punkte".

4 *Definieren Sie* **a)** *die Mittelsenkrechte einer Strecke,* **b)** *die Winkelhalbierende als Menge von Punkten mit bestimmten geometrischen Eigenschaften, als „geometrischer Ort"!*

B

Die ebenen Figuren Ellipse, Parabel und Hyperbel haben wir bisher als Schnittfiguren zweier Flächen definiert. Wir suchen nunmehr nach je einer Definition, in der nur Punkte der Ebene eine Rolle spielen, in der der betreffende Kegelschnitt liegt. Wir betrachten hierzu einen geraden Kreiskegel K und eine Kugel $K(M, r)$ und denken uns die Kugel so in einen der beiden Halbkegel[1] von K hineingelegt, daß sie so nahe als möglich an die Spitze S von K zu liegen kommt. Diese Lage wird eingenommen, wenn der Mittelpunkt M von $K(M, r)$ auf der Achse von K liegt und $K(M, r)$ den Kegel längs eines Kreises berührt (Bild B 7). Verkleinern wir den Radius r der Kugel, dann verringert sich bei analoger Lage der Kugel bezüglich des Kegels der Abstand von M zu S, und der Berührungskreis von $K(M, r)$ und K rückt ebenfalls näher an den Scheitel von K heran. Bei Vergrößerung von r wächst der Abstand von M zu S, und der Berührungskreis rückt von S ab.

Wir suchen zuerst nach einer **Ortsdefinition der Ellipse.**

Es sei ein Kegel K gegeben, der von einer Ebene ε so geschnitten wird, daß eine Ellipse entsteht. In diesem Falle geht ε nicht durch S und schneidet nur einen der beiden Halbkegel von K. Wir legen nun in den von ε geschnittenen Halbkegel eine so kleine Kugel hinein, daß

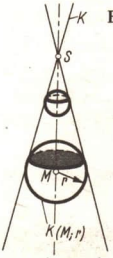
a) die Punkte ihres Berührungskreises mit K näher an S liegen als die Ellipsenpunkte und

b) die Kugel mit ε keinen gemeinsamen Punkt hat.

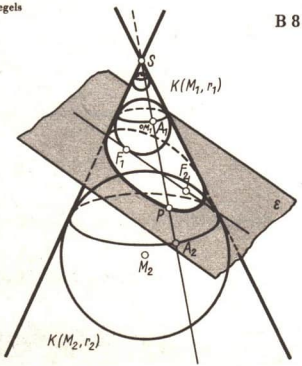
Durch stetiges Vergrößern des Radius der Kugel können wir dann erreichen, daß

a) für einen bestimmten Radius r_1 die entsprechende Kugel $K(M_1, r_1)$ ganz auf derselben Seite von ε liegt wie S und ε in einem Punkt F_1 berührt,

[1] Unter einem Halbkegel versteht man den Teil des Kegels, der auf einer Seite einer durch die Spitze S des Kegels gehenden Ebene liegt, die mit K nur S gemeinsam hat.



B 7



B 8

b) für Radien, die etwas größer sind als r_1, die Kugel die Ebene ε schneidet,
c) für einen Radius $r_3 > r_1$ die entsprechende Kugel $K(M_3, r_3)$ ganz auf der Seite von ε liegt, der S nicht angehört, und ε in einem Punkt F_2 berührt (Bild B 8).

Bei weiterer Vergrößerung von r entfernt sich $K(M, r)$ immer weiter von ε und hat mit ihr keinen Punkt gemeinsam. Die Kugeln $K(M_1, r_1)$ und $K(M_2, r_2)$ nennt man nach dem belgischen Mathematiker G. P. Dandelin (sprich: dangdeläng; 1794–1847), der diese Überlegungen erstmals anstellte, **Dandelinsche Kugeln.** Ihre Berührungspunkte F_1 und F_2 mit ε heißen die **Brennpunkte** der Ellipse. Die Punkte F_1 und F_2 sind für die Ellipse von großer Bedeutung, denn es gilt:

6 **SATZ: Sind F_1 und F_2 die Brennpunkte einer Ellipse, dann ist für alle Punkte P dieser Ellipse die Summe der Abstände von P zu F_1 und F_2 konstant und größer als der Abstand von F_1 zu F_2, d. h., es gilt für alle Ellipsenpunkte P die Beziehung**

$$\boxed{\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = \text{const.} > \overline{F_1F_2}} \tag{1}$$

Beweis: Wir betrachten einen beliebigen Punkt P einer durch K und ε gegebenen Ellipse und die durch P gehende Mantellinie des Kegels. Diese Mantellinie schneidet die Berührungskreise der Kugeln $K(M_1, r_1)$ und $K(M_2, r_2)$ mit K in jeweils einem Punkt, den wir mit A_1 bzw. A_2 bezeichnen. Da für alle Punkte der Berührungskreise der Abstand von der Spitze S von K konstant ist, ist für alle Punkte P der betrachteten Ellipse die Länge der Stecke $\overline{A_1A_2}$ konstant (Bild B 8).
Der Punkt P zerlegt $\overline{A_1A_2}$ in die Teilstrecken $\overline{PA_1}$ und $\overline{PA_2}$. Die Gerade PA_1 ist Tangente an die Kugel $K(M_1, r_1)$ und die Gerade PF_1 ebenfalls (da ε diese Kugel in F_1 berührt und P der Ebene ε angehört). Da man nun in Analogie zum Kreis (Spezialfall des Tangenten-Sekanten-Satzes, wenn die Sekante Tangente wird) zeigen kann, daß für zwei an eine Kugel $K(M, r)$ von einem Punkt P außerhalb von $K(M, r)$ gezogene Tangenten die von P zu den Tangentenberührungspunkten gezogenen Strecken gleich lang sind, ist in unserem Falle $\overline{PA_1} = \overline{PF_1}$. Analog dazu gilt dann natürlich auch $\overline{PA_2} = \overline{PF_2}$, und wir können schreiben

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1P} + \overline{PA_2} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2} = \text{const.}$$

P ist ein Punkt von K, F_1 und F_2 sind es jedoch nicht. Deshalb kann P mit keinem dieser Punkte zusammenfallen. Berücksichtigt man nun, daß im Dreieck stets die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist, so kommt man zu der Beziehung

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} > \overline{F_1F_2},$$

womit der Satz bewiesen wäre.
In (1) sind P, F_1 und F_2 Punkte der Ebene der gegebenen Ellipse. Da sich auch die Umkehrung des Satzes B 6:

7 **Die Menge aller Punkte P einer Ebene, für die die Summe der Abstände zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant und größer als der Abstand von F_1 zu F_2 ist, ist eine Ellipse, und F_1 und F_2 sind ihre Brennpunkte.**

beweisen läßt[1], haben wir folglich eine Definition der Ellipse gefunden, in der nur Punkte der Ebene dieser Ellipse eine Rolle spielen.

[1] Zum Beweis dieses Satzes muß gezeigt werden, daß die gegebene Punktmenge ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse ist, d. h., es müssen eine Ebene und ein Kegel angegeben werden, deren Schnittfigur die gegebene Punktmenge ist.

8 **Ortsdefinition der Ellipse: Eine *Ellipse* ist die Menge aller der Punkte einer Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant und größer als der Abstand von F_1 zu F_2 ist. F_1 und F_2 heißen die *Brennpunkte* der Ellipse.**

5 *Ist bei dieser Definition der Ellipse ihr Sonderfall, der Kreis, miterfaßt? Beschreiben Sie für den Fall des Kreises die Lage der Dandelinschen Kugeln und ihrer Berührungspunkte F_1 und F_2 mit ε!*

5

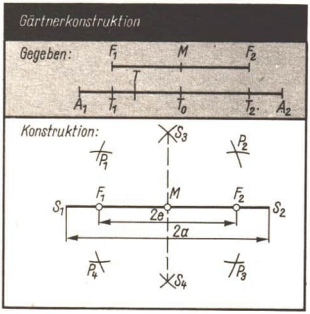
B

6 *Wiederholen Sie die Bedingungen, unter denen sich in der Ebene zwei Kreise $k(M_1, r_1)$ und $k(M_2, r_2)$* **a)** *nicht schneiden und einer außerhalb des anderen liegt,* **b)** *von außen berühren,* **c)** *schneiden,* **d)** *von innen berühren,* **e)** *nicht schneiden und einer innerhalb des anderen liegt!*

Aus der Ortsdefinition ergibt sich ein einfaches Konstruktionsverfahren für die Ellipse, das man als **Gärtnerkonstruktion** bezeichnet.
Da es uns bei der Konstruktion der Ellipse nicht auf ihre Lage in der Zeichenebene ankommt, seien uns ihre Brennpunkte durch ihre Entfernung, d. h. die Länge der Strecke $\overline{F_1F_2}$, gegeben. Ferner sei uns noch die für die zu konstruierende Ellipse charakteristische Konstante $\overline{F_1P} + \overline{PF_2}$ als Länge einer zweiten Strecke $\overline{A_1A_2}$ gegeben, wobei $\overline{A_1A_2} > \overline{F_1F_2}$ sein möge (Bild B 9).
Konstruktionsbeschreibung: Wir wählen in der Zeichenebene zwei Punkte F_1 und F_2 der angegebenen Entfernung $\overline{F_1F_2}$ und eine Strecke $\overline{A_1A_2}$ der gegebenen Länge. Mit T_0 bezeichnen wir den Mittelpunkt von $\overline{A_1A_2}$ und mit T_1 bzw. T_2 die auf verschiedenen Seiten von T_0 gelegenen Punkte von $\overline{A_1A_2}$, für die

$$\overline{T_1T_0} = \overline{T_0T_2} = \frac{1}{2}\,\overline{F_1F_2}$$

ist. Nun nehmen wir folgende Fallunterscheidung vor:
1. Fall: Wir wählen auf $\overline{A_1A_2}$ einen Punkt T zwischen T_1 und T_2, der nicht mit T_0 zusammenfällt, und schlagen um F_1 und F_2 je zwei Kreise, deren Radien die Länge der Strecken $\overline{A_1T}$ und $\overline{TA_2}$ haben. Diese Kreise schneiden sich paarweise in vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, für die jeweils $\overline{F_1P_i} + \overline{P_iF_2} = \overline{A_1A_2}$ ist und die damit Punkte der gesuchten Ellipse sind. P_1 und P_2 liegen symmetrisch zu P_3 bzw. P_4 bezüglich der Geraden F_1F_2, und P_1 und P_4 liegen symmetrisch zu P_2 bzw. P_3 bezüglich der Mittelsenkrechten von $\overline{F_1F_2}$. Auf diese Weise erhalten wir für jeden analog gelegenen Unterteilungspunkt von $\overline{A_1A_2}$ jeweils vier Ellipsenpunkte. So können wir hinreichend viele Kurvenpunkte konstruieren und den Kurvenverlauf erkennen.

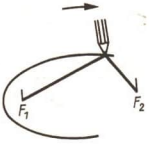


B 9

2. Fall: Wir wählen als Unterteilungspunkt von $\overline{A_1A_2}$ den Punkt T_1 (bzw. T_2). Dann berühren sich die entsprechenden Kreise um F_1 und F_2 in ihren Schnittpunkten S_1 und S_2 mit der Geraden F_1F_2. Wegen $\overline{F_1S_i} + \overline{S_iF_2} = \overline{A_1A_2}$ $(i = 1,2)$ gehören auch diese Punkte zu der durch $\overline{F_1F_2}$ und $\overline{A_1A_2}$ gegebenen Ellipse.
3. Fall: Wir wählen als Unterteilungspunkt den Punkt T_0. Dann haben die entsprechenden Kreise um F_1 und F_2 zwei Schnittpunkte S_3 und S_4, die auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{F_1F_2}$ liegen. Für Unterteilungspunkte $\overline{T}$ zwischen T_1 und A_1 (bzw. A_2 und T_2) liefert das der Ortsdefinition der Ellipse entsprechende Konstruktionsverfahren keine weiteren Kurvenpunkte.

(7) *Begründen Sie in allen vier Fällen, weshalb die entsprechenden Kreise um F_1 und F_2 die angegebene Anzahl gemeinsamer Punkte haben.*

(8) *Gärtner wandeln bei der Anlage eines ellipsenförmigen Beetes dieses Konstruktionsverfahren folgendermaßen ab: Zwei Pflöcke werden in die Erde gesteckt und mit einer Schnur recht lose verbunden. Dann wird die Schnur mit Hilfe eines dritten Pflocks gespannt und der Pflock auf diesem Zwangsweg bewegt (Bild B 10).*
Ist die entstandene Figur eine Ellipse? Ahmen Sie diese „Gärtnerkonstruktion" im Heft mit Hilfe zweier Stecknadeln, eines Fadens und eines spitzen Bleistiftes nach.



B 10

Da die Geraden F_1F_2 und die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{F_1F_2}$ die Symmetrieachsen der Ellipse sind, haben wir in S_1, S_2, S_3 und S_4 die Scheitel der Ellipse gefunden. Der Mittelpunkt M von $\overline{F_1F_2}$ ist der Mittelpunkt der Ellipse. Gewöhnlich bezeichnet man die Länge der Hauptachse mit $2a$, die der Nebenachse mit $2b$ und den Abstand der Brennpunkte mit $2e$. Aus der Konstruktionsbeschreibung folgt, daß $\overline{A_1A_2}$ die Länge $2a$ und z. B. $\overline{F_1S_3}$ die Länge a hat. Aus dem rechtwinkligen Dreieck MF_1S_3 ergibt sich damit für a, b und e die Beziehung

$$\boxed{a^2 = e^2 + b^2}\,.$$

Das Dreieck MF_1S_3 nennt man das **charakteristische Dreieck** der Ellipse und e ihre **lineare Exzentrizität**. Nach Satz B 7 ist für eine Ellipse stets $a > e \geqq 0$.

Aufgaben b 13 bis 15

6 Ortsdefinition der Hyperbel

Gegeben sei uns eine Hyperbel als Schnittfigur eines Kegels K und einer Ebene ε. Im Falle der Hyperbel geht ε nicht durch die Spitze S von K und schneidet beide Halbkegel von K. Wir bezeichnen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen der Halbkegel als den unteren, den anderen als den oberen und legen in den unteren wieder eine kleine Kugel so hinein, daß

a) die Punkte ihres Berührungskreises mit K näher an S liegen als die Hyperbelpunkte auf diesem Halbkegel,
b) die Kugel mit ε keinen gemeinsamen Punkt hat.

Vergrößert man den Radius der Kugel allmählich, dann gibt es einen Radius r_1, für den die entsprechende Kugel $K(M_1, r_1)$ ganz auf der Seite von ε liegt wie S und

ε in einem Punkte F_1 berührt, während die Berührungskugeln des unteren Halbkegels, deren Radien größer als r_1 sind, alle die Ebene ε schneiden.
Im unteren Halbkegel von K gibt es also für die Hyperbel im Gegensatz zum Fall der Ellipse nur eine Dandelinsche Kugel. Eine zweite Dandelinsche Kugel $K(M_2, r_2)$ für die Hyperbel findet man auf analoge Weise im oberen Halbkegel von K (Bild B 11), so daß auch für die Hyperbel zwei solche Berührungskugeln existieren. Die Berührungspunkte F_1 und F_2 der Dandelinschen Kugeln $K(M_1, r_1)$ und $K(M_2, r_2)$ mit der Ebene ε heißen die **Brennpunkte** der Hyperbel, und es gilt:

9 **SATZ: Sind F_1 und F_2 die Brennpunkte einer Hyperbel, dann ist für alle Punkte P dieser Hyperbel der Absolutbetrag der Differenz der Abstände von P zu F_1 und F_2 konstant, größer als Null und kleiner als der Abstand von F_1 zu F_2, d. h., es gilt für alle Hyperbelpunkte P die Beziehung**

$$\boxed{\left|\overline{F_1P} - \overline{PF_2}\right| = \text{const.} < \overline{F_1F_2}}$$

Beweis: Ist P ein beliebiger Punkt der durch K und ε gegebenen Hyperbel und schneidet die Mantellinie von K durch P die Berührungskreise von $K(M_1, r_1)$ und $K(M_2, r_2)$ mit K entsprechend in A_1 und A_2, dann gelten wie im Falle der Ellipse die Beziehungen $\overline{PF_1} = \overline{PA_1}$ und $\overline{PF_2} = \overline{PA_2}$. Liegt P auf dem unteren Halbkegel von K, dann ergibt sich daraus

$$\overline{A_1A_2} = \overline{PA_2} - \overline{PA_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1}$$

und für P auf dem oberen Halbkegel analog dazu

$$\overline{A_1A_2} = \overline{PA_1} - \overline{PA_2} = \overline{PF_1} - \overline{PF_2}.$$

Allgemein können wir also für einen beliebigen Hyperbelpunkt P

(2) $$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \overline{A_1A_2}$$

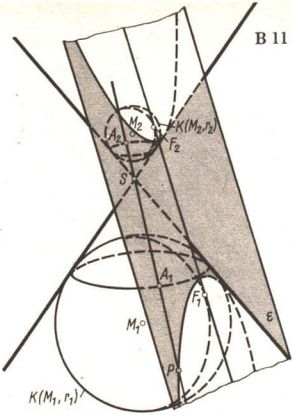
schreiben, wobei die Strecke $\overline{A_1A_2}$ konstante, von Null verschiedene Länge hat, da A_1 und A_2 auf verschiedenen Halbkegeln von K liegen. P ist ein Punkt von K, F_1 und F_2 sind jedoch keine Punkte von K. Deshalb kann wieder P mit keinem dieser Punkte zusammenfallen. Berücksichtigt man nun, daß im Dreieck die Differenz zweier Dreieckseiten stets kleiner als die dritte Seite ist, so kommt man zu der Beziehung

$$\left|\overline{F_1P} - \overline{PF_2}\right| < \overline{F_1F_2}, \quad \text{womit der Satz bewiesen ist.}$$

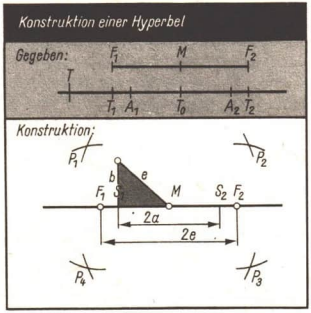
Auch im Falle der Hyperbel kann die Umkehrung des Satzes B 9 bewiesen werden. Deshalb gilt folgende

10 **Ortsdefinition der Hyperbel: Eine *Hyperbel* ist die Menge aller der Punkte einer Ebene, für die der Absolutbetrag der Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant und ungleich Null ist. F_1 und F_2 heißen die *Brennpunkte* der Hyperbel.**

Nach dieser Definition kann man eine Hyperbel konstruieren, wenn für sie F_1, F_2 und die Strecke $\overline{A_1A_2}$ gegeben sind und $\overline{F_1F_2} > \overline{A_1A_2}$ ist (Bild B 12).
Konstruktionsbeschreibung: Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Strecken $\overline{F_1F_2}$ und $\overline{A_1A_2}$ entsprechend mit M bzw. T_0 und ermitteln auf der Geraden A_1A_2 zwei zu T_0 symmetrisch gelegene Punkte T_1 und T_2, für die $\overline{T_1T_0} = \overline{T_0T_2} = \overline{F_1M}$ ist. Ist T ein Punkt der Geraden A_1A_2 außerhalb der Strecke $\overline{T_1T_2}$, dann schneiden einander die um F_1 und F_2 geschlagenen Kreise, deren Radien die Länge der Strecken $\overline{A_1T}$ und $\overline{A_2T}$ haben, in vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4. Diese Punkte gehören der gesuchten Hyperbel an, da für sie $\left|\overline{P_iF_1} - \overline{P_iF_2}\right| = \overline{A_1A_2}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, ist. Sie liegen paarweise symmetrisch bezüglich der Geraden F_1F_2 bzw. der Mittelsenkrechten zu $\overline{F_1F_2}$.



B 12



Schlagen wir um F_1 und F_2 Kreise, deren Radien die Länge der Strecken $\overline{A_1T_1}$ und $\overline{A_2T_1}$ (bzw. $\overline{A_1T_2}$ und $\overline{A_2T_2}$) haben, dann berühren sich diese Kreise paarweise in den gemeinsamen Schnittpunkten S_1, S_2 mit der Geraden F_1F_2. Auch für diese Punkte ist $\left|\overline{S_iF_1} - \overline{S_iF_2}\right| = \overline{A_1A_2}$, sie gehören also zu der gesuchten Hyperbel.
Für Punkte der Strecke $\overline{T_1T_2}$ ergeben sich keine weiteren Punkte, die der Bedingung (2) genügen.
Die Punkte S_1 und S_2 sind die Scheitel der Hyperbel und M ihr Mittelpunkt. Im Gegensatz zur Ellipse hat die Hyperbel nur zwei Scheitel. Man bezeichnet auch für die Hyperbel die Länge der Hauptachse mit $2a$, und den Abstand der Brennpunkte mit $2e$; e nennt man ihre **lineare Exzentrizität.** Außerdem erweist es sich als günstig, formal eine Größe $b > 0$ einzuführen, indem man $b^2 = e^2 - a^2$ setzt. Bestimmt man auf der im Punkt S_1 errichteten Senkrechten zu $\overline{F_1F_2}$ einen Punkt Q_1, dessen Abstand von S_1 gleich b ist, dann gilt in dem rechtwinkligen Dreieck S_1MQ_1 die Beziehung

$$\boxed{b^2 = e^2 - a^2}\,.$$

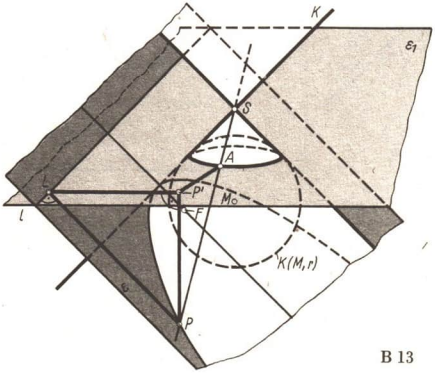
Man nennt deshalb $\triangle\, S_1MQ_1$ das **charakteristische Dreieck.** In ihm gilt stets $e > a > 0$.
Ist für eine Hyperbel $b = a$, dann ist ihr charakteristisches Dreieck gleichschenklig, und man nennt sie **gleichseitige Hyperbel.**

Aufgaben b 16 bis 18

7 Ortsdefinition der Parabel

Ist eine Parabel als Schnittfigur eines Kegels K und einer Ebene ε gegeben, dann geht ε nicht durch die Spitze von K und schneidet nur einen Halbkegel von K,

den wir den unteren nennen wollen. In diesem Halbkegel gibt es wie im Falle der Hyperbel genau eine Dandelinsche Kugel $K(M, r)$, die ε in F berühren möge. Da ε den oberen Halbkegel nicht schneidet, existiert für die Parabel nur eine Dandelinsche Kugel. Trotzdem kann man auch für die Parabel eine Ortsdefinition geben, wenn man die durch den Berührungskreis von $K(M, r)$ mit K bestimmte Ebene ε_1 und ihre Schnittgerade l mit ε in die Betrachtungen einbezieht.
Es sei P ein beliebiger Punkt der Parabel. Wir bezeichnen den Lotfußpunkt von P auf ε_1 mit P', den Lotfußpunkt von P auf l mit L, den Schnittpunkt der Mantellinie des Kegels durch P mit dem Berührungskreis von $K(M, r)$ und K mit A und betrachten die Dreiecke $\triangle\ PLP'$ und $\triangle\ PAP'$ (Bild B 13).



B 13

Beide Dreiecke sind rechtwinklig. Sie haben die Seite $\overline{PP'}$ gemeinsam, und es gilt $\sphericalangle\ PLP' = \sphericalangle\ PAP' = \alpha$, da im Falle der Parabel der Neigungswinkel der Mantellinien von K und der Neigungswinkel der Ebene ε zur Ebene eines Grundkreises einander gleich sind. In diesen beiden rechtwinkligen Dreiecken ist $\overline{PP'} = \overline{PL} \sin\alpha$ und $\overline{PP'} = \overline{PA} \sin\alpha$, also $\overline{PL} = \overline{PA}$. Außerdem ist $\overline{PA} = \overline{PF}$, denn beide Strecken sind Abschnitte von Tangenten von P an $K(M, r)$ in F und A. Wir haben also gefunden, daß für jeden Parabelpunkt P die Beziehung $\overline{PL} = \overline{PF}$ gilt. Nennt man den Punkt F wieder den **Brennpunkt** der Parabel und l ihre **Leitlinie**, dann läßt sich das bisherige Ergebnis in folgendem Satz zusammenfassen:

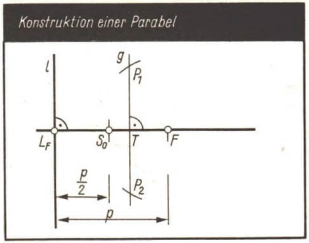
11 **SATZ: Ist F der Brennpunkt einer Parabel und l ihre Leitlinie, dann ist der Abstand $\overline{PL}$ jedes Punktes P der Parabel von l gleich seiner Entfernung $\overline{PF}$ von F.**

Auch im Falle der Parabel kann die Umkehrung dieses Satzes bewiesen werden. Deshalb gilt folgende

12 **Ortsdefinition der Parabel: Eine *Parabel* ist die Menge aller der Punkte einer Ebene ε, für die der Abstand von einem festen Punkt F dieser Ebene und der Abstand von einer festen Geraden l in ε einander gleich sind. F heißt der *Brennpunkt* und l die *Leitlinie* der Parabel.**

(9) *Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes B 11!*

Nach der Ortsdefinition kann wieder ein einfaches Konstruktionsverfahren für die Parabel angegeben werden.
Konstruktionsbeschreibung: Gegeben sei eine Gerade l und ein nicht auf ihr gelegener Punkt F. Wir legen durch F die Senkrechte zu l und bezeichnen den Schnittpunkt der beiden Geraden mit L_F und den Mittelpunkt der Strecke $\overline{L_F F}$ mit S_0 (Bild B 14). Ist nun g eine senkrecht auf der Geraden $L_F F$ stehende Gerade, die diese im Punkt T schneiden möge, dann unterscheiden wir drei mögliche Fälle.



B 14

1. Fall: T liegt auf $L_F F$ auf derselben Seite von S_0 wie F. Wir schlagen um F einen Kreis, dessen Radius die Länge der Strecke $\overline{L_F T}$ hat, und bezeichnen die Schnittpunkte von g und diesem Kreis mit P_1 und P_2. Diese beiden Punkte liegen symmetrisch zueinander bezüglich der Geraden LF und sind nach der Ortsdefinition Punkte der durch l und F bestimmten Parabel.
2. Fall: T liegt auf S_0. Der Kreis um F, dessen Radius die Länge der Strecke $\overline{L_F T} = \overline{L_F S_0}$ hat, berührt die Gerade g in S_0 und hat mit g keinen weiteren Punkt gemeinsam. S_0 ist ein Punkt der gesuchten Parabel.
3. Fall: T liegt auf $L_F F$ auf der anderen Seite von S_0 wie F. In diesem Fall hat der Kreis um F, dessen Radius die Länge der Strecke $\overline{L_F T}$ hat, mit g keinen gemeinsamen Punkt. Den Schnittpunkten T von g mit $L_F F$, die dem Strahl $S_0 L_F$ angehören und nicht mit S_0 zusammenfallen, entspricht kein Punkt der gesuchten Parabel.

(10) *Konstruieren Sie nach dem angegebenen Verfahren eine Parabel, indem Sie von hinreichend vielen Geraden g ausgehen, um den Kurvenverlauf deutlich erkennen zu können!*

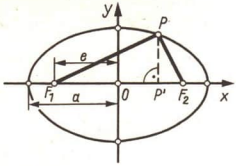
Die Gerade $L_F F$ ist die Symmetrieachse der Parabel und der Punkt S_0 ihr Scheitel. Den Strahl $S_0 F$ nennt man auch die **Achse** der Parabel. Die Länge der Strecke $\overline{L_F F}$ heißt der **Halbparameter** der Parabel und wird mit p bezeichnet. Die Zahl $2p$ nennt man den **Parameter** der Parabel.

Aufgabe b 19

Gleichungen der Kegelschnitte

8 Mittelpunktsgleichung der Ellipse

Es sei eine Ellipse durch ihre Brennpunkte F_1 und F_2 bzw. deren Abstand $2e$ und die Länge ihrer Hauptachse gegeben. Wir wählen in der Ebene der Ellipse ein kartesisches Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ so, daß O mit dem Mittelpunkt M der Ellipse (dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{F_1 F_2}$) zusammenfällt, die von F_1 nach F_2



B 15

gerichtete Gerade die x-Achse und die Mittelsenkrechte von $\overline{F_1F_2}$ die y-Achse ist (Bild B 15). Nach der Ortsdefinition der Ellipse gilt für jeden Punkt P dieser Kurve die Gleichung

(3) $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a,$

wobei links für die Strecken deren Länge eingesetzt werden muß. Zur Berechnung dieser Streckenlängen für einen beliebigen Kurvenpunkt $P(x; y)$ der Ellipse mit Hilfe der gegebenen Größen e und a projizieren wir P auf die x-Achse und bezeichnen seine Projektion mit P'. Ist P keiner der beiden Hauptscheitel und damit $P \neq P'$, dann sind die auf diese Weise entstandenen Dreiecke $\triangle F_1PP'$ und $\triangle F_2PP'$ rechtwinklig. Ihre gemeinsame Seite $\overline{PP'}$ hat die Länge $|y|$ und die Seite $\overline{F_1P'}$ bzw. $\overline{F_2P'}$ die Länge $|e + x|$ bzw. $|e - x|$. Folglich können wir für diese Kurvenpunkte in (3) für $\overline{F_1P}$ und $\overline{F_2P}$ entsprechend $\sqrt{y^2 + (e + x)^2}$ und $\sqrt{y^2 + (e - x)^2}$ einsetzen und erhalten als Gleichung für alle von den beiden Hauptscheiteln verschiedenen Ellipsenpunkte die Beziehung

(4) $\sqrt{y^2 + (e + x)^2} + \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = 2a.$

Ist P einer der beiden Hauptscheitel, dann ist für ihn $y = 0$, und die Strecken $\overline{F_1P}$ und $\overline{F_2P}$ haben die Länge $|e + x|$ bzw. $|e - x|$. Damit gilt (4) auch für diese beiden Punkte und ist somit eine Gleichung für alle Punkte dieser Kurve.
Die Gleichung (4) kann vereinfacht werden. Zu diesem Zweck addieren wir auf beiden Seiten von (4) $-\sqrt{y^2 + (e - x)^2}$ und quadrieren die so umgeformte Gleichung (4). Dadurch erhalten wir die Beziehung

$$y^2 + (e + x)^2 = 4a^2 + y^2 + (e - x)^2 - 4a\sqrt{y^2 + (e - x)^2},$$

die nach Auflösen der Klammern außerhalb der Wurzel folgende Gestalt annimmt:

(5) $a\sqrt{y^2 + (e - x)^2} = a^2 - ex.$

Quadrieren der Gleichung (5) ergibt

$$a^2[y^2 + (e - x)^2] = a^4 + e^2x^2 - 2exa^2$$

oder

(6) $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$

In (6) ersetzen wir noch $a^2 - e^2$ durch b^2, dividieren durch a^2b^2 und erhalten

(7) $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Wir haben damit gezeigt, daß alle Punkte der gegebenen Ellipse der Gleichung (7) genügen. Um jedoch (7) als Gleichung der Ellipse auffassen zu dürfen, müssen wir noch zeigen, daß es in der betrachteten Ebene außer den Punkten der betrachteten Ellipse keine weiteren Punkte gibt, die (7) erfüllen. Zu diesem Zweck berechnen wir für einen beliebigen Punkt $M(x; y)$ der Ebene seine Abstände von F_1 und F_2:

(*) $\overline{MF_1} = +\sqrt{(x + e)^2 + y^2}$, $\overline{MF_2} = +\sqrt{(x - e)^2 + y^2}$.

Ist M ein Punkt, der (7) genügt, dann gilt für ihn

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

und wegen

$$b^2 = a^2 - e^2$$

$$y^2 = a^2 - e^2 - x^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2 .$$

Für (*) kann deshalb geschrieben werden

$$\overline{MF_1} = +\sqrt{2ex + a^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2}, \quad \overline{MF_2} = +\sqrt{-2ex + a^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2},$$

$$(**) \quad \overline{MF_1} = \pm\left(a + \frac{e}{a}x\right), \quad \overline{MF_2} = \pm\left(a - \frac{e}{a}x\right).$$

Da in beiden Ausdrücken auf der linken Seite stets eine positive Zahl steht, muß auf der rechten Seite das Zeichen so gewählt werden, daß der rechts stehende Ausdruck positiv ist. Nach (7) ist für $M(x; y)$ immer $|x| \leqq a$. Weil ferner $e < a$ vorausgesetzt wurde, sind die Klammern in (**) positiv. Damit gilt für jeden die Gleichung (7) erfüllenden Punkt

$$\overline{MF_1} + \overline{MF_2} = \left(a + \frac{e}{a}x\right) + \left(a - \frac{e}{a}x\right) = 2a ,$$

d. h., er ist ein Punkt der gegebenen Ellipse.

Wegen der speziellen Wahl des Koordinatensystems wird (7) **Mittelpunktsgleichung** der Ellipse genannt.

Wir werden nun zeigen, daß für jeden Punkt $P(x; y)$ der Ellipse mit der Gleichung (7) und dem Mittelpunkt M die Strecke $\overline{PM}$ nicht kürzer als b und nicht länger als a ist.
Der Abstand des Punktes P von M beträgt $\sqrt{x^2 + y^2}$. Um ihn für alle Ellipsenpunkte abzuschätzen, betrachten wir die Ungleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leqq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Aus ihr folgt wegen (7)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} \leqq 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2 + y^2}{b^2} \geqq 1 \quad \text{bzw.} \quad b^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq a^2, \quad w.\,z.\,b.\,w.$$

(11) *Beweisen Sie mit Hilfe der Ortsdefinition der Ellipse, daß für Punkte außerhalb bzw. innerhalb der Ellipse entsprechend*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \quad bzw. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

gilt!

Aufgaben b 20 bis 24

9 Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

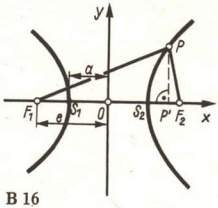
Es sei eine Hyperbel durch ihre Brennpunkte F_1 und F_2 bzw. deren Abstand $2e$ und die Länge $2a$ ihrer Achse gegeben. Wir wählen in der Ebene der Hyperbel wieder ein kartesisches Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ so, daß der Mittelpunkt M der Hyperbel der Punkt O ist, die von F_1 nach F_2 gerichtete Gerade die x-Achse

und die Mittelsenkrechte von $\overline{F_1F_2}$ die y-Achse (Bild B 16). Nach der Ortsdefinition der Hyperbel gilt für jeden Punkt $P\ (x; y)$ der Hyperbel die Beziehung

(8) $\quad \left|\overline{F_1P} - \overline{PF_2}\right| = 2a,$

in der $\overline{F_1P}$ und $\overline{PF_2}$ die Längen dieser Strecken bezeichnen und entsprechend durch $\sqrt{y^2 + (e+x)^2}$ bzw. $\sqrt{y^2 + (e-x)^2}$ ersetzt werden können:

(9) $\quad \left|\sqrt{y^2 + (e+x)^2} - \sqrt{y^2 + (e-x)^2}\right| = 2a.$



B 16

Analog zum Fall der Ellipse kann man der Gleichung (9) durch entsprechende Umformungen die Gestalt

(10) $\quad \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

geben und zeigen, daß nur die Punkte der gegebenen Hyperbel dieser Gleichung genügen. Man bezeichnet sie als die **Mittelpunktsgleichung** der Hyperbel.

(12) *Führen Sie die für den Übergang von (9) auf (10) notwendigen Überlegungen und Rechnungen selbständig aus!*

Aufgaben b 25 bis 27

10 Scheitelgleichung der Parabel

Gegeben sei eine Parabel durch ihren Brennpunkt F und ihre Leitlinie l. Zum Aufstellen einer Gleichung für diese Kurve wählen wir in der Ebene der Parabel folgendes kartesisches Koordinatensystem:

a) x-Achse ist die orientierte Gerade, die durch F geht, auf l senkrecht steht und auf der ihr Schnittpunkt L_F mit l vor F liegt;

b) O ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{L_FF}$;

c) y-Achse ist die entsprechend orientierte Mittelsenkrechte zu $\overline{L_FF}$ in O.

Wir bezeichnen mit L den Lotfußpunkt von P auf l und mit P' die Projektion von P auf die x-Achse. Nach der Ortsdefinition der Parabel ist in dieser Bezeichnungsweise

(11) $\quad \overline{LP} = \overline{PF}.$

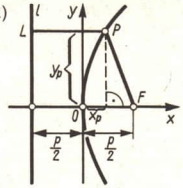
Die Längen dieser Strecken lassen sich für jeden Punkt $P(x; y)$ der Parabel durch x, y und den Halbparameter p ausdrücken, der uns als Länge der Strecke $\overline{L_FF}$ gegeben ist. Da O der Mittelpunkt von $\overline{L_FF}$ und $\overline{LP} = \overline{L_FO} + \overline{OP'}$ ist, hat $\overline{LP}$ die Länge $\frac{p}{2} + x$ (Bild B 17). Die Länge von $\overline{PF}$ berechnet man für $P \neq P'$ aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle\, PP'F$ zu $\sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2}$; für $P = P'$ ist $P = O$, also $y = x = 0$ und deshalb ebenfalls $\sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2}$ die Länge von $\overline{PF}$.

Wir können folglich für jeden Parabelpunkt für (11) schreiben

$$(12)\quad \frac{p}{2} + x = \sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2}$$

oder nach beiderseitigem Quadrieren und Vereinfachen dieser Beziehung

$$(13)\quad \boxed{y^2 = 2px}\,.$$



B 17

Auch im Falle der Parabel kann man zeigen, daß der Gleichung (13) nur die Punkte der gegebenen Parabel genügen. Man nennt sie wegen der speziellen Wahl des Koordinatensystems die **Scheitelgleichung** der Parabel.
Auch für Ellipse und Hyperbel können neben den Mittelpunktsgleichungen Scheitelgleichungen hergeleitet werden.

B

(13) *Konstruieren Sie die Bilder der Funktionen*
a) $y^2 = -2px,\ -\infty < x \leqq 0$, **b)** $x^2 = 2py,\ 0 \leqq y < \infty$,
c) $x^2 = -2py,\ -\infty < y \leqq 0$, *wobei Sie für die Konstante p selbst eine positive Zahl festlegen!*

Aufgaben b 28 bis 31

11 Gleichungen für Ellipse, Hyperbel und Parabel in achsenparalleler Lage zum Koordinatensystem

Aus den Mittelpunktsgleichungen für Ellipse und Hyperbel sowie der Scheitelgleichung für die Parabel kann man Gleichungen für Kegelschnitte herleiten, die eine beliebige Lage zum Koordinatensystem haben.
Es sei z. B. ein Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ gegeben, und gesucht wird eine Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen a und b, deren Mittelpunkt im Punkte $M(c; d)$ liegt und deren Hauptachse zur x-Achse parallel ist (Bild B 18).
In dem Koordinatensystem $\{M; i, j\}$ hat die Ellipse die Mittelpunktsgleichung

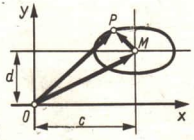
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Das Koordinatensystem $\{M; i, j\}$ geht aus $\{O; i, j\}$ durch eine Verschiebung hervor. Damit bestehen zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes P bezüglich $\{O; i, j\}$ und seinen Koordinaten x', y' bezüglich $\{M; i, j\}$ wegen $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$ die Beziehungen

$$(14)\quad \begin{aligned} x &= c + x', \quad \text{bzw.} \quad & x' &= x - c, \\ y &= d + y', & y' &= y - d. \end{aligned}$$

Die gegebene Ellipse hat folglich bezüglich $\{O; i, j\}$ die Gleichung

$$(15)\quad \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1.$$



B 18

(14) *Gegeben sei ein Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ und eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b, deren Mittelpunkt die Koordinaten $M(c; d)$ hat und deren Hauptachse parallel zur x-Achse liegt. Geben Sie eine Gleichung für diese Hyperbel im Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ an!*

(15) *Gegeben sei ein Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ und eine Parabel mit dem Halbparameter p, deren Scheitel im Punkte $S_0(c; d)$ liegt. Geben Sie je eine Gleichung für die Parabeln an,*
a) *deren Achsen zur x-Achse parallel sind,*
b) *deren Achsen zur y-Achse parallel sind!*

Aufgaben b 32 bis 35

B

12 Aufstellen von Kegelschnittsgleichungen nach vorgegebenen Werten

Von einem Kegelschnitt sei bekannt, daß seine Hauptachse bzw. Achse parallel zur x-Achse des vorgegebenen Koordinatensystems $\{O; i, j\}$ verläuft und welche Lage sein Mittelpunkt $M(c; d)$ bzw. Scheitel $S_0(c; d)$ in diesem Koordinatensystem hat. Ist dann die Länge seiner Achsen a und b bzw. sein Brennpunkt $F\left(c \pm \frac{p}{2}; d\right)$ gegeben, so kann man nach den bisherigen Ergebnissen sofort eine Gleichung für diesen Kegelschnitt aufstellen:

	Ellipse	Hyperbel
$M = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$M(c; d)$	$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$

	Parabel
$S_0 = 0$	$y^2 = 2px$
$S_0(c; d)$	$(y-d)^2 = 2p(x-c)$

Häufig tritt jedoch die Aufgabenstellung auf, daß für einen Kegelschnitt der oben angegebenen Lage eine Gleichung aufgestellt werden soll, ohne daß a, b bzw. p gegeben sind und von dem lediglich bekannt ist, daß er durch einige Punkte der betrachteten Ebene geht.
Für die Parabel genügt es zum Aufstellen ihrer Scheitelgleichung, die Lage ihres Scheitels und einen von S_0 verschiedenen Punkt $P_1(x_1; y_1)$ der Parabel zu kennen. Aus $y_1^2 = 2px_1$ bzw. $(y_1 - d)^2 = 2p(x_1 - c)$ kann der Parameter $2p$ der gesuchten Parabel eindeutig bestimmt werden:

$$2p = \frac{y_1^2}{x_1} \quad \text{bzw.} \quad 2p = \frac{(y_1 - d)^2}{x_1 - c},$$

und die Gleichung der betrachteten Parabel lautet

$$y^2 = \frac{y_1^2}{x_1} x \quad \text{bzw.} \quad (y-d)^2 = \frac{(y_1-d)^2}{x_1-c}(x-c).$$

Im Falle der Ellipse benötigt man zum Errechnen von a und b zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ der Ellipse, die jedoch nicht symmetrisch bezüglich der Achsen gelegen sein dürfen. Das zeigen die folgenden Überlegungen, in denen wir uns der Einfachheit wegen auf den Fall $M = O$ beschränken.
Da P_1 und P_2 Ellipsenpunkte sind, gelten für sie die Beziehungen

$$(16) \quad \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} = 1, \quad (i = 1{,}2),$$

in denen a und b positive, uns bisher unbekannte Zahlen sind. Wir multiplizieren die erste dieser Gleichungen mit y_2^2 bzw. x_2^2, die zweite mit $-y_1^2$ bzw. $-x_1^2$ und erhalten durch paarweise Addition der auf diese Weise erzeugten Gleichungen die Beziehungen

$$(17) \quad \frac{x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2}{a^2} = y_2^2 - y_1^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{y_1^2 x_2^2 - y_2^2 x_1^2}{b^2} = x_2^2 - x_1^2.$$

a) Ist für P_1 und P_2 $\boxed{y_1^2 \neq y_2^2}$, dann folgt nach (16)

$$(18) \quad x_1^2 - x_2^2 = \frac{a^2}{b^2}(y_2^2 - y_1^2) \neq 0$$

und damit kann a und b aus (17) errechnet werden:

$$(19) \quad a^2 = \frac{x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2}{y_2^2 - y_1^2}, \quad b^2 = \frac{-(x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2)}{x_2^2 - x_1^2}.$$

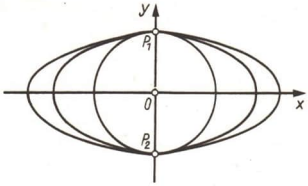
Diese Werte in die Beziehung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eingesetzt, ergeben eine Gleichung der betrachteten Ellipse.
b) Ist für P_1 und P_2 $\boxed{y_1^2 = y_2^2}$, dann ist nach (16) auch $x_1^2 = x_2^2$, und die beiden Gleichungen (16) sind miteinander identisch. Für Ellipsenpunkte, die bezüglich der Koordinatenachsen bzw. des Ursprungs symmetrisch zueinander liegen und für die damit $|x_1| = |x_2|$, $|y_1| = |y_2|$ bzw. $x_1^2 = x_2^2$ und $y_1^2 = y_2^2$ gilt, ist folglich die durch sie hindurchgehende Ellipse **nicht** eindeutig bestimmt. Durch diese beiden Punkte gehen alle Ellipsen in achsenparalleler Lage mit $M = O$, für deren Halbachsen die Beziehung

$$(20) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$

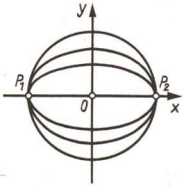
gilt.
Liegt P_1 und damit auch P_2 auf einer der Koordinatenachsen, dann ist entweder $x_1^2 = x_2^2 = 0$ und nach (20_2) $y_1^2 = b^2$; a kann jeden beliebigen Wert annehmen. Oder es ist $y_1^2 = y_2^2 = 0$ und nach (20_2) $x_1^2 = a^2$; b kann jeden beliebigen Wert annehmen. Durch P_1 und P_2 gehen in beiden Fällen unendlich viele Ellipsen der geforderten Lage (Bilder B 19 und 20).
Liegen P_1 und P_2 nicht auf den Koordinatenachsen, dann ist (20_2) der Beziehung

$$(21) \quad a^2 = \frac{b^2 x_1^2}{b^2 - y_1^2} \quad \text{bzw.} \quad b^2 = \frac{a^2 y_1^2}{a^2 - x_1^2}$$

äquivalent. Durch P_1 und P_2 gehen dann alle Ellipsen, denen z. B. für ein beliebig

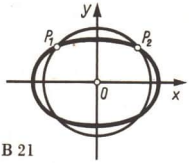


B 19



B 20

gewähltes b, $b > |y_1|$, das nach (21_1) berechnete a entspricht, darunter der Kreis mit dem Radius $r = a = b = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ (Bild B 21).



B 21

Bemerkung: Aus den Beziehungen (19) können nicht nur die Werte für a und b einer **gegebenen** Ellipse berechnet werden, von der uns zwei nicht symmetrisch bezüglich der Achsen gelegene Punkte bekannt sind. Sie ermöglichen auch die Entscheidung, ob durch zwei willkürlich vorgegebene Punkte der betrachteten Ebene eine Ellipse der angegebenen Lage geht. So geht beispielsweise durch

a) $P_1(1;1)$, $P_2(2;5)$ wegen $a^2 = \dfrac{1 \cdot 25 - 4 \cdot 1}{25 - 1} > 0$, $b^2 = \dfrac{-(1 \cdot 25 - 4 \cdot 1)}{4 - 1} < 0$ keine

und durch

b) $P_1(1;1)$, $P_2(2;0{,}5)$ wegen $a^2 = \dfrac{1 \cdot 0{,}25 - 4 \cdot 1}{0{,}25 - 1} > 0$, $b^2 = \dfrac{-(1 \cdot 0{,}25 - 4 \cdot 1)}{4 - 1} > 0$

eine Ellipse der angegebenen Lage.

2 Gegeben ist die Ellipsengleichung $x^2 + 10x + 4y^2 - 8y + 25 = 0$.

Gesucht sind die Koordinaten des Mittelpunktes der Ellipse, die Längen der Achsen a und b, die lineare Exzentrizität sowie die Koordinaten der Brennpunkte F_1 und F_2.

Wir formen die gegebene Gleichung um:

$$(x + 5)^2 + 4(y - 1)^2 + 25 = 25 + 4$$

$$\frac{(x + 5)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{1} = 1$$

Ergebnis: Die gegebene Gleichung ist eine Gleichung der Ellipse mit dem Mittelpunkt $M(-5;1)$, den Achsenlängen $a = 2$, $b = 1$, der linearen Exzentrizität $e = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ und den Brennpunkten $F_1(-\sqrt{3};0)$ und $F_2(\sqrt{3};0)$.

Aufgaben b 36 bis 41

13 Kegelschnitt und Gerade

Ebenso wie im Falle des Kreises können wir für die Kegelschnitte die gegenseitige Lage von Kegelschnitt und Gerade untersuchen. Wir gehen dabei davon aus, daß uns der jeweilige Kegelschnitt durch seine Mittelpunkts- bzw. Scheitelgleichung

(22) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bzw. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ bzw. $y^2 = 2px$

gegeben sei und betrachten zunächst alle die Geraden, deren Gleichung in Normalform[1]

(23) $y = mx + n$

gegeben werden kann.

Ellipse und Gerade. Haben die Ellipse mit der Gleichung (22_1) und die Gerade (23) einen gemeinsamen Punkt S, dann müssen die Koordinaten x_S und y_S dieses ihres **Schnittpunktes** beiden Gleichungen genügen, d. h., es muß gelten:

(24) $\frac{x_S^2}{a^2} + \frac{y_S^2}{b^2} = 1$ und $y_S = mx_S + n$.

Wir setzen nun y_S aus (24_2) in (24_1) ein, formen die entstandene Gleichung um zu

$$b^2x_S^2 + a^2(mx_S + n)^2 = a^2b^2 \quad \text{bzw.}$$

(25) $x_S^2(b^2 + a^2m^2) + 2x_Sa^2mn = a^2(b^2 - n^2)$

und lösen diese für x_S quadratische Gleichung:

(26) $(x_S)_{1,2} = \frac{-a^2mn \pm \sqrt{a^2[(b^2 - n^2)(b^2 + a^2m^2) + a^2m^2n^2]}}{b^2 + a^2m^2}$

In Abhängigkeit davon, ob in (26) die Diskriminante

(27) $D = a^2[(b^2 - n^2)(b^2 + a^2m^2) + a^2m^2n^2] = a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - n^2)$

positiv, Null oder negativ ist, hat (25) zwei verschiedene, zwei zusammenfallende oder keine reellen Lösungen. Berechnet man in den ersten beiden Fällen aus (24_2) noch die den gefundenen x_S-Werten entsprechenden y_S-Werte, dann erhält man folgendes Ergebnis:

a) Ist für die Ellipse (22_1) und die Gerade (23) $b^2 + a^2m^2 - n^2 > 0$, dann haben die beiden Kurven zwei verschiedene Punkte $S_1(x_{S_1}; y_{S_1})$ und $S_2(x_{S_2}; y_{S_2})$ miteinander gemeinsam. Die Gerade (23) ist **Sekante** der Ellipse.

b) Ist für die Ellipse (22_1) und die Gerade (23) $b^2 + a^2m^2 - n^2 = 0$, dann haben die beiden Kurven genau einen gemeinsamen Punkt. Die Gerade (23) ist **Tangente** an die Ellipse in diesem Punkt.

c) Ist für die Ellipse (22_1) und die Gerade (23) $b^2 + a^2m^2 - n^2 < 0$, dann haben die beiden Kurven keinen Punkt miteinander gemeinsam.

Für die durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegebene Ellipse ist

(28) $\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$

eine Gleichung der Tangente an die Ellipse im Ellipsenpunkt $P_0(x_0; y_0)$. Man leitet sie aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse mit Hilfe der Differentialrechnung her.

(16) *Wie lauten die Gleichungen der Scheiteltangenten? Können sie aus der Gleichung (28) gewonnen werden?*

Aufgaben b 42 bis 44

[1] Um Verwechslungen mit der kleinen Halbachse b von Ellipse und Hyperbel zu vermeiden, bezeichnen wir das absolute Glied in der Normalform der Geradengleichung hier mit n.

Mit Hilfe der bisher angestellten Überlegungen können wir für eine gegebene Ellipse und eine gegebene Gerade ihre gegenseitige Lage feststellen und Gleichungen von Tangenten an Ellipsen in vorgegebenen Ellipsenpunkten aufstellen. Einige Beispiele sollen zeigen, daß mit diesen Kenntnissen auch andere Aufgabenstellungen gelöst werden können.

3 Gegeben sei eine Ellipse mit der Gleichung (22_1) und ein außerhalb der Ellipse gelegener Punkt $P_1(x_1; y_1)$. Gesucht wird eine Gleichung für eine durch P_1 gehende Tangente an die Ellipse.

Lösung: Gesucht wird eine Gerade g mit der Gleichung (23), für die folgendes gelten muß:

1. P_1 liegt auf g, d. h. es ist

(29) $y_1 = mx_1 + n$.

2. g ist Tangente an die Ellipse, was die Bedingung

(30) $b^2 + a^2m^2 - n^2 = 0$

für die Größen m und n nach sich zieht. Zur Berechnung von m und n setzen wir aus (29) $n = y_1 - mx_1$ in (30) ein und erhalten für m die quadratische Gleichung

$$b^2 + a^2m^2 - (y_1 - mx_1)^2 = 0 \quad \text{bzw.}$$

(31) $m^2(a^2 - x_1^2) + 2mx_1y_1 + b^2 - y_1^2 = 0$.

Für $x_1^2 \neq a^2$ hat (31) zwei Lösungen

$$m_{1,2} = -\frac{x_1y_1}{a^2 - x_1^2} \pm \frac{1}{a^2 - x_1^2} \cdot \sqrt{(y_1^2 - b^2)(a^2 - x_1^2) + x_1^2y_1^2} =$$

$$= \frac{-x_1y_1 \pm \sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}}{a^2 - x_1^2},$$

da für Punkte außerhalb der Ellipse die Diskriminante der Wurzel stets positiv ist. Sind n_1 und n_2 die durch Einsetzen von m_1 bzw. m_2 in (29) errechneten Werte für n, dann haben wir für $x_1^2 \neq a^2$ in

$$y = m_1x + n_1 \quad \text{und} \quad y = m_2x + n_2$$

die zwei Lösungen der Aufgabe gefunden.

Ist $x_1 = +a$ oder $x_1 = -a$ und damit $x_1^2 = a^2$, dann geht (31) in die Gleichung $2mx_1y_1 + b^2 - y_1^2 = 0$ mit der Lösung $m = \dfrac{y_1^2 - b^2}{2x_1y_1}$ über. Nach diesem m berechnet man aus (29) das entsprechende n und erhält durch Einsetzen dieser Werte in $y = mx + n$ eine Gleichung **einer** Tangente durch P_1 an die Ellipse. Jedoch gibt es auch in diesem Falle eine zweite Tangente durch P_1 an die Ellipse. Man findet sie, indem man den Sonderfall der Punktrichtungsgleichung untersucht. Es ist die Scheiteltangente mit der Gleichung $x = x_1$.

Bemerkung: Für die gesuchten Tangenten durch P_1 an die P_1 nicht enthaltende Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ kann man auch Gleichungen finden, ohne die Beziehung (30) zu verwenden. Da P_1 Punkt der Tangenten an die gegebene Ellipse ist, muß für seine Koordinaten die Gleichung

(32) $\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1$

erfüllt sein, wobei x_0 und y_0 die Koordinaten der Berührungspunkte der gesuchten Tangenten durch P_1 an den Kegelschnitt sind. Sie sind uns nicht gegeben, lassen sich aber aus der Bedingung $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ und (32) errechnen. Mit Hilfe der auf diesem Wege bestimmten Berührungspunkte $(P_0)_1$ und $(P_0)_2$ und der Tangentengleichung (28) können dann die gesuchten Tangentengleichungen aufgestellt werden. Dazu ein Beispiel.

4 Gegeben sei die Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ und der Punkt $P_1(4; 6)$. Gesucht sind je eine Gleichung für die Tangenten durch P_1 an die Ellipse.
Nach (32) gilt

$$\frac{4x_0}{16} + \frac{6y_0}{12} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{x_0}{4} + \frac{y_0}{2} = 1 \quad \text{oder} \quad x_0 = 4 - 2y_0 .$$

Ferner ist

$$\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{12} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{(4 - 2y_0)^2}{16} + \frac{y_0^2}{12} = 1 \quad \text{oder} \quad y_0^2 - 3y_0 = 0 ,$$

was $(y_0)_1 = 0$ und $(y_0)_2 = 3$ nach sich zieht. Die entsprechenden Abszissenwerte sind $(x_0)_1 = 4$ und $(x_0)_2 = -2$ und die gesuchten Tangentengleichungen

$$\frac{4x}{16} + \frac{0 \cdot y}{12} = 1 \quad \text{bzw.} \quad x = 4 \quad \text{und}$$

$$\frac{-2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{1}{2}x + 4 .$$

Aufgaben b 45 und 46

15

5 Gegeben sei der Anstieg m einer Geraden und die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Zu klären ist, ob es an diese Ellipse Tangenten mit dem Anstieg m gibt.
Ist die Gerade mit der Gleichung $y = mx + n$ Tangente an die gegebene Ellipse, dann muß für sie die Bedingung (30) gelten. Diese stellt eine quadratische Gleichung für n dar, die stets die zwei reellen Lösungen $n_1 = \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ und $n_2 = -\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ hat. Für jedes m gibt es also zwei Tangenten an eine gegebene Ellipse, die m zum Anstieg haben. Ihre Gleichungen lauten $y = mx + n_1$ und $y = mx + n_2$.

(17) *Ermitteln Sie die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Anstieg m an die Ellipse (22_1), ohne dabei die Beziehung (30) zu verwenden! Stellen Sie danach je eine Gleichung für diese Tangenten auf! (Hinweis: Gehen Sie von der Tangentengleichung (28) aus!)*

Aufgaben b 47 bis 49

16 Hyperbel und Gerade

Wie im Falle der Ellipse ermittelt man die Anzahl und die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Hyperbel (22_2) und der Geraden (23), indem man die Lösungen des Gleichungssystems (22_2) und (23) bestimmt.

(18) *Führen Sie diese Berechnungen selbständig aus! Beachten Sie dabei den Fall* $m = \pm \frac{b}{a}$ *! Wieviel Punkte haben Hyperbel und Gerade in diesem Fall gemeinsam?*

Für die Hyperbel spielen die Geraden mit der Gleichung (23) mit $m = \pm \frac{b}{a}$ und $n = 0$ eine besondere Rolle. Berechnet man die Koordinaten der Schnittpunkte S_i der Hyperbel (22_2) mit einer durch $y = mx$ gegebenen Geraden, dann findet man für sie

B

$$(33) \quad x_{S_1} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \quad \text{und} \quad x_{S_2} = -\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}},$$

$$(34) \quad y_{S_1} = \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \quad \text{und} \quad y_{S_2} = -\frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}.$$

Es existieren demnach zwei Schnittpunkte für $b^2 - a^2m^2 > 0$, d. h. für alle m mit $|m| < \frac{b}{a}$. Es gibt keinen Schnittpunkt für $b^2 - a^2m^2 < 0$ bzw. $|m| > \frac{b}{a}$. Für $m = \pm \frac{b}{a}$ sind die Ausdrücke (33) und (34) nicht definiert, und Hyperbel und Gerade haben auch in diesem Falle keinen gemeinsamen Punkt. Die Geraden mit der Gleichung $y = \frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}x$ sind **Asymptoten** an die Hyperbel.

