MATHEMATIK 10

OBERSCHULE

Mathematik

Lehrbuch für die Oberschule · Klasse 10

VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1967

Verfasser:

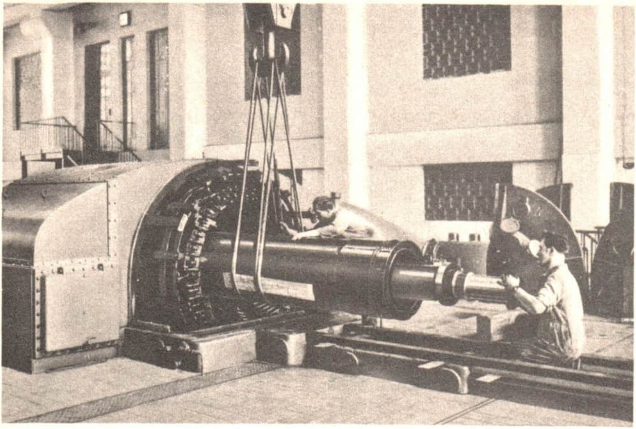
Prof. Dr. Werner Renneberg	Kapitel 1 (außer Abschnitt 1.12.)
Otto Nabielek	Kapitel 2
Dr. Hans Wußing	Abschnitt 1.12.
Hans Simon	Kapitel 3

Das Kapitel 3 wurde von Horst Sandmann bearbeitet.

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt

Ausgabe 1964

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Siegrid Bellack
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einbandgestaltung: Werner Fahr
Redaktionsschluß: 20. Juli 1965
ES 11 G · Bestell-Nr. 00 10 01-4 · Preis: 2,90 · Lizenz 203/1000/66 (UN)
Gesamtherstellung: III/9/1 Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft, Dresden (1206)



1. Winkelfunktionen und ebene Trigonometrie

Dreht man eine Spule in einem Magnetfeld, so wird eine elektrische Spannung erzeugt. Diese Erkenntnis bildet die Grundlage für den Bau von Generatoren, die zur Umwandlung von kinetischer Energie in elektrische Energie dienen. Auf der obigen Abbildung aus dem VEB Sachsenwerk Niedersedlitz kann man die beiden Hauptteile eines Generators erkennen, den Stator und den Rotor. Der Rotor, ein mächtiger Elektromagnet, wird mit Hilfe eines Krans in den Stator eingeführt. Zur Stromerzeugung wird der Rotor von einer Turbine gedreht. Dabei wird in den Spulen, die der Stator auf einem Kranz von Eisenkernen trägt, eine Wechselspannung induziert. Die Spannung ändert ständig ihre Größe und wechselt ihre Polarität. Die Größe der induzierten Spannung ist eine Funktion des Winkels, den der Rotor bei seiner Umdrehung beschreibt. Derartige **Winkelfunktionen** werden wir im folgenden Kapitel kennenlernen.

1.1. Die Winkelfunktionen

Die Sinusfunktion

1. a) *Fertigen Sie ein Gelenkviereck an, bei dem alle Seiten die gleiche Länge haben (Rhombus)! Bewegen Sie das Viereck so, daß ein Innenwinkel alle Winkel von 0° bis 180° durchläuft! Wie verändert sich dabei der Flächeninhalt des Rhombus?*

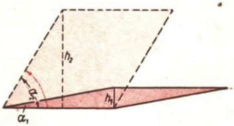


Abb. 1.1.

b) *Zeichnen Sie Rhomben mit den Seiten $a = 5$ cm und den Winkeln $\alpha_1 = 10°$; $\alpha_2 = 20°$; $\alpha_3 = 30°$; ...; $\alpha_{17} = 170°$ (Abb. 1.1.)! Messen Sie die zugehörigen Höhen h_1; h_2; h_3; ...; h_{17}, und bestimmen Sie die Flächeninhalte A_1; A_2; A_3; ...; A_{17}! Welcher Flächeninhalt ergibt sich für $\alpha_0 = 0°$ und $\alpha_{18} = 180°$?*

c) *Stellen Sie den Flächeninhalt A des Rhombus als Funktion des Winkels α graphisch dar $[A = f(\alpha)]$!*

d) *Berechnen Sie die Flächeninhalte der Rhomben mit den Seiten $a = 5$ cm und den Winkeln $\alpha = 30°$; 45°; 60°; 90°; 120°; 135°; 150°, indem Sie die jeweilige Höhe rechnerisch ermitteln! Vergleichen Sie mit den unter b) gefundenen Werten! Wie fügen sich die Werte für $\alpha = 45°$ und $\alpha = 135°$ ein?*

e) *Wie ändert sich die graphische Darstellung der Funktion $A = f(\alpha)$, wenn Sie $a = 3$ cm (7 cm) wählen?*

2. *Dreht sich eine Spule gleichförmig in einem homogenen Magnetfeld, so wird in ihr eine Wechselspannung U induziert. Diese ändert ständig ihre Größe und wechselt ihre Polarität in regelmäßigen Zeitabständen. Zeichnen Sie den Verlauf der Spannung U in Abhängigkeit vom Drehwinkel α während einer Umdrehung der Spule!*

Der Flächeninhalt A eines Rhombus hängt bei gegebener Seitenlänge vom Winkel α ab. Ebenso hängt die in einer Spule induzierte Spannung U vom Winkel α ab. Die Abhängigkeit ist in beiden Fällen von gleicher Art; sie läßt sich aber durch keine der bisher behandelten Funktionen ausdrücken. Im folgenden werden wir diese Funktion näher bestimmen.

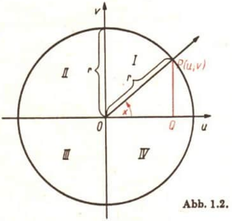


Abb. 1.2.

Es sei ein rechtwinkliges uv-Koordinatensystem mit gleicher Teilung auf den Achsen gegeben (Abb. 1.2.). Ein Winkel x entsteht dadurch, daß man einen Strahl um seinen Anfangspunkt O (0; 0) von der positiven u-Achse als Ausgangslage aus dreht. Als **positiven Drehsinn** legt man fest, daß die positive u-Achse durch Drehung um 90° in die positive v-Achse übergeführt wird.

Um O sei ein Kreis mit beliebigem Radius r gezeichnet. Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneide den Kreis im Punkt $P\,(u;\,v)$. Dreht sich der Strahl um O bis in die Ausgangslage zurück, so hat er die vier Quadranten des Kreises überstrichen, und der Punkt P ist auf der Peripherie des Kreises einmal herumgelaufen.

Von P sei das Lot auf die u-Achse gefällt und der Fußpunkt mit Q bezeichnet. Wie bewegt sich Q, wenn P, von der Ausgangslage auf dem positiven Teil der u-Achse beginnend, einen vollen Umlauf ausführt?

Im Verlauf der Drehung des Strahls ändert sich mit dem Winkel x die Länge des projizierenden Lotes $\overline{P_nQ_n}$ des zugehörigen Punktes $P_n\,(n = 1;\ 2;\ 3;\ldots)$. Im I. Quadranten vergrößert sich die Länge des Lotes $\overline{P_nQ_n}$ mit wachsendem Winkel $x\,(0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$ von 0 bis r (Abb. 1.3.). Im II. Quadranten verkürzt sich die Länge

Abb. 1.3.

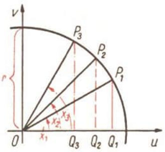
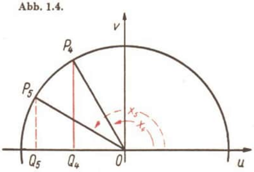


Abb. 1.4.



des Lotes $\overline{P_nQ_n}$ mit wachsendem Winkel x $(90^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$ von r bis 0 (Abb. 1.4.). Überschreitet der Winkel den Wert 180°, so nimmt die Maßzahl des Lotes negative Werte an, und zwar nimmt sie im III. Quadranten von 0 bis $-r$ ab und steigt im IV. Quadranten von $-r$ bis 0 an.

Die mit Vorzeichen versehene Maßzahl des Lotes $\overline{P_nQ_n}$ hängt bei konstanter Länge des Radius $\overline{OP} = r\ (r > 0)$ eindeutig vom Winkel x ab.

Wir bilden nun das Verhältnis $\frac{\text{projizierendes Lot } \overline{PQ}}{\text{Radius } \overline{OP}}$. Dieses Verhältnis (der Radius $\overline{OP}$ ist zunächst konstant) hängt ebenfalls eindeutig vom Winkel x ab und ändert sich in gleicher Weise wie das projizierende Lot $\overline{PQ}$ selbst. Bedenkt man, daß nach dem Strahlensatz für die Winkel x das Verhältnis $\frac{\text{projizierendes Lot } \overline{PQ}}{\text{Radius } \overline{OP}}$ auch für veränderte Radien jeweils gleich ist, so erkennt man, daß

das Verhältnis $\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$ nur vom Winkel x, nicht aber vom Radius $\overline{OP}$ abhängt.

Da die Maßzahl des projizierenden Lotes $\overline{PQ}$ gleich der Ordinate v des Punktes P ist, kann das Verhältnis auch lauten:

Ordinate v : Maßzahl des Radius r.

Dieses Verhältnis nennt man den **Sinus (sin)**[1] des Winkels x.

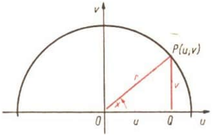


Abb. 1.5.

[1] sinus (lat.), Rundung, Wölbung

Definition 1: Das Verhältnis der Ordinate v des auf der Peripherie laufenden Punktes P zur Maßzahl des Radius r des Kreises um O nennt man den Sinus des Winkels x (Abb. 1.5.).

(1) $\sin x = \frac{\overline{PQ}}{r}\ (0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ)$ oder $\sin x = \frac{v}{r}$.

Für beide Gleichungen gilt: $r \neq 0$. In der zweiten Gleichung ist v mit Vorzeichen, von r jedoch nur die Maßzahl zu verwenden.
Die Funktion, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Ordinate : Maßzahl des Radius

vom Winkel ausdrückt, heißt nach Erklärung 1 **Sinusfunktion.** Als Funktionszeichen wird dabei das Symbol sin benutzt.
Bezeichnet man den Wert des veränderlichen Quotienten mit y, so erhält man die Funktion

$$y = \sin x.$$

Ermitteln Sie mit Hilfe der Abbildung 1.2., in der r konstant ist, die Funktionswerte der Sinusfunktion für die Winkel $x = 0^\circ$; 90°; 180°; 270°; 360°! (Im III. und IV. Quadranten nimmt sin x negative Funktionswerte an.)

In der ersten der eingangs gestellten Aufgaben wird die Abhängigkeit des Flächeninhalts A des Rhombus vom Winkel α durch die Sinusfunktion ausgedrückt. Der Flächeninhalt ist proportional $\sin\alpha$:

$$A \sim \sin\alpha.$$

Mit wachsendem Winkel α nimmt der Flächeninhalt des Rhombus im Bereich $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ zunächst zu, erreicht bei $\alpha = 90^\circ$ einen Höchstwert (Quadrat) und nimmt dann wieder ab.
Im zweiten Beispiel besteht die gleiche Abhängigkeit zwischen induzierter Spannung U und Winkel α. Es gilt

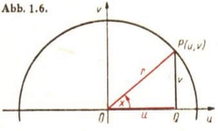
$$U \sim \sin\alpha.$$

Die induzierte Spannung steigt im Bereich $0^\circ \leqq \alpha \leqq 360^\circ$ zunächst von $U = 0$ an, erreicht einen Höchstwert und fällt wieder ab. Sie nimmt negative Werte an, durchläuft einen Tiefstwert und steigt wieder bis $U = 0$ an.

Die Kosinusfunktion

Bei der Drehung des Strahls OP um O in Abbildung 1.2. ändert sich mit dem Winkel x auch die Projektion $\overline{OQ}$ des Radius auf die u-Achse (Abb. 1.6.).

Abb. 1.6.



Das Verhältnis Projektion $\overline{OQ}$: Radius $\overline{OP}$, das auch lauten kann

Abszisse u : Maßzahl des Radius r,

hängt ebenfalls nur vom Winkel x ab. Dieses Verhältnis nennt man den **Kosinus (cos)** des Winkels x.

Definition 2: Das Verhältnis der Abszisse u des auf der Peripherie laufenden Punktes P zur Maßzahl des Radius r des Kreises um O nennt man den Kosinus des Winkels x (Abb. 1.6.).

(2) $\cos x = \frac{\overline{OQ}}{r}$ $(0° \leqq x \leqq 360°)$ oder $\cos x = \frac{u}{r}$

Für beide Gleichungen gilt: $r \neq 0$. In der zweiten Gleichung ist wieder nur die Maßzahl von r zu verwenden.
Die Funktion y, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Abszisse : Maßzahl des Radius

vom Winkel x ausdrückt, heißt **Kosinusfunktion**:

$y = \cos x.$

Ermitteln Sie die Funktionswerte der Kosinusfunktion für die Winkel $x = 0°$; $90°$; $180°$; $270°$; $360°$! Im II. und III. Quadranten hat u negative Werte. Daher nimmt $y = \cos x$ in diesen Quadranten negative Funktionswerte an.

Die Tangensfunktion

Eine weitere Winkelfunktion erhalten wir durch das Verhältnis

Ordinate v : Abszisse u,

das ebenfalls nur vom Winkel x abhängt (Abb. 1.7.). Für $x = 0°$ ist $v = 0$ und $u = r$ $(r \neq 0)$, also $\frac{v}{u} = 0$. Mit wachsendem x nimmt $\frac{v}{u}$ zu. Wenn der Winkel x sich dem Wert $90°$ nähert, wächst der Quotient $\frac{v}{u}$ über alle Grenzen. (Dieser Fall kann mit der Funktion $y = \frac{1}{x}$ verglichen werden, wenn sich x dem Wert 0 nähert.) Für $x = 90°$ existiert demnach kein Tangenswert. Das gleiche gilt für $x = 270°$.

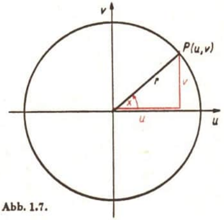


Abb. 1.7.

Im II. Quadranten ist der Quotient $\frac{v}{u}$ negativ. Das Verhältnis $\frac{v}{u}$ wächst mit zunehmendem Winkel und erreicht für $x = 180°$ den Wert 0. Der Quotient $\frac{v}{u}$ zeigt im III. Quadranten das gleiche Verhalten wie im I. Quadranten, und im IV. Quadranten verhält er sich wie im II. Quadranten.

Definition 3: Das Verhältnis der Ordinate v zur Abszisse u des auf der Peripherie laufenden Punktes P nennt man den Tangens[1] des Winkels x.

(3) $\tan x = \frac{v}{u}$ $(0° \leqq x \leqq 360°;\ x \neq 90°;\ x \neq 270°)$

Die Funktion y, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Ordinate : Abszisse

vom Winkel x ausdrückt, heißt **Tangensfunktion**:

$y = \tan x.$

[1] tangere (lat.), berühren

Die Kotangensfunktion

Als vierte Funktion am Kreis betrachten wir das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v (Abb. 1.7.).

Definition 4: Das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v des auf der Peripherie laufenden Punktes P nennt man den Kotangens des Winkels x.

(4) $\cot x = \frac{u}{v}\ (0° < x < 360°;\ x \neq 180°)$

Die Funktion y, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Abszisse : Ordinate

vom Winkel x ausdrückt, heißt **Kotangensfunktion**:

$y = \cot x.$

Nähert sich der Winkel x im I. Quadranten von größeren Winkelwerten her dem Wert 0, so wächst der Quotient $\frac{u}{v}$ und damit die Funktion $y = \cot x$ über alle Grenzen. Für $x = 0°$ existiert die Funktion $y = \cot x$ nicht. Das gleiche gilt für $x = 180°$ und $x = 360°$.
Im II. und im IV. Quadranten haben die Tangensfunktion und die Kotangensfunktion negative Funktionswerte.
Zwei weitere, nicht so bedeutende Winkelfunktionen sind der **Sekans** und der **Kosekans** eines Winkels.
Der Sekans (sec) des Winkels x (Abb. 1.2.) ist das Verhältnis

Radius $\overline{OP}$: Projektion $\overline{OQ}$.

Der Kosekans (cosec) des Winkels x ist das Verhältnis

Radius $\overline{OP}$: projizierendes Lot $\overline{PQ}$.

Für die Umrechnung gelten die Gleichungen:

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ und $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Aufgaben

1. Zeichnen Sie um den Anfangspunkt O eines uv-Koordinatensystems mehrere konzentrische Kreise, und legen Sie in den I. Quadranten einen Strahl, der in O beginnt!
   a) Bestimmen Sie jeweils das Verhältnis „Ordinate des Schnittpunktes des Strahls mit dem Kreis zur Maßzahl des zugehörigen Radius"!
   b) Vergleichen Sie die einzelnen Ergebnisse miteinander!
   c) Wie ändert sich das Verhältnis im I. Quadranten, wenn sich der Winkel ändert?
   d) Beurteilen Sie, warum die Sinusfunktion durch das Verhältnis von Ordinate zur Maßzahl des Radius und nicht durch die Ordinate allein definiert wird!
   e) Welche besondere Rolle spielt der Kreis, der die Längeneinheit als Radius hat?
   f) Führen Sie die Untersuchungen auch im II. Quadranten durch!

2. Um den Anfangspunkt O eines uv-Koordinatensystems sei ein Kreis mit dem Radius r gezogen. Von O geht ein Strahl aus, der den Kreis im Punkt $P\,(u;\,v)$ schneidet und mit dem positiven Teil der Abszissenachse den Winkel x bildet. Wie groß ist jeweils $\sin x$, wenn für die Symbole die folgenden Werte gesetzt werden?

   a) $r = 8;\ v = 4$　　b) $r = 3;\ v = 1$　　c) $r = 13;\ v = -5$
   d) $u = 3;\ v = 4$　　e) $u = 2;\ v = -1{,}5$　　f) $u = v = 2$
   g) $u = -1;\ v = 3$　　h) $r = c;\ v = a$　　i) $u = b;\ v = a$

3. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Sinus die folgenden Werte annimmt!

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** 0,1 **e)** $-0,3$ **f)** 0,4 **g)** $-0,8$ **h)** 0,9

Beachten Sie, daß sich jeweils zwei Winkel ergeben! Überlegen Sie, wie man die Aufgabe möglichst leicht lösen kann!

i) Warum ist 1,1 als Funktionswert des Sinus nicht möglich?

4. a) bis **c)** Beantworten Sie die Fragen der Aufgaben **1a**, **b** und **c** für das Verhältnis „Abszisse des Schnittpunktes P des Strahls mit dem Kreis zur Maßzahl des zugehörigen Radius“!
d) Führen Sie die Untersuchungen auch im II. und III. Quadranten durch!

5. Wie groß sind für den in Aufgabe **2** geschilderten Sachverhalt die Werte von $\cos x$, wenn für die Symbole die folgenden Werte gesetzt werden?

a) $r = 3;\ u = 2,$ **b)** $r = 2;\ u = \sqrt{3}$

c) bis **i)** Siehe Aufgabe **2c** bis **i**!

6. Bestimmen Sie die Kosinuswerte der folgenden Winkel nach Definition 2 durch Messung am Kreis!

a) 22,5° **b)** 45° **c)** 67,5° **d)** 135° **e)** 202,5° **f)** 337,5°

7. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die die Kosinusfunktion die in Aufgabe **3a** bis **h** angegebenen Werte annimmt!

8. Zeichnen Sie um den Anfangspunkt O eines uv-Koordinatensystems einen Kreis mit dem Radius r!
Wie verändert sich **a)** die Ordinate v, **b)** die Abszisse u eines Punktes P, der die Kreislinie, vom Punkt $P_1\,(r;\,0)$ beginnend, im mathematisch positiven Drehsinn durchläuft? Ziehen Sie daraus Folgerungen für den Verlauf der Sinus- bzw. der Kosinusfunktion!
Für welche Winkel ist $\sin x = \cos x$? In welchen Fällen ist $\sin x = -\cos x$?

9. Vergleichen Sie miteinander:

a) $\sin 30°$ und $\cos 60°$, **b)** $\sin 60°$ und $\cos 30°$,
c) $\sin x$ und $\cos\,(90° - x)$, $0° \leqq x \leqq 90°$,
d) $\cos x$ und $\sin\,(90° - x)$, $0° \leqq x \leqq 90°$!

10. Um den Ursprung O eines uv-Koordinatensystems sei ein Kreis mit dem Radius r gezeichnet.

a) Auf dem Kreisbogen mögen zwei Punkte, P und P', im I. bzw. II. Quadranten symmetrisch zur v-Achse liegen. Drücken Sie die zu P und P' gehörenden Winkel durch x ($0° \leqq x \leqq 90°$) aus!
Bestimmen Sie dann durch Messung am Kreis die Sinus- und Kosinuswerte beider Winkel, und vergleichen Sie die Werte miteinander!

b) Drücken Sie die zu P und P' gehörenden Winkel durch x ($0° \leqq x \leqq 90°$) für den Fall aus, daß die Punkte im I. und IV. Quadranten symmetrisch zur u-Achse liegen! Vergleichen Sie die Sinus- und Kosinuswerte dieser Winkel miteinander!

11. Tragen Sie in einem uv-Koordinatensystem in O an den positiven Teil der u-Achse den Winkel 55° an, und suchen Sie auf seinem freien Schenkel (im I. Quadranten) die Punkte P_1 und P_2 auf, deren Abszissen $u_1 = 4$ bzw. $u_2 = 6$ sind! Messen Sie in beiden Fällen die Ordinaten v_1 und v_2, und bestimmen Sie die Quotienten $\frac{v_1}{u_1}$ und $\frac{v_2}{u_2}$!
Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Feststellung!

12. Mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre ist zu beweisen, daß im uv-System an konzentrischen Kreisen um O, die von einem Strahl (Anfangspunkt O) geschnitten werden, das Verhältnis $\frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}}$ der Schnittpunkte unabhängig von der Größe der Koordinaten ist.

13. Bestimmen Sie für die Winkel **a)** 30°, **b)** 60°, **c)** 120°, **d)** 150° am Kreis im uv-System das Verhältnis $v : u$ durch Messung! Kommt es auf den Radius des Kreises an?

14. Welche Werte hat $\tan x$ am Kreis im uv-System, wenn der Schnittpunkt P des zum Winkel x gehörenden Strahles mit dem Kreis die folgenden Koordinaten hat?

a) $u = 4;\ v = 3$ **b)** $u = v = 1$ **c)** $u = -4;\ v = 2$
d) $u = 2;\ v = -1{,}5$ **e)** $u = -0{,}9;\ v = -0{,}6$ **f)** Abszisse b; Ordinate a.

15. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Tangens die folgenden Werte annimmt!

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{7}$ **c)** 4 **d)** -1 **e)** $\sqrt{3}$ **f)** $-\frac{1}{3}$

16. Tragen Sie im uv-Koordinatensystem in O an den positiven Teil der u-Achse den Winkel 35° an, und suchen Sie auf seinem freien Schenkel (im I. Quadranten) die Punkte P_1 und P_2, deren Ordinaten $v_1 = 6$ bzw. $v_2 = 8$ sind!

Messen Sie in beiden Fällen die Abszissen u_1 bzw. u_2, und bestimmen Sie die Quotienten $\frac{u_1}{v_1}$ und $\frac{u_2}{v_2}$!

Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Feststellung!

17. Bestimmen Sie am Kreis nach Definition 4 durch Messung die folgenden Funktionswerte!

a) cot 15° **b)** cot 75° **c)** cot 105° **d)** cot 165° **e)** cot 195° **f)** cot 255°

18. Welche Werte hat $\cot x$ am Kreis im uv-System, wenn der Schnittpunkt P des zum Winkel x gehörenden Strahles mit dem Kreis die in Aufgabe **14** aufgeführten Koordinaten hat?

19. Bestimmen Sie die Werte der Kotangensfunktion für die in Aufgabe **13** angeführten Winkel

a) durch Messung am Kreis im uv-System,

b) unter Verwendung des in Aufgabe **18** gefundenen Zusammenhanges zwischen der Tangens- und der Kotangensfunktion!

20. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Kotangens die folgenden Werte annimmt!

a) $\frac{4}{7}$ **b)** 2 **c)** 2,5 **d)** $-0{,}8$ **e)** $\sqrt{5}$ **f)** -5

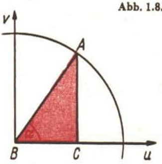
21. Stellen Sie, soweit möglich, die Werte der vier Winkelfunktionen für $x = 0°;\ 90°;\ 180°;\ 270°;\ 360°$ in einer Tabelle zusammen!

22. In einigen Lehrbüchern der Mathematik werden die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck erklärt.

a) Wenden Sie die Definitionen 1 bis 4 auf das rechtwinklige Dreieck ABC in Abbildung 1.8. an!

b) Erklären Sie die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck! Welcher Beschränkung unterliegen diese Erklärungen?

Abb. 1.8.



1.2. Der Zusammenhang der Winkelfunktionen

Die Darlegungen im Abschnitt 1.1. über die Winkelfunktionen können in folgenden Faustregeln zusammengefaßt werden:

1) $\frac{\text{Ordinate}}{\text{Maßzahl des Radius}} = \text{Sinus}$, 2) $\frac{\text{Abszisse}}{\text{Maßzahl des Radius}} = \text{Kosinus}$,

3) $\frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}} = \text{Tangens}$, 4) $\frac{\text{Abszisse}}{\text{Ordinate}} = \text{Kotangens}$.

Für alle vier Verhältnisse wurde die Abhängigkeit vom Winkel x festgestellt.

Die Verhältnisse	$v:r$	$u:r$	$v:u$	$u:v$
stellen die Funktionen	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$

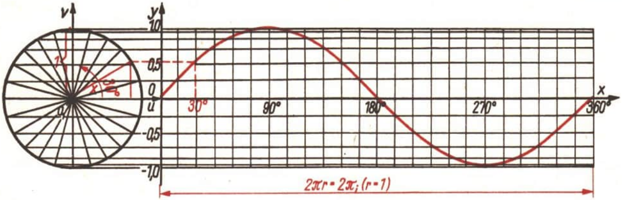
des Winkels x dar.

Aus der Zusammenstellung entnehmen wir, daß die Verhältnisse, die Tangens und Kotangens erklären, für denselben Winkel x zueinander reziprok sind. Die Tangens- und die Kotangensfunktion eines Winkels haben reziproke Werte. Für die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion eines Winkels gilt eine derartige einfache Beziehung nicht.

Die Bilder der Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen können im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt werden. Hierzu verwendet man die Winkel x als Abszissen und die Funktionswerte y als Ordinaten der Kurvenpunkte. Die Abbildung 1.9. stellt das Bild der Funktion

Abb. 1.9.



$y = \sin x$ im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ dar. Die Funktionswerte wurden einer Darstellung im uv-Koordinatensystem entnommen, in der dem Radius des Kreises der Wert 1 gegeben wurde. In diesem Einheitskreis (Abb. 1.9., linker Teil) geht die Gleichung (1) über in

(1a) $\sin x = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ}$, wobei in diesem Fall nur die Maßzahl der Strecke $\overline{PQ}$ gemeint sein soll.

Die Maßzahl der Länge des Lotes $\overline{PQ}$ im Einheitskreis ist also jeweils gleich dem Sinus des entsprechenden Winkels x.

Es ist zweckmäßig, auf der Abszissenachse des xy-Systems als Einheit die Länge desjenigen Bogens zu wählen, den der Zentriwinkel 1° auf der Peripherie des Einheitskreises ausschneidet. Man rollt dazu den Einheitskreis auf dem positiven Teil der x-Achse vom Ursprung O aus ab und erhält eine Strecke, die dem Vollwinkel 360° entspricht.

Um ein Bild der Funktion zu zeichnen, reicht es praktisch aus, wenn man den rechten Winkel im Einheitskreis in sechs gleiche Teile teilt und die zu einem Winkel von 15° gehörende Bogenlänge näherungsweise durch die Sehne ersetzt.

Wie ermittelt man in der Abbildung 1.9. für einen gegebenen Winkel den zugehörigen Kurvenpunkt?

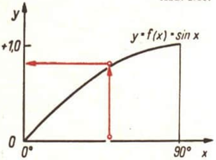
Aus der Abbildung 1.9. ist ersichtlich:

Die Werte der Sinusfunktion $y = \sin x$ liegen zwischen $y = -1$ und $y = +1$. Es gilt also der Wertevorrat: $-1 \leqq y \leqq +1$.

Im I. und IV. Quadranten ist die Sinusfunktion eine steigende, im II. und III. Quadranten eine fallende Funktion. Im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ ist jedem Winkel x ein Funktionswert $y = \sin x$ eindeutig zugeordnet. Diese Aussage kann man jedoch nicht umkehren.

Wieviel Winkelwerte gehören a) im allgemeinen zu einem gegebenen Funktionswert, b) zu $y = +1$, $y = -1$, $y = 0$?

Abb. 1.10.



Dagegen wird im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ jedem Winkel x ein Funktionswert y $(0 \leqq y \leqq +1)$ umkehrbar eindeutig (eineindeutig) zugeordnet. Man sagt auch: Die Funktion $y = \sin x$ bildet die Menge der Winkel x $(0° \leqq x \leqq 90°)$ auf die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und $+1$ $(0 \leqq y \leqq +1)$ eineindeutig ab (Abb. 1.10.). Die Abbildung 1.11. zeigt das Bild der Funktion $y = \cos x$, das in ähnlicher Weise wie das der Sinusfunktion gezeichnet wird. Als Ordinaten y hat man die entsprechenden Abszissen u im Einheitskreis des uv-Koordinatensystems zu verwenden.

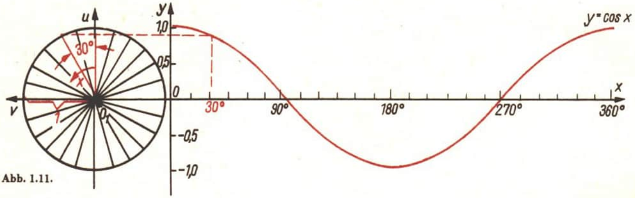
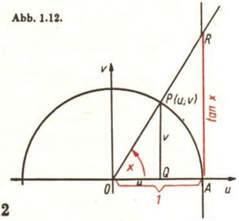


Abb. 1.11.

Zur Konstruktion des Bildes der Tangensfunktion in Abbildung 1.12. wurde an den Einheitskreis im Punkt A (1; 0) die Tangente (Haupttangente) gelegt. Der den Winkel x erzeugende Strahl schneidet die Tangente in R. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\overline{AR} : 1 = v : u.$$

Abb. 1.12.



Da $v : u = \tan x$ ist, ergibt sich

$\overline{AR} = \tan x$, wobei in diesem Fall nur die Maßzahl der Strecke $\overline{AR}$ gemeint sein soll.

Der Abschnitt $\overline{AR}$ auf der Haupttangente im Punkte A des Einheitskreises stellt also den Tangens des Winkels x geometrisch dar.[1] Liegt der Winkel x im II. oder III. Quadranten, so schnei-

[1] Diese geometrische Deutung läßt die Bezeichnung Tangens für das Verhältnis $v : u$ der Koordinaten eines Kreispunktes verständlich werden.

det der bewegliche Schenkel des Winkels x die Tangente nicht. Der den Tangens des Winkels x darstellende Abschnitt der Haupttangente wird in diesem Fall von der Verlängerung des beweglichen Schenkels über den Scheitel O hinaus gebildet (Abb. 1.13.). Auf dieser geometrischen Darstellung der Funktionswerte beruht das Konstruktionsverfahren für das Bild der Funktion $y = \tan x$ (Abb. 1.14.).

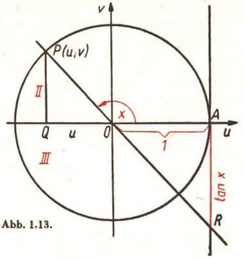


Abb. 1.13.

In ähnlicher Weise erhält man das Bild der Kotangensfunktion (Abb. 1.15.). Hierzu wird an den Einheitskreis im Punkt B (0; 1) die Tangente (Nebentangente) gelegt.

Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneidet diese Tangente in T. Die Dreiecke OTB und OQP sind ähnlich; somit gilt die Proportion:

$$\overline{BT} : 1 = u : v.$$

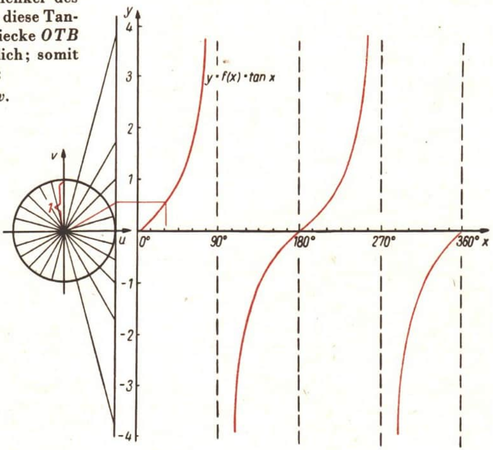


Abb. 1.14.

Da $u : v = \cot x$ ist, ergibt sich

$\overline{BT} = \cot x$, wobei in diesem Fall nur die Maßzahl der Strecke $\overline{BT}$ gemeint sein soll.

Der Abschnitt $\overline{BT}$ auf der Nebentangente im Punkte B des Einheitskreises stellt also den Kotangens des Winkels x geometrisch dar.

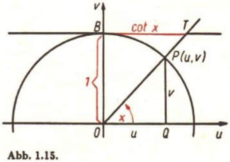


Abb. 1.15.

Im III. und IV. Quadranten wird der den Kotangens des Winkels x darstellende Tangenten-

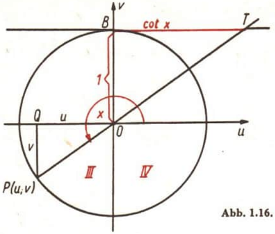
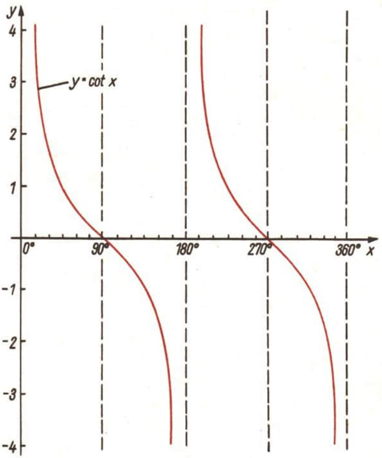


Abb. 1.16.

abschnitt von der Verlängerung des beweglichen Schenkels über den Scheitel O hinaus gebildet (Abb. 1.16.). Bei der Konstruktion des Bildes der Funktion $y = \cot x$ hat man als Ordinaten die Tangentenabschnitte $\overline{BT}$ zu verwenden (Abb. 1.17.). In den Abbildungen 1.14. und 1.17. zeigt der Verlauf der Kurven anschaulich, daß die Funktion $y = \tan x$ für $x = 90°$ und $x = 270°$, die Funktion $y = \cot x$ für $x = 0°$, $x = 180°$ und $x = 360°$ nicht definiert ist.

Beachten Sie, daß die Funktionswerte der Tangens- und Kotangensfunktion nicht die Strecken $\overline{AR}$ bzw. $\overline{BT}$ selbst, sondern deren Maßzahlen, also unbenannte Zahlen sind!

Abb. 1.17.



Die Vorzeichen der Winkelfunktionen

Der Radius r ist stets positiv, aber die Maßzahlen der Projektion $\overline{OQ}$ und des projizierenden Lotes $\overline{PQ}$ bzw. die Koordinaten u und v nehmen je nach dem Quadranten das positive oder negative Vorzeichen an. Die Vorzeichen von u und v bestimmen damit das Vorzeichen der Winkelfunktionen für die Winkel dieses Quadranten.

Vorzeichen der Winkelfunktionen in den vier Quadranten

	I	II	III	IV
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tan	+	—	+	—
cot	+	—	+	—

Leiten Sie die Vorzeichen aus den Definitionen der Winkelfunktionen her!

Beziehungen zwischen den Funktionen bei gleichem Winkel

Dividiert man die Gleichung (1) $\sin x = \frac{v}{r}$ durch die Gleichung (2) $\cos x = \frac{u}{r}$, so erhält man für den gleichen Winkel x die Grundformel

(5) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Entsprechend ergibt die Division der Gleichung (2) durch die Gleichung (1) für den gleichen Winkel x die Grundformel

(6) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Sprechen Sie diese Beziehungen in Worten aus!
Für welche Winkelwerte hat die Formel (5), *für welche die Formel* (6) *keine Gültigkeit?*

Durch Multiplikation der Gleichungen (5) und (6) findet man

(7) $\tan x \cdot \cot x = 1.$

Lösen Sie Gleichung (7) *nach* tan x *bzw. nach* cot x *auf!*
Sprechen Sie die sich ergebenden Beziehungen in Worten aus!

Nach den Definitionen (1) und (2) ist $\sin x = \frac{v}{r}$ und $\cos x = \frac{u}{r}$. Werden die beiden Gleichungen quadriert und anschließend addiert, so ergibt sich:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \frac{v^2}{r^2} + \frac{u^2}{r^2} = \frac{v^2 + u^2}{r^2}.$$

Wie aus den Abbildungen 1.5., 1.6. und 1.7. hervorgeht, gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS $v^2 + u^2 = r^2$ für jeden Punkt $P(u; v)$ im I. bis IV. Quadranten.
Hieraus ergibt sich:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

An Stelle von $(\sin x)^2$ bzw. $(\cos x)^2$ schreibt man vereinfacht $\sin^2 x$ bzw. $\cos^2 x$.
So erhält man

(8) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Lösen Sie die Gleichung (8) *nach* sin x *bzw. nach* cos x *auf!*

Einige weitere Beziehungen gehen aus der Abbildung 1.18. hervor. In der Abbildung 1.18. a wurde im I. Quadranten der Winkel x, in der Abbildung 1.18. b der Winkel $(90° - x)$ eingezeichnet.

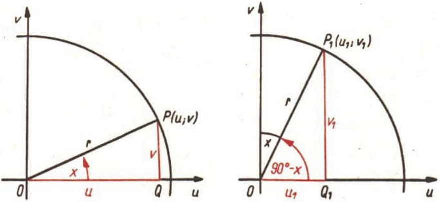


Abb. 1.18. a und 1.18. b

Auf Grund der Definitionen der Winkelfunktionen (1) bis (4) gelten die folgenden Gleichungen:

$$\sin(90° - x) = \frac{v_1}{r}, \qquad \tan(90° - x) = \frac{v_1}{u_1},$$

$$\cos(90° - x) = \frac{u_1}{r}, \qquad \cot(90° - x) = \frac{u_1}{v_1}.$$

Da die Dreiecke OQP und OQ_1P_1 kongruent sind, kann man setzen:

$$u_1 = v \text{ und } v_1 = u.$$

Wendet man die Definitionen der Winkelfunktionen nochmals an, so ergeben sich aus den obigen Gleichungen die **Komplementbeziehungen**:

(9)
$$\sin(90° - x) = \cos x, \qquad \tan(90° - x) = \cot x,$$
$$\cos(90° - x) = \sin x, \qquad \cot(90° - x) = \tan x.$$

Durch die Formeln in der zweiten Zeile werden die Namen *Kosinus* und *Kotangens* verständlich: complementi sinus (abgekürzt **co**sinus) bedeutet Sinus des Komplementwinkels, complementi tangens (abgekürzt **co**tangens) bedeutet Tangens des Komplementwinkels. Die Kosinus- bzw. die Kotangensfunktion nennt man die **Kofunktionen** zur Sinus- bzw. zur Tangensfunktion und umgekehrt.

Die Beziehungen (9) können zu folgender Aussage zusammengefaßt werden:

Die Funktion eines Winkels ist gleich der Kofunktion seines Komplementwinkels (Komplementbeziehung).

Die Formeln (5) bis (8) werden verwendet, um aus gegebenen Werten einer Winkelfunktion entsprechende Werte anderer Winkelfunktionen zu berechnen. Mit Hilfe der Formeln (9) werden Werte der entsprechenden Kofunktion des Komplementwinkels ermittelt.

Beispiel 1:

Gegeben ist $\sin x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Es ist $\tan x_1$ zu bestimmen. Hierzu ist es erforderlich, daß zunächst $\tan x$ durch $\sin x$ ausgedrückt wird.

Nach (5) ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und nach (8) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Indem wir für $\cos x$ den Wurzelausdruck einsetzen, erhalten wir:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

Für $\sin x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ergibt sich daraus:

$$\tan x_1 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1.$$

Beispiel 2:

Bekannt seien die Werte der Sinusfunktion für die Winkel $x = 30°; 45°; 60°$. Welche Werte hat die Kosinusfunktion für diese Winkel?

Es ist
$$\cos 30° = \sin(90° - 30°) = \sin 60°;$$
$$\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45°;$$
$$\cos 60° = \sin(90° - 60°) = \sin 30°.$$

Aufgaben

1. a) Für die Sinus- und die Kosinusfunktion ist zwischen 0° und 90° von 10° zu 10° eine dreistellige Tafel aufzustellen.
Anleitung: Zeichnen Sie den I. Quadranten eines Einheitskreises, und tragen Sie die Winkel 10°; 20°; 30°;...; 80° ein! Wählen Sie als Radius 1 dm! Die Funktionswerte kann man so auf zwei Dezimalstellen genau bestimmen und die dritte Dezimalstelle schätzen (Millimeterpapier!). Kosinus- und Sinusfunktion haben den gleichen Wertevorrat; die Funktionswerte sind aber anderen Winkeln zugeordnet. Welcher Zusammenhang ergibt sich daraus für die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$?
b) Stellen Sie auch für den II. Quadranten eine Wertetafel der Sinus- und der Kosinusfunktion auf!

2. a) Stellen Sie eine dreistellige Tafel der Tangens- und der Kotangensfunktion zwischen 0° und 90° von 10° zu 10° auf!
Anleitung: Es ist $\tan x$ die Maßzahl des Haupttangentenabschnittes, $\cot x$ die Maßzahl des Nebentangentenabschnittes.
Welchen Zusammenhang beobachten Sie an den Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$?
b) Stellen Sie auch für den II. Quadranten eine Wertetafel der Tangens- und der Kotangensfunktion auf!

3. a) Die Funktionswerte $\tan x$ und $\cot x$ sind zueinander reziprok.
Leiten Sie unter Benutzung dieser Tatsache aus dem Verlauf der Tangenskurve im I. bis IV. Quadranten den Verlauf der Kotangenskurve her!
b) Entwickeln Sie den Verlauf der Kotangenskurve im I. Quadranten auch mit Hilfe der Beziehung $\cot x = \tan(90° - x)$!

4. Es ist eine Tabelle aufzustellen, aus der hervorgeht, ob die Winkelfunktionen in den einzelnen Quadranten steigen oder fallen.

5. a) Stellen Sie die Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion zusammen! (Darunter sind die Stellen x zu verstehen, für die $\sin x = 0$ bzw. $\cos x = 0$ ist.)
b) Stellen Sie diejenigen Stellen zusammen, an denen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ die Werte $+1$ und -1 annehmen!

6. In einem Kreis mit dem Radius r ist eine Sehne von der Länge l mit dem zugehörigen Zentriwinkel α gezeichnet. Das Lot vom Kreismittelpunkt auf die Sehne halbiert Zentriwinkel und Sehne.
a) Stellen Sie die Funktion auf, welche die Beziehung zwischen halbem Zentriwinkel, halber Sehne und Kreisradius ausdrückt!
b) Wie groß ist in einem Kreis vom Durchmesser 7 cm die Sehne zum Zentriwinkel 20°; 80°; 140°?
Anleitung: Benutzen Sie zur Bestimmung die Tafel aus Aufgabe **1**!

7. a) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \sin x$ im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$! Bedienen Sie sich der Konstruktion mit Hilfe des Einheitskreises!
Stellen Sie die Symmetrieverhältnisse der Sinuskurve fest!
Drehen Sie die Kurve um den Punkt $x = 180°$ um den Winkel 180°! Was beobachten Sie? Wie könnte man diese Erkenntnisse für das Zeichnen der Kurve ausnutzen?
b) Stellen Sie sich eine Schablone für die Sinuskurve her!
c) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \cos x$ im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$!
Stellen Sie die Symmetrieverhältnisse der Kosinuskurve fest!

8. Bestimmen Sie graphisch durch Interpolation an der Sinus- bzw. Kosinuskurve die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin 5°$	b) $\sin 78°$	c) $\sin 175°$	d) $\sin 258°$
e) $\cos 25°$	f) $\cos 62°$	g) $\cos 118°$	h) $\cos 355°$

9. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \sin x$ die Winkel, deren Sinus die folgenden Werte haben!

a) 0,35 **b)** 0,70 **c)** $-0{,}30$ **d)** $-0{,}65$

10. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \cos x$ die Winkel, deren Kosinus die folgenden Werte haben!

a) 0,40 **b)** 0,125 **c)** $-0{,}45$ **d)** $-0{,}140$

11. a) Stellen Sie die Abhängigkeit der Ordinate v vom Winkel x an Kreisen mit $r = 3$ cm; 4 cm; 5 cm in ein und demselben uv-Koordinatensystem graphisch dar! Geben Sie die Abhängigkeit analytisch an!

b) Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $y = 2 \sin x$; $y = 3 \sin x$; $y = \frac{1}{2} \sin x$; $y = 1{,}5 \cos x$!
Untersuchen Sie, wie sich durch den Koeffizienten das allgemeine Verhalten der Sinus- bzw. Kosinusfunktion verändert (Nullstellen; Stellen, an denen die Funktion einen Höchst- bzw. Tiefstwert annimmt; Steigen bzw. Fallen)!

c) Stellen Sie die Abhängigkeit der Länge der Sehne vom halben Zentriwinkel $\frac{\alpha}{2}$ für den Kreis vom Durchmesser 7 cm graphisch dar (Aufg. **6**)! Entnehmen Sie die Längen der Sehnen für die in Aufgabe **6. b** angegebenen Zentriwinkel aus der graphischen Darstellung!

d) Stellen Sie die Abhängigkeit des Flächeninhaltes A eines Rhombus mit der Seite a von einem der Winkel, α, analytisch und graphisch dar!
Vergleichen Sie den Flächeninhalt eines beliebigen schiefwinkligen Rhombus mit dem Flächeninhalt des Quadrates mit der gleichen Seite!

12. a) Die Bilder der Sinus- und der Kosinusfunktion sind im I. Quadranten in ein und dasselbe xy-Achsenkreuz zu zeichnen.
Spiegeln Sie die Kurven an der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt mit der Abszisse $x = 45°$! Zeichnen Sie dazu entweder (1) nur das Bild einer der beiden Funktionen oder (2) beide Funktionen lediglich im Bereich von 0° bis 45°, und vervollständigen Sie die Zeichnungen durch Spiegelung!
Durch welche Beziehungen wird das Verfahren analytisch begründet?

b) Zeichnen Sie die Bilder der Sinus- und der Kosinusfunktion nun auch im II. bis IV. Quadranten! Nutzen Sie die Möglichkeit der Spiegelung an der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt mit der Abszisse $x = 225°$!
Durch welche Beziehungen wird das Verfahren analytisch begründet?

13. a) Zeichnen Sie die Bilder der Tangens- und der Kotangensfunktion im I. Quadranten in dasselbe xy-Achsenkreuz!
Untersuchen Sie, in bezug auf welche Symmetrieachse die beiden Kurven symmetrische Figuren sind!
Wie drückt sich dieser Zusammenhang analytisch aus? Welche Vereinfachung ergibt sich für die Anlage einer gemeinsamen Tafel der Tangens- und der Kotangensfunktion?

b) Zeichnen Sie die Bilder der Tangens- und der Kotangensfunktion auch im II. bis IV. Quadranten, und untersuchen Sie, in bezug auf welche Symmetrieachse die Kurven in diesem Bereich symmetrische Figuren sind!
Wie drückt sich dieser Zusammenhang analytisch aus?

14. Bestimmen Sie durch Interpolation an der Tangens- bzw. Kotangenskurve die folgenden Funktionswerte!

a) tan 73° **b)** tan 11° **c)** tan 107° **d)** tan 191°
e) cot 39° **f)** cot 66° **g)** cot 107° **h)** cot 294°

15. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \tan x$ die Winkel, deren Tangens die folgenden Werte hat!

a) 1,50 **b)** 0,50 **c)** $-0{,}83$ **d)** $-2{,}10$

16. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \cot x$ die Winkel, deren Kotangens die folgenden Werte hat!

a) 2,10 **b)** 0,83 **c)** $-0{,}50$ **d)** $-1{,}50$

17. Leiten Sie aus den nachstehenden Werten der Sinus- und der Tangensfunktion die entsprechenden Werte der Kofunktionen her!

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin x$	0	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
$\tan x$	0	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	–

18. Beschreiben und vergleichen Sie den Verlauf der Kurven der Sinus- und der Tangensfunktion im Bereich von 0° bis 90°!
Welche Punkte haben die beiden Kurven gemeinsam?

19. Beweisen Sie die Formeln

a) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, **b)** $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$!

20. Bestätigen Sie die Richtigkeit der Beziehungen

a) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ und **b)** $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$!

21. Aus den Funktionen $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$ können jeweils die drei anderen Winkelfunktionen bestimmt werden.
Leiten Sie die Beziehungen her, und vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle!

gesucht \ ausgedrückt durch	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	–	$\sqrt{1 - \cos^2 x}$	...	...
$\cos x$	$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	–	...	...
$\tan x$	...	...	–	...
$\cot x$	...	...	...	–

22. a) Am Einheitskreis ist $\overline{OP} = 1$ und $\overline{PQ} \mathrel{\widehat{=}} \sin x$ (Abb. 1.19.). Drücken Sie die dritte Seite mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS durch 1 und $\sin x$ aus! Stellen Sie dann gemäß den Definitionen 1 bis 4 die vier Winkelfunktionen von x auf, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der ersten Spalte der Tabelle in Aufgabe **21**!

b) Verfahren Sie genauso mit dem Dreieck OQP aus Abbildung 1.20.!

c) Desgleichen mit dem Dreieck OAR aus Abbildung 1.21.!

Abb. 1.19.

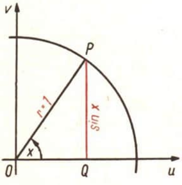


Abb. 1.20.

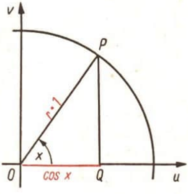
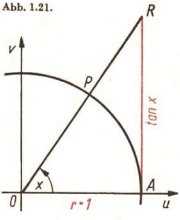


Abb. 1.21.



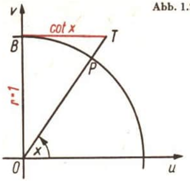


Abb. 1.22.

d) Desgleichen mit dem Dreieck OTB aus Abbildung 1.22.!
Anmerkung: Diese vier Figuren sind gute Gedächtnisstützen für die Umrechnungsbeziehungen der Tabelle in Aufgabe **21**.

23. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

a) $\cos x \cdot \tan x$ **b)** $\sin x \cdot \cot x$ **c)** $\frac{\cos x}{\cot x}$

d) $\frac{\sin x}{\tan x}$ **e)** $\frac{\tan x}{\cot x}$

f) $\tan x \cdot \sqrt{1-\sin^2 x}$

24. Gegeben sind die folgenden Funktionswerte.

a) $\sin 30° = 0{,}5$	**b)** $\tan 45° = 1$	**c)** $\cos 120° = -0{,}5$
d) $\tan 0° = 0$	**e)** $\cot 270° = 0$	**f)** $\sin 13° = 0{,}2250$
g) $\cos 40° = 0{,}7660$	**h)** $\tan 308° = -1{,}280$	**i)** $\cot 59° = 0{,}6009$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle in Aufgabe **21** die übrigen Funktionswerte der Winkel!

25. Berechnen Sie aus den gegebenen Funktionswerten jeweils die Werte der drei anderen Winkelfunktionen!

a) $\sin x = \frac{1}{3}$	**b)** $\cos x = \frac{3}{4}$	**c)** $\tan x = 3$
d) $\cot x = \sqrt{3}$	**e)** $\sin x = \frac{10}{11}$	**f)** $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$
g) $\tan x = \frac{1}{4}$	**h)** $\cot x = 2-\sqrt{3}$	**i)** $\sin x = -\frac{1}{2}$
k) $\cos x = \frac{1}{2}$	**l)** $\tan x = -1$	**m)** $\cot x = \sqrt{3}-2$

Schülerauftrag

Fertigen Sie das in Abbildung 1.23. dargestellte Gerät zum Bestimmen der Werte der Winkelfunktionen an!
Es besteht aus einem durchscheinenden Deckblatt mit dem Vollkreis und dem Durchmesser sowie aus einem Grundblatt mit dem Quadrat und dem Quadranten. Auf den Quadratseiten kann man für den mit dem Durchmesser eingestellten Winkel unmittelbar die Funktionswerte $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ $(0° \leqq x \leqq 45°)$ und $\cot x$ $(45° \leqq x \leqq 90°)$ ablesen. Führen Sie den Beweis!
Wie findet man die Tangenswerte für Winkel zwischen 45° und 90° und die Kotangenswerte für Winkel zwischen 0° und 45°?
Beurteilen Sie die Genauigkeit, mit der Sie die Funktionswerte an Ihrem Gerät ablesen können!

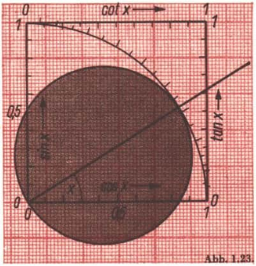


Abb. 1.23.

1.3. Die Tafeln der Winkelfunktionen

Die Werte der Winkelfunktionen sind überwiegend irrationale Zahlen. Sie sind in Tafeln zusammengefaßt, die

das Aufsuchen des Wertes $y = f(x)$ einer Winkelfunktion $f(x)$ zu einem gegebenen Winkel x

sowie das Aufsuchen des Winkels x zu einem gegebenen Funktionswert $f(x)$ ermöglichen.

Im folgenden wird stets auf das Tafelwerk von Beyrodt/Küstner *Vierstellige Logarithmen — Zahlen, Werte, Formeln* Bezug genommen.

Aufsuchen der Funktionswerte bzw. der Winkel

Erläutern Sie die Begriffe steigende Funktion *und* fallende Funktion, *indem Sie im I. Quadranten bei jeder der vier Winkelfunktionen angeben, wie sich der Funktionswert bei einer Änderung des Winkels ändert!*

Die Tafel 13 enthält unter Ausnutzung des Umstandes, daß die Kosinusfunktion die Kofunktion zur Sinusfunktion ist, die Funktionswerte für $y = \sin x$ und $y = \cos x$ ($0° \leqq x \leqq 90°$). Entsprechend enthält die Tafel 14 die Funktionswerte für $y = \tan x$ und $y = \cot x$.

Die Winkel im Rahmen auf der linken Seite und oben bilden den Tafeleingang für die Funktion $y = \sin x$ ($y = \tan x$), die Winkel im Rahmen auf der rechten Seite und unten den für die Funktion $y = \cos x$ ($y = \cot x$). Dabei sind die Winkel für die Funktionen Kosinus bzw. Kotangens in entgegengesetzter Folge aufgeführt.

Die Funktionswerte sind jeweils zwei Winkeln zugeordnet. Einerseits stellen sie den Sinuswert (Tangenswert) eines Winkels dar, andererseits den Kosinuswert (Kotangenswert) des Komplementwinkels.

Beispiele:

$$\sin 21{,}0° = 0{,}3584; \cos(90° - 21{,}0°) = \cos 69{,}0° = 0{,}3584$$
$$\tan 63{,}2° = 1{,}980; \quad \cot(90° - 63{,}2°) = \cot 26{,}8° = 1{,}980$$

Da die tabellierten Funktionswerte fast alle gerundet sind, müßte eigentlich geschrieben werden: $\sin 21{,}0° \approx 0{,}3584$. Man verzichtet jedoch wie auch bei den Logarithmen auf diese Unterscheidung im Schriftbild.

Ist der Winkel gesucht, so liest man bei gegebenem Sinusfunktionswert (Tangensfunktionswert) die Gradzahl in dem Winkelrahmen ab, der die linke Spalte und die obere Zeile bildet. Bei gegebenem Kosinusfunktionswert (Kotangensfunktionswert) findet man die Gradzahl in dem Winkelrahmen, der die rechte Spalte und die untere Zeile bildet.

Beispiele:

$\sin x = 0{,}4664$	$\cos x = 0{,}2284$	$\tan x = 0{,}7400$	$\cot x = 10{,}99$
$x = 27{,}8°$	$x = 76{,}8°$	$x = 36{,}5°$	$x = 5{,}2°$

Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$ mit Interpolieren

Ist der Winkel mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad gegeben, so hat man zu interpolieren. Für das Interpolieren gelten bei dezimal geteiltem Grad die gleichen Regeln wie beim Rechnen mit Logarithmen.

Beispiel 1:

$y = \sin 13{,}27°$

Aus Tafel 13 entnimmt man die Funktionswerte für $\sin 13{,}20°$ und $\sin 13{,}30°$, zwischen denen der gesuchte Funktionswert liegt.

$$\frac{10°}{100}\left[\frac{n°}{100}\left[\begin{array}{l}\sin 13{,}20° = 0{,}2284\\ \sin 13{,}27° = 0{,}22\,.\,.\end{array}\right]d \atop \sin 13{,}30° = 0{,}2300\right]D$$

Nach dem Einsetzen in die Interpolationsformel $d = \frac{D \cdot n}{10}$ ergibt sich:

$$d = \frac{16 \cdot 7}{10} = 11{,}2 \approx 11.$$

Man addiert 11 Zehntausendstel zu 0,2284 und erhält

$$y = \sin 13{,}27° = 0{,}2295.$$

Beispiel 2:

$$\begin{array}{l} y = \cos 52{,}14° \\ \quad \cos 52{,}10° = 0{,}6143 \\ \quad \cos 52{,}14° = 0{,}61\,.\,. \\ \quad \cos 52{,}20° = 0{,}6129 \end{array}$$

Wächst der Winkel um 10 Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um $D = 14$ Zehntausendstel.

Wächst der Winkel um $n = 4$ Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um d Zehntausendstel.

Die Eigendifferenz berechnet man zu $d = \frac{14 \cdot 4}{10} = 5{,}6$, gerundet 6. Man subtrahiert 6 Zehntausendstel von 0,6143 und erhält

$$y = \cos 52{,}14° = 0{,}6137.$$

Beispiel 3:

$y = \tan 68{,}44°$

$$\begin{array}{rr} \tan 68{,}44° = & 2{,}625 \\ & +\,0{,}005 \\ \hline \tan 68{,}44° = & 2{,}531 \end{array} \qquad d = \frac{13 \cdot 4}{10} = 5{,}2 \approx 5$$

Ist der Winkel in sexagesimaler Teilung, also in Grad, Minuten und Sekunden gegeben, so hat man vor der Benutzung der Tafeln die Minuten (′) und Sekunden (″) in dezimale Teile eines Grades umzurechnen. Für die Umwandlung von m' bzw. s'' in Grad gelten folgende Formeln:

$$\begin{array}{ll} 60' = 1° & 60'' = \left(\frac{1}{60}\right)° \\ 1' = \left(\frac{1}{60}\right)° & 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)° \\ m' = \left(\frac{m}{60}\right)° & s'' = \left(\frac{s}{3600}\right)° \end{array}$$

Beispiel 4:

17° 13′ 25″ sind in Grad und Dezimalgrad zu verwandeln (auf zwei Dezimalstellen).

$13' = \left(\frac{13}{60}\right)° \approx 0{,}217°$ $\qquad 25'' = \left(\frac{25}{3600}\right)° \approx 0{,}007°$

Ergebnis: 17° 13′ 25″ $\approx$ 17,22°

Es gibt auch Tafeln der Winkelfunktionen, denen die sexagesimale Teilung des Winkels zugrunde gelegt ist.

Aufsuchen der Winkel x mit Interpolieren

Steht der gegebene Funktionswert nicht in der Tafel, so hat man beim Aufsuchen des Winkels zu interpolieren.

Beispiel 5:

$\tan x = 0{,}3652$

Der gegebene Funktionswert liegt zwischen den in der Tafel 14 verzeichneten Werten 0,3640 und 0,3659, zu denen die Winkel 20,00° und 20,10° gehören:

$$\frac{10^\circ}{100}\left[\frac{n^\circ}{100}\left[\begin{array}{l}\tan 20{,}00^\circ = 0{,}3640\\ \tan 20{,}0.^\circ = 0{,}3652\end{array}\right]d\atop \tan 20{,}10^\circ = 0{,}3659\right]D$$

Nach dem Einsetzen in die Formel $n = \frac{d \cdot 10}{D}$ ergibt sich:

$$n = \frac{12 \cdot 10}{19} = 6{,}3.. \approx 6.$$

Man addiert 6 Hundertstelgrad zu 20,00° und erhält $x = 20{,}06^\circ$.

Beispiel 6:

$\cos x = 0{,}8768$

$$\begin{array}{rr} x = & 28{,}70^\circ \\ & +\ 0{,}04^\circ \\ \hline x = & 28{,}74^\circ \end{array} \qquad n = \frac{3 \cdot 10}{8} \approx 4$$

Soll der errechnete Winkel in sexagesimaler Teilung ausgedrückt werden, so hat man anschließend umzurechnen:

$$x = 28{,}74^\circ \qquad \begin{array}{l} 0{,}1^\circ = 6';\ 0{,}01^\circ = 36'' \\ 0{,}7^\circ = 7 \cdot 6' = 42' \\ 0{,}04^\circ = 4 \cdot 36'' = 144'' = 2'\,24'' \end{array}$$

$x = 28^\circ\,44'\,24''$

Die Winkelfunktionsleitern auf dem Rechenstab

Werden die Punkte der Sinuskurve mit den Abszissen $x = 0^\circ;\ 10^\circ;\ 20^\circ;\ldots;\ 90^\circ$ senkrecht auf die y-Achse projiziert, so erhält man eine Darstellung der Funktion $y = \sin x$ in Form einer **Funktionsskale.** Auf der Funktionsskale in Abbildung 1.24. sind auf der Einheitslänge 0...1 die Punkte, die den Winkeln 0°; 10°;...; 90° entsprechen, rot markiert. Stark gerundete Werte der Sinusfunktion können somit auf dieser sogenannten **Doppelleiter** abgelesen werden.
Die rote Teilung der Funktionsskale in Abbildung 1.24. ist eine Sinusteilung der Einheitslänge 0 ... 1.

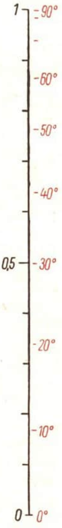


Abb. 1.24.

Die **Sinusfunktionsleiter** auf der Rückseite des Rechenstabes unterscheidet sich von der eben beschriebenen dadurch, daß die Logarithmen der Sinusfunktion abgetragen sind. Auf dem Normalrechenstab sind auf einer Länge von 25 cm die Logarithmen der Zahlen 0,1 bis 1 aufgetragen. Dementsprechend sind bei der Sinusleiter die Logarithmen der Funktion $y = \sin x$ im Wertebereich $0{,}1 \leqq y \leqq 1$ abgetragen und mit den zugehörigen Winkelangaben versehen. Da $0{,}1000 = \sin 5{,}74°$ ist, beginnt die Sinusleiter auf dem Rechenstab mit 5,74° (Abb. 1.25.).
Die Sinusleiter ist auf die logarithmische Skale D des Rechenstabes abgestimmt.

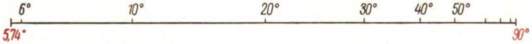


Abb. 1.25.

Somit kann man zu einem gegebenen Winkel x im Bereich $5{,}74° \leqq x \leqq 90°$ den Funktionswert $y = \sin x$ ablesen. Umgekehrt findet man zu einem gegebenen Funktionswert y im Wertebereich $0{,}1 \leqq y \leqq 1$ den zugehörigen Winkel.
Wegen der Komplementbeziehung $\cos x = \sin (90° - x)$ kann die Sinusfunktionsleiter auf dem Rechenstab auch dazu benutzt werden, zu gegebenen Winkeln x im Intervall $84{,}26° \geqq x \geqq 0°$ den Kosinuswert zu finden und umgekehrt.

Stellen Sie eine Sinusfunktionsleiter her, indem Sie auf einem Kartonstreifen auf einer Strecke von 250 mm *Länge die Logarithmen der Werte der Sinusfunktion für folgende Winkel auftragen:* 10°; 20°; 30°; 40°; 50°; 60°; 70°; 80°; 90°*!*
Überlegen Sie, mit welchem Faktor Sie die Mantissen der Logarithmen multiplizieren müssen!
Schreiben Sie die Winkelwerte an!
Vergleichen Sie Ihre Sinusleiter mit der auf dem Rechenstab!

Bei der **Tangensfunktionsleiter** auf dem Rechenstab sind die Logarithmen der Tangensfunktion $y = \tan x$, ebenfalls für den Wertebereich $0{,}1 \leqq y \leqq 1$ abgetragen und mit den zugehörigen Argumenten versehen.
Da $0{,}1000 = \tan 5{,}71°$ und $1{,}000 = \tan 45°$ ist, reicht die Tangensleiter auf dem Rechenstab von 5,71° bis 45°. Man kann also auf dem Rechenstab die natürlichen Zahlenwerte der Tangensfunktion nur im Bereich $5{,}71° \leqq x \leqq 45°$ ablesen und umgekehrt.
Wegen der Komplementbeziehung $\cot x = \tan (90° - x)$ kann die Tangensleiter verwendet werden, zu gegebenen Winkeln x im Bereich $45° \leqq x \leqq 84{,}29°$ den Kotangenswert zu finden und umgekehrt. Außerdem findet man auf dem Rechenstab für Sinus und Tangens kleiner Winkel eine gemeinsame Leiter. Sie reicht von 0,75° bis 5,73° entsprechend den Funktionswerten 0,01 bzw. 0,1 für Sinus und Tangens. Es ist $\sin 0{,}57° = \tan 0{,}57° = 0{,}0100$. Da sich beim Funktionswert 0,1000 die zugehörigen Winkelwerte bei Sinus und Tangens in den Hundertstelgraden unterscheiden (5,74° bzw. 5,71°), ist für den Winkel der mittlere Wert 5,73° zu nehmen. Diese Leiter läßt sich außerdem für die Kosinusfunktion und die Kotangensfunktion im Bereich $89{,}43° \geqq x \geqq 84{,}27°$ verwenden.

Stellen Sie eine Tangensleiter her!

Kombiniertes Tafel-Stab-Rechnen

Falls bei der Lösung einer Aufgabe die Genauigkeit des Rechenstabes ausreicht, aber kein Stab mit Winkelfunktionsleitern zur Verfügung steht, benutzen wir zum Aufsuchen der Funktionswerte die Tafeln der Winkelfunktionen und rechnen im übrigen mit dem Rechenstab. Diese Methode wird als **kombiniertes Tafel-Stab-Rechnen** bezeichnet. Sie hat insbesondere auch Bedeutung bei Winkelfunktionswerten, die auf dem Rechenstab nicht unmittelbar abgelesen werden können.

Geben Sie diese Bereiche des Rechenstabes an!

Beispiel 7: $x = \frac{1}{2} \cdot 8{,}7 \cdot 7{,}1 \cdot \sin 44{,}6°$

Wir finden in Tafel 13 $\sin 44{,}6° = 0{,}7022$.

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnen wir den Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot 8{,}7 \cdot 7{,}1 \cdot 0{,}702$.

Es ergibt sich $x = 21{,}7$.

Beispiel 8: $\sin x = \frac{36{,}6 \cdot \sin 55{,}7°}{32{,}3}$

In Tafel 13 finden wir $\sin 55{,}7° = 0{,}8261$.

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnen wir den Ausdruck $\frac{36{,}6 \cdot 0{,}826}{32{,}3}$ und finden $\sin x = 0{,}936$.

Nun suchen wir in Tafel 13 den Winkel auf. Es ergibt sich

$x = 69{,}4°$.

Beispiel 9: $x = \frac{2{,}73 \cdot \tan 73{,}4° \cdot \cos 3{,}5°}{6{,}84}$

Den Funktionswert tan 73,4° finden wir nicht auf dem Rechenstab. Wir könnten tan 16,6° ablesen und davon den reziproken Wert nehmen. Desgleichen könnten wir cos 3,5° als sin 86,5° ablesen, aber nur mit geringer Genauigkeit. Deshalb suchen wir tan 73,4° in Tafel 14, cos 3,5° in Tafel 13 auf und berechnen den Ausdruck

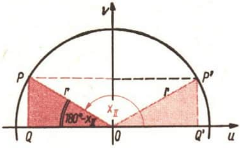
$$\frac{2{,}73 \cdot 3{,}35 \cdot 0{,}998}{6{,}84}.$$

Wir erhalten $x = 1{,}34$.

Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln aus verschiedenen Quadranten (Quadrantenbeziehungen)

Die Werte der Winkelfunktionen für Winkel des I. Quadranten werden aus den Tafeln 13 und 14 entnommen. Aber auch die Funktionswerte von Winkeln in den Quadranten II bis IV können mit Hilfe dieser beiden Tafeln bestimmt werden.

Abb. 1.26.



Es sei x_{II} ein Winkel im II. Quadranten (Abb. 1.26.). Auf Grund der Definitionen (1) bis (4) gelten die folgenden Gleichungen:

$$\sin x_{\text{II}} = \frac{\overline{PQ}}{r}, \qquad \tan x_{\text{II}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}},$$
$$\cos x_{\text{II}} = \frac{\overline{OQ}}{r}, \qquad \cot x_{\text{II}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}.$$

Spiegelt man das Dreieck OQP in Abbildung 1.26. an der v-Achse, so erhält man das Dreieck $OQ'P'$ im I. Quadranten. Der Winkel $POQ = (180° - x_{\text{II}})$ entspricht dann dem Winkel $P'OQ$. Weiter ist $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ und $\overline{OQ} = -\overline{OQ'}$! Setzt man in die obigen Gleichungen ein und berücksichtigt, daß

$$\frac{\overline{P'Q'}}{r} = \sin(180° - x_{\text{II}}), \qquad \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OQ'}} = \tan(180° - x_{\text{II}}),$$
$$\frac{\overline{OQ'}}{r} = \cos(180° - x_{\text{II}}), \qquad \frac{\overline{OQ'}}{\overline{P'Q'}} = \cot(180° - x_{\text{II}})$$

ist, so ergibt sich:

$$\sin x_{\text{II}} = \sin(180° - x_{\text{II}}), \qquad \tan x_{\text{II}} = -\tan(180° - x_{\text{II}}),$$
$$\cos x_{\text{II}} = -\cos(180° - x_{\text{II}}), \qquad \cot x_{\text{II}} = -\cot(180° - x_{\text{II}}).$$

Diese Gleichungen setzen die Winkelfunktionen eines Winkels im II. Quadranten zu den entsprechenden Winkelfunktionen des im I. Quadranten gelegenen Supplementwinkels in Beziehung.

Die Quadrantenbeziehung für den III. Quadranten erhält man mit Hilfe einer Spiegelung des Dreiecks OPQ in Abbildung 1.27. am Koordinatenursprung des uv-Koordinatensystems. Das bedeutet, daß dieses Dreieck um O um den Winkel 180° gedreht wird. Man erhält wiederum ein Dreieck $OQ'P'$ im I. Quadranten, und der Winkel $QOP = (x_{\text{III}} - 180°)$ entspricht dem Winkel $Q'OP'$.

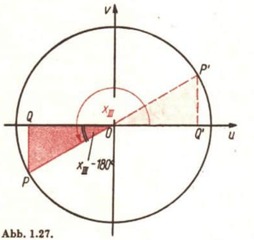


Abb. 1.27.

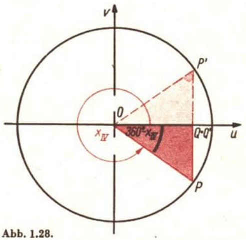


Abb. 1.28.

Führen Sie die Untersuchungen über die Winkelfunktionen im III. Quadranten weiter!

Die Quadrantenbeziehung für den IV. Quadranten wird mit Hilfe einer Spiegelung des Dreiecks OQP mit dem Winkel $POQ = (360° - x_{\text{IV}})$ an der u-Achse gewonnen (Abb. 1.28.).

Führen Sie die Untersuchungen über die Winkelfunktionen im IV. Quadranten selbst durch!

Zwischen den Winkelfunktionen, die zu Winkeln in höheren Quadranten gehören, und den Winkelfunktionen des entsprechenden Winkels im I. Quadranten gelten die folgenden Beziehungen:

II. Quadrant

(10) $\sin x_{II} = \sin(180° - x_{II})$ $\quad$ $\tan x_{II} = -\tan(180° - x_{II})$

$\cos x_{II} = -\cos(180° - x_{II})$ $\quad$ $\cot x_{II} = -\cot(180° - x_{II})$

III. Quadrant

(11) $\sin x_{III} = -\sin(x_{III} - 180°)$ $\quad$ $\tan x_{III} = \tan(x_{III} - 180°)$

$\cos x_{III} = -\cos(x_{III} - 180°)$ $\quad$ $\cot x_{III} = \cot(x_{III} - 180°)$

IV. Quadrant

(12) $\sin x_{IV} = -\sin(360° - x_{IV})$ $\quad$ $\tan x_{IV} = -\tan(360° - x_{IV})$

$\cos x_{IV} = \cos(360° - x_{IV})$ $\quad$ $\cot x_{IV} = -\cot(360° - x_{IV})$

Die Beziehungen (10) bis (12) führen die Winkelfunktionen im II. bis IV. Quadranten auf die entsprechenden Funktionen im I. Quadranten zurück.

Beispiele:

10) $\cos 152° = -\cos(180° - 152°) = -\cos 28°$
11) $\cot 215° = \cot(215° - 180°) = \cot 35°$
12) $\tan 312° = -\tan(360° - 312°) = -\tan 48°$

Allgemein:

Um den Wert einer Winkelfunktion zu einem Winkel x ($90° < x < 360°$) zu ermitteln, sucht man in den Tafeln 13 bzw. 14 den Wert der gleichen Funktion für den Winkel $180° - x$, $x - 180°$ bzw. $360° - x$ auf. Zur schnellen Vorzeichenbestimmung dient die Tabelle auf Seite 14.
Man erkennt, daß bei jeder der vier Funktionen jedes Vorzeichen genau zweimal vorkommt. Bei einem gegebenen Funktionswert eines Winkels x findet man infolgedessen für den Winkel (im Bereich von $0° \leqq x < 360°$) zwei Lösungen.

Beispiel 13:

$\sin x = 0{,}9664$

Der Funktionswert ist positiv, also liegen die Winkel x im I. und II. Quadranten.

$x_I = x \quad (0° \leqq x \leqq 90°)$
$x_{II} = 180° - x \quad (0° \leqq x \leqq 90°)$

Aus der Tafel entnimmt man $x = 75{,}1°$.
Demnach ist

$x_I = 75{,}1°;$
$x_{II} = 180° - 75{,}1° = 104{,}9°.$

Beispiel 14:

$\cos x = -0{,}7145$

Der Funktionswert ist negativ, also liegen die Winkel x im II. und III. Quadranten.

$x_{II} = 180° - x \; (0° \leqq x \leqq 90°)$
$x_{III} = 180° + x \; (0° \leqq x \leqq 90°)$

Aus der Tafel entnimmt man $x = 44{,}4°$.

Demnach ist

$$x_{II} = 180° - 44{,}4° = 135{,}6°;$$
$$x_{III} = 180° + 44{,}4° = 224{,}4°.$$

Aufgaben

Übungen im Tafelrechnen

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tafeln 13 und 14 die folgenden Funktionswerte!

1.	**a)** sin 12°	**b)** sin 84°	**c)** sin 3°	**d)** sin 29°
	e) sin 37°	**f)** sin 135°	**g)** sin 97°	**h)** sin 200°
	i) cos 2°	**k)** cos 17°	**l)** cos 32°	**m)** cos 51°
	n) cos 68°	**o)** cos 150°	**p)** cos 101°	**q)** cos 213°
2.	**a)** tan 21°	**b)** tan 58°	**c)** tan 5°	**d)** tan 12°
	e) tan 31°	**f)** tan 120°	**g)** tan 91°	**h)** tan 261°
	i) cot 8°	**k)** cot 13°	**l)** cot 64°	**m)** cot 76°
	n) cot 87°	**o)** cot 110°	**p)** cot 249°	**q)** cot 96°
3.	**a)** sin 5,6°	**b)** sin 38,1°	**c)** sin 27,3°	**d)** sin 77,7°
	e) sin 40,9°	**f)** sin 113,5°	**g)** sin 300,2°	**h)** sin 97,3°
	i) cos 53,5°	**k)** cos 11,8°	**l)** cos 44,6°	**m)** cos 87,6°
	n) cos 58,9°	**o)** cos 129,6°	**p)** cos 321,4°	**q)** cos 131,5°
4.	**a)** tan 0,5°	**b)** tan 88,0°	**c)** tan 56,1°	**d)** tan 43,9°
	e) tan 68,8°	**f)** tan 145,7°	**g)** tan 336,5°	**h)** tan 172,5°
	i) cot 32,3°	**k)** cot 52,4°	**l)** cot 72,9°	**m)** cot 64,8°
	n) cot 53,2°	**o)** cot 164,8°	**p)** cot 282,2°	**q)** cot 99,9°
5.	**a)** sin 58,11°	**b)** sin 63,44°	**c)** sin 87,15°	**d)** sin 34,26°
	e) sin 19,24°	**f)** sin 147,87°	**g)** sin 219,73°	**h)** sin 331,12°
	i) cos 22,94°	**k)** cos 17,32°	**l)** cos 37,22°	**m)** cos 9,67°
	n) cos 1,12°	**o)** cos 177,13°	**p)** cos 209,65°	**q)** cos 348,48°
6.	**a)** tan 1,92°	**b)** tan 17,44°	**c)** tan 28,55°	**d)** tan 39,67°
	e) tan 41,72°	**f)** tan 216,36°	**g)** tan 298,47°	**h)** tan 154,41°
	i) cot 14,74°	**k)** cot 26,59°	**l)** cot 34,53°	**m)** cot 43,88°
	n) cot 53,46°	**o)** cot 224,33°	**p)** cot 337,29°	**q)** cot 135,23°
7.	**a)** cos 74,37°	**b)** tan 73,06°	**c)** cot 216,36°	**d)** cos 224,33°
	e) sin 13,79°	**f)** cot 64,42°	**g)** sin 298,47°	**h)** sin 337,29°
	i) tan 87,44°	**k)** sin 81,53°	**l)** cot 211,49°	**m)** sin 315,32°
	n) cot 53,76°	**o)** cos 25,61°	**p)** cos 265,35°	**q)** tan 298,46°
8.	**a)** sin 0,2°	**b)** sin 0,83°	**c)** sin 1,77°	**d)** sin 2,6°
	tan 0,2°	tan 0,83°	tan 1,77°	tan 2,6°
	e) sin 3,25°	**f)** sin 4,71°	**g)** sin 5,0°	**h)** sin 9,1°
	tan 3,25°	tan 4,71°	tan 5,0°	tan 9,1°

9. Bis zu welchen Winkeln stimmen die Werte der Sinus- und der Tangensfunktion
a) auf vier Dezimalstellen, **b)** auf drei Dezimalstellen überein?
c) Begründen Sie diese Erkenntnisse am Kreis, und formulieren Sie sie!

10. Verwandeln Sie die sexagesimale Teilung der folgenden Winkel in die dezimale (auf zwei Dezimalstellen)!

a) 16° 18′	**b)** 38° 24′	**c)** 79° 39′	**d)** 24° 25′
e) 20° 30′ 30″	**f)** 54° 3′ 48″	**g)** 78° 52′ 33″	**h)** 0° 5′ 13″

11. Rechnen Sie die folgenden Winkelangaben in Grad, Minuten und Sekunden um!

a) 27,1° **b)** 14,9° **c)** 34,12° **d)** 50,08°
e) 68,47° **f)** 73,57° **g)** 7,93° **h)** 40,28°

12. Suchen Sie für die folgenden Winkel die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion auf!

a) 22,75° **b)** 68,24° **c)** 34,77° **d)** 79,67°
e) 5,02° **f)** 89,07° **g)** 354,63° **h)** 244,66°
i) 327,76° **k)** 173,25° **l)** 41° 24′ **m)** 4° 29′ 58″

13. Suchen Sie für die folgenden Winkel die Werte der Tangens- und der Kotangensfunktion auf!

a) 79,99° **b)** 4,16° **c)** 32,07° **d)** 25,33°
e) 84,31° **f)** 68,23° **g)** 155,37° **h)** 93,50°
i) 252,30° **k)** 300,23° **l)** 57° 44′ **m)** 44° 50′ 40″

14. Berechnen Sie im Bereich $89{,}00° \leqq x \leqq 89{,}10°$ die Werte der Tangensfunktion für Hundertstelgrad durch lineare Interpolation (Tafel 14)! — Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Werten der Tangensfunktion in der untenstehenden Tabelle! Diese sind einer genaueren Tafel entnommen. — Bilden Sie die Differenzen zwischen den interpolierten und den in der Tabelle stehenden Funktionswerten!
Beurteilen Sie für verschiedene Intervalle von x die Möglichkeit, bei der Tangensfunktion linear zu interpolieren!

x	89,00°	,01°	,02°	,03°	,04°	,05°	,06°	,07°	,08°	,09°	,10°
$\tan x$	57,29	57,87	58,46	59,06	59,68	60,31	60,95	61,60	62,27	62,96	63,66

15. Suchen Sie die folgenden Funktionswerte auf!

a) tan 87,88° **b)** tan 89,05° **c)** cot 1,33° **d)** cot 2,87° **e)** cot 0,92°

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tafeln 13 und 14 die Winkel, denen die folgenden Funktionswerte zugeordnet sind!

16. a) $\sin x = 0{,}2756$ **b)** $\sin x = 0{,}6157$ **c)** $\sin x = 0{,}8829$ **d)** $\sin x = 0{,}4787$
e) $\sin x = 0{,}2990$ **f)** $\sin x = -0{,}5105$ **g)** $\cos x = 0{,}0454$ **h)** $\cos x = 0{,}9921$
i) $\cos x = 0{,}1547$ **k)** $\cos x = -0{,}6858$ **l)** $\cos x = 0{,}7325$ **m)** $\cos x = -0{,}9724$

17. a) $\tan x = 0{,}0699$ **b)** $\tan x = 0{,}2679$ **c)** $\tan x = 1{,}483$ **d)** $\tan x = -0{,}9725$
e) $\tan x = 0{,}1495$ **f)** $\tan x = -0{,}4536$ **g)** $\cot x = 1{,}865$ **h)** $\cot x = 0{,}3115$
i) $\cot x = 2{,}592$ **k)** $\cot x = -3{,}420$ **l)** $\cot x = -5{,}730$ **m)** $\cot x = 0{,}0052$

18. a) $\sin x = 0{,}6407$ **b)** $\sin x = 0{,}4711$ **c)** $\sin x = 0{,}8308$ **d)** $\sin x = -0{,}6300$
e) $\sin x = 0{,}6070$ **f)** $\sin x = 0{,}0081$ **g)** $\cos x = 0{,}1700$ **h)** $\cos x = 0{,}3473$
i) $\cos x = -0{,}9872$ **k)** $\cos x = 0{,}0037$ **l)** $\cos x = -0{,}0323$ **m)** $\cos x = 0{,}9999$

19. a) $\tan x = 0{,}3259$ **b)** $\tan x = 0{,}6425$ **c)** $\tan x = 1{,}022$ **d)** $\tan x = -8{,}190$
e) $\tan x = -0{,}7420$ **f)** $\tan x = 0{,}6000$ **g)** $\cot x = 0{,}2510$ **h)** $\cot x = 0{,}4758$
i) $\cot x = -1{,}321$ **k)** $\cot x = 1{,}085$ **l)** $\cot x = -0{,}9980$ **m)** $\cot x = 0{,}0020$

Rechnen Sie die gefundenen Winkel in sexagesimal geteilte Grade um!

20. Bestimmen Sie die Winkel x, die den folgenden Funktionswerten zugeordnet sind!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin x$	0	1	− 0,5	0,3746	− 0,7314	0,1500	− 0,0728
$\cos x$	0	1	− 1	0,7071	− 0,9336	0,2358	− 0,7005
$\tan x$	0	1	2	− 3	− 0,4452	0,9387	− 0,0120
$\cot x$	0	1	− 3	− 16,50	0,1700	− 1,319	− 2,439

Übungen mit dem Rechenstab

21. Stellen Sie am Rechenstab fest, in welchem Bereich die Sinusfunktionsleiter gilt! Die Unterteilung wechselt. Wie viele Teilbereiche mit verschiedener Unterteilung gibt es? Beschreiben Sie die Unterteilung! Was bedeutet in jedem dieser Bereiche ein Skalenteil?

Bestimmen Sie mit Hilfe des Rechenstabes!

22. a) $\sin 85°$	**b)** $\sin 72°$	**c)** $\sin 61{,}5°$	**d)** $\sin 24{,}3°$
e) $\sin 10{,}4°$	**f)** $\sin 7{,}42°$	**g)** $\sin 5{,}95°$	**h)** $\sin 213{,}38°$
i) $\sin 323{,}83°$	**k)** $\cos 22°$	**l)** $\cos 57{,}6°$	**m)** $\cos 73{,}27°$
23. a) $\tan 43°$	**b)** $\tan 37{,}2°$	**c)** $\tan 22{,}22°$	**d)** $\tan 17{,}29°$
e) $\tan 6{,}15°$	**f)** $\tan 186{,}35°$	**g)** $\tan 42{,}4°$	**h)** $\tan 283{,}55°$
i) $\tan 354{,}21°$	**k)** $\cot 48°$	**l)** $\cot 54{,}2°$	**m)** $\cot 79{,}66°$
24. a) $\sin 2°$	**b)** $\sin 5{,}5°$	**c)** $\sin 1{,}92°$	**d)** $\tan 0{,}75°$
e) $\tan 1{,}07°$	**f)** $\tan 2{,}96°$	**g)** $\cos 85°$	**h)** $\cos 87{,}3°$
i) $\cos 89{,}08°$	**k)** $\cot 86°$	**l)** $\cot 84{,}9°$	**m)** $\cot 88{,}63°$

25. Lösen Sie, soweit möglich, die Aufgaben **5** bis **7** mit Hilfe des Rechenstabes! Vergleichen Sie in den verschiedenen Teilbereichen des Rechenstabes die Genauigkeit mit der der Tafel!

Bestimmen Sie mit Hilfe des Rechenstabes die Winkel, die den folgenden Funktionswerten zugeordnet sind!

26. a) $\sin x = 0{,}99$	**b)** $\sin x = 0{,}87$	**c)** $\sin x = 0{,}654$	**d)** $\sin x = 0{,}358$
e) $\sin x = -0{,}194$	**f)** $\sin x = 0{,}111$	**g)** $\sin x = 0{,}722$	**h)** $\sin x = -0{,}533$
i) $\sin x = 0{,}276$	**k)** $\cos x = 0{,}23$	**l)** $\cos x = 0{,}872$	**m)** $\cos x = 0{,}433$
27. a) $\tan x = 0{,}97$	**b)** $\tan x = 0{,}83$	**c)** $\tan x = 0{,}755$	**d)** $\tan x = 0{,}444$
e) $\tan x = 0{,}123$	**f)** $\tan x = -0{,}337$	**g)** $\tan x = -0{,}842$	**h)** $\tan x = 0{,}229$
i) $\tan x = 0{,}656$	**k)** $\cot x = 0{,}17$	**l)** $\cot x = 0{,}778$	**m)** $\cot x = 0{,}100$
28. a) $\sin x = 0{,}09$	**b)** $\sin x = 0{,}082$	**c)** $\sin x = 0{,}054$	**d)** $\tan x = 0{,}017$
e) $\tan x = 0{,}0323$	**f)** $\tan x = 0{,}0122$	**g)** $\cos x = 0{,}08$	**h)** $\cos x = 0{,}045$
i) $\cos x = 0{,}0226$	**k)** $\cot x = 0{,}07$	**l)** $\cos x = 0{,}061$	**m)** $\cot x = 0{,}0118$

29. Lösen Sie, soweit möglich, die Aufgaben **18** und **19** mit Hilfe des Rechenstabes! Beurteilen Sie die Genauigkeit des Rechenstabes in den verschiedenen Teilbereichen!

Anwendungen

30. Beweisen Sie das folgende Formelsystem ($0° \leqq x \leqq 90°$)!

II. Quadrant

$$\sin(180° - x) = \sin x \qquad \tan(180° - x) = -\tan x$$
$$\cos(180° - x) = -\cos x \qquad \cot(180° - x) = -\cot x$$

III. Quadrant

$$\sin(180° + x) = -\sin x \qquad \tan(180° + x) = \tan x$$
$$\cos(180° + x) = -\cos x \qquad \cot(180° + x) = \cot x$$

IV. Quadrant

$$\sin(360° - x) = -\sin x \qquad \tan(360° - x) = -\tan x$$
$$\cos(360° - x) = \cos x \qquad \cot(360° - x) = -\cot x$$

31. a) Im II. bis IV. Quadranten können die Winkel x auch durch folgende Beziehungen ausgedrückt werden ($0° \leqq x' \leqq 90°$):

$90° + x'$; $270° - x'$; $270° + x'$.

Stellen Sie unter diesen Bedingungen Quadrantenbeziehungen für die vier Winkelfunktionen auf! Zeichnen Sie am Kreis entsprechende Figuren!

b) In welchen Fällen sind die von 90° bzw. 270° ausgehenden Quadrantenbeziehungen den von 180° und 360° ausgehenden Beziehungen (10) bis (12) bzw. denen in Aufgabe **30** vorzuziehen?

c) Führen Sie auf verschiedene Arten auf Funktionen im I. Quadranten zurück: sin 110,43°; cos 200°; tan 290,86°; cot 185°!

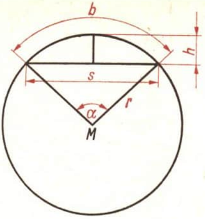


Abb. 1.29.

32. a) Berechnen Sie die zu einem beliebigen Zentriwinkel α gehörige Sehne s, den zugehörigen Kreisbogen $\widehat{b}$ und die Pfeilhöhe h (Abstand der Bogenmitte von der Sehne) eines Kreises mit dem Radius r als Funktionen des Zentriwinkels, und stellen Sie diese Funktionen graphisch dar (Abb. 1.29.)!

b) Wie lauten die analytischen Darstellungen für die Funktionen $s(\alpha)$; $\widehat{b}(\alpha)$ und $h(\alpha)$ am Einheitskreis?

33. Den Flächeninhalt eines Kreissegments über der Sehne s, der von dem Kreisbogen $\widehat{b}$ begrenzt wird, berechnet man als Differenz aus dem Kreissektor zum Bogen $\widehat{b}$ und dem gleichschenkligen Dreieck über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Kreismittelpunkt liegt.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Kreissegments zum Zentriwinkel $\alpha = 54°$ in einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ m?

b) Berechnen Sie die Pfeilhöhe h des Segments aus Aufgabe **a**!

c) Von einem Segment sind die Sehne $s = 5{,}40$ m (Spannweite s) und die Pfeilhöhe $h = 0{,}50$ m (Bogenhöhe h) gegeben. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kreissegments und den zugehörigen Zentriwinkel!

d) Stellen Sie

1) den Sektor zum Bogen $\widehat{b}$ eines Einheitskreises,

2) den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Mittelpunkt des Einheitskreises liegt,

3) das Kreissegment über der Sehne s, das von dem Kreisbogen $\widehat{b}$ begrenzt wird,

als Funktionen des Zentriwinkels α analytisch und graphisch dar!

34. Berechnen Sie den Umfang der Breitenkreise, auf denen folgende Orte liegen:

a) Berlin ($\varphi = 52{,}4°$ N; $\lambda = 13{,}1°$ O),
b) Moskau ($\varphi = 55{,}8°$ N, $\lambda = 37{,}6°$ O),
c) Johannesburg (Republik Südafrika) ($\varphi = 26{,}2°$ S; $\lambda = 28{,}1°$ O),
d) La Plata (Argentinien) ($\varphi = 34{,}9°$ S; $\lambda = 57{,}9°$ W),
e) Peking ($\varphi = 39{,}9°$ N; $\lambda = 116{,}5°$ O),
f) Ihr Heimatort!

1.4. Das rechtwinklige Dreieck

Konische Zapfen (auch Kegelzapfen oder kurz „Kegel" genannt) können auf der Drehmaschine durch Schrägstellen des Oberteils am verschiebbaren Werkzeugschlitten, des sogenannten Längssupports, gedreht werden (Abb. 1.30. und 1.31.). In der Mathematik bezeichnet man einen solchen Körper als **Kegelstumpf** (Abb. 1.32.). Die Symbole l, D und d werden in der Technik zur Bezeichnung der Größen eines Kegelzapfens verwendet.

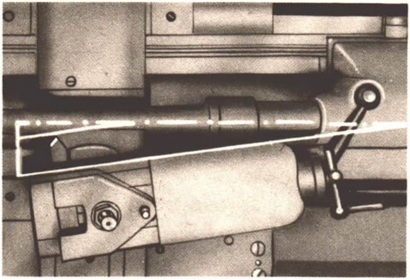


Abb. 1.30.

Der Einstellwinkel des Längssupports β hängt vom Kegelwinkel α ab; es ist $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (Abb. 1.31.).
In der Praxis wird die Gestalt des Kegels nicht durch den Winkel α angegeben, sondern durch die Verjüngung $\frac{1}{x}$ (Fachbezeichnung: Kegel $1:x$). Das bedeutet, daß der Durchmesser D sich auf einer Zapfenlänge von x mm um 1 mm vermindert (Abb. 1.33.). Hat der Kegel die Länge l, so verjüngt er sich von D auf d, das heißt

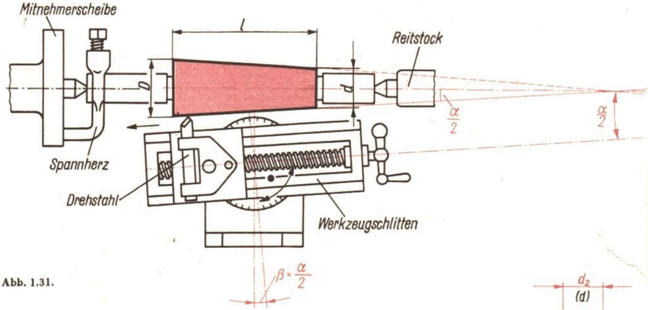


Abb. 1.31.

um $(D - d)$. Wendet man den Strahlensatz auf die Figur in Abbildung 1.34. an, so gilt:

$$1 : x = (D - d) : l.$$

Die Verjüngung $\frac{1}{x}$ beträgt also $\frac{D-d}{l}$.

Sowohl in Abbildung 1.33. als auch in Abbildung 1.34. sind „Kegel 1:4" dargestellt.
Für das Arbeiten auf der Drehmaschine ist es nötig, aus der Vorschrift $1:x$ den Einstellwinkel β des Supports, also letztlich den Kegelwinkel α, zu bestimmen.

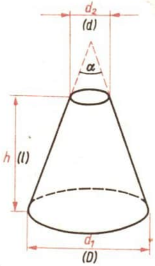


Abb. 1.32.

Abb. 1.33.

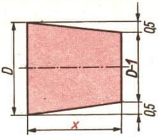
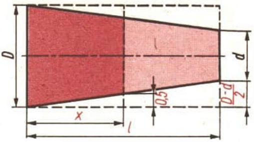


Abb. 1.34.



1) *Bestimmen Sie geometrisch den Kegelwinkel α, wenn die Verjüngung 1:4 beträgt!*

2) *Ein Turm wirft auf eine waagerechte Ebene einen Schatten von der Länge l, während die Sonne unter dem Winkel α gegen die Horizontallinie gesehen wird. Die Turmhöhe h ist aus der Schattenlänge l und dem Winkel α zu bestimmen.*

Die Bearbeitung technischer oder naturwissenschaftlicher Probleme führt häufig zu Aufgaben, in denen in einer Figur Zusammenhänge zwischen Streckenverhältnissen und Winkeln an Dreiecken auftreten. Die rechnerische Lösung solcher Aufgaben ist mit Hilfe der ebenen Trigonometrie[1] möglich.

Die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Zur Wiederholung:

1. Welchen Namen haben die Seiten des rechtwinkligen ebenen Dreiecks?
2. Was versteht man unter ähnlichen Dreiecken?
3. Geben Sie Bedingungen an, unter denen Dreiecke ähnlich sind!
4. Was wissen Sie über das Verhältnis gleichliegender Seiten in ähnlichen Dreiecken?
5. Was wissen Sie über gleichliegende Winkel in ähnlichen Dreiecken?

Die Winkelfunktionen wurden im Abschnitt 1.1. mit Hilfe eines Kreispunktes $P(u; v)$ im Kreis mit dem Radius r erklärt. Das entstehende Dreieck OQP ist rechtwinklig (Abb. 1.5.). In bezug auf den Winkel x werden $\overline{PQ}$ als Gegenkathete und $\overline{OQ}$ als Ankathete bezeichnet.
Am rechtwinkligen Dreieck OQP gelten auf Grund der Definitionen (1) bis (4), Abschnitt 1.1., die folgenden Beziehungen:

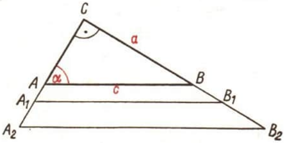
$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

In der Abbildung 1.35. werden drei rechtwinklige Dreiecke (ABC, A_1B_1C und A_2B_2C) dargestellt. Die Dreiecke sind ähnlich, deshalb gilt:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{B_2C}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{a}{c}.$$

Abb. 1.35.



[1] Tri-gono-metrie (griech.) wörtlich: Drei-Winkel- oder Drei-Eck-Messung; frei: Dreiecksberechnung.

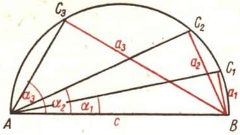


Abb. 1.36.

Dieses Verhältnis (Gegenkathete für den Winkel α : Hypotenuse) ist aber nach der Definition (1), Abschnitt 1.1., gleich dem Sinus des Winkels α. Das gilt für alle ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel α:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke der Abbildung 1.36. stimmen in der Hypotenuse c überein.

Wo liegen die Scheitel C_n der rechten Winkel aller Dreiecke, die c als Hypotenuse haben?

Der Winkel mit dem Scheitel A nimmt zu, wenn man vom Dreieck ABC_1 zum Dreieck ABC_2 und von diesem zum Dreieck ABC_3 übergeht. Es gilt die Ungleichung

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3.$$

Mit dem Winkel α wächst die zugehörige Gegenkathete a_n. Da die Hypotenuse c konstant bleibt, wächst mit dem Winkel auch das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse; es ist

$$\frac{a_1}{c} < \frac{a_2}{c} < \frac{a_3}{c}.$$

Allgemein gilt:

Wenn im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel wächst, so nimmt auch der Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse zu. Im rechtwinkligen Dreieck ist also das Verhältnis der Gegenkathete eines Winkels zur Hypotenuse eine Funktion des Winkels. Umgekehrt hängt der Winkel von dem Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse ab. Diese Abhängigkeit wird durch die Sinusfunktion ausgedrückt:

(13) $\sin\alpha = \frac{a}{c}.$

Satz 1: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus eines Winkels der Quotient aus der Gegenkathete dieses Winkels und der Hypotenuse.

Analoge Betrachtungen können für die Seitenverhältnisse $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ durchgeführt werden. Dabei ergeben sich

(14) $\cos\alpha = \frac{b}{c},$

(15) $\tan\alpha = \frac{a}{b},$

(16) $\cot\alpha = \frac{b}{a}.$

Satz 2: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Kosinus eines Winkels der Quotient aus der Ankathete dieses Winkels und der Hypotenuse.

Satz 3: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Tangens eines Winkels der Quotient aus der Gegenkathete und der Ankathete dieses Winkels.

Satz 4: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Kotangens eines Winkels der Quotient aus der Ankathete und der Gegenkathete dieses Winkels.

Untersuchen Sie auf Grund der Gleichungen 13 bis 16 die Grenzfälle $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$! Halten Sie c konstant, und weisen Sie nach, daß die Ergebnisse mit den Werten der Winkelfunktionen für diese Winkel übereinstimmen!

Auf Grund der Sätze 1 bis 4 gelten im rechtwinkligen Dreieck folgende Beziehungen:

$$a : c = \sin\alpha = \cos\beta, \qquad b : c = \cos\alpha = \sin\beta, \qquad (\gamma = 90°)$$
$$a : b = \tan\alpha = \cot\beta, \qquad b : a = \cot\alpha = \tan\beta.$$

Drücken Sie diese Beziehungen in Worten aus, und leiten Sie die Formeln (5) und (6), Abschnitt 1.2., her!

Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}ab$. Wir drücken nach (13) und (14) die Katheten durch die Hypotenuse und Winkelfunktionen von α aus:

(17) $A = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha.$

Berechnung spezieller Funktionswerte

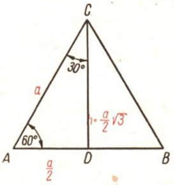
Zur Wiederholung:

1. Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a, und berechnen Sie die Dreieckshöhe!
2. Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Seite a, und ziehen Sie die Diagonale!
   a) Was für Figuren entstehen? b) Wie lang ist die Diagonale?

Für die Winkel 30°, 45° und 60° können die Werte der Winkelfunktionen durch die Anwendung von Sätzen aus der Planimetrie berechnet werden.

Für den Winkel 30° verwendet man hierbei ein gleichseitiges Dreieck (Abb. 1.37.). Es ergibt sich:

Abb. 1.37.



$\sin 30° = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}$

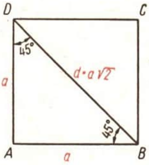
$\cos 30° = h : a = \frac{a}{2}\sqrt{3} : a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 30° = \frac{a}{2} : h = \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\cot 30° = h : \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}$

Bestimmen Sie die Werte der vier Winkelfunktionen für den Winkel 60°, indem Sie ein gleichseitiges Dreieck (Abb. 1.37.) zugrunde legen!

