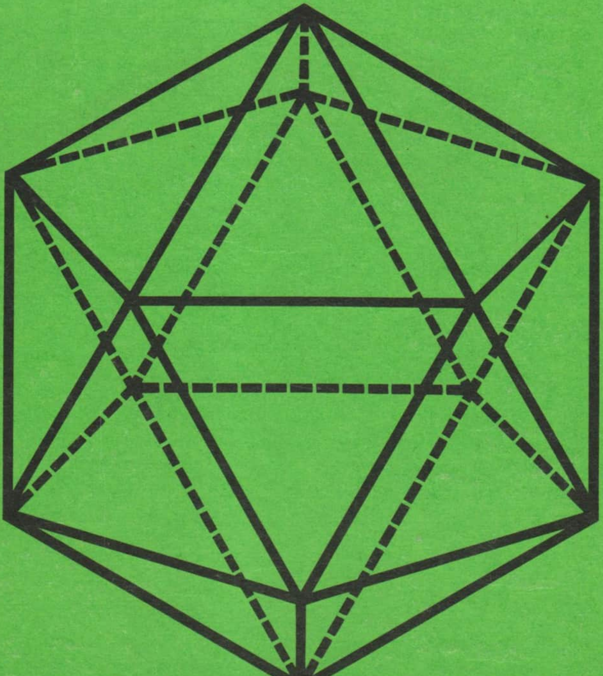
Mathematik 8



Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

Das Buch ist mit einem farbigen *Randregister* ausgerüstet worden, um das schnelle Auffinden der einzelnen Stoffgebiete, besonders im Zusammenhang mit der Benutzung des Registers am Schluß des Buches, zu unterstützen.
Auf der nebenstehenden Seite ist eine Übersicht über die Stoffgebiete mit diesen Randmarken abgedruckt worden.
Das Buch untergliedert sich in den *Lehrteil* A bis D und in den *Aufgabenteil* a bis d.
Der Teil a enthält die Aufgaben zum Stoffgebiet A, der Teil b die Aufgaben zum Stoffgebiet B usw. Jedes Stoffgebiet beginnt mit einer *Inhaltsübersicht*.
Durch eine fortlaufende Numerierung wird jedes Stoffgebiet in *Lerneinheiten* unterteilt.
Innerhalb der Lerneinheiten werden *Beispiele*, *Aufträge* und *Merksätze* durch folgende Zeichen besonders hervorgehoben:

Beispiele ■
Aufträge ●
Merksätze ▶ SATZ bzw. ▶ DEFINITION

(Beachte stets den Unterschied zwischen einem Satz und einer Definition)
Der *Aufgabenteil* enthält zu jedem Stoffgebiet zusätzliche Aufgaben zur Übung und Wiederholung, die schwarz numeriert sind.
Aufgaben mit kursiver Numerierung stellen erhöhte Anforderungen an den Rechner.

Arbeiten mit Variablen A a

Ähnlichkeit B b

Lineare Funktionen C c

Flächen- und Rauminhaltsberechnung D d

Register R

Mathematik

Lehrbuch für Klasse 8

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1972

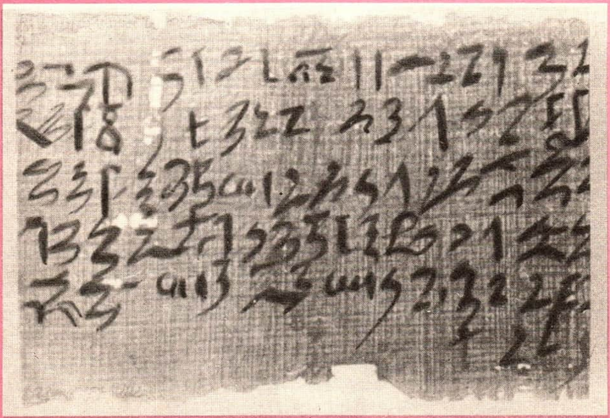
Autoren:
Dr. Rudolf Bittner – Kapitel A, D
Dr. Günter Lorenz, Dr. Günter Pietzsch – Kapitel B, b
Dr. Dieter Ilse, Dipl.-Math. Werner Tietz – Kapitel C
Herbert Vockenberg – Kapitel a
Dr. Günter Fanghänel – Kapitel c, d

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt.

2. Auflage
Ausgabe 1971
Lizenz Nr. 203·1000/71 (UN)
ES 11 G
Redaktion: Karlheinz Martin
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einband und Vorsatz: Manfred Behrendt
Typografie: Atelier VWV · Wolfgang Lorenz
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden (III/9/1)
Gesetzt aus der Bodoni
Redaktionsschluß: 5. Januar 1971
Bestell-Nr. 00 08 06-2 – Preis: 1,60

A Arbeiten mit Variablen

Betrachtet man ausländische Mathematikbücher, so findet man meist auch Variablen, die charakteristisch für die Mathematik sind, und erkennt so, daß es sich um Mathematik handelt, selbst wenn man kein Wort dieser fremden Sprache versteht. Um so erstaunlicher ist es, daß erst seit dem 17. Jahrhundert in der Mathematik in größerem Umfang spezielle Symbole verwendet wurden. Vor der Herausarbeitung einer mathematischen Formelsprache mußten die entsprechenden Rechenoperationen mit Hilfe von Wörtern der Umgangssprache ausgedrückt werden. Das Bild zeigt die Beschreibung einer Aufgabe, die auf eine lineare Gleichung mit einer Variablen führt, auf einem ägyptischen Papyrus aus der Zeit um 1700 v. u. Z.



Grundlagen für das Arbeiten mit Variablen

A

1 Beispiele für das Arbeiten mit Variablen

Wir wissen bereits:

- Durch Angabe des **Variablen-Grundbereichs** wird festgelegt, welche Zahlen in der jeweiligen Aufgabe für eine **Variable** eingesetzt werden dürfen.

1 In der folgenden Tabelle soll der Variablen-Grundbereich für a und b die Menge der rationalen Zahlen sein. In den Zeilen 2 bis 5 wurden einige rationale Zahlen ausgewählt.

a	b	$c = a + b$	$d = a \cdot b$	$e = a : b$	$f = 2c + d$	$g = 2c + d - 4e$
15	5	20	75	3		
15	6		90	3,5		
15	−9	6		$-\frac{5}{3}$		
−8			72	$\frac{8}{9}$		

1 *Wähle noch ein weiteres Zahlenpaar, und ermittle die Werte für alle freien Felder!*

2 Wir berechnen den Flächeninhalt A einer beliebigen Dreiecksfläche, indem wir in die Formel

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$$

für g die Länge einer Seite und für h_g die Länge der zugehörigen Höhe einsetzen. Die Variablen A, g, h_g stehen für viele Werte, die einander zugeordnet werden können. Zum Variablen-Grundbereich gehören im Beispiel A 2 alle Größen, deren Maßzahlen beliebige positive rationale oder positive irrationale Zahlen sind.

3 In der Geometrie werden Variablen auch in anderer Weise verwendet. Punkte werden mit großen lateinischen Buchstaben, Geraden mit kleinen lateinischen Buchstaben und Ebenen mit griechischen Buchstaben bezeichnet.
Spricht man von einem Dreieck ABC in der Ebene ε, so ist der Variablen-Grundbereich für jeden einzelnen Eckpunkt die Menge der Punkte dieser Ebene ε, wobei A, B und C nicht zusammenfallen und nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen dürfen.
Die großen bzw. kleinen Buchstaben treten jedoch auch in anderer Bedeutung auf, denn man hat ja nur eine beschränkte Anzahl von Buchstaben zur Verfügung. So werden z. B. Figuren wie Dreiecke oder Kreise, also Punktmengen, mit großen Buchstaben bezeichnet. Winkel bezeichnet man mitunter mit kleinen griechischen Buchstaben.

Manchmal verwendet man einen Buchstaben für die Bezeichnung einer ganz bestimmten Zahl, z. B. den Buchstaben π für den Proportionalitätsfaktor in der Formel für den Umfang des Kreises: $u = \pi \cdot d$.

4 Beispiele für Variablen-Grundbereiche:

a) Die Menge aller **natürlichen Zahlen** N.
b) Die Menge aller **rationalen Zahlen** R.
c) Die Menge aller **gebrochenen Zahlen** R^*.
d) Die Menge aller **ganzen Zahlen** G.
e) Die Menge aller **Primzahlen**.
f) Die Menge aller natürlichen Zahlen x mit $x > 10$ und $x < 100$, also die natürlichen Zahlen 11, 12, ..., 98, 99.
g) Die Menge aller **Punkte** einer Ebene.
h) Die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt M den Abstand r haben.
i) Die Menge aller Geraden einer Ebene.

A

2 Terme, Gleichungen, Ungleichungen

Wir wissen bereits:

- **Terme** sind Zeichen bzw. gewisse Zusammensetzungen von Zeichen.

Beispiele: „3"; „a"; „$\frac{7}{8}$"; „2,7"; „x"; „$\frac{a+b}{2}$"; „$3(x-4)$"; „$\sqrt{3a}$"; „y^2".

- Für die Variablen in Termen können Elemente (z. B. Zahlen, Größen) aus dem festgelegten Variablen-Grundbereich eingesetzt werden. Dann kann der **Wert des Terms** berechnet werden.

2 *Setze in die nachstehenden Terme die angegebenen Zahlen für die Variablen ein, und ermittle jeweils den Wert des Terms!*

a) $2a - b + c$	(1) $a = 3;\ b = 0;\ c = 5$ (2) $a = -3;\ b = 1;\ c = 0{,}5$	(3) $a = \frac{2}{3};\ b = \frac{5}{9};\ c = \frac{1}{2}$
b) $\frac{2a - 1{,}5b}{2}$	(1) $a = 3;\ b = -5$ (2) $a = -3;\ b = 5$	(3) $a = 0;\ b = 0$ (4) $a = 0{,}5;\ b = -0{,}5$
c) $-5y(x-6)$	(1) $x = 3;\ y = -1$ (2) $x = -3;\ y = 1$	(3) $x = 3;\ y = 1$ (4) $x = -3;\ y = -1$
d) $\sqrt{4x^2 - y}$	(1) $x = 2;\ y = 0$ (2) $x = 0;\ y = 1$	(3) $x = 0;\ y = -1$ (4) $x = 0{,}5;\ y = -8$

- **Gleichungen** erhält man, indem man zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbindet.
- **Eine Gleichung** mit Variablen in einem gegebenen Grundbereich **lösen** heißt, alle Zahlen des gegebenen Grundbereichs zu ermitteln, die die Gleichung nach dem Einsetzen zu einer wahren Aussage machen.[1]

3 *Gib auf die gleiche Weise an, was man unter einer Ungleichung versteht und was es heißt, eine Ungleichung zu lösen!*

5 Wir betrachten die Gleichung $2x + 6 = 3$.
Setzen wir für x die **rationale** Zahl $-\frac{3}{2}$ ein, so erhalten wir eine wahre Aussage.
linke Seite: $2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = -3 + 6 = 3$; *rechte Seite:* 3.
Vergleich: $3 = 3$. Also ist $-\frac{3}{2}$ Lösung der gegebenen Gleichung.

[1] In diesem Fall wurde nur auf Gleichungen eingegangen, in denen die Variablen-Grundbereiche Zahlen sind.

Setzen wir für x die **ganze** Zahl 3 ein, so erhalten wir eine falsche Aussage:
linke Seite: $2 \cdot 3 + 6 = 6 + 6 = 12$; *rechte Seite:* 3.
Vergleich: $12 \neq 3$.

Also ist 3 nicht Lösung der gegebenen Gleichung.

4 *Prüfe nach, ob die Gleichung* $2x + 6 = 3$ *im Bereich der gebrochenen Zahlen lösbar ist!*

5 *Gegeben ist die Ungleichung* $3x + 4 < 15$ *mit* $x \in R$. *(Das heißt: Für x ist der Variablen-Grundbereich die Menge der rationalen Zahlen.)*

a) *Nenne Zahlen, die nach dem Einsetzen für x die gegebene Ungleichung zu einer wahren Aussage werden lassen!*

b) *Nenne Zahlen, die nach dem Einsetzen für x die gegebene Ungleichung zu einer falschen Aussage werden lassen!*

Bei praktischen Problemen ergibt sich der Variablen-Grundbereich meist aus der Aufgabenstellung.

6 Ein Betrieb will zusätzlich Geräte herstellen, für die zwei Typen von Werkstücken benötigt werden, und zwar für je ein Gerät 1 Werkstück des ersten Typs und 3 Werkstücke des zweiten Typs.
Beide Werkstücke müssen in ein und derselben Abteilung des Betriebes gefertigt werden, und diese Abteilung kann diese zusätzliche Arbeit nur in einem Umfang von insgesamt höchstens 70 Stück beider Typen zusammen übernehmen. Die benötigten Stückzahlen der beiden Typen verhalten sich wie 1 : 3. Wieviel Geräte kann der Betrieb unter diesen Bedingungen zusätzlich herstellen?
Die Antwort auf diese Frage liefern die nichtnegativ ganzzahligen Lösungen der einander äquivalenten Ungleichungen

$$\begin{aligned} x + 3x &\leqq 70 \\ 4x &\leqq 70 \\ x &\leqq 17{,}5 \end{aligned}$$

Der Variablen-Grundbereich ist also die Menge der natürlichen Zahlen. Demnach kann der Betrieb höchstens 17 Geräte zusätzlich produzieren.

Aufgaben a 1 bis 13

3 Eigenschaften der Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen

Die Addition von rationalen Zahlen besitzt bekanntlich die Eigenschaft, daß die Summanden einer Summe vertauscht werden dürfen. Diese Eigenschaft wird als Kommutativität der Addition rationaler Zahlen bezeichnet. Für rationale Zahlen a und b gilt also **immer** $a + b = b + a$. Setzt man in diese Gleichung für a und b irgendwelche rationalen Zahlen ein, so erhält man **stets** eine wahre Aussage. Dasselbe besagt die folgende Formulierung:

Kommutativgesetz der Addition rationaler Zahlen:
Für alle rationalen Zahlen a und b gilt

$$a + b = b + a\,.$$

Eine weitere Eigenschaft der Addition rationaler Zahlen ist die Assoziativität.

Assoziativgesetz der Addition rationaler Zahlen:
Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt

$$a + (b + c) = (a + b) + c\,.$$

Unabhängig davon, welche rationalen Zahlen für a, b und c in diese Gleichung eingesetzt werden, immer erhält man eine wahre Aussage.
Die Addition besitzt auch die Eigenschaft, daß für *beliebige* rationale Zahlen a und b die Gleichung $a + x = b$ im Bereich der rationalen Zahlen lösbar ist. Diese Eigenschaft nennt man die Umkehrbarkeit der Addition. Setzt man also in diese Gleichung für a und b irgendwelche rationale Zahlen ein, so existiert *immer* eine rationale Zahl x, so daß diese Gleichung zu einer wahren Aussage wird. Dasselbe besagt die folgende Formulierung:

Umkehrbarkeit der Addition rationaler Zahlen:
Zu jedem Paar rationaler Zahlen $[a; b]$ **gibt es eine** rationale Zahl x, so daß gilt

$$a + x = b\,.$$

Die Multiplikation rationaler Zahlen besitzt entsprechende Eigenschaften.

Kommutativgesetz der Multiplikation:
Für alle rationalen Zahlen a und b **gilt**

$$a \cdot b = b \cdot a\,.$$

Assoziativgesetz der Multiplikation:
Für alle rationalen Zahlen a, b und c **gilt**

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,.$$

Umkehrbarkeit der Multiplikation:
Zu jedem Paar rationaler Zahlen $[a; b]$ mit $a \neq 0$ **gibt es eine** rationale Zahl x, so daß gilt

$$a \cdot x = b\,.$$

Die Addition und die Multiplikation rationaler Zahlen sind durch das sogenannte Distributivgesetz miteinander verbunden.

Distributivgesetz:
Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,.$$

Aufgaben a 14 bis 16

Rechenoperationen unter Verwendung von Variablen

4 Vielfachbildung, Addieren und Subtrahieren

Die Produkte $3a$, $1{,}5a$, $\frac{5}{9}\,a$ nennt man **Vielfache** von a. Dabei heißen 3, 1,5 und $\frac{5}{9}$ **Koeffizienten von** a.

Wir wissen bereits:
- Mehrere Vielfache der gleichen Variablen können addiert werden, z. B. $4\,c + 0{,}8\,c = 4{,}8\,c$; sie können auch subtrahiert werden z. B. $4\,c - 0{,}8\,c = 3{,}2\,c$.

Die Begründung gibt das Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} (4+0{,}8)\cdot c &= 4c+0{,}8c \qquad \text{bzw.} \qquad & (4-0{,}8)\cdot c &= 4c-0{,}8c \\ 4{,}8c &= 4c+0{,}8c & 3{,}2c &= 4c-0{,}8c \\ 4c+0{,}8c &= 4{,}8c & 4c-0{,}8c &= 3{,}2c \end{aligned}$$

Wir bezeichnen künftig die einzelnen Summanden einer Summe auch als ihre **Glieder.**

7 Wir wollen in der Summe $3{,}5a + 2{,}2b - 4a + b$ die Glieder, die die gleichen Variablen enthalten, addieren.

Lösung:

1\. Schritt: Wir vertauschen das zweite und dritte Glied der Summe gegeneinander, d. h., wir ordnen die Glieder:

$$3{,}5a + 2{,}2b - 4a + b = 3{,}5a - 4a + 2{,}2b + b.$$

2\. Schritt: Wir fassen die Glieder mit gleichen Variablen zusammen:

$$3{,}5a - 4a + 2{,}2b + b = -0{,}5a + 3{,}2b.$$

Ergebnis: $3{,}5a + 2{,}2b - 4a + b = -0{,}5a + 3{,}2b.$

Kurzschreibweise: $3{,}5a + 2{,}2b - 4a + b = 3{,}5a - 4a + 2{,}2b + b$
$= -0{,}5a + 3{,}2b.$

Im Beispiel A 7 wird $3{,}5a + 2{,}2b - 4a + b$ als „Summe“ bezeichnet. Wir wissen bereits, daß die Bezeichnung „Summe“ berechtigt ist, da wir anstelle der Subtraktion von $4a$ auch die Addition von $(-4)a$ vornehmen können:

$$3{,}5a + 2{,}2b - 4a + b = 3{,}5a + 2{,}2b + (-4)a + b.$$

Die rechte Seite enthält als Operationszeichen nur Pluszeichen. In diesem Zusammenhang ist auch zu berücksichtigen, daß $4a$ positiv oder negativ ist, je nachdem, ob für a eine positive oder negative Zahl eingesetzt wird. Das gleiche gilt für die anderen Glieder.

8 $70x + 13y - 50x - 12y + 13 - 12x$
$= 70x - 50x - 12x + 13y - 12y + 13$ (Ordnen)
$= 8x + y + 13$ (Zusammenfassen)

6 **a)** *Schreibe* $5x - 3y + 7 - 2x + 3y - 7$ *so auf, daß als Operationszeichen nur Pluszeichen auftreten!*

b) *Schreibe* $7a + (-3)b + (-1)c + 15 + 8b + (-5)c$ *in Kurzschreibweise, und fasse dann zusammen!*

Aufgaben a 17 und 18

5 Addition von Summen unter Verwendung von Variablen

Wenn man zwei oder mehr Summen addieren soll, so schließt man die zu den einzelnen Summen gehörigen Glieder in Klammern ein.

9 *Aufgabe:* Addiere zur Zahl 15 die Summe $12 + 9$ sowie die Differenz $17 - 3$!
Lösung: $15 + (12 + 9) + (17 - 3) = 15 + 21 + 14 = 50.$

A

Die Aufgabe im Beispiel A 9 konnte dadurch gelöst werden, daß zunächst die Operationen innerhalb der Klammern ausgeführt wurden. Treten Variable auf, so ist das nicht immer möglich. So können wir zum Beispiel die Summe aus $6a$ und $7b + 2a$ nicht ohne weiteres vereinfachen.
Um derartige Aufgaben zu lösen, wenden wir innerhalb der Klammer das Kommutativgesetz der Addition und anschließend das Assoziativgesetz der Addition an:

$$\begin{aligned} 6a + (7b + 2a) &= 6a + (2a + 7b) \\ 6a + (2a + 7b) &= (6a + 2a) + 7b \\ &= \underbrace{\qquad}_{8a} + 7b. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also

$$6a + (7b + 2a) = 8a + 7b.$$

Wir sagen dafür, daß die **Klammer aufgelöst** wird.

Wir kommen zu demselben Ergebnis, wenn wir in der Summe $6a + (7b + 2a)$ zuerst die Klammer weglassen und dann die Summe ordnen sowie zusammenfassen:

$$6a + (7b + 2a) = 6a + 7b + 2a = 8a + 7b.$$

1 **SATZ: In der Summe $a + (b + c)$ kann die Klammer entfallen.**

$$\boxed{a + (b + c) = a + b + c}$$

10 *Aufgabe:* Vereinfache $-5x + (-2y + x)$!
Lösung: $-5x + (-2y + x) = -5x - 2y + x$ (Auflösen der Klammer)
$= -5x + x - 2y$ (Ordnen)
$= -4x - 2y$ (Zusammenfassen)
Ergebnis: $-5x + (-2y + x) = -4x - 2y$

Man kann das Ergebnis überprüfen, indem man in die linke Seite und die rechte Seite getrennt für x und y beliebige Zahlen des Variablen-Grundbereichs einsetzt und dann einen Vergleich vornimmt.
Zum Beispiel: $x = 2$; $y = 3$:
Linke Seite: $-5 \cdot 2 + (-2 \cdot 3 + 2) = -10 + (-6 + 2) = -10 - 4 = -14.$
Rechte Seite: $-4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -8 - 6 = -14.$
Vergleich: $-14 = -14.$

11 *Aufgabe:* Vereinfache $2y + 3z + (-3{,}5y - 0{,}7z - 1{,}6)$!
Lösung:
$2y + 3z + (-3{,}5y - 0{,}7z - 1{,}6)$
$= 2y + 3z - 3{,}5y - 0{,}7z - 1{,}6$ (Auflösen der Klammer)
$= 2y - 3{,}5y + 3z - 0{,}7z - 1{,}6$ (Ordnen)
$= -1{,}5y + 2{,}3z - 1{,}6$ (Zusammenfassen)
Ergebnis:
$2y + 3z + (-3{,}5y - 0{,}7z - 1{,}6) = -1{,}5y + 2{,}3z - 1{,}6.$

7 *Überprüfe das Ergebnis von Beispiel A 11, indem du für y und z Zahlen des Variablengrundbereichs einsetzt und die Seiten vergleichst!*

A

6 Subtraktion von Summen unter Verwendung von Variablen

Auch bei der Subtraktion einer Summe werden die zur Summe gehörigen Glieder durch Klammern zusammengefaßt. Wir gelangen dabei zu Termen der Form $a - (b + c)$.

8 *Bei der Summe $a + (b + c)$ konnte die Klammer entfallen (↗ Satz A 1). Stelle fest, ob auch bei der Differenz $a - (b + c)$ die Klammer entfallen kann, indem du den Term $15 - (12 + 9)$ auf zweierlei Art errechnest!*
1. Art: Summe in der Klammer ausrechnen und dann die Differenz ausrechnen.
2. Art: Klammer weglassen, dann die Differenz $15 - 12$ ausrechnen und schließlich zu dieser Differenz 9 addieren.

Wir wissen bereits:
- Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem die zu ihr entgegengesetzte Zahl zum Minuenden addiert wird.

9 *Ermittle die entgegengesetzte Zahl zu* **a)** 7, **b)** -7, **c)** -31, **d)** a, **e)** $-a$!

Wir subtrahieren dementsprechend bei $a - (b + c)$ die Summe $(b + c)$ von a, indem wir zu a die entgegengesetzte Zahl zu $(b + c)$ addieren.
Die entgegengesetzte Zahl zu $(b + c)$ sei

(1) $\quad -(b + c) = e.$

Da für alle Zahlen gilt, daß die Summe aus einer Zahl und der zu ihr entgegengesetzten Zahl Null ergibt, können wir schreiben:

$$(b + c) + e = 0.$$

Auf Grund der Assoziativität gilt dann

$$b + (c + e) = 0,$$

und nach Satz A 1 kann die Klammer entfallen:

$$b + c + e = 0.$$

Darum folgt:

(2) $\quad e = -b - c.$

Wir setzen nun in (1) für x den Wert aus (2) ein und erhalten so:

$$-(b + c) = -b - c.$$

Wir führen jetzt die ursprüngliche Aufgabe zu Ende. Die Subtraktion $a - (b + c)$ wird ausgeführt, indem wir zu a die entgegengesetzte Zahl zu $(b + c)$, nämlich $-(b + c) = -b - c$, addieren:

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a + (-b - c) \\ &= a - b - c. \end{aligned}$$

2 **SATZ: In der Differenz $a - (b + c)$ kann die Klammer entfallen, wenn man von allen Summanden innerhalb der Klammer die entgegengesetzten Zahlen ermittelt und diese zu a addiert.**

$$\boxed{a - (b + c) = a - b - c}$$

(10) *Ermittle die entgegengesetzten Zahlen zu*
a) $(2a + 3b)$, **b)** $(-2a + 3b)$, **c)** $(-2a - 3b)$, **d)** $(2a - 3b)$!

12 *Aufgabe:* Vereinfache $6a - (7b + 2a)$!
Lösung: Die entgegengesetzten Zahlen zu $7b$ bzw. $2a$ sind $-7b$ bzw. $-2a$.

$$\begin{aligned} 6a - (7b + 2a) &= 6a - 7b - 2a && \text{(Auflösen der Klammer)} \\ &= 6a - 2a - 7b && \text{(Ordnen)} \\ &= 4a - 7b && \text{(Zusammenfassen)} \end{aligned}$$

Ergebnis: $6a - (7b + 2a) = 4a - 7b$

13 *Aufgabe:* Vereinfache $6a - (-7b - 2a)$!
Lösung: Die entgegengesetzten Zahlen zu $-7b$ bzw. $-2a$ sind $7b$ bzw. $2a$.

$$\begin{aligned} 6a - (-7b - 2a) &= 6a + 7b + 2a && \text{(Auflösen der Klammer)} \\ &= 6a + 2a + 7b && \text{(Ordnen)} \\ &= 8a + 7b && \text{(Zusammenfassen)} \end{aligned}$$

Ergebnis: $6a - (-7b - 2a) = 8a + 7b$

14 *Aufgabe:* Vereinfache $6a - (7b - 2a)$!
Lösung: Die entgegengesetzten Zahlen zu $7b$ bzw. $-2a$ sind $-7b$ bzw. $2a$.

$$\begin{aligned} 6a - (7b - 2a) &= 6a - 7b + 2a \\ &= 6a + 2a - 7b \end{aligned}$$

Ergebnis: $6a - (7b - 2a) = 8a - 7b$

Aufgaben a 19 und 20

7 Setzen von Klammern, mehrfache Klammern

Auf Grund des Assoziativgesetzes dürfen in einer Summe in beliebiger Weise Klammern gesetzt werden, wenn wir vor die Klammer das Pluszeichen setzen.

15 *Aufgabe:* Fasse in der Summe $3a + 4b + 17c + 7a + 5b - 4c$ die ersten drei und die letzten drei Summanden jeweils durch Klammern zusammen! Vor beiden Klammern soll ein Pluszeichen stehen.
Lösung: $3a + 4b + 17c + 7a + 5b - 4c = (3a + 4b + 17c) + (7a + 5b - 4c)$

Ist in einer Summe eine Klammer zu setzen, vor der ein Minuszeichen stehen soll, so verfahren wir folgendermaßen: Wir ersetzen die Plus- bzw. Minuszeichen, die von der Klammer erfaßt werden, jeweils durch die entgegengesetzten Zeichen.

16 *Aufgabe:* Fasse in der Summe $3a + 2x - 3y$ die letzten beiden Glieder durch eine Klammer zusammen, wobei vor der Klammer das Minuszeichen stehen soll!
Lösung: $3a + 2x - 3y = 3a - (-2x + 3y)$
Wir begründen diese Lösung, indem wir in $3a - (-2x + 3y)$ die Klammer wieder auflösen und so die gegebene Summe erhalten:

$$3a - (-2x + 3y) = 3a + 2x - 3y.$$

17 *Aufgabe:* Fasse in der Summe $3a - 2x + 3y$ die letzten beiden Glieder durch eine Klammer zusammen, wobei vor der Klammer das Pluszeichen stehen soll!
Lösung: $3a - 2x + 3y = 3a + (-2x + 3y)$

Wir begründen diese Lösung, indem wir in $3a + (-2x + 3y)$ die Klammer wieder auflösen und so die gegebene Summe erhalten:

$$3a + (-2x + 3y) = 3a - 2x + 3y.$$

In manchen Aufgaben ist es erforderlich, Klammerausdrücke erneut in Klammern einzuschließen. Dazu verwenden wir neben runden noch eckige oder geschweifte Klammern.

18 *Aufgabe:* Löse in $5a - [(2a + 3b) - (3a - 7)]$ die Klammern auf und vereinfache! Für das Auflösen der Klammern lernen wir zwei Möglichkeiten kennen.

a) Wir lösen zunächst die runden Klammern und dann die eckige Klammer auf. Das Auflösen der Klammern erfolgt „von innen nach außen".

Lösung: $5a - [(2a + 3b) - (3a - 7)] = 5a - [2a + 3b - 3a + 7]$
$= 5a - 2a - 3b + 3a - 7$

Ergebnis: $5a - [(2a + 3b) - (3a - 7)] = 6a - 3b - 7$

b) Wir lösen zunächst die eckige Klammer und dann erst die runden Klammern auf. Das Auflösen der Klammern erfolgt von „außen nach innen".

Lösung: $5a - [(2a + 3b) - (3a - 7)] = 5a - (2a + 3b) + (3a - 7)$
$= 5a - 2a - 3b + 3a - 7$

Ergebnis: $5a - [(2a + 3b) - (3a - 7)] = 6a - 3b - 7$

19 *Aufgabe:* Löse in $2 - \{5a - [(2a + 3b) - (3a - 7)]\}$ die Klammern auf und vereinfache!

Lösung: $2 - \{5a - [(2a + 3b) - (3a - 7)] = 2 - \{5a - [2a + 3b - 3a + 7]\}$
$= 2 - \{5a - 2a - 3b + 3a - 7\}$
$= 2 - 5a + 2a + 3b - 3a + 7$

Ergebnis: $2 - \{5a - [(2a + 3b) - (3a - 7)]\} = 9 - 6a + 3b$

Aufgaben a 21 bis 24

8 Multiplikation unter Verwendung von Variablen

Wir multiplizieren zunächst eingliedrige Ausdrücke mit eingliedrigen Ausdrücken. Dabei wenden wir das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Multiplikation an.

20 *Aufgabe:* $4{,}5a \cdot 2b$

Lösung: $4{,}5a \cdot 2b = \underbrace{4{,}5 \cdot 2}_{9} \cdot \underbrace{a \cdot b}_{ab}$
$= 9 \cdot ab$

Das Produkt $9ab$ läßt sich nicht weiter vereinfachen.

Ergebnis: $4{,}5a \cdot 2b = 9ab$

Produkte mit zwei oder mehreren gleichen Variablen können weiter zusammengefaßt werden.

$$a \cdot a = a^2$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a} = a^n$$

n Faktoren, $n \geq 2$, *n* eine natürliche Zahl

In der **Potenz** a^n wird die Variable a **Basis** und die Zahl n **Exponent** genannt.

21 *Aufgabe:* $4{,}5a \cdot 2ab$

Lösung: $4{,}5a \cdot 2ab = \underbrace{4{,}5 \cdot 2}_{} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot b}_{}$
$= 9 \cdot a^2 \cdot b$

Ergebnis: $4{,}5a \cdot 2ab = 9a^2b$

Man berechnet also ein Produkt, indem man das Produkt der Koeffizienten mit dem Produkt der Variablen multipliziert.

22 *Aufgabe:* $(-2{,}5a^2) \cdot 3x$

Lösung: $(-2{,}5a^2) \cdot 3x = -2{,}5a^2 \cdot 3x$
$= -\underbrace{2{,}5 \cdot 3}_{} \cdot \underbrace{a^2 \cdot x}_{}$
$= -7{,}5 \cdot a^2x$

Ergebnis: $(-2{,}5a^2) \cdot 3x = -7{,}5a^2x$

(11) *Überprüfe das Ergebnis im Beispiel A 22, indem du auf der linken und der rechten Seite für a und x rationale Zahlen einsetzt, die Produkte ausrechnest und vergleichst!*

23 *Aufgabe:* $(-2{,}5a^2) \cdot 2x \cdot (-a)$

Lösung: $(-2{,}5a^2) \cdot 2x \cdot (-a) = (-2{,}5a^2 \cdot 2x) \cdot (-a)$
$= +2{,}5a^2 \cdot 2x \cdot a$
$= \underbrace{2{,}5 \cdot 2}_{} \cdot \underbrace{a^2 \cdot a \cdot x}_{}$
$= 5 \cdot a^3x$

Ergebnis: $(-2{,}5a^2) \cdot 2x \cdot (-a) = 5a^3x$

Aufgaben a 25 bis 27

9 Division unter Verwendung von Variablen

24 *Aufgabe:* $4{,}5a : 0{,}5b \quad (b \neq 0)$

Lösung: $4{,}5a : 0{,}5b = \frac{4{,}5a}{0{,}5b}$
$= \frac{4{,}5}{0{,}5} \cdot \frac{a}{b}$
$= 9 \cdot \frac{a}{b}$

Ergebnis: $4{,}5a : 0{,}5b = 9\frac{a}{b}$

Treten im Dividend und Divisor gleiche Variable auf, so läßt sich der Quotient weiter vereinfachen.

25 *Aufgabe:* $2{,}1x^2 : 0{,}7x \quad (x \neq 0)$

Lösung: $2{,}1x^2 : 0{,}7x = \frac{2{,}1x^2}{0{,}7x}$
$= \frac{2{,}1}{0{,}7} \cdot \frac{x \cdot x}{x}$
$= 3 \cdot x$

Ergebnis: $2{,}1x^2 : 0{,}7x = 3x$

Man berechnet also einen Quotienten, indem man den Quotienten der Koeffizienten mit dem Quotienten der Variablen multipliziert.

26 *Aufgabe:* $(-24a^2) : (-48a^5) \quad (a \neq 0)$

Lösung: $(-24a^2) : (-48a^5) = +\dfrac{24a^2}{48a^5}$

$$= \frac{24}{48} \cdot \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a \cdot a \cdot a}$$

Ergebnis: $(-24a^2) : (-48a^5) = \dfrac{1}{2a^3}$

Da $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b \cdot c}$ bis auf einige Ausnahmefälle nicht richtig ist, müssen bei der Verwendung des Doppelpunktes als Divisionszeichen zusätzliche Klammern verwendet werden. Es gilt $\frac{a}{b} \cdot c = (a : b) \cdot c$ und $\frac{a}{b \cdot c} = a : (b \cdot c)$.

12 *Überprüfe die Gleichung* $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b \cdot c}$, *indem du* **a)** $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ *und* **b)** $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$ *setzt und die Probe machst!*

Aufgaben a 28 und 29

10 Ausklammern

Die Summe $2ab + 3b$ kann in ein Produkt verwandelt werden, da beide Summanden den gleichen Faktor b enthalten:

$$2ab + 3b = (2a + 3)b.$$

Zur Begründung wird das Distributivgesetz benutzt, nach dem gilt:

$$(2a + 3)b = 2ab + 3b.$$

Man sagt, daß der gemeinsame Faktor b **ausgeklammert** wird. Die Glieder in der Klammer ergeben sich, indem die gegebenen Summanden durch den gemeinsamen Faktor, der ausgeklammert werden soll, dividiert werden.

27 *Aufgabe:* Wandle die Summe $4x + 16xy$ in ein Produkt um!

1. Schritt: Wir suchen einen gemeinsamen Faktor, der auszuklammern ist. Ein solcher Faktor ist $4x$.
2. Schritt: Wir dividieren beide Summanden durch $4x$ und bilden aus den Quotienten die Summe.
   $4x : 4x = 1$; $16xy : 4x = 4y$; $1 + 4y$ (jeweils $x \neq 0$).
3. Schritt: Wir bilden aus dem gemeinsamen Faktor $4x$ und der Summe $1 + 4y$ das Produkt und erhalten $4x(1 + 4y)$.

Ergebnis: $4x + 16xy = 4x(1 + 4y)$.

Hätten wir im letzten Beispiel den Faktor x ausgeklammert, so hätten wir die Summe $4x + 16xy$ in das Produkt $x(4 + 16y)$ verwandelt.

28 *Aufgabe:* Forme die Summe $xy - xv - cx + cz$ um!
Lösung: Aus den ersten beiden Gliedern klammern wir den gemeinsamen Faktor x, aus den letzten beiden Gliedern klammern wir den gemeinsamen Faktor c aus.
Ergebnis: $xy - xv - cx + cz = x(y - v) + c(-x + z)$.
Auch bei derartigen Aufgaben gibt es mehrere Möglichkeiten für Umformungen.

Aufgaben a 30 bis 32

11 Multiplikation von Summen unter Verwendung von Variablen

A

29 *Aufgabe:* Multipliziere die Summe $3a + 2b - 5$ mit $(-0{,}1a^2)$!
Lösung: $(3a + 2b - 5) \cdot (-0{,}1a^2) = 3a \cdot (-0{,}1a^2) + 2b \cdot (-0{,}1a^2) - 5 \cdot (-0{,}1a^2)$
$= -0{,}3a^3 - 0{,}2a^2b + 0{,}5a^2.$
Ergebnis: $(3a + 2b - 5) \cdot (-0{,}1a^2) = -0{,}3a^3 - 0{,}2a^2b + 0{,}5a^2.$

Einen zweigliedrigen Ausdruck nennen wir ein **Binom.**
Die Multiplikation zweier Binome ergibt sich aus dem Distributivgesetz und den Kommutativgesetzen.

3 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen *a*, *b*, *c* und *d* gilt:**

$$\boxed{(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd}$$

Beweis: In dem Produkt $(a + b) \cdot (c + d)$ setzen wir $c + d = m$. Nach dem Distributivgesetz gilt

$$(a + b) \cdot m = am + bm.$$

Für m setzen wir jetzt wieder das Binom $(c + d)$ ein:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a\,(c + d) + b\,(c + d)$$

Wir wenden das Kommutativgesetz der Multiplikation und das Distributivgesetz an und erhalten:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Wir wenden schließlich das Kommutativgesetz der Addition an und erhalten

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

In Worten lautet der eben bewiesene Satz A 3:

SATZ: Zwei Binome werden miteinander multipliziert, indem jeder Summand des ersten Faktors mit jedem Summanden des zweiten Faktors multipliziert wird und die Produkte addiert (bzw. subtrahiert) werden.

30 *Aufgabe:* Multipliziere die Summen $2a + 3b$ und $4x - 6y$ miteinander!
Lösung: $(2a + 3b)\,(4x - 6y) = 2a \cdot 4x + 3b \cdot 4x - 2a \cdot 6y - 3b \cdot 6y$
$= 8ax + 12bx - 12ay - 18by$
Ergebnis: $(2a + 3b)\,(4x - 6y) = 8ax + 12bx - 12ay - 18by$

Der Satz A 3 gilt auch für die Multiplikation mehrgliedriger Summen.

Das folgende Beispiel A 31 zeigt, wie wir rechnen, wenn mehrere Klammerungen auftreten.

31 *Aufgabe:*

$$\begin{aligned} & [2a - 3\,(x + y)]\,(a - x) \\ &= [2a - 3\,(x + y)]\,a - [2a - 3\,(x + y)]\,x \\ &= 2a^2 - 3a\,(x + y) - 2ax + 3x\,(x + y) \\ &= 2a^2 - 3ax - 3ay - 2ax + 3x^2 + 3xy \\ &= 2a^2 - 5ax - 3ay + 3x^2 + 3xy \end{aligned}$$

Aufgaben a 33 bis 41

12 Beispiele für Beweisführungen unter Verwendung von Variablen

In Lerneinheit A 11 wurde der Satz bewiesen, daß zwei Binome miteinander multipliziert werden, indem jeder Summand des ersten Faktors mit jedem Summand des zweiten Faktors multipliziert wird und die Produkte addiert werden. Der Beweis wurde unter Verwendung von Variablen geführt.
Wir betrachten weitere Beispiele:

32 Für die Zahlen 2; 5; 7 und 7,5 gilt die Verhältnisgleichung

$$2:5 = 7:17{,}5.$$

Wir bilden nun die Summen $2 + 5 = 7$ und $7 + 17{,}5 = 24{,}5$ und stellen mit ihnen eine neue Verhältnisgleichung auf:

$$7 : 5 = 24{,}5 : 17{,}5.$$

13 *Prüfe nach, ob die Verhältnisgleichung* $7 : 5 = 24{,}5 : 17{,}5$ *eine wahre Aussage ist!*

Auf Grund der Ergebnisse im Beispiel A 32 und im Auftrag A 13 vermuten wir:
Wenn gilt $a : b = c : d$, so gilt auch $(a + b) : b = (c + d) : d$.
Beweis: a, b, c und d seien beliebige rationale Zahlen; b und d seien von Null verschieden. Es gelte die Verhältnisgleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Wir addieren auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl 1. Wir erhalten:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

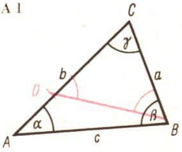
Es ergibt sich also die Verhältnisgleichung $(a + b) : b = (c + d) : d$, *w. z. b. w.*

33 Wir betrachten ein beliebiges Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ. Die Seite b sei größer als die Seite a. Wir wollen den Satz
In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber
beweisen.
Beweis: Wir tragen von C aus auf b die Seite a ab und erhalten einen Punkt D, der zwischen C und A liegt (Bild A 1). Dann gilt:

(1) Die Winkel CDB und DBC sind als Basiswinkel in dem gleichschenkligen Dreieck CDB gleich groß.
(2) β ist größer als der Winkel DBC, da beide Winkel den Schenkel BC gemeinsam haben und der Schenkel BD des Winkels DBC innerhalb des Winkels β liegt.
(3) Der Winkel CDB ist als Außenwinkel des Dreiecks ABD größer als der nichtanliegende Innenwinkel α.

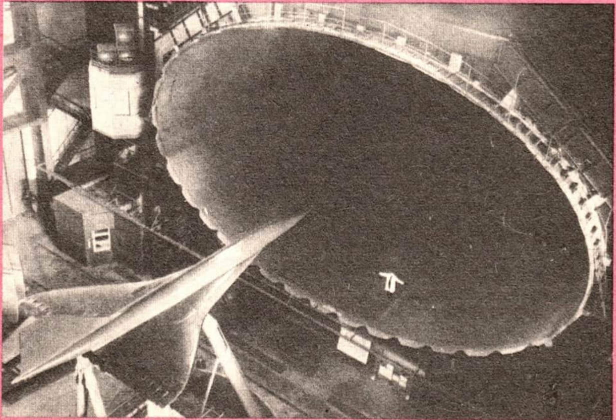
Aus (1) bis (3) folgt: β ist größer als α, *w. z. b. w.*

A 1



B Ähnlichkeit

Bevor ein neuer Flugzeugtyp in die Produktion gehen kann, müssen die Entwürfe auf Herz und Nieren überprüft werden. Ein wichtiges Verfahren dafür ist die Untersuchung von Modellen. Um dabei zu sicheren Ergebnissen zu kommen, muß das Modell eine maßstäbliche Verkleinerung des geplanten Flugzeugs sein. Man sagt: Es muß ihm ähnlich sein. Das Bild zeigt das Modell des ersten Überschallpassagierflugzeuges der Welt, der sowjetischen Maschine „Tupolew 144“ im Windkanal des Aerodynamischen Instituts.



Der Strahlensatz

1 Streckenverhältnisse

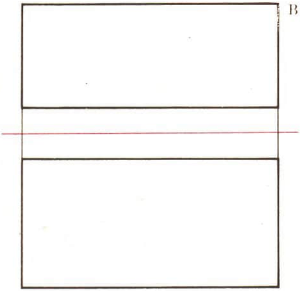
Auf Landkarten finden wir eine Maßstabsangabe, z. B. 1:25000. Dieses Zahlenverhältnis gibt an, daß sich die Länge einer jeden Strecke auf der Landkarte zur Länge der betreffenden Originalstrecke wie 1 zu 25000 verhält, d. h., die Länge einer Kartenstrecke beträgt $\frac{1}{25\,000}$ der Länge der zugehörigen Originalstrecke.

Wir betrachten nun zwei Strecken s_1 und s_2. Sie mögen bei gleicher Längeneinheit die Maßzahlen z_1 bzw. z_2 haben. Der Quotient $z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2}$ heißt **Streckenverhältnis** von s_1 und s_2. Man schreibt auch

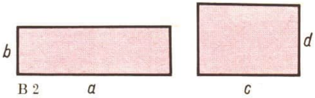
$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{bzw.} \quad s_1 : s_2 = z_1 : z_2.$$

(1) *Ermittle durch Messen sämtliche Streckenverhältnisse für die Kanten des im Bild B 1 in Zweitafelprojektion dargestellten Quaders!*

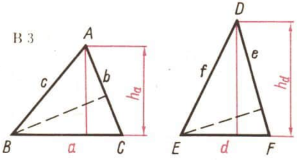
Beim Messen einer jeden Strecke s wird das Streckenverhältnis zwischen s und der benutzten Einheitsstrecke e ermittelt. So besagt zum Beispiel das Meßergebnis 5,3 cm: Wenn die Einheitsstrecke e_1 die Länge 1 cm hat, so ist $\frac{s}{e_1} = 5{,}3$. Hat die Einheitsstrecke e_2 die Länge 1 mm $= \frac{1}{10}$ cm, so ist $\frac{s}{e_2} = 53$. Da Maßzahlen von Strecken sowohl rational als auch irrational sein können, sind auch Streckenverhältnisse rationale oder irrationale Zahlen.
Die beiden Rechtecke im Bild B 2 haben den gleichen Flächeninhalt. Es gilt also $a \cdot b = c \cdot d$. Durch beiderseitige Division durch $b \cdot c$ folgt daraus $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$.



B 1



B 2



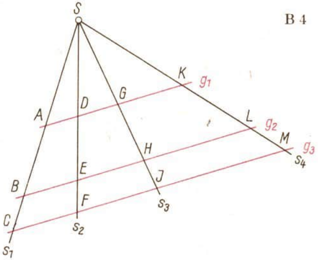
B 3

(2) *Für die beiden Dreiecke ABC und DEF im Bild B 3 gilt $a : d = h_d : h_a$.*
a) *Folgere daraus eine Aussage über die Flächeninhalte!*
b) *Betrachte die Strecken b, h_b, e, h_e, und gib eine gültige Verhältnisgleichung an!*

Aufgaben b 1 bis 5

2 Der erste Teil des Strahlensatzes

Das Bild B 4 zeigt ein **Strahlenbüschel** mit dem Scheitelpunkt S. Seine Strahlen (s_1 bis s_4) werden von einer **Parallelenschar** (g_1 bis g_3) geschnitten. Dadurch entstehen **Strahlenabschnitte**. Auf s_1 zum Beispiel sind dies die Strecken $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. Der zu $\overline{AC}$ **gleichliegende Strahlenabschnitt** auf s_2 ist $\overline{DF}$.



B 4

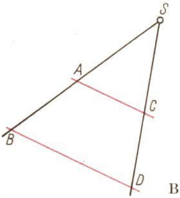
③ *Nenne zu den Strahlenabschnitten auf s_1 jeweils die gleichliegenden Strahlenabschnitte auf s_2! Gib weitere Paare gleichliegender Strahlenabschnitte an!*

Betrachten wir zwei beliebige Abschnitte a_1 und a_2 auf einem Strahl und die gleichliegenden Abschnitte b_1 und b_2 irgendeines anderen Strahls, so zeigt sich: Wenn a_1 kürzer als a_2 ist, so ist b_1 kürzer als b_2. Wir können sogar vermuten: Die Abschnitte auf dem einen Strahl sind proportional den zugehörigen Abschnitten auf dem anderen.

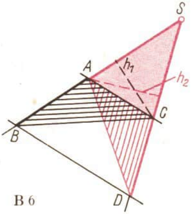
1 **SATZ (Strahlensatz, erster Teil): Werden die Strahlen eines Büschels von einer Parallelenschar geschnitten, so gilt für je zwei Strahlen: Die Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf dem anderen.**

Es genügt, den Beweis dieses Satzes für den Fall von zwei Strahlen und zwei Parallelen (Bild B 5) zu führen. Der Satz besagt dann, daß folgende Verhältnisgleichungen (Proportionen) gelten:

$$(1)\ \frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}} \qquad (2)\ \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SC}} \qquad (3)\ \frac{\overline{SB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$$



B 5



B 6

Beweis für (1):
Wir verbinden A mit D und B mit C (Bild B 6) und betrachten die Flächeninhalte einiger Dreiecke.
Für $\triangle\, SAC$ gilt

$$A_1 = \frac{\overline{SA} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{SC} \cdot h_2}{2}, \text{ also } \boxed{\overline{SA} \cdot h_1 = \overline{SC} \cdot h_2}.$$

Für $\triangle ABC$ gilt

$$A_2 = \frac{\overline{AB} \cdot h_1}{2},$$

für $\triangle DCA$ gilt

$$A_3 = \frac{\overline{CD} \cdot h_2}{2}.$$

Da $\triangle ABC$ und $\triangle DCA$ die Seite $\overline{AC}$ und deren Höhe gemeinsam haben, sind ihre Flächeninhalte gleich: $A_2 = A_3$. Das heißt

$$\frac{\overline{AB} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{CD} \cdot h_2}{2}, \text{ also } \boxed{\overline{AB} \cdot h_1 = \overline{CD} \cdot h_2}.$$

B

Demzufolge ist $\frac{\overline{SA} \cdot h_1}{\overline{AB} \cdot h_1} = \frac{\overline{SC} \cdot h_2}{\overline{CD} \cdot h_2}$ oder $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$, *was zu beweisen war.*

Ähnlich kann man (2) und (3) beweisen.

Man kann diese Beziehungen aber auch unmittelbar aus (1) folgern; das sei hier nur für (2) durchgeführt:

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA} + \overline{AB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}}$$

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SC} + \overline{CD}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{SC}} = 1 + \frac{\overline{CD}}{\overline{SC}}$$

Wegen (1) ist

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{SC}} \text{ und damit } \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SC}}, \textit{ w. z. b. w.}$$

4 *Aus* (1) *folgt* $\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ *durch Multiplikation mit* $\frac{\overline{AB}}{\overline{SC}}$ *auf beiden Seiten. Forme* (2) *und* (3) *entsprechend um! Formuliere den ersten Teil des Strahlensatzes so, daß er diesen Verhältnisgleichungen entspricht!*

Aufgaben b 6 bis 10

3 Vervielfachen einer Strecke

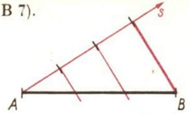
Wenn wir das Doppelte oder Dreifache oder allgemein das n-fache (n eine natürliche Zahl größer 1) einer Strecke $\overline{AB}$ konstruieren sollen, so sprechen wir vom „Vervielfachen der Strecke $\overline{AB}$“. Hierzu verlängern wir die Strecke $\overline{AB}$ über A oder B hinaus und tragen auf dieser Verlängerung die Strecke $\overline{AB}$ mit dem Zirkel $(n - 1)$mal ab. Wir wollen aber auch dann vom „Vervielfachen einer Strecke“ sprechen, wenn k keine natürliche Zahl, sondern eine beliebige positive (rationale oder irrationale) Zahl ist.

Für $k = \frac{1}{3}$ würde das z. B. bedeuten, daß wir den dritten Teil konstruieren.

Für $k = \frac{5}{3}$ würde es bedeuten, daß wir zunächst den dritten Teil von $\overline{AB}$ konstruieren und diesen dann verfünffachen. In dieser Weise kann man bei jedem rationalen k vorgehen. Dadurch ergibt sich für $k < 1$ eine kürzere Strecke, für $k > 1$ eine längere Strecke.