(19) *Wiederholen Sie, was Sie über den Begriff „Asymptote" aus der Differential- und Integralrechnung wissen!*
Überzeugen Sie sich davon, daß die genannten Geraden Asymptoten an die Hyperbel (22_2) sind, indem Sie das Verhalten der Schnittpunkte S_1 und S_2 für $|m| < \frac{b}{a}$ *und* $m \to \frac{b}{a}$ *bzw.* $m \to -\frac{b}{a}$ *untersuchen!*

(20) *Zeichnen Sie nach Wahl eines Koordinatensystems eine Hyperbel mit der Gleichung (22_2), ihre Asymptoten und den Möglichkeiten der gegenseitigen Lage entsprechend je eine die Hyperbel schneidende bzw. nicht schneidende Gerade! Wieviel Fälle sind dabei zu berücksichtigen?*

Aufgaben b 50 bis 53

17 Parabel und Gerade

(21) *Die Untersuchung der gegenseitigen Lage von Parabel und Gerade unterscheidet sich nicht wesentlich von den entsprechenden Überlegungen für Ellipse und Hyperbel. Führen Sie sie deshalb selbständig aus! (Beachten Sie dabei den Fall* $m = 0$*!)*

Wie für die Ellipse kann auch für Hyperbel und Parabel eine allgemeine Tangentengleichung aufgestellt werden.

Für die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ lautet die Tangentengleichung

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

und für die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ lautet die Tangentengleichung

$$\boxed{yy_0 = p\,(x + x_0)}$$

Aufgaben b 54 bis 59

B

18 Einige Eigenschaften der Kegelschnitte

(22) *Welche Sätze über Eigenschaften des Kreises kennen Sie?*

Ebenso wie der Kreis haben die Kegelschnitte eine ganze Reihe bemerkenswerter Eigenschaften. Dafür seien hier einige Beispiele angeführt.
Für jede ebene Kurve bezeichnet man die Gerade, die im Berührungspunkt der Tangente senkrecht auf dieser steht, als die **Normale** der Kurve in dem betreffenden Punkt. Für die Ellipse gilt

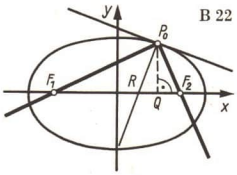
13 **SATZ: Die Normale einer Ellipse im Ellipsenpunkt P_0 halbiert den Winkel, den die Strahlen P_0F_1 und P_0F_2 miteinander bilden, und die Tangente an die Ellipse im Punkte P_0 den dazugehörigen Nebenwinkel.**

Beweis: Für $y_0 = 0$ ist die Behauptung des Satzes wahr; für $x_0 = 0$ ist P_0 Nebenscheitel der Ellipse, die y-Achse Normale der Ellipse in P_0, und der Satz gilt. Wir beweisen nun den Satz für $x_0 \neq 0$ und $y_0 \neq 0$.
Zum Beweis des ersten Teiles des Satzes stellen wir zunächst nach der Tangentengleichung (33) die Gleichung der Normale der Ellipse (25_1) durch P_0 auf:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{m_{\text{Tangente}}} = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0} \quad \text{bzw.} \quad y - y_0 = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)\,.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung berechnen wir die Koordinaten des Schnittpunktes R (Bild B 22) der Normale mit der x-Achse:

$$R\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}x_0;\ 0\right) \quad \text{bzw.} \quad R\left(\frac{e^2}{a^2}x_0;\ 0\right).$$



B 22

Wegen

$$\overrightarrow{P_0F_1}[-(e + x_0);\ -y_0],$$

$$\overrightarrow{P_0R}\left(-\frac{b^2}{a^2}x_0;\ -y_0\right),$$

$$\overrightarrow{P_0F_2}(e - x_0;\ -y_0)$$

gilt

$$\cos \sphericalangle (\overrightarrow{P_0F_1}, \overrightarrow{P_0R}) = \frac{\overrightarrow{P_0F_1} \cdot \overrightarrow{P_0R}}{|\overrightarrow{P_0F_1}||\overrightarrow{P_0R}|} = \frac{\frac{b^2}{a^2}x_0(e + x_0) + y_0^2}{\sqrt{(e + x_0)^2 + y_0^2}\sqrt{\frac{b^4}{a^4}x_0^2 + y_0^2}},$$

$$\cos \sphericalangle (\overrightarrow{P_0R}, \overrightarrow{P_0F_2}) = \frac{\overrightarrow{P_0R} \cdot \overrightarrow{P_0F_2}}{|\overrightarrow{P_0R}||\overrightarrow{P_0F_2}|} = \frac{-\frac{b^2}{a^2}x_0(e - x_0) + y_0^2}{\sqrt{\frac{b^4}{a^4}x_0^2 + y_0^2}\sqrt{(e - x_0)^2 + y_0^2}}.$$

In dem Fall, daß beide Winkel spitz und damit ihre Kosinuswerte positiv sind, zeigen wir nun, daß $\cos \sphericalangle (\overrightarrow{P_0F_1}, \overrightarrow{P_0R}) = \cos \sphericalangle (\overrightarrow{P_0R}, \overrightarrow{P_0F_2})$ und damit auch $\sphericalangle(\overrightarrow{P_0F_1}, \overrightarrow{P_0R}) = \sphericalangle (\overrightarrow{P_0R}, \overrightarrow{P_0F_2})$ ist. Wir setzen

$$(35) \qquad \frac{\frac{b^2}{a^2}x_0(e + x_0) + y_0^2}{\sqrt{(e + x_0)^2 + y_0^2}\sqrt{\frac{b^4}{a^4}x_0^2 + y_0^2}} = \frac{-\frac{b^2}{a^2}x_0(e - x_0) + y_0^2}{\sqrt{\frac{b^4}{a^4}x_0^2 + y_0^2}\sqrt{(e - x_0)^2 + y_0^2}}$$

und formen diesen Ausdruck um, indem wir ihn quadrieren und danach vereinfachen:

$$(36) \qquad \left[\frac{b^2}{a^2}x_0(e + x_0) + y_0^2\right]^2 [(e - x_0)^2 + y_0^2] = \left[-\frac{b^2}{a^2}x_0(e - x_0) + y_0^2\right]^2 [(e + x_0)^2 + y_0^2],$$

$$\frac{b^4}{a^4}x_0^2y_0^2[(e + x_0)^2 - (e - x_0)^2] +$$
$$+ 2\frac{b^2}{a^2}x_0y_0^2[(e + x_0)(e - x_0)^2 + (e - x_0)(e + x_0)^2 + y_0^2(e + x_0) + y_0^2(e - x_0)]$$
$$+ y_0^4[(e - x_0)^2 - (e + x_0)^2] = 0.$$

Wir dividieren durch $4ex_0y_0^2$:

$$\frac{b^4}{a^4}x_0^2y_0^2 \cdot 4ex_0 + 2\frac{b^2}{a^2}x_0y_0^2[(e^2 - x_0^2) \cdot 2e + 2y_0^2e] + y_0^4(-4ex_0) = 0,$$

$$b^4x_0^2 + b^2a^2(e^2 - x_0^2 + y_0^2) - a^4y_0^2 = 0.$$

Da P_0 Punkt der Ellipse ist, können wir $a^2y_0^2 = a^2b^2 - b^2x_0^2$ setzen:

$$b^4x_0^2 + b^2a^2(e^2 - x_0^2 + y_0^2) - a^4b^2 + a^2b^2x_0^2 = 0, \quad |: b^2;\ e^2 = a^2 - b^2$$

und erhalten die Identität

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Da die Schlußkette dank der getroffenen Annahme auch in der umgekehrten Reihenfolge durchlaufen werden kann (wir hatten quadriert!), ist die Gültigkeit von (35) für diesen Fall bewiesen.

In jedem Fall gilt jedoch (36). Lassen wir nun die Annahme, daß beide Winkel spitz sind, fallen, dann ergibt sich aus (36) als zweite Möglichkeit, daß $\cos \sphericalangle (\overrightarrow{P_0F_1}, \overrightarrow{P_0R}) = -\cos \sphericalangle (\overrightarrow{P_0R}, \overrightarrow{P_0F_2})$ ist, was nach sich zieht, daß sich die

beiden Winkel zu 180° ergänzen. Das ist aber nicht möglich, da R wegen $\left|\frac{e^2}{a^2}x_0\right| < \frac{e^2}{a} < e$ stets zwischen F_1 und F_2 liegt. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

(23) *Beweisen Sie den zweiten Teil durch elementargeometrische Überlegungen!*

(24) *Welcher Satz über den Kreis entspricht dem soeben bewiesenen für die Ellipse?*

Aufgaben b 60 bis 64

19

Ein weiteres Beispiel ist folgender Satz für die Parabel:

14 **SATZ: Schneiden zwei Parabeln, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen, einander in vier Punkten, dann liegen diese vier Punkte auf demselben Kreis.**

Beweis: Wählt man das Koordinatensystem so, daß die Achsen der Parabeln auf den Koordinatenachsen liegen, dann haben die Parabeln die Gleichungen

$$y^2 = 2p(x - c) \quad \text{bzw.} \quad x^2 = 2q(y - d)\,.$$

Weil jeder gemeinsame Punkt beider Parabeln beiden Gleichungen und damit auch ihrer Summe genügen muß, gilt für diese Punkte die Beziehung

$$(37) \quad x^2 + y^2 - 2p(x - c) - 2q(y - d) = 0\,.$$

Da (37) die Gleichung eines Kreises ist, ist der Satz bewiesen.

Aufgaben b 65 bis 69

20 Eine gemeinsame Ortsdefinition für Ellipse, Parabel und Hyperbel

(25) *Vergleichen Sie die Ortsdefinitionen der Kegelschnitte miteinander! Wie wurden sie hergeleitet?*

Auch die vom Kreis verschiedenen Ellipsen und die Hyperbeln können mit Hilfe von „Leitlinien" definiert werden.
Es sei eine vom Kreis verschiedene Ellipse (Hyperbel) als Schnitt eines Kegels und einer Ebene γ gegeben[1]. Wir bezeichnen die Ebenen, in der die Berührungskreise der Dandelinschen Kugeln mit dem Kegel liegen, entsprechend mit γ_1 und γ_2 und die Schnittgerade von γ_1 bzw. γ_2 mit γ mit l_1 bzw. l_2. Diese Geraden nennen wir die **Leitlinien** der Ellipse (Hyperbel). Für die Parabel haben wir gefunden, daß für jeden ihrer Punkte P, seine Projektion L auf die Leitlinie der Parabel und den

[1] In der Theorie der Kegelschnitte spielen ε und e eine bestimmte Rolle. Deshalb weichen wir in den folgenden Lerneinheiten von der in der darstellenden Geometrie benutzten Bezeichnungsweise (ε für eine Ebene, e_i für ihre Projektionen) ab.

Brennpunkt F die Beziehung $\overline{PF} = \overline{PL}$ bzw. $\frac{\overline{PF}}{\overline{PL}} = 1$ gilt. Bezeichnen wir auch im Falle der Ellipse (Hyperbel) mit L_i die Projektion des Ellipsen- (Hyperbel-) Punktes P auf l_i $(i = 1{,}2)$, dann gilt:

15 **SATZ: Für jeden Punkt P einer vom Kreis verschiedenen Ellipse (Hyperbel), den der Dandelinschen Kugel $K(M_i, r_i)$ entsprechenden Brennpunkt F_i und die Projektion L_i von P auf die $K(M_i, r_i)$ entsprechende Leitlinie l_i ist**

$$\frac{\overline{PF_i}}{\overline{PL_i}} = \varepsilon \quad (i = 1{,}2), \tag{38}$$

mit $\varepsilon = \text{const.}$, wobei für die Ellipse $0 < \varepsilon < 1$ (für die Hyperbel $\varepsilon > 1$) gilt.

B

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall der Ellipse für $i = 1$ und behalten dabei die in den Lerneinheiten 3 und 5 gewählten Bezeichnungen α, β und A_1 bei. Die Aufrißebene legen wir so, daß sie die Achse des Kegels und F_1 enthält, bezeichnen mit P'' und L_1'' die Aufrißbilder von P und L_1; mit S_1 den bei L_1 gelegenen Hauptscheitel der Ellipse und mit Q und R die zwei Punkte der durch S_1 gehenden Mantellinie des Kegels, die auf dem Berührungskreis von $K(M_1; r_1)$ mit dem Kegel bzw. auf dem durch P gehenden Grundkreis des Kegels liegen (Bild B 23).
Nun betrachten wir die Dreiecke $\triangle RP''S_1$ und $\triangle QL_1''S_1$. Da sie ähnlich sind (warum ?), gilt die Beziehung

$$\overline{QR} : \overline{L_1''P''} = \overline{S_1R} : \overline{S_1P''},$$

oder, nach dem Sinussatz,

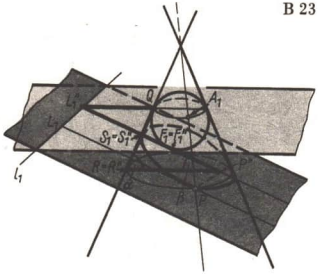
$$\overline{QR} : \overline{L_1''P''} = \sin\beta : \sin\alpha .$$

In ihr ist $\overline{L_1''P''} = \overline{L_1P}$ und $\overline{QR} = \overline{A_1P} = \overline{PF_1}$, weswegen für sie

$$\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL_1}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \tag{39}$$

geschrieben werden kann. Damit ist der Satz für die Ellipse bei $i = 1$ bereits bewiesen, weil α und β konstante Winkel sind, und wegen $0 < \beta < \alpha$ stets $0 < \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < 1$ ist. Bei $i = 2$ verlaufen die Überlegungen völlig gleichartig.

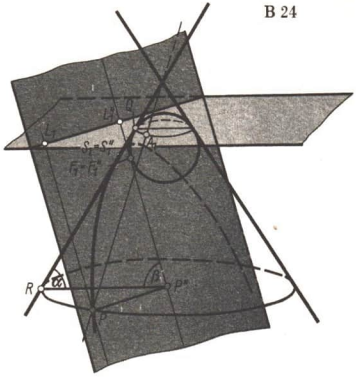
B 23



Im Falle der Hyperbel kann analog vorgegangen werden, wie das Bild B 24 verdeutlichen soll. Dabei ist jedoch in (39) $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} > 1$, da für die Hyperbel stets $\alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$ ist.
Interessant ist, daß auch für diesen Satz seine Umkehrung gilt:

16 **SATZ: Für jede Gerade l, jeden nicht auf ihr gelegenen Punkt F und jede positive reelle Zahl ε existiert ein Kegelschnitt, für dessen Punkte P das Verhältnis $\frac{\overline{PF}}{\overline{PL}}$ des Abstandes von**

P zu F zu dem Abstand $\overline{PL}$ von P zu l gleich ε ist. Dabei ist dieser Kegelschnitt eine Ellipse für $0 < \varepsilon < 1$, eine Parabel für $\varepsilon = 1$ und eine Hyperbel für $\varepsilon > 1$.



Das berechtigt dazu, folgende gemeinsame Definition der drei Kegelschnitte anzugeben:

17 **DEFINITION: Die Menge aller der Punkte P einer Ebene, für die das Verhältnis $\frac{\overline{PF}}{\overline{PL}}$ des Abstandes $\overline{PF}$ von P zu einem festen Punkt F und des Abstandes $\overline{PL}$ von P zu einer festen Geraden l gleich einer konstanten positiven Zahl ε ist, nennt man für $0 < \varepsilon < 1$ *Ellipse*, für $\varepsilon = 1$ *Parabel* und für $\varepsilon > 1$ *Hyperbel*. F heißt der *Brennpunkt* der entsprechenden Kurve und l ihre *Leitlinie*. Die Zahl ε nennt man die *numerische Exzentrizität* der Ellipse, Parabel bzw. Hyperbel.**

Daß bei der zuletzt angeführten Definition der Ellipse Kreise nicht als Ellipsen aufgefaßt werden können, liegt daran, daß für den Kreis als Schnittfigur von Kegel und Ebene die Kreisebene und die Ebene der Berührungskreise der entsprechenden Dandelinschen Kugeln sich nicht schneiden und folglich für den Kreis keine Leitlinie existiert.

26 *Untersuchen Sie mit Hilfe der Beziehung $\frac{\overline{PF}}{\overline{PL}} = \varepsilon = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ das Verhalten der Leitlinien zu dem betreffenden Kegelschnitt für $0 < \varepsilon < 1$ und $\varepsilon \to 0$ bzw. $\varepsilon \to 1$ sowie für $\varepsilon > 1$ und $\varepsilon \to 1$ bzw. $\varepsilon \to \infty$! (Hinweis: Wählen Sie zu diesem Zweck $P = S_1$!)*

27 *Für Ellipse, Parabel und Hyperbel haben Sie nun unterschiedliche Definitionen kennengelernt. Welche Überlegungen muß man anstellen, um sich davon zu überzeugen, daß zwei verschiedene Definitionen z. B. der Ellipse ein und dieselbe „Kurvenart" definieren? Entwickeln Sie an einem Beispiel die dazu nötigen Gedankengänge, ohne Beweise anzuführen!*

Aufgabe b 70

21 Gemeinsame Scheitelgleichung der nicht entarteten Kegelschnitte

Für die Parabel ist uns ihre Scheitelgleichung bekannt: $y^2 = 2px$. Für Ellipse und Hyperbel können wir aus ihren Mittelpunktsgleichungen (22_1) und (22_2) eine Scheitelgleichung gewinnen. Zu diesem Zweck führen wir für die Ellipse die Transformation $x' = x + a$, $y' = y$ des Koordinatensystems durch, die den Scheitel $S_1(-a; 0)$ zum Ursprung werden läßt und die Richtungen und Orientierungen der Achsen beibehält. Durch Einsetzen von $x = x' - a$ und $y = y'$ in die Mittelpunktsgleichung ergibt sich dann als Scheitelgleichung der Ellipse

(40) $$\frac{(x'-a)^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad \text{bzw.} \quad y'^2=2\,\frac{b^2}{a}\,x'-\frac{b^2}{a^2}\,x'^2\,.$$

Im Falle der Hyperbel bezeichnen wir mit S_1 den Scheitel $S_1(a;\,0)$. Die entsprechende Koordinatentransformation lautet dann $x'=x-a$, $y'=y$ und die Scheitelgleichung der Hyperbel

(41) $$\frac{(x'+a)^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad \text{bzw.} \quad y'^2=2\,\frac{b^2}{a}\,x'+\frac{b^2}{a^2}\,x'^2\,.$$

Wie a und b bzw. p für Ellipse, Hyperbel und Parabel können die in den Gleichungen (40) und (41) auftretenden Koeffizienten geometrisch interpretiert werden. Dazu gehen wir von dem soeben eingeführten Koordinatensystem aus und bezeichnen in ihm die Abszisse und Ordinate eines Punktes P wie üblich mit x und y, schreiben also für (40) und (41)

B

(42) $$y^2=2\,\frac{b^2}{a}\,x-\frac{b^2}{a^2}\,x^2,\; y^2=2\,\frac{b^2}{a}\,x+\frac{b^2}{a^2}\,x^2\,.$$

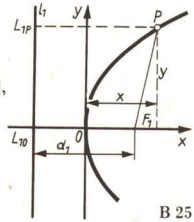
In diesem Koordinatensystem leiten wir die Scheitelgleichungen der betrachteten Kegelschnitte noch einmal her, dieses Mal gestützt auf ihre gemeinsame Ortsdefinition.
P sei ein beliebiger Punkt des betrachteten Kegelschnittes. Nach Definition ist

(43) $$\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL_{1P}}}=\varepsilon, \text{ insbesondere } \frac{\overline{OF_1}}{\overline{OL_{10}}}=\varepsilon\,.$$

Ferner gelten die Beziehungen (Bild B 25)

(44) $$\overline{PF_1}=\sqrt{(x-\overline{OF_1})^2+y^2}\,,$$

(45) $$\overline{PL_{1P}}=\left|x+\overline{OL_{10}}\right|,\; \overline{OF_1}=\varepsilon\cdot\overline{OL_{10}}\;[\text{aus } (43_2)],$$
$$\overline{F_1L_{10}}=\overline{OL_{10}}+\overline{OF_1}=\overline{OL_{10}}+\varepsilon\overline{OL_{10}}=d_1\,,$$



B 25

wobei mit d_1 der Abstand des Brennpunktes F_1 von der Leitlinie l_1 bezeichnet ist.
Aus diesen Beziehungen ergibt sich

(46) $$\overline{OL_{10}}=\frac{d_1}{1+\varepsilon} \quad \text{und} \quad \overline{OF_1}=\frac{\varepsilon\,d_1}{1+\varepsilon}\,,$$

was, in (44) und (45) eingesetzt,

(47) $$\overline{PF_1}=\sqrt{\left(x-\frac{\varepsilon\,d_1}{1+\varepsilon}\right)^2+y^2} \quad \text{und} \quad \overline{PL_{1P}}=\left|x+\frac{d_1}{1+\varepsilon}\right|$$

nach sich zieht. Schließlich setzen wir (47) in (43) ein und formen die so erhaltene Beziehung um:

$$\sqrt{\left(x-\frac{\varepsilon\,d_1}{1+\varepsilon}\right)^2+y^2}=\varepsilon\left|x+\frac{d_1}{1+\varepsilon}\right|,$$
$$\left(x-\frac{\varepsilon\,d_1}{1+\varepsilon}\right)^2+y^2=\varepsilon^2\left(x+\frac{d_1}{1+\varepsilon}\right)^2,$$
$$x^2-\frac{2\varepsilon\,d_1}{1+\varepsilon}\,x+\frac{2\varepsilon d_1^{\,2}}{(1+\varepsilon)^2}+y^2=\varepsilon^2x^2+2\,\frac{\varepsilon^2 d_1}{1+\varepsilon}\,x+\frac{\varepsilon^2\,d_1^{\,2}}{(1+\varepsilon)^2}\,,$$

(48) $$y^2=2\varepsilon d_1x+(\varepsilon^2-1)x^2$$

Das ist eine andere Gestalt der Gleichungen (42) und $y^2 = 2px$. Es ist die **gemeinsame Scheitelgleichung** von Ellipse, Hyperbel und Parabel; sie hat für alle drei Kegelschnitte das gleiche Aussehen.
Durch Vergleich der Koeffizienten in (42) und (48) können wir ε und d_1 durch a und b ausdrücken. Es muß sein

$$\varepsilon\, d_1 = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon^2 - 1 = \begin{cases} -\dfrac{b^2}{a^2} & \text{für die Ellipse,} \\ \dfrac{b^2}{a^2} & \text{für die Hyperbel,} \end{cases}$$

und damit für beide Kurven

$$(49) \quad \varepsilon = \frac{e}{a}, \quad d_1 = \frac{b^2}{e}.$$

Für die Parabel ist $\varepsilon = 1$ und $d_1 = p$.

Aufgaben b 71 bis 74

B

(28) *Wegen der Symmetrie von Ellipse und Hyperbel liegt die Vermutung nahe, daß der Abstand d_2 von F_2 zu l_2 gleich d_1 ist. Beweisen Sie für die Ellipse, daß diese Vermutung richtig ist!*
(Hinweis: Drücken Sie d_2 ebenfalls durch a und b aus! Das können Sie mit geringem Rechenaufwand tun, indem Sie in den oben für S_1 durchgeführten Berechnungen mit Farbstift die Zeichenwechsel eintragen, die sich beim Ersetzen von S_1 durch S_2 ergeben.)

6 Für die Ellipse mit der Gleichung (22_1) ist je eine Gleichung für ihre Leitlinien aufzustellen.
Die Leitlinien verlaufen in dem zugrunde gelegten Koordinatensystem (Mittelpunktslage der Ellipse) senkrecht zur x-Achse und haben von der y-Achse den Abstand $e + d_l$. Ihre Gleichungen lauten folglich

$$x = \pm (e + d_l) = \pm\left(e + \frac{b^2}{e}\right) = \pm\frac{a^2}{e} = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

Gewöhnlich gibt man der Gleichung (48) noch eine etwas andere Gestalt. Nach der gemeinsamen Ortsdefinition der Kegelschnitte gilt für jeden Punkt Q mit den Koordinaten $Q(e; y_Q)$ bzw. $Q\left(\frac{p}{2}; y_Q\right)$ die Beziehung

$$\frac{\overline{QF_1}}{\overline{QL_1}_Q} = \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \frac{|y_Q|}{d_1} = \varepsilon,$$

aus der $y_Q = \pm\varepsilon d_1$ folgt.
Damit ist der Koeffizient $2\varepsilon d_1$ in (48) für alle drei Kegelschnitte die Länge der Sehne, die senkrecht zur Hauptachse bzw. Achse liegt und durch F_1 bzw. F_2 geht. Man bezeichnet ihn in Analogie zur Parabel als **Parameter** $2p$ und p als Halbparameter des Kegelschnittes. In dieser Bezeichnungsweise schreibt man für (48)

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Diese Formel sagt aus, daß für jeden Punkt $P(x; y)$ einer Parabel das Quadrat über der Ordinate flächengleich mit dem Rechteck ist, dessen Seiten die Länge $2p$ und $|x|$ haben. Für jeden Ellipsenpunkt ist das Quadrat über der Ordinate größer als dieses Rechteck und für jeden Hyperbelpunkt kleiner. Daher haben diese drei Kurven auch ihre Namen (Ellipse, griechisch *ἡ ἔλλειψις* — Mangel, Parabel, griechisch *ἡ παραβολή*—Gleichheit, Hyperbel, griechisch *ἡ ὑπερβολή*— Überschuß).

Aufgaben b 75 bis 79

B

Wie die Bahnen der Planeten, Kometen und Monde sind auch die Bahnen der künstlichen Himmelskörper Kegelschnitte. Stellt man sich die Erde als ideale Kugel vor, würde ein Körper, der von einem erhöhten Punkt aus horizontal mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $7{,}92\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} \approx 8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ gestartet wird, eine kreisförmige Umlaufbahn um die Erde annehmen, wenn nicht infolge der Luftreibung eine Abbremsung erfolgte. Die Kreisbahn wird durch das Zusammenwirken von Anfangsgeschwindigkeit, Massenträgheit und Fallbeschleunigung verursacht. Die Geschwindigkeit von $7{,}92\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ wird als erste astronautische Geschwindigkeit bezeichnet.
Wird eine höhere Anfangsgeschwindigkeit als $7{,}92\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ erzeugt, so bewegt sich der Satellit auf einer Ellipsenbahn. Die Ellipsenbahn wird um so gestreckter, je mehr die Anfangsgeschwindigkeit den Wert $7{,}92\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ übersteigt. Dabei fällt einer der beiden Brennpunkte der Ellipse mit dem Mittelpunkt der Erde zusammen. Wird bei der Erhöhung der Anfangsgeschwindigkeit der Wert $11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ erreicht, so bewegt sich der künstliche Himmelskörper auf einer Bahn, die die Gestalt einer Parabel hat. Diese Geschwindigkeit wird als zweite astronautische Geschwindigkeit bezeichnet. Wird dieser Wert der Anfangsgeschwindigkeit noch übertroffen, so bewegt sich der künstliche Himmelskörper auf einer Bahn, die einem Ast einer Hyperbel entspricht. Beide Bahnen führen den Körper von der Erde ohne Wiederkehr fort. Deshalb hat man der Geschwindigkeit $v_0 \geqq 11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ die Bezeichnung „Fluchtgeschwindigkeit" gegeben.
Geraten Kometen, Meteore oder künstliche Himmelskörper auf ihrem Flug in das Schwerefeld anderer Körper, so kann eine positive oder negative Beschleunigung auftreten und ein Wechsel des jeweiligen Intervalls

$v = 7{,}92\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$	(Kreis)
$7{,}92\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} < v < 11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$	(Ellipse)
$v = 11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$	(Parabel)
$v > 11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$	(Hyperbel)

und damit ein qualitativer Wechsel der Bahn auftreten.

C. Nichtrationale Funktionen

84 **Eigenschaften einiger nichtrationaler Funktionen**
Rationale und nichtrationale Funktionen (84) · Rationale Operationen mit Funktionen (86) · Zueinander inverse Funktionen (88) · Verkettung von Funktionen (89) · Wiederholung der Potenz- und Wurzelfunktionen (91) · Wiederholung der Winkelfunktionen (94) · Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen (95) · Wiederholung der Exponential- und Logarithmusfunktionen (97) · Die Zahl e (98) · Die natürlichen Logarithmen, Logarithmensysteme verschiedener Basen (101) · Anwendungen von Exponentialfunktionen (103)

105 **Wurzelgleichungen; goniometrische Gleichungen**
Wurzelgleichungen, die mit einmaligem Quadrieren zu lösen sind (105) · Wurzelgleichungen, die mehrmaliges Quadrieren erfordern (110) · Wurzelgleichungen mit Parametern (111) · Goniometrische Gleichungen (112) · Nullstellen und Unendlichkeitsstellen (120)

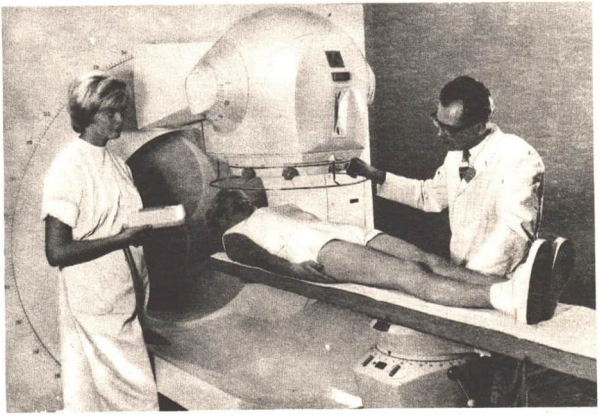
122 **Einige Grenzwerte nichtrationaler Funktionen**

Zu den Anwendungen der künstlichen Radioaktivität zählt die Bekämpfung von Geschwulstkrankheiten mittels des radioaktiven Kobalt-Isotops $^{60}_{27}\mathrm{Co}$.

Bei jedem radioaktiven Zerfall wird der Zusammenhang zwischen der Masse m strahlungsfähigen Materials und der Zeit t beschrieben durch eine nichtrationale Funktion $m = f(t)$, und zwar eine Exponentialfunktion:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Dabei ist $e = 2{,}71828\ldots$ eine Irrationalzahl und λ eine für die radioaktive Substanz charakteristische Größe. Für Kobalt 60 ist $\lambda \approx 4{,}2 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}^{-1}$.



1 Rationale und nichtrationale Funktionen

Wir wissen, daß Definitionsbereich und Wertevorrat von Funktionen beliebige Mengen sein können. Im Mathematikunterricht wollen wir uns allerdings weitgehend auf solche Funktionen beschränken, bei denen sowohl Definitionsbereich als auch Wertevorrat Mengen reeller Zahlen sind, also auf **reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen**. Diese Funktionen werden in zwei Klassen eingeteilt, in die **Klasse der rationalen Funktionen** und die **Klasse der nichtrationalen Funktionen.** Aus beiden Klassen haben wir in den vergangenen Schuljahren verschiedene Repräsentanten kennengelernt und rationale Funktionen auch bereits mit den Methoden der Differentialrechnung näher untersucht. Bevor Entsprechendes auch für einige nichtrationale Funktionen geschieht, sollen wesentliche Eigenschaften dieser Funktionen zusammengestellt werden. Dabei handelt es sich zum Teil um eine Wiederholung.
Da es unter den reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen nur rationale und nichtrationale gibt, ist der Begriff der nichtrationalen Funktion bereits durch die Definition der rationalen Funktion festgelegt.

C

1 **DEFINITION: Die Funktion f mit dem Definitionsbereich $\mathrm{Db}(f) = X$ ist eine *auf X rationale Funktion***
$=_{\mathrm{DF}}$ **Es gibt natürliche Zahlen n und m und reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n; b_0, b_1, \ldots, b_m$ mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ derart, daß für jedes $x \in X$ gilt**

$$(*) \qquad f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{m} b_\nu x^\nu}.$$

Gibt es für f eine Darstellung (*) mit $m = 0$, so bezeichnet man f als **auf X ganze rationale Funktion**, anderenfalls als **auf X gebrochen rationale Funktion.**

Enthält X ein Intervall, so gilt folgendes: Zwei auf X ganze rationale Funktionen $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ und $g(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\bar{n}} \bar{a}_\nu x^\nu$ sind genau dann gleich, wenn $n = \bar{n}$ und $a_\nu = \bar{a}_\nu$ für $0, 1, 2, \ldots, n$ gilt, sie also im **Grad** und in den **Koeffizienten** übereinstimmen. Die Darstellung (*) ist dann für auf X ganze rationale Funktionen eindeutig, wenn man außerdem $b_0 = 1$ fordert; man bezeichnet diese Darstellung als **normierte Darstellung von f.** Auch für auf X gebrochen rationale Funktionen gibt es eine eindeutig bestimmte normierte Darstellung, falls X ein Intervall enthält. Es ist diejenige Darstellung, bei der der Grad m des Nenners minimal und $b_m = 1$ ist.
Funktionen mit Gleichungen wie $y = \sqrt{x+5}$, $y = \sin x$, $y = 3^x$ haben keine Darstellung der Form (*), falls ihr Definitionsbereich ein Intervall enthält; es sind also nichtrationale Funktionen auf X. Auf den Beweis für die Eindeutigkeit der Darstellung müssen wir hier verzichten. Ein Beispiel soll jedoch zeigen, daß diese Eindeutigkeit nicht mehr besteht, wenn der Definitionsbereich aus isolierten Werten, insbesondere aus endlich vielen, besteht.

1 Die Funktion mit der Gleichung $y = x - 1$ und dem Definitionsbereich $\{1; 2; 3\}$ besteht aus den Wertepaaren $[1; 0]$, $[2; 1]$, $[3; 2]$. Dieselben Wertepaare werden aber auch von den Gleichungen $y = (x-2)^3 + 1 = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$, $y = (x-2)^5 + 1$ und noch unendlich vielen anderen geliefert.

1 *Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen rational auf den jeweils angegebenen Definitionsbereichen sind, und geben Sie gegebenenfalls die normierte Darstellung an!*

a) $f(x) = \frac{6x^3 + 14x^2}{4x^2}$ $Db(f) = (0; \infty)$ b) $f(x) = \frac{5x^2 + 5}{x^4 - 1}$; $x \in (-1; 1)$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ $Db(f) = R$ d) $f(x) = 2^x$; $x \in \{0; 1; 2\}$

e) $f(x) = 1 + \sin \pi x$; $x \in G$ f) $f(x) = |x|$; $x < 1$

Im allgemeinen ist es zweckmäßig (besonders für die Überlegungen der folgenden Lerneinheiten, aber auch in der Vergangenheit sind wir häufig schon so verfahren), generell folgende Verabredung zu treffen:

2 **Ist bei einer Funktionsgleichung von f kein ausdrücklicher Zusatz über den Definitionsbereich gemacht, so soll unter dem Definitionsbereich von f immer die Menge aller reellen Zahlen x verstanden werden, für die der Term $f(x)$ ebenfalls eine reelle Zahl liefert:**

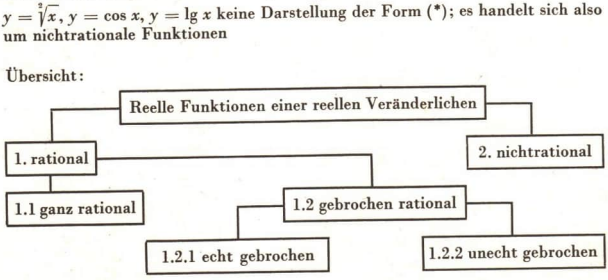
$$x_0 \in Db(f) \text{ genau dann, wenn } x_0 \in P \text{ und } f(x_0) \in P$$

Nur bei einer solchen Vereinbarung ist es z. B. sinnvoll zu sagen, der Definitionsbereich der Funktion $y = \sqrt{x}$ sei die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, oder die Aufgabe zu stellen, den Definitionsbereich einer Funktion zu ermitteln, von der nur die Gleichung bekannt ist. Denn an sich ist eine Funktion durch eine Gleichung allein nicht gegeben; die Angabe des Definitionsbereichs gehört dazu.

2 Es ist der Definitionsbereich der Funktion $y = \sqrt{\lg(x + 3)}$ zu ermitteln.
$\sqrt{\lg(x + 3)}$ liefert reelle Werte genau dann, wenn der Radikand nichtnegativ ist: $\lg(x + 3) \geqq 0$. Das ist genau dann erfüllt, wenn $x + 3 \geqq 1$, also $x \geqq -2$ ist.
Der Definitionsbereich von $y = \sqrt{\lg(x + 3)}$ ist $-2 \leqq x < \infty$.

Gibt es für eine Funktion f eine Darstellung der Form (*) und entspricht $Db(f)$ der Verabredung C 2, so verzichtet man in der Kennzeichnung der Funktion als rational auf die Nennung des Definitionsbereichs. Eine (schlechthin) **rationale Funktion** ist also eine Funktion mit einer Darstellung der Form (*), die als Definitionsbereich alle reellen Zahlen hat mit Ausnahme derjenigen, für die der Nenner verschwindet, also $\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu x^\nu = 0$ ist.
Unter Beachtung der Vereinbarung C 2 gibt es für Funktionen wie $y = |x|$, $y = \sqrt[2]{x}$, $y = \cos x$, $y = \lg x$ keine Darstellung der Form (*); es handelt sich also um nichtrationale Funktionen

Übersicht:



(2) *Erläutern Sie die vorstehende Übersicht! Ordnen Sie die Funktionen* **a)** *bis* **g)** *entsprechend ein, und geben Sie jeweils den Definitionsbereich an!*

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \cos^2 x$ **c)** $y = \sqrt[3]{x-4}$ **d)** $y = \frac{x^3+7x-3}{x^2-1}$

e) $y = \lg(x+2)$ **f)** $y = \frac{3x^3+3x}{x^2+1}$

Aufgaben c 1 bis 3

2 Rationale Operationen mit Funktionen

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division werden als **rationale Operationen** bezeichnet. Die rationalen Funktionen lassen sich auch als die Funktionen charakterisieren, die man durch endlich viele rationale Operationen erhält aus den **konstanten Funktionen** und der sogenannten **identischen Funktion** i, bei der für jedes x gilt: $i(x) = x$.
Dazu ist allerdings im Grunde genommen zu präzisieren, was man unter **rationalen Operationen mit Funktionen** versteht. So wie durch die betreffenden Operationen bei Zahlen jedem geordneten Paar reeller Zahlen eindeutig eine dritte zugeordnet wird (bei der Division mit der Einschränkung, daß der Divisor von 0 verschieden sein muß), so wird bei Funktionen geordneten Paaren von Funktionen eindeutig eine dritte Funktion zugeordnet. Die Art der Übertragung auf Funktionen ist so naheliegend, daß wir ohne Präzisierung bereits verschiedentlich von diesen Begriffsbildungen Gebrauch gemacht haben, so etwa bei der Regel für die Differentiation der **Summe** oder des **Produktes zweier Funktionen.**

C

3 **DEFINITION: f und g seien Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich D. s ist die Summe $f+g$ der beiden Funktionen $=_{Df}$ s ist diejenige Funktion mit dem Definitionsbereich D, bei der für jedes $x \in D$ gilt: $s(x) = f(x) + g(x)$.**

Entsprechend definiert man die Differenz $d = f - g$, das Produkt $p = f \cdot g$ und den Quotienten $q = \frac{f}{g}$ zweier Funktionen f und g. Bei der Quotientenbildung ist zu beachten, daß nur solche $x \in D$ den Definitionsbereich von q bilden, für die $g(x) \neq 0$ ist; die Nullstellen der „Nennerfunktion" werden also ausgenommen.

3 **a)** $f = \left\{[2;5], [3;17], [5;0{,}5], [7;-6], \left[11;-\frac{1}{2}\right]\right\}$

$g = \left\{[1;3], [3;0{,}1], [5;20], \left[7;\frac{1}{3}\right], [9;3], [11;0]\right\}$

Gemeinsamer Definitionsbereich von f und g ist $D = \{3;5;7;11\}$.

$f+g = \left\{[3;17{,}1], [5;20{,}5], \left[7;-\frac{17}{3}\right], \left[11;-\frac{1}{2}\right]\right\}$

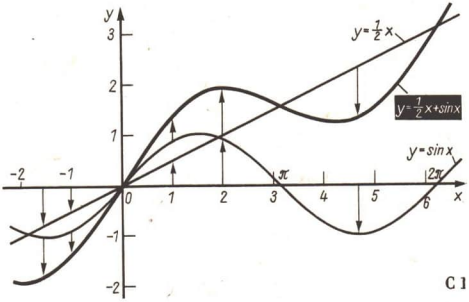
$f-g = \left\{[3;16{,}9], [5;-19{,}5], \left[7;-\frac{19}{3}\right], \left[11;-\frac{1}{2}\right]\right\}$

$f \cdot g = \{[3;1{,}7], [5;10], [7;-2], [11;0]\}$

$f : g = \{[3;170], [5;0{,}025], [7;-18]\}$

b) Es sind Summe, Produkt und Quotient der Funktionen f und g mit $f(x) = \sqrt{7-x}$ und $g(x) = \sqrt{x-3}$ zu bilden.
Die Funktion f hat (↗ Vereinbarung C 2) den Definitionsbereich $-\infty < x \leqq 7$; g hat den Definitionsbereich $3 \leqq x < \infty$. Beiden Definitionsbereichen gemeinsam ist das Intervall $\langle 3; 7 \rangle$.
Die Summe $f + g$ ist diejenige Funktion s, für die $s(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x-3}$ gilt. Sie ist definiert für $3 \leqq x \leqq 7$.
Das Produkt $f \cdot g$ ist diejenige Funktion p, für die $p(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 21}$ gilt. Sie ist ebenfalls definiert für $3 \leqq x \leqq 7$.
Der Quotient $\frac{f}{g}$ ist diejenige Funktion q, für die $q(x) = \sqrt{\frac{7-x}{x-3}}$ gilt. Sie ist definiert für $3 < x \leqq 7$. Der linke Endpunkt des Intervalls ist auszunehmen wegen $g(3) = 0$.

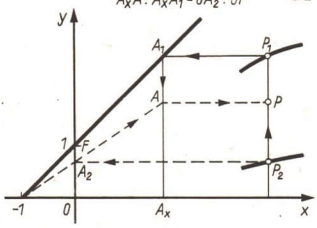
(3) *Bilden Sie aus den Funktionen $y = x$ und $y = \sin x$ neue Funktionen durch Anwenden rationaler Operationen, und ermitteln Sie deren Definitionsbereich!*



C 1

Für die **graphische Darstellung der Summe von Funktionen** ist es oftmals zweckmäßig, von den graphischen Darstellungen der Summanden auszugehen. Man wählt dort Punkte mit gleicher Abszisse und addiert mit dem Stechzirkel die Strecken, die den Ordinaten entsprechen (Vorzeichen beachten!). Es handelt sich dabei um das — besonders von den trigonometrischen Funktionen her — bekannte Verfahren der **Überlagerung (Superposition)** von Kurven (Bild C 1).

Auch das Bild der Funktion $f \cdot g$ kann man auf konstruktivem Wege aus den Bildern der Funktionen f und g bestimmen (Bild C 2).



C 2

(4) *Erläutern und begründen Sie das in Bild C 2 dargestellte Konstruktionsverfahren!*

Aufgaben c 4 bis 6

3 Zueinander inverse Funktionen

(5) **a)** *Geben Sie an, welche der folgenden Funktionen eineindeutig sind!*

$y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^2 - 6x + 8$; $y = \sqrt{x}$;

$y = \sqrt{25 - x^2}$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x^2}$; $y = \sin x$; $y = 2^x$

b) *Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Monotonie und Eineindeutigkeit, und geben Sie bei den unter* **a)** *genannten nicht eineindeutigen Funktionen Intervalle an, in denen Eineindeutigkeit besteht!*

Durch die in Lerneinheit C 2 behandelten Operationen wird jeweils zwei Funktionen f und g eine neue Funktion zugeordnet. Bei der Bildung der **Umkehrfunktion** $\bar{f}$ zu f hingegen erhält man aus einer einzigen Funktion f eine neue. Voraussetzung ist jedoch, daß f eineindeutig ist.

▶ 4 **DEFINITION: Es sei f eine eineindeutige Funktion mit dem Definitionsbereich M_1 und dem Wertevorrat M_2. Die Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f (die zu f inverse Funktion $\bar{f}$) ist die Menge der geordneten Paare $[y; x]$ mit $[x; y] \in f$.**
$\bar{f}$ hat den Definitionsbereich M_2 und den Wertevorrat M_1.

C

Ist eine eineindeutige Funktion f durch eine Gleichung $y = f(x)$ dargestellt, die man nach x auflösen kann, so liefert dieses Auflösen die explizite Form $x = \bar{f}(y)$ für die Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}$.
Da üblicherweise die Argumente einer Funktion mit „x" und die Funktionswerte mit „y" bezeichnet werden, werden meist in der Gleichung $x = \bar{f}(y)$ die Variablen umbenannt. So erhält man $y = \bar{f}(x)$. Durch diese Umbenennung wird die Funktion selbst nicht geändert.

[4] **a)** Die Funktion f aus Beispiel C 3 a hat als Umkehrfunktion die Funktion

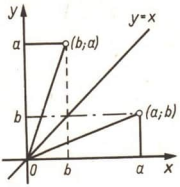
$\bar{f} = \{[5; 2], [17; 3], [0{,}5; 5], [-6; 7], [-0{,}5; 11]\}$.

b) Die Funktion g aus Beispiel C 3 b ist im ganzen Definitionsbereich monoton (wachsend), daher eineindeutig und umkehrbar, denn aus $3 \leqq x_1 < x_2 < \infty$ folgt $\sqrt{x_1 - 3} < \sqrt{x_2 - 3}$.
Die Gleichung $y = \bar{g}(x)$ der Umkehrfunktion erhalten wir folgendermaßen:
$y = \sqrt{x - 3}$ liefert nach Quadrieren $y^2 = x - 3$ bzw. $x = y^2 + 3$.
Umbenennen der Variablen ergibt
$y = \bar{g}(x) = x^2 + 3$.
Da der Wertevorrat von g nur die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen ist, ist der Definitionsbereich $\mathrm{Db}(\bar{g})$ entsprechend gegeben durch $0 \leqq x < \infty$. Der Wertevorrat $\mathrm{Wv}(\bar{g})$ ist $3 \leqq y < \infty$.

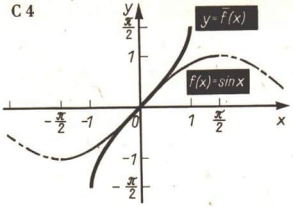
(6) **a)** *Erläutern Sie, warum die Funktion g aus Beispiel C 3 a nicht umkehrbar ist!*
b) *Bilden Sie die Gleichung $y = \bar{f}(x)$ der zu f im Beispiel C 3 b inversen Funktion! Geben Sie Definitionsbereich und Wertevorrat an! Stellen Sie f und $\bar{f}$ in einem einzigen x,y-Koordinatensystem graphisch dar!*

▶ 5 **Die Bilder zweier zueinander inverser Funktionen $y = f(x)$ und $y = \bar{f}(x)$ liegen axialsymmetrisch zur Geraden $y = x$.**

C 3



C 4



(7) *Erläutern Sie den Sachverhalt von Satz C 5 Sachverhalt am Bild C 3 unter Beachtung der Beziehung* $[b; a] \in \bar{f}$ *genau dann, wenn* $[a; b] \in f$*!*

Ist eine Funktion f nur in einem gewissen Teilbereich I ihres Definitionsbereichs (z. B. einem Intervall) eineindeutig, so kann man die Umkehrfunktion derjenigen Funktion f_1 bilden, die aus f durch Einschränkung des Definitionsbereichs auf I hervorgeht.

5 Die Funktion $y = f(x) = \sin x$ ist (u. a.) im Bereich $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ monoton (wachsend), damit eineindeutig und umkehrbar. Das Bild C 4 zeigt das Bild der Funktion $y = f_1(x) = \sin x$ mit $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ und ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}_1$ im gleichen Koordinatensystem $\left(y = \bar{f}_1(x)\right)$.

Aufgaben c 7 bis 9

C

4 Verkettung von Funktionen

Neben den rationalen Operationen besteht eine weitere Möglichkeit, zu zwei vorgegebenen Funktionen eine neue zu erhalten, in der **Verkettung** dieser Funktionen. Es handelt sich dabei um denselben Prozeß, den wir allgemein von (geometrischen) Abbildungen als „Nacheinanderausführen" oder „Zusammensetzen" dieser Abbildungen kennen.

6 Es sei $g = \{[0; 1], [1; 2], [2; 3], [3; 4], [4; 5], [5; 6], [6; 7], [7; 8], [8; 9], [9; 10]\}$ und $f = \{[1; 1], [4; 2], [9; 3], [16; 4], [25; 5]\}$.

Die Zusammensetzung von g und f (zuerst g, dann f) kann man folgendermaßen darstellen

	0	1	2	**3**	4	5	6	7	**8**	9		
g	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	25
f	↓			↓					↓		↓	↓
	1			**2**					**3**		4	5

Die durch Verkettung von g und f entstehende Funktion v ist

$v = \{[0; 1], [3; 2], [8; 3]\}$.

Für v im Beispiel C 6 sind verschiedene Schreibweisen üblich, z. B. $v = f \circ g$. Dabei steht die zuerst „angewandte" Funktion rechts. Für solche Funktionen, die durch Gleichungen wie $y = f(x)$ dargestellt sind, wird eine Schreibweise bevorzugt, aus der deutlicher — ohne besondere Vereinbarung — hervorgeht, in welcher Reihenfolge die Verkettung erfolgt (s. u.).
Das Beispiel C 6 zeigt auch, daß nur dann eine Verkettung $f \circ g$ möglich ist (d. h. eine nichtleere Menge geordneter Paare liefert), wenn der Wertevorrat von g und der Definitionsbereich von f gemeinsame Elemente haben.

(8) *Geben Sie zu den Funktionen g und f aus Beispiel C 6 die Funktion $k = g \circ f$ an, und vergleichen Sie mit $f \circ g$!*

Die im Beispiel C 6 genannten Funktionen g und f können durch die Gleichungen $y = g(x) = x + 1$ bzw. $y = f(x) = \sqrt{x}$ dargestellt werden (mit den entsprechend eingeschränkten Definitionsbereichen). Zu der Funktion $v = f \circ g$ gehört dann die Gleichung

$$y = v(x) = \sqrt{x + 1}\,.$$

Für die Darstellung dieser Verkettung ist allerdings eine andere Bezeichnung der Variablen zweckmäßiger:

$$z = g(x) = x + 1 \text{ und } y = f(z) = \sqrt{z} \text{ liefern}$$
$$y = v(x) = f(g(x)) = \sqrt{x + 1}\,.$$

C

Gemäß der Symbolik $f(g(x))$ bezeichnet man häufig g als **innere Funktion**, f als **äußere Funktion** bei dieser Verkettung.
Werden für die Funktionen g und f die Einschränkungen der Definitionsbereiche gemäß Beispiel C 6 fallengelassen, folgt man also der Vereinbarung C 2, so ist der Definitionsbereich $\mathrm{Db}(g)$ von $g(x)$ die Menge P der reellen Zahlen x, der Definitionsbereich $\mathrm{Db}(f)$ von $f(z)$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen z. In diesem Falle ist der Definitionsbereich $\mathrm{Db}(h)$ von $h(x) = f(g(x))$ die Menge aller reellen x mit $-1 \leqq x < \infty$. Denn genau für diese $x \in \mathrm{Db}(g)$ gehören die zugehörigen Werte $g(x)$ auch zu $\mathrm{Db}(f)$:

$$z = x + 1 \geqq 0 \text{ genau dann, wenn } x \geqq -1.$$

(9) a) *Geben Sie auch für $k(x) = g(f(x))$ eine Gleichung an! Ermitteln Sie den Definitionsbereich für $k(x)$ (nach Vereinbarung C 2)!*
b) *Stellen Sie die Funktionen f und g aus Beispiel C 3 b als verkettete Funktionen dar!*

6 **DEFINITION: h ist die durch Verkettung der Funktionen g mit $z = g(x)$ und f mit $y = f(z)$ entstehende Funktion $=_{\mathrm{Df}}$**
h ist die Menge aller geordneten Paare $[x; y]$, für die es ein z derart gibt, daß $[x; z] \in g$ und $[z; y] \in f$ gilt.
Man schreibt $y = h(x) = f(g(x))$.

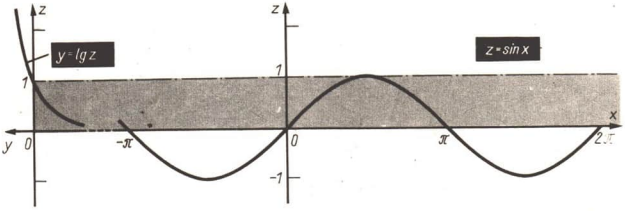
7 Die bei der Lösung trigonometrischer Aufgaben häufig benutzten Tafeln für die Logarithmen der Werte trigonometrischer Funktionen sind Wertetafeln für Funktionen, die durch Verkettung der betreffenden trigonometrischen Funktion mit der Logarithmusfunktion (Basis 10) entstehen, etwa:
Aus $z = g(x) = \sin x$ und $y = f(z) = \lg z$ erhält man

$$y = h(x) = f[g(x)] = \lg \sin x\,.$$

Bestimmung des Definitionsbereichs Db(h) (gemäß Vereinbarung C 2):
Der Definitionsbereich Db(f) der äußeren Funktion f ist die Menge aller reellen z mit $z > 0$. Nach der inneren Funktion g ist $z = \sin x$, und $\sin x > 0$ ist erfüllt für alle x mit

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi, \ (k \in G).$$

Diese x bilden also den Definitionsbereich von $h(x) = \lg \sin x$. Es sind diejenigen $x \in \mathrm{Db}(g)$, für die die zugeordneten Werte $g(x)$ gleichzeitig zum Definitionsbereich Db(f) gehören.
Man kann sich das auch graphisch veranschaulichen, wenn man in der Ebene ein x,z- und ein z,y-Koordinatensystem so anordnet, daß die z-Achsen parallel und gleichgerichtet sind und y- und x-Achse auf einer Geraden liegen (Bild C 5).



C 5

C

(10) a) *Skizzieren Sie das Bild von* $y = \lg |\sin x|$*!*
b) *Erläutern Sie, inwiefern man* $y = \lg |\sin x|$ *als eine durch Verkettung von drei Funktionen entstehende Funktion auffassen kann, und geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an!*
c) *Untersuchen Sie wie in Beispiel C 7 die Verkettung von* $z = \tan x$ *und* $y = \lg z$*!*

Aufgaben c 10 bis 13

5 Wiederholung der Potenz- und Wurzelfunktionen

Bei den **Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten** ($y = x^n$ mit $n \in G$) handelt es sich um spezielle rationale Funktionen. Für die Zusammenstellung wesentlicher Eigenschaften dieser Funktionen erinnern wir uns zunächst in knapper Form einiger wichtiger Definitionen bzw. erweitern diese etwas, um gleich nichtrationale Funktionen mit zu erfassen:

Es sei f eine Funktion ($y = f(x)$) mit dem Definitionsbereich D.

- f heißt nach $\begin{Bmatrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{Bmatrix}$ **beschränkt** $=_{\mathrm{Df}}$

  Es gibt eine reelle Zahl S mit $\begin{Bmatrix} f(x) \leqq S \\ f(x) \geqq S \end{Bmatrix}$ für alle $x \in D$.
  S heißt dann $\begin{Bmatrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{Bmatrix}$ **Schranke** für f.

- f heißt im Intervall $(a; b)$ **monoton** $\begin{Bmatrix}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{Bmatrix} =_{\mathrm{Df}}$

  Für alle x_1, x_2 mit $a < x_1 < x_2 < b$ gilt $\begin{Bmatrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{Bmatrix}$.

  An die Stelle von $(a; b)$ kann auch ein abgeschlossenes oder halboffenes Intervall treten. Bei $f(x_1) \leqq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geqq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$ spricht man von **Monotonie im weiteren Sinn.**
- f heißt $\begin{Bmatrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{Bmatrix} =_{\mathrm{Df}}$ Für alle $x \in D$ gilt auch $-x \in D$ mit $\begin{Bmatrix} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{Bmatrix}$.

  Das Bild von $y = f(x)$ im rechtwinkligen x,y-Koordinatensystem ist dann $\begin{Bmatrix}\text{achsensymmetrisch zur Geraden } y = x\\ \text{zentralsymmetrisch bezüglich } O(0; 0)\end{Bmatrix}$.
- x_0 heißt **Nullstelle** von $f =_{\mathrm{Df}} f(x_0) = 0$ $(x_0 \in D)$.
- x_u heißt **Unendlichkeitsstelle** von $f =_{\mathrm{Df}} x_u$ gehört nicht zum Definitionsbereich von f, $\frac{1}{f}$ ist in einer (punktierten) Umgebung von f definiert und stetig, und es ist $\lim\limits_{x \to x_u} \frac{1}{f(x)} = 0$. Die Unendlichkeitsstellen rationaler Funktionen sind diejenigen x_p, für die bei der normierten Darstellung $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ gilt $v(x_p) = 0$ und $u(x_p) \neq 0$. Sie heißen **Pole**, und die Gerade $x = x_p$ wird **Polasymptote** genannt.

  Auch bei nichtrationalen Funktionen bezeichnet man gewisse Unendlichkeitsstellen als Pole, doch kann auf diese Unterscheidung hier nicht näher eingegangen werden. Von Unendlichkeitsstellen x_u spricht man bei nichtrationalen Funktionen auch, wenn x_u am Rande des Definitionsbereichs liegt, so daß der oben angegebene Sachverhalt nur auf eine links- bzw. rechtsseitige (punktierte) Umgebung von x_u zutrifft und dementsprechend lediglich

$$\lim_{\substack{x \to x_u \\ x < x_u}} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{\substack{x \to x_u \\ x > x_u}} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ gilt.}$$

Es ist zweckmäßig, folgende Klasseneinteilung der Potenzfunktionen mit ganzen Exponenten vorzunehmen:

1. Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten $n \geqq 2$

1.1 $y = x^{2k}$, $(k \in N;\ k > 0)$

1.2 $y = x^{2k+1}$, $(k \in N;\ k > 0)$

2. Potenzfunktionen mit negativen ganzen Exponenten

2.1 $y = x^{-2k}$, $(k \in N;\ k > 0)$

2.2 $y = x^{-2k+1}$, $(k \in N)$

3. $y = x^0$

4. $y = x^1$

Eigenschaften der Funktionen 2.1 $y = x^{-2k}$, $(k \in N;\ k > 0)$:

(1) Definitionsbereich $-\infty < x < 0 < x < \infty$

(2) Wertevorrat: $0 < y < \infty$; also nach unten beschränkt (0 und jede negative Zahl sind untere Schranken)

(3) Alle Funktionen der Schar sind monoton wachsend für $-\infty < x < 0$; monoton fallend für $0 < x < \infty$.

(4) Alle Funktionen der Schar sind gerade Funktionen

(5) Keine Nullstellen

(6) Pol $x_p = 0$; Polasymptote ist die y-Achse

(7) Für jedes $k \in N$, $k > 0$, ist $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{-2k} = \lim\limits_{x \to \infty} x^{-2k} = 0$.

Asymptote ist die x-Achse. Die Annäherung an die Asymptote erfolgt von oben.

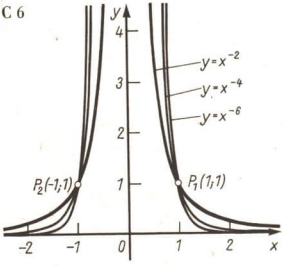
(8) Alle Funktionen der Schar enthalten die geordneten Paare [— 1; 1] und [1; 1]; ihre Bilder gehen durch die entsprechenden Punkte (Bild C 6).