Abb. 1.38.



Die Funktionswerte für den Winkel 45° können mit Hilfe eines Quadrates ermittelt werden (Abb. 1.38.). Es ergibt sich:

$\sin 45° = a : d = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 45° = a : d = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan 45° = a : a = 1$

$\cot 45° = a : a = 1$

Verwandeln Sie die Funktionswerte für die Winkel 30°, 45° und 60° in Dezimalzahlen! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Angaben in den Tafeln 13 und 14!

Wir wissen, daß tan x größer wird als jede angebbare Zahl, wenn x gegen 90° strebt, und ebenso cot x, wenn x gegen 0° strebt. Dafür verwendet man das Symbol:

$$\tan x \to \infty, \quad \text{falls } x \to 90^\circ$$
$$\cot x \to \infty, \quad \text{falls } x \to 0^\circ,$$

gelesen: „tan x (cot x) wird größer als jede angebbare Zahl, falls x gegen 90° (gegen 0°) strebt".
Die auf diese Weise berechneten Funktionswerte und die für 0° und 90° werden in der folgenden Übersicht zusammengefaßt.

x	0°	30°	45°	60°	90°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	(∞)
cot x	(∞)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Die gedächtnismäßige Beherrschung dieser Funktionswerte ist vorteilhaft. Dabei genügt es, wegen der Komplementbeziehungen (9), wenn man sich nur die Folgen der Sinus- und Tangenswerte einprägt. Für die Sinuswerte kann man dazu die folgende Gedächtnisstütze benutzen:

x	0°	30°	45°	60°	90°
sin x	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

Die Logarithmen der Winkelfunktionen

Zur Erleichterung trigonometrischer Berechnungen wendet man auch auf die Werte der Winkelfunktionen das Rechnen mit Logarithmen an. Um ein doppeltes Aufschlagen von Werten zu vermeiden (1. Aufschlagen des Funktionswertes, 2. Aufschlagen des Logarithmus des Funktionswertes), wurden die Logarithmen der Winkelfunktionswerte tabellarisch in den Tafeln 2 und 3 des Tafelwerks erfaßt.
Die Tafeln der Logarithmen der Winkelfunktionen sind in gleicher Weise zu handhaben wie die Tafeln der Werte der Winkelfunktionen. Dabei ist zu beachten, daß die Winkelfunktionswerte überwiegend kleiner als 1 sind und somit Logarithmen mit negativen Kennzahlen haben.

Beispiel 1:

$\sin 23{,}3^\circ = 0{,}3955$

$\lg \sin 23{,}3^\circ = \lg 0{,}3955 : 0{,}5972 - 1$

In den Tafeln 2 und 3 sind alle Logarithmen mit negativer Kennzahl auf die Kennzahl

–10 gebracht worden, die aus drucktechnischen Gründen fehlt. Es muß also jeweils –10 ergänzt werden. In Tafel 2 steht zum Beispiel für

lg sin 23,3° der Wert 9,5972; das bedeutet: lg sin 23,3° = 9,5972 – 10

In der Rechenpraxis subtrahiert man beim Aufschlagen der Logarithmen von der Form 9, ...; 8, ...; 7, ...; usw. im Kopfe die Zahl 10 und erhält 0, ... – 1; 0, ... – 2; 0, ... – 3; usw. Umgekehrt ist zu einem gegebenen Logarithmus mit negativer Kennzahl vor Benutzung der Tafel die Zahl 10 zu addieren. Infolge der dezimalen Teilung des Grades ist die Interpolation dieselbe wie beim Rechnen mit Logarithmen. Aus der Tafel 4 entnimmt man die Logarithmen der Sinus- und Tangenswerte für Winkel von 0° bis 5° und die Logarithmen der Kosinus- und Kotangenswerte von 85° bis 90° mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad unmittelbar, durch Interpolation mit einer Genauigkeit von Tausendstelgrad.

Beispiele:

	Werte der Winkelfunktionen (Tafeln 13 und 14)	Logarithmen der Funktionswerte (Tafeln 2, 3 bzw. 4)
2) sin 21,87°	0,3725	9,5711 – 10 = 0,5711 – 1
3) cos 31,58°	0,8519	9,9304 – 10 = 0,9304 – 1
4) tan 69,43°	2,664	0,4257
5) cot 86,68°	0,0580	8,7635 – 10 = 0,7635 – 2

Beim Rechnen mit den Logarithmen der Werte der Winkelfunktionen von Winkeln über 90° müssen die negativen Vorzeichen außer Betracht gelassen werden. Denn Logarithmen von negativen Zahlen existieren im Bereich der reellen Zahlen nicht. Man muß also in diesen Fällen mit den absoluten Beträgen der Werte der Winkelfunktionen rechnen. Im übrigen gelten dann die gleichen Gesetze, die für das Rechnen mit den Logarithmen bei Winkeln im I. Quadranten erklärt wurden.

Beispiel 6: lg cos 152°

Der Funktionswert cos 152° ist negativ. Deshalb wird der Logarithmus des Betrages des Winkelfunktionswertes angegeben:

$$\lg |\cos 152°| = 0{,}9459 - 1$$

Beispiel 7: $\lg |\tan x| = 0{,}4389$ $(\tan x < 0)$

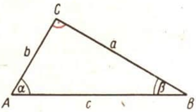
In diesem Falle soll der Wert der Winkelfunktion, zu dem der Logarithmus angegeben ist, negativ sein. Man bestimmt zunächst den im I. Quadranten liegenden Winkelwert und erhält $x = 70°$. Unter Berücksichtigung der Vorschrift $\tan x < 0$ findet man als Lösungen:

$$x_1 = 180° - x = 110°$$
$$x_2 = 360° - x = 290°.$$

Berechnung am rechtwinkligen Dreieck

Da im rechtwinkligen Dreieck immer der rechte Winkel gegeben ist, sind zur Bestimmung dieses Dreiecks nur noch zwei Stücke nötig. Dazu können die Hypotenuse, die beiden Katheten, einer der spitzen Winkel, der Flächeninhalt und andere Stücke in geeigneter Zusammensetzung dienen. Beschränken wir uns auf die Seiten und Winkel (primäre Stücke), so sind vier Fälle möglich (Abb. 1.39.).

Abb. 1.39.



Gegeben können sein:

1. die Hypotenuse und ein Winkel;
2. eine Kathete und ein Winkel;
3. eine Kathete und die Hypotenuse;
4. die beiden Katheten.

Stellen Sie für das Dreieck in Abbildung 1.39. alle möglichen Fälle zusammen!

Die Berechnungen werden in zwei Schritten durchgeführt:

1. Die Aufgabe wird unter Verwendung der allgemeinen Symbole (a, b, c; α, β; A usw.) gelöst (Allgemeine Lösung).
   Dabei müssen oft Winkelfunktionen hinzugezogen werden.
2. Die gegebenen speziellen Zahlenwerte werden verwendet (Zahlenmäßige Lösung).

In den folgenden Beispielen erfahren die Symbole a, b, c und A während der Lösung einen Bedeutungswechsel. Während diese Symbole in der allgemeinen Lösung als Größen verwendet werden, sind sie in der zahlenmäßigen Lösung als Symbole für Zahlenwerte anzusehen.

Beispiel 8:

(1. Fall der obigen Zusammenstellung):
Gegeben: $c = 51{,}90$ m; $\alpha = 52{,}55°$.
Gesucht: **1)** a (in m); **2)** b (in m); **3)** β (in Grad); **4)** A (in m²).

Allgemeine Lösung (a, b, c, A bedeuten Größen):

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$
$a = c \cdot \sin\alpha$

2) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
$b = c \cdot \cos\alpha$

3) $\beta = 90° - \alpha$

4) $A = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, A bedeuten Zahlenwerte):

1) $a = 51{,}90 \cdot \sin 52{,}55°$
$a = 41{,}21$

2) $b = 51{,}90 \cdot \cos 52{,}55°$
$b = 31{,}56$

3) $\beta = 90° - 52{,}55° = 37{,}45°$

N.	L.	
51,90 sin 52,55°	1,7152 0,8998 – 1	+
a	1,6150	
51,90 cos 52,55°	1,7152 0,7839 – 1	+
b	1,4991	

4) $A = \frac{1}{2} \cdot 51{,}90^2 \cdot \sin 52{,}55° \cdot \cos 52{,}55°$
$A = 650{,}3$

N.	L_1	L_2	
$51{,}90^2$	$1{,}7152 \cdot 2$	3,4304	
sin 52,55°		0,8998 − 1	+
cos 52,55°		0,7839 − 1	+
0,5		0,6990 − 1	+
A		2,8131	

Die Stücke des Dreiecks sind:

$a = 41{,}21$ m	$\alpha = 52{,}55°$	$A = 650{,}3$ m²
$b = 31{,}56$ m	$\beta = 37{,}45°$	
$c = 51{,}90$ m	$\gamma = 90°$	

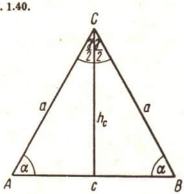
Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck

Das gleichschenklige Dreieck wird durch seine Symmetrieachse, die zugleich die Höhe h_c auf der Grundseite ist, in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt (Abb. 1.40.).

Da man das gleichschenklige Dreieck auf das rechtwinklige zurückführen kann, genügen zwei Stücke, um die fehlenden Stücke und den Flächeninhalt zu berechnen. Beschränken wir uns auf die primären Stücke (Basis, Schenkel und einen der Winkel), so können die gegebenen Stücke in folgender Zusammenstellung auftreten:

1. Die Basis und ein Winkel,
2. der Schenkel und ein Winkel,
3. die Basis und der Schenkel.

Abb. 1.40.



Stellen Sie für das Dreieck in Abbildung 1.40. alle möglichen Fälle zusammen! Vergleichen Sie mit den möglichen Zusammenstellungen beim rechtwinkligen Dreieck!

Beispiel 9:

(2. Fall der obigen Zusammenstellung):
Gegeben: $a = 15{,}2$ cm; $\gamma = 76{,}8°$.
Gesucht: **1)** α (in Grad); **2)** c (in cm); **3)** A (in cm²).

Allgemeine Lösung (a, b, c, A bedeuten Größen):

1) $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$ **2)** $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} : a = \frac{c}{2a}$

$c = 2a \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$

3) $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{h_c}{a}$

$h_c = a \cos \frac{\gamma}{2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot a \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$

$A = a^2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

Es kann auch die Gleichung (17) auf die rechtwinkligen Teildreiecke angewandt werden:

$A = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

$A = a^2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\alpha = 90° - 38{,}4° = 51{,}6°$

2) $c = 2 \cdot 15{,}2 \cdot \sin 38{,}4°$

$c = 18{,}88$

N.	L.	
2	0,3010	
15,2	1,1818	+
sin 38,4°	0,7932 – 1	+
c	1,2760	

3) $A = 15{,}2^2 \cdot \sin 38{,}4° \cdot \cos 38{,}4°$

$A = 112{,}4$

N.	L_1	L_2	
$15{,}2^2$	1,1818	2,3636	
sin 38,4°		0,7932 – 1	+
cos 38,4°		0,8941 – 1	+
A		2,0509	

Die Stücke des Dreiecks sind:

$a = b = 15{,}2$ cm $\qquad \alpha = \beta = 51{,}6° \qquad A = 112{,}4$ cm²

$c = 18{,}88$ cm $\approx 18{,}9$ cm $\qquad \gamma = 76{,}8°$

Berechnungen am regelmäßigen n-Eck

Von einem Punkt O seien n Strahlen in einer Ebene so gezogen, daß je zwei Strahlen einen Winkel von $\varphi = \frac{360°}{n}$ miteinander bilden. Wird diese Figur, wie in Abbildung 1.41. angedeutet, um den Punkt O um den Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ gedreht, so kommt sie mit sich selbst zur Deckung (Radialsymmetrie).

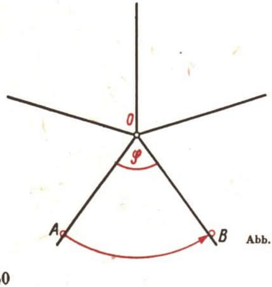


Abb. 1.41.

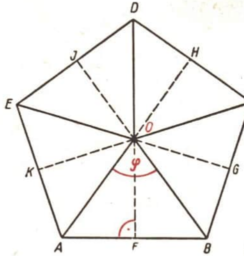


Abb. 1.42.

Wir nennen die Punkte der Strahlen, die durch Drehung zur Deckung gebracht werden, e i n a n d e r e n t s p r e c h e n d e P u n k t e. Verbinden wir die entsprechenden Punkte A, B, C, D, E der Reihe nach miteinander, so entsteht ein Vieleck, in dem alle Seiten und Winkel einander gleich sind, denn sie gelangen durch Drehung um den Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ zur Deckung (Abb. 1.42.).

Ein V i e l e c k, dessen Seiten und dessen Winkel einander gleich sind, heißt **regelmäßig.** Dreht man das regelmäßige Vieleck $ABCDE$ um den Punkt O, so gelangen nicht nur seine Seiten und Winkel zur Deckung, sondern es decken sich auch die Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, ..., $\overline{OE}$ und ebenso die von O auf die Seiten gefällten Lote $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, ..., $\overline{OK}$. Der Punkt O ist demnach von allen Eckpunkten und allen Seiten des regelmäßigen Vielecks jeweils gleich weit entfernt.

A l l g e m e i n gilt:

Jedem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis umbeschreiben (Umkreis) und ein Kreis einbeschreiben (Inkreis).

Abb. 1.43.

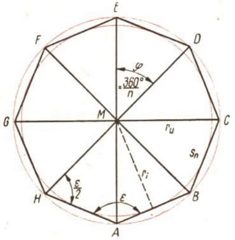
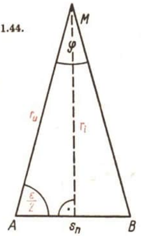


Abb. 1.44.



Die Abbildung 1.43. stellt ein regelmäßiges Achteck dar. Jedes der gleichschenkligen Dreiecke (z. B. $\triangle\ ABM$) kann als ein Bestimmungsdreieck angesehen werden. Die Berechnung des regelmäßigen Vielecks läßt sich auf die Aufgabe zurückführen, ein Bestimmungsdreieck mit den Mitteln der Trigonometrie zu berechnen. Wir können dabei die Ergebnisse der Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks anwenden.

Beispiel 10:

Gegeben ist die Seite $s_{12} = 6{,}41$ dm des regelmäßigen Zwölfecks. Wie groß ist der Winkel des Zwölfecks? Wie groß sind die Radien des Inkreises und des Umkreises sowie der Umfang und der Flächeninhalt?

Das Bestimmungsdreieck für diese Aufgabe zeigt die Abbildung 1.44.

Gegeben: $s_{12} = 6{,}41$ dm; $\varphi = \frac{360°}{12} = 30°$.

Gesucht: **1)** ε (in Grad); **2)** r_u (in dm); **3)** r_i (in dm); **4)** u_{12} (in dm); **5)** A_{12} (in dm²).

Allgemeine Lösung (r_u, r_i, u_{12}, s_{12}, A_{12} bedeuten Größen):
(Zur Vereinfachung wird im folgenden $s_{12} = s$ gesetzt.)

1) $\frac{\varepsilon}{2} = 90° - \frac{\varphi}{2}$ **2)** $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2} : r_u$

$\varepsilon = 180° - \varphi$ $r_u = \frac{s}{2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}}$

3) $\cot \frac{\varphi}{2} = r_i : \frac{s}{2}$ 4) $u_{12} = 12\,s$

$r_i = \frac{s}{2} \cdot \cot \frac{\varphi}{2}$

5) $A_{12} = 12 \frac{s \cdot r_i}{2} = 6\,s\,r_i = 3\,s^2 \cot \frac{\varphi}{2}$

Zahlenmäßige Lösung (r_u, r_i, u_{12}, s_{12}, A_{12} bedeuten Zahlenwerte):

1) $\varepsilon = 180° - 30° = 150°$

2) $r_u = \frac{6{,}41}{2 \cdot \sin 15°}$

$r_u = 12{,}39$

3) $r_i = \frac{6{,}41 \cdot \cot 15°}{2}$

$r_i = 11{,}96$

N.	L.	
6,41	0,8069	
2	0,3010	−
sin 15°	0,4130 − 1	−
r_u	1,0929	
6,41	0,8069	
cot 15°	0,5719	+
Zähler	1,3788	
2	0,3010	−
r_i	1,0778	

4) $u_{12} = 12 \cdot 6{,}41$

$u_{12} = 76{,}92$

5) $A_{12} = 3 \cdot 6{,}41^2 \cdot \cot 15°$

$A_{12} = 460$

N.	L_1	L_2	
$6{,}41^2$	0,8069 · 2	1,6138	
3		0,4771	+
cot 15°		0,5719	+
A_{12}		2,6628	

Die Stücke des Zwölfecks sind:

$s_{12} = 6{,}41$ dm $\varepsilon = 150°$

$r_u = 12{,}39$ dm $r_i = 11{,}96$ dm

$u_{12} = 76{,}92$ dm $A_{12} = 460$ dm²

Mit der Konstruktion und Berechnung regelmäßiger Vielecke hat sich im Altertum der griechische Mathematiker und Physiker ARCHIMEDES beschäftigt. Er lebte von 287 bis 212 in Syrakus. ARCHIMEDES berechnete die Vielecke allerdings planimetrisch, da ihm die Mittel der Trigonometrie noch nicht zur Verfügung standen. Er verwendete die Methode der einem Kreis ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke auch, um das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises zu bestimmen. Mit Hilfe des 96-Ecks fand er, daß dieses Verhältnis zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liegt. Er gab $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ als Näherungswerte für die Zahl π an. Um seine Leistung richtig zu würdigen, müssen wir bedenken, daß er weder die Dezimalzahlen noch das Stellenwertsystem kannte. ARCHIMEDES suchte seine wissenschaftlichen Erkenntnisse auch für die Zwecke der Praxis nutzbar zu machen.

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts stellte einer der berühmtesten deutschen Mathematiker, CARL FRIEDRICH GAUSS, eine allgemeine Theorie der regelmäßigen Vielecke auf. In diesem Zusammenhang entdeckte der damals Neunzehnjährige, daß das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Die Theorie der regelmäßigen Vielecke ist in dem bedeutenden Werk von GAUSS *Disquisitiones arithmeticae* (Arithmetische Untersuchungen) dargestellt, das 1801 in Leipzig erschien.

Anwendungsaufgaben

Bei der Lösung von Anwendungsaufgaben mit Hilfe der Trigonometrie sucht man zunächst nach einem für die Berechnung geeigneten rechtwinkligen Dreieck.

Beispiel 11: Welchen Anstiegswinkel hat eine Schraube mit metrischem Gewinde, deren Gewindedurchmesser $d = 11{,}4$ mm und deren Ganghöhe $h = 2{,}0$ mm beträgt?

Lösung: Aus Abbildung 1.45. ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{h}{\pi d}$$

$$\tan\alpha = \frac{2{,}0\,\text{mm}}{\pi \cdot 11{,}4\,\text{mm}}.$$

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnet man $\tan\alpha = 0{,}0559$.
Aus Tafel 14 ergibt sich $\alpha = 3{,}2°$.

Ergebnis: Die Schraube hat einen Anstiegswinkel von 3,2°.

Abb. 1.45.

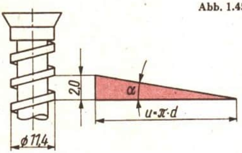
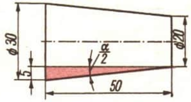


Abb. 1.46.



Beispiel 12: Der in Abbildung 1.46. dargestellte Bolzen soll gedreht werden. Wie groß sind Supporteinstellwinkel und Kegelwinkel? (Vergleichen Sie auch mit den Ausführungen auf Seite 32!)

Lösung: Allgemein gilt: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{D-d}{2} : l = \frac{1}{2}\cdot\frac{D-d}{l}$,

das heißt, der Tangens des halben Kegelwinkels ist gleich der halben Verjüngung.

Im vorliegenden Fall ist $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10} = 0{,}1000$.

Aus Tafel 14 ergibt sich $\frac{\alpha}{2} \approx 5{,}71°$ und damit $\alpha \approx 11{,}42°$.

Ergebnis: Der Supporteinstellwinkel beträgt etwa 5,71°; der Kegelwinkel etwa 11,42°.

Beispiel 13:

Bei der Deutschen Reichsbahn werden Steigungen durch Schilder der in Abbildung 1.47. a dargestellten Form gekennzeichnet. Die Aufschrift besagt, daß auf 40 m waagerechte Entfernung 1 m senkrechte Erhebung kommt; die gleiche Steigung hält auf den nächsten 830 m Streckenlänge an (Abb. 1.47.b; nicht maßstäblich). Wie groß ist der Höhenunterschied H zwischen Anfang A und Ende C_1 dieses Streckenabschnittes?

Lösung *(mit Hilfe der trigonometrischen Methode):*

$$\tan\alpha = \frac{1}{40}; \ \sin\alpha = \frac{H}{830\,\text{m}}$$

$$H = 830 \cdot \sin\alpha \ \text{m}.$$

Es ist nicht notwendig, Winkel α zu bestimmen; wir können vielmehr $\sin\alpha$ durch $\tan\alpha$ ausdrücken. (Vergleichen Sie hierzu Seite 19, Aufgabe 21!)

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{40}}{\sqrt{1+\frac{1}{1600}}} = \frac{1}{\sqrt{1601}}.$$

Dann ergibt sich

$$H = \frac{830}{\sqrt{1601}} \ \text{m}.$$

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnet man

$H \approx 20{,}75$ m.

Abb. 1.47.a

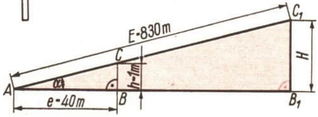


Abb. 1.47.b

Ergebnis: Der Höhenunterschied beträgt rund 20,8 m.

Lösen Sie die Aufgabe auch, ohne daß Sie die trigonometrische Methode anwenden, und vergleichen Sie die Ergebnisse!

Aufgaben

Übungen im Tafelrechnen

1. a) lg sin 19,5° **b)** lg sin 31,67° **c)** lg sin 93,5° **d)** lg sin 17° 42′
e) lg cos 73,92° **f)** lg cos 37,57° **g)** lg |cos 224,7°| **h)** lg cos 45° 22′ 45″

2. Suchen Sie die Logarithmen der Winkelfunktionen für die in den Aufgaben **3** und **5** des Abschnitts 1.3. (S. 28) angegebenen Winkel auf!

3. a) lg tan 21,28° **b)** lg tan 50,68° **c)** lg tan 187,55° **d)** lg tan 47° 33′
e) lg cot 38,95° **f)** lg cot 45,08° **g)** lg |cot 101,54°| **h)** lg cot 2° 5′ 12″

4. Suchen Sie die Logarithmen der Winkelfunktionen für die in den Aufgaben **4** und **6** des Abschnitts 1.3. (S. 28) angegebenen Winkel auf!

5. Suchen Sie für die folgenden Winkel die Logarithmen der Sinus- und der Tangensfunktion auf!
a) 0,09° **b)** 0,902° **c)** 2,418° **d)** 4,935° **e)** 3,076° **f)** 1,234°

6. Suchen Sie für die folgenden Winkel die Logarithmen der Kosinus- und der Kotangensfunktion auf!
a) 85,238° **b)** 88,931° **c)** 87,045° **d)** 89,304° **e)** 86,753° **f)** 89,165°

7. Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar!
a) $y = \lg \sin x$ **b)** $y = \lg \cos x$ **c)** $y = \lg \tan x$ **d)** $y = \lg \cot x$
Anleitung: Benutzen Sie die Tafelwerte für $x = 15°; 30°; 45°; 60°; 75°$! Verwenden Sie für

a und **b** bzw. für **c** und **d** ein gemeinsames Koordinatensystem! Beschreiben Sie den Verlauf jeder Funktion!

Untersuchen Sie insbesondere die folgenden Fragen:

1) Wie verlaufen die Funktionen in der Umgebung von $x = 0°$ und $x = 90°$?
2) Für welche Winkel ändern sich die einzelnen Funktionen besonders stark, für welche besonders wenig?
3) Haben die Kurven zu **a** und **b** bzw. die zu **c** und **d** Symmetrieeigenschaften?

8. Welche Beziehungen bestehen zwischen

a) $\lg \tan x$ und $\lg \cot x$;

b) $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \tan x$;

c) $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \cot x$?

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Beziehungen für einige selbstgewählte Beispiele $\lg \tan x$ und $\lg \cot x$ aus $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$!

Gibt es eine entsprechende Beziehung auch zwischen $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$?

Bestimmen Sie zu den nachstehenden Logarithmen die Winkel aus dem ersten Quadranten!

9. **a)** $\lg \sin x = 0{,}6093 - 1$ **b)** $\lg \sin \alpha = 0{,}3775 - 1$ **c)** $\lg \sin \gamma = 0{,}5717 - 1$
d) $\lg \sin \beta = 0{,}0135 - 1$ **e)** $\lg \sin \gamma = 0{,}9438 - 1$ **f)** $\lg \sin \gamma = 0{,}1437 - 1$

10. **a)** $\lg \cos \gamma = 0{,}5341 - 1$ **b)** $\lg \cos x = 0{,}7230 - 1$ **c)** $\lg \cos \alpha = 0{,}9892 - 1$
d) $\lg \cos \beta = 0{,}2700 - 1$ **e)** $\lg \cos \alpha = 0{,}9900 - 1$ **f)** $\lg \cos \beta = 0{,}2356 - 1$

11. **a)** $\lg \tan x = 0{,}1387$ **b)** $\lg \tan \beta = 0{,}8003$ **c)** $\lg \tan \gamma = 0{,}6486 - 1$
d) $\lg \tan \alpha = 1{,}0944$ **e)** $\lg \tan \beta = 0{,}8345 - 1$ **f)** $\lg \tan x = 0{,}1479 - 1$

12. **a)** $\lg \cot \alpha = 0{,}9848 - 1$ **b)** $\lg \cot \gamma = 0{,}6129 - 1$ **c)** $\lg \cot x = 0{,}2509$
d) $\lg \cot \gamma = 0{,}3688$ **e)** $\lg \cot \beta = 0{,}1888$ **f)** $\lg \cot \alpha = 0{,}9800$

13. Bestimmen Sie zu den nachstehenden Logarithmen der Winkelfunktionen die zwischen 0° und 360° liegenden Winkel x!

a) $\lg \sin x = 0{,}8810 - 1$ $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}9750 - 2$ $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}9996 - 1$ $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}3075 - 1$ $(\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}2764 - 1$ $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\tan x| = 0{,}9000 - 2$ $(\tan x < 0)$
g) $\lg \cot x = 0{,}7718$ $(\cot x > 0)$ **h)** $\lg |\cot x| = 1{,}2700$ $(\cot x < 0)$

14. Bestimmen Sie die Winkel aus dem ersten Quadranten!

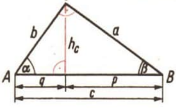
a) $\lg \sin x = 0{,}4783 - 1$ **b)** $\lg \cos \alpha = 0{,}6000 - 1$ **c)** $\lg \tan \beta = 0{,}8036 - 1$
d) $\lg \cot \gamma = 1{,}6250$ **e)** $\lg \tan \alpha = 1{,}0200$ **f)** $\lg \cot \gamma = 0{,}1064 - 1$
g) $\lg \sin x = 0{,}8583 - 1$ **h)** $\lg \cos \gamma = 0{,}4840 - 1$ **i)** $\lg \cos \gamma = 0{,}8221 - 1$
k) $\lg \tan \beta = 0{,}2833 - 3$ **l)** $\lg \cot \alpha = 0{,}3090 - 2$ **m)** $\lg \sin x = 0{,}7460 - 2$
n) $\lg \cot \beta = 0{,}8293 - 2$ **o)** $\lg \sin x = 0{,}4920 - 3$ **p)** $\lg \cos \gamma = 0{,}4459 - 2$

Aus der Geometrie

15. Berechnen Sie die Seiten, Winkel und Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke ABC $(\gamma = 90°)$, von denen folgende Stücke gegeben sind!

a) $a = 12{,}7$ cm; $b = 4{,}9$ cm **b)** $a = 54{,}85$ m; $b = 74{,}54$ m
c) $a = 420$ m; $c = 645$ m **d)** $a = 14{,}54$ cm; $c = 29{,}08$ cm
e) $c = 125$ m; $\alpha = 35{,}60°$
f) $c = 10{,}50$ cm; $\beta = 40{,}30°$
g) $a = 63$ mm; $\alpha = 40{,}30°$
h) $b = 80{,}70$ m; $\beta = 62{,}30°$

Abb. 1.48.



16. In einem rechtwinkligen Dreieck (Abb. 1.48.) sind die folgenden Stücke gegeben:

a) $c = 18{,}50$ m; $p = 4{,}20$ m

b) $c = 18{,}50$ m; $h = 4{,}30$ m

c) $h = q = 3{,}5$ cm — d) $h = 22{,}42$ m; $b = 25{,}30$ m
e) $p = 10{,}2$ cm; $\alpha = 37{,}50°$ — f) $c = 4{,}20$ m; $q = 2{,}53$ m
g) $a = 60{,}5$ cm; $h = 15{,}2$ cm — h) $p = 18{,}18$ m; $q = 3{,}88$ m

Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt, und konstruieren Sie die rechtwinkligen Dreiecke!

17. In einem gleichschenkligen Dreieck (Abb. 1.49.) sind die folgenden Stücke gegeben:

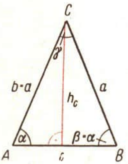


Abb. 1.49.

a) $c = 125$ m; $h_c = 85$ m
b) $a = 3{,}70$ m; $c = 2{,}50$ m
c) $a = 5{,}70$ m; $c = 3{,}50$ m
d) $c = 19{,}64$ cm; $\gamma = 55{,}40°$
e) $c = 75{,}92$ dm; $\alpha = 52{,}62°$
f) $h_c = 4{,}786$ m; $\gamma = 32{,}10°$

Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt, und konstruieren Sie die gleichschenkligen Dreiecke!

18. Berechnen Sie im Rechteck mit den Seiten $a = 5{,}5$ m und $b = 4{,}2$ m die Winkel, welche die Diagonalen mit den Rechteckseiten bilden, und den von beiden Diagonalen eingeschlossenen Winkel!

19. Von einem Rechteck ist die Diagonale $e = 6{,}5$ m und der von beiden Diagonalen eingeschlossene Winkel $\varepsilon = 55°$ gegeben. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

20. Von einem Rhombus sind die Seite $a = 12{,}5$ cm und der Winkel $\alpha = 45°$ gegeben. Berechnen Sie die Länge der beiden Diagonalen des Rhombus und den Flächeninhalt!

21. In einem regelmäßigen n-Eck ist **a)** der Umkreisradius r_u, **b)** der Inkreisradius r_i gegeben. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt des regelmäßigen n-Ecks
im Falle **a)** $a_n = n\, r_u^2 \sin \frac{180°}{n} \cdot \cos \frac{180°}{n}$, im Falle **b)** $A_n = n\, r_i^2 \tan \frac{180°}{n}$ ist!

22. **a)** Einem Kreis vom Radius $r = 1$ dm ist ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben. Wie groß sind seine Seiten s_n, sein Umfang u_n und sein Flächeninhalt a_n für $n = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$?

b) Die Seite eines regelmäßigen n-Ecks sei $s_n = 27$ cm.
Bestimmen Sie die Radien des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Kreises für $n = 3; 4; 5; \ldots; 10$!

c) Einem Kreis vom Radius $r = 1$ dm ist ein regelmäßiges n-Eck umbeschrieben. Wie groß sind seine Seite S_n, sein Umfang U_n und sein Flächeninhalt A_n für $n = 3; 4; 5; \ldots; 10$?

d) Stellen Sie in einem rechtwinkligen Achsenkreuz mit der Indexachse n als Abszissenachse die Größen s_n und S_n, u_n und U_n, a_n und A_n aus Aufgabe **a** und **c** in Abhängigkeit von n graphisch dar!

23. Berechnen Sie Seite, In- und Umkreisradius sowie Flächeninhalt für folgende regelmäßigen n-Ecke!

a) $n = 7$; $s = 13{,}2$ cm — b) $n = 10$; $r_u = 23{,}5$ cm
c) $n = 5$; $r_i = 17{,}4$ dm — d) $n = 8$; $A = 23{,}47$ m²

24. Ein Punkt P liege a cm vor der Aufrißtafel, b cm vor der Kreuzrißtafel und c cm über der Grundrißtafel; der Schnittpunkt der Rißachsen sei O.

a) Welche Winkel bildet die Verbindungsstrecke $\overline{PO}$ mit den Projektionen $P'O$, $P''O$ sowie $P'''O$?

b) Bestimmen Sie die Winkel für $a = 3$, $b = 2$ und $c = 2{,}5$ sowohl mit Hilfe des darstellend-geometrischen als auch mit Hilfe des trigonometrischen Verfahrens!

Aus der Physik und der Technik

25. Am äußeren Ende eines Tragarms mit Zugstange hängt eine Last $F_G = 400$ kp (Abb. 1.50.).

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Zugstange wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°; 45°; 60°$ der Zugstange gegen den Tragarm!

b) Handelt es sich um Zug- oder um Druckkräfte?

c) Berechnen Sie trigonometrisch die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

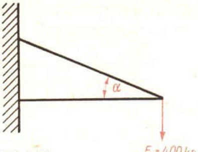


Abb. 1.50.

26. Am Ende eines Tragarms mit Stütze hängt eine Last $F_G = 400$ kp (Abb. 1.51.).

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Stütze wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°; 45°; 60°$ der Stütze gegen den Tragarm!

b) Werden Tragarm und Stütze auf Zug oder auf Druck beansprucht?

c) Berechnen Sie die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

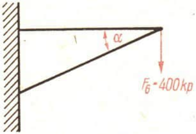


Abb. 1.51.

27. Ein Ausleger soll 2 000 kp tragen und ist mit einem Seil von 5 000 kp Tragfähigkeit abzufangen (Abb. 1.52.). Wie groß muß das Maß x mindestens werden, wenn die Tragfähigkeit des Seiles nicht überschritten werden soll?

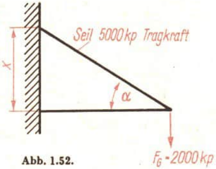


Abb. 1.52.

28. Eine Kiste, die 220 kg wiegt, wird mittels einer Schrotleiter abgeladen (Abb. 1.53.).
Bei welchem Winkel α beginnt die Kiste zu gleiten, wenn zur Überwindung der Reibung 17 kp erforderlich sind?

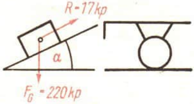


Abb. 1.53.

29. Eine Kiste, die 96 kg wiegt, soll auf einer unter 25° gegen die Horizontalebene geneigten Holzrampe hochgezogen werden.

a) Bestimmen Sie trigonometrisch und geometrisch die Abhängigkeit des Hangabtriebs H und des Normaldrucks N vom Neigungswinkel α der Rampe!

b) Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Gleitreibung die Größe der erforderlichen Zugkraft! Die Reibungszahl für Holz auf Holz ist im Mittel $\mu = 0{,}18$.

c) Berechnen Sie den Neigungswinkel ϱ der Rampe, bei welchem der Hangabtrieb H gleich der Reibung R wird (Reibungswinkel ϱ)!

d) Zeigen Sie, daß der Tangens des Reibungswinkels ϱ gleich der Reibungszahl μ ist!

30. Aus einem Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60$ mm soll ein regelmäßiges Fünfkant gefräst werden (Abb. 1.54.). Bestimmen Sie

a) die Seite s_5 des Fünfkants,

b) den prozentualen Verlust an Querschnittsfläche!

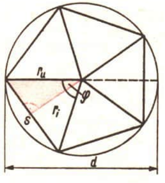


Abb. 1.54.

Lichtbrechung

Fallen Lichtstrahlen unter dem Winkel α aus Luft in ein optisch dichteres Medium ein, so werden sie von ihrer ursprünglichen Richtung zum Einfallslot hin derart gebrochen, daß das Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels α zum Sinus des Brechungswinkels β gleich der Brechungszahl n des optischen Mediums gegenüber Luft ist.

$$\text{Brechungsgesetz: } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

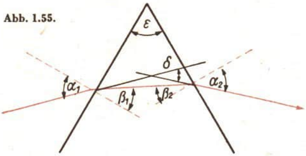
Bei umgekehrtem Strahlengang ist die Brechungszahl $n' = \frac{1}{n}$.

31. Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel $\alpha = 15°; 30°; 45°; 60°; 75°; 90°$ aus Luft in Wasser. Die Brechungszahl für den Übergang von Luft in Wasser ist $n = \frac{4}{3}$.

a) Berechnen Sie die zugehörigen Brechungswinkel β!

b) Stellen Sie die einander zugeordneten Werte von Einfalls- und Brechungswinkel in einer Tafel zusammen!

Abb. 1.55.



32. Beim Durchgang durch eine planparallele Platte wird ein Lichtstrahl parallel verschoben.

a) Wie groß ist die Parallelverschiebung, die ein Lichtstrahl durch eine planparallele Glasplatte von $d = 10$ cm Dicke bei einem Einfallswinkel $\alpha = 60°$ erfährt $\left(n = \frac{3}{2}\right)$?

b) Bestimmen Sie den Gang des Lichtstrahls geometrisch!

c) Stellen Sie die Verschiebung des Lichtstrahls als Funktion des Einfallswinkels α graphisch dar!

33. Auf ein Glasprisma $\left(\text{Brechungszahl } n = \frac{3}{2}\right)$, dessen brechende Flächen einen Winkel $\varepsilon = 60°$ bilden, fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel $\alpha_1 = 45°$ ein (Abb. 1.55.).

a) Bestimmen Sie geometrisch den Gang des Lichtstrahls!

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Gesamtablenkung δ des Lichtstrahls!

34. Unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion versteht man denjenigen spitzen Einfallswinkel im optisch dichteren Medium, für den der Brechungswinkel im optisch dünneren Medium 90° wird. Wie groß ist der Grenzwinkel der totalen Reflexion für den Übergang von

a) Wasser in Luft $\left(n' = \frac{3}{4}\right)$,

b) Glas in Luft $\left(n' = \frac{2}{3}\right)$?

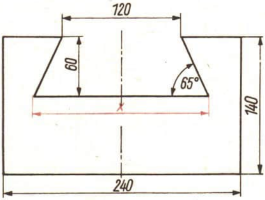


Abb. 1.56.

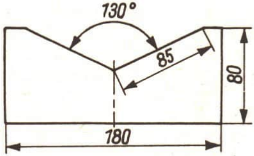


Abb. 1.57.

35. Berechnen Sie für die in Abbildung 1.56. dargestellte Schwalbenschwanzführung das Maß x!

36. Berechnen Sie für das in Abbildung 1.57. dargestellte Führungsprisma die fehlenden Maße!

1.5. Das schiefwinklige Dreieck

Der Sinussatz und die Flächenformel

Die trigonometrische Methode findet auch bei Berechnungen in schiefwinkligen Dreiecken Anwendung. Ein schiefwinkliges Dreieck läßt sich durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Diese sind jedoch im allgemeinen nicht kongruent. Die Höhe h_c des Dreiecks ABC läßt sich auf doppelte Weise ausdrücken (Abb. 1.58.):

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \qquad h_c = a\sin\beta$$

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \qquad h_c = b\sin\alpha$$

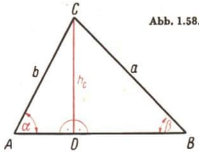


Abb. 1.58.

Setzt man die Ausdrücke für h_c einander gleich, so wird h_c eliminiert, und es ergibt sich

$$a \sin\beta = b \sin\alpha$$

oder, als Proportion geschrieben,

(18) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.

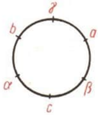


Abb. 1.59.

Entsprechend findet man, wenn man das Dreieck durch die Höhe h_a bzw. h_b zerlegt,

(19) $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$

und

(20) $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$.

Die Gleichungen (19) und (20) kann man auch aus (18) durch zyklische Vertauschung erhalten. Man ordnet die Seiten und Winkel des Dreiecks auf einem Kreis so an, wie sie beim Umlaufen des Dreiecks aufeinander folgen (Abb. 1.59.). Für jeden lateinischen und griechischen Buchstaben der Formel (18) hat man den lateinischen bzw. griechischen Buchstaben zu setzen, der auf ihn folgt, wenn man den Kreis im positiven Drehsinn durchläuft.

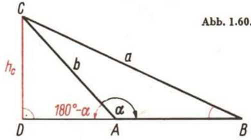


Abb. 1.60.

Auch in dem stumpfwinkligen Dreieck in Abbildung 1.60. erhält man durch Eliminieren der Höhe h_c die Gleichung (18).

$$h_c = a\sin\beta; \quad h_c = b\sin(180° - \alpha)$$

Wegen $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ geht die zweite Gleichung über in $h_c = b\sin\alpha$.

Die Gleichungen (18), (19) und (20) werden als **Sinussatz** der ebenen Trigonometrie bezeichnet.

In einem Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Man kann den Sinussatz auch als fortlaufende Proportion schreiben:

(21) $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Da der Sinus im I. und II. Quadranten positiv ist, hat man bei der Berechnung eines Dreieckwinkels nach dem Sinussatz die Doppeldeutigkeit des Winkels zu berücksichtigen. Zu einem Sinuswert gehören stets ein Winkel im I. und ein Winkel im II. Quadranten. Beide Winkel sind zunächst als Rechenergebnisse möglich, und es bedarf einer besonderen Untersuchung, ob sie auch beide als Lösungen der betreffenden Aufgabe in Frage kommen.

Durch den Sinussatz werden Berechnungen im schiefwinkligen Dreieck vereinfacht, da nicht erst die entsprechende Höhe berechnet werden muß.

Was ergibt sich aus den Gleichungen (18) bis (20) im Spezialfall des rechtwinkligen Dreiecks?

Der Sinussatz kann auch in der Form

(22) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

geschrieben werden.

Der Quotient aus einer Seite und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels hängt mit dem Umkreisradius r zusammen.

Nach dem Peripheriewinkelsatz ist in Abbildung 1.61.:

$$\sphericalangle BMC = 2\alpha; \quad \sphericalangle BMD = \alpha \; (0° < \alpha < 90°).$$

Im Dreieck MBD gilt dann

$$\sin\alpha = \frac{a}{2} : r \text{ und nach Umformung } \frac{a}{\sin\alpha} = 2r.$$

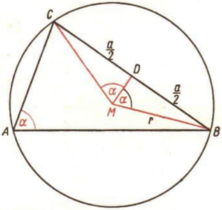


Abb. 1.61.

In Verbindung mit (22) ergibt sich:

(23) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$

Im Dreieck ist der Quotient aus einer Seite und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels gleich dem Umkreisdurchmesser.

1) Zeichnen Sie eine Figur für den Fall, daß α ein stumpfer Winkel ist!
2) Welcher Sonderfall ergibt sich aus (23), wenn das Dreieck ABC rechtwinklig ist?

Aus der Formel $A = \frac{1}{2} c h_c$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks erhält man mit Hilfe von $h_c = b \cdot \sin\alpha$ durch Substitution

(24) $A = \frac{1}{2} bc \sin\alpha.$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich

(25) $A = \frac{1}{2} ca \sin\beta$ und (26) $A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma.$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

1) Was ergibt sich aus den Gleichungen (24) bis (26) im Spezialfall des rechtwinkligen Dreiecks?
2) Leiten Sie aus Gleichung (24) die Gleichung (17) her!

Eine weitere Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist

$$A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Weisen Sie die Richtigkeit dieser Formel nach!
Stellen Sie die Beziehungen für A auf, in denen die Seite a bzw. b verwendet wird!

Beispiel 1:

Gegeben: $a = 20$ cm; $b = 8$ cm; $\alpha = 117°$.
Gesucht: **1)** c (in cm); **2)** β; **3)** γ; **4)** r (in cm); **5)** A (in cm²).

Konstruieren Sie zunächst das Dreieck mit dem Umkreis (Maßstab 1 : 2), und ermitteln Sie durch Messung näherungsweise die Werte für c, β, γ und r!

Allgemeine Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Größen):

1) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$$

2) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

3) $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

4) $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$

$$r = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha}$$

5) $A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\sin\beta = \frac{8 \cdot \sin 117°}{20}$

$\sin\beta = \frac{8 \cdot \sin 63°}{20}$

$\beta_1 = 20{,}88°$

$\beta_2 = 180° - 20{,}88° = 159{,}12°$

N.	L.	
8 sin 63°	0,9031 0,9499 – 1	+
Zähler 20	0,8530 1,3010	–
sin β	0,5520 – 1	

Da ein Dreieck nicht zwei stumpfe Winkel haben kann, entfällt β_2.

2) $\gamma = 180° - 137{,}88° = 42{,}12°$

3) $c = \frac{20 \cdot \sin 42{,}12°}{\sin 117°}$

$c = \frac{20 \cdot \sin 42{,}12°}{\sin 63°}$

$c = 15{,}06$

N.	L.	
20 sin 42,12°	1,3010 0,8266 – 1	+
Zähler sin 63°	1,1276 0,9499 – 1	–
c	1,1777	

4) $r = \frac{20}{2 \cdot \sin 117°}$

$r = \frac{10}{\sin 63°}$

$r = 11{,}22$

5) $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 \cdot \sin 42{,}12°$

$A = 80 \cdot \sin 42{,}12°$

$A = 53{,}66$

N.	L.	
10 sin 63°	1,0000 0,9499 – 1	–
r	1,0501	
80 sin 42,12°	1,9031 0,8266 – 1	+
A	1,7297	

Ergebnisse:

$a = 20$ cm $\alpha = 117°$ $r = 11{,}22$ cm $\approx 11{,}2$ cm

$b = 8$ cm $\beta = 20{,}88°$ $A = 53{,}66$ cm²

$c = 15{,}06$ cm $\approx 15{,}1$ cm $\gamma = 42{,}12°$

Vergleichen Sie die rechnerischen Ergebnisse mit den Meßwerten aus der Konstruktion!

Beispiel 2:

Gegeben: $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $r = 8{,}2$ cm.
Gesucht: **1)** c (in cm); **2)** α; **3)** β; **4)** γ; **5)** A (in cm²).
Konstruieren Sie das Dreieck, und sagen Sie die Ergebnisse näherungsweise voraus! Wie viele Lösungen gibt es?

Allgemeine Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Größen):

1) $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r$ $\sin \alpha = \frac{a}{2r}$

2) $\frac{b}{\sin \beta} = 2r$ $\sin \beta = \frac{b}{2r}$

3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

4) $\frac{c}{\sin \gamma} = 2r$ $c = 2r \sin \gamma$

5) $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\sin \alpha = \frac{7{,}6}{2} : 8{,}2 = \frac{3{,}8}{8{,}2}$

$\alpha_1 = 27{,}61°$

$\alpha_2 = 180° - 27{,}61° = 152{,}39°$

2) $\sin \beta = \frac{6{,}4}{2} : 8{,}2 = \frac{3{,}2}{8{,}2}$

$\beta_1 = 22{,}97°$

$\beta_2 = 180° - 22{,}97° = 157{,}03°$

N.	L.	
3,8 8,2	0,5798 0,9138	–
$\sin \alpha$	0,6660 – 1	
3,2 8,2	0,5051 0,9138	–
$\sin \beta$	0,5913 – 1	

Rechnerisch ergeben sich je zwei Werte für α und β. Deshalb muß untersucht werden, welche Winkel möglich sind. Das Dreieck könnte folgende Winkel enthalten:

(1) α_1 und β_1 (2) α_1 und β_2 (3) α_2 und β_1 (4) α_2 und β_2.

Man erkennt sofort, daß (4) nicht möglich ist, da das Dreieck nicht zwei stumpfe Winkel enthalten kann. Aber auch (2) entfällt, weil $\alpha + \beta < 180°$ sein muß. Dagegen widersprechen (1) und (3) der Winkelsummenbedingung nicht und müssen für die weiteren Berechnungen berücksichtigt werden.

$\alpha_1 = 27{,}61°$ $\qquad$ $\alpha_2 = 152{,}39°$

$\beta_1 = 22{,}97°$ $\qquad$ $\beta_1 = 22{,}97°$

3) $\gamma_1 = 180° - 50{,}58°$ $\qquad$ $\gamma_2 = 180° - 175{,}36°$

$\gamma_1 = 129{,}42°$ $\qquad$ $\gamma_2 = 4{,}64°$

4) $c_1 = 2 \cdot 8{,}2 \cdot \sin 129{,}42°$

$c_1 = 16{,}4 \cdot \sin 50{,}58°$

$c_1 = 12{,}67$

$c_2 = 16{,}4 \cdot \sin 4{,}64°$

$c_2 = 1{,}326$

5) $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}6 \cdot 6{,}4 \cdot \sin 129{,}42°$

$A_1 = 3{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot \sin 50{,}58°$

$A_1 = 18{,}79$

$A_2 = 3{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot \sin 4{,}64°$

$A_2 = 1{,}967$

N.	L.	
16,4 sin 50,58°	1,2148 0,8879 – 1	+
c_1	1,1027	
16,4 sin 4,64°	1,2148 0,9079 – 2	+
c_2	0,1227	
3,8 6,4 sin 50,58°	0,5798 0,8062 0,8879 – 1	 + +
A_1	1,2739	
3,8 6,4 sin 4,64°	0,5798 0,8062 0,9079 – 2	 + +
A_2	0,2939	

Ergebnisse:

(I) $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $c = 12{,}7$ cm; $\alpha = 27{,}6°$;
$\beta = 23{,}0°$; $\gamma = 129{,}4°$; $r = 8{,}2$ cm; $A = 18{,}79\ \text{cm}^2$

(II) $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $c = 1{,}3$ cm; $\alpha = 152{,}4°$;
$\beta = 23{,}0°$; $\gamma = 4{,}6°$; $r = 8{,}2$ cm; $A = 1{,}97\ \text{cm}^2$

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen aus Ihrer Konstruktion des Dreiecks!

Der Kosinussatz

Sind in einem schiefwinkligen Dreieck die drei Seiten bzw. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, so kann der Sinussatz nicht zur Berechnung der fehlenden Stücke herangezogen werden. In diesem Fall führt die Anwendung einer

weiteren trigonometrischen Beziehung zum Ziel, die im folgenden allgemein hergeleitet wird.
Das Dreieck ABC in Abbildung 1.62. wird durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt.
Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt

$$h_c^2 = b^2 - q^2 \text{ und } h_c^2 = a^2 - p^2.$$

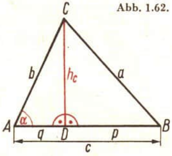


Abb. 1.62.

Gleichsetzen und Umordnen ergibt

$$b^2 - q^2 = a^2 - p^2$$
$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2.$$

Wegen $p = c - q$, wird

$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q.$$

Der Hypotenusenabschnitt q läßt sich durch eine Seite und eine Winkelfunktion ausdrücken. Im Dreieck ADC ist $\cos\alpha = \frac{q}{b}$, woraus folgt

$$q = b \cos\alpha.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q$ ein, so erhält man

(27) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos\alpha.$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich die beiden weiteren Gleichungen

(28) $b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a \cos\beta$ und (29) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos\gamma$.