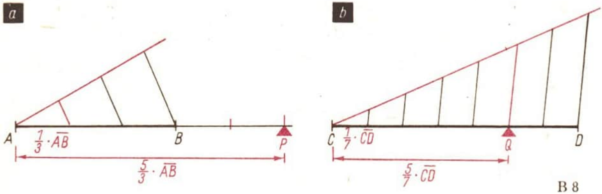
1 Eine Strecke $\overline{AB}$ soll in drei kongruente Teilstrecken geteilt werden (Bild B 7).

B 7



Konstruktionsbeschreibung:
Wir zeichnen von einem Endpunkt von $\overline{AB}$ einen Strahl s. Auf diesem tragen wir eine beliebig gewählte Strecke dreimal ab. Den Endpunkt der so erhaltenen Streckenfolge verbinden wir mit dem anderen Endpunkt von $\overline{AB}$. Die Parallelen zu dieser Verbindungsstrecke teilen $\overline{AB}$ in drei kongruente Teile.

2 Von einer Strecke soll ihr k-faches konstruiert werden.
a) $k = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$ (Bild B 8 a) **b)** $k = \frac{5}{7}$ (Bild B 8 b)



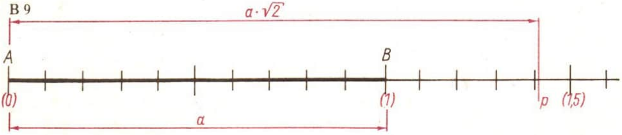
B 8

(5) **a)** *Gib für das Beispiel 2 a eine Konstruktionsbeschreibung!*
b) *Erläutere, inwiefern es zwei Möglichkeiten gibt, im Beispiel 2b den Punkt Q zu erhalten! Gib entsprechend auch für den Punkt P im Beispiel 2a eine zweite Konstruktionsmöglichkeit an!*
c) *Überlege, ob die Größe des Winkels zwischen der zu teilenden Strecke und dem Hilfsstrahl s Einfluß auf die Konstruktionsgenauigkeit hat!*

Ist k eine Irrationalzahl, also ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch, so ersetzen wir k durch rationale Näherungswerte. Auf diese Weise können wir den Punkt P, der zu einem irrationalen k auf der Zahlengeraden gehört, mit beliebiger Genauigkeit erfassen. Ist z. B. $k = \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, soll also zur Strecke $\overline{AB} = a$ das $\sqrt{2}$fache konstruiert werden, so wird a als Einheit einer Zahlengeraden gewählt (Bild B 9). Dann konstruieren wir das 1,4fache, das 1,41fache, das 1,414fache ... von a nach dem obigen Verfahren. Auf diese Weise kommen wir dem Punkt P mit $\overline{AP} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}$ beliebig nahe.
Es gibt auch Irrationalzahlen k, für die man die zugehörigen Punkte auf der Zahlengeraden unmittelbar konstruieren kann; dann ist auch das k-fache von $\overline{AB}$ unmittelbar zu konstruieren. $\sqrt{2}$ gehört zu diesen Irrationalzahlen, und so kann man das $\sqrt{2}$fache jeder Strecke a konstruieren als Diagonale eines Quadrats mit a als Seite. (Vgl. auch Lerneinheit B 29.)

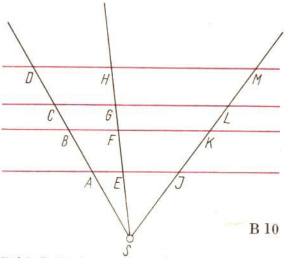
Aufgaben b 11 bis 16

B 9



4 Der zweite Teil des Strahlensatzes

So, wie durch die Parallelen Strahlenabschnitte entstehen, so entstehen durch die Strahlen **Parallelenabschnitte,** z. B. $\overline{AE}$ und $\overline{GL}$ im Bild B 10. Ein Strahlenabschnitt und ein Parallelenabschnitt heißen **zueinander gehörig,** wenn der Strahlenabschnitt vom Scheitelpunkt bis zu einem Endpunkt des Parallelenabschnitts reicht. Im Bild B 10 gehören z. B. $\overline{SA}$ und $\overline{AE}$ zueinander, auch $\overline{SD}$ und $\overline{DM}$, nicht aber $\overline{CD}$ und $\overline{DM}$.



B 10

B

(6) **a)** *Nenne zu drei Parallelenabschnitten im Bild B 10 je zwei zugehörige Strahlenabschnitte!*

b) *Gib zu drei Strahlenabschnitten im Bild B 10 je zwei zugehörige Parallelenabschnitte an!*

Betrachten wir im Bild B 10 zwei beliebige Strahlen und die zwischen ihnen liegenden Parallelenabschnitte, so stellen wir fest: Die Parallelenabschnitte sind um so länger, je weiter sie vom Scheitelpunkt S des Strahlenbüschels entfernt sind, je länger also die zugehörigen Abschnitte auf demselben Strahl sind. Es gilt sogar: Die Parallelenabschnitte sind proportional den zugehörigen Abschnitten auf demselben Strahl.

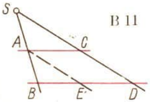
2 **SATZ (Strahlensatz, zweiter Teil): Werden die Strahlen eines Büschels von einer Parallelenschar geschnitten, so verhalten sich je zwei Parallelenabschnitte, die zwischen gleichen Strahlen liegen, zueinander wie die zugehörigen Strahlenabschnitte ein und desselben Strahls.**

Für die Figur im Bild B 11 gilt $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} \left(= \frac{\overline{SD}}{\overline{SC}}\right)$

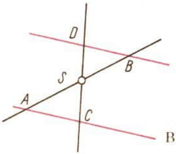
Beweis: Wir ziehen durch A die Parallele zu $\overline{CD}$, die $\overline{BD}$ in E schneidet. Dann ist $\overline{AC} = \overline{ED}$, da $\overline{AC}$ und $\overline{ED}$ Gegenseiten im Parallelogramm $AEDC$ sind. Nunmehr wird das Strahlenbüschel mit dem Scheitelpunkt B von den Parallelen AE und SD geschnitten. Nach dem ersten Teil des Strahlensatzes gilt demnach

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{AS}}, \text{ also auch } \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}},$$ *was zu beweisen war.*

(7) *Nenne Verhältnisgleichungen, die nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes für die Figur im Bild B 10 gelten!*



B 11



B 12

Im Bild B 12 werden zwei einander schneidende Geraden so von zwei Parallelen geschnitten, daß der Scheitelpunkt S des Geradenbüschels zwischen den Parallelen liegt. Es entstehen so die Geradenabschnitte $\overline{SA}$ und $\overline{SC}$, die zum Parallelenabschnitt $\overline{AC}$ gehören, sowie die Geradenabschnitte $\overline{SB}$ und $\overline{SD}$, die zum Parallelenabschnitt $\overline{BD}$ gehören. Auch hier gilt die Proportion:

$$\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{SA} : \overline{SB} \; (= \overline{SC} : \overline{SD}).$$

Allgemein: Wenn zwei Geraden eines Geradenbüschels von zwei Parallelen geschnitten werden, so bilden die Parallelenabschnitte das gleiche Verhältnis wie die zugehörigen Geradenabschnitte derselben Geraden. Das folgt aus dem zweiten Teil des Strahlensatzes, wenn man $\triangle\, SBD$ (Bild B 12) um 180° mit S als Zentrum dreht. Ein dem ersten Teil des Strahlensatzes entsprechender Sachverhalt für Geradenbüschel läßt sich hier auch ablesen.

Aufgaben b 17 bis 20

5 Innere und äußere Teilung einer Strecke

In der Lerneinheit B 3 wurde das k-fache einer Strecke ($k > 0$, rational) mit Hilfe des ersten Teils des Strahlensatzes konstruiert. Im Bild B 8 gilt $\overline{AP} = \frac{5}{3} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{CQ} = \frac{5}{7} \cdot \overline{CD}$. Für Q gilt also $\overline{CQ} : \overline{QD} = 5:2$. Man sagt auch: Die Strecke $\overline{CD}$ wird durch Q im Verhältnis $5:2$ geteilt, und zwar **innen geteilt.** Für P gilt entsprechend $\overline{PA} : \overline{PB} = 5:2$. Aber P liegt außerhalb von $\overline{AB}$, deshalb wird $\overline{AB}$ von P im Verhältnis $5:2$ **außen geteilt.**
Das Bild B 8 zeigt also auch, wie innere und äußere Teilpunkte nach dem ersten Teil des Strahlensatzes konstruiert werden können. Häufig ist es aber bequemer, den zweiten Teil des Strahlensatzes zur Konstruktion zu benutzen.

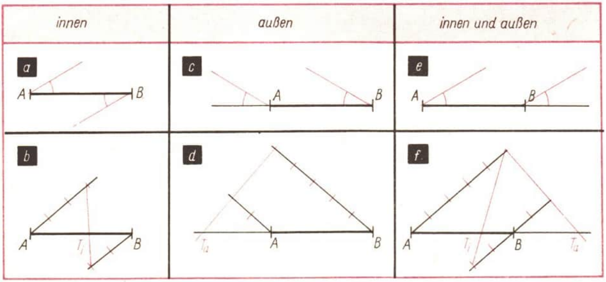
3 Eine Strecke soll unter Benutzung des zweiten Teils des Strahlensatzes innen und außen im Verhältnis $p:q$ geteilt werden (Bild B 13).

8 *Wie groß ist für die Teilungen im Beispiel B 3 jeweils k in*

$$\overline{AT_i} = k \cdot \overline{AB} \text{ und } \overline{AT_a} = k \cdot \overline{AB}\,?$$

B 13

Aufgaben b 21 bis 27



6 Der dritte Teil des Strahlensatzes

Während der erste Teil des Strahlensatzes eine Beziehung der Strahlenabschnitte untereinander, der zweite Teil eine Beziehung zwischen Strahlen- und Parallelenabschnitten ausspricht, ist im dritten Teil die Rede von einer Beziehung der Parallelenabschnitte untereinander. Parallelenabschnitte, die von den gleichen Strahlen begrenzt werden, heißen **zueinander gleichliegende** Parallelenabschnitte. So ist im Bild B 10 z. B. der Parallelenabschnitt $\overline{FK}$ gleichliegend zum Parallelenabschnitt $\overline{EI}$ und zum Parallelenabschnitt $\overline{GL}$.

(9) *Nenne die im Bild B 10 gleichliegenden Parallelenabschnitte zu $\overline{AE}$ und $\overline{HM}$!*

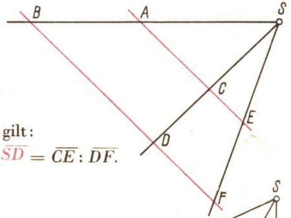
B

3 **SATZ (Strahlensatz, dritter Teil): Werden die Strahlen eines Büschels von einer Parallelenschar geschnitten, so gilt für je zwei Parallelen: Die Abschnitte auf der einen Parallelen verhalten sich zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf der anderen Parallelen.**

Im Bild B 14 gilt demnach:

(1) $\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}$;
(2) $\overline{AC} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{BF}$;
(3) $\overline{CE} : \overline{AE} = \overline{DF} : \overline{BF}$.

B 14



Beweis für (1):
Nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes gilt:

$\overline{SC} : \overline{SD} = \overline{AC} : \overline{BD}$ und auch $\overline{SC} : \overline{SD} = \overline{CE} : \overline{DF}$.

Dann ist aber

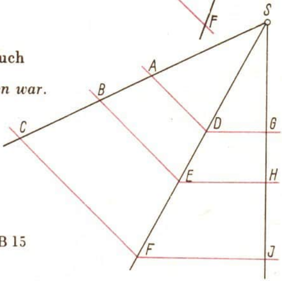
$\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{CE} : \overline{DF}$

und damit $\left(\text{nach Multiplikation mit } \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}\right)$ auch

$\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}$, *was zu beweisen war.*

(10) *Gib auch die Beweisschritte für* (2) *an!*

Der Satz B 3 umfaßt auch die Fälle, bei denen jeweils gleichliegende Parallelenabschnitte verschiedenen Parallelenscharen angehören, die sich auf den Strahlen des Büschels so schneiden, wie dies das Bild B 15 zeigt.



B 15

(11) *Stelle gültige Verhältnisgleichungen für Parallelenabschnitte im Bild B 15 auf!*

Verbindet man im Bild B 15 die Punkte A und G, B und H sowie C und I, so liegt es nahe, das Bild als ebenes Bild einer dreiseitigen Pyramide bei Parallelprojektion aufzufassen. Dabei wird offenbar die Pyramide durch drei parallele Ebenen geschnitten, so daß die Schnittfiguren ADG, BEH und CFI entstehen. Damit scheint beispielsweise auch zu gelten $\overline{AG} : \overline{BH} = \overline{AD} : \overline{BE}$. Daß aber wirklich $\overline{AG} \parallel \overline{BH}$ (und $\overline{BH} \parallel \overline{CI}$) gilt, ist nicht aus dem Strahlensatz zu folgern, denn dort wird ja die Parallelität jeweils vorausgesetzt. Wir benötigen dafür vielmehr einen Satz, in dem die Gleichheit gewisser Verhältnisse vorausgesetzt wird und die Parallelität erzeugender Geradenabschnitte sich daraus ergibt, also eine Umkehrung des Strahlensatzes.

Aufgaben b 28 bis 32

7 Umkehrungen des Strahlensatzes

Um die verschiedenen Teile des Strahlensatzes auf ihre Umkehrbarkeit untersuchen zu können, ist es zweckmäßig, bei ihnen jeweils deutlich *Voraussetzung* und *Behauptung* zu trennen. Wir wollen z. B. den ersten Teil des Strahlensatzes (Satz B 1), bezogen auf Bild B 16, folgendermaßen formulieren:

Wenn $\underline{AC \parallel BD}$ gilt, so gilt $\underline{\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}}$

oder

Voraussetzung: $\underline{AC \parallel BD}$ *Behauptung:* $\underline{\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}}$

Durch Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung erhalten wir eine neue Aussage, die zu beweisen (oder zu widerlegen) ist:

Wenn $\underline{\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}}$ gilt, so gilt $\underline{AC \parallel BD}$

oder

Voraussetzung: $\underline{\overline{SA} : \overline{AB} = \overline{SC} : \overline{CD}}$ *Behauptung:* $\underline{AC \parallel BD}$

Beweis: Wären AC und BD nicht parallel, so würde die Parallele zu AC durch D den Strahl SA in einem Punkt B' schneiden, der von B verschieden wäre. Nach dem ersten Teil des Strahlensatzes würde dann gelten:

$$\overline{SA} : \overline{AB'} = \overline{SC} : \overline{CD}.$$

Wegen $\overline{AB'} \neq \overline{AB}$ ist das aber nicht möglich, denn es steht im Widerspruch zur Voraussetzung. Also kann die Annahme, AC und BD seien nicht parallel, nicht stimmen, sondern AC und BD müssen parallel sein, *w. z. b. w.*

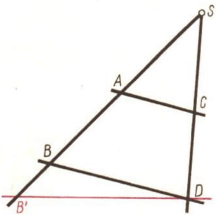
4 **SATZ (Umkehrung zum Strahlensatz, erster Teil): Bilden gleichliegende Strahlenabschnitte eines Strahlenbüschels das gleiche Verhältnis, so werden sie von parallelen Geraden erzeugt.**

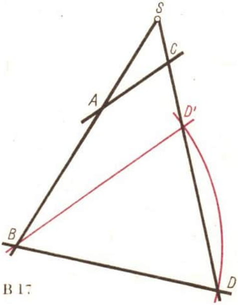
12 *Als Umkehrung von Satz B 2 (Strahlensatz, zweiter Teil) ist anzusehen:*

Voraussetzung: $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{AC} : \overline{BD}$ *Behauptung:* $AC \parallel BD$

Weise unter Benutzung von Bild B 17 nach, daß diese Umkehrung nicht gilt!

B 16





B 17

Nimmt man die Tatsache, daß die geschnittenen Strahlen einen gemeinsamen Scheitelpunkt haben, ausdrücklich unter die Voraussetzungen auf, so erhält man eine weitere Möglichkeit, Umkehrungen zu bilden. Beim zweiten Teil des Strahlensatzes führt das auf einen wichtigen wahren Satz.

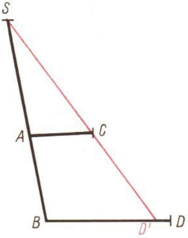
Voraussetzung: $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$; $AC \parallel BD$ *Behauptung:* CD geht durch S

Beweis: Die Behauptung ist gleichbedeutend mit: SC geht durch D. Um das zu zeigen, nennen wir den Schnittpunkt der Geraden SC mit BD zunächst D' (Bild B 18) und müssen dann nachweisen $D' = D$.

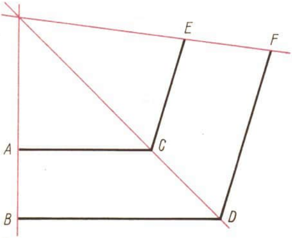
Nach Satz B 2 gilt $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD'}}$.

Nach Voraussetzung ist $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$.

Daraus folgt $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$. Das ist aber nur für $D = D'$ möglich, *was zu beweisen war.*



B 18



B 19

5 **SATZ: Gegeben seien ein Strahl SA (Scheitelpunkt S), auf ihm ein weiterer Punkt B und zwei parallele Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ auf der gleichen Seite des Strahls. Wenn außerdem $\overline{SB} : \overline{SA} = \overline{BD} : \overline{AC}$ gilt, so geht die Gerade CD durch S.**

(13) *Formuliere zum Satz B 3 (Strahlensatz, dritter Teil) eine entsprechende Umkehrung und beweise ihre Gültigkeit!*

Als Verallgemeinerung ergibt sich daraus:
Gegeben seien zwei verschieden lange, parallele Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und zwei parallele Strecken $\overline{CE}$ und $\overline{DF}$, wobei E und F auf der gleichen Seite von CD liegen (Bild B 19). Wenn ferner $\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}$ gilt, so schneiden sich AB, CD und EF in genau einem Punkt.

Aufgaben b 33 bis 35

9 Anwendungen des Strahlensatzes

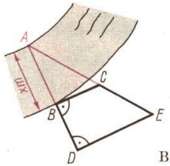
Die verschiedenen Teile des Strahlensatzes und deren Umkehrungen können bei der Bestimmung der Längen unzugänglicher Strecken angewandt werden.

4 Um die Breite $\overline{AB}$ eines Flusses zu ermitteln (Bild B 20), wird senkrecht zu $\overline{AB}$ eine Strecke $\overline{BC}$ abgesteckt und vermessen. Durch Fluchten wird auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus ein Punkt D festgelegt. Parallel zu $\overline{BC}$ wird eine Strecke $\overline{DE}$ derart abgesteckt, daß E auf der Geraden AC liegt. Die Messungen ergeben: $\overline{BC} = 24$ m; $\overline{DE} = 34$ m; $\overline{BD} = 20$ m.
Nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes gilt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$$

Multiplikation mit $\overline{AD} \cdot \overline{DE}$ ergibt

$$\overline{AB} \cdot \overline{DE} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$



B 20

Für die Maßzahl x der Strecke $\overline{AB}$ heißt das:

$$\begin{aligned} x \cdot 34 &= 24\,(x + 20) \\ 34x &= 24x + 480 \\ 10x &= 480 \\ x &= 48 \end{aligned}$$

Da tatsächlich $\frac{48\,\text{m} + 20\,\text{m}}{48\,\text{m}} = \frac{68\,\text{m}}{48\,\text{m}} = \frac{34\,\text{m}}{24\,\text{m}}$ gilt, erhalten wir:
Die Breite des Flusses beträgt 48 m.

(14) **a)** *Beschreibe möglichst eingehend das praktische Vorgehen mit Fluchtstäben und einfachem Feldwinkelmesser bei dieser Vermessung!*
b) *Berechne die Flußbreite für die folgenden Meßergebnisse:*
$\overline{BC} = 24{,}3$ m; $\overline{DE} = 30{,}5$ m; $\overline{BD} = 16{,}5$ m!

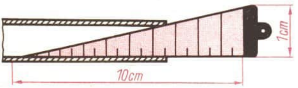
Auch bei verschiedenen Meß- und Zeichengeräten wird der Strahlensatz angewandt.

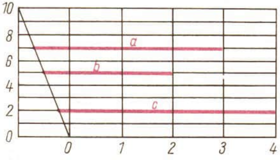
5 Der **Meßkeil** wird zur Messung kleiner Abstände verwendet. Für den lichten (inneren) Durchmesser d des Röhrchens in Bild B 21 gilt nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes $\frac{d}{1\,\text{cm}} = \frac{6{,}7\,\text{cm}}{10\,\text{cm}}$. Der Durchmesser beträgt also 6,7 mm.

6 Das Bild B 22 zeigt ein Rechteck von 5 cm Länge mit zehn Längs- und fünf Querstreifen jeweils gleicher Breite. Mit Hilfe der Diagonalen im ersten Querstreifen kann man Streckenlängen auf Millimeter genau ermitteln. So ist z. B.

B 22

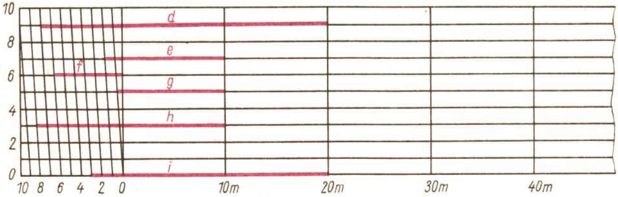
B 21





$a = 3{,}7$ cm. Einen sogenannten **Transversalmaßstab** erhält man, wenn man den ersten Querstreifen wie im Bild B 23 teilt. Damit können Längen sogar bis auf $\frac{1}{100}$ der Einheit genau angegeben werden. Der Transversalmaßstab im Bild B 22 trägt die Bezifferungen 10 m, 20 m usw., weil er für einen Geländeplan im Maßstab 1:500 (2 cm ≙ 10 m) bestimmt ist. So entspricht d in Wirklichkeit eine Strecke von 27,9 m Länge.

B 23



B 24

(15) **a)** *Wie lang sind die Strecken b und c im Bild B 22?*

b) *Wie lang sind die Originalstrecken zu e, f, g, h und i im Bild B 23?*

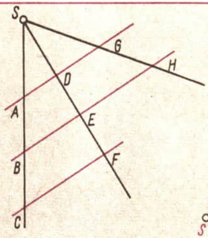
c) *Greife die Strecken im Bild B 24 mit dem Stechzirkel ab, und ermittle ihre Länge mittels des Liniennetzes im Bild B 22!*

d) *Wie lang sind die Originalstrecken im Bild B 24, wenn $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ Strecken auf einer Karte im Maßstab 1:500 sind?*

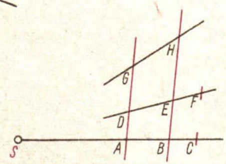
Aufgaben b 36 bis 40

Zusammenfassung

Strahlensatz



Wahre Umkehrungen



Aus $AG \parallel BH$ und $BH \parallel CF$ folgt:

(1) $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$

(2) $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{AD} : \overline{BE}$

(3) $\overline{AD} : \overline{DG} = \overline{BE} : \overline{EH}$

Aus $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ folgt: $AD \parallel BE$ und $BE \parallel CF$.

Aus $AD \parallel BE$ und $\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{AD} : \overline{BE}$ folgt: DE geht durch S.

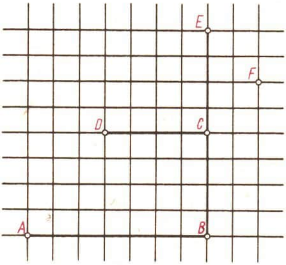
Aus $AG \parallel BH$ und $\overline{AD} : \overline{DG} = \overline{BE} : \overline{EH}$ folgt: AB, DE und GH gehen durch denselben Punkt.

10 Wiederholung: Bewegungen

(16) *Die folgenden Aufträge beziehen sich auf Bild B 27.*

a) *In der Zeichenebene wird eine Verschiebung ausgeführt, bei der der Punkt C den Punkt F als Bildpunkt hat. Gib an, wo die Bildpunkte zu A, B und D liegen! Wo liegt der Punkt, der für D Originalpunkt ist (für den also D Bildpunkt ist)?*

b) *In der Ebene wird eine Drehung (im positiven Drehsinn) ausgeführt mit dem Punkt E als Drehzentrum und einem Drehwinkel von 90°. Gib die Bildpunkte von A, B, C, D und E an! Zeige die Punkte, für die A, B, C, D und E Bildpunkte sind!*



B 27

c) *In der Ebene wird diejenige Spiegelung ausgeführt, bei der jeder der Punkte B und D in sich selbst übergeht. Gib die Bildpunkte zu A, C und E an! Welches sind die Punkte, die für A, C und E Originalpunkte sind? Gib noch eine andere Spiegelung an, bei der die Strecke $\overline{BD}$ als Ganzes in sich übergeht, aber nicht jeder ihrer Punkte mit seinem Bildpunkt zusammenfällt!*

Verschiebungen, **Drehungen** und **Spiegelungen** einer Ebene sind umkehrbar eindeutige Abbildungen der Ebene auf sich. Das heißt: Jeder Punkt der Ebene hat genau einen Bildpunkt und ist seinerseits auch Bildpunkt genau eines Punktes dieser Ebene. Original- und Bildpunkt werden auch als einander entsprechende Punkte bezeichnet.

(17) **a)** *Warum ist es nicht statthaft, bei Verschiebungen nach „dem" Punkt zu fragen, der einem gegebenen Punkt P entspricht?*

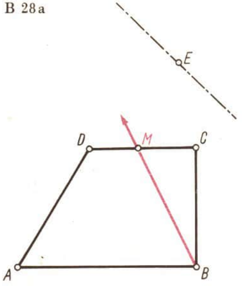
b) *Erläutere, für welche Punkte P bei Drehungen (Spiegelungen) eine derartige Frage berechtigt ist!*

Werden endlich viele Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen nacheinander ausgeführt, so ist das Ergebnis ebenfalls eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich, eine **ebene Bewegung**.

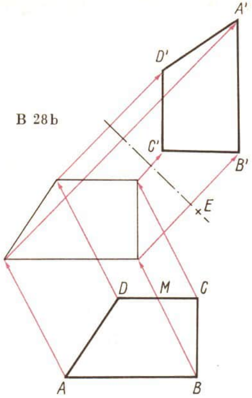
7 *Aufgabe:*
Gegeben ist ein Viereck $ABCD$ und ein Punkt E. Der Punkt M sei der Mittelpunkt von $\overline{CD}$ (Bild B 28 a).
Gesucht ist das Bild $A'B'C'D'$ des Vierecks $ABCD$ bei folgender Bewegung:
Verschiebung um $\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$; danach Spiegelung an der Parallelen zu BD durch E.
Lösung: Siehe Bild B 28 b!

(18) **a)** *Gib auch den Bildpunkt zu E an!*

b) *Wo liegt der Punkt, für den E Bildpunkt ist?*



B 28a



B 28b

Die ebenen Bewegungen haben folgende Eigenschaften:

(1) Das Bild jeder Geraden ist eine Gerade.

(2) Liegt ein Punkt B zwischen den Punkten A und C, so liegt auch der Bildpunkt B' zwischen den Bildpunkten A' und C'.

(3) Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden sind ebenfalls parallel.

(4) Jede Strecke $\overline{AB}$ hat als Bild eine Strecke $\overline{A'B'}$ mit gleicher Länge.

(5) Jeder Winkel (h, k) hat als Bild einen Winkel (h', k') gleicher Größe.

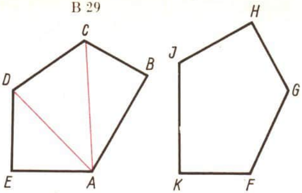
11 Wiederholung: Kongruenz

Bewegungen werden herangezogen, um die Kongruenz von Punktmengen zu erklären. Deshalb werden sie auch **Kongruenzabbildungen** genannt.

6 **DEFINITION: Punktmengen M_1 und M_2 heißen *einander kongruent* (deckungsgleich: $M_1 \cong M_2$) genau dann, wenn es eine Bewegung gibt, die M_1 auf M_2 abbildet.**

Damit ist die Kongruenz auch für krummlinig begrenzte Figuren erklärt. So sind z. B. alle Kreise mit gleichem Radius einander kongruent.
Im Beispiel B 7 sind die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einander kongruent, und zwar gegensinnig kongruent, weil die Punkte A', B', C', D' gegenüber ihren Originalpunkten im entgegengesetzten Drehsinn angeordnet sind.
Speziell für Dreiecke haben wir vier Kongruenzsätze (sws, wsw, sss, ssw) kennengelernt.
Mit Hilfe eines jeden dieser Kongruenzsätze kann man von zwei vorgelegten Dreiecken entscheiden, ob sie einander kongruent sind oder nicht, ohne auf die Bewegungen zurückzugreifen.

B 29



(19) *Von den Fünfecken ABCDE und FGHIK im Bild B 29 sei bekannt:*
$\overline{AB} = \overline{IK} = 3{,}4$ cm; $\overline{BC} = \overline{KF} = 2{,}2$ cm; $\overline{DE} = \overline{EA} = \overline{GH} = \overline{HI} = 2{,}5$ cm;
$\sphericalangle\, BCD = \sphericalangle\, KFG = 116{,}6°$; $\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, DEA = 90°$; $\sphericalangle\, BCA = \sphericalangle\, KFI$;
$\sphericalangle\, CDA = \sphericalangle\, FGI$

a) *Von welchem Eckpunkt des Fünfecks FGHIK aus ist eine Zerlegung in Dreiecke möglich, die zu den Dreiecken im Fünfeck ABCDE kongruent sind? Zeichne die Diagonalen ein und beweise die Kongruenz!*

b) *Erläutere, warum die Fünfecke zueinander kongruent sind! Stelle die einander entsprechenden Punkte, Seiten und Winkel zusammen!*

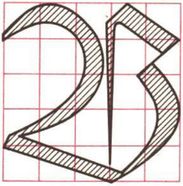
Von Kongruenz kann man auch bei räumlichen Punktmengen und speziell bei Körpern sprechen. So sind z. B. sämtliche Kugeln mit gleichem Radius einander kongruent, alle Würfel mit gleicher Kantenlänge usw. Bei serienmäßig hergestellten Industrieerzeugnissen handelt es sich – von geringfügigen Abweichungen durch Fertigungsungenauigkeiten abgesehen – um kongruente Gebilde. Die räumliche Kongruenz kann auf gewisse umkehrbar eindeutige Abbildungen des Raumes auf sich, die räumlichen Bewegungen, gegründet werden.

Aufgaben b 41 bis 46

12 Maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerungen

Das Bild B 30 zeigt den Großbuchstaben B einer Frakturschrift. Um das maßstäbliche Vergrößern oder Verkleinern beim Nachschreiben zu erleichtern, kann man den Buchstaben mit einem Quadratnetz überziehen. Das Bild B 31 ist dazu eine maßstäbliche Verkleinerung. Der Maßstab, also das Verhältnis der Streckenlängen im Bild zu den entsprechenden Streckenlängen im Original, ist hier 1:2. Man kann auch das Bild B 30 als eine maßstäbliche Vergrößerung von Bild B 31 auffassen. Der Abbildungsmaßstab ist dann 1:0,5 oder 2:1.

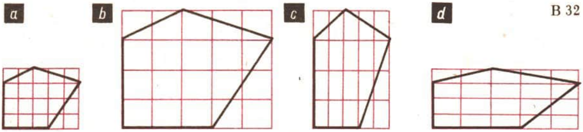
Auch bei Körpern gibt es maßstäbliche Vergrößerungen und Verkleinerungen. Bekannt sind die Modelleisenbahnen in den Abbildungsmaßstäben 1:87 (Nenngröße H0), 1:120 (Nenngröße TT) und 1:160 (Nenngröße N). Solche maßstäblichen Modelle dienen aber nicht nur der Freizeitbeschäftigung. So werden z. B. Tragflächenprofile und Rumpfformen bei der Entwicklung eines neuen Flugzeugs



B 30

an Modellen im Windkanal untersucht, und die Verkehrshochschule „Friedrich List“ in Dresden hat eine große Modellbahnanlage, die nicht nur der Ausbildung, sondern auch wissenschaftlichen Untersuchungen dient.

(20) *Im Bild B 32 wurde ein Fünfeck* (a) *verändert. Dazu wurde im Bild B 32b das Quadratnetz vergrößert und in den Bildern B 32c und d jeweils das Qudratnetz in ein Rechtecknetz mit dem Seitenverhältnis* 1:2 *verformt. Von welchen der Figuren* b, c *und* d *würdest du sagen, sie seien zu* a *„ähnlich“?*



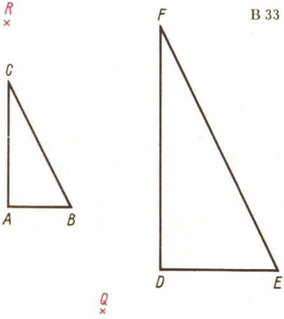
B 32

So wie die Kongruenz auf den Begriff der Bewegung zurückgeführt wird, so kann man auch für einen mathematischen Begriff „Ähnlichkeit“ gewisse umkehrbar eindeutige Abbildungen der Ebene (bzw. des Raumes) auf sich als Grundlage nehmen.

Aufgaben b 47 bis 49

13 Die zentrische Streckung

Bei den Dreiecken ABC und DEF im Bild B 33 ist $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$. Dem Augenschein nach ist $\triangle DEF$ eine maßstäbliche Vergrößerung von $\triangle ABC$, wobei D das Bild von A, E das Bild von B und F das Bild von C ist.



B 33

(21) **a)** *Übertrage das Bild B 33 in dein Heft. und zeichne die Geraden AD, BE und CF! Wieviel Schnittpunkte entstehen?*

b) *Der Schnittpunkt der in* **a)** *gezeichneten Geraden sei Z. Ermittle u, v und w in $\overline{ZD} = u \cdot \overline{ZA}$, $\overline{ZE} = v \cdot \overline{ZB}$ und $\overline{ZF} = w \cdot \overline{ZC}$!*

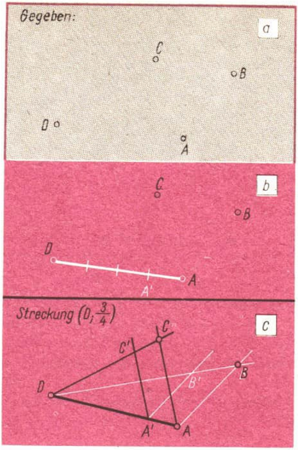
c) *Konstruiere auf dem Strahl ZQ einen Punkt S, für den $\overline{ZS} = u \cdot \overline{ZQ}$ gilt! Konstruiere auf dem Strahl ZR einen Punkt T mit $\overline{ZR} = u \cdot \overline{ZT}$!*

7 **DEFINITION: Eine *zentrische Streckung* der Ebene ist eine Abbildung, bei der jedem Punkt P der Ebene sein Bildpunkt P' folgendermaßen zugeordnet wird:**

1. **Ein Punkt wird als *Streckungszentrum* Z festgelegt.**
2. **Eine positive (rationale oder irrationale) Zahl wird als *Streckungsfaktor* k festgelegt.**
3. **P' liegt auf dem Strahl ZP mit $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$ für $P \neq Z$.**
4. **Z hat sich selbst als Bildpunkt: $Z' = Z$.**

Die zentrische Streckung mit Z als Zentrum und dem Streckungsfaktor k wird häufig kurz mit $(Z;\, k)$ bezeichnet. Aus der Definition ergibt sich: Bei jeder zentrischen Streckung $(Z;\, k)$ existiert zu jedem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt. Ferner ist jeder Punkt Bildpunkt genau eines Punktes, seines Originalpunktes. Genau wie bei den Bewegungen heißen Originalpunkt P und Bildpunkt P' **einander entsprechende Punkte**.

8 **SATZ: Die zentrische Streckung $(Z;\, k)$ ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich.**
Wenn $k = 1$ ist, gilt $P = P'$ für alle Punkte P. Für $k \neq 1$ ist Z der einzige Punkt, der sich selbst entspricht. Da alle Strahlen mit Z als Anfangspunkt nur den Punkt Z gemeinsam haben, können einander entsprechende Punkte P und P' nie von einem solchen Strahl getrennt werden.



B 34

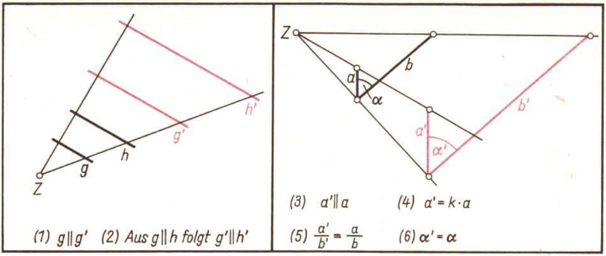
8 Gegeben sind vier Punkte A, B, C, D (Bild B 34).
Gesucht sind A', B', C' bei der zentrischen Streckung $\left(D;\, \frac{3}{4}\right)$.
Konstruktion: Wir zeichnen den Strahl DA und bestimmen auf ihm den Punkt A' durch Konstruktion des $\frac{3}{4}$fachen der Strecke $\overline{DA}$ (↗ Lerneinheit B 3). Nach dem Strahlensatz erhalten wir B' als Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch A' mit dem Strahl DB. Entsprechend erhalten wir C' als Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch A' mit dem Strahl DC.
(Zum Vorgehen bei irrationalem Streckungsfaktor vergleiche Seite 21!)

22 *Eine zentrische Streckung sei festgelegt durch A als Zentrum, A' als Originalpunkt und D als Bildpunkt (Bild B 34). Gib den Streckungsfaktor an! Erläutere, wie man das Bild des Punktes B bei dieser Streckung erhält!*

Aufgaben b 50 bis 54

14 Eigenschaften der zentrischen Streckung

Für jede zentrische Streckung $(Z;\, k)$ gilt:
(1) Das Bild jeder Geraden ist eine Gerade; dabei sind Original- und Bildgerade parallel zueinander.
(2) Parallele Originalgeraden haben parallele Bilder.
(3) Das Bild jeder Strecke ist eine zu ihr parallele Strecke.
(4) Das Bild jeder Strecke ist k-mal so lang wie ihr Original.
(5) Je zwei Strecken stehen zueinander im gleichen Verhältnis wie ihre Bilder.



B 35

(6) Jeder Winkel ist genauso groß wie sein Bildwinkel, d. h., einander entsprechende Winkel sind kongruent (Bild B 35).

Alle diese Eigenschaften lassen sich mit Hilfe des Strahlensatzes und seiner Umkehrungen beweisen; zum Teil können sie auch aufeinander zurückgeführt werden.

Als Beispiel diene der Beweis für die Eigenschaft (1):

Voraussetzung (Bild B 36):

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA} \\ \\ \overline{ZB'} = k \cdot \overline{ZB}\end{array}\right\} \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = k$$

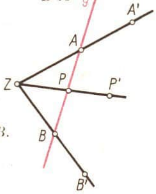
Behauptung:

Die Gerade $A'B'$ ist das Bild der Geraden AB und parallel zu AB.

Beweis:

P sei ein beliebiger Punkt von g, P' sein Bild. Dann gilt

$$\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}\,, \quad \text{also} \quad \frac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}\,.$$



B 36

Nach Satz B 4 (Umkehrung zum ersten Teil des Strahlensatzes; Seite 25) ist deshalb $P'A'$ parallel zu AB und $P'B'$ parallel zu AB. Da es durch P zu AB nur eine Parallele gibt, liegt P' auf der Geraden $A'B'$, und diese ist parallel zu AB. Da P ein beliebiger Punkt der Geraden AB war, ist gezeigt, daß alle Punkte der Geraden AB als Bilder Punkte der Geraden $A'B'$ haben. Andererseits kann man jeden Punkt der Geraden $A'B'$ als Bildpunkt eines Punktes der Geraden AB erhalten, wie die Betrachtung in umgekehrter Richtung zeigt.

15

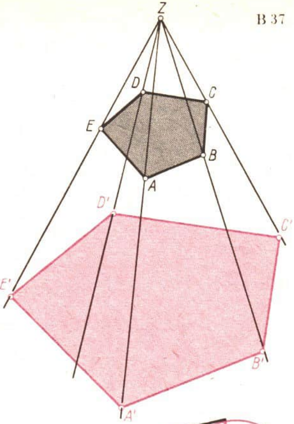
Wir untersuchen das Bild des Fünfecks $ABCDE$ (Bild B 37) bei der Streckung $(Z; k)$.

Da für Punkte, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, auch die Bildpunkte nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bilden die Bildpunkte A', B', C', D', E' der Punkte A, B, C, D, E selbst ebenfalls die Ecken eines Fünfecks. Gemäß Eigenschaft (4) gilt für die einander entsprechenden Fünfeckseiten:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E'A'}}{\overline{EA}} = k\,.$$

Gemäß der Eigenschaft (6) sind die einander entsprechenden Innenwinkel der Fünfecke gleich groß:

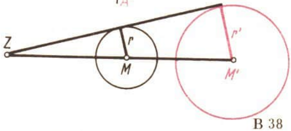
$$\sphericalangle E'A'B' = \sphericalangle EAB;$$
$$\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC;$$
$$\sphericalangle B'C'D' = \sphericalangle BCD;$$
$$\sphericalangle C'D'E' = \sphericalangle CDE;$$
$$\sphericalangle D'E'A' = \sphericalangle DEA$$



B 37

Diese Resultate sind unabhängig von der Lage des Streckzentrums Z, der Größe des Streckungsfaktors k und auch von den Besonderheiten des abgebildeten Vielecks, insbesondere auch der Anzahl seiner Ecken. Wir können aus diesen Überlegungen auf eine weitere Eigenschaft der zentrischen Streckung schließen:

(7) Bei jeder zentrischen Streckung $(Z;\ k)$ ist das Bild jedes n-Ecks $(n \geqq 3)$ wieder ein n-Eck. Einander entsprechende Winkel sind gleich groß; die Verhältnisse entsprechender Seiten sind gleich. Insbesondere ist das Bild eines regelmäßigen n-Ecks wieder ein regelmäßiges n-Eck mit k-facher Seitenlänge.



B 38

Man kann auch das Bild krummlinig begrenzter Figuren bei einer zentrischen Streckung betrachten. So erhält man z. B. (ohne Beweis):

(8) Bei jeder zentrischen Streckung $(Z;\ k)$ ist das Bild jedes Kreises wieder ein Kreis. Dabei ist das Bild des Mittelpunktes des Originalkreises der Mittelpunkt des Bildkreises, und für die Radien r des Orginalkreises und r' des Bildkreises gilt (Bild B 38):

$$r' = k \cdot r.$$

Aufgaben b 55 bis 58

16 Zusammensetzen zweier zentrischer Streckungen

Im Bild B 39 ist P durch die zentrische Streckung $(Z;\ 3)$ in P' überführt worden; danach ist P' durch die zentrische Streckung $\left(Z;\ \frac{3}{4}\right)$ in P'' überführt worden. Offenbar gibt es eine einzige Streckung $(Z;\ k)$, bei der P'' das Bild von P ist. Denn:

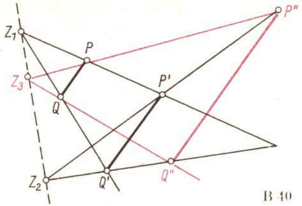
a) Wenn Z, P und P' und außerdem Z, P' und P'' auf dem gleichen Strahl mit Z als Anfangspunkt liegen, dann gilt dies auch für Z, P und P''.

b) Wegen $\overline{ZP'} = 3 \cdot \overline{ZP}$ und $\overline{ZP''} = \frac{3}{4} \cdot \overline{ZP'}$ gilt

$$\overline{ZP''} = \frac{3}{4} \cdot 3\ \overline{ZP} = \frac{9}{4}\ \overline{ZP}.$$

B 39

Der Streckungsfaktor k der durch Zusammensetzen entstandenen Streckung ist also $k = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$.
Im Bild B 40 ist die Streckung $(Z_1; k_1)$ mit der Streckung $(Z_2; k_2)$ zusammengesetzt worden. Dabei ist $k_1 \cdot k_2 \neq 1$. $\overline{P'Q'}$ ist Bild von $\overline{PQ}$ bei der Streckung $(Z_1; k_1)$ und $\overline{P''Q''}$ Bild von $\overline{P'Q'}$ bei der Streckung $(Z_2; k_2)$. Die Zusammensetzung beider Streckungen ist wiederum eine zentrische Streckung. Ihr Streckungsfaktor ist $k_1 \cdot k_2$, ihr Zentrum Z_3 liegt auf der Geraden Z_1Z_2.



B 40

B

(23) *Was geschieht im Fall $k_1 \cdot k_2 = 1$?*

(24) *Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 1{,}5$ cm! Konstruiere sein Bild $A'B'C'D'$ bei der Streckung $(A; 3)$! Der Diagonalenschnittpunkt von $A'B'C'D'$ sei S. Wende auf $A'B'C'D'$ die Streckung $(S; 2)$ an, die $A''B''C''D''$ liefert! Errechne den Streckungsfaktor und konstruiere das Zentrum derjenigen Streckung, die $ABCD$ auf $A''B''C''D''$ abbildet!*

Aufgaben b 59 bis 62

Ähnliche Figuren

17 Ähnlichkeitsabbildungen

9 Im Bild B 41 ist das Dreieck ABC mittels $\left(Z; \frac{8}{5}\right)$ gestreckt und dann das Bild $A'B'C'$ um A' gedreht worden (Drehwinkel 228°).

9 **DEFINITION: Jede Zusammensetzung einer zentrischen Streckung mit einer Bewegung heißt *Ähnlichkeitsabbildung*.**

Da die Abbildung, die jeden Punkt sich selbst zuordnet, ebenfalls eine Bewegung ist, ist jede zentrische Streckung für sich ebenfalls eine Ähnlichkeitsabbildung.
Die Kongruenz von Punktmengen wurde mit Hilfe der Bewegungen erklärt. Nunmehr definieren wir entsprechend die Ähnlichkeit von Punktmengen mit Hilfe der Ähnlichkeitsabbildungen.

10 **DEFINITION: Zwei Punktmengen M_1 und M_2 heißen genau dann *einander ähnlich*, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, bei der sie sich entsprechen. Man schreibt dann: $M_1 \sim M_2$.**

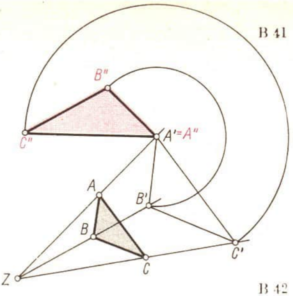
Den Streckungsfaktor nennt man auch **Ähnlichkeitsfaktor**. Ist die vermittelnde Ähnlichkeitsabbildung nur eine Streckung, so bezeichnet man das Streckungszentrum auch als Ähnlichkeitspunkt.

10 Im Bild B 41 gilt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
Ähnlichkeitsfaktor ist $\frac{8}{5}$ $\left(\text{oder } \frac{5}{8}, \text{ falls man } \triangle A'B'C' \text{ als Original ansieht}\right)$. Ähnlichkeitspunkt ist Z.

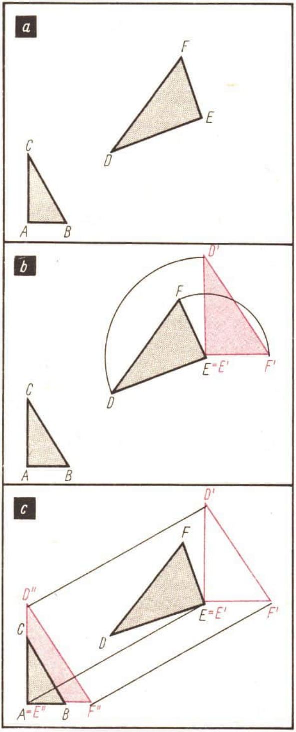
Ferner gilt $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$, ebenfalls mit $\frac{8}{5}$ $\left(\text{oder } \frac{5}{8}\right)$ als Ähnlichkeitsfaktor. Da es keine zentrische Streckung gibt, die $\triangle ABC$ in $\triangle A''B''C''$ überführt, haben diese beiden Dreiecke keinen Ähnlichkeitspunkt.

Nach Definition B 10 ist die Ähnlichkeit für beliebige Punktmengen und damit z. B. auch für krummlinig begrenzte Figuren erklärt. Es ist aber nicht üblich, von ähnlichen Punkten, ähnlichen Geraden, ähnlichen Strahlen und ähnlichen Strecken zu sprechen; denn zwei Punkte, zwei Geraden, ... können stets durch eine Ähnlichkeitsabbildung ineinander übergeführt werden. Zwei Punkte, zwei Geraden, ... sind also stets ähnlich.

B 41



B 42



B

18

Jede Bewegung für sich allein ist bereits eine Ähnlichkeitsabbildung; denn man braucht sie sich ja nur mit einer zentrischen Streckung zusammengesetzt zu denken, bei der $k = 1$ ist. So ist z. B. im Bild B 41 auch $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$.

Die Kongruenz ist der Sonderfall der Ähnlichkeit mit dem Ähnlichkeitsfaktor 1.

25 **a)** *Gib an, welche der auf Seite 30 aufgeführten fünf Eigenschaften der ebenen Bewegungen nicht für alle Ähnlichkeitsabbildungen gelten!*

b) *Gib an, welche der in den Lerneinheiten B 14 und B 15 aufgeführten acht Eigenschaften nicht nur für zentrische Streckungen, sondern für alle Ähnlichkeitsabbildungen gelten!*

11 Es soll untersucht werden, ob $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ von Bild B 42 a einander ähnlich sind, ob es also eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, bei der $\triangle ABC$ Bild von $\triangle DEF$ ist (oder umgekehrt). Wir überlegen: Einander entsprechende Winkel müssen gleich groß sein. Daher

kann eine solche Abbildung nur existieren, wenn es zu jedem Winkel im $\triangle ABC$ einen Winkel gleicher Größe im $\triangle DEF$ gibt. Durch Messen können wir feststellen:

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DEF;$$
$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle FDE;$$
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFD.$$

Wegen $\sphericalangle CAB \neq \sphericalangle FDE$, $\sphericalangle CAB \neq \sphericalangle EFD$, $\sphericalangle BCA \neq \sphericalangle EFD$ kann nur E das Bild von A, D das Bild von C, F das Bild von B sein. Da die jeweils gleichen Winkel in beiden Dreiecken im gleichen Umlaufsinn angeordnet sind, gilt:
$\triangle DEF$ kann durch eine Drehung, z. B. um E, auf $\triangle D'E'F'$ abgebildet werden, so daß

$$\overline{D'E'} \parallel \overline{AC},\ \overline{E'F'} \parallel \overline{AB},\ \overline{F'D'} \parallel \overline{BC}$$

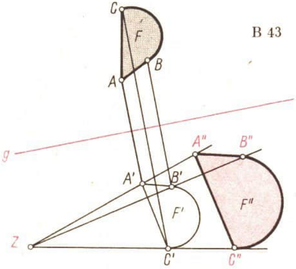
ist (Bild B 42 b).
Dann kann $\triangle D'E'F'$ durch eine Schiebung auf $\triangle D''E''F''$ abgebildet werden (Bild B 42 c). Wegen $\frac{\overline{CA}}{\overline{D''A}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{F''A}}$ (Strahlensatz) kann nun $\triangle AF''D''$ durch die zentrische Streckung $\left(A;\ \frac{\overline{CA}}{\overline{D''A}}\right)$ auf $\triangle ABC$ abgebildet werden. Also kann $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit anschließender Verschiebung und Drehung auf $\triangle DEF$ abgebildet werden, d. h., es gilt $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

26 *Zeichne die innere und äußere Umrandung eines Zeichendreiecks in dein Heft, und weise nach, daß die beiden so entstandenen Dreiecke ähnlich sind!*

Aufgaben b 63 bis 66

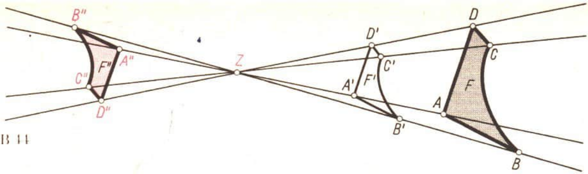
19 Gleichsinnige und ungleichsinnige Ähnlichkeit

Enthält die Ähnlichkeitsabbildung genau eine Geradenspiegelung (oder eine andere ungerade Anzahl von Geradenspiegelungen), so sind Original- und Bildfigur **ungleichsinnig ähnlich**. Zum Beispiel sind im Bild B 43 F und F' ungleichsinnig ähnlich, ebenso F und F''. In allen anderen Fällen spricht man von **gleichsinniger Ähnlichkeit**.