(11) **a)** *Begründen Sie die in der Zusammenstellung angegebenen Eigenschaften!*
b) *Stellen Sie entsprechend auch gemeinsame Eigenschaften für die Funktionenscharen 1.1, 1.2 und 2.2 zusammen! Vergleichen Sie auch $y = x^0$ und $y = x^1$ mit 1.1 bzw. 1.2! Skizzieren Sie einige Bilder!*

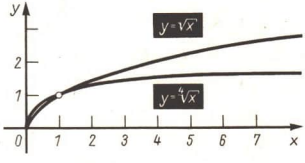
Die Kurven zu den Potenzfunktionen $y = x^n$ mit natürlichen Exponenten $n \geqq 2$ werden als **Parabeln** bezeichnet, obwohl nur das Bild der Funktion $y = x^2$ eine Parabel im geometrischen Sinn, also als Kegelschnitt, ist. Ebenso ist die Bezeichnung **Hyperbeln** für die Bilder aller Funktionen $y = x^n$ mit negativen ganzen n eine Übertragung des von der Geometrie her nur für $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ gerechtfertigten Namens auf alle Kurven, die gewisse Eigenschaften (zwei Äste, Asymptoten) mit der eigentlichen Hyperbel gemeinsam haben.
Auch bei Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^n$, ($a \neq 0$, reell), spricht man von Potenzfunktionen. Der Faktor a bewirkt im Bild gegenüber $y = x^n$ für den Fall $a < 0$ eine Spiegelung an der x-Achse und außerdem für $|a| > 1$ eine Streckung, für $|a| < 1$ eine Stauchung in Richtung der y-Achse.

Potenzfunktionen mit rationalen, aber nicht ganzzahligen Exponenten haben Gleichungen der Form $y = x^{\frac{m}{n}}$, wobei $m \in G$, $n \in N$, $n > 0$ und n teilt nicht m gilt. Alle diese Funktionen sind nichtrational. Wir beschränken uns hier auf die Funktionen mit $m = 1$, also $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in N$, $n > 1$. Diese **Wurzelfunktionen** sind also spezielle Potenzfunktionen.
Man erhält die Funktion $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ als Inverse der Funktion $y = x^n$ mit $0 \leqq x < \infty$ als Definitionsbereich (Bild C 7).

C 6



C 7



(12) **a)** *Stellen Sie Eigenschaften der Wurzelfunktionen $y = \sqrt[n]{x}$ zusammen!*
b) *Erläutern Sie den Unterschied zwischen der Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ und der inversen Funktion zu $y = x^3$ ($-\infty < x < \infty$) (Skizze)!*

Aufgaben c 14 bis 16

(13) *Es sei α die Größe eines Winkels im Gradmaß. Erläutern Sie die Beziehung*

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{arc\,\alpha}{2\pi}\,!$$

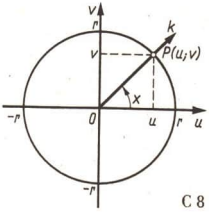
(14) *Geben Sie für die im Gradmaß gegebenen Winkel das Bogenmaß an und umgekehrt!*

a) $\alpha = 30°$ **b)** $\alpha = 45°$ **c)** $\alpha = 15°45'$ **d)** $\alpha = 120{,}5°$

e) $arc\,\alpha = \frac{\pi}{3}$ **f)** $arc\,\alpha = \frac{\pi}{10}$ **g)** $arc\,\alpha = 3{,}2$ **h)** $arc\,\alpha = 0{,}235$

Die Winkelfunktionen werden an Hand eines Kreises mit dem Radius r definiert, dessen Mittelpunkt man als Ursprung eines rechtwinkligen u,v-Koordinatensystems wählt. Der Schenkel k des Winkels $\sphericalangle\,(u, k)$ mit dem Maß x möge diesen Kreis im Punkte $P(u; v)$ schneiden (Bild C 8). Dann ist die **Sinusfunktion** $y = \sin x$ die Menge aller geordneten Paare $[x; \sin x]$,

wobei x beliebig reell und $\sin x = \frac{v}{r}$ ist.



C 8

C

(15) *Geben Sie entsprechend die Definitionen für $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$ an!*

Den Winkelfunktionen kommt eine in der Wiederholung auf Seite 91 noch nicht erwähnte wesentliche Eigenschaft von Funktionen zu, die Periodizität:

- Eine Funktion f (Definitionsbereich D) heißt **periodisch** $=_{Df}$
  Es gibt eine reelle Zahl $p > 0$ derart, daß für alle $x \in D$ auch $x \pm p \in D$ und $f(x \pm p) = f(x)$ gilt.
  Die Zahl p heißt eine **Periode** von f. Da mit p auch $k \cdot p$ für jedes natürliche $k > 0$ eine Periode von f ist, hat eine periodische Funktion unendlich viele Perioden. Falls unter ihnen eine kleinste existiert, so gibt man i. a. nur diese als „die Periode von f" an.

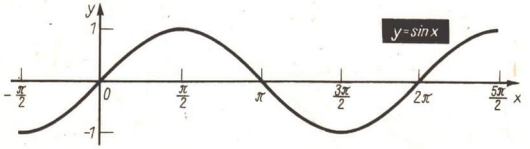
Eigenschaften der Funktion $y = \sin x$ (Bild C 9):

(1) Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

(2) Wertevorrat: $-1 \leqq y \leqq 1$. Die Funktion ist also beiderseitig beschränkt.

(3) Die Funktion ist periodisch mit der kleinsten Periode 2π.

(4) Monotonieintervalle von $y = \sin x$ sind $\left\langle \frac{(4k-1)\pi}{2}; \frac{(4k+1)\pi}{2} \right\rangle$ (monoton wachsend) und $\left\langle \frac{(4k+1)\pi}{2}; \frac{(4k+3)\pi}{2} \right\rangle$ (monoton fallend) für alle $k \in G$.



C 9

(5) $y = \sin x$ ist eine ungerade Funktion.
(6) $y = \sin x$ hat die Nullstellen $k \cdot \pi$ mit $k \in G$.
(7) $y = \sin x$ hat keine Pole.

(16) a) *Begründen Sie die in der obigen Zusammenstellung aufgeführten Eigenschaften der Sinusfunktion!*
b) *Stellen Sie entsprechend Eigenschaften für die anderen Winkelfunktionen zusammen, und skizzieren Sie die Bilder dieser Funktionen (Schablone)!*

Wichtig, besonders für Physik, Elektrotechnik usw. sind Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot \sin(bx + c)$ mit $a > 0$, $b > 0$.

8 Für $y = 1{,}5 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ist die kleinste Periode p zu ermitteln. Es muß gelten

$$1{,}5 \cdot \sin\left[2(x + p) + \frac{\pi}{4}\right] = 1{,}5 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(2x + 2p + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Substitution $z = 2x + \frac{\pi}{4}$ liefert

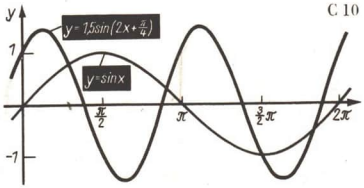
$$\sin(z + 2p) = \sin z.$$

Da 2π die kleinste Periode der Funktion $y = \sin x$ ist, gilt

$$2p = 2\pi.$$

Die kleinste Periode der Funktion $y = 1{,}5\left(\sin 2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ist π.

C 10



Allgemein ist für $y = a \cdot \sin(bx + c)$ mit $a > 0$, $b > 0$ die kleinste Periode $\frac{2\pi}{b}$. Das Bild der Funktion $y = 1{,}5 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ entsteht aus der Kurve zu $y = \sin x$ durch sukzessive Stauchung, Streckung und Verschiebung (Bild C 10).

Aufgaben c 17 bis 19

7 Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Aus den Definitionen der Winkelfunktionen ergeben sich durch einfache Umformungen Beziehungen zwischen Werten verschiedener Winkelfunktionen bei gleichem Argument.

(17) *Erläutern und begründen Sie den Gültigkeitsbereich der folgenden Beziehungen!*

(1) $\tan x \cdot \cot x = 1$ *(1a)* $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ *(1b)* $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

(2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *(2a)* $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ *(2b)* $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

Von Bedeutung sind außerdem die Komplementwinkelbeziehungen zwischen einer Winkelfunktion und ihrer Kofunktion, z. B. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Diese Beziehungen ermöglichen es, Sinus- und Kosinuswerte aus ein und derselben Tafel zu entnehmen, entsprechend Tangens- und Kotangenswerte.

(18) a) *Erläutern Sie, welche Beziehungen es ermöglichen, aus der Kenntnis der Winkelfunktionswerte für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ die Werte für alle reellen Argumente zu ermitteln und sich so auf Tafeln für den Bereich von 0° bis 90° beschränken zu können!*

b) *Berechnen Sie* $\sin 217°$; $\cos \frac{5\pi}{6}$; $\tan 820{,}3°$; $\cot \frac{29}{15}\pi$!

Die sogenannten **Additionstheoreme** sind Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen der Summe und Differenz zweier Winkel und den Winkelfunktionen dieser Winkel selbst. Für die Sinus- und Kosinusfunktion haben wir solche Additionstheoreme mit Hilfe der Vektorrechnung hergeleitet:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && \sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \sin x_2,\\
&\text{(II)} && \cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 - \sin x_1 \cdot \sin x_2,\\
&\text{(III)} && \sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 - \cos x_1 \cdot \sin x_2,\\
&\text{(IV)} && \cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 + \sin x_1 \cdot \sin x_2.
\end{aligned}$$

(19) a) *Erläutern Sie, wie (III) aus (I) und (IV) aus (II) folgen!*

b) *Leiten Sie aus den Additionstheoremen für die Sinus- und Kosinusfunktion ein Additionstheorem für die Tangensfunktion her!*

C

Setzt man in den Additionstheoremen (I) und (II) $x_1 = x_2 (= x)$, so erhält man die **Doppelwinkelformeln**:

$$\text{(V)}\ \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \quad \text{(VI)}\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Aus (VI) erhält man wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ auch

$$\text{(VIa)}\ \cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1, \quad \text{(VIb)}\ \cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x.$$

Ersetzt man in (VIa) und (VIb) x durch $\frac{x}{2}$ (und damit $2x$ durch x), so erhält man

$$\cos x = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \quad \text{bzw.} \quad \cos x = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Auflösen nach $\sin \frac{x}{2}$ bzw. $\cos \frac{x}{2}$ liefern die **Halbwinkelformeln**

$$\text{(VII)}\ \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad \text{(VIII)}\ \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

(20) *Ermitteln Sie entsprechend Doppel- und Halbwinkelformeln für Tangens und Kotangens!*

Neben den hier angeführten Gleichungen finden wir im Tafelwerk (Formelsammlung) eine Fülle weiterer Beziehungen, so z. B.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Diese Formel erhält man, indem man zunächst bei (I) und (III) die Terme auf der linken Seite und die auf der rechten addiert:

$$\sin(x_1 + x_2) + \sin(x_1 - x_2) = 2 \cdot \sin x_1 \cdot \cos x_2.$$

Setzt man nun $x_1 + x_2 = \alpha$ und $x_1 - x_2 = \beta$, so ergibt sich $x_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ und $x_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}$ und damit die in Frage stehende Formel.

(21) *Entnehmen Sie der Tafel die Formel für $\cos\alpha - \cos\beta$, und leiten Sie diese Beziehung entsprechend her!*

Aufgaben c 20 bis 24

8 Wiederholung der Exponential- und der Logarithmusfunktionen

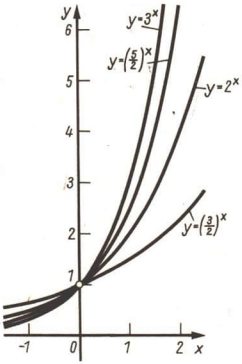
Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a^x$, (a reell mit $a > 0$ und $a \neq 1$), werden als Exponentialfunktionen bezeichnet. Da für a alle Potenzen mit reellen Exponenten — einschließlich der irrationalen — existieren, ist der Definitionsbereich dieser nichtrationalen Funktionen die Menge P aller reellen Zahlen.

(22) *Welche Konsequenzen hätte es, wenn auch $a \leqq 0$ und $a = 1$ als Basis zugelassen wären?*

(23) a) *Stellen Sie wesentliche Eigenschaften der Exponentialfunktionen $y = a^x$ mit $a > 1$ zusammen!*

b) *Geben Sie wesentliche Eigenschaften der Exponentialfunktionen $y = a^x$ mit $0 < a < 1$ an!*

c) *Vergleichen Sie den Verlauf der Kurven von $y = 2^x$ und $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ sowie $y = 3^x$ und $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ (Skizze)!*



C 11

Unendliche Folgen sind, wie wir wissen, Funktionen mit der Menge N der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich. Für geometrische Folgen (Anfangsglied $a_0 \neq 0$, Quotient $q \neq 0$, $q \neq 1$) gilt $a_k = a_0 \cdot q^k$ für alle $k \in N$ als explizite Bildungsvorschrift. Erweitert man für $q > 0$ den Definitionsbereich von N auf den Bereich P der reellen Zahlen, so wird man auf eine Exponentialfunktion $y = a_0 q^x$ ($x \in P$) geführt, denn auch bei Multiplikation mit einer reellen Konstanten $c \neq 0$ spricht man noch von einer Exponentialfunktion. Umgekehrt gilt nicht nur, daß die Einschränkung des Definitionsbereichs einer Exponentialfunktion auf N eine geometrische Folge liefert, sondern ein allgemeinerer Satz.

▶ **SATZ: Durchläuft in $y = c \cdot a^x$ ($c \neq 0$; $a > 0$ und $a \neq 1$) das Argument x eine arithmetische Folge, so durchläuft der Funktionswert y eine geometrische Folge.**

Beweis: Die arithmetische Folge der Argumentwerte sei

$$x_0;\ x_0 + d;\ x_0 + 2d;\ \ldots;\ x_0 + (k-1)\,d;\ \ldots;\ (d \neq 0).$$

Die zugehörigen Funktionswerte sind dann

$$\begin{aligned} & c \cdot a^{x_0};\ c \cdot a^{x_0+d};\ c \cdot a^{x_0+2d};\ \ldots;\ c \cdot a^{x_0+(k-1)d};\ \ldots \\ &= c \cdot a^{x_0};\ c \cdot a^{x_0} \cdot a^{d};\ c \cdot a^{x_0} \cdot a^{2d};\ \ldots;\ c \cdot a^{x_0} \cdot a^{(k-1)d};\ \ldots \\ &= c \cdot a^{x_0};\ c \cdot a^{x_0} \cdot a^{d};\ c \cdot a^{x_0} \cdot (a^{d})^2;\ \ldots;\ c \cdot a^{x_0} \cdot (a^{d})^{k-1};\ \ldots \end{aligned}$$

Es handelt sich also um eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $c \cdot a^{x_0}$ und dem Quotienten a^d, und wegen $d \neq 0$ und $a \neq 1$ ist $a^d \neq 1$.
Da die Exponentialfunktionen im gesamten Definitionsbereich monoton sind, sind sie umkehrbar. Die Umkehrfunktion zu $y = a^x$ wird als **Logarithmusfunktion** (zur Basis a) bezeichnet, und als Gleichung schreibt man $y = \log_a x$, im Falle $a = 10$ (**Briggssche**[1] oder dekadische Logarithmen) speziell $y = \lg x$.

(24) a) *Stellen Sie wesentliche Eigenschaften der Logarithmusfunktionen zusammen, und skizzieren Sie die Bilder zu $y = \log_2 x$ und $y = \log_3 x$!*
b) *Vergleichen Sie die Funktionen $y = \log_a x^2$, $y = 2 \cdot \log_a x$ und $y = 2 \cdot \log_a |x|$!*
c) *Ermitteln Sie Gleichungen für die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen $y = 1{,}5 \cdot 2^x$ und $y = 1{,}5 \cdot 2^{-x}$!*

Aufgaben c 25 bis 29

C

9 Die Zahl e

Eine ausgezeichnete Rolle unter allen Exponentialfunktionen kommt derjenigen zu, deren Basis eine Zahl ist, die zu Ehren Eulers[2] mit e bezeichnet wird. Gründe für die besondere Bedeutung von $y = e^x$ werden uns allerdings erst nach der Behandlung der Exponentialfunktionen mit Methoden der Differentialrechnung deutlich werden. Diese Zahl e wird durch einen Grenzwert definiert.

8 **DEFINITION der Eulerschen Zahl e:**

$$\boxed{e \underset{\mathrm{Df}}{=} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{mit} \quad n \in N,\ n > 0}$$

Dabei ist aber zunächst ungeklärt, ob dieser Grenzwert überhaupt existiert. Um die Definition zu rechtfertigen, muß die Existenz dieses Grenzwertes nachgewiesen werden.

Einige Glieder der Folge $(a_n) = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$ (mit $n > 0$) sind

$$\begin{aligned} a_1 &= (1+1)^1 &&= 2 \\ a_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} &&= 2{,}25 \\ a_3 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} &&= 2{,}370\ldots \end{aligned}$$

[1] Nach Henry Briggs (1561 bis 1631), engl. Mathematiker.
[2] Leonhard Euler (1707 bis 1783), Schweizer Mathematiker.

$$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2{,}441\ldots$$

$$a_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 1{,}1^{10} \qquad = 2{,}593\ldots$$

$$a_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 1{,}01^{100} \quad = 2{,}704\ldots$$

Daraus ist zu vermuten, daß (a_n) monoton wächst. Ließe sich diese Vermutung bestätigen und könnten wir obendrein zeigen, daß (a_n) nach oben beschränkt ist, wäre die Existenz des fraglichen Grenzwertes gesichert.

(25) *Geben Sie an, aus welchen Sätzen dann folgt, daß* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *existiert!*

Zum Nachweis benutzt man die **Bernoullische Ungleichung**[1]:

Für alle natürlichen Zahlen n mit $n > 1$ und alle reellen Zahlen h mit $h > -1$ $(h \neq 0)$ gilt:

$(1+h)^n > 1 + n \cdot h$.

1) *Beweis*, daß $(a_n) = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ monoton wächst:

Wir setzen in der Bernoullischen Ungleichung $h = -\frac{1}{n^2}$ und erhalten

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

Also ist $a_n > a_{n-1}$ für alle $n > 1$. *w. z. b. w.*

2) Daß (a_n) nach oben beschränkt ist, zeigen wir, indem wir zu (a_n) eine zweite Folge $(\bar{a}_n)$ angeben, die monoton fällt und für die außerdem gilt $\bar{a}_n > a_n$ für jedes $n \geqq 1$.

Damit ist dann jedes Glied von $(\bar{a}_n)$ eine obere Schranke für (a_n):

$$(\bar{a}_n) = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right].$$

Entsprechend wie bei (a_n) erhalten wir

$$\bar{a}_1 = 4;\ \bar{a}_2 = 3{,}375;\ \bar{a}_3 = 3{,}160\ldots;\ \bar{a}_4 = 3{,}051\ldots;\ \ldots$$
$$\bar{a}_{10} = 2{,}853\ldots;\ \ldots;\ \bar{a}_{100} = 2{,}731\ldots;\ \ldots$$

Beweis, daß $(\bar{a}_n)$ monoton fällt:

Wir setzen in der Bernoullischen Ungleichung $h = \frac{1}{n^2}$:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}.$$

[1] Nach Jacob Bernoulli (1654 bis 1705), Schweizer Mathematiker; der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion

Wegen $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n$ folgt daraus

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}.$$

Multiplikation mit $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ liefert daraus

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Das ist aber gerade $\bar{a}_{n-1} > \bar{a}_n$, d. h., $(\bar{a}_n)$ fällt monoton.

Aus $1+\frac{1}{n} > 1$ für alle natürlichen $n > 0$ folgt

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \bar{a}_n.$$

Wir wissen damit, daß $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert, und haben das Recht, diese reelle Zahl zu bezeichnen, was in der Definition C 8 mit e geschehen ist.

Unsere Überlegungen haben sogar noch mehr geliefert: $(\bar{a}_n)$ ist eine monoton fallende, nach unten beschränkte [durch sämtliche Glieder von (a_n)] und daher ebenfalls konvergente Folge. (a_n) und $(\bar{a}_n)$ haben sogar den gleichen Grenzwert:

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\bar{a}_n.$$

Die Folgen $(\bar{a}_n)$ und (a_n) haben also als Differenz eine Nullfolge. Mit den davor erfolgten Überlegungen zusammen heißt das: Die Intervalle $\langle a_n; \bar{a}_n\rangle$ bilden eine Intervallschachtelung, die die Zahl e erfaßt.

9 **SATZ: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, und für alle natürlichen $n > 0$ gilt:**

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

(26) *Geben Sie auf Grund der oben berechneten Glieder von (a_n) und $(\bar{a}_n)$ Abschätzungen für e an!*

Da sowohl (a_n) als auch $(\bar{a}_n)$ sehr langsam konvergieren, benutzt man zur Berechnung von Näherungswerten für e mit größerer Genauigkeit in der Praxis andere

Verfahren. e ist eine **Irrationalzahl**; auf einen Beweis müssen wir verzichten.

$$\boxed{e = 2{,}718\,281\,828\,459 \ldots}$$

Ohne Beweis sei hier mitgeteilt, daß auch für beliebige reelle $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{gilt.}$$

(27) *Geben Sie Eigenschaften der Funktionen $y = e^x$ und $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$ an, und zeichnen Sie die Bilder dieser Funktionen im Bereich $-3 \leqq x \leqq 3$! Entnehmen Sie die dazu benötigten Funktionswerte dem Tafelwerk!*

Aufgabe c 30

10 Natürliche Logarithmen und der Zusammenhang zwischen Logarithmensystemen verschiedener Basen

In Lerneinheit C 9 wurde betont, daß der Zahl e und unter allen Exponentialfunktionen der Funktion $y = e^x$ eine besondere Bedeutung zukommt. Entsprechend sind unter allen Logarithmensystemen die Logarithmen zur Basis e und unter den Umkehrfunktionen aller Exponentialfunktionen die Umkehrfunktion zu $y = e^x$ ausgezeichnet. Die Logarithmen zur Basis e werden als **natürliche Logarithmen** bezeichnet, und an Stelle von $\log_e x$ schreibt man $\ln x$. Die Gleichung der Umkehrfunktion zu $y = e^x$ lautet demgemäß $y = \ln x$.

(28) a) *Geben Sie Eigenschaften der Funktion $y = \ln x$ an, und zeichnen Sie ihr Bild im Bereich $0{,}05 \leqq x \leqq 20$, indem Sie die Kurve von $y = e^x$ (Übung C 27) benutzen!*

b) *Entnehmen Sie diesem Bild Näherungswerte für $\ln 2$, $\ln 5$, $\ln 12$, $\ln 13{,}5$, und vergleichen Sie mit den Werten, die Sie in der Tafel für $\ln x$ finden!*

(29) *Erläutern Sie, warum gerade die dekadischen Logarithmen für das logarithmische Rechnen vorteilhaft und die natürlichen Logarithmen dafür unzweckmäßig sind!*

Die besondere Bedeutung der natürlichen Logarithmen hat u. a. folgenden Grund: Für jede reelle Zahl $x > 0$ ist $\ln x$ verhältnismäßig leicht zu berechnen (wenn auch nicht mit schulischen Mitteln), ebenso wie umgekehrt bei vorgegebenem natürlichen Logarithmus $\ln x$ der Numerus $x = e^{\ln x}$. Nun kann man aber allgemein die Logarithmen jedes beliebigen Systems (Basis a) durch einfache Multiplikation mit einer passenden Konstanten in die Logarithmen jedes anderen Systems (Basis b) umrechnen; man spricht auch von der **Proportionalität der Logarithmensysteme**. Deshalb bietet das System der natürlichen Logarithmen die geeignete Grundlage für die Berechnung von Logarithmen mit beliebiger Basis. Ermittlung eines Zusammenhanges zwischen $\log_a x$ und $\log_b x$: Es ist

$$a^{\log_a x} = x\,.$$

Logarithmieren dieser Gleichung zur Basis b liefert:

(1) $\quad \log_a x \cdot \log_b a = \log_b x\,.$

Speziell für $x = b$ ergibt das

(2) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Wegen (2) läßt sich (1) auch schreiben als

(3) $\log_a x \cdot \dfrac{1}{\log_a b} = \log_b x$.

10 **SATZ (Zusammenhang zwischen Logarithmen verschiedener Basen): Für alle reellen $x > 0$ und alle reellen a, b mit $a > 0, b > 0$ und $a \neq 1, b \neq 1$ gilt:**

$$\boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}; \quad \log_b x = \log_b a \cdot \log_a x = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a x}$$

Speziell für $a = e$ und $b = 10$ erhalten wir

$$\boxed{\lg x = \lg e \cdot \ln x = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\ln x = \ln 10 \cdot \lg x = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg x}$$

Bei Umrechnungen benutzen wir die folgenden Näherungswerte

$$\boxed{\begin{aligned} \lg e &= \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}434\,29 \\ \ln 10 &= \frac{1}{\lg e} \approx 2{,}302\,59 \end{aligned}}$$

C

9 **a)** Es soll lg 516 berechnet werden, wenn ln 516 = 6,2461 bekannt ist.
Nach Satz C 10 ist

$$\lg 516 = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln 516 = 0{,}434\,29 \cdot 6{,}2461\,.$$

Wir erhalten lg 516 = 2,7126.

b) Unter Benutzung der Tafel der dekadischen Logarithmen ist ln 0,283 zu ermitteln.
Nach Satz C 10 ist

$$\ln 0{,}283 = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg 0{,}283 = 2{,}302\,59 \cdot \lg 0{,}283\,.$$

Der Logarithmentafel entnehmen wir lg 0,283 = 0,4518 — 1. Danach ist

$$\ln 0{,}283 = 2{,}302\,59 \cdot (0{,}4518 - 1) = -2{,}302\,59 \cdot 0{,}5482\,.$$

Da die dekadischen Logarithmen zur Verfügung stehen, berechnen wir dieses Produkt logarithmisch:

$$\begin{aligned} x &= 2{,}303 \cdot 0{,}5482 \\ \lg x &= \lg 2{,}303 + \lg 0{,}5482 \\ x &= 1{,}263 \end{aligned}$$

n	$\lg n$
2,303	0,3623
0,5482	0,7390 — 1
x	0,1013

$$\ln 0{,}283 = -1{,}263$$

(30) a) *Überprüfen Sie das Ergebnis von Beispiel C 9 b mit Hilfe der Tafel der natürlichen Logarithmen!*

b) *Erläutern Sie, warum es bei natürlichen Logarithmen sinnlos ist, von „Kennzahlen" zu sprechen und etwa ln 0,283 auf 0,737 — 2 umzurechnen!*

Aufgaben c 31 bis 36

11 Anwendungen von Exponentialfunktionen

Es sei $y = c \cdot a^x (c \neq 0;\ a > 0$ und $a \neq 1)$ und $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ eine arithmetische Folge mit der Differenz $h = x_{k+1} - x_k > 0$ für alle $k \in N$. Nach Satz C 7 ist dann die zugehörige Folge der Funktionswerte $y_k = c \cdot a^{x_k}$ eine geometrische Folge mit dem Quotienten a^h. Demgemäß gilt für die Differenz der Funktionswerte $y_{k+1} - y_k = c \cdot a^{x_k} \cdot a^h - c \cdot a^{x_k} = c \cdot a^{x_k}(a^h - 1)$; dabei ist

$$a^h - 1 > 0 \text{ für } a > 1 \quad \text{und}$$
$$a^h - 1 < 0 \text{ für } a < 1.$$

Bei beliebigen, aber konstanten Argumentschritten ist also die Zunahme ($a > 1$ und $c > 0$ oder $a < 1$ und $c < 0$) bzw. Abnahme ($a < 1$ und $c > 0$ oder $a > 1$ und $c < 0$) vom Funktionswert y_k auf den Funktionswert y_{k+1} proportional dem Funktionswert y_k selbst. Deshalb treten Exponentialfunktionen überall dort auf, wo sich die Größe der Veränderung in dieser Weise nach dem schon (oder noch) Vorhandenen richtet. Beachtet man, daß $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ist, so kann man sich auf den Fall $a > 1$ beschränken, wenn man $y = c \cdot a^x$ **und** $y = c \cdot a^{-x}$ betrachtet. Setzt man außerdem $a = e^k (k > 0$ reell), so erhält man als übliche Form für die Gleichungen der Exponentialfunktionen in Anwendungen

$$y = c \cdot e^{kx} \quad \text{und} \quad y = c \cdot e^{-kx} \quad \text{mit} \quad c \neq 0;\ k > 0.$$

Häufig tritt die Zeit als unabhängige Veränderliche auf. In diesem Fall wird an Stelle der Variablen x häufig die Variable t geschrieben.

Ein besonders sinnfälliges Beispiel für das Auftreten von Exponentialfunktionen ist das **organische Wachstum**. So ist z. B. der Zuwachs an Bakterien in der Zeiteinheit bei einer Bakterienkultur — unter Vernachlässigung etwaiger hemmender Einflüsse wie Mangel an Nährsubstanz oder Auftreten antibakterieller Substanzen — direkt proportional der Anzahl der zu dem betreffenden Zeitpunkt bereits vorhandenen Bakterien. Sind nämlich etwa zum Zeitpunkt t_2 doppelt soviel Bakterien vorhanden wie zum Zeitpunkt t_1, so ist in jedem Zeitintervall nach t_2 auch eine doppelt so starke Zunahme durch Vermehrung (Teilung) zu erwarten wie in einer ebensolangen Zeitspanne nach t_1. Die Anzahl $N = N(t)$ der Bakterien gehorcht deshalb näherungsweise der Gleichung

$$N = N_0 \cdot e^{kt} (N_0 > 0;\ k > 0).$$

(31) a) *Erläutern Sie, welche Bedeutung N_0 hat!*

b) *Welchen Einschränkungen gegenüber den bisher betrachteten Exponentialfunktionen ist der Wertevorrat unterworfen?*

c) *Welcher Zusammenhang besteht zwischen Vermehrungsgeschwindigkeit und k, und welche Bedeutung hat die Zeitspanne $\frac{1}{k}$?*

Auch Wachstumsprozesse wie beispielsweise die Zunahme des Holzbestandes eines Waldes werden — innerhalb gewisser Grenzen — durch Exponentialfunktionen beschrieben, ebenso wie — wiederum unter gewissen vereinfachenden Annahmen — die Zunahme der menschlichen Bevölkerung.
Auf Karl Marx geht das Exponentialgesetz des Wachstums der gesellschaftlichen Produktion materieller Güter zurück.[1] In erster Näherung gilt

(1) $K = 100\, e^{\varphi t}$

Dabei ist K der sogenannte Produktionsindex[2] in Prozent, t die Zeit in Jahren und φ eine Konstante; bei dem von Marx angegebenen Zahlenbeispiel ist $\varphi = 0{,}095\,3\,a^{-1}$. W. I. Lenin entwickelte das Modell von Marx weiter. Er berücksichtigte Faktoren wie den technischen Fortschritt und gelangte 1893 zu einer Gleichung, die die realen Verhältnisse noch besser wiedergibt:

(2) $K = 100\,[1 + v(e^{\varphi t} - 1)] \quad (v > 0)$.

(32) *Erläutern Sie, für welchen Spezialfall Gleichung (2) in Gleichung (1) übergeht!*

Eine Exponentialfunktion liegt auch beim **radioaktiven Zerfall** vor. Ist $N = f(t)$ die Anzahl der Atomkerne einer radioaktiven Substanz zur Zeit t, so gilt

$$N = N_0\, e^{-\lambda t}.$$

Dabei ist N_0 die anfangs vorhandene Anzahl und λ die für die betreffende Substanz charakteristische **Zerfallskonstante.** Charakteristisch für die Substanz (und der Zerfallskonstante eineindeutig zugeordnet) ist die sogenannte **Halbwertzeit** T_H. Das ist diejenige Zeit, innerhalb derer die Hälfte aller Atomkerne der Substanz zerfallen ist.

C

10 Für Radium ist $\lambda = 1{,}382 \cdot 10^{-11}\,s^{-1}$. Daraus ist die Halbwertzeit in Jahren zu berechnen.

Für $t = T_H$ ist $N = \frac{N_0}{2}$, also

$$\frac{1}{2} = e^{-1{,}382 \cdot 10^{-11}\,s^{-1}\,T_H}.$$

Logarithmieren dieser Gleichung liefert

zur Basis 10:	zur Basis e:
$-1{,}382 \cdot 10^{-11}\,s^{-1} \cdot T_H \cdot \lg e = -\lg 2$	$-1{,}382 \cdot 10^{-11}\,s^{-1} \cdot T_H = -\ln 2$

$$T_H = \frac{0{,}6931}{1{,}382}\,10^{11}\,s = \frac{0{,}6931}{1{,}382 \cdot 3{,}154} \cdot 10^4\,a = 1{,}591 \cdot 10^3\,a\,.$$

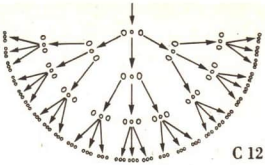
Ergebnis: Die Halbwertzeit des Radiums beträgt $1{,}59 \cdot 10^3$ Jahre.

(33) *Geben Sie allgemein den Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante λ und Halbwertzeit T_H einer radioaktiven Substanz an, und vergleichen Sie T_H mit der sogenannten mittleren Lebensdauer $t_m = \frac{1}{\lambda}$!*

[1] Die nachstehenden Ausführungen über die Erkenntnisse von Marx und Lenin gehen auf den Beitrag von B. I. Pljuchin und R. N. Nasarowa „Die gelenkte Kettenreaktion der erweiterten Reproduktion in einsektoralen und zweisektoralen Modellen" im Sammelwerk „Mentschinow, Dadajan u. a. „*Mathematische Methoden in der Wirtschaft*", erschienen im Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1966, Seite 314, zurück.

[2] Verhältnis des Produktionsvolumens pro Jahr nach t Jahren zum Produktionsvolumen im sogenannten Basisjahr ($t = 0$).

Während die Anzahl der Atomkerne beim radioaktiven Zerfall durch eine fallende Exponentialfunktion beschrieben wird, gelangt man bei Untersuchung der **Kettenreaktion** zu einer monoton wachsenden Funktion.



C 12

Das Bild C 12[1] zeigt das Schema einer ungesteuerten Kettenreaktion in reinem spaltbarem Material. Jedes wirksame freie Neutron erzeugt dabei in der „ersten Generation" ν neue, diese wiederum in der „zweiten Generation" jeweils ν neue usw.

Bezeichnet man mit l die mittlere Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Neutronengenerationen, so erhält man für die Zahl N der zur Zeit t vorhandenen Neutronen

$$N = N_0 \, e^{(\nu-1)\frac{t}{l}} .$$

Dabei ist N_0 die Anzahl der anfänglich ($t = 0$) vorhandenen wirksamen freien Neutronen. In Bild C 12 ist der **Vermehrungsfaktor** $\nu = 3$. Allgemein spricht man von einer Kettenreaktion für $\nu \geqq 1$.

Aufgaben c 37 bis 42

Wurzelgleichungen; goniometrische Gleichungen

C

12 Wurzelgleichungen, die mit einmaligem Quadrieren zu lösen sind

Sind die im Beispiel C 3 b (Lerneinheit C 2) genannten Funktionen

$$f \text{ mit } f(x) = \sqrt{7 - x} \text{ und } g \text{ mit } g(x) = \sqrt{x - 3}$$

auf Nullstellen zu untersuchen, so sind die reellen Lösungen der Gleichungen

(1) $\sqrt{7 - x} = 0$ und (2) $\sqrt{x - 3} = 0$

zu ermitteln. Solche Gleichungen bezeichnet man als **Wurzelgleichungen.** Weitere Beispiele sind

(3) $\sqrt{2x} - 3 = 3$, (4) $\sqrt{5x + 7} - \sqrt{2x + 10} = 0$,

(5) $x + \sqrt{x} = 6$, (6) $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 20} - x = 2$.

In einer Wurzelgleichung kommt an mindestens einer Stelle die Variable im Radikanden einer Wurzel vor.

Handelt es sich in der Wurzelgleichung

(*) $T_l = T_r$

lediglich um Quadratwurzeln, so versucht man die Wurzeln zu beseitigen, indem man jeden der beiden Terme T_l und T_r quadriert und so zu der neuen Gleichung

(**) $T_l^2 = T_r^2$

[1] Nach LINDNER, H.: *Grundriß der Atom- und Kernphysik.* Fachbuchverlag, Leipzig 1960, Bild 181 (Seite 153).

gelangt. Jedes x_L, das Lösung der Ausgangsgleichung (*) ist, muß auch Lösung von (**) sein, denn $T_l - T_r = 0$ für x_L hat zur Folge, daß für x_L auch

$$T_l^2 - T_r^2 = (T_l - T_r)(T_l + T_r) = 0 \cdot (T_l + T_r) = 0\,,$$

also

$$T_l^2 = T_r^2$$

gilt. Beim Quadrieren können also keine Elemente der Lösungsmenge verlorengehen. Wir können auch sagen: Daß x_L eine Lösung von $T_l^2 = T_r^2$ ist, ist notwendig dafür, daß x_L eine Lösung von $T_l = T_r$ ist. Ob es sich hier auch um eine hinreichende Bedingung handelt, wird nach einigen Beispielen deutlich werden.

11 Zu lösen ist die Gleichung $\sqrt{x} - 5 = 0$

Ordnen: $\sqrt{x} = 5$
Quadrieren: $x = 25$

Wenn die Gleichung überhaupt eine reelle Lösung hat, so kann dies nur die Zahl 25 sein. Daß 25 tatsächlich Lösung der Gleichung ist, zeigt die Probe:

Linke Seite: $\sqrt{25} - 5 = 5 - 5 = 0$; *Rechte Seite:* 0
Vergleich: $0 = 0$, also ist die *Lösung:* $x = 25$.

(34) *Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen!*

a) $\sqrt{x} - 1 = 2$ b) $\sqrt{x} - 2 = -\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{x} + 4{,}2 = 3$ d) $\sqrt{x} - 2 = -4$

C

Alle Gleichungen der Übung C 34 haben die Form $\sqrt{x} + b = a$ mit reellen a, b, doch haben nur die ersten beiden eine reelle Lösung.

12 Es ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen für a und b Gleichungen der Form $\sqrt{x} + b = a$ lösbar sind.

$$\sqrt{x} + b = a$$

Ordnen: $\sqrt{x} = a - b$
Quadrieren: $x = (a - b)^2$
Probe: Einsetzen von $(a - b)^2$ für x liefert für den Term auf der linken Seite der Gleichung

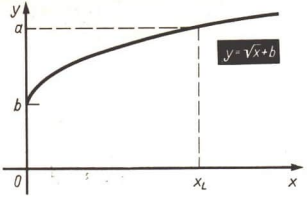
$$\sqrt{(a - b)^2} + b = |a - b| + b\,.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

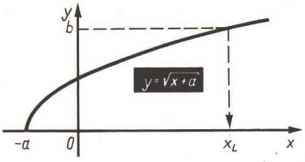
1. $a - b \geqq 0$, also $a \geqq b$. Dann ist $|a - b| + b = a - b + b = a$. Wir vergleichen mit dem Term auf der rechten Seite und stellen Übereinstimmung fest. Also ist $(a - b)^2$ Lösungsterm.
2. $a - b < 0$, also $a < b$. Dann ist $|a - b| + b = b - a + b = 2b - a$. Der Vergleich mit dem Term auf der rechten Seite der gegebenen Gleichung führt dieses Mal nicht zur Übereinstimmung: $2b - a \neq a$. Also ist in diesem Fall $(a - b)^2$ kein Lösungsterm.

Gleichungen der Form $\sqrt{x} + b = a$ mit reellen a, b haben also genau dann eine (und nur eine) reelle Lösung, wenn $a \geqq b$ ist. Diese Lösung ist dann $(a - b)^2$.

Die Bedingung $a \geqq b$ läßt sich auch aus einer graphischen Darstellung ablesen (Bild C 13).



C 13



C 14

(35) **a)** *Man berechne die Lösungen der Gleichungen*

$$\sqrt{2x} - 3 = 3 \quad \text{und} \quad 2 = \sqrt{-3x} + 0{,}5\,.$$

b) *Untersuchen Sie allgemein die Lösbarkeit von*

$$\sqrt{cx} + b = a \text{ mit reellen } a, b, c, (c \neq 0)!$$

Auch Gleichungen der Form $\sqrt{x + a} = b$ mit reellen a, b lassen sich mit einmaligem Quadrieren behandeln. Dabei kommen auf Grund der Definition der Wurzel nur solche x als Lösungen in Frage, für die gilt $x \geqq -a$, und $b \geqq 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit (Bild C 14).
Beim Lösen von Wurzelgleichungen ist übrigens zu beachten, daß das Quadrieren nur zum Ziel, dem Beseitigen der Wurzel, führt, wenn die Wurzel allein auf einer Seite der Gleichung steht. Zunächst ist also die Wurzel zu „isolieren".

C

[13] Zu lösen ist die Gleichung

$$\sqrt{x - 5} - 6 = 0$$

Isolieren der Wurzel: $\sqrt{x - 5} = 6$
Quadrieren: $x - 5 = 36$
Ordnen: $x = 41$

Probe: Rechte Seite: 0; Linke Seite: $\sqrt{41 - 5} - 6 = \sqrt{36} - 6 = 0$
Vergleich: $0 = 0$, also ist die
Lösung: $x = 41$.

(36) **a)** *Berechnen Sie die Lösung der Gleichung* $\sqrt{3x - 2} = 8$*!*
b) *Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen für die reellen Parameter* a, b, c, $(c \neq 0)$, *die Gleichung* $\sqrt{cx + a} = b$ *eine Lösung hat, und geben Sie den Lösungsterm an!*

13

[14] **a)** $\sqrt{5x + 7} - \sqrt{2x + 10} = 0$

Isolieren der Wurzel(n): $\sqrt{5x + 7} = \sqrt{2x + 10}$
Quadrieren: $5x + 7 = 2x + 10$
Ordnen: $3x = 3$
Division durch 3: $x = 1$

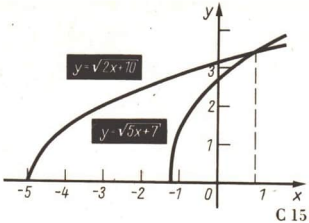
Probe: Linke Seite:

$$\sqrt{5 \cdot 1 + 7} - \sqrt{2 \cdot 1 + 10} =$$
$$= \sqrt{12} - \sqrt{12} = 0;$$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $0 = 0$, also ist die *Lösungsmenge:* $\{1\}$.

Die Lösung ist auch die Abszisse des Schnittpunktes der Kurven zu den Funktionen $y = \sqrt{5x + 7}$ und $y = \sqrt{2x + 10}$ im gleichen Koordinatensystem (Bild C 15).



C 15

b) $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 7} = 0$

Isolieren der Wurzel (n): $\sqrt{2x - 1} = -\sqrt{x + 7}$

Quadrieren: $2x - 1 = x + 7$

Ordnen: $x = 8$

Probe: Linke Seite: $\sqrt{2 \cdot 8 - 1} + \sqrt{8 + 7} = \sqrt{15} + \sqrt{15} \neq 0$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $\sqrt{15} + \sqrt{15} \neq 0$.

Die Lösungsmenge ist leer; die Gleichung hat keine reellen Lösungen.

Daß die Gleichung im Beispiel C 14b keine Lösung hat, hätte man auch ohne den Versuch des Lösens sehen können. Da Wurzeln nichtnegative reelle Zahlen sind, könnte sich als Summe zweier Wurzeln höchstens dann Null ergeben, wenn jede für sich und damit ihr Radikand Null wird. $x + 7 = 0$ und $2x - 1 = 0$ sind aber nicht für das gleiche x möglich.

C

(37) *Veranschaulichen Sie den Sachverhalt im Beispiel C 14b auch, indem Sie die Bilder der Funktionen $y = \sqrt{2x - 1}$ und $y = -\sqrt{x + 7}$ skizzieren!*

Die Gleichung im Beispiel C 14b, deren Lösungsmenge leer ist, obwohl die durch Quadrieren erhaltene Gleichung eine Lösung hat, zeigt:

11 ▶ **Die beim Quadrieren entstehende Gleichung ist nicht immer der Ausgangsgleichung äquivalent.**

Da sowohl $T_l = T_r$ als auch $T_l = -T_r$ zu $T_l^2 = T_r^2$ führen, geht gewissermaßen ein „Vorzeichenunterschied verloren". Daß x_L eine Lösung der durch Quadrieren entstandenen Gleichung ist, ist deshalb nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung dafür, daß x_L auch Lösung der Ausgangsgleichung ist. Aus diesem Grunde hat bei Wurzelgleichungen, die mittels Quadrieren gelöst werden, die Probe nicht nur den Zweck, das Vorhandensein von Rechenfehlern aufzudecken, sondern ist eine mathematische Notwendigkeit.

(38) *Untersuchen Sie die folgenden Gleichungen!*

a) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{7x - 2} = 0$ **b)** $\sqrt{5x + 7} = \sqrt{2x + 1}$ **c)** $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 3} = 0$

$x = \frac{3}{4}$ kL. kL.

15 Zu lösen ist die Gleichung $x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

Isolieren der Wurzel: $x - 6 = -\sqrt{x}$

Quadrieren: $x^2 - 12x + 36 = x$

Normalform: $x^2 - 13x + 36 = 0$

Anwenden der Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169 - 144}{4}} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = 9;\ x_2 = 4$$

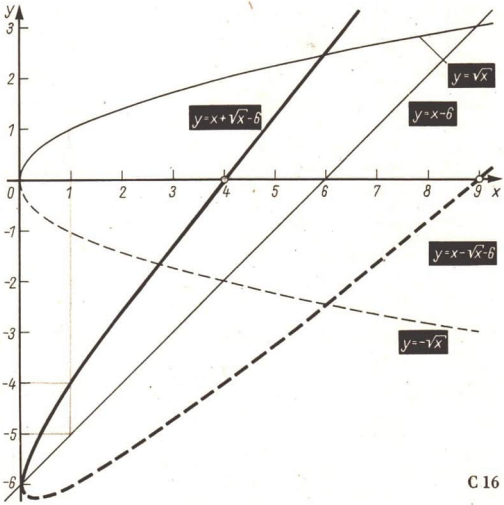
Probe für $x_1 = 9$:
Linke Seite: $9 + \sqrt{9} - 6 = 6$
Rechte Seite: 0
Vergleich: $6 \neq 0$

Probe für $x_2 = 4$:
Linke Seite: $4 + \sqrt{4} - 6 = 0$
Rechte Seite: 0
Vergleich: $0 = 0$

Lösung: $x = 4$.

(39) a) *Zeigen Sie, daß die Substitution $z = \sqrt{x}$ über das Lösen der entstehenden quadratischen Gleichung in z zur gleichen Lösung führt!*

b) *Erläutern Sie die beiden für $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ und $x - \sqrt{x} - 6 = 0$ im Bild C16 dargestellten graphischen Lösungsverfahren!*



C 16

So, wie Gleichungen, in denen die Variable in Quadratwurzeln auftritt, durch Quadrieren zu lösen sind, so versucht man, Gleichungen mit n-ten Wurzeln ($n > 2$, natürlich) durch Potenzieren mit n zu lösen.

16 Zu lösen ist die Gleichung $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 20} - x = 2$.

Isolieren der Wurzel: $\sqrt[3]{x^3 + 6x + 20} = x + 2$

Potenzieren mit 3: $x^3 + 6x + 20 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Ordnen: $6x^2 + 6x - 12 = 0$

Normalform: $x^2 + x - 2 = 0$

Anwenden der Lösungsformel oder „Raten" nach Wurzelsatz von Vieta[1]:

$$x_1 = 1;\ x_2 = -2$$

Probe für $x_1 = 1$:
Linke Seite: $\sqrt[3]{1^3 + 6 \cdot 1 + 20} - 1$
$= \sqrt[3]{27} - 1 = 2$
Rechte Seite: 2
Vergleich: $2 = 2$

Probe für $x_2 = -2$:
Linke Seite: $\sqrt[3]{(-2)^3 + 6 \cdot (-2) + 20} + 2$
$= \sqrt[3]{0} + 2 = 2$
Rechte Seite: 2
Vergleich: $2 = 2$

Lösungsmenge: $\{1; -2\}$.

Aufgaben c 43 bis 48

14 Wurzelgleichungen, die mehrmaliges Quadrieren erfordern

Bei Gleichungen, in denen die Variable im Radikanden mehrerer Wurzeln auftritt, reicht zuweilen einmaliges Quadrieren nicht aus.

17 $$\sqrt{7x - 12} + \sqrt{13 - 3x} - 5 = 0$$

Isolieren einer Wurzel: $\sqrt{7x - 12} = 5 - \sqrt{13 - 3x}$

Quadrieren: $7x - 12 = 25 - 10\sqrt{13 - 3x} + 13 - 3x$

Ordnen: $10x - 50 = -10\sqrt{13 - 3x}$

Division durch 10: $x - 5 = -\sqrt{13 - 3x}$

Quadrieren: $x^2 - 10x + 25 = 13 - 3x$

Normalform: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Anwenden der Lösungsformel oder „Raten" nach dem Wurzelsatz von Vieta:

$$x_1 = 4;\ x_2 = 3$$

Probe für $x_1 = 4$:
Linke Seite: $\sqrt{7 \cdot 4 - 12} + \sqrt{13 - 3 \cdot 4} - 5 = \sqrt{16} + \sqrt{1} - 5 = 0$
Rechte Seite: 0
Vergleich: $0 = 0$

Probe für $x_2 = 3$:
Linke Seite: $\sqrt{7 \cdot 3 - 12} + \sqrt{13 - 3 \cdot 3} - 5 = \sqrt{9} + \sqrt{4} - 5 = 0$
Vergleich: $0 = 0$

Lösungen: $x_1 = 4;\ x_2 = 3$.

40 *Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung*

$$\sqrt{9x + 7} + \sqrt{4x + 1} = \sqrt{25x + 14}\,!$$

Überlegen Sie vorher, ob hier wegen des Auftretens von drei Wurzeln dreimaliges Quadrieren erforderlich ist!

Mehrmaliges Quadrieren kann auch dadurch notwendig werden, daß im Radikanden einer Wurzel weitere Wurzeln auftreten.

[1] Francois Viète (1540 bis 1603), französischer Mathematiker

18

$$\sqrt{x+1+\sqrt{3x+4}} = 3$$

Quadrieren: $x + 1 + \sqrt{3x+4} = 9$

Isolieren der Wurzel: $\sqrt{3x+4} = 8 - x$

Quadrieren: $3x + 4 = 64 - 16x + x^2$

Normalform: $x^2 - 19x + 60 = 0$

$x_1 = 15 \quad x_2 = 4$

Probe für $x_1 = 15$:

Linke Seite: $\sqrt{15 + 1 + \sqrt{3 \cdot 15 + 4}} = \sqrt{16 + \sqrt{49}} = \sqrt{23}$

Rechte Seite: 3

Vergleich: $\sqrt{23} \neq 3$

Probe für $x_2 = 4$:

Linke Seite: $\sqrt{4 + 1\sqrt{3 \cdot 4 + 4}} = \sqrt{5 + \sqrt{16}} = \sqrt{9} = 3$

Rechte Seite: 3

Vergleich: $3 = 3$

Lösung: $x = 4$

41 *Lösen Sie die Gleichung* $\sqrt{x + 1 - \sqrt{3x+4}} = 3$*!*

Aufgaben c 49 bis 51

15 Wurzelgleichungen mit Parametern

Bei den Untersuchungen auf Lösbarkeit in der Lerneinheit C 12 handelte es sich im Grunde um Wurzelgleichungen mit Parametern. Beim Auftreten von Parametern ist für diese stets der Bereich zu ermitteln, für den es Lösungen gibt, wie das im Beispiel C 12 durch die Probe geschehen ist.

C

19

$$(*) \quad \sqrt{x+a} = a + \sqrt{x}$$

Quadrieren: $x + a = a^2 + 2a\sqrt{x} + x$

Isolieren der Wurzel: $a - a^2 = 2a\sqrt{x}$

Quadrieren: $(**)\ a^2(1-a)^2 = 4a^2x$

Für $a = 0$ ist jedes reelle x Lösung von (**), aber nur jedes nichtnegative x Lösung von (*), da $\sqrt{x}$ nur für $x \geqq 0$ erklärt ist.

Für $a \neq 0$ folgt aus (**) $x = \dfrac{(1-a)^2}{4}$.

Probe: Linke Seite: $\sqrt{\dfrac{(1-a)^2}{4} + a} = \sqrt{\dfrac{(1+a)^2}{4}} = \dfrac{1}{2}|1+a|$

Rechte Seite: $a + \sqrt{\dfrac{(1-a)^2}{4}} = a + \dfrac{1}{2}|1-a| = \dfrac{1}{2}(2a + |1-a|)$

$|1+a| = 2a + |1-a|$ gilt aber genau für $-1 \leqq a \leqq 1$.

Daher erhalten wir:

Für $a = 0$ ist jedes $x \geqq 0$ Lösung von (*).

Für $|a| \leqq 1$ ist der Lösungsterm $\dfrac{(1-a)^2}{4}$. Für $|a| > 1$ existiert keine Lösung.

42 *Weisen Sie nach, daß – wie im Beispiel C 19 behauptet –*

$|1 + a| = 2a + |1 - a|$ *genau für* $|a| \leqq 1$ *gilt!*

Aufgabe c 52

16 Goniometrische Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion

Gleichungen, bei denen die Variable auch im Argument von Winkelfunktionen auftritt, werden als **goniometrische Gleichungen**[1] bezeichnet. Wenn bisher zu bekannten Winkelfunktionswerten zugehörige Winkel bestimmt wurden, so handelte es sich dabei im Grunde um das Lösen goniometrischer Gleichungen.

(43) *Geben Sie Winkel x (im Bogenmaß) an, für die gilt*

a) $\sin x = 0{,}5$, **b)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, **c)** $\tan x = \sqrt{3}$, **d)** $\cot x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ *!*

Bei den bisherigen Bestimmungen von Winkeln zu vorgegebenen Winkelfunktionswerten kamen i. a. (z. B. bei Dreiecksberechnungen) nur ein oder zwei Winkel als Lösungen in Betracht. Vollständiges Lösen einer goniometrischen Gleichung bedeutet aber die Ermittlung aller Werte für die Variable, die die Gleichung erfüllen. Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen haben nämlich viele goniometrische Gleichungen mit einer Lösung unendlich viele, d. h., wenn ihre Lösungsmenge nicht die leere Menge ist, so enthält sie unendlich viele Elemente.

20 $$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

C

Im Bereich $0 \leqq x < 2\pi$ hat diese Gleichung die Lösungen $\frac{\pi}{3}$ und $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Wegen der kleinsten Periode 2π ist dann die Lösungsmenge die Menge derjenigen x, für die gilt

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{mit} \quad k \in G.$$

Da die Lösungen goniometrischer Gleichungen der Formen $\sin x = a$, $\cos x = a$; $\tan x = a$; $\cot x = a$ $(a \in P)$ sofort mit Hilfe der Tafeln für die Winkelfunktionswerte bestimmt werden können, versucht man, kompliziertere goniometrische Gleichungen auf diese Grundtypen zurückzuführen.

21 $$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,; \quad \text{Substitution } z = x + \frac{\pi}{6}$$

$$\sin z = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{liefert nach Beispiel C 20 als Lösungen}$$

$$z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in G)$$

Zur Ermittlung der Lösungen für die Ausgangsgleichung ist die Substitution rückgängig zu machen:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in G)$$

[1] Nach gonia (griechisch), Winkel und métrein (griechisch), messen.

Probe: Linke Seite: $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Rechte Seite: $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, Vergleich: $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Linke Seite: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$

$= \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Rechte Seite: $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, Vergleich: $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Da in den Tafeln der Winkelfunktionswerte die Argumente im Gradmaß angegeben sind, werden die Lösungen goniometrischer Gleichungen ebenfalls meist im Gradmaß angegeben. Entsprechend enthalten die Gleichungen selbst häufig Winkel im Gradmaß. Die Gleichung im Beispiel C 21 würde dann lauten $\sin(x + 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ihre Lösung $x = 30° + k \cdot 360°$ oder $x = 90° + k \cdot 360°$ mit $k \in G$.

(44) *Ermitteln Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen!*

a) $\sin(x + 20°) = 1$

b) $\cos(x + 10°) = 0{,}937\,3$

c) $\tan(x - 20°) = 2{,}747$

d) $\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}577\,4$

e) $2 \cdot \sin(x + 30°) = 1$

f) $3 \cdot \tan(x - 22{,}5°) = 0{,}839\,1$

C

17

22 $2 \cdot \sin^2 x - 0{,}5 = 0$

Substitution $\sin x = v$ liefert die rein-quadratische Gleichung

$$2v^2 - 0{,}5 = 0$$
$$v^2 = 0{,}25$$

Ihre Lösungen sind $v_1 = 0{,}5$; $v_2 = -0{,}5$.
Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist also die Menge aller x, für die gilt

$\sin x = 0{,}5$ oder $\sin x = -0{,}5$.

Das ist aber die Menge aller x mit

$x = 30° + k \cdot 360°$ oder $x = 150° + k \cdot 360°$ oder
$x = 330° + k \cdot 360°$ oder $x = 210° + k \cdot 360°$.

Das läßt sich zusammenfassen zu

$x = 30° + k \cdot 180°$ oder $x = 150° + k \cdot 180°$ $(k \in G)$.

Probe: Linke Seite: $2 \cdot \sin^2(30° + k \cdot 180°) - 0{,}5 = 2(\pm\sin 30°)^2 - 0{,}5$

$= 2 \cdot \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 - 0{,}5 = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$

Rechte Seite: 0; Vergleich: $0 = 0$.

$$\text{Linke Seite: } 2\cdot\sin^2(150^\circ + k\cdot 180^\circ) - 0{,}5 = 2(\pm\sin 150^\circ)^2 - 0{,}5$$
$$= 2(\pm\sin 30^\circ)^2 - 0{,}5$$
$$= 2\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 - 0{,}5 = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$$

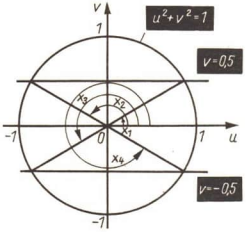
Rechte Seite: 0; Vergleich: $0 = 0$.

Zu beachten ist $\sin(\alpha + k\cdot 180^\circ) = \begin{cases} +\sin\alpha \text{ für gerade } k. \\ -\sin\alpha \text{ für ungerade } k. \end{cases}$

Die Lösungen der Gleichung im Beispiel C 22, die im Bereich zwischen 0° und 360° liegen, die sogenannten **Hauptwerte**, kann man sich auch graphisch veranschaulichen. Man setzt dazu neben $v = \sin x$ noch $u = \cos x$ und nutzt die für alle Winkel x gültige Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ aus.

(45) a) *Erläutern Sie die graphische Veranschaulichung der Lösung in Bild C 17!*
b) *Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung*

$$3\tan^2 x - 1 = 0!$$



C 17

23

$$\tan^2 x - (\sqrt{3}+1)\tan x + \sqrt{3} = 0 \qquad \tan x = z$$
$$z^2 - (\sqrt{3}+1)z + \sqrt{3} = 0$$
$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3}}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
$$\tan x = \sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \tan x = 1$$
$$x = 60^\circ + k\cdot 180^\circ \text{ oder } x = 45^\circ + k\cdot 180^\circ$$

(46) a) *Führen Sie die Probe selbst durch!*
b) *Überlegen Sie, ob bei den Umformungen in den Beispielen C 22 und C 23 jeweils äquivalente Gleichungen entstanden sind und welchen Sinn hier die Probe hat!*

Aufgaben c 53 bis 55

18 Gleichungen mit mehreren Winkelfunktionen des gleichen Arguments

Bei Gleichungen, in denen mehrere Winkelfunktionen des gleichen Arguments auftreten, versucht man, auf eine Winkelfunktion zu reduzieren, indem man Beziehungen wie $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ oder $\tan x \cdot \cot x = 1$ ausnutzt.