Die drei Gleichungen (27), (28) und 29) werden als **Kosinussatz** der ebenen Trigonometrie bezeichnet.

● *Weisen Sie die Richtigkeit der Gleichungen (28) und (29) durch entsprechende Zerlegung des Dreiecks ABC mit Hilfe der Höhen h_a bzw. h_b nach!*

Ist Winkel α stumpf, so wird $p = c + q$ (Abb. 1.63.). Weiterhin ist

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{q}{b},$$

also
$$q = b \cos(180° - \alpha).$$

Wegen
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha \text{ wird}$$
$$q = -b\cos\alpha.$$

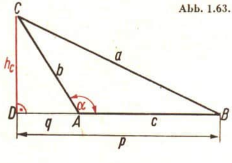


Abb. 1.63.

Man findet:

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + (c + q)^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c\,(-b\cos\alpha)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha.$$

Man erhält also ebenfalls Gleichung (27).
Da der Kosinus im I. und II. Quadranten verschiedene Vorzeichen hat, ist die Berechnung eines Dreieckwinkels nach dem Kosinussatz eindeutig.
Durch die Anwendung des Kosinus- und des Sinussatzes wird es überflüssig, in jedem Einzelfall das Dreieck in zwei rechtwinklige zu zerlegen. Mit Hilfe des Sinus- und des Kosinussatzes lassen sich alle Stücke eines Dreiecks berechnen, wenn drei voneinander unabhängige Stücke gegeben sind. Die folgende Übersicht zeigt die Verwendung der beiden Sätze:

	Gegebene Stücke	Lösung
(1)	*ssw*	Sinussatz
(2)	*sww*	Sinussatz
(3)	*sws*	Kosinussatz und Sinussatz
(4)	*sss*	Kosinussatz und Sinussatz.

Bei jeder Aufgabe muß untersucht werden, ob und wie viele Lösungen vorhanden sind **(Determination)**. Die Determination wird erleichtert, wenn man neben dem Rechengang die geometrische Konstruktion ausführt.
Werden die unbekannten Stücke des schiefwinkligen Dreiecks logarithmisch berechnet, so hat der Kosinussatz gegenüber dem Sinussatz den Nachteil, daß die logarithmische Rechnung unterbrochen werden muß.

Beispiel 3:

Gegeben: $a = 24$ cm; $b = 13$ cm; $c = 15$ cm.
Gesucht: **1)** α; **2)** β; **3)** γ; **4)** A (in cm²).

Allgemeine Lösung (a, b, c und A bedeuten Größen):

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

2) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$

3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

4) $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c und A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\cos\alpha = \frac{169 + 225 - 576}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\frac{182}{390} = -\frac{7}{15} = -0{,}4667$

$\alpha = 180° - 62{,}18°$

$\alpha = 117{,}82°$

2) $\sin\beta = \frac{13 \cdot \sin 117{,}82°}{24}$

$\sin\beta = \frac{13 \cdot \sin 62{,}18°}{24}$

$\beta_1 = 28{,}62°$

$\beta_2 = 180° - 28{,}62° = 151{,}38°$

N.	L.	
13	1,1139	
sin 62,18°	0,9466 – 1	+
Zähler	1,0605	
24	1,3802	–
sin β	0,6803 – 1	

Der Winkel β_2 entfällt als Lösung, da bereits Winkel α stumpf ist.

3) $\gamma = 180° - 146{,}44° = 33{,}56°$

4) $A = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 13 \cdot \sin 33{,}56°$

$A = 86{,}24$

N.	L.	
0,5	0,6990 – 1	
24	1,3802	+
13	1,1139	+
sin 33,56°	0,7426 – 1	+
A	1,9357	

Ergebnisse:

$a = 24$ cm $\quad \alpha = 117{,}8° \quad A = 86{,}24$ cm²
$b = 13$ cm $\quad \beta = 28{,}6°$
$c = 15$ cm $\quad \gamma = 33{,}6°$

Aufgaben

1. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt, und kontrollieren Sie die Ergebnisse, gegebenenfalls maßstäblich verkleinert, durch Konstruktion!

a) $a = 4$ cm $\beta = 43°$ $\gamma = 55°$	**b)** $a = 5{,}6$ cm $\beta = 83{,}8°$ $\gamma = 26{,}5°$	**c)** $c = 1{,}46$ m $\alpha = 20{,}2°$ $\beta = 74{,}3°$	**d)** $b = 8{,}5$ cm $\beta = 44{,}2°$ $\gamma = 54{,}5°$
e) $c = 121{,}56$ m $\beta = 13{,}47°$ $\gamma = 101{,}25°$	**f)** $b = 2{,}389$ km $\alpha = 39°\,17'$ $\beta = 68°\,28'$	**g)** $a = 44{,}8$ cm $\alpha = 59°\,10'$ $\beta = 41°\,18'$	**h)** $c = 64{,}9$ m $\alpha = 42°\,43'$ $\gamma = 102°\,19'$

2. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt! Achten Sie dabei darauf, ob der gegebene Winkel der größeren oder der kleineren Seite gegenüberliegt!

a) $b = 3{,}8$ cm $c = 4{,}5$ cm $\gamma = 53{,}6°$	**b)** $a = 35{,}75$ m $c = 26{,}48$ m $\alpha = 93{,}57°$	**c)** $a = 7{,}0$ cm $b = 5{,}8$ cm $\beta = 43{,}7°$	**d)** $a = 32{,}3$ cm $c = 36{,}6$ cm $\alpha = 55{,}7°$
e) $a = 12{,}15$ m $b = 27{,}83$ m $\beta = 109{,}24°$	**f)** $b = 4{,}3$ cm $c = 4{,}6$ cm $\gamma = 20°\,35'$	**g)** $a = 30{,}4$ cm $c = 27{,}8$ cm $\alpha = 67°\,23'$	**h)** $b = 24{,}9$ m $c = 17{,}2$ m $\beta = 117°\,4'$

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, von dem die folgenden Stücke gegeben sind!

a) $a = 8{,}7$ cm $b = 7{,}1$ cm $\gamma = 44{,}6°$	**b)** $a = 52{,}85$ cm $c = 75{,}23$ cm $\beta = 56{,}91°$	**c)** $a = 34{,}76$ m $\beta = 59°\,10'$ $\gamma = 79°\,33'$	**d)** $b = 4{,}475$ km $\beta = 59{,}27°$ $\gamma = 41{,}31°$

4. Berechnen Sie die Seiten des Dreiecks, von dem $\alpha = 81{,}91°$, $\beta = 41{,}54°$ und $r = 258{,}4$ cm gegeben sind!

5. a) Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks durch die Gleichung

$$A = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

gegeben ist!

b) Berechnen Sie aus den Winkeln $\alpha = 56{,}79°$ und $\beta = 62{,}89°$ sowie dem Umkreisradius $r = 12$ cm den Flächeninhalt des Dreiecks!

6. Warum können die Seiten $a = 8$ cm, $b = 5$ cm und der Flächeninhalt $A = 22\ \text{cm}^2$ nicht Bestimmungsstücke eines Dreiecks sein?

a) Begründen Sie geometrisch, daß dies nicht möglich ist!
Anleitung: Untersuchen Sie die funktionale Abhängigkeit des Flächeninhalts vom Winkel γ, wenn dieser von 0° bis 180° zunimmt!

b) Wie zeigt sich beim trigonometrischen Lösungsverfahren, daß die Aufgabe keine Lösung hat?

7. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie die Flächeninhalte der Dreiecke!

a) $a = 6{,}1$ cm $c = 4{,}7$ cm $\beta = 63{,}2°$	**b)** $a = 123{,}5$ m $b = 134{,}2$ m $\gamma = 102{,}16°$	**c)** $b = 17{,}18$ m $c = 13{,}85$ m $\alpha = 74{,}32°$	**d)** $a = 245{,}9$ m $b = 392{,}5$ m $\gamma = 47°\,43'$

8. Berechnen Sie die Winkel sowie die Flächeninhalte der Dreiecke, deren Seiten gegeben sind!

a) $a = 5{,}38$ m $b = 1{,}97$ m $c = 4{,}75$ m	**b)** $a = 2{,}458$ km $b = 3{,}019$ km $c = 1{,}389$ km	**c)** $a = 27{,}18$ m $b = 33{,}88$ m $c = 35{,}03$ m	**d)** $a = 8{,}754$ km $b = 6{,}672$ km $c = 8{,}386$ km

9. Beweisen Sie mit den Mitteln der Trigonometrie, daß die Winkelhalbierende im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten teilt!

10. Drei Kreise mit den Radien

a) $r_1 = 6{,}5$ cm; $r_2 = 5{,}2$ cm; $r_2 = 3{,}8$ cm

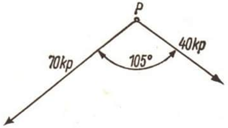
b) $r_1 = 9{,}5$ cm; $r_2 = 7{,}6$ cm; $r_3 = 5{,}1$ cm
c) $r_1 = 24{,}2$ cm; $r_2 = 15{,}6$ cm; $r_3 = 21{,}8$ cm
berühren einander gegenseitig von außen. Welchen Winkel schließen je zwei Zentralen miteinander ein? (Die Zentrale zweier Kreise ist die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte.)

11. Ein gleichseitiges Dreieck wird in Kavalierperspektive abgebildet.
a) Bestimmen Sie im Bilddreieck die Winkel **1)** darstellend-geometrisch, **2)** trigonometrisch!
b) Führen Sie die gleiche Aufgabe an einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Basiswinkel 75° durch!

Aus der Physik und der Technik

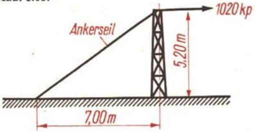
12. Ein Leitungsmast wird unter einem Winkel von 105° mit 70 kp und 40 kp Zug beansprucht (Abb. 1.64.).
Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch Größe und Richtung der Resultierenden!

Abb. 1.64.



13. Der 5,20 m hohe Mast am Ende einer elektrischen Grubenbahn ist durch eine waagerechte Seilspannkraft von 1020 kp belastet und durch ein schräges Drahtseil am Boden gegen Biegung verankert (Abb. 1.65.). Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch
a) die Spannkraft im Ankerseil,
b) die Belastung des Mastfundamentes (Gewicht des Mastes: $F = 800$ kp)!

Abb. 1.65.



14. Ein Drehkran trägt am Auslegerkopf B eine Last $F = 3000$ kp. Welche Spannkräfte treten in der Strebe S und in der Zugstange Z auf (Abb. 1.66.)? Sind es Zug- oder Druckkräfte?

15. Beantworten Sie die Fragen aus Aufgabe **14** für
a) $F = 6000$ kp; $\overline{AB} = 6000$ mm; $\overline{BC} = 5000$ mm; $\overline{AC} = 2000$ mm;
b) $F = 4000$ kp; $\overline{AB} = 3000$ mm; $\overline{BC} = 2000$ mm; $\overline{AC} = 1500$ mm!

16. Drei Kräfte, deren Wirkungslinien in einer Ebene liegen, greifen in einem Punkte P an und halten sich das Gleichgewicht.
a) $F_1 = 50$ kp, $F_2 = 60$ kp, $F_3 = 80$ kp
b) $F_1 = 720$ kp, $F_2 = 315$ kp, $F_3 = 555$ kp
Welche Winkel schließen ihre Wirkungslinien miteinander ein?

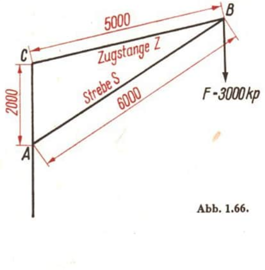


Abb. 1.66.

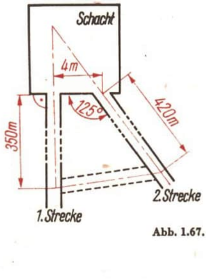


Abb. 1.67.

17. In einem Bergwerk sind von demselben „Stoß“ (Wand) eines Schachtes aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende „Strecken“ (Gänge) vorgetrieben worden, deren Eingänge um 4 m voneinander entfernt liegen (Grundriß der Schachtanlage: Abb. 1.67.). Die erste Strecke ist 350 m lang und verläuft senkrecht zur Schachtwand. Die zweite Strecke ist 420 m lang und verläuft unter einem Winkel von 125° gegen die Schachtwand. Die Enden beider Strecken sollen durch eine dritte Strecke miteinander verbunden werden.

a) Wie lang wird die Verbindungsstrecke?

b) In welchen Richtungen ist die Verbindungsstrecke von den beiden Streckenenden vorzutreiben, wenn sie von den Endpunkten aus gleichzeitig in Angriff genommen werden soll?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

1.6. Anwendungen aus dem Vermessungswesen

Bei Messungen im Gelände unterscheidet man Längen- oder Streckenmessungen, Winkelmessungen und Höhenmessungen.

Streckenmessungen

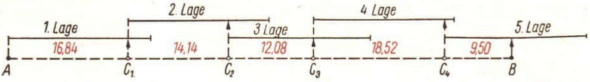


Abb. 1.69. a

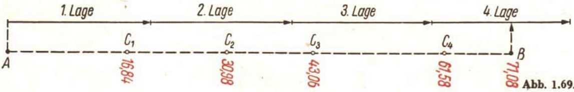
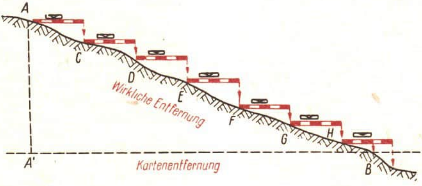


Abb. 1.69. b

Abb. 1.68.

Abb. 1.70.



Punkte werden im Gelände meist durch lotrecht aufgestellte Fluchtstäbe (Abb. 1.68.) bezeichnet. Zur Festlegung von Strecken werden zwei oder auch mehrere Fluchtstäbe verwendet.
Strecken werden im ebenen Gelände mit Stahlmeßbändern entweder abgesetzt (Abb. 1.69.a) oder fortgesetzt (Abb. 1.69.b) gemessen. Häufig verwendet man

auch 5,00 m lange Meßlatten, mit denen fortgesetzt gemessen wird. Ist das Gelände geneigt, so wird die horizontale Entfernung zweier Punkte A und B durch Staffelmessung bestimmt (Abb. 1.70.). Man hält in A eine Meßlatte mittels Wasserwaage horizontal und lotet ihren Endpunkt mit dem Senklot auf die Abhangfläche nach C hinunter. Hier legt man die zweite Meßlatte horizontal an usw. Im Gebirge oder in nicht begehbarem Gelände können Entfernungen optisch gemessen werden.

Winkelmessungen

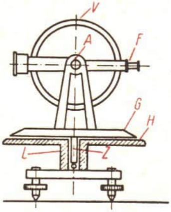


Abb. 1.71.

Das wichtigste Instrument für Winkelmessungen im Gebirge ist der **Theodolit** (Abb. 1.71.; schematische Darstellung). Ein in drei Punkten gelagertes und durch Stellschrauben horizontal einstellbares Untergestell trägt den Horizontalkreis H mit Kreisteilung (neue Teilung 400^g, alte Teilung 360°). Im Lager L des Fußes dreht sich mit dem Zapfen Z die Grundplatte G des Obergestells. Auf dieser ist um die (horizontal liegende) Kippachse A drehbar das Zielfernrohr F befestigt. Die Größe des Winkels, um den das Zielfernrohr beim Anpeilen eines Geländepunktes aus der Anfangslage in horizontaler Richtung gedreht werden muß, wird mit Hilfe der auf der Grundplatte G angebrachten Marke am Horizontalkreis H abgelesen; die Drehung des Fernrohres in der Vertikalrichtung wird an dem senkrecht zur Kippachse A stehenden Höhen- oder Vertikalkreis V gemessen. Weitere Geräte zur Winkelmessung sind zum Beispiel der **Feldwinkelmesser** und das **Winkelprisma.**

Für die Winkelgrößen sind für den Vollkreis 400 Grad neuer Teilung festgesetzt. Der rechte Winkel wird also in 100 Teile (Neugrad oder Gon) statt in 90 Teile (Altgrad) geteilt.

Zur Umrechnung dienen die folgenden Beziehungen:

Neugrad in Altgrad	Altgrad in Neugrad
$100^g = 90^\circ$	$90^\circ = 100^g$
$1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$	$1^\circ = \left(\frac{10}{9}\right)^g$
$n^g = \frac{9}{10} \cdot n^\circ$	$a^\circ = \frac{10}{9} \cdot a^g$

Beispiele:

1) $34{,}26^g = 0{,}9 \cdot 34{,}26^\circ \approx 30{,}83^\circ$

2) $86{,}58^\circ = \frac{10}{9} \cdot 86{,}58^g = 96{,}20^g$

Neben der Unterteilung des Neugrades in Dezimalgrade ist auch die Zählung in Minuten und Sekunden in Gebrauch. Die Einheit 1^g hat 100 Minuten (100^c), und 1 Minute hat 100 Sekunden (100^{cc}).

Das Vorwärtseinschneiden

Ein Punkt kann in der Ebene entweder durch seine Abstände von zwei festen Punkten festgelegt werden (Dreieckverfahren) oder durch Parallelen zu den Achsen eines rechtwinkligen Achsenkreuzes (orthogonales Aufnahmeverfahren; Koordinatensystem).

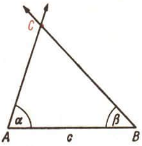


Abb. 1.72.

Beim Dreieckverfahren geht man von einer Standlinie oder Basis $\overline{AB} = c$ aus (Abb. 1.72.). Ein Punkt C (Neupunkt) wird folgendermaßen angeschlossen. Man mißt die Winkel $CAB = \alpha$ und $CBA = \beta$. Durch die drei Stücke c, α und β ist das Dreieck ABC bestimmt, die Abstände $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ können nach der trigonometrischen Methode berechnet werden. Das Verfahren ist in der Feldmessung als **Vorwärtseinschneiden** bekannt.

Beispiel 3:

Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist zu 30,37 m bestimmt worden. Sie bildet mit der Nordrichtung den Winkel 48,8° (Abb. 1.73.). Die Winkel, die durch die Strecke $\overline{P_1P_2}$ und durch die beiden Visierlinien zum Neupunkt ($\overline{P_1N}$ bzw. $\overline{P_2N}$) gebildet werden, betragen:

$$\sphericalangle 1 = 62{,}72° \text{ und } \sphericalangle 2 = 58{,}07°.$$

Zu berechnen sind die Entfernungen $\overline{P_1N}$ und $\overline{P_2N}$.

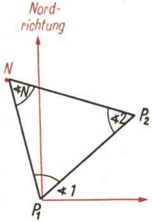


Abb. 1.73.

Lösung: Innerhalb der Berechnung werden für die Strecken nur die Maßzahlen der Strecken eingesetzt:

1) $\sphericalangle N = 180° - (62{,}72° + 58{,}07°)$

$\sphericalangle N = 180° - 120{,}79° = 59{,}21°$

$\overline{P_1N} : \overline{P_1P_2} = \sin(\sphericalangle 2) : \sin(\sphericalangle N)$

$$\overline{P_1N} = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \sin(\sphericalangle 2)}{\sin(\sphericalangle N)}$$

$$\overline{P_1N} = \frac{30{,}37 \cdot \sin 58{,}07°}{\sin 59{,}21°}$$

$$\overline{P_1N} = 30{,}01$$

2) $\overline{P_2N} : \overline{P_1P_2} = \sin(\sphericalangle 1) : \sin(\sphericalangle N)$

$$\overline{P_2N} = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \sin(\sphericalangle 1)}{\sin(\sphericalangle N)}$$

$$\overline{P_2N} = \frac{30{,}37 \cdot \sin 62{,}72°}{\sin 59{,}21°}$$

$$\overline{P_2N} = 31{,}43$$

N.	L.	
30,37 sin 58,07°	1,4825 0,9288 – 1	+
Zähler sin 59,21°	1,4113 0,9340 – 1	–
$\overline{P_1N}$	1,4773	
30,37 sin 62,72°	1,4825 0,9488 – 1	+
Zähler sin 59,21°	1,4313 0,9340 – 1	–
$\overline{P_2N}$	1,4973	

Ergebnis: Die Entfernungen des Neupunktes von den Endpunkten P_1 und P_2 der Strecke $\overline{P_1P_2}$ betragen 30,01 m bzw. 31,43 m.

Flächenberechnungen

Um den Flächeninhalt eines aufgenommenen (geradlinig begrenzten) Grundstückes zu bestimmen, zerlegt man die maßstäblich gezeichnete Figur in Vielecke, zum Beispiel Dreiecke und Trapeze, und berechnet die Flächeninhalte der Vielecke.
Die Messung einer Fläche bedingt ebenso wie die von Geraden die Festlegung einzelner Punkte. Bei kleinen Flächen können die Punkte von einer geraden Linie aus rechtwinklig aufgenommen werden. Die Fußpunkte der von den Punkten auf die Standlinie zu fällenden Lote werden mit einem Winkelprisma bestimmt.

Beispiel 4:

Ein Grundstück von der Form eines Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ ist vermessen worden. Die Begrenzungen sind auf die Gerade durch die Ecken P_1 und P_5 projiziert. Die Abbildung 1.74. zeigt den Aufnahmeplan mit eingeschriebenen Meterzahlen. Der Flächeninhalt ist zu berechnen.

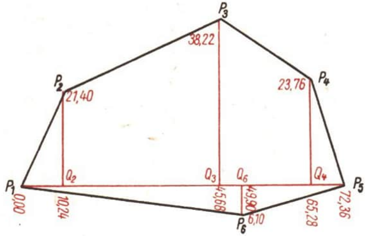


Abb. 1.74.

Lösung: Die Projektionen der Punkte P_2, P_3, P_4 und P_6 bezeichnen wir entsprechend mit Q_2, Q_3, Q_4 bzw. Q_6.

Wir berechnen die Flächeninhalte der Teilfiguren.

1. Dreieck $P_1Q_2P_2$ ist rechtwinklig.
$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 10{,}24 \cdot 21{,}40\ \mathrm{m}^2 = 5{,}12 \cdot 21{,}40\ \mathrm{m}^2 \approx 109{,}57\ \mathrm{m}^2$$

2. Dreieck $P_4Q_4P_5$ ist ebenfalls rechtwinklig.
$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 23{,}76 \cdot (72{,}36 - 65{,}28)\ \mathrm{m}^2 = 11{,}88 \cdot 7{,}08\ \mathrm{m}^2 \approx 84{,}11\ \mathrm{m}^2$$

3. Dreieck $P_1P_6P_5$
$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 72{,}36 \cdot 6{,}10\ \mathrm{m}^2 = 36{,}18 \cdot 6{,}10\ \mathrm{m}^2 \approx 220{,}70\ \mathrm{m}^2$$

4. Trapez $P_2Q_2Q_3P_3$
$$A_4 = \frac{21{,}40 + 38{,}22}{2} \cdot (45{,}68 - 10{,}24)\ \mathrm{m}^2$$
$$A_4 = \frac{59{,}62}{2} \cdot 35{,}44\ \mathrm{m}^2 = 29{,}81 \cdot 35{,}44\ \mathrm{m}^2 \approx 1056{,}47\ \mathrm{m}^2$$

5. Trapez $P_3Q_3Q_4P_4$
$$\mathrm{A}_5 = \frac{38{,}22 + 23{,}76}{2} \cdot (65{,}28 - 45{,}68)\ \mathrm{m}^2$$
$$A_5 = \frac{61{,}98}{2} \cdot 19{,}60\ \mathrm{m}^2 = 30{,}99 \cdot 19{,}60\ \mathrm{m}^2 \approx 607{,}40\ \mathrm{m}^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$
$$A = 109{,}57\ \mathrm{m}^2 + 84{,}11\ \mathrm{m}^2 + 220{,}70\ \mathrm{m}^2 + 1056{,}47\ \mathrm{m}^2 + 607{,}40\ \mathrm{m}^2$$
$$A = 2078{,}25\ \mathrm{m}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt beträgt angenähert 2078,25 m².

Höhenmessungen

Zur Bestimmung von Höhenunterschieden kann die Winkelmessung ebenfalls benutzt werden, wenn die Entfernung nach den aufzunehmenden Punkten bekannt ist oder sich bestimmen läßt. Werden die Höhe des Instrumentes mit i, die Entfernung mit e und der Winkel gegen die Horizontale mit α bezeichnet, so ist (Abb. 1.75.)

$$h = i + e \cdot \tan \alpha.$$

Liegt der Winkel α über der Horizontalen, so nennt man ihn **Erhebungswinkel (Höhenwinkel)**, liegt er unterhalb, so heißt er **Senkungswinkel (Tiefenwinkel)**

Abb. 1.75.

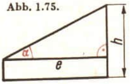


Abb. 1.76.

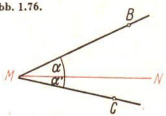
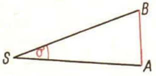


Abb. 1.77.

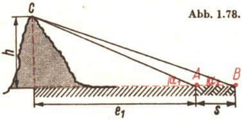


(Abb. 1.76.; α bzw. α'). Der Winkel, unter dem eine Strecke $\overline{AB}$ gesehen wird, heißt **Sehwinkel** σ. Es ist der Winkel, den die Visierlinien nach den Endpunkten A und B miteinander bilden (Abb. 1.77.).

Beispiel 5:

Um die Höhe eines Berges zu messen, wird in der Ebene eine Standlinie $\overline{AB} = s = 113$ m abgesteckt, deren Richtung genau auf die Bergspitze hinweist (Abb. 1.78.). An den Enden der Standlinie werden die Erhebungswinkel $\alpha_1 = 24{,}29°$ und $\alpha_2 = 19{,}80°$ gemessen. Wie hoch erhebt sich der Berg über der Ebene?

Abb. 1.78.



Lösung: Es ist $\tan\alpha_1 = \frac{h}{e_1}$ und $\tan\alpha_2 = \frac{h}{e_1 + s}$.
Die zweite Gleichung wird nach h aufgelöst, die erste nach e_1.

$$h = e_1 \cdot \tan\alpha_2 + s \cdot \tan\alpha_2$$

$$e_1 = \frac{h}{\tan\alpha_1}$$

Setzt man den Ausdruck für e_1 in den für h ein und formt um, so erhält man h.

$$h = \frac{h \cdot \tan\alpha_2}{\tan\alpha} + s \cdot \tan\alpha_2$$

$$h\left(1 - \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}\right) = s \tan\alpha_2$$

$$h = \frac{s \cdot \tan\alpha_2}{\frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}}$$

$$h = \frac{s \cdot \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}$$

Die Zahlenwerte werden eingesetzt.

$$h = \frac{113 \cdot \tan 24{,}29° \cdot \tan 19{,}80°}{\tan 24{,}29° - \tan 19{,}80°}$$

$$\begin{aligned} \tan 24{,}29° &= 0{,}4513 \\ -\tan 19{,}80° &= 0{,}3600 \\ \hline \text{Nenner} &= 0{,}0913 \end{aligned}$$

$h = 201{,}1$

N.	L.	
113	2,0531	
tan 24,29°	0,6545 – 1	+
tan 19,80°	0,5563 – 1	+
Zähler	1,2639	
Nenner	0,9605 – 2	–
h	2,3034	

Ergebnis: Der Berg erhebt sich rund 201 m über der Ebene.

Bemerkungen zur Triangulation

Die Unterlagen für die Herstellung zuverlässiger Karten liefert die Landesvermessung, die nach den Gesetzen der Geodäsie vorgenommen wird. Die Methoden der Vermessung, Berechnung und Abbildung, die zur Lösung der verschiedenen geodätischen Aufgaben angewendet werden, rechnet man je nach den Anforderungen an die theoretischen Grundlagen zur „niederen" oder zur „höheren" Geodäsie. Sind die zu vermessenden Gebiete so klein, daß sie als eben behandelt werden können und daß für Berechnungen die Methoden der ebenen Trigonometrie hinreichend genaue Ergebnisse liefern, so gehört die Bearbeitung zur niederen Geodäsie. Aufgabe der höheren Geodäsie dagegen ist es, weite Gebiete unter Berücksichtigung der Erdkrümmung zu vermessen. Hierzu müssen die auf der Erdoberfläche festgelegten Hauptpunkte der Landesvermessung auf eine Kugel- oder Ellipsoidoberfläche, die als Ersatz für die Erdoberfläche gedacht ist, eingeordnet sowie die einzelnen Gebiete dieser Flächen auf ebenen Karten dargestellt werden.
Bei der **Triangulation** wird das Land mit Dreiecksnetzen verschiedener Ordnung überzogen. Die Dreiecke der I. Ordnung haben 30 bis 100 km Seitenlänge, die der II. Ordnung durchschnittlich 8 km und die der III. Ordnung durchschnittlich 3 km. Von einer sehr genau gemessenen Basis ausgehend, werden die Punkte der Dreiecksnetze durch Winkelmessungen und Rechnung bestimmt. Über den trigonometrischen Marksteinen werden oft Holzgerüste errichtet, die die Sicht auf größere Entfernungen hin ermöglichen (trigonometrische Signale).

Stellen Sie trigonometrische Punkte in Ihrem Ort bzw. in seiner Umgebung fest!

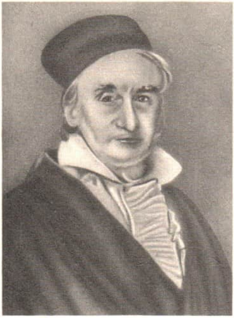
Höhenpunkte werden ebenfalls festgelegt. Die Vermarkung solcher Punkte geschieht zum Beispiel durch Einlassen von eisernen Bolzen in standsichere massive Gebäude.

Stellen Sie Höhenbolzen in der Umgebung Ihrer Schule fest!

Für die Landesvermessung in Deutschland war das Vorbild die Vermessung, die der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauss durchgeführt hat.

Carl Friedrich Gauss (1777—1855)

Der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauss wurde 1777 in Braunschweig geboren. Er stammte aus einfachen Verhältnissen; sein Vater hatte vielerlei Beschäftigungen, zum Beispiel als Gärtner, als Weißbinder, als Kassierer einer Sterbekasse. Wie Gauss selbst äußerte, schrieb und rechnete der Vater gut. Seine Mutter hatte jahrelang als Magd gearbeitet. Schon als Kind hatte Gauss Freude am Rechnen. In der Volksschule in Braunschweig entdeckte der Lehrer Büttner die mathematischen Fähigkeiten des Jungen. In der damaligen Gesellschaftsordnung war den Kindern der Werktätigen der Weg zur Hochschule im allgemeinen verschlossen. So war es ein besonderer Glücksfall, daß Gauss in Braunschweig das Gymnasium und in Göttingen die Universität besuchen konnte. Gauss beschäftigte sich schon als Fünfzehnjähriger mit Problemen der höheren Mathematik. Im Jahre 1799 promovierte er zum Doktor der Philosophie mit einer grundlegenden Arbeit auf dem Gebiet der Algebra. Seit 1807 war er Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen.



CARL FRIEDRICH GAUSS
(1777—1855) Abb. 1.79.

Das wissenschaftliche Schaffen von C. F. Gauss ist außerordentlich vielseitig. Auf allen Gebieten der Mathematik, der Arithmetik, Algebra, Analysis und der Geometrie, kam er zu neuen und für die weitere Entwicklung der Mathematik fruchtbaren Erkenntnissen. Außerdem wandte er sich auch anderen Wissenschaften zu, der Astronomie, der Physik und der angewandten Mathematik. Er war der Meinung, daß die Anwendungen für die mathematische Forschung große Bedeutung haben. Seine Vielseitigkeit ist auch dadurch gekennzeichnet, daß er sich als Student außer der höheren Mathematik der Philosophie und der Literatur widmete. In seinem Leben und Wirken hat GAUSS die Theorie mit der Praxis eng verbunden. Als er schon in höherem Alter war, führte er die Landesvermessung im Land Hannover durch. Die Triangulation diente zunächst praktischen Zwecken. Gauss benutzte sie aber zugleich zu wissenschaftlichen Erkenntnissen; durch äußerst genaue Vermessung des Dreiecks Brocken–Inselsberg–Hoher Hagen (bei Göttingen) prüfte er, ob der Satz von der Winkelsumme für solche großen Dreiecke noch gilt. Fast ein volles Jahrzehnt fuhr er Sommer für Sommer ins Gelände, um die erforderlichen Messungen entweder selbst durchzuführen oder zu überwachen. Mit ungeheurem Fleiß wertete er die Meßergebnisse aus. Dabei berechnete er etwa eine Million Zahlen und führte Eliminationen aus, bei denen 55 Gleichungen ebenso viele unbekannte Größen enthielten.
CARL FRIEDRICH GAUSS war einer der bedeutendsten Mathematiker.

Aufgaben

1. Unter welchem Winkel steigt eine geradlinige Straße gleichmäßig an, wenn zwei Meßpunkte A und B auf ihr um 810 m voneinander entfernt liegen (in der Straßenmitte gemessen) und einen Höhenunterschied von 40,80 m gegeneinander aufweisen? Zeichnen Sie einen maßstäblichen Geländeschnitt durch die Straßenmitte, und lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch (Abb. 1.80.)!

2. Welche Breitenausdehnung hat ein Körper, der einem Beobachter in der Entfernung d unter dem Sehwinkel 1° erscheint?

a) $d = 1$ m **b)** $d = 10$ m
c) $d = 100$ m **d)** $d = 1$ km **e)** $d = 10$ km

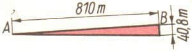


Abb. 1.80.

3. Ein elektrischer Leitungsmast wirft bei einer Sonnenhöhe von 52,7° in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten.
a) Wie groß ist die Höhe des Leitungsmastes über der Erde?
b) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch!

4. Um die Höhe einer Wolkendecke zu bestimmen, wird diese von dem Scheinwerfer einer meteorologischen Station lotrecht angestrahlt, so daß die Spitze des Lichtkegels an der Wolkendecke einen scharf begrenzten Lichtfleck erzeugt. Der Lichtfleck wird durch das Fernrohr eines in 300 m horizontaler Entfernung vom Scheinwerfer aufgestellten Theodoliten

angepeilt und am Höhenkreis des Theodoliten ein Höhenwinkel $\alpha = 70{,}4°$ abgelesen. Wie hoch ist die Wolkendecke?
Lösen Sie die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch!

5. Von einem Standpunkt P aus sieht man einen Turm unter dem Sehwinkel $\alpha = 29{,}82°$. Der Standpunkt P ist horizontal um $d = 240$ m vom Turm entfernt und liegt um $h = 19{,}40$ m höher als der Fuß des Turmes. Wie hoch ist der Turm? Lösen Sie die Aufgabe
a) trigonometrisch, **b)** geometrisch!

6. Beim Abstecken eines rechtwinklig-dreieckigen Grundrisses ergeben sich die Seitenlängen für die Hypotenuse zu 53,50 m und eine Kathete zu 25 m. Wie groß sind die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks, der Flächeninhalt und die dritte Seite?

7. Berechnen Sie die Horizontalentfernungen e_1 und e_2 eines Turmes von den Standorten St. 1 und St. 2 und die Höhe h der Turmspitze über NN (Abb. 1.81.)!

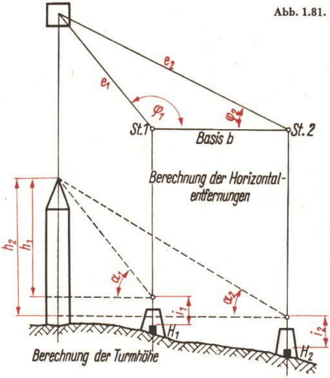


Abb. 1.81.

a) Gemessen sind die Grundlinie $b = 247{,}290$ m, die Horizontalwinkel $\varphi_1 = 110{,}99°$ und $\varphi_2 = 34{,}90°$ (Vorwärtseinschneiden).
b) Gegeben sind die Höhen der Standorte $H_1 = 145{,}02$ m über NN; $H_2 = 139{,}04$ m über NN sowie die Höhen der Meßinstrumente $i_1 = 1{,}30$ m; $i_2 = 1{,}20$ m. Gemessen sind die Höhenwinkel $\alpha_1 = 19{,}12°$ und $\alpha_2 = 12{,}80°$.
c) Beachten Sie die Rechenkontrolle für h!

8. Von einem Viereck kennt man die Seite $\overline{AB}$ und die Winkel, die $\overline{AB}$ mit den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ und mit den Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ bildet. Es soll aus diesen Angaben die Länge der Seite $\overline{CD}$ berechnet werden.
a) $\overline{AB} = 85$ m, $\sphericalangle ABC = 57{,}12°$, $\sphericalangle ABD = 34{,}24°$,
$\sphericalangle BAC = 44{,}37°$ und $\sphericalangle BAD = 122{,}19°$
b) $\overline{AB} = 72$ m, $\sphericalangle ABC = 39°\,43'$, $\sphericalangle ABD = 25°\,21'$,
$\sphericalangle BAC = 62°\,5'$ und $\sphericalangle BAD = 118°\,24'$
c) $\overline{AB} = 514$ m, $\sphericalangle ABC = 90°\,27'$, $\sphericalangle ABD = 62°\,27'$,
$\sphericalangle BAC = 39°\,52'$ und $\sphericalangle BAD = 73°\,54'$

9. Über einen Fluß soll eine Brücke mit zwei gleichen Bogen gebaut werden. Um die Lage des mittleren Pfeilers zu bestimmen, hat man auf dem linken Ufer eine Standlinie $\overline{CD}$ von $a = 190$ m Länge abgesteckt und die Winkel gemessen, die die Visierlinien nach den Endpfeilern A und B mit $\overline{CD}$ bilden. Welche Entfernung muß der mittlere Pfeiler von jedem der beiden anderen erhalten, wenn er 2,4 m breit werden soll?
$\sphericalangle ACD = \alpha = 152{,}53°$, $\sphericalangle BCD = \beta = 121{,}26°$,
$\sphericalangle ADC = \gamma = 4{,}16°$ und $\sphericalangle BDC = \delta = 32{,}43°$

10. Von den Endpunkten A und B einer bekannten Basis a werden die Punkte C und D anvisiert und dabei die Winkel CAD, DAB, CBA und DBC gemessen.
Es soll hieraus die Länge von $\overline{CD}$ berechnet werden.
a) $a = 25$ m, $\sphericalangle CAD = 58{,}58°$, $\sphericalangle DAB = 146{,}14°$,
$\sphericalangle CBA = 60{,}50°$ und $\sphericalangle DBC = 41{,}60°$

b) $a = 60$ m, $\sphericalangle\, CAD = 52^\circ\, 8'$, $\sphericalangle\, DAB = 126^\circ\, 2'$,
$\sphericalangle\, CBA = 66^\circ\, 52'$ und $\sphericalangle\, DBC = 34^\circ\, 52'$

c) $a = 150$ m, $\sphericalangle\, CAD = 30^\circ\, 24'$, $\sphericalangle\, DAB = 95^\circ\, 1'$,
$\sphericalangle\, CBA = 51^\circ\, 34'$ und $\sphericalangle\, DBC = 28^\circ\, 53'$

11. An zwei Punkten A und B von $a = 56$ m Abstand auf dem linken Elbufer bei Torgau wurden die Winkel der Visierlinien nach zwei auf den Ufern einander gegenüberliegenden Punkten C und D mit der Geraden AB gemessen. Es ergab sich:
$\sphericalangle\, CAB = 120^\circ$, $\sphericalangle\, DAB = 97{,}46^\circ$, $CBA = 4{,}30^\circ$ und $\sphericalangle\, DBA = 18{,}23^\circ$.
Welche Größe ergab sich hieraus für die Breite der Elbe an der Beobachtungsstelle?

12. Zwei Straßen stoßen geradlinig unter einem Winkel von 120° aufeinander. Zur Verbesserung der Straßenführung sollen beide durch einen Kreisbogen vom Radius
a) $r = 300$ m, **b)** $r = 500$ m
verbunden werden. Um wieviel Meter wird durch den Bogen der Straßenzug verkürzt?

13. Von einer Klasse wird ein LPG-Feld vermessen (Abb. 1.82.). Ergebnisse:
Basis $\overline{AB} = 125$ m

$\sphericalangle\, BAC = \alpha_1 = 35{,}1^\circ$ $\quad$ $\sphericalangle\, ABC = \beta_1 = 87{,}8^\circ$
$\sphericalangle\, BAD = \alpha_2 = 58{,}1^\circ$ $\quad$ $\sphericalangle\, ABD = \beta_2 = 71{,}9^\circ$
$\sphericalangle\, BAE = \alpha_3 = 112{,}0^\circ$ $\quad$ $\sphericalangle\, ABE = \beta_3 = 26{,}1^\circ$
$\sphericalangle\, BAF = \alpha_4 = 121{,}0^\circ$ $\quad$ $\sphericalangle\, ABF = \beta_4 = 33{,}6^\circ$
$\sphericalangle\, BAG = \alpha_5 = 64{,}0^\circ$ $\quad$ $\sphericalangle\, ABG = \beta_5 = 84{,}2^\circ$.

Der Flächeninhalt des Feldes ist zu berechnen.

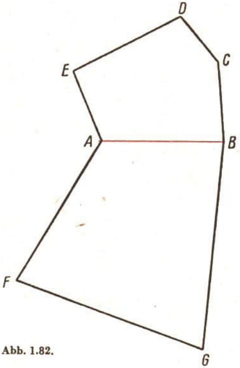


Abb. 1.82.

14. Eine neue Eisenbahnlinie wird gebaut. Sie verläuft in einer Ebene senkrecht zu einer bereits bestehenden Bahnlinie, über die sie mittels einer Brücke von 8,50 m Höhe geführt werden soll. Wie lang muß die Rampe mindestens sein, wenn der Anstiegswinkel nicht mehr als 1° betragen soll?

15. Im Gelände ist eine Basis $\overline{AB} = 225$ m vermessen worden. Ein dritter Punkt im Gelände ist C, der von A und B aus nicht zugänglich ist. Mit dem Theodoliten wurden
$\sphericalangle\, CAB = \alpha = 75^\circ\, 20'$ und $\sphericalangle\, CBA = \beta = 42^\circ\, 40'$
ermittelt.
Wie lang sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ (Abb. 1.83.)?

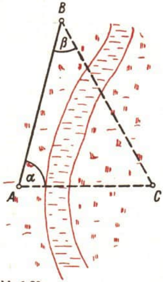


Abb. 1.83.

16. Wieviel Hektar Land werden durch die Trockenlegung der in Abbildung 1.84. skizzierten feuchten Wiese $ABCD$ gewonnen?
Bemerkung: $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ sind nicht begehbar.
$\overline{AB} = 470$ m; $\overline{BC} = 675$ m $\cdot$ $\alpha = 115^\circ$; $\beta_1 = 26^\circ$;
$\beta_2 = 72{,}5^\circ$

17. Zwischen zwei durch einen Wald getrennten Orten A und B soll für eine Hochspannungsleitung eine Schneise geschlagen werden. Die Orte A und B liegen gleich hoch und sind von einem in gleicher Höhe liegenden Geländepunkt C aus beide sichtbar. Die Peilstrahlen CA und CB werden zu 2,380 km und 3,450 km bestimmt. Der Winkel ACB beträgt $38{,}7^\circ$.

a) Wie groß ist die Horizontalentfernung $\overline{AB}$?

b) In welchen Richtungen von A und B aus ist die Schneise zu schlagen?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

18. Ein 23 m hoher Gittermast einer Hochspannungsleitung wirft in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten. Unter welchem Winkel fallen im Zeitpunkt der Beobachtung die Sonnenstrahlen ein? Lösen Sie die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

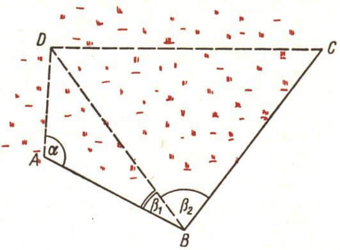


Abb. 1.84.

Schüleraufträge

1. Berechnen Sie **a)** die Höhe Ihrer Schule, **b)** die Höhe Ihres Wohnhauses, **c)** die Höhe eines Fabrikschornsteines, indem Sie von Ihrem Standort bis zum Fuß des Objektes eine waagerechte Standlinie vermessen und die Erhebungswinkel mit einem Winkelmeßgerät bestimmen!

2. Berechnen Sie aus selbstgewonnenen Meßwerten die Größe einiger Ackerflächen, auf denen Sie am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion arbeiten!

3. Stellen Sie in der näheren Umgebung an einer steilen Straße fest, unter welchem Winkel sie gegen die Horizontale ansteigt! Berechnen Sie den Höhenunterschied, den Sie auf 100 m Weglänge überwindet!

1.7. Die Periodizität der Winkelfunktionen

Das Bogenmaß eines Winkels

Bisher haben wir den Winkel in Grad (°) gemessen. Dabei ist die Winkeleinheit Grad der 360ste Teil eines Vollwinkels.
Es gibt noch andere Möglichkeiten, Winkel zu messen. Wir behandeln im folgenden das **Bogenmaß** des Winkels. Seine Einführung beruht auf dem Gedanken, daß man Winkel durch die Länge des zugehörigen Bogens auf einem Kreis bestimmen kann, in welchem der gegebene Winkel Zentriwinkel ist.
Aus Abbildung 1.85. erkennt man die Gültigkeit folgender Proportion:[1]

Kreisumfang	:	Kreisbogen	=	Vollwinkel	:	Zentriwinkel
$2\pi r$	:	b	=	$360°$	:	$\alpha°$.

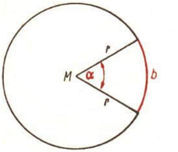


Abb. 1.85.

Daraus folgt:

$$b = \frac{\pi r}{180°}\alpha°.$$

[1] In den Formeln steht das Symbol α für den Zahlenwert im Gradmaß.

Die Länge eines Kreisbogens b ist dem Zentriwinkel α und der Länge des Radius r proportional.

Wie lautet der Proportionalitätsfaktor?

Bildet man aus der Proportion die neue Beziehung $\frac{b}{r} = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha°$, so ist das Verhältnis aus Kreisbogen und Radius nur noch dem Zentriwinkel proportional. Man kann daher dieses Verhältnis als Maß für den Winkel α einführen. Da diesem Maß der Bogen zugrunde liegt, bezeichnet man es als **Bogenmaß.**

Definition:
Unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht man das Verhältnis der zugehörigen Bogenlänge zur Länge des Radius.

Das Symbol für das Bogenmaß ist: arc $\alpha°$ oder $\widehat{\alpha}$ (gelesen: „Arkus von alpha Grad"[1] oder „Bogen alpha").

Es gilt:

$$(30) \quad \widehat{\alpha} = \operatorname{arc} \alpha° = \frac{b}{r} = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180°}.$$

Das Bogenmaß des Winkels ist also als Verhältnis zweier Längen eine unbenannte Zahl. Die Gleichung (30) stellt eine lineare Funktion $[\widehat{\alpha} = f(\alpha°)]$ dar.

Wird zur Bestimmung des Bogenmaßes speziell der Einheitskreis genommen, so ergibt sich eine einfache Deutung:

$$\widehat{\alpha} = \frac{b \text{ Längeneinheiten}}{1 \text{ Längeneinheit}} = b.$$

Das Bogenmaß eines Winkels ist also gleich der Maßzahl des zugehörigen Bogens auf dem Einheitskreis.

Übergang vom Gradmaß zum Bogenmaß und umgekehrt

Durch Einsetzen in die Gleichung (30) kann für die im Gradmaß gegebenen Winkel das zugehörige Bogenmaß berechnet werden.

Beispiel 1:

Es soll das Bogenmaß für den Winkel 45° berechnet werden.

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180°}$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot 45°}{180°} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$$

Berechnen Sie das Bogenmaß für die Winkel 90°, 180°, 360°*!*

Zum Gradmaß 1° gehört als Bogenmaß die Zahl

$$\operatorname{arc} 1° = \frac{\pi \cdot 1°}{180°} \approx 0{,}0175 \approx \frac{7}{400}.$$

[1] arcus (lat.), Bogen

Zum Gradmaß α° gehört als Bogenmaß die Zahl

$$\operatorname{arc}\alpha^\circ = \widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \approx 0{,}0175 \cdot \alpha \approx \frac{7}{400} \cdot \alpha\,.$$

Das Bogenmaß kann also angenähert berechnet werden, indem man den Zahlenwert des Winkels im Gradmaß mit 0,0175 multipliziert.
Die Tafel 16 der vierstelligen Logarithmentafel enthält die Bogenmaße der Winkel 0° bis 360°.
Die Bogenmaße von Winkeln mit nicht tabellierten Gradzahlen, zum Beispiel von Bruchteilen von Graden, bestimmt man durch additive oder subtraktive Zusammensetzung aus tabellierten Werten oder Bruchteilen davon. Auch der Interpolation kann man sich bedienen.

Beispiele

für die Umrechnung von Grad- in Bogenmaß:

2)
$$\begin{array}{rcl} \alpha^\circ & = & 132^\circ \\ 130^\circ & \triangleq & 2{,}2689 \\ 2^\circ & \triangleq & 0{,}0349 \\ \hline \widehat{\alpha} & = & 2{,}3038 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{rcl} \alpha^\circ & = & 198{,}92^\circ \\ 180^\circ & \triangleq & 3{,}1416 \\ 18^\circ & \triangleq & 0{,}3142 \\ 0{,}92^\circ & \triangleq & 0{,}0161 \\ \hline \widehat{\alpha} & = & 3{,}4719 \end{array}$$

Wird die Beziehung (30) nach α° aufgelöst, so ergibt sich

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \widehat{\alpha}\,.$$

Daraus erhält man:

Zur Zahl π als Bogenmaß gehört als Gradmaß $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \pi = 180^\circ$.

Zur Zahl 1 als Bogenmaß gehört als Gradmaß $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1 \approx \frac{180^\circ}{3{,}14} \approx 57{,}3^\circ$.

Der Winkel mit dem Bogenmaß 1 wird als gesetzliche Winkeleinheit verwendet und heißt **Radiant** (Kurzzeichen: rad). Er hat mit 57,3° fast die Größe der Winkel im gleichseitigen Dreieck. Die Winkeleinheit Radiant ist also wesentlich größer als die Winkeleinheit Grad.

Überzeugen Sie sich, daß ein Radiant der 2πte Teil des Vollwinkels ist!
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Zentriwinkel 1 rad!

Beispiele

für die Umrechnung von Bogen- in Gradmaß:

4) $\widehat{\alpha} = 4{,}9742$
$$\begin{array}{lcr} 4{,}7124 & \triangleq & 270^\circ \\ \hline 0{,}2618 & & \\ 0{,}2618 & \triangleq & 15^\circ \\ \hline & \alpha^\circ = & 285^\circ \end{array}$$

5) $\widehat{\alpha} = 2{,}7193$
$$\begin{array}{lcr} 2{,}7053 & \triangleq & 155^\circ \\ \hline 0{,}0140 & & \\ 0{,}0140 & \triangleq & 0{,}8^\circ \\ \hline & \alpha^\circ = & 155{,}8^\circ \end{array}$$

Zur Umrechnung des Gradmaßes eines Winkels ins Bogenmaß und umgekehrt können also die folgenden Formeln verwendet werden:

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ \quad \text{und} \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\widehat{\alpha}\,.$$

In der Elementargeometrie mißt man Winkel meistens im Gradmaß. In der Trigonometrie benutzt man Winkelgrade bei praktischen Messungen und Rechnungen, bei allgemeineren Betrachtungen über Winkelfunktionen bevorzugt man das Bogenmaß. In der höheren Mathematik bedient man sich ausschließlich des Bogenmaßes.