B 43

Im Bild B 44 ist die Figur F' das Bild von F bei der Streckung $(Z; 0{,}6)$. F'' ist das Bild von F' bei einer Drehung um Z mit dem Drehwinkel 180° (einer Punktspiegelung). Man sagt hierfür auch: F'' ist das Bild von F bei der Streckung $(Z; -0{,}6)$. Z wird auch hier als Ähnlichkeitspunkt bezeichnet.
Allgemein: Eine Streckung $(Z; -k)$ mit $k > 0$ wird als Zusammensetzung einer Streckung $(Z; k)$ mit einer Drehung um Z mit dem Drehwinkel von 180° erklärt.



B 11

Beachte: Eine Streckung $(Z; k)$ mit $k < 0$ verändert den Umlaufsinn nicht!

27 a) *Welche der Eigenschaften (1) bis (8) aus den Lerneinheiten B 14 und B 15 müssen nach Zulassen negativer Streckfaktoren anders formuliert werden?*

b) *Gib eine Konstruktionsvorschrift für eine Streckung $(Z; k)$ mit negativem k an, ohne dabei die Drehung zu benutzen!*

Aufgaben b 67 bis 71

20 Ähnlichkeit von Vielecken

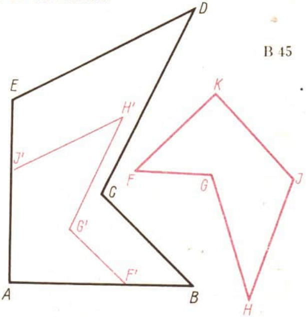
Im Beispiel B 11 war es recht langwierig, eine Ähnlichkeitsabbildung zu zwei vorgegebenen Figuren zu finden. Es gibt Möglichkeiten, um wenigstens für Vielecke bequemer entscheiden zu können, ob Ähnlichkeit vorliegt oder nicht. Beachten wir, daß Bewegungen als Kongruenzabbildungen nichts an der Größe von Winkeln und der Länge von Strecken ändern, so können wir aus Eigenschaft (7) der zentrischen Streckung (Seite 35) einen Satz über ähnliche Vielecke folgern:

11 **SATZ:**
Wenn zwei n-Ecke ($n \geqq 3$) einander ähnlich sind,
so gilt:
a) Einander entsprechende Winkel sind gleich groß.
b) Einander entsprechende Seiten stehen im gleichen Verhältnis.

Soll untersucht werden, ob gegebene Vielecke zueinander ähnlich sind, so können wir die folgende Umkehrung des Satzes B 11 anwenden.

12 **SATZ:**
Wenn sich zwischen den Eckpunkten zweier n-Ecke ($n \geqq 3$) bei Beachtung der Reihenfolge eine umkehrbar eindeutige Zuordnung herstellen läßt, wobei
a) einander zugeordnete Innenwinkel gleich groß sind,
b) einander zugeordnete Seiten das gleiche Verhältnis bilden,
so sind die beiden n-Ecke einander ähnlich.

B 45



Den Beweis dieses Satzes führen wir am Beispiel der beiden Fünfecke $ABCDE$ und $FGHIK$ im Bild B 45.
(Bei anderer Eckenzahl oder anderer Lage würde er ganz entsprechend verlaufen.)

Voraussetzung:

a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle KFG$; $\sphericalangle BCD = \sphericalangle FGH$; $\sphericalangle CDE = \sphericalangle GHI$;
$\sphericalangle DEA = \sphericalangle HIK$; $\sphericalangle EAB = \sphericalangle IKF$.

b) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{KF}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{GH}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{HI}} = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{IK}} = k$

Behauptung: Es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der $ABCDE$ und $KFGHI$ einander entsprechen.

Beweis: Wegen der Gleichheit der Winkel gibt es eine Bewegung (Drehung und Verschiebung), bei der für das Bild $F'G'H'I'K'$ von $FGHIK$ gilt $A = K'$, F' liegt auf $\overline{AB}$ und I' auf $\overline{AE}$, $\overline{F'G'} \parallel \overline{BC}$, $\overline{G'H'} \parallel \overline{CD}$, $\overline{H'I'} \parallel \overline{DE}$. Da bei dieser Bewegung die Streckenlängen erhalten bleiben, gilt

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{F'G'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{G'H'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{H'I'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{I'A}} = k$$

Nach Satz B 5 (Umkehrung zum zweiten Teil des Strahlensatzes) müssen dann die Geraden DH' und CG' durch A gehen.
Nach dem Strahlensatz gilt also

$$\overline{EA} : \overline{I'A} = \overline{DA} : \overline{H'A} = \overline{CA} : \overline{G'A} = \overline{BA} : \overline{F'A} = k$$

Daraus folgt: $ABCDE$ ist Bild von $AF'G'H'I'$ bei der zentrischen Streckung $(A; k)$. Es gibt also eine Ähnlichkeitsabbildung, wie sie in der Behauptung gefordert wurde.
Als Spezialfall ergibt sich aus Satz B 12, daß zwei regelmäßige n-Ecke ($n \geqq 3$) stets einander ähnlich sind.

12 Es soll untersucht werden, ob die Parallelogramme $ABCD$ und $AEFD$ im Bild B 46 einander ähnlich sind. Dabei sei $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm, E Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und F Mittelpunkt von $\overline{DC}$. Die Winkelgleichheit ist erfüllt:

$$\sphericalangle FDA = \sphericalangle CDA;\ \sphericalangle AEF = \sphericalangle ABC;\ \sphericalangle DAE = \sphericalangle DAB;$$
$$\sphericalangle EFD = \sphericalangle BCD.$$

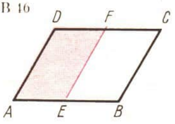
Bleibt zu untersuchen, ob

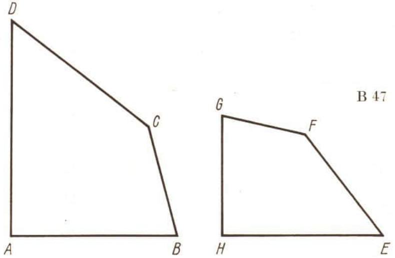
(1) $\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AD}$

oder

(2) $\overline{AB} : \overline{EF} = \overline{AD} : \overline{AE}$

B 46





B 47

gilt. Die Verhältnisgleichung (1) scheidet aus, denn hier würde die falsche Aussage $2 = 1$ entstehen. Die Proportion (2) ergibt durch Einsetzen $4 : 3 = 3 : 2$, also ebenfalls eine falsche Aussage. $ABCD$ und $AEFD$ sind also nicht einander ähnlich.

Es soll nun ermittelt werden, wie lang $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ hätten gewählt werden müssen, damit das Halbieren zu einem zum Ausgangsparallelogramm ähnlichen Parallelogramm geführt hätte:

$$a : b = b : \tfrac{1}{2} a$$
$$\tfrac{1}{2} a^2 = b^2$$
$$a^2 = 2b^2$$
$$a = b \cdot \sqrt{2}.$$

Eine Seite hätte also das $\sqrt{2}$-fache der anderen sein müssen, bzw. das Verhältnis beider Seiten müßte $\sqrt{2}$ sein.

28 *Überprüfe die Vierecke ABCD und EFGH im Bild B 47 nach Satz B 11 bzw. Satz B 12 auf Ähnlichkeit!* Aufgaben b 72 bis 74

B

21 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Die Kongruenz zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ können wir mit Hilfe der vier Kongruenzsätze feststellen. Diese Sätze sagen aus, daß die Übereinstimmung in drei geeigneten Stücken für die Kongruenz bereits ausreicht, beispielsweise $a' = a$, $b' = b$, $\gamma' = \gamma$. Ganz entsprechende Sätze gibt es auch für die Ähnlichkeit von Dreiecken. Um sie vermuten zu können, überlegen wir:
Da Kongruenz dasselbe ist wie Ähnlichkeit mit $k = 1$, muß jeder Kongruenzsatz Spezialfall eines Ähnlichkeitssatzes für $k = 1$ sein. Dazu drücken wir in den vier Kongruenzsätzen die Beziehungen $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ aus durch $a' : a = 1$, $b' : b = 1$, $c' : c = 1$ und ersetzen dann diese 1 durch k:

Kongruenzsatz (wsw)	$a' : a = 1$;	$\beta = \beta'$;	$\gamma = \gamma'$
entsprechender Ähnlichkeitssatz	$a' : a = k$;	$\beta = \beta'$;	$\gamma = \gamma'$
Kongruenzsatz (sws)	$a' : a = 1$;	$b' : b = 1$;	$\gamma = \gamma'$
entsprechender Ähnlichkeitssatz	$a' : a = k$;	$b' : b = k$;	$\gamma = \gamma'$
Kongruenzsatz (sss)	$a' : a = 1$;	$b' : b = 1$;	$c' : c = 1$
entsprechender Ähnlichkeitssatz	$a' : a = k$;	$b' : b = k$;	$c' : c = k$
Kongruenzsatz (ssw)	$a' : a = 1$;	$b' : b = 1$;	$(a \geqq b)$; $\alpha = \alpha'$
entsprechender Ähnlichkeitssatz	$a' : a = k$;	$b' : b = k$;	$(a \geqq b)$; $\alpha = \alpha'$

Wir können damit vier Ähnlichkeitssätze für Dreiecke formulieren.

13 **HAUPTÄHNLICHKEITSSATZ: Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so sind sie einander ähnlich.**

(Das Seitenverhältnis $a' : a = k$ kann unberücksichtigt bleiben, denn irgendein Verhältnis k haben zwei Strecken stets.) Den Beweis für Satz B 13 haben wir durch die Überlegungen zum Beispiel B 11 in Lerneinheit B 18 bereits erbracht. Denn dort benutzten wir von den Dreiecken nur, daß zu jedem Innenwinkel des einen Dreiecks ein gleich großer im anderen Dreieck existiert. Wegen des Winkelsummensatzes ist das aber bereits erfüllt, wenn es für zwei Winkel gilt.

29 *Zeichne ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle\, BCA = 90°$ und der Höhe CD! Untersuche mit Hilfe des Satzes B 13 die entstandenen drei Dreiecke auf Ähnlichkeit!*

14 **SATZ: Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen und die anliegenden Seiten gleiche Verhältnisse bilden, so sind die Dreiecke einander ähnlich.**

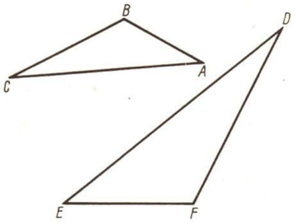
Voraussetzung: (Bild B 48) $\sphericalangle\, BAC = \sphericalangle\, DEF$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = k$.
Behauptung: Es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der $\triangle\, DEF$ Bild von $\triangle\, ABC$ ist.
Beweis: Bei der zentrischen Streckung $(A; k)$ gilt für $\triangle\, AB'C'$ als Bild von $\triangle\, ABC$:

$$\sphericalangle\, C'AB' = \sphericalangle\, CAB$$
$$\overline{C'A} : \overline{CA} = \overline{B'A} : \overline{BA} = k \quad \text{(nach Definition B 7)}$$

Aus der Voraussetzung folgt dann:

$$\sphericalangle\, C'AB' = \sphericalangle\, DEF;\ \overline{C'A} = \overline{DE};\ \overline{B'A} = \overline{EF}.$$

Damit sind $\triangle\, C'AB'$ und $\triangle\, DEF$ kongruent nach dem Kongruenzsatz (sws); also gibt es eine Bewegung, bei der $\triangle\, DEF$ Bild von $C'AB'$ ist. Die Zusammensetzung dieser Bewegung mit der Streckung $(A; k)$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der $\triangle\, DEF$ Bild von $\triangle\, ABC$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.



B 48

15 **SATZ: Wenn jede Seite eines Dreiecks mit je einer Seite eines anderen gleiche Verhältnisse bildet, so sind die Dreiecke einander ähnlich.**

16 **SATZ: Wenn zwei Seiten eines Dreiecks mit je einer Seite eines anderen gleiche Verhältnisse bilden und wenn die beiden Dreiecke in dem Winkel übereinstimmen, der der jeweils größeren der beiden Seiten gegenüberliegt, so sind die Dreiecke einander ähnlich.**

Die Sätze B 15 und 16 lassen sich genauso mit Hilfe der entsprechenden Kongruenzsätze beweisen, wie dies für Satz B 14 geschehen ist.

30 *Überprüfe die folgenden Vermutungen!*
Gleichschenklige Dreiecke sind stets einander ähnlich,
a) *wenn sie in einem Winkel übereinstimmen;*
b) *wenn sie im Winkel an der Spitze übereinstimmen;*
c) *wenn sie in einem Basiswinkel übereinstimmen;*
d) *wenn die Schenkel gleiche Verhältnisse bilden;*
e) *wenn das Verhältnis der Basen gleich dem Verhältnis aus je einem Schenkel beider Dreiecke ist.*

Mit Hilfe der Sätze B 13 bis 17 können wir die Ähnlichkeit von Dreiecken nachweisen, ohne eine Ähnlichkeitsabbildung angeben oder alle Winkel und Seiten berücksichtigen zu müssen.

Aufgaben b 75 bis 78

23 Ähnlichkeit von krummlinig begrenzten Figuren und von Körpern

Zum Nachweis der Ähnlichkeit bei krummlinig begrenzten Figuren ist im allgemeinen eine Ähnlichkeitsabbildung anzugeben. Für Kreise ist das allerdings nicht nötig, denn zwei Kreise sind stets einander ähnlich.
Die Definition B 7 (Seite 32) für die zentrische Streckung läßt sich von der Ebene auf den Raum übertragen, und räumliche Streckungen können mit räumlichen Bewegungen zu räumlichen Ähnlichkeitsabbildungen zusammengesetzt werden. Zwei räumliche Punktmengen werden dann als ähnlich bezeichnet, wenn es eine (räumliche) Ähnlichkeitsabbildung gibt, bei der diese Punktmengen einander entsprechen. Als räumliche Punktmengen können Körper auftreten, und hier gilt auch : Entsprechende Winkel sind gleich groß, entsprechende Strecken stehen im gleichen Verhältnis.
Außerdem sind entsprechende Flächen einander ähnlich.
Es gibt auch hier Sätze über Polyeder, die den Sätzen B 11 und 12 für Vielecke entsprechen. So sind speziell alle Würfel einander ähnlich, aber z. B. auch alle regelmäßigen Pyramiden jeweils gleicher Seitenzahl, bei denen das Verhältnis der Höhen gleich dem Ähnlichkeitsfaktor der Grundflächen ist. Auch alle Kugeln sind einander ähnlich.

(31) **a)** *Überprüfe, ob die Milchflaschen von $\frac{1}{4}$ l, $\frac{1}{2}$ l und 1 l Fassungsvermögen einander ähnlich sind!*
b) *Wähle aus den Bechergläsern des Chemieraumes drei unterschiedlich große, einander ähnliche aus!*

Aufgaben b 79 bis 82

B

24 Umfang und Inhalt

Für zwei Kreise mit den Radien r_1 und $r_2 = k \cdot r_1$ gilt:

$$u_1 = 2\pi r_1;\ u_2 = 2\pi \cdot r_2 = 2\pi \cdot k \cdot r_1 = k \cdot 2\pi \cdot r_1 = k \cdot u_1$$
$$A_1 = \pi r_1^2;\ A_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot k \cdot r_1 \cdot k \cdot r_1 = k^2 \cdot \pi \cdot r_1^2 = k^2 \cdot A_1$$

Allgemein gilt für zwei beliebige ähnliche Punktmengen, die einen Umfang und einen Flächeninhalt haben:

17 **SATZ: Wenn zwei ähnliche ebene Figuren F und F' den Ähnlichkeitsfaktor k besitzen, so gilt für ihre Umfänge $u' = k \cdot u$ und für ihre Flächeninhalte $A' = k^2 \cdot A$.**

Auf einen Beweis dieses Satzes wird verzichtet.

(32) *Führe den Nachweis für zwei ähnliche Dreiecke so, wie er oben für zwei Kreise geführt wurde!*

Es gibt auch einen Satz über ähnliche Körper, der dem Satz B 17 entspricht und der hier ebenfalls ohne Beweis angeführt wird:

18 **SATZ: Wenn zwei ähnliche Körper den Ähnlichkeitsfaktor k besitzen, so gilt für die Inhalte ihrer Oberflächen $A_O' = k^2 \cdot A_O$ und für ihre Volumina $V' = k^3 \cdot V$.**

(33) **a)** *Überprüfe Satz B 18 an zwei Würfeln mit den Kantenlängen 2 cm und 6 cm!*
b) *Welche Kantenlängen müßte eine Streichholzschachtel haben, die das achtfache Fassungsvermögen der üblichen hat und zu ihr ähnlich ist? In welchem Verhältnis stehen die Materialaufwendungen, wenn beide Schachteln aus dem gleichen Material gefertigt werden?*

Aufgaben b 83 bis 85

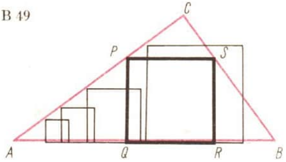
25 Konstruktion mit Hilfe der Ähnlichkeit

Die Sätze über die zentrische Streckung und über ähnliche Figuren können bei verschiedenen Konstruktionsaufgaben angewandt werden. Dem Lösen aller derartigen Aufgaben ist gemeinsam: Von den geforderten Bedingungen wird zunächst ein Teil vernachlässigt, damit man leicht eine Hilfsfigur konstruieren kann, die der verlangten Figur ähnlich ist. Die gesuchte Figur selbst erhält man dann durch eine Ähnlichkeitsabbildung. Diese Abbildung findet man häufig am bequemsten, wenn man sich die Schar aller möglichen Hilfsfiguren vergegenwärtigt.

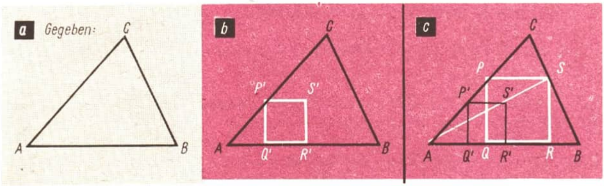
13 Einem gegebenen Dreieck ABC ist ein Quadrat $PQRS$ einzuschreiben, von dem die Seite $\overline{QR}$ auf $\overline{AB}$, die anderen Eckpunkte auf $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ liegen.
Lösungsüberlegung: Denken wir uns die Bedingung für S weggelassen, so ergibt sich eine Schar von Quadraten, von der das gesuchte ein Vertreter ist (Bild B 49). Wir erhalten es, indem wir zunächst ein beliebiges Quadrat der Schar konstruieren und dann von A aus zentrisch strecken.
Konstruktion (Bild B 50): Nach Wahl eines beliebigen Punktes P' auf $\overline{AC}$ wird von P' auf $\overline{AB}$ das Lot $\overline{P'Q'}$ gefällt und daraus das Quadrat $P'Q'R'S'$ konstruiert. Das gesuchte Quadrat $PQRS$ erhält man durch die zentrische Streckung $\left(A; \frac{\overline{AS}}{\overline{AS'}}\right)$; dabei ergibt sich S als Schnittpunkt von AS' mit $\overline{BC}$. $\overline{PS}$ und $\overline{RS}$ werden als Parallelen zu $\overline{P'S'}$ und $\overline{R'S'}$ durch S festgelegt, $\overline{PQ}$ als Lot von P auf $\overline{AB}$.

(34) **a)** *Begründe, warum das so erhaltene Viereck PQRS wirklich ein Quadrat ist!*
b) *Erläutere, wie die gleiche Konstruktionsaufgabe mit einer Streckung von C aus zulösen ist! Welche Bedingung wird dann zunächst vernachlässigt?*

B 49



B 50



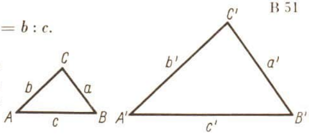
Häufig ist es zweckmäßig, für die Lösung von Konstruktionsaufgaben die in den Sätzen B 11 und 12 bzw. in den Ähnlichkeitssätzen auftretenden Verhältnisgleichungen umzuformen. Wir wissen, daß beispielsweise die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (Bild B 51) bedeutet:

$$a' : a = b' : b = c' : c \; (= k),$$

falls $(A;\, A')$, $(B;\, B')$ und $(C;\, C')$ die Paare einander entsprechender Punkte sind. Das kann auch umgeformt werden zu

$$a' : b' = a : b;\; a' : c' = a : c;\; b' : c' = b : c.$$

B 51



B

19 **SATZ: Wenn zwei Dreiecke einander ähnlich sind, so verhalten sich die Seiten des einen Dreiecks zueinander wie die ihnen entsprechenden Seiten des anderen.**

Dieser Satz gilt nicht nur für Dreiecke, sondern für beliebige n-Ecke ($n \geqq 3$), denn für sie lassen sich die nach Satz B 11 b) bestehenden Verhältnisgleichungen genauso umformen. Für Dreiecke gilt auch seine Umkehrung, denn das ist ja nichts anderes als eine Umformulierung des Satzes B 15.

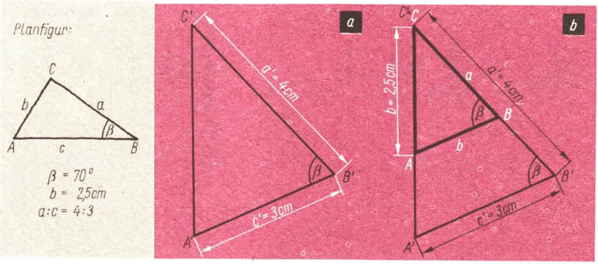
35 **a)** *Formuliere die Ähnlichkeitssätze B 14 bis 16 entsprechend in Worten!*
b) *Erläutere durch ein Gegenbeispiel (Vierecke), daß die Umkehrung von Satz B 19 für $n \geqq 3$ nicht gilt!*

14 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren mit $a : c = 4 : 3$, $\beta = 70°$ und $b = 2{,}5$ cm. *Konstruktion* (Bild B 52): Man konstruiert zunächst ein beliebiges Dreieck $A'B'C'$ mit $a' : c' = 4 : 3$ und $\beta = 70°$, beispielsweise, indem man $a' = 4$ cm und $c' = 3$ cm wählt. Das gesuchte Dreieck ABC ist zu $\triangle A'B'C'$ ähnlich. Um $b = 2{,}5$ cm zu erhalten, trägt man b auf $A'C'$ von C' $(= C)$ aus ab und zeichnet durch den erhaltenen Punkt A die Parallele zu c', die $B'C'$ in B schneidet.

36 **a)** *Gib das Zentrum der damit durchgeführten zentrischen Streckung an! Ermittle durch Messen den Streckungsfaktor!*
b) *Wie läßt sich diese Aufgabe mit einer zentrischen Streckung von A' aus lösen?*

Aufgaben b 86 bis 95

B 52



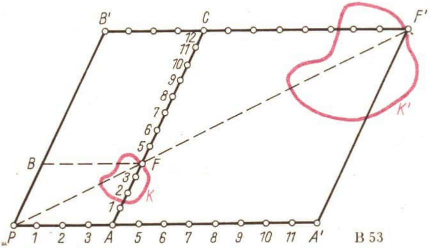
27 Anwendungen der Ähnlichkeit

Die in den Lerneinheiten B 8 und 9 behandelten Anwendungen des Strahlensatzes lassen sich auch als Anwendungen der Ähnlichkeit ebener Figuren auffassen. Es gibt aber noch weitere Meß- und Zeichengeräte, bei denen die Ähnlichkeit ausgenutzt wird.

15 Ein Gerät zur mechanischen Vergrößerung und Verkleinerung ebener Figuren ist der **Pantograph**. Eine vereinfachte Ausführung wird auch als Storchschnabel bezeichnet. Er wurde bereits im Jahre 1600 erfunden und beruht auf folgendem Prinzip (Bild B 53): Ein Parallelogramm $PAFB$ ist mit einem größeren $PA'F'B'$ durch einen Querstab $\overline{AC}$ fest verbunden. Alle Eckpunkte sind als Gelenkpunkte ausgebildet, doch sind die beiden Parallelogramme in jeder Lage einander ähnlich. Hält man den „Pol" P fest und beschreibt mit dem „Fahrstift" F eine beliebige Kurve K, so beschreibt der „Zeichenstift" F' eine dazu ähnliche Kurve K'. Das Ähnlichkeitsverhältnis, also den Maßstab, kann man durch Verschieben des Stabes $\overline{AC}$ und entsprechende Einstellung des Fahrstiftes verändern. Vertauscht man Fahrstift und Zeichenstift, so dient der Pantograph zum Verkleinern.

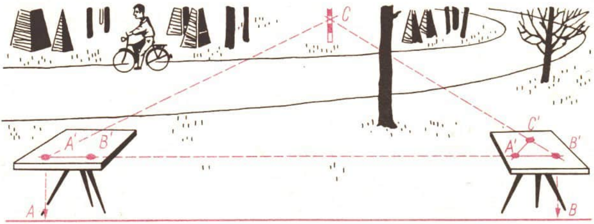
37 *Ermittle das Vergrößerungsverhältnis im Bild B 53!*

16 Zur kartographischen Aufnahme eines Geländestücks dient das Meßtischverfahren (Bild B 54). Eine quadratische Platte, die mit Zeichenpapier überspannt ist, ruht als Meßtisch auf einem Dreifuß und ist um eine lotrechte Achse schwenkbar.



B 53

B 54



Eine Wasserwaage dient zum waagerechten Einstellen. In dem aufzunehmenden Gelände sei die waagerechte Entfernung zweier Punkte A und B bekannt. Die Standlinie $\overline{AB}$ wird im gewünschten Maßstab (meist 1:25000) als Strecke $\overline{A'B'}$ auf das Meßtischblatt übertragen. Um das Bild C' eines dritten Geländepunktes C festzulegen, stellt man den Meßtisch zunächst in A so auf, daß A' lotrecht über A liegt und $\overline{A'B'}$ parallel zu $\overline{AB}$ verläuft. Der Strahl $A'C'$ wird durch den Peilstrahl nach C bestimmt. Danach stellt man den Meßtisch in B so auf, daß B' lotrecht über B liegt, und verfährt entsprechend. C' ergibt sich als Schnittpunkt der Strahlen $A'C'$ und $B'C'$. Wendet man dieses Verfahren für verschiedene Geländepunkte an, erhält man auf dem Meßtischblatt ein Bild des Geländes im gewünschten Maßstab. Mit dem Meßtisch können so auch unzugängliche Strecken aufgenommen werden.

Aufgaben b 96 bis 101

B

Die Satzgruppe des Pythagoras

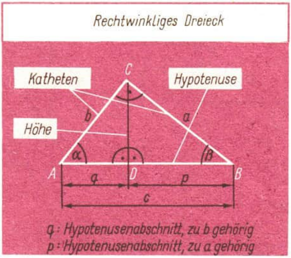
28 Ähnlichkeit im rechtwinkligen Dreieck

(38) **a)** *Begründe, warum von den drei Seiten eines jeden rechtwinkligen Dreiecks eine Seite am längsten ist!*

b) *Erkläre, was man unter der Hypotenuse und den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks versteht (Bild B 55)!*

(39) *Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck wie im Bild B 55, und fälle die Lote $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$ von D auf a und b! Gib Hypotenusen, Katheten usw. in den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken an!*

Wir vereinbaren: Wenn von einem rechtwinkligen Dreieck ABC gesprochen wird, soll — falls nicht ausdrücklich anderes hinzugefügt wird — C der Scheitelpunkt des rechten Winkels, also $\overline{AB} = c$ die Hypotenuse sein, die Katheten sind dann a und b.
Im Auftrag B 29 (Seite 41) erkannten wir mit Hilfe des Hauptähnlichkeitssatzes für Dreiecke: Zieht man im rechtwinkligen Dreieck ABC die Höhe $\overline{CD}$, so entstehen zwei Dreiecke, die untereinander und zum Dreieck ABC ähnlich sind. Aus der folgenden Tabelle geht hervor, welche Seiten dabei einander entsprechen.



B 55

	$\triangle ABC$	$\triangle ADC$	$\triangle DBC$
Hypotenuse	c	b	a
Kathete gegenüber $\alpha = \sphericalangle BCD$	a	h	p
Kathete gegenüber $\beta = \sphericalangle DCA$	b	q	h

Da a, b und h jeweils in zwei Dreiecken vorkommen, gibt es drei Proportionen, in denen diese Strecken doppelt auftreten:

(1) $h : q = p : h$ (2) $a : p = c : a$ (3) $b : q = c : b$

Diese Proportionen führen uns zu wichtigen Sätzen.

Aufgaben b 102 und 104

29 Der Höhensatz

Aus $\triangle ABC \sim \triangle DBC$ folgt $\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$ [Gleichung (1) aus Lerneinheit B 28]. Durch Multiplikation mit $q \cdot h$ ergibt sich

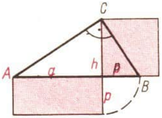
$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

20 **HÖHENSATZ: Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhenmaßzahl gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der Hypotenusenabschnitte.**

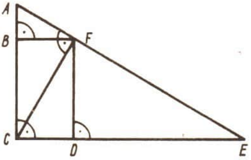
Etwas leichter läßt sich eine andere Formulierung merken:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten (Bild B 56)

40 **a)** *Erläutere, inwiefern in den beiden Formulierungen des Höhensatzes das Wort „Quadrat" unterschiedliche Bedeutung hat!*
b) *Stelle für die drei Höhen im Bild B 57 die Gleichungen nach dem Höhensatz auf!*

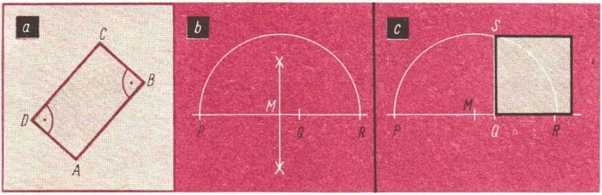


B 56



B 57

B 58



17 Zu dem Rechteck $ABCD$ (Bild B 58a) soll ein flächengleiches Quadrat konstruiert werden. Dazu genügt es offenbar, ein rechtwinkliges Dreieck mit $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ als Hypotenusenabschnitte zu konstruieren. Sein Höhenquadrat ist dann die Lösung.

Konstruktion (Bild B 58b): Auf einer Geraden werden aneinander zwei Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{QR}$ mit den Längen von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ abgetragen. Um den Mittelpunkt M von $\overline{PR}$ wird mit $\overline{MP} = \overline{MR}$ als Radius ein Halbkreis geschlagen. Die Senkrechte auf PR in Q schneidet diesen Halbkreis in S. Nach dem Satz von THALES ist $\sphericalangle\, RSP = 90°$. Das Quadrat mit $\overline{QS}$ als Seite ist also das gesuchte.

41 *Konstruiere eine Strecke der Länge* $\sqrt{10}$ cm*! (Anleitung: Zerlege* 10 *in zwei Faktoren!)*

Mit Hilfe des Höhensatzes läßt sich zu jeder Zahl $a > 0$ die Quadratwurzel konstruieren, denn jede Zahl a läßt sich als Produkt, zumindest als $a \cdot 1$, schreiben.

Aufgaben b 105 bis 108

30 Der Kathetensatz

Aus $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ und $\triangle DBC \sim \triangle ABC$ (Bild B 54) folgt $\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$ und $\frac{b}{q} = \frac{c}{b}$ [Gleichungen (2) und (3) aus Lerneinheit B 28].

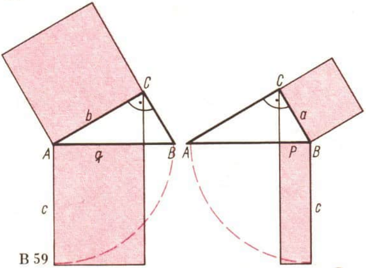
Daraus ergibt sich

$$\boxed{a^2 = c \cdot p \text{ und } b^2 = c \cdot q}$$

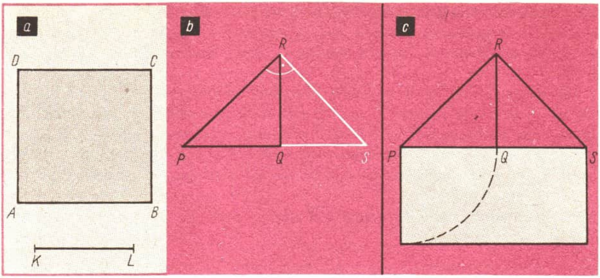
21 **KATHETENSATZ: Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat jeder Kathetenmaßzahl gleich dem Produkt aus den Maßzahlen von Hypotenuse und dem (der Kathete) zugehörigen Hypotenusenabschnitt.**

Das Bild B 59 führt noch zu einer anderen Formulierung:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist jedes Kathedenquadrat flächengleich dem Rechteck aus Hypotenuse und zugehörigem Hypotenusenabschnitt.



B 59



B 60

(42) *Stelle für die Katheten der Dreiecke ACE, ACF und CEF im Bild B 57 die Gleichungen nach dem Kathetensatz auf!*

18 Zu dem Quadrat mit $\overline{AB}$ (Bild B 60a) als Seite soll ein flächengleiches Rechteck konstruiert werden. Eine Seite dieses Rechtecks soll die Länge von $\overline{KL}$ haben. Dazu können wir den Kathetensatz benutzen: Gesucht ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $\overline{AB}$ als Kathete und $\overline{KL}$ als zugehörigem Hypotenusenabschnitt. Die Hypotenuse selbst ist dann die gesuchte zweite Rechteckseite.
Konstruktion (Bild B 60b): Auf einer Geraden wird eine Strecke $\overline{PQ} = \overline{KL}$ festgelegt und auf $\overline{PQ}$ in Q die Senkrechte errichtet. Um P wird ein Kreis mit $\overline{AB}$ als Radius geschlagen; er schneidet die Senkrechte in R. Die Senkrechte auf $\overline{PR}$ in R schneidet PQ in S. Das Rechteck mit $\overline{PQ}$ und $\overline{PS}$ als Seiten ist das verlangte.

(43) **a)** *Kann im Falle des Beispiels B 18 die vorgegebene Rechteckseite beliebig lang sein?*
b) *Wie verläuft die Konstruktion, wenn die vorgegebene Rechteckseite länger als die Quadratseite ist?*
c) *Erläutere, wie man die Aufgabe im Beispiel B 17 mit Hilfe des Kathetensatzes und die im Beispiel B 18 mit Hilfe des Höhensatzes lösen kann!*

Aufgaben b 109 bis 113

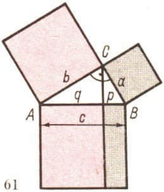
31 Der Satz des Pythagoras

Die beiden Rechtecke
aus der Hypotenuse und den Hypotenusenabschnitten
ergeben zusammen das Hypotenusenquadrat (Bild B 61).

$$c \cdot p + c \cdot q = c\,(p + q).$$

Da $c \cdot p = a^2$ und $c \cdot q = b^2$ und $p + q = c$, erhalten wir

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



B 61

22 **SATZ VON PYTHAGORAS:**[1] **Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe aus den Quadraten der Kathetenmaßzahlen gleich dem Quadrat der Hypotenusenmaßzahl.**

oder:

In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Kathetenquadrate zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Hypothenusenquadrat.

44 **a)** *Stelle für die Hypotenusen der sieben Dreiecke im Bild B 57 die Gleichungen nach dem Satz des* PYTHAGORAS *auf!*
b) *Löse die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ nach den Kathetenquadraten auf! Formuliere beide Gleichungen in Worten!*

19 *Aufgabe:* Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten von 3 cm und 4 cm Länge. Wie lang ist seine Hypotenuse?
Lösung: Für die Maßzahl c der Hypotenuse (Maßeinheit cm) muß gelten

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Die einzige positive Zahl c mit $c^2 = 25$ ist $5 = \sqrt{25}$.

$$c = \sqrt{25} = 5$$

Ergebnis: Die Hypotenuse ist 5 cm lang.

Aufgaben b 114 bis 119

32 Umkehrungen zur Satzgruppe des Pythagoras

Die altägyptischen Seilspanner gingen beim Abstecken eines rechten Winkels im Gelände wahrscheinlich folgendermaßen vor: Ein Seil wurde (etwa durch Knoten) in 12 Teilstücke gleicher Länge eingeteilt. Aus diesem Seil wurde ein Dreieck gelegt, dessen Seiten 3, 4 und 5 der 12 Teilstücke maßen. Der Winkel gegenüber der längsten Seite war ein rechter.

[1] Es steht fest, daß der Satz schon vor PYTHAGORAS bekannt war. PYTHAGORAS (etwa 580 bis etwa 500 v. u. Z.), griechischer Philosoph und Mathematiker. Es ist auch ungewiß, ob PYTHAGORAS oder einer seiner Schüler diesen Satz ebenfalls entdeckt hat.

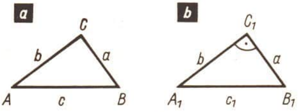
45 **a)** *Fertige dir eine solche Knotenschnur an, und lege ein derartiges Dreieck!*
b) *Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm! Miß $\sphericalangle BCA$!*
c) *Überlege, ob bei dem Vorgehen der Seilspanner der Satz des* PYTHAGORAS *benutzt wurde!*

23 **SATZ (Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS):**
Wenn für die Seiten a, b, c eines Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig und c Hypotenuse.

Voraussetzung (Bild B 62a): $\triangle ABC$ mit $a^2 + b^2 = c^2$
Behauptung: $\sphericalangle BCA = 90°$
Beweis: Es gibt gewiß ein rechtwinkliges Dreieck $A_1B_1C_1$ mit a und b als Katheten (Bild B 62b); seine Hypotenuse sei c_1. Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt für $\triangle A_1B_1C_1$:

B

$$a^2 + b^2 = c_1^2.$$



B 62

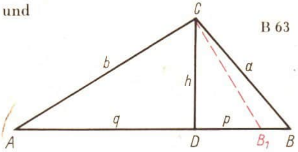
Dann folgt aus der Voraussetzung $c = c_1$, und $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ sind kongruent nach (s, s, s). Demnach ist $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1C_1A_1 = 90°$. Die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ kann also nur für rechtwinklige Dreiecke gelten.

Wir wissen: Will man die Umkehrung eines Satzes bilden, ist deutliches Unterscheiden von Voraussetzung und Behauptung nötig. Dazu ist es zweckmäßig, den Satz in der „Wenn-so-Form" auszusprechen. Weiß man, daß ein Satz „Wenn A, so B" und seine Umkehrung „Wenn B, so A" gelten, so kann man beide Sätze zu einem zusammenfassen: „A dann und nur dann, wenn B" oder „A genau dann, wenn B".
Selbstverständlich kann man auch sagen:
„B dann und nur dann, wenn A" oder „B genau dann, wenn A".
Für den Satz des PYTHAGORAS und seine Umkehrung heißt das z. B.

24 **SATZ: In einem Dreieck ABC gilt $\sphericalangle BCA = 90°$ dann und nur dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist,**
oder
Für ein Dreieck ABC gilt $a^2 + b^2 = c^2$ genau dann, wenn $\sphericalangle BCA = 90°$ ist.

46 *Die Ähnlichkeitssätze sind umkehrbar. Formuliere zu jedem der Sätze B 14 bis 16 die Umkehrung, und fasse jeweils zu einem neuen Satz zusammen!*

Wir wollen untersuchen, ob auch Höhen- und Kathetensatz umkehrbar sind.



B 63

Voraussetzung (Bild B 63):
$h = \overline{CD}$ liegt im Inneren von $\triangle\ ABC$,
$h^2 = p \cdot q \quad (p = \overline{DB},\ q = \overline{AD})$.
Behauptung: $\sphericalangle\ BCA = 90°$
Beweis: Wenn $\sphericalangle\ BCA \neq 90°$ wäre, so müßte die Senkrechte auf AC in C die Gerade AB in einem Punkt $B_1 \neq B$ schneiden (innerhalb oder außerhalb der Strecke $\overline{AB}$), und es wäre $\overline{DB_1} = p_1 \neq p$. Für das rechtwinklige Dreieck AB_1C wäre nach dem Höhensatz $h^2 = p_1 \cdot q$ und damit $h^2 \neq p \cdot q$ wegen $p \neq p_1$. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb muß unsere Annahme, $\sphericalangle\ ACB$ sei kein rechter Winkel, falsch sein.

25 **SATZ (Umkehrung des Höhensatzes):**
Wenn eine Seite eines Dreiecks durch die zugehörige Höhe h in zwei Abschnitte p und q geteilt wird und $h^2 = p \cdot q$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig; p und q bilden die Hypotenuse.

47
a) *Fasse den Höhensatz und seine Umkehrung zu einem einzigen Satz zusammen!*
b) *In der Umkehrung des Höhensatzes wird vorausgesetzt, daß der Fußpunkt D der Höhe zwischen A und B liegt. Erläutere anhand einer Skizze, daß diese Voraussetzung notwendig ist, indem du zeigst, daß es ein stumpfwinkliges Dreieck ABC mit der Höhe $\overline{CD}$ gibt, für das ebenfalls $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$ gilt!*

Der Beweis der Umkehrung des Höhensatzes erfolgte „indirekt". Beim indirekten Beweis benutzt man die Tatsache, daß eine Aussage, die Behauptung, entweder wahr oder falsch ist, und zeigt, daß sie nicht falsch sein kann:
a) Man nimmt zunächst an, die Behauptung sei falsch.
b) Man zeigt, daß diese Annahme zu einem Ergebnis führt, das der Voraussetzung oder einem bereits als wahr erkannten Satz widerspricht.
Damit ist nachgewiesen, daß die Behauptung nicht falsch sein kann, also wahr sein muß.
Einen indirekten Beweis führt man oftmals dann, wenn die Umkehrung eines (bereits bewiesenen) Satzes zu beweisen ist. Dabei benutzt man dann den Satz selbst. In Lerneinheit B 7 wurde so bereits Satz B 4 indirekt bewiesen.
Wie der Höhensatz, so ist auch der Kathetensatz umkehrbar:

26 **SATZ (Umkehrung des Kathetensatzes):**
Wenn für die Seiten a, b und $c = p + q$ eines Dreiecks (Bild B 63) $a^2 = p \cdot c$ (oder $b^2 = c \cdot q$) gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig, und c ist Hypotenuse.

48
a) *Beweise Satz 26 (indirekt)!*
b) *Fasse den Kathetensatz und seine Umkehrung zu einem Satz zusammen!*

Aufgaben b 120 und 121

20 Ein Antennenmast von 103,5 m Höhe soll in $\frac{3}{4}$ seiner Höhe durch vier Seile abgespannt werden. Die Verankerungen der Abspannseile am Erdboden sind vom Fußpunkt des Mastes 51,5 m entfernt. Wie lang sind diese Seile zusammen?
Lösungsüberlegung (Bild B 64): Wir ermitteln zunächst die Länge a eines Abspannseiles und multiplizieren dann mit 4. Jedes Abspannseil ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Kathetenlängen $\frac{3}{4}$ der Antennenmasthöhe und 51,5 m betragen.

Gegeben: $h = \frac{3}{4} \cdot 103{,}5 \text{ m} \approx 77{,}6 \text{ m}$ *Gesucht:* $s = 4a$ (in Meter)
$e = 51{,}5 \text{ m}$

Allgemeine Lösung: $a^2 = h^2 + e^2$
$a = \sqrt{h^2 + e^2}$
$s = 4a = 4\sqrt{h^2 + e^2}$

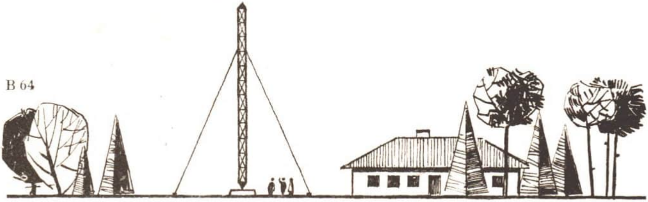
Überschlag: $4\sqrt{80^2 + 50^2} = 4\sqrt{6400 + 2500} = 4\sqrt{8900}$
Wegen $90^2 = 8100 < 8900 < 10000 = 100^2$ gilt $90 < \sqrt{8900} < 100$. Somit wird s zwischen 360 m und 400 m liegen.

Numerische Lösung:	*Erläuterung:*
$s = 4\sqrt{77{,}6^2 + 51{,}5^2}$ m	In der Quadrattafel finden wir:
$s = 4\sqrt{6022 + 2652}$ m	$7{,}76^2 = 60{,}22$, also $77{,}6^2 = 6022$
$= 4\sqrt{8674}$ m	$5{,}15^2 = 26{,}52$, also $51{,}5^2 = 2652$
	Wir versuchen, der Quadrattafel $\sqrt{86{,}74}$ zu entnehmen, finden aber nur $\sqrt{86{,}68}$ und $\sqrt{86{,}86}$. Da 86,74 näher an 86,68 als an 86,86 liegt, muß mit
$s \approx 4 \cdot 93{,}1$ m	dem kleineren Wert weitergearbeitet werden:
$s \approx 372{,}4$ m	$\sqrt{86{,}74} \approx 9{,}31$, also $\sqrt{8674} \approx 93{,}1$

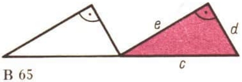
Vergleich mit Überschlag: $360 < 372{,}4 < 400$
Für die Beantwortung der Frage nach der Seillänge ist noch zu runden, da eine Angabe mit vier gültigen Grundziffern bei Ausgangsdaten mit nur drei gültigen Grundziffern (51,5) sinnlos ist.
Ergebnis: Insgesamt ist das Abspannseil rund 372 m lang.

49 **a)** *Ermittle den Seilbedarf, wenn für Befestigung des Seils am Mast und Verankerung 3 % Zuschlag zu berücksichtigen sind!*
b) *Die Verankerungen der vier Abspannseile sollen die Ecken eines Quadrats bilden, das einzuzäunen ist. Wie groß ist mindestens die gesamte Zaunlänge?*

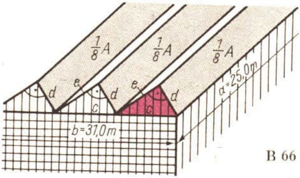
B 64



21 Das Bild B 65 zeigt den senkrechten Schnitt durch ein zweiteiliges Sägedach, dessen Flächen einen rechten Winkel bilden. Solche Dächer werden für Industriebauten bevorzugt, weil sie eine gute und blendungsfreie Auslichtung des Innenraumes gestatten. Dazu werden die steileren Dachflächen mit Glas ausgelegt.
Eine Werkhalle, deren Grundriß ein Rechteck mit den Seiten $a = 25{,}0$ m und $b = 31{,}0$ m ist, soll mit einem achtgliedrigen Sägedach überdeckt werden, dessen Dachflächen parallel zur kürzeren Seite liegen. Insgesamt müssen $A = 425\ \text{m}^2$ lichtdurchlässige Fläche vorhanden sein (Bild B 66). Wie breit sind die Dachflächen, die nicht mit Glas bedeckt werden?



B 65



B 66

Lösungsüberlegung:
Der senkrechte Schnitt des Daches besteht aus acht rechtwinkligen, einander kongruenten Dreiecken. Von einem solchen Dreieck wird die Kathete e gesucht. Die Hypotenuse c läßt sich aus der Länge b der Halle und der Anzahl n der Dachteile berechnen; die Kathete d läßt sich aus der gesamten Glasfläche A, der Anzahl n der Teile und der Hallenbreite a errechnen. Somit können wir den Satz des PYTHAGORAS anwenden.

Gegeben: $a = 25{,}0$ m; $A = 425\ \text{m}^2$ *Gesucht:* e (in Meter)
$b = 31{,}0$ m; $n = 8$

Allgemeine Lösung:

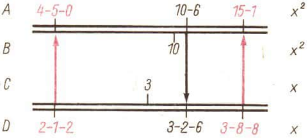
$$c^2 = d^2 + e^2 \qquad c = \frac{b}{n} \qquad d = \frac{A}{n \cdot a}$$
$$e^2 = c^2 - d^2$$
$$e = \sqrt{c^2 - d^2}$$

Überschlag: $c \approx 4$ m; $d \approx 2$ m; $e \approx \sqrt{16 - 4}$ m $= \sqrt{12}$ m
Wegen $9 < 12 < 16$ wird e zwischen 3 m und 4 m liegen.

Numerische Lösung:

$$c = \frac{31}{8}\ \text{m} = 3{,}88\ \text{m}$$
$$d = \frac{425}{8{,}25}\ \text{m} = 2{,}12\ \text{m}$$
$$e = \sqrt{3{,}88^2 - 2{,}12^2}\ \text{m}$$
$$e = \sqrt{15{,}1 - 4{,}5}\ \text{m}$$
$$= \sqrt{10{,}6}\ \text{m}$$
$$e = 3{,}26\ \text{m}$$

Wir lesen am Rechenstab ab.



B 67

Vergleich mit Überschlag:

$$3 < 3{,}26 < 4$$

Ergebnis: Die schwächer geneigten Dachflächen sind 3,26 m breit.

50 **a)** *Wieviel Quadratmeter des Daches werden nicht mit Glas (oftmals mit sogenanntem Asbestbeton) gedeckt?*

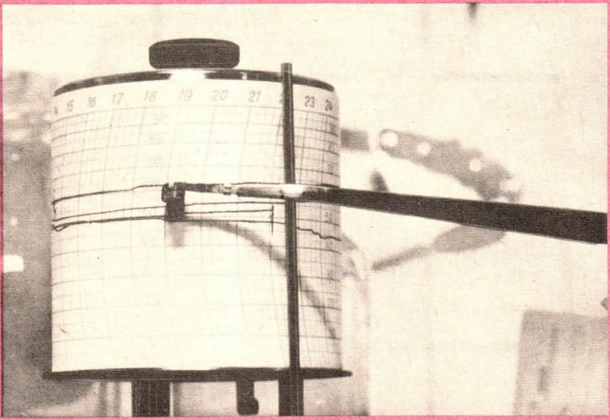
b) *Wie hoch ist das Dach?*

Aufgaben b 122 bis 142

B

C Lineare Funktionen

In Wetterwarten findet man Instrumente, mit deren Hilfe fortlaufend die Temperatur gemessen und niedergeschrieben wird, sogenannte Thermographen. Auf einem Zylinder, der sich sehr langsam dreht, befindet sich ein Papierstreifen mit einem Gitternetz. Ein Schreibstift, der vom Thermometer gesteuert wird, zeichnet eine Linie auf das Papier. Damit entsteht ein Diagramm. Jedem Zeitpunkt ist eine Temperatur zugeordnet. Zeitpunkt und Temperatur bilden, wenn man nur die Zahlen betrachtet, ein geordnetes Zahlenpaar. Eine solche Menge von Paaren bildet eine Funktion (↗ Seite 61).



Der Funktionsbegriff

1 Zur Wiederholung

Wir wissen bereits:

- Gleichartige mathematische Objekte, zum Beispiel Brüche, Zahlen, Punkte, geometrische Figuren können zu **Mengen** zusammengefaßt werden.
- Die Objekte, die zu einer Menge gehören, heißen **Elemente** dieser Menge.
- Das Wort „Menge" der Umgangssprache wird im allgemeinen im Sinne von „viel" gebraucht. Im Gegensatz dazu gibt es in der Mathematik Festlegungen für das Bilden von Mengen, die es zulassen, daß auch Mengen mit wenigen oder einem, ja sogar mit gar keinem Element betrachtet werden.
- Die Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** (Zeichen: $\emptyset$).
- Um auszudrücken, daß x als Element zur Menge M gehört, schreiben wir $x \in M$ und sprechen „x ist ein Element von M".