24

$$4 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin x - 2 = 0$$
$$2 \cdot \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Wir setzen $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ und erhalten

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$$
$$-2 \cdot \sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$
$$\sin^2 x + \frac{1}{2} \cdot \sin x - \frac{1}{2} = 0.$$

Das ist eine quadratische Gleichung in $\sin x$; also erhalten wir

$$\sin x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$\sin x = -1 \quad \text{oder} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt für die Hauptwerte

$$x_1 = 270°;\ x_2 = 30°;\ x_3 = 150°.$$

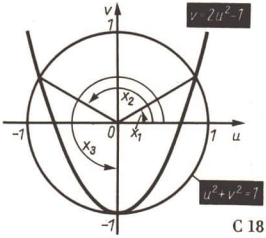
Die gesamte Lösungsmenge kann geschrieben werden als

$$\text{Menge aller } x \text{ mit } x = 30° + k \cdot 120°,\ (k \in G)\,.$$

Eine graphische Veranschaulichung der Hauptwerte zeigt das Bild C 18.

47 a) *Erläutern Sie die graphische Darstellung in Bild C 18!*

b) *Durchdenken Sie, ob eine Probe notwendig ist! Warum wäre ein Ersetzen von* $\sin x$ *durch* $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ *unzweckmäßiger gewesen?*



C 18

25

$$\sin x = \cot x$$
$$\sin x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Multiplikation mit $\sin x$:

$$\sin^2 x = \cos x$$
$$1 - \cos^2 x = \cos x$$
$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$
$$\cos x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

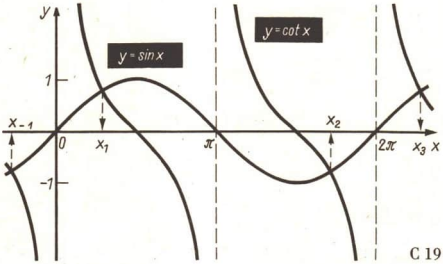
$$\cos x = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \quad \text{oder} \quad \cos x = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\cdot 1{,}236 = 0{,}618 \quad \text{oder} \quad \cos x = -\frac{1}{2}\cdot 3{,}236.$$

Die erste Gleichung liefert

$$x = 51{,}83^\circ + k\cdot 360^\circ \text{ oder } x = 308{,}17^\circ + k\cdot 360^\circ,\ (k \in G).$$

Das Bild C 19 zeigt eine graphische Veranschaulichung der Lösungen, diesmal unter Verwendung der Bildkurven für $y = \sin x$ und $y = \cot x$.



C 19

C

(48) a) *Warum liefert die zweite Gleichung keinen Beitrag zur Lösung?*
b) *Erläutern Sie, inwiefern die Multiplikation mit sin x im zweiten Schritt eine Erweiterung des zulässigen Bereichs für x bedeutet!*

Aufgaben c 56 und 57

19 Gleichungen der Form $a \sin x + b \cos x = c$

Unter den Gleichungen mit mehreren Winkelfunktionen des gleichen Arguments sollen jetzt speziell Gleichungen der Form $a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = c$ mit reellen a, b, c betrachtet werden, wobei $a \neq 0$, $b \neq 0$ gilt.

26

$$5\cdot\sin x + 2\cdot\cos x = 4$$
$$5\cdot\sin x = 4 - 2\cdot\cos x$$
$$25\cdot\sin^2 x = 16 - 16\cdot\cos x + 4\cdot\cos^2 x.$$

Wegen $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ erhalten wir

$$25 - 25\cdot\cos^2 x = 16 - 16\cdot\cos x + 4\cdot\cos^2 x$$
$$29\cdot\cos^2 x - 16\cdot\cos x - 9 = 0$$
$$\cos^2 x - 0{,}552\cdot\cos x - 0{,}310 = 0 \text{ (Rechenstab!)}$$
$$\cos x = 0{,}276 \pm \sqrt{0{,}076 + 0{,}310}$$
$$= 0{,}276 \pm \sqrt{0{,}386} = 0{,}276 \pm 0{,}621$$
$$\cos x = 0{,}897 \quad \text{oder} \quad \cos x = -0{,}345$$

Im Bereich $0° \leqq x < 360°$ liefert das

$$x_1 = 26{,}2°;\ x_2 = 335{,}8°;\ x_3 = 110{,}2°;\ x_4 = 249{,}8°.$$

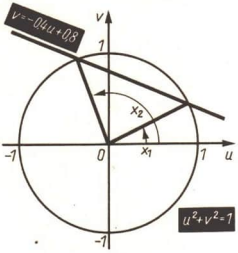
Probe: x_1: $5 \cdot 0{,}442 + 2 \cdot 0{,}897 = 2{,}210 + 1{,}794 = 4{,}004 \approx 4$

x_2: $5 \cdot (-0{,}442) + 2 \cdot 0{,}897 \neq 4$

x_3: $5 \cdot 0{,}938 + 2 \cdot (-0{,}345) = 4{,}69 - 0{,}69 = 4$

x_4: $5 \cdot (-0{,}938) + 2 \cdot (-0{,}345) \neq 4$

Lösung: $x = 26{,}2° + k \cdot 360°$ oder $x = 110{,}2° + k \cdot 360°$, $(k \in G)$.
Eine graphische Veranschaulichung der Lösungen zeigt das Bild C 20.



C 20

(49) a) *Erläutern Sie die graphische Veranschaulichung!*
b) *Welcher Lösungsschritt ist für das Auftreten von Scheinlösungen verantwortlich?*

Scheinlösungen werden bei einem anderen Lösungsverfahren für Gleichungen dieses Typs vermieden:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \quad (a \neq 0;\ b \neq 0)$$

$$\sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$

Nun wird ein **Hilfswinkel** φ eingeführt durch

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad -90° < \varphi < 90°, \left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc} \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Da $\tan \varphi$ für $-90° < \varphi < 90°$ jeden reellen Wert genau einmal annimmt, existiert φ für alle reellen a, b mit $a \neq 0$; $b \neq 0$ und ist eindeutig bestimmt.
Wegen $\tan \varphi = \dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ kann man dann schreiben

$$\sin x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \cos x = \frac{c}{a},$$

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi.$$

Nach einem Additionstheorem der Sinusfunktion (↗ Seite 96) ist das aber

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi.$$

So erhält man zunächst $x + \varphi$ und daraus x.

27

$$5 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x = 4 \quad (\nearrow \text{ Beispiel C 26})$$
$$\sin x + 0{,}4 \cdot \cos x = 0{,}8$$
$$\tan \varphi = 0{,}4;\ \varphi = 21{,}8°;\ \cos \varphi = 0{,}928\,5$$
$$\sin (x + 21{,}8°) = 0{,}8 \cdot 0{,}928\,5$$
$$\sin (x + 21{,}8°) = 0{,}742\,8$$
$$x + 21{,}8° = 48{,}0° + k \cdot 360° \quad \text{oder} \quad x + 21{,}8° = 132° + k \cdot 360°$$
$$x = 26{,}2° + k \cdot 360° \quad \text{oder} \quad x = 110{,}2° + k \cdot 360°,\ (k \in G)$$

50 *Erläutern Sie unter Benutzung von* $\cos^2 \varphi = \dfrac{1}{1 + \tan^2 \varphi}$, *warum* $|c| \leqq \sqrt{a^2 + b^2}$ *eine notwendige Bedingung dafür ist, daß eine Gleichung des Typs*

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \ (a \neq 0;\ b \neq 0)$$

Lösungen hat!

Aufgaben c 58 und 59

20 Gleichungen, die trigonometrische Funktionen mit verschiedenen Argumenten enthalten

Meist versucht man, Gleichungen dieser Art mit Hilfe der Additionstheoreme bzw. daraus abgeleiteter Formeln auf Gleichungen mit Funktionen gleicher Argumente zurückzuführen.

C

28 **a)** $\sin x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1{,}5$

Nach $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ ($\nearrow$ Seite 96) erhalten wir

$$2 \cdot \sin \frac{x + \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \cdot \cos \frac{x - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} = 1{,}5$$
$$2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}5$$
$$2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1{,}5$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5 \cdot \sqrt{3}$$
$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad (k \in G)$$

Lösung: $\quad x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad$ oder $\quad x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi.$

b) $4 \cdot \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) - 2 \cdot \cos x = \sqrt{3}.$

Nach einem Additionstheorem ($\nearrow$ Seite 96) gilt

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cdot \cos x.$$

So geht die Ausgangsgleichung über in

$$2\sqrt{3}\cdot\sin x + 2\cdot\cos x - 2\cdot\cos x = \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}\cdot\sin x = \sqrt{3}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad (k \in G)$$

(51) *Führen Sie die Probe durch!*

29 $$\sin x = \cos\frac{x}{2}.$$

Die Beziehung $\sin x = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$ (↗ Seite 96) liefert

$$2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\cdot\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0.$$

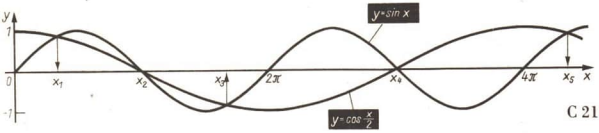
Daraus folgt

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{oder} \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in G)$$

$$x = \pi + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \quad \text{oder} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi.$$

Eine graphische Veranschaulichung der Lösungen durch die Bildkurven zu $y = \sin x$ und $y = \cos\frac{x}{2}$ zeigt das Bild C 21.



C 21

(52) *Dividiert man in Beispiel C 29 bei der Gleichung*

$$2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}$$

auf jeder Seite durch $\cos\frac{x}{2}$, *so erhält man*

$$2\cdot\sin\frac{x}{2} = 1.$$

Erläutern Sie, warum ein solches Vorgehen für das Lösen der Gleichung unbrauchbar ist!

30

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos 2x$$

$$2\left(\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x\right)\left(\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x\right) = \cos 2x$$

$$2\left(\sin^2\frac{\pi}{4} \cdot \cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{4} \cdot \sin^2 x\right) = \cos 2x$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$$

$$\cos 2x = \cos 2x$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist die Menge aller reellen Zahlen.

53 *Vergewissern Sie sich am Beispiel C 30 durch Rückschluß von der letzten Zeile auf die Ausgangsgleichung, daß wirklich jede reelle Zahl Lösung ist!*

Es sei abschließend darauf hingewiesen, daß nicht alle goniometrischen Gleichungen analytisch auflösbar sind. Zu den nicht auflösbaren goniometrischen Gleichungen gehören solche Gleichungen, bei denen x nicht nur im Argument einer Winkelfunktion vorkommt, z. B. die Gleichung $x - \tan x = 0$. Aufgaben dieses Typs behandeln wir hier nicht.

Aufgaben c 60 bis 67

C

21 Nullstellen und Unendlichkeitsstellen nichtrationaler Funktionen

Die in den Lerneinheiten C 12 bis C 20 behandelten Lösungsverfahren für Wurzelgleichungen und goniometrische Gleichungen ermöglichen es, auch entsprechende nichtrationale Funktionen auf Nullstellen und Unendlichkeitsstellen zu untersuchen.

31 Die Funktion $y = \frac{1}{2} \cdot \tan x$ ist auf Nullstellen und Unendlichkeitsstellen zu untersuchen.
Nullstellen sind genau diejenigen reellen Zahlen x_N, für die gilt

$$\frac{1}{2} \cdot \tan x_N = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sin x_N}{2 \cos x_N} = 0.$$

Das gilt genau für $x_N = k\pi$ mit $k \in G$.
Für die Unendlichkeitsstellen x_u muß gelten:

$$\lim_{x \to x_u} \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \tan x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to x_u} \frac{2 \cdot \cos x}{\sin x} = 0.$$

Das ist genau für $x_u = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ mit $k \in G$ der Fall. Wegen $\tan x > 0$ für $k\pi < x < \frac{(2k+1)\pi}{2}$ und $\tan x < 0$ für $\frac{(2k-1)\pi}{2} < x < k\pi$ gilt für jede Unendlichkeitsstelle x_u: Die Funktion wächst bei Annäherung an x_u von links unbegrenzt, bei Annäherung an x_u von rechts fällt sie unter jede Schranke.

Nullstellen: $x_N = k\pi$, $(k \in G)$
Unendlichkeitsstellen:

$$x_u = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad \text{mit} \quad \lim_{\substack{x \to x_u \\ x < x_u}} \frac{1}{2} \tan x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to x_u \\ x > x_u}} \frac{1}{2} \tan x = -\infty.$$

(54) *Ermitteln Sie für die Funktion $y = (x-1) \cdot \cot x$ Nullstellen und Unendlichkeitsstellen!*

32 Es sollen für die Funktion $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ Nullstellen und Unendlichkeitsstellen ermittelt werden.

$\dfrac{\sin 2x_N}{\cos x_N} = 0$ ist gleichbedeutend mit

$\sin 2x_N = 0$ und $\cos x_N \neq 0$.

Aus $\sin 2x_N$ folgt $2x_N = k\pi$ oder $x_N = \dfrac{k\pi}{2}$, $(k \in G)$.

Nun ist aber $\cos \dfrac{k\pi}{2} \neq 0$ nur für gerades k, also liegen nur dort Nullstellen vor.

Für die Unendlichkeitsstellen x_u müßte gelten: $\lim\limits_{x \to x_u} \dfrac{\cos x}{\sin 2x} = 0$.

Nun ist aber

$$\lim_{x \to x_u} \frac{\cos x}{\sin 2x} = \lim_{x \to x_u} \frac{\cos x}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \lim_{x \to x_u} \frac{1}{2 \cdot \sin x} \neq 0$$

für alle x_u. Also gibt es keine Unendlichkeitsstellen.

Die Stellen x_0 mit $\cos x_0 = 0$, also $x_0 = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $(k \in G)$, sind Lücken

$$\left(\text{mit} \lim_{x \to x_0} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos x} = \lim_{x \to x_0} 2 \cdot \sin x = \begin{cases} 2 \text{ für gerades } k \\ -2 \text{ für ungerades } k \end{cases}\right).$$

Ergebnis:

Nullstellen: $x_N = k\pi$, $(k \in G)$; Lücken: $x_0 = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k \in G)$.
Keine Unendlichkeitsstellen.

(55) *Begründen Sie das Ergebnis von Beispiel C 32 auch, indem Sie $\sin 2x$ nach einer Doppelwinkelformel umformen, und ziehen Sie Folgerungen für den Definitionsbereich der betrachteten Funktion!*

33 Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der Funktion f mit $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ sind zu ermitteln.
Für die Nullstellen x_N muß gelten

$\dfrac{x_N}{\sqrt{x_N - 1}} = 0$, also $x_N = 0$. Für $x = 0$ ist aber $\sqrt{x-1}$ nicht definiert, also liegt 0 außerhalb des Definitionsbereichs der Funktion, die demnach keine Nullstelle besitzt.

Für die Unendlichkeitsstellen x_u muß gelten

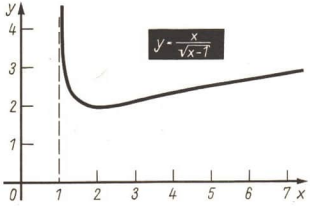
$$\frac{\sqrt{x_u - 1}}{x_u} = 0, \quad \text{also} \quad \sqrt{x_u - 1} = 0, \quad \text{mithin} \quad x_u \neq 1.$$

Für $x < x_u$ ist $\sqrt{x-1}$ nicht erklärt, bei Annäherung an x_u von rechts wächst $f(x)$ unbeschränkt. Die Unendlichkeitsstelle liegt also am Rande des Definitionsbereichs der Funktion (Bild C 22).

Ergebnis:

Keine Nullstellen; Unendlichkeitsstelle $x_u = 1$ mit $\lim\limits_{\substack{x \to x_u \\ x > x_u}} f(x) = \infty$ und $f(x)$ nicht definiert für $x < x_u = 1$.

Aufgaben c 68 und 69



C 22

C

Einige Grenzwerte nichtrationaler Funktionen

22 Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Um Winkelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen mit Methoden der Differentialrechnung untersuchen zu können, ist die Kenntnis spezieller Grenzwerte notwendig.

Grundlegend für die Untersuchung der Winkelfunktionen ist $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

(56) *Betrachten Sie $\frac{\sin x}{x}$ für verschiedene kleine Winkel (Bogenmaß beachten!), und gewinnen Sie so eine Vermutung über $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$!*

Zur Berechnung von $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ betrachten wir in einem Kreis mit dem Radius r einen spitzen Winkel AOB; $\overline{BD}$ sei das Lot von B auf OA, AC Tangente an den Kreis im Punkt A (Bild C 23).

Für die Flächeninhalte der Dreiecke DOB und AOC sowie des Kreissektors AOB gilt dann

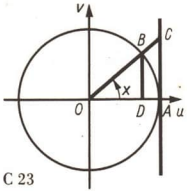
$$A_{\Delta DOB} \leqq A_{\text{Sektor } AOB} \leqq A_{\Delta AOC}.$$

Ist x das Bogenmaß von $\sphericalangle AOB \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$,

so heißt das:

$$\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin x \cdot \cos x \leqq \frac{1}{2} r^2 x \leqq \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x \cdot \cos x \leqq \quad x \quad \leqq \frac{\sin x}{\cos x}.$$



C 23

Wegen $\sin x > 0$ und $\cos x > 0$ führen Division durch $\sin x$ und nachfolgende Reziprokenbildung zu

$$\cos x \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} \geqq \frac{\sin x}{x} \geqq \cos x.$$

Wegen $\cos(-x) = \cos x$ und $\sin(-x) = -\sin x$ gilt diese Ungleichung aber auch für negative Winkel mit $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Demzufolge gilt auch

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \geqq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geqq \lim_{x \to 0} \cos x$$

also

$$1 \geqq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geqq 1$$

12 $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

(57) *Zeigen Sie unter Benutzung dieses Grenzwertes, daß auch* $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ *ist! Ziehen Sie aus beiden Grenzwerten Folgerungen für die Sinus- und Tangenswerte nahe bei 0° gelegener Winkel!*

Aufgaben c 70 bis 72

23 Der Grenzwert $\lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

Eine ähnliche grundlegende Rolle wie $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ für die Differentiation der Winkelfunktionen spielt der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

für Logarithmus- und Exponentialfunktionen.

Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ ist im gesamten Definitionsbereich $0 < x < \infty$ stetig, eine Tatsache, auf deren Beweis hier verzichtet werden muß. Die Stetigkeit bedeutet: Strebt in $\log_a x$ das Argument x gegen $\xi > 0$, so strebt $\log_a x$ gegen $\log_a \xi$:

$$\lim_{x \to \xi} (\log_a x) = \log_a \left(\lim_{x \to \xi} x\right) = \log_a \xi .$$

Betrachten wir Folgen (x_n) von x-Werten, so können wir auch sagen:
Eine Folge positiver Glieder mit positivem Grenzwert darf gliedweise logarithmiert werden.
Deshalb ist

$$\lim_{n \to \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \log_a \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \log_a e .$$

Nun wurde bereits in Lerneinheit C 9 erwähnt (ohne Beweis), daß

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

für beliebige reelle x gilt. Das bedeutet

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{\frac{1}{x}} &= \log_a \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_a e . \end{aligned}$$

C 13 ▶

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e}$$

(58) *Betrachten Sie die Beziehung C 13 speziell für natürliche Logarithmen; setzen Sie also $a = e$!*

Aufgabe c 73

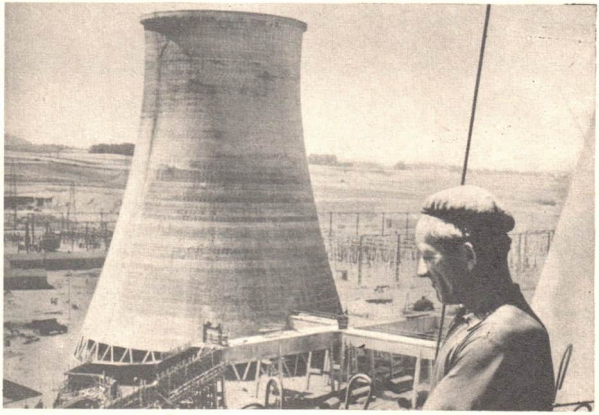
D. Differential- und Integralrechnung und Anwendungen

126 **Differentiation und Integration nichtrationaler Funktionen**
Zur Wiederholung (126) · Differentiation zueinander inverser Funktionen (127) · Differentiation und Integration der Potenzfunktionen (130) · Differentiation von verketteten Funktionen (132) · Integration durch Substitution (137) · Differentiation der Winkelfunktionen (140) · Differentiation und Integration der Logarithmusfunktionen (144) · Differentiation und Integration der Exponentialfunktionen (146)

Kurvendiskussionen; Extremwertaufgaben
149 Zur Wiederholung (149) · Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten (156) · Extremwertaufgaben (159)

163 **Flächeninhalts- und Volumenberechnungen**
Flächeninhaltsberechnungen (Wiederholung) (163) · Flächeninhalt einer Kreisfläche (167) · Volumenberechnungen (168) · Volumen von Rotationskörpern (172)

Die Differential- und Integralrechnung (zu dem Begriff Infinitesimalrechnung zusammengefaßt) bildet die mathematische Grundlage für die Bewältigung sehr vieler Probleme, die bei der Erforschung der Natur und bei der Weiterentwicklung der Technik aufgeworfen werden. So findet sie zum Beispiel ihre Anwendung im Maschinenbau, im Bauwesen, in der Elektrotechnik. Die Herleitung mancher physikalischen Formel ist nur über die Infinitesimalrechnung möglich. Andererseits dient sie auch bei vielen Berechnungen als ein Hilfsmittel, das die Berechnung gegenüber anderen Verfahren außerordentlich vereinfacht. Das Bild soll auf die Möglichkeit verweisen, das Volumen komplizierter Körper mit Hilfe der Integralrechnung zu ermitteln.



D

1 Zur Wiederholung

Aus der 11. Klasse sind uns folgende Definitionen bekannt:

(a) Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar $=_{Df}$
(1) f ist in einer Umgebung von x_0 definiert.
(2) Der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ existiert.

(b) Die Funktion f ist in dem Intervall (a, b) differenzierbar $=_{Df}$
f ist für jedes x aus (a, b) differenzierbar.

(c) Die Funktion f', d. h. die Menge **aller** geordneten Paare $[x; f'(x)]$, heißt die 1. Ableitung von f.

(d) Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f im Intervall I $=_{Df}$
Für jedes x aus I gilt: $F'(x) = f(x)$.

Hat die Funktion f im Intervall I eine Stammfunktion, so versteht man unter dem unbestimmten Integral $\int f(x)\,dx$ von f in I die Menge aller Stammfunktionen von f in I.
Ist F eine beliebige Stammfunktion von f in I und c eine beliebige reelle Zahl, so wird durch die Schreibweise $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ zum Ausdruck gebracht, daß $F + c$ die gesamte Menge der Stammfunktionen von f durchläuft, wenn c die Menge der reellen Zahlen durchläuft.

(1) *Differenzieren Sie folgende Funktionen, und geben Sie jeweils die verwendeten Differentiationsregeln an!*

a) $y = x^5$ b) $y = 3x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 7$ c) $y = (2x^2 + 3)(x^3 - 5x + 1)$

d) $y = \frac{x^3 - 7}{x^2 + 5}$ e) $y = x^{-4}$ $(x \neq 0)$ f) $y = (x^3 - 5x^2 + 7)^3$

(2) *Integrieren Sie folgende Funktionen, und geben Sie jeweils die verwendeten Integrationsregeln an!*

a) $y = x^4$

b) $y = x^3 + 3x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

c) $y = x^{-3}$ $(x \neq 0)$

d) $y = \frac{3x^3 + 5x^2 - 7}{x^2}$ $(x \neq 0)$

Ableitungen rationaler Funktionen sind stets wieder rationale Funktionen. Mit Hilfe der uns bekannten Differentiationsregeln können wir jede rationale Funktion differenzieren. Das unbestimmte Integral einer ganzen rationalen Funktion ist stets eine Menge ganzer rationaler Funktionen. Mit Hilfe der uns bekannten Integrationsregeln können wir für jede ganze rationale Funktion und für gewisse spezielle gebrochene rationale Funktionen das unbestimmte Integral ermitteln.
In den folgenden Lerneinheiten sollen auch nichtrationale Funktionen, z. B. Wurzelfunktionen, Winkelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen auf Differenzierbarkeit und Existenz von Stammfunktionen untersucht werden.

Aufgaben d 1 bis 11

2 Differentiation zueinander inverser Funktionen

Zu jeder monotonen Funktion f existiert eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $\bar{f}$ (Vgl. Sie mit den Ausführungen auf Seite 88!).

(3) *Beweisen Sie: Ist f eine monoton wachsende bzw. monoton fallende Funktion, so ist die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ ebenfalls monoton wachsend bzw. monoton fallend.*

Wir fragen nun nach Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit die Umkehrfunktion $\bar{f}$ einer gegebenen monotonen **differenzierbaren** Funktion f ebenfalls differenzierbar ist. Für diese Untersuchungen benötigen wir den folgenden Satz, den wir zunächst beweisen werden.

1 **SATZ: Ist f eine in dem abgeschlossenen Intervall $\langle a, b\rangle$ *stetige* und monotone Funktion, so ist ihre Umkehrfunktion $\bar{f}$ in dem von den Zahlen $f(a)$ und $f(b)$ begrenzten abgeschlossenen Intervall ebenfalls stetig und monoton.**

Beweis: Wir führen den Beweis für eine in $\langle a, b\rangle$ stetige und **monoton wachsende** Funktion f. Es sei $f(a) = \alpha$ und $f(b) = \beta$ (Bild D 1). Da f in $\langle a, b\rangle$ stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz zu jedem y aus dem Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$ **mindestens** ein x aus $\langle a, b\rangle$ mit $f(x) = y$. Da f außerdem in $\langle a, b\rangle$ monoton ist, gibt es zu jedem y des Intervalls $\langle \alpha, \beta\rangle$ **höchstens** ein x aus $\langle a, b\rangle$ mit $f(x) = y$. Folglich ist die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ in dem Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$ definiert. Daß $\bar{f}$ ebenfalls eine monoton wachsende Funktion ist, wissen wir bereits (↗ Übung D 3).
Wir zeigen nun, daß $\bar{f}$ in $\langle \alpha, \beta\rangle$ stetig ist, daß also für jedes y_0 aus $\langle \alpha, \beta\rangle$ gilt

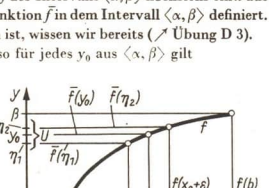
$$\lim_{y \to y_0} \bar{f}(y) = \bar{f}(y_0)\ ^{1}.$$

Es sei y_0 eine beliebige Stelle aus dem Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$ und (y_n) eine beliebige Folge von Zahlen aus $\langle \alpha, \beta\rangle$ mit

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y_0 \quad \text{und} \quad y_n \neq y_0 \text{ für alle } n,$$

d. h., für **jede** Umgebung U von y_0 gilt:

(*) Für fast alle n ist $y_n \in U$.



D 1

Wir müssen zeigen, daß die zu der Folge (y_n) gehörige Folge der Funktionswerte $\big(\bar{f}(y_n)\big) = (x_n)$ gegen $\bar{f}(y_0) = x_0$ konvergiert. Dazu betrachten wir eine beliebige in $\langle a, b\rangle$ enthaltene ε-Umgebung von x_0. Es sei $f(x_0 - \varepsilon) = \eta_1$ und[2] $f(x_0 + \varepsilon) = \eta_2$. Wegen der Monotonie von f ist das Intervall (η_1, η_2) eine Umgebung von y_0, in der wegen (*) fast alle Glieder der Folge (y_n) liegen. Da $\bar{f}$ eine monoton wachsende Funktion ist, gilt für jede natürliche Zahl n:

Wenn $\eta_1 < y_n < \eta_2$, so ist $\bar{f}(\eta_1) < \bar{f}(y_n) < \bar{f}(\eta_2)$

bzw.

wenn $\eta_1 < y_n < \eta_2$, so ist $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$.

Da diese Beziehung für fast alle natürlichen Zahlen n gilt, erhalten wir:

Für fast alle n ist $\bar{f}(y_n) = x_n \in U_\varepsilon(x_0)$,

d. h., die Folge $\big(\bar{f}(y_n)\big)$ konvergiert gegen $\bar{f}(y_0) = x_0$.

[1] Ist $y_0 = \alpha$ oder $y_0 = \beta$, so werden nur die entsprechenden einseitigen Grenzwerte von $\bar{f}$ an der Stelle y_0 betrachtet.
[2] Ist $y_0 = \alpha$ oder $y_0 = \beta$, so werden nur die einseitigen Umgebungen $\langle a, a + \varepsilon)$ bzw. $(b - \varepsilon, b\rangle$ betrachtet.

D

Also ist

$$\lim_{y \to y_0} \bar{f}(y) = \bar{f}(y_0).$$

Da die Stelle y_0 in $\langle \alpha, \beta \rangle$ beliebig gewählt wurde, gelten diese Betrachtungen für jedes y_0 aus $\langle \alpha, \beta \rangle$. Damit ist gezeigt, daß $\bar{f}$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$ stetig ist.
Entsprechend verläuft der Beweis für eine stetige monoton **fallende** Funktion.

Man kann den Satz D 1 auch auf offene Intervalle übertragen, so daß wir kurz sagen können:

Ist f eine in einem Intervall stetige und monotone Funktion, so ist die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ in ihrem Definitionsbereich stetig und monoton.

(4) *Begründen Sie, daß die Funktionen $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ($x \geqq 0$; n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 2$) stetig sind!*

3

1 Die Funktion $y = g(x) = \sqrt{x}$ ($x \geqq 0$) ist für jedes positive x differenzierbar.
Ist x_0 eine beliebige positive Zahl, so ist der Differenzenquotient der Funktion g an der Stelle x_0

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h},$$

wobei $h \neq 0$ so gewählt ist, daß $x_0 + h \geqq 0$ ist.
Wir erweitern den Differenzenquotienten mit $\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}$ (wegen $x_0 > 0$ ist $\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0} > 0$) und erhalten:

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}$$

Da g eine stetige Funktion ist, gilt

$$\lim_{h \to 0} \sqrt{x_0 + h} = \sqrt{\lim_{h \to 0} (x_0 + h)} = \sqrt{x_0}.$$

Folglich ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Funktion $y = \sqrt{x}$ ($x \geqq 0$) für jedes positive x differenzierbar ist.
Nun ist die Funktion

$$y = g(x) = \sqrt{x} \quad (x \geqq 0)$$

bzw. nach Umbenennung der Variablen

$$x = g(y) = \sqrt{y} \quad (y \geqq 0)$$

die Umkehrfunktion der Funktion

$$y = f(x) = x^2 \ (x \geqq 0).$$

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 die Ableitung

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Die Funktion g hat an der Stelle $y_0 = f(x_0) > 0$ die Ableitung

$$g'(y_0) = \frac{1}{2\sqrt{y_0}} = \frac{1}{2x_0}.$$

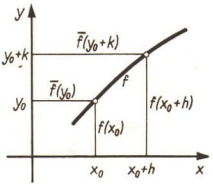
Folglich gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (x_0 > 0).$$

Zwischen den Ableitungen der zueinander inversen Funktionen f und g besteht also eine sehr einfache Beziehung. Diese Beziehung gilt, wie der folgende Satz zeigt, nicht nur für die hier speziell gewählten Funktionen f und g.

2 **SATZ: Ist f eine eineindeutige Funktion, die in einer Umgebung der Stelle x_0 differenzierbar ist, und gilt $f'(x_0) \neq 0$, so ist die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es ist**

$$\boxed{\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$



D 2

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß der Grenzwert

$$\lim_{k \to 0} \frac{\bar{f}(y_0 + k) - \bar{f}(y_0)}{k} = \bar{f}'(y_0)$$

existiert und mit $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ $(f'(x_0) \neq 0)$ übereinstimmt.

Für $k \neq 0$ ist (↗ Bild D 2)

$$\frac{\bar{f}(y_0 + k) - \bar{f}(y_0)}{k} = \frac{x_0 + h - x_0}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}},$$

denn wegen der Eineindeutigkeit von f ist für $k \neq 0$ auch $h \neq 0$.
Da f nach Voraussetzung in einer Umgebung von x_0 differenzierbar ist, gibt es ein ganz in dieser Umgebung liegendes Intervall $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$, in dem f stetig ist. Dann ist aber (nach Satz D 1) auch $\bar{f}$ in einer Umgebung von y_0 stetig, d. h., es ist

$$\lim_{k \to 0} \bar{f}(y_0 + k) = \bar{f}(y_0).$$

Ist also (k_n) eine beliebige Nullfolge mit $k_n \neq 0$ für alle n, so ist auch $\big(f(x_0 + h_n) - f(x_0)\big)$ und damit auch (h_n) eine Nullfolge.
Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \neq 0.$$

Folglich existiert auch der Grenzwert

$$\bar{f}'(y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{\bar{f}(y_0 + k) - \bar{f}(y_0)}{k} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}},$$

d. h., $\bar{f}$ ist an der Stelle y_0 differenzierbar, und es ist

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad w.\ z.\ b.\ w.$$

Verwendet man zur Bezeichnung der Ableitungen f' bzw. $\bar{f}'$ die Symbole „$\frac{dy}{dx}$" bzw. „$\frac{dx}{dy}$", so läßt sich die hier hergeleitete Differentiationsregel wie folgt merken:

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y = y_0} = \frac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}} \quad \text{bzw.} \quad \left.\frac{dx}{dy}\right|_{y = y_0} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0} = 1.$$

(5) *Deuten Sie die Gleichung* $\bar{f}'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ *geometrisch!*

Aufgaben d 12 bis 14

4 Differentiation und Integration der Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

3 **SATZ: Ist r eine beliebige rationale Zahl, so ist die Funktion $y = x^r$ $(x > 0)$ für jedes positive x differenzierbar, und es gilt $(x^r)' = rx^{r-1}$.**

Beweis:

a) 1. Fall: Es sei r eine ganze rationale Zahl.
Dann ist die Funktion $y = x^r$, wie wir bereits aus der 11. Klasse wissen, für jedes $x \neq 0$, also auch für jede positive Zahl x, differenzierbar, und es gilt $(x^r)' = rx^{r-1}$.

b) 2. Fall: Es sei $r = \dfrac{1}{n}$ (n eine natürliche Zahl, $n \geqq 2$).
Die Funktion f mit

$$y = f(x) = x^n \quad (x \geqq 0)$$

ist eine eineindeutige stetige Funktion, die an jeder Stelle $x_0 > 0$ die von Null verschiedene Ableitung

$$f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$$

hat. Die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ ist die Funktion

(1) $\quad x = \bar{f}(y) = y^{\frac{1}{n}} \quad (y \geqq 0).$

Nach Satz D 2 erhält man für jede Stelle $y_0 = f(x_0) > 0$

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{n \cdot x_0^{n-1}} = \frac{1}{n} x_0^{1-n} = \frac{1}{n}\left(y_0^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n}$$

(2) $\quad \bar{f}'(y_0) = \dfrac{1}{n} \cdot y_0^{\frac{1}{n}-1}$

Benennt man in (1) und (2) die Variablen um, so erhält man:
Die Funktion

$$y = \bar{f}(x) = x^{\frac{1}{n}} \quad (x \geqq 0)$$

hat an jeder Stelle x_0 mit $x_0 > 0$ die Ableitung

$$\bar{f}'(x_0) = \frac{1}{n} \cdot x_0^{\frac{1}{n}-1}$$

c) 3. Fall: Es sei $r = \frac{m}{n}$ eine beliebige rationale Zahl mit $m > 1$ und $n \geqq 2$.
Die Funktion

$$y = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

ist für alle nichtnegativen Zahlen x definiert. Die Funktion

$$g(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

ist für jedes positive x differenzierbar (siehe b). Dann ist auch die Funktion

$$y = [g(x)]^m = \left[x^{\frac{1}{n}}\right]^m$$

für jedes positive x differenzierbar, und man erhält

$$y' = m \cdot \left[x^{\frac{1}{n}}\right]^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$y' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}.$$

(6) *Führen Sie den Beweis für den Fall, daß r eine beliebige negative rationale Zahl ist!*

Damit ist gezeigt, daß alle Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten für jedes positive x differenzierbar sind. Außerdem erkennen wir, daß die Regel zur Differentiation dieser Funktionen formal die gleiche ist wie die Regel zur Differentiation von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten.

D

$\boxed{2}$ a) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad (x \geqq 0) \qquad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

b) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \quad (x \geqq 0) \qquad y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad (x > 0)$

c) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = x^{-\frac{1}{3}} \quad (x > 0)$

$$y' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} \quad (x > 0).$$

(7) *Bilden Sie von den im Beispiel D 2 gegebenen Funktionen jeweils die 2. Ableitung!*

Für jede rationale Zahl r mit $r \neq -1$ gilt

$$\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + c \quad (x > 0).$$

Es ist nämlich

$$F(x) = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} \quad (r \neq -1;\ x > 0)$$

eine Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = x^r \quad (x > 0),$$

denn es ist

$$\left(\frac{1}{r+1} x^{r+1}\right)' = \frac{r+1}{r+1} x^r = x^r.$$

Folglich ist

$$\boxed{\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + c \quad (r \neq -1;\ x > 0).}$$

3 a) $\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3} x \sqrt{x} + c \quad (x \geqq 0)$ [1]

b) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c \quad (x > 0)$

c) $\int_1^8 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} \, dx = \left[\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_1^8 = \dfrac{3}{2}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]_1^8 = \dfrac{3}{2}(4-1) = \dfrac{9}{2}$

Aufgaben d 15 und 16

D

5 Differentiation von verketteten Funktionen

Wir wollen jetzt eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Ableitung zweier verketteter differenzierbarer Funktionen g und f herleiten. Wir haben bereits folgenden Spezialfall behandelt:
Ist die Funktion g in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = [g(x)]^n$ (n eine natürliche Zahl, $n \geqq 1$) in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$f'(x_0) = n[g(x_0)]^{n-1} g'(x_0).$$

4 Die Funktion F mit $F(x) = (4x^2 - 5x + 7)^3$ entsteht durch Verkettung der Funktionen g und f mit

$$z = g(x) = 4x^2 - 5x + 7 \quad \text{bzw.} \quad y = f(z) = z^3.$$

[1] Ist r eine rationale Zahl mit $r > 1$, so ist die Funktion $y = x^r$ an der Stelle 0 noch rechtsseitig differenzierbar. Wie man unmittelbar durch Bildung des Differenzenquotienten und anschließenden Grenzübergang ausrechnen kann, erhält man als rechtsseitige Ableitung von $f(x) = x^r$ an der Stelle 0: $f'(0) = 0$, so daß die Gleichung im Beispiel D 3a auch noch für $x = 0$ gilt.

Beide Funktionen sind differenzierbar, und es ist

$$g'(x) = 8x - 5 \quad \text{bzw.} \quad f'(z) = 3z^2.$$

Die Ableitung der Funktion F ist die Funktion F' mit

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3(4x^2 - 5x + 7)^2 \cdot (8x - 5) \\ &= 3z^2 \cdot g'(x) = f'(z) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Man erhält also die Ableitung der durch Verkettung der Funktionen g und f entstehenden Funktion F, indem man die Ableitungen dieser Funktionen g' und f' miteinander multipliziert.

Wir werden zeigen, daß man nicht nur bei diesem speziellen Beispiel so verfahren kann, sondern daß die durch Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen entstehende Funktion stets wieder eine differenzierbare Funktion ist, deren Ableitung man wie im Beispiel D 4 berechnen kann.
Bevor wir den betreffenden Satz beweisen, machen wir noch folgende Vorbemerkung:
Es sei f eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion, d. h., es existiert der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Für die fest gewählte Stelle x_0 definieren wir die Funktion φ durch

$$\text{(1)} \qquad \varphi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) & \text{für } h \neq 0 \\ 0 & \text{für } h = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion φ ist an der Stelle $h = 0$ stetig, denn es ist

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \varphi(h) &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \lim_{h \to 0} f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

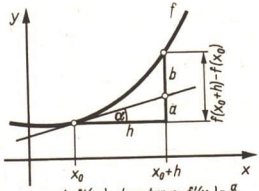
Folglich ist

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = \varphi(0).$$

Aus (1) erhält man

$$\text{(2)} \qquad \boxed{f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot f'(x_0) + h \cdot \varphi(h)}$$

Diese Gleichung gilt auch für $h = 0$.
Damit erhalten wir: Ist f eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion, so läßt sich die Differenz der Funktionswerte an den Stellen $x_0 + h$ und x_0 durch die Gleichung (2) darstellen (Bild D 3).



$a = h \cdot f'(x_0)$; denn $\tan\alpha = f'(x_0) = \frac{a}{h}$
$b = h \cdot \varphi(h)$
$f(x_0+h) - f(x_0) = h \cdot f'(x_0) + h \cdot \varphi(h)$

D 3

4 **SATZ: Ist g an der Stelle x_0 und f an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar, so ist auch die Funktion F mit $F(x) = f[g(x)]$, die durch Verkettung von g und f entsteht, an der Stelle x_0 differenzierbar, und es ist**

$$\boxed{F'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)}$$

Beweis:

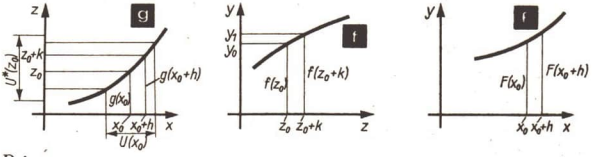
1. Differenzenquotient der Funktion F an der Stelle x_0

Nach Voraussetzung ist f in einer Umgebung U^* von $g(x_0) = z_0$ definiert. Aus der Differenzierbarkeit von g an der Stelle x_0 folgt, daß g an der Stelle x_0 stetig ist. Dann gibt es aber eine Umgebung U von x_0 derart, daß g in $U(x_0)$ definiert ist und alle Funktionswerte, die g in $U(x_0)$ annimmt, in $U^*(z_0)$ liegen. Folglich existiert der Differenzenquotient der Funktion F für jedes $h \neq 0$ mit $x_0 + h \in U(x_0)$, und es ist

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{f[g(x_0 + h)] - f[g(x_0)]}{h}$$

$$= \frac{f(z_0 + k) - f(z_0)}{h}$$

mit $g(x_0) = z_0$ und $g(x_0 + h) = z_0 + k$ (Bild D 4)



D 4

2. Umformung des Differenzenquotienten

Da f in z_0 differenzierbar ist, gilt für jedes k mit $z_0 + k \in U^*(z_0)$ nach Gleichung (2) auf Seite 133

$$f(z_0 + k) - f(z_0) = k[f'(z_0) + \varphi(k)]\,^{1}$$

mit

$$\lim_{k \to 0} \varphi(k) = 0.$$

Folglich ist

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{k[f'(z_0) + \varphi(k)]}{h}$$

$$= \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}[f'(z_0) + \varphi(k)].$$

[1] Diese Gleichung gilt auch für $k = 0$, also für $g(x_0 + h) = g(x_0)$.

3. Grenzwert des Differenzenquotienten

Aus der Stetigkeit von g an der Stelle x_0 folgt

$$\lim_{h \to 0} [g(x_0 + h) - g(x_0)] = \lim_{h \to 0} k = 0.$$

Dann ist aber auch

$$\lim_{h \to 0} \varphi(k) = 0.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} [f'(z_0) + \varphi(k)] \right) \\ &= f'(z_0) \cdot g'(x_0) \\ &= f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0), \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Die hier hergeleitete Differentiationsregel nennt man kurz „Kettenregel".

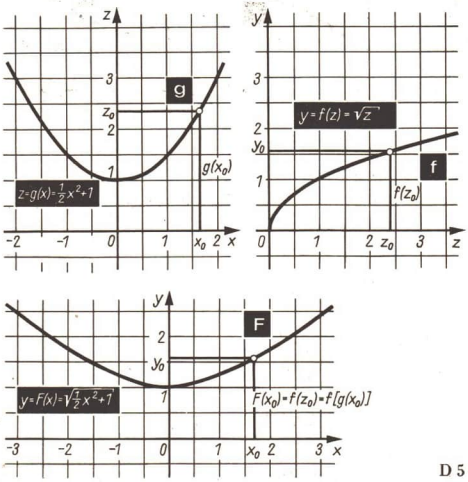
5 Die Funktion

$$F(x) = \sqrt{\frac{1}{2} x^2 + 1}$$

entsteht durch Verkettung der Funktionen

$$g(x) = \frac{1}{2} x^2 + 1 \quad \text{und} \quad f(z) = \sqrt{z} \quad (z \geqq 0). \qquad \text{(Bild D 5)}$$

Die Funktion g ist für alle reellen Zahlen definiert, ihr Wertebereich, nämlich die Menge aller z mit $z \geqq 1$, ist eine Teilmenge des Definitionsbereiches von f. Folg-



D 5

lich ist auch die Funktion F für alle reellen Zahlen definiert. Die Funktion g ist eine überall differenzierbare Funktion. Die Funktion f ist an jeder Stelle z mit $z > 0$ differenzierbar. Da alle Funktionswerte von g positiv sind, ist die Funktion F nach Satz D 4 für alle x differenzierbar. Man erhält

$$F'(x) = f'(z) \cdot g'(x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot x = \frac{x}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 1}}.$$

(8) *Beweisen Sie folgende Behauptung: Ist g eine differenzierbare Funktion, die nur positive Funktionswerte hat, so gilt*

$$\boxed{\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}}$$

Man kann sich die in der Kettenregel auftretende Formel auch leicht in folgender Gestalt merken:

Ist $F(x) = f[g(x)]$ und $g'(x) = \frac{dz}{dx}$, $f'(z) = \frac{dy}{dz}$, so ist

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Wie man sich leicht überlegen kann, ist auch eine Funktion, die durch Verkettung von mehr als zwei differenzierbaren Funktionen entsteht, wieder eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung entsprechend ermittelt werden kann. So erhält man beispielsweise für die Funktion F, die durch Verkettung der Funktionen f, g und h mit

$$y = f(z), \quad z = g(u) \quad \text{und} \quad u = h(x)$$

entsteht, unter analogen Voraussetzungen

$$F'(x) = f'(z) \cdot g'(u) \cdot h'(x)$$

bzw.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

D

6 Die Funktion F mit

$$F(x) = \sqrt{5x^2 + 7}^{\,3}$$

hat die Ableitung

$$F'(x) = 3\sqrt{5x^2 + 7}^{\,2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 7}} \cdot 10x = 15x \cdot \sqrt{5x^2 + 7}.$$

Aufgaben d 17 bis 21

7 Integration durch Substitution

Wir haben bereits bei der Einführung in die Integralrechnung erwähnt, daß das Aufsuchen einer Stammfunktion F zu einer gegebenen stetigen Funktion f im allgemeinen recht mühselig ist. Bei gewissen Integralen gelingt es, sie durch eine „Variablensubstitution" auf einfacher zu berechnende Integrale zurückzuführen. Wir wollen dieses Verfahren zunächst an einem Beispiel erläutern.

7 Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = (ax + b)^5 \quad (a \neq 0),$$

zu der eine Stammfunktion F zu ermitteln ist. Wir setzen

$$ax + b = t$$

bzw.

$$x = \varphi(t) = \frac{1}{a}(t - b).$$

Die Funktion φ ist differenzierbar, und es ist

$$\varphi'(t) = \frac{1}{a}.$$

Für das Integral

$$\int t^5 \cdot \frac{1}{a} \mathrm{d}t$$

können wir sofort eine Stammfunktion angeben, nämlich

$$G(t) = \frac{1}{a} \cdot \frac{t^6}{6}.$$

Setzen wir nun wieder $t = ax + b$, so erhalten wir die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{6a}(ax + b)^6,$$

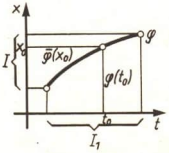
die eine Stammfunktion der gegebenen Funktion f ist, denn es gilt

$$F'(x) = \frac{1}{6a} \cdot 6(ax + b)^5 \cdot a = (ax + b)^5.$$

Durch die Substitution $x = \varphi(t) = \frac{1}{a}(t - b)$ haben wir die Berechnung des Integrals $\int (ax + b)^5 \mathrm{d}x$ auf das leichter zu berechnende Integral $\int t^5 \frac{1}{a} \mathrm{d}t$ zurückgeführt.

Wir wollen diese Methode jetzt allgemein erörtern. Gegeben sei eine in einem Intervall I stetige Funktion f, für die eine Stammfunktion F zu ermitteln ist. Ferner sei $x = \varphi(t)$ eine im Intervall I_1 monotone und differenzierbare Funktion mit $\varphi'(t) \neq 0$, durch die das Intervall I_1 umkehrbar eindeutig auf das Intervall I abgebildet wird (Bild D 6). Folglich existiert in I die zu der Funktion $x = \varphi(t)$ inverse Funktion $t = \bar{\varphi}(x)$. Diese Funktion $\bar{\varphi}$ ist in I differenzierbar, und es gilt

(1) $\quad \bar{\varphi}'(x) \cdot \varphi'(t) = 1.$



D 6

Existiert nun für die Funktion

$$f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)$$

in I_1 eine Stammfunktion G, d. h., gilt für alle $t \in I_1$

(2) $\quad G'(t) = f[\varphi(t)]\ \varphi'(t),$

so ist die Funktion

$$F(x) = G[\bar{\varphi}(x)]$$

eine Stammfunktion von f im Intervall I.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß für jedes $x \in I$ gilt

$$F'(x) = \left(G[\bar{\varphi}(x)]\right)' = f(x).$$

Für jedes $x \in I$ erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel

$$F'(x) = \left(G[\bar{\varphi}(x)]\right)' = G'[\bar{\varphi}(x)] \cdot \bar{\varphi}'(x) = G'(t) \cdot \bar{\varphi}'(x).$$

Mit Hilfe von (2) erhalten wir daraus

$$F'(x) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t) \cdot \bar{\varphi}'(x).$$

Mit Hilfe von (1) folgt dann

(3) $\quad F'(x) = f[\varphi(t)] = f(x),$ *w. z. b. w.*

Aus den Gleichungen (2) bzw. (3) folgt ferner

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = G(t) + c,$$

bzw.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Wir erhalten die für alle x aus I geltende Transformationsformel

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt} \qquad \text{mit } x = \varphi(t) \text{ bzw. } t = \bar{\varphi}(x).$$

Will man ein gegebenes Integral $\int f(x)\,dx$ nach dieser „Substitutionsmethode" ermitteln, so muß man eine Substitution $x = \varphi(t)$ so wählen, daß es möglich ist, für das Integral $\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ eine Stammfunktion G anzugeben. Ersetzt man das Argument t dieser Funktion mit Hilfe der Gleichung $t = \bar{\varphi}(x)$ (φ war deshalb als monotone Funktion vorausgesetzt worden) durch x, so erhält man eine Stammfunktion F der gegebenen Funktion f. Bei der Anwendung dieser Methode besteht die wichtigste Aufgabe darin, eine geeignete Variablensubstitution zu wählen. Es gibt allerdings keine allgemeingültige Regel, mit der man entscheiden kann, ob sich ein gegebenes Integral durch Einführung einer neuen Variablen vereinfachen läßt, und wie man die entsprechende Substitution findet. Wir werden uns deshalb auf relativ einfache Beispiele beschränken.

D

8 Beispiele

8 Das unbestimmte Integral

$$\int (ax + b)^n\,dx \quad (a \neq 0,\ n \neq -1)$$

ist zu ermitteln!

Wir setzen $ax + b = t$ und erhalten daraus die Substitution

$$x = \varphi(t) = \frac{1}{a}(t - b).$$

Die Ableitung der Funktion φ ist $\varphi'(t) = \frac{1}{a}$. Die Anwendung der Transformationsformel ergibt

$$\int (ax+b)^n \,\mathrm{d}x = \int t^n \frac{1}{a} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} \int t^n \,\mathrm{d}t.$$

Nun ist

$$\int t^n \,\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1).$$

Setzen wir

$$t = \bar{\varphi}(x) = ax + b,$$

so ist

$$\int (ax+b)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + c.$$

9 a) *Kontrollieren Sie die Richtigkeit des Ergebnisses im Beispiel D 8 durch Differentiation!*

b) *Ermitteln Sie entsprechend Beispiel D 8 das unbestimmte Integral* $\int \sqrt{3x-5}\,\mathrm{d}x$*!*

9 Das Integral $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$ lösen wir folgendermaßen:

Für $x > 0$ setzen wir

$$\sqrt{x^2+1} = t$$

und erhalten daraus

$$x = \varphi(t) = \sqrt{t^2-1} \quad (t > 1)$$

und

$$x' = \varphi'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Folglich ist

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + c = \sqrt{x^2+1} + c.$$

Man bestätigt nun, daß dieses Ergebnis auch für $x \leqq 0$ gilt, denn die Funktion

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} + c$$

ist für jede Zahl x differenzierbar, und es ist

$$F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Will man die Substitutionsmethode zur Berechnung eines *bestimmten Integrals* anwenden, so ist zu beachten, daß dann auch die Integrationsgrenzen ebenso transformiert werden müssen wie die Integrationsvariable. Zur Vereinfachung des Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (f in $\langle a, b\rangle$ stetig) benötigt man eine Funktion $x = \varphi(t)$, die in einem Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$ eine stetige Ableitung hat, und die das Intervall $\langle \alpha, \beta\rangle$ umkehrbar eindeutig auf das Intervall $\langle a, b\rangle$ abbildet. Ist dann $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$ $\left(\alpha = \bar{\varphi}(a),\ \beta = \bar{\varphi}(b)\right)$, so gilt (wie hier ohne Beweis mitgeteilt wird)

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$$

D

Man braucht also hier nach erfolgter Integration die Substitution $x = \varphi(t)$ nicht rückgängig zu machen, da die obige Formel ja eine Gleichung für Zahlen ist.

10 Das bestimmte Integral $\int_{-1}^{3} \sqrt{2x+3}\, dx$ ist zu berechnen.

Substitution:

$$t = \bar{\varphi}(x) = 2x + 3; \quad x = \varphi(t) = \frac{1}{2}(t-3); \quad \varphi'(t) = \frac{1}{2}$$

Transformation der Integrationsgrenzen:

$$\alpha = \bar{\varphi}(a) = \bar{\varphi}(-1) = 1; \; \beta = \bar{\varphi}(b) = \bar{\varphi}(3) = 9.$$

Folglich ist

$$\int_{-1}^{3} \sqrt{2x+3}\, dx = \frac{1}{2} \int_{1}^{9} \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[t\sqrt{t}\right]_1^9 = \frac{26}{3}.$$

Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man zunächst das unbestimmte Integral $\int \sqrt{2x+3}\, dx$ ermittelt und danach die Grenzen $a = -1$ und $b = 3$ einsetzt:

$$\int_{-1}^{3} \sqrt{2x+3}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(2x+3)\sqrt{2x+3}\right]_1^3 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}.$$

Aufgaben d 22 bis 24

9 Differentiation und Integration der Winkelfunktionen

5 **SATZ: Die Funktionen sin, cos, tan und cot sind an jeder Stelle x ihres Definitionsbereichs differenzierbar. Es ist**

(1)	$(\sin x)' = \cos x$	
(2)	$(\cos x)' = -\sin x$	
(3)	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left[x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2};\ k \text{ eine ganze Zahl}\right]$
(4)	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$[x \neq k\pi;\ k \text{ eine ganze Zahl}]$

Beweis:

(1): Ist x_0 eine beliebige reelle Zahl, so ist der Differenzenquotient der Funktion $f(x) = \sin x$ an der Stelle x_0:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} \qquad (h \neq 0).$$

Nach dem Additionstheorem $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ist

$$\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h.$$

Folglich ist

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \frac{\cos x_0 \sin h - \sin x_0 (1-\cos h)}{h}$$

$$= \cos x_0 \frac{\sin h}{h} - \sin x_0 \frac{1-\cos h}{h}.$$

Der Grenzwert dieses Differenzenquotienten an der Stelle $h = 0$ existiert, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h}$$

existieren. Nun ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$ (↗ Seite 122).

Für $h \neq 0$ ist

$$\sin h = h \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

Dann ist

$$\lim_{h\to 0} \sin h = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 0 \cdot 1 = 0,$$

und unter Verwendung der Identität $1 - \cos h = 2 \cdot \sin^2 \frac{h}{2}$ folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sin \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\cos x_0 \frac{\sin h}{h} - \sin x_0 \frac{1-\cos h}{h} \right),$$

und es ist

$$f'(x_0) = \cos x_0.$$

Da die Zahl x_0 beliebig gewählt war, gilt diese Herleitung für jede Zahl x.
(2): Aus den Identitäten

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{und} \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

folgt mit Hilfe der Kettenregel für jede Zahl x

$$(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

(3): Es ist

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left[x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

D

Mit Hilfe der Regel zur Differentiation eines Quotienten erhält man

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left[x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

(4): Entsprechend folgt aus

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq k\pi)$$

$$(\cot x)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi).$$

Damit ist der Satz D 5 vollständig bewiesen.
Häufig werden die Ableitungen der Funktionen tan bzw. cot auch in der Form

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \qquad \left[x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) \qquad [x \neq k\pi]$$

angegeben.
Aus dem Satz D 5 erhält man unmittelbar

Für jedes Intervall gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \cos x\,dx &= \sin x + c \\ \int \sin x\,dx &= -\cos x + c \end{aligned}}$$

Für jedes Intervall, in dem der Nenner des Integranden keine Nullstelle hat, gilt

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c}$$

D

10 Beispiele

11 a) $(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cdot \cos 2x$

$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cdot \cos x^2$
$(\sin^2 x)' = [(\sin x)^2]' = 2 \cdot \sin x \cos x$
$[\cos(ax+b)]' = -\sin(ax+b) \cdot (ax+b)' = -a \sin(ax+b)$
$(\sin x \cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

b) Die Funktion

$$f(x) = 2 \cdot \cos^3 x + 2 \cdot \sin^2 x - 5 \cdot \tan x \qquad (\cos x \neq 0)$$

hat die Ableitung

$$f'(x) = -6 \cdot \cos^2 x \sin x + 4 \cdot \sin x \cos x - \frac{5}{\cos^2 x}.$$

c) Welchen Anstieg hat die Tangente an die Sinuskurve im Koordinatenursprung?

Die Funktion $f(x) = \sin x$ hat die Ableitung $f'(x) = \cos x$. Der Anstieg der Tangente an die Sinuskurve im Koordinatenursprung ist daher

$$m_t = f'(0) = \cos 0 = 1.$$

Demzufolge ist die Gerade $y = x$ die Tangente an die Sinuskurve an der Stelle 0.

12 a) $\int_0^\pi \sin x \, dx = -[\cos x]_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$

b) Das Integral $\int \cos ax \, dx$ $(a \neq 0)$ berechnen wir mit Hilfe der Substitutionsmethode. Wir setzen

$$t = \varphi(x) = ax, \quad \text{also} \quad x = \varphi(t) = \frac{1}{a} t.$$

Dann ist $\left(\varphi'(t) = \frac{1}{a}\right)$

$$\int \cos ax \, dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \cdot \sin t + c$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax + c$$

c) Entsprechend erhält man

$$\int \sin (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{a} \cos (ax + b) + c.$$

d) Das Integral $\int \cos^2 x \, dx$ ist zu ermitteln!
Mit Hilfe der Identität $1 + \cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x$ erhalten wir

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x \, dx \right).$$

Es ist (s. Beispiel D 12 b)

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + c.$$

Folglich ist

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \right) + c$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c$$

e) Entsprechend erhält man mit Hilfe der Identität

$$1 - \cos 2x = 2 \cdot \sin^2 x$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + c.$$

10 *Kontrollieren Sie die Richtigkeit der Ergebnisse in den Beispielen D 12 b, c, d und e durch Differentiation!*

Aufgaben d 25 bis 34

D

11 Differentiation und Integration der Logarithmusfunktionen

6 **SATZ: Jede logarithmische Funktion $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$; $x > 0$) ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar, und es gilt**

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}}$$

Beweis:

1. Differenzenquotient: Es sei a eine beliebige positive Zahl mit $a \neq 1$ und x_0 eine beliebige positive Zahl. Dann ist der Differenzenquotient der Funktion $f(x) = \log_a x$ an der Stelle x_0

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\log_a (x_0 + h) - \log_a x_0}{h},$$

wobei $h \neq 0$ so gewählt ist, daß auch $x_0 + h > 0$ gilt.