Die Winkelfunktionen negativer Winkel

Legt man auf dem Radius $\overline{OP} = r$ des Kreises um den Koordinatenanfangspunkt O als Richtung die von O nach P fest, so entsteht die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$, die man als **Ortsvektor** $\mathfrak{r}$ bezeichnet (Abb. 1.86.). Die Richtung des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ ist durch den Richtungswinkel x bestimmt, seine Länge durch die Strecke $\overline{OP}$. Wenn sich der Ortsvektor um seinen Anfangspunkt O dreht, so kann diese Drehung – je nach der Drehrichtung – im positiven oder im negativen Drehsinn erfolgen. Eine Drehung im positiven Sinne erfolgt gegen die Bewegung des Uhrzeigers (im Gegenzeigersinn), eine Drehung im negativen Sinne mit der Uhrzeigerbewegung (im Uhrzeigersinn). Dreht sich der Ortsvektor im positiven Sinne, so bezeichnet man die entstehenden Winkel als p o s i t i v

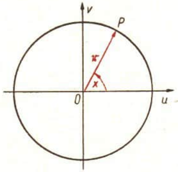


Abb. 1.86.

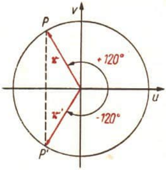


Abb. 1.87.

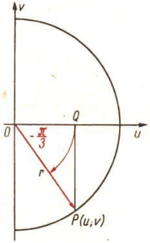


Abb. 1.88.

$\left(\text{z. B. } + 120° = + \frac{2\pi}{3}\right)$. Im anderen Falle bezeichnet man die Winkel als n e g a t i v $\left(\text{z. B. } - 120° = - \frac{2\pi}{3}\text{; Abb. 1.87.}\right)$. Man legt fest, daß die Definitionen 1 bis 4 der Winkelfunktionen auch für Winkel im Bereich $0 > x \geqq -2\pi$ gelten sollen. Die Abbildung 1.88. veranschaulicht das für den Winkel $-\frac{\pi}{3}$:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{v}{r} = -\frac{\frac{r}{2}\sqrt{3}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Die Winkelfunktionen negativer Winkel lassen sich auf die entsprechenden Funktionen positiver Winkel zurückführen. Es ist zum Beispiel

$$\sin(-x) = \sin(2\pi - x).$$

Andererseits ist

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x.$$

Daraus folgt

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Es ist:

(31) $\sin(-x) = -\sin x \qquad \tan(-x) = -\tan x$

$\cos(-x) = \cos x \qquad \cot(-x) = -\cot x.$

Beweisen Sie die Beziehungen (31) für negative Winkel in den verschiedenen Quadranten!
Gelten die Gleichungen (5) bis (8) von Seite 15, die die Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen bei gleichem Winkel zum Ausdruck bringen, sowie die Gleichungen (10) bis (12) von Seite 27, die die Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln verschiedener Quadranten darlegen, auch für negative Winkel?

Funktionen $f(x)$, die ihren Wert nicht ändern, wenn die unabhängige Veränderliche das Vorzeichen wechselt, heißen **gerade Funktionen**, Funktionen, die dabei das Vorzeichen wechseln, dagegen **ungerade Funktionen.**

Definition:

Gerade Funktionen $\qquad$ Ungerade Funktionen

$f(-x) = f(x) \qquad f(-x) = -f(x).$

Die Kosinusfunktion, $y = \cos x$, ist eine gerade Funktion, die Sinusfunktion, $y = \sin x$, dagegen eine ungerade Funktion.

Deuten Sie diese Funktionseigenschaften geometrisch! Welche Symmetrieverhältnisse hat die Kosinusfunktion $y = \cos x$ zur y-Achse, welche die Sinuskurve $y = \sin x$ zum Nullpunkt O (0; 0)? Zu welcher Funktionsgruppe gehören die Tangens- und die Kotangensfunktion?

Nennen Sie gerade und ungerade Potenzfunktionen!

Beispiele:

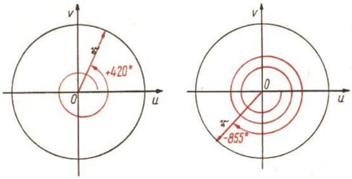
6) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\sin 60° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

7) $\cos(-110°) = \cos 110° = \cos(180° - 70°) = -\cos 70° = -0{,}3420$

8) $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\tan\frac{2\pi}{3} = -\tan 120° = -\tan(180° - 60°)$
$= -(-\tan 60°) = +\sqrt{3}$

9) $\cot(-214{,}92°) = -\cot 214{,}92° = -\cot(180° + 34{,}92°)$
$= -\cot 34{,}92° = -1{,}432$

Die Winkelfunktionen für Winkel mit Beträgen über 2π



a Abb. 1.89. b

Dreht sich der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ im positiven oder im negativen Sinne, so werden nach einem vollen Umlauf Winkel erzeugt, deren absoluter Betrag größer als 2π ist, nach zwei Umläufen Winkel, deren absoluter Betrag größer als 4π ist, usw. (Abb. 1.89.a und 1.89.b). Winkel, die sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden, heißen zueinander **äquivalent**.

Beispiel 10:

$$\ldots -\frac{17\pi}{3};\; -\frac{11\pi}{3};\; -\frac{5\pi}{3};\; \frac{\pi}{3};\; \frac{7\pi}{3};\; \frac{13\pi}{3};\; \ldots$$

Bezeichnet man den zwischen 0 und 2π liegenden Winkel x als den **Hauptwert**, so läßt sich jeder beliebige Winkel durch die Gleichung

$$x = \bar{x} + k \cdot 2\pi$$

darstellen, wobei k eine (positive oder negative) ganze Zahl ist.

Beispiel 11:

Wenn $x = -855°$ ist, so ist

$$\bar{x} = -855° - (-3) \cdot 360° = -855° + 3 \cdot 360° = 225°.$$

Man legt nun fest, daß die Erklärungen der Winkelfunktionen auch für Winkel x mit Beträgen über 2π gelten.
Dreht sich der Ortsvektor von einer beliebigen Ausgangslage aus im Einheitskreis, so hat sein Endpunkt P nach ein, zwei, drei usw. vollen Umläufen dieselben Koordinaten wie in der Ausgangslage. Daher haben die Winkelfunktionen in den **Intervallen**[1] $2\pi \ldots 4\pi$; $4\pi \ldots 6\pi$ usw. dieselben Werte wie im Intervall $0 \ldots 2\pi$. Entsprechendes gilt für negative Winkel.

Veranschaulichen Sie einige Zahlenbeispiele durch geeignete Abbildungen!

Die Winkelfunktionen eines beliebigen Winkels x lassen sich auf dieselbe Funktion des Hauptwertes $\bar{x}$ des Winkels zurückführen. Es ist

$$\begin{aligned} &(32) \quad \sin x = \sin(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \sin \bar{x} \\ & \cos x = \cos(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \cos \bar{x} \\ & \tan x = \tan(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \tan \bar{x} \\ & \cot x = \cot(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \cot \bar{x}, \end{aligned}$$

wobei k eine (positive oder negative) ganze Zahl ist.

Zeigen Sie, daß die Formeln (5) bis (8) auf Seite 15 für beliebige Winkel gelten!

Bei gegebener Funktion $f(x)$, f bedeute sin, cos, tan oder cot, und bekanntem Funktionswert findet man für den Winkel x zunächst die Werte zwischen 0 und 2π

[1] intervallum (lat.), Zwischenraum, Teilbereich

und durch Addition bzw. Subtraktion der ganzzahligen Vielfachen von 2π die äquivalenten Werte. Zu der gegebenen Funktion $f(x)$ erhält man also im allgemeinen die beiden Winkel

$$\overline{x_1} + k \cdot 2\pi \text{ und } \overline{x_2} + k \cdot 2\pi, \; (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

Beispiele:

12) $\sin 3520° = \sin(3520° - 9 \cdot 360°) = \sin 280° = -\sin 80° = -0{,}9848$

13) $\tan x = 2{,}565$; $\overline{x_1} = 68{,}7°$, $\overline{x_2} = 248{,}7°$

Allgemeine Lösung: $x_1 = 68{,}7 + k \cdot 360°$ und $x_2 = 248{,}7° + k \cdot 360°$, $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$,

oder $x = 68{,}7° + k' \cdot 180°$, $(k' = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$.

Die Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion

Da sich bei der Sinusfunktion die Funktionswerte nach jeweils 2π (in den Bereichen $2\pi \leqq x < 4\pi$; $4\pi \leqq x < 6\pi$; ... und in den Intervallen $-2\pi \leqq x < 0$; $-4\pi \leqq x < -2\pi$; ...) wiederholen, muß sich das Kurvenstück, das die graphische Darstellung von $y = \sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ ergab, in regelmäßiger Wiederkehr nach beiden Seiten fortsetzen. Für die Sinusfunktion ergibt sich so die Abbildung 1.90. Das Bild der Funktion $y = \sin x$ nennt man kurz **Sinuskurve**. Man erkennt, daß sich das zwischen 0 und 2π gelegene Kurvenstück immer wiederholt. Ebenso könnte man das allerdings auch von dem zwischen 0 und 6π gelegenen Kurvenstück sagen. Eine derartige Funktion nennt man eine periodische Funktion.

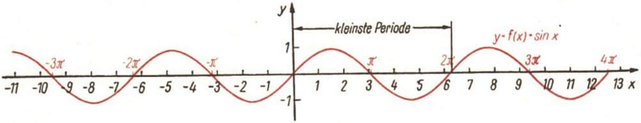


Abb. 1.90.

Die Abschnitte auf der x-Achse, innerhalb derer ein sich wiederholendes Kurvenstück liegt, nennt man Perioden der betreffenden Funktion. Perioden der Sinusfunktion sind beispielsweise $0 \ldots 2\pi$; $2\pi \ldots 4\pi$; $4\pi \ldots 6\pi$; ... und $0 \ldots -2\pi$; $-2\pi \ldots -4\pi$; $-4\pi \ldots -6\pi$; ...

Allgemein lassen sich die Perioden der Sinusfunktion zusammenfassen als

$$k \cdot 2\pi = 2k\pi, \; (k = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

Am wichtigsten ist die kleinste Periode; sie beträgt 2π. Mit ihrer Hilfe läßt sich der analytische Ausdruck der Sinusfunktion wie folgt umgestalten:

Statt $y = \sin x$ mit $-\infty < x < +\infty$ kann man auch schreiben:

(33) $y = \sin(x + 2k\pi)$ mit $0 \leqq x < 2\pi$; k ganzzahlig.

Das ist deshalb möglich, weil nach unseren Überlegungen gilt:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \text{ für } 0 \leqq x < 2\pi;\ k \text{ ganzzahlig.}$$

Wichtig ist, daß die Darstellung (33) nicht nur für einen bestimmten Winkel x, sondern für alle x in dem angegebenen Bereich gilt.

Wodurch unterscheidet sich (33) von der Beziehung (32)?

Das Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ enthält alle für die Sinuswerte möglichen Werte, das heißt ihren Wertevorrat $(-1 \leqq y \leqq 1)$.
Die Kosinusfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode 2π. Es ist

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{mit} \quad 0 \leqq x < 2\pi; \; k \text{ ganzzahlig.}$$

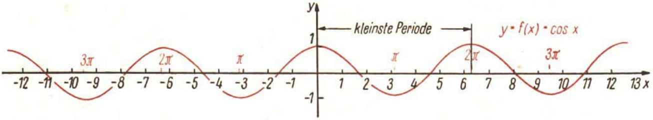


Abb. 1.91.

In Abbildung 1.91. ist die Funktion

(34) $y = \cos(x + 2k\pi)$ mit $0 \leqq x < 2\pi$; k ganzzahlig,

graphisch dargestellt.
Wir stellen fest, daß die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ für jedes beliebige x erklärt sind.

Die Periodizität der Tangens- und der Kotangensfunktion

Die Tangens- und die Kotangensfunktion verhalten sich ähnlich wie die Sinus- und die Kosinusfunktion. Wir können die Tangensfunktion im ganzen x-Bereich $-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n ganzzahlig) graphisch darstellen (Abb. 1.92.). Wir erkennen, daß auch die Tangensfunktion eine periodische Funktion

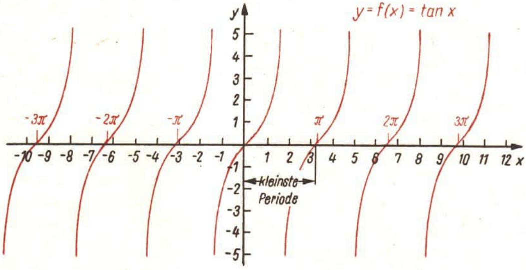


Abb. 1.92.

ist. Perioden von $y = \tan x$ sind beispielsweise $0 \ldots \pi$; $\pi \ldots 2\pi$; $2\pi \ldots 3\pi$; ... und $0 \ldots -\pi$; $-\pi \ldots -2\pi$; $-2\pi \ldots -3\pi$; ...
Im Gegensatz zur Sinus- und Kosinusfunktion wiederholen sich bei der Funktion $y = \tan x$ die Funktionswerte y bereits nach einem Zuwachs des Argumentes[1] x um π. Die Tangensfunktion hat also die (kleinste) Periodenlänge π. Es ist, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$),

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \text{ für } 0 \leqq x < \pi.$$

Die Tangensfunktion kann durch den analytischen Ausdruck

(35) $y = \tan(x + k\pi)$ mit $0 \leqq x < \pi$; k ganzzahlig

wiedergegeben werden.
Sie ist nicht erklärt an den Stellen

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n \text{ ganzzahlig}).$$

Die Kotangensfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode π. Es gilt

$$\cot(x + k\pi) = \cot x \quad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \pi;\ k \text{ ganzzahlig}.$$

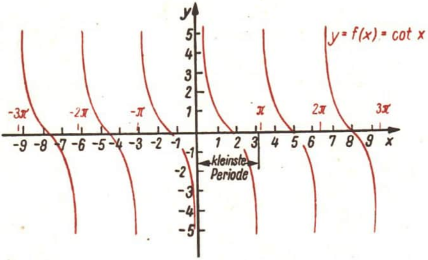
Für die in Abbildung 1.93. dargestellte Kotangensfunktion lautet der analytische Ausdruck

(36) $y = \cot(x + k\pi)$ mit $0 \leqq x < \pi$; k ganzzahlig.

Sie ist nicht erklärt an den Stellen

$$x = n\pi \ (n \text{ ganzzahlig}).$$

Abb. 1.93.



Aus den graphischen Darstellungen der Winkelfunktionen kann man den Wertevorrat jeder dieser Funktionen deutlich erkennen. Zu jeder reellen Zahl x (als Winkel x im Bogenmaß) gehört eine bestimmte reelle Zahl y aus dem Intervall $-1 \leqq y \leqq +1$ als Funktionswert der Sinus- bzw. Kosinusfunktion. Zu jeder reellen Zahl x mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + n\pi$ bzw. $n\pi$ gehört eine bestimmte reelle Zahl y als Funktionswert der Tangens- bzw. Kotangensfunktion.

[1] Als Argument wird hier die unabhängige Veränderliche der Winkelfunktion bezeichnet.

In der folgenden Übersicht sind Definitionsbereich und Wertevorrat der vier Winkelfunktionen nochmals zusammengestellt.

Winkelfunktion	Definitionsbereich	Wertevorrat
$y = \sin x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq +1$
$y = \cos x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq +1$
$y = \tan x$	$-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n ganzzahlig)	$-\infty < y < +\infty$
$y = \cot x$	$-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $n\pi$ (n ganzzahlig)	$-\infty < y < +\infty$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Werte aller Winkelfunktionen der folgenden Winkel!

a) $-30°$ **b)** $-18°$ **c)** $-135°$ **d)** $-83{,}4°$ **e)** $-90{,}45°$
f) $-174{,}77°$ **g)** $-214{,}92°$ **h)** $-282°\,12'\,38''$ **i)** $-393{,}27°$ **k)** $-450{,}13°$

2. Suchen Sie die Logarithmen der Beträge zu den Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens für die in Aufgabe **1a** bis **k** angeführten Winkel auf!

3. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionswerten $f(x)$ die zwischen $0°$ und $-360°$ liegenden negativen Winkel!

	a)	b)	c)		d)	e)	f)
$\sin x$	$-0{,}4848$	$-0{,}9024$	$0{,}0820$	$\tan x$	$-0{,}3759$	$-0{,}9935$	$2{,}877$
$\cos x$	$0{,}9655$	$0{,}3704$	$-0{,}8671$	$\cot x$	$-191{,}0$	$-1{,}333$	$0{,}0107$

4. Bestimmen Sie zu den folgenden Logarithmen der vier Winkelfunktionen sowohl die positiven als auch die negativen Winkel!

a) $\lg \sin x = 0{,}5717 - 1$, $(\sin x > 0)$
b) $\lg |\sin x| = 0{,}1718 - 1$, $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}9970 - 2$, $(\cos x > 0)$
d) $\lg |\cos x| = 0{,}4237 - 1$, $(\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}3393$, $(\tan x > 0)$
f) $\lg |\tan x| = 1{,}0763$, $(\tan x < 0)$
g) $\lg \cot x = 0{,}6506 - 1$, $(\cot x > 0)$
h) $\lg |\cot x| = 0{,}8411 - 2$, $(\cot x < 0)$

5. Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Beziehungen auch für negative Winkel gelten!

a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ **b)** $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ **c)** $\tan x \cot x = 1$
d) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ **e)** $\sin x = \cos(90° - x)$ **f)** $\tan x = \cot(90° - x)$
g) $\cos x = \sin(90° - x)$ **h)** $\cot x = \tan(90° - x)$

6. Geben Sie zu den nachstehenden Winkeln die auf sie folgenden drei äquivalenten Winkel bei positivem und negativem Drehsinn an!

a) $50°$ **b)** $175°$ **c)** $335°$ **d)** $117{,}5°$ **e)** $-221{,}68°$
f) $-33°$ **g)** $212{,}7°$ **h)** $-148{,}5°$ **i)** $241°\,15'$ **k)** $7°\,10'\,10''$

7. Wie groß ist der Hauptwert der folgenden Winkel?

a) $1200°$ **b)** $5180°$ **c)** $-320°$ **d)** $-1755°$ **e)** $-615°\,23'$
f) $2123°$ **g)** $-4713°$ **h)** $498°\,10'$ **i)** $-913{,}2°$ **k)** $2916{,}48°$

8. Bestimmen Sie jeweils die Funktionswerte!

a) $\sin 383^\circ$ **b)** $\sin 773{,}2^\circ$ **c)** $\sin(-640{,}56^\circ)$ **d)** $\sin(-3620{,}78^\circ)$
e) $\cos 421^\circ$ **f)** $\cos 1527{,}3^\circ$ **g)** $\cos(-704{,}64^\circ)$ **h)** $\cos(-1083{,}92^\circ)$
i) $\tan 8000^\circ$ **k)** $\tan(-444{,}7^\circ)$ **l)** $\cot 992{,}25^\circ$ **m)** $\cot(-524{,}44^\circ)$

9. Suchen Sie die Logarithmen der Beträge der Funktionen aus den Aufgaben **8a** bis **m** auf!

10. Geben Sie sämtliche Lösungen (im Gradmaß) folgender Gleichungen an!

a) $\sin x = 0{,}3223$ **b)** $\sin x = 0{,}8440$ **c)** $\cos x = 0{,}9018$ **d)** $\cos x = -0{,}1382$
e) $\tan x = -1{,}083$ **f)** $\tan x = 0{,}9045$ **g)** $\cot x = 0{,}0524$ **h)** $\cot x = -0{,}4109$

11. Welche Winkel ergeben sich als allgemeine Lösung aus den nachstehenden Logarithmen der Winkelfunktionen?

a) $\lg \sin x = 0{,}4328 - 1$, $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}6743 - 1$, $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}1873 - 1$, $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}8591 - 1$, $(\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}4711 - 1$, $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\cot x| = 0{,}7220 - 2$, $(\cot x < 0)$

12. Stellen Sie die Funktionen

a) $y = \sin x$, **b)** $y = \cos x$, **c)** $y = \tan x$, **d)** $y = \cot x$
im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ graphisch dar, indem Sie die Winkel auf der x-Achse im Bogenmaß auftragen und dabei auf beiden Achsen gleiche Maßeinheiten benutzen!

13. Rechnen Sie die folgenden im Gradmaß gegebenen Winkel ins Bogenmaß um!

a) 1° **b)** $0{,}1^\circ$ **c)** $0{,}01^\circ$ **d)** $1'$ **e)** $1''$ **f)** 45°
g) 120° **h)** 75° **i)** 300° **k)** -180° **l)** 900° **m)** 32°
n) $67{,}5^\circ$ **o)** $102{,}7^\circ$ **p)** $256{,}58^\circ$ **q)** $318{,}04^\circ$ **r)** $-177{,}42^\circ$ **s)** $1125{,}17^\circ$

14. Rechnen Sie die folgenden im Bogenmaß gegebenen Winkel ins Gradmaß um!

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{5}$ **c)** $\frac{\pi}{10}$ **d)** $\frac{\pi}{15}$ **e)** $\frac{\pi}{30}$ **f)** $\frac{\pi}{180}$
g) $\frac{3}{2}\pi$ **h)** $\frac{3}{4}\pi$ **i)** $\frac{7}{8}\pi$ **k)** $\frac{\pi}{12}$ **l)** $2{,}5\pi$ **m)** 37π
n) $1{,}13\pi$ **o)** $0{,}1$ **p)** $0{,}01$ **q)** 2 **r)** $1{,}5$ **s)** $3{,}04$
t) $-\pi$ **u)** $-\frac{2}{3}\pi$ **v)** -3 **w)** $-0{,}703$ **x)** $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **y)** 12

15. Berechnen Sie die Bogenlängen auf einem Kreis mit dem Radius $r = 5$ cm für die folgenden Zentriwinkel!

a) $36{,}3^\circ$ **b)** $117{,}45^\circ$ **c)** $255{,}58^\circ$

16. Wie groß ist jeweils der Bogen zum Zentriwinkel 1° auf Kreisen mit den folgenden Radien?

a) $r = 1$ cm **b)** $r = 2$ cm **c)** $r = 4$ cm

17. Bis zu welchen Winkeln stimmen die Zahlenwerte von $\operatorname{arc} \alpha$

a) mit denen von $\sin \alpha$, **b)** mit denen von $\tan \alpha$
bis auf drei Dezimalstellen überein?

18. Mit Hilfe der Tafel 4 lassen sich die Sinus- und die Tangenswerte von Winkeln zwischen $0{,}00^\circ$ und $5{,}00^\circ$ bestimmen. Man formt unter Verwendung der für kleine Winkel gültigen Beziehung $\sin \alpha \approx \operatorname{arc} \alpha$ um. Zu beachten ist weiter, daß $\operatorname{arc} \alpha$ dem Winkel α (im Gradmaß!) proportional ist. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin 0{,}0001^\circ$ **b)** $\sin 0{,}0018^\circ$ **c)** $\sin 0{,}000094^\circ$ **d)** $\sin 1''$
e) $\tan 0{,}0001^\circ$ **f)** $\tan 0{,}000313^\circ$ **g)** $\tan 0{,}0000847^\circ$ **h)** $\tan 0{,}5''$

19. Bestimmen Sie die Winkel x (im Gradmaß) zu den nachstehenden Funktionswerten!

a) $\sin x = 0{,}0000238$ **b)** $\sin x = 3{,}76 \cdot 10^{-6}$ **c)** $\sin x = 8{,}24 \cdot 10^{-7}$
d) $\tan x = 0{,}0000104$ **e)** $\tan x = 4{,}43 \cdot 10^{-6}$ **f)** $\tan x = 9{,}83 \cdot 10^{-7}$

20. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin\frac{\pi}{3}$ **b)** $\sin\frac{3}{8}\pi$ **c)** $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$ **d)** $\sin 1$ **e)** $\sin 0{,}43$
f) $\sin(-1{,}87)$ **g)** $\sin 2{,}163$ **h)** $\cos\frac{4}{3}\pi$ **i)** $\cos\frac{\pi}{4}$ **k)** $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$
l) $\cos 1{,}31\pi$ **m)** $\cos 0{,}5$ **n)** $\cos(-1)$ **o)** $\cos 2{,}897$ **p)** $\cos(-2{,}17)$

21. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\tan\pi$ **b)** $\tan\frac{2}{7}\pi$ **c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{20}\right)$ **d)** $\tan 0{,}7$ **e)** $\tan(-1{,}2)$
f) $\tan 5{,}943$ **g)** $\tan 1{,}052$ **h)** $\cot(-\pi)$ **i)** $\cot\frac{2}{5}\pi$ **k)** $\cot 1{,}8\pi$
l) $\cot 0{,}05$ **m)** $\cot\sqrt{2}$ **n)** $\cot 3$ **o)** $\cot(-1{,}32)$ **p)** $\cot(-0{,}48\pi)$

22. Suchen Sie die Logarithmen der Beträge der folgenden Funktionswerte auf!

a) $\sin\frac{5}{9}\pi$ **b)** $\sin 0{,}1\pi$ **c)** $\sin 6{,}1$ **d)** $\cos 1\frac{3}{4}\pi$ **e)** $\cos(-2{,}4)$
f) $\cos 3{,}515$ **g)** $\tan\frac{13}{20}\pi$ **h)** $\tan\frac{\pi}{100}$ **i)** $\cot 5{,}5$ **k)** $\cot(-0{,}72)$

23. Geben Sie die Winkel x zu den folgenden Funktionswerten im Bogenmaß an!

a) $\sin x = 0{,}9511$ **b)** $\sin x = 0{,}6428$ **c)** $\sin x = 0{,}9736$ **d)** $\sin x = -0{,}1951$
e) $\sin x = 3{,}23 \cdot 10^{-6}$ **f)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **g)** $\cos x = 0{,}4067$ **h)** $\cos x = -0{,}8805$
i) $\cos x = 0{,}2190$ **k)** $\tan x = 1$ **l)** $\tan x = 0{,}7265$ **m)** $\tan x = -3{,}630$
n) $\tan x = -0{,}5924$ **o)** $\tan x = 5{,}18 \cdot 10^{-5}$ **p)** $\cot x = 0$ **q)** $\cot x = -\sqrt{3}$

24. Welche Winkel x im Bogenmaß ergeben sich aus den folgenden Logarithmen der Winkelfunktionen?

a) $\lg\sin x = 0{,}8495 - 1$, $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg\sin x = 0{,}7990 - 3$, $(\sin x > 0)$
c) $\lg\sin x = 0{,}5686 - 6$, $(\sin x > 0)$ **d)** $\lg\cos x = 0{,}9730 - 1$, $(\cos x > 0)$
e) $\lg|\cos x| = 0{,}8026 - 1$, $(\cos x < 0)$ **f)** $\lg\cos x = 0{,}9278 - 1$, $(\cos x > 0)$
g) $\lg\tan x = 0{,}0762$, $(\tan x > 0)$ **h)** $\lg\tan x = 0{,}8699 - 2$, $(\tan x > 0)$
i) $\lg|\cot x| = 0{,}0456$, $(\cot x > 0)$ **k)** $\lg\cot x = 0{,}7741 - 1$, $(\cot x > 0)$

25. a) Berechnen Sie den Weg, den ein um die Strecke $r = 5$ cm vom Scheitelpunkt entfernter Punkt P zurücklegt, wenn der Winkel 90°; 270°; 360°; 45°; 57,3° beträgt!
b) Zeichnen Sie die jeweiligen Winkel sowie die dazugehörigen Wege des Punktes P als Kreisbögen und als Strecken!

26. Geben Sie die in Aufgabe **25** bestimmten Wege unter der Voraussetzung an, daß $r = 1$ cm ist!

27. Stellen Sie die Funktion $y = \operatorname{arc} x$ $(0° \leqq x \leqq 360°)$ in einem geeigneten Maßstab graphisch dar!

28. a) Untersuchen Sie an Hand von Beispielen, welche der Winkelfunktionen gerade und welche ungerade sind!
b) Welche anderen geraden bzw. ungeraden Funktionen kennen Sie?

29. Untersuchen Sie die Symmetrieverhältnisse bei den Bildern der Winkelfunktionen in den folgenden Bereichen!

a) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ **b)** $0 \leqq x \leqq \pi$ **c)** $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$

30. Unter Benutzung der Formeln (5) und (6) ist zu zeigen, daß die Tangens- und die Kotangensfunktion die kleinste Periode π haben.

31. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin 5\pi$ **b)** $\sin 7\frac{3}{8}\pi$ **c)** $\sin(-15{,}4\pi)$ **d)** $\sin 10{,}5$ **e)** $\cos(-3\pi)$
f) $\cos 2\frac{1}{2}\pi$ **g)** $\cos 100\pi$ **h)** $\cos 6{,}53$ **i)** $\tan\frac{3}{2}\pi$ **k)** $\tan 1{,}7\pi$
l) $\tan\left(-2\frac{1}{12}\pi\right)$ **m)** $\tan 3{,}487$ **n)** $\cot\left(-\frac{10}{9}\pi\right)$ **o)** $\cot 14\pi$ **p)** $\cot 14$

32. Suchen Sie die Logarithmen zu den Beträgen der Funktionen in den Aufgaben **31 a** bis **p**!

33. Geben Sie die allgemeinen Lösungen für die folgenden Funktionswerte im Bogenmaß an!

a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **b)** $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **c)** $\sin x = 0{,}5052$ **d)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **f)** $\cos x = 0{,}9340$ **g)** $\tan x = 2+\sqrt{3}$ **h)** $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

i) $\tan x = 5{,}823$ **k)** $\cot x = -\sqrt{3}$ **l)** $\cot x = \sqrt{3}-2$ **m)** $\cot x = 0{,}1341$

34. Geben Sie die allgemeinen Lösungen zu den folgenden Logarithmen der Winkelfunktionen im Bogenmaß an!

a) $\lg \sin x = 0{,}7859-3$, $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}9750-1$, $(\sin x < 0)$

c) $\lg \cos x = 0{,}8436-2$, $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}8436-1$, $(\cos x < 0)$

e) $\lg \tan x = 0{,}4189-1$, $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\tan x| = 0{,}7732$, $(\tan x < 0)$

g) $\lg \cot x = 0{,}5066-1$, $(\cot x > 0)$ **h)** $\lg |\cot x| = 1{,}1178$, $(\cot x < 0)$

35. Stellen Sie in einem einzigen Koordinatensystem dar:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y = \sin x \\ 2)\ y = 2\sin x \\ 3)\ y = \sin 2x \end{array}\right\} (-\pi \leqq x \leqq +3\pi)$$

a) Vergleichen Sie die Ordinaten der Punkte der zu 1 und 2 gehörenden Kurven bei jeweils gleichen Argumenten!

b) Welche Periode hat die Funktion 3?

c) Was ergibt ein Vergleich der Bilder der Funktionen

$y = \sin x$, $y = n \sin x$ und $y = \sin nx$?

36. Stellen Sie in einem einzigen Koordinatensystem dar!

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y = \sin x \\ 2)\ y = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \\ 3)\ y = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} (-\pi \leqq x \leqq +3\pi)$$

Vergleichen Sie die Lage der drei Funktionsbilder im Koordinatensystem!

37. Stellen Sie die Funktion $\sin x$ in einem rechtwinkligen xy-Achsenkreuz graphisch dar, dessen x-Achse eine Sinusteilung und dessen y-Achse eine gleichmäßige Teilung trägt!
Man nennt diese Darstellung eine Verstreckung der Sinuskurve. Sie ist beim Interpolieren vorteilhafter verwendbar als die übliche Darstellung der Sinusfunktion in einem xy-Achsenkreuz, bei dem beide Achsen gleichmäßig geteilt sind.

38. Stellen Sie die Funktion $\cos x$ in einem rechtwinkligen xy-Achsenkreuz dar, dessen x-Achse eine Sinusteilung von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und dessen y-Achse eine gleichmäßige Teilung trägt!

1.8. Die Funktionen $y = a\sin x$; $y = \sin bx$; $y = \sin(x+c)$; $y = a\sin(bx+c)$

Die Funktion $y = a \sin x$

Im Abschnitt 1.1. sollte in der Übung auf Seite 4 der Flächeninhalt des Rhombus als Funktion des Winkels α dargestellt werden. Ist die Seitenlänge $a = 1$ cm, so ergibt sich im Intervall $0° < \alpha < 180°$ die Sinuskurve. Wenn $a = 2$ cm gewählt wird, so

verdoppeln sich in der graphischen Darstellung die Funktionswerte; für $a = 3$ cm verdreifachen sie sich usw.
Im Kreis mit dem Radius r gilt die Gleichung

$$\sin x = \frac{v}{r} \text{ (Abb. 1.5.).} \tag{37}$$

Liegt ein Kreis mit dem Radius a vor, so gilt $r = a$, und es ergibt sich:

$$\sin x = \frac{v}{a} \quad \text{oder} \quad v = a \sin x.$$

Trägt man im xy-Koordinatensystem zu den Abszissen x die projizierenden Lote im Kreis mit dem Radius a innerhalb eines uv-Systems auf, so erhält man das Bild der Funktion

$$y = a \sin x.$$

Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = a \sin x$ für $a = 3$!

Um den Zusammenhang zwischen den Funktionen

$$y = a \sin x \text{ und } y = \sin x$$

zu ermitteln, sei in der ersten Funktion vorübergehend die unabhängige Variable X und die abhängige Variable Y:

$$Y = f_1(X) = a \cdot \sin X \; (a > 1).$$

Für die graphische Darstellung dieser Funktion ist jeder Wert der Sinusfunktion $y = \sin x$ mit dem konstanten Faktor a zu multiplizieren. Geometrisch bedeutet dies, daß die Ordinate jedes Punktes der Kurve der Ausgangsfunktion $y = \sin x$ auf das a-fache oder im Verhältnis $a:1 = \frac{a}{1}$ vergrößert wird. In Abbildung 1.94. ist dieses für $a = 2$ ausgeführt (das xy- und das XY-System fallen zusammen).

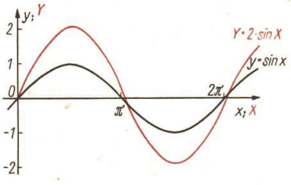


Abb. 1.94.

Ist a positiv, aber kleiner als 1, also $0 < a < 1$, so sind die Funktionswerte $Y = a \sin X$ kleiner als die der Funktion $y = \sin x$ bei gleichem Argument. Man erhält die Kurve der Funktion $Y = a \sin X$ aus der Sinuskurve in diesem Falle durch Stauchung. Dehnung und Stauchung werden unter dem Begriff der **Streckung** zusammengefaßt. Für $a = 1$ sind die Funktionen $Y = a \sin X$ und $y = \sin x$ und ihre Bilder identisch.

Untersuchen Sie, wie die Sinuskurve verändert wird, wenn a negativ ist! (Zum Beispiel $a = -1$.)

Wir fassen zusammen:
Die Kurve der Funktion

$$y = f_1(x) = a \sin x \; (a > 0)$$

geht aus der Sinuskurve durch Streckung senkrecht zur x-Achse hervor.
Für $a > 1$ ist die Streckung eine Dehnung, für $0 < a < 1$ eine Stauchung.

Bei $a = 1$ ist die Kurve mit der Sinuskurve identisch.
Für $a < 0$ erhält man die Kurve der Funktion $y = a \sin x$ durch Spiegelung der Sinuskurve an der x-Achse und entsprechende Streckung senkrecht zur x-Achse.

Durch welche Maßnahmen kann man eine Kurve der Funktion $y = a \sin x$ in eine Sinuskurve überführen?

Die Funktion $y = \sin b x$

Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \sin bx$ für $b = 2$, indem Sie zunächst die Winkel mit b multiplizieren und dann die jeweiligen Funktionswerte ermitteln! Vergleichen Sie diese Kurve mit der Sinuskurve!

Die Abbildung 1.95. zeigt die Kurven der Funktionen $y = f(x) = \sin x$ im xy-Koordinatensystem und $Y = f_2(X) = \sin bX$ mit $b = \frac{2}{3}$ im XY-Koordinatensystem.

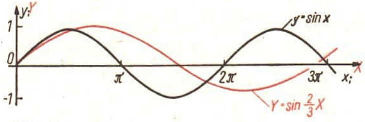


Abb. 1.95.

Beim Vergleich der Ordinaten von jeweils zwei sich entsprechenden Punkten der beiden Kurven kann man feststellen:

Einem Ordinatenwert $y_1 = f(x_1)$ eines Punktes der Kurve der Funktion $y = \sin x$ ist ein gleicher Ordinatenwert $Y_1 = f_2(X_1)$ des Punktes der Kurve der Funktion $Y = f_2(X) = \sin bX$ an der Stelle

$$X_1 = \frac{1}{b} x_1$$

zugeordnet.

$$y_1 = f(2\pi) = 0 \quad \text{und} \quad Y_1 = f_2(3\pi) = 0$$
$$y_2 = f(\pi) = 0 \quad \text{und} \quad Y_2 = f_2\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$
$$y_3 = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 \quad \text{und} \quad Y_3 = f_2\left(\frac{9}{4}\pi\right) = -1$$
$$y_4 = f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = +1 \quad \text{und} \quad Y_4 = f_2\left(\frac{3}{4}\pi\right) = +1$$

Die Kurve der Funktion $Y = \sin bX$ ist aus der Kurve der Funktion $y = \sin x$ durch **Streckung senkrecht zur y-Achse** entstanden. Bei dieser Veränderung der Abstände der Kurvenpunkte von der y-Achse wird die Periode 2π der Ausgangsfunktion $y = \sin x$ für die Funktion $Y = \sin bX$ auf $\frac{1}{b} \cdot 2\pi$ vergrößert.
Für die Kurve in Abbildung 1.95. ergibt sich so eine Streckung von 2π auf $\frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$. Für $0 < b < 1$ entsteht eine Dehnung, für $b > 1$ eine Stauchung der Kurve, für $b = 1$ wieder die Identität.

Wie wird die Sinuskurve verändert, wenn b negativ ist, zum Beispiel für $b = -1$?

Wir fassen zusammen:
Die Kurve der Funktion

$$y = f_2(x) = \sin bx \ (b > 0),$$

geht aus der Sinuskurve durch Streckung senkrecht zur y-Achse hervor. Dabei wird die Periode 2π verändert, sie wird auf $\frac{1}{b} \cdot 2\pi$ gestreckt. Für $0 < b < 1$ ist die Streckung eine Dehnung, für $b > 1$ eine Stauchung. Bei $b = 1$ ist die Kurve mit der Sinuskurve identisch.
Ist $b < 0$, so erhält man die Kurve der Funktion $y = \sin bx$ durch Spiegelung der Sinuskurve an der x-Achse und entsprechende Streckung senkrecht zur y-Achse.

Beschreiben Sie die Maßnahmen, durch die Sie umgekehrt die Kurve der Funktion $y = \sin bx$ in die Sinuskurve überführen!

Die Funktion $y = \sin(x + c)$

Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = \sin(x + c)$ für $c = \pi$, indem Sie zunächst π zu den Winkeln addieren und dann die jeweiligen Funktionswerte ermitteln!
Vergleichen Sie diese Kurve mit der Sinuskurve!

In Abbildung 1.96. a ist die Funktion $y = \sin x$ in einem rechtwinkligen xy-Achsenkreuz, in Abbildung 1.96. b dagegen die Funktion $Y = f_3(X) = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$ in einem rechtwinkligen XY-Achsenkreuz graphisch dargestellt.

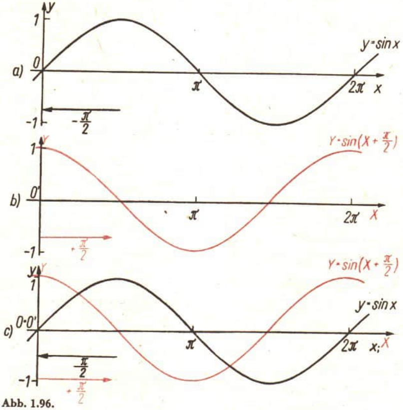


Abb. 1.96.

Die Kurve der Funktion $y = \sin x$ läßt sich durch Parallelverschiebung in der x-Richtung um $-\frac{\pi}{2}$ in die der Funktion $Y = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$ überführen. Umgekehrt geht die Funktionskurve

$$Y = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$$

durch Parallelverschiebung in der X-Richtung um $+\frac{\pi}{2}$ in die der Funktion $y = \sin x$ über (Abb. 1.96. c).
Nach der Quadrantenrelation $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ist die Kurve der Funktion

$$Y = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$$

mit der Kurve der Funktion $y = \cos x$ identisch.

Allgemein wird bei der Funktion $Y = \sin(X + c)$ die Sinuskurve parallel zur x-Achse um $-c$ verschoben.

Wir fassen zusammen:
Die Kurve der Funktion

$$y = f_3(x) = \sin(x + c)$$

geht aus der Sinuskurve durch Verschiebung um den Betrag von c parallel zur x-Achse hervor. Ist $c > 0$, so erfolgt die Verschiebung in der negativen Richtung der x-Achse, für $c < 0$ wird in der positiven x-Richtung verschoben. Für $c = 0$ sind beide Kurven identisch.

Die Funktion $y = a \sin(bx + c)$

Führt man an der Sinusfunktion alle drei Änderungen, die durch die Funktion f_1, f_2 und f_3 erklärt wurden, nacheinander durch, so erhält man die Funktion

$$y = a \sin(bx + c), \; (a > 0,\; b > 0,\; c > 0).$$

1) Die Sinuskurve werde senkrecht zur x-Achse gestreckt im Verhältnis $a:1$. Die so entstehende Kurve hat noch die Periode 2π.
2) Die Kurve werde dann senkrecht zur y-Achse gestreckt, so daß die Periode $\frac{1}{b} \cdot 2\pi$ betrage.
3) Die Kurve werde schließlich parallel zur x-Achse um $-\frac{c}{b}$ verschoben.

Die Abbildung 1.97. zeigt den Verlauf der Kurve einer Funktion $y = a \sin(bx + c)$ für $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{2}$.

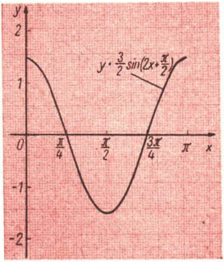


Abb. 1.97.

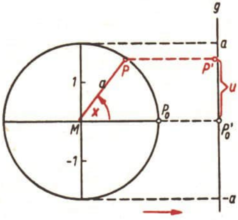
Untersuchen Sie, ob das Resultat von der Reihenfolge der durch die Funktionen f_1, f_2 und f_3 vorgeschriebenen Veränderungen der Sinuskurve abhängt!

Anwendung in der Physik:
Die Gleichung

$$u = a \sin(bx + c), \; (a > 0,\; b > 0,\; c > 0)$$

stellt eine **harmonische Welle** dar. Darin bedeuten u die **Elongation,** a die **Schwingungsweite (Amplitude),** $\lambda = \frac{1}{b} \cdot 2\pi$ die **Wellenlänge** und $\frac{c}{b}$ die **Phasenverschiebung.**

Abb. 1.98.



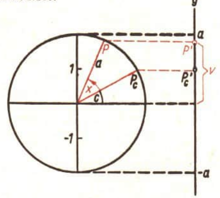
Beispiele:

1) Ein Punkt P möge sich gleichförmig auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius a im positiven Drehsinn bewegen (Abb. 1.98.). Zur Zeit $t = 0$ habe der Punkt P die Lage P_0. Der Winkel P_0MP werde im Bogenmaß

gemessen und mit x bezeichnet. Zur Zeit $t = 0$ ist auch $x = 0$. Der sich mit konstanter Bahngeschwindigkeit auf dem Kreis bewegende Punkt P werde durch Parallelprojektion in Richtung MP_o auf die zu MP_o senkrechte Gerade g abgebildet. Die Projektion P' des Punktes P führt auf der Geraden g eine Schwingung um die Nullage P_o' zwischen den Endpunkten $+a$ und $-a$ aus.

Man kann die Elongation u sowohl als Funktion der Zeit t wie auch als Funktion des Winkels x darstellen (Abb. 1.99.).

Abb. 1.100.



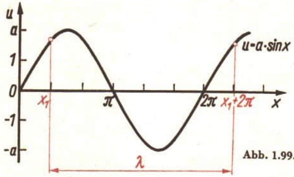


Abb. 1.99.

2) Der schwingende Punkt P' befinde sich zur Zeit $t = 0$ nicht in der Nullage P_o', sondern er habe die Lage P_c', die durch den Winkel c bestimmt ist (Abb. 1.100.). Die Schwingung, die wieder die Amplitude a haben möge, ist jetzt gegeben durch die Gleichung

$v = a \sin(x + c)$.

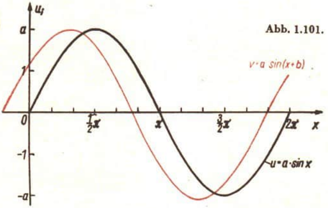


Abb. 1.101.

Dabei wird c als **Anfangsphase** bezeichnet. Zwischen den beiden durch die Gleichungen $u = a \sin x$ und $v = a \sin(x + c)$ dargestellten harmonischen Schwingungen bzw. Wellen besteht die Phasendifferenz oder Phasenverschiebung c (Abb. 1.101.).

Für die Phasenverschiebung $c = \frac{\pi}{2}$ stimmt die Funktionskurve $a \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ mit der Kurve der Funktion $a \cos x$ überein. Harmonische Schwingungen und Wellen lassen sich daher auch durch die Kosinusfunktion darstellen.

Die folgende Zusammenfassung gibt einen Überblick über die im Abschnitt 1.8. erläuterten Funktionen.

Die Kurve der Funktion	entsteht aus der Kurve der Funktion $y = \sin x$ durch:
$y = a \sin x$	Streckung senkrecht zur x-Achse im Verhältnis $a : 1$
$y = \sin bx$	Streckung senkrecht zur y-Achse im Verhältnis $\frac{1}{b} : 1 = 1 : b$

$y = \sin(x + c)$	Verschiebung parallel zur x-Achse um $-c$
$y = a \sin(bx + c)$	Streckung senkrecht zur x-Achse im Verhältnis $a : 1$, Streckung senkrecht zur y-Achse im Verhältnis $1 : b$ und Parallelverschiebung zur x-Achse um $-\frac{c}{b}$

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Kurven der folgenden Funktionen!

a) $y = 2 \sin x$ **b)** $y = \frac{2}{3} \sin x$ **c)** $y = \frac{3}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $y = -2 \cos x$ **e)** $y = \frac{1}{2} \cos x$ **f)** $y = -\frac{3}{4} \cos(x - \pi)$

Welche Kurven gehen durch Dehnung, welche durch Stauchung aus den Sinus- und Kosinuskurven hervor, welche außerdem durch Verschiebung parallel zur x-Achse und Spiegelung an dieser?

2. Strecken Sie die Kurven der Funktionen $y = f(x)$ im Verhältnis $m:n$ senkrecht zur x-Achse! Stellen Sie die gestreckten Kurven $y = f_1(x)$ graphisch dar!

a) $y = \cos x$; $m:n = 2:1$ **b)** $y = \cos x$; $m:n = 5:2$

c) $y = \sin\left(\frac{5}{4}\pi + x\right)$; $m:n = 2:3$ **d)** $y = \cos(x - \pi)$; $m:n = 3:4$

Wie heißen die analytischen Ausdrücke der Funktionen der gestreckten Kurven?
Durch welche Maßnahmen werden die gestreckten Kurven wieder in die Ausgangskurven zurückgeführt?

3. Zeichnen Sie die Kurven der folgenden Funktionen!

a) $y = \sin x$, $y = 3 \sin x$ **b)** $y = \sin(x + 1)$, $y = \frac{1}{2} \sin(x + 1)$ **c)** $y = \cos\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $y = \frac{3}{2} \cos\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $y = \cos x$, $y = -\frac{1}{2} \cos x$

Stellen Sie die Kurven der unter einem Buchstaben angeführten Funktionen jeweils in ein und demselben Koordinatensystem dar, und geben Sie an, wodurch die beiden Kurven ineinander übergeführt werden können!

4. Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar!

a) $y = \cos \frac{1}{2} x$ **b)** $y = \sin \frac{3}{2} x$ **c)** $y = \cos 2x$

d) $y = \sin \sqrt{3}\, x$ **e)** $y = 2 \sin 2x$

Welche Maßnahmen führen die Sinuskurve in die Kurven der Funktionen **b** und **d** und die Kosinuskurve in die Kurven der Funktionen **a** und **c** über?
Geben Sie an, wie die in den Aufgaben **a** bis **d** angeführten Funktionen in die Funktion $y = \sin x$ bzw. $y = \cos x$ übergeführt werden können!

5. Strecken Sie die Kurven der folgenden Funktionen senkrecht zur y-Achse! Das Streckungsverhältnis der Bildkurve zur Originalkurve betrage $m:n$.

a) $y = \cos x$; $m:n = 2:1$ **b)** $y = \cos x$; $m:n = 1:2$

c) $y = \sin x$; $m:n = 5:3$ **d)** $y = \sin x$; $m:n = 4:5$

e) $y = \cos\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$; $m:n = 1:3$

Welche Streckungen sind Dehnungen, welche Stauchungen?
Geben Sie die (kleinsten) Perioden der erzeugten Funktionen an! Zeichnen Sie die Original- und die Bildkurven!

6. Zeichnen Sie die Kurven der folgenden Funktionen!

a) $y = \sin x$ **b)** $y = \cos x$ **c)** $y = \sin\left(x - \frac{7}{6}\pi\right)$

$y = \sin\frac{1}{3}x$ $y = \cos\frac{3}{4}x$ $y = \sin\left(\frac{11}{8}x - \frac{7}{6}\pi\right)$

d) $y = \cos\left(x + \frac{7}{4}\pi\right)$

$y = \cos\left(\sqrt{2}\,x + \frac{7}{4}\pi\right)$

Stellen Sie die Kurven der unter einem Buchstaben angeführten Funktionen jeweils in ein und demselben Koordinatensystem dar, und geben Sie an, durch welche Maßnahmen die beiden Kurven ineinander übergeführt werden können!

7. Zeigen Sie, daß $\sin(-x) = -\sin x$ ist, indem Sie die Sinuskurve in die Kurve der auf der linken bzw. rechten Seite der Gleichung stehenden Funktion überführen!

8. Zeichnen Sie die Kurven der folgenden Funktionen!

a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $y = \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$

c) $y = \cos(x + \pi)$ **d)** $y = \cos\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$

Welche Verschiebungen führen die Sinuskurve $y = \sin x$ in die Kurven der Funktionen **a** bzw. **b** über, welche die Kosinuskurve $y = \cos x$ in die der Funktionen **c** bzw. **d**? Stellen Sie die Kurven der Funktionen **a** und **b** mit Hilfe der Kosinusfunktion, die der Funktionen **c** und **d** mit Hilfe der Sinusfunktion analytisch dar!