C

1 Im folgenden Beispiel werden jeweils mathematische Objekte zu Mengen zusammengefaßt, und diese Mengen werden der Reihe nach mit $M_1, M_2, \ldots$ bezeichnet.
M_1 sei die Menge aller Primzahlen zwischen 22 und 30.
Die folgenden Mengen sollen alle in ein und derselben Ebene betrachtet werden.
M_2 sei die Menge aller Punkte eines Dreiecks ABC.
M_3 sei die Menge aller Eckpunkte dieses Dreiecks ABC.
M_4 sei die Menge aller Vierecke, deren Diagonalen einander halbieren.
M_5 sei die Menge aller Vierecke, die mindestens ein Paar zueinander paralleler Seiten besitzen.
M_6 sei die Menge aller gemeinsamen Punkte zweier konzentrischer Kreise, die unterschiedlich lange Radien haben.
M_7 sei die Menge aller Vierecke, deren gegenüberliegende Seiten jeweils gleich lang sind.

- Die Menge M_3 im Beispiel C 1 gehört zu den **endlichen Mengen**. Die Menge M_2 gehört zu den **unendlichen Mengen**. Die leere Menge ist eine endliche Menge.

(1) *Stelle fest, welche Mengen im Beispiel C 1 endlich sind! Gib weitere Beispiele für endliche und unendliche Mengen an!*

Betrachten wir die Mengen M_2 und M_3 im Beispiel C 1, so können wir feststellen: Alle Punkte, die die Menge M_3 bilden, gehören auch zur Menge M_2. Die Menge M_2 enthält jedoch Punkte, die nicht zu M_3 gehören.
Die Menge M_3 nennt man in diesem Falle eine echte **Teilmenge** und schreibt: $M_3 \subset M_2$.

(2) *Untersuche in der gleichen Weise die folgenden Mengen!*
a) *M_4 und M_5* **b)** *M_5 und M_7*

Die Mengen M_4 und M_7 des Beispiels C 1 bestehen aus denselben Elementen, denn die Elemente von M_4 sind wie die Elemente von M_7 alle Parallelogramme einer Ebene. Man sagt, die Mengen M_4 und M_7 sind gleich und schreibt: $M_4 = M_7$.

Aufgaben c 1 bis 3

2 Abbildung einer Menge auf eine andere

Wir wissen bereits:

- Eine Menge M, die aus zwei Elementen a und b besteht, schreibt man

  $M = \{a; b\}$ oder $M = \{b; a\}$

- Ein geordnetes Paar ist eine Menge, die aus zwei Elementen besteht **und** in der die Reihenfolge der Elemente festgelegt ist. Man schreibt zum Beispiel $[a; b]$, wenn a zuerst genannt werden soll.

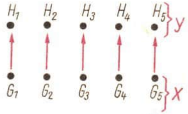
2 Die Schüler A, B, C, D, E und F spielen Tischtennis, und zwar gibt es drei Spiele: A spielt mit E; B spielt mit C; D spielt mit F. So erhalten wir für jedes Spiel eine Paarung, wobei es gleich ist, ob wir z. B. $\{A; E\}$ oder $\{E; A\}$ schreiben.

3 **a)** Das Format von Zeichnungen und Büchern wird etwa durch „$a \times b$" angegeben. Darin ist die erste Zahl, also a, stets die Breite und b die Höhe. Ein Buch im Format 160×227 ist 160 mm breit. Als geordnetes Paar würde man schreiben $[160; 227]$. Dagegen bedeutet $[227; 160]$, daß das Buch 227 mm breit ist.

b) Auto- und Fahrradreifen werden ebenfalls durch geordnete Zahlenpaare beschrieben. So benötigt man z. B. für einen Pkw vom Typ „Wartburg" Reifen mit der Bezeichnung „$6{,}00 \times 13$". Dabei gibt die erste Zahl die Breite der Lauffläche in Zoll an und die zweite Zahl den Durchmesser der Felge in Zoll.

4 In einer Garderobe gehört zu jeder Garderobenmarke ein Haken. Wir betrachten eine Menge von fünf Garderobenmarken und bezeichnen sie mit $X = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$ und die Menge der fünf zugehörigen Haken, die wir mit $Y = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$ bezeichnen.
In der Mathematik wird dieser Zusammenhang folgendermaßen beschrieben (Bild C 1): Jeder Garderobenmarke ist ein (aber auch nur **ein**) Haken zugeordnet,
oder
die Menge der Garderobenmarken wurde auf die Menge der Haken abgebildet
Die auf Grund der jeweiligen Zuordnung zusammengehörigen Elemente der Mengen X und Y kann man als geordnete Paare oder in Tabellenform schreiben:
$[G_1; H_1]$, $[G_2; H_2]$, $[G_3; H_3]$, $[G_4; H_4]$, $[G_5; H_5]$

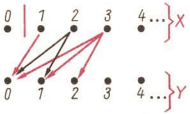
G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
H_1	H_2	H_3	H_4	H_5



C 1

5 Wir wollen jeder natürlichen Zahl $n \neq 0$ alle die natürlichen Zahlen zuordnen, die kleiner als n sind, so daß auf diese Weise geordnete Paare gebildet werden (Bild C 2).
Dabei ist X die Menge der natürlichen Zahlen außer 0; Y ist die Menge der natürlichen Zahlen. Wir können feststellen: Jedem Element der Menge X (mit Ausnahme des Elementes 1) wurden nacheinander **mehrere** Elemente der Menge Y zugeordnet (dem Element 1 der Menge X wurde genau ein Element der Menge Y zugeordnet),
oder
die Menge X wurde auf die Menge Y abgebildet

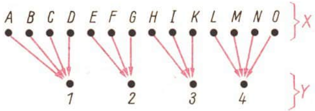
C 2



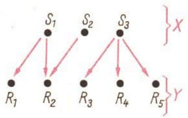
Wir erhalten die geordneten Paare
[1; 0]
[2; 0] und [2; 1]
[3; 0] und [3; 1] und [3; 2]
usw.

Da durch Angabe der geordneten Paare festgelegt ist, wie die Elemente der Menge Y den Elementen der Menge X zugeordnet sind, nennt man diese Menge geordneter Paare eine Abbildung der Menge X auf die Menge Y.

6 Eine Gruppe von 14 Thälmannpionieren wird auf einer Wanderung in einer Jugendherberge übernachten. Das Bild C 3 zeigt, wie die 14 Pioniere A, B, C, ..., O auf die Räume 1, 2, 3 und 4 aufgeteilt werden. Wir beschreiben den Vorgang so:
Jedem Pionier ist ein (aber auch **nur** ein) Raum zugeordnet, oder
die Menge der Pioniere $X = \{A, B, \ldots, O\}$ wird auf die Menge der Räume abgebildet.



C 3

C 4


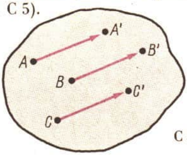
7 Im Umkleidehäuschen eines Sportplatzes befinden sich 5 Räume, zu denen 3 Schlüssel gehören. Aus dem Bild C 4 geht hervor, wie die Schlüssel zu den Räumen passen. Wir sagen:
Den Schlüsseln S_1, S_2, S_3 sind die Räume R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 zugeordnet,
oder
die Menge der Schlüssel $X = \{S_1, S_2, S_3\}$ wurde auf die Menge der Räume $Y = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ abgebildet.

In den Beispielen C 4 und C 6 nennt man die Abbildung von X auf Y **eindeutig.** Bedingung für die Eindeutigkeit ist, daß jedem Element von X ein und nur ein (man sagt genau ein) Element von Y zugeordnet wird.

3 *Schreibe für das Beispiel C 6 die auf Grund der Zuordnung zusammengehörigen Elemente als geordnete Paare und in Tabellenform!*

Eine Menge kann auch auf sich selbst abgebildet werden.

8 Bei einer Verschiebung einer Ebene wird jedem Punkt dieser Ebene sein Bildpunkt zugeordnet. Dabei ist die Menge X der Originalpunkte gleich der Menge Y der Bildpunkte, nämlich gleich der Menge aller Punkte der betreffenden Ebene (Bild C 5).



C 5

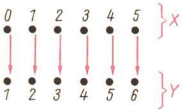
3 Der Funktionsbegriff

Die Beispiele C 9 und C 10 stellen ebenfalls eindeutige Abbildungen einer Menge X auf die jeweilige Menge Y dar.

9 *Aufgabe:* Ordne jeder natürlichen Zahl von 0 bis 5 ihren unmittelbaren Nachfolger zu (Bild C 6)!
Es gilt $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ und $Y = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, und wir erhalten die geordneten Paare:
$[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 4]$, $[4; 5]$, $[5; 6]$.

Tabellenform ($x \in X$, $y \in Y$):

x	0	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	5	6



C 6

Es liegt eine eindeutige Abbildung der Menge X auf die Menge Y vor.

10 Gegeben sei die Tabelle

x	0	0,5	1	1,8	3	3,6
y	0	0,75	1,5	2,7	4,5	5,4

Die Zahlen x der oberen Zeile bilden die Menge X, die Zahlen y der unteren Zeile die Menge Y. Durch die Tabelle ist dann jeder Zahl $x \in X$ eindeutig eine Zahl $y \in Y$ zugeordnet. Es liegt eine eindeutige Abbildung der Menge X auf die Menge Y vor.

1 **DEFINITION: Eine Menge geordneter Paare $[x; y]$ mit $x \in X$ und $y \in Y$, die eine eindeutige Abbildung der Menge X auf die Menge Y ist, heißt *Funktion*.**

Man sagt auch von diesen geordneten Paaren $[x; y]$, daß jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird.
Solche Mengen X wie in den Beispielen C 2, 4, 9 und 10 bezeichnen wir als **Definitionsbereich** der betreffenden Funktion. Im folgenden werden wir stets den Bereich der rationalen Zahlen als Definitionsbereich zugrunde legen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vereinbart wird. Die Mengen Y der zugeordneten Elemente bezeichnen wir als jeweiligen **Wertebereich**. Die Zahl y aus dem Wertebereich, die bei der jeweiligen Funktion einer Zahl x aus dem Definitionsbereich zugeordnet wird, heißt der zu x gehörige **Funktionswert**.

Aufgaben c 4 und 5

Lineare Funktionen

4 Zueinander direkt proportionale Zahlenfolgen

Wir wissen bereits:

- Zwei Zahlenfolgen heißen **zueinander direkt proportional**, wenn jedes Glied der einen Folge aus dem entsprechenden Glied der anderen Folge durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor, dem Proportionalitätsfaktor, hervorgeht.

- Als einander entsprechend bezeichnet man
  das 1. Glied der einen und das 1. Glied der anderen Folge sowie
  das 2. Glied der einen und das 2. Glied der anderen Folge
  und allgemein
  das n-te Glied der einen und das n-te Glied der anderen Folge.

11 Gegeben sind die beiden Zahlenfolgen
0; 0,5; 1; 1,8; 3; 3,6 und 0; 0,75; 1,5; 2,7; 4,5; 5,4.

	1. Glied	2. Glied	3. Glied	4. Glied	5. Glied	6. Glied
1. Zahlenfolge	0	0,5	1	1,8	3	3,6
2. Zahlenfolge	0	0,75	1,5	2,7	4,5	5,4

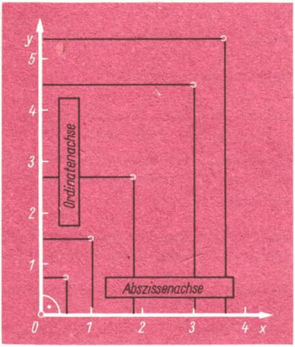
Proportionalitätsfaktor: 1,5
Die Folgen sind zueinander direkt proportional.

Wir wissen bereits:

- Sachverhalte, denen direkte Proportionalität zugrunde liegt, können in einem rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch dargestellt werden (Bild C 7).

- Im rechtwinkligen Koordinatensystem gehen zwei Strahlen (x-Achse, y-Achse), die senkrecht aufeinander stehen, von einem gemeinsamen Punkt aus. Auf der Abszissenachse werden die Punkte aufgesucht, die den x-Werten (den Abszissen) zugeordnet sind. Auf der Ordinatenachse werden die Punkte aufgesucht, die den y-Werten (den Ordinaten) zugeordnet sind.

C 7



12 Wir stellen die beiden Zahlenfolgen aus Beispiel C 11 in Form einer Wertetabelle dar. Dabei benutzen wir als Variablen für die Glieder der ersten Folge den Buchstaben „x" und für die Glieder der zweiten Folge den Buchstaben „y".

x	0	0,5	1	1,8	3	3,6
y	0	0,75	1,5	2,7	4,5	5,4

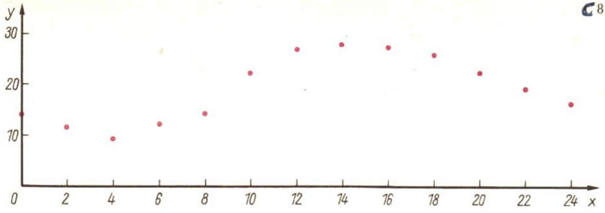
(↗ Beispiel C 10)

Wir tragen die Punkte, die den geordneten Zahlenpaaren [0; 0], [0,5; 0,75], [1; 1,5] usw. zugeordnet sind, in ein Koordinatensystem ein.

13 Im Laufe eines Sommertages erhielt man durch Messen der Lufttemperatur in zweistündigem Abstand die folgende Wertetabelle:

Uhrzeit	x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatur °C	y	14	11,5	9,5	12	14	22	26,5	27,5	27	25,5	22	19	16

Hier liegt ebenfalls eine Funktion vor. Der Definitionsbereich besteht aus den Zahlen 0, 2, 4, ..., 24. Jeder dieser Zahlen wird genau eine Zahl der zweiten Zeile zugeordnet, die den Wertebereich der betrachteten Funktion bilden.



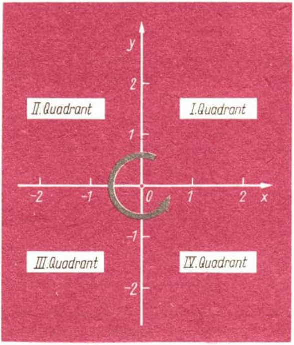
Wir tragen die Punkte, die den geordneten Zahlenpaaren zugeordnet sind, in ein passendes Koordinatensystem ein (Bild C 8). Wir verbinden die Punkte nicht miteinander, denn der Temperaturverlauf zwischen den Uhrzeiten ist nicht bekannt. Dagegen kann uns der Thermograph auf Seite 57 eine geschlossene Kurve liefern, denn er mißt ständig die Temperatur.

Aufgabe c 6

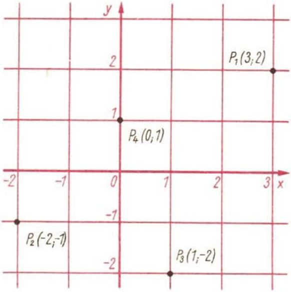
5 Das rechtwinklige Koordinatensystem

Es gibt auch Funktionen, bei denen im Definitionsbereich oder im Wertebereich negative Zahlen auftreten. Wir können die in diesen Funktionen auftretenden geordneten Zahlenpaare mit negativen Zahlen ebenfalls in einem Koordinatensystem darstellen, wenn wir die Zahlenstrahlen zu Zahlengeraden ergänzen (Bild C 9). Durch diese beiden Geraden wird die gesamte Ebene in vier Teile, die **Quadranten**, zerlegt.

C 9



C 10



14 Im Bild C 10 wurden folgende Punkte markiert:

a) P_1 mit der Abszisse 3 und der Ordinate 2. Schreibweise: $P_1\,(3;\,2)$;
b) P_2 mit der Abszisse —2 und der Ordinate —1. Schreibweise: $P_2\,(-2;\,-1)$;
c) P_3 mit der Abszisse 1 und der Ordinate —2. Schreibweise: $P_3\,(1;\,-2)$;
d) P_4 mit der Abszisse 0 und der Ordinate 1. Schreibweise: $P_4\,(0;\,1)$.

Da als Variablen für die Koordinaten von Punkten dieselben Buchstaben benutzt werden wie für die Bezeichnung der Achsen, bezeichnet man einen Punkt P_i mit den Koordinaten x_i und y_i auf folgende Weise: $P_i(x_i;\,y_i)$. Wir verabreden, dabei die Abszisse stets zuerst anzugeben.
Durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem kann jedem geordneten Paar rationaler Zahlen eindeutig ein Punkt der Ebene zugeordnet werden. Umgekehrt kann man im rechtwinkligen Koordinatensystem **nicht** jedem Punkt der Ebene ein geordnetes Paar rationaler Zahlen zuordnen. Als Beispiel seien alle die Punkte genannt, von denen das Lot auf die x-Achse diese in einem Punkt trifft, dem die Zahl $\sqrt{2}$ zugeordnet ist.

Aufgabe c 7 bis 15

6 Funktionen mit der Gleichung $y = m \cdot x$ $(m \neq 0)$

C

15 Ein Pkw fährt eine längere Strecke auf der Autobahn mit der nahezu gleichbleibenden Geschwindigkeit $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jeder Zeitspanne seit der Abfahrt ist eine durchfahrene Strecke eindeutig zugeordnet. Die dadurch entstandenen Paare bilden eine Funktion. Diese Funktion kann mit Hilfe der Gleichung
$s = 90 \cdot t$ (s in km, t in h gemessen) dargestellt werden.

Die Funktion im Beispiel C 15 wird durch eine Gleichung der Form $y = m \cdot x$ $(m \neq 0)$ dargestellt. Die feste Zahl m ist der Proportionalitätsfaktor. Der Definitionsbereich im Beispiel C 15 besteht nur aus nichtnegativen Zahlen. Er ist durch den Beobachtungszeitraum gegeben. Bei den Funktionen mit der Gleichung $y = m \cdot x$ erhalten wir wie bei der direkten Proportionalität zu jeder Zahl des Definitionsbereichs den zugeordneten Funktionswert durch Multiplikation mit der festen Zahl m.

16 Gegeben sei eine Funktion mit der Gleichung $y = 2x$. Es sollen geordnete Zahlenpaare, die dieser Gleichung genügen, berechnet werden. Dann soll eine Wertetabelle aufgestellt werden.

Ermittlung einzelner Wertepaare (Auswahl)		
$x_1 = -2$; $y_1 = 2 \cdot (-2)$ $y_1 = -4$ $[-2;\,-4]$	$x_2 = 0$; $y_2 = 2 \cdot 0$ $y_2 = 0$ $[0;\,0]$	$x_3 = 1$; $y_3 = 2 \cdot 1$ $y_3 = 2$ $[1;\,2]$

Zusammenstellen einer Wertetabelle									
x	—2	—1,5	—1	—0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4

Aufgaben c 16 und 17

7 Graphische Darstellung der Funktionen $y = m \cdot x$ $(m \neq 0)$

Bemerkung: Im folgenden wollen wir statt „die Funktion *mit der Gleichung* ...“ auch abkürzend sagen „die Funktion ...“.
Wir wollen die Funktion $y = 2x$ (↗ Beispiel 16) graphisch darstellen. Wir markieren die Punkte, die den in der Wertetabelle aufgeführten Zahlenpaaren zugeordnet sind, in einem Koordinatensystem (Bild C 11). Wir vermuten:

2 **SATZ: Alle Punkte der graphischen Darstellung der Funktion $y = 2x$ liegen auf ein und derselben Geraden, die durch den Anfangspunkt O des Koordinatensystems verläuft.**

Beweis:

1) Durch Einsetzen der Zahl Null für die Variable x haben wir das Zahlenpaar $[0; 0]$ erhalten, das auch in der Wertetabelle aufgeführt ist. Der Anfangspunkt O ist also ein Punkt der graphischen Darstellung.
2) Wir wählen zwei beliebige von 0 verschiedene rationale Zahlen x_1 und x_2 und berechnen durch Einsetzen in die Gleichung $y = 2x$ die zugeordneten Funktionswerte y_1 und y_2:

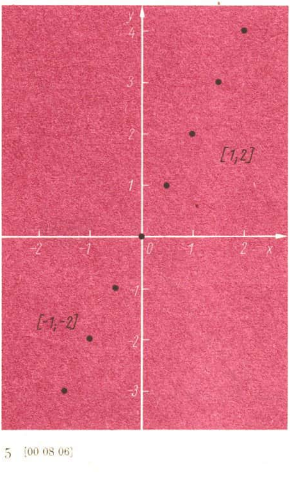
$$y_1 = 2x_1; \quad y_2 = 2x_2.$$

Die den Zahlenpaaren $[x_1; y_1]$ und $[x_2; y_2]$ zugeordneten Punkte $R\,(x_1; y_1)$ und $S\,(x_2; y_2)$ der graphischen Darstellung sind im Bild C 12a mit den zugehörigen Koordinaten eingezeichnet. Die rechtwinkligen Dreiecke OPR und OQS sind im Bild C 12b noch einmal dargestellt.

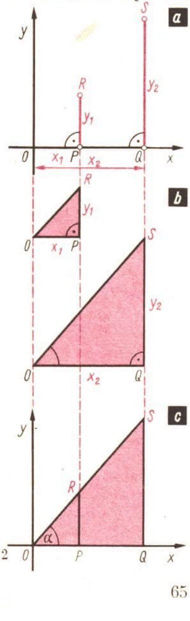
Nach der Gleichung gilt für die Länge ihrer Katheten:

im $\triangle\, OPR$: $y_1 = 2x_1$ oder $\frac{y_1}{x_1} = 2$,

im $\triangle\, OQS$: $y_2 = 2x_2$ oder $\frac{y_2}{x_2} = 2$.



C 11



C 12

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke stimmen also in einem Winkel (dem rechten Winkel) überein, die anliegenden Seiten bilden gleiche Verhältnisse. Die Voraussetzungen eines Ähnlichkeitssatzes für Dreiecke (↗ Seite 42; Satz B 14) sind damit erfüllt, und es gilt: $\triangle OPR \sim \triangle OQS$.

Daher stimmen die beiden Dreiecke in allen Winkeln überein. Es gilt also auch

$$\sphericalangle POR = \sphericalangle QOS.$$

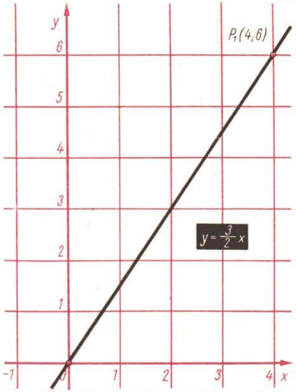
Die Strecken $\overline{OR}$ und $\overline{OS}$ bilden also beide mit der x-Achse den gleichen Winkel α (Bild C 12c), d. h., sie liegen beide auf einer gemeinsamen Geraden. Damit liegen auch die beiden Punkte R und S auf derselben Geraden durch den Anfangspunkt O. Entsprechende Überlegungen, wie wir sie soeben für die beliebig gewählten Punkte R und S der graphischen Darstellung durchgeführt haben, gelten genauso für je zwei beliebige andere Punkte (auch im III. Quadranten). Das bedeutet, daß alle Punkte der graphischen Darstellung der Funktion $y = 2x$ auf derselben Geraden durch O liegen. Damit haben wir die Vermutung bewiesen.

Der soeben durchgeführte Beweis läuft entsprechend ab, wenn wir statt der Gleichung $y = 2x$ eine andere Gleichung $y = mx$ mit einer beliebigen von Null verschiedenen rationalen Zahl m betrachten.

Also liegen die Punkte der graphischen Darstellung jeder Funktion $y = mx$ jeweils auf einer gemeinsamen Geraden. Auf jeder dieser Geraden liegen aber auch Punkte, die **nicht** zur graphischen Darstellung gehören. So gehört zum Beispiel der Geradenpunkt, dem das geordnete Zahlenpaar mit dem x-Wert $\sqrt{2}$ zugeordnet ist, nicht zur graphischen Darstellung der Funktion $y = 2x$; denn der Definitionsbereich enthält nicht die irrationale Zahl $\sqrt{2}$, da wir alle Betrachtungen nur im Bereich R machen. Die graphische Darstellung der Funktion $y = 2x$ ist demzufolge keine „lückenlose" Gerade, sondern eine Punktmenge auf einer Geraden, die noch viele Lücken aufzuweisen hat. Es ist überall dort eine Lücke in der graphischen Darstellung anzutreffen, wo die Abszisse des betreffenden Geradenpunktes eine irrationale Zahl ist. Trotzdem werden wir, wenn die graphische Darstellung einer Funktion $y = mx$ ($m \in R$, $x \in R$) verlangt ist, jeweils eine Gerade zeichnen und wissen, daß auf ihr alle Punkte der graphischen Darstellung liegen. Hierbei genügt es, zwei Punkte der graphischen Darstellung zu ermitteln, wobei ein Punkt der Koordinatenursprung O sein kann.

C

C 13



17 *Aufgabe:* Stelle die Funktion $y = \frac{3}{2}x$ graphisch dar! Die Punkte der graphischen Darstellung liegen auf einer Geraden, die durch O (0; 0) geht. Als weiteren Punkt wählen wir z. B.: $x_1 = 4$:

$$y_1 = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6.$$

Wir haben also die beiden Punkte O (0; 0) und P_1 (4; 6) erhalten. Wir zeichnen nun die graphische Darstellung (Bild C 13). (Beachte, daß wir stets nur einen Teil der graphischen Darstellung zeichnen können!)

Aufgaben c 18 bis 21

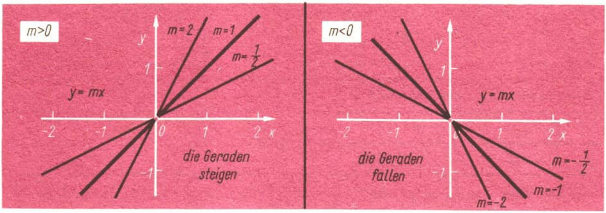
8 Der Anstieg m

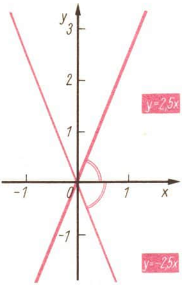
Der Verlauf der Geraden, auf der die Punkte der graphischen Darstellung der Funktion $y = m \cdot x$ liegen, hängt vom Koeffizienten m von x ab (Bild C 14).

$$y = \frac{1}{2}\,x \left(m = \frac{1}{2}\right);\; y = x\ (m = 1);\; y = 2\,x\ (m = 2);\; y = -\frac{1}{2}\,x \left(m = -\frac{1}{2}\right)$$

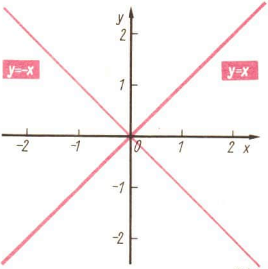
Wir legen fest, den Verlauf der Geraden stets in Richtung wachsender x-Werte, d. h. von links nach rechts, zu betrachten. Dann entnehmen wir dem Bild C 14 folgende Eigenschaften der Funktionen $y = mx$:
Ist $m > 0$, so steigt die Gerade vom III. in den I. Quadranten, ist $m < 0$, so fällt die Gerade vom II. in den IV. Quadranten. Je größer der Betrag von m ist, desto steiler verläuft die Gerade.
Wir erkennen, daß der Koeffizient m von x ein Maß für das Steigen oder Fallen der Geraden ist. Der Koeffizient m heißt der **Anstieg** der Geraden, auf der die Punkte der graphischen Darstellung der Funktion $y = mx$ liegen.
Unterscheiden sich die Anstiege zweier Geraden durch den Anfangspunkt nur durch das Vorzeichen, so liegen diese Geraden symmetrisch zur x-Achse, aber auch symmetrisch zur y-Achse (Bild C 15). Dieser Sachverhalt liegt z. B. bei den Funktionen $y = x$ und $y = -x$ (Bild C 16) vor.
Wir schränken den Definitionsbereich der Funktion $y = x$ auf alle nichtnegativen Zahlen und den der Funktion $y = -x$ auf alle negativen Zahlen ein. Die so eingeschränkten Funktionen können wir zu einer neuen Funktion zusammensetzen, deren Funktionswerte mit Hilfe folgender Gleichungen berechnet werden können:

C 14





C 15



C 16

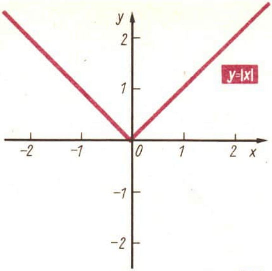
$y = x$, falls $x > 0$ oder $x = 0$
$y = -x$, falls $x < 0$.

Entsprechend der Definition des Betrages können wir dafür auch kürzer schreiben

$$y = |x|.$$

Wie bei den Funktionen $y = mx$ besteht der Definitionsbereich dieser Funktionen aus den rationalen Zahlen. Ihr Wertebereich enthält dagegen nur die nichtnegativen rationalen Zahlen (Bild C 17).

Aufgaben c 22 bis 26



C 17

9 Funktionen mit der Gleichung $y = mx + n$ $(m, n \in R;\ m \neq 0)$

18 *Aufgabe:* Gegeben sei die Funktion mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x + 2$.
Es sollen geordnete Zahlenpaare, die dieser Gleichung genügen, berechnet werden.

Ermittlung einzelner Wertepaare (Auswahl)		
$x_1 = -2$ $y_1 = \frac{3}{4} \cdot (-2) + 2$ $y_1 = -\frac{3}{2} + 2 = 0{,}5$ $[-2;\ 0{,}5]$	$x_2 = 0$ $y_2 = \frac{3}{4} \cdot 0 + 2$ $y_2 = 2$ $[0;\ 2]$	$x_3 = 2$ $y_3 = \frac{3}{4} \cdot 2 + 2$ $y_3 = \frac{3}{2} + 2 = 3{,}5$ $[2;\ 3{,}5]$

Zusammenstellen einer Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$0{,}5$	$1{,}25$	2	$2{,}75$	$3{,}5$	$4{,}25$

Folgende Überlegung zeigt, daß alle Punkte der graphischen Darstellung der Funktion $y = \frac{3}{4}x + 2$ wieder auf einer Geraden liegen:

1. Die graphische Darstellung der Funktion $y = \frac{3}{4}x$ liegt auf einer Geraden durch den Anfangspunkt O (↗ Satz C 2, Seite 65).
2. Aus der Gleichung $y = \frac{3}{4}x + 2$ wird deutlich: Wir erhalten die y-Werte, indem wir zu den y-Werten der Funktion $y = \frac{3}{4}x$ jeweils 2 addieren.
   Das bedeutet für die graphische Darstellung: Wir verschieben alle Punkte der graphischen Darstellung von $y = \frac{3}{4}x$ um zwei Einheiten in Richtung der positiven y-Achse (Bild C 18).

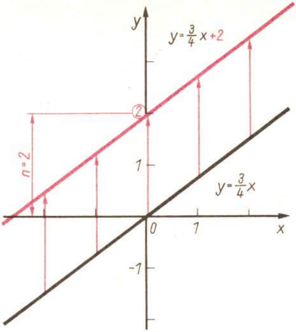
Wir erhalten eine Gerade, die
- die y-Achse im Punkt $(0;\ 2)$ schneidet und
- die denselben Anstieg hat wie die Gerade, die zu $y = \frac{3}{4}x$ gehört, nämlich $m = \frac{3}{4}$.

In der Gleichung $y = mx + n$ gibt die Zahl n an, wie weit die zugehörige Gerade gegenüber der zu $y = mx$ gehörigen Geraden verschoben ist (Bild C 19).

Da die Größe der Verschiebung auf der y-Achse abgelesen werden kann, gibt n an, wo die zu $y = mx + n$ gehörige Gerade die y-Achse schneidet, nämlich im Punkt $P(0; n)$.

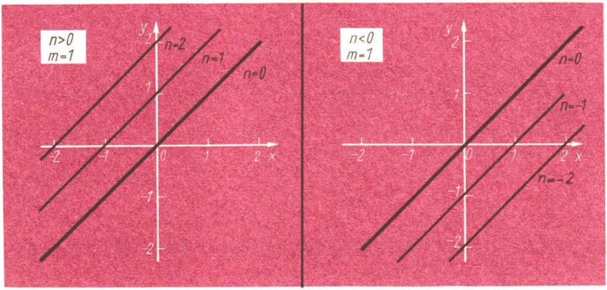
4 *Begründe, daß die Funktionen $y = mx$ $(m \neq 0)$ Spezialfälle der Funktionen $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ sind!*

Die graphischen Darstellungen aller Funktionen $y = mx + n$, die denselben Anstieg m haben, gehen durch Verschiebung aus der graphischen Darstellung von $y = mx$ hervor. Bei der graphischen Darstellung der Funktion $y = mx + n$ ist ein Punkt aus der Gleichung sofort ablesbar, nämlich der Schnittpunkt mit der y-Achse: $P(0; n)$. Ein weiteres Wertepaar muß berechnet werden.



C 18

C 19



C 20

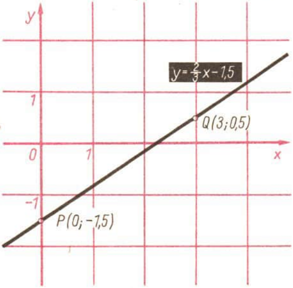
19 $y = \frac{2}{3}x - 1{,}5$

Erster Punkt: $P(0; -1{,}5)$

Zweiter Punkt: Wir wählen $x_1 = 3$

$y_1 = \frac{2}{3} \cdot 3 - 1{,}5 = 0{,}5$

Wir erhalten $Q(3; 0{,}5)$ (Bild C 20).



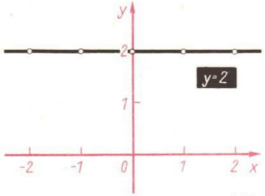
Wir betrachten nun solche Funktionen $y = mx + n$, bei denen die Einschränkung $m \neq 0$ fallengelassen wird.

C

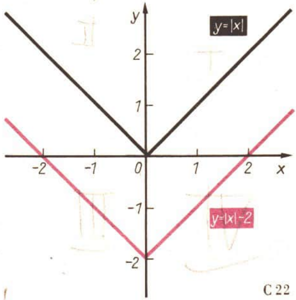
20 $m = 0$; $n = 2$; $y = 0 \cdot x + 2$, also $y = 2$
Beim Aufstellen einer Wertetabelle wird jedem Wert von x der Funktionswert 2 zugeordnet:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 0 \cdot x + 2$	2	2	2	2	2

Der Wertebereich dieser Funktion besteht nur aus der Zahl 2 (Bild C 21).



C 21



C 22

Allgemein gilt: Die graphische Darstellung einer Funktion $y = n$ sind Punkte, die auf einer Parallelen zur x-Achse liegen; diese Gerade schneidet die y-Achse im Punkt $(0; n)$.
Die graphischen Darstellungen der Funktionen $y = |x| + n$ können durch Verschiebung aus denen der Funktion $y = |x|$ erhalten werden (Bild C 22).

Aufgaben c 27 bis 30

10 Aufstellen der Gleichung aus der graphischen Darstellung

Zu einer in einem Koordinatensystem gegebenen Geraden können wir die Gleichung der zugehörigen Funktion näherungsweise gewinnen.
Die Gleichung ist eindeutig festgelegt, wenn die Zahlen m und n ($m, n, \in R$) bekannt sind. Die Zahl n lesen wir als Ordinate des Schnittpunkts der Geraden mit der y-Achse ab. Die Zahl m erhalten wir folgendermaßen:

1. Wir ermitteln aus der graphischen Darstellung die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden.
2. Wir setzen diese Koordinaten in die Gleichung $y = mx + n$ ein und lösen die Gleichung nach m auf.

21 Gegeben ist die graphische Darstellung einer Funktion (Bild C 23). Gesucht ist die Gleichung.

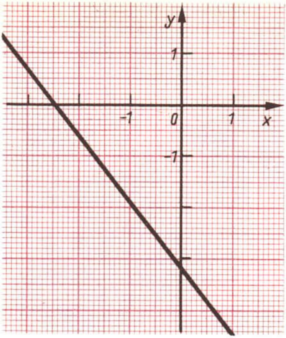
Wir lesen ab: $n \approx -3{,}2$.
Die Koordinaten eines Geradenpunktes P_1 (es wurde hier der Schnittpunkt mit der x-Achse gewählt) sind näherungsweise
$x_1 \approx -2{,}5$ und $y_1 = 0$.

Wir setzen ein:

$$y_1 = mx_1 + n$$
$$0 = m \cdot (-2{,}5) - 3{,}2$$
$$2{,}5m = -3{,}2$$
$$m = -\frac{3{,}2}{2{,}5} \approx -1{,}3$$

Näherungsweise gilt dann:

$$y = -1{,}3x - 3{,}2$$



C 23

(5) *Welche Schritte sind notwendig, um die Gleichung einer Funktion näherungsweise zu bestimmen, wenn aus der graphischen Darstellung deutlich wird, daß die Gerade parallel zur x-Achse liegt?*

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + n$ werden **lineare Funktionen** genannt. Funktionen mit Gleichungen der Form $y = |x| + n$ sind keine linearen Funktionen. Die Gleichungen der Form $y = mx + n$ heißen **lineare Gleichungen**. Wir unterscheiden lineare Gleichungen mit einer Variablen, z. B. $y = 5$ oder $x = 3$, und solche mit zwei Variablen, z. B. $y = 3x + 2$ oder $x + y = 5$.

Aufgaben c 31 bis 43

Zusammenfassung:
Eine Menge geordneter Paare $[x; y]$ mit $x \in X$ und $y \in Y$, die eine eindeutige Abbildung der Menge X auf die Menge Y ist, heißt Funktion.
Zur Angabe von Funktionen können Wortvorschriften (↗ Beispiel C 9), Wertetabellen (↗ Beispiel C 10), Gleichungen (↗ Beispiel C 16) und graphische Darstellungen (↗ Beispiel C 21) herangezogen werden.
Die graphischen Darstellungen linearer Funktionen sind Punkte auf ein und derselben Geraden. Die Funktionen $y = mx$ und $y = n$ sind Spezialfälle der Funktionen $y = mx + n$. Der Koeffizient m heißt der Anstieg der Funktion.
Die durch Proportionalität gegebenen eindeutigen Zuordnungen sind also spezielle lineare Funktionen, denn sie lassen sich durch Gleichungen der Form $y = mx + n$ mit $m > 0$ und $n = 0$ darstellen.

Nullstellen linearer Funktionen; lineare Gleichungen

11 Berechnen von Zahlenpaaren aus linearen Gleichungen

Wir wissen bereits:

- Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die durch das Gleichheitszeichen verbunden sind.
- Eine Gleichung mit Variablen in einem gegebenen Grundbereich **lösen**, heißt alle Zahlen bzw. Zahlenpaare des gegebenen Grundbereichs ermitteln, die die Gleichung nach dem Einsetzen für die Variablen zu einer wahren Aussage machen, d. h., sie **erfüllen**.
- Jede dieser Zahlen bzw. jedes dieser Zahlenpaare bezeichnet man als eine **Lösung**, die Menge aller Lösungen einer Gleichung als **Lösungsmenge**.

Zur graphischen Darstellung der linearen Funktionen haben wir aus diesen Gleichungen Zahlenpaare errechnet und sie zu Wertetabellen zusammengestellt. Alle diese Paare erfüllen die jeweilige Gleichung, d. h., sie sind Lösungen dieser Gleichung.

22 Gegeben sei die Gleichung $y = 2x - 4$. Die Zahlenpaare **a)** $[-2; -8]$, **b)** $[0; -4]$, **c)** $[2; 0]$ und unendlich viele andere erfüllen die Gleichung. Zur Probe setzen wir in die gegebene Gleichung ein

a) *linke Seite:* -8
rechte Seite: $2 \cdot (-2) - 4 = -8$
Vergleich: $-8 = -8$

b) *linke Seite:* -4
rechte Seite: $2 \cdot 0 - 4 = -4$
Vergleich: $-4 = -4$

Wenn die Gleichung einer linearen Funktion und eine der Zahlen eines geordneten Paares gegeben sind, so können wir die zweite Zahl dieses Paares durch Einsetzen in die Gleichung ausrechnen.

23 Gegebene Gleichung: $y = -4x + 10$
Geordnete Paare: **a)** $[3; y]$, **b)** $[x; -5]$

a) Wir setzen in die gegebene Gleichung ein:
$y = -4 \cdot 3 + 10$
$y = -2$
$[3; -2]$

b) Wir setzen in die gegebene Gleichung ein:
$-5 = -4x + 10$
$4x = 15$
$x = \frac{15}{4}$
$\left[\frac{15}{4}; -5\right]$

Aufgabe c 44

C

12 Nullstellen

Unter allen Zahlenpaaren $[x; y]$, die die Gleichung $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ einer linearen Funktion erfüllen, gibt es genau eins, in dem die zweite Zahl (der zu x gehörige Funktionswert) gleich 0 ist.

3 **DEFINITION: Eine Zahl aus dem Definitionsbereich einer Funktion, der bei dieser Funktion die Zahl Null zugeordnet wird, heißt *Nullstelle* dieser Funktion.**

24 **a)** $y = -0{,}5x + 7$; Nullstelle: $x = 14$
b) $y = \frac{1}{3}x + 4$; Nullstelle: $x = -12$
c) $y = 2x - \frac{9}{2}$; Nullstelle: $x = \frac{9}{4}$

Eine Nullstelle einer Funktion ist die Abszisse eines Schnittpunktes ihrer graphischen Darstellung mit der x-Achse, denn alle Punkte mit der Ordinate 0 liegen auf der x-Achse.
Die graphischen Darstellungen der linearen Funktionen $y = mx + n$ mit $m \neq 0$ sind Punkte, die jeweils auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Da eine solche Gerade die x-Achse in genau einem Punkt schneidet, folgt, daß diese linearen Funktionen genau eine Nullstelle haben ($m \in R$; $n \in R$). Die Funktionen $y = n$ haben für $n \neq 0$ keine Nullstelle. Ihre graphischen Darstellungen sind Punkte auf Parallelen zur x-Achse. Die Funktion $y = 0$ hat für jedes x den Funktionswert 0. Sie hat also unendlich viele Nullstellen. Alle Punkte ihrer graphischen Darstellung liegen auf der x-Achse.
Es gibt noch weitere Funktionen, die mehr als eine Nullstelle besitzen.

25 a) $y = x^2 - 9$;   Nullstellen: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$
b) $y = |x| - 5$;   Nullstellen: $x_1 = 5$; $x_2 = -5$

26 Im folgenden Beispiel sind Funktionen ohne Nullstellen angegeben.
a) $y = x^2 + 9$ b) $y = |x| + 5$

Aufgaben c 45 und 46

Lösen linearer Gleichungen

13 Lineare Gleichungen mit Klammern

Wir haben in Klasse 7 Regeln für das Umformen von Gleichungen mit einer Variablen kennengelernt. Diese Regeln wurden dort für lineare Gleichungen mit dem Variablengrundbereich R und mit Koeffizienten und absoluten Gliedern aus R aufgestellt. Sie gelten aber ebenso, falls auch irrationale Zahlen auftreten.

1. Vertauscht man die Seiten einer Gleichung, so entsteht eine zu ihr äquivalente Gleichung.
2. Addiert oder subtrahiert man auf beiden Seiten einer Gleichung eine rationale oder irrationale Zahl oder ein Vielfaches ax von x (a rationale oder irrationale Zahl), so entsteht eine zu ihr äquivalente Gleichung.
3. Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit derselben von Null verschiedenen rationalen oder irrationalen Zahl, so entsteht eine zu ihr äquivalente Gleichung.
4. Dividiert man beide Seiten einer Gleichung durch dieselbe von Null verschiedene Zahl, so entsteht eine zu ihr äquivalente Gleichung.

Dabei heißen zwei Gleichungen zueinander äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben, und zwar bezogen auf ein und denselben Variablen-Grundbereich.

27 *Aufgabe:* $x - (8x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 5)$

Auflösen der Klammern: $x - 8x + 69 + 6x - 50 = 2x - x + 5$

Zusammenfassen:
$$\begin{aligned} -x + 19 &= x + 5 \qquad && \mid -19 - x \\ -2x &= -14 && \mid :(-2) \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Probe: *linke Seite:* $7 - (8 \cdot 7 - 69) + (6 \cdot 7 - 50) = 7 + 13 - 8 = 12$
rechte Seite: $2 \cdot 7 - (7 - 5) = 14 - 2 = 12$
Vergleich: $12 = 12$, also $L = \{7\}$.

28 *Aufgabe:* $(x - 3)(2x - 5) - 4(x - 2) = 2(x - 1)^2 - 12$

Ausmultiplizieren:
$$2x^2 - 5x - 6x + 15 - 4x + 8 = 2(x^2 - 2x + 1) - 12$$
$$2x^2 - 5x - 6x + 15 - 4x + 8 = 2x^2 - 4x + 2 - 12$$

Zusammenfassen: $2x^2 - 15x + 23 = 2x^2 - 4x - 10$

Diese Gleichung ist zwar nicht linear, denn sie enthält Glieder mit x^2. Sie läßt sich aber in eine zu ihr äquivalente lineare Gleichung überführen.

$$\begin{aligned} -15x + 23 &= -4x - 10 \qquad && \mid +4x - 23 \\ -11x &= -33 && \mid :(-11) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Probe: *linke Seite:* $(3-3)(2\cdot 3-5)-4(3-2)=0\cdot 1-4\cdot 1=-4$
rechte Seite: $2(3-1)^2-12=2\cdot 2^2-12=2\cdot 4-12=-4$
Vergleich: $-4=-4$, also $L=\{3\}$.

Bei Division durch x ist man nicht sicher, ob eine zur ersten Gleichung äquivalente Gleichung entsteht oder nicht. Deshalb muß gegebenenfalls die entstehende Gleichung gesondert hinsichtlich ihrer Lösungsmenge untersucht werden.

29 *Aufgabe:*
(1) $x^2(x+1)=x^2(x+2)$. Der Variablen-Grundbereich sei die Menge der rationalen Zahlen.
Die Gleichung (1) hat die Lösungsmenge $L=\{0\}$.
Probe: *linke Seite:* $0(0+1)=0$; *rechte Seite:* $0(0+2)=0$ *Vergleich:* $0=0$
Wir dividieren jetzt die Gleichung (1) durch x:

$$x^2(x+1)=x^2(x+2) \quad |:x$$

und erhalten:

(2) $x(x+1)=x(x+2)$.

Auch die Gleichung (2) hat die Lösungsmenge $L=\{0\}$ und ist damit zu (1) äquivalent.
Probe: *linke Seite:* $0(0+1)=0$; *rechte Seite:* $0(0+2)=0$ *Vergleich:* $0=0$
Wir dividieren nun die Gleichung (2) wiederum durch die Variable x:

$$x(x+1)=x(x+2) \quad |:x$$

und erhalten

(3) $x+1=x+2$.

Im Falle der Gleichung (3) ist die Lösungsmenge leer, denn für keine rationale oder irrationale Zahl x gilt

$$x+1=x+2.$$

Gleichung (3) ist zu (2) nicht äquivalent und daher die Umformung nicht zulässig.

Auch wenn x in Verbindung mit anderen Zahlen oder Variablen steht, muß man das Dividieren durch die Variable x nach Möglichkeit vermeiden oder aber besonders überprüfen.

30 *Aufgabe:* $(x-3)(x+4)=(x-7)(x-3)$
Der Variablen-Grundbereich sei die Menge der rationalen Zahlen.
Ausmultiplizieren: $x^2+4x-3x-12=x^2-3x-7x+21$
Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} x^2+x-12&=x^2-10x+21 \quad &&|-x^2+10x+12\\ 11x&=33 &&|:11\\ x&=3 \end{aligned}$$

Probe: *linke Seite:* $(3-3)(3+4)=0\cdot 7=0$
rechte Seite: $(3-7)(3-3)=(-4)\cdot 0=0$
Vergleich: $0=0$, also $L=\{3\}$.
Vermeidet jemand nicht das Dividieren durch die Variable x, sondern dividiert durch $(x-3)$, so erhält er eine Gleichung, die zur gegebenen nicht äquivalent ist.

$$\begin{aligned} (x-3)(x+4)&=(x-7)(x-3) \quad |:(x-3)\\ x+4&=x-7 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung.

Auch das Multiplizieren mit der Variablen x kann zu einer zur gegebenen Gleichung nicht äquivalenten Gleichung führen. Betrachten wir hierzu ein Beispiel:

31 *Aufgabe:* $x + 2 = x + 3$. Der Variablen-Grundbereich sei die Menge der rationalen Zahlen.

Diese Gleichung hat keine Lösung, d. h. $L = \emptyset$.

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit x:

$$x(x + 2) = x(x + 3).$$

Ausmultiplizieren:
$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x^2 + 3x \quad && \vert - x^2 \\ 2x &= 3x && \vert - 3x \\ -x &= 0 && \vert :(-1) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Probe: *linke Seite:* $0 + 2 = 2$; *rechte Seite:* $0 + 3 = 3$

Vergleich: $2 = 3$, also ist 0 nicht Lösung.

Die Probe offenbart, daß das Einsetzen von 0 zu einer falschen Aussage führt. Die Zahl 0 ist zwar Lösung der Gleichung $x(x + 2) = x(x + 3)$, aber nicht Lösung der ursprünglich gegebenen Gleichung $x + 2 = x + 3$. Die beiden Gleichungen sind also nicht äquivalent.

Die Probe hat also nicht nur den Zweck, die Richtigkeit des Rechenganges zu überprüfen, sondern sie soll vor allem zeigen, ob alle gefundenen Zahlen wirklich Lösungen der ursprünglich gegebenen Gleichung sind.

Aufgaben c 47 bis 52

C

14 Lineare Gleichungen mit Brüchen

32 Gegeben sei die Gleichung $3x - \frac{2x + 5}{7} = 16 - \frac{7x + 19}{2} - \frac{2x + 1}{3}$.

Es treten mehrere Brüche auf. Die Variable x ist aber in allen Brüchen nur jeweils im Zähler enthalten.

Multiplikation mit dem Hauptnenner 42:

$$42\left(3x - \frac{2x + 5}{7}\right) = 42\left(16 - \frac{7x + 19}{2} - \frac{2x + 1}{3}\right)$$

Ausmultiplizieren: $126x - \frac{42(2x + 5)}{7} = 672 - \frac{42(7x + 19)}{2} - \frac{42(2x + 1)}{3}$

Kürzen: $126x - 6(2x + 5) = 672 - 21(7x + 19) - 14(2x + 1)$

Ausmultiplizieren: $126x - 12x - 30 = 672 - 147x - 399 - 28x - 14$

Zusammenfassen: $114x - 30 = -175x + 259 \quad \vert + 175x + 30$

$$289x = 289$$
$$x = 1$$

6 *Führe die Probe selbst aus, und gib die Lösungsmenge der Gleichung an!*

In den folgenden Beispielen tritt die Variable auch in Nennern von Brüchen auf.

33 Gegeben ist die Gleichung $\frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9}$.

Wir müssen von vornherein $x \neq 0$ annehmen, da für $x = 0$ die Gleichung keinen Sinn hat.

Multiplikation mit dem Hauptnenner $18x$:

$$18x \cdot \frac{9}{x} + 18x \cdot \frac{1}{2} = 18x \cdot \frac{10}{x} + 18x \cdot \frac{4}{9}$$
$$162 + 9x = 180 + 8x \quad | - 8x - 162$$
$$x = 18$$

(7) *Führe die Probe selbst aus, und gib die Lösungsmenge der Gleichung an!*

34 Gegeben sei die Gleichung $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-7}{x-4}$.
Sie ist eine Verhältnisgleichung, in der die Variable x in den Zählern und Nennern auftritt. Für $x = 2$ und $x = 4$ hat die Gleichung keinen Sinn.

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-7}{x-4} \quad | \cdot (x-2)(x-4)$$
$$\frac{(x-2)(x-4)(x+3)}{x-2} = \frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{x-4}$$

Kürzen: $(x-4)(x+3) = (x-2)(x-7)$

Ausmultiplizieren: $x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 - 7x - 2x + 14$

Zusammenfassen: $x^2 - x - 12 = x^2 - 9x + 14 \quad | -x^2 + 9x + 12$

$$8x = 26 \quad | : 8$$
$$x = \frac{13}{4}$$

(8) *Führe die Probe selbst aus, und gib die Lösungsmenge der Gleichung an!*

Aufgaben c 53 bis 55

C

15

Treten in einer Gleichung mehrere Variablen auf, kann eventuell nach verschiedenen Variablen aufgelöst werden.