2. Umformung des Differenzenquotienten: Wegen

$$\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}$$

ist

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\log_a \frac{x_0 + h}{x_0} = \frac{1}{h}\log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right).$$

Erweitert man den Differenzenquotienten mit x_0 ($x_0 > 0$), so erhält man

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0}{h}\log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right).$$

Daraus folgt unter Verwendung von $n \log_a x_1 = \log_a x_1^n$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{x_0}\log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}.$$

Setzt man noch $\frac{h}{x_0} = z$, so ist

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{x_0}\log_a (1 + z)^{\frac{1}{z}}.$$

3. Grenzwert des Differenzenquotienten: Ist (h_n) eine beliebige Nullfolge, bei der für alle n gilt $h_n \neq 0$ und $x_0 + h_n > 0$, so ist wegen $x_0 > 0$ auch die Folge $(z_n) = \left(\frac{h_n}{x_0}\right)$ eine Nullfolge. Demnach ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{z \to 0}\left[\frac{1}{x_0}\log_a (1 + z)^{\frac{1}{z}}\right]$$
$$= \frac{1}{x_0}\lim_{z \to 0} \log_a (1 + z)^{\frac{1}{z}}.$$

Nun ist

$$\lim_{z \to 0} \log_a (1 + z)^{\frac{1}{z}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$ (↗ Seite 123).

D

Folglich ist

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} \log_a e \parallel \frac{1}{x_0 \ln a}.$$

Da sowohl die Stelle x_0 als auch die Basis a mit den entsprechenden Einschränkungen ($x_0 > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$) sonst aber beliebig gewählt waren, ist der Satz D 6 hiermit bewiesen.

Für die spezielle logarithmische Funktion

$$f(x) = \ln x = \log_e x \quad (x > 0)$$

erhält man wegen $\log_e e = 1$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

13 **a)** Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$ erhalten wir mit Hilfe der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad (x > 0).$$

b) Die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln \sin x$ $(\sin x > 0)$ erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x = \cot x \quad (\sin x > 0).$$

c) Unter welchem Winkel schneidet das Bild der Funktion $f(x) = \ln x$ die x-Achse?

Der Schnittwinkel der Kurve mit der x-Achse ist der Neigungswinkel der Tangente an die Kurve an der entsprechenden Stelle. Die Kurve $y = \ln x$ schneidet die x-Achse an der Stelle 1. Der Anstieg der Kurve ist dort

$$\tan \alpha = f'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Also schneidet die Kurve die x-Achse unter dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Aus den hier hergeleiteten Differentiationsregeln erhält man unmittelbar

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c && (x \gtrless 0) \\ &\int \frac{dx}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x + c = \log_a x + c && (a > 0,\ a \neq 1;\ x > 0) \end{aligned}}$$

Die Funktion $f(x) = \ln(-x)$ ist für jedes negative x differenzierbar. Mit Hilfe der Kettenregel erhält man als 1. Ableitung die Funktion

$$f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Folglich gilt für $x < 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + c.$$

D

In jedem Intervall, das nicht den Nullpunkt enthält, gilt also

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

14 Das bestimmte Integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ist zu berechnen.

Man erhält

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß man die Funktion $f(x) = \ln x$ für jedes positive x auch wie folgt definieren kann:

$$\boxed{\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}} \qquad (x > 0),$$

denn es ist

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

Aufgaben d 35 bis 42

12 Differentiation und Integration der Exponentialfunktionen

D

7 **SATZ: Jede Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$ ist an jeder Stelle x differenzierbar, und es ist**

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a} \qquad (a > 0)$$

Beweis:

a) Die Funktion $y = 1^x$ hat die Ableitung

$$y' = 0 = 1^x \ln 1.$$

b) Ist a eine beliebige positive Zahl mit $a \neq 1$, so ist die Funktion

$$y = f(x) = \log_a x \quad (x > 0)$$

eine eineindeutige Funktion, die an der beliebig gewählten Stelle $x_0 > 0$ die von Null verschiedene Ableitung

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln a}$$

hat. Die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ ist die Funktion

(1) $\quad x = \bar{f}(y) = a^y.$

Nach Satz D 2 (↗ Seite 129) erhält man für eine beliebige Stelle $y_0 = f(x_0)$

(2) $$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{1}{x_0 \ln a}} = x_0 \ln a = a^{y_0} \ln a.$$

Benennt man in (1) und (2) die Variablen um, so erhält man:
Die Funktion

$$y = \bar{f}(x) = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

hat an der beliebig gewählten Stelle x_0 die Ableitung

(3) $$\bar{f}'(x_0) = a^{x_0} \ln a.$$

Da x_0 beliebig gewählt war, gilt (3) für jede reelle Zahl, *w. z. b. w.*

Für die spezielle Exponentialfunktion $y = e^x$ erhält man

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Dieses Ergebnis ist doch recht überraschend, denn für jede Zahl x stimmt der Funktionswert der Funktion $y = e^x$ mit der Ableitung der Funktion an dieser Stelle überein.
Deshalb ist gerade diese Funktion besonders geeignet, solche Naturvorgänge zu beschreiben, bei denen die Änderung einer gegebenen Größe (z. B. zeitliche Vermehrung oder Verminderung einer gegebenen Substanz; zeitliche Änderung eines Bewegungsvorganges) dieser Größe selbst proportional ist. Sowohl diese Tatsache als auch die relativ einfachen Differentiationsregeln

$$(e^x)' = e^x \quad \text{und} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

sind neben vielen anderen Vorteilen, die sich hieraus ergeben, Gründe für die Bevorzugung der Zahl e als Basis eines Logarithmensystems bei theoretischen Untersuchungen. Beim numerischen Rechnen in der Praxis wird man natürlich die dekadischen Logarithmen bevorzugen.
Aus Satz D 7 folgt unmittelbar: Für jedes Intervall gilt

$$\boxed{\begin{aligned} &\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c \\ &\int e^x \, dx = e^x + c \end{aligned}} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

15 **a)** $(a^{-\lambda x})' = -\lambda \ln a \cdot a^{-\lambda x}$ $(a > 0,\ \lambda$ eine beliebige reelle Zahl)

b) $(e^{\sin x})' = \cos x \cdot e^{\sin x}$

c) Ist g eine differenzierbare Funktion, so ist

$$(e^{g(x)})' = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

d) Mit Hilfe dieses Ergebnisses erhält man, daß auch jede Potenzfunktion $y = x^r$ $(x > 0)$, wobei r eine beliebige *reelle* Zahl ist, differenzierbar ist. Denn für jede positive reelle Zahl x gilt

$$x = e^{\ln x}.$$

Daraus folgt

$$x^r = (e^{\ln x})^r = e^{r \ln x} \quad (x > 0).$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhält man

$$(x^r)' = e^{r \ln x} \cdot r \frac{1}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} \quad (x > 0)$$
$$= r x^{r-1}.$$

Die Formel zur Differentiation einer Potenzfunktion mit rationalem Exponenten gilt demnach auch für alle Potenzfunktionen mit reellen Exponenten.

e) Das Integral $\int x e^{x^2} \, dx$ berechnen wir mit Hilfe der Substitutionsmethode.

Substitution: $x^2 = t$, also $x = \varphi(t) = \sqrt{t} \quad (t > 0)$

$$x' = \varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Folglich gilt für jedes $x > 0$:

$$\int x e^{x^2} \, dx = \int \sqrt{t} \cdot e^t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{2} \int e^t \, dt = \frac{1}{2} e^t + c$$

$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

Da nun aber für jede reelle Zahl x

$$\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)' = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x = x e^{x^2}$$

ist, gilt das Ergebnis auch für $x \leqq 0$.

16 Der Zerfall einer radioaktiven Substanz läßt sich in einer für viele Zwecke ausreichenden Näherung durch das sogenannte Zerfallgesetz

(1) $\quad N = N_0 \, e^{-\lambda t} \quad (t \geqq 0)$

beschreiben (↗ Kapitel C, Seite 104).
Unter der **Zerfallsgeschwindigkeit** einer radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t versteht man die Ableitung

$$v(t) = \frac{dN}{dt}$$

der Funktion (1). Man erhält

$$v(t) = N_0 e^{-\lambda t}(-\lambda) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N.$$

Die Zerfallsgeschwindigkeit $\frac{dN}{dt}$ ist also der Anzahl N der noch nicht umgewandelten Atomkerne proportional. Man kann demnach das Zerfallgesetz auch in der Form

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

angeben.

(11) *Bestätigen Sie, daß die Zerfallsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt T (Halbwertszeit ↗ Kapitel C, Seite 104) nur halb so groß ist wie zum Zeitpunkt $t = 0$.*

Aufgaben d 43 bis 54

13 Zur Wiederholung

In dieser und den folgenden Lerneinheiten sollen die in Klasse 11 begonnenen Untersuchungen bezüglich des lokalen Verhaltens von Funktionen auch auf nichtrationale Funktionen ausgedehnt werden.
Bei der Untersuchung des lokalen Verhaltens einer gegebenen Funktion f haben wir insbesondere kennengelernt, welche Bedeutung die Vorzeichen von f' und f'' (vorausgesetzt, daß diese Ableitungen existieren) für das lokale Verhalten von f haben. So wissen wir, daß

1. eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion f in x_0 lokal monoton wächst bzw. lokal monoton fällt, wenn $f'(x_0) > 0$ bzw. $f'(x_0) < 0$ gilt,
2. eine an der Stelle x_0 zweimal differenzierbare Funktion f in x_0 lokal konvex bzw. lokal konkav ist, wenn $f''(x_0) > 0$ bzw. $f''(x_0) < 0$ gilt.

Ferner haben wir bei diesen Untersuchungen den überaus wichtigen Begriff „lokales Extremum einer Funktion" kennengelernt und folgende Kriterien für die Existenz lokaler Extremwerte für differenzierbare Funktionen erarbeitet:

1. Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist die Bedingung

   $$f'(x_0) = 0$$

   notwendig (aber nicht hinreichend) für die Existenz eines lokalen Extremums von f an der Stelle x_0.
   Eine in x_0 differenzierbare Funktion f kann also an der Stelle x_0 kein lokales Extremum haben, wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist.
2. Ist f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar, so ist die Bedingung

   $f'(x_0) = 0$ **und** f' wechselt in x_0 das Vorzeichen

   hinreichend (aber nicht notwendig) für die Existenz eines lokalen Extremums von f an der Stelle x_0.
   Ist diese hinreichende Bedingung erfüllt, so hat f in x_0

   ein lokales Maximum, wenn f' mit wachsendem x von positiven zu negativen Werten übergeht,
   ein lokales Minimum, wenn f mit wachsendem x von negativen zu positiven Werten übergeht.
3. Ist f an der Stelle x_0 zweimal differenzierbar, so ist auch die Bedingung

   $$f'(x_0) = 0 \quad \textbf{und} \quad f''(x_0) \neq 0$$

   hinreichend (aber nicht notwendig) für die Existenz eines lokalen Extremums von f an der Stelle x_0; und zwar hat f in x_0

   ein lokales Maximum, wenn $f''(x_0) < 0$,
   ein lokales Minimum, wenn $f''(x_0) > 0$

   ist.
   Entsprechende Kriterien haben wir für die Existenz von Wendepunkten erarbeitet.
4. Damit eine an der Stelle x_0 zweimal bzw. dreimal differenzierbare Funktion f in x_0 einen **Wendepunkt** hat, ist
   notwendig (aber nicht hinreichend):

   $$f''(x_0) = 0$$

D

hinreichend (aber nicht notwendig):
a) $f''(x_0) = 0$ **und** f'' wechselt in x_0 das Vorzeichen,
b) $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$.

17 Die Funktion $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$ ist in bezug auf lokale Monotonie und lokale Konvexität bzw. lokale Konkavität zu untersuchen.

Lösung: Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad (x > 0).$$

Folglich gilt für jedes x mit $x > 0$

$$f'(x) > 0 \quad \text{und} \quad f''(x) < 0.$$

Also ist die Funktion $f(x) = \ln x$ für jedes x ihres Definitionsbereiches lokal monoton wachsend und lokal konkav.

18 Die lokalen Extremwerte der Funktion $f(x) = x^2 e^x$ sind zu berechnen.

Lösung: Es ist

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(x^2 + 2x)$$
$$f''(x) = e^x(x^2 + 2x) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + 2).$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extremwerte $f'(x) = 0$ führt auf die Gleichung

$$e^x(x^2 + 2x) = 0.$$

Da für jedes x aber $e^x > 0$ gilt, brauchen wir nur die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 2x = 0$$

zu berechnen. Diese sind

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -2.$$

Es ist

$$f''(0) = 2 > 0 \quad \text{und} \quad f''(-2) = -2e^{-2} < 0.$$

Folglich hat f an der Stelle 0 ein lokales Minimum, und an der Stelle -2 ein lokales Maximum.
Die Funktionswerte der Funktion f an den Stellen 0 und -2 sind

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(-2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54.$$

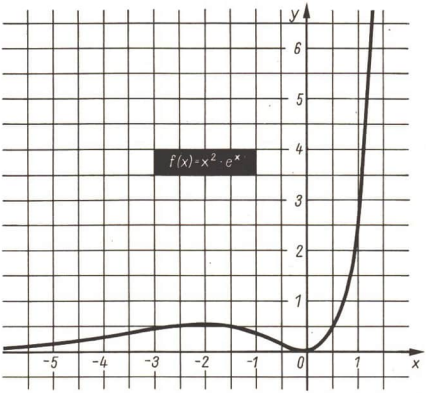
Ergebnis: Die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ hat an der Stelle

0 das lokale Minimum $f(0) = 0$
-2 das lokale Maximum $f(-2) \approx 0{,}54$.

Das Bild D 7 zeigt das Bild der Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ im Intervall $\langle -6; 1{,}3 \rangle$.

14

19 Die Nullstellen, die lokalen Extremwerte und die Wendepunkte der Funktion $f(x) = (x - 3) \cdot \sqrt[3]{x^2}$ sind zu berechnen, und das Bild derFunktion ist im Intervall $-1{,}5 \leqq x \leqq 5$ zu zeichnen.



D 7

1. Nullstellen

Die Funktion f hat, wie man unmittelbar erkennt, die Nullstellen

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 3 \text{ und nur diese.}$$

2. Lokale Extrema

Die Ableitung der Funktion

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{3}}$$

erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel:

$$g'(x) = \frac{1}{3}(x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} \qquad (x \neq 0)\,^{1}.$$

Folglich hat f die Ableitung

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + (x-3) \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + (x-3)\,2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5x^2 - 6x}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x(5x-6)}{\sqrt[3]{x^4}} \qquad (x \neq 0).$$

An der Stelle $\frac{6}{5}$ hat f' eine Nullstelle. Das Vorzeichen von f' hängt für positive x nur von dem Vorzeichen der Differenz $5x - 6$ ab.

Für $0 < x < \frac{6}{5}$ ist $5x - 6 < 0$ und

für $x > \frac{6}{5}$ ist $5x - 6 > 0$.

[1] Man beachte! Die Funktionen $g(x) = (x^2)^{\frac{1}{3}}$ und $h(x) = x^{\frac{2}{3}}$ $(x \geqq 0)$ sind nicht identisch, denn die Funktion g ist für alle reellen Zahlen definiert.

Daraus folgt:

$$\text{Für } 0 < x < \frac{6}{5} \text{ ist } f'(x) < 0 \quad \text{und}$$

$$\text{für} \quad x > \frac{6}{5} \text{ ist } f'(x) > 0.$$

Folglich hat f an der Stelle $\frac{6}{5}$ das lokale Minimum

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{6}{5} - 3\right)\sqrt[3]{\frac{36}{25}} = -\frac{9}{5}\sqrt[3]{\frac{36 \cdot 5}{25 \cdot 5}} = -\frac{9}{25}\sqrt[3]{180} \approx -2{,}03\,.$$

Da die Funktion f an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist, muß noch untersucht werden, ob f an dieser Stelle ein lokales Extremum hat. Für alle x mit $x < 0$ und für alle x mit $0 < x < 3$ ist $f(x) < 0$. Folglich gibt es eine Umgebung der Stelle 0 derart, daß für jedes x mit $x \neq 0$ aus dieser Umgebung $f(x) < f(0)$ gilt. Also hat f an der Stelle 0 das lokale Maximum $f(0) = 0$.

3. Wendepunkte

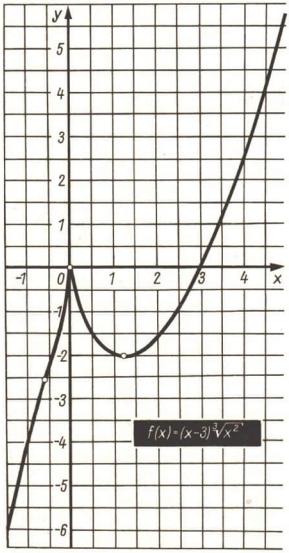
Die zweite Ableitung der Funktion f ist die Funktion

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(10x - 6)\sqrt[3]{x^4} - (5x^2 - 6x)\dfrac{4x^3}{3\sqrt[3]{x^8}}}{\sqrt[3]{x^8}}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{x^4(10x + 6)}{x^4\sqrt[3]{x^4}} \quad (x \neq 0)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{10x + 6}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (x \neq 0).$$

D 8



Da $-\frac{3}{5}$ Nullstelle von f'' ist und f'' an dieser Stelle das Vorzeichen wechselt, hat die Funktion f den Wendepunkt

$$W\left[-\frac{3}{5}; f\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$$

mit

$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{18}{5}\sqrt[3]{\frac{9}{25}}$$

$$= -\frac{18}{25}\sqrt[3]{45} \approx -2{,}6.$$

Da f'' nur die Nullstelle $-\frac{3}{5}$ hat und der Begriff des Wendepunktes nur für solche Stellen, an denen f' existiert, erklärt worden ist, hat f keinen weiteren Wendepunkt.

4. Bild der Funktion
Wir berechnen noch für einige Zahlen aus dem Intervall $\langle -1{,}5;\ 5\rangle$ Näherungswerte für die zugehörigen Funktionswerte:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$-0{,}2$	$0{,}2$	$0{,}5$
y	$-5{,}9$	-4	$-2{,}2$	$-1{,}1$	$-1{,}0$	$-1{,}6$

x	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	$3{,}5$	4	5
y	-2	-2	$-1{,}6$	$-0{,}9$	$1{,}2$	$2{,}5$	$5{,}8$

Das Bild D 8 zeigt das Bild von f im Intervall $\langle -1{,}5;\ 5\rangle$.

15

20 Die Nullstellen, die lokalen Extrema und die Wendepunkte der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin x + \sin 2x$ sind zu berechnen, und das Bild der Funktion ist im Intervall $-\pi \leqq x \leqq 2\pi$ zu zeichnen.

Lösung: Die Funktion f ist eine periodische Funktion mit der (primitiven) Periode 2π, d. h., es gilt für jede ganze Zahl k

$$f(x + k \cdot 2\pi) = f(x).$$

Daher genügt es, wenn wir uns bei den geforderten Berechnungen auf das Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ beschränken und das Verhalten der Funktion an der Stelle 0 gesondert untersuchen.

1. Nullstellen
Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung

(1) $\quad 2 \cdot \sin x + \sin 2x = 0.$

Mit Hilfe der Identität $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cos x$ erhalten wir aus (1)

$$2 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x \cos x = 0$$

bzw.

$$\sin x\,(1 + \cos x) = 0.$$

Jede Zahl x mit

$$\sin x = 0 \quad \text{oder} \quad 1 + \cos x = 0$$

und nur eine solche ist eine Lösung der Gleichung (1). Folglich erhalten wir als Nullstellen der Funktion f im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ die Zahlen

$$x = k \cdot \pi \quad (k = 0, 1, 2).$$

2. Lokale Extrema
Es ist

$$f'(x) = 2 \cdot \cos x + 2 \cdot \cos 2x \quad \text{und} \quad f''(x) = -2 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin 2x.$$

Die Stellen, an denen f lokale Extremwerte haben kann, sind die Nullstellen der 1. Ableitung f', also die Lösungen der Gleichung

(2) $\quad \cos x + \cos 2x = 0.$

D

Mit Hilfe der Identität $\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$ erhalten wir aus (2)

$$\cos x + 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 0$$

bzw.

$$(3) \qquad \cos^2 x + \frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} = 0.$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt

$$\cos x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

Die Lösungen der Gleichung (3) sind also diejenigen Zahlen x, für die

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \cos x = -1$$

gilt. Im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ erhalten wir aus $\cos x = \frac{1}{2}$ die Zahlen

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

und aus $\cos x = -1$ die Zahl

$$x_3 = \pi.$$

Nun ist

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{2\pi}{3} = -2\sin\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{\pi}{3} < 0$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2 \cdot \sin\frac{5\pi}{3} - 4\sin\frac{10\pi}{3} = -2\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) - 4\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) > 0$$

$$f''(\pi) = -2 \cdot \sin\pi - 4\sin 2\pi \quad = 0.$$

Folglich hat f an der Stelle

$$\frac{\pi}{3} \text{ das lokale Maximum } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}6$$

$$\frac{5\pi}{3} \text{ das lokale Minimum } f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2 \cdot \sin\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{10\pi}{3}$$

$$= -2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\approx -2{,}6.$$

Über die Stelle $x_3 = \pi$ können wir zunächst nichts weiter aussagen.

3. *Wendepunkte*

Die Nullstellen der 2. Ableitung sind die Lösungen der Gleichung

$$\sin x + 2 \cdot \sin 2x = 0.$$

Diese Gleichung ist mit den folgenden äquivalent:

$$\sin x + 4 \cdot \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x(1 + 4\cos x) = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind diejenigen Zahlen x, für die

$$\sin x = 0 \quad \text{oder} \quad \cos x = -\frac{1}{4}$$

gilt. Im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ sind dies die Zahlen

$$x = k \cdot \pi \quad (k = 0, 1, 2)$$
$$x \approx 1{,}82\ (104{,}5°) \quad \text{und} \quad x \approx 4{,}46\ (255{,}5°).$$

Diese Ergebnisse liest man am einfachsten in der Tabelle auf den Seiten 28 und 29 des Tafelwerkes ab.
Mit Hilfe der 3. Ableitung von f

$$f'''(x) = -2 \cdot \cos x - 8 \cdot \cos 2x = -2 \cdot \cos x - 8(2 \cdot \cos^2 x - 1)$$

erhalten wir:
Für $\cos x = -\frac{1}{4}$ und für $\sin x = 0$, also $\cos x = \pm 1$ gilt

$$f'''(x) \neq 0.$$

Folglich hat f im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ an den Stellen 1,82; π und 4,46 Wendepunkte. Auch an den Stellen 0 und 2π hat f Wendepunkte, da f für alle x definiert ist und auch für diese Stellen $f'''(x) \neq 0$ gilt.
Die Funktionswerte der hier berechneten Zahlen sind

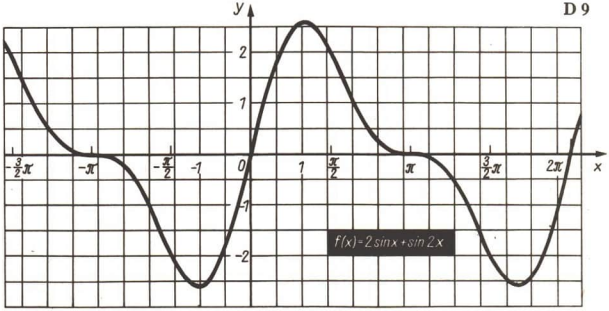
$$f(1{,}82) \approx 1{,}45$$
$$f(4{,}46) \approx -1{,}45$$
$$f(k\pi) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Ergebnis: Unter Berücksichtigung der Periodizität von f erhalten wir folgendes Ergebnis:
Nullstellen: $x = k\pi$ (k eine ganze Zahl).
Extrema:

a) lokale Maxima: $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

b) lokale Minima: $x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad f(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$

D 9



D

Wendepunkte:

$$x = k\pi, \quad f(x) = 0$$
$$x \approx 1{,}82 + k \cdot 2\pi, \quad f(x) \approx 1{,}45$$
$$x \approx 4{,}46 + k \cdot 2\pi, \quad f(x) \approx -1{,}45.$$

Das Bild D 9 zeigt das Bild der Funktion f im Intervall $-\pi \leqq x \leqq 2\pi$.

Aufgaben d 55 bis 65

16 Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt uns eine Möglichkeit zur näherungsweisen numerischen Berechnung von Funktionswerten. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung lautet:

Ist eine Funktion f in $\langle a, b\rangle$ stetig und in (a, b) differenzierbar, so gibt es eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ derart, daß gilt

$$\text{(1)} \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

(Bild D 10). Setzt man $a = x_0$, $b = x_0 + h$, so lautet die Gleichung (1)

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi)$$

bzw.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(\xi).$$

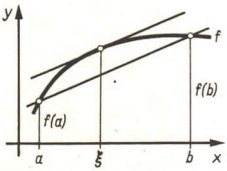
Wegen $x_0 < \xi < x_0 + h$ gibt es eine Zahl ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ derart, daß $\xi = x_0 + \vartheta h$ gilt. Damit erhält man

$$\text{(2)} \qquad \boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + h\, f'(x_0 + \vartheta h) \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta < 1}$$

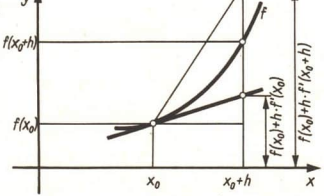
Ist nun f eine gegebene Funktion, deren Ableitung f' in einem gewissen Intervall $\langle x_0, x_0 + h\rangle$ **monoton** ist, und kennt man den Funktionswert $f(x_0)$, so kann man mit Hilfe der Gleichung (2) für den Funktionswert $f(x_0 + h)$ eine untere und eine obere Schranke berechnen. Wenn nämlich die Funktion f' im Intervall $\langle x_0, x_0 + h\rangle$ monoton ist, so nimmt sie ihren kleinsten und ihren größten Funktionswert in diesem Intervall an den Enden des Intervalls an. Setzt man also in (2) für ϑ die Zahlen 0 und 1 ein, so erhält man eine untere und eine obere Schranke für $f(x_0 + h)$.

D

D 10



D 11



Ist f' in $\langle x_0, x_0 + h)$ monoton wachsend, so gilt

$$f(x_0) + hf'(x_0) < f(x_0 + h) < f(x_0) + hf'(x_0 + h) \quad \text{(Bild D 11).}$$

Ist f' in $\langle x_0, x_0 + h\rangle$ monoton fallend, so gilt

$$f(x_0) + hf'(x_0 + h) < f(x_0 + h) < f(x_0) + hf'(x_0).$$

21 Unter Verwendung von $\ln 15 \approx 2{,}7081$ (Tafelwert) sind für $\ln 15{,}2$ eine untere und eine obere Schranke zu berechnen.

Lösung: Aus dem Tafelwert für $\ln 15$ folgt

$$2{,}70805 < \ln 15 < 2{,}70815.$$

Für die Funktion $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$ erhält man mit Hilfe der Gleichung (2)

$$\ln(x_0 + h) = \ln x_0 + \frac{h}{x_0 + \vartheta h} \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Da die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$ monoton fällt, erhält man hieraus mit $x_0 = 15$ und $h = 0{,}2$ für $\vartheta = 1$ eine untere und für $\vartheta = 0$ eine obere Schranke für $\ln 15{,}2$.

$$\vartheta = 1: \quad \frac{h}{x_0 + \vartheta h} = \frac{0{,}2}{15{,}2} = 0{,}013158\ldots > 0{,}01315$$

$$\vartheta = 0: \quad \frac{h}{x_0 + \vartheta h} = \frac{0{,}2}{15} = 0{,}01333\overline{3}\ldots < 0{,}01334.$$

Folglich gilt

$$2{,}70805 + 0{,}01315 < \ln 15{,}2 < 2{,}70815 + 0{,}01334$$

bzw.

$$2{,}7212 < \ln 15{,}2 < 2{,}7215.$$

Setzen wir z. B. $\ln 15{,}2 \approx 2{,}7213$, so ist der Fehler dieses Näherungswertes höchstens gleich $0{,}0002$.

22 Für $e^{1,01}$ sind unter Verwendung von $e \approx 2{,}7183$ (Tafelwert) eine untere und eine obere Schranke zu berechnen.

Lösung: Für die Funktion $f(x) = e^x$ ergibt die Gleichung (2)

$$e^{x_0+h} = e^{x_0} + he^{x_0+\vartheta h} \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Mit $x_0 = 1$ und $h = 0{,}01$ erhalten wir hieraus für $\vartheta = 0$ eine untere und für $\vartheta = 1$ eine obere Schranke für $e^{1,01}$:

$$e + 0{,}01e < e^{1,01} < e + 0{,}01e^{1,01}.$$

Aus dem Tafelwert für e folgt $2{,}71825 < e < 2{,}71835$.

Folglich ist

$$e^{1,01} > e + 0{,}01e = 1{,}01e > 1{,}01 \cdot 2{,}71825 > 2{,}74543.$$

Aus

$$e^{1,01} < e + 0{,}01e^{1,01}$$

folgt

$$0{,}99e^{1,01} < e$$

$$e^{1,01} < \frac{e}{0{,}99} < \frac{2{,}71835}{0{,}99} < 2{,}74581.$$

Folglich ist

$$2{,}7454 < e^{1,01} < 2{,}7459.$$

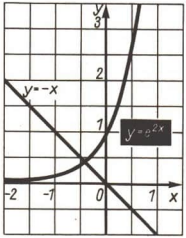
D

23 Die Funktion $f(x) = x + e^{2x}$ ist in bezug auf Existenz von Nullstellen zu untersuchen. Für eventuell vorhandene Nullstellen sind Näherungswerte zu berechnen.
Lösung: Die Funktion $f(x) = x + e^{2x}$ ist wegen $f'(x) = 1 + 2e^{2x} > 0$ monoton wachsend und hat daher höchstens eine Nullstelle. Als stetige Funktion hat sie wegen

$$f(-1) = -1 + e^{-2} < 0 \quad \text{und} \quad f(0) = e^0 = 1 > 0$$

nach dem Zwischenwertsatz im Intervall $(-1; 0)$ eine und damit die einzige Nullstelle x^*.
Aus dem Bild D 12 entnehmen wir, daß die Zahl $x_0 = -0{,}4$ ein Näherungswert für die gesuchte Nullstelle x^* ist. Es ist

$$f(x_0) = -0{,}4 + e^{-0{,}8} \approx 0{,}05.$$



D 12

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es eine Zahl ξ mit $x^* \leqq \xi \leqq x_0$ derart, daß gilt

$$f(x^*) = f(x_0) + (x^* - x_0) f'(\xi).$$

Aus dieser Gleichung folgt wegen $f(x^*) = 0$

$$x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\xi)}.$$

Da wir die Zahl ξ nicht kennen, können wir mit Hilfe dieser Gleichung die Nullstelle x^* nicht berechnen. Nehmen wir an Stelle der Zahl ξ die Zahl x_0, so erhalten wir die Zahl

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

die — wie wir noch sehen werden — als Näherungswert für die Nullstelle x^* geeigneter ist als die Zahl x_0.
Es ist

$$x_1 = -0{,}4 - \frac{f(-0{,}4)}{f'(-0{,}4)} = -0{,}4 - \frac{-0{,}4 + e^{-0{,}8}}{1 + 2e^{-0{,}8}} \approx -0{,}426$$

$$f(-0{,}426) = -0{,}426 + e^{-0{,}852} < 0{,}001.$$

Da die Funktion $f(x) = x + e^{2x}$ monoton wächst und $f(x_1) < f(x_0)$ gilt, ist die Zahl x_1 in der Tat als Näherungswert für die Nullstelle x^* geeigneter als die Zahl x_0.
Um die Genauigkeit des berechneten Näherungswertes abzuschätzen, wenden wir den Mittelwertsatz auf die Differenz $f(x_1) - f(x^*)$ an und erhalten

$$f(x_1) - f(x^*) = (x_1 - x^*) f'(\xi) \quad \text{mit} \quad x^* \leqq \xi \leqq x_1.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$x_1 - x^* = \frac{f(x_1)}{f'(\xi)}.$$

Ist nun k der kleinste Wert von $|f'(x)|$ im Intervall $\langle -1; 0 \rangle$, so gilt

$$|x_1 - x^*| \leqq \frac{|f(x_1)|}{k}.$$

Da $f'(x) = 1 + 2e^{2x}$ eine monoton wachsende Funktion ist, nimmt sie im Intervall $\langle -1; 0 \rangle$ ihren kleinsten Wert an der Stelle -1 an.

D

Es ist $f'(-1) = 1 + 2e^{-2} > 1{,}27$. Dann gilt

$$|x_1 - x^*| \leqq \frac{|f(x_1)|}{1{,}27} < 0{,}0009.$$

Der Fehler des berechneten Näherungswertes x_1 ist also sicher kleiner als $9 \cdot 10^{-4}$. Man könnte mit der hier verwendeten Methode noch geeignetere Näherungswerte berechnen, wir wollen es aber bei dem Näherungswert x_1 belassen.[1]

17 Extremwertaufgaben

24 Eine Batterie der Nationalen Volksarmee hat einen Stellungswechsel vom Punkt A zum Punkt B (Bild D 13) durchzuführen. Der Punkt A liegt an einer Straße, der Punkt B im Gelände 12 km von der annähernd geradlinig verlaufenden Straße entfernt. Der Fußpunkt des Lotes von B auf die Straße ist 20 km von A entfernt. Die Marschgeschwindigkeit beträgt auf der Straße $v_1 = 50\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ und im Gelände $v_2 = 25\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. An welcher Stelle muß die Kolonne von der Straße abbiegen, um den Stellungswechsel in möglichst kurzer Zeit zu vollziehen?

Lösung: Es sei $(a - x)$ bzw. y die (in Kilometern gemessene) Länge des auf der Straße bzw. des im Gelände geradlinig zu durchfahrenden Weges. Setzen wir voraus, daß die Teilbewegungen gleichförmig erfolgen, so benötigt die Batterie die Zeit

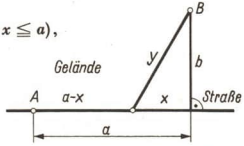
$$t = F(x, y) = \frac{a - x}{v_1} + \frac{y}{v_2}.$$

Nun ist $y = \sqrt{b^2 + x^2}$. Damit erhalten wir die Funktion

$$t = f(x) = \frac{a - x}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v_2} \quad (0\ \mathrm{km} \leqq x \leqq a),$$

von der wir im Intervall $0\ \mathrm{km} \leqq x \leqq a$ den kleinsten Funktionswert zu ermitteln haben. Die Ableitung der Funktion f ist

$$t' = f'(x) = -\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}.$$



D 13

Die Nullstellen der Ableitung sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{x}{v_2\sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{1}{v_1},$$

die wir wie folgt lösen:

$$v_1^2 x^2 = v_2^2(b^2 + x^2)$$
$$x^2(v_1^2 - v_2^2) = b^2 v_2^2$$
$$x^2 = \frac{b^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}$$
$$x = \frac{b v_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}} \quad (x \geqq 0).$$

[1] Es müßte eigentlich nachgewiesen werden, daß jede Folge von Näherungswerten, die wir mit dem hier verwendeten Verfahren erhalten, gegen die Nullstelle von f konvergiert.

Die Probe zeigt, daß diese Lösung x auch Lösung der Ausgangsgleichung und damit die einzige Nullstelle der Funktion f' ist:

$$\frac{x}{v_2\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}\,v_2\sqrt{b^2+\dfrac{b^2v_2^2}{v_1^2-v_2^2}}} = \frac{b}{\sqrt{b^2(v_1^2-v_2^2)+b^2v_2^2}}$$
$$= \frac{1}{v_1}.$$

Setzen wir die gegebenen Größen ein, so erhalten wir

$$x = \frac{12\cdot 25}{\sqrt{2500-625}}\,\text{km} \approx \frac{300}{43{,}3}\,\text{km} \approx 6{,}9\,\text{km}.$$

Die 2. Ableitung von f ist die Funktion

$$t'' = f''(x) = \frac{1}{v_2}\cdot\frac{\sqrt{b^2+x^2}-x\dfrac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}}{b^2+x^2} = \frac{1}{v_2}\cdot\frac{b^2+x^2-x^2}{\sqrt{b^2+x^2}(b^2+x^2)}$$
$$= \frac{b^2}{v_2\sqrt{b^2+x^2}(b^2+x^2)}.$$

Man erkennt unmittelbar, daß für jedes x

$$f''(x) > 0$$

ist. Folglich hat f an der Stelle $x \approx 6{,}9$ km ein lokales Minimum. Der Vergleich des Funktionswertes

$$f(6{,}9\,\text{km}) = \left(\frac{13{,}1}{50} + \frac{\sqrt{144+6{,}9^2}}{25}\right)\text{h} \approx 0{,}82\,\text{h}$$

mit den Randwerten

$$f(0\,\text{km}) = \frac{a}{v_1} + \frac{b}{v_2} = \left(\frac{20}{50} + \frac{12}{25}\right)\text{h} = 0{,}88\,\text{h} \quad \text{und}$$

$$f(a) = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{v_2} = \frac{\sqrt{544}}{25}\,\text{h} \approx 0{,}93\,\text{h}$$

zeigt, daß das ermittelte lokale Minimum auch gleichzeitig das globale Minimum von f in dem betrachteten Intervall ist.

Ergebnis: Um den Stellungswechsel in möglichst kurzer Zeit durchzuführen, muß die Batterie ungefähr 13,1 km vom Punkt A entfernt von der Straße abzweigen.

D

18

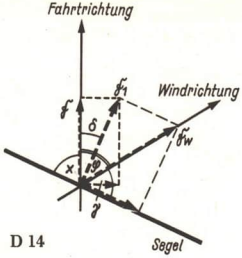
25 Die Fahrtrichtung eines Segelbootes bildet mit der Windrichtung den Winkel φ $(0 \leqq \varphi < \pi)$. Wie müssen die Segel gestellt werden, um eine maximale Ausnutzung der Windkraft zu erzielen?

Lösung: Es sei x $\left(0 < x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen dem Segel und der Fahrtrichtung (Bild D 14). Dieser Winkel x ist so zu wählen, daß eine maximale Ausnutzung der Windkraft erfolgt. Von der Windkraft $\mathfrak{F}_w$ ist nur die Komponente

$\mathfrak{F}_1$ wirksam, die senkrecht auf das Segel drückt. Ist $\gamma = \pi - (x + \varphi)$ der Winkel zwischen Windkraft und Segel (Bild D 14), so gilt

(1) $$F_1 = F_w \sin\gamma = F_w \sin[\pi - (x + \varphi)] = F_w \sin(x + \varphi).$$

Von der Kraft $\mathfrak{F}_1$ betrachten wir nun wieder diejenige Komponente $\mathfrak{F}$, die in die Fahrtrichtung fällt, die also die Vorwärtsbewegung des Bootes bewirkt. Der Winkel zwischen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}$ beträgt $\delta = \frac{\pi}{2} - x$. Folglich ist



D 14

(2) $$F = F_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = F_1 \cdot \sin x.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$F = f(x) = F_w \cdot \sin x \cdot \sin(x + \varphi) \qquad \left(0 < x \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Für diese Funktion f ist also im Intervall $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ das globale Maximum zu ermitteln.
Ist $\varphi = 0$, d. h., fallen Fahrt- und Windrichtung zusammen, so erhalten wir die Funktion

$$f_1(x) = F_w \cdot \sin^2 x \qquad \left(0 < x \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

die an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ das globale Maximum $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = F_w$ hat. In diesem Fall wird also die gesamte Windkraft für die Bewegung des Bootes ausgenutzt, wenn das Segel senkrecht zur Fahrtrichtung steht.
Für $0 < \varphi < \pi$ ermitteln wir zunächst, ob die Funktion

$$F = f(x) = F_w \sin x \cdot \sin(x + \varphi)$$

im Intervall $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ lokale Maxima hat. Die 1. Ableitung dieser Funktion ist

$$\frac{dF}{dx} = f'(x) = F_w[\cos x \cdot \sin(x + \varphi) + \sin x \cdot \cos(x + \varphi)].$$

Setzt man $x + \varphi = y$, so ist

$$\cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y = \sin(x + y) = \sin(2x + \varphi).$$

Also ist $f'(x) = F_w \cdot \sin(2x + \varphi)$.
Die notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums $f'(x) = 0$ führt auf die Gleichung

(3) $$\sin(2x + \varphi) = 0.$$

Wegen $0 < \varphi < \pi$ und $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ gilt $0 < 2x + \varphi < 2\pi$. In diesem Intervall hat die Gleichung (3) genau eine Lösung, nämlich $2x + \varphi = \pi$, bzw.

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$$

D

Mit Hilfe der 2. Ableitung

$$f''(x) = 2F_w \cdot \cos(2x + \varphi)$$

folgt wegen

$$f''\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = 2F_w \cdot \cos\pi = -2F_w < 0, \text{ daß } f \text{ an der Stelle } x = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$$

ein lokales Maximum hat.
Es ist

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = F_w \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} + \varphi\right) = F_w \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = F_w \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = F_w \cdot \cos\varphi.$$

Aus

$$\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

folgt

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = \cos\varphi + \sin^2\frac{\varphi}{2} > \cos\varphi.$$

Folglich ist

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) > f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ferner gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0.$$

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß das lokale Maximum $f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$ auch das globale Maximum der Funktion f im Intervall $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ ist.

Ergebnis: Die günstigste Segelstellung erreicht man, wenn

$$x + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

gilt, d. h., wenn das Segel auf der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen Fahrt- und Windrichtung senkrecht steht. (Das hier ermittelte Ergebnis gilt nur unter der Voraussetzung, daß das Segel starr ist, was natürlich in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Deshalb gilt diese Lösung in der Praxis nur angenähert.)

D

19

26 Welcher Punkt der Kurve $y = e^x$ hat vom Koordinatenanfangspunkt den kleinsten Abstand?

Lösung: Der Abstand eines beliebigen Punktes $P(x; y)$ der Kurve $y = e^x$ vom Ursprung des Koordinatensystems beträgt (Bild D 15)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Mit $y = e^x$ erhalten wir die für alle x definierte Funktion

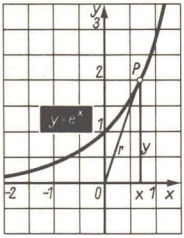
$$r = g(x) = \sqrt{x^2 + e^{2x}}.$$

Wir untersuchen zunächst, ob diese Funktion g lokale Minima hat.
Die 1. Ableitung von g ist die Funktion

$$g'(x) = \frac{2x + 2e^{2x}}{2\sqrt{x^2 + e^{2x}}} = \frac{x + e^{2x}}{\sqrt{x^2 + e^{2x}}}.$$

Die Nullstellen von g' sind die Lösungen der Gleichung

$$x + e^{2x} = 0.$$



D 15

Im Beispiel D 23 wurde gezeigt, daß diese Gleichung genau eine Lösung x^* hat, für die wir den Näherungswert $-0{,}426$ ermittelt haben. Die Rechnung im Beispiel D 23 hat ferner gezeigt, daß die Funktion

$$f(x) = x + e^{2x}$$

an der Stelle x^* von negativen zu positiven Werten übergeht. Da $\sqrt{x^2 + e^{2x}}$ stets positiv ist, geht auch die Ableitung $g'(x) = \dfrac{x + e^{2x}}{\sqrt{x^2 + e^{2x}}}$ an der Stelle x^* von negativen zu positiven Werten über. Folglich hat g an der Stelle x^* ein lokales Minimum.
Wegen $g'(x) < 0$ für $x < x^*$ und $g'(x) > 0$ für $x > x^*$ ist die Funktion g für alle $x < x^*$ monoton fallend und für alle $x > x^*$ monoton wachsend. Folglich ist das lokale Minimum von g auch das globale Minimum von g.
Ergebnis: Der Punkt P mit der Abszisse $x \approx -0{,}426$ der Kurve $y = e^x$ hat vom Ursprung des Koordinatensystems den kleinsten Abstand.

Aufgaben d 66 bis 92

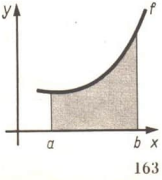
Flächeninhalts- und Volumenberechnungen

D

20 Flächeninhaltsberechnungen (Wiederholung)

Ist f eine im Intervall $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion, deren Funktionswerte in $\langle a, b\rangle$ nicht negativ sind, so versteht man unter dem Flächeninhalt A des ebenen Flächenstückes, das von dem Bild von f, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird (Bild D 16), das bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $\langle a, b\rangle$. Es ist also

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

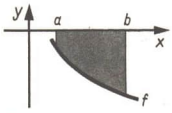


D 16

Das betrachtete Flächenstück enthält also genau die Punkte $P(x;\ y)$, deren Abszissen x dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ und deren Ordinaten y bei einem festen x aus $\langle a, b\rangle$ dem Intervall $0 \leqq y \leqq f(x)$ angehören.

Sind die Funktionswerte von f im Intervall $\langle a, b\rangle$ nicht positiv, so beträgt der Flächeninhalt des betreffenden Flächenstückes (Bild D 17):

$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx.$$



D 17

Für jede im Intervall $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion f existiert das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Wählt man für das Intervall $\langle a, b\rangle$ irgendeine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, bei der die n-te Zerlegung durch die Zahlen $x_0^{(n)}$, $x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ mit

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$$

gegeben ist, und feste Zahlen $\xi_i^{(n)}$ mit

$$x_{i-1}^{(n)} \leqq \xi_i^{(n)} \leqq x_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right).$$

Die Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ einer gegebenen stetigen Funktion f kann auf das Aufsuchen einer Stammfunktion F von f zurückgeführt werden, denn der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt:

Ist f eine im Intervall $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

In der 11. Klasse traten bei den Anwendungen der Integralrechnung nur rationale Funktionen auf. Hier sollen nun u. a. auch Flächeninhalte solcher Flächenstücke berechnet werden, die von den Bildern nichtrationaler Funktionen begrenzt werden.

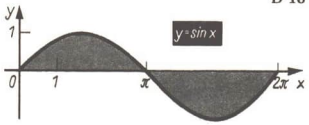
D

21 Beispiele

27 Es ist der Flächeninhalt derjenigen Fläche zu berechnen, die von der Sinuskurve und der x-Achse im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ begrenzt wird.

Lösung: Die Funktion sin hat in dem genannten Intervall die Nullstellen 0, π und 2π (Bild D 18). Für $0 < x < \pi$ ist $\sin x > 0$, und für $\pi < x < 2\pi$ ist $\sin x < 0$. Folglich ist

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right| \\ &= [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos\pi + \cos 0 \\ &\quad + \cos 2\pi - \cos\pi \\ A &= 4. \end{aligned}$$



D 18

Beachte: Es ist $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0$.

28 Der Querschnitt der Tragfläche eines Flugkörpers wird durch die Bilder der Funktionen $f_1(x) = \frac{x^2}{8}$ und $f_2(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2x}$ (Bild D 19) begrenzt. Der Flächeninhalt dieses Querschnittes ist zu berechnen.

Lösung: Die Abszissen der Schnittpunkte der gegebenen Parabeln sind die Lösungen der Gleichung

$$(*) \quad \frac{x^2}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{2x}.$$

Durch Quadrieren von (*) erhält man die Gleichung

$$\frac{x^4}{64} = \frac{1}{16} \cdot 2x$$

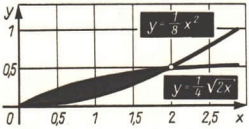
bzw.

$$x^4 = 8x$$

mit den Lösungen

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 2.$$

D 19



Die Probe zeigt, daß die Zahlen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ auch die Lösungen der Gleichung (*) sind. Folglich schneiden die Bilder der Funktionen f_1 und f_2 einander an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

Der Flächeninhalt des zu berechnenden Querschnittes ist

$$A = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}\sqrt{2x} - \frac{1}{8}x^2\right) dx = \frac{1}{8}\left[2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot 8\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\right)$$

$$A = \frac{1}{3}.$$

29 Es ist zu zeigen, daß für beliebige positive Zahlen a und b stets gilt $\int_1^a \frac{dx}{x} = \int_b^{ab} \frac{dx}{x}$.

Das Ergebnis ist geometrisch zu deuten.

Lösung: Es ist

$$(1) \quad \int_1^a \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^a = \ln a - \ln 1 = \ln a$$

$$(2) \quad \int_b^{ab} \frac{dx}{x} = [\ln x]_b^{ab} = \ln ab - \ln b = \ln \frac{ab}{b} = \ln a.$$

Folglich ist

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \int_b^{ab} \frac{dx}{x}.$$

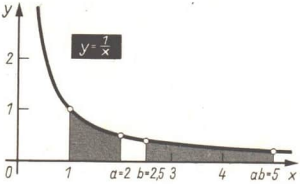
D

Geometrische Deutung: Das Flächenstück, das von der Kurve $y = \frac{1}{x}$, der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = a$ $(a > 0)$ begrenzt wird, hat stets den gleichen Flächeninhalt wie dasjenige Flächenstück, das von dieser Kurve, der x-Achse und den Geraden $x = b$ $(b > 0)$ und $x = ab$ begrenzt wird. Das Bild D 20 zeigt diese beiden Flächenstücke für $a = 2$ und $b = 2{,}5$.

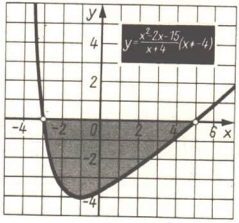
(12) *Zeigen Sie, daß unter Verwendung des Ergebnisses von Beispiel D 29 für beliebige positive Zahlen a und b stets gilt*

$$\int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x} = \int_1^{ab} \frac{dx}{x}\,!$$

Welche wichtige Eigenschaft der Logarithmen wird durch diese Gleichung dargestellt?



D 20



D 21

30 Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4}$ $(x \neq -4)$ hat für $x > -4$ zwei Nullstellen x_1 und x_2. Es ist der Flächeninhalt des Flächenstücks zu berechnen, das von dem Bild der Funktion und der x-Achse im Intervall $\langle x_1; x_2 \rangle$ begrenzt wird.

Lösung: Die Funktion f hat die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 5$. Im Intervall $\langle -3; 5 \rangle$ ist f stetig. Ferner gilt für jedes x mit $-3 < x < 5$: $f(x) < 0$ (Bild D 21). Für $x \neq -4$ ist

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4} = x - 6 + \frac{9}{x + 4}.$$

Also ist

$$A = \left| \int_{-3}^{5} \left(x - 6 + \frac{9}{x + 4} \right) dx \right| = -\left[\frac{1}{2} x^2 - 6x + 9 \ln (x + 4) \right]_{-3}^{5}$$

$$= -\left(\frac{25}{2} - 30 + 9 \ln 9 - \frac{9}{2} - 18 - 9 \ln 1 \right) \approx 40 - 9 \cdot 2{,}2$$

$$A \approx 20{,}2.$$

D

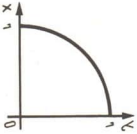
22 Flächeninhalt einer Kreisfläche

Der im Bild D 22 dargestellte Viertelkreis ist das Bild der Funktion

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq x \leqq r.$$

Der Flächeninhalt des Flächenstückes, das von dem Viertelkreis und den Koordinatenachsen begrenzt wird, ist

$$A_1 = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$



D 22

Durch die Funktion

$$x = \varphi(t) = r \cdot \sin t \quad \text{mit} \quad 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$$

wird das Intervall $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ umkehrbar eindeutig auf das Intervall $0 \leqq x \leqq r$ abgebildet. Es ist

$$\varphi(0) = r \cdot \sin 0 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = r \cdot \sin\frac{\pi}{2} = r.$$

Nach der Substitutionsformel (↗ Seite 139) erhalten wir

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 t} \cdot r \cdot \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)} \cdot r \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Das unbestimmte Integral $\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$ haben wir bereits im Beispiel D 12 d (↗ Seite 143) gelöst. Es ist

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + c.$$

Folglich ist

$$A_1 = \frac{r^2}{2}[t + \sin t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin 0 \cos 0\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{4}\pi r^2.$$

Für den Flächeninhalt der gesamten Kreisfläche erhalten wir also

$$A = \pi r^2.$$

(13) *Berechnen Sie den Flächeninhalt des kleineren der beiden Flächenstücke, die von der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 25$ und der Parabel $y^2 = \frac{15}{8}x$ begrenzt werden!*

Aufgaben d 93 bis 103

D

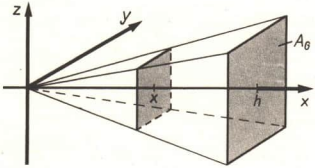
31 Das Bild D 23 zeigt eine vierseitige gerade Pyramide in einem räumlichen Koordinatensystem. Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß der Koordinatenanfangspunkt mit der Spitze der Pyramide zusammenfällt und die x-Achse senkrecht auf der Grundfläche steht.

Jeder Schnitt der Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene ergibt eine Schnittfläche, die der Grundfläche ähnlich ist. Ist A der Flächeninhalt der Grundfläche A_G der Pyramide und h die Pyramidenhöhe, so erhält man für den Flächeninhalt Q der Schnittfläche an der Stelle x $(0 \leqq x \leqq h)$ nach einem bekannten Satz aus der Ähnlichkeitslehre

$$Q : A = x^2 : h^2$$

bzw.

$$Q = \frac{A}{h^2} x^2 .$$



D 23

Für jedes x aus dem Intervall $0 \leqq x \leqq h$ erhält man so eine eindeutig bestimmte Zahl $Q(x)$. Folglich ist die Menge aller geordneten Paare $[x; Q(x)]$ mit $0 \leqq x \leqq h$ eine Funktion, die durch die Gleichung

$$Q(x) = \frac{A}{h^2} x^2 \quad (0 \leqq x \leqq h)$$

beschrieben werden kann. Da diese Funktion stetig ist, existiert das bestimmte Integral

$$\int_0^h Q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{A}{h^2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{A}{h^2} \int_0^h x^2\,\mathrm{d}x .$$

Durch Ausrechnen dieses Integrals erhält man die Zahl

$$V = \frac{Ah}{3},$$

die, wie uns bereits bekannt ist, das Volumen der Pyramide angibt.[1]

Wählt man irgendeine ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(\mathfrak{z}_n)$ für das Intervall $\langle 0, h \rangle$, bei der die n-te Zerlegung $\mathfrak{z}_n$ durch die Zahlen $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ mit

$$0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = h$$

gegeben ist, und feste Zahlen $\xi_i^{(n)}$ mit

$$x_{i-1}^{(n)} \leqq \xi_i^{(n)} \leqq x_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so gilt

$$(1) \qquad \int_0^h \frac{A}{h^2} x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{A}{h^2} \left(\xi_i^{(n)}\right)^2 \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right).$$

[1] Wir identifizieren auch hier wieder (wie bei Flächeninhaltsberechnungen) — solange keine Anwendungsaufgaben behandelt werden — das jeweilige Körpervolumen mit seiner Maßzahl.

(14) *Deuten Sie für ein festes n ($n > 0$) die Summanden*

$$\frac{A}{h^2}(\xi_i^{(n)})^2\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und die Summe

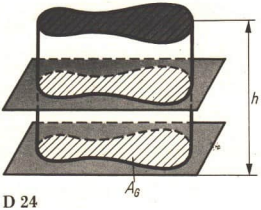
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A}{h^2}(\xi_i^{(n)})^2\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right)$$

in (1) geometrisch!

Mit Hilfe des bestimmten Integrals haben wir definiert, was wir unter dem Flächeninhalt eines Flächenstückes, das von den Bildern **stetiger** Funktionen begrenzt wird, zu verstehen haben. Auf Flächenstücke, die von den Bildern nicht stetiger Funktionen begrenzt werden, sind wir jedoch nicht eingegangen.

Wir wollen uns jetzt mit Volumenberechnungen befassen. Wir werden den Begriff „Volumen" nur für solche Körper definieren, die gewisse einschränkende Bedingungen erfüllen.

Das Bild D 24 zeigt einen Körper, bei dem jeder Schnitt mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene eine mit der Grundfläche kongruente Schnittfläche ergibt und dessen Mantellinien senkrecht auf der Grundfläche stehen. Ohne weitere Begründung verwenden wir, daß ein solcher Körper das Volumen $A \cdot h$ hat, wenn h seine Höhe und A der Flächeninhalt seiner Grundfläche A_G ist. Einen solchen Körper nennen wir einen geraden Zylinder. Ist die Grundfläche eines solchen Körpers ein Kreis bzw. ein Vieleck, so nennen wir ihn einen geraden Kreiszylinder bzw. ein gerades Prisma.



D 24

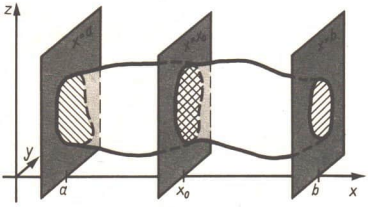
24

Gegeben sei ein Körper K in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem. Es sei a die untere und b die obere Grenze der Abszissen der Punkte von K. Die Punktmenge K liegt also zwischen den parallelen Ebenen $x = a$ und $x = b$ (Bild D 25). Die in der Ebene $x = x_0$ ($a \leqq x_0 \leqq b$) liegende Punktmenge des Körpers nennen wir den Querschnitt von K an der Stelle x_0. **Wir wollen voraussetzen, daß für jedes x aus $\langle a, b\rangle$ der Flächeninhalt $A(x)$ des Querschnittes von K bekannt ist und daß die Menge A, die aus den geordneten Paaren $[x; A(x)]$ mit $a \leqq x \leqq b$ besteht, eine stetige Funktion ist.** (Andere Körper werden hier also nicht betrachtet.)

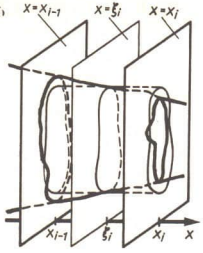
Kann man der Punktmenge K eine Zahl als Volumen zuordnen, und welche Zahl soll das gegebenenfalls sein? Um eine Definition für das Volumen der Punktmenge K zu erarbeiten, gehen wir ähnlich vor wie bei der Flächenberechnung. Für eine fest vorgegebene natürliche Zahl n ($n > 0$) zerlegen wir das Intervall $\langle a, b\rangle$ durch die beliebig gewählten Teilpunkte $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

D 25



D 26



in n Teilintervalle. Durch die Ebenen $x = x_i$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ wird der Körper K in n „Schichten" zerlegt. In jedem Teilintervall $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ $(i = 1, 2, ..., n)$ wählen wir einen beliebigen Zwischenpunkt ξ_i mit $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$. Die zwischen den Ebenen $x = x_{i-1}$ und $x = x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ liegende Schicht des Körpers K wird durch denjenigen Zylinder K_i ersetzt, dessen Grundfläche gleich dem Querschnitt von K an der Stelle ξ_i $(x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i)$ und dessen Höhe gleich der Intervallänge $x_i - x_{i-1}$ ist. (Bild D 26)
Da der Flächeninhalt der Grundfläche des Zylinders K_i $(i = 1, 2, ..., n)$ nach Voraussetzung $A(\xi_i)$ beträgt, ist sein Volumen

$$A(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Der Körper $\overline{K}$, der sich aus den n Zylindern K_i zusammensetzt, hat dann das Volumen

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Es ist anschaulich einleuchtend, daß der Körper $\overline{K}$ bei hinreichend großem n die Punktmenge K annähernd ausschöpft. Daher liegt es nahe, die Zahl s_n als einen Näherungswert für das zu erfassende Volumen anzusehen. Wir betrachten nun eine beliebige ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(\mathfrak{z}_n)$ für das Intervall $\langle a, b \rangle$ und wählen für jede Zerlegung $\mathfrak{z}_n$ dieser Folge in jedem Teilintervall $\langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle$ $(i = 1, 2, ..., n)$ eine beliebige Zahl $\xi_i^{(n)}$ mit $x_{i-1}^{(n)} \leqq \xi_i^{(n)} \leqq x_i^{(n)}$.
Bilden wir, nachdem die Zahlen $\xi_i^{(n)}$ gewählt sind, für jede Zerlegung $\mathfrak{z}_n$ von $(\mathfrak{z}_n)$ die Summe

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i^{(n)})\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right),$$

so ist der Folge $(\mathfrak{z}_n)$ die Folge (s_n) eindeutig zugeordnet. Da die Funktion A nach Voraussetzung stetig ist, konvergiert die Folge (s_n) gegen das bestimmte Integral $\int_a^b A(x)\,dx$, d. h., es ist

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i^{(n)})\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Unter dem Volumen des Körpers K verstehen wir nun dieses bestimmte Integral.