9. Durch welche Verschiebung geht die Kurve der Funktion $y = \cos x$ in die der Funktion $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ über? Stellen Sie beide Kurven in ein und demselben Koordinatensystem dar! Durch welche Verschiebung wird die zweite Kurve in die erste übergeführt?

10. Welche Verschiebung führt eine Kosinuskurve in eine Sinuskurve über?

11. Verschieben Sie die Sinuskurve $y = \sin x$ um $-\frac{5}{6}\pi$ parallel zur x-Achse! Zeichnen Sie beide Kurven in ein und demselben Koordinatensystem! Wie heißt der analytische Ausdruck der Funktion der verschobenen Kurve?

12. Zeichnen Sie die Kurven der Funktionen $y = \cos x$ und $y = \cos\left(x + \frac{5}{3}\pi\right)$ in ein und demselben Koordinatensystem!
Welche Maßnahmen führen die beiden Kurven ineinander über?

13. Verschieben Sie die Kurven der folgenden Funktionen um d parallel zur y-Achse! Zeichnen Sie die Kurven jeweils in ein und demselben Koordinatensystem! Geben Sie die analytischen Ausdrücke der Funktionen der Verschiebungskurven an!

a) $y = \cos x;\ d = 1$ **b)** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right);\ d = \sqrt{2}$

c) $y = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right);\ d = -\frac{3}{2}$

14. Vergleichen Sie die Funktionen $y = \cos\frac{2}{3}(x - \pi)$ und $y = \cos\left(\frac{2}{3}x - \pi\right)$ miteinander!

15. Zeichnen Sie die Kurven der Funktion $y = a\sin(bx + c)$ für die nachstehenden Werte!

	a)	b)	c)	d)
a	2	-1	$\frac{1}{2}$	-3
b	2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
c	-2π	π	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$

16. a) Die Kurve der Funktion $y = \sin x$ wird um $\frac{6}{5}\pi$ parallel zur x-Achse verschoben. Die entstehende Kurve wird weiter im Verhältnis 4:3 senkrecht zur x-Achse gestreckt. Schließlich wird die so erhaltene Kurve senkrecht zur y-Achse gestreckt, wobei das Streckungsverhältnis 3:5 beträgt.
Zeichnen Sie alle Kurven in ein und demselben Koordinatensystem (mit verschiedenen Farben), und geben Sie die analytischen Ausdrücke ihrer Funktionen an!

b) Lösen Sie die Aufgabe **a** für die Kosinuskurve $y = \cos x$!

17. Geben Sie die Amplitude und die Wellenlänge der folgenden harmonischen Schwingungen an!

a) $u = \sin 2\pi t$ **b)** $u = \sin 6\pi t$ **c)** $u = \sin 3\pi t$ **d)** $u = 3 \sin 4\pi t$

18. Stellen Sie die folgenden harmonischen Schwingungen graphisch dar, und geben Sie die Phasenverschiebung gegen die Schwingung $\sin n\pi t$ an!

a) $u = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $u = \sin 2\pi\left(t - \frac{1}{12}\right)$ **c)** $u = \frac{2}{3}\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

19. Zeichnen Sie die durch die Funktionen

a) $u = 2 \sin x$, **b)** $u = \sin 2x$, **c)** $u = 2 \sin \frac{x}{2}$,

d) $u = \frac{1}{3} \sin x$, **e)** $u = \frac{1}{3} \sin 3x$

dargestellten harmonischen Wellen! Wie groß sind Amplitude und Wellenlänge?

20. Welche Wellenlänge λ hat die Welle, die durch die Funktion

a) $u = \sin x$, **b)** $u = \sin(x + b)$, **c)** $u = a \sin x$, **d)** $u = \sin cx$

gegeben ist?

21. Zeichnen Sie die durch die folgenden Funktionen gegebenen harmonischen Wellen, und geben Sie Amplitude, Wellenlänge und Phasenverschiebung gegenüber der harmonischen Welle an, die durch $y = \cos nx$ dargestellt ist!

a) $u = \frac{1}{2} \cos x$ **b)** $u = \cos \frac{5}{2} x$ **c)** $u = \frac{3}{2} \cos \frac{3}{2} x$ **d)** $u = 2 \cos\left(3x - \frac{7}{12}\pi\right)$

22. Geben Sie für die in den Abbildungen 1.102. a und b dargestellten harmonischen Wellen die analytischen Ausdrücke an!
Anleitung: Benutzen Sie bei der Abbildung 1.102. a die Sinusfunktion! Verwenden Sie für die Darstellung in der Abbildung 1.102. b sowohl die Sinusfunktion als auch die Kosinusfunktion!

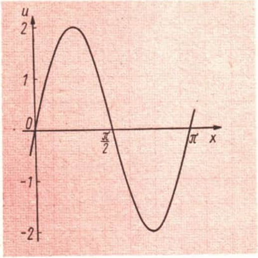


Abb. 1.102. a

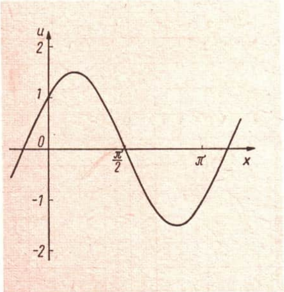


Abb. 1.102. b

23. Geben Sie die analytischen Ausdrücke der harmonischen Wellen mit der Amplitude a, der Wellenlänge λ und der Phasenverschiebung d gegen die harmonische Welle $\sin nx$ an!

a) $a = 2$, $\lambda = 2\pi$, $d = 0$	**b)** $a = 1$, $\lambda = 3\pi$, $d = -\frac{\pi}{2}$	**c)** $a = \frac{3}{2}$, $\lambda = \pi$, $d = 0$	**d)** $a = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\pi$, $d = \frac{\pi}{6}$
e) $a = 4$, $\lambda = 2{,}5\pi$, $d = -\frac{1}{3}\pi$	**f)** $a = 3{,}5$, $\lambda = \frac{3}{4}\pi$, $d = \pi$	**g)** $a = 0{,}7$, $\lambda = \frac{2}{3}\pi$, $d = \frac{2}{3}\pi$	**h)** $a = 2{,}5$, $\lambda = \frac{4}{5}\pi$, $d = \frac{\pi}{3}$

1.9. Superposition von Sinuskurven

Zwei oder mehr Winkelfunktionen können durch **Überlagerung (Superposition)** eine resultierende Winkelfunktion bilden.

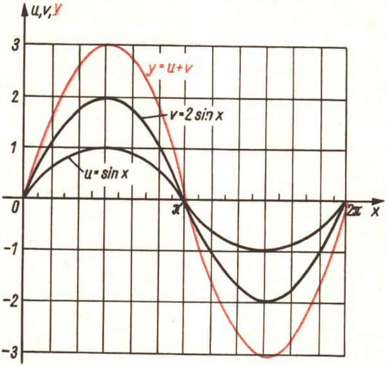
Beispiel 1:

Im rechtwinkligen Koordinatensystem in Abbildung 1.103. wurden die Bilder der Funktionen mit den analytischen Ausdrücken

(38) $u = \sin x$ und (39) $v = 2 \sin x$

graphisch dargestellt. Beide Sinuskurven stimmen in ihrer Periode 2π überein, ihre Amplituden sind jedoch verschieden: $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$.

Abb. 1.103.



Durch Superposition wird eine Funktion

(40) $y = u + v$

gebildet.

Das Bild dieser Funktion kann geometrisch gewonnen werden, indem man jeweils die beiden Strecken von der x-Achse bis zu den Bildpunkten beider Ausgangsfunktionen addiert. Für die Abszissenwerte $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ werden also die Amplituden addiert:

$$a_3 = a_1 + a_2;\; a_3 = 3.$$

Der analytische Ausdruck der resultierenden Funktion kann ermittelt werden, indem man (38) und (39) in (40) einsetzt:

$$y = u + v$$
$$y = \sin x + 2 \sin x = 3 \sin x.$$

Die resultierende Kurve ist wiederum periodisch und harmonisch. Sie hat die gleiche Periode wie die Kurven (38) und (39), nämlich 2π.

Welche Amplitude hat die resultierende Kurve, wenn sich zwei Sinuskurven $u = v = \sin x$ überlagern? Wie lautet der analytische Ausdruck der resultierenden Kurve?

Im folgenden Beispiel haben die Ausgangskurven eine Phasendifferenz.

Beispiel 2:

Es ist die resultierende Kurve zu zeichnen, die sich aus der Superposition von

$$u = \sin x \quad \text{und} \quad v = \sin(x - \pi)$$

ergibt.

Die beiden Sinuskurven haben die gleiche Periode 2π und die gleiche Amplitude 1. Sie haben eine Phasendifferenz von $-\pi$; die Kurve der Funktion v ist gegen die Kurve der Funktion u um $+\pi$ verschoben. Die resultierende Kurve ist eine Gerade, die mit der x-Achse zusammenfällt (Abb. 1.104.).

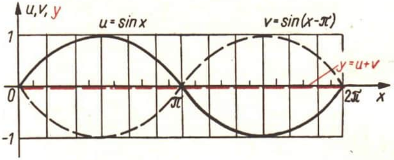


Abb. 1.104.

Beispiel 3:

Die Abbildung 1.105. stellt die Bilder der Funktionen

(41) $u = \sin x$ und (42) $v = \sin(x + 2\pi)$

sowie die Überlagerungskurve

(43) $y = u + v$

dar.

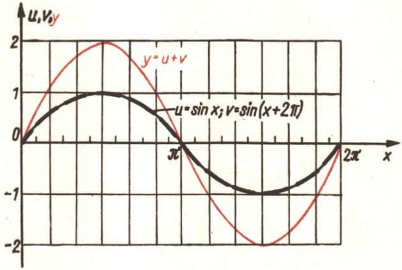


Abb. 1.105.

Die Funktionen u und v haben die gleiche Periode 2π und die gleiche Amplitude 1. Sie haben eine Phasendifferenz von 2π; die Kurve der Funktion v ist gegen die Kurve der Funktion u um -2π verschoben.

Die Überlagerungskurve ist wiederum periodisch und harmonisch. Sie hat die gleiche Periode wie die Kurven u und v, nämlich 2π. Ihre Amplitude beträgt 2. Sie hat die Phasendifferenz 0 gegen u und $+2\pi$ gegen v. Man erhält den analytischen Ausdruck, indem man (41) und (42) in (43) einsetzt und die Beziehung $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ für $k = 1$ anwendet:

$$y = \sin x + \sin(x + 2\pi) = 2\sin x.$$

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $u = \frac{1}{2}\sin x$ und $v = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ sowie die Kurve, die sich durch Überlagerung ergibt!

   Entnehmen Sie aus der Zeichnung die Amplitude der Überlagerungskurve und die Phasenverschiebung gegenüber dem Bild der Funktion u!

2. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $u = \sin x$ und $v = \sin\frac{x}{2}$ sowie die Kurve, die sich durch Überlagerung ergibt!

   Welche Eigenschaften hat die Überlagerungskurve?

3. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen

   a) $u = \sin x$ und $v = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$,

   b) $u = \sin x$ und $v = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$,

   c) $u = \sin x$ und $v = \sin(\sqrt{2}\,x - \pi)$!

   Welche Eigenschaften haben die Überlagerungskurven?

4. Welche Amplitude und welche Phasenverschiebung gegen u hat die resultierende harmonische Schwingung $y = u + v$, wenn die Phasendifferenz der harmonischen Schwingungen $u = a\sin\pi t$ und $v = a\sin(\pi t + b)$ Null beträgt? Was ergibt sich, wenn die Phasendifferenz gleich π ist?

5. Stellen Sie die folgenden harmonischen Schwingungen u und v graphisch dar, und konstruieren Sie die Überlagerungskurve $y = u + v$! Entnehmen Sie aus der graphischen Darstellung der resultierenden harmonischen Schwingung die Amplitude a und die Phasenverschiebung d gegen u!

   a) $u = \sin 2\pi t$; $\quad v = 3\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

   b) $u = 2{,}8\sin 4\pi t$; $\quad v = 3{,}3\sin\left(4\pi t - \frac{3}{4}\pi\right)$

6. Zeichnen Sie die resultierende Welle der folgenden harmonischen Wellen, und entnehmen Sie Amplitude und Phasenverschiebung gegen u aus der graphischen Darstellung!

   a) $u = \sin x$, $v = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

   b) $u = \frac{4}{5}\sin x$, $v = \sin\left(x - \frac{3}{8}\pi\right)$

   c) $u = 2\sin x$, $v = \frac{4}{5}\sin\left(x + \frac{7}{4}\pi\right)$

   d) $u = \frac{3}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $v = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

   e) $u = \sin\left(2x - \frac{7}{6}\pi\right)$, $v = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

   f) $u = \frac{5}{4}\sin x$, $v = \sin\left(x + \frac{5}{4}\pi\right)$

   g) $u = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$, $v = \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$

7. Stellen Sie die harmonischen Wellen mit der Wellenlänge 2π, der Amplitude a und der Phasenverschiebung b mit Hilfe der Sinusfunktion dar!
Bestimmen Sie Amplitude und Phasenverschiebung der resultierenden harmonischen Wellen durch Zeichnung!

a) $a_1 = 2;\ b_1 = 0$
$a_2 = 1;\ b_2 = \frac{\pi}{4}$

b) $a_1 = 1;\ b_1 = 0$
$a_2 = \frac{1}{2};\ b_2 = -\frac{\pi}{3}$

c) $a_1 = 2;\ b_1 = \frac{\pi}{2}$
$a_2 = 3;\ b_2 = \frac{\pi}{6}$

d) $a_1 = 2{,}5;\ b_1 = 1{,}2\,\pi$
$a_2 = 0{,}75;\ b_2 = 0$

1.10. Goniometrische Gleichungen

Bestimmungsgleichungen, die die Unbekannte x im Argument von Winkelfunktionen enthalten, z. B.

$$\sin^2 x - 0{,}25 = 0,$$

heißen **goniometrische Gleichungen**[1]!

Goniometrische Gleichungen werden graphisch oder rechnerisch gelöst.

Graphische Lösung einfacher goniometrischer Gleichungen

Beispiel 1: $\quad \sin x + \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) - 1{,}5 = 0$

Zur graphischen Lösung dieser Bestimmungsgleichung wird das Bild der Funktion

$$y = \sin x + \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) - 1{,}5$$

in ein xy-Koordinatensystem gezeichnet. Hierbei wendet man die Superposition von Sinuskurven an. Die Nullstellen der Funktion, d. h. die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse, ergeben die Lösungen.
Zur Konstruktion der Kurve überlagert man einander die Bilder der beiden Funktionen

$$u = \sin x \quad \text{und} \quad v = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

und verschiebt die resultierende Funktion

$$\bar{y} = u + v$$

parallel zur y-Achse um $-1{,}5$.
Die Lösungen kann man dann an den Schnittstellen mit der x-Achse (d. h. mit der Geraden $y = 0$) unmittelbar ablesen.
Zeichnerisch einfacher ist es, wenn man nicht die resultierende Kurve um $-1{,}5$, sondern das Achsenkreuz um $+1{,}5$ verschiebt. Hierzu wird eine Parallele zur x-Achse, die Gerade $y = +1{,}5$, eingezeichnet (Abb. 1.106.).

[1] Goniometrie: Lehre von den Eigenschaften und Zusammenhängen der Winkelfunktionen.
γωνία (griech.), Winkel; μετρον (griech.), Maß.

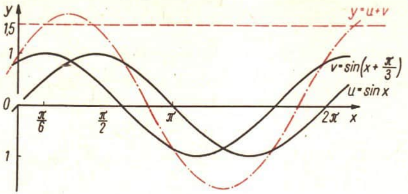


Abb. 1.106.

Führen Sie
a) die Parallelverschiebung der Kurve $\bar{y} = f_1(\bar{x})$ bei feststehendem Achsenkreuz,
b) die Parallelverschiebung des Achsenkreuzes bei feststehender Kurve durch!
Warum sind beide Verfahren gleichwertig?

Aus der Abbildung 1.106. gehen als Lösungen im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ hervor:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Proben:	$x_1 = \frac{\pi}{6}$	$x_2 = \frac{\pi}{2}$
Linke Seite	$\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2} - 1{,}5$ $= 0{,}5 + 1 - 1{,}5 = 0$	$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5}{6}\pi - 1{,}5$ $= 1 + 0{,}5 - 1{,}5 = 0$
Rechte Seite	0	0
Vergleich	$0 = 0$	$0 = 0$

Rechnerische Lösung goniometrischer Gleichungen

Bei der rechnerischen Lösung einfacher goniometrischer Gleichungen führen wir diese auf Bestimmungsgleichungen ersten und zweiten Grades zurück. Dabei ist es oft notwendig, eine gegebene Gleichung mit Hilfe goniometrischer Formeln umzuformen. Die wichtigsten goniometrischen Formeln wurden bereits eingeführt: Es sind die Gleichungen

(5), (6), (7), (8) – Beziehungen zwischen den verschiedenen Funktionen bei gleichem Winkel,

(10), (11), (12) – Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln aus verschiedenen Quadranten,

(9) – Komplementbeziehungen,

(31) – Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen positiver und negativer Winkel,

(32) – Formeln, welche die Periodizität angeben.

Stellen Sie alle bereits behandelten goniometrischen Formeln zusammen!

Beispiel 2:

$\sin^2 x - 0{,}25 = 0$

Wir setzen $\sin x = z$ und erhalten die rein-quadratische Gleichung $z^2 = \frac{1}{4}$ mit den Lösungen

$z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{2}$.

Daraus ergeben sich die Lösungen der gegebenen goniometrischen Gleichung im Bereich $0° \leqq x° < 360°$ zu

$\sin x_{1,2} = \frac{1}{2}$	$x_1 = 30°$	$x_2 = 150°$
$\sin x_{3,4} = -\frac{1}{2}$	$x_3 = 210°$	$x_4 = 330°$.

Proben: Es ist $\sin 30° = \sin 150° = \frac{1}{2}$; $\quad \sin^2 30° = \sin^2 150° = \frac{1}{4}$;

$\sin 210° = \sin 330° = -\frac{1}{2}$; $\quad \sin^2 210° = \sin^2 330° = \frac{1}{4}$.

Beispiel 3:

$\cot^2 x - 6{,}671 \cot x + 5{,}671 = 0$

Wir setzen $\cot x = z$ und erhalten die quadratische Gleichung

$z^2 - 6{,}671\, z + 5{,}671 = 0$

mit den Lösungen

$z_1 = 5{,}671$ und $z_2 = 1$.

Daraus ergeben sich als Lösungen der Ausgangsgleichung im Bereich

$0° \leqq x° < 360°$

$\cot x_{1,2} = 5{,}671$	$x_1 = 10°$	$x_2 = 190°$
$\cot x_{3,4} = 1$	$x_3 = 45°$	$x_4 = 225°$

Proben: $\cot 10° = \cot 190° = 5{,}671$

$$5{,}671^2 - 6{,}671 \cdot 5{,}671 + 5{,}671 = 0$$
$$5{,}671 - 6{,}671 + 1 = 0$$
$$\cot 45° = \cot 225° = 1$$
$$1 - 6{,}671 + 5{,}671 = 0$$

Beispiel 4:

$2 \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x = 2$

Mit Hilfe der Formel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ersetzen wir die Sinusfunktion durch die Kosinusfunktion und erhalten dadurch eine Gleichung, in der nur die Kosinusfunktion vorkommt:

$2 - 2 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x = 2.$

Wir setzen $\cos x = z$ und finder

$2 z^2 = z \sqrt{2}.$

Diese Bestimmungsgleichung zweiten Grades hat die Lösungen

$z_1 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Demnach ist

$$\cos x_{1,2} = 0 \qquad x_1 = 90^\circ \qquad x_2 = 270^\circ$$
$$\cos x_{3,4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad x_3 = 45^\circ \qquad x_4 = 315^\circ$$

Proben: $2\sin^2 90^\circ + \sqrt{2}\cos 90^\circ = 2 + 0 = 2$ $\qquad 2\sin^2 270^\circ + \sqrt{2}\cos 270^\circ = 2 + 0 = 2$

$2\sin^2 45^\circ + \sqrt{2}\cos 45^\circ = 1 + 1 = 2$ $\qquad 2\sin^2 315^\circ + \sqrt{2}\cos 315^\circ = 1 + 1 = 2$

Beispiel 5:

$3\sin x = 4\cos x$

Wir dividieren die Gleichung durch $\cos x$, wobei $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ mit k natürlich gilt, und erhalten

$$3\frac{\sin x}{\cos x} = 4.$$

Unter Benutzung der Beziehung $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ finden wir

$$\tan x = \frac{4}{3} = 1{,}333.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$x_1 = 53{,}12^\circ \qquad x_2 = 233{,}12^\circ.$$

Proben: $3\sin 53{,}12^\circ = 4\cos 53{,}12^\circ$, $\; 3\cdot 0{,}80 = 4\cdot 0{,}60$, $\; 2{,}40 = 2{,}40$

$3\sin 233{,}12^\circ = 4\cos 233{,}12^\circ$, $\; -3\cdot 0{,}80 = -4\cdot 0{,}60$, $\; -2{,}40 = -2{,}40$

Beispiel 6:

$a\sin x + b\cos x + c = 0$

Wir setzen $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ und erhalten

$$b\sqrt{1-\sin^2 x} = -a\sin x - c.$$

Durch Quadrieren und Umordnen erhalten wir

$$(a^2+b^2)\sin^2 x + 2ac\sin x + (c^2-b^2) = 0.$$

Wir setzen $\sin x = z$. Die quadratische Gleichung

$$(a^2+b^2)z^2 + 2acz + (c^2-b^2) = 0$$

hat die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{-ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

Daraus finden wir

$$\sin x_1 = \frac{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}{a^2+b^2} \qquad \sin x_2 = \frac{-b\sqrt{a^2+b^2-c^2}+ac}{a^2+b^2}.$$

Außerdem berechnen wir $\cos x_1$ und $\cos x_2$ und finden

$$\cos x_1 = \frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{a^2+b^2} \qquad \cos x_2 = \frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}-bc}{a^2+b^2}.$$

Da $\sin x$ und $\cos x$ Zahlen zwischen -1 und $+1$ sein müssen, ist die Gleichung nicht für alle Werte a, b und c lösbar. Bei einer Diskussion der Gleichung kommt es darauf an, festzustellen, für welche Werte a, b und c sie überhaupt lösbar ist und wie viele Lösungen sie hat. Aus den angeführten Lösungsmethoden ergeben sich Beziehungen zwischen den Konstanten als Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung.

Beispiel 7:

$6 \cos x + 4 \sin x = 3$

Wir setzen $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

und erhalten

$$6 \sqrt{1 - \sin^2 x} = 3 - 4 \sin x.$$

Nach Quadrieren und Umordnen ergibt sich

$$52 \sin^2 x - 24 \sin x - 27 = 0.$$

Wir setzen $\sin x = z$. Die quadratische Gleichung

$$52 z^2 - 24 z - 27 = 0$$

hat die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{387}}{26}.$$

Es ist $\sin x_1 = 0{,}9873$, $\quad \sin x_2 = -0{,}5258$,
$\cos x_1 = -0{,}1582$, $\quad \cos x_2 = 0{,}8505$.

Daraus ergeben sich als Lösungen der Ausgangsgleichung

$$x_1 = 99{,}1°, \qquad x_2 = 328{,}28°.$$

Proben:

$$\begin{aligned} & 6 \cos 99{,}1° + 4 \sin 99{,}1° \\ = & -6 \cdot 0{,}1582 + 4 \cdot 0{,}9873 \\ = & -0{,}9492 + 3{,}9492 = 3 \\ & 6 \cos 328{,}28° + 4 \sin 328{,}28° \\ = & \; 6 \cdot 0{,}8505 - 4 \cdot 0{,}5258 \\ = & \; 5{,}103 - 2{,}103 = 3 \end{aligned}$$

Beispiel 8:

$\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{1}{2} = 0$

Wir setzen $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ und $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

Die Gleichung

$$\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

wird quadriert:

$$\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{4}.$$

Setzen wir $\sin^2 x = z^2 = w$, so ist zunächst die Gleichung

$$4 w^2 - 4 w + 1 = 0$$

zu lösen. Sie hat die zweifache Wurzel $w = \frac{1}{2}$.

Also ist

$$z_1 = \sin x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ und } z_2 = \sin x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Daraus ergibt sich

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \left(x_1{}' = \frac{3\pi}{4}\right); \quad x_2 = \frac{5\pi}{4} \left(x_2{}' = \frac{7\pi}{4}\right).$$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung stellt man fest, daß diese durch die eingeklammerten Werte nicht erfüllt wird.

Proben: $\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin\frac{5\pi}{4} \sin \cdot \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}$

Aufgaben

In den folgenden Aufgaben sind alle Lösungen zu berücksichtigen, die zwischen 0° und 360° (0 und 2π) liegen, und nur diese.

1. Lösen Sie zeichnerisch die folgenden Gleichungen!

a) $\cos x - 2 \sin x = 0$ $\qquad$ b) $6 \cos x + 4 \sin x = 3$

c) $4 \sin x - \cos x = 6$ $\qquad$ d) $\cos x + \sin x = 2$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen zeichnerisch und rechnerisch!

a) $3 \sin x - 4 \cos x = 0$ $\qquad$ b) $\sin x = -2 \cos x$

3. Welche Winkel genügen den folgenden Gleichungen?

a) $\sin^2 x = 0{,}81$ $\qquad$ b) $\cos^2 x = \frac{1}{3}$ $\qquad$ c) $\tan^2 x = 3$ $\qquad$ d) $\cot^2 x = 1{,}5$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ b) $\cos^2 x = \frac{2}{3}$ $\qquad$ c) $\tan^2 x = 2$ $\qquad$ d) $\cot^2 x = 2{,}5$

5. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen!

a) $\sin^2 x - 1{,}1428 \sin x + 0{,}3214 = 0$ $\qquad$ b) $\cos^2 x - 1{,}4848 \cos x + 0{,}4924 = 0$

c) $\tan^2 x - 1{,}2679 \tan x + 0{,}2679 = 0$

6. In den folgenden Gleichungen sind alle Funktionen durch eine einzige auszudrücken; dann ist die Gleichung nach dieser Funktion aufzulösen und der Winkel zu bestimmen.

a) $2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3$ $\qquad$ b) $3 \cos^2 x + \sin^2 x = 2{,}5$

c) $4 \cos^2 x - 2 \sin x = 2$ $\qquad$ d) $p \sin^2 x + q \cos^2 x = 0$

e) $p \sin^2 x + q \cos^2 x = r$ $\qquad$ f) $p \sin^2 x + q \cos x = 0$

g) $p \cos^2 x + q \sin x = r$ $\qquad$ h) $\tan^2 x + 4 \sin^2 x = 3$

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\sin x + 2 \cos x = 0$ $\qquad$ b) $5 \sin x = 3 \tan x$ $\qquad$ c) $4 \sin x + 3 \tan x = 0$

8. Lösen Sie die Gleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0$ dadurch, daß Sie eine Winkelfunktion beseitigen und damit die Aufgabe auf eine quadratische Gleichung zurückführen!

9. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $4 \sin x + 7 \cos x = 6{,}296$ $\qquad$ b) $5 \sin x - 2 \cos x = 0{,}488$

c) $\frac{1}{2} \sin x + \frac{2}{5} \cos x = 0{,}625$ $\qquad$ d) $\frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{3} \sin x = 0{,}258$

e) $(1 + \sqrt{3}) \cos x + (1 - \sqrt{3}) \sin x = 2$

10. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\sin x + 1{,}75 \cos x - 1{,}574 = 0$ $\qquad$ b) $5 \sin x + 4 \cos x = 6{,}25$

c) $\sin x - 0{,}75 \cos x - 0{,}49 = 0$ $\qquad$ d) $3 \sin x = 1 + 4 \cos x$

11. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\sin \frac{3}{2} x = -0{,}5678$ $\qquad$ b) $6 \sin^2 x - 5 \cos x - 2 = 0$

c) $6 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 2$

1.11. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Aufgaben aus der Technik

1. Die Neigung von Nasenkeilen, die zur Befestigung von Rädern auf Wellen dienen, beträgt 1:100 (Abb. 1.107.).

a) Berechnen Sie den Neigungswinkel!

b) Warum ist es in diesem Falle belanglos, ob man die Neigung als das Verhältnis von *d* zur waagerechten Entfernung *e* oder zur schrägen Strecke *s* definiert?

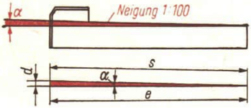


Abb. 1.107.

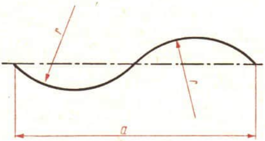


Abb. 1.108.

2. Bestimmen Sie die gestreckte Länge eines laufenden Meters Wellblech nach Abbildung 1.108.!

a) $r = 3{,}2$ cm; $a = 10{,}0$ cm **b)** $r = 7{,}2$ cm; $a = 20{,}0$ cm

Schülerauftrag

Orientieren Sie sich in der beruflichen Grundausbildung über die Gewindearten und deren Kennzeichnung!

3. Wie groß ist in dem in Abbildung 1.109. dargestellten Gewindeprofil eines metrischen Gewindes der Flankenwinkel α, wenn $t = 0{,}8660\,h$ ist?

4. Eine Schraube ist selbsthemmend, wenn die parallel zur schiefen Ebene wirkende Reibungskraft *R* gleich oder größer als der Hangabtrieb *H* ist (Abb. 1.110.).

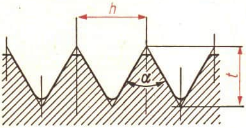


Abb. 1.109.

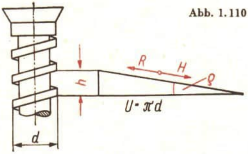


Abb. 1.110

Wie hoch darf die Ganghöhe *h* einer Stahlschraube von $d = 52$ mm Durchmesser im Höchstfall sein, damit die Schraube selbsthemmend ist? Der Reibungswinkel von Stahl auf Stahl (bei Ölfettung) ist $\varrho = 8{,}50°$.

5. Die Achsen zweier Kegelräder stehen aufeinander senkrecht (Abb. 1.111.). Ihre großen Durchmesser sind $D_1 = 150$ mm (900 mm) und $D_2 = 120$ mm (480 mm). Die Länge der ineinandergreifenden Zähne ist $s = 30$ mm (150 mm).

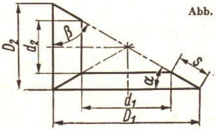


Abb. 1.111.

a) Welche Neigungswinkel α und β bilden die Mantellinien der beiden Kegelstümpfe mit ihren Grundflächen?
b) Wie groß sind die kleinen Durchmesser d_1 und d_2 der beiden Kegelräder?
c) Wie hoch sind die beiden Kegelräder?
d) Stellen Sie die Kegelräder in einer maßstäblichen Zeichnung dar, und lösen Sie die Aufgabe geometrisch!

6. Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite a wird an seinen Ecken mit dem Radius $r = \frac{a}{6}$ abgerundet (Abb. 1.112.). Wie groß ist der Inhalt der Abfallfläche
a) ausgedrückt mit Hilfe von a, **b)** in Prozenten?

Abb. 1.112.

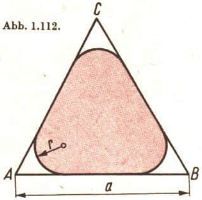
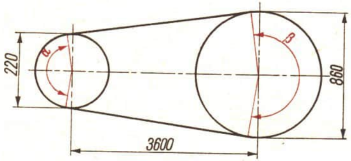


Abb. 1.113.



7. Berechnen Sie für den in Abbildung 1.113. dargestellten offenen Riementrieb
a) die Umschlingungswinkel α und β,
b) die erforderliche Riemenlänge l (102 % des errechneten Ergebnisses)!

8. Berechnen Sie für den in Abbildung 1.114. dargestellten gekreuzten Riementrieb
a) die Umschlingungswinkel α und β,
b) die erforderliche Riemenlänge l (102 % des errechneten Ergebnisses)!

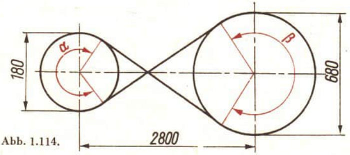


Abb. 1.114.

9. Ein zylindrischer liegender Dampfkessel ist 1800 mm lang und besitzt einen lichten Durchmesser $D = 1500$ mm. Der Kessel ist als Einflammrohrkessel mit konzentrisch eingebautem glattem Flammrohr von 700 mm Durchmesser ausgeführt. Die Wasserstandslinie des Kessels liegt bei 1000 mm.
a) Zeichnen Sie einen Querschnitt des Kessels, und tragen Sie die Wasserstandslinie ein!
b) Drücken Sie für den gezeichneten Querschnitt die Sehnenlänge, die Bogenlänge und die Fläche des Kreissegments als Funktionen des Zentriwinkels aus, welcher einer Wasserstandshöhe h in diesem Querschnitt zugeordnet ist! Stellen Sie die Funktionen auch graphisch dar!
c) Drücken Sie die Verdampfungsfläche des Kessels in Quadratmetern als Funktion des Zentriwinkels aus, und stellen Sie die Funktion graphisch dar!
d) Berechnen Sie für die angegebenen Zahlenwerte die Verdampfungsfläche in Quadratmetern und den Wasserinhalt des Dampfkessels in Kubikmetern!
e) Berechnen Sie für die Wasserstandshöhen 1000 mm; 1200 mm; 1300 mm; 1400 mm die zugehörigen Verdampfungsflächen in Quadratmetern und die Wasserinhalte in Kubikmetern, und stellen Sie diese Funktionen der Wasserstandshöhe graphisch dar!

10. Der Stößelantrieb der Kurzhobelmaschine (Shapingmaschine) erfolgt mittels Kurbelschwinge (Abb. 1.115. a und b). Dadurch wird ein schnellerer Rücklauf erreicht. Außerdem kann durch Verstellen des Kurbelradius r der Hub H des Stößels verändert werden.

a) Berechnen Sie aus Abbildung 1.115. die Hublänge und die Winkel α und β für $r = 90$; 120; 180 mm!

Abb. 1.115. a

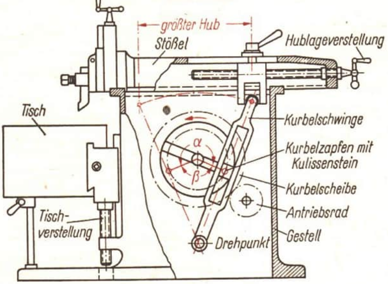
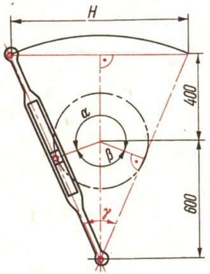


Abb. 1.115. b



b) Wieviel Zeit wird jeweils für einen Vorlauf und für einen Rücklauf benötigt, wenn die Kurbel 45 Umdrehungen je Minute macht?

11. Stellen Sie den Flächeninhalt A des in Abbildung 1.116. dargestellten Querschnittes durch ein Zementrohr als Funktion von r dar: $A = \varphi(r)$!

12. Ein Rohr von kreisförmigem Querschnitt A_1 und dem Durchmesser d_1 wird durch ein kegelförmiges Stück mit einem zweiten Rohr vom Querschnitt $A_2 = 3\ A_1$ (Abb. 1.117.) verbunden. Berechnen Sie die Mantellinien s des Verbindungsstückes!

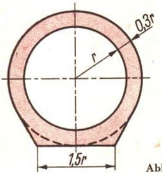


Abb. 1.116.

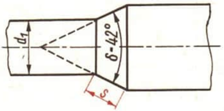


Abb. 1.117.

13. Die Schubstange eines Kurbelgetriebes ist 750 mm lang, der Kurbelradius ist $r = 200$ mm (Abb. 1.118.).

a) Wie groß ist die Ablenkung β der Schubstange, wenn die Kurbel sich um den Winkel α dreht?

b) Berechnen Sie die zu den Winkeln $\alpha = 0°$; 15°; 30°; ...; 360° gehörigen Winkel β, und stellen Sie β als Funktion von α graphisch dar!

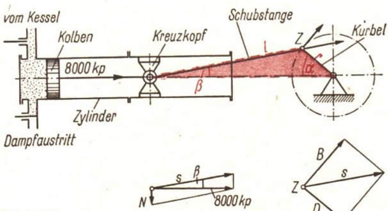


Abb. 1.118.

c) Für welche Drehwinkel α erreicht die Ablenkung β der Schubstange ihre größten Werte?

d) Welche Verschiebung des Kreuzkopfes entspricht den Kurbelstellungen $\alpha = 0°;\ 15°;\ 30°;\ \ldots;\ 360°$?

e) Stellen Sie die Verschiebung des Kreuzkopfes als Funktion des Winkels α der Kurbeldrehung analytisch und graphisch dar!

f) Zerlegen Sie die von der Kolbenstange auf den Kreuzkopf übertragene Kraft $F = 8000$ kp in ihre Komponenten S und N! Dabei wirkt S in Richtung der Schubstange, N senkrecht zur Gleitbahn des Kreuzkopfes bei den einzelnen Kurbelstellungen.

g) Zerlegen Sie die auf den Kurbelzapfen Z wirkende Schubstangenkraft S in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten B und D! Dabei stellt D den Druck auf die Kurbelwelle dar, B ist die tangential zur Kreisbahn des Kurbelzapfens wirkende Bewegungskraft.

h) Berechnen Sie die Größe der Komponentenkräfte S und B für die Kurbelstellungen $\alpha = 0°;\ 15°;\ 30°;\ \ldots;\ 360°$!

i) Stellen Sie die Größe der treibenden Kraft B als Funktion des Winkels α graphisch dar!

Schülerauftrag

Stellen Sie fest, welche Abmessungen die im chemischen Laboratorium verwendeten Gummistopfen haben!

14. In Laboratorien werden Gummistopfen verwendet, die nach der Vorschrift „Kegel 1:5" gefertigt wurden.

a) Zeichnen Sie den Achsenschnitt, wenn der Durchmesser der kleineren Grundfläche $d = 19$ mm und die Höhe $h = 25$ mm betragen!

b) Berechnen Sie den Kegelwinkel!

Wie groß ist jeweils der obere Durchmesser D, wenn für den unteren Durchmesser d und für die Höhe h die folgenden Maße ermittelt wurden?

c) $d = 16$ mm; $h = 25$ mm d) $d = 25$ mm; $h = 30$ mm

15. Eine oben und unten offene Übergabeschurre ist herzustellen. Die technische Zeichnung zeigt Abbildung 1.119.

Abb. 1.119.

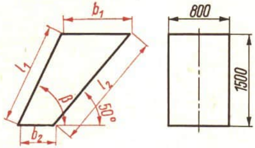
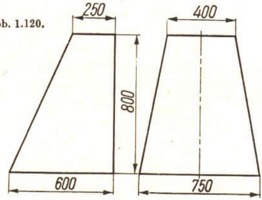


Abb. 1.120.



Der Rutschwinkel γ soll 50°, die (obere) Aufnahmefläche 0,4 m² und die (untere) Abgabefläche 0,25 m² betragen.

Berechnen Sie die fehlenden Maße für b_1, b_2, l_1, l_2 und β!

16. Eine Rauchabzugshaube ist anzufertigen (Abb. 1.120.). Berechnen Sie die Neigungswinkel der Seitenbleche gegen die Grundfläche!

Schülerauftrag

Orientieren Sie sich in der beruflichen Grundausbildung über das Kegeldrehen!

17. Auf der Drehmaschine soll ein kegliger Zapfen gedreht werden.

a) Wie groß muß der Einstellwinkel am Werkzeugschlitten sein, wenn $D = 80$ mm (30 mm; 100 mm), $d = 60$ mm (20 mm; 60 mm) und $l = 100$ mm (120 mm; 90 mm) werden sollen?

b) Wie groß muß man den kleinen Durchmesser d eines $l = 45$ mm langen kegligen Zapfens wählen, wenn $D = 25$ mm und die Neigung des Zapfens $\frac{1}{x} = \frac{1}{10}$ betragen sollen?

18. Bestimmen Sie den Supporteinstellwinkel α (in Grad und Minuten) für den in Abbildung 1.121. dargestellten Kegel!

19. Der in Abbildung 1.122. dargestellte Kegel soll bearbeitet werden. Berechnen Sie **a)** den Supporteinstellwinkel, **b)** den kleinen Durchmesser d!

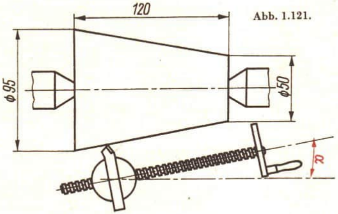


Abb. 1.121.

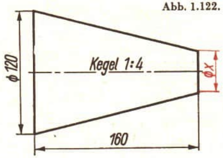


Abb. 1.122.

20. Kegel können auf Drehmaschinen auch durch seitliches Verstellen des Reitstocks um ein Stück s hergestellt werden (Abb. 1.123.).

a) Wie groß wird der Kegel $\frac{1}{x}$, wenn die Reitstockspitze der Drehmaschine um s verschoben wird?

b) Drücken Sie die Verschiebung s der Reitstockspitze als Funktion des Kegelwinkels α aus!

c) Wie läßt sich die Verjüngung $\frac{1}{x}$ des Kegelzapfens als Funktion des Kegelwinkels α darstellen?

d) Es soll ein Kegel mit den Maßen $D = 65$ mm, $l = 245$ mm und $\frac{1}{x} = \frac{1}{20}$ gedreht werden. Wie groß werden d und α? Um welches Stück s muß der Reitstock seitlich verstellt werden?

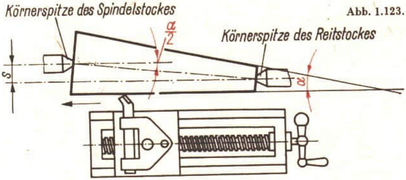


Abb. 1.123.

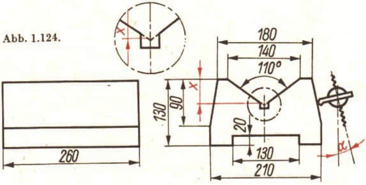
21. Beim Drehen eines Kegels sind die folgenden Werte gegeben! $D = 70$ mm; $d = 40$ mm; $l = 80$ mm

a) Wie groß ist der Kegelwinkel?

b) Um welchen Winkel ist der Oberschlitten zu verstellen?

22. Das in Abbildung 1.124. dargestellte Führungsprisma ist zu bearbeiten. Berechnen Sie

Abb. 1.124.



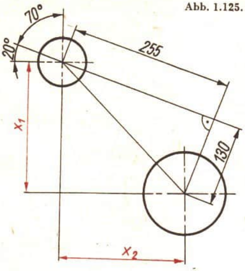


Abb. 1.125.

a) den Einstellwinkel α für den drehbaren Support zur Bearbeitung der seitlichen Schrägen,

b) die mit x bezeichnete Tiefe der Prismenführung!

23. Berechnen Sie aus Abbildung 1.125. die für das Anreißen zweier Bohrungen eines Werkstückes notwendigen Maße x_1 und x_2!

24. Von einer Welle mit dem Durchmesser $d = 100$ mm (Abb. 1.126.) wird das rot gerasterte Stück abgefräst, so daß **a)** $s_1 = 75$ mm, **b)** $s_2 = 60$ mm beträgt.
Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

c) Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall, wenn der Durchmesser der Welle $d = 160$ mm und die Bogenhöhe des abgefrästen Stückes $h = 20$ mm betragen?

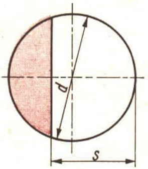


Abb. 1.126.

25. Welchen Durchmesser muß ein Rundstahl haben, damit aus ihm ein Sechskant mit 80 cm² Querschnitt gefräst werden kann?

26. Bei einer Waagerecht-Bohr- und -Fräsmaschine erfolgt der Antrieb vom Motor aus über Keilriemen auf das Hauptgetriebe (Abb. 1.127.). Der Durchmesser der treibenden Scheibe sei d_m, der Durchmesser der getriebenen Scheibe D_m und der Achsenabstand des Keilriementriebes A.

a) Stellen Sie die Formel für den Umschlingungswinkel auf!

b) Berechnen Sie den Umschlingungswinkel β für die Durchmesser eines Scheibenpaares 140 mm bzw. 224 mm und den Achsenabstand 500 mm!

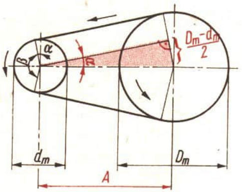


Abb. 1.127.

27. Die Ablesegenauigkeit der Strichmaßstäbe wird durch die Parallaxe beeinflußt.

a) Stellen Sie die Formel für den Ablesefehler Δl bei schiefer Ablesung auf, wenn e die Dicke des Maßstabes und α der Einblickwinkel ist!

b) Ein Stahlmaßstab hat eine Dicke von 0,6 mm, und der Beobachter blickt unter einem Winkel von 40° auf den Maßstab. Welcher Ablesefehler entsteht?

Schülerauftrag

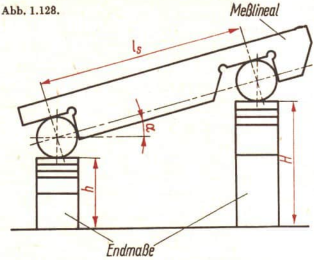
Orientieren Sie sich in der beruflichen Grundausbildung, wie der Werkzeugmacher Winkel bestimmt! Wie werden zum Beispiel Kegelwinkel gemessen?

28. Winkel können mit Hilfe von Endmaßen, Meßdornen und einem Meßlineal bestimmt werden (Abb. 1.128.). Das entsprechend dem Winkelwert zu neigende Lineal ist so ausgeführt, daß es den Abstand der beiden Meßdorne festlegt.

Gegeben sind:

Länge der größeren Endmaßgruppe H,
Länge der kleineren Endmaßgruppe h,
Länge des Meßlineals l_s.

Abb. 1.128.



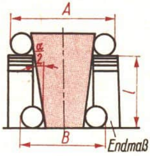


Abb. 1.129.

a) Stellen Sie die Formel für die Bestimmung des Winkels zwischen Meßlineal und Unterlage der Endmaßgruppen auf!

b) Mit einem Meßlineal von der Länge $l_s = 200$ mm soll ein Winkel $\alpha = 32°\ 12'$ eingestellt werden. Wie groß muß die Länge der größeren Endmaßgruppen werden, wenn der kleinere Block 30 mm sein soll? Warum heißt das Meßlineal auch Sinuslineal?

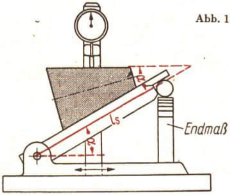


Abb. 1.130.

29. Kegel können nicht mit einem Meßgerät direkt gemessen werden. Zur Lösung dieser Aufgabe sind Hilfsgeräte bzw. eine Zusammenstellung von Meßmitteln notwendig.
Ein Außenkegel wird mit zwei Prüfscheiben und Endmaßsätzen sowie einer Feinmeßschraube gemessen (Abb. 1.129.). Die Länge des Endmaßblockes sei l, der obere Abstand A, der untere Abstand B.

a) Stellen Sie für die Winkelbestimmung die Formel auf!

b) Mit einem Endmaßblock von 2,120 mm wurde mit Meßscheiben ein oberer Abstand von 86 mm und ein unterer Abstand von 75 mm gemessen. Bestimmen Sie den sich hieraus ergebenden Kegelwinkel!

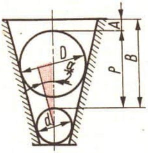


Abb. 1.131.

30. Kegel können mit Hilfe des Sinuslineals gemessen werden. Das Lineal wird so eingestellt, daß der aufgelegte Kegel mit seiner oberen Mantellinie eine Parallele zur Führungsfläche, die den Feinzeiger aufnimmt, bildet (Abb. 1.130.). Das Lineal ist hier auf der einen Seite fest gelagert.
Bestimmen Sie die Länge für die große Endmaßkombination, wenn das kleine Endmaß 40 mm sein soll und die Meßbasis des Sinuslineals $l_s = 160$ mm ist, für einen metrischen Kegel mit einem Winkel von $2°\ 52'$!

31. Ein Innenkegel wird mit Hilfe von zwei Kugeln gemessen (Abb. 1.131.). Der Durchmesser der großen Kugel sei D, der Durchmesser der kleinen Kugel d. Bei diesem Verfahren wird der Meßwert P gemessen (Prüfmaß).

a) Stellen Sie die Formel für die Bestimmung des Kegelwinkels α auf!

b) Bestimmen Sie für den metrischen Kegel Nr. 80 ($D = 76$ mm, $d = 72$ mm) den zu erwartenden Meßwert P!

Schülerauftrag

Orientieren Sie sich in der beruflichen Grundausbildung über die Begriffe „Flankendurchmesser" und „Flankenwinkel" an Gewinden! Wie mißt der Werkzeugmacher den Flankendurchmesser eines Gewindes?

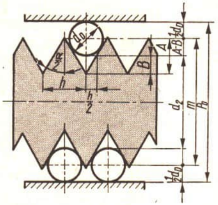


Abb. 1.132.

32. Der Flankendurchmesser eines Gewindes wird mit Hilfe von drei Meßdrähten bestimmt (Dreidrahtmethode, Abb. 1.132.). Dem einen Meßdraht auf der einen Gewindeseite sind auf der gegenüberliegenden Seite zwei weitere Meßdrähte zugeordnet. Mit einer Feinmeßschraube wird das Prüfmaß P_o ermittelt. Aus diesem Maß ergibt sich der Flankendurchmesser d_2. Bei Beginn der Messung ist zunächst der günstigste Meßdrahtdurchmesser d_D zu bestimmen, bei dem der Draht die Gewindeflankendurchmesser berührt.

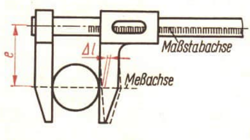
a) Die Steigung sei h, der Flankenwinkel α. Leiten Sie die Formel her, nach der der günstigste Meßdrahtdurchmesser bestimmt werden kann!

b) Leiten Sie die Formel für das Prüfmaß P_o her!
Anleitung: Das Prüfmaß ist eine Funktion des Flankendurchmessers d_2, des Flankenwinkels α, der Steigung h und des günstigsten Meßdrahtdurchmessers.

c) Eine Spindel mit dem Gewinde M 10 soll geprüft werden. Zu berechnen sind der günstigste Meßdrahtdurchmesser und das Prüfmaß P_o.
Kenngrößen des Gewindes M 10:
Flankendurchmesser: $d_2 = 9{,}026$ mm; Steigung: $h = 1{,}5$ mm; Flankenwinkel: $\alpha = 60°$.

33. Die Meßgenauigkeit der Meßschieber ist von der Geradheit und Spielfreiheit von Maßstab und Schieber abhängig. Durch den Kippwinkel α entsteht der Kippfehler Δl (Abb. 1.133.).

Abb. 1.133.



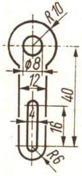


Abb. 1.134.

a) Leiten Sie die Formel für den Kippfehler her!

b) Der Meßschenkel eines Meßschiebers hat eine Länge $e = 60$ mm, der Kippwinkel beträgt $\alpha = 3'$. Welcher Meßfehler ist am Ende der Meßschenkel zu erwarten?