35 *Gegeben:* $5x + a = 2b - 3a$

a) *Auflösen nach x:*

$$5x + a = 2b - 3a \quad | - a$$
$$5x = 2b - 4a \quad | : 5$$
$$x = \frac{2b-4a}{5}$$

Probe:

linke Seite: $5 \cdot \frac{2b-4a}{5} + a =$

$= 2b - 4a + a = 2b - 3a$

rechte Seite: $2b - 3a$

Vergleich: $2b - 3a = 2b - 3a$

Diese Gleichung ist stets eine wahre Aussage, unabhängig von den für a bzw. b eingesetzten Zahlen, also

$L = \left\{\frac{2b-4a}{5}\right\}$.

b) *Auflösen nach a:*

$$5x + a = 2b - 3a \quad | + 3a - 5x$$
$$4a = 2b - 5x \quad | : 4$$
$$a = \frac{2b-5x}{4}$$

Probe:

linke Seite: $5x + \frac{2b-5x}{4} =$

$= \frac{20x + 2b - 5x}{4} = \frac{15x + 2b}{4}$

rechte Seite: $2b - 3 \cdot \frac{2b-5x}{4} =$

$= \frac{8b - 6b + 15x}{4} = \frac{2b + 15x}{4}$

Vergleich: $\frac{15x + 2b}{4} = \frac{2b + 15x}{4}$, also

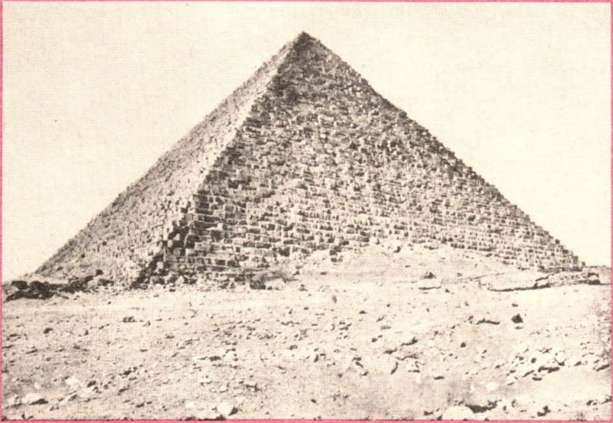
$L = \left\{\frac{2b-5x}{4}\right\}$.

(9) *Löse die Gleichung im Beispiel C 35 nach b auf!*

Aufgaben c 56 bis 89

D Flächen- und Rauminhaltsberechnung

Alte Kulturvölker, z. B. die Ägypter und die Mayas in Mexiko, errichteten bereits lange vor unserer Zeitrechnung monumentale Bauwerke. Diese Bauwerke aus der Epoche der Sklaverei, die hier ein Grabmal, dort eine Opferstätte und wieder anderswo eine Sternwarte darstellten, haben die Jahrtausende überdauert. Beim damaligen Stand der Technik waren der oftmals sehr weite Transport der Baustoffe und das Brechen sowie das Zusammenfügen der Steinquader mit unsäglichen Anstrengungen verbunden. Die gemeinsame Bezeichnung dieser spitzen Bauwerke lautet *Pyramiden*, ein Name, der auch einer Klasse *geometrischer Körper* zugeordnet wird.



1 Zur Wiederholung

(1) **a)** *Konstruiere in senkrechter Zweitafelprojektion einen Würfel!*
b) *Konstruiere in senkrechter Zweitafelprojektion einen Quader, der kein Würfel ist!*
c) *Konstruiere in senkrechter Zweitafelprojektion ein gerades Prisma, das kein Quader ist!*

(2) *Konstruiere die Körper aus Auftrag D 1 in schräger Parallelprojektion!*

Geometrische Körper, die von zwei zueinander parallelen und kongruenten n-Ecksflächen (Grund- und Deckfläche) sowie von n Parallelogrammflächen (Seitenflächen) begrenzt werden, heißen **Prismen.**
Der Abstand von Grund- und Deckfläche ist die Länge der **Höhe** des Prismas.
Prismen, deren Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche stehen, sind **gerade Prismen.** Quader und Würfel sind spezielle gerade Prismen.
(↗ Übersicht auf dem hinteren Buchdeckel)
Volumen eines geraden Prismas:

$$\boxed{V = A_G \cdot h}$$

(A_G Inhalt der Grundfläche; h Länge der Höhe des Prismas)

Geometrische Körper, die durch Rotation einer Rechteckfläche um eine ihrer Seiten entstehen, heißen gerade **Kreiszylinder.** Grund- und Deckfläche sind zueinander kongruente Kreisflächen in zueinander parallelen Ebenen. Der Mantel kann zu einem Rechteck abgewickelt werden. Der Abstand von Grund- und Deckfläche ist die Länge der **Höhe** des Kreiszylinders.
Bei **geraden Kreiszylindern** stehen die Mantellinien senkrecht auf der Grundfläche.
Volumen eines geraden Kreiszylinders:

$$\boxed{V = A_G \cdot h = \pi r^2 h}$$

(A_G Inhalt der Grundfläche; h Länge der Höhe des Kreiszylinders; r Radius des Grundkreises)

D

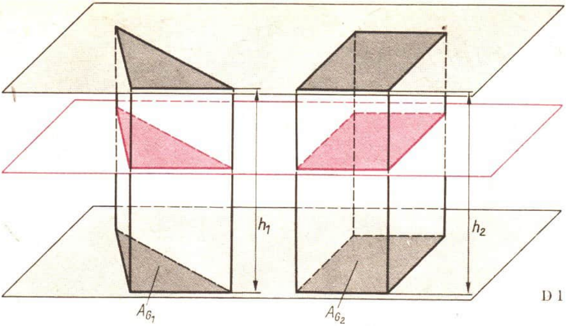
(3) *Stelle einen geraden Kreiszylinder mit* $d = 3{,}5$ cm *und* $h = 5{,}2$ cm *in Zweitafelprojektion dar!*

Aufgaben d 1 bis 10

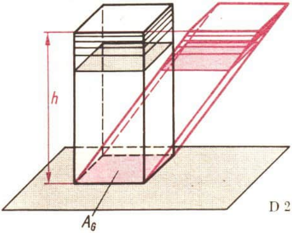
2 Volumenvergleiche

Zwei gerade Prismen (Bild D 1) sollen gleiche Grundflächeninhalte A_{G_1} bzw. A_{G_2} sowie gleich lange Höhen h_1 bzw. h_2 haben. Jede zur gemeinsamen Grundflächenebene parallele Ebene, die beide Körper schneidet, erzeugt flächengleiche Schnittflächen. Aus $V_1 = A_{G_1} \cdot h_1$ und $V_2 = A_{G_2} \cdot h_2$ folgt $V_1 = V_2$.
Die beiden Prismen haben gleiche Volumina.

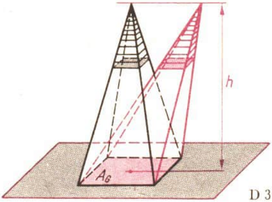
1 Das Bild D 2 zeigt einen Stapel kongruenter dünner Pappscheiben (z. B. Postkarten oder Rommékarten) und einen zweiten Stapel, der mit Hilfe eines Lineals in eine neue Lage gebracht wurde. Der linke Stapel hat die Gestalt eines geraden



D 1



D 2



D 3

Prismas. Der rechte Stapel stellt ein treppenartiges Gebilde dar. Je dünner wir uns die Scheiben denken, desto mehr nähert sich der treppenartige Körper einem schiefen Prisma. Beide Stapel haben gleich lange Höhen und gleiche Grundflächeninhalte. Jede zur gemeinsamen Grundflächenebene parallele Ebene, die die beiden Stapel schneidet, erzeugt flächeninhaltsgleiche Schnittfiguren. Da das Volumen beider Stapel gleich ist, vermuten wir, daß auch das gedachte schiefe Prisma (anstelle des Treppenkörpers) das gleiche Volumen hat wie das ursprünglich gerade Prisma.

2 Das Bild D 3 veranschaulicht die entsprechenden Zusammenhänge wie im Beispiel D 1 an zwei Stapeln, bei denen die Flächeninhalte der Schnittflächen nach oben zu immer kleiner werden. Auch hier wissen wir, daß die beiden Stapel gleiches Volumen haben. Wir vermuten, daß bei immer feiner werdenden Schichten der „gerade" und der „schiefe" Körper ebenfalls gleiches Volumen haben.
Für alle drei Fälle, die in den Bildern D 1, 2 und 3 dargestellt wurden, gilt:
(1) Die Grundflächen der beiden Körper haben den gleichen Flächeninhalt.
(2) Die Höhen der beiden Körper sind gleich lang.
(3) Jeder beliebige zur Grundfläche parallele Schnitt in gleicher Höhe erzeugt bei beiden Körpern flächeninhaltsgleiche Schnittfiguren.

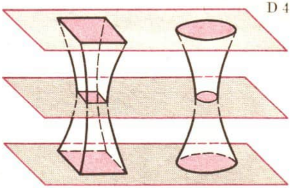
D

Außerdem vermuten wir:
(4) Die Körper haben gleiche Volumina.
Auf Grund solcher Überlegungen formulierte der große italienische Mathematiker Bonaventura Cavalieri (1598–1647) einen Satz, der besagt, daß zwei Körper mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) stets die Eigenschaft (4) besitzen.

1 **SATZ des Cavalieri: Wenn für zwei Körper mit gleich langen Höhen und gleichen Grundflächeninhalten gilt, daß parallel zur Grundflächenebene in beliebigen, aber jeweils gleichen Abständen von dieser geführte Schnitte stets zu Schnittflächen mit gleich großen Flächeninhalten führen, so haben die beiden Körper gleiche Volumina.**

Beweisen können *wir* diesen Satz mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln auf dieser Klassenstufe nicht. Wir werden diesen Satz jedoch gelegentlich anwenden.

3 Gegeben seien zwei Körper mit gleich langen Höhen und gleich großen Grundflächeninhalten (Bild D 4). Jede parallel zur gemeinsamen Grundflächenebene gelegene Ebene erzeuge jeweils bei beiden Körpern Schnittflächen, die gleiche Flächeninhalte haben. Da damit die Voraussetzungen des Satzes von Cavalieri erfüllt sind, haben die beiden Körper gleiche Volumina.

D 4


4 *Leite die Formel für das Volumen eines beliebigen geraden Prismas mit Hilfe von Satz D 1 her!*
(Anleitung: Führe einen Vergleich mit einem geeigneten Quader durch!)

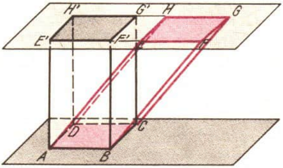
3 Schiefe Prismen und schiefe Kreiszylinder

In **schiefen Prismen** stehen die Seitenkanten nicht senkrecht auf der jeweiligen Grundflächenebene. Zu jedem schiefen Prisma gibt es ein gerades Prisma, das den gleichen Grundflächeninhalt und eine Höhe gleicher Länge wie das schiefe Prisma besitzt.

5 *Begründe, daß die beiden Prismen im Bild D 5 die Eigenschaft (3) (↗ S. 79) besitzen!*

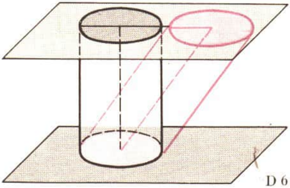
2 **SATZ: Jedes Prisma mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhenlänge h besitzt das Volumen $V = A_G h$.**

Beweis: Besitzt ein schiefes Prisma den Grundflächeninhalt A_G und die Höhenlänge h, so gibt es ein gerades Prisma mit derselben Höhenlänge und demselben Grundflächeninhalt. Da man zeigen kann, daß das schiefe Prisma und das gerade

D 5


Prisma in gleichen Abständen von den Grundflächen flächengleiche Schnittflächen parallel zu den Grundflächenebenen besitzen, haben sie nach Satz D 1 gleiche Volumina. Da das Volumen des geraden Prismas $V = A_G h$ beträgt, ist damit der Satz D 2 bewiesen.
In **schiefen Kreiszylindern** stehen die Mantellinien nicht senkrecht auf der Grundflächenebene. Zu jedem schiefen Kreiszylinder gibt es einen geraden Kreiszylinder, der den gleich langen Grundkreisradius und die gleich lange Höhe wie der schiefe Kreiszylinder besitzt.

4 Die auf der Grundflächenebene eines schiefen Kreiszylinders senkrecht stehenden Geraden durch die Punkte des Grundflächenkreises mit dem Radius r schneiden die Deckflächenebene in Punkten, die auf ein und demselben Kreis liegen (Bild D 6). Dieser Kreis besitzt ebenfalls den Radius r. Der schiefe und der gerade Kreiszylinder haben gleich lange Höhen und denselben Grundkreisradius.



D 6

6 *Begründe, daß die beiden Kreiszylinder im Bild D 6 die Eigenschaft (3) besitzen!*

3 **SATZ: Jeder Kreiszylinder mit dem Grundkreisradius r und der Höhenlänge h besitzt das Volumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.**

Der Satz D 3 läßt sich wie der Satz D 2 beweisen.

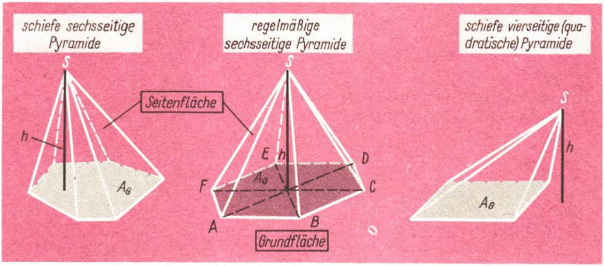
Aufgaben d 11 bis 15

Pyramiden

4 Definieren des Begriffs „Pyramide“

5 In einer Ebene ε sei ein Sechseck $ABCDEF$ gegeben (Bild D 7). Wir verbinden die Eckpunkte des Sechsecks mit einem nicht in der Ebene ε liegenden Punkt S. Der dadurch bestimmte ebenflächig begrenzte Körper wird **Pyramide** genannt.

D 7



(7) *Schreibe alle Kanten und alle Begrenzungsflächen der Pyramide im Bild D 7b auf!*

4 **DEFINITION: Jeder ebenflächig begrenzte Körper, der von einer *n*-Eckfläche und von *n* in einem Punkt zusammenstoßenden Dreiecksflächen begrenzt wird, heißt eine *n-seitige Pyramide* (Bild D 7).**

Die n-Eckfläche heißt die **Grundfläche**, die n Dreiecksflächen heißen die **Seitenflächen** der Pyramide. Der Punkt, in dem die Seitenflächen zusammenstoßen, heißt die **Spitze** der Pyramide. Der Abstand der Spitze von der Grundflächenebene ist die Länge der **Höhe** der Pyramide. Die Seiten der Grundfläche werden **Grundkanten**, die von der Spitze ausgehenden Kanten werden **Seitenkanten** der Pyramide genannt.

(8) *Stelle eine quadratische Pyramide mit der Grundkantenlänge* $a = 4$ cm *und der Höhenlänge* $h = 6$ cm *im Schrägbild in Kavalierperspektive dar! Welche Möglichkeiten gibt es für die Lage der Spitze?*

Eine Pyramide heißt **regelmäßig**, wenn
(1) die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist und wenn
(2) die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt.
Die Seitenflächen sind dann kongruente gleichschenklige Dreiecke. (Der Mittelpunkt ist bei Vielecken der Schnittpunkt der Symmetrieachsen.)
Bei regelmäßigen Pyramiden wird die Gerade durch das Lot von der Spitze auf die Grundflächenebene **Achse der Pyramide** genannt.

5 Kanten und Begrenzungsflächen gerader Pyramiden

Wir führen für die geraden Pyramiden die im Bild D 8 angeführten Bezeichnungen ein.

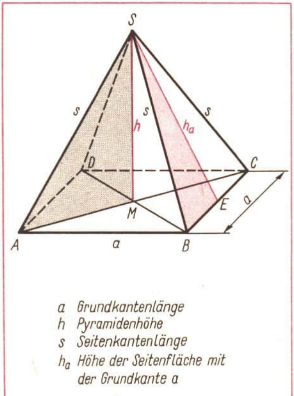
6 *Aufgabe:* Von einer geraden quadratischen Pyramide seien die Grundkantenlänge $a = 4$ cm und die Seitenkantenlänge $s = 6$ cm gegeben. Gesucht sind **a)** die Länge der Höhe h und **b)** die Länge der Seitenflächenhöhe h_a der Pyramide.

Lösung (Bild D 8; gerade quadratische Pyramide):

a) Im rechtwinkligen Dreieck AMS ist h Kathete. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

(1) $h^2 = s_2 - \overline{AM}^2$

Auch $\overline{AM}^2$ kann mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden. Im Dreieck ABM gilt wegen $\overline{AM} = \overline{BM}$:



D 8

$a^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AM}^2$

$a^2 = 2\,\overline{AM}^2$

(2) $\overline{AM}^2 = \frac{a^2}{2}$

Wir setzen (2) in (1) ein:

$h^2 = s^2 - \frac{a^2}{2}$

$h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}$

$h = \sqrt{36 - \frac{16}{2}}$ cm

$h = \sqrt{28}$ cm $\approx 5{,}3$ cm

b) Im rechtwinkligen Dreieck BES ist h_a Kathete.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$h_a{}^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Daraus finden wir

$h_a{}^2 = s^2 - \frac{a^2}{4}$

$h_a = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}}$.

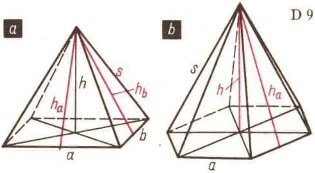
Wir setzen ein:

$h_a = \sqrt{36 - \frac{16}{4}}$ cm

$h_a = \sqrt{36 - 4}$ cm

$h_a = \sqrt{32}$ cm

$h_a \approx 5{,}7$ cm



Ergebnis: Die Länge der Höhe beträgt 5,3 cm, und die Länge der Seitenflächenhöhe beträgt 5,7 cm.

9 **a)** *Von einer vierseitigen geraden Pyramide, deren Grundfläche eine Rechteckfläche ist, sind die Längen a, b und h gegeben (Bild D 9).*
Erläutere den Lösungsweg zur Berechnung von s, h_a und h_b!

b) *Von einer regelmäßigen sechsseitigen geraden Pyramide sind a und s gegeben (Bild D 9 b).*
Erläutere den Lösungsweg zur Berechnung von h und h_a!
(Anmerkung: Die regelmäßige sechsseitige Grundfläche kann in 6 gleichseitige Dreiecksflächen zerlegt werden.)

Aufgaben d 16 bis 19

6 Das Volumen von Pyramiden

Eine dreiseitige Pyramide wird nur von Dreiecksflächen begrenzt. Bei einer dreiseitigen Pyramide kann jede Begrenzungsfläche als Grundfläche gewählt werden.

10 **a)** *Stelle eine dreiseitige Pyramide im Schrägbild sowie im Grund- und Aufriß dar!*
b) *Begründe, daß sich jede Pyramide in dreiseitige Pyramiden zerlegen läßt!*

Wir untersuchen das Volumen dreiseitiger Pyramiden.

D

5 **SATZ: Zwei dreiseitige Pyramiden mit gleich langen Höhen und gleichen Grundflächeninhalten haben gleiche Rauminhalte.**

Beweis: Gegeben seien zwei dreiseitige Pyramiden mit den Spitzen S_1 bzw. S_2 mit gemeinsamer Grundflächenebene (Bild D 10). Die Höhen der Pyramiden seien gleich lang. Wir bezeichnen die Höhen mit h. Weiter sei $A_{\Delta ABC} = A_{\Delta DEG}$. Die Dreiecksflächen $A'B'C'$ und $D'E'G'$ seien parallel zur Grundflächenebene gelegene Schnittflächen. Ihr Abstand von den Spitzen sei beliebig, aber gleich; wir bezeichnen ihn mit h'. Die Schnittpunkte der Lote von S_1 und S_2 auf die Grund- bzw. Schnittflächenebene bezeichnen wir mit F_1 und F_2 bzw. F_1' und F_2'.
Wir weisen nach, daß $A_{\Delta A'B'C'} = A_{\Delta D'E'G'}$ gilt.

a) Auf Grund des Strahlensatzes gilt in der Ebene ABS_1

   $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AS_1} : \overline{A'S_1}$ und in der Ebene AF_1S_1 $\quad \overline{AS_1} : \overline{A'S_1} = h : h'$.

   Daraus folgt wegen der Parallelität der Ebenen ABC und $A_1B_1C_1$

   $\overline{AB} : \overline{A'B'} = h : h'$.

   Entsprechend finden wir

   $\overline{BC} : \overline{B'C'} = h : h'$

   und

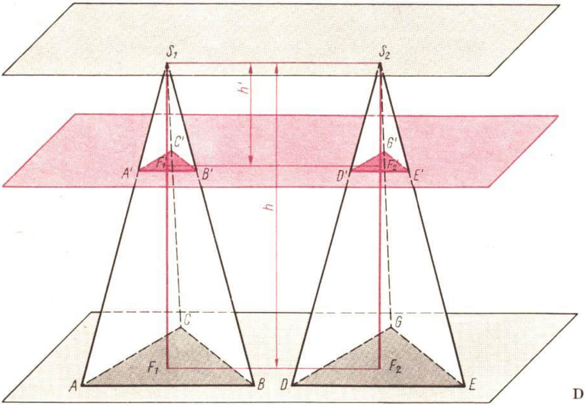
   $\overline{CA} : \overline{C'A'} = h : h'$.

b) Wegen a) sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich. Auf Grund des Satzes über die Flächeninhalte ähnlicher Figuren gilt

   $A_{\Delta ABC} : A_{\Delta A'B'C'} = h^2 : h'^2$.

c) In entsprechender Weise ergibt sich

   $A_{\Delta DEG} : A_{\Delta D'E'G'} = h^2 : h'^2$.



D 10

d) Aus b) und c) folgt

$A_{\Delta ABC} : A_{\Delta A'B'C'} = A_{\Delta DEG} : A_{\Delta D'E'G'}$.

Da nach Voraussetzung

$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta DEG}$

gilt, ergibt sich

$A_{\Delta A'B'C'} = A_{\Delta D'E'G'}$.

Damit sind für die beiden Pyramiden die Voraussetzungen des Satzes von Cavalieri erfüllt. Sie haben also gleiche Volumina.

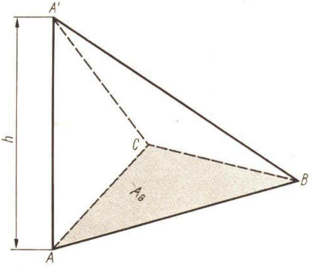
Mit Hilfe von Satz D 5 ist es nun möglich, eine Formel für das Volumen von dreiseitigen Pyramiden zu finden.

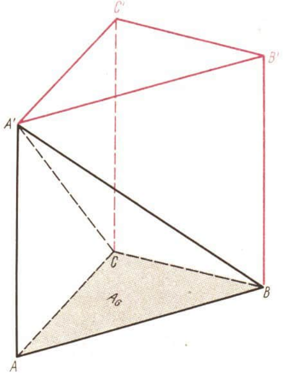
6 **SATZ: Das Volumen jeder dreiseitigen Pyramide mit der Höhenlänge h und dem Grundflächeninhalt A_G beträgt:**

Dreiseitige Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h\,.$$

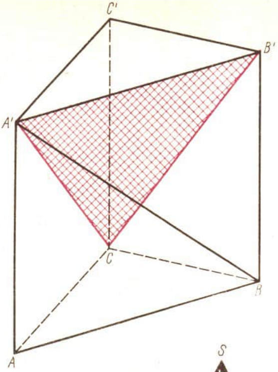
Beweis: Gegeben sei eine Pyramide mit der Grundfläche ABC, der Spitze A', der Höhenlänge h und dem Grundflächeninhalt A_G (Bild D 11). Die Seitenkante $\overline{AA'}$ stehe senkrecht auf der Grundflächenebene ABC. Wir errichten in den Eckpunkten B und C der Pyramide die Senkrechten auf die Grundflächenebene. Sie schneiden die Ebene durch A', die parallel zur Grundflächenebene verläuft, in Punkten, die wir mit B' und C' bezeichnen. Der ebenflächig begrenzte Körper mit den Ecken A, B, C, A', B', C' ist ein Prisma mit dem Volumen $V_{\text{Prisma}} = A_G\, h$. Dieses Prisma setzt sich aus der Pyramide I (Grundfläche ABC, Spitze A') und dem Restkörper mit den Ecken B, B', C', A', C zusammen.



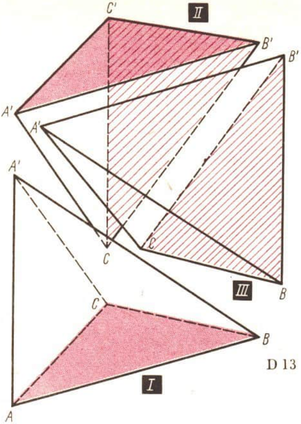


D 11

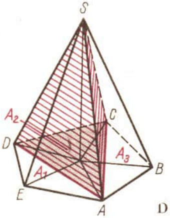
D



D 12



D 13



D 14

a) Den Restkörper zerlegen wir durch die Ebene $A'CB'$ in die dreiseitige Pyramide II (Grundfläche $A'CB'$, Spitze C') und die dreiseitige Pyramide III (Grundfläche $A'CB$, Spitze B') (Bild D 12).

b) Wir vergleichen die Pyramiden I und II. Dazu wählen wir die Dreiecksfläche ABC als Grundfläche von I und die Dreiecksfläche $A'B'C'$ als Grundfläche von II. Die Pyramiden haben dann gleich lange Höhen sowie kongruente und damit flächeninhaltsgleiche Grundflächen. Nach Satz D 5 gilt $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}}$ (Bild D 13).

c) Wir vergleichen die Pyramiden II und III. Dazu wählen wir die Dreiecksfläche $CB'C'$ als Grundfläche von II und die Dreiecksfläche CBB' als Grundfläche von III. Die beiden Pyramiden haben dann die gemeinsame Spitze A'. Ihre Höhen sind also gleich lang (Bild D 13).
Die gewählten Grundflächen sind kongruent und damit flächeninhaltsgleich. Nach Satz 4 gilt $V_{\mathrm{II}} = V_{\mathrm{III}}$.

d) Aus b) und c) folgt $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}} = V_{\mathrm{III}}$. Wegen $V_{\mathrm{Prisma}} = V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}} + V_{\mathrm{III}}$ finden wir also $V_{\mathrm{Prisma}} = 3\,V_{\mathrm{I}}$ bzw. $V_{\mathrm{I}} = \frac{1}{3}\,V_{\mathrm{Prisma}}$. Damit gilt
$V_{\mathrm{Pyramide}} = \frac{1}{3}\,A_G\,h.$

Ist eine beliebige n-seitige Pyramide mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhenlänge h gegeben, so läßt sie sich in k $(k = n - 2)$ dreiseitige Pyramiden mit gleich langen Höhen und den Grundflächeninhalten $A_1, \ldots, A_k$ zerlegen (Bild D 14).

Wegen

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_1 h + \frac{1}{3} A_2 h + \cdots + \frac{1}{3} A_k h$$
$$= \frac{1}{3} (A_1 + \cdots + A_k)\, h$$

und

$$A_1 + \cdots + A_k = A_G$$

ergibt sich

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_G h.$$

7 **SATZ: Das Volumen jeder Pyramide mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhenlänge h beträgt**

$$\boxed{\textbf{Pyramide: } V = \frac{1}{3} A_G h}$$

7 *Aufgabe:* Gegeben sei eine gerade regelmäßige sechsseitige Pyramide mit der Grundkantenlänge $a = 3$ cm und der Höhenlänge $h = 6$ cm (Bild D 15). Es soll das Volumen V berechnet werden.

Lösung:

a) Wir berechnen zunächst den Grundflächeninhalt A_G (Bild D 15 b). Dazu bezeichnen wir die Höhe eines Teildreiecks im Sechseck auf die betreffende Sechseckseite mit h_a.

$$A_G = 6 \cdot \frac{a\, h_a}{2}.$$

Wegen $h_a = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}}$

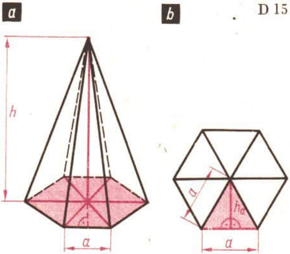
$$= \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot 3}$$

$$h_a = \sqrt{\frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

erhalten wir

$$A_G = \frac{6}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$A_G = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$



D 15

b) Für das Volumen erhalten wir:

$$V = \frac{1}{3} A_G h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \cdot h$$

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot a^2 h$$

Einsetzen:

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 3^2 \cdot 6 \text{ cm}^3$$

$$V = 27 \sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Die Berechnung mit Hilfe des Rechenstabs ergibt $V \approx 46{,}8$ cm³.
Ergebnis: Das Volumen der gegebenen Pyramide beträgt rund 47 cm³.

Aufgaben d 20 und 21

D

7 Mantel- und Oberflächeninhalt gerader Pyramiden

Die Seitenflächen einer Pyramide bilden ihren **Mantel**, die **Oberfläche** setzt sich aus dem Mantel und der Grundfläche zusammen. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die Inhalte der Seitenflächen und ist A_G der Grundflächeninhalt einer n-seitigen Pyramide, so gelten für den Mantelinhalt A_M und den Oberflächeninhalt A_O folgende Formeln:

$\boldsymbol{A_M = A_1 + \cdots + A_n}$	$\boldsymbol{A_O = A_M + A_G}$

8 *Aufgabe:* Eine gerade quadratische Pyramide habe die Grundkantenlänge $a = 4$ cm und die Höhenlänge $h = 6$ cm. Gesucht sind Mantel- und Oberflächeninhalt.

Lösung:
Mantelinhalt: Die Seitenflächen der Pyramide sind kongruent und damit flächeninhaltsgleich. Es gilt:

$$A_M = 4 \cdot \frac{a\,h_a}{2}$$
$$A_M = 2ah_a$$

Die Seitenflächenhöhe h_a ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras:

$$h_a = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Wir erhalten

$$A_M = 2a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Wir setzen ein:

$$A_M = 2 \cdot 4\text{ cm}\sqrt{36\text{ cm}^2 + \frac{16\text{ cm}^2}{4}} = 8\text{ cm}\sqrt{40\text{ cm}^2}$$

Die Berechnung von $8\sqrt{40}$ mit Hilfe des Rechenstabs ergibt $\approx 50{,}6$, also:

$$A_M \approx 50{,}6\text{ cm}^2$$

Oberflächeninhalt:

$$A_O = A_M + A_G$$
$$A_O \approx 50{,}6\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2 = 66{,}6\text{ cm}^2$$

Ergebnis: Der Mantelinhalt beträgt rund 50,6 cm², der Oberflächeninhalt rund 66,6 cm².

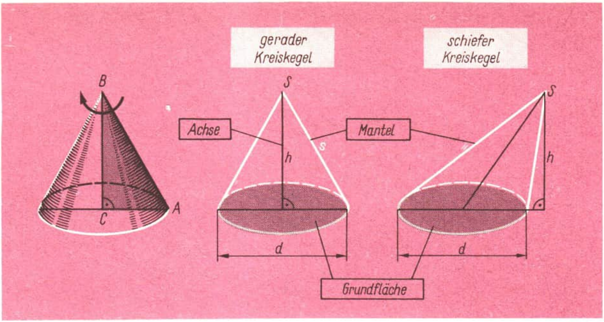
Aufgaben d 22 bis 40

D

Kreiskegel

8 Der gerade Kreiskegel als Rotationskörper

Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten, so beschreibt die Dreiecksfläche einen krummflächig begrenzten Körper, der **Kreiskegel** genannt wird (Bild D 16).
Ein Kreiskegel wird von einer Kreisfläche (der Grundfläche) und von einer ge-



D 16

krümmten Fläche (dem **Mantel**) begrenzt. Die Strecken auf dem Mantel eines Kreiskegels, die seine Spitze mit den Punkten des Grundkreises verbinden, heißen **Mantellinien.** Der Abstand der Spitze eines Kreiskegels von seiner Grundflächenebene heißt Länge der **Höhe** des Kreiskegels. Kreiskegel, deren Lot von der Spitze auf die Grundfläche diese im Kreismittelpunkt trifft, heißen **gerade Kreiskegel.** Jeder andere Kreiskegel heißt **schief.** Die Gerade, die im Mittelpunkt M des Grundkreises senkrecht auf der Grundflächenebene eines geraden Kreiskegels steht, die dann also durch die Spitze des Kreiskegels geht, heißt die **Achse** des betreffenden geraden Kreiskegels.

11 *Weise nach, daß alle Mantellinien eines geraden Kreiskegels gleiche Länge besitzen!*

9 In einer Ebene ε sei ein Kreis gegeben. Wir verbinden alle Punkte des Kreises mit einem nicht in der Ebene ε liegenden Punkt S. Wir erhalten auf diese Weise einen Kreiskegel mit der Spitze S (Bild D 16).

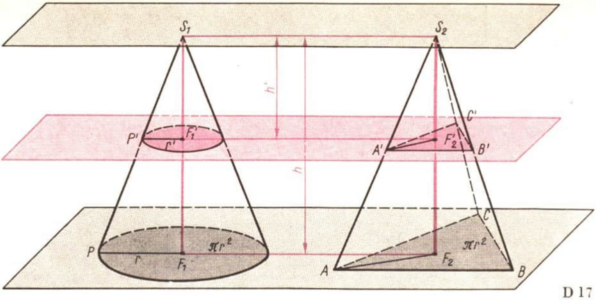
D

9 Volumen, Mantel- und Oberflächeninhalt gerader Kreiskegel

Volumen: Wir vergleichen einen geraden Kreiskegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h mit einer geeigneten Pyramide. Da der Grundflächeninhalt des Kreiskegels $A_G = \pi \cdot r^2$ beträgt, denken wir uns eine gerade Pyramide mit dem gleichen Grundflächeninhalt $A_G = \pi \cdot r^2$ und derselben Höhenlänge h. Im Bild D 17 wurde für diese Überlegung eine dreiseitige Pyramide benutzt. Da das Volumen dieser Pyramide $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ beträgt, vermuten wir folgenden Satz:

B **SATZ: Das Volumen V eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r und der Höhenlänge h beträgt**

$$\boxed{\textbf{Kreiskegel:}\ V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h}$$



D 17

12 *Führe den Beweis von Satz D 8 anhand von Bild D 17 selbständig durch! (Anleitung: Zeige entsprechend dem Beweis von Satz D 5, daß Schnitte, die parallel zur Grundflächenebene der beiden Körper liegen, in jedem beliebigen, aber jeweils gleichen Abstand von ihren Spitzen flächengleiche Schnittflächen erzeugen!)*

Mit Hilfe von Satz D 1 läßt sich zeigen, daß die Formel im Satz D 8 für das Volumen jedes beliebigen Kreiskegels gilt.

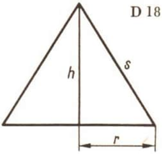
13 *Stelle eine Formel für das Volumen eines Kreiskegels mit Hilfe des Durchmessers d seines Grundkreises auf!*

Mantelinhalt A_M: Wir berechnen zunächst die Länge s einer Mantellinie (Bild D 18). Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

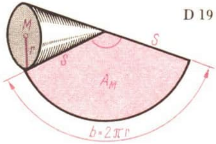
$$s^2 = r^2 + h^2$$
$$s = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Der Umfang des Grundkreises beträgt $u = 2\pi r$.
Nun wickeln wir den Mantel in eine Ebene ab (Bild D 19). Der abgewickelte Mantel ist ein Kreisausschnitt mit dem Radius s und einem Kreisbogen, dessen Länge b gleich dem Umfang u des Grundkreises ist. Den Flächeninhalt des Mantels finden wir aus folgender Verhältnisgleichung:

$$\frac{A_M}{\pi s^2} = \frac{2\pi r}{2\pi s}$$
$$A_M = \frac{2\pi r \cdot \pi s^2}{2\pi s}$$
$$M_M = \pi rs$$



D 18



D 19

Der Mantelinhalt A_M eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius der Länge r und der Höhenlänge h beträgt also

$\boxed{A_M = \pi rs}$ bzw. wegen $r = \frac{d}{2}$ $\boxed{A_M = \frac{1}{2}\pi ds}$

Oberflächeninhalt A_O: Der Oberflächeninhalt eines geraden Kreiskegels setzt sich aus dem Mantelinhalt A_M und dem Grundflächeninhalt A_G zusammen:

$$A_O = A_M + A_G.$$

Wir finden also

$$A_O = \pi r s + \pi r^2 \quad \text{mit} \quad s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\boxed{A_O = \pi r(s + r)} \quad \text{bzw. wegen } r = \frac{d}{2} \quad \boxed{A_O = \frac{\pi d}{4}(2s + d)}$$

10 *Aufgabe:* Gegeben sei ein gerader Kreiskegel mit dem Grundkreisradius der Länge $r = 6{,}0$ cm und der Länge einer Mantellinie $s = 7{,}5$ cm. Gesucht sind Volumen und Oberflächeninhalt des Kreiskegels.

Lösung:

a) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

Wir berechnen zuerst die Höhenlänge h:

$$h^2 = s^2 - r^2$$
$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$
$$h = \sqrt{7{,}5^2 - 6{,}0^2}\text{ cm} = \sqrt{56{,}25 - 36}\text{ cm} = \sqrt{20{,}25}\text{ cm} = 4{,}5\text{ cm}$$

Wir setzen in die Formel für das Volumen ein:

$$V = \frac{1}{3}\pi\, 6{,}0^2 \cdot 4{,}5\text{ cm}^3 = 12 \cdot 4{,}5 \cdot \pi\text{ cm}^3 = 54\,\pi\text{ cm}^3.$$

Die Berechnung mit Hilfe des Rechenstabs ergibt: $V \approx 169{,}5\text{ cm}^3$.

b) $A_O = \pi r\,(s + r)$

Wir setzen ein:

$$A_O = 6{,}0\,\pi\,(7{,}5 + 6{,}0)\text{ cm}^2 = 13{,}5 \cdot 6{,}0 \cdot \pi\text{ cm}^2 = 81\,\pi$$

Die Berechnung mit Hilfe des Rechenstabs ergibt: $81\pi \approx 254$, also

$$A_O \approx 254\text{ cm}^2.$$

Ergebnis: Das Volumen beträgt rund 170 cm^3.
Der Oberflächeninhalt beträgt rund 254 cm^2.

Aufgaben d 41 bis 51

D

Kugeln

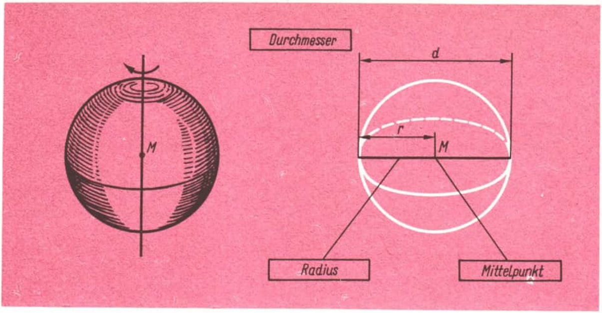
10 Volumen von Kugeln

Dreht man einen Kreis um einen seiner Durchmesser, so beschreibt er eine **Kugel** (Bild D 20). Da bei der Drehung die Entfernung der Kreispunkte vom Mittelpunkt M des Kreises nicht verändert wird, ist jeder Punkt der Kugeloberfläche von M gleich weit entfernt:

Alle Punkte auf der erhaltenen Kugel haben vom Mittelpunkt M den konstanten Abstand r.

Umgekehrt gilt auch:

Alle Punkte, die vom Mittelpunkt M den Abstand r haben, liegen auf der Kugel.



D 20

Jede Strecke, die einen Punkt der Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindet, heißt **Radius** der Kugel. Da alle Radien dieselbe Länge r besitzen, nennt man die Länge r ebenfalls den Radius der betreffenden Kugel. Das Wort „Radius“ wird ebenso wie das Wort „Durchmesser“ in doppelter Bedeutung verwendet.

14 *Weise nach, daß alle ebenen Schnittflächen eines Kugelkörpers Kreisflächen sind! (Anleitung: Fälle vom Mittelpunkt M der Kugel das Lot auf eine beliebige Schnittebene. Berechne für zwei beliebige Randpunkte dieser Schnittfläche die Entfernung vom Fußpunkt des Lotes durch Anwendung des Satzes von Pythagoras!)*

Um eine Formel für das Volumen einer Kugel mit dem Radius r zu finden, gehen wir einen Weg, der deutlich macht, wie einfallsreich ein Mathematiker sein muß, um schwierige Probleme zu lösen. Das Probieren und Experimentieren ist der Mathematik nicht fremd. Wir führen in diesem Fall einen Vergleich mit einem Körper durch, den wir auf folgende Weise erzeugen:
Aus einem Zylinder mit dem Grundkreisradius r und der Höhe $h = r$ denken wir uns einen Kreiskegel ausgebohrt. Die Spitze des Kreiskegels sei der Mittelpunkt der Grundfläche, die Grundfläche des Kreiskegels sei die Deckfläche des Zylinders (Bild D 21).

Das Volumen des Zylinders beträgt

$$V_Z = \pi r^3.$$

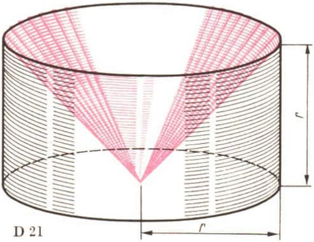
Das Volumen des Kreiskegels beträgt

$$V_K = \frac{1}{3}\pi r^3.$$

Dann hat der Restkörper das Volumen

$$V_R = V_Z - V_K = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Wir behaupten nun, daß das Volumen einer Kugel mit dem Radius r gleich dem doppelten Volumen dieses Restkörpers ist.



D 21

D

9 **SATZ: Das Volumen einer Kugel mit dem Radius r beträgt:**

$$\boxed{\textbf{Kugel: } V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Beweis: Wir vergleichen eine Halbkugel (Radius r) mit einem Restkörper entsprechend Bild D 21. Die Höhe des Restkörpers sei r, sein Grundkreisradius betrage ebenfalls r.
Wir legen in beliebiger Höhe einen Schnitt parallel zur Grundflächenebene (Bild D 22) und berechnen den Inhalt der Schnittflächen.

Halbkugel:
Die Schnittfläche ist ein Kreis mit dem Radius ϱ.

$$\varrho^2 = r^2 - h^2$$
$$A_1 = \pi(r^2 - h^2)$$

Restkörper:
Die Schnittfläche ist ein Kreisring mit den Radien $r_i = h$ und $r_a = r$.

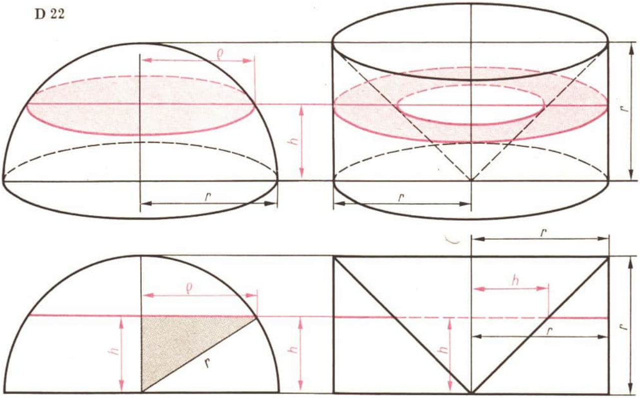
$$A_2 = r_a{}^2\pi - r_i{}^2\pi$$
$$A_2 = \pi(r^2 - h^2)$$

Die Schnittflächen beider Körper sind also flächengleich. Damit erfüllen die Halbkugel und der Restkörper alle Voraussetzungen des Satzes von Cavalieri. Folglich haben sie gleiche Volumen. Da das Volumen des Restkörpers $V_R = \frac{2}{3}\pi r^3$ beträgt (↗ Seite 92), beträgt das Volumen der Halbkugel $V_H = \frac{2}{3}\pi r^3$. Das Volumen einer Kugel mit dem Radius r ist doppelt so groß wie das Volumen einer Halbkugel mit dem Radius r. Für das Kugelvolumen erhalten wir also $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, *w. z. b. w.*

(15) *Stelle eine Formel für das Volumen einer Kugel mit Hilfe ihres Durchmessers d auf!*

Aufgaben d 52 bis 57

D 22



11 Oberflächeninhalt von Kugeln

Zum Unterschied vom Mantel eines Kreiskegels oder eines Zylinders läßt sich die Oberfläche einer Kugel nicht in eine Ebene abwickeln.
Um eine Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel mit dem Radius r zu finden, denken wir uns der Kugel einen Körper einbeschrieben, der von n Dreiecksflächen begrenzt wird. Dabei soll der Fußpunkt eines jeden Lotes vom Kugelmittelpunkt auf eine Dreiecksfläche jeweils ins Innere dieser Dreiecksfläche fallen. Verbindet man die Eckpunkte des einbeschriebenen Körpers mit dem Kugelmittelpunkt, so erhält man n Pyramiden mit den Grundflächen $A_1, \ldots, A_n$ und den Höhen $h_1, \ldots, h_n$ (Bild D 23). Bei einer genügend großen Anzahl n der Pyramiden unterscheidet sich, wenn die längste Kante des einbeschriebenen Körpers hinreichend klein ist, die Summe der Grundflächen der Pyramide von dem Flächeninhalt A_O der Kugeloberfläche beliebig wenig. Außerdem unterscheidet sich das Volumen der Kugel beliebig wenig von dem des einbeschriebenen Körpers und die Höhe jeder Pyramide beliebig wenig von r. Das Volumen des einbeschriebenen Körpers setzt sich aus den Volumen der Pyramiden zusammen:

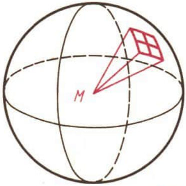
(1) $$V_n = \frac{1}{3} A_1 \cdot h_1 + \frac{1}{3} A_2 \cdot h_2 + \cdots + \frac{1}{3} A_n h_n .$$

Bei genügend großer Anzahl der Pyramiden und genügend kleinem Inhalt der größten ihrer Grundflächen unterscheidet sich die kürzeste der Pyramidenhöhen beliebig wenig vom Radius r der Kugel. Deshalb können wir dann (1) umformen zu:

$$V_n \approx \frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \cdots + \frac{1}{3} A_n r$$

$$V_n \approx \frac{1}{3} r(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$$

(2) $$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \approx \frac{3V_n}{r}.$$



D 23

Die Summe $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ unterscheidet sich dann beliebig wenig sowohl von A_O,

$$A_1 + A_2 + \cdots A_n \approx A_O,$$

als auch von $\frac{3V_n}{r} \approx \frac{3}{r} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^2$:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \approx 4\pi r^2.$$

Daraus schließen wir, daß $A_O = 4\pi r^2$ ist.
Wegen $r = \frac{d}{2}$ gilt auch $A_O = \pi d^2$.

Der Oberflächeninhalt A_O einer Kugel mit dem Radius r beträgt also

$\boxed{A_O = 4\pi r^2}$ bzw. $\boxed{A_O = \pi d^2}$

11 Gegeben sei eine Kugel mit dem Radius $r = 5$ cm.
Gesucht sind ihr Volumen und ihr Oberflächeninhalt.

Lösung:

a) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$V = \frac{4}{3} \pi 5^3 \text{ cm}^3$

$V = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3$

Die Berechnung mit Hilfe des Rechenstabs ergibt:

$V \approx 524 \text{ cm}^3.$

b) $A_O = \pi d^2$

$A_O = \pi 10^2 \text{ cm}^2$

$A_O = 100\pi \text{ cm}^2$

$A_O \approx 314 \text{ cm}^2$

Ergebnis: Das Volumen beträgt rund 524 cm^3 und der Oberflächeninhalt rund 314 cm^2.

Aufgaben d 58 bis 71

12 Berechnung von dritten Potenzen

Die Berechnung der dritten Potenz einer Zahl a, also die Berechnung von

(1) $\quad x = a^3,$

kann näherungsweise mit Hilfe des Rechenstabs erfolgen. Die Rechenstabgenauigkeit reicht für viele Anwendungsaufgaben aus. Berechnen wir die dritte Potenz einer Zahl a mit Hilfe des Rechenstabs, so suchen wir a auf der Skale D auf und stellen den Ablesestrich über a. Die dritte Potenz der Zahl a kann dann unter dem Ablesestrich auf Skale K (Skale K steht unmittelbar über A) abgelesen werden.

Die Skale K ist in drei Abschnitte untergliedert:

Abschnitt I: Teilung von 1 bis 9,9 ...

Abschnitt II: Teilung von 10 bis 99,9 ...

Abschnitt III: Teilung von 100 bis 1000.

12 Die Zahl $x = 3{,}1^3$ soll mit Hilfe des Rechenstabs berechnet werden.

Lösung:

1) Überschlag: $x \approx 3^3 = 27$.
2) Wir stellen den Ablesestrich über D 3 — 1.
3) Wir lesen unter dem Ablesestrich auf der Skale K die Ziffernfolge 2-9-8 ab.

Ergebnis: Die dritte Potenz der Zahl 3,1 beträgt etwa 29,8.

Die dritten Potenzen von natürlichen Zahlen nennt man **Kubikzahlen.** Die Berechnung von dritten Potenzen kann auch mit Hilfe des Tafelwerks erfolgen. Es enthält dazu auf den Seiten 10 und 11 eine Kubiktafel, aus denen die Kuben der Zahlen von 1,00 bis 9,99 unmittelbar abgelesen werden können.

13 Die Zahl $x = 7{,}43^3$ soll mit Hilfe der Tafel der Kubikzahlen berechnet werden.

Lösung:

1) Überschlag: $x \approx 7^3 = 343$.
2) Wir suchen in der Tafel die Zeile 7,4 auf.
3) Wir suchen in der Tafel auf Seite 11 die Spalte mit der Überschrift 3 auf.
4) Im „Schnittpunkt" der aufgesuchten Zeile und Spalte finden wir die Ziffernfolge 4-1-0-2.

Ergebnis: Die dritte Potenz der Zahl 7,43 beträgt etwa 410,2.

Aufgaben d 72 bis 74

13 Kubikwurzeln

Die Rechenoperation, bei der eine Zahl x gesucht wird, deren dritte Potenz die Zahl a ist, heißt **Kubikwurzelziehen**. Wir schreiben dafür $x = \sqrt[3]{a}$ (Lies: x ist die Kubikwurzel aus a).
Unter der Kubikwurzel aus einer Zahl $a \geqq 0$ versteht man diejenige Zahl, deren dritte Potenz die Zahl a ist. Die Zahl a heißt der Radikand.

14 Die Kubikwurzel $\sqrt[3]{64}$ ist die Zahl 4, denn $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
Wir berechnen Kubikwurzeln mit Hilfe des Rechenstabs oder des Tafelwerks. Zur Ermittlung einer Kubikwurzel mit Hilfe des Rechenstabs teilen wir die geltenden Ziffern des Radikanden vom Komma aus nach links bzw. rechts in Gruppen zu je drei Ziffern ein. Die Anzahl der Dreiergruppen bestimmt die Stellenzahl der gesuchten Kubikwurzel. Die erste Dreiergruppe von links ist maßgebend für die Einstellung des Ablesestrichs auf der Skale K.

Bilden die Ziffern der ersten Dreiergruppe eine
- einstellige Zahl, so wird der Ablesestrich im Abschnitt I der Skale K eingestellt,
- zweistellige Zahl, so wird der Ablesestrich im Abschnitt II der Skale K einstellt,
- dreistellige Zahl, so wird der Ablesestrich im Abschnitt III der Skale K eingestellt.