8 **DEFINITION: Das Volumen eines Körpers, der zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegt und dessen Querschnittsfläche an der Stelle x $(a \leqq x \leqq b)$ den Flächeninhalt $A(x)$**

hat, wobei die Menge der geordneten Paare $[x; A(x)]$ mit $a \leqq x \leqq b$ eine stetige Funktion ist, ist das bestimmte Integral

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x}$$

32 Das Volumen einer Kugel mit dem Radius r ist zu berechnen.

Lösung: Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Mittelpunkt der Kugel mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt (Bild D 27; die y-Achse steht senkrecht auf der Zeichenebene). Die Punkte des zu berechnenden Körpers liegen dann zwischen den Ebenen $x = -r$ und $x = r$. Alle Querschnitte des Körpers senkrecht zur x-Achse sind Kreisflächen. Also gilt für jedes x mit $-r \leqq x \leqq r$

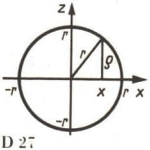
$$A(x) = \pi \varrho^2 = \pi(r^2 - x^2).$$

Folglich ist

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

das Volumen der Kugel.



D 27

15 *Bestätigen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Ihnen bereits bekannten Volumenformeln:*

a) $V = A \cdot h$ *für ein gerades Prisma,*

b) $V = \dfrac{Ah}{3}$ *für eine beliebige Pyramide,*

c) $V = \pi r^2 h$ *für einen geraden Kreiszylinder!*

Die Beispiele D 31 und 32 zeigen, daß die sich aus der Definition D 8 ergebende Methode zur Volumenberechnung eines Körpers dasselbe Ergebnis liefert wie bereits früher verwendete elementare Methoden der Körperberechnung. Bei der Berechnung des Kugelvolumens in einer früheren Klassenstufe haben wir jedoch das Prinzip von Cavalieri[1] benutzt, das auf dieser Stufe nicht bewiesen werden konnte.

Aus der Definition D 8 folgt aber, daß das Volumen eines Körpers nicht von der speziellen Form seiner Querschnittsflächen, sondern nur von den Flächeninhalten dieser Querschnitte abhängig ist. Also erhält man aus der Definition D 8 unmittelbar den

9 **SATZ des Cavalieri: Zwei Körper, die zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegen, haben dasselbe Volumen, wenn die Flächeninhalte ihrer Querschnitte für jedes x mit $a \leqq x \leqq b$ übereinstimmen.**

[1] Cavalieri, italienischer Mathematiker, Schüler Galileis (1598 bis 1647).

25 Volumen von Rotationskörpern

Es sei f eine in $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion, deren Funktionswerte in $\langle a, b\rangle$ nicht negativ sind. Rotiert das Bild der Funktion f um die x-Achse, so wird durch die rotierende Kurve die Mantelfläche eines Körpers erzeugt. Wir nennen die von dieser Mantelfläche und den Ebenen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossene Punktmenge einen Rotationskörper (Bild D 28a). Alle Querschnitte dieses Körpers senkrecht zur x-Achse sind Kreisflächen. Der Flächeninhalt des Querschnittes an der Stelle x $(a \leqq x \leqq b)$ beträgt dann

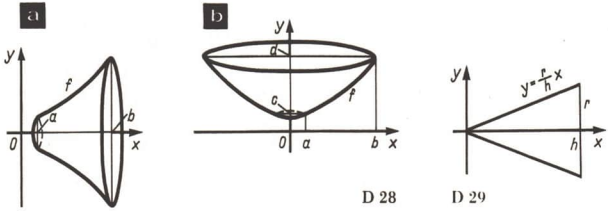
$$A(x) = \pi[f(x)]^2 = \pi y^2.$$

Da f eine stetige Funktion ist, ist auch die Funktion f^2 stetig. Folglich ist das Volumen des Rotationskörpers

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx}\ .$$

Ist f eine in $\langle a, b\rangle$ stetige und monotone Funktion und gilt $f(a) = c$ und $f(b) = d$, so existiert die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ in dem Intervall $\langle c, d\rangle$ bzw. $\langle d, c\rangle$. Diese Funktion $\bar{f}$ ist nach Satz 1 ebenfalls stetig. Rotiert nun das Bild von f um die y-Achse, so erhält man einen Rotationskörper, der zwischen den Ebenen $y = c$ und $y = d$ liegt (Bild D 28b). Ist $c < d$, so hat dieser Rotationskörper das Volumen

$$\boxed{V = \pi \int_c^d [f(y)]^2\,dy = \pi \int_c^d x^2\,dy}\ .$$



D 28 D 29

33 Das Volumen eines Kegels mit der Höhe h und dem Grundflächenradius r ist zu berechnen.

Lösung: Durch Rotation der Strecke $y = \frac{r}{h}x$ mit $0 \leqq x \leqq h$ (Bild D 29) um die x-Achse entsteht der Mantel des Kegels. Die von dem Kegelmantel und der Ebene $x = h$ begrenzte Punktmenge hat das Volumen

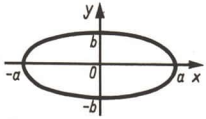
$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2\,dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\,dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

(16) *Leiten Sie entsprechend die Volumenformel für einen Kegelstumpf her!*

34 Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Bild D 30) erzeugt bei Rotation um die y-Achse ein Ellipsoid. Das Volumen des von dem Ellipsoid begrenzten Rotationskörpers beträgt

$$V=\pi\int_{-b}^{b}x^2\,\mathrm{d}y=2\pi\int_{0}^{b}x^2\,\mathrm{d}y.$$



D 30

Aus der Ellipsengleichung folgt

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2).$$

Also ist

$$V=2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b(b^2-y^2)\,\mathrm{d}y=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left[b^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^b$$

$$V=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^3-\frac{1}{3}b^3\right)=2\pi\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{2}{3}b^3$$

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b.$$

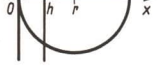
26 Weitere Beispiele

35 Das Volumen eines Kugelsegmentes ist zu berechnen.
Lösung: Es sei r der Kugelradius und h die Höhe des Segmentes ($h<r$). Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Mittelpunkt der Kugel die Koordinaten $(r;0;0)$ hat. Der Mantel des Kugelsegmentes, das zwischen den Ebenen $x=0$ und $x=h$ liegt, entsteht, wenn der im Intervall $\langle 0;h\rangle$ liegende Kreisbogen des im Bild D 31 dargestellten Kreises um die x-Achse rotiert. Die Gleichung dieses Kreises ist

$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

bzw.[1]

$$y^2=r^2-(x-r)^2=2rx-x^2\qquad(0\leqq x\leqq 2r).$$



D 31

Das Volumen des Kugelsegments beträgt dann

$$V=\pi\int_0^h y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^h(2rx-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left[rx^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^h$$

$$V=\pi\left(rh^2-\frac{1}{3}h^3\right)$$

$$V=\frac{\pi h^2}{3}(3r-h).$$

[1] Die Funktion $y=\sqrt{2rx-x^2}$ mit $0\leqq x\leqq 2r$ ist eine stetige Funktion.

D

36 Ein Körper, dessen Mantel durch Rotation eines vom Scheitel ausgehenden Parabelbogens entsteht, schwimmt (Bild D 32) in einer Flüssigkeit mit der Wichte γ_{FL}. Es sei h die Höhe des Körpers und d der Durchmesser seines größten Querschnittes. Wie tief taucht der Körper ein, wenn das Material aus dem er hergestellt ist, die Wichte γ_K ($\gamma_K < \gamma_{FL}$) hat?

Lösung: Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Scheitel des den Mantel erzeugenden Parabelbogens im Koordinatenursprung liegt und die y-Achse mit der Körperachse (Rotationsachse) zusammenfällt (Bild D 32).

Gleichung der Parabel:

Wir setzen die Koordinaten des Punktes P, nämlich $x = \frac{d}{2}$ und $y = h$ in die Gleichung $x^2 = 2py$ ein und erhalten

$$\frac{d^2}{4} = 2ph$$

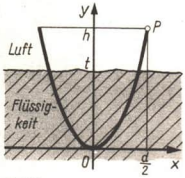
bzw.

$$2p = \frac{d^2}{4h}.$$

Demnach ist

$$x^2 = \frac{d^2}{4h} y$$

die Gleichung der Parabel.



D 32

Volumen des Körpers:

$$V = \pi \int_0^h x^2 \, dy = \pi \frac{d^2}{4h} \int_0^h y \, dy = \pi \frac{d^2}{4h} \cdot \frac{1}{2} h^2$$

Gewicht des Körpers:

$$G = V \cdot \gamma_K = \pi \frac{d^2}{4h} \cdot \frac{1}{2} h^2 \gamma_K .$$

Auftrieb des Körpers:

Ist t die Eintauchtiefe des Körpers, so ist sein Auftrieb

$$F_A = \pi \gamma_{FL} \int_0^t x^2 \, dy = \pi \gamma_{FL} \frac{d^2}{4h} \int_0^t y \, dy = \pi \gamma_{FL} \frac{d^2}{4h} \cdot \frac{1}{2} t^2 .$$

Berechnen der Eintauchtiefe: Der Körper schwimmt, wenn sein Gewicht gleich dem Auftrieb ist. Also gilt

$$\pi \frac{d^2}{4h} \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2 \gamma_K = \pi \gamma_{FL} \frac{d^2}{4h} \cdot \frac{1}{2} t^2 .$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$t^2 = h^2 \frac{\gamma_K}{\gamma_{FL}}$$

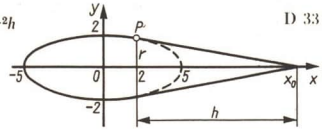
$$t = h \sqrt{\frac{\gamma_K}{\gamma_{FL}}}$$

37 Die Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ rotiert um die x-Achse. Von dem durch das entstehende Rotationsellipsoid begrenzten Körper wird durch die Ebene $x = 2$ ein Segment

abgeschnitten und an die entstehende Schnittfläche ein gerader Kreiskegel so angesetzt, daß auf der Oberfläche des so erhaltenen stromlinienförmigen Körpers kein Knick entsteht. Das Volumen des Stromlinienkörpers ist zu berechnen.

Lösung: Das Bild D 33 zeigt den Achsenschnitt des stromlinienförmigen Körpers. Die eingezeichneten Mantellinien des Kegels sind die Tangenten an die Ellipse in den Punkten mit der Abszisse $x = 2$. Ist r der Radius und h die Höhe des Kegels. so beträgt das Volumen des Körpers

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_{-5}^{2} y^2 \, dx + \frac{\pi}{3} r^2 h$$



D 33

Aus der Ellipsengleichung folgt

$$(1) \qquad y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{25}\right).$$

Also ist

$$V_1 = \pi \int_{-5}^{2} y^2 \, dx = 4\pi \int_{-5}^{2} \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx = 4\pi \left[x - \frac{x^3}{75}\right]_{-5}^{2}$$

$$V_1 = 4\pi\left(2 - \frac{8}{75} + 5 - \frac{125}{75}\right)$$

$$V_1 = \frac{1568}{75}\pi.$$

Der Radius des Kegels ist gleich der Ellipsenordinate an der Stelle $x = 2$. Aus (1) folgt

$$r^2 = 4\left(1 - \frac{4}{25}\right) = \frac{84}{25}, \quad \left(r = \frac{2}{5}\sqrt{21}\right).$$

Die Gleichung der Ellipsentangente im Punkt $P\left(2; \frac{2}{5}\sqrt{21}\right)$ ist

$$\frac{2x}{25} + \frac{2\sqrt{21}\,y}{5 \cdot 4} = 1$$

bzw.

$$2x + \frac{5}{2}\sqrt{21}\,y = 25.$$

Die Tangente schneidet die x-Achse an der Stelle

$$x_0 = \frac{25}{2}.$$

Folglich ist die Höhe des Kegels

$$h = \frac{25}{2} - 2 = \frac{21}{2}.$$

Das Volumen des Kegels ist dann

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{84}{25} \cdot \frac{21}{2} = \frac{882}{75}\pi.$$

Das Volumen des stromlinienförmigen Rotationskörpers beträgt also

$$V = \frac{1568}{75}\pi + \frac{882}{75}\pi \approx 33\pi.$$

Aufgaben d 104 bis 122

D

Aufgaben

a) Vektorrechnung und analytische Geometrie

1. Ist der Nullvektor eine Linearkombination
a) von einem beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$,
b) von zwei zueinander nicht parallelen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$,
c) von drei beliebigen Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$?
Sind die Koeffizienten der Linearkombination in allen drei Fällen eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort!

---

1. Drei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ seien paarweise zueinander parallel, d. h., es gelte $\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} = \lambda_2\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} = \lambda_3\mathfrak{c}$. Geben Sie wenigstens drei verschiedene Darstellungen von $\mathfrak{a}$ als Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ an!

---

2. Für welche Werte von x, y und z sind die Gleichungen
a) $x(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) + y(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c}) + z(\mathfrak{a} - \mathfrak{b} - \mathfrak{c}) = 3\mathfrak{a} + 25\mathfrak{b} + 9\mathfrak{c}$,
b) $\dfrac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{x} + \dfrac{\mathfrak{a} + \mathfrak{c}}{y} + \dfrac{\mathfrak{b} + \mathfrak{c}}{z} = \mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} + 3\mathfrak{c}$
erfüllt, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ linear unabhängige Vektoren sind?

3. Gegeben sei eine Basis $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ des Raumes der Vektoren. Untersuchen Sie, ob die im folgenden angegebenen Vektoren $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{b}_3$ linear abhängig sind oder nicht!
a) $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a}_3$
b) $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_3 - 2\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_1 + 2\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3 = 2\mathfrak{a}_1 - (\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3)$
c) $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a}_3$
d) $\mathfrak{b}_1 = 4\mathfrak{a}_1 - (\mathfrak{a}_2 + 2\mathfrak{a}_3)$, $\mathfrak{b}_2 = -\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{o}$

4. Gegeben sei eine Basis $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ des Raumes der Vektoren und ein Vektor $\mathfrak{c}$ mit den Koordinaten $\mathfrak{c}(0; -1; 2)$ bezüglich $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$. Überprüfen Sie, ob die im folgenden angegebenen Vektoren $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ ebenfalls eine Basis des Raumes der Vektoren bilden und berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten von $\mathfrak{c}$ bezüglich $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\}$!

a) $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3$,
$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3$,
$\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a}_1$

b) $\mathfrak{b}_1 = 2\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2$,
$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_3 - 2\mathfrak{a}_2$,
$\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2$

Im folgenden nehmen wir an, daß im Raum ein kartesisches Koodinatensystem $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ gegeben sei.

5. Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion ein kartesisches Koordinatensystem $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$, und tragen Sie die Punkte mit den folgenden Koordinaten bzw. Ortsvektoren ein!

a) $A(3; 2; 1)$, $B(4; -1; -2)$
$\mathfrak{r}_C(-1; -3; 0)$, $\mathfrak{r}_D(2; 0; -1)$

b) $A\left(-3; \frac{1}{2}; -1\right)$, $B(0; -5; 2)$
$\mathfrak{r}_C(0; 0; 5)$, $\mathfrak{r}_D(-2; -5; 3)$

6. Gegeben seien die folgenden vier Eckpunkte eines Würfels:
$A(-a; -a; -a)$, $B(a; -a; -a)$, $C(-a; a; -a)$, $D(a; a; a)$. Geben Sie die Koordinaten der übrigen vier Eckpunkte an!

7. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{AB}$, wenn für A, B, die folgenden Koordinaten gegeben sind!
a) $A(-5; 1; 3)$, $B(1; -1; 3)$
b) $A(1; 2; 3)$, $B(-3; 2; -1)$
c) $A(0; 2; 1)$, $B(-4; 2; -5)$
d) $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$

8. Zeigen Sie, daß das Dreieck mit den Eckpunkten $A(3; -1; 6)$, $B(0; -4; 2)$ und $C(-3; 2; 1)$ gleichschenklig ist!

9. Gegeben seien die Eckpunkte eines Dreiecks $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$. Berechnen Sie die Länge der Seitenhalbierenden, die durch A geht! Verwenden Sie dabei das Ergebnis von Aufgabe **8d**!

---

2. Der Schwerpunkt einer homogenen Stange befinde sich im Punkt $C(1; -1; 5)$, eines ihrer Enden befinde sich im Punkt $A(-2; -1; -7)$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich ihr anderes Ende befindet!

---

10. Gegeben seien die Punkte $P(3; -1; 2)$ und $M(a; b; c)$. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte, die zu P und M symmetrisch liegen, bezüglich
a) der Koordinatenebenen, **b)** der Koordinatenachsen, **c)** des Ursprunges!

11. Die Gerade g gehe durch den Punkt $P_0(2; -1; 4)$ und habe den Richtungsvektor $\mathfrak{a}(1; 2; 3)$. Ermitteln Sie die Koordinaten der Geradenpunkte für die ganzzahligen Parameterwerte $-3 \leqq t \leqq 5$!

12. Zeichnen Sie die Gerade, die durch die Punkte
a) $A(2; -1; 3)$ und $B(2; 3; 3)$, **b)** $A(-1; 2; 3)$ und $B(2; 6; -2)$
geht, im Schrägbild, und stellen Sie eine Parametergleichung für sie auf!

13. Eine Gerade g gehe durch die Punkte $P_1(-1; 8; 6)$ und $P_2(11; -1; -9)$. Untersuchen Sie, ob die Punkte
a) $P_3(3; 5; 1)$, **b)** $P_4(-5; 11; 8)$, **c)** $P_5(11; -1; 9)$, **d)** $P_6(7; 3; -4)$
auf g liegen!

14. Stellen Sie eine Parametergleichung
a) für die y-Achse,
b) für die xz-Ebene,
c) für die z-Achse,
d) für die yz-Ebene
auf, und entnehmen Sie der Koordinatenschreibweise für die gefundenen Gleichungen, welche Koordinaten der Punkte dieser Geraden bzw. Ebenen den Wert Null haben!

15. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene auf, in der das Dreieck $P_1P_2P_3$ liegt!
$P_1(1; 0; 0)$, $P_2(0; 1; 0)$, $P_3(0; 0; 1)$

16. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene auf, in der das Dreieck $P_1P_2P_3$ liegt!
$P_1(-1; 3; 7)$, $P_2(-5; 4; 3)$, $P_3(6; -5; -4)$

17. Gegeben sei die Gleichung der Bahnkurve eines sich bewegenden Punktes $M(x; y; z)$:
$x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, $z = 5 - t$.
Ermitteln Sie die Länge der Strecke, die M in dem Zeitintervall von $t_1 = 0$ bis $t_2 = 7$ zurücklegt!

18. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g durch den Punkt $P_0(1; -1; 6)$ mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}\,(1; -1; 0)$ mit der z-Achse!

19. Welche Lage hat die Gerade g mit der Gleichung
$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{r}_0(0; 2; 1)$, $\mathfrak{a}(0; 7; 5)$
bezüglich der Koordinatenachsen? Berechnen Sie die Koordinaten der auftretenden Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen! Veranschaulichen Sie sich die Lage von g in einer Zeichnung!

20. Ermitteln Sie die gegenseitige Lage der Geraden g_1 durch den Punkt P_0 mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ und g_2 durch $\overline{P_0}$ mit dem Richtungsvektor $\overline{\mathfrak{a}}$!
a) $P_0(2; -1; 3)$, $\mathfrak{a}(4; 2; -2)$
$\overline{P_0}(5; 4; 0)$, $\overline{\mathfrak{a}}(2; 1; -1)$
b) $P_0(2; 1; -3)$, $\mathfrak{a}(-5; -7; 3)$
$\overline{P_0}(4; -1; 3)$, $\overline{\mathfrak{a}}(1; -2; -1)$
c) $P_0(0; 1; 0)$, $\mathfrak{a}(1; 1; 4)$
$\overline{P_0}(1; 2; 4)$, $\overline{\mathfrak{a}}(2; 2; 2)$
d) $P_0(3; -2; 1)$, $\mathfrak{a}(2; 1; -1)$
$\overline{P_0}(-1; -4; 3)$, $\overline{\mathfrak{a}}(8; 4; -4)$

a

3. Die Punkte $M(x; y; z)$ sollen sich geradlinig und gleichmäßig bewegen, der erste aus der Anfangslage $M_0(-5; 4; -5)$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_M$, für die bekannt ist $|\mathfrak{v}_M| = 14$ Einheiten je Sekunde und $\mathfrak{v}_M \uparrow\uparrow \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}(3; -6; 2)$; der zweite aus der Anfangslage $N_0(-5; 16; -6)$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_N$ mit $|\mathfrak{v}_N| = 13$ Einheiten je Sekunde und $\mathfrak{v}_N \uparrow\downarrow \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}(-4; 12; -3)$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen der Punkte M und N auf!

b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt P der Bahnkurven von M und N!

c) In welcher Zeit legt M die Strecke $\overline{M_0P}$ zurück?

d) In welcher Zeit legt N die Strecke $\overline{N_0P}$ zurück?

e) Berechnen Sie die Längen der Strecken $\overline{M_0P}$ und $\overline{N_0P}$!

---

21. Eine Radarstation ortet ein Ziel nacheinander in den Punkten

$P_1(24; 5; 7)$ und $P_2(21; 3; 6{,}5)$

Das Ziel bewegt sich auf geradlinigem Kurs.
Eine Abwehrrakete soll vom Punkte $P_0(8; -1; 1)$ aus das Ziel ebenfalls auf geradliniger Bahn erreichen. Die Richtung der Raketenbahn wird durch den Vektor

$\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$

bestimmt.

a) Stellen Sie die Gleichungen der beiden Flugbahnen in Parameterform auf!

b) Zeigen Sie, daß sich die beiden Flugbahnen in einem Punkt schneiden, und berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes!

22. Ermitteln Sie den Abstand des Punktes $A(12; -3; 4)$

a) von der xz-Ebene,

b) von der yz-Ebene!

23. Welche gegenseitige Lage haben

a) die yz-Ebene und die Gerade $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{r}_0(1; 3; 0)$, $\mathfrak{a}(-1; 2; -3)$,

b) die xz-Ebene und die Gerade $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{r}_0(-4; 0; 6)$, $\mathfrak{a}(0; 1; 0)$,

c) die xy-Ebene und die Gerade durch die Punkte $\mathfrak{r}_0(-6; 1; 0)$, $\mathfrak{r}_1(0; 9; 0)$,

d) die yz-Ebene und die Gerade durch die Punkte $\mathfrak{r}_0(4; 0; 0)$, $\mathfrak{r}_1(4; 3; 6)$!

Ermitteln Sie gegebenenfalls die Spurpunkte der Geraden!

24. Gegeben seien der Punkt $P_0(3; 2; -1)$ und der Richtungsvektor $\mathfrak{a}(-1; 1; -1)$.

a) Geben Sie eine Gleichung der durch P_0 und $\mathfrak{a}$ bestimmten Geraden g an!

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der Spurpunkte von g in der xy-, xz- und yz-Ebene!

c) Wie lauten die Parametergleichungen der Projektionen von g auf die Koordinatenebenen? Veranschaulichen Sie Ihre Ergebnisse in Skizzen!

25. Gegeben sei eine Ebene α und eine Gerade g. Ermitteln Sie die Spurpunkte von g in α und die Projektionen von g auf α, wenn α und g durch folgende Angaben festgelegt sind!

	g hat die Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$	α hat die Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + u\mathfrak{a} + v\mathfrak{b}$
a)	$\mathfrak{r}_0(-1; -2; -3)$, $\mathfrak{a}(0; 1; -1)$	$\mathfrak{r}_0(0; 0; 0)$, $\mathfrak{a}(0; 0; 1)$, $\mathfrak{b}(1; 0; 0)$
b)	$\mathfrak{r}_0(2; 7; 5)$, $\mathfrak{a}(-3; 0; 0)$	$\mathfrak{r}_0(0; 0; 0)$, $\mathfrak{a}(0; 1; 0)$, $\mathfrak{b}(0; 0; 1)$
c)	$\mathfrak{r}_0(1; 3; -1)$, $\mathfrak{a}(1; -2; 0)$	$\mathfrak{r}_0(0; 0; 0)$, $\mathfrak{a}(1; 0; 0)$, $\mathfrak{b}(0; 1; 0)$
d)	$\mathfrak{r}_0(1; 0; 3)$, $\mathfrak{a}(5; 0; -4)$	$\mathfrak{r}_0(0; 0; 0)$, $\mathfrak{a}(1; 0; 0)$, $\mathfrak{b}(0; 0; 1)$

26. Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$!

a) $|\mathfrak{a}| = 3$, $|\mathfrak{b}| = 4$, $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 15°$ **c)** $|\mathfrak{a}| = 2{,}5$, $|\mathfrak{b}| = 2$, $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 90°$

b) $|\mathfrak{a}| = 4$, $|\mathfrak{b}| = 3$, $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 135°$ **d)** $|\mathfrak{a}| = 3{,}2$, $|\mathfrak{b}| = 2{,}3$, $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 105°$

27. $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ sei ein kartesisches Koordinatensystem des Raumes. Berechnen Sie die Skalarprodukte

a) $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}$, $\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j}$, $\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}$, **b)** $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j}$, $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k}$, $\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k}$!

28. Berechnen Sie $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$!
a) $|\mathfrak{a}| = 2,\ |\mathfrak{b}| = 4,\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = 4$ **b)** $\mathfrak{a}^2 = 3,\ \mathfrak{b}^2 = 4,\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = -6$

29. Ermitteln Sie das Skalarprodukt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ für $\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \uparrow\downarrow \mathfrak{b}$!

---

4. Zeigen Sie, daß für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ stets
a) $-|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \leqq \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \leqq |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|$ **b)** $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2 \leqq |\mathfrak{a}|^2\,|\mathfrak{b}|^2$
ist! Unter welcher Bedingung gilt in diesen Beziehungen das Gleichheitszeichen?

5. In einen Kreis sei das Viereck $ABCD$ eingeschrieben. Zeigen Sie, daß gilt

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}} = -\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\overline{CB}\cdot\overline{CD}}\ !$$

---

30. Gegeben seien zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.
a) Konstruieren Sie die Projektionen $\mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ des einen auf den anderen Vektor!
b) Es sei $\mathfrak{a}_\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{a}$. Wie groß sind λ und μ, wenn $|\mathfrak{a}|, |\mathfrak{b}|$ und $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ als bekannt vorausgesetzt werden?
c) Welche Beziehung besteht zwischen λ und μ?

31. Ermitteln Sie die Projektion
a) $\mathfrak{r}_\mathfrak{i}$ für $\mathfrak{r} = -2\mathfrak{i} + \mathfrak{k}$ **c)** $\mathfrak{r}_{4\mathfrak{j}}$ für $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$
b) $\mathfrak{r}_{-\mathfrak{k}}$ für $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 5\mathfrak{k}$ **d)** $\mathfrak{r}_{3\mathfrak{k}}$ für $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$!

32. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{r}$ für
a) $\mathfrak{a} = \mathfrak{i},\ \mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 7\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$ **c)** $\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\mathfrak{k},\ \mathfrak{r} = \mathfrak{i} - 3\mathfrak{k}$
b) $\mathfrak{a} = -2\mathfrak{j},\ \mathfrak{r} = 4(\mathfrak{i} + \mathfrak{j}) + 2\mathfrak{k}$ **d)** $\mathfrak{a} = -\mathfrak{i},\ \mathfrak{r} = 2\mathfrak{k} + \mathfrak{j}$!

33. Geben Sie jeweils mindestens zwei Vektoren $\mathfrak{r}$ an, für die gilt:
a) $\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{r} = 5$, **b)** $2\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r} = 1$, **c)** $\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{r} = -2$, **d)** $\left(\frac{1}{2}\mathfrak{i}\right)\cdot\mathfrak{r} = 0$!

34. Überprüfen Sie, ob für $|\mathfrak{a}| = a$ und $|\mathfrak{b}| = b$ die folgenden Beziehungen richtig sind!
a) $\mathfrak{a}a = a^2$ **e)** $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}) = ab^2$
b) $\mathfrak{a}^2\mathfrak{a} = a^3$ **f)** $(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b})^2 = a^2 + b^2 \pm 2a\mathfrak{b}$
c) $a^2\mathfrak{a} = a^3$ **g)** $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = a^2 - b^2$
d) $\mathfrak{a}(a\mathfrak{b}) = a^2\mathfrak{b}$ **h)** $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$

---

6. Zeigen Sie, daß für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Beziehung
$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2 = 2(|\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2)$$
gilt, und geben Sie für sie eine geometrische Interpretation!

7. Erklären Sie, warum die für reelle Zahlen geltende Beziehung
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
für Vektoren keinen Sinn hat!

---

35. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ für $\mathfrak{a} = 3\mathfrak{p} - 2\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{p} + 4\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren sind!

36. Vereinfachen Sie den Ausdruck
a) $\mathfrak{a}^2 + 3(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) - 2(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) + 1$, **b)** $-\mathfrak{a}^2 + 3(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) - 2(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) + 1$
wenn $\mathfrak{a} = 4\mathfrak{m} - \mathfrak{n},\ \mathfrak{b} = \mathfrak{m} + 2\mathfrak{n},\ \mathfrak{c} = 2\mathfrak{m} - 3\mathfrak{n}$ sowie
$$\mathfrak{m}^2 = 4,\ \mathfrak{n}^2 = 1\ \sphericalangle(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \frac{\pi}{2}\ \text{ist!}$$

a

37. Beweisen Sie vektoriell den Kathetensatz! **38.** Beweisen Sie vektoriell den Höhensatz!

---

8. Beweisen Sie vektoriell, daß die Mittellinien eines Dreiecks einander in einem Punkt schneiden!

---

39. Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$!

a) $\mathfrak{a}(-3; -4; -3)$, $\mathfrak{b}(-5; 6; 4)$
b) $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = -(\mathfrak{i} + \mathfrak{j}) + 2\mathfrak{k}$
c) $\mathfrak{a}(0; 1; -3)$, $\mathfrak{b}(7; 1; 4)$
d) $\mathfrak{a} = 2(\mathfrak{k} + 4\mathfrak{i}) + \mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$

40. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$!

a) $\mathfrak{a} = -6\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 3\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + 12\mathfrak{k}$
b) $\mathfrak{a}(1; 1; 1)$, $\mathfrak{b}(3; 3; 3)$
c) $\mathfrak{a} = 2(\mathfrak{i} + \mathfrak{j}) + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = 4\mathfrak{i} + 10(\mathfrak{j} + \mathfrak{k}) - 2\mathfrak{k}$
d) $\mathfrak{a}(2; 2; 2)$, $\mathfrak{b}(-3; -3; -3)$

41. Berechnen Sie die Winkel, die der Vektor $\mathfrak{r}$ mit den Basisvektoren des Koordinatensystems $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ bildet!

a) $\mathfrak{r}(3; 4; 0)$
b) $\mathfrak{r}(2; 3; 4)$
c) $\mathfrak{r}(5; 4; 3)$

42. Beweisen Sie, daß das Viereck mit den Eckpunkten $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$ $C(8; -3; -1)$ und $D(4; 7; -2)$ ein Quadrat ist!

43. Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Innenwinkel des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(2; -5; 1)$, $B(6; -3; 5)$, $C(6; -4; 9)$!

---

9. Berechnen Sie im Einheitswürfel vektoriell die Winkel zwischen den Kanten und den Raumdiagonalen und die Winkel zwischen den Raumdiagonalen unter sich!
Wählen Sie das zugrunde gelegte Koordiantensystem zweckmäßig!
Vergleichen Sie das vektorielle Verfahren mit den Methoden der ebenen Trigonometrie!

---

44. Ein Flugzeug habe die Eigengeschwindigkeit (gegen die Luft)

$\mathfrak{v}_F = 136\mathfrak{i} - 106\mathfrak{j} + 72\mathfrak{k}$.

Der Vektor der Windgeschwindigkeit sei

$\mathfrak{v}_W = 24\mathfrak{i} + 10\mathfrak{j}$ (Maßeinheit: $1\,\mathrm{ms}^{-1}$).

a) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Flugzeuges über Grund!
b) Welchen Winkel bilden die Vektoren $\mathfrak{v}_F$ und $\mathfrak{v}_W$ miteinander? (Rechenstabgenauigkeit ist ausreichend.)
c) Welchen Punkt würde das Flugzeug erreichen, wenn es vom Punkt $P_1(-300; 400; 100)$ unter den gegebenen Bedingungen 75 s lang weiterfliegt? (Maßeinheit: m; Rechenstabgenauigkeit ist ausreichend.)

45. Von einer Flugmeldestation F mit den Koordinaten $(0; 0; 0)$ wird ein Ziel im Punkte Z mit den Koordinaten $(25; 7; 12)$ aufgefaßt. Nach 40 Sekunden befindet sich das Ziel im Punkt Z_1 mit den Koordinaten $(16; 9; 11)$.
a) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Winkel $\sphericalangle\, ZFZ_1$!
b) Stellen Sie die Gleichung der Flugbahn (Gerade) in Parameterform dar!
c) Welchen Punkt würde das Ziel erreichen, wenn es von Z_1 aus mit gleichbleibender Richtung und Geschwindigkeit 1 Minute weiterfliegt?

46. Gegeben seien die Punkte
a) $A(5; -2; 1)$, $B(-3; 0; 2)$, $C(1; 3; -3)$, $D(2; 6; -1)$,
b) $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; 4)$, $D(1; 4; 1)$.
Zeigen Sie, daß die Geraden AB und CD zueinander orthogonal sind!

47. In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck seien die Mittelpunkte der Katheten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden. Berechnen Sie den Winkel, den diese beiden Seitenhalbierenden miteinander bilden!

48. Berechnen Sie den Schnittpunkt der nichtorientierten Geraden g_1 und g_2 und den Winkel, den sie miteinander bilden!

a) g_1: $\mathfrak{r}_0(-1; 2; 3)$, $\mathfrak{a}(5; 2; -3)$
g_2: $\mathfrak{r}_0(-5; -1; 4)$, $\bar{\mathfrak{a}}(-1; 1; 2)$

b) g_1: $\mathfrak{r}_0(-3; 0; 0)$, $\mathfrak{a}(2; 1; 0)$
g_2: $\mathfrak{r}_0(1; 1; 3)$, $\bar{\mathfrak{a}}(0; -1; 3)$

49. Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der durch die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ orientierten Geraden g_1 und g_2!

a) g_1: $\mathfrak{r}_0(2; 7; 4)$, $\mathfrak{a}(1; 2; 0)$
g_2: $\mathfrak{r}_0(1; 2; 7)$, $\bar{\mathfrak{a}}(-1; -1; -1)$

b) g_1: $\mathfrak{r}_0(-1; 0; -5)$, $\mathfrak{a}(1; -1; 4)$
g_2: $\mathfrak{r}_0(3; 1; 8)$, $\bar{\mathfrak{a}}(2; 3; 5)$

50. Die Punkte B und C seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{A_3A_4}$ und $\overline{A_4A_5}$ des regelmäßigen Sechsecks $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Berechnen Sie den Winkel, den die Geraden A_1B und A_2C miteinander bilden!

51. Ermitteln Sie die Lage der Geraden $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$

a) $\mathfrak{r}_0(0; -1; 3)$, $\mathfrak{a}(0; 2; -2)$
b) $\mathfrak{r}_0(5; 0; -1)$, $\mathfrak{a}(0; 0; 3)$
c) $\mathfrak{r}_0(0; 0; 0)$, $\mathfrak{a}(2; -4; 5)$
d) $\mathfrak{r}_0(4; -4; -5)$, $\mathfrak{a}(1; -1; -2)$

zu den Koordinatenachsen und die Winkel zwischen g und den Achsen, wenn wir g als nichtorientierte Gerade auffassen!
Wie groß sind die Winkel zwischen g und den Koordinatenachsen, wenn wir g durch $\mathfrak{a}$ und den Achsen durch $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ eine Orientierung zuordnen?

52. Stellen Sie eine Gleichung für diejenige Gerade auf, die durch den Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}_0(2; -1; 4)$ geht und die

a) zur x-Achse,
b) zur y-Achse,
c) zur Geraden durch den Punkt $P_1(1; 1; 2)$ mit dem Richtungsvektor $\bar{\mathfrak{a}}(2; 3; -3)$

parallel ist!

Für die folgenden Aufgaben 53 bis 56 beziehen sich alle Angaben auf eine Ebene, in der ein Koordinatensystem $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}\}$ gegeben ist.

53. Welche Winkel bilden die Seiten eines Dreiecks miteinander, die durch die Gleichungen

$$3x - 4y = 11, \quad 7x - 24y = 33, \quad 12x - 5y + 25 = 0$$

gegeben sind?

54. Wie heißt die Gleichung der durch den Punkt P senkrecht zur Gerade g verlaufenden Geraden?

a) $P(-3; 4)$, Gerade g: $y = \frac{2}{3}x + 5$

b) $P(2; 3)$, Gerade g: $2x - 3y + 5 = 0$

55. Berechnen Sie den Abstand des Ursprunges von den Geraden

a) $y = \frac{4}{7}x + 3$ **b)** $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ **c)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ **d)** $y = mx + n$!

56. Durch den Punkt $P(2; 3)$ sei zu der Geraden

a) $y = x$, **b)** $y = 3x + 4$, **c)** $y = -3x$, **d)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

die Parallele gezogen. Wie lautet ihre Gleichung?

57. Schreiben Sie die Gleichung der Kugel $K(M, r)$ mit
a) $M(0; 0; 0)$, $r = 6$, **b)** $M(0; 3; 3)$, $r = 8$, **c)** $M(2; -3; -5)$, $r = 9$
in vektorieller Form und in Koordinatenschreibweise!

58. Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius der Kugel, die durch die folgende Gleichung gegeben ist!

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + z - 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - z = 0$
c) $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$
d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y - 2z + 1 = 0$

a

59. Stellen Sie für den Kreis $k_{z=0}(M, r)$ der xy-Ebene mit
a) $M(0; 0; 0)$, $r = 5$ **b)** $M(5; 0; 0)$, $r = 7$ **c)** $M(12; -5; 0)$, $r = 13$
die vektoriellen Gleichungen auf, und schreiben Sie sie in Koordinatenschreibweise! Wie lautet die Gleichung für diesen Kreis, wenn wir ihn nicht als Punktmenge des Raumes auffassen?

---

10. Stellen Sie für die Kreise $k_{x=0}(M, r)$ und $k_{y=0}(M, r)$ der yz-Ebene bzw. xz-Ebene mit
a) $M(0; 2; 5)$, $r = 4$ **b)** $M(-1; 0; -4)$, $r = 3$ **c)** $M(0; 7; -11)$, $r = 6$
die vektoriellen Gleichungen auf, und schreiben Sie sie in Koordinatenschreibweise! Wie lauten die Gleichungen für diese Kreise, wenn wir sie nur als Punktmengen der sie enthaltenden auffassen?

---

60. Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises, der durch die folgenden Gleichungen gegeben ist!
a) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 26 = 0$, $z = 0$ **c)** $x^2 + z^2 - 6x - 8z + 21 = 0$, $y = 0$
b) $y^2 + z^2 + 2y - 6z + 19 = 0$, $x = 2$ **d)** $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$, $z = 4$

61. Stellen Sie eine Gleichung für die Kugel auf, die durch die Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ mit
$A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 5; 0)$, $D(0; 0; 3)$ geht!

Für die folgenden Aufgaben 62, 63 und 65 bis 78 beziehen sich alle Angaben auf eine Ebene, in der ein Koordinatensystem $\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}\}$ gegeben ist.

62. Welche Punktmengen werden durch die nachstehenden Gleichungen bestimmt?
a) $y = +\sqrt{9 - x^2}$ **c)** $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$ **e)** $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$
b) $x = -\sqrt{4 - y^2}$ **d)** $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$ **f)** $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$

63. Ein Kreis $k(M, r)$ habe den Mittelpunkt M und gehe durch die Punkte A und B!
a) $M(-8; -4)$, $A(-5; -7)$, $B(-11; -1)$ **b)** $M(7; 0)$, $A(11; -2)$, $B(9; 4)$
Berechnen Sie seinen Radius!
Stellen Sie die Parametergleichung von $k(M, r)$ auf, und berechnen Sie den Zentriwinkel, der dem von A nach B im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenem Kreisbogen $\widehat{AB}$ entspricht.
Berechnen Sie die Länge dieses Kreisbogens.

64. Welche Punktmengen werden durch die nachstehenden Gleichungen bestimmt?
a) $z = +\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ **c)** $y = 2 + \sqrt{9 - x^2 - (z + 1)^2}$
b) $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x \geqq 0$ **d)** $x = -1 - \sqrt{25 - y^2 - z^2}$, $z \geqq 0$
Veranschaulichen Sie diese Punktmengen in einer Skizze!

65. Stellen Sie die gegenseitige Lage des Kreises $k(M, r)$ und der Geraden g mit der Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a}$ fest!
a) $M(4; 1)$, $r = 3$; $\mathfrak{r}_0(5; 4)$, $\mathfrak{a}(2; -1)$ **b)** $M(0; -4)$, $r = 5$; $\mathfrak{r}_0(1; -1)$, $\mathfrak{a}(-2; -1)$

66. In welchen Punkten schneiden einander die durch folgende Gleichungen gegebenen Paare von Kreis und Gerade?
a) $x^2 + y^2 = 250$; $x - y = 4$ **b)** $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 50$; $2x + 3y = 21$

67. Ein Kreis mit dem Radius $r = 5$ berühre die Gerade $3x + 4y = 9$ im Punkt $P_0(-1; 3)$. Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt des Kreises? (Wieviel Lösungen muß es für M geben?)

---

11. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(-1{,}5; 0{,}75)$ berühre die Gerade $16x + 12y = 85$. Stellen Sie die Gleichung dieses Kreises auf, und berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes!

---

68. Welche Lage hat die Gerade $9x - 4y + 36 = 0$ zu dem Kreis $x^2 + y^2 = 9$?

69. Geben Sie für die Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ in den Kreispunkten **a)** $P_1(5; 0)$ und **b)** $P_2(3; 4)$ je eine Gleichung an!

70. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten in den Punkten
a) $P_1(5; 12)$ und **b)** $P_2(12; -5)$ des Kreises $x^2 + y^2 = 169$?
c) Wo schneiden sich die beiden Tangenten?
d) Welchen Winkel bilden sie miteinander?

71. Geben Sie je eine Gleichung für die Tangenten an, die man
a) in dem Punkte $x_1 = 13, y < 0$ an den Kreis $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 113$,
b) in dem Punkte $x_1 > 0, y_1 = -5$ an den Kreis $x^2 + y^2 - 14x - 4y = 5$
ziehen kann.

72. Geben Sie die Gleichungen der beiden Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 = 6{,}25$ an, die **a)** parallel, **b)** orthogonal zu der Geraden $4x - 3y + 6 = 0$ verlaufen!

73. Stellen Sie die Gleichungen der Tangenten auf, die man von dem Punkte $P(-14; 2)$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 100$ legen kann!

74. Vom Punkt $P(4; -4)$ sind die Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ gezogen. Wie lang ist die Sehne, die ihre Berührungspunkte verbindet?

75. Berechnen Sie die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt der Punkt $M(4; 7)$ ist, und der die Gerade $3x - 4y + 1 = 0$ berührt!

---

12. Ein Massenpunkt M habe sich auf dem Kreis $(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 20$ bewegt und habe die Kreisbahn in einem Punkt P_0 verlassen. Über seine weitere Bewegung ist bekannt, daß sie nicht von äußeren Kräften beeinflußt wird und daß M die x-Achse im Punkte $Q(-2; 0)$ passiert. Berechnen Sie die Koordinaten von P_0! Wieviel Lösungen hat die Aufgabe?

---

76. Beweisen Sie unter Verwendung des Skalarproduktes den folgenden Satz: Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Umkreises. Vergleichen Sie den vektoriellen Beweis mit dem elementar-geometrischen!

77. Der Punkt $P(x; y)$ bewege sich so, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände vom Ursprung und vom Punkt $A(-a; 0)$ gleich a^2 bleibt. Ermitteln Sie die Bahnkurve des beweglichen Punktes P!

78. Gegeben sei der Kreis $x^2 + y^2 = a^2$. Von einem Punkt $A(-a; 0)$ aus sei eine Sehne $\overline{AB}$ gezogen und über B hinaus bis zu einem Punkte P verlängert, wobei $\overline{BP} = \overline{AB}$ ist. Ermitteln Sie die Menge der Punkte P, wenn B alle Punkte des gegebenen Kreises durchläuft!

79. Welche Arbeit ist erforderlich, wenn ein Körper längs des Weges $\mathfrak{s}$ um $|\mathfrak{s}| = s$ durch eine Kraft $\mathfrak{F}$ verschoben werden soll?
a) $|\mathfrak{s}| = 3, |\mathfrak{F}| = 2, \sphericalangle(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}) = 0°$
b) $|\mathfrak{s}| = 2, |\mathfrak{F}| = 3, \sphericalangle(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}) = 30°$
c) $|\mathfrak{s}| = 3{,}4, |\mathfrak{F}| = 5{,}6, \sphericalangle(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}) = 45°$
d) $|\mathfrak{s}| = 87, |\mathfrak{F}| = 120, \sphericalangle(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}) = 76°$
Bei den Beispielen **a)** bis **c)** ist die Einheit der Längenmessung 1 m, die Einheit der Kraftmessung 1 kp, bei der Aufgabe **d)** sind die entsprechenden Einheiten 1 cm bzw. 1 p.

80. Eine Kraft sei durch den Vektor $\mathfrak{F}(5; 10; 15)$ dargestellt. Welche Arbeit ist erforderlich, um den Angriffspunkt $P_0(1; 0; 3)$ der Kraft bis zum Punkte $P(3; -1; -6)$ zu verschieben, wenn auf jeder Koordinatenachse die Einheit der Längenmessung 1 m und die Einheit der Kraftmessung 1 kp ist?

81. Eine Kraft vom Betrag $|\mathfrak{F}| = 6$ kp, die einen Körper von $P_0(2\text{ m}; -2\text{ m}; 1\text{ m})$ nach $P_1(3\text{ m}; 4\text{ m}; 5\text{ m})$ bewegt, wirke parallel zum Vektor $\mathfrak{r} = -\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$. Welche Arbeit wird von der Kraft $\mathfrak{F}$ verrichtet?

a

82. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bilden den Winkel $\gamma = \frac{\pi}{6}$ miteinander. Berechnen Sie für $|\mathfrak{a}| = 6$ und $|\mathfrak{b}| = 5$ die Größe $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$!

83. Berechnen Sie die Vektorprodukte $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$ der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Gestalt $\mathfrak{a} = a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j}$!

a) $|\mathfrak{a}| = 1$, $|\mathfrak{b}| = 3$, $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{a}) = 45°$, $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{b}) = 90°$

b) $|\mathfrak{a}| = 5$, $|\mathfrak{b}| = 4{,}2$, $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{a}) = 135°$, $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{b}) = -90°$

c) $|\mathfrak{a}| = 2{,}5$, $|\mathfrak{b}| = 1{,}5$, $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{a}) = 135°$, $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{b}) = -45°$

d) $|\mathfrak{a}| = 4{,}2$, $|\mathfrak{b}| = 7$, $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{a}) = -60°$, $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{b}) = -90°$

84. Gegeben sei $|\mathfrak{a}| = 10$, $|\mathfrak{b}| = 2$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 12$. Berechnen Sie $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$!

85. Gegeben sei $|\mathfrak{a}| = 3$, $|\mathfrak{b}| = 26$, $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = 72$. Berechnen Sie $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$! Ist das Ergebnis eindeutig bestimmt?

86. Unter welcher Bedingung ist das Drehmoment einer Kraft $\mathfrak{K}$ gleich Null?

87. Ermitteln Sie die Lagebeziehung zwischen den von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wenn gilt:

a) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, **b)** $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|$, **c)** $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = \frac{1}{2}|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|$!

---

13. Untersuchen Sie den Absolutbetrag von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ in Abhängigkeit von $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$! Deuten Sie Ihr Ergebnis geometrisch!

---

88. Berechnen Sie den Flächeninhalt und die Höhen des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms!

a) $|\mathfrak{a}| = 2$, $|\mathfrak{b}| = 5$, $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 60°$ **b)** $|\mathfrak{a}| = 6$, $|\mathfrak{b}| = 1$, $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 30°$

89. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den folgenden Eckpunkten!

a) $A(3; 4; -1)$, $B(2; 0; 3)$, $C(-3; 5; 4)$ **b)** $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$, $C(4; 5; -2)$

(Hinweis: Verwenden Sie die Koordinatendarstellung des Skalarproduktes!)

90. Lösen Sie die Klammern auf, und vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

a) $\mathfrak{i} \times (\mathfrak{j} + \mathfrak{k}) - \mathfrak{j} \times (\mathfrak{i} + \mathfrak{k}) + \mathfrak{k} \times (\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k})$

b) $(2\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$

91. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien orthogonal zueinander, und es gelte $|\mathfrak{a}| = 3$, $|\mathfrak{b}| = 4$. Berechnen Sie

a) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$, **b)** $(3\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b})$!

92. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sollen den Winkel $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ miteinander bilden, und es sei $|\mathfrak{a}| = 1$, $|\mathfrak{b}| = 2$. Berechnen Sie

a) $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2$, **b)** $[(2\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b})]^2$, **c)** $[(\mathfrak{a} + 3\mathfrak{b}) \times (3\mathfrak{a} - \mathfrak{b})]^2$!

---

14. Beweisen Sie die Gültigkeit der Beziehungen

a) $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2 \leqq \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$, *b)* $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$!

Unter welcher Bedingung gilt in *a)* das Gleichheitszeichen?

---

93. Für die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sei bekannt: $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = 5$, $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 45°$. Gesucht ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a} - 2\mathfrak{b}$ und $\overrightarrow{AC} = 3\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b}$.

94. Gegeben seien die Vektoren $\mathfrak{a}(3; -1; -2)$ und $\mathfrak{b}(1; 2; -1)$. Berechnen Sie die Koordinaten der Vektorprodukte

a) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, **b)** $(2\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{b}$, **c)** $(2\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \times (2\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$!

95. Gegeben seien die Punkte $A(2; -1,2)$, $B(1; 2; -1)$ und $C(3; 2; 1)$. Berechnen Sie die Koordinaten der Vektorprodukte

a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$, **b)** $\left(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}\right) \times \overrightarrow{CB}$!

96. Berechnen Sie den Vektor $\mathfrak{r}$, der zu den Vektoren $\mathfrak{a}(2; -3; 1)$ und $\mathfrak{b}(1; -2; 3)$ orthogonal ist und der Bedingung $\mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 7\mathfrak{k}) = 10$ genügt!

97. Berechnen Sie für die Vektoren $\mathfrak{a}(2; -3; 1)$, $\mathfrak{b}(-3; 1; 2)$ und $\mathfrak{c}(1; 2; 3)$ die Produkte $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$!

98. Eine Kraft $\mathfrak{K}$ greife an einem Punkt P an. Sie sei gegeben durch ihre Koordinaten bezüglich dreier Kräfte vom Betrag 1, die entsprechend längs der Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ wirken. Berechnen Sie das Drehmoment von $\mathfrak{K}$ bezüglich des Punktes P_0!

a) $\mathfrak{K}(3; 2; -4)$, $P(2; -1; 1)$, $P_0(0; 0; 0)$,

b) $\mathfrak{K}(2; -4; 5)$, $P(4; -2; 3)$, $P_0(3; 2; -1)$

99. Gegeben seien drei Kräfte $\mathfrak{K}_1(2; -1; -3)$, $\mathfrak{K}_2(3; 2; -1)$, $\mathfrak{K}_3(-4; 1; 3)$ durch ihre Koordinaten bezüglich dreier Kräfte vom Betrag 1, die entsprechend längs der Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ wirken. Diese drei Kräfte greifen am Punkt $P(-1; 4; -2)$ an. Berechnen Sie das Drehmoment ihrer Resultierenden bezüglich des Punktes $P_0(2; 3; -1)$!

100. Beweisen Sie mit Hilfe des Vektorproduktes, daß

a) ein Dreieck, in dem eine Seitenhalbierende mit der Höhe bezüglich dieser Seite zusammenfällt, gleichschenklig ist,

b) ein Dreieck, in dem eine Seitenhalbierende mit der entsprechenden Winkelhalbierenden zusammenfällt, gleichschenklig ist!

101. Wiederholen Sie die Beweise dafür, daß

a) die Menge der n-Tripel reeller Zahlen

b) die Menge der Polynome höchstens n-ten Grades mit reellen Koeffizienten

einen Vektorraum bilden!

102. Berechnen Sie im Vektorraum der n-Tupel die Vektoren $-(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$ und $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ für

a) $\mathfrak{a} = [1, 2, ..., n]$, $\mathfrak{b} = [n + 1, n + 2, ..., 2n]$, **b)** $\mathfrak{a} = [-1, 2, ..., (-1)^n n]$, $\mathfrak{b} = [(-1)^n, (-1)^{n-1} \cdot 2, ..., -n]$!

103. Ermitteln Sie im Vektorraum der Polynome höchstens n-ten Grades die Vektoren $-(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ und $-\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ für

a) $\mathfrak{a} = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$, $\mathfrak{b} = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n$, **b)** $\mathfrak{a} = x + x^3 + \cdots + x^{2n+1}$, $\mathfrak{b} = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n}$!

104. Beweisen Sie, daß in jedem Vektorraum $\mathfrak{M}$ für jede natürliche Zahl n, die Elemente $\mathfrak{r}_1, ..., \mathfrak{r}_n$ von $\mathfrak{M}$ und die reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ die folgenden Beziehungen gelten:

a) $\alpha_1(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \cdots + \mathfrak{r}_n) = \alpha_1\mathfrak{r}_1 + \alpha_1\mathfrak{r}_2 + \cdots + \alpha_1\mathfrak{r}_n$,

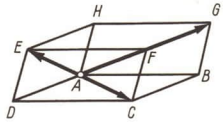
b) $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\mathfrak{r}_1 = \alpha_1\mathfrak{r}_1 + \alpha_2\mathfrak{r}_1 + \cdots + \alpha_n\mathfrak{r}_1$!

105. Erläutern Sie, was es heißt, daß der Vektorraum **a)** der Zahlenpaare, **b)** der Polynome höchstens 1. Grades zweidimensional ist, und beweisen Sie diese Behauptung!

106. Zeigen Sie, daß die Vektoren $\overline{\mathfrak{a}}_1 = (1,1)$ und $\overline{\mathfrak{a}}_2 = (-1,1)$ eine Basis des Vektorraumes der Zahlenpaare bilden!
Welche Koordinaten haben die Vektoren $\mathfrak{a}_1 = (1; 0)$ und $\mathfrak{a}_2 = (0; 1)$ bezüglich der Basis $\{\overline{\mathfrak{a}}_1, \overline{\mathfrak{a}}_2\}$?

107. Geben Sie für den Vektorraum der Polynome höchstens zweiten Grades eine andere Basis als $\mathfrak{a}_1 = 1$, $\mathfrak{a}_2 = x$, $\mathfrak{a}_3 = x^2$ an, und berechnen Sie die Koordinaten von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ bezüglich dieser Basis!

108. Im Eckpunkt A eines Parallelepipeds $ABCDEF$ (Bild a 1) greifen drei Kräfte an, die durch die gerichteten Strecken $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AG}$ veranschaulicht werden können. Ermitteln Sie die Resultierende dieser drei Kräfte!



a 1

b) Kegelschnitte

b

1. Gegeben seien zwei Geraden AB und CD durch Grundriß und Höhe der Punkte A, B, C und D. Die Grundrisse von AB und CD mögen auf derselben Geraden liegen. Ermitteln Sie den Schnittpunkt E dieser Geraden!

2. Das Dreieck ABC sei durch Grundrisse und Höhen der Punkte A, B und C gegeben, wobei die Grundrisse dieser Punkte auf einer Geraden liegen mögen. Zeichnen Sie das Dreieck in wahrer Größe!

3. Auf der Zeichentafel stehe ein Quader mit gegebenen Kantenlängen. Ermitteln Sie die Länge der Raumdiagonale des Quaders!

4. Eine dreiseitige Pyramide stehe mit ihrer Grundfläche auf der Zeichenebene. Die Spitze der Pyramide sei durch ihre Projektion und ihre Höhe gegeben. Zeichnen Sie das Netz der Pyramide!

5. Zeichnen Sie Grund- und Aufriß
   a) einer fünfseitigen Pyramide,
   b) eines vierseitigen schiefen Prismas,
   c) eines geraden Kreiskegels,
   deren bzw. dessen Grundfläche in der Grundrißebene liegt!

6. Gegeben sei ein Quader durch Grund- und Aufriß, wobei Grund- und Aufrißebene eine Grund- bzw. Seitenfläche des Quaders enthalten sollen. Ferner sei eine die vier Seitenflächen des Quaders schneidende Ebene, die orthogonal zur Aufrißebene und nicht parallel zu seinen Grundflächen ist, durch ihre Spuren gegeben. Zeichnen Sie Grund- und Aufriß der Schnittfigur und ermitteln Sie deren wahre Größe!

7. Lösen Sie Aufgabe **6.** für **a)** ein dreiseitiges gerades Prisma, **b)** ein dreiseitiges schiefes Prisma!

8. Gegeben sei ein gerader Kreiskegel, dessen Erzeugende mit der Grundkreisebene einen Winkel von 60° bilden, und eine den Kegel schneidende Ebene, die mit dessen Grundkreisebene einen Winkel von 45° bildet. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß des Kegels, der Ebene und der Schnittfigur, sowie deren wahre Gestalt **a)** mit Hilfe von Erzeugenden des Kegels, **b)** mit Hilfe von Parallelebenen zur Grundkreisebene des Kegels!

9. Ein gerader Kreiskegel werde von einer Ebene so geschnitten, daß die Schnittfigur eine Ellipse ist. Wie ändert sich die Gestalt der Ellipse, wenn
   a) bei gleichbleibendem Kegel die Neigung der Schnittebene,
   b) bei gleichbleibender Ebenenneigung der Neigungswinkel der Erzeugenden des Kegels zur Grundkreisebene des Kegels kontinuierlich geändert wird?

10. Gegeben sei ein gerader Kreiskegel, dessen Erzeugende mit der Grundkreisebene einen Winkel von 60° bilden, und eine den Kegel schneidende Ebene, die mit dessen Grundkreisebene einen Winkel von 85° bildet. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß der Schnittfigur sowie deren wahre Gestalt
    a) mit Hilfe von Erzeugenden des Kegels,
    b) mit Hilfe von Parallelebenen zur Grundkreisebene des Kegels!

11. Untersuchen Sie das in Aufgabe b **9** genannte Problem für den Fall, daß die Schnittfigur eine Hyperbel ist!

---

1. Ein gerader Kreiskegel wird von einer parallel zur Achse verlaufenden Ebene geschnitten. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß der Schnittfigur sowie deren wahre Gestalt! Wählen Sie dabei den Neigungswinkel der Erzeugenden des Kegels zur Grundkreisebene *a)* $\alpha = 60°$, *b)* $\alpha = 30°$, *c)* $\alpha = 45°$!