34. Das in Abbildung 1.134. dargestellte Schnitteil ist aus 1,2 mm dickem Stahlblech auszuschneiden.

Stellen Sie durch Vergleiche des Abfalls bei gerader und bei schräger Stellung des Schnittteiles im Werkstoffstreifen fest, welche Anordnung wirtschaftlicher ist!

Zur Berechnung des Werkstoffbedarfs dienen folgende Begriffe und Formeln (Abb. 1.135. und 1.136.):

Breite des Schnitteiles: b_T (in mm), Länge des Schnitteiles: l_T (in mm),

Abb. 1.135.

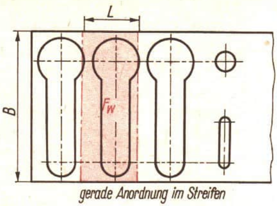
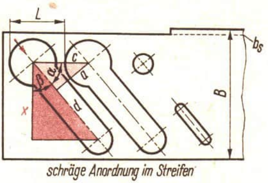


Abb. 1.136.



Randbreite: b_R (in mm), Streifenbreite: B (in mm), Breite der Zwischenstege: b_{St} (in mm), Vorschublänge: L (in mm),
Werkstoffbedarf je Schnitteil: F_W (in mm²),
Fläche des Schnitteiles F_T (in mm²),
Abfall je Schnitteil F_A (in mm²), Abfallanteil A_v (in %).

$$F_W = B \cdot L; \quad F_A = F_W - F_T; \quad A_V = \frac{100 \cdot F_A}{F_W}.$$

Anleitung: **a)** Gerade Anordnung im Werkstoffstreifen (Abb. 1.135.). Die Randbreite ist $b_R = 1{,}2$ mm, die Breite der Zwischenstege $b_{St} = 1{,}2$ mm. Die Streifenbreite ist $B = b_T + 2\, b_R$. Die Vorschublänge ist $L = l_T + b_{St}$.
Die Fläche des Schnitteiles wurde zu $F_T = 592$ mm² ermittelt.
b) Schräge Anordnung im Werkstoffstreifen (Abb. 1.136.).
Für die Breite der Rand- und Zwischenstege ist ebenfalls 1,2 mm einzusetzen. Die Vorschublänge L ist die gleiche wie bei gerader Anordnung. Die Streifenbreite B setzt sich aus der Hilfslinie x, den Radien der Kreisfläche r_K und des Halbkreises r_H sowie aus den beiden Randstegen zusammen. Zur Streifenbreite ist wegen eines anderen Schneidverfahrens hier noch $b_s = 1{,}2$ mm hinzuzufügen.

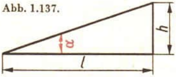
Schülerauftrag

Erkunden Sie in der beruflichen Grundausbildung, wie ein Werkstück zur Bearbeitung auf Maschinen aufgespannt wird und welche Kräfte dabei auftreten!

35. Während der Bearbeitung eines Werkstückes wirken verschiedene Kräfte, zum Beispiel Schnittkräfte, Biegekräfte, Druckkräfte und andere. Der Spannmechanismus der Vorrichtung muß diese Kräfte aufnehmen. Als Spannelemente werden zum Beispiel Spannkeile oder Spannschrauben verwendet.

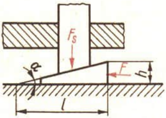
a) Der Keil wirkt nach dem physikalischen Prinzip der schiefen Ebene (Abb. 1.137.). Die Keilhöhe sei h, die Keillänge l. Stellen Sie die Formel zur Bestimmung des Steigungswinkels α des Keiles auf!
Durch den Keil wird die Spannkraft F_s aufgebracht (Abb. 1.138.). Die am Keil aufzubringende Anzugskraft sei F.

Abb. 1.137.



Stellen Sie die Formel für die Anzugskraft F auf! Wird die Reibung beim Anziehen des Keiles mit berücksichtigt, so muß man zum Neigungswinkel α den doppelten Reibungswinkel $2\,\varrho$ addieren, da die Reibung an beiden Seiten des Keiles wirkt. Der Reibungswinkel wird aus der Beziehung $\mu = \tan \varrho$ berechnet, worin μ die Reibungszahl ist. Stellen Sie die Formel für die Anzugskraft F bei Berücksichtigung der Reibung auf!

Abb. 1.138.



Durch die Reibung wird ein Teil der Kraft nicht genutzt. Der Wirkungsgrad ist der Quotient aus der Anzugskraft ohne Reibung und der Anzugskraft mit Reibung.

Stellen Sie die Formel für den Wirkungsgrad auf!

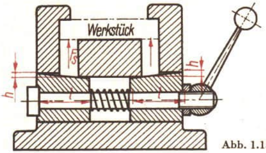


Abb. 1.139.

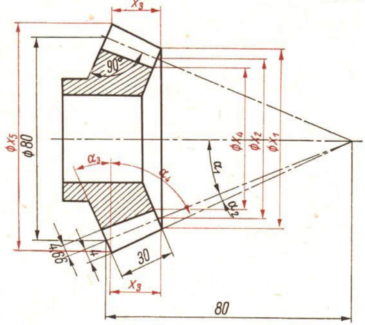


Abb. 1.140.

b) In einer Vorrichtung wird ein Werkstück durch zwei Spannkeile festgespannt (Abb. 1.139.). Die Spannkraft jedes Keiles beträgt $F_s = 1100$ kp. Die Keilhöhe ist $h = 2$ mm und die Keillänge $l = 30$ mm. Die Reibungszahl ist $\mu = 0{,}1$. Die Kraft zum Anziehen des Keiles und der Wirkungsgrad sind zu berechnen.

36. Bei sich senkrecht kreuzenden Wellen wird die Drehbewegung meist mittels Kegelrädern übertragen.
Zum Fräsen der Zähne müssen die Radkörper (Abb. 1.140.) vorgedreht werden.
Berechnen Sie die Maße $x_1 \ldots x_5$ sowie die Winkel $\alpha_1 \ldots \alpha_4$!

Aus der Nautik

37. Ein Schiff läuft folgenden Kurs:
a) N 45° O **b)** N 45° W **c)** S 60° O **d)** S 60° W **e)** N 30° O **f)** N 30° W
Welchen Kurs hält das Schiff? Veranschaulichen Sie den Kurs geometrisch!

38. An der Küste eines Hafenortes ist eine horizontale Standlinie $\overline{AB} = 830$ m abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wird ein vorüberfahrendes Schiff zum gleichen Zeitpunkt angepeilt. Die Peilrichtungen bilden mit der Standlinie die Winkel $\alpha = 86{,}40°$ und $\beta = 78{,}50°$.

a) In welcher Entfernung von A und B und in welchem Abstand von der Standlinie befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung?

b) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

39. Von einem Schiff aus peilt man gleichzeitig den Leuchtturm L in Richtung S 55° O und den Kirchturm K in Richtung S 28° W an. Die Entfernung $\overline{KL}$ beträgt nach der Seekarte 33,2 km und hat die Richtung N 85° O.

a) In welcher Entfernung von K und L befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung (in sm)?

b) Welchen Kurs muß das Schiff einhalten, wenn es im Abstand von 4 sm am Leuchtturm vorbeifahren soll?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

40. Ein Schiff steuert einen Kurs N 45° W bei einer Geschwindigkeit von 9 sm · h^{-1} (9 Knoten). Vom Schiffsort A aus peilt man einen Leuchtturm unter N 23,4° O. Nach 90 min peilt man vom Schiffsort B aus denselben Leuchtturm in Richtung N 85,3° O.

a) Wie weit ist das Schiff am Ort B vom Leuchtturm entfernt?

b) Welchen Abstand hat der Leuchtturm vom Schiffskurs?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

41. Ein nach Ort A auf geradem Kurs mit 8,5 kn fahrendes Schiff peilt das Leuchtfeuer bei Ort B unter $32°\,50'$ und das Leuchtfeuer bei Ort C unter $184°$ an. (Winkelangaben von N über O.) Aus der Seekarte wird die Entfernung Schiff–Ort B mit 1,85 sm festgestellt.
In welcher Richtung verläuft die Fahrrinne, wenn 12 min später Ort B unter $337°$ und Ort C unter $268°$ gesehen werden?

42. Ein Feuerschiff liegt von einem 48 m hohen Leuchtturm in N $28°$ O 12 sm entfernt. Welchen Kurs muß ein Schiff, auf dem der Turm östlich unter dem Höhenwinkel $1°\,2{,}5'$ und die Verbindungslinie des Turmes mit dem Feuerschiff unter dem Horizontalwinkel $71°\,25{,}6'$ gesehen wird, einhalten, um im kürzesten Abstand von 2,5 sm nordwestlich an dem Feuerschiff vorbeizufahren?

43. Auf einem Schiff wurde die Bake auf dem 60 m hohen Streckelberg bei Koserow (Usedom) zuerst in S $12°\,15'$ O unter dem Höhenwinkel $\alpha_1 = 44{,}6'$ und dann in S $68°\,20'$ W unter dem Höhenwinkel $\alpha_2 = 12'$ gesehen.

a) Unter welchem Kurs war das Schiff gefahren?

b) Wieviel Seemeilen betrug die zwischen den beiden Peilungen zurückgelegte Strecke? (Die Augenhöhe und die Krümmung der Erde bleiben unberücksichtigt.)

44. Ein Schiff legt 54 sm beim Kurs S $35°\,40'$ W zurück, während ein Strom in der Zeit 7 sm nach S $20°\,15'$ O versetzt. Welches ist der wahre Kurs des Schiffes, und wie groß ist die Entfernung über Grund (der wahre Weg des Schiffes)?

45. Der Kurs eines Flugzeuges in der eigentlichen Flugrichtung wird als Steuerkurs $\varkappa_s$, die Geschwindigkeit in dieser Richtung als Eigengeschwindigkeit c bezeichnet.
Der Wind wirkt unter einer bestimmten Windrichtung und mit einer bestimmten Windstärke – der Windgeschwindigkeit w – beschleunigend oder verzögernd auf das Flugzeug ein und treibt das Flugzeug aus der beabsichtigten Flugrichtung heraus. Dadurch fliegt das Flugzeug in einer anderen Richtung, dem Kurs über Grund oder dem Kartenkurs $\varkappa_k$. Die Geschwindigkeit in dieser Richtung heißt Geschwindigkeit über Grund v.
Das Geschwindigkeitsdreieck ABC heißt Winddreieck, der Winkel CAB Abtrift, in umgekehrter Richtung Vorhaltewinkel (Abb. 1.141.).

Ein Lufttaxi der *Interflug* fliegt mit einer Geschwindigkeit $c = 240\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

a) von Karl-Marx-Stadt nach Berlin-Schönefeld (175 km),

b) von Berlin-Schönefeld nach Barth (225 km),

c) von Erfurt nach Karl-Marx-Stadt (135 km) und

d) von Berlin-Schönefeld nach Dresden (165 km).

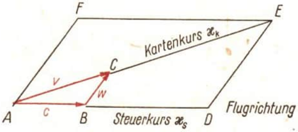


Abb. 1.141.

Es herrscht Südwind mit Windstärke 7 ($w \approx 47\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$).
Berechnen Sie in jedem Falle den Kartenkurs $\varkappa_k$, die Geschwindigkeit über Grund v und die Abtrift! Entnehmen Sie den Kartenkurs dem Atlas!

46. Eine Maschine vom Typ IL 14 der *Interflug* ($c = 320\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) fliegt von Barth nach Berlin-Schönefeld. Es herrscht Westwind, Stärke 8 ($w \approx 54\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$).
Berechnen Sie $\varkappa_k$, v und die Abtrift!

47. Eine Maschine vom Typ IL 14 der *Interflug* ($c = 320\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$) fliegt von Dresden nach Erfurt (190 km). Der Kartenkurs $\varkappa_k$ beträgt 267° (Winkelangabe: N über O). Es herrscht NW-Wind mit einer Windgeschwindigkeit $w = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit über Grund v, den Vorhaltewinkel und die Flugzeit!

Aus der Astronomie

48. Die Entfernung Sonne–Erde beträgt im Mittel $149 \cdot 10^6$ km; die Entfernung Erde–Mond $384 \cdot 10^3$ km. Der scheinbare Durchmesser der Sonne ist rund 32′, der des Mondes rund 31′. Berechnen Sie den wahren Durchmesser von Sonne und Mond!

49. Unter der Horizontalparallaxe eines Gestirns versteht man den Sehwinkel, unter welchem der Erdradius einem Beobachter vom Gestirn aus erscheinen würde. Berechnen Sie die Horizontalparallaxe des Mondes unter Benutzung der in Aufgabe **48** gegebenen Entfernung (Erdradius: 6370 km)!

Schüleraufträge

1) Ermitteln Sie mit Hilfe eines Millimetermaßstabes den scheinbaren Durchmesser des Mondes!
   Berechnen Sie daraus den wahren Monddurchmesser, wenn die Entfernung Erde–Mond 384000 km beträgt!
2) Ermitteln Sie mit Hilfe eines Millimetermaßstabes die Breite des beleuchteten Teiles des Mondes (in Gradmaß angeben)!
3) Messen Sie mit Hilfe eines Millimetermaßstabes die gegenseitigen Abstände der Deichselsterne des Großen Wagens (im Gradmaß angeben)!

Aus verschiedenen Gebieten

50. In einem schiefwinkligen Dreieck wird der Winkel α nach dem Kosinussatz berechnet:
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$
Angenommen, a sei die größte Seite des zu berechnenden Dreiecks. In welchen Fällen ist α ein spitzer, ein stumpfer oder ein rechter Winkel?

51. Wie groß sind die Winkel, die die Diagonale mit den Seiten a_i bzw. b_i in der A-Reihe der Papierformate bildet?
Der Proportionalitätsfaktor ist $a_i : b_i = \sqrt{2}$.

52. a) Berechnen Sie den Radius des Breitenkreises, auf welchem Ihr Schulort liegt!
b) Welche (lineare) Bahngeschwindigkeit hat der Schulort infolge der Erdumdrehung?
c) Wie groß ist die Entfernung zwischen dem Schulort und einem auf demselben Breitenkreis liegenden Ort, dessen Meridian sich von dem des Schulorts um 1° unterscheidet?
d) Lösen Sie die Aufgabe **a** auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!
Die Erde ist näherungsweise als Kugel anzusehen; $R = 6370$ km.

53. Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h.
a) Leiten Sie Beziehungen her zur Bestimmung der Winkel
(1) zwischen Seitenkante und Grundfläche,
(2) zwischen Seitenkante und Grundkante,
(3) zwischen Seitenfläche und Grundfläche,
(4) zwischen zwei Seitenflächen, die in einer Seitenkante aneinanderstoßen!
b) Diskutieren Sie, ausgehend vom Fall $h = a$, an Hand der von Ihnen aufgestellten Beziehungen, wie sich die vier Winkel ändern, wenn die Höhe h größer (kleiner) wird! Welche Winkel ergeben sich aus den Beziehungen in den Grenzfällen, in denen die Pyramide in ein Prisma bzw. ein Quadrat übergeht?

c) Bestimmen Sie die vier Winkel für $a = 4$ cm, $h = 5{,}6$ cm
(1) darstellend-geometrisch, (2) trigonometrisch!

54. Eine gerade regelmäßige dreiseitige Pyramide ($a = 10$ cm; $h = 15$ cm) steht auf der Grundrißebene. Sie wird von einer Ebene geschnitten, die auf der Aufrißebene senkrecht steht und mit der Grundrißebene den Winkel ε bildet. Der Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide hat von der Achse den Abstand 10 cm, von der Grundrißspur der Ebene den Abstand 8 cm. Eine Grundkante der Pyramide verläuft parallel zur Grundrißspur der Ebene und ist dieser zugewandt. Bestimmen Sie die Seiten, Winkel und Flächeninhalte der Schnittfiguren darstellend-geometrisch und trigonometrisch für **a)** $\varepsilon = 30°$, **b)** $\varepsilon = 45°$!

55. In der standardisierten dimetrischen Projektion ergibt sich aus der Bedingung $q_1 = q_2 = 2q_3$ als Verkürzungsverhältnis $q_1 = q_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ und $q_3 = \frac{1}{3}\sqrt{2}$. Für die Achsenwinkel schreibt das Normblatt vor: $\alpha = \beta = 132°$; $\gamma = 97°$.
Leiten Sie mit Hilfe der Trigonometrie die Werte für $q_1 = q_2$ und q_3 her, und errechnen Sie die genauen Werte für $\alpha = \beta$ und für γ!

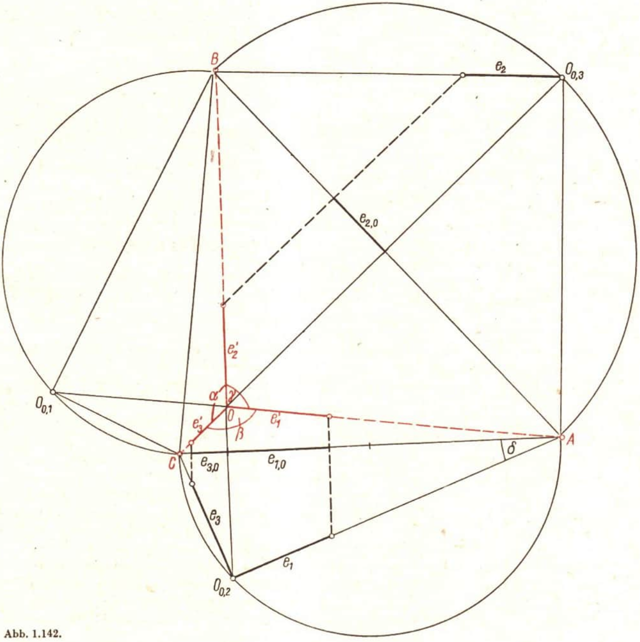


Abb. 1.142.

Anleitung: Das Spurdreieck ist gleichschenklig. Mit den umgelegten Seitenflächen der Dreibeinpyramide ergibt sich Abbildung 1.142. Bezeichnen Sie $\sphericalangle\, CAO_{0,2}$ mit δ, und drücken Sie auch $\sphericalangle\, ACO_{0,2}$ durch δ aus! Drücken Sie alle im Spurdreieck vorkommenden Winkel durch γ aus! Stellen Sie mit Hilfe von Winkelfunktionen für q_1, q_2 und q_3 Beziehungen auf!

$\left(\text{Beispiel: } q_1 = \frac{e_1'}{e_1} = \frac{e_1'}{e_{1,0}} : \frac{e_1}{e_{1,0}} = \frac{\cos\delta}{\sin\gamma}\right)$

Zusammen mit $q_1 = q_2$ und $q_2 = 2q_3$ ergeben sich fünf Gleichungen mit den fünf Unbekannten γ, δ, q_1, q_2, q_3.

Zur Lösung benötigen Sie einige goniometrische Formeln, die Sie aus dem Tafelwerk entnehmen können.

Schüleraufträge

1) Messen Sie in der beruflichen Grundausbildung Durchmesser und Mittelpunktsabstand von eventuell vorhandenen Riemenscheiben, und berechnen Sie die entsprechenden Riemenlängen!

2) Berechnen Sie die Arbeitszeit an der Bohrmaschine, wenn die Nebenzeit 36 % der Bohrzeit beträgt!

3) Messen Sie an einem Werkstück den Bohrdurchmesser und die Bohrtiefe! Entnehmen Sie die Schnittgeschwindigkeit und den Vorschub der Maschinenkarte, und berechnen Sie die Bohrzeit für einen Arbeitsgang!

4) Lesen Sie an einem Motor ab, wieviel PS er leistet!
Rechnen Sie die Leistung des Motors in kW um, und berechnen Sie bei Vollast die Kosten je Schicht!

5) Ein zylindrisches Gegengewicht soll aus konstruktiven Gründen in seiner Höhe um die Hälfte verkleinert werden.
Berechnen Sie den neuen Durchmesser, wenn das Volumen desselben konstant bleiben soll!

6) Am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion nehmen Sie in der RTS-Werkstatt mit Ihrem Betreuer am Traktor einen Motorenwechsel vor. Bei der Generalüberholung des Motors wurde das Maß der Zylinderdurchmesser um 1 mm erweitert.
   a) Berechnen Sie die Vergrößerung des Hubraumes!
   b) Stellen Sie die prozentuale Leistungssteigerung und den Kraftstoffverbrauch fest!

7) Berechnen Sie den Kolbenhub eines Ackerschleppers! Messen Sie die Drehzahl des Motors je Minute mit einem Tourenzähler, und entnehmen Sie den Wert für die mittlere Kolbengeschwindigkeit dem Typenkatalog!
Überprüfen Sie, ob das Ergebnis Ihrer Rechnung mit den Angaben der technischen Daten übereinstimmt!

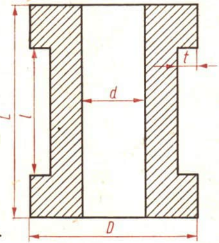


Abb. 1.143.

8) Am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion haben Sie die Drehzahl von einem Traktormotor zu berechnen. Den Kurbelradius und die mittlere Kolbengeschwindigkeit entnehmen Sie den technischen Daten des Typenkatalogs. Vergleichen Sie Ihre Rechnung mit den angegebenen Werten!

9) Am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion tauschen Sie mit Ihrem Betreuer ein Rotgußgleitlager aus. Das neue Lager besteht aus Kunstharz (Abb. 1.143.).
   a) Um wieviel Gramm verringert sich durch den Austausch des Rotgußgleitlagers gegen ein Lager aus Kunstharz die Masse?
   b) Berechnen Sie die prozentuale Masseeinsparung!

1.12. Zur Geschichte der Trigonometrie

Im Laufe einer langen Zeit ist die Trigonometrie in mühevoller Gedankenarbeit aus der gesellschaftlichen Praxis heraus entwickelt worden.
Vor 4000 Jahren stand die Geometrie im alten Ägypten auf einer schon recht beachtlichen Höhe. Sie war aus der Notwendigkeit heraus entstanden, die durch jährliche Nilüberschwemmungen unkenntlich gewordenen Feldergrenzen jedesmal neu zu vermessen. Die Knotenleine mit Abschnitten von drei, vier und fünf Einheiten war ein wichtiges Hilfsmittel für die Vermessungsarbeiten. Besonders eindruckvolle Zeugen

Abb. 1.144. Pyramide und Totentempel des MYKERIMOS (um 2600 v. u. Z.)

für den hohen Stand der Ingenieurkunst jener Zeit sind die Pyramiden, die Grabstätten der ägyptischen Könige, deren Bau Hunderttausenden von Sklaven und mit Gewalt zur Arbeit getriebenen Bauern das Leben kostete. Sämtliche Pyramiden weisen übereinstimmende Merkmale auf, woraus auf ein planvolles Arbeiten und hervorragendes meßtechnisches Können geschlossen werden kann. So sind die Seitenflächen der Pyramiden im allgemeinen mit einem Winkel von 52° zur Grundfläche geneigt. Außerdem sind die Pyramiden recht genau nach den Himmelsrichtungen orientiert, und die Kantenlängen ihrer quadratischen Grundflächen weichen nur um einige 10 Zentimeter voneinander ab, obwohl z. B. die größte Pyramide, die um 2680 v. u. Z. gebaute sogenannte Cheops-Pyramide, eine Seitenlänge von 227,5 m bei einer Höhe von 146,6 m besaß.
Unter den erhaltenen Schriftstücken des alten Ägyptens befinden sich auch einige mathematischen Inhalts. In einem in Moskau aufbewahrten mathematischen Papyrus wird z. B. die Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit quadratischen Deckflächen völlig richtig vorgenommen; dieser mathematische Körper trat als Teil

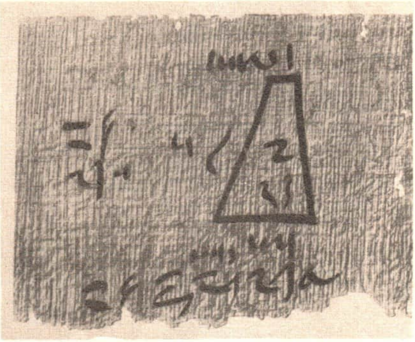


Abb. 1.145. Originaltext der Pyramidenstumpfaufgabe des Moskauer Papyrus

der Verkleidung der Pyramiden auf. Aus den mathematischen Papyri geht auch hervor, daß feste Fachausdrücke für den Begriff Winkel und für das Verhältnis von Seitenlängen an Pyramiden existierten, d. h. die ersten Vorstufen trigonometrischer Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.

Auch bei den Chinesen, einem der ältesten Kulturvölker, reichen die geometrischen Kenntnisse, darunter auch trigonometrische, weit zurück. Schon um 1100 v. u. Z. wurden rechte Winkel mit Hilfe des Zahlentripels 3; 4; 5 abgesteckt, Höhen durch Messen der Schattenlänge bestimmt sowie Tiefen- und Entfernungsbestimmungen mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke vorgenommen. Leider sind unsere Kenntnisse über die frühe chinesische Mathematik recht gering, da ein chinesischer Kaiser im Jahre 213 v. u. Z. alle schriftlichen Aufzeichnungen verbrennen ließ.

Nur ganz wenige Dokumente sind dieser Zerstörung entgangen.

Die babylonische Mathematik stand im Vergleich zu der ägyptischen Mathematik auf einem wesentlich höheren Niveau. Dies betrifft insbesondere die Algebra, aber auch die Geometrie und Trigonometrie. Tontäfelchen mit Keilschrifttexten überliefern uns mathematische Probleme aus einer etwa 5000 Jahre zurückliegenden Zeit. Bewässerungskanäle mußten gebaut werden, denn in Mesopotamien, dem Gebiet zwischen Euphrat und Tigris, war Ackerbau nur bei künstlicher Bewässerung möglich. So wurden für die erforderlichen Dämme die Neigung der Böschung und die Breite der Dammkrone berechnet. Daher spielte in den Rechnungen ein

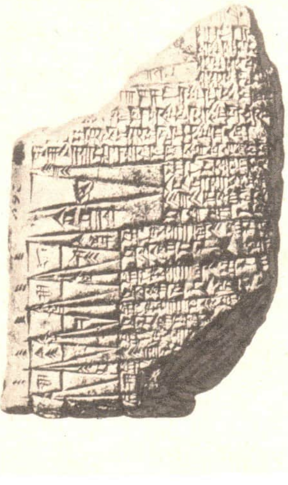


Abb. 1.146. Babylonische Keilschrifttafel mit Dreiecksberechnungen

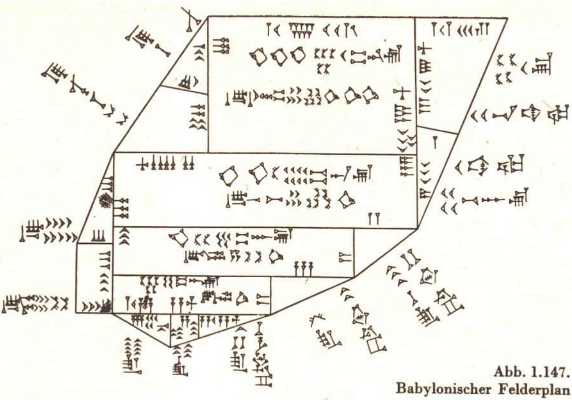


Abb. 1.147.
Babylonischer Felderplan

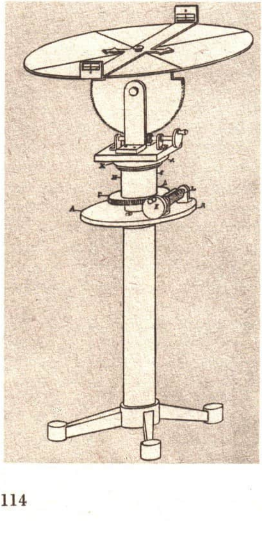
solches Verhältnis von Seitenlängen eine große Rolle, das auf den Kotangens hinausläuft und das als „Böschungswert" bezeichnet wurde. Derartige Probleme aus der Praxis führten auch zu tiefen theoretischen Einsichten. Die Proportionalität der entsprechenden Seiten in ähnlichen Dreiecken wurde erkannt und der Satz des PYTHAGORAS aufgestellt. Eine enge Verknüpfung der babylonischen Mathematik bestand mit der Astronomie. Von riesigen, zu Tempelanlagen gehörenden Türmen beobachtete man den Himmel und glaubte, aus dem Lauf der Planeten z. B. Anzeichen kommender Dürren oder den Ausgang eines geplanten Kriegszuges ablesen zu können. Auch der berühmte Turmbau von Babel war eine solche „Sternwarte". Zwar wurde die babylonische Astronomie immer stärker mit Aberglauben durchsetzt, d. h., sie wurde vielfach zur Astrologie; aber auch echte astronomische Kenntnisse wurden gewonnen. Über viele Jahrhunderte hinweg fortgesetzte Beobachtungen zeigten die Periodizität der Himmelserscheinungen sowie die regelmäßige Wiederkehr von Sonnen- und Mondfinsternissen und des Zusammentreffens von Planeten in bestimmten Tierkreiszeichen usw. Es sind sogar Zahlentabellen erhalten geblieben, die bei der Berechnung periodischer astronomischer Vorgänge verwendet wurden. Wenn man diese Zahlenwerte — was die damaligen Astronomen natürlich noch nicht taten — in ein Koordinatensystem überträgt, so erhält man ganz deutlich das Bild einer Sinuskurve.

Ungefähr 1000 Jahre vor Beginn unserer Zeitrechnung boten nicht mehr die Binnenländer wie Ägypten und Mesopotamien die günstigsten Entwicklungsbedingungen für Wirtschaft, Handel und Wissenschaft, sondern in Verbindung mit der Entwicklung des Schiffsbaues die Küstenländer. Daher wurden die in Griechenland, auf den ägäischen Inseln und in Kleinasien ansässigen griechischen Stämme um die Mitte des 1. Jahrtausends v. u. Z. für den Raum des östlichen Mittelmeeres politisch, ökonomisch und auch auf dem Gebiete der Wissenschaft bestimmend.

Die griechische Mathematik verdankt ihren engen Beziehungen zu Mesopotamien

und Ägypten sehr viel. Ergebnisse wissenschaftlicher Arbeit wurden übernommen und Anregungen für neue Erkenntnisse empfangen. THALES VON MILET (624 ?–548 ? v. u. Z.) soll die Höhe der Pyramiden dadurch bestimmt haben, daß er ihre Schattenlänge in dem Augenblick maß, als sein eigener Schatten genauso groß war wie er selbst. In Milet bestimmte er, ebenfalls mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, die Entfernung der Schiffe vom Hafen. Von Babylonien wurden auch die Sonnenuhr, die Zeiteinteilung und der Gnomon übernommen. Der Gnomon, das älteste astronomische Instrument, diente zur Bestimmung der Südrichtung. Ein senkrecht stehender Stab wirft auf eine waagerechte Ebene seinen Schatten und ermöglicht so die Messung der jeweiligen Schattenlänge, die sich bis Mittag verkürzt und dann wieder länger wird. Die Winkelhalbierende jedes Winkels, der von paarweise gleich langen Schatten gebildet wird, erstreckt sich in der Nord-Süd-Richtung. Darüber hinaus ermöglicht der Gnomon die Messung der Sonnenhöhe aus der Länge des Stabes und seines Schattens, was auf den Tangens des Höhenwinkels führt.
Die griechische Mathematik erreichte später eine erstaunliche Höhe. Aber sie geriet mehr und mehr unter den Einfluß der idealistischen Philosophie, insbesondere der Schule PLATONS. Dadurch riß die Verbindung der Mathematik zur Praxis ab. Ja, man hielt es nicht einmal mehr für nötig, die Methoden der praktischen Mathematik, wozu Trigonometrie und Feldmeßkunst gehören, schriftlich niederzulegen. In der Sklavenhaltergesellschaft galt jede praktische Tätigkeit, sogar die des bildenden Künstlers, trotz der Vorliebe der griechischen Sklavenhalter für Skulpturen, als minderwertig.

Abb. 1.148. Diopter
nach der Beschreibung von HERON



Andererseits kann man aus erhalten gebliebenen Bauwerken der griechischen und römischen Antike ersehen, daß die damaligen Ingenieure ein bedeutendes Wissen, auch auf dem Gebiet der praktischen Geometrie, besessen haben. So wurde z. B. um 530 v. u. Z. zur Wasserversorgung der Stadt Samos unter dem Baumeister EUPALINOS ein 1 km langer geneigter Tunnel durch einen Berg gebohrt. Der Stollen wurde von den beiden Eingängen aus vorgetrieben, und die beiden Seiten verfehlten einander nur um 3 Meter: eine Glanzleistung. Später hat HERON VON ALEXANDRIA (um 100 u. Z.) auch die feldmesserischen

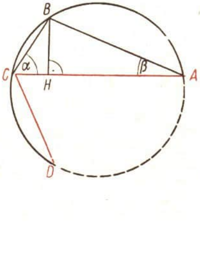


Abb. 1.149.

Geräte beschrieben, insbesondere den sog. Diopter (Sehrohr). Es handelt sich sozusagen um einen Theodoliten, natürlich noch ohne Fernrohr. Mit Zahnrädern und Schrauben war er in zwei zueinander senkrechten Ebenen verstellbar. Um Höhenunterschiede zu messen, wurde das Gelände genau wie heute mit Meßlatten abgesteckt. Außerordentlich wichtig für den späteren Aufbau einer systematischen Trigonometrie waren Beiträge von ARCHIMEDES (287 ?–212 v. u. Z.), dem bedeutendsten Mathematiker des Altertums. Er gab einen Satz an, der später als *Prämisse des Archimedes* bezeichnet wurde (Abb. 1.149.):

Es sei B der Mittelpunkt eines Kreisbogens $\widehat{AD}$. Fällt man von B auf einen beliebig in den Kreis gelegten Sehnenzug ACD das Lot auf $\overline{AC}$, so halbiert der Fußpunkt H den Sehnenzug; d. h., es ist $\overline{AH} = \overline{HC} + \overline{CD}$.

Dieses Ergebnis entspricht dem Additionstheorem:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta .$$

Als in den letzten Jahrhunderten vor unserer Zeitrechnung Großreiche und später das römische Weltreich entstanden, stiegen die Anforderungen an die Landvermesser. Diese Vermessungen erforderten verbesserte astronomische Kenntnisse. Die astronomische Forschung erhielt so neue Impulse. In Verbindung damit machte auch die Trigonometrie, das wichtigste mathematische Hilfsmittel der Astronomie, Fortschritte.

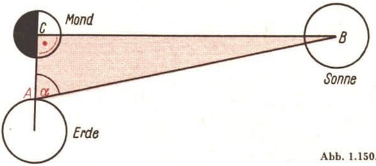


Abb. 1.150.

ARISTARCHOS (um 270 v. u. Z.) versuchte auf trigonometrischem Wege, das Verhältnis der Entfernungen Erde—Mond und Erde—Sonne zu bestimmen, indem er den Winkel α zwischen Mond, Erde und Sonne bei Halbmond maß, wenn also bei C ein rechter Winkel auftritt (Abb. 1.150.). Da er aber α wegen der mangelhaften Instrumente nicht genau bestimmen konnte, erhielt er für dieses Verhältnis nur 1:19 und nicht den richtigen Wert 1:370. HIPPARCHOS (180 ?–125 ? v. u. Z.) berechnete eine Sehnentafel, d. h. eine Tafel der Sehnenlängen bei wachsendem Bogen, und MENELAOS (um 100 u. Z.) entwickelte wichtige Sätze für trigonometrische Berechnungen auf der Kugelfläche. Schließlich faßte PTOLEMAIOS VON ALEXANDRIA (85 ?–165 ? u. Z.) alle früheren Ansätze und Methoden der Astronomie in einer Darstellung des geozentrischen Weltbildes zusammen, einem Buch mit dem Titel *Die Große Zusammenstellung*. Die Araber verstümmelten später den griechischen Titel zu *Almagest*. Seinen astronomischen Beschreibungen schickte PTOLEMAIOS eine ausführliche Darlegung der Trigonometrie in der Ebene und auf der Kugelfläche voraus; erst dann lehrte er, wie man trigonometrische Kenntnisse in der Astronomie verwendet. Da PTOLEMAIOS weder den Sinussatz noch den Kosinussatz kannte, zerlegte er beliebige Dreiecke in zwei rechtwinklige Dreiecke. Es handelte sich um eine Sehnentrigonometrie. Man rechnete mit der Länge der zu einem Winkel gehörenden Sehne. Also ist $\overline{AC}$ gleich ch $(2\,\alpha)$[1], wenn ch $(2\,\alpha)$ die zum Bogen $2\,\alpha$ gehörende Sehne bedeutet. Der Zusammenhang zwischen der umständlicheren Sehnentrigonometrie

[1] ch ist eine Abkürzung des Wortes chorda (lat.) Sehne.

und der heutigen Trigonometrie wird durch $\sin\alpha = \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\,(2\,\alpha)$ geliefert, wenn der Radius des Kreises gleich 1 gesetzt ist.

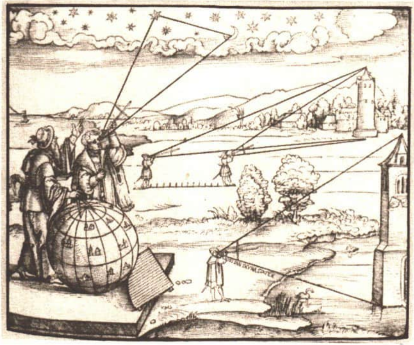
Die Umwandlung der Trigonometrie unter Verwendung der Seitenverhältnisse Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens, Sekans und Kosekans am rechtwinkligen Dreieck wurde von den arabischen Gelehrten im 9. Jahrhundert vollzogen. Der *Almagest* war schon 833 ins Arabische übersetzt worden. Während in Europa durch den kulturfeindlichen Einfluß der christlichen Kirche auch die Wissenschaften daniederlagen, blühte die arabische Kultur auf. Noch heute spiegeln die *Märchen aus 1001 Nacht* jene glanzvolle Zeit wider.

Auch die Mathematik, insbesondere Algebra und Trigonometrie, erfuhren eine bedeutende Förderung. TÂBIT IBN QURRA (826–901) fand den Sinussatz am rechtwinkligen Kugeldreieck. Unter dem Einfluß des großen Astronomen AL-BATTÂNI (850?–929) entschied man sich endgültig für die Sinus-Trigonometrie. ABÛ NAṢR (um 1000) fand den Sinussatz der ebenen Trigonometrie. Das ganze nun geschlossene Lehrgebäude der Trigonometrie wurde schließlich von AT-TÛSÍ (1201–1274) erstmals zusammengefaßt. Auch umfangreiche astronomische und trigonometrische Tafeln wurden berechnet; z. B. tabulierte ULÛĠ BEG (1393–1449) die trigonometrischen Funktionen mit einer Genauigkeit von 17 Dezimalen. Die indische Trigonometrie und Astronomie standen auf einem ähnlich hohen Niveau.

Diese großartigen trigonometrischen Kenntnisse gelangten aber nur zu einem ganz geringen Teil nach Europa, so daß man dort noch einmal von vorn anfangen mußte.

Erst im 15. Jahrhundert konnte die europäische Mathematik wenigstens in Teilen die antike Mathematik erreichen und übertreffen. Die neuen Ergebnisse wurden erzielt, weil das gesellschaftliche Leben Probleme aufwarf, deren Lösung auch den Einsatz neuer mathematischer Methoden erforderte. Dies betraf auch die Trigonometrie. Im Schoße der Feudalgesellschaft wuchs eine neue Klasse, die Bourgeoisie, heran. Sie war an der Förderung des Handels interessiert, sie betrieb in ihrem eigenen politischen und ökonomischen Interesse die Kolonisierung, die Erschließung neuer, in Übersee gelegener Märkte. Man fand den Seeweg nach Indien, und man entdeckte einen neuen Erdteil. Der Handel nach Übersee warf ungeheure Profite ab. Die Navigation auf hoher See erfordert aber ein bedeutendes Maß astronomischer und trigonometrischer Kenntnisse.

Abb. 1.151. Verwendung des von dem jüdischen Gelehrten LEVI BEN GURSON (1288–1344) erfundenen sog. Jakobstabes zur Winkelmessung. – Aus dem Titelblatt einer Abhandlung (1533) von P. APIAN



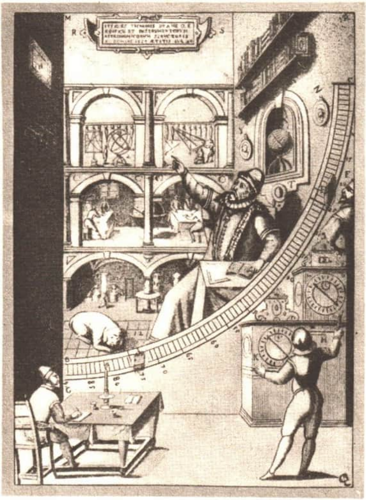
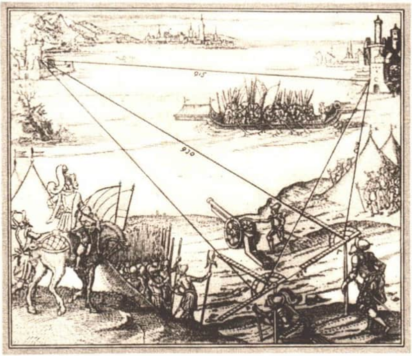


Abb. 1.152.

Mauerquadrant (gemauerter Viertelkreis mit Winkelteilung). Die Sternhöhe kann gemessen werden, indem der Beobachter durch einen Spalt (links oben) den Stern anvisiert. – Die Darstellung zeigt den dänischen Astronomen TYCHO BRAHE bei Messungen auf seiner Sternwarte in Uraniborg

Auch die Astronomie stellte an die Trigonometrie hohe Anforderungen. Indem man mit verbesserten astronomischen Instrumenten, dem Jakobstab und dem Mauerquadranten, genaue Messungen am Himmel anstellte, bemerkte man, daß das ptolemäische geozentrische Weltbild nicht richtig sein konnte. Den entscheidenden Schritt, der eine wissenschaftliche Großtat ersten Ranges darstellt, vollzog der polnische Gelehrte NIKOLAUS KOPERNIKUS (1473–1543). In seinem Todesjahr erschien sein wissenschaftliches Hauptwerk *De revolutionibus orbium coelesticum* (d. i. *Über die Umdrehungen der Himmelskörper*), in dem das heliozentrische Weltbild begründet wurde. Freilich erst in einem erbitterten opferreichen Kampf gegen die Kirche – G. BRUNO wurde verbrannt, G. GALILEI wurde bis zu seinem Tode

Abb. 1.153.



Militärisches Vermessungswesen – Abbildung aus L. ZUBLERS *Kurzem Bericht von den neuen geometrischen Instrumenten*, 1602

Abb. 1.154.
REGIOMONTAN (1436–1476)

von der Inquisition gefangengehalten — konnte der Wahrheit zum Siege verholfen werden.

Auch die Ausrüstung der Heere mit Kanonen machte die Entwicklung des Vermessungswesens und damit der Trigonometrie dringend notwendig. Ein Kanonenschuß war um die damalige Zeit so außerordentlich teuer, daß die Geschütze sorgfältig gerichtet werden mußten. Dazu bedurfte es genauer Entfernungsbestimmungen im Gelände. Von hier aus wurde das Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten entwickelt.

Auf Grund dieser und noch anderer praktischer Anforderungen entwickelte sich die Trigonometrie im 15., 16. und 17. Jahrhundert rasch. Schon JOHANNES VON GMUNDEN (1380?–1442), Magister an der Universität Wien, und sein Nachfolger GEORG VON PEURBACH (1423–1461) beschäftigten sich mit der Neuberechnung erweiterter trigonometrischer Tafeln. Dieses umfangreiche Werk vollbrachte schließlich REGIOMONTAN (1436–1476). Von ihm stammen Sinustafeln, die von Minute zu Minute fortschreiten, sowie eine gradweise fortschreitende Tangententafel.

REGIOMONTAN war ohne Zweifel der führende europäische Mathematiker seiner Zeit. In seinem allerdings erst im Jahre 1533 gedruckten Werk *De triangulis omnimodis libri quinque* (Fünf Bücher über alle Dreiecke) faßte REGIOMONTAN alle vorhandenen trigonometrischen Verfahren, Sätze und Hilfstabellen zur Trigonometrie zusammen. Dort wird der Sinussatz ausführlich verwendet und zum erstenmal der Kosinussatz ausgesprochen. Durch REGIOMONTAN war nun auch in Europa die Trigonometrie zu einer einheitlichen Wissen-

Abb. 1.155.

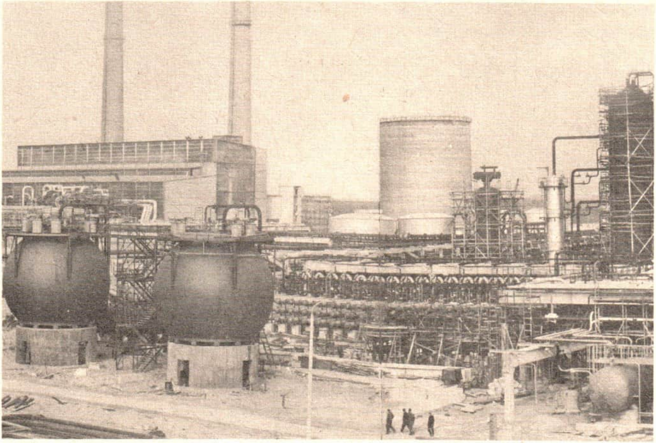
Tuschzeichnung aus dem 17. Jahrh. in einer japanischen Darstellung trigonometrischer Verfahren. Ein Beispiel für die als Ergebnis praktischer Anforderungen entwickelte Trigonometrie anderer Länder schaft geworden. Dem mathematischen Inhalt nach hatte sie schon damals das heutige Niveau erreicht.

In der Folgezeit wurden die Tafeln noch wesentlich verbessert, so durch den Wittenberger Mathematiker RHAETICUS (1514–1576), den Franzosen VIETA (1540–1603) und den großen Astronomen JOHANNES KEPLER (1571–1630). Seit KEPLER wurden auch die Methoden des logarithmischen Rechnens in der Trigonometrie verwendet.

Die heute verwendeten Bezeichnungen in der Trigonometrie sind freilich erst in späterer Zeit eingeführt worden. Im wesentlichen haben sich die von dem genialen schweizerischen Mathematiker LEONHARD EULER (1707–1783) verwendeten Bezeichnungen durchgesetzt: π als Maßzahl des Einheitshalbkreises, e für 2,718..., a, b, c für die Dreiecksseiten, die Symbole sin, cos, tan für die trigonometrischen Funktionen.

Abb. 1.156.
LEONHARD EULER (1707–1783)

Von den großen Mathematikern und Geodäten des 18. und 19. Jahrhunderts wurde die Trigonometrie als Hilfsmittel der Erdvermessung weiter ausgebaut. So konnte z. B. der Franzose P. L. M. DE MAUPERTUIS (1698–1759) durch Messung eines Längenkreises die Abplattung der Erde an den Polen nachweisen. Neu entdeckte Länder wurden in allen Einzelheiten kartographisch aufgenommen. Der größte deutsche Mathematiker, C. F. GAUSS (1777–1855), entwickelte schließlich noch die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate, mit der es möglich ist, sich in den Schlußberechnungen weitgehend von den unweigerlich auftretenden Beobachtungsfehlern frei zu machen.



2. Körperberechnung

In Schwedt an der Oder endet ein Zweig der rund 4200 km langen Pipeline „Freundschaft", durch die Erdölverarbeitungswerke in der Volksrepublik Polen, der Ungarischen Volksrepublik, der Tschechoslowakischen Sozialistischen Republik und der Deutschen Demokratischen Republik mit sowjetischem Erdöl aus dem Gebiet von Kuibyschew versorgt werden. Wo vor wenigen Jahren noch Kiefernwald und Heide waren, erheben sich nun die Anlagen eines der jüngsten Industriegiganten unserer Republik. Ein System von Rohrleitungen verbindet das Tanklager, die Erdölaufbereitungsanlagen, die Destillationskolonnen und andere Teile dieser großen Erdölraffinerie miteinander. Das Bild vom Bau des Werkes läßt schon die Kugelbehälter, in denen das Erdöl entsalzt und entwässert werden wird, Kühltürme, zylindrische Tanks und Teile der Destillationskolonnen erkennen.
Viele Überlegungen und viele Berechnungen waren für die Projektierung des Werkes erforderlich. Jeder Behälter, jeder Kessel, jede Rohrleitung ist in seiner Größe, seiner Belastbarkeit, seiner Materialzusammensetzung der gesamten Anlage angepaßt. Hierzu ist es erforderlich, daß man von den verschiedenartigen Körpern das Volumen, den Oberflächeninhalt, die Höhe und andere Größen berechnen kann.

2.1. Grundbegriffe

Ein Gegenstand, z. B. ein Ziegelstein, füllt einen Raum aus, der von allen Seiten begrenzt ist. Ein allseitig begrenzter Teil des Raumes heißt Körper. Sieht man von den stofflichen Eigenschaften, Masse, Farbe usw., ab und berücksichtigt man nur seine Größe, Gestalt und Lage, dann spricht man von einem **mathematischen** oder **geometrischen Körper** zum Unterschied von den entsprechend gestalteten körperlichen Gegenständen unserer Umwelt. Der geometrische Körper ist also eine **Abstraktion,** das heißt, er ist nicht mit unseren Sinnen wahrnehmbar, sondern nur in unserer Vorstellung vorhanden. Abstraktion ist Grundlage jeder wissenschaftlichen Tätigkeit. Sie vermittelt Vorstellungen, die nicht anschaulich, sondern nur begrifflich zu erfassen sind. Mit ihrer Hilfe können aus der sinnlich wahrgenommenen Mannigfaltigkeit der konkreten Erscheinungen durch gedankliche Zusammenfassung wesentlicher Merkmale Begriffe von umfassenderer Allgemeinheit gebildet werden.

Betrachtet man den Ziegelstein als geometrischen Körper, so kann man feststellen: Der Ziegelstein hat drei **Ausdehnungen** oder **Dimensionen,** nämlich Länge, Breite und Höhe. Dagegen haben Flächen (in einer Ebene) nur zwei Ausdehnungen, Länge und Breite, und Strecken lediglich eine, die Länge. Man nennt deshalb Körper auch dreidimensionale, Flächen zweidimensionale und Strecken eindimensionale geometrische Gebilde.

Körper, Flächen und Strecken sind teilbar. Punkte haben keine Ausdehnung, sie sind dimensionslos und unterscheiden sich nur durch ihre Lage.

Sind mathematische Körper nur von ebenen Flächen begrenzt, so heißen sie **ebenflächige Körper, Vielflächner** oder **Polyeder.** Dazu gehören z. B. das Prisma mit seinen Spezialfällen Quader und Würfel sowie die Pyramide. Die den Polyeder begrenzenden Vieleckflächen (Polygone) heißen in ihrer Gesamtheit die **Oberfläche** A_O des Körpers. Strecken, in denen je zwei Seitenflächen zusammenstoßen, heißen **Kanten**, ihre Endpunkte **Ecken** des Körpers.

Setzt sich die Oberfläche ganz oder nur teilweise aus gekrümmten Flächen zusammen, dann liegen **krummflächige Körper** vor. Die bekanntesten davon sind die Kugel, der Zylinder und der Kegel.