15 Die Zahl $x = \sqrt[3]{35}$ ist mit dem Rechenstab zu berechnen.

Lösung:
1) Überschlag: $x \approx \sqrt[3]{27} = 3$.
2) Wir stellen den Ablesestrich im Abschnitt II über K 3—5.
3) Wir lesen unter dem Ablesestrich auf der Skale D die Ziffernfolge D 3-2-7 ab.

Ergebnis: Die Kubikwurzel aus 35 beträgt etwa 3,3.

Zur Berechnung einer Kubikwurzel mit Hilfe des Tafelwerks benutzen wir die Tafel auf den Seiten 10 und 11.

D

16 Die Zahl $x = \sqrt[3]{72}$ ist mit Hilfe des Tafelwerks zu ermitteln.

Lösung:
1) Überschlag: $\sqrt[3]{72} \approx \sqrt[3]{64} = 4$.
2) Wir suchen im Tafelfeld die dem Radikanden zunächst gelegene Zahl auf. Das ist $x_1 = \sqrt[3]{71,99}$.
3) Wir lesen 2 geltende Ziffern auf der linken grünen Spalte ab und die dritte Ziffer in der oberen grünen Zeile:

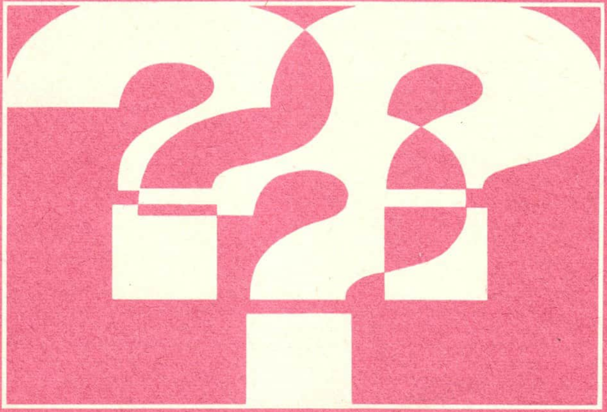
$$x_1 = 4,16\,.$$

Ergebnis: Die Kubikwurzel aus der Zahl 72 beträgt etwa 4,16.

Aufgaben d 75 bis 89

Aufgaben

Schräg (kursiv) gedruckte Aufgabennummern weisen auf Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad hin.



a

a) Arbeiten mit Variablen

1. Wie lautet die Formel
a) für das Volumen V **b)** für den Oberflächeninhalt A_O
eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c?

2. Berechne das Volumen V und den Oberflächeninhalt A_O der Quader mit den folgenden Kantenlängen!

a) $a = 3{,}2$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $c = 4{,}0$ cm
b) $a = 4{,}2$ m, $b = 5{,}0$ m, $c = 8{,}0$ m
c) $a = 350$ cm, $b = 4{,}00$ m, $c = 12{,}4$ dm

3. Aus der Klasse 7 kennst du eine Gleichung, in der der Prozentwert P, der Prozentsatz p, der Grundwert G und eine natürliche Zahl vorkommen.
a) Welche Zahl ist das?
b) Wie lautet die Gleichung?

4. Berechne in der folgenden Tabelle jeweils die dritte nicht gegebene Größe bzw. Zahl!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
p	15 %	15 %	3 %	4 %			0,2 %	145 %
P	210 ha		24	24,00 M	250 Schüler	420 Traktoren		10,8 Mill. l
G		210 ha			360 Schüler	300 Traktoren	5400	

5. Richte dir eine Tabelle folgender Art ein!

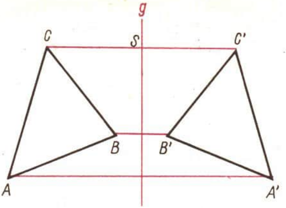
a	b	$\frac{a+b}{2}$	$\sqrt{ab}$	Vergleich von $\frac{a+b}{2}$ und $\sqrt{ab}$
2	18	10	6	$10 > 6$

Berechne die Werte für folgende Paare $[a; b]$, und vervollständige die Tabelle!

a	4	6	45	15	10	9	18	4	0
b	9	6	20	60	40	36	18	5	19

Welche Beziehung zwischen
$\frac{a+b}{2}$ und $\sqrt{ab}$ $(a \in N,\ b \in N)$
kann man aus den erhaltenen Ergebnissen vermuten?

6. Durch das Produkt $e \cdot f$ können verschiedene Sachverhalte beschrieben werden. Wenn beispielsweise e und f die Längen zweier benachbarter Seiten desselben Rechtecks sind, so wird durch das Produkt $e \cdot f$ der Flächeninhalt dieses Rechtecks beschrieben.
a) Was bedeutet das Produkt $e \cdot f$, wenn e die konstante Geschwindigkeit eines Körpers, f die Zeitdauer ist, während der sich der Körper mit der konstanten Geschwindigkeit e bewegt?
b) Welche Bedeutung hat e, wenn das Produkt $e \cdot f$ den Lohn für f Arbeitsstunden bedeutet?
c) Gib weitere Beispiele für mögliche Bedeutungen der Variablen e und f und ihres Produktes $e \cdot f$ an!
d) Gib in **a)**, **b)** und für die selbstgefundenen Beispiele in **c)** auch den jeweiligen Grundbereich für die Variablen e und f an!



a 1

7. Im Bild a 1 wurde das Dreieck ABC an der Geraden g gespiegelt und so das Dreieck $A'C'B'$ erhalten.

a) Welche Beziehung besteht zwischen den Dreiecken ABC und $A'C'B'$?
b) Vergleiche die Strecken $\overline{CS}$ und $\overline{SC'}$!
c) Um welchen Vierecksonderfall handelt es sich bei dem Viereck $BB'C'C$?
d) Welche Eigenschaft hat die Gerade g bezüglich des Vierecks $BB'C'C$?
e) Gib jeweils den Grundbereich für alle vorkommenden Variablen an!

8. Sind m und n natürliche Zahlen, so gilt
entweder $m + n > m \cdot n$ oder $m + n = m \cdot n$ oder $m + n < m \cdot n$.
Gib für m und n natürliche Zahlen an, so daß

a) $m + n > m \cdot n$ **b)** $m + n = m \cdot n$ **c)** $m + n < m \cdot n$

1. eine wahre Aussage **2.** eine falsche Aussage wird!

9. Setze in die nachstehenden Gleichungen für die jeweilige Variable nacheinander die Zahlen 3; 1,5; 0; — 5 ein! Stelle fest, ob dadurch jeweils entweder eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

a) $5x - 7 = 9$ **d)** $2x - 3 = -3$ **g)** $6x = -3x - 6$
b) $7x + 5 = 26$ **e)** $\frac{3}{2} - k = k - \frac{3}{2}$ **h)** $\frac{3-t}{5} = \frac{3}{5} - \frac{t}{5}$
c) $2y - 3 = 3$ **f)** $2x + 10 = 0$ **i)** $3p + \frac{3}{4} = 3p - \frac{3}{4}$

10. Setze in die nachstehenden Ungleichungen für die Variable x nacheinander die Zahlen
$x_1 = 1$; $x_2 = 10$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -3$; $x_5 = -\frac{15}{4}$
ein! Stelle fest, ob dann eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

a) $3x < 5$ **c)** $2x + 3 < \frac{1}{4}$ **e)** $\frac{x}{3} + \frac{1}{4} < -\frac{5}{2}$ **g)** $x \cdot (x + 3) > 3$
b) $2x + 3 > \frac{1}{4}$ **d)** $\frac{x}{3} + \frac{1}{4} < \frac{5}{2}$ **f)** $\frac{5}{x} < \frac{x}{5}$ **h)** $x \cdot (x - 3) < -3$

11. Untersuche für jede der folgenden Gleichungen, ob es **1.** eine natürliche Zahl, **2.** eine gebrochene Zahl, **3.** eine ganze Zahl, **4.** eine rationale Zahl gibt, die die jeweilige Gleichung in eine wahre Aussage überführt!

a) $3x + 6 = 0$ **c)** $3f + 3 = 3f + 3$ **e)** $3t + 5 = 0$ **g)** $3 + \frac{2}{x} = 3 \; (x \neq 0)$
b) $3a - 5 = 0$ **d)** $\frac{5}{x} + 3 = 4 \; (x \neq 0)$ **f)** $3u - 6 = 0$ **h)** $3 + \frac{e}{2} = 3$

12. Ermittle alle x ($x \in E$), für die gilt
a) $3x < 2x$, **d)** $-3x < -2x$,
b) $3x > 2x$, **e)** $-3x > -2x$!
c) $3x = 2x$,

13. Ermittle alle x ($x \in R$), für die gilt
a) $3x + 2 < 2$, **d)** $3x - 2 > 2$,
b) $3x - 2 < 2$, **e)** $3x - 2 < -2$!
c) $3x + 2 > 2$,

14. Schreibe folgende Gesetze unter Verwendung von Variablen auf!

a) In einer Summe zweier rationaler Zahlen können die Summanden vertauscht werden.
b) In einem Produkt zweier rationaler Zahlen können die Faktoren vertauscht werden.

15. Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr sind!
a) Für alle natürlichen Zahlen a gilt $a + a > a - a$.
b) Es gibt eine natürliche Zahl a, so daß gilt $a + a = a - a$.
c) Für alle natürlichen Zahlen a gilt $a + a \geqq a - a$.
d) Für alle rationalen Zahlen a und b gilt: Es gibt eine rationale Zahl x, so daß $a + x = b$.
e) Es gibt eine gebrochene Zahl x, so daß für alle gebrochenen Zahlen a gilt $a \cdot x = 0$.
f) Es gibt eine gebrochene Zahl x, so daß für alle gebrochenen Zahlen a gilt $a \cdot 0 = x$.
g) Zu jeder rationalen Zahl a gibt es eine rationale Zahl x, so daß $a + x = 0$.
Welche gemeinsame Bezeichnung kennst du für diese rationalen Zahlen a und x?

16. Stelle fest, welche der folgenden Aussagen wahr sind!
Für alle rationalen Zahlen a gilt
a) $a - a = 0$, **b)** $a + a > a$, **c)** $a + 0 = a$, **d)** $a \cdot 1 = a : 1$,
e) $1 \cdot a = 1 : a \; (a \neq 0)$.

17. Fasse zusammen!
a) $3x + 2x$ **c)** $4m - 0$
b) $3x - 5x$ **d)** $\frac{1}{2}q - \frac{3}{4}q$
e) $\frac{5}{4}d - \frac{3}{2}d - \frac{1}{8}d$
f) $46x + 86b + 14b + 11x - 57x$

18. Fasse zusammen!
a) $5b + b$ **c)** $5{,}2d + 2{,}4d$
b) $3a - 3a$ **d)** $e - 2e + 3e$
e) $84a + 67 - 15a + 33 - 100$
f) $17g + 23h + 11h + 39g + 6h$

19. Löse die Klammern auf und fasse zusammen!
a) $15x - (2x + 5)$ **d)** $7b - (3b + 2a)$ **g)** $2a + (3a - 4b + c) + 3b$
b) $14a + (11 - 3a)$ **e)** $2a + (3a - b)$ **h)** $(15a + 2b) + (4a - 3b)$
c) $38 - (16b + 36)$ **f)** $19y - (18y + z)$ **i)** $(32c - 16d) - (6c - 7d)$

20. Gegeben sind die Terme $A = 3a$, $B = 3a - x$, $C = a + 2x$ und $D = \frac{1}{2}a - x - 2$.
Berechne und fasse zusammen!
a) $A + B$ **d)** $A - B$ **g)** $B - A$ **k)** $B + C$
b) $B - C$ **e)** $C - B$ **h)** $A + D$ **l)** $B - C$
c) $A + B + C$ **f)** $A - B - C$ **i)** $B - C + D$ **m)** $B + C - D$

21. Berechne!
a) $5a - [3b + (4a - 3b)]$
b) $-3r - [5s - (2s + 3r) - 4r]$
c) $2d - \{5b - [3c - (2a + 3b) + 4c] - d\}$

22. Berechne!
a) $7x - [11x - (12y - 3x) + 11y]$
b) $-\frac{5}{2}p - [-(2s + 4p) + (3s - 3p)]$
c) $2r - \{3s - [t - (3r - 2s) - t] - 3s\}$

23. Wenn du zu der Zahl 54 die Zahl 39 addieren sollst, kannst du folgendermaßen vorgehen:
$54 + 39 = 54 + (30 + 9) = (54 + 30) + 9 = 84 + 9 = 93$
a) Begründe die einzelnen Lösungsschritte!
b) Gib einen anderen Lösungsweg an, bei dem du eine Differenz benutzt!
c) Löse und begründe entsprechend $54 - 39$!

24. Zeige, daß für alle rationalen Zahlen gilt
a) $a + b - (a + b - c) = c$,
b) $a - [a - (b - a) + b)] = -a$,
c) $x + y + (x - y) = x - [y - (x + y)]$!

25. **a)** $2a \cdot b$
b) $3a \cdot 1$
c) $5a \cdot 5a$
d) $(-4) \cdot (-3a)$
e) $(-3u) \cdot 2v \cdot w$
f) $5x \cdot 2x \cdot 7x$

26. **a)** $4a \cdot 0$
b) $3a \cdot (-1)$
c) $(-1) \cdot 3a$
d) $(-2a) \cdot (-3b)$
e) $3u \cdot (-2v) \cdot w$
f) $5x \cdot 3y \cdot 4z$

27. **a)** $3{,}1 \cdot 2{,}5a$
b) $(-5{,}7x) \cdot 6yz$
c) $ab \cdot abc$
d) $a^2 \cdot abc$
e) $\left(-\frac{17}{13}x\right) \cdot 0 \cdot \frac{93}{51}z$
f) $(-2ab) \cdot ab \cdot \frac{1}{2}ab$

28. **a)** $m : m$ **b)** $mn : m$ **c)** $mn : n$ **d)** $7m : 5m$
e) $(-5rs) : 2s$
f) $(-12a^2bc) : \frac{1}{12}abc$

29. **a)** $2m : m$ **b)** $m^2 : m$ **c)** $(-mn) : n$ **d)** $mn : (-n)$
e) $(-5r^2s^2) : (-15r^2s)$
f) $(-12a^2b^2c) : (-4ab^2c)$

30. Wandle in Produkte um!
a) $0{,}7a + 0{,}7b$ **c)** $0.67a^2 + 2{,}01a$
b) $0{,}7a + 5{,}2a$ **d)** $5a^2b - 20a^2b$
e) $6h - 18gh - 12f$
f) $x^2 - 4x$
g) $z^2 - z$
h) $1{,}2a + 1{,}5a^2$

31. Wandle in Produkte um!
a) $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$ **c)** $2{,}8a^3r^2 - 3{,}5a^2r$
b) $xz + xw$ **d)** $-65ux + 39my$
e) $-96m^2n - 24mn^2 - 120m^2n^2$
f) $y^2 - 0{,}6y$
g) $4x^2 - 6x$
h) $2{,}5a^2 + 12{,}5a$

32. In den folgenden Summen sind, so weit möglich, gemeinsame Faktoren auszuklammern.
a) $0{,}5x + 0{,}8y - 0{,}2xy + 0{,}4y^2$
b) $3ab - 2bc - cd$
c) $7a^2b + 2ab + 4ab^2$
d) $12xy - 9x - 15y$
e) $15rs - 16t - 12r + 12st$
f) $22ab - 44a - 33b + 1$

33. **a)** $(15b + 6c) \cdot 4$
b) $\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{4}d + 0{,}4a\right) \cdot \frac{3}{5}p$
c) $\frac{8}{3}(6a - 9y + 3z)$
d) $\frac{15}{4}x \cdot (12r - 8t + 4s)$
e) $\left(-\frac{3}{5}ab\right) \cdot (12a - 10b - 5)$

34. **a)** $(-3x)(0{,}5r - 0{,}6t)$
b) $\frac{7}{8}h \cdot (2g - 2{,}1h^2 + 0{,}5hg)$
c) $3ab(5a - 4a + 3a)$
d) $(8a^3 - 4a^2b^2 - 3ab^2 + 5b^2) \cdot (-2a^2)$
e) $(-7xy) \cdot (-2x + 3y - 4z)$

35. Multipliziere die Summen $a + 1$, $a - 1$, $1 - a$, $2r - 3a$, $-3s + 2$ nacheinander mit folgenden rationalen Zahlen:
a) r, **b)** $3r$, **c)** $3rs$, **d)** $-3rs$, **e)** $-3r^2s$!

36. Multipliziere aus, und fasse, wenn möglich, zusammen!
a) $(r + s) \cdot (m + n)$ **d)** $(r + s)(m - n)$ **g)** $(r - s) \cdot (m + n)$
b) $(r - s) \cdot (m - n)$ **e)** $(r - 3)(s + 1)$ **h)** $(r - 2) \cdot (r - 1)$
c) $(5m - 3n)(3m - 5n)$ **f)** $(5x + 3y)(12x - 8y)$ **i)** $(6p - 8q)(7q - 3p)$

37. Multipliziere aus, und fasse, wenn möglich, zusammen!
a) $\left(4x - \frac{1}{2}y\right)\left(4x + \frac{1}{2}y\right)$
b) $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$
c) $\left(2r - s + \frac{t}{5}\right)(4s - 2t)$
d) $(2ab - 3bc - 4cd)(a + b)$
e) $\left(3u - \frac{1}{2}v\right)\left(3u - \frac{1}{2}v\right)$
f) $(a + 0{,}5)(a + 0{,}2b + 3)$
g) $(5a - 4b - 3c)(2d - e)$
h) $(-xy + 3yz - z)(-x - y)$

38. Gegeben sind die Summen
$A = 2x - 3y$ $B = xy - 1$ $C = -x - 1$ $D = 2 - x + 3y$
Berechne!
a) $A \cdot B$ **b)** $A \cdot C$ **c)** $A \cdot D$ **d)** $B \cdot C$ **e)** $B \cdot D$ **f)** $C \cdot D$

39. Zeige, daß für alle rationalen Zahlen gilt
a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
c) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
d) $(-a + b)^2 = (a - b)^2$!

40. Zeige, daß
a) das Quadrat einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl ist;
b) das Produkt aus zwei ungeraden Zahlen eine ungerade Zahl ist;
c) das Produkt aus einer geraden Zahl und einer ungeraden Zahl eine gerade Zahl ist;
d) das Produkt zweier aufeinanderfolgenden gerader Zahlen durch 8 teilbar ist!

41. Zeige, daß für den Flächeninhalt A eines Kreisringes mit dem äußeren Durchmesser d_1 und dem inneren Durchmesser d_2 die Formel

$A = \frac{\pi}{4} \cdot (d_1 + d_2)\ (d_1 - d_2)$

gilt!

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Setze in die Gleichungen der Aufgabe a 9 auf Seite 99 für die jeweilige Variable nacheinander die Zahlen 2, $\frac{16}{5}$, $-\frac{2}{3}$ ein! Stelle fest, ob dadurch jeweils entweder eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

2. Setze in die Ungleichungen der Aufgabe a 10 auf Seite 99 für die Variable x nacheinander die Zahlen $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{7}{3}$, $x_3 = -24$, $x_4 = -2{,}1$ ein! Stelle fest, ob dadurch jeweils entweder eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

3. Untersuche für jede der folgenden Gleichungen, ob es **1.** eine natürliche, **2.** eine gebrochene, **3.** eine ganze, **4.** eine rationale Zahl gibt, die die jeweilige Gleichung in eine wahre Aussage überführt!

a) $\frac{1}{2}x + 2 = 5$ **b)** $\frac{1}{2}x + 5 = 2$ **c)** $3x + 2 = 2x + 3$ **d)** $3x + 2 = 3x + 3$

4. Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr sind!

a) Zu jeder gebrochenen Zahl a gibt es eine gebrochene Zahl x, so daß gilt $a + x = 0$.

b) Zu jeder gebrochenen Zahl s gibt es eine gebrochene Zahl t, so daß gilt $s \cdot t = 1$.

c) Zu jeder von Null verschiedenen gebrochenen Zahl s gibt es eine von Null verschiedene gebrochene Zahl t, so daß gilt $s \cdot t = 1$.

d) Zu jeder von Null verschiedenen gebrochenen Zahl s gibt es eine gebrochene Zahl t, so daß gilt $s \cdot t = 1$.

5. Fasse zusammen!

a) $4a + 0$ **d)** $0{,}42t - 0{,}24t$ **g)** $3c - 0{,}8c + \frac{3}{4}c$

b) $5r - 2r$ **e)** $7{,}53q + 2{,}47q$ **h)** $65z + 14z - 38 - 78z + 20 + 18$

c) $4s - s$ **f)** $-3{,}2s - 2{,}3s$

6. Löse die Klammern auf, und fasse zusammen!

a) $18u + 15w - (12u + 6w)$ **c)** $15a - 27b + 13c - (12a - 27b + 12c)$

b) $10x + (3x - 2y) + 2y - 13x$ **d)** $(13n - 11y + 10z) - (-15n + 11y - 5z)$

7. Zeige, daß für alle rationalen Zahlen gilt

a) $x - y - (x + y) = -2y$ **b)** $x - y - (x - y) = 0$!

8. a) $5a \cdot 6b$ **9. a)** $5a \cdot 7a$ **10. a)** $(-2a) \cdot 3ab$

b) $(-5) \cdot a$ **b)** $(-3) \cdot 2a$ **b)** $\frac{bc}{3} \cdot \frac{d}{4}$

c) $(-a)\,(-b)$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}qr\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}p\right)$ **c)** $a^3c \cdot a^2b^2c$

d) $3u \cdot 2v \cdot (-w)$ **d)** $(-5x) \cdot (-3y)\,(-4z)$ **d)** $(-4x^2y) \cdot 3x \cdot 5y \cdot 2x^2$

11. a) $7m : 5$ **c)** $7 : 5m$ **e)** $(-p^2) : p$ **g)** $(-mn) : (-n)$

b) $m^2n : mn$ **d)** $7m^2n : 4m$ **f)** $(-p^2) : (-p)$ **h)** $(-12ab) : (-3a)$

12. Forme die nachstehenden Produkte jeweils in eine Summe um!

a) $\frac{1}{2}(a - 2b + c)$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot (6x + 9y - 2z)$

b) $\frac{3}{4}(8m - v + 4n)$ **d)** $0{,}5\,(0{,}8x - 0{,}6y + 0{,}4z)$

13. Wandle in Produkte um!

a) $rx - ry + rz$
b) $8ax + 32ay - 88az$
c) $-42a^2bc - 7ab^2c - 49a^2b^2c^2$
d) $x^2 + 6x$
e) $x^2 + 8x^2$
f) $-3z^2 - z$
g) $2x^2 - 3x$

14. Multipliziere aus, und fasse zusammen!

a) $(5x + 3y)(5x + 3y)$
b) $(6p - 8q)(-7q - 3p)$
c) $(5x + 3y)(5x - 3y)$
d) $(-1{,}2w - 0{,}3y)(-8y - 2w)$
e) $(5x - 3y)(5x - 3y)$

15. Zeige, daß

a) die Summe dreier ungerader Zahlen eine ungerade Zahl ist,
b) die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen durch 3 teilbar ist!

a

b) Ähnlichkeit

1. Berechne die Zahlen, die in die offenen Felder gehören!

	Maßstab	Original-strecke	Bild-strecke
a)	1:40000		1 cm
b)	1:25000	400 m	
c)		10 km	2 cm
d)		500 m	25 cm

2. Berechne die Zahlen, die in die offenen Felder gehören!

	Länge von S_1	Länge von S_2	$\frac{S_1}{S_2}$	$\frac{S_2}{S_1}$
a)	7,0 cm	21 cm		
b)	2,8 cm		0,5	
c)		1,35 m		$\frac{3}{5}$
d)	71,2 cm	3,56 m		

3. Zeichne je zwei Streckenpaare mit den Verhältnissen **a)** 2,5; **b)** $\frac{2}{7}$; **c)** 7 : 2!

4. Zeichne je zwei Streckenpaare mit den Verhältnissen **a)** 0,5; **b)** $\frac{3}{5}$; **c)** 2 : 7!

5. a) In einem Dreieck mit dem Flächeninhalt 60 cm² ist eine Seite 12,0 cm, die zugehörige Höhe 10,0 cm lang. Die beiden anderen Seiten sind 20,0 cm und 11,3 cm lang. Wie lang sind die beiden anderen Höhen?

b) Beweise:
In jedem Dreieck verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die zugehörigen Seiten. Es gilt also z. B.
$h_a : h_b = b : a$.

6. Gib zu den folgenden Verhältnissen jeweils gleiche Verhältnisse aus Strahlenabschnitten der Figur im Bild b 1 an!

a) $\frac{\overline{KL}}{\overline{KM}}$ **b)** $\overline{DF} : \overline{GI}$

7. Gib zu den folgenden Verhältnissen jeweils gleiche Verhältnisse aus Strahlenabschnitten der Figur im Bild b 1 an!

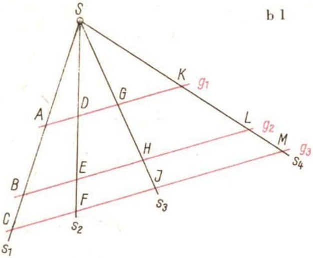
a) $\frac{\overline{GH}}{\overline{SI}}$ **b)** $\overline{SB} : \overline{SL}$

8. Untersuche die folgenden Verhältnisgleichungen für Bild b 1 auf ihre Gültigkeit!

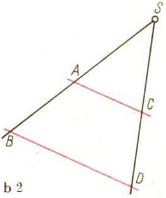
a) $\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{KM}}$ **d)** $\frac{\overline{SB}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$ **g)** $\frac{\overline{SI}}{\overline{SF}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{DF}}$

b) $\overline{EF} : \overline{LM} = \overline{DF} : \overline{KM}$ **e)** $\overline{KL} : \overline{AB} = \overline{SK} : \overline{SA}$ **h)** $\overline{SC} : \overline{AB} = \overline{SK} : \overline{KM}$

c) $\overline{SA} : \overline{BC} = \overline{SC} : \overline{GH}$ **f)** $\overline{SK} : \overline{SM} = \overline{SG} : \overline{SI}$ **i)** $\overline{DF} : \overline{SF} = \overline{SG} : \overline{GI}$



b 1



b 2

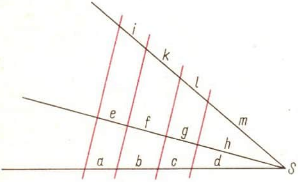
9. Berechne die fehlenden Strecken in der folgenden Tabelle zu Bild b 2!

	$\overline{SA}$	$\overline{SB}$	$\overline{AB}$	$\overline{SC}$	$\overline{SD}$	$\overline{CD}$
a)	4,0 cm	5,0 cm		2,0 cm		
b)	4,2 cm		1,2 cm		6,3 cm	
c)			10 cm		2,9 cm	7 mm
d)	9,5 cm	12,8 cm	3,3 cm			
e)			2,2 cm	2,7 cm	4,5 cm	
f)				3,7 cm	5,3 cm	2,6 cm

10. Untersuche die folgenden Verhältnisgleichungen für Bild b 3 auf ihre Gültigkeit!

a) $\frac{a}{c} = \frac{i}{l}$ **c)** $\frac{f}{g+h} = \frac{k}{l+m}$ **e)** $\frac{e}{f+g} = \frac{a}{b+c}$

b) $\frac{g}{c} = \frac{e+f}{a+b}$ **d)** $\frac{f+g}{b+c} = \frac{d}{h}$ **f)** $\frac{i+k+l}{k+l+m} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$



b 3

b 4

11. Zeichne eine beliebige Strecke und konstruiere dann ihr k-faches! Für welche der genannten k läßt sich die Konstruktion auch ohne Zuhilfenahme des Strahlensatzes ausführen?

a) $k = \frac{4}{3}$ **b)** $k = \frac{51}{42}$ **c)** $k = \frac{13}{11}$ **d)** $k = \frac{5}{4}$ **e)** $k = \frac{4}{9}$ **f)** $k = 0{,}375$

12. a) Konstruiere eine Strecke, die doppelt so lang wie $\overline{AB}$ (Bild b 4) ist, und teile sie in fünf kongruente Teile!

b) Teile $\overline{CD}$ (Bild b 4) in fünf kongruente Teile, und verdopple eine so erhaltene Teilstrecke!

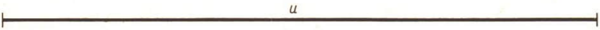
13. Wähle die Strecke $\overline{AB}$ (Bild b 4) als Einheit eines Zahlenstrahls! Konstruiere auf dem Strahl diejenigen Punkte, die zu den folgenden Zahlen gehören!

a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{3}{7}$ **c)** $\frac{7}{3}$ **d)** $\frac{10}{9}$

14. Konstruiere zwei Paare von Strecken, die zueinander im gleichen Verhältnis stehen wie $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ (Bild b 4), aber eine andere Länge als diese haben!

15. Konstruiere ein Rechteck mit dem Umfang u (Bild b 5), für dessen Seiten $a : b = 2 : 3$ gilt!

b 5

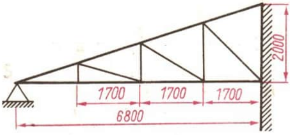


16. Untersuche die Verhältnisgleichungen **a)** bis **h)** für die Figur in Bild b 1 auf ihre Gültigkeit!

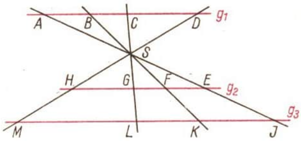
a) $\frac{\overline{SD}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{EH}}$ **c)** $\frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}}$ **e)** $\overline{FM} : \overline{DK} = \overline{DF} : \overline{SD}$ **g)** $\overline{SB} : \overline{SA} = \overline{BH} : \overline{AC}$

b) $\frac{\overline{SH}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CI}}$ **d)** $\frac{\overline{HL}}{\overline{IM}} = \frac{\overline{SL}}{\overline{SM}}$ **f)** $\overline{SG} : \overline{SH} = \overline{DG} : \overline{HL}$ **h)** $\overline{GK} : \overline{HL} = \overline{SG} : \overline{SL}$

17. **a)** Berechne die Länge der senkrechten Streben des Pultdachbinders (Bild b 6)! (Die Maßangaben verstehen sich in Millimeter.)
b) Ermittle die Länge der schrägen Streben und des Obergurts zeichnerisch!



b 6



b 7

18. Berechne die fehlenden Strecken in der folgenden Tabelle zu Bild b 2!

	$\overline{SA}$	$\overline{SB}$	$\overline{AB}$	$\overline{SC}$	$\overline{SD}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BD}$
a)	6,0 cm		3,0 cm		12,0 cm		10,0 cm	
b)			1,0 cm		5,5 cm		2,4 cm	4,0 cm
c)		8,5 cm		52 mm			56 mm	70 mm
d)				6,2 cm	12,4 cm	6,2 cm	9,8 cm	
e)	17,8 cm	22,5 cm					14,3 cm	20,9 cm
f)	35,0 cm			56,0 cm	104,0 cm			26,0 cm

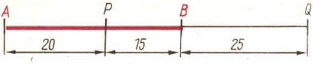
19. Es sei $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$ (Bild b 7). Bestimme x so, daß jeweils richtige Verhältnisgleichungen entstehen!

a) $\frac{\overline{AD}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{SD}}{x}$ **c)** $\overline{HM} : \overline{GL} = \overline{SD} : x$ **e)** $\frac{\overline{SB}}{\overline{BD}} = \frac{x}{\overline{KM}}$ **g)** $\frac{\overline{GF}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{SF}}{x}$

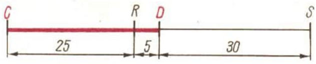
b) $\frac{\overline{EI}}{\overline{CL}} = \frac{x}{\overline{SL}}$ **d)** $\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SG}}{x}$ **f)** $\overline{KM} : \overline{HF} = x : \overline{SH}$ **h)** $\frac{\overline{DH}}{\overline{HM}} = \frac{x}{\overline{EI}}$

20. Gegeben sei ein Dreieck ABC und auf Seite $\overline{AB}$ ein Punkt P.
Durch P ist eine Gerade derart zu legen, daß sie die Verlängerung von $\overline{AC}$ in einem Punkte Q so schneidet, daß $\overline{PQ}$ von $\overline{BC}$ halbiert wird. Anleitung: Zeichne zuerst eine passende Parallele zu $\overline{AC}$ oder $\overline{BC}$!

21. Löwenberg und Gransee liegen an der Fernverkehrsstraße 96 und sind 13 km voneinander entfernt. Von Gransee aus befährt ein Lkw die F 96 mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, von Löwenberg aus ein Pkw mit $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
a) In welcher Entfernung von Gransee begegnen sich beide Fahrzeuge, wenn sie einander entgegenfahren und ihre Fahrt zum gleichen Zeitpunkt antreten?
b) In welcher Entfernung von Gransee überholt der Pkw den Lkw, falls beide gleichzeitig in Richtung Neubrandenburg abfahren?

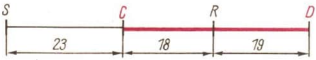


b 8



b 9

b 10



b 11

22. In welchem Verhältnis wird $\overline{AB}$ von P und Q
a) im Bild b 8, **b)** im Bild b 9
geteilt?

23. In welchem Verhältnis wird $\overline{CD}$ von R und S
a) im Bild b 10, **b)** im Bild b 11
geteilt?

24. Der Punkt T liege auf der Strecke $\overline{AB}$, und es gelte $\overline{AT} = k \cdot \overline{AB}$.
Berechne die Zahlen, die in die freien Felder der Tabelle gehören!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
k	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{6}$				$m:n$	
$\overline{AT}:\overline{TB}$				1 : 2	2 : 7	5 : 6		$p:q$

25. Der Punkt T liege auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus, und es gelte $\overline{AT} = k \cdot \overline{AB}$.
Berechne die Zahlen, die in die freien Felder der Tabelle gehören!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
k	2	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{5}$				$\frac{m}{n}$	
$\overline{AT}:\overline{BT}$				2	7 : 2	6 : 5		$\frac{p}{q}$

26. Fülle die folgende Tabelle so aus, daß $\overline{AB}$ innen von P und außen von Q im gleichen Verhältnis $p:q$ geteilt wird!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AB}$	60 cm	56 cm	12 mm	70 mm	80 cm		
$\overline{AP}$	20 cm		10 mm	35 mm		12 mm	10 mm
$\overline{AQ}$		28 cm					30 mm
$p:q$					5 : 3	0,4	

27. Teile die Strecke $\overline{AB} = 45$ mm im gleichen Verhältnis innen und außen, in dem die Strecke $\overline{CD}$ im Bild b 12 von P innen geteilt wird!

b 12

28. Eine Pyramide mit der Höhe h und einem Rechteck mit den Seiten a und b als Grundfläche werde in der Höhe h^* parallel zur Grundfläche geschnitten. Schnittfigur ist ein Rechteck mit den Seiten a_0 und b_0. Ermittle jeweils die fehlenden Größen!

a) $a = 20$ cm; $b = 12$ cm; $h = 32$ cm; $h^* = 24$ cm
b) $a = 25$ cm; $b = 35$ cm; $a_0 = 15$ cm; $h = 40$ cm
c) $a = 24$ cm; $b = 15$ cm; $a_0 = 16$ cm; $h^* = 7$ cm
d) $a_0 = 9$ cm; $b_0 = 4{,}5$ cm; $h = 16$ cm; $h^* = 4$ cm
e) $a = 42$ cm; $a_0 = 12$ cm; $b_0 = 10$ cm; $h = 56$ cm

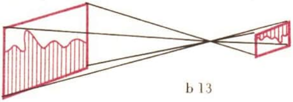
29. Bei einer einfachen Lochkamera ohne Linse ergibt ein 15 m hoher Mast ein 6 cm hohes Bild in 15 cm Entfernung von der Öffnung. Wie weit ist der Mast von der Kamera entfernt?

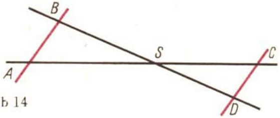
30. Das Bild b 13 zeigt vereinfacht den Strahlenverlauf bei der Projektion eines Diapositivs, wie er vom (hier weggelassenen) Objektiv hervorgerufen wird. Wie hoch kann das Bild von einem Kleinbilddiapositiv (Format 24 mm × 36 mm) höchstens werden, wenn das ganze Bild auf eine Leinwand im Format 1 m × 1 m projiziert werden soll?

31. Aus welcher Entfernung muß man ein Projektionsbild von der Breite **a)** 2 m, **b)** 1,80 m, **c)** 3,50 m, **d)** 1,20 m betrachten, damit es dem Auge genauso groß erscheint wie eine Fotografie von 9 cm Breite in normaler Sehweite (25 cm)?

32. Bei der Projektion eines Diapositivs (Bild b 13) gilt $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$. Dabei ist f die Brennweite des Objektivs, s die Gegenstandsweite (Abstand des Diapositivs vom Objektiv) und s' die Bildweite (Abstand des Bildes vom Objektiv).

a) Wie groß wird das Bild eines Kleinbilddiapositivs (24 mm × 36 mm), wenn der Bildwerfer 5 m von der Leinwand entfernt aufgestellt und ein Objektiv mit 100 mm Brennweite verwandt wird?
b) In welcher Entfernung muß ein Projektor mit einem Objektiv von 150 mm Brennweite aufgestellt werden, wenn das Bild 2,4 m breit werden soll?


b 13



b 14

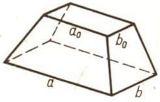
33. Beweise, daß folgende Aussage gilt (Bild b 14):
Aus $\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD}$ folgt $AB \parallel CD$!
(Welchem Satz entspricht diese Aussage?)

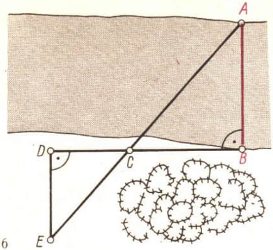
34. Untersuche die Gültigkeit folgender Aussage (Bild b 14):
Aus $\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{AB} : \overline{CD}$ folgt $AB \parallel CD$!

35. Untersuche, bei welchen der nachstehend angegebenen Maße sich der im Bild b 15 dargestellte Körper durch Verlängerung der Seitenkanten zu einer Pyramide ergänzen läßt, es sich also um einen Pyramidenstumpf handelt!

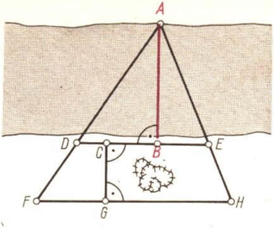
a) $a = 40$ cm; $b = 30$ cm; $a_0 = 20$ cm; $b_0 = 15$ cm
b) $a = 45$ cm; $b = 33$ cm; $a_0 = 30$ cm; $b_0 = 20$ cm
c) $a = 60$ cm; $b = 42$ cm; $a_0 = 40$ cm; $b_0 = 28$ cm

b 15





b 16



b 17

36. Die Flußbreite $\overline{AB}$ kann auch so ermittelt werden, wie dies die Bilder b 16 und b 17 zeigen. Dies ist nötig, wenn die Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus nicht zugänglich ist.

a) Ermittle die Breite des Flusses im Bild b 16, wenn $\overline{BC} = 29$ m, $\overline{CD} = 11$ m und $\overline{DE} = 14$ m!

b) Ermittle die Breite des Flusses im Bild b 17, wenn $\overline{DE} = 18{,}6$ m, $\overline{FH} = 24{,}6$ m und $\overline{CG} = 10{,}1$ m!

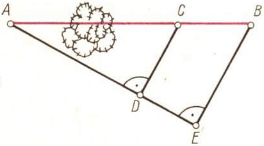
37. A und B seien zwei durch ein Sichthindernis getrennte Punkte. Auf $\overline{AB}$ ist ein von A aus nicht sichtbarer Punkt C abzustecken.

a) Erläutere das Verfahren am Bild b 18!

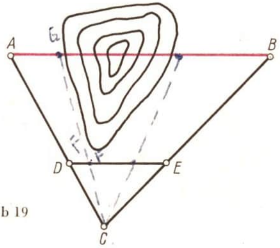
b) Wie lang ist $\overline{DC}$ für $\overline{AE} = 96$ m; $\overline{AD} = 60$ m; $\overline{BE} = 28$ m?

38. Steffen hält mit ausgestrecktem Arm (60 cm) ein Zehnpfennigstück so, daß es gerade einen Gasbehälter (Durchmesser 62 m) verdeckt. Wieviel Meter stand er vom Gasbehälter entfernt?

39. Die Entfernung des Mondes von der Erde beträgt etwa 60 Erdradien ($R = 6370$ km). Erläutere, wie man mit Hilfe einer Murmel o. dgl. näherungsweise den Monddurchmesser bestimmen kann!



b 18



b 19

40. A und B seien durch einen Berg voneinander getrennt. Gibt es einen Punkt C, von dem aus sowohl A als auch B sichtbar sind, und sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ zu vermessen, so kann man die waagerechte Entfernung $\overline{AB}$ folgendermaßen berechnen (Bild b 19):
Man legt auf $\overline{AC}$ einen Punkt D fest mit $\overline{AD} : \overline{DC} = m : n$. Danach teilt man $\overline{BC}$ ebenfalls im Verhältnis $m : n$; der Teilpunkt sei E. Dann wird $\overline{DE}$ gemessen.

a) Ermittle $\overline{AB}$ aus $\overline{AC} = 4200$ m; $\overline{BC} = 5040$ m; $\overline{DE} = 1900$ m; $m : n = 9 : 5$! Welche Sätze werden benötigt?

b) Erläutere, wie man auf $\overline{AB}$ einen Punkt G festlegen kann, so daß $\overline{AG}$ die Richtung angibt, in der von A aus ein Tunnel nach B vorgetrieben werden muß! (Es sei $\overline{CF} = 1350$ m.) Entsprechend ist von B aus die Richtung festzulegen.

41. Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 2{,}5$ cm! Konstruiere jeweils sein Bild bei folgenden Bewegungen!

a) Verschiebung in Richtung $\overrightarrow{AC}$ um $2\,\overline{AB}$;
b) Drehung um 135° mit C als Zentrum;
c) Spiegelung an der Parallelen zu AC durch B.

42. Zeichne wie in Aufgabe b 41 ein Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 2{,}5$ cm! Führe dann die drei Bewegungen von Aufgabe b 41 hintereinander aus, und zwar in der Reihenfolge

(1) **b), a), c)**;
(2) **c), a), b)**;
(3) **a), b), c)**!

Vergleiche die drei entstandenen Bilder!

43. Es sei $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ und $AB \parallel CD$. Gibt es immer eine Verschiebung (Drehung, Geradenspiegelung), bei der sich $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ entsprechen?

44. Es seien g und h verschiedene, einander parallele Geraden. Gib möglichst je zwei Bewegungen an, bei denen

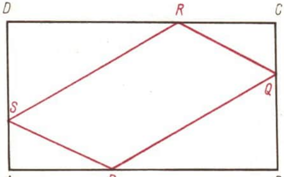
a) g Bild von h und h Bild von g ist;
b) g und h jeweils in sich übergehen;
c) g in sich übergeht und h nicht;
d) g Bild von h ist, aber h nicht Bild von g;
e) g Bild von h ist und h in sich übergeht!

45. Einem Rechteck $ABCD$ wird ein Viereck $PQRS$ einbeschrieben mit $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS}$ (Bild b 20).

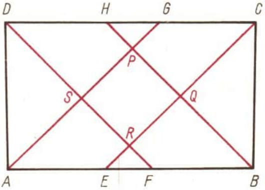
a) Was für ein Viereck ist $PQRS$?
b) Beweise, daß PR und QS sich im gleichen Punkt schneiden wie AC und BD!

46. Im Rechteck $ABCD$ schneiden sich die Winkelhalbierenden in den Punkten P, Q, R, S (Bild b 21).

a) Was für ein Viereck muß $PQRS$ sein?
b) Begründe:
$\triangle AFD \cong \triangle EBC$; $\triangle ASD \cong \triangle AFS$
$\triangle ABP \cong \triangle DRC$; $\triangle EFR \cong \triangle HPG$
$\triangle AFD \not\cong \triangle ABP$; $\triangle AFS \not\cong \triangle ABP$



b 20



b 21

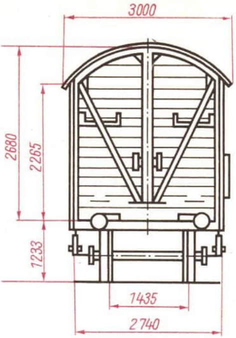
47. Das Bild b 22 zeigt einen **Proportionalzirkel**. Er ist verstellbar und dient zur Verkleinerung bzw. Vergrößerung von Strecken in vorgegebenem Maßstab. Beschreibe ihn und begründe seine Wirkungsweise!

b 22

48. Die Normalspurweite der Eisenbahn beträgt 1435 mm. Welche Spurweite haben die Modellbahnen in den Nenngrößen **a)** H0 (1:87), **b)** TT (1:120), **c)** N (1:160)?

49. Das Bild b 23 zeigt die Stirnwand eines Großraumgüterwagens. Berechne die Maße für ein Modell in der Nenngröße **a)** H0, **b)** TT, **c)** N! (Entnimm die Maßstäbe der Aufgabe **b 48**!)

b 23



50. Zeichne ein Dreieck ABC und einen Punkt Q außerhalb des Dreiecks. Konstruiere A', B', C' bei der zentrischen Streckung $(Q; 3)$!

51. Zeichne ein Dreieck ABC und ermittle die Bildpunkte $A'B'C'$ bei der zentrischen Streckung $(A; 1{,}5)$!

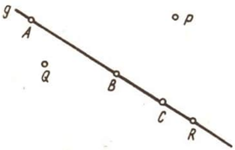
52. Zeichne ein Dreieck ABC und einen Punkt R innerhalb des Dreiecks. Konstruiere A', B', C' bei der zentrischen Streckung $(R; 2)$!

53. Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm! Diagonalenschnittpunkt sei S.

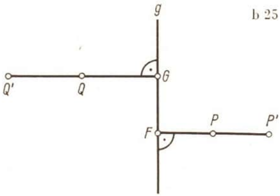
a) Konstruiere B', C', D', S' bei der zentrischen Streckung $(A; 2{,}5)$!
b) Konstruiere zwei Punkte, deren Bilder A und B bei der zentrischen Streckung $(S; 0{,}5)$ sind!
c) Wie groß ist k in $(A; k)$, wenn C Bild von S ist?
d) Gibt es zu jedem Punkt Z der Ebene ein $k > 0$, so daß C Bild von A ist bei $(Z; k)$?
e) Konstruiere A', B', C', D' bei der zentrischen Streckung $\left(S; \frac{2}{3}\right)$!
f) Konstruiere zwei Punkte, deren Bilder B und C bei der zentrischen Streckung $(D; 3)$ sind!
g) Konstruiere Z in $(Z; 2)$, wenn A Bild von B ist!
h) Gibt es zu jedem $k > 0$ ein Z, so daß C Bild von A ist?

54. A, B, C, R sind vier Punkte einer Geraden g, P und Q liegen außerhalb von g (Bild b 24). Durch A als Zentrum, B als Originalpunkt und C als dessen Bildpunkt wird eine zentrische Streckung festgelegt. Konstruiere die Bilder von P, Q, R bei dieser Streckung!

55. In der Ebene sei eine „Geradenstreckung“ gemäß Bild b 25 erklärt:
$\overline{FP'} : \overline{FP} = \overline{GQ'} : \overline{GQ} = 2$;
alle Punkte von g entsprechen sich selbst.
a) Handelt es sich um eine umkehrbare eindeutige Abbildung der Ebene auf sich?
b) Ist das Bild jeder Geraden eine Gerade?
c) Ist das Bild jedes Kreises ein Kreis?
d) Sind Original- und Bildgeraden einander parallel?



b 24



b 25

56. Betrachtet werden eine Gerade g mit den Punkten P und Q und eine Gerade h mit den Punkten P' und Q'. Die Gerade h sei das Bild von g bei der zentrischen Streckung $(Z; k)$.

a) Beschreibe die Lage von g und h!

b) Welchen Einschränkungen unterliegt die Lage von P, Q, P' und Q', wenn außerdem P' Bild von P und Q' Bild von Q bei $(Z; k)$ sein soll?

c) Wo liegt Z für $k > 1$ bzw. $0 < k < 1$?

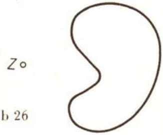
57. Welche der folgenden Sätze sind wahr? (Begründung!)
Bei jeder zentrischen Streckung hat

a) jedes Parallelogramm als Bild ein Parallelogramm;

b) jedes Rechteck als Bild ein Rechteck;

c) jedes Rechteck als Bild ein Quadrat;

d) jedes Rechteck als Bild ein Parallelogramm.



b 26

58. Zeichne eine krummlinig begrenzte Figur F wie die im Bild b 26 und einen Punkt Z! Lege auf dem Rand der Figur acht Punkte (möglichst gleichmäßig verteilt) fest und konstruiere ihre Bilder bei der Streckung $(Z; 2)$! Verbinde die Bildpunkte so, daß sich möglichst genau das Bild F' der Figur ergibt! Markiere anschließend zur Kontrolle auf der erhaltenen Linie zwei weitere Punkte und überprüfe, ob sie wirklich zu F' gehören!

59. Auf ein Dreieck ABC mit den Seiten $a = 3$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm wird die Streckung $(A; 7)$ angewandt, danach auf das Bilddreieck $A'B'C'$ die Streckung $\left(A; \frac{3}{5}\right)$. Wie lang sind die Seiten des so entstehenden Dreiecks $A''B''C''$?

60. Es sei Z ein fester Punkt der Ebene. Ermittle die zentrische Streckung, die die gleichen Bilder erzeugt wie die Zusammensetzungen **a)** bis **c)**!

a) $(Z; 2)$ und $(Z; 3)$ **b)** $\left(Z; \frac{2}{3}\right)$ und $\left(Z; \frac{3}{4}\right)$ **c)** $(Z; \sqrt{2})$ und $(Z; \sqrt{2})$

d) Die Seitenlängen eines Rechtecks seien 3 cm und 5 cm. Wie lang sind die Seiten des Bildrechtecks bei **a)** bis **c)**?

61. Die Streckungen **a)** bis **d)** sollen zerlegt werden in zwei Streckungen $(Z; m)$ und $\left(Z; \frac{1}{n}\right)$, wobei m und n natürliche Zahlen sind.

a) $\left(Z; \frac{3}{4}\right)$ **b)** $\left(Z; \frac{7}{5}\right)$ **c)** $(Z; 1)$ **d)** $(Z; \sqrt{3})$

62. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit 2 cm Seitenlänge! Konstruiere das Zentrum Z derjenigen Streckung, die sich durch Zusammensetzen von **1.** $(A; 1{,}5)$ und **2.** $(B; 3)$ ergibt! Beschreibe und begründe die Konstruktion!

63. Suche in jedem der genannten Bilder nacheinander ähnlichen Figuren! Gib, wenn möglich, Ähnlichkeitsfaktor und Ähnlichkeitspunkt an!

a) b 1 **b)** b 6 **c)** b 14 **d)** b 17 **e)** b 18

64. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{BC} = 2$ cm; $\overline{AC} = 1{,}5$ cm; $\sphericalangle BCA = 90°$!

a) Ermittle sein Bild $A'B'C'$ bei den Abbildungen (1) bis (3)!

(1) Streckung $(A; 2)$, dann Verschiebung $\overrightarrow{AC}$

(2) Verschiebung $\overrightarrow{AC}$, dann Streckung $(A; 2)$

(3) Verschiebung $\overrightarrow{AC}$, dann Streckung $(C; 2)$

b) Vergleiche jeweils $A'B'C'$ mit ABC und gib den Ähnlichkeitsfaktor an!

65. Zeichne das Dreieck von Aufgabe b 64 und dazu die Parallele g zu AC durch B!

a) Untersuche das Bild $A'B'C'$ bei den Abbildungen (1) bis (4)!

(1) Spiegelung an g, dann Streckung $(B; 1{,}5)$

(2) Streckung $(B; 1{,}5)$, dann Spiegelung an g

(3) Spiegelung an g, dann Streckung $(C; 1{,}5)$

(4) Streckung $(C; 1{,}5)$, dann Spiegelung an g

b) Vergleiche die Bilder! Welche Vermutung liegt nahe?