---

12. Ein Kegel werde von einer Ebene so geschnitten, daß eine Parabel entsteht. Konstruieren Sie die Schnittfigur in wahrer Größe!

---

2. Beweisen Sie mit Hilfe Dandelinscher Kugeln und der Ortsdefinition der Ellipse, daß beim Schnitt eines geraden Kreiszylinders mit einer nicht orthogonal und nicht parallel zur Achse verlaufenden Ebene die Schnittfigur eine Ellipse ist!

3. Beweisen Sie, daß das Bild einer Kugel bei senkrechter Parallelprojektion ein Kreis und bei schräger Parallelprojektion eine Ellipse ist!
(Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe b **2**!)

---

13. Konstruieren Sie eine Schar konfokaler Ellipsen!
(Anleitung: Unter konfokalen Ellipsen versteht man Ellipsen mit gleichen Brennpunkten und unterschiedlichen Achsenlängen.)

14. Wie ändert sich die Gestalt einer Ellipse, wenn bei gleichbleibendem a die lineare Exzentrizität e kleiner wird? Was ergibt sich im Grenzfall $e = 0$? Zeichnen Sie eine solche Ellipsenschar!

15. Zeichnen Sie zwei kongruente Ellipsen mit gleichem Mittelpunkt, deren Hauptachsen aufeinander senkrecht stehen!

16. Lösen Sie die Aufgaben **a) 21**, **b) 22**, **c) 23** entsprechend für Hyperbeln!

17. Konstruieren Sie zwei gleichseitige Hyperbeln mit gemeinsamen Brennpunkten!

18. Wie ändert sich die Gestalt einer Hyperbel, wenn bei gleichbleibendem e die Größe a kleiner wird? Zeichnen Sie eine solche Hyperbelschar!

19. Konstruieren Sie zwei Parabeln, deren Scheitel und Achsen zusammenfallen und deren Parameter $2p = 8$ bzw. $2p = 4$ sind! Beschreiben Sie das Verhalten der Parabeln bei weiterer Verkleinerung des Parameters!

20. Stellen Sie eine Gleichung der Ellipse auf, für die folgendes gilt:
a) $a = 5;\ b = 4$ **c)** $b = 2;\ 2e = 6$ **e)** $2a = 26;\ F_1(-10;\ 0);\ F_2(14;\ 0)$
b) $2e = 8;\ 2a = 10$ **d)** $a + b = 10;\ 2e = 4{,}5$ **f)** $2b = 2;\ F_1(-1;\ 1);\ F_2(1;\ 1)$

21. Berechnen Sie die Achsenlängen der Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ sowie die Koordinaten ihrer Brennpunkte!

22. Stellen Sie fest, welche der Punkte $A_1(-2;\ 3)$, $A_2(2;\ -2)$, $A_3(2;\ -4)$, $A_4(-1;\ 3)$, $A_5(-4;\ -3)$, $A_6(3;\ -1)$, $A_7(3;\ -2)$, $A_8(2;\ 1)$, $A_9(0;\ 15)$ und $A_{10}(0;\ -16)$ auf, welche außerhalb und welche innerhalb der Ellipse $8x^2 + 5y^2 = 77$ liegen!

23. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks, dessen Eckpunkte mit den Brennpunkten und den Nebenscheiteln der Ellipse **a)** $x^2 + 5y^2 = 20$, **b)** $9x^2 + 5y^2 = 1$ zusammenfallen!

24. Die Abszissen der Punkte des Kreises $x^2 + y^2 = 4$ mögen **a)** verdoppelt, **b)** halbiert werden. Ermitteln Sie die entstandene Kurve, und veranschaulichen Sie diese!

4. Von einer Strecke konstanter Länge mögen die Endpunkte auf verschiedenen Koordinatenachsen liegen. Welche Kurve beschreibt ein beliebiger Punkt dieser Strecke, wenn die Endpunkte auf den Achsen gleiten?

---

25. Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel, von der
a) $2a = 6, 2b = 8$, **b)** $2a = 24, 2e = 26$, **c)** $a = 8, F_1(-6; 0), F_2(6; 0)$
gegeben ist, auf!

26. Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel auf, für die bekannt ist, daß die Abstände eines ihrer Scheitelpunkte von den Brennpunkten 9 bzw. 1 betragen!

27. Gegeben sei die Ellipse $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel auf, deren Scheitel sich in den Brennpunkten und deren Brennpunkte sich in den Scheiteln der gegebenen Ellipse befinden!

b

---

5. Gesucht ist die Seite eines Quadrates, dessen Eckpunkte auf der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ liegen. Für welche Hyperbeln kann man ein solches Quadrat finden?

---

28. Stellen Sie die Scheitelgleichung der Parabel auf, deren Scheitel im Ursprung liegt und für die bekannt ist:
a) Sie ist symmetrisch bezüglich der x-Achse, liegt in der rechten Halbebene und für sie ist $p = 3$;
b) sie ist symmetrisch bezüglich der x-Achse, liegt in der linken Halbebene und für sie ist $p = 0{,}5$;
c) sie ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, liegt in der unteren Halbebene und für sie ist $p = 0{,}25$!

29. Stellen Sie die Gleichung der Parabel auf, die durch den Ursprung geht, den Brennpunkt $F(0; -3)$ hat und symmetrisch bezüglich der y-Achse ist!

30. Welche Kurven haben die folgenden Gleichungen?
a) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ **c)** $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$ **e)** $y = -3\sqrt{-2x}$
b) $x = -5\sqrt{-y}$ **d)** $y = \sqrt{-x}$ **f)** $x = \pm\sqrt{49 - y^2}$
Veranschaulichen Sie diese Kurven!

31. Berechnen Sie den Wertevorrat der Funktion
a) $x = 2\sqrt{1 - y^2}$, **c)** $x = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$, **e)** $y = -3\sqrt{-2x}$,
b) $x = -\sqrt{9 + y^2}$, **d)** $x = -\sqrt{-3y}$, **f)** $y = \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$!
Zeichnen Sie diese Kurven durch punktweise Konstruktion!

32. Eine Ellipse berührt die x-Achse im Punkt $P_1(8; 0)$ und die y-Achse in $P_2(0; -5)$; ihre Achsen sind den Koordinatenachsen parallel. Geben Sie für die Ellipse eine Gleichung an!

33. Berechnen Sie für folgende Kurven a, b, e, M, F_1 und F_2
a) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ **c)** $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$
b) $x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 - 4y - 12}$ **d)** $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$

34. Ermitteln Sie die Scheitel- und Brennpunkte folgender Kegelschnitte, und veranschaulichen Sie ihre Lage im Koordinatensystem!
a) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 72 = 0$ **b)** $4x^2 - y^2 + 24x + 4y + 31 = 0$

35. Welche Koordinaten hat der Brennpunkt der Parabel
a) $y^2 = 6x$, b) $y^2 = -5x$, c) $(y-3)^2 = 9(x-1)$, d) $x^2 = -6y$, e) $(x-4)^2 = -y$?

36. Wie lautet die Gleichung der Parabel mit der Achse $y = 2$, die durch den Punkt $P\,(5; 7)$ geht und deren Scheitel die Abszisse $x_0 = 4$ hat?

37. Eine Ellipse berühre die y-Achse in $P_1(0; 5)$ und schneide die x-Achse in $P_2(5; 0)$ und $P_3(11; 0)$. Ihre Achsen seien zu den Koordinatenachsen parallel. Geben Sie eine Gleichung für die Ellipse an!

38. Von einer Hyperbel seien zwei Punkte P_1 und P_2 bekannt. Berechnen Sie jeweils ihre Mittelpunktsgleichung!
a) $P_1\left(5; \frac{9}{4}\right)$, $P_2\left(2\sqrt{6}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $P_1(3; 2)$, $P_2(4; 3)$ c) $P_1(\sqrt{3}; 4)$, $P_2(0; -2)$

39. Eine Hyperbel liege symmetrisch zu den Koordinatenachsen, gehe durch $P(6; -2\sqrt{2})$, und es sei $b = 2$. Stellen Sie ihre Mittelpunktsgleichung auf, und berechnen Sie die Abstände des Punktes P von den Brennpunkten!

40. Wie groß ist der Halbparameter der Parabel $y^2 = 2px$, wenn diese durch den Punkt $P(5; 6)$ geht?

41. Die Spiegeloberfläche eines Scheinwerfers werde durch Rotation einer Parabel um ihre Symmetrieachse gebildet. Der maximale Durchmesser des Spiegels betrage 80 cm, seine Tiefe 10 cm. In welcher Entfernung vom Scheitel der Parabel muß man die Lichtquelle anbringen, wenn sie zur Erzeugung eines parallelen Strahlenbüschels im Brennpunkt liegen muß?

42. Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 18$, die durch den Ursprung geht und den Winkel $\sphericalangle\,(i; j)$ halbiert!

43. Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Kurven!
a) (1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) (1) $x^2 + 4y^2 = 16$ c) (1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$,
(2) $y = 2x + 3$ (2) $y = -\frac{1}{3}x = 5$ (2) $y = 2x$

---

6. In die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ sei ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, von dem ein Eckpunkt in den Scheitel $S_1(-a; 0)$ fällt. Berechnen Sie die Koordinaten der beiden anderen Eckpunkte des Dreiecks!
(Hinweis: Im gleichschenkligen Dreieck betragen die Innenwinkel jeweils 60°.)

---

44. Ermitteln Sie die gemeinsamen Punkte der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ und des Kreises, der durch die Brennpunkte der Ellipse geht und seinen Mittelpunkt in deren „oberen" Scheitel hat!

45. Wie viele Tangenten an die Ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ gehen durch den Punkt $P_1(1; 1)$, $P_2(3; 1)$, $P_3(0; 2)$? Stellen Sie ihre Gleichungen auf!

46. Ermitteln Sie die gegenseitige Lage der durch folgende Gleichungen gegebenen Kurven!
a) (1) $2x - y - 3 = 0$, b) (1) $2x + y - 10 = 0$, c) (1) $3x + 2y - 20 = 0$,
(2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (2) $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$

---

7. Beschreiben Sie einer gegebenen Ellipse mit $a = 5$ und $b = 3$ ein Quadrat ein, und legen Sie durch die Eckpunkte desselben die Tangenten an die Ellipse! Wie lang sind die Seiten des durch die Tangentenabschnitte bestimmten Rhombus?

8. Stellen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ auf, die auf den Koordinatenachsen gleiche positive Strecken abschneidet!

---

47. Für die Ellipse $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$ sind die Tangenten zu ermitteln, die zu den Sehnen durch die Scheitel parallel laufen!

48. An die Ellipse $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ seien vom Ursprung aus die Tangenten gelegt. Berechnen Sie den Winkel, den sie miteinander bilden!

49. Gegeben sei die Ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Legen Sie durch den Punkt $P(-2; 1)$ die Sehne der Ellipse, die von P halbiert wird!

b

---

9. Zwei Ellipsen seien durch die Gleichungen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ gegeben. Stellen Sie Gleichungen für die gemeinsamen Tangenten beider Ellipsen auf, und berechnen Sie den Flächeninhalt des durch die Schnittpunkte der Tangenten bestimmten Rhombus!

10. Stellen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Ellipse $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$ im Ellipsenpunkt $P_0(x_0; y_0)$ auf!

---

50. Zeichnen Sie die Hyperbel **a)** $x^2 - 4y^2 = 18$, **b)** $16x^2 - 9y^2 = 144$ und ihre Asymptoten! Gesucht sind Brennpunkte, Scheitel und der Winkel zwischen den Asymptoten.

51. Unter welchem Winkel schneiden einander die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel?

52. Von einer Hyperbel seien die Asymptoten und die Lage der Scheitel bekannt. Konstruieren Sie die Brennpunkte der Hyperbel!

53. Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Asymptoten der Hyperbel $x^2 - 3y^2 = 12$ mit dem Kreis, dessen Mittelpunkt im rechten Brennpunkt der Hyperbel liegt und der durch den Ursprung geht!

---

11. Berechnen Sie den Abstand der Brennpunkte der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ von den Asymptoten und den Winkel zwischen den Asymptoten!

---

54. Berechnen Sie mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die Koordinaten des Mittelpunktes und die Halbachsen der Hyperbel

a) $4x^2 - 48x - 16y^2 + 128y - 166 = 0$, **c)** $2x^2 - 2x - y^2 + y = 0$,
b) $x^2 + 4x - 4y^2 - 24y - 36 = 0$, **d)** $4x^2 + x - y^2 + 2y = 12$!

Stellen Sie die Schnittpunkte dieser Kurven mit der x-Achse fest, und berechnen Sie den Winkel, den die Tangenten in diesen Punkten an den Kegelschnitt mit der x-Achse bilden!

55. Stellen Sie die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten des Kreises $x^2 + y^2 = 4$ und der Hyperbel $4x^2 - 9y^2 = 36$ auf!

56. Berechnen Sie den Punkt der Parabel $y^2 = 12x$, in dem die Tangente an die Parabel mit der Symmetrieachse der Parabel einen Winkel von 30° bildet!

57. Stellen Sie die Gleichung der Tangenten an die Parabel $y^2 = 4x$ auf, die durch den Punkt $P(3; -4)$ gehen!

58. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an die Parabel $y^2 = 2x$ auf, die **a)** parallel zur Geraden $2x - y + 5 = 0$, **b)** senkrecht zur Geraden $x + y - 7 = 0$ verläuft!

59. Das Drahtseil einer Hängebrücke habe die Form einer Parabel. Ihr tiefster Punkt liege 17 m über dem Wasserspiegel, die Aufhängepunkte seien 95 m voneinander entfernt und mögen sich 33 m über dem Wasserspiegel befinden. Wie groß sind die Anstiegswinkel des Drahtseiles in den Aufhängepunkten?

60. Beweisen Sie, daß die Tangente im Punkt P_0 einer Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 den Winkel $\sphericalangle F_1P_0F_2$ halbiert!

61. Beweisen Sie, daß alle durch den Brennpunkt einer Parabel gehenden Strahlen an der Parabel (d. h. an ihrer Tangente) als achsenparallele Strahlen reflektiert werden!

62. Beweisen Sie, daß die Mittelpunkte jeder Schar paralleler Sehnen einer Ellipse auf einer Geraden liegen, die durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!

63. Beweisen Sie, daß das Produkt der Abstände der Brennpunkte einer Ellipse von jeder beliebigen Tangente an sie gleich dem Quadrat der kleinen Halbachse ist!

64. Es sei M der Mittelpunkt einer Ellipse mit der großen Halbachse a. P_1 sei der Schnittpunkt einer ihrer Tangenten mit der Geraden durch ihre Brennpunkte und P_2 der Fußpunkt des Lotes vom Tangentenberührungspunkt auf diese Gerade. Beweisen Sie, daß $\overline{MP_1} \cdot \overline{MP_2} = a^2$ ist!

65. Beweisen Sie, daß der Abstand eines Brennpunktes der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ von ihren Asymptoten gleich b ist!

66. Beweisen Sie, daß das Produkt der Abstände eines beliebigen Punktes der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ von ihren beiden Asymptoten konstant ist und $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ beträgt!

67. Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von den Asymptoten der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und den durch einen beliebigen Punkt derselben parallel zu den Asymptoten geführten Geraden bestimmt wird, konstant ist und $\frac{ab}{2}$ beträgt!

68. Gegeben seien eine Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten. Beweisen Sie, daß ihre Tangenten im Schnittpunkt beider Kurven senkrecht aufeinander stehen!

69. Beweisen Sie, daß die Tangenten zweier Parabeln mit gemeinsamer Achse und einem gemeinsamen, zwischen ihren Scheiteln gelegenen Brennpunkt, im Schnittpunkt beider Kurven senkrecht aufeinander stehen!

70. Konstruieren Sie nach folgenden Angaben einen Kegelschnitt!

a) $F_1(-9; 0)$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$, l_1 hat die Gleichung $x = -4$

b) $F_1\left(-\frac{9}{4}; 0\right)$, $\varepsilon = \frac{3}{4}$, l_2 hat die Gleichung $x = 4$

c) $F_2(1; 0)$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$, l_2 hat die Gleichung $x = 9$

d) $F(5; 0)$, $\varepsilon = 1$, l hat die Gleichung $x = -5$

71. Stellen Sie eine Gleichung des Kegelschnittes auf, dessen Brennpunkte auf der x-Achse symmetrisch zum Ursprung liegen und für den gilt:

a) $\varepsilon = \frac{3}{5}$, $e = 3$, **b)** $\varepsilon = \frac{5}{4}$, $a = 8$, **c)** $\varepsilon = \frac{3}{2}$, $e = 3$, **d)** $\varepsilon = \frac{12}{13}$, $b = 5$!

72. Berechnen Sie die numerische Exzentrizität e der Ellipse, für die gilt:
a) ihre Nebenachse erscheint von den Brennpunkten aus gesehen unter einem Winkel von $60°$,
b) die Strecke $\overline{F_1F_2}$ sieht man vom Nebenscheitel aus unter einem rechten Winkel!

73. Ermitteln Sie die numerische Exzentrizität einer gleichseitigen Hyperbel!

74. Ermitteln Sie die numerische Exzentrizität der Ellipse, für die der Abstand der Brennpunkte gleich dem Abstand der Endpunkte der großen und der kleinen Halbachse ist!

75. Stellen Sie eine Gleichung der Bahnkurve des Punktes $P(x; y)$ auf, bei dessen Bewegung sein Abstand vom Punkt $A\,(1; 0)$ stets gleich
a) einem Drittel, **b)** dem Dreifachen seines Abstandes von der Geraden $x = 9$ bleibt!

76. Berechnen Sie die numerische Exzentrizität der elliptischen Erdbahn, wenn sich die Entfernung der Erde von der Sonne in Sonnennähe (Perihel) und in Sonnenferne (Aphol) näherungsweise wie 29:30 verhalten!

77. Stellen Sie die Gleichung der Parabel und ihrer Leitlinie auf, wenn die Parabel durch die Schnittpunkte der Geraden $x + y = 0$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 + 4y = 0$ geht und symmetrisch zur y-Achse liegt! Zeichnen Sie den Kreis, die Gerade und die Parabel!

78. Der Abstand zwischen den Leitlinien einer Ellipse betrage 36 Einheiten, die Abstände eines Ellipsenpunktes von den Brennpunkten dieser Ellipse 9 bzw. 15. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ellipse auf!

79. Ermitteln Sie die Menge der Mittelpunkte der Kreise, die durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade berühren!

C

c) Nichtrationale Funktionen

1. Ordnen Sie die durch folgende Gleichungen gegebenen Funktionen f mit $y = f(x)$ in die Übersicht von Übung C 1 ein, und geben Sie jeweils den Definitionsbereich an!

a) $y = 2x - 2$
b) $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2}$
c) $y = x^2\sqrt{2} + x \cdot \sin 30°$
d) $y = \sqrt{|x|}$
e) $y = \log_5 |x|$
f) $y = \sqrt{\lg(2-x)}$
g) $y = x^0 \cdot \lg 2$
h) $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$
i) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

2. Stellen Sie von den folgenden Mengen f geordneter Paare $[x; y]$ mit $x \in P$, $y \in P$ fest, ob es sich um Funktionen handelt! Geben Sie bei den Funktionen Definitionsbereich und Wertevorrat an!

a) $x^2 + y - 5 = 0$
b) $x + y^2 + 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 25 = 0$
d) $x^2 + y^2 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
f) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ und $y \geqq 0$
g) $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ und $y < 0$
h) $9x^2 - 36y^2 - 144 = 0$
i) $9x^2 - 36y^2 + 144 = 0$ und $y > 0$

3. Ermitteln Sie von folgenden Funktionen Definitionsbereich und Wertevorrat!

a) $y = \sqrt{x^2 - 25}$
b) $y = \sqrt{\dfrac{1}{4x^2} - 1}$
c) $y = x^2 + 2x + \sqrt{1+x}$

4. Es sei $f(x) = \sqrt{x-2}$. Geben Sie je eine Gleichung für die Funktionen $f + f = 2f$, $f \cdot f = f^2$ und $\dfrac{f}{f}$ an! Geben Sie die zugehörigen Definitionsbereiche an, und skizzieren Sie die Bilder dieser Funktionen!

5. Es sei $f(x) = \sqrt{x-2}$ und $g(x) = \sqrt{6-x}$. Geben Sie eine Gleichung für $p = f \cdot g$ an! Ermitteln Sie $p(x_0)$ für alle ganzzahligen Werte x_0 aus dem Definitionsbereich von p!

6. Entwickeln Sie aus den Bildern für $f(x) = -(x+1)$ und $g(x) = \sin x$ das Bild der Funktion $s = f + g$!

---

1. Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen $y = x$, $y = [x]$ und $y = x + [x]$!
Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist; so ist z. B. $[2{,}5] = 2$, $[-2{,}5] = -3$, $[7] = 7$.

2. Es sei $f(x) = x$, $g(x) = 1 - |x|$ und $s = f + g$. Geben Sie für jede der drei Funktionen Definitionsbereich und Wertevorrat an!

---

7. Welche der nachfolgend angegebenen Funktionen sind im gesamten Definitionsbereich eineindeutig? Geben Sie bei den anderen Intervalle an, in denen Eineindeutigkeit besteht!

a) $y = 7x - 3$
b) $y = x^2 - 12x + 32$
c) $y = \sqrt{3x}$
d) $y = \sqrt{x^2 - 6x - 56}$
e) $y = x + \sqrt{x}$
f) $y = |x|$
g) $y = \lg x$
h) $y = \tan x$
i) $y = \tan^2 x$

8. Ermitteln Sie Gleichung, Definitionsbereich und Wertevorrat der zu f mit $y = f(x)$ inversen Funktion $\bar{f}$!

a) $y = 5x + 4$
b) $y = \sqrt{x+5}$
c) $y = \sqrt{4x}$
d) $y = 3 + \sqrt{x-2}$
e) $y = \sqrt[3]{\frac{x}{4} + 3}$
f) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$

9. Skizzieren Sie das Bild der Umkehrfunktion von $y = \cos x$ mit $\pi \leqq x \leqq 2\pi$!

---

3. Geben Sie alle linearen Funktionen f an, für die gilt
a) $f = \bar{f}$ *b)* $f = -\bar{f}$ *c)* $f = \bar{f} + c$ ($c \in P$ und $c \neq 0$)!

---

10. Geben Sie (möglichst einfache) Gleichungen für die aus $y = g(z)$ und $z = f(x)$ durch Verkettung entstehenden Funktionen $y = h(x)$ an!

a) $y = \sin z$; $z = \frac{\pi}{2} - x$
b) $y = \cot z$; $z = 2\pi - x$
c) $y = \frac{1 - z^2}{z^2}$; $z = \cos x$
d) $y = \frac{1}{1 + z^2}$; $z = \tan x$

11. Fassen Sie die Funktionen $y = h(x)$ als Verkettungen von $y = g(z)$ und $z = f(x)$ auf! Geben Sie Gleichungen für die innere Funktion f und die äußere Funktion g an! Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertevorrat für h!

a) $y = (x+5)^2$
b) $y = \sqrt{1 + x^2}$
c) $y = \lg(2x + 5)$
d) $y = \lg \tan x$
e) $y = \sqrt{\cos x}$
f) $y = \cos \frac{\pi + x}{2}$

12. Für welche x sind die durch Verkettung von $y = g(z)$ und $z = f(x)$ entstehenden Funktionen definiert?

a) $y = \lg z$; $z = -\sqrt{x}$
b) $y = \lg z$; $z = 1 - \sqrt{x}$
c) $y = \lg z$; $z = \sqrt{1 - x^2}$
d) $y = \sqrt{z}$; $z = \lg \frac{1}{1 + x}$

13. Skizzieren Sie das Bild von $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ entsprechend Bild C 5 (↗ Seite 91) aus den Bildern von $y = \sqrt{z}$ und $z = x^2 - 4x$!

C

4. Geben Sie Definitionsbereich und Wertevorrat für die durch Verkettung entstehenden Funktionen an!

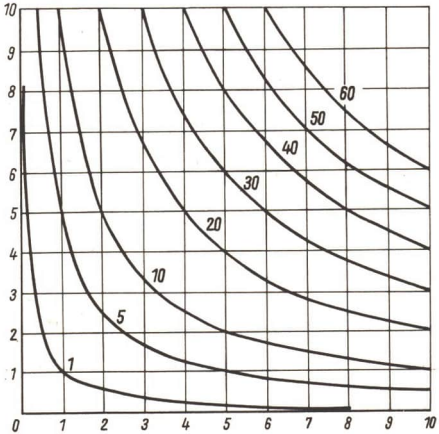
a) $y = \lg z;\ z = \sin u;\ u = \frac{x^2}{2}$ *b)* $y = z^2;\ z = \cos u;\ u = \sqrt{v};\ v = x^2 + 2$

14. Das Bild c 1 zeigt eine sogenannte Netztafel zum Multiplizieren und Dividieren auf graphischem Wege.

a) Geben Sie die Gleichungen der eingezeichneten Kurven an!

b) Erläutern Sie an den Aufgaben $5 \cdot 6$, $4 \cdot 8$, $40:8$, $20:9$ das Prinzip des Arbeitens mit dieser Tafel!

c) Lösen Sie auch die Aufgaben $6{,}6 \cdot 7{,}2$ und $37:5{,}8$ auf diese Weise, und vergleichen Sie mit dem Rechenstabergebnis!



c 1

15. Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen $y = x^{-\frac{1}{2}}$ und $y = x^{-\frac{1}{3}}$ und stellen Sie gemeinsame Eigenschaften der Funktionen

$y = x^{-\frac{1}{k}}$ $(k \in N;\ k > 1)$

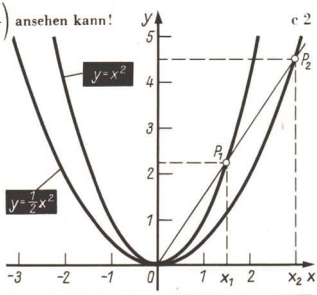
zusammen!

16. Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertevorrat für die Funktion $y = x^{\frac{2}{3}}$ und ihre Umkehrfunktion! Zeichnen Sie die Bilder dieser Funktionen auf der Grundlage einer Wertetabelle! Vergleichen Sie mit den Kurven zu den Gleichungen $y^2 = x^3$ und $y^3 = x^2$ (Neilsche[1] oder semikubische Parabel)!

5. *a)* Zeigen Sie mit Hilfe von Bild c 2, daß die Bildkurven zu den Funktionen $y = x^2$ und $y = \frac{1}{2}x^2$ einander ähnlich sind und daß man den Ursprung (gemeinsamen Scheitelpunkt) als Streckungszentrum $\left(\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}} = \frac{1}{2}\right)$ ansehen kann!

b) Zeigen Sie entsprechend die Ähnlichkeit aller (quadratischen) Parabeln, d. h. aller Bildkurven zu Funktionen $y = ax^2$ mit reellem $a \neq 0$! Wie groß ist der Ähnlichkeitsfaktor bei Übergang von $y = a_1x^2$ zu $y = a_2x^2$?

c) Erläutern Sie, warum der unter **b)** bewiesene Sachverhalt nicht der Tatsache widerspricht, daß die Streckung bzw. Stauchung von einer Geraden aus (hier der x-Achse) keine Ähnlichkeitstransformation ist!



c 2

[1] Nach William Neil (1637 bis 1670), englischer Mathematiker.

17. Die Sternwarte von Charkow liegt auf dem 50. Breitengrad.

a) Berechnen Sie den Winkel, den der von der Sternwarte zum Erdmittelpunkt gezogene Radius mit der Ebene des Erdäquators bildet, im Bodenmaß!

b) Wie weit ist die Sternwarte vom Äquator entfernt?

18. Ermitteln Sie die kleinste Periode p!

a) $y = 2{,}5 \cdot \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$ **b)** $y = 0{,}5 \cdot \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ **c)** $y = 1{,}2 \cdot \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

19. Skizzieren Sie die Bilder folgender Funktionen, und geben Sie Amplitude a und kleinste Periode p an!

a) $y = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ **b)** $y = 0{,}8 \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $y = 1{,}5 \cdot \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$

20. Berechnen Sie unter Verwendung von $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 45° = \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

die folgenden Winkelfunktionswerte!

a) $\sin 15°$; $\cos 15°$; $\tan 15°$ **b)** $\sin 22{,}5°$; $\cos 22{,}5°$; $\tan 22{,}5°$

21. Leiten Sie aus den Additionstheoremen Formeln für $\sin 3x$ und $\cos 3x$ her!

22. Ermitteln Sie den Gültigkeitsbereich der folgenden Beziehungen!

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \cos x$

c) $\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \cot^2 x$

d) $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \tan\frac{x}{2}$

e) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$

f) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\frac{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin\frac{\alpha - \beta}{2}}$

23. Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen für alle natürlichen n mittels vollständiger Induktion!

a) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}$

b) $\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{nx}{2}$

c) $\sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$

d) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot \cos \nu x = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$

e) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^\nu} \tan\frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x \quad (x \neq k \cdot \pi)$

24. Die drei Wechselspannungen I, II, III eines Drehstromgenerators unterscheiden sich in ihren Phasen um $120° \triangleq \frac{2\pi}{3}$. Die Gleichungen für die Spannungen sind

$u_{\mathrm{I}} = U \cdot \sin \omega t$; $u_{\mathrm{II}} = U \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$; $u_{\mathrm{III}} = U \cdot \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$.

Beweisen Sie, daß $u_{\mathrm{I}} + u_{\mathrm{II}} + u_{\mathrm{III}} = 0$ für jedes t ist!

C

6. Beweisen Sie, daß für alle α, β, γ mit $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ gilt
a) $\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\alpha \cdot \cot\gamma + \cot\beta \cdot \cot\gamma = 1$;
b) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 2$!

---

25. Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertevorrat, und skizzieren Sie die Bilder!

a) $y = 2^{\frac{3}{x}}$ **b)** $y = 10^{\sqrt{x}}$ **c)** $y = 2^{\frac{3}{2-x}}$ **d)** $y = 3^{\frac{1}{1-x^2}}$

26. Skizzieren Sie das Bild von $y = \dfrac{1}{\lg x}$!

27. Beschreiben Sie die Bilder der Funktionen $y = \lg(x + a)$ mit $a \in P$!

28. Berechnen Sie x!
a) $x = 7^{\log_7 5 + 1}$ **b)** $x = 4{,}84^{\log_{4{,}84} 10 + 0{,}5}$ **c)** $x = 3^{2 - \log_3 10}$

29. Ermitteln Sie die Lösungen folgender Gleichungen!
a) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$ **c)** $\log_x 2 = -\frac{1}{2}$ **e)** $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64} = x$ **g)** $\lg\lg x = 1$
b) $\log_x \frac{1}{49} = -4$ **d)** $\log_{3\sqrt{3}} x = -2$ **f)** $\lg\lg x = 0$ **h)** $\lg\lg x = -1$

---

7. Ermitteln Sie die Lösungen folgender Gleichungen!
a) $(\log_3 x)^2 - 5 \cdot \log_3 x + 6 = 0$ *b)* $2\,(\log_5 x)^2 + \log_5 (x^3) - 2 = 0$

C

30. Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertevorrat der Funktion $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, und entwickeln Sie ihr Bild aus den Kurven zu $y = e^x$ und $y = e^{-x}$!

---

8. Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ ist!
Anleitung: Gehen Sie davon aus, daß nach der Bernoullischen Ungleichung
$1 - \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$ ist!

---

31. Ermitteln Sie mit Hilfe der Tafel für e^x die folgenden Potenzen und Logarithmen!
a) $e^{0{,}36}$ **b)** $e^{4{,}0}$ **c)** $e^{-0{,}56}$ **d)** $e^{-5{,}6}$ **e)** $\ln 1{,}0202$ **f)** $\ln 4{,}2207$ **g)** $\ln 0{,}1653$ **h)** $\ln 0{,}8521$

32. Berechnen Sie mit Hilfe der Tafel für die dekadischen Logarithmen!
a) $\log_3 2$ **b)** $\log_7 5$ **c)** $\log_4 6$ **d)** $\log_7 10$ **e)** $\log_{11} 0{,}1$ **f)** $\log_3 0{,}155$

33. Ermitteln Sie folgende Logarithmen mittels der Tafel für $\ln x$!
a) $\ln 5$ **c)** $\ln 5000$ **e)** $\ln 17{,}4$ **g)** $\ln 98{,}98$ **i)** $\ln 0{,}153$
b) $\ln 50$ **d)** $\ln 500000$ **f)** $\ln \pi^2$ **h)** $\ln 1{,}86$ **k)** $\ln 2{,}3e$

34. Ermitteln Sie folgende Potenzen von e mit Hilfe der Tafel für $\ln x$!
a) $e^{2{,}9957}$ **b)** $e^{0{,}0953}$ **c)** $e^{0{,}9213}$ **d)** $e^{-4{,}6052}$ **e)** $e^{-0{,}1054}$

35. Ermitteln Sie die Lösungsmengen!

a) $7{,}5^x = 1{,}392$ **d)** $28^x = -369^{3{,}8}$ **g)** $35^{\frac{1}{x}} = 26{,}7$
b) $10^x = (-32{,}6)^4$ **e)** $(-2)^x = -32$ **h)** $\sqrt[x]{5493} = 3{,}695$
c) $0{,}832^x = 54{,}9^{4{,}28}$ **f)** $(-2)^x = -0{,}125$

36. Lösen Sie die Gleichungen!

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^5$ b) $\left(\frac{4}{7}\right)^{2x+3} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-5}$ c) $\left(\frac{3}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x+1}$

---

9. Lösen Sie die Gleichungen!

a) $2^x - 3^{x+1} = 2^{x+2} - 3^{x+3}$ *b)* $2^{(3^x)} = 3^{(4^x)}$ *c)* $15^x + 9^x = 25^x$

---

37. Bezeichnet man mit p_0 und p_h jeweils den Luftdruck in zwei Orten mit der Höhendifferenz h, so gilt

$$(*) \quad p_h = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{c}}.$$

Dabei ist gleiche Temperatur in beiden Orten vorausgesetzt und c eine Temperaturkonstante: $c \approx 8000$ m. Diese Beziehung kann man zur Berechnung der Höhe h benutzen, und zwar geschieht diese Berechnung nach der Formel

$$(**) \quad h = 18400\,(\lg p_0 - \lg p_h)\ \text{m}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Formel (**) aus (*) folgt!

b) Welcher Luftdruck herrscht im Aussichtsgeschoß des Berliner Fernsehturms ($h = 203$ m), wenn am Boden 760 Torr gemessen werden?

38. Tiere und Pflanzen nehmen mit dem Kohlendioxid der Luft radioaktiven Kohlenstoff ${}^{14}_{6}C$ (Halbwertzeit: $5{,}6 \cdot 10^3$ a) auf; das Verhältnis gegenüber dem normalen Kohlenstoff ${}^{12}_{6}C$ beträgt dabei $1:10^{12}$. Nach dem Erlöschen des Stoffwechsels verringert sich der Gehalt an ${}^{14}_{6}C$ durch radioaktiven Zerfall. In der Lascaux-Höhle bei Montignac (Frankreich) hat man Holzkohle von Lagerfeuern gefunden, die nur noch 15 % des ursprünglichen Anteils an radioaktivem Kohlenstoff enthielt. Berechnen Sie das Alter!

39. Die Halbwertzeit des in der Bestrahlungseinrichtung TCo 2000 verwendeten radioaktiven ${}^{60}_{27}C$ beträgt 5,3 a. Das Gerät wird mit einer Strahlenquelle der effektiven Aktivität von 2000 c geliefert; die Bestrahlungszeit für eine Dosis von 300 r beträgt dann (bei 65 mm Abstand von der Strahlenquelle) 2 min 50 s. Wie groß ist die Bestrahlungszeit für die gleiche Dosis zu bemessen, wenn die Strahlungsquelle bereits 3 Jahre benutzt wurde?

40. Die Auflösung einer Substanz in Wasser geschieht nach der Gleichung

$$s = S(1 - e^{-\alpha t}).$$

Dabei ist s die zur Zeit t gelöste Menge, S die Sättigungsmenge und α eine für die Substanz typische Konstante.
Berechnen Sie S und α für Traubenzucker, wenn bei einem Versuch 20 g nach 1 min und 35 g nach 2 min gelöst wurden.

41. Die Abkühlung eines in einer kälteren Umgebung befindlichen Körpers geschieht nach Newton[1] gemäß der Gleichung

$$T = T_U + (T_0 - T_U)e^{-at}.$$

Dabei ist T die Temperatur des Körpers zur Zeit t, T_U die Umgebungstemperatur und a eine Konstante, die von Material und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers abhängt.
Bei einer Außentemperatur von 6 °C ist die Temperatur des Inhalts einer Thermosflasche in 6 h von $T_0 = 93$ °C auf $T_6 = 70$ °C gesunken. Berechnen Sie die Temperatur nach 24 h, und stellen Sie den Temperaturverlauf graphisch dar!

42. Unter der Voraussetzung eines gleichmäßigen Wachstums der industriellen Produktion läßt sich die Entwicklung in nicht zu großen Zeiträumen gut durch eine sogenannte Trendfunktion f beschreiben!

$$P = f(t) = P_0 \cdot u^t.$$

(Aufgabe wird auf Seite 198 fortgesetzt)

[1] Isaac Newton (1643 bis 1727), englischer Naturforscher.

Dabei ist $u = \sqrt[n]{P_E : P_A}$, wenn P_E der letzte bekannte Wert der Produktion (im Zeitabschnitt E), P_A der Anfangswert (im Zeitabschnitt A) und n die Anzahl der Zeitabschnitte zwischen A und E ist. P_0 ist die Produktion im mittleren Zeitabschnitt zwischen A und E. Betrachten wir die industrielle Bruttoproduktion der DDR, die von 1955 bis 1965 um 104% stieg, so ist $n = 10$ und P_0 die Produktion im Jahre 1960.

a) Berechnen Sie P_0, und geben Sie die Gleichung der Funktion an!

b) Welcher Wert der Produktion – bezogen auf 1955 – ist für 1980 zu erwarten?

43. Lösen Sie die folgenden Gleichungen, und erläutern Sie die Ergebnisse am Bild c 3!

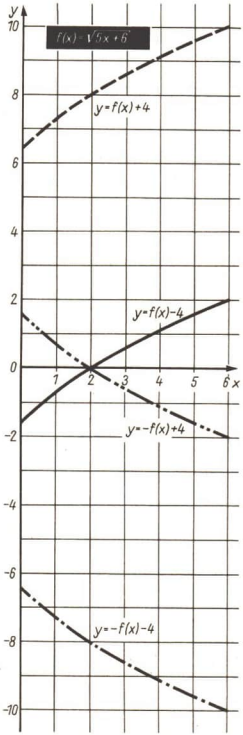
(1) $\sqrt{5x+6} - 4 = 0$

(2) $\sqrt{5x+6} + 4 = 0$

(3) $-\sqrt{5x+6} - 4 = 0$

(4) $-\sqrt{5x+6} + 4 = 0$

c 3



44. **a)** $2 + 3\sqrt{2x-1} = 5$

b) $3\sqrt{3x-5} - 4 = \sqrt{12x-20}$

c) $\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = 2$

d) $7\sqrt{3x} - 1 = 5\sqrt{3x} + 5$

e) $9x^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{3}{4} = 8x^{-\frac{1}{2}} + 1$

f) $\sqrt{2x-1} = \dfrac{2(x-3)}{\sqrt{2x-10}}$

45. **a)** $6 + 3\sqrt{2x-1} = 3$

b) $\sqrt{x-9} = \dfrac{36}{\sqrt{x-9}} + \sqrt{x}$

c) $(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}-3) = (\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}-5)$

d) $3\sqrt{2x-1} - \sqrt{8x+17} = \dfrac{2(x-3)}{\sqrt{2x-1}}$

46. **a)** $\sqrt{x^2-5x+7} = 1$

b) $1 + \sqrt{x+5} = x$

c) $x + \sqrt{x+5} + 8 = 2$

d) $x + 1 - 5\sqrt{x+1} = -6$

e) $x - 10\sqrt{x+11} + 27 = 0$

f) $x + \sqrt{3x^2-5} = 1$

g) $x\sqrt{2} = \sqrt{x+1}$

h) $\sqrt{x^2-2} - \sqrt{5x-8} = 0$

i) $\left(x^{\frac{1}{2}} + 7\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - 5\right) = x + 1$

47. **a)** $\dfrac{3\sqrt{x}-4}{4(\sqrt{x}-2)} = \dfrac{3\sqrt{x}-5}{4\sqrt{x}-9}$

b) $\dfrac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-3} = \dfrac{8\sqrt{x}-12}{7\sqrt{x}-12}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-5} - \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{2\sqrt{x}+38}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+3)}$

d) $\dfrac{x+\sqrt{x}-12}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{x+9\sqrt{x}+20}{\sqrt{x}+5}$

48. **a)** $\sqrt{2x+15} - \dfrac{10}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1}$

b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$

c) $(3x-1)^{\frac{1}{2}} + 2(3x-1)^{-\frac{1}{2}} = (5x+3)^{\frac{1}{2}}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$

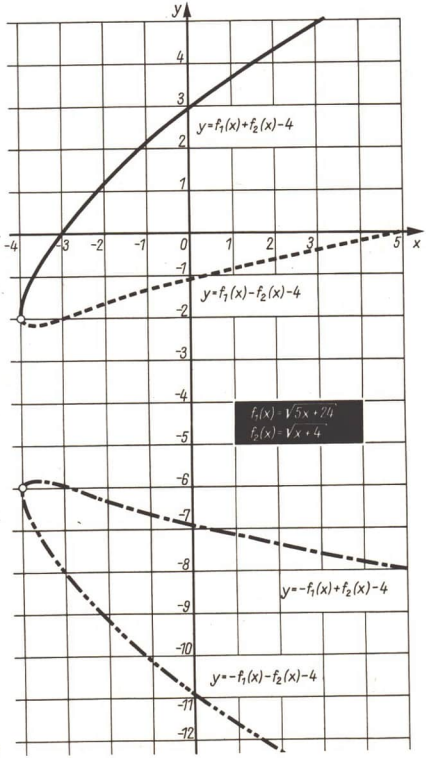
---

10. a) $\sqrt[3]{5x-6} - \sqrt[3]{4x+3} = 0$ *b)* $\sqrt[3]{x} + 5\sqrt{x} = 0$ *c)* $10 - 3 \cdot \sqrt[3]{2x+17} = -2$

---

49. Lösen Sie jeweils die Gleichungen, und erläutern Sie das Ergebnis am Bild c 4 (a), Bild c 5 (b) oder Bild c 6 (c)!

a) (1) $\sqrt{5x+24} + \sqrt{x+4} = 4$
(2) $-\sqrt{5x+24} + \sqrt{x+4} = 4$
(3) $\sqrt{5x+24} - \sqrt{x+4} = 4$
(4) $-\sqrt{5x+24} - \sqrt{x+4} = 4$



c 4

C

b) (1) $\sqrt{7x-12}+\sqrt{13-3x}=5$ (3) $\sqrt{7x-12}-\sqrt{13-3x}=5$
(2) $-\sqrt{7x-12}+\sqrt{13-3x}=5$ (4) $-\sqrt{7x-12}-\sqrt{13-3x}=5$

c) (1) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}+\sqrt{12-3x}=0$ (3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}-\sqrt{12-3x}=0$
(2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}+\sqrt{12-3x}=0$ (4) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}-\sqrt{12-3x}=0$

50. a) $2\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{x+60}$ **e)** $\sqrt{4x-3}-2\sqrt{x}=3$
b) $2\sqrt{3x+1}-3\sqrt{x+3}+2=0$ **f)** $\sqrt{4x+9}-\sqrt{x+6}=\sqrt{x-1}$
c) $\sqrt{7x+8}=11+\sqrt{2x-7}$ **g)** $\sqrt{3x-5}+\sqrt{5x+1}=2\sqrt{3x+4}$
d) $\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$ **h)** $2\sqrt{x+7}-\sqrt{x}=\sqrt{12x+13}$

51. a) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ **c)** $\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3$
b) $\sqrt{9x^2-7-\sqrt{9x+13}}=3x$ **d)** $\sqrt{\sqrt{5x+6}+\sqrt{2x+21}}=3$

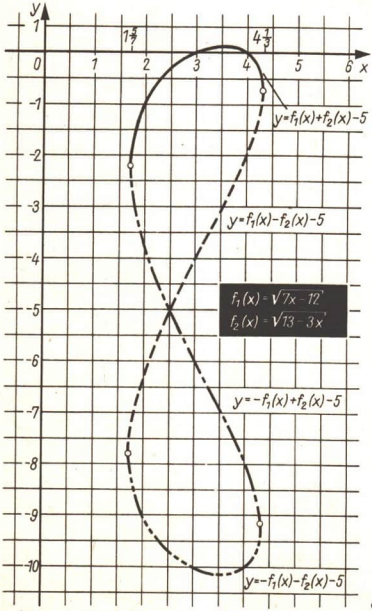
---

11. a) $(3x-\sqrt{3x-14})^{\frac{1}{4}}=2$ *b)* $\sqrt[3]{25+\sqrt{x-4}}=3$

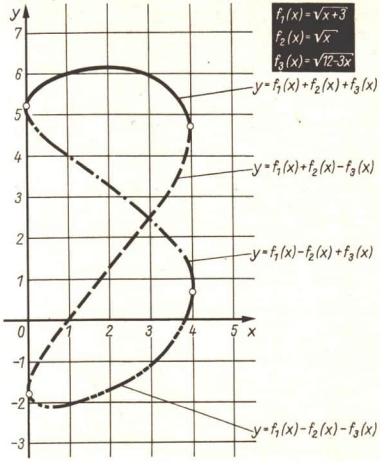
12. a) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$ *b)* $(5+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}+(5-\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{10}$

---

52. a) $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$ **b)** $\sqrt{a+b}-\sqrt{x+a}=\sqrt{b-x}$



c 5



c 6

b) $\sqrt{x-a} = \sqrt{x} - \sqrt{a}$

c) $\dfrac{a\sqrt{x}+b}{a-b\sqrt{x}} = \dfrac{a+b}{a-b}$

e) $\sqrt{x+2a} - \sqrt{x+2b} = 2\sqrt{x}$

f) $(x+b)^{\frac{1}{2}} b^{-1} + (b+x)^{\frac{1}{2}} x^{-1} = x^{\frac{1}{2}}$

---

13. a) $a \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{3}{4} a^2$

b) $\sqrt{x-a} - \sqrt[3]{x-a} = 0$

---

53. Ermitteln Sie die Lösungsmengen ohne Zuhilfenahme einer Tafel!

a) $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{10}$

b) $\tan x = \dfrac{1}{\tan \dfrac{2\pi}{7}}$

c) $\sin 3x = \sin 21{,}6^\circ$

d) $\sin^2 x = \sin^2 12{,}7^\circ$

e) $\sin x = \cos 70^\circ$

f) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{5}\right) = \cos 0{,}3\pi$

g) $\sin(5x - 0{,}1\pi) = \cos 0{,}8\pi$

h) $\tan^2 x = \cot^2 0{,}78\pi$

54. a) $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$

b) $\cot^2 x = \dfrac{4}{3}$

c) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

d) $4{,}5 - \tan^2 x = 0$

e) $\sin^2 x - 1{,}2 = 0$

55. a) $4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos x - 3 = 0$

b) $\sin x - \sqrt{3} \cdot \sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sqrt{3} = 0$

c) $7 \cdot \cot x = \dfrac{4}{\cot x} + 12$

d) $\dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = \dfrac{1}{5} \cdot \cot x$

e) $\tan^2 x + 2 \cdot \tan x = 1$

f) $\sqrt{2} \cdot \cos x - 2 \cdot \cos^2 x + 6 = 0$

g) $\sin x \cdot (2 - \sin x) = \dfrac{1}{2}$

h) $\dfrac{1}{\cot^2 x} - \dfrac{2}{\cot x} + 1 = 0$ mit $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

56. **a)** $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x$

b) $3 \cdot \sin x + 5 \cdot \cos x = 0$

c) $\tan x = 4 \cdot \cot x$

d) $\sin x = \frac{1}{2} \cdot \tan x$

e) $\cos 3x = 3 \cdot \cot 3x$

f) $2 \cdot \cos x = -5 \cdot \sin x$

g) $4 \cdot \sin 2x - 3 \cdot \cos 2x = 0$

h) $3 \cdot \sin^2 x = \cos^2 x$

i) $\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

k) $\cos(2x - 10^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \tan(2x - 10^\circ)$

57. **a)** $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}25$

b) $2 \cdot \sin^2 x = 3 \cdot \cos x$

c) $2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \sin x = 3$

d) $\tan x + 8 \cdot \cot x = 6$

e) $\frac{1 - \tan x}{1 - \cot x} = 2 \cdot \sin x$

f) $\cos^2 x - 4 \cdot \sin x + 5 \cdot \sin^2 x = 0$

g) $\sin x \cdot \cos x = 0{,}25$

h) $5 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \cos^2 x = 3$

i) $6 \cdot \cos^2 x = 5 \cdot \sin x$

k) $\sin^2 x + 2 \cdot \cos x = 3$

l) $\tan 2x - \cot 2x = 1$

m) $3 \cdot \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 1$

n) $3 \cdot \sin x \cdot \cos x + 4 \cdot \cos^2 x = 0$

o) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

---

14. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die die Ungleichung

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geqq \frac{8}{3} \quad \text{gilt!}$$

---

58. **a)** $2 \cdot \cos x - 3 \cdot \sin x = 3$

b) $5 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x = 4{,}5$

c) $\sqrt{3} \cdot \cos \frac{1}{2}x + \sin \frac{1}{2}x = 1$

d) $10 \cdot \cos x + 5 \cdot \sin x = 11$

e) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

f) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

59. Lösen Sie die folgenden Gleichungen, indem Sie zunächst durch passende Umformungen Gleichungen des Typs

$a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 2x = c$ gewinnen!

a) $\sin^2 x + 3 \cdot \cos^2 x - 2\sqrt{3} \cdot \sin x \cdot \cos x = 1$

b) $3 \cdot \sin^2 x + 4 \cdot \cos^2 x = 13 \cdot \sin x \cdot \cos x$

c) $1 - 3 \cdot \cos^2 x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

d) $\cos^2 x + \frac{1}{3} \cdot \sin x \cdot \cos x + \frac{2}{3} \cdot \sin^2 x = 1$

---

15. Berechnen Sie die Lösungen des Gleichungssystems!

$$2 \cdot \sin x - 6 \cdot \sin y = -\sqrt{6}$$
$$\sin x + 3 \cdot \cos y = \sqrt{6}$$

---

60. **a)** $\sin 2x = \tan x$

b) $\tan x \cdot \cos 2x = \sin x$

c) $3 \cdot \sin 2x - 2(\tan x + \cot x) = 4$

d) $\cos 2x - \cos x + 2 = 0$

e) $3 \cdot \sin 2x = -2 \cdot \cos 3x$

f) $3 \cdot (\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{3} \cdot \cos 2x$

g) $2 \cdot \tan x - \sin 2x = 2 \frac{\sin^2 x}{\cot x}$

h) $\cos 2x + 2 \cdot \cos x + 1 = 0$

61. **a)** $\cos x - \sin 2x = \cos 3x$

b) $3 \cdot \sin 2x - 4 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x = 2{,}73$

c) $\tan 2x + \tan x + \tan^3 x = 0$

d) $\sin 3x - \sin 2x + \sin x = 0$

e) $\sin 3x + \sin x = \cos x$

f) $3 \cdot \sin^2 x + \cos 2x - 2 \cdot \cos^2 x = 1{,}2$

g) $\tan x + \tan 3x = 0$

h) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$
$= \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

62. **a)** $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x$
b) $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$
c) $\sin 2x \cdot \sin 6x = \sin 3x \cdot \sin 5x$
d) $\cos 2x \cdot \cos 4x = \cos 5x \cdot \cos x$

63. **a)** $\sin(x + 23°) + \sin(x - 7°) = 1{,}6$
b) $\sin(x + 12°) + \sin(108° - x) = 1{,}5$
c) $\cos(x - 19°) + \cos(x - 21°) = 1{,}73$
d) $\cos(x + 12°) - \cos(x + 25°) = 0{,}193$
e) $\sin(2x - 15°) - \sin(2x - 45°) = 0{,}5176$
f) $\sin\left(\frac{x}{2} + 60°\right) - 0{,}5 = \sin\frac{x}{2}$
g) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1 = 0$
h) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$
i) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$
k) $3 \cdot \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cdot \sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$
l) $2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$
m) $2 \cdot \cos(x + 30°) - \sqrt{2} \cdot \sin(x - 45°) = 2$

64. **a)** $\cos(x + 15°) \cdot \sin(x - 15°) = 0{,}25$
b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$
c) $\tan(2x - 1) \cdot \tan(3x + 1) = 1$
d) $\sin(x - 30°) \cdot \cos x = \frac{1}{4}$
e) $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 0{,}183$
f) $\tan x \cdot \cos 2x = \sin x$

65. **a)** $\sin x + \sin y = 0{,}75$
$x + y = \frac{\pi}{4}$
b) $\cos x - \cos y = 0{,}68$
$x - y = 60°$

66. Ermitteln Sie, für welche reellen Zahlen a die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ die leere (eine einelementige, eine zweielementige) Menge ist!
a) $\sin x = a \cdot \sin 2x$ **b)** $\cos\frac{x}{2} = a \cdot \cos\frac{x}{6}$ **c)** $\sin x = a \cdot \cot\frac{x}{2}$

67. Für welche reellen a, b, c existieren Lösungen der Gleichung $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos^2 x + c = 0$?

---

16. Erläutern Sie, wie man die Gleichungen von Aufgabe 63 vorteilhaft unter Zuhilfenahme der Formeln für die Summen von Winkelfunktionswerten lösen kann!

17. Lösen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Gleichungssysteme, indem Sie von der korrespondierenden Addition und Subtraktion $\left(\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a-b} \text{ für } a \neq b\right)$ Gebrauch machen und danach Formeln für die Summen bzw. Differenzen von Winkelfunktionswerten anwenden!
a) $\frac{\cos(x + 22{,}5°)}{\cos(x - 22{,}5°)} = \sqrt{2} - 1$
b) $\frac{\sin x}{\sin y} = 2$
$x + y = 480°$
c) $3 \cdot \sin(x + 15°) - 2 \cdot \sin(x + 60°) = 0$
d) $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{3}{4}$
$x - y = 10°$

---

68. Geben Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen an, und ermitteln Sie Nullstellen und Unendlichkeitsstellen!
a) $y = \sqrt{x(x^2 - 4)}$
b) $y = \sqrt{(x - 1)(x - 2)}$
c) $y = \frac{x - 1}{\sqrt{x + 1}}$
d) $y = x\sqrt{3 - x}$
e) $y = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{2}}$
f) $y = \frac{3x + 1}{\sqrt{x^3 + 1}}$

C

69. Ermitteln Sie Definitionsbereich, Nullstellen und Unendlichkeitsstellen für die folgenden Funktionen!

a) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

b) $y = \sin x + 2 \cdot \sin 2x$

c) $y = e^x \cdot \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

d) $y = \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos \dfrac{x}{2}}$

e) $y = \sqrt{x \cdot \cos x}$

f) $y = \lg(\cos x)$

70. Berechnen Sie die Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x \cdot \tan x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x}{3x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{3x}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

71. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen!

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot \sin \dfrac{a}{x}\right) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{a \cdot \sin z}{z} = a$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \cot x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 5x} = \dfrac{7}{5}$

72. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = f(x)$!

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

73. Berechnen Sie folgende Grenzwerte ($n \in N$, $n \neq 0$)!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1 + nx)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{\sin x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} [(\cot x) \log_a (1 + x)]$

d) Differential- und Integralrechnung und Anwendungen

1.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$g_1(x)$	$(3x + 5)^5$	$3x + 5$	$(ax + b)^2$	$\left(\frac{1}{4}x^5 - 3x\right)^2$
$g_2(x)$	$(5{,}2x - 8)^3$	$(5{,}2x - 8)^4$	$(cx + d)^3$	$\frac{5}{6} + 3x^2 - x$
$g_3(x)$	$4x^3 - 3{,}2x + 7$	$1{,}8x^2 + 4{,}5$	$(ax)^4$	$\frac{x^5}{45} - \frac{x^4}{36}$
$g_4(x)$	$0{,}5x^4 - x$	$0{,}5x^3 - 1$	$3a + 4bx$	$\frac{25}{4}x^4 + \frac{37}{3}x^3$

Fragestellungen auf Seite 205

a) Berechnen Sie jeweils die 1. Ableitung aller Funktionen dieser Tabelle nach x!
b) Berechnen Sie jeweils die 2. Ableitung nach x!
c) Welche dieser Funktionen haben eine identisch verschwindende 4. Ableitung?
d) Berechnen Sie zeilenweise jeweils die 1. und 2. Ableitung der Funktionen $f_1(x) \cdot f_2(x)$!
e) Berechnen Sie zeilenweise jeweils die 1. und 2. Ableitung der Funktionen $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$!
f) Berechnen Sie zeilenweise jeweils die 1. Ableitung der Funktionen $f_1(x) \cdot f_3(x)$!
g) Berechnen Sie spaltenweise jeweils die 1. Ableitung der Funktionen $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$!

2. Geben Sie jeweils drei Funktionen an, deren 1. Ableitung folgendermaßen lautet!

a) x c) x^2 e) $-3x + 7$
b) $4x - 5$ d) $18x^2 + 2x - 3$ f) $-27x^5 + 3x^3 - 17x$

3. a) Geben Sie drei Beispiele von Funktionen f an, die die Bedingungen $f(0) = 1$ und $f'(0) = 2$ erfüllen!
b) Wählen Sie eine Funktion f so, daß sie noch zusätzlich die Bedingungen $f(1) = 3$ und $f'(1) = 4$ erfüllt!

4. Geben Sie die n-te Ableitung der Funktion $f(x) = (ax + b)^n$, $(n > 0)$ an!

---

1. Geben Sie jeweils die n-te Ableitung der folgenden Funktionen für alle natürlichen **Zahlen** n, $(n > 0)$ an!
a) $f(x) = ax^5 - 3x^4 + x - 3$ *b)* $f(x) = ax^7 - 12x^3 + 17$
c) $f(x) = (ax + b)^m$, (m natürliche Zahl)

---

5. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$!

a	b	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	10	x^2	$2x + 6$	$-3x^2 + 4x$
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$x^2 + 4$	$17x^5 + 4x$	$-3x^3 + 3x^2 + 3$
-1	$+4$	$\lvert x \rvert$	$(2x - 3)^2$	$\left(\frac{1}{3}x^2 - 3x + \frac{4}{5}\right)^2$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\lvert x \rvert + x$	$\lvert x \rvert - x$	$\lvert x \rvert \cdot x$

6. Warum ist $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (x^2 + 4)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 + 4)\mathrm{d}x$?

7. Geben Sie je eine Stammfunktion zu den folgenden Funktionen an!

a) $f(x) = x^4 - 3{,}2x + \frac{11}{100}$ b) $x^6 + 3{,}7x^2 - \frac{13}{60}x - 4$
c) $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + c, \quad m > 1$

8. Integrieren Sie die in der Tabelle zu Aufgabe d **1** angegebenen ganzrationalen Funktionen!

d

2. Geben Sie eine Funktion an, deren zweite Ableitung $x - 3$ lautet und die an den Stellen 2 und 4 lokale Extrema besitzt!
Ist eine solche Funktion eindeutig bestimmt?

---

9. Bestimmen Sie eine Funktion f, die den folgenden Bedingungen genügt!

a) $f(0) = 2$, $f'(0) = 5$, $f''(x) = x^4 - 2$

b) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = 0$

c) $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = 1$, $f'''(1) = 1$

d) $f(0) = 0$, $f'(1) = 0$, $f'(0) = 1$

10. Es sei $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ für jede natürliche Zahl n.

a) Beweisen Sie, daß $f'_n(x) = f_{n-1}(x)$ für alle x gilt!

b) Beweisen Sie, daß $f_n^{(k)}(x) = f_{n-k}(x)$ für alle x und für $0 < k \leqq n$ gilt!

11. An welchen Stellen fällt die erste Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ mit dem Funktionswert zusammen, d. h., für welche x gilt $f(x) = f'(x)$?

---

3. Unter welchem Winkel schneiden einander die Tangenten an die Kurven $y = x^2$ und $y = \frac{1}{x}$ im Schnittpunkt der beiden Kurven?

---

12. Gegeben seien die nachstehend aufgeführten impliziten Funktionen $F(x, y) = 0$.
Berechnen Sie jeweils die zueinander inversen Funktionen $y = f(x)$ und $x = g(y)$, die Sie durch Auflösen von $F(x, y) = 0$ nach y bzw. x erhalten!
Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$!

a) $2x + 3y = 0$

b) $1{,}5x + 2{,}7y - 4{,}5 = 0$

c) $4x - 5y + 10 = 0$

d) $\frac{1}{3}x + \frac{6}{5}y - \frac{5}{6} = 0$

13. Berechnen Sie jeweils die 1. Ableitung der folgenden Funktionen, indem Sie zunächst die Ableitung der inversen Funktion berechnen!

a) $y = \sqrt{x}\,;\ x > 0$

b) $y = \sqrt[4]{2x - 5};\ x > \frac{5}{2}$

c) $y = \sqrt[10]{x - 1};\ x > 1$

d) $y = \sqrt[n]{x}\,;$
$n > 0$, natürliche Zahl, $x > 0$

e) $y = \sqrt[3]{x + 1};\ x > -1$

f) $y = \sqrt[5]{0{,}5x + 1{,}2};\ x > -2{,}4$

g) $y = \sqrt[3]{27x + 4};\ x > 0$

h) $y = \sqrt[n]{ax + b};$
$n > 0$, natürliche Zahl, $x > -\frac{b}{a}$

14. Es sei $f(x) = x^2 + 5$, und es sei $x = g(y)$ die zu f inverse Funktion für $x > 0$.
Berechnen Sie **a)** $g'(15)$, **b)** $g'(9)$!

---

4. *a)* Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + x}}$!
b) Ermitteln Sie die zu f inverse Funktion $x = g(y)$!
Welches ist der Definitionsbereich von g?
c) Berechnen Sie die ersten Ableitungen von f und von g!
d) Haben die Ableitungen denselben Definitionsbereich wie die Stammfunktionen?

---

15. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung und das Integral! Geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Funktion und der 1. Ableitung an!

a) $y = x^3$

b) $y = x^{\frac{1}{3}}$

c) $y = x^{-3}$

d) $y = x^{-\frac{1}{3}}$

e) $y = x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{4}{3}}$

f) $y = x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{4}{3}}$

g) $y = x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{4}{3}}$

h) $y = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$

i) $y = x^{\frac{13}{100}}$

k) $y = x^{\frac{1}{8}}$

l) $y = x^{\frac{2}{5}}$

m) $y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{5}}$

16. Berechnen Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$

b) $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$ $y' = \frac{8}{3} x \sqrt[3]{x^2}$

c) $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$

d) $y = \dfrac{a + b\sqrt{x}}{c + dx}$

e) $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

f) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^{\frac{1}{5}}}}$

---

5. Bilden Sie von der Funktion $y = 2x^3 - \dfrac{1}{6x^3} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{14} - 7$ die ersten vier Ableitungen!

---

17. Bilden Sie von folgenden Funktionen jeweils die 1. und 2. Ableitung!

a) $f(x) = (1{,}7x + 2{,}3)^2$

b) $f(x) = (ax^2 + bx + c)^2$

c) $f(x) = (7x^2 - 5x + 2)^3$

d) $f(x) = (ax^2 + bx + c)^n$, $(n \geqq 2)$

e) $f(x) = (2x^2 - 5x + 5)^2$

f) $f(x) = (4x - 3)^3$

g) $f(x) = (ax^2 + bx + c)^3$

h) $f(x) = (0{,}5x^3 + 3{,}1x - 4)^2$

i) $f(x) = (ax + b)^3$

k) $f(x) = \left(\dfrac{5}{3}x^2 - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{7}{9}\right)^3$

18. Bilden Sie jeweils die 1. Ableitung von folgenden Funktionen!

a) $f(x) = (ax + b)^n \cdot (cx + d)^m$, $(n \geqq 1, m \geqq 1)$

b) $f(x) = (x^3 + x + 1)^2 \cdot (x^2 - 1)^3 \cdot (x^3 - x^2 + x - 1)^4$

c) $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, $(n \geqq 1)$

d) $f(x) = \left(\dfrac{2x + 3}{3x - 2}\right)^2$

e) $f(x) = \left(\dfrac{5x - 7}{4x + 3}\right)^2$

f) $f(x) = \left(\dfrac{7{,}1x - 3{,}2}{4{,}3x - 5{,}6}\right)^3$

g) $f(x) = \left(\dfrac{ax + b}{cx + d}\right)^n$, $(n \geqq 1)$

19. Bilden Sie jeweils die 1. Ableitung der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 5}{(x^2 - 16)(x + 3)}}$

e) $f(x) = \sqrt{9x - 4}$

f) $f(x) = \sqrt{(ax + b)(cx + d)}$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x + 3}{3x - 2}}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x - 5}{(x^2 + 4)(3x^2 - 5)}}$

i) $f(x) = \sqrt{ax + 6}$

k) $f(x) = \sqrt{(3x + 2)(4x - 9)}$

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{9x^2 - 25}}$

20. Bilden Sie jeweils die 1. Ableitung der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = x\sqrt{1 + x}$

b) $f(x) = \left(2x + x\sqrt[4]{x^3}\right)^2$

c) $f(x) = (x - \sqrt{x})^2$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x + \sqrt{x}}$

e) $f(x) = \left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{a + bx}{a - bx}}$

21. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. und 2. Ableitung!

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(x - a)^3}}$

c) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$

d

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **e)** $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-(bx)^2}}$ **h)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+\sqrt{x}}}$ **i)** $f(x) = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+x}}}$

22. Stellen Sie die parameterfreie Gleichung der Kreistangente in einem Punkt $(x_0; y_0)$ des Kreises $(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 = r^2$ auf!
(Anleitung: Berechnen Sie zunächst den Anstieg der Tangente im Punkt $(x_0; y_0)$, und stellen Sie dann die Punktrichtungsgleichung auf! Beachten Sie die Sonderfälle, in denen die Ableitung nicht existiert!)

23. Lösen Sie das gleiche Problem wie in Aufgabe **d 22** für
a) die Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, **b)** die Hyperbel $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, **c)** die Parabel $y^2 = 2px$!

---

6. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $f(x) = (a+x)\sqrt{a-x}$ *c)* $g(t) = (2t+1)(3t+2)\sqrt[3]{3t+2}$

b) $f(z) = \sqrt[3]{z+\sqrt{z}}$ *d)* $h(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2ay-y^2}}$

---

24. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale!

a) $\int (x+1)^2 dx$ **f)** $\int (2x+1)^2 dx$ **l)** $\int (x+2)^2 dx$
b) $\int (2x+2)^2 dx$ **g)** $\int (3+ax)^2 dx$ **m)** $\int (3-ax)^2 dx$
c) $\int (2x-5)^3 dx$ **h)** $\int (6x-1)^4 dx$ **n)** $\int (9-7x)^4 dx$
d) $\int (8-5x)^3 dx$ **i)** $\int (a+bx)^3 dx$ **o)** $\int (a+bx)^4 dx$
e) $\int \dfrac{dx}{(2x+5)^2}$ **k)** $\int \dfrac{dx}{(5x-3)^4}$ **p)** $\int \dfrac{dx}{(a-5x)^5}$

25. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale!

a) $\int \sqrt{x+1}\, dx$ **e)** $\int \sqrt{2x+1}\, dx$ **i)** $\int \sqrt{ax+1}\, dx$
b) $\int \sqrt{ax+b}\, dx$ **f)** $\int \sqrt[3]{2x+5}\, dx$ **k)** $\int \sqrt[3]{(2x+5)^2}\, dx$
c) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x-5}}$ **g)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-3x}}$ **l)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax+b}}$
d) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{4x+5}}$ **h)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(4x+5)^2}}$ **m)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{2x-5}}$

26. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale!

a) $\int_0^1 (3x-2)^3\, dx$ **c)** $\int_{-2}^{2} \dfrac{dx}{(3+x)^2}$ **e)** $\int_1^2 \left(\dfrac{1}{4}x+1\right)^4 dx$ **g)** $\int_{-3}^{3} \dfrac{dx}{(5-x)^2}$

b) $\int_4^5 \sqrt{2x-2}\, dx$ **d)** $\int_{12}^{19} \dfrac{dx}{\sqrt{-3+x}}$ **f)** $\int_{-0,1}^{0,4} \sqrt{0,5+x}\, dx$ **h)** $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{4x+2}}$

---

7. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der angegebenen Substitution!

a) $\int x\sqrt{x-1}\, dx,\ t = \sqrt{x-1}$ *c)* $\int \dfrac{x \cdot dx}{\sqrt{x+1}},\ t = \sqrt{x+1}$

b) $\int \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+2}}\, dx,\ t = \sqrt{2x^2+2}$ *d)* $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}},\ t = \dfrac{1}{x}$

27. Gewinnen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \tan x$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$, indem Sie nur die erste Ableitung der Sinusfunktion als bekannt voraussetzen!

$\left(\text{Benutzen Sie die folgende Identität: } \tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}\,!\right)$

28. Gewinnen Sie die erste Ableitung der Sinusfunktion, indem Sie nur die erste Ableitung der Kosinusfunktion als bekannt voraussetzen!

---

8. Formulieren Sie eine Gesetzmäßigkeit für die n-te Ableitung der Funktion
a) $f(x) = \sin x$, *b)* $f(x) = \cos x$!

---

29. Bilden Sie $y'' + y$ für die folgenden Funktionen!

a) $y = \sin x$
b) $y = a \cdot \sin x$
c) $y = \sin ax$
d) $y = a \cdot \sin bx$
e) $y = \cos x$
f) $y = a \cdot \cos x$
g) $y = \cos ax$
h) $y = a \cdot \cos bx$
i) $y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$

Geben Sie in allen Fällen den Koeffizienten k an, mit dessen Hilfe die Summe $y'' + ky$ gleich Null wird!

30. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $f(x) = 2 \cdot \sin x$
b) $f(x) = \sin(2 - x)$
c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
d) $f(x) = \sqrt{\sin x}$
e) $f(x) = \tan 2x + \cot x^2$
f) $f(x) = 1 + \tan^2 x$
g) $f(x) = \sin 2x$
h) $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$
i) $f(x) = \cos^2 x$
k) $f(x) = \sin \sqrt{x}$
l) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
m) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 2x$
n) $f(x) = \sin(x + 2)$
o) $f(x) = 2 \cdot \cos 2x$
p) $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$
q) $f(x) = \tan^2 x$
r) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

31. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $f(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$
b) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$
c) $f(x) = 2(x - \cot x) \cdot \sin x$
d) $f(x) = 2x \cdot \sin x - (x^2 - 2) \cdot \cos x$
e) $f(x) = \sqrt{\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}}$
f) $f(x) = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$
g) $f(x) = x \cdot \cot x$
h) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
i) $f(x) = 3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x$
k) $f(x) = \sqrt{a \cdot \sin^2 xb \cdot \cos^2 x}$

32. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = 1 - x$ und $g(x) = 1 - \sin \frac{\pi x}{2}$.
Bestimmen Sie $\frac{f'(1)}{g''(1)}$!

33. Unter welchem Winkel schneiden einander
a) die Bilder der Sinus- und Kosinusfunktion,
b) das Bild der Sinusfunktion und die Abszissenachse im Koordinatenursprung,
c) die Bilder der Tangens- und Kotangensfunktion,
d) das Bild der Tangensfunktion und die Abszissenachse im Koordinatenursprung?

---

9. Eine Funktion f heißt periodisch, wenn es eine reelle Zahl $a > 0$ gibt derart, daß für jedes x gilt: $f(x + a) = f(x)$.
Beweisen Sie, daß die Ableitung einer periodischen Funktion wieder eine periodische Funktion ist!

d

10. Beweisen Sie, daß die Ableitung einer geraden Funktion ungerade und daß die Ableitung einer ungeraden Funktion gerade ist!

---

34. Werten Sie folgende Integrale aus!

a) $\int \sin 2x\,dx$

b) $\int \cos \frac{x}{2}\,dx$

c) $\int \sin \frac{ax+b}{c}\,dx$

d) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) dx$

e) $\int \sin(3x+2)\,dx$

f) $\int \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) dx$

g) $\int \sin \frac{\pi}{2}\,dx$

h) $\int [-\sin(-x)]\,dx$

i) $\int \sin(-x+1)\,dx$

k) $\int \cos(-x)\,dx$

l) $\int (\sin 2{,}2x + 1{,}2x)\,dx$

m) $\int \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}x\right) dx$

35. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale!

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

b) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

c) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx$

f) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$

g) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

h) $\int_0^{1} \sin x\,dx$

i) $\int_1^{2{,}5} \sin x\,dx$

k) $\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\cos x - \sin x)\,dx$

36. Werten Sie die folgenden Integrale aus!

a) $\int \cos \frac{x}{\sqrt{2}}\,dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\sqrt{x}\,dx$

c) $\int x \cdot \sin(1 - x^2)\,dx$

d) $\int \cos\frac{x}{a} \cdot \sin\frac{x}{a}\,dx$

e) $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}\,dx$ (Substituieren Sie $t = \sin ax$)

f) $\int (\cos ax + \sin ax)\,dx$

g) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

h) $\int x \cdot \cos x^2\,dx$

i) $\int \sin^3 6x \cdot \cos 6x\,dx$ (Substituieren Sie $t = \sin 6x$)

k) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}\,dx$

37. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $f(x) = \ln(1+x)$

b) $f(x) = x \ln x$

c) $f(x) = \ln \sin x$

d) $f(x) = \log_a x$

e) $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

f) $f(x) = \ln x^2$

g) $f(x) = \ln \cos x^2$

h) $f(x) = \log_a^2 x$

i) $f(x) = \ln^2 x$

k) $f(x) = \ln \ln x$

l) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

m) $f(x) = \log_a \ln x$

38. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{a} \cdot \log_a^2 x$

d) $f(x) = \ln x \log_a x - \ln a \log_a x$

e) $f(x) = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$

f) $f(x) = \ln x \cdot \log_a x$

g) $f(x) = \log_a \sin ax$

h) $f(x) = \cos \log_a x$

d

11. Bestimmen Sie für die n-te Ableitung der Funktion ln eine Formel!

39. Beweisen Sie, daß die Funktion $y = \dfrac{1}{1 + x + \ln x}$ die Gleichung $xy' = y(y \ln x - 1)$ erfüllt!

40. An welcher Stelle x_0 hat das Bild der Funktion $y = \ln x$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = x$ verläuft?

12. Welcher Punkt des Bildes von $y = \ln x$ hat von der Geraden $y = \dfrac{1}{2}x + 5$ den kleinsten Abstand?

41. Berechnen Sie die folgenden Integrale!

a) $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{x} + x\right) dx$ c) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{e}{x}\, dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x}$

b) $\displaystyle\int_{10}^{100} \frac{dx}{2x \ln 10}$ d) $\displaystyle\int_{10}^{20} \frac{dx}{\frac{x}{2} \ln 10}$ f) $\displaystyle\int_1^2 \sum_{\nu=1}^{4} x^{-\nu}\, dx$

42. Werten Sie die folgenden Integrale aus!

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x - 2}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{2x + 1}\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{a + bx}$

$\left(\text{Hinweis zu c): } \dfrac{x}{a + bx} = \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{bx + a}{a + bx} - \dfrac{a}{b} \dfrac{1}{a + bx}\right)$

43. a) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x - 1}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3}\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 1}\, dx$

(Hinweis: Dividieren Sie zunächst die Polynome aus, und integrieren Sie dann!)

44. a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$ d) $\displaystyle\int \frac{\ln^7 x}{x}\, dx$

45. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $f(x) = x^7 e^x$ c) $f(x) = e^x \sin x$ e) $f(x) = (x - 1) e^x$

b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{x^5}{e^x}$ f) $f(x) = e^x \ln x$

46. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $f(x) = e^{2x}$ d) $f(x) = e^{x^2 - 3x + 7}$ g) $f(x) = x^4 e^{-3x}$

b) $f(x) = x^{-2} e^{-x^2}$ e) $f(x) = e^{2x} \ln x$ h) $f(x) = x^3 e^{3x} \ln (x^2)$

c) $f(x) = e^{\tan x}$ f) $f(x) = e^{\sin x}$ i) $f(x) = e^x \cdot \cos x$

47. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $f(x) = 3^x$ d) $f(x) = \pi^{2x}$ g) $f(x) = 3^{5x}$

b) $f(x) = 4^{-2x}$ e) $f(x) = (x^3 + 3) \cdot 2^{-7x}$ h) $f(x) = 2^{5x} \cdot 3^{4x^3}$

c) $f(x) = 2^{\sin x}$ f) $f(x) = 3^{\cot x}$ i) $f(x) = 3^{\cot \frac{1}{x}}$

3. Beweisen Sie die folgende Identität!

$f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$ für $f(x) > 0$

(Hinweis: Bilden Sie die Ableitung von $\ln f(x)$ nach x mit Hilfe der Kettenregel!)

d

14. Bilden Sie von den folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung! (Benutzen Sie die Formel aus Aufgabe *13*!)

a) $f(x) = x^x$ *c)* $f(x) = x^{\sin x}$ *e)* $f(x) = (\sin x)^x$

b) $f(x) = x^{\ln x}$ *d)* $f(x) = (\ln x)^x$ *f)* $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

---

48. **a)** Zeigen Sie, daß die Funktion $y = xe^{-x}$ die Gleichung $xy' = (1 - x^2)y$ erfüllt!

b) Zeigen Sie, daß die Funktion $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ die Gleichung $xy' = (1 - x^2)y$ erfüllt!

49. Zeigen Sie, daß die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y$ durch **a)** $y = e^{kx}$ und **b)** $y = b \cdot e^{kx}$ erfüllt wird!

50. Wird ein auf die Temperatur T_0 erhitzter Körper in einer kälteren Umgebung mit der Temperatur T_1, $(T_0 > T_1)$, sich selbst überlassen, so kühlt er sich so ab, daß er nach der Zeit t die Temperatur $T = T_1 + (T_0 - T_1)\, e^{-k \cdot t}$ annimmt.
(Newtonsches Abkühlungsgesetz; k ist eine von den spezifischen Eigenarten des abzukühlenden Körpers abhängige Konstante.)

a) Ermitteln Sie die Abkühlungsgeschwindigkeit, und zeichnen Sie grafische Darstellungen des Abkühlungsgesetzes für verschiedene (selbst gewählte) Werte von T_1 und T_0!

b) Welchen Einfluß hat bei konstantem T_0 verschiedenes T_1 (Kühlwassertemperatur)?

51. Werten Sie die folgenden Integrale aus!

a) $\int 2^x \, dx$ **c)** $\int \pi \cdot 3^{\pi x} \, dx$ **e)** $\int \frac{1}{e^x} \, dx$

b) $\int e^{ax} \, dx$ **d)** $\int e^{-ax} \, dx$ **f)** $\int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx$

52. Integrieren Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode!

a) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx, \quad (t = e^x)$ **b)** $\int \frac{e^x \, dx}{(e^x + 2)^2}, \quad (t = e^x)$

c) $\int 3^x e^x \, dx$ **d)** $\int x \cdot 7^{x^2} \, dx$ **e)** $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$

53. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale!

a) $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, dx$ **b)** $\int_{-1}^1 \frac{x}{e^{x^2}} \, dx$ **c)** $\int_0^e e^{3x} \, dx$

---

15. Das Bild der Funktion $f(x) = e^x$ begrenzt mit der Geraden $x = 2$, der x-Achse und einer zur y-Achse parallelen Geraden eine Fläche von 12 Flächeneinheiten.
Bestimmen Sie die Parallele!

---

54. Berechnen Sie von den folgenden Funktionen lokale Extremwerte und Intervalle, in denen die Funktion monoton wächst bzw. fällt!
Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen!

a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ **f)** $f(x) = x^2 + 3x - 8$ **l)** $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

b) $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$ **g)** $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 5$ **m)** $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

c) $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}$ **h)** $f(x) = x^4 + 2x^3$ **n)** $f(x) = x + \frac{1}{x}, \; x \neq 0$

d) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ **i)** $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}, \; (x \neq -1)$ **o)** $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}, \; (x \neq 2)$

e) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}}, \; (x > -1)$ **k)** $f(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3}, \; (x \geqq 0)$ **p)** $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, $(|x| \leqq \sqrt{2})$

55. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen lokale Extrema besitzen, lokal konvex bzw. lokal konkav sind und wo sie Wendepunkte aufweisen! Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen!

a) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

c) $f(x) = x\sqrt{x+3}, x \geqq -3$

d) $f(x) = x\sqrt{8 - x^2} \quad |x| \leqq \sqrt{8}$

e) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x$

f) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

g) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}, x \geqq 0$

h) $f(x) = x^2\sqrt{5 + x}, x \geqq -5$

56. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Monotonie, lokale Konvexität bzw. lokale Konkavität!

a) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}, (x > 0)$

b) $f(x) = x + \sin x$

c) $f(x) = \frac{1}{2^{x-a}}$

d) $f(x) = \frac{x}{x - 2}, x \neq 2$

e) $f(x) = x \ln x, (x > 0)$

f) $f(x) = \frac{e^x}{x}, (x \neq 0)$

g) $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$

h) $f(x) = 2e^{x^2-4x}$

57. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf lokale Extrema!

a) $f(x) = x^2(x - 12)^2$

b) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$

d) $f(x) = 2 \cdot \cos\frac{x}{2} + 3 \cdot \cos\frac{x}{3}$

e) $f(x) = x \ln x, (x > 0)$

f) $f(x) = xe^x$

g) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3}$

h) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}, (|x| < 2)$

i) $f(x) = 2 \cdot \sin 2x + \sin 4x$

k) $f(x) = x - \ln(1 + x), (x > -1)$

l) $f(x) = x \ln^2 x, (x > 0)$

m) $f(x) = x^2 e^{-x}$

58. Ermitteln Sie von den folgenden Funktionen jeweils den größten und den kleinsten Funktionswert (globale Extrema)!

a) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{x(10 - x)}, (0 \leqq x \leqq 10)$

c) $f(x) = x^3, (-1 \leqq x \leqq 3)$

d) $f(x) = \sin x + \cos x, \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

---

16. Beweisen Sie, daß für $x > 0$ die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ gilt!

17. Beweisen Sie, daß für $x \neq 0$ die Ungleichung $e^x > 1 + x$ gilt!
(Anleitung: Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = e^x - (1 + x)$ auf Minima!)

18. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen!

a) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ für $x > 0$

b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ für $x \neq 0$

c) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ für $x > 0$

---

59. Ermitteln Sie von den auf Seite 214 oben stehenden Funktionen jeweils die Zahlen x, für die die Funktion definiert ist, Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte! Untersuchen Sie die Funktionen weiterhin auf Monotonie und lokale Konvexität bzw. Konkavität! Zeichnen Sie ein Bild der Funktionen!

d

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$

c) $f(x) = e^{\sin x}$

d) $f(x) = \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

f) $f(x) = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$

h) $f(x) = e^{\cos x}$

i) $f(x) = \cos x - \ln \cos x$

k) $f(x) = 2x - \tan x$

l) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{(x+4)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2}$

n) $f(x) = \ln \sin x$

o) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$

60. Untersuchen Sie, ob die Bilder der gegebenen Funktionen einander schneiden, und ermitteln Sie gegebenenfalls die Schnittwinkel!

a) $f_1(x) = e^2 x$, $f_2(x) = 2e^x$

b) $f_1(x) = xe^x$, $f_2(x) = x^2 e^x$

c) $f_1(x) = xe^{-x}$, $f_2(x) = x^2 e^{-x}$

d) $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \ln x^2$

61. Beweisen Sie, daß jede Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0$ mindestens einen Wendepunkt besitzen muß!

62. An welchen Stellen hat der Anstieg der Sinuskurve lokale Extrema?

63. An welchen Stellen hat die Tangenskurve den kleinsten Anstieg?

64. Ermitteln Sie eine quadratische Funktion, die an der Stelle $x = \dfrac{3}{2}$ ein lokales Maximum hat und deren Bild die y-Achse im Punkt $y = 5$ schneidet!

---

19. An das Bild der Funktion f mit $f(x) = e^x \ln x$ ist an der Stelle, wo f eine Nullstelle hat, die Tangente gelegt. An welcher Stelle schneidet die Tangente die y-Achse?

---

65. Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung!

a) ln 1,01
b) ln 1,02
c) ln 1,05
d) ln 0,99
e) ln 0,98
f) ln 0,95
g) $e^{0,251}$
h) $e^{1,001}$
i) $e^{1,225}$
k) $e^{3,51}$
l) $e^{3,82}$
m) $e^{5,01}$

66. Unter Verwendung der Mittelwertsatzes der Differentialrechnung findet man (für $h \neq 0$): $1 - h < \dfrac{1}{1 + h}$.

a) Leiten Sie diese Beziehung her!

b) Berechnen Sie den Fehler in Abhängigkeit von h, wenn Sie $\dfrac{1}{1 + h}$ durch die Näherung $1 - h$ ersetzen!

c) Berechnen Sie näherungsweise $\left(\text{durch } \dfrac{1}{1 + h} \approx 1 - h\right) \dfrac{1}{1{,}02}, \dfrac{1}{1{,}05}, \dfrac{1}{0{,}99}, \dfrac{1}{0{,}992}$, und geben Sie jeweils den Fehler dabei an!

67. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $x \cdot \lg x = 1$!
(Anleitung: Diskutieren Sie die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \lg x - 1$, und begründen Sie, daß f genau eine Nullstelle hat! Diese Nullstelle berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes!)

68. Der Druck p der atmosphärischen Luft ist eine Funktion der Höhe. Bei der Temperatur von 0 °C gilt

$p(h) = p_0 \cdot e^{-0{,}127\,h}$,

wobei h in Kilometern zu messen ist und p_0 der Druck in Höhe des Meeresspiegels, also für $h = 0$ ist ($p_0 = 1$ atm).

a) Stellen Sie p in Abhängigkeit von h graphisch dar!

b) In welcher Höhe h ist der Druck auf die Hälfte von p_0 zurückgegangen?

c) An einem Ort wird bei 0 °C ein Druck von 0,8 atm gemessen. Wie hoch liegt der Ort?

d) *Berechnen Sie den Druck, der in einer Höhe von 2 km herrscht!

(Hinweis: Benutzen Sie zur näherungsweisen Berechnung der in **b)** bis **d)** geforderten Größen die Tabelle für e^{-x} auf den Seiten 28 und 29 des Tafelwerks! Geben Sie jeweils an, wie groß die Abweichung des von Ihnen berechneten Näherungswertes vom tatsächlichen Wert höchstens sein kann!)

69. Berechnen Sie näherungsweise (bis auf eine Stelle nach dem Komma) eine Nullstelle der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 20!$$

70. Aus der Menge aller Dreiecke mit gegebenem Flächeninhalt und gegebener Grundseite ist das mit dem kleinsten Umfang zu bestimmen.

71. Beweisen Sie, daß von allen Dreiecken mit einer gegebenen Grundseite g und gegebenem Umfang $2s$ das gleichschenklige den größten Flächeninhalt besitzt!
(Hinweis: Der Flächeninhalt eines Dreiecks kann aus den drei Seiten a, b und c nach der Formel von Heron bestimmt werden.)
Formel von Heron: $A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, $(a + b + c = 2s)$.

72. Einem Halbkreis soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt so einbeschrieben werden, daß eine Rechteckseite auf dem den Halbkreis begrenzenden Kreisdurchmesser liegt. In welchem Verhältnis müssen die Rechteckseiten zueinander stehen?

73. Einem Halbkreis ist ein Dreieck von möglichst großem Inhalt so einzubeschreiben, daß eine Seite des Dreiecks auf dem Durchmesser des Halbkreises liegt.

74. Für welchen Stammbruch erhält man die größte Differenz, wenn man seine zweite und dritte Potenz von ihm abzieht?

75. Ein Draht der Länge $l = 1000$ mm soll zu einem Kreissektor mit maximalem Flächeninhalt geformt werden, wie ist der Radius des Kreissektors zu wählen?

76. Um ein Rechteck mit den Seiten $2c$ und $2d$ soll diejenige Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ umbeschrieben werden, deren Flächeninhalt möglichst klein ist, wenn die Ellipsenachsen parallel zu den Rechteckseiten verlaufen.

77. In die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ soll ein symmetrisch zur Ellipsenhauptachse $2a$ gelegenes gleichschenkliges Dreieck so einbeschrieben werden, daß sein Flächeninhalt möglichst groß wird. Wo schneidet die Basis des gleichschenkligen Dreiecks die Hauptachse der Ellipse?

78. Aus einem kreisförmigen Blech soll ein Trichter (Kegel) mit größtem Volumen hergestellt werden. Wie groß ist der Winkel des zu verwendenden Kreissektors?

79. Welcher Punkt der Hyperbel $x^2 - y^2 = 16$ hat vom Punkt $P(0; 6)$ den kleinsten Abstand?

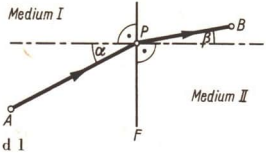
80. Es seien zwei Punkte A und B und eine mit ihnen in einer Ebene liegende Gerade g gegeben, die die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ der beiden gegebenen Punkte nicht schneidet, aber auch nicht zu ihr parallel ist. Es ist die kürzeste Verbindung von A über einen Punkt P der Geraden nach B zu finden.

81. Es seien zwei Punkte A und B und eine mit ihnen in einer Ebene liegende Gerade g gegeben, die die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ der beiden gegebenen Punkte schneidet. Unter allen Punkten P auf g ist derjenige zu bestimmen, über den man am schnellsten von A nach B gelangt. Dabei soll der variable Punkt P ein Punkt auf g und die Geschwindigkeit beim Durchlaufen der Teilstrecke $\overline{AP}$ gleich u, die Geschwindigkeit beim Durchlaufen der Teilstrecke $\overline{PB}$ aber gleich v sein.

d

82. Von einem Punkt A ausgehend, treffe ein Lichtstrahl auf den Spiegel S und werde dort nach B reflektiert. Das Licht schlägt dabei stets denjenigen Weg ein, auf dem es in kürzester Zeit von A über S nach B gelangt. Weisen Sie die Beziehung nach, die zwischen dem Einfallswinkel und dem Reflexionswinkel am Spiegel besteht!

83. Von einem Punkt A im Medium I ausgehend, verläuft ein Lichtstrahl zum Punkt B im Medium II. Der Lichtstrahl durchstößt die ebene Grenzfläche F zwischen beiden Medien im Punkt P. Die Punkte A, B und P liegen in einer Ebene. Die Geschwindigkeit des Lichts im Medium I sei u, die im Medium II sei v.
Berechnen Sie die Lage des Punktes P auf F und die Größe der Winkel α und β (↗ Bild d 1) unter der Voraussetzung, daß das Licht stets den Weg einschlägt, auf dem es in kürzester Zeit von A nach B gelangt!



d 1

84. Vergleichen Sie die mathematische Behandlung der Aufgaben 80 bis 83 untereinander!

85. Zwei Punkte A und B einer geradlinig verlaufenden Straße seien $a = 650$ m voneinander entfernt. Ein Neubau C habe den Abstand $\overline{BC} = b = 180$ m von der Straße. Der Neubau soll Gasanschluß bekommen, beginnend im Punkt A. Die Baukosten mögen längs der Straße 72 M je Meter, seitlich der Straße jedoch 85 M je Meter betragen. An welcher Stelle muß beim Bau von der Straße geradlinig abgezweigt werden, damit die Baukosten möglichst gering bleiben?

86. Beim Kanalbau wählt man meist Querschnitte, die die Gestalt gleichschenkliger Trapeze haben. Dabei sind sowohl der Flächeninhalt des Kanalquerschnittes als auch die Kanaltiefe durch den Verwendungszweck (Schiffsgrößen und -typen) festgelegt. Da das Isolieren der vom Wasser benetzten Flächen besonders kostspielig ist, versucht man den Bau so zu gestalten, daß die Seitenflächen einen möglichst günstigen Winkel mit der Kanalsohle bilden. Wie groß ist dieser Winkel?

87. Aus drei Holzbrettern von je 25 cm Breite soll eine Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt und möglichst großem Fassungsvermögen gebaut werden. Wie ist die Rinne zu gestalten?

88. Aus einem 90 cm breiten rechteckigen Blech soll eine Rinne von trapezförmigem Querschnitt hergestellt werden. Dazu biegt man an den Längsseiten gleichbreite Ränder um 60° hoch. Wie breit müssen die Randstreifen gemacht werden, wenn der Querschnitt der Rinne möglichst groß werden soll?

89. Zwischen dem Brennpunkt und dem Scheitelpunkt der Parabel $y^2 = 2px$ sei eine zur Achse senkrechte Sehne gezogen.
Welchen Abstand vom Scheitel hat diese, wenn das durch ihre Endpunkte und den Brennpunkt bestimmte Dreieck eine größte Fläche haben soll?

---

20. Auf einer geneigten Ebene von der Länge l soll eine Kugel hinabrollen und sich dann waagerecht weiterbewegen. Welchen Neigungswinkel muß die geneigte Ebene haben, damit die Kugel möglichst weit rollt, d. h., damit die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Waagerechten am Ende der geneigten Ebene am größten ist? (Die Reibung soll bei der Rechnung unberücksichtigt bleiben.)

21. Eine Last Q soll auf einer horizontalen Straße mit dem Reibungskoeffizienten $\mu = 0{,}07$ fortbewegt werden. Welchen Winkel α muß die bewegende Kraft P mit der Horizontalen bilden, damit sie am wenigsten durch die Reibung verliert?

---

90. Von den Punkten A und B mögen ein Frachtschiff und eine Yacht gleichzeitig in zueinander senkrechten Richtungen abfahren. Ihre Geschwindigkeiten sind $v_F = 24\ \mathrm{km\ h^{-1}}$, $v_Y = 40\ \mathrm{km\ h^{-1}}$.
Nach welcher Zeit ist der Abstand zwischen ihnen am geringsten, wenn $\overline{AB} = 145$ km beträgt? (Bild d 2).

91. Welche Form müßte ein Trichter haben, wenn er beim Filtrieren optimale Wirkung, d. h. bei gegebenem Volumen die größtmögliche Filterfläche, haben sollte?

92. Unter welchem Winkel α muß ein Geschoß abgefeuert werden, damit die größtmögliche Weite erreicht wird? (Bild d 3). (Der Luftwiderstand soll unberücksichtigt bleiben.)

d 2

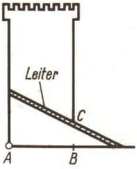
d 3

---

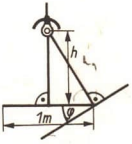
22. Wie hoch muß eine Tür $\overline{BC}$ eines Turmes mit der Breite $\overline{AB}$ sein, damit eine Leiter von der Länge l $(l > \overline{AB})$ in den Turm hineingebracht werden kann? (Bild d 4).

---

93. Über einem runden Tisch (Durchmesser 1 m) soll eine Lampe angebracht werden. Welchen Abstand muß sie von der Tischmitte haben, damit am Tischrand noch eine maximale Beleuchtung erzielt wird? (Die Beleuchtungsstärke ist dem Kosinus des Winkels φ (Bild d 5) direkt und dem Quadrat des Abstandes von der Lichtquelle umgekehrt proportional.)



d 4



d 5

94. Beim Kugelstoßen gilt für die Stoßweite

$$w = w(\alpha) = \frac{c^2 \cdot \cos\alpha}{g}\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{c^2}}\right)$$

Für welchen Winkel α ist die Wurfweite am größten, wenn die Höhe h und die Abstoßgeschwindigkeit c bei einem Sportler als konstant angesehen werden?

95. Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Flächen, die von dem Bild der Funktion $f(x)$, der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse an den Stellen x_1 und x_2 begrenzt werden!

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $(x_1 = 0;\ x_2 = 1)$

b) $f(x) = \sin x$, $\left(x_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = \pi\right)$

c) $f(x) = e^x$, $(x_1 = 0;\ x_2 = 2)$

d) $f(x) = e^x - 1$, $(x_1 = 0;\ x_2 = 1)$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $(x_1 = 1;\ x_2 = e)$

f) $f(x) = \cos x$, $\left(x_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = \pi\right)$

g) $f(x) = e^x$, $(x_1 = 0;\ x_2 = -100)$

h) $f(x) = \sin x + \cos x$, $\left(x_1 = \frac{\pi}{4};\ x_2 = \frac{\pi}{2}\right)$

96. Berechnen Sie den Inhalt folgender Flächenstücke!

a) Die Fläche, die von den Bildern der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

b) Die Fläche, die von den Bildern der Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = \sqrt[3]{x}$ im ersten Quadranten eingeschlossen wird.

c) Die Fläche, die von den Bildern der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ eingeschlossen wird.

d

97. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Parabel $f(x) = 4x - x^2$ und der x-Achse eingeschlossen wird!

98. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der y-Achse und dem Bild der Funktion $f(x) = e^x - 4$ eingeschlossen wird!

99. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Normalparabel $y = x^2$ und einer Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $P(0; a)$ mit $a > 0$ begrenzt wird!

---

23. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Bilder der Funktionen $y = e^x$, $y = e^{-x}$ und der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $P\,(1; 0)$ begrenzt wird!

---

100. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Tangenskurve, der x-Achse und der Geraden $x = \frac{\pi}{3}$ begrenzt wird!

$$\left(\int \tan x \, dx = \ln|\sin x| + c, \; \frac{2k-1}{2}\pi < x < \frac{2k+1}{2}\pi\right)$$

101. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Tangenskurve, der y-Achse und der Geraden $y = 1$ begrenzt wird!

102. Wie groß ist der Flächeninhalt des Parabelsegmentes, das von der gemeinsamen Sehne der Parabel $y^2 = \frac{4}{3}x$ und der Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1$ begrenzt wird!

103. Das Bild der Funktion $f(x) = x^2$, die x-Achse und die Parallelen zur y-Achse durch die Punkte $P_1(x_1; 0)$ und $P_2(x_2; 0)$ begrenzen eine Fläche.

a) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche mit Hilfe der Integralrechnung!

b) Mit Hilfe der Simpsonschen Regel

$$F = \frac{x_2 - x_1}{6}\,[f(x_1) + f(x_2) + 4f(x_m)]$$

erhalten Sie den gleichen Flächeninhalt $\left(x_m = \frac{x_2 + x_1}{2}\right)$. Beweisen Sie diese Behauptung!

104. Berechnen Sie den Inhalt der von den beiden Parabeln $y^2 = 8x$ und $x^2 = 8y$ begrenzten Fläche!

---

24. An die kubische Parabel $y = x^3 - ax$ wird an der Stelle $x = -1$ die Tangente gelegt, welche die Kurve in einem weiteren Punkt schneidet und mit ihr eine Fläche F einschließt. Berechnen Sie den Inhalt von F, und zeigen Sie, daß er von a unabhängig ist!

---

105. Bestätigen Sie die Flächenformel des Trapezes mit Hilfe der Integralrechnung!

106. Berechnen Sie das Volumen eines Kugelsegmentes, indem Sie den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt der Kugel legen! (Vergleichen Sie das erhaltene Ergebnis mit dem aus Beispiel D 35, Seite 173)

107. Lassen Sie den durch $y = x^2$ für $x \geqq 0$ gegebenen Teil der Parabel einmal um die y-Achse und zum anderen um die x-Achse rotieren! Es entstehen zwei verschiedene Rotationsparaboloide.

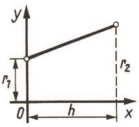
a) Berechnen Sie ihre Volumina, wenn beide die gleiche Höhe h haben! In welchem Verhältnis stehen diese Volumina?

b) Welches Verhältnis der Volumina erhalten Sie, wenn das rotierende Parabelstück in beiden Fällen im gleichen Punkt endet?

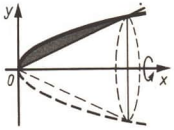
108. Die Gerade $y = mx$ rotiere **a)** um die x-Achse und **b)** um die y-Achse. Vergleichen Sie die Volumina der beiden entstehenden Kegel, wenn Sie das Geradenstück von $x = 0$ bis $x = 1$ rotieren lassen!

109. Berechnen Sie das Volumen des Kegelstumpfes, der durch Rotation eines Geradenstückes um die x-Achse entsteht (Bild d 6)!

110. Werden von Kurven durch Geraden Segmente abgeschnitten und rotieren diese um eine Achse, so entstehen Rotationskörper, die man sich aus zwei Rotationskörpern subtraktiv zusammengesetzt denken kann (Bild d 7).



d 6



d 7

Berechnen Sie die Volumina der Rotationskörper, wenn gegeben ist:

	Umrandungskurve	schneidende Gerade	Rotationsachse
a)	$y^2 = 4x$	$y = x$	x-Achse
b)	$x^2 + y^2 = 25$	$x + y = 5$	y-Achse
c)	$x^2 + y^2 = r^2$	$y = \frac{r}{2}$	x-Achse
d)	$y = \frac{1}{2}x^2$	$4x - 2y - 3 = 0$	beide Achsen
e)	$y = \frac{1}{2}x^3$	$y = 2x$	x-Achse
f)	$y = x^3 - 8$	$y = 4x - 8$	x-Achse

111. Ein Porzellantiegel habe die äußere Höhe $H = 10$ cm und die Dichte $\varrho_p = 2{,}5\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. Seine äußere und seine innere Begrenzung mögen durch Drehung zweier Parabeln entstehen, die durch die Gleichungen $y = \frac{1}{10}x^2$ und $y = \frac{1}{10}(x^2 + 10)$ (x, y in Zentimeter gemessen) gegeben sind, um die y-Achse. Er sei bis zur Höhe $h = 2$ cm (gemessen vom äußeren Parabelscheitel aus) mit Quecksilber ($\varrho_Q = 13{,}6\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$) gefüllt.

a) Welche Masse besitzt der Tiegel samt Füllung?

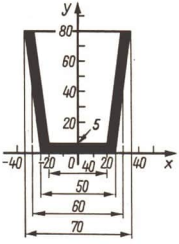
b) Wie tief taucht er beim Schwimmen im Wasser ein? (↗ Beispiel D 36, Seite 174).

112. Ein Graphittiegel für chemische Versuche habe den im Bild d 8 schematisch dargestellten Achsenschnitt (Maße in Millimeter). Die seitlichen Begrenzungen dieses Achsenschnittes sind in Wirklichkeit Parabelbögen. Die Gleichungen dieser Parabeln lauten bei der angegebenen Lage des Koordinatensystems

$$x^2 = \frac{15}{2}y + 625 \quad \text{bzw.}$$

$$x^2 = \frac{20}{3}y + \frac{1100}{3}.$$

Der Tiegel sei bis 2 cm unter dem Rand mit flüssigem Zinn gefüllt ($\varrho_{\text{Graphit}} = 2{,}2\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, $\varrho_{\text{Zinn}} = 7{,}0\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$). Ermitteln Sie die Masse des Tiegels mit Inhalt!



d 8

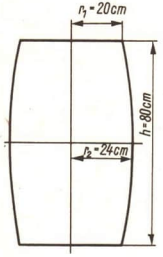
113. Ein Faß entstehe durch Rotation der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die große Achse. Der größte Durchmesser betrage 48 cm, der Grundkreisdurchmesser oben und unten je 40 cm. Die Höhe betrage 80 cm.

Berechnen Sie das Volumen des Fasses (in Liter), wenn sich die angegebenen Maße auf das Innere des Fasses beziehen!

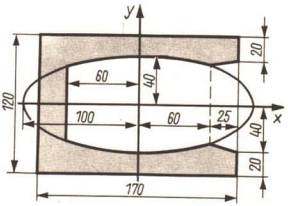
d

25. Ein Faß habe die im Bild d 9 angegebenen Abmessungen.
Die gekrümmten Mantellinien seien Parabeln.
a) Bestimmen Sie das Volumen des Fasses!
b) Ermitteln Sie den prozentualen Fehler, wenn zur Berechnung des Volumens das Faß durch einen geraden Kreiszylinder mit dem Radius $r_m = \frac{r_1 + 2r_2}{3}$ angenähert wird!

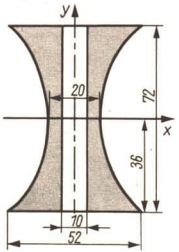
26. Man beweise, daß das Volumen eines Rotationsparaboloides, das mit einem gegebenen geraden Kreiszylinder Grundfläche und Höhe gemeinsam hat, gleich der Hälfte des Zylindervolumens ist.



d 9



d 10



d 11

114. Eine Gipsgußform sei ein Zylinder mit einem Hohlraum, der aus einem abgeschnittenen Rotationsellipsoid und einem Kegelstumpf (Bild d 10) zusammengesetzt ist. Berechnen Sie das Volumen des Gipskörpers!

115. Die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 25$ und die Parabel $y^2 = \frac{4}{3}x$ mögen um die x-Achse rotieren. Berechnen Sie das Volumen des parabolisch ausgehöhlten Ellipsoides!

116. Eine Seiltrommel entsteht durch Rotation einer Hyperbel um die y-Achse. Sie bestehe aus Eisen ($\gamma = 7{,}3\ \mathrm{p \cdot cm^{-3}}$).
Berechnen Sie das Gewicht der Trommel!
Berücksichtigen Sie dabei die für die Achse vorgesehene Bohrung (Zylinder) (Bild d 11)!

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

117. Zeigen Sie, daß das Bild der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ an jeder Stelle lokal konkav ist!

118. Gegeben seien die Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $f_2(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

a) Diskutieren Sie beide Funktionen!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von den Bildern der Funktionen f_1, f_2, der y-Achse und der Parallelen zur y-Achse mit der Gleichung $x = 1$ begrenzt wird!
c) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn das unter **b)** angegebene Flächenstück um die x-Achse rotiert!

119. Der Scheitel einer in Richtung der positiven x-Achse geöffneten Parabel falle mit dem Mittelpunkt der Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, ihr Brennpunkt mit einem Brennpunkt der Ellipse zusammen.

a) Wie lautet die Gleichung der Parabel?

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Kurven!

c) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Kurven im Schnittpunkt?

d) Berechnen Sie die Schnittwinkel der Kurven!

e) Bestimmen Sie das Volumen des durch Rotation um die x-Achse entstehenden parabolisch ausgehöhlten Ellipsoids!

120. Die Flächen, die von den Bildern der Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n > 0$, ganzzahlig, der x-Achse und einer Parallelen zur y-Achse umrandet werden, mögen um die x-Achse rotieren.

a) Vergleichen Sie die Volumina der entstehenden Rotationskörper bei gleicher Höhe h!

b) Was erhalten Sie im Falle $h = 1$?

c) Welchem Grenzwert strebt die Folge der Volumina für $n \to \infty$ zu?

121. Welche Fläche schließt die kubische Parabel $y = ax - x^3$ in der Halbebene $x > 0$ mit der in ihrem Wendepunkt gezeichneten Kurvennormalen (Senkrechten zur Tangente in diesem Punkt) ein? Welcher Bereich ist dabei für die Wahl der Konstanten a zulässig? Für welchen Wert a wird die Fläche ein Extremwert, welcher Art und wie groß ist dieser?

122. Wenn eine Schwungscheibe durch Flüssigkeitsreibung abgebremst wird, ändert sich die Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit t nach dem Gesetz $\omega = \omega_0 \cdot e^{-f \cdot t}$, wobei ω_0 die Winkelgeschwindigkeit vor Einsetzen des Bremsvorgangs und f eine Konstante ist, die u. a. von der Viskosität der Flüssigkeit und dem Trägheitsmoment der Schwungscheibe abhängt.

a) Handelt es sich um eine gleichmäßig verzögerte Bewegung?

b) Nach welcher Zeit beträgt die Geschwindigkeit nur noch 10% von ω_0?

c) Entwerfen Sie Diagramme für das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz und für das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz!

123. Ein Stromlinienkörper entsteht bei der Rotation der Kurve $y = 0{,}1x\sqrt{12 - x}$ um die x-Achse in dem Intervall $\langle 0; 12 \rangle$.

a) Zeichnen Sie einen Achsenschnitt des Stromlinienkörpers!

b) Berechnen Sie den Rauminhalt des Körpers!

c) Welchen Winkel bilden die Kurventangenten in den Punkten $P_1(0; 0)$ und $P_2(12; 0)$ mit der positiven Richtung der x-Achse?

124. Aus einem Holzstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional der Breite b und dem Quadrat der Höhe h des Balkens, also $T = cbh^2$, wobei c eine Materialkonstante bedeutet.
Berechnen Sie die Abmessungen des Balkens, wenn der Holzstamm den Durchmesser d besitzt!

d

Register

Abstand zweier Punkte **A** Seite 9
Achse **A** Seite 10
  Hauptachsen **B** Seite 53, 55
  Koordinatenachsen **A** Seite 10
  Nebenachsen **B** Seite 53, 55
  Parabelachse **B** Seite 63
Additionstheoreme **C** Seite 96
Asymptote **B** Seite 74
Äußere Funktion **C** Seite 90

Basis **A** Seite 6 (► 7)
Bernoullische Ungleichung **C** Seite 99
Brennpunkt **B** Seite 57, 62, 79 (► 17)

Dandelinsche Kugeln **B** Seite 57
Distributivität
  (skalare Multiplik.) **A** Seite 21
  (vektorielles Produkt) **A** Seite 41

Ebene
  orientierte – **A** Seite 8
  Parametergleichung der – **A** Seite 10 f
Ellipse
  Definition der – **B** Seite 53 (► 2)
  Mittelpunktsgleichung der – **B** Seite 64 f
  Ortsdefinition der – **B** Seite 56 (► 8), 79 (► 17)
Ellipse und Gerade **B** Seite 71 ff
Eulersche Zahl *e* **C** Seite 98 (► 8)
Exponentialfunktion **D** Seite 146
Extremwertaufgaben **D** Seite 149 ff, 159
Exzentrizität
  lineare – **B** Seite 61
  numerische – **B** Seite 79

Flächeninhalt **D** Seite 163 ff
Funktion
  äußere – **C** Seite 90
  beschränkte – **C** Seite 91
  Exponentialfunktionen **D** Seite 146
  gerade – **C** Seite 92
  Grad einer – **C** Seite 89
  goniometrische – **C** Seite 112 ff
  identische – **C** Seite 86
  innere – **C** Seite 90
  inverse – **D** Seite 127 f
  konstante – **C** Seite 86
  Logarithmusfunktionen **C** Seite 97 ff, **D** Seite 144 ff
  Potenzfunktionen **C** Seite 91, **D** Seite 130 f
  rationale – **C** Seite 84 ff (► 1)
  reelle – **C** Seite 84 ff
  Umkehrfunktion **C** Seite 88
  Winkelfunktionen **C** Seite 94 ff, **D** Seite 140 ff
  Wurzelfunktionen **C** Seite 93

Gärtnerkonstruktion **B** Seite 59
Gerade Funktionen **C** Seite 92
Geraden
  Orthogonale – **A** Seite 27
  Parametergleichung der – **A** Seite 9
  Projektion der – **A** Seite 16 f (► 9)
  Schnittwinkel zweier – **A** Seite 25
Goniometrische Gleichungen **C** Seite 112 ff
Grad einer Funktion **C** Seite 89
Grenzwerte **C** Seite 122 ff

Hyperbel
  gleichseitige – **B** Seite 61
  Definition der – **B** Seite 55 (► 4), **C** Seite 93
  Mittelpunktsgleichung der – **B** Seite 65 f
  Ortsdefinition der – **B** Seite 60 (► 10), 79 (► 17)
Hyperbel und Gerade **B** Seite 74

Identische Funktion **C** Seite 86
Innere Funktion **C** Seite 90
Inverse Funktionen **D** Seite 127 f

Kegel **B** Seite 51
Kegelschnitt **B** Seite 55 (► 5)
  entarteter **B** Seite 55
Koeffizienten **A** Seite 5 (► 3), **C** Seite 84
Kommutativität
  skalare Multiplik. **A** Seite 20 (► 12)
Komponenten **A** Seite 6 (► 7)
Konstante Funktion **C** Seite 86
Koordinaten **A** Seite 6 (► 7), 47 (► 25)
  -systeme **A** Seite 6 f
Kreis **A** Seite 28, **D** Seite 167
Kreis und Gerade **A** Seite 31 ff
Kugel **A** Seite 28 ff
Kurvendiskussion **D** Seite 149 ff

Leitkurve **B** Seite 51
Leitlinie **B** Seite 62, 79 (► 17)
Lineare Exzentrizität **B** Seite 61
Linearkombination **A** Seite 5 (► 3)
Linear unabhängig **A** Seite 6 (► 6), 47 (► 24)
Logarithmusfunktion **C** Seite 97 ff, **D** Seite 144 ff

Monotonie **C** Seite 92

Natürliche Logarithmen **C** Seite 101
Nichtorientierter Winkel **A** Seite 24
Normale **B** Seite 75
Normierte Basis **A** Seite 7
Normierte Darstellung einer Funktion **C** Seite 84
Nullstelle **C** Seite 92, 120
Nullvektor **A** Seite 5, 46
Numerische Exzentrizität **B** Seite 79

R

Orientierte Ebene **A** Seite 8
Orientierter Winkel **A** Seite 4
Orthogonale Basis **A** Seite 7
Ortsdefinition
– der Ellipse **B** Seite 56 (► 8)
– der Hyperbel **B** Seite 60 (► 10)
– der Parabel **B** Seite 62 (► 12)
–, gemeinsame **B** Seite 79 (► 17)
Ortsvektor **A** Seite 7

Parabel
–, Definition **B** Seite 54 (► 3), **C** Seite 93
–, Ortsdefiniton **B** Seite 62 (► 12), 79 (► 17)
–, Scheitelgleichung **B** Seite 66 f
Parabel und Gerade **B** Seite 74 f
Parameter der Parabel **B** Seite 63, 81
Parametergleichung
– der Geraden **A** Seite 9
– der Ebene **A** Seite 10 f
Periode **C** Seite 94
Pole **C** Seite 92
Potenzfunktionen **C** Seite 91, **D** Seite 130 f
Projektion
– einer Geraden **A** Seite 16 f (► 9)
– eines Punktes **A** Seite 16 (► 8)
– eines Vektors **A** Seite 19

Rationale Funktionen **C** Seite 84 ff (► 1)
Rationale Operationen **C** Seite 86
Rechtssystem **A** Seite 8, 39
Reelle Funktionen **C** Seite 84
Richtungsvektor **A** Seite 9

Scheitel
Ellipsen- **B** Seite 53
Hyperbel- **B** Seite 55
Parabel- **B** Seite 54
Schnittpunkt zweier Geraden **A** Seite 13
Schnittwinkel zweier Geraden **A** Seite 25
Schranke **C** Seite 91

Skalarprodukt
Anwendung **A** Seite 24, 34 ff, 37 f
Definition **A** Seite 17 ff (► 10)
Distributivität **A** Seite 21 (► 14)
Kommutativität **A** Seite 20 (► 12)
Koordinatendarstellung **A** Seite 23 f
Spurpunkt einer Geraden **A** Seite 16
Substitution **D** Seite 137
Superposition **C** Seite 87

Tangente
– an eine Ellipse **B** Seite 71
– an eine Hyperbel **B** Seite 75
– an einen Kreis **A** Seite 33
– an eine Parabel **B** Seite 75

Überlagerung **C** Seite 87
Umkehrfunktion **C** Seite 88 (► 4)
Unendlichkeitsstelle **C** Seite 92, 120
Ungerade Funktion **C** Seite 92

Vektorprodukt
Anwendung **A** Seite 43
Definition **A** Seite 38 (► 15)
Eigenschaften **A** Seite 41
Komponentendarstellung **A** Seite 42
Vektorraum **A** Seite 4 (► 2)
Verkettung **C** Seite 89 f, **D** Seite 132 ff
Verschiebung **A** Seite 4 (► 1)
Volumen **D** Seite 168 ff

Wachstum
windschief **A** Seite 14
Winkel **A** Seite 4
–, nichtorientierte **A** Seite 24
–, orientierte **A** Seite 4
– im Raum **A** Seite 7
–funktionen **C** Seite 94 ff, **D** Seite 140 ff
Wurzelfunktionen **C** Seite 93
Wurzelgleichungen **C** Seite 105 ff

R

Quellennachweis

Kapitel A (Seite 3): Volksarmee/Klöppel
Kapitel B (Seite 49): Reproduktion aus: Statistik und Physik der Kometen. Verlag J. A. Barth, Leipzig 1954
Kapitel C (Seite 83): Foto-Brüggemann, Leipzig
Kapitel D (Seite 125): Zentralbild/Krueger
Rückseite des Bezuges: Zentralbild/Großmann

A a Vektorrechnung und analytische Geometrie

B b Kegelschnitte

C c Nichtrationale Funktionen

D d Differential- und Integralrechnung und Anwendungen

R Register

A Vektorrechnung; Analytische Geometrie	
Verschiebungen	A 1
Geradengleichungen im Raum	A 3
Ebenengleichungen im Raum	A 3
Skalarprodukt	A 8
Vektorprodukt	A 22

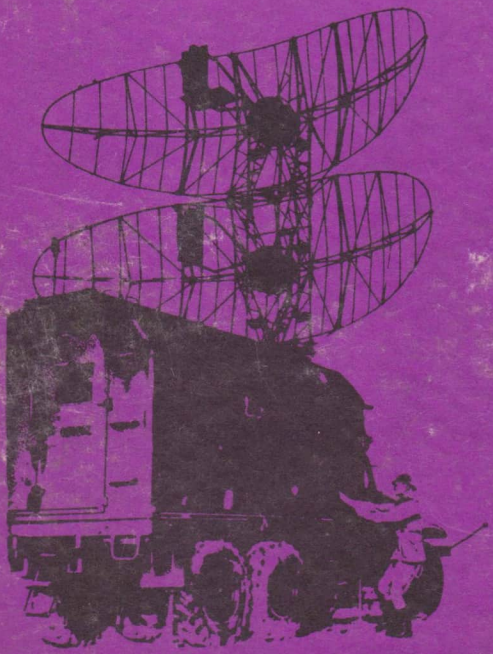
B Kegelschnitte			
KONSTRUKTION DER KEGELSCHNITTE			
Ellipse	B 5	Hyperbel	B 6
Parabel			B 7
GLEICHUNGEN DER KEGELSCHNITTE			
Ellipse	B 8, 11	Hyperbel	B 9, 11
Parabel	B 10, 11		

ANWENDUNGEN	
Skalarprodukt: Geometrische Sätze	A 11, 13, 19
Physikalische Probleme	A 21
Vektorprodukt: Geometrische Deutung	A 23
Physikalische Probleme	A 25
Exponentialfunktionen (Wachstum)	C 11
Extremwertaufgaben	D 17
Flächeninhalt; Volumen	D 20; 23

C Funktionen	
Potenz-, Wurzelfunktionen	C 5
Winkelfunktionen	C 6
Exponentialfunktionen	C 8
Logarithmusfunktionen	C 8
Wurzelgleichungen	C 12
Goniometrische Gleichungen	C 16

D Differentialrechnung; Integralrechnung	
Potenzfunktionen	D 4
Winkelfunktionen	D 9
Exponentialfunktionen	D 12
Logarithmusfunktionen	D 11
Kurvendiskussionen	D 13
Bestimmtes Integral	D 20

$$\mathfrak{D}_F = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k}$$



00 12 53 – 1 4,–