66. Beschreibe eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der folgende Figuren (Bild b 27) einander entsprechen!

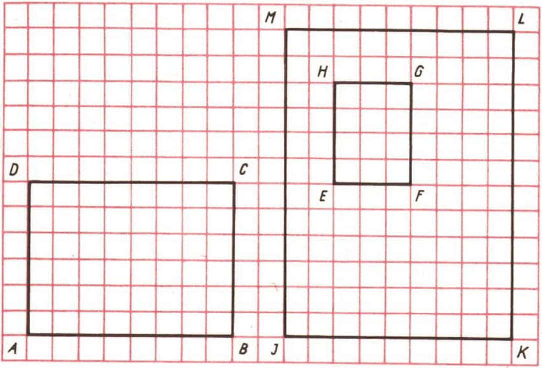
a) Rechteck *EFGH* und Rechteck *IKLM*
b) Rechteck *ABCD* und Rechteck *IKLM*
c) Rechteck *ABCD* und Rechteck *EFGH*
d) Dreieck *ABD* und Dreieck *IKM*
e) Trapez *IKFE* und Trapez *KLGF*

67. Zeichne ein Dreieck *DEF* und konstruiere dazu ein ungleichsinnig ähnliches mit $k = 3$ so, daß gilt:

a) $\triangle DEF$ und $\triangle D'E'F'$ haben genau einen Punkt gemeinsam;
b) $\triangle DEF$ und $\triangle D'E'F'$ haben keinen Punkt gemeinsam;
c) eine Seite von $\triangle DEF$ und eine Seite von $\triangle D'E'F'$ liegen auf ein und derselben Geraden.

68 Im Bild b 27 entstehen durch die Diagonalen $\overline{AC}$, $\overline{IL}$, $\overline{FH}$ sechs Dreiecke. Gib alle Paare gleichsinnig (ungleichsinnig) ähnlicher Dreiecke an!

b



b 27

69. Zeichne zwei stumpfwinklige Dreiecke *ABC* und *DEF* wie im Bild b 28!

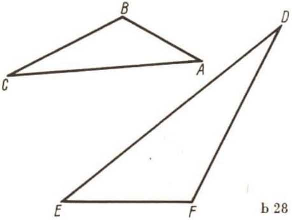
a) Konstruiere $A'B'C'$ bei der Streckung $\left(F; -\frac{3}{2}\right)$;
b) Konstruiere $D'E'F'$ bei der Streckung $\left(A; -\frac{1}{2}\right)$!

70. Zeichne zwei beliebige Punkte *Z* und *P*! Konstruiere die Bilder P_1 und P_2 bei den Streckungen $\left(Z; \frac{7}{4}\right)$ und $\left(Z; -\frac{7}{4}\right)$! Beschreibe die Lage von *Z* zu $\overline{PP_1}$ und $\overline{PP_2}$ mit den Begriffen „innere Teilung" und „äußere Teilung"!

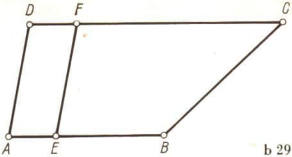
71. Gib für die genannten Figuren gleiche Winkel und gleiche Seitenverhältnisse an!

a) Fünfecke in Bild B 37 Seite 35
b) $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ in Bild B 42 Seite 37

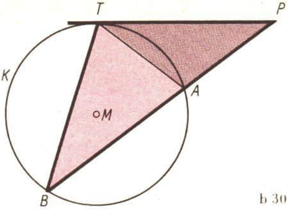
72. Begründe Wahrheit bzw. Falschheit der Aussage „Zwei Quadrate (Rhomben, Rechtecke, Parallelogramme, rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecke) sind stets einander ähnlich"! Ergänze im Falle der Falschheit so, daß eine wahre Aussage entsteht!



b 28



b 29



b 30

73. Im Bild b 29 ist $EF \parallel AD$. Untersuche, ob die Trapeze $ABCD$ und $EBCF$ einander ähnlich sind.

74. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 70$ cm; $\overline{BC} = 60$ cm; $\overline{AB} = 50$ cm; $\sphericalangle\, CAB = 57{,}1°$; $\sphericalangle\, ABC = 44{,}4°$; $\sphericalangle\, BCA = 78{,}5°$. Prüfe nach, ob dieses Dreieck ABC zu einem Dreieck DEF ähnlich ist, wenn für $\triangle\, DEF$ folgendes gilt:

a) $\overline{DE} = 12$ cm; $\overline{EF} = 10$ cm; $\overline{FD} = 14$ cm

b) $\sphericalangle\, DEF = 57{,}1°$; $\sphericalangle\, FDE = 78{,}5°$; $\overline{DE} = 50$ cm

c) $\sphericalangle\, EFD = 44{,}4°$; $\overline{FD} = 42$ cm; $\overline{EF} = 45$ cm

d) $\overline{DE} = 84$ cm; $\overline{DF} = 60$ cm; $\sphericalangle\, EFD = 78{,}5°$

e) $\overline{DE} = 35$ cm; $\overline{EF} = 30$ cm; $\sphericalangle\, FDE = 57{,}1°$

f) $\sphericalangle\, DEF = 44{,}4°$; $\overline{DE} = 60$ cm; $\overline{EF} = 70$ cm

75. In jedem Trapez werden von den Diagonalen zwei ähnliche Dreiecke erzeugt.

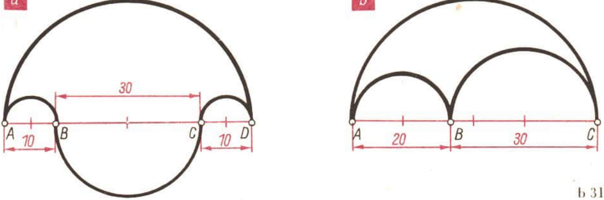
a) Beweise diese Aussage!

b) Stelle Proportionen zwischen den Diagonalabschnitten und den Grundseiten auf! Ziehe eine Folgerung für das Parallelogramm!

76. Beweise: Wenn D, E, F die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC sind, so gilt $\triangle\, ABC \sim \triangle\, DEF$. Gib Faktor und Zentrum einer entsprechenden Streckung an!

77. Beweise, daß für die Figur im Bild b 30 $\triangle\, APT \sim \triangle\, BPT$ gilt und daß daraus $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$ folgt!

78. Konstruiere zu den Figuren im Bild b 31 ähnliche im Verhältnis 2:1!



b 31

79. Einem Quadrat wird je ein Kreis ein- und umbeschrieben. Gib das Ähnlichkeitsverhältnis beider Kreise an!

80. Gib an, unter welchen Voraussetzungen zwei Kreisringe aus Kreisen mit den Radien r_1, R_1 bzw. r_2, R_2 einander ähnlich sind!

81. Gib Bedingungen an, unter denen zwei der genannten Körper einander ähnlich sind!
a) Quader **b)** quadratische Pyramiden **c)** Zylinder **d)** Kegel

82. Bei zwei ähnlichen Vielecken sind a und a' einander entsprechende Seiten, u und u' die Umfänge, A und A' die Flächeninhalte. Berechne die Angaben für die offenen Felder!

	a	a'	u	u'	A	A'
a)	3 cm	6 cm	11 cm		5 cm²	
b)	12 cm		60 cm	35 cm	180 cm²	
c)	4 cm		18 cm		15 cm²	135 cm²

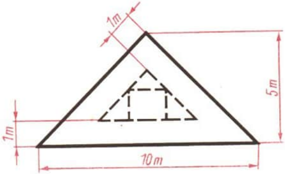
83. $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = 7$ cm; $\overline{AC} = 6$ cm; $\overline{BC} = 5$ cm ist durch eine Parallele zu $\overline{AB}$ folgendermaßen zu teilen:
a) Der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks soll sich zum Inhalt von $\triangle ABC$ verhalten wie 4:25.
b) Der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks soll sich zum Inhalt des entstehenden Trapezes verhalten wie 1:3.

84. Berechne den Quotienten von Oberflächeninhalt und Volumen für Würfel verschiedener Kantenlängen!
a) $a = 20$ cm **b)** $a = 2$ cm **c)** $a = 0{,}2$ cm **d)** $a = 0{,}02$ cm
e) Ziehe Folgerungen für den Quotienten aus Oberflächeninhalt und Gewicht bei gleichem Material und damit für das Verhalten kleiner Teilchen im lufterfüllten Raum!

85. Einem Halbkreis ($r = 3$ cm) ist ein Quadrat (Rechteck mit dem Seitenverhältnis 4:3) einzubeschreiben. Dabei soll eine Seite auf dem Durchmesser liegen, die anderen Eckpunkte auf der Kreislinie.

87. Das Giebelfeld eines Satteldaches soll eine rechteckige Fensteröffnung erhalten, deren Ecken 1 m Abstand von den Dachsimsen haben und deren Breite sich zur Höhe wie 5:3 verhält. Entnimm die Maße dem Bild b 32, und ermittle Lage und Maße der Fensteröffnung!

86. Einem Rhombus $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6$ cm und $\sphericalangle ABC = 110°$ ist ein Quadrat einzubeschreiben.



b 32

88. Einem gegebenen Dreieck ist ein anderes einzubeschreiben, dessen Seiten parallel (senkrecht) zu den Seiten des gegebenen Dreiecks verlaufen.

89. Konstruiere ein Dreieck mit den angegebenen Maßen, und achte auf nicht lösbare und nicht eindeutig lösbare Aufgaben!
a) $b : c = 1 : 0{,}75$; $\alpha = 65°$; $h_a = 5$ cm
b) $a : b = 3 : 5$; $\gamma = 60°$; $\alpha = 45°$
c) $a : c = 2 : 3$; $\gamma = 50°$; $s_a = 5$ cm
d) $a : c = 2 : 3$; $\alpha = 30°$; $h_c = 2$ cm
e) $a : b : c = 3 : 4 : 5$; $h_c = 6$ cm
f) $a : b : c = 4 : 3 : 2$; $s_a = 3$ cm
g) $a : b : c = 7 : 4 : 5$; $w_\beta = 6$ cm
h) $a : b : c = 7 : 8 : 9$; $\beta = 90°$

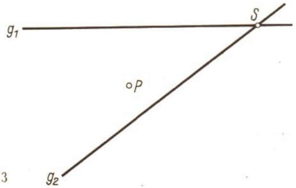
90. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\sphericalangle BCA = 90°$) mit $a : b = 5 : 6$; $h_c = 4$ cm!

91. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck mit c als Basis und $a : c = 4 : 5$; $h_c = 5{,}5$ cm!

92. Konstruiere ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AC} : \overline{AB} = 7 : 5$; $\overline{BC} = 4$ cm!

93. Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ mit $\overline{AC} : \overline{BD} = 3 : 2$; $\overline{AB} = 4{,}5$ cm!

94. Konstruiere alle Kreise durch P, die g_1 und g_2 berühren (Bild b 33)!



b 33

b 34

95. Gegeben sind eine Gerade g und zwei Punkte P_1 und P_2 auf derselben Seite von g. Konstruiere einen Kreis durch P_1 und P_2, der g berührt!
Anleitung: Konstruiere zunächst einen beliebigen Kreis, der g berührt und seinen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten m von $\overline{P_1P_2}$ hat! Verwende dann den Schnittpunkt von g und m als Streckungszentrum!

96. Wie hoch ist ein Baum, der einen 6 m langen Schatten wirft, wenn gleichzeitig ein 1,25 m langer Stab einen 0,75 m langen Schatten hat?

97. Die Drahtseilbahn auf den 1214 m hohen Fichtelberg überwindet bei einer Streckenlänge von 1175 m einen Höhenunterschied von 305 m.

a) Ermittle die durchschnittliche Streckenlänge, bei der die Gondel um 10 m steigt?

b) Wie groß ist der Höhenunterschied, der durchschnittlich auf 100 m Streckenlänge überwunden wird?

98. Am Beginn einer 700 m langen Gefällstrecke steht ein Warnzeichen (Bild b 34).

a) Ermittle zeichnerisch, wieviel Meter der Endpunkt der Strecke tiefer liegt als der Anfangspunkt!

b) Gib den Winkel an, unter dem die Straße fällt!

c) Welcher Winkel gehört zu einem Gefälle von 100 %?

99. Das Papierformat A 0 ist ein Rechteck, dessen Fläche 1 m² beträgt und das beim Falten längs einer Symmetrieachse ein zum Ausgangsrechteck ähnliches Rechteck (A 1) ergibt.

a) Ermittle die Maße für die Formate A 0 und A 1 in Millimeter!

b) Ermittle auch die Maße für die durch weiteres Falten entstehenden Formate A 2 bis A 6!

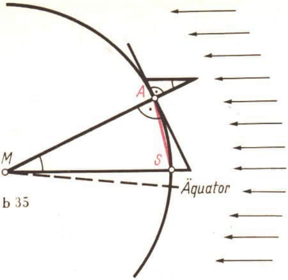
100. Um 200 v. u. Z. bestimmte der Grieche ERATOSTHENES den Erdumfang aus folgenden Messungen (Bild b 35):

1. Entfernung Alexandria—Syene (heute Assuan) 5000 Stadien (1 Stadion = 184,3 m).
2. Genau zu dem Zeitpunkt, zu dem die Sonne senkrecht über Syene steht, wird in Alexandria aus der Länge eines senkrecht stehenden Stabes und seiner Schattenlänge ermittelt, daß die Sonnenstrahlen mit dem Stab einen Winkel von 7,2° bilden.

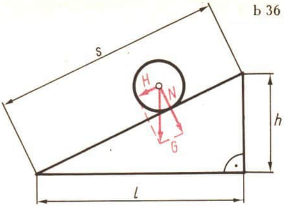
a) Erläutere anhand des (nicht maßstäblichen) Bildes b 35, wie man daraus den Erdumfang u bestimmen kann! (A: Alexandria; S: Syene; M: Erdmittelpunkt).

b) Errechne den von Eratosthenes ermittelten Wert!

c) Ermittle den absoluten und den relativen Fehler dieser Messung!



b 35



b 36

b

101. Eine Kugel mit dem Gewicht $G = 1{,}20$ kp rollt auf einer geneigten Ebene (Bild b 36): $l = 184$ cm; $h = 43$ cm; $s = 189$ cm.
Berechne die Normalkraft N und die Hangabtriebskraft H!

102. Beschreibe Ähnlichkeitsabbildungen, die im rechtwinkligen Dreieck ABC **a)** $\triangle DBC$ in $\triangle ADC$, **b)** $\triangle ADC$ in $\triangle ABC$, **c)** $\triangle DBC$ in $\triangle ABC$ überführen! (D bezeichnet den Fußpunkt der Höhe auf der Hypotenuse.)

103. Beweise, daß für jedes rechtwinklige Dreieck ABC die Proportion $a^2 : b^2 = p : q$ gilt!

104. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Hypotenusenabschnitte $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ bekannt. Wie lang ist die Höhe $\overline{CD}$?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AD}$	2,0 cm	3 cm	3,5 cm	2,5 cm	4,1 cm	3,7 cm	5,3 cm
$\overline{DB}$	2,5 cm	3 cm	3,0 cm	4,5 cm	2,2 cm	2,8 cm	4,1 cm

105. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe 6 cm lang.
a) Wie lang könnten die Hypotenusenabschnitte sein?
b) Wie lang sind sie, wenn ihr Verhältnis $\frac{1}{4}$ beträgt?
c) Beantworte **a)** und **b)** für den Fall, daß die Höhe 10 cm lang ist!

106. In einem rechtwinkligen Dreieck ist $h = 3{,}5$ cm.
a) Wie lang muß die Hypotenuse mindestens sein?
b) Wie lang kann die Hypotenuse höchstens sein?

107. Konstruiere zu den Rechtecken $ABCD$, $EFGH$, $IKLM$ aus Aufgabe **b 66** (Bild b 27) je ein flächengleiches Quadrat!

108. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind Hypotenuse $\overline{AB}$ und Hypotenusenabschnitt $\overline{AD}$ bekannt. Wie lang sind die Katheten?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AB}$	5 cm	6,1 cm	5,7 cm	4,9 cm	37 cm	97 cm	0,83 m
$\overline{AD}$	2 cm	4,7 cm	2,8 cm	1,3 cm	1,7 dm	620 mm	3,4 dm

109. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind Hypotenuse $\overline{AB}$ und Kathete $\overline{AC}$ bekannt. Berechne die Hypotenusenabschnitte, die andere Kathete und die Höhe!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AB}$	9 cm	8 cm	21 cm	3,2 cm	9,4 cm	760 mm	85 cm
$\overline{AC}$	6 cm	5 cm	20 cm	1,4 cm	3,1 cm	43,0 cm	0,58 m

110. Fülle die folgende Tabelle aus unter der Voraussetzung, in $\triangle\ ABC$ sei $\sphericalangle\ ACB = 90°$!

	$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
a)			3,0 cm	4,0 cm		
b)		3,9 cm		5,1 cm		
c)	6,2 cm				3,5 cm	
d)	5,5 cm					4,1 cm
e)			2,1 cm			4,9 cm
f)		5,0 cm			5,4 cm	

111. Konstruiere zu einem gegebenen Quadrat $ABCD$ ein flächengleiches Rechteck $PQRS$, für das die Länge der Seite $\overline{PQ}$ gegeben ist! Miß $\overline{QR}$ und überprüfe rechnerisch!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\overline{AB}$	4 cm	5,6 cm	3,4 cm	2,9 cm	6,1 cm	4,3 cm
$\overline{PQ}$	3 cm	4,1 cm	4,8 cm	3,2 cm	3,7 cm	7,1 cm

112. Konstruiere zu einem gegebenen Rechteck $ABCD$ ein flächengleiches Quadrat! Miß die Quadratseite, und überprüfe die Genauigkeit der Konstruktion!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\overline{AB}$	1,5 cm	2,4 cm	2,8 cm	4,9 cm	5,6 cm	6,3 cm
$\overline{BC}$	3,7 cm	3,1 cm	2,2 cm	3,6 cm	4,2 cm	1,7 cm

113. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Katheten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bekannt. Berechne die Länge der Hypotenuse!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AC}$	24 cm	2,0 cm	3,3 cm	2,7 cm	16 mm	6,32 dm	27,5 m
$\overline{BC}$	7 cm	2,1 cm	5,6 cm	0,9 cm	37 mm	23,8 cm	27,5 dm

114. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind Hypotenuse $\overline{AB}$ und Kathete $\overline{BC}$ bekannt. Berechne $\overline{AC}$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AB}$	17 cm	3,7 cm	10,9 cm	0,85 m	23,5 cm	4,81 m	634 mm
$\overline{BC}$	15 cm	1,2 cm	9,1 cm	7,2 dm	118 mm	19,6 dm	2,75 dm

115. Die unterschiedlich großen Rechtecke einer Streichholzschachtel seien R_1, R_2, R_3. Konstruiere die zu ihnen jeweils flächengleichen Quadrate Q_1, Q_2, Q_3!

116. Fülle die Tabelle aus unter der Voraussetzung, in $\triangle\, PQR$ sei $\sphericalangle\, PQR = 90°$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
a $\overline{PQ}$	3,6 cm		2,3 cm	7,22 m	469 mm		37,1 m
b $\overline{QR}$	7,7 cm	9,9 cm	1,4 cm	5,37 m		9,82 m	
c $\overline{RP}$		10,1 cm			7,58 dm	10,5 m	27,5 m

117. Konstruiere ein Quadrat, das den gleichen Flächeninhalt hat wie die Quadrate über Strecken von 3,8 cm und 4,5 cm Länge zusammen!

118. Konstruiere Strecken der Länge
a) $\sqrt{2}$ cm, **b)** $\sqrt{3}$ cm, **c)** $\sqrt{5}$ cm, **d)** $\sqrt{6}$ cm, **e)** $\sqrt{7}$ cm, **f)** $\sqrt{8}$ cm!

119. Gib an, ob bei folgenden Maßangaben das $\triangle\, ABC$ mit dem Höhenfußpunkt D zwischen A und B rechtwinklig ist oder nicht!

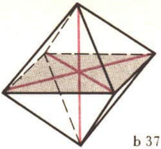
a) $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 4{,}3$ cm
b) $\overline{AC} = 12$ cm, $\overline{DB} = 18$ cm, $\overline{AD} = 6$ cm
c) $\overline{AD} = 3$ cm, $\overline{DB} = 12$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm
d) $\overline{AB} = 1{,}5$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, $\overline{AC} = 2{,}5$ cm
e) $\overline{DB} = 5$ cm, $\overline{AB} = 20$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm
f) $\overline{AD} = 3$ cm, $\overline{DB} = 5$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm

120. Entscheide, ob $\sphericalangle\, PQR$ ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist! Höhenfußpunkt S liegt zwischen P und R.

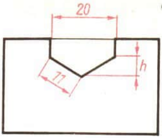
a) $\overline{PS} = 9$ cm, $\overline{SR} = 16$ cm, $\overline{QS} = 12$ cm
b) $\overline{PS} = 9$ cm, $\overline{SR} = 5$ cm, $\overline{QS} = 4$ cm
c) $\overline{PQ} = 6$ cm, $\overline{QR} = 8$ cm, $\overline{RP} = 9$ cm
d) $\overline{PQ} = 10$ cm, $\overline{PR} = 26$ cm, $\overline{QR} = 24$ cm
e) $\overline{PS} = 6$ cm, $\overline{SR} = 5$ cm, $\overline{QS} = 7$ cm
f) $\overline{PR} = 11$ cm, $\overline{RS} = 4$ cm, $\overline{QR} = 7$ cm
g) $\overline{PQ} = 12$ cm, $\overline{QR} = 5$ cm, $\overline{PR} = 14$ cm
h) $\overline{PR} = 8$ cm, $\overline{RS} = 3$ cm, $\overline{PQ} = 6$ cm

121. Die Diagonalen eines Rhombus sind 42,4 cm und 35,2 cm lang. Berechne Umfang und Flächeninhalt!

122. Gegeben sei ein Kreis mit 10 cm Radius.
a) Welchen Abstand vom Mittelpunkt hat eine 14 cm lange Sehne?
b) Welchen Abstand vom Mittelpunkt hat ein Punkt P, wenn die von ihm an den Kreis gelegte Tangente bis zum Berührungspunkt 15 cm lang ist?



b 37



b 38

b

123. a) Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist 5,7 cm lang.
b) Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?
c) Leite eine Formel für die Höhe (den Flächeninhalt) des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a her!

124. Ein regelmäßiges Oktaeder wird von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt (Bild b 37).
a) Berechne die Länge einer jeden der drei im Bild b 37 eingezeichneten Körperachsen, wenn eine Körperkante 3,0 cm lang ist!
b) Berechne den Oberflächeninhalt des Oktaeders von **a)**!

125. a) Wie lang ist die Raumdiagonale einer Streichholzschachtel?
b) Gib eine Formel für die Raumdiagonale d eines Quaders mit den Kanten a, b, c an!

126. Berechne den in der Aufgabe **98 a)** zeichnerisch ermittelten Höhenunterschied!

127. Gib die Steigung der Fichtelbergbahn (Aufgabe **97**) in Prozenten an!

128. Die Eisenbahnstrecke von Dresden nach Karl-Marx-Stadt steigt zwischen Tharandt und Klingenberg-Colmnitz bei 11,6 km Streckenlänge um 228 m an. Ermittle die durchschnittliche Steigung! Vergleiche mit der für Hauptbahnen höchstzulässigen Steigung von 2,5%!

129. Zum Schleifen eines Spiralbohrers von 20 mm Durchmesser soll eine Lehre angefertigt werden. Berechne h für die im Bild b 38 eingetragenen Maße!

130. Jürgen läßt einen Drachen steigen, so hoch es der 87 m lange Bindfaden zuläßt. Michael sieht den Drachen senkrecht über sich. Welche Höhe hat der Drachen erreicht, wenn Michael von Jürgen 60 Schritte von je 80 cm Länge entfernt steht? (Der Durchhang der Drachenschnur wird vernachlässigt.)

131. Von einem Feld in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse von 1200 m und einer Kathete von 850 m wurden 900 dt Silomais geerntet. Berechne den Hektarertrag!

132. Ein Weg, der für eine kartographische Aufnahme vermessen wurde, steigt auf 330,0 m insgesamt um 46,0 m gleichmäßig an. In die Karte wird seine Projektion auf die Horizontalebene eingetragen. Wie lang erscheint sie auf einer Karte im Maßstab 1:40000?

133. Auf einer Karte im Maßstab 1:25000 erscheint die Projektion eines Skilifts, der einen Höhenunterschied von 120 m überwindet, 12 mm lang.
a) Wie lang etwa ist der Skilift in Wirklichkeit?
b) Ist der in **a)** errechnete Wert ein Mindest-, Höchst- oder Mittelwert?

134. Der Pkw Trabant 601 hat ein Leergewicht von 615 kp. Berechne Hangabtriebskraft und Normalkraft bei einer Straße mit 12% Gefälle (vgl. Aufgabe **b 101**)!

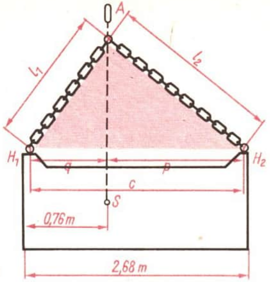
135. Ein Kasten mit einseitiger Schwerpunktlage hängt an einer gespreizten Kette (Bild b 39). Die Kette bildet am Aufhängepunkt A einen rechten Winkel. Wie lang ist die Kette, wenn der Hakenabstand $\overline{H_1H_2}$ eine Länge von 2,68 m hat und der Abstand des Schwerpunktes S von der Kastenwand, über der sich Haken H_1 befindet, 0,76 m beträgt?

136. Wie groß sind bei dem Dachbinder in Bild b 40 die Firsthöhe und die Sparrenlängen, wenn $a = b = c = 1{,}5$ m gilt?

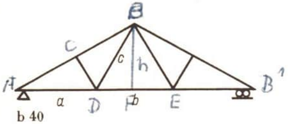
137. a) Ermittle die Länge des Obergurts, der Diagonalen und der Senkrechten des Dachbinders aus Aufgabe **b 17** (Bild b 6)!

b) Desgleichen für Bild b 41.

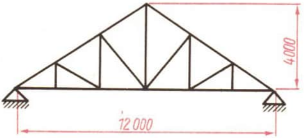
138. Berechne die Blickweite auf das Meer aus 100 m Höhe (Erdradius 6 370 km)!



b 39



b 40



b 41

139. Ein Kraftwerk wird von einem See her durch eine sechsfache Rohrleitung gespeist, für deren Hauptpunkte folgende Angaben gelten:

	Mündung am Turbinenhaus	Knickpunkt 1	Knickpunkt 2	Knickpunkt 3	Anfang am Wasserschloß
Waagerechte Entfernung vom Turbinenhaus	0	127,5 m	171,0 m	235,5 m	354,0 m
Höhe über NN	603,0 m	618,0 m	649,5 m	711,0 m	783,0 m

a) Zeichne einen Längsschnitt durch das Leitungssystem im Maßstab 1:5000 mit der Höhenlinie 600 über NN als Bezugslinie!

b) Berechne die Längen der Teilstücke der Leitung, die Gesamtlänge der Leitung und die Länge der Luftlinie vom Anfang bis zur Mündung!

140. In einer mindestens 2000 Jahre alten chinesischen Arithmetik findet sich folgende Aufgabe: Im Mittelpunkt eines quadratischen Teiches von 10 Fuß Seitenlänge wächst ein Schilf, das einen Fuß über der Wasserfläche emporsteht. Wenn man es ans Ufer nach der Mitte einer Seite hin zieht, reicht es gerade bis an den Rand des Teiches. Wie tief ist das Wasser an der Stelle, wo die Pflanze wächst?

141. Bei zwei ähnlichen Vielecken sind a und a' einander entsprechende Seiten, u und u' die Umfänge, A und A' die Flächeninhalte.

a) Berechne u' und A', wenn $a = 5$ cm, $a' = 8$ cm, $u = 20$ cm und $A = 9\ \text{cm}^2$ ist!

b) Berechne a' und u', wenn $a = 6$ cm, $u = 25$ cm, $A = 30\ \text{cm}^2$ und $A' = 60\ \text{cm}^2$ ist!

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Von zwei Strecken a und b ist ihr Verhältnis $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ bekannt.

a) Konstruiere b für $a = 4{,}6$ cm! **b)** Konstruiere a für $b = 5{,}4$ cm!

2. Einem Kreis (Radius r) ist je ein Quadrat einbeschrieben und umbeschrieben. Ermittle das Verhältnis der Quadratseiten!

3. Erläutere, warum sich in jedem Dreieck ABC die Seitenhalbierenden $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ in einem Punkt S (dem Schwerpunkt) schneiden, wobei gilt:
$\overline{AS} : \overline{SD} = \overline{BS} : \overline{SE} = \overline{CS} : \overline{SF} = 2 : 1$!
Anleitung: Ziehe zu $\overline{AD}$ Parallelen durch E und F!

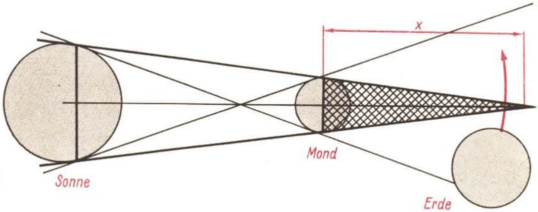
b

4. Das Bild b 42 zeigt schematisch die Anordnung von Sonne, Mond und Erde bei einer Sonnenfinsternis.

a) Berechne, wie weit der Kernschatten des Mondes reicht, unter Benutzung folgender Näherungswerte:
Sonnendurchmesser 1,4 Mill. km, Monddurchmesser 3500 km, mittlere Entfernung Sonne—Erde bzw. Sonne—Mond 150 Mill. km. Erläutere, warum man mit den Durchmessern statt mit den Berührungssehnen rechnen darf!

b) Vergleiche den unter **a)** ermittelten Wert mit der Entfernung Erde—Mond, die zwischen 356000 km und 407000 km schwankt! Was ergibt sich daraus für die Sichtbarkeit einer totalen Sonnenfinsternis?

c) Berechne entsprechend die Länge des Kernschattens der Erde (Erddurchmesser 12740 km)! Für welche Finsternis ist dieses Ergebnis bedeutsam?



b 42

5. Zeichne einen Rhombus $ABCD$ mit $\sphericalangle ABC \neq 90°$ und dem Diagonalenschnittpunkt M! Gib möglichst je zwei Bewegungen an, bei denen

a) $\triangle ABM$ das Bild von $\triangle BCM$ ist; **b)** $\triangle ABM$ das Bild von $\triangle DMC$ ist;

c) $\triangle ABC$ das Bild von $\triangle ABD$ ist; **d)** der Rhombus Bild von sich selbst ist!

6. Zeichne das Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{BC} = 3$ cm! Diagonalenschnittpunkt sei S.

a) Konstruiere sein Bild $A''B''C''D''$ bei der Zusammensetzung $(Z; k)$ der Streckungen 1. $(A; 2)$ und 2. $\left(S; \frac{3}{4}\right)$!

b) Berechne $\overline{A''B''}$ und $\overline{B''C''}$!

c) Gib drei Geraden an, auf denen Z liegen muß!

d) Überprüfe an deiner Konstruktion, ob sich die unter **c)** genannten Geraden wirklich in einem Punkt schneiden!

e) Ergibt die Zusammenstellung **1.** $\left(S; \frac{3}{4}\right)$, 2. $(A; 2)$ dieselbe zentrische Streckung $(Z; k)$?

7. Ein rechteckiges Bild hat einen 5 cm breiten Rahmen. Sind die beiden Rechtecke einander ähnlich?

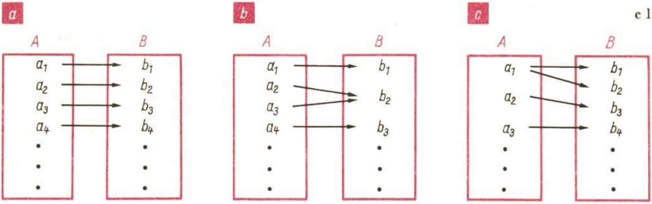
c) Lineare Funktionen

1. a) Gib die Elemente der Menge M_1 aller geraden Zahlen zwischen 1 und 20 an!
   b) Gib die Elemente der Menge M_2 aller durch 3 teilbaren Zahlen zwischen 4 und 31 an!
   c) Gib die Elemente der Menge M_3 aller durch 6 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 33 an!
   d) Welche Beziehung besteht zwischen M_3 und M_2?

2. a) Gib die Elemente der Menge M_4 aller Primzahlen zwischen 79 und 87 an!
   b) Gib die Elemente der Menge M_5 aller ungeraden Zahlen zwischen 75 und 90 an!
   c) Gib die Elemente der Menge M_6 aller durch 4 teilbaren Zahlen zwischen 0 und 15 an!
   d) Welche Beziehung besteht zwischen M_5 und M_6?

3. Gib drei Beispiele für unendliche Mengen an!

4. Welche der drei Abbildungen in Bild c 1 ist eindeutig. Begründe deine Entscheidung!



c 1

5. In den folgenden Beispielen entsteht durch die Zuordnung der Elemente von B zu den Elementen von A eine Menge geordneter Paare Gib jeweils den Wertebereich und drei geordnete Paare an!
   a) A ist die Menge aller rationalen Zahlen; es soll jeder rationalen Zahl ihr Dreifaches zugeordnet werden.
   b) A ist die Menge der rationalen Zahlen. Ordne jede Zahl sich selbst zu!
   c) A ist die Menge aller natürlichen Zahlen. Ordne den natürlichen Zahlen der Reihe nach die Primzahlen zu!
   d) A ist die Menge der rationalen Zahlen außer der Null; es soll jeder Zahl aus der Menge A ihr Reziprokes zugeordnet werden.
   e) A ist die Menge der rationalen Zahlen. Ordne jeder Zahl die Zahl 2 zu.
   f) A ist die Menge der rationalen Zahlen; es soll jeder Zahl ihr Doppeltes, vermindert um drei, zugeordnet werden.

6. In den folgenden Sachverhalten sind die angegebenen Größen proportional. Bezeichne die Maßzahlen der einen mit x, die der anderen mit y! Gib die Beziehung zwischen x und y durch eine Gleichung an! Nenne jeweils drei geordnete Paare! Stelle die Proportionen graphisch dar!
   a) Ein Brötchen kostet 0,05 M.
   b) Ein Bügeleisen verbraucht in $2\frac{1}{2}$ Stunden 1 kWh Elektroenergie.
   c) Aus 5 kg Trauben erhält man 3,5 l Saft.
   d) Ein Abraumbagger in einer Kohlengrube räumt in 20 Minuten 100 t Abraum ab.
   e) Für eine Beeteinfassung braucht man drei Pflanzen auf je 50 cm.
   f) Ein Containerfrachter legt in $2\frac{1}{2}$ Stunden 52,5 Seemeilen zurück.

7. Kennzeichne die Punkte mit folgenden Koordinaten in einem Koordinatensystem!
   a) $P_1: x_1 = 2;\ y_1 = 3$
   $P_2: x_2 = 2;\ y_2 = 6$
   $P_3: x_3 = 2;\ y_3 = -6$
   $P_4: x_4 = 0{,}5;\ y_4 = 0$
   b) $P_1: x_1 = 0;\ y_1 = 0$
   $P_2: x_2 = -1;\ y_2 = -4$
   $P_3: x_3 = -2;\ y_3 = 6$
   $P_4: x_4 = 0;\ y_4 = -3$
   c) $P_1: x_1 = 5;\ y_1 = -4$
   $P_2: x_2 = -2;\ y_2 = -6$
   $P_3: x_3 = 3{,}2;\ y_3 = 2{,}3$
   $P_4: x_4 = -3{,}2;\ y_4 = 2{,}3$

8. Kennzeichne die folgenden Zahlenpaaren zugeordneten Punkte in einem Koordinatensystem!

a)

x	$-1{,}5$	-5	1	0,5	0
y	3	-2	0	4,3	$-1{,}7$

b)

x	0	$-3{,}6$	0	3	-3	-3
y	0	0	5	3	3	-3

9. Zeichne die Gerade, die durch die Punkte A und B geht!
a) $A\,(5;\,4)$, $B\,(-3;\,-2)$ b) $A\,(0;\,0)$, $B\,(2;\,-2)$ c) $A\,(0;\,3)$, $B\,(-1;\,-2)$

10. Zeichne ein Dreieck mit den folgenden Eckpunktkoordinaten!
$A\,(4;\,5)$; $B\,(8;\,2)$; $C\,(-6;\,3)$

11. Zeichne ein Viereck mit den folgenden Eckpunktkoordinaten!
$A\,(-3;\,8)$; $B\,(10;\,6)$; $C\,(5;\,-5)$; $D\,(-7;\,-4)$

12. Zeichne den Punkt $P\,(4;\,6)$ und den Punkt P', der in bezug auf die Abszissenachse symmetrisch zum Punkt P liegt! Ermittle die Koordinaten dieses Punktes!

13. Zeichne den Punkt $P\,(4;\,6)$ und den Punkt P', der in bezug auf die Ordinatenachse symmetrisch zum Punkt P liegt! Ermittle die Koordinaten dieses Punktes!

14. a) Zeichne den Punkt $A\,(3;\,7)$ und den Punkt B, der in bezug auf den Koordinatenursprung symmetrisch zum Punkt A ist! Wodurch unterscheiden sich die Abszissen und die Ordinaten dieser Punkte?
b) Zeichne weitere Punktepaare, die in bezug auf den Koordinatenursprung symmetrisch sind, und vergleiche ihre Koordinaten!

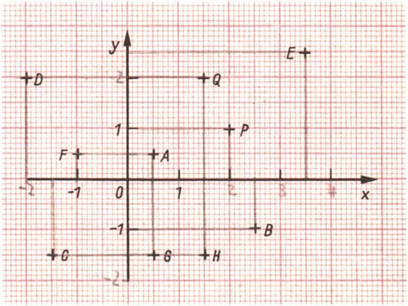
15. Gegeben sind folgende Punkte: $A\,(1;\,3)$; $B\,(2;\,5)$; $C\,(1;\,-3)$; $D\,(-2;\,-5)$; $E\,(-1;\,3)$. Stelle fest, welche Paare dieser Punkte symmetrisch sind in bezug auf
a) die Abszissenachse; b) die Ordinatenachse, c) den Koordinatenursprung!

16. Gib die Koordinaten der im Bild c 2 gekennzeichneten Punkte an!

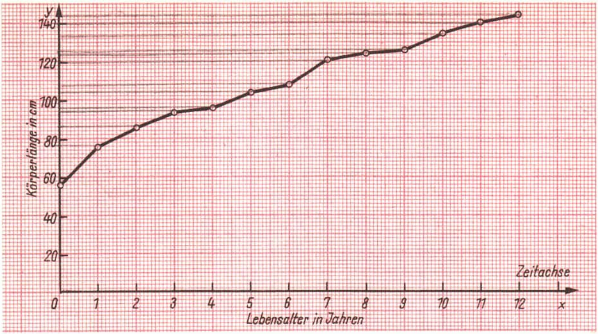
17. Die Messung der relativen Luftfeuchtigkeit an einem Tage ergab die folgende Tabelle:

Uhrzeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24 Uhr
relative Feuchtigkeit	72	73	76	75	68	60	55	53	53	55	60	65	68 %

Stelle die durch die Tabelle gegebenen geordneten Paare graphisch dar!



c 2



c 3

18. Entnimm dem Bild c 3 die Koordinaten der Punkte, und trage diese in eine Tabelle ein!

19. Gib für folgende Funktionen eine Wertetabelle an!

a) $y = 3x$ b) $y = -x$ c) $y = -\frac{1}{2}x$ d) $y = -\frac{1}{3}x$

20. Stelle fest, ob die geordneten Zahlenpaare zur Funktion mit der Gleichung $y = 2{,}5x$ gehören!

a) [4; 10] c) [— 3; — 7] e) [0; 0] g) [— 11; — 27,5]
b) [12; 25] d) [0,4; 1] f) [— 2; 5] h) [110; 250]

21. Zeichne die Bilder der Funktionen mit folgenden Gleichungen!

a) $y = 4x$ b) $y = \frac{1}{2}x$ c) $y = -x$ d) $y = 0{,}6x$ e) $y = -1{,}5x$

22. Zeichne in ein Koordinatensystem die Bilder folgender Funktionen!

a) $y = 3x$ und $y = -3x$ b) $y = 0{,}5x$ und $y = -0{,}5x$
c) $y = 0{,}1x$ und $y = -0{,}1x$

23. Zeichne die Geraden mit den in der folgenden Tabelle angegebenen Anstiegen! Miß die Winkel α, die diese Geraden mit der positiven Richtung der x-Achse bilden, und trage sie in die Tabelle ein!

m	0,5	1	1,5	2	— 2	— 1,5	— 1	— 0,5
α (in Grad)								

Gilt $\alpha \sim m$?

24. Zeichne die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems und die Geraden für $y = x$ und $y = -x$! Dadurch wird die Zeichenebene in 8 Teile zerlegt. Markiere farbig die Achtel, in denen Geraden $y = mx$ verlaufen, für die $|m| > 1$ gilt, andersfarbig diejenigen, in denen die Geraden mit $0 < |m| < 1$ verlaufen!

25. Stelle die folgenden Funktionen graphisch dar!

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 3x$ d) $y = \frac{1}{2}x$
$y = -x$ $y = -2x$ $y = -3x$ $y = -\frac{1}{2}x$

Wie verlaufen die Geraden? Durch welche Bewegungen lassen sie sich ineinander überführen?

26. Stelle die folgenden Funktionen graphisch dar!

a) $y = |3x|$ b) $y = 3|x|$ c) $y = |-x|$ d) $y = -|x|$

27. Stelle die folgenden Funktionen graphisch dar!

a) $y = x$ **b)** $y = x + 1$ **c)** $y = x + 2$ **d)** $y = x + 3$
e) $y = 2x$ **f)** $y = 2x + 1$ **g)** $y = 2x + 2$ **h)** $y = 2x + 3$

Wie verlaufen die Geraden **a)** bis **d)** und **e)** bis **h)** zueinander? Durch welche Bewegungen lassen sie sich jeweils ineinander überführen?

28. Stelle die folgenden Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar! Vergleiche miteinander die Gleichungen und die Lage der zugehörigen Geraden!

(1) $y = x + 1$ (3) $y = 2x + 1$ (5) $y = 3x + 1$
(2) $y = -x + 1$ (4) $y = -2x + 1$ (6) $y = -3x + 1$

29. Stelle die Funktionen $y = 2x + 3$ und $y = -2x + 3$ graphisch dar! Nenne Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den graphischen Darstellungen, und gib die Symmetrieachsen an!

30. Stelle die Funktionen $y = 2x + 3$ und $y = -2x - 3$ graphisch dar! Nenne Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den graphischen Darstellungen, und gib die Symmetrieachsen an!

31. Zeichne eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung und den Punkt $M\,(2;\,4)$ geht!

a) Schreibe die Gleichung dieser Geraden auf!

b) Liegt der Punkt $N\,(-1;\,-2)$ auf der gegebenen Geraden?

32. Zeichne eine Gerade, die durch die Punkte $P\,(2;\,0)$ und $Q\,(-1;\,3)$ geht!

a) Schreibe die Gleichung dieser Geraden auf!

b) Liegt der Punkt $R\,(0;\,2)$ auf der gegebenen Geraden?

33. Zeichne eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht und den Anstieg -2 hat!

a) Schreibe die Gleichung dieser Geraden auf!

b) Liegt der Punkt $S\,(-2;\,-2)$ auf der gegebenen Geraden?

34. Zeichne eine Gerade, die durch den Punkt $A\,(0;\,1)$ geht und den Anstieg 2 hat!

a) Schreibe die Gleichung dieser Geraden auf!

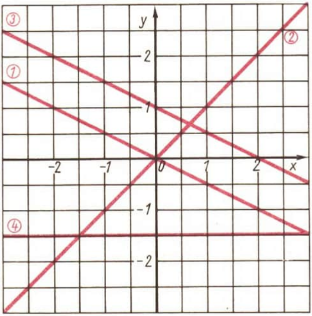
b) Liegt der Punkt $B\,(1;\,3)$ auf der gegebenen Geraden?

35. Zeichne in ein Koordinatensystem die graphischen Darstellungen folgender Funktionen!

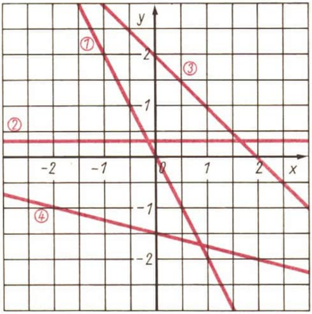
a) $x - y = 0$ **b)** $x + y = 0$ **c)** $5x - 2y = 0$ **d)** $3x - y = 0$

36. Ermittle näherungsweise die Gleichungen der Funktionen, die im Bild c 4 und im Bild c 5 dargestellt wurden!

c 4



c 5



C

37. Durch die geordneten Paare in den nachstehenden Tabellen sollen lineare Funktionen $y = mx + n$, Definitionsbereich $x \in R$, gegeben sein. Stelle die Funktionen graphisch dar, und ermittle die Gleichungen der Funktionen!

a)

x	4	6	-10
y	-2	-3	5

b)

x	-2	0	5
y	-1	1	6

c)

x	-3	-1	4
y	1,6	0	-4

38. Bei der Ermittlung der Schallgeschwindigkeit v in Metern je Sekunde auf experimentellem Wege in trockener Luft und bei verschiedenen Temperaturen erhielt man die folgende Wertetabelle!

t (in Grad)	-30	-16	-8	-4	0	4	8	12	20	30
$v\left(\text{in } \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	313	323	327	330	332	334	337	339	344	349

a) Fertige die graphische Darstellung der durch die Wertetabelle gegebenen Funktion an!
b) Ersetze die graphische Darstellung näherungsweise durch eine Gerade!
c) Ermittle eine Funktionsgleichung für die in **b)** gezeichnete Gerade!

39. Von einer linearen Funktion $y = mx + n$ seien m und n bekannt. Gib zwei geordnete Zahlenpaare an, die die jeweilige Gleichung erfüllen, und zeichne das Bild!
a) $m = 4;\ n = 1$ **b)** $m = 4;\ n = -4$ **c)** $m = -3;\ n = 1{,}5$

40. a) Setze in $2x + 3y - 6 = 0$ zuerst statt 2, dann statt 3 die Zahl 0! Zeichne die entsprechenden Geraden, und gib die Gleichungen an! Sprich das Ergebnis in Worten aus!
b) Zeichne die Geradenschar $y = a$ für verschiedene Werte von a! Sprich das Ergebnis in Worten aus!

41. Gib die Gleichung derjenigen linearen Funktion an, die durch die x-Achse dargestellt wird!

42. Stelle die folgenden Scharen von Funktionen graphisch dar!
a) $y + x - n = 0$ **c)** $3y - x - n = 0$ **e)** $y - mx - 1 = 0$ **g)** $y - mx + 2{,}5 = 0$
b) $y - x - n = 0$ **d)** $2y + x - n = 0$ **f)** $y - mx + 1 = 0$ **h)** $y - mx - 2{,}5 = 0$
Anleitung: Setze jeweils für n bzw. m eine Anzahl beliebiger Zahlenwerte ein!

43. Gib von folgenden Funktionen eine Wertetabelle an, und stelle die Funktionen graphisch dar! (Anleitung: Setze zu einer Zahl auch stets die entgegengesetzte Zahl mit ein!)
a) $y = |x| + 2$ **c)** $y = |x| - \frac{3}{2}$ **e)** $y = |x - 1|$
b) $y = |x| - 2$ **d)** $y = |x + 2|$ **f)** $y = |x - 1| + 2$

44. Ermittle die jeweils nicht angegebene Zahl eines jeden geordneten Zahlenpaares!
a) $y = 2x - 3$ **b)** $y = -x + \frac{1}{2}$ **c)** $y = -\frac{1}{2}x - 2$
$[x; 5],\ [2; y]$ $[3; y],\ \left[-\frac{1}{2}; y\right]$ $[-4; y];\ [x; 3]$

45. Ermittle rechnerisch und zeichnerisch die Nullstellen der folgenden Funktionen!
a) $y = x + 2$ **b)** $y = -2x + 1$ **c)** $y = 0{,}5x$ **d)** $2y - x = 5$

46. Ermittle rechnerisch die Nullstellen der folgenden Funktionen!
a) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ **b)** $2x + 3y - 4 = 0$ **c)** $y = 0{,}2x + 0{,}7$ **d)** $x - y = 0$

Löse die folgenden Gleichungen! Für x gelte in allen Aufgaben $x \in R$.

47. a) $\frac{x}{18} = 4{,}2$ **b)** $\frac{x}{16} = -0{,}8$ **c)** $\frac{x}{-4} + 3 = 7$ **d)** $\frac{2}{x} = 5$

48. a) $5x - 3 = 17$ **b)** $5x + 2 + x = 20$ **c)** $18 + 9x = 27 + 5x$

C

49. a) $100 + 2x - 9x + 15 = 10 - 7x + 5 - 11x$
b) $(8x + 5) + (5x - 8) + 7 = 10x - (3 - 2x - 8)$
c) $x - (7x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 8)$

50. a) $(x - 1)(x - 2) = (x - 3)(x + 1)$
b) $(x + 2)^2 - (x + 1)^2 = 9$
c) $(x - 1)^2 = (7 - x)^2$

51. a) $(x + 3)(2x + 5) = (2x - 1)(x + 7)$ b) $(x - 2)(x - 4) = (x - 5) \cdot x$
c) $(8 + x)(x - 1) = (x + 1)(x - 2) + 2$

52. $(x - 3)(x + 4) = x^2 - 9$ (Vgl. Beispiel C 28!)

53. a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} = 11$ b) $3 - \frac{3 - 7x}{10} + \frac{x + 1}{2} = 4 - \frac{7 - 3x}{5}$

54. a) $\frac{2x + 3}{4} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{3x - 7}{8} = \frac{5}{6}$ c) $\frac{34x + 40}{27} = \frac{47}{51}$ d) $\frac{72x + 56}{5} = \frac{32}{105}$

55. a) $\frac{2(3x + 2) - 3(x - 3)}{7} = 4$ b) $\frac{3(6 - x)}{5} = x - 7\frac{3}{5}$

56. a) $12 : 8 = 15 : x$
b) $2 : 6 = 6 : x$
c) $9{,}5 : 3{,}8 = 3{,}8 : x$
d) $4{,}2 : 5{,}6 = 2{,}5x : 10$
e) $3{,}6x : 24 = 1 : \frac{3}{2}$

57. a) $3 : 11 = 6{,}3 : x$
b) $\frac{5}{4} : \frac{11}{4} = \frac{5}{2} : x$
c) $2x : 5 = 8 : 10$
d) $1{,}2 : 1{,}5x = 0{,}5 : 7{,}5$
e) $\frac{9}{2} : \frac{162}{5} = \frac{5}{6} : \frac{3}{4}x$

58. a) $16{,}8 : 8{,}4 = 4{,}2 : x$
b) $\frac{9}{2} : \frac{12}{7} = \frac{35}{4} : x$
c) $3x : 80 = 9 : 15$
d) $\frac{15}{4} : \frac{25}{6} = \frac{9}{5}x : 2$
e) $\frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{2} : \frac{3}{8}x$

59. a) $(x - 3) : 6 = (x + 6) : 8$ b) $(x + 2) : 5 = (x - 4) : \frac{5}{3}$

60. a) $\frac{2}{x + 5} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{x - 5}{x - 3}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{7}{2(x + 3)} = \frac{5}{x + 3} + \frac{3}{2(x + 3)}$

61. a) $\frac{38}{57} = \frac{x}{6}$ b) $\frac{5}{x - 5} = \frac{7}{3x - 7}$ c) $\frac{8{,}5}{x} = \frac{5}{4}$

62. a) $\frac{x + 4}{x + 5} = \frac{7}{8}$ b) $\frac{3}{4x + 5} = \frac{2}{2x - 3}$ c) $\frac{6}{5x + 2} = \frac{7}{3x + 8}$

63. Die folgenden Gleichungen sind nacheinander nach allen vorkommenden Variablen aufzulösen!
a) $2(3a + 10x) + 7(a - x) = 13(a + b)$ b) $3(5x - 7a) + 7(3a - 5b) + 5(3b - 7x) = 0$
c) $mx + nx = a$ d) $ax + bx = m + x$

In den folgenden Aufgaben sind alle Gleichungen nach x aufzulösen!

64. a) $x + a = 100$ c) $x - 6 = b$ e) $-8 + x = c$
b) $\frac{11}{3}b + \frac{1}{2}x = \frac{13}{2}b$ d) $2x - a = 2a + x$ f) $x + p = r$

65. a) $5ab^2 + 10a^2b = abx - 9{,}1a^2b$ b) $\frac{sx}{12} - \frac{s^2}{2} = \frac{3s^2}{2} - \frac{st}{6}$

66. a) $17mx - 3am + 5bm - 8mx + 4bm = 10mx - 5am + 7bm + mx$
b) $9ab - 7b^2 - 11bx + 12b^2 - 5ab - 3bx - ab + b^2 + 11bx = 0$

67. Die folgenden Gleichungen sind nacheinander nach allen vorkommenden Variablen aufzulösen!

a) $\frac{a}{x} = b$ b) $\frac{x}{a} - b = c$ c) $\frac{a - bx}{c} + x = \frac{cx - b}{c}$ d) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = d$

68. Löse die folgenden Gleichungen graphisch!

a) $4x + 1 = 9$ b) $4x - 3 - 3x - 4 = x - 7$

c) $15(x + 2) = 6(2x + 7)$ d) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$

69. Vermindert man 76 um eine gewisse Zahl, und multipliziert man die Differenz mit 3, so erhält man 210. Wie heißt die Zahl?

70. Die Summe zweier Zahlen ist 20. Multipliziert man die eine Zahl mit 3, und vermindert man die andere Zahl um 16, so erhält man gleiche Zahlen. Wie heißen beide Zahlen?

71. Helga sagt: „Ich bin fünf Jahre älter als mein Bruder Klaus. Vor vier Jahren war ich gerade doppelt so alt wie er.“ Wie alt ist Helga?

72. Dieter ist heute 16 Jahre alt, sein Vater 37 Jahre. In wieviel Jahren wird Dieters Vater gerade doppelt so alt sein wie Dieter?

73. Ich habe mir zwei Zahlen aufgeschrieben, von denen die eine um 2 kleiner ist als die andere. Wenn ich die größere mit 4, die kleinere mit 3 multipliziere und die beiden Produkte addiere, ergibt sich 57. Wie heißen die beiden Zahlen?

74. Ich habe mir eine Zahl notiert. Wenn ich 12 addiere, die entstandene Summe mit 3 multipliziere und vom Produkt 19 subtrahiere, so erhalte ich das um 3 verminderte Vierfache der notierten Zahl. Welche Zahl habe ich mir aufgeschrieben?

75. In den folgenden Aufgaben ist die Gleichung gegeben. Stelle dazu einen Text in Form eines Zahlenrätsels zusammen! Löse die Gleichungen!

a) $3(5 + 3x) = 10x$ b) $4(x - 3) = 9(x - 2)$ c) $12 + 2x = 8(x - 8)$

76. Ein Rechteck ist 2 cm länger als breit. Vergrößert man jede Seite um 4 cm, so wächst sein Inhalt um 72 cm². Berechne die Seiten!

77. In welchem Flächenmaßstab wird ein Kleinbildnegativ (24 mm × 36 mm) vergrößert, wenn eine Vergrößerung im Format 6 cm × 9 cm hergestellt wird?

78. Bei jeder Schleifscheibe gibt der Herstellerbetrieb neben dem Durchmesser d in Millimeter die höchstzulässige Umfangsgeschwindigkeit v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ an. Beispiel:

$d = 30$ mm, $v = 32\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Berechne daraus die maximale Drehzahl n in Umdrehungen je Minute!

79. Dient eine Scheibe zum Schneiden, so bezeichnet man die Umlaufgeschwindigkeit v auch als Schnittgeschwindigkeit.

a) Es sei $d = 24$ mm, $v = 250\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Berechne n!

b) Es sei $v = 380\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $n = 1\,800\,\frac{\text{Umdr.}}{\text{min}}$
Berechne d!

80. Ein Stahlseil habe einen Querschnitt von 25 mm². Auf Zug darf dieses Stahlseil höchstens mit $70\,\frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}$ belastet werden. Wieviel Prozent der Maximalbelastung beträgt ein Zug von 1 400 kp?

81. Als Übersetzung i zweier miteinander kämmender Zahnräder bezeichnet man das Verhältnis der Drehzahl n_1 des treibenden Rades zur Drehzahl n_2 des getriebenen Rades $i = \frac{n_1}{n_2}$. Die Motordrehzahl eines Kraftwagens beträgt 3 200 Umdrehungen je Minute. Die Gelenkwelle hat in den einzelnen Gängen folgende Drehzahlen: 1. Gang 930 Umdrehungen je Minute, 2. Gang 1 890 Umdrehungen je Minute, 3. Gang 3 200 Umdrehungen je Minute, R-Gang 830 Umdrehungen je Minute. Wie groß sind die Übersetzungen $x:1$ in den einzelnen Gängen?

82. Bei einer Lösung gibt die Prozentzahl meist die Masse des gelösten Stoffes in 100 Masseteilen der Lösung an. Es soll eine 15prozentige Natronlauge hergestellt werden. Wieviel Gramm Ätznatron (NaOH) sind in 250 g Wasser zu lösen?

83. An einem im Gleichgewicht befindlichen zweiseitigen Hebel mit Hebelarmen von 21 cm und 9 cm Länge ist eine Last um 60 p größer als die andere. Berechne beide Lasten!

84. Wieviel Wasser muß im Gradierwerk aus je 100 kg einer 7prozentigen Sole verdunsten, damit die Sole 25prozentig wird?

85. Bei einem Scheibenschießen mit dem Gewehr erreichte ein Schütze bei 3 Schuß 26 Ringe. Beim 1. Schuß erzielte er einen Ring mehr als beim 2. Schuß und beim 3. Schuß zwei Ringe weniger als beim 2. Schuß.
Wieviel Ringe erzielte er bei jedem Schuß?

86. Von einem U-Boot aus wird ein entgegenkommendes Schiff in 8 sm Entfernung (1 sm = 1852 km) geortet. Nach 15 min hat sich der Abstand auf 1,5 sm verringert.
Mit welcher Geschwindigkeit fährt das Schiff, wenn das U-Boot eine Geschwindigkeit von $24\,\frac{\text{sm}}{\text{h}}$ hat?

87. Invarstahl (Stahl mit 36 % Nickel) eignet sich wegen seiner geringen Veränderung bei Temperaturschwankungen für Präzisionsinstrumente und -maßstäbe. 3 Präzisionsmaßstäbe von je 2,57 kg sind herzustellen. Wieviel Kilogramm Stahl und Nickel sind erforderlich, wenn mit einem Abbrand und Gießverlust von 0,7 % zu rechnen ist?

88. Die Schwingungszahlen der Töne jeder Dur-Tonleiter stehen im Verhältnis 24:27:30:32:36:40:44:48. Der Kammerton a_1 hat die Schwingungszahl 440 Hz. Bestimme die Schwingungszahlen für die C-Dur-Tonleiter!

89. Ein Autobus hatte vor einem später abgefahrenen Motorrad einen Vorsprung von 3 km. In welcher Entfernung vom Abfahrtsort holte das Motorrad den Bus ein, wenn sich ihre Geschwindigkeiten wie 8:5 verhielten?

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Gib die Funktionsgleichungen für folgende eindeutige Zuordnungen an, und stelle jedesmal eine Wertetabelle auf!
a) Seite und Umfang eines gleichseitigen Dreiecks,
b) Seite und Umfang eines regelmäßigen n-Ecks,
c) Kante und Oberfläche eines Würfels,
d) Seite und Umfang eines Quadrats,
e) Seite und Fläche eines Quadrats,
f) Kante und Volumen eines Würfels.

2. Welche Vorzeichen haben die beiden Koordinaten eines Punktes, wenn der Punkt im **a)** ersten Quadranten, **b)** zweiten Quadranten, **c)** dritten Quadranten, **d)** vierten Quadranten liegt?

3. Was kann man über die Koordinaten von Punkten aussagen, die auf den Achsen liegen?

4. Zeichne Punkte, die **a)** in bezug auf die Abszissenachse, **b)** in bezug auf die Ordinatenachse paarweise symmetrisch zueinander liegen! Gib jeweils die Koordinaten an!

5. Zeichne die Bilder der Funktionen mit folgenden Gleichungen!
a) $y = -\frac{1}{3}x$ **c)** $y = 0{,}25x + 2$ **e)** $y = 3$ **g)** $y = |-2x|$
b) $y = 1{,}5x - 1$ **d)** $y = \frac{3}{7}x$ **f)** $y = -|2x|$ **h)** $y = |x| + 1$

6. Von einer linearen Funktion $y = mx + n$ seien m und n bekannt. Gib zwei geordnete Zahlenpaare an, die die jeweilige Gleichung erfüllen, und zeichne das Bild!

a) $m = -1{,}4;\ n = 0$ **b)** $m = 0;\ n = 2{,}5$ **c)** $m = 0{,}3;\ n = 0{,}8$

7. Ermittle die jeweils nicht angegebene Zahl eines jeden geordneten Zahlenpaares!

a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$ $[x; 1],\ [0; y]$

b) $y = -2x + 4$ $[x; 0],\ [1; y]$

c) $y = 0{,}2x - 1{,}3$ $[4; y],\ [x; 1{,}5]$

8. Ermittle rechnerisch und zeichnerisch die Nullstellen der folgenden Funktionen!

a) $y = 2x + 1$ **b)** $y = 5x$ **c)** $y - 3x = 0$ **d)** $2y + 3x = 2$

Löse die folgenden Gleichungen! Für x gelte in allen Aufgaben $x \in R$!

9. a) $9x + 22 - 2x = 100 - 11x - 42$

b) $0 = 14 + x - 8x - 3x - 6 + x$

c) $7{,}3x - 2{,}6 - 8{,}1x + 4{,}1 + 1{,}7x = 2{,}5 + 3{,}8x - 9{,}7$

d) $6 + 12x - 9 - 8x + 10 + x = 0$

e) $9x = 7x + 15 + 5x + 8 - 10x$

10. a) $7x - (8 + 6x - x) = (5x - 4) - (x - 3x + 9)$

b) $(x + 1)(4x - 25) = (2x - 5)(2x - 8)$

c) $(3x + 1)(4x - 5) - (6x + 1)(x + 1) = (3x - 3)(2x - 1)$

11. a) $\frac{x - 18}{25} = \frac{4}{5}x$ **b)** $\frac{2x - 21}{30} = \frac{5}{36}x$ **c)** $\frac{2{,}4x + 4{,}8}{3} = \frac{4}{3}x$

12. a) $\frac{18 + (4x - 8)\,2}{5} = x + 7\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{5(3x + 4)}{12} = 2x + \frac{1}{6}$

13. Die folgenden Gleichungen sind nacheinander nach allen vorkommenden Variablen aufzulösen!

a) $a(x - 1) - b = x - a$

b) $ab - (x - c)d = c(d + x)$

c) $(a - b)x = 2a - (a + b)x$

d) $(a + b)x - (a - b)x - bx = a + c$

14. a) $(x - 0{,}2) : 5{,}1 = (x + 0{,}6) : 5{,}7$

b) $\frac{8}{3} : = \left(x + \frac{7}{2}\right) : \left(x - \frac{25}{4}\right)$

c) $(3x + 8) : (x + 4) = (3x - 7) : (x - 2)$

d) $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)$

15. Die folgenden Gleichungen sind alle nach x aufzulösen!

a) $\frac{5}{2} + x = k$ **c)** $0{,}15a = 2x - 1{,}85a$ **e)** $\frac{1}{2}a + 7x = b$

b) $x + 4a = 11a + 2$ **d)** $3a + 11b = 5b + 3x$ **f)** $2x - a = b + x$

16. Die folgenden Gleichungen sind nacheinander nach allen vorkommenden Variablen aufzulösen!

a) $a - \frac{b}{x} = c$ **b)** $\frac{a}{x} - 1 = \frac{b}{x} - 9$ **c)** $\frac{x + a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x - b}{a} + \frac{a}{b}$

17. Steffen sagt zu Klaus: „Denke dir eine Zahl, addiere 4, multipliziere das Ergebnis mit 5, subtrahiere 12, zähle 27 hinzu, ziehe das Fünffache der gedachten Zahl ab!" Ohne daß Klaus ein Schlußergebnis sagte, wußte es Steffen.

18. 120 g Kochsalzlösung enthalten 20 g Kochsalz. Wievielprozentig ist die Lösung?

19. Eine Kreiselpumpe fördert in der Minute 5,4 m³ Wasser. Sie drückt es in eine Rohrleitung von 9 dm² Querschnitt. Welche Geschwindigkeit hat das Wasser in der Rohrleitung?

20. Eine Fla-Rakete erreicht eine Geschwindigkeit von etwa 2040 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und ein Abfangjäger von etwa 680 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

a) Rechne beide Geschwindigkeiten in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um!

b) In wieviel Sekunden wird ein 9 km entferntes Ziel vom Abfangjäger erreicht, wenn man vom Zeitverlust bei der Anfangsbeschleunigung absieht und eine gerade Flugrichtung annimmt?

c) Welche Zeit benötigt die Fla-Rakete für diese Strecke?

21. Die folgenden Gleichungen sind jeweils nach der in Klammern angegebenen Variablen aufzulösen.

a) $A = a \cdot b \quad (a)$	**d)** $A = \frac{c \cdot h_c}{2} \quad (h_c)$	**g)** $m = \varrho \cdot V \quad (\varrho)$
b) $P : G = p : 100 \quad (G)$	**e)** $P : G = p : 100 \quad (p)$	**h)** $\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad (\beta)$
c) $v = \frac{s}{t} \quad (s)$	**f)** $v = \frac{s}{t} \quad (t)$	

22. Eine Anekdote erzählt von einem Postmeister, den jemand fragte, wieviel Pferde der Herr X zum Wechseln auf der Poststation bestellt hatte. Er sagte:
„Mit der Hälfte der bestellten Pferde und einem halben fährt Herr X selbst. Mit der Hälfte des Restes und einem halben fährt sein Vertreter, mit der Hälfte des bleibenden Restes und einem letzten halben fahren die Diener. Das übrigbleibende letzte Pferd benutzt der Vorreiter.“ Wieviel Pferde waren bestellt?

C

d) Flächen- und Rauminhaltsberechnung

Wir unterscheiden

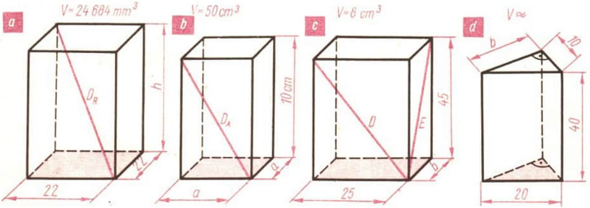
den Körper und seinen Rauminhalt (Volumen),
die Fläche und ihren Flächeninhalt,
die Kanten des Körpers und ihre Längen,
die Seiten der Flächen und ihre Längen,
die Höhe eines Dreiecks, Parallelogramms, Trapezes oder Körpers und die Länge der Höhe.

Die Variablen dieses Kapitels bedeuten:

V Volumen eines Körpers,
A_G Grundfläche und auch Grundflächeninhalt eines Körpers,
A_O Oberfläche und auch Oberflächeninhalt eines Körpers,
A_M Mantel und auch Mantelinhalt eines Körpers,
h Höhe und auch Länge der Höhe eines Körpers,
$a, b, c, \ldots$ Kanten, d Durchmesser, r Radius, u Umfang und auch die jeweilige Länge dieser Strecken.

1. Stelle die Quader mit den Kantenlängen a, b, c in Zweitafelprojektion dar! Berechne jeweils das Volumen!
   a) $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $c = 4$ cm b) $a = 0{,}06$ m; $b = 0{,}06$ m; $c = 12$ cm

2. Berechne im Bild d 1 jeweils die mit Variablen gekennzeichneten Stücke der geraden Prismen!



d 1

3. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein gleichseitiges Dreieck. Es sei s die Länge der Grundkanten und h die Länge der Körperhöhe. Berechne jeweils das Volumen!
   a) $s = 4$ cm; $h = 5$ cm b) $s = \sqrt{3}$ cm; $h = 8$ cm

4. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck! Berechne die Längen der Grundkanten! Stelle das Prisma in Zweitafelprojektion dar!
   a) $V = 48\ \text{cm}^3$; $h = 12$ cm b) $V = 200\ \text{cm}^3$; $h = 4$ cm c) $V = 138\ \text{cm}^3$; $h = 3{,}6$ cm

5. Berechne die fehlenden Größenangaben für folgende gerade Kreiszylinder, und stelle sie in Zweitafelprojektion dar!
   a) $d = 3$ cm, $h = 8$ cm, gesucht: V
   b) $d = 2$ cm, $V = 10\ \text{cm}^3$, gesucht: h
   c) $V = 12{,}5\ \text{cm}^3$, $h = 2{,}5$ cm, gesucht: d

6. Ein Mauerziegel (Normalformat) ist 240 mm lang, 115 mm breit und 71 mm hoch. Wie groß ist seine Masse, wenn die Dichte 1,8 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ beträgt?

7. Ein zylindrisches Werkstück habe einen Durchmesser von 50 mm und eine Höhe von 75 mm. Berechne die Dichte des Materials, wenn der Körper eine Masse von 1148 g hat!

d

8. Ein zylindrisches Gefäß hat einen Innendurchmesser von 140 mm. Wie hoch ist es gefüllt, wenn genau 1 l Wasser eingegossen wird?

9. In ein zylindrisches Gefäß mit dem Innendurchmesser 65 mm werden 240 cm^3 Wasser eingefüllt. Es soll Schwefelsäure bis zu einer Eichmarke in 102 mm Höhe über dem Boden zugegossen werden. Wieviel Kubikzentimeter Schwefelsäure werden hinzugegossen?

10. Welche Masse haben 2000 mm lange Rohre mit den Durchmessern $d_1 = 50$ mm und $d_2 = 30$ mm, wenn folgendes Material vorliegt?
a) Stahl: $\varrho = 7{,}85\ \frac{g}{cm^3}$ b) Bronze: $\varrho = 8{,}8\ \frac{g}{cm^3}$ c) Aluminium: $\varrho = 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}$

11. Wie lang sind die Grundkanten eines schiefen quadratischen Prismas mit dem Volumen V und der Höhe h?
a) $V = 112\ cm^3,\ h = 7{,}0$ cm b) $V = 100\ cm^3,\ h = 75$ mm

12. Der Mittelpunkt der Deckfläche eines schiefen quadratischen Prismas liege senkrecht über einem Eckpunkt der Grundfläche. Die Grundkante sei a, die Höhe h und das Volumen V. Berechne jeweils die fehlende Größe, und stelle das Prisma in Zweitafelprojektion dar!
a) $a = 3$ cm, $h = 5$ cm
b) $a = 3{,}8$ cm, $V = 50\ cm^3$
c) $a = 4{,}5$ cm, $h = 2$ cm
d) $V = 75\ cm^3$, $h = 3$ cm
e) $a = 8$ cm, $V = 320\ cm^3$
f) $V = 200\ cm^3$, $h = 4$ cm

13. Die Grundfläche eines schiefen Prismas sei ein gleichschenkliges Dreieck. Die Länge der Basis des gleichschenkligen Dreiecks sei c und die der zugehörigen Höhe h_c. Der Fußpunkt der Höhe h_c' des Deckdreiecks liege senkrecht über dem Punkt C. Gegeben ist auch die Länge der Körperhöhe h. Berechne das Volumen und die Länge der Grund- und Seitenkanten! Stelle das Prisma in Zweitafelprojektion dar!
a) $c = 6$ cm; $h_c = 5$ cm; $h = 12$ cm b) $c = 8$ cm; $h_c = 3$ cm; $h = 5$ cm

14. Berechne die Länge der Körperhöhe eines schiefen Kreiszylinders, von dem folgende Stücke gegeben sind! a) $V = 190\ cm^3$; $r = 3{,}0$ cm b) $V = 160\ cm^3$; $d = 65$ mm

15. Das Bild d 2 stellt eine Bohrung durch eine Metallplatte in Zweitafelprojektion dar. Entnimm die Maße dem Bild und berechne:
a) Wieviel Kubikzentimeter Öl kann die Bohrung aufnehmen?
b) Wie lang ist die Bohrung?

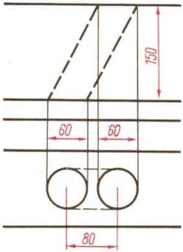
d

16. Von einer geraden quadratischen Pyramide sind $a = 35$ mm und $h = 55$ mm gegeben. Berechne s und h_a!

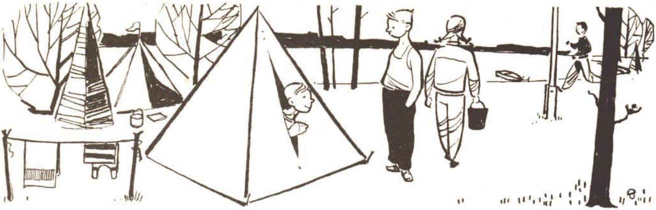
17. Von einer geraden quadratischen Pyramide sind $s = 70$ mm und $h_a = 62$ mm gegeben. Berechne a und h!

18. Von der Pyramide im Bild D 9a auf Seite 83 sind die Längen $a = 45$ mm, $b = 15$ mm und $h = 80$ mm gegeben. Berechne h_a, h_b und s!

19. Von der Pyramide im Bild D 9b auf Seite 83 sind die Längen $a = 25$ mm und $s = 95$ mm gegeben. Berechne h und h_a!



d 2



d 3

20. Ein Zelt, das am Boden 11 m Umfang hat, hat die Gestalt einer quadratischen Pyramide. Seine Höhe beträgt 1,60 m. Berechne den Luftraum, den das Zelt umschließt!

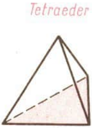
21. Berechne die Länge der Körperhöhe einer quadratischen Pyramide mit der Grundkantenlänge $a = 6$ cm und dem Rauminhalt $V = 259{,}2\ \text{cm}^3$!

22. Von einer geraden quadratischen Pyramide sind gegeben:
Die Länge der Grundkanten $a = 6$ cm und die Länge der Körperhöhe $h = 24$ cm.
Berechne V und A_O!

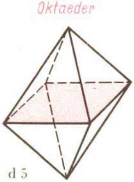
23. Gegeben ist eine regelmäßige sechsseitige Pyramide durch die Länge der Grundkanten $a = 3$ cm und die Länge der Seitenflächenhöhen $h_a = 6$ cm.
Berechne V und A_O!

24. Gegeben ist eine gerade Pyramide mit einer rechteckigen Grundfläche ($a = 12{,}00$ m; $b = 8{,}00$ m; $h = 16{,}00$ m).
Berechne V und A_O!
Stelle die Pyramide in Zweitafelprojektion dar!

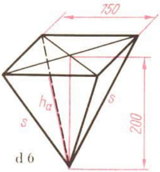
25. Gegeben ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide ($a = 5$ cm; $h = 3$ cm). Berechne V und A_O! Stelle die Pyramide in Zweitafelprojektion dar!



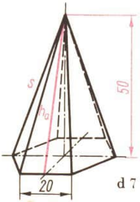
d 4



d 5



d 6



d 7

26. Baue aus Stäbchen und Knetmassekugeln eine dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche und Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind (Bild d 4)!

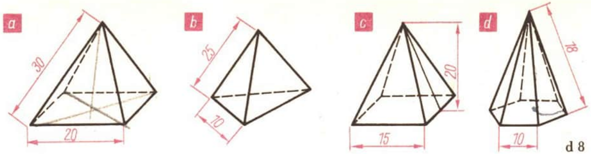
27. Baue aus Stäbchen und Knetmassekugeln eine Doppelpyramide. Die Grundfläche soll ein Quadrat und die Seitenflächen sollen gleichschenklige Dreiecke sein (Bild d 5)!

28. Von einem Tetraeder ist die Länge der Kanten $a = 8$ cm. Berechne h, A_O und V!

29. Von einem Oktaeder ist die Länge der Kanten $a = 6$ cm. Berechne h, A_O und V!

30. Berechne für die gerade quadratische Pyramide im Bild d 6 s, h_a und V!

31. Berechne für die gerade regelmäßige sechsseitige Pyramide im Bild d 7 s, h_a und V!



d 8

32. Die Pyramiden in den Bildern d 8 a bis d sind regelmäßig.
a) Berechne jeweils A_O! b) Berechne jeweils V!
c) Stelle die Pyramiden in Zweitafelprojektion dar!

33. Ein Quarzkristall besteht aus einem sechsseitigen Prisma (Seitenkante 6,2 cm, Grundkante 1,7 cm) und zwei auf dessen Grundflächen stehenden sechsseitigen Pyramiden (Seitenkante 2,5 cm). Er wiegt 145 g. Wie groß ist die Dichte von Quarz?

34. Manche Salze kristallisieren in der Form von Oktaedern, zum Beispiel Alaun. Welche Masse hat ein Alaunkristall, wenn seine Seitenkante 4,6 cm beträgt $\left(\varrho = 1{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$?

35. Ein Laubendach in Form einer quadratischen Pyramide mit 1,80 m langer Grundkante und 1,35 m Seitenhöhe wird mit Dachpappe gedeckt. Wieviel Quadratmeter werden benötigt?

36. Ein quadratischer Turm von 8,20 m Grundkantenlänge hat als Abschluß eine 11,25 m hohe Pyramide. Berechne die Größe des Dachraumes!

37. Ein Turmdach soll mit Dachziegeln neu gedeckt werden. Die Turmspitze hat die Form einer quadratischen Pyramide, sie ist 14,20 m hoch, die Grundkante mißt 8,60 m. Wie groß sind **a)** eine Seitenkante, **b)** die Höhe einer Dachfläche, **c)** die gesamte Dachfläche? **d)** Wie hoch werden die Kosten, wenn der Preis je 1 m² Dachfläche 7,85 M beträgt?

38. Ein Turm wird durch eine regelmäßige sechsseitige Pyramide abgeschlossen. Eine Grundkante mißt 2,50 m, die Höhe der Seitendreiecke beträgt 3,75 m. Der Turm wird mit Zinkblech neu abgedeckt. Wieviel Quadratmeter Zinkblech sind erforderlich, wenn für das Zusammenfügen und für Abfall 5% gerechnet werden müssen?

39. Bei einem Würfel mit der Kantenlänge a werden alle vier unteren Eckpunkte mit dem Mittelpunkt der Deckfläche verbunden.
In welchem Verhältnis stehen das Volumen (die Oberfläche) der so entstehenden Pyramide und das (die) des Würfels?
Fertige ein Schrägbild an!

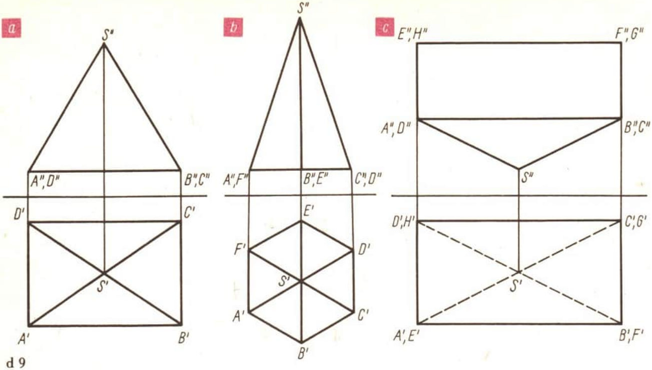
40. Berechne für die in den Bildern d 9 a bis c in Zweitafelprojektion gegebenen Bilder jeweils das Volumen!

41. Berechne Oberflächeninhalt und Volumen eines geraden Kreiskegels!
a) $r = 4$ cm, $h = 6$ cm
b) $d = 1{,}6$ dm, $h = 2{,}0$ dm
Stelle die Kegel in Zweitafelprojektion dar!

42. Berechne Mantelinhalt und Volumen eines geraden Kreiskegels!
a) $d = 10$ cm, $h = 40$ cm
b) $r = 40$ mm, $h = 9{,}0$ cm
Stelle die Kegel in Zweitafelprojektion dar!

43. Berechne Mantelinhalt, Oberflächeninhalt und Volumen eines geraden Kegels, der 2,50 m hoch ist und einen Grundkreisradius von 1,80 m hat!

44. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b wird um die Kathete a gedreht. Wie groß sind Oberflächeninhalt und Volumen des entstehenden Kegels?
a) $a = 8$ cm; $b = 6$ cm b) $a = 24$ cm; $b = 7$ cm c) $a = 15$ cm; $b = 8$ cm



d 9

45. Berechne das Volumen der folgenden Trichter (ohne Ansatzrohr)!
a) $d = 22{,}0$ cm; $h = 26{,}5$ cm b) $d = 24{,}0$ cm; $h = 27{,}5$ cm
c) $d = 27$ cm; $h = 29$ cm

46. Aus Blechscheiben mit dem Durchmesser von 5 cm sollen Trichter hergestellt werden, und zwar sollen Kreisausschnitte mit den Zentriwinkeln **a)** 90°, **b)** 180° und **c)** 270° zu Trichtern gebogen werden. Wie hoch werden die verschiedenen Trichter, und wie groß wird ihr Volumen?

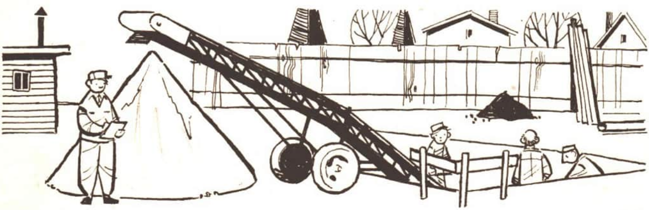
47. Bei der Verwendung eines Förderbandes bilden sich beim Abkippen Abraumkegel. Berechne die Volumina folgender Kegel!
a) $d = 9{,}0$ m; $h = 1{,}5$ m c) $d = 12$ m; $h = 4$ m
b) $d = 10{,}0$ m; $h = 2{,}5$ m d) $d = 16$ m; $h = 8$ m

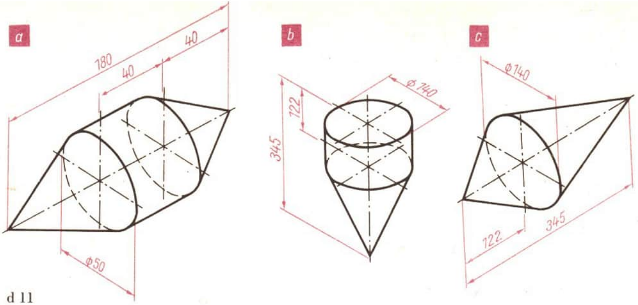
48. Ein kegelförmiger Haufen Sand soll durch Lastwagen abgefahren werden. Der Umfang dieses Kegels wurde durch Abschreiten auf 22 m geschätzt, die Höhe auf etwa 2 m. Wieviel Fuhren ergeben sich bei der Verwendung von 3-Tonnern (1 m³ Sand wiegt 1800 kg)?

49. Ein kegelförmig aufgeschütteter Sandhaufen sei 2,10 m hoch und habe am Boden einen Umfang von 24,80 m. Wieviel Kubikmeter Sand enthält er, und wie groß ist seine Masse, wenn 1 m³ trockener Sand 1800 kg wiegt?

50. Der Umfang des Grundkreises eines Kreiskegels betrage 64 cm. Seine Mantellinie sei 70 cm lang. Ermittle A_O!

d 10





d 11

51. Berechne das Volumen der Körper, die
a) im Bild d 11 a, b) im Bild d 11 b, c) im Bild d 11 c abgebildet wurden!

52. Eine Kugel habe den Durchmesser d (bzw. den Radius r). Berechne das Volumen!
a) $d = 15{,}4$ cm b) $r = 15{,}4$ cm c) $r = 32{,}5$ cm

53. Ein gefüllter Ballon habe einen Radius $r = 2{,}1$ m. Wieviel Kubikmeter Raum schließt er ein?

54. a) Wieviel Kugeln mit dem Durchmesser $d = 3$ cm können aus einem Bleirohr von 1,80 m Länge, 3 cm Wanddicke und 9 cm innerem Durchmesser hergestellt werden, wenn beim Schmelzen 4% verlorengehen?
b) Welche Masse hat jede Kugel, wenn die Dichte des Bleis $11{,}35\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ist?

55. Wieviel Kugeln von 10 mm Durchmesser kann man aus 5 kg Blei gießen?

56. Aus einem Holzwürfel mit der Kante $a = 28$ cm wird eine Kugel so gedreht, daß der Abfall möglichst gering wird. Wieviel Kubikzentimeter Holz beträgt der Abfall?

57. Aus einem Marmorwürfel von 60 cm Kantenlänge soll eine möglichst große Kugel ausgehauen werden. Wieviel Kubikzentimeter Marmor beträgt der Abfall? Wie schwer ist die fertige Kugel (Dichte: $\varrho = 2{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$!)

58. Berechne Oberflächeninhalt und Volumen der Kugeln mit folgenden Durchmessern!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
d	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m

Stelle die Lösungen übersichtlich zusammen, und sprich das Ergebnis in einem Satz aus!

59. Eine Kugel habe den Oberflächeninhalt A_O. Berechne das Volumen, und benutze für π den Näherungswert $\frac{22}{7}$!
a) $A_O = 616\ \text{cm}^2$ b) $A_O = 1000\ \text{cm}^2$ c) $A_O = 55{,}44\ \text{cm}^2$

60. Wie groß sind Durchmesser, Oberflächeninhalt und Volumen einer Kugel mit folgendem Umfang u?
a) $u = 157$ cm b) $u = 2{,}05$ m c) $u = 100$ mm

d

61. Ein Schlagball hat eine Masse von 90 g und einen Umfang von 22 cm. Berechne die Länge des Durchmessers und die Dichte des Balles!

62. Kannst du eine Korkkugel tragen, die einen Durchmesser von der Länge 1,00 m hat $\left(\varrho = 0{,}24\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$?

63. Wieviel wiegt eine eiserne Hohlkugel, die einen äußeren Durchmesser mit der Länge 15 cm und eine Wanddicke von 1 cm hat? (Entwirf eine Skizze!)

64. Eine zum Kugelstoßen verwendete Kugel wiegt 7,25 kg und hat einen Umfang von 391 mm, wenn sie aus Stahl besteht. Enthält sie eine Bleifüllung, so beträgt der Umfang 346 mm. Der Stahlmantel dieser Kugel ist rund 7 mm dick. Die Dichte des Bleis beträgt $11{,}35\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

a) Berechne den Durchmesser der Stahlkugel und die Dichte des Stahls!
b) Berechne den Durchmesser der Kugel mit Bleifüllung!
c) Berechne die Masse des Stahlmantels und der Bleifüllung dieser Kugel!

65. Ein eiserner Wasserbehälter besteht aus einem Zylinder, der unten durch eine Halbkugel abgeschlossen ist. Der zylindrische Teil des Behälters ist 1,80 m hoch, sein Grundkreis hat 2,00 m Durchmesser (lichte Weite). **a)** Wieviel Hektoliter Wasser faßt dieser Behälter? **b)** Wie groß die Benetzungsfläche des Behälters?

66. **a)** Wieviel Milliliter (ml) Wasser faßt eine halbkugelförmige Schöpfkelle von 9 cm Durchmesser?
b) Wieviel Liter Wasser faßt ein halbkugelförmiger Waschkessel von 90 cm Durchmesser?
c) Vergleiche die gefundenen Werte!

67. Die Lunge des Menschen besteht aus rund 1,6 Milliarden Bläschen. Jedes hat einen Durchmesser von rund 0,2 mm. **a)** Berechne die Oberfläche **1.** eines Bläschens, **2.** aller Bläschen! **b)** Vergleiche die Gesamtoberfläche mit einer dir bekannten Fläche!

68. Der Radius der Erde wird mit 6370 km angegeben. Berechne unter der Voraussetzung, daß die Erde eine Kugel ist, **a)** den Umfang eines Längenkreises der Erdkugel, **b)** ihren Oberflächeninhalt, **c)** ihren Rauminhalt!

69. Vergleiche Oberflächeninhalt und Volumen des Mondes mit den bei der Erde berechneten Größen, wenn sein Durchmesser mit 3476 km ermittelt wurde!

70. Der Radius der Sonne beträgt 695400 km. **a)** Berechne ihr Volumen! **b)** Wieviel Erdkugeln haben zusammen das gleiche Volumen wie die Sonne?

71. Ein großer Schulglobus hat einen Durchmesser von 84 cm. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Oberflächeninhalte, **b)** die Rauminhalte von Globus und Erdkugel zueinander?

72. Berechne die folgenden Kubikzahlen **1.** mit Hilfe des Rechenstabs, **2.** mit Hilfe des Tafelwerks!
Vergleiche die Ergebnisse!

a) 7^3	**d)** $5{,}7^3$	**g)** $12{,}1^3$	**k)** $0{,}8^3$	**n)** $0{,}15^3$
b) $2{,}8^3$	**e)** $3{,}5^3$	**h)** $8{,}94^3$	**l)** 13^3	**o)** 444^3
c) $4{,}6^3$	**f)** $17{,}3^3$	**i)** 124^3	**m)** $58{,}2^3$	**p)** $0{,}02^3$

73. Ermittle näherungsweise die folgenden Kubikwurzeln **1.** mit Hilfe des Rechenstabs, **2.** mit Hilfe des Tafelwerks!
Vergleiche die Ergebnisse!

a) $\sqrt[3]{512}$	**d)** $\sqrt[3]{612}$	**g)** $\sqrt[3]{8{,}87}$	**k)** $\sqrt[3]{16}$	**n)** $\sqrt[3]{3}$
b) $\sqrt[3]{37{,}6}$	**e)** $\sqrt[3]{2{,}000}$	**h)** $\sqrt[3]{33{,}7}$	**l)** $\sqrt[3]{128}$	**o)** $\sqrt[3]{30}$
c) $\sqrt[3]{10{,}5}$	**f)** $\sqrt[3]{5}$	**i)** $\sqrt[3]{60{,}7}$	**m)** $\sqrt[3]{12{,}8}$	**p)** $\sqrt[3]{300}$

d

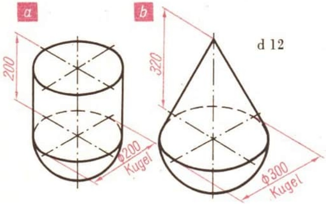
74. Das Volumen einer Kugel betrage 322 cm³. Berechne den Durchmesser der Kugel mit dem Rechenstab!

75. Das Volumen eines Würfels betrage 755 cm³. Berechne die Kantenlänge des Würfels mit Hilfe des Tafelwerks!

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

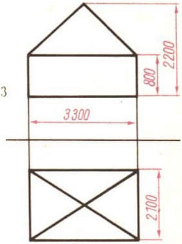
1. Unweit von Giseh bei Kairo ließ der altägyptische König Cheops um das Jahr 2650 v. u. Z. die größte aller ägyptischen Pyramiden errichten. Ihre quadratische Grundfläche hatte einst 230 m lange Grundseiten, heute sind sie nur noch 227 m lang. Die Höhe betrug nach der Fertigstellung rund 146 m. Jetzt mißt die Höhe der Pyramide nur noch 139 m.
- **a)** Wie groß ist die Fläche, die die Pyramide einstmals bedeckte?
- **b)** Berechne den Inhalt einer Seitenfläche sowie die des Mantels!
- **c)** Die Seitenflächen sind mit polierten Marmorplatten abgedeckt. Um einen Quadratmeter Marmor zu polieren, werden 6 Arbeitsstunden benötigt. Wieviel Mann würden gebraucht, um alle Platten in einem Jahr (bei 300 Arbeitstagen zu je 8 h) zu polieren?
- **d)** Berechne das Volumen der Pyramide!
- **e)** Wieviel Tonnen Gestein wurden in den etwa 45 Jahrhunderten ihres Bestehens durch Verwitterung abgetragen, wenn wir das Gestein mit einer Dichte von 2,6 $\frac{g}{cm^3}$ in Rechnung stellen?
- **f)** Um wieviel Prozent ist die Pyramide durch die Verwitterung kleiner geworden?

2. Berechne die Volumina der im Bild d 12 dargestellten Körper!



d 12

d 13



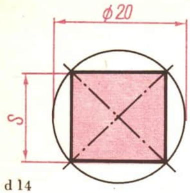
3. Ein Winterzelt für sechs Soldaten habe die Form eines Quaders mit aufgesetzter Pyramide (Maße siehe Bild d 13).
- **a)** Wieviel Kubikmeter Luftraum werden von diesem Zelt eingeschlossen?
- **b)** Wieviel Quadratmeter Zeltstoff werden für das Zelt gebraucht, wenn die Bodenfläche unberücksichtigt bleibt?

4. Ein Bleiwürfel von 5 cm Kantenlänge soll in eine regelmäßige vierseitige Pyramide von 8 cm Höhe umgegossen werden. Berechne die Grundkante a!

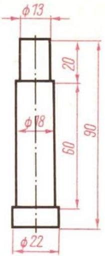
5. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Volumina, **b)** die Mantelinhalte, **c)** die Oberflächeninhalte eines Zylinders, einer Halbkugel und eines Kegels von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche?

6. Eine kegelförmige Abraumhalde hat bei einem Böschungswinkel von 45° eine Höhe von 23 m. Berechne die Abraummenge!

7. Ein zylinderförmiger Schwimmer von 88 cm Länge und 18 cm Durchmesser ist an beiden Enden halbkugelförmig abgeschlossen. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen des Schwimmers!



d 14



d 15

8. An ein Stück Rundstahl von 70 mm Durchmesser ist eine 150 mm lange Spitze angeschmiedet. Die Gesamtlänge des Werkstücks beträgt 170 mm. **a)** Berechne die Masse $\left(\varrho = 7{,}85\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ des Werkstücks! **b)** Da das Werkstück galvanisiert werden soll, ist der Oberflächeninhalt zu berechnen.

9. An eine Spindel mit dem Durchmesser $d = 20$ mm ist der größtmögliche Vierkant in einer Länge von 15 mm anzufräsen (Bild d 14). Wie groß ist der Abfall?

10. Für die Kugellager einer Serie feinmechanischer Geräte werden 2000 Stahlkugeln von 1,0 mm Durchmesser benötigt. Welche Masse $\left(\varrho = 7{,}85\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ haben die Stahlkugeln?

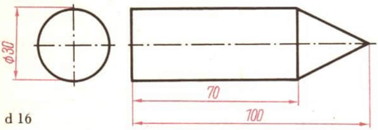
11. Der Durchmesser eines Freiballons beträgt 22 m. **a)** Wieviel Quadratmeter Stoff braucht man zu seiner Hülle? **b)** Wieviel Kubikmeter Raum schließt er in gefülltem Zustand ein?

12. Berechne Volumen und Werkstoffmenge eines Bolzens aus Stahl! Entnimm die Maße dem Bild d 15.

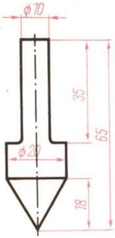
13. In welchem Verhältnis stehen Oberflächeninhalt und Volumen zweier Würfel, deren Kanten 5 cm bzw. 15 cm lang sind? Stelle das Ergebnis übersichtlich zusammen, und sprich es in einem Satz aus!

14. Ein Stück Rundstahl wird zum Teil kegelförmig abgedreht. Wieviel Prozent beträgt der Abfall? Entnimm die Maße dem Bild d 16!

d



d 16



d 17

15. In einem Getreidesilo ist Weizen annähernd kegelförmig aufgeschichtet. Der Durchmesser der Anhäufung beträgt etwa 5 m, seine Höhe etwa 2 m.
a) Wieviel Kubikmeter Weizen liegen ungefähr in der Anhäufung?
b) Wieviel Dezitonnen Weizen sind das (1 dt $\triangleq$ 0,14 m³).

16. Berechne die Masse des Spitzsenkers mit Zylinderschaft aus Schnellstahl $\left(\varrho = 8{,}1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$! Entnimm die Maße dem Bild d 17!

17. Aus Blech soll ein Trichter von 15 cm Durchmesser (ohne Ansatzrohr) angefertigt werden, der ein Volumen von 2 dm³ besitzt.
a) Wie lang ist die Mantellinie?
b) Wieviel Quadratzentimeter Blech sind erforderlich?

18. Ein Senkblei besteht aus einem Zylinder von der Höhe $h = 140$ mm und dem Durchmesser $d = 50$ mm und aus einem aufgesetzten Kegel, dessen Höhe $h_1 = 30$ mm beträgt. Berechne die Masse des Körpers $\left(\varrho = 11{,}34\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$!

19. Berechne die Massendifferenz zwischen 1000 Stahlkugeln, deren Durchmesser jeweils 1 mm beträgt, und einem Stahlwürfel mit der Kantenlänge von 10 mm $\left(\varrho = 7{,}85\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$!

20. Die Masse einer Kreisscheibe (Durchmesser $d = 200$ mm) soll durch Ausbohren von vier gleich großen kreisförmigen Löchern um $\frac{1}{4}$ verringert werden. Berechne den Durchmesser der Löcher!

21. Der Mantel eines 16 m hohen und 24 m weiten (äußere Weite) Gasbehälters wird mit Mennige grundiert und dann dreimal mit Ölfarbe gestrichen. 1 m² wird mit 3,80 M berechnet. Ermittle die Kosten für den Anstrich!

22. Ein Wasserleitungsrohr aus Grauguß ist 5,25 m lang und besitzt einen Umfang von 2,20 m. Es wiegt 1220 kg. Die Dichte von Grauguß beträgt 7,25 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Wie dick ist die Wand des Rohres?

23. Wieviel Kilogramm Kupfer sind zur Herstellung eines 8500 km langen Leitungsdrahtes erforderlich, wenn er einen Durchmesser von 1 mm (1,2 mm; 0,8 mm) besitzen soll und die Dichte des Kupfers 8,9 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ist?

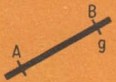
d

Register

R

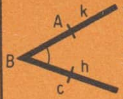
Quellennachweis der Bilder

Bild auf der Rückseite des Bezuges: Zentralbild/Hegewald
Kapitelbild A: Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Photo herausgegeben von W. W. Struve, Berlin 1930.
Kapitelbild B: Nowosti
Kapitelbild C: Volk und Wissen
Kapitelbild D: Reproduktion aus: „Die Wunder der Welt“ von Ernst v. Hesse-Wartegg, Band I, Union Deutsche Verlagsgesellschaft, Stuttgart - Berlin - Leipzig
Bild auf dem Innentitel: Friedrich Wache, Berlin

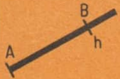


Gerade
AB oder BA
oder g

Strecke
$\overline{AB}$ oder $\overline{BA}$

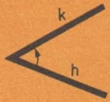


Winkel (bis 180°)
$\sphericalangle ABC$ oder $\sphericalangle CBA$
$\sphericalangle (h,k)$ oder $\sphericalangle (k,h)$



Strahl
Strahl AB oder
Strahl h

Orientierte
Strecke $\overrightarrow{AB}$
[A liegt vor B]

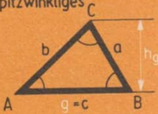


Orientierter
Winkel $\sphericalangle \overrightarrow{(h,k)}$
[h liegt bei positiver Orientierung vor k]

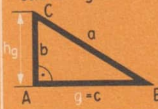
Dreieck

$A = \frac{1}{2} g h_g$
$u = a + b + c$

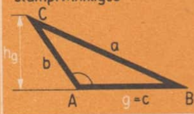
spitzwinkliges



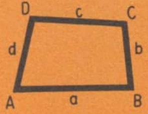
rechtwinkliges

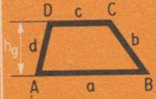


stumpfwinkliges

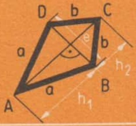


Viereck

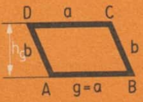




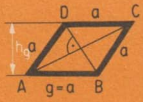
Trapez
Viereck, in dem zwei Seiten zueinander parallel sind
$A = \frac{a+c}{2} h$; $u = a+b+c+d$



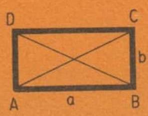
Drachenviereck
Viereck, in dem eine Diagonale Symmetrieachse ist
$A = \frac{1}{2} e(h_1 + h_2)$; $u = 2(a+b)$



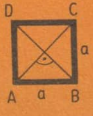
Parallelogramm
Trapez, in dem gegenüberliegende Seiten zueinander parallel sind
$A = g \cdot h_g$; $u = 2(a+b)$



Rhombus
Parallelogramm (Drachenviereck) mit gleich langen Seiten
$A = g \cdot h_g$; $u = 4a$

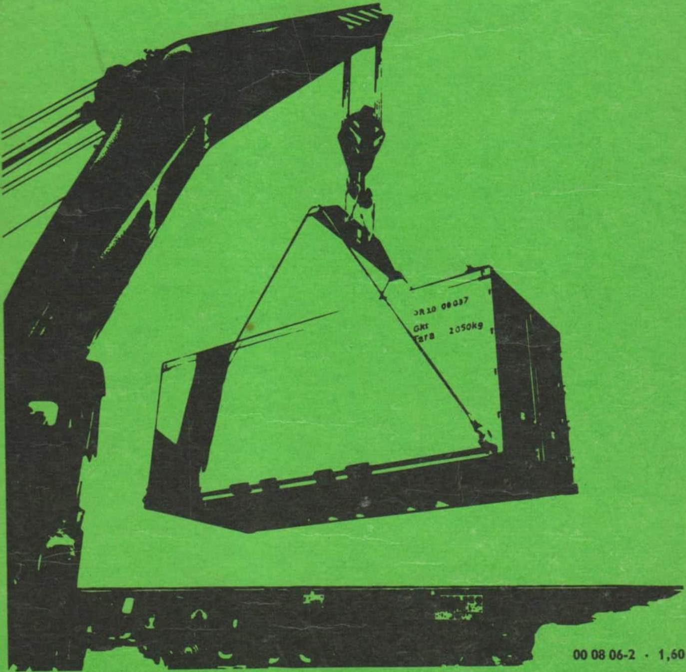


Rechteck
Parallelogramm, in dem die Innenwinkel rechte Winkel sind
$A = a \cdot b$; $u = 2(a+b)$



Quadrat
Rechteck mit gleich langen Seiten oder Rhombus, in dem die Innenwinkel rechte Winkel sind
$A = a^2$; $u = 4a$

Prisma $V = A_G h$ $A_O = A_M + 2A_G$ Körper, dessen Oberfläche aus zwei zueinander kongruenten n-Ecken und n-Parallelogrammen zusammengesetzt ist	5-seitiges schiefes Prisma 	5-seitiges gerades Prisma Seitenflächen sind Rechtecke 	Quader $V = abc$, $A_O = 2(ab + ac + bc)$ Vierseitiges gerades Prisma m. Rechteckgrundfl. 	Würfel $V = a^3$, $A_O = 6a^2$ Quader, dessen Oberfläche aus sechs Quadraten besteht 
Pyramide $V = \frac{1}{3} A_G h$ $A_O = A_G + A_M$	4-seitig schief  A_G Quadrat	4-seitig schief 	4-seitig regelmäßig  A_G Quadrat	4-seitig gerade  A_G Rechteck
Kreiszylinder $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$ $A_M = \pi d h$ $A_O = \pi \left(dh + \frac{d^2}{2}\right)$		Schiefer Kreiszylinder		Gerader Kreiszylinder
Kreiskegel $V = \frac{\pi}{12} d^2 h$ $A_M = \frac{\pi}{2} ds$ $A_O = \frac{\pi}{4} d(d + 2s)$		Schiefer Kreiskegel		Gerader Kreiskegel
Kugel $V = \frac{\pi}{6} d^3$ $A_O = \pi d^2$				



00 08 06-2 · 1,60