Wenn man den von der Oberfläche eines Körpers eingeschlossenen Raum mißt, so erhält man den **Rauminhalt** oder das **Volumen** V des betreffenden Körpers. Zur Feststellung des Volumens und des Oberflächeninhalts eines bestimmten Körpers werden vergleichende Betrachtungen mit den Raum- bzw. Flächeneinheiten angestellt.

2.2. Prismen

Die in der Technik am häufigsten vorkommenden ebenflächigen Werkstücke sind oft prismatische Körper. Sie finden in der Industrie als Halbzeuge und Maschinenteile, im Bauwesen als Balken, Träger, kantige Säulen, Keile usw. Verwendung. In den Abbildungen 2.1. bis 2.7. sind Beispiele für Prismen dargestellt. Alle haben einige Eigenschaften gemeinsam: Grund- und Deckfläche sind Vieleckflächen von gleicher Form und gleicher Größe. Sie liegen zueinander parallel. Die anderen Begrenzungsflächen sind Parallelogrammflächen.

Definition:

Ein Prisma ist ein Körper, der von zwei in parallelen Ebenen liegenden kongruenten Vieleckflächen (Grund- bzw. Deckfläche) und von Parallelogrammflächen (Seitenflächen) begrenzt wird.

Sind die Grundflächen drei-, vier-, fünf-, ..., n-Eckflächen, dann spricht man von drei-, vier-, fünf-, ..., n-seitigen Prismen. Die Prismen brauchen dabei keineswegs immer auf der Grundfläche zu stehen. Sie können, wie in den Abbildungen 2.6. und

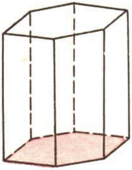


Abb. 2.1.

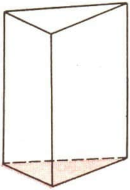


Abb. 2.2.

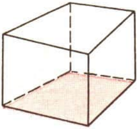


Abb. 2.3.

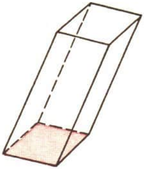


Abb. 2.4.

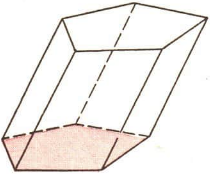


Abb. 2.5.

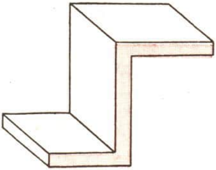


Abb. 2.6.

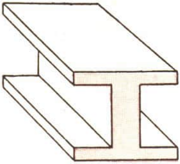


Abb. 2.7.

2.7., auch auf einer Seitenfläche liegen; denn die Gestalt eines Körpers hängt nicht von seiner Lage im Raum ab. Paarweise parallel verlaufende Kanten eines Prismas sind stets gleich lang (Abb. 2.8.).

Prismen mit regelmäßigen Vieleckflächen als Grundflächen nennt man **regelmäßige Prismen** (Abb. 2.1., 2.4. und 2.5.). Dagegen sind die Prismen in den Abbildungen 2.2., 2.3., 2.6. und 2.7. **unregelmäßige Prismen.**

Wenn die Seitenkanten mit den Grundflächen und damit auch mit den Grundkanten rechte Winkel bilden, spricht man von geraden Prismen, in allen anderen Fällen von schiefen Prismen.

Welche besonderen Eigenschaften haben die Seitenflächen bei einem geraden Prisma im Vergleich mit einem schiefen?

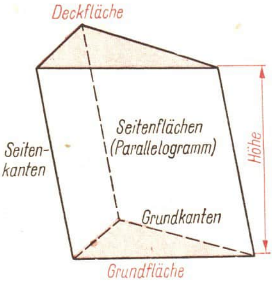


Abb. 2.8.

Der Abstand der Grund- von der Deckfläche wird als **Höhe** des Prismas bezeichnet. Beim geraden Prisma ist die Höhe gleich der Seitenkante, beim schiefen Prisma ist sie kleiner als die Seitenkante (Abb. 2.8.).

Alle Seitenflächen zusammen ergeben den **Mantel.** Jede auf den Seitenflächen parallel zu den Seitenkanten verlaufende Strecke wird **Mantellinie** des Prismas genannt.

Die Gesamtheit aller Begrenzungsflächen bildet die **Oberfläche** des Prismas.

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundfläche und der Deckfläche eines regelmäßigen Prismas heißt die **Achse** des Körpers. Jede Schnittfigur, die eine Seitenkante und die Körperachse eines regelmäßigen Prismas enthält, ist ein Parallelogramm. Einen solchen Schnitt bezeichnet man als **Achsenschnitt.** In Abbildung 2.9. ist ein Achsenschnitt an einem regelmäßigen sechsseitigen Prisma in wahrer Größe und Gestalt dargestellt.

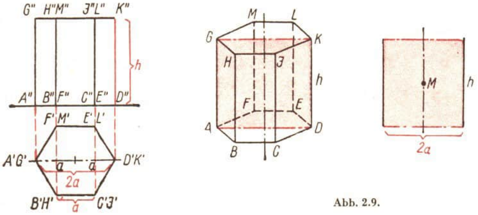


Abb. 2.9.

Erklären Sie die Streckenbezeichnungen des Schnittes!

Wird ein gerades Prisma senkrecht zur Grundfläche von Ebenen geschnitten, so entstehen als Schnittfiguren stets Rechtecke (Abb. 2.10.). Je nach Lage des Schnittes sind diese Rechtecke verschieden groß.

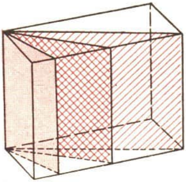


Abb. 2.10.

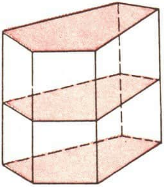


Abb. 2.11.

Wird ein Prisma parallel zur Grundfläche von Ebenen geschnitten, so hat jede Schnittfläche die gleiche Größe und Gestalt wie die Grundfläche (Abb. 2.11.).
Sind in einem Prisma die Grund- und Deckfläche Parallelogramme, so besteht der Mantel aus vier Parallelogrammen, und zwar liegen in jedem Fall die gegenüberliegenden Flächen parallel, und sie sind kongruent. Ein derartiges Prisma heißt **Parallelepiped.**
Ein spezielles Parallelepiped ist der **Quader.** Ein Quader ist ein Körper, der von zwei in parallelen Ebenen liegenden kongruenten Rechtecken (Grund- bzw. Deckfläche) und von vier Rechtecken (Seitenflächen) begrenzt wird.
Für einen Quader treffen also alle Bedingungen zu, die an ein Prisma und die an ein Parallelepiped gestellt werden, und darüber hinaus noch die, daß es sich bei den sechs Begrenzungsflächen um Rechtecke handelt. Es muß also ein gerades Prisma sein. Mit Hilfe des Begriffs Prisma läßt sich die Erklärung des Quaders kürzer fassen:

Definition:
Ein Quader ist ein Prisma, das von sechs Rechtecken begrenzt wird.

Ein spezieller Quader ist der **Würfel** (Abb. 2.12.), von dem als zusätzliche Eigenschaft gefordert wird, daß die Begrenzungsflächen sechs Quadrate sind.

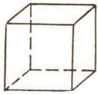


Abb. 2.12.

Definition:
Ein Würfel ist ein Prisma, das von sechs Quadraten begrenzt wird.

Die folgende Übersicht charakterisiert noch einmal die prismatischen Körper:

Prisma:	Zwei Begrenzungsflächen liegen in parallelen Ebenen und sind kongruente Vielecke (Grund- und Deckfläche). Die übrigen Begrenzungsflächen (Seitenflächen) sind Parallelogramme, im n-seitigen Prisma n Parallelogramme.
Zusätzliche Eigenschaft:	
Parallelepiped:	Die Grund- und Deckfläche sowie die Seitenflächen sind Parallelogramme.
Quader:	Die Grund- und Deckfläche sowie die Seitenflächen sind Rechtecke.
Würfel:	Die Grund- und Deckfläche sowie die Seitenflächen sind Quadrate.

2.3. Berechnungen an Prismen

Würfel

Verbindet man die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Würfelflächen durch eine Gerade und dreht den Würfel um diese Verbindungsgerade als Körperachse, so kommt er bei gewissen Drehwinkeln mit sich selbst zur Deckung. Körper, die bei Drehung um eine feste Achse in sich transformiert werden, heißen **achsensymmetrisch** (auch **axialsymmetrisch**). Die Drehachse nennt man **Symmetrieachse** des Körpers.

a) Wieviel Symmetrieachsen hat der Würfel?

b) Wie oft kommt der Würfel bei einer vollen Umdrehung um eine Symmetrieachse mit sich selbst zur Deckung?

Außer der axialen Symmetrie tritt beim Würfel auch zentrale Symmetrie auf. Ein Körper heißt **zentrischsymmetrisch** (auch **zentralsymmetrisch**) zu einem Punkt M, wenn man jedem Punkt P des Körpers einen Punkt P' desselben Körpers so zuordnen kann, daß die Verbindungsgerade PP' durch M geht und $\overline{MP}$ gleich $\overline{MP'}$ ist. Das Drehzentrum der Transformation heißt **Symmetriezentrum** des Körpers. Ein zentralsymmetrisches Gebilde kann nur ein Symmetriezentrum haben.

a) Geben Sie das Symmetriezentrum des Würfels an!

b) Geben Sie Beispiele für ebene und räumliche Gebilde, die sowohl axial- als auch zentralsymmetrisch sind!

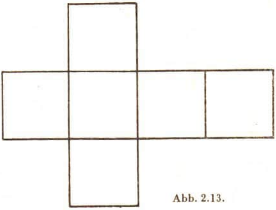


Abb. 2.13.

Klappt man sämtliche Begrenzungsflächen eines Würfels in die Zeichenebene um, so entsteht das **Netz** des Würfels (Abb. 2.13.).
Als Netz eines Körpers bezeichnet man seine in eine Ebene ausgebreitete Oberfläche, aus der durch Zusammenfalten das Flächenmodell des Körpers hergestellt werden kann. Das Ausbreiten der Seitenflächen in eine Ebene, das auch Abwickeln genannt wird, ist stets möglich, wenn alle Flächen eben sind. Man kann also alle ebenflächig begrenzten Körper abwickeln. Dagegen können nicht alle krummflächig begrenzten Körper abgewickelt werden. Die Formel für den Oberflächeninhalt wird durch das Körpernetz veranschaulicht. Mit der Quadratseite a ist der

Oberflächeninhalt des Würfels: $A_O = 6\,a^2$.

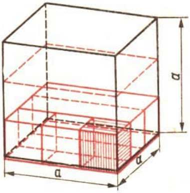


Abb. 2.14.

Die Volumenformel ergibt sich aus dem Würfelmodell (Abb. 2.14.) auf folgende Weise: Mißt die Kantenlänge eines Würfels a Längeneinheiten, so kann man a Raummaßeinheiten in einer Reihe entlang der Würfelkante auf die Grundfläche des Würfels legen, sie bilden einen Stab. Die ganze Grundfläche des Würfels wird dann von a Stäben bedeckt. Insgesamt bilden $a \cdot a = a^2$ Raummaßeinheiten die unterste Schicht. Um den Würfel ganz auszufüllen, müssen a solcher Schichten übereinandergestapelt werden.

Ergebnis: 1 Stab besteht aus a Raummaßeinheiten,
1 Schicht besteht aus a Stäben, also $a \cdot a = a^2$ Raummaßeinheiten.
Der Würfel besteht aus a Schichten, also $a^2 \cdot a = a^3$ Raummaßeinheiten.

Unter Verwendung der Kantenlänge a ist das

Volumen des Würfels: $V = a^3$.

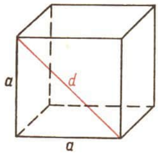


Abb. 2.15.

Die Flächendiagonale d des Würfels ist die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten die Kantenlängen a des Würfels sind (Abb. 2.15.). Nach dem Satz des PYTHAGORAS ist

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d = \sqrt{2a^2}$$
$$d = a\sqrt{2}\,.$$

Für die Raumdiagonale gilt: $e = a\sqrt{3}$.

Durch einen Würfel lassen sich zwei Arten von Symmetrieschnitten legen.

a) Stellen Sie einen Würfel in dimetrischer senkrechter Parallelprojektion dar, und demonstrieren Sie die Möglichkeiten für symmetrische Schnitte!

b) Welche Flächeninhalte haben die beiden unterschiedlichen in a) gewonnenen Schnittfiguren?

c) Leiten Sie die Formel für die Raumdiagonale her!

Zwei Zahlen heißen **kommensurabel** (mit gemeinsamem Maß meßbar), wenn sie ganzzahlige Vielfache ein und derselben dritten Zahl sind, oder anders ausgedrückt, wenn ihr Quotient eine rationale Zahl ist. Nicht kommensurabel (inkommensurabel) sind eine rationale und eine irrationale Zahl. Ebenso heißen zwei Strecken kommensurabel oder inkommensurabel, je nachdem, ob sie ein gemeinschaftliches Maß haben oder nicht.

a) Welche Aussage läßt sich über das gemeinschaftliche Maß zwischen der Flächendiagonale und der Kantenlänge eines Würfels machen?

b) Führen Sie den Nachweis für Ihre Aussage!

Beispiel 1:

Zwei Metallwürfel von 15 cm und 20 cm Kantenlänge werden zu einem einzigen umgegossen. Wie groß sind die Kante und der Oberflächeninhalt des neuen Würfels?

Gegeben: $a_1 = 15$ cm; $a_2 = 20$ cm.

Gesucht: V (in cm³); A_O (in cm²).

Das Volumen des neuen Würfels beträgt

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ V &= (15\ \text{cm})^3 + (20\ \text{cm})^3 \\ &= 3375\ \text{cm}^3 + 8000\ \text{cm}^3 \\ V &= 11\,375\ \text{cm}^3. \end{aligned}$$

Ist die Kantenlänge des neuen Würfels a, dann gilt

$$\begin{aligned} V &= a^3 \\ a &= \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{11\,375}\ \text{cm} \approx 22{,}5\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Die Kantenlänge beträgt rund 22,5 cm.

Die Berechnung des Oberflächeninhalts erfolgt nach der Formel

$$\begin{aligned} A_O &= 6\,a^2 \\ &\approx 6\,(22{,}5\ \text{cm})^2 \\ &\approx 6 \cdot 506{,}25\ \text{cm}^2 \\ A_O &\approx 3037{,}5\ \text{cm}^2. \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt beträgt rund 3040 cm².

Beispiel 2:

Von einem gläsernen Würfel beträgt der Inhalt einer Quadratfläche 57,76 cm². Wie groß sind die Flächendiagonale d, die Raumdiagonale e und die Masse m des Würfels, wenn die Dichte von Glas $2{,}5\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt?

Gegeben: $A = 57{,}76\ \text{cm}^2$; $\varrho = 2{,}5\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Gesucht: d (in cm); e (in cm); m (in g).

Berechnen der Kantenlänge:

$$\begin{aligned} A &= a^2 \\ a &= \sqrt{A} \\ a &= \sqrt{57{,}76}\ \text{cm} = 7{,}6\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Berechnen der Flächendiagonale:

$$\begin{aligned} d &= a\sqrt{2} \\ d &\approx 7{,}6 \cdot 1{,}41\ \text{cm} \approx 10{,}716\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Die Flächendiagonale beträgt rund 10,7 cm.

Berechnen der Raumdiagonale:

$$\begin{aligned} e &= a\sqrt{3} \\ e &\approx 7{,}6 \cdot 1{,}73\ \text{cm} \approx 13{,}148\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Die Raumdiagonale beträgt rund 13,1 cm.

Berechnen der Masse:

$$m = V \cdot \varrho$$
$$m = a^3 \cdot \varrho$$
$$m = (7{,}6\ \text{cm})^3 \cdot 2{,}5\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$
$$m \approx 439 \cdot 2{,}5\ \text{g} \approx 1097{,}5\ \text{g}.$$

Ergebnis: Der Würfel hat eine Masse von rund 1,098 kg.

Beispiel 3:

Ein Würfel hat ein Volumen von 55 cm³. Wie groß ist sein Oberflächeninhalt?
Gegeben: $V = 55\ \text{cm}^3$.
Gesucht: A_O (in cm²).

Berechnen der Kantenlänge:

$$V = a^3$$
$$a = \sqrt[3]{V}.$$

Da mit a noch weitere Rechenoperationen ausgeführt werden, ist es zweckmäßig, die Aufgabe zunächst allgemein zu lösen und erst in die Endformel die gegebenen Zahlen einzusetzen.

$$A_O = 6\,a^2 \qquad A_O = 6\sqrt[3]{55^2}\ \text{cm}^2$$
$$= 6\left(\sqrt[3]{V}\right)^2 \qquad = 6\sqrt[3]{3025}\ \text{cm}^2$$
$$A_O = 6\sqrt[3]{V^2} \qquad A_O \approx 6 \cdot 14{,}46\ \text{cm}^2 \approx 86{,}76\ \text{cm}^2.$$

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt des Würfels beträgt rund 86,76 cm².

Quader

Bezeichnet man bei einem Quader die Kanten in der Weise, wie es die Abbildung 2.16. zeigt, so erhält man als Formel für den

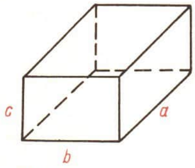


Abb. 2.16.

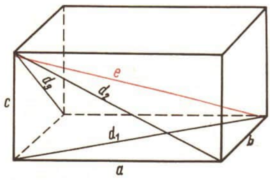


Abb. 2.17.

Oberflächeninhalt des Quaders: $A_O = 2(ab + ac + bc)$.

Das Volumen des Quaders wird nach der gleichen Methode wie beim Würfel bestimmt. An die Kante a läßt sich ein Stab von a Raummaßeinheiten legen. Es liegen b solcher Stäbe auf der Grundfläche und bilden eine Schicht. Insgesamt c Schichten füllen den Quader vollständig aus. Es ergibt sich als

Volumen des Quaders: $V = a \cdot b \cdot c$.

Bei der Berechnung der Flächendiagonalen d_1, d_2, d_3 und der Raumdiagonale e des Quaders (Abb. 2.17.) verfährt man sinngemäß wie beim Würfel.

a) *Berechnen Sie die Flächendiagonalen und die Raumdiagonale des Quaders!*

b) *Führen Sie den Nachweis, daß die vier möglichen Raumdiagonalen e des Quaders wie beim Würfel untereinander gleich groß sind!*

Beispiel 4:

Ein Vierkantstahl $\left(\varrho = 7{,}85\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ von 90 cm Länge wiege 1,809 kg. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche ist zu berechnen.
Da die Masse und die Dichte bekannt sind, kann das Volumen mit Hilfe der Formel $V = \frac{m}{\varrho}$ berechnet werden.
Wenn a die Seite der quadratischen Grundfläche und b die Länge des Stahlstabes sind, gilt $a^2 \cdot b = V$. Es folgt:

$$a^2 \cdot b = \frac{m}{\varrho}$$

$$a^2 = \frac{m}{b \cdot \varrho}$$

$$a = \sqrt{\frac{m}{b \cdot \varrho}}$$

$$a = \sqrt{\frac{1809}{90 \cdot 7{,}85}}\text{ cm} \approx \sqrt{2{,}56}\text{ cm} = 1{,}6\text{ cm}.$$

Ergebnis: Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche beträgt 16 mm.

Beispiel 5:

Wie tief sinkt ein Quader aus Buchenholz $\left(\varrho_1 = 0{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ mit den Kantenlängen $a = 81$ cm, $b = 36$ cm und $c = 12$ cm in Wasser $\left(\varrho_2 = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ ein?

Anmerkung: Die beiden größten Begrenzungsflächen liegen parallel zur Wasseroberfläche; die kleinsten Kanten stehen demnach senkrecht auf der Wasseroberfläche.

Jeder Körper erfährt beim Eintauchen in Wasser einen Auftrieb. Dabei handelt es sich um eine Kraft, die der Schwerkraft entgegengerichtet ist. Der Auftrieb eines Körpers in Pond gemessen ist dem Betrage nach gleich dem Gewicht der von dem

Körper verdrängten Wassermenge. Im Falle des Holzquaders mit der Dichte $0{,}7\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ wird die Schwerkraft, die auf den Körper wirkt, schon durch den Auftrieb, der durch das Eintauchen eines Teils des Körpers hervorgerufen wird, ausgeglichen. Infolgedessen schwimmt der Körper. Da sich die Kräfte im Gleichgewicht befinden, kann die Berechnung auf dem Vergleich der Masse des Holzquaders mit der Masse des verdrängten Wassers beruhen.
Der Sachverhalt wird mit Hilfe der Abbildung 2.18. verdeutlicht.

Masse des Quaders = Masse des verdrängten Wassers

$$m_1 = m_2$$

Das Volumen des Quaders ist $V_1 = a \cdot b \cdot c$

und das Volumen des verdrängten Wassers $V_2 = a \cdot b \cdot t.$

Es ist aber (entsprechend $m = V \cdot \varrho$) $m_1 = V_1 \cdot \varrho_1$

und $m_2 = V_2 \cdot \varrho_2.$

Es kann gesetzt werden $a \cdot b \cdot c \cdot \varrho_1 = a \cdot b \cdot t \cdot \varrho_2.$

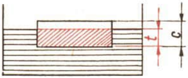


Abb. 2.18.

Nun wird nach der Eintauchtiefe t aufgelöst:

$$t = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \varrho_1}{a \cdot b \cdot \varrho_2} = \frac{c \cdot \varrho_1}{\varrho_2}.$$

Nach dem Einsetzen der in der Aufgabe gegebenen Zahlen in die gewonnene Formel erhält man:

$$t = \frac{12 \cdot 0{,}7}{1}\,\mathrm{cm} = 8{,}4\,\mathrm{cm}.$$

Ergebnis: Die Eintauchtiefe beträgt 8,4 cm.

In der gefundenen Beziehung $t = \frac{c \cdot \varrho_1}{\varrho_2}$ erscheinen die Variablen a und b nicht mehr; sie sind also ohne Einfluß auf das Ergebnis. Schreibt man den Ausdruck als Proportion,

$$\frac{t}{c} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2},$$

so wird folgender Zusammenhang deutlich:

Die Eintauchtiefe eines Körpers in eine Flüssigkeit und die Körperhöhe des Körpers verhalten sich umgekehrt wie die Dichtezahl der Flüssigkeit zur Dichtezahl des Körpers.

Gerade Prismen

a) Zeichnen Sie Grundriß, Aufriß und Schrägbild eines geraden dreiseitigen Prismas unter der Annahme, daß die Dreiecke mit den Seiten $a = 4{,}0$ cm, $b = 3{,}0$ cm *und* $c = 2{,}0$ cm *waagerecht liegen und die Rechteckfläche von der Breite a und der Höhe* $h = 3{,}5$ cm *parallel zur Zeichenebene liegt (Abb. 2.19.)!*

b) Zeichnen Sie das Netz dieses Körpers auf Karton, schneiden Sie es aus, und kleben Sie es zusammen!

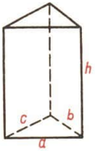


Abb. 2.19.

Die Oberfläche des geraden dreiseitigen Prismas setzt sich aus den beiden kongruenten Dreiecken der Grund- und Deckfläche und den drei Seitenflächen zusammen, die sämtlich Rechtecke sind (Abb. 2.20.). In jedem dieser Rechtecke besteht ein Seitenpaar aus gleich langen Prismenseitenkanten. Die Seitenflächen lassen sich deshalb in einer Ebene mit den gleichen Seiten so aneinanderlegen, daß ein als Abwicklung des Prismenmantels bezeichnetes Rechteck entsteht.

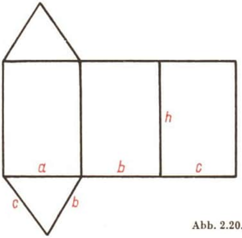


Abb. 2.20.

Sinngemäß gilt:

Die Oberfläche eines jeden geraden n-seitigen Prismas besteht aus dem doppelten Flächeninhalt der Grundfläche A_G und den n rechteckigen Seitenflächen, die den Mantel A_M bilden. Demnach ist der

Oberflächeninhalt des Prismas: $A_O = 2A_G + A_M$.

Beispiel 6:

Es ist der Oberflächeninhalt eines geraden Prismas zu berechnen, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 4$ cm ist. Die Höhe des Prismas sei $h = 10$ cm.
Zur Berechnung der Grundfläche muß die Höhe h_1 im Dreieck (Abb. 2.21.) bestimmt werden.
Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$h_1^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h_1^2 = \frac{3a^2}{4} \qquad A_G = \frac{a \cdot h_1}{1} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$$h_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$A_M = 3 \cdot a \cdot h$$

$$A_O = 2A_G + A_M = 2 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3ah$$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{3} + 3ah$$

$$= \frac{16}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}^2 + 3 \cdot 4 \cdot 10\ \text{cm}^2$$

$$A_O \approx 8 \cdot 1{,}73\ \text{cm}^2 + 120\ \text{cm}^2 = 133{,}84\ \text{cm}^2.$$

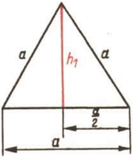


Abb. 2.21.

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt beträgt rund 133 cm².

Das Volumen eines Quaders mit den Kanten a, b und c ist mit $V = a \cdot b \cdot c$ bestimmt worden. Setzt man $a \cdot b$ gleich der Grundfläche A_G und c gleich der Höhe h, dann geht die Volumenformel über in

$$V = A_G \cdot h.$$

Das Produkt aus Grundfläche und Höhe ergibt das Volumen.

Jeder Quader läßt sich durch einen zur Grundfläche senkrechten Schnitt durch die Diagonale der Grundfläche in zwei volumengleiche gerade Prismen zerlegen (Abb. 2.22.). Die Grundflächen dieser Prismen sind kongruente rechtwinklige Dreiecke, die Hälften der Grundfläche des Quaders. Für beide Prismen ist die Quaderseite c die Höhe. Wird die Formel $V_1 = \frac{a \cdot b \cdot c}{2}$ für das Volumen der einen Quaderhälfte in der Form $V_1 = \frac{a \cdot b}{2} \cdot c$ geschrieben, so gibt $A_1 = \frac{a \cdot b}{2}$ den Flächeninhalt der Grundfläche und $h = c$ die Höhe eines geraden Prismas an, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist.

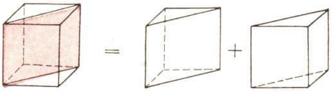


Abb. 2.22.

Das Produkt aus Grundfläche und Höhe gibt also auch für gerade Prismen, deren Grundflächen rechtwinklige Dreiecke sind, das Volumen an, weil jedes rechtwinklige Dreieck die Hälfte eines Rechtecks ist.

Jedes beliebige n-seitige gerade Prisma kann durch ebene Schnitte, die senkrecht zur Grundfläche geführt werden, in dreiseitige gerade Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundflächen zerlegt werden. Die Abbildung 2.23. zeigt, wie die Grundfläche $ABCDE$ eines fünfseitigen geraden Prismas zunächst durch die Diagonalen AC und AD in Dreiecke und diese durch ihre Höhen in rechtwinklige Dreiecke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 zerlegt werden kann. Alle Prismen haben die Höhe h gemeinsam. Somit wird das Volumen eines n-seitigen Prismas

$$V = A_1 \cdot h + A_2 \cdot h + A_3 \cdot h + \ldots =$$
$$= (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) \cdot h$$
$$V = A_G \cdot h.$$

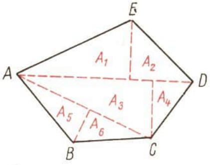


Abb. 2.23.

Jedes gerade Prisma mit beliebiger Grundfläche A_G und der Höhe h hat also das

Volumen des Prismas: $V = A_G \cdot h$.

Beispiel 7:

Welche Höhe muß ein oben offener prismatischer Behälter mit quadratischer Grundfläche ($a = 3{,}5$ m) mindestens haben, wenn er 83 300 Liter Wasser fassen soll? Die Innenfläche ist mit Rostschutzfarbe zu streichen.

Gegeben: $a = 3{,}5\ \text{m} = 35\ \text{dm}$; $V = 83\,300\ \text{dm}^3$.

Gesucht: h (in dm); A_O (in dm²).

Die Grundfläche ist ein Quadrat. Aus der Formel

$$V = A_G \cdot h = a^2 \cdot h$$

berechnet man

$$h = \frac{V}{a^2} = \frac{83\,300}{35^2}\ \text{dm} = \frac{83\,300}{1225} = 68\ \text{dm}.$$

Die Höhe des Behälters muß mindestens 6,8 m betragen.

Der Gesamtoberflächeninhalt ergibt sich aus

$$A_O = 2a^2 + 4ah.$$

Da der Behälter oben offen ist, berechnet man den Oberflächeninhalt ohne Deckfläche:

$$\bar{A}_O = a^2 + 4ah$$
$$\bar{A}_O = 1225 \text{ dm}^2 + 4 \cdot 35 \cdot 68 \text{ dm}^2 = 1225 \text{ dm}^2 + 9250 \text{ dm}^2 = 10745 \text{ dm}^2.$$

Ergebnis: Es sind 107,45 m² Innenfläche zu streichen.

Beispiel 8:

Der Querschnitt eines Grabens hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes (Abb. 2.24.) mit der unteren Grundseite $b = 1{,}40$ m, der oberen Grundseite $a = 1{,}80$ m und der Höhe $h_1 = 2{,}0$ m. In dem Graben steht das Wasser $h_2 = 1{,}60$ m hoch und fließt mit einer Geschwindigkeit von $v = 0{,}4 \text{ ms}^{-1}$. Wieviel Kubikmeter Wasser fließen stündlich durch den Graben?

Zunächst ist die obere Grundseite x des vom Wasser durchflossenen Trapezes zu bestimmen. Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{x-b}{a-b} = \frac{h_2}{h_1}$$
$$x = \frac{h_2}{h_1} \cdot a + \frac{h_1 - h_2}{h_1} \cdot b$$
$$x = \left(\frac{1{,}6}{2{,}0} \cdot 1{,}8 + \frac{2{,}0 - 1{,}6}{2{,}0} \cdot 1{,}4\right) \text{ m}$$
$$x = (1{,}44 + 0{,}28) \text{ m} = 1{,}72 \text{ m}.$$

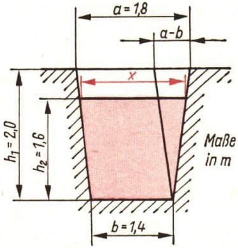


Abb. 2.24.

Nach der Trapezformel folgt daraus für die vom Wasser durchflossene Fläche:

$$A = \frac{b+x}{2} \cdot h_2$$
$$= \frac{1{,}4 + 1{,}72}{2} \cdot 1{,}6 \text{ m}^2$$
$$A = 1{,}56 \cdot 1{,}6 \text{ m}^2 = 2{,}496 \text{ m}^2.$$

In jeder Sekunde fließt das Wasser 0,4 m weiter, daher in einer Stunde

$$l = 0{,}4 \cdot 3600 \text{ m} = 1440 \text{ m}.$$

Die stündlich durch den Querschnitt des Grabens fließende Wassermenge bildet ein gerades Prisma mit der Grundfläche $A_G = A = 2{,}496 \text{ m}^2$ und der Höhe $h = l = 1440$ m und hat demnach das Volumen

$$V = A_G \cdot h = 2{,}496 \cdot 1440 \text{ m}^3 = 3594{,}24 \text{ m}^3.$$

Ergebnis: Stündlich fließen durch den Grabenquerschnitt rund 3600 m³ Wasser.

Schiefe Prismen

Durch Schnitte, die parallel zur Grundfläche geführt werden, kann ein gerades Prisma in Scheiben zerlegt werden. Verschiebt man die Scheiben gleichmäßig gegeneinander, so entsteht ein treppenförmiger Körper, der dasselbe Volumen wie das gerade Prisma hat und annähernd die Gestalt eines schiefen Prismas besitzt (Abb. 2.25.). Je dünner man die Scheiben wählt, um so weniger treten die einzelnen Stufen in Erscheinung, bis sie bei verschwindend kleiner Dicke nicht mehr bemerkt werden. Der Treppenkörper geht in ein schiefes Prisma über.

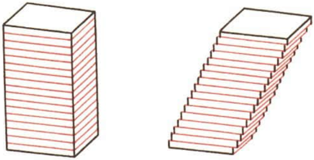


Abb. 2.25.

Nehmen Sie ein Spiel Rommékarten zur Hand! Schichten Sie die Karten so übereinander, daß ein gerades Prisma entsteht! Verschieben Sie jetzt die Karten von der Seite gleichmäßig gegeneinander! Es entsteht ein Treppenkörper, der annähernd die Gestalt eines schiefen Prismas hat.

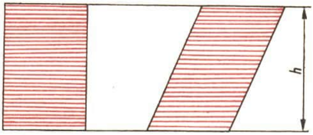


Abb. 2.26.

Wiederholt man diese Übung mit einem Stoß Schreibmaschinenpapier, so entsteht ein Körper, der für das bloße Auge fast ein schiefes Prisma ist (Abb. 2.26.). Offenbar haben beide Stapel das gleiche Volumen, denn sie sind aus der gleichen Anzahl von Blättern zusammengesetzt. Jeder parallel zur Grundfläche gelegte Schnitt weist inhaltsgleiche Schnittfiguren auf.

Für die Übereinstimmung der Volumina verschiedener Körper gleicher Höhe ist es nicht notwendig, daß die Grundflächen kongruent sind, es genügt deren Inhaltsgleichheit (Abb. 2.27.), falls Schnitte in gleichen Abständen zur Grundfläche stets inhaltsgleiche Schnittfiguren ergeben.

Liegt nämlich in jedem der Körper die gleiche Anzahl von gleich dicken Scheiben mit inhaltsgleichen Grundflächen, so stimmen auch die zerlegten Körper in ihrem Volumen überein. Speziell gilt somit:

Prismen mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleiches Volumen.

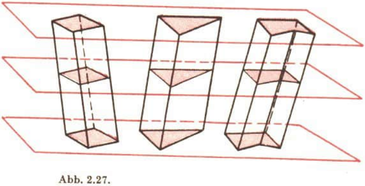


Abb. 2.27.

Die Formel für das Volumen gerader Prismen trifft also auch für das Volumen schiefer Prismen zu:

$$V = A_G \cdot h.$$

Den Gedanken, Körper in Platten oder Scheiben zu zerlegen, um deren Volumina zu vergleichen, wandte zuerst der italienische Mathematiker BONAVENTURA CAVALIERI Anfang des 17. Jahrhunderts an. Der nach ihm benannte Satz lautet:

Satz des CAVALIERI:

Zwei Körper sind volumengleich, wenn sie inhaltsgleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben und wenn alle in gleicher Höhe gelegenen, zur Grundfläche parallelen Schnittflächen beider Körper flächengleich sind.

Ein Beweis dieses Satzes kann mit Hilfe der Integralrechnung geführt werden. Im Rahmen dieser Ausführungen konnte nur ein anschaulicher Nachweis seiner Richtigkeit gegeben werden.
Beachten Sie, daß der Satz des CAVALIERI nur die Gleichheit der Volumina verschiedener Körper feststellt, nicht aber die Größe der Volumina angibt!

2.4. Pyramiden und Pyramidenstümpfe

Pyramide und Pyramidenstumpf gehören ebenfalls zu den ebenflächig begrenzten Körpern.

Definition:
Eine Pyramide ist ein Körper, der von einer Vieleckfläche (*n*-Eckfläche) und von *n* in einem Punkte zusammenstoßenden Dreiecken begrenzt wird.

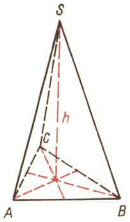


Abb. 2.28.

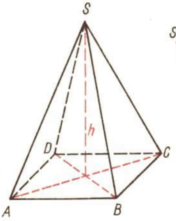


Abb. 2.29.

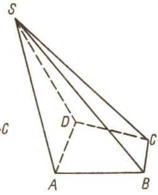


Abb. 2.30.

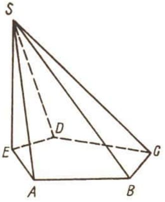


Abb. 2.31.

Die Vieleckfläche wird als Grundfläche bezeichnet, die Vieleckseiten als Grundkanten der Pyramide. Die Dreiecke bilden die **Seitenflächen** der Pyramide.
Der Punkt S, in dem die Seitendreiecke zusammenstoßen, heißt **Spitze** der Pyramide. Das von der Spitze der Pyramide auf deren Grundfläche gefällte Lot ist die Körperhöhe. Die Bezeichnungen „Grundkanten", „Seitenkanten", „Mantel" und „Oberfläche" stimmen mit den Bezeichnungen beim Prisma überein.

Je nach der Anzahl der Seitenflächen unterscheidet man drei-, vier-, fünf-, ..., n-seitige Pyramiden. Sind alle Seitenkanten gleich lang, so ist die Pyramide gerade (Abb. 2.28. und 2.29.), sind die Seitenkanten ungleich lang, ist die Pyramide schief (Abb. 2.30. und 2.31.).

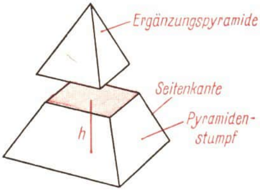


Abb. 2.32.

Eine gerade Pyramide heißt regelmäßig, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist und die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt (Abb. 2.28., 2.29.).
Die Verbindungslinie zwischen Spitze und Mittelpunkt der Grundfläche bildet die Achse der regelmäßigen Pyramide. Jeder Schnitt durch eine Seitenkante und die Körperachse wird Achsenschnitt der regelmäßigen Pyramide genannt.
Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so zerfällt sie in einen Pyramidenstumpf und die zum Stumpf gehörende Ergänzungspyramide (Abb. 2.32.). Die zur Grundfläche parallele Schnittfläche heißt Deckfläche des Stumpfes. Der Abstand der Grundfläche von der Deckfläche ist die Höhe h des Stumpfes. Die von der Deckfläche zur Grundfläche verlaufenden Kanten sind die Seitenkanten des Pyramidenstumpfes.

Beweisen Sie, daß Grund- und Deckfläche des Pyramidenstumpfes ähnliche Vielecke sind!
Anleitung: Wenden Sie den Strahlensatz auf jedes Strahlenbüschel an, das in einer Seitenfläche liegt!

Pyramidenstumpfförmige Gebilde treten in der Technik und im täglichen Leben sehr häufig auf, häufiger sogar als pyramidenförmige. Oft findet man Kühltürme, die die Form eines Pyramidenstumpfes haben.

2.5. Berechnungen an Pyramiden und Pyramidenstümpfen

Pyramiden

Zeichnen Sie eine regelmäßige quadratische Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h, und tragen Sie je einen Achsenschnitt durch eine Diagonale und durch eine Mittellinie der Grundfläche ein!
a) Welche Schnittfiguren entstehen?
b) Berechnen Sie die Schnittflächen!

Geht man von einem beliebigen Dreieck ABC als Grundfläche aus und fügt man seitlich drei Dreiecke hinzu, so entsteht unter bestimmten Bedingungen das Netz einer dreiseitigen Pyramide (Abb. 2.33.).

Unter welchen Voraussetzungen läßt sich diese Figur zu einer unregelmäßigen dreiseitigen Pyramide (Abb. 2.34.) zusammenfügen?

Die von den Punkten S_1, S_2, S_3 auf die Gegenseiten gefällten Lote schneiden einander im Fußpunkt G der Pyramidenhöhe h. Diese bildet mit den drei Seitenkanten drei rechtwinklige Dreiecke (Abb. 2.35.), die die Neigungswinkel der Seitenkanten ent-

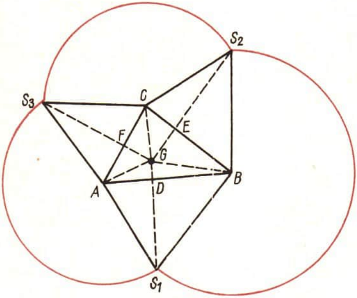


Abb. 2.33.

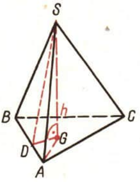


Abb. 2.34.

halten. Ferner bildet sie mit den Höhen der Seitendreiecke drei rechtwinklige Dreiecke, die die Neigungswinkel der Seitenflächen enthalten (Abb. 2.36.). Die zur Konstruktion dieser Dreiecke notwendigen Stücke enthält die Abbildung 2.33.

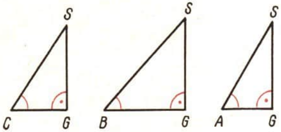


Abb. 2.35.

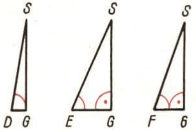


Abb. 2.36.

Konstruieren Sie das Netz einer Pyramide, deren Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $c = 9$ cm und deren Höhe $h = 6$ cm ist! Schneiden Sie das Netz aus, und fügen Sie es zu einer Pyramide zusammen!

Aus dem Netz der Pyramide ist die Zusammensetzung der Oberfläche ersichtlich. Sie besteht aus der Grundfläche A_G und dem aus Dreiecken gebildeten Mantel A_M. Allgemein lautet die Formel für den

Oberflächeninhalt der Pyramide: $A_O = A_G + A_M$.

Zur Berechnung des Volumens der Pyramide sind Hilfssätze notwendig.

Hilfssatz 1:

Werden Pyramiden von Ebenen parallel zur Grundfläche geschnitten, so sind die Schnittflächen zu den Grundflächen ähnlich (Abb. 2.37.).

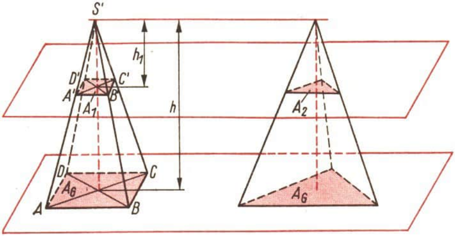


Abb. 2.37.

Beweis:

Da nach Voraussetzung die $A'B'C'D'$ bzw. $ABCD$ enthaltenden Ebenen parallel sind und die Strecken $\overline{A'B'}$ und $\overline{AB}$ in der durch SAB bestimmten Ebene liegen, so ist $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, und ebenso sind als Schnittlinien von Seitenflächen mit parallelen Ebenen $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, $\overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{D'A'} \parallel \overline{DA}$.

Daraus folgt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} \quad \text{usw.}$$

Es ist also

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} \quad \text{usw.}$$

oder:

$$\overline{A'B'} : \overline{B'C'} : \overline{C'D'} : \ldots = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \ldots,$$

ferner

$$\sphericalangle D'A'B' = \sphericalangle DAB$$
$$\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$$
$$\sphericalangle B'C'D' = \sphericalangle BCD \text{ usw.,}$$

folglich

$$A'B'C'D' \sim ABCD, \text{ w. z. b. w.}$$

Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke zueinander verhalten wie die Quadrate entsprechender Seiten, so verhalten sich

$$A'B'C'D' : ABCD = (\overline{A'B'})^2 : (\overline{AB})^2.$$

Weil sich aber

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{S'A'} : \overline{SA} = h_1 : h$$

verhält, so verhält sich auch

$$(\overline{A'B'})^2 : (\overline{AB})^2 = h_1{}^2 : h^2,$$

mithin auch

$$A'B'C'D' : ABCD = h_1{}^2 : h^2.$$

In Worten:

Die Schnittfläche verhält sich zur Grundfläche wie die Quadrate der zugehörigen Pyramidenhöhen.

Wir betrachten zwei Pyramiden mit gleichen Grundflächen. Bezeichnet man die Grundflächen mit A_G und die Schnittflächen, die eine schneidende Ebene dieser Pyramiden erzeugt, mit A_1 bzw. A_2, so gilt:

$$\frac{A_1}{A_G} = \frac{h_1{}^2}{h^2} \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{A_G} = \frac{h_1{}^2}{h^2}.$$

Aus den Proportionen folgt:

$$A_1 = A_2,$$

d. h., die Pyramiden haben in gleichen Höhen flächengleiche Schnittflächen.

Hilfssatz 2:

Pyramiden gleicher Höhe mit inhaltsgleichen Grundflächen haben in gleicher Höhe inhaltsgleiche Schnittfiguren.

(Ein Beweis dieses Satzes muß hier entfallen.)
Nach dem Satz des Cavalieri haben dann die beiden Pyramiden gleiches Volumen.

Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleiches Volumen.

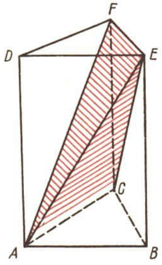


Abb. 2.38.

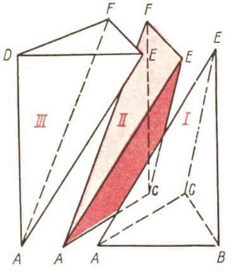


Abb. 2.39.

Es ist demnach das Volumen einer jeden Pyramide mit n-seitiger Grundfläche bekannt, sobald das Volumen einer anderen Pyramide mit gleich großer Grundfläche und Höhe berechnet ist.

Die Herleitung der Formel für das Volumen der Pyramide kann jetzt mit Hilfe der beiden Hilfssätze erfolgen. Ein dreiseitiges gerades Prisma $ABCDEF$ (Abb. 2.38.) wird durch zwei Ebenen, von denen die eine die Punkte A, E und F, die andere die Punkte A, C und E enthält, in drei dreiseitige Pyramiden zerlegt (Abb. 2.39.).

Zerlegen Sie ein gerades regelmäßiges dreiseitiges Prisma von einer Ecke aus in drei dreiseitige Pyramiden!

a) Stellen Sie das Prisma, seine Zerlegung und die drei Pyramiden in schräger Parallelprojektion dar! Sie erhalten ein übersichtliches Bild, wenn Sie als Verzerrung $\alpha = 120°$ und $q = \frac{1}{2}$ wählen.

b) Zeichnen Sie die Abwicklungen des Prismas und der drei Pyramiden, und stellen Sie Flächenmodelle der vier Körper her!

c) Veranschaulichen Sie mit den Körpermodellen die Gleichheit der Rauminhalte der drei Teilpyramiden und ihre Zusammensetzung zum Prisma!

Die Pyramiden I und II haben gleiche Grundflächen, denn durch die Schnittlinie $\overline{CE}$ ist die Seitenfläche $CBEF$ in zwei kongruente Dreiecke CBE und CFE zerlegt worden. Da ferner beide Grundflächen in einer Ebene liegen und von der Ecke A den gleichen Abstand haben, so stimmen die Pyramiden I und II auch in der Höhe überein, sind also volumengleich.
Entsprechend verhält es sich bei den Pyramiden II und III, die als Grundflächen die kongruenten Dreiecke ACF und AFD und als gleiche Höhe den Abstand von der Ecke E haben. Somit sind auch die Pyramiden II und III volumengleich.
Alle drei Pyramiden sind demnach untereinander volumengleich. Jede Pyramide kann also als ein Drittel eines dreiseitigen Prismas angesehen werden, das die gleiche Grundfläche und Höhe besitzt. Deshalb ist das

Volumen der Pyramide: $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} A_G \cdot h}$.

Weisen Sie nach, daß die hergeleitete Volumenformel auch für schiefe Pyramiden gilt!

Die Formel ist zunächst nur für eine dreiseitige Pyramide hergeleitet worden. Sie gilt jedoch allgemein für jede Pyramide, denn jede n-seitige Pyramide $(n > 3)$ kann durch ebene Schnitte in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden. Bezeichnet man die Grundflächen dieser dreiseitigen Pyramiden mit $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$, so gilt

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k = A_G.$$

Jede der dreiseitigen Pyramiden hat mit der n-seitigen die Höhe h gemeinsam. Als Volumen der n-seitigen Pyramide entsteht

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3} A_1 \cdot h + \tfrac{1}{3} A_2 \cdot h + \ldots + \tfrac{1}{3} A_k \cdot h \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \ldots + A_k) \cdot h \\ V &= \tfrac{1}{3} A_G \cdot h. \end{aligned}$$

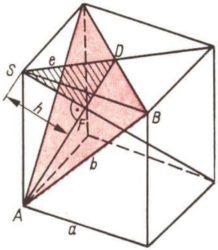
Beispiel 9:

Von einem Würfel mit der Kantenlänge a wird eine Ecke[1] durch eine Ebene abgeschnitten, die durch drei dem Scheitelpunkt der Ecke zunächst liegende Eckpunkte des Würfels geht (Abb. 2.40.).

a) Es sind der Flächeninhalt der Schnittfigur und der Abstand des Scheitelpunktes der Ecke von der Schnittebene zu berechnen.

b) Wie groß ist das Volumen V_R des Restkörpers?

Abb. 2.40.



Lösung:

a) Die Seiten der Schnittfigur sind Flächendiagonalen des Würfels; folglich ist das Dreieck ABC gleichseitig.
Setzt man

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = b,$$

so ergibt sich

$$A = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}$$

und mit $b^2 = 2a^2$

$$A = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}.$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt der Schnittfigur beträgt $\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$.

$\overline{AD}$ ist Seitenhalbierende im Dreieck ABC und somit

$$\overline{FD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{6} \quad \text{und} \quad e = \frac{b}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck SFD ist

$$h^2 = e^2 - \overline{FD}^2$$

$$h^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{3}$$

$$h = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Ergebnis: Der Abstand des Scheitelpunktes von der Schnittebene $\overline{SF} = h$ beträgt $\frac{a}{3}\sqrt{3}$.

b) Das Volumen des Restkörpers kann berechnet werden, indem man das Volumen des abgeschnittenen Teils des Würfels, also der Pyramide $SABC$, vom Würfelvolumen subtrahiert. Mit Hilfe der berechneten Größen A und h kann man das Volumen V_P ermitteln.

$$V_P = \frac{1}{3}A\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$V_P = \frac{a^3}{6}$$

[1] Hierbei ist nicht der Eckpunkt, sondern der Ihnen aus dem Unterricht in „Darstellender Geometrie" bekannte Begriff gemeint.

Nun ermittelt man durch Subtraktion das Volumen von V_R:

$$V_R = V_W - V_P = a^3 - \frac{a^3}{6}$$

$$V_R = \frac{5}{6} a^3.$$

Ergebnis: Das Volumen des Restkörpers beträgt $\frac{5}{6} a^3$.

Soll nur das Volumen der Pyramide oder des Restkörpers im Beispiel 9 berechnet werden, so ist es nicht erforderlich, erst den Flächeninhalt der Schnittfigur und den Abstand $\overline{SF} = h$ (Abb. 2.40.) zu ermitteln.
Suchen Sie einen bequemen Weg, und führen Sie die Berechnung durch!

Beispiel 10:

Bei einer schiefen Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 6{,}0$ cm ist, liegt die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche. Die Körperachse schließt mit der Grundfläche den Neigungswinkel $\varphi = 66{,}59°$ ein. Es ist a) der Oberflächeninhalt, b) das Volumen zu berechnen.

a) Zur Berechnung des Oberflächeninhalts werden die Körperhöhe h_1 und die Seitenflächenhöhe h_2 benötigt (Abb. 2.41.).

Aus dem $\triangle MBS$ folgt:

$$h_1 = \overline{MB} \cdot \tan\varphi$$

$$\overline{MB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$h_1 = \frac{a}{3}\sqrt{3} \cdot \tan\varphi$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \tan 66{,}59°$$

$$h_1 = 8{,}0 \text{ cm}$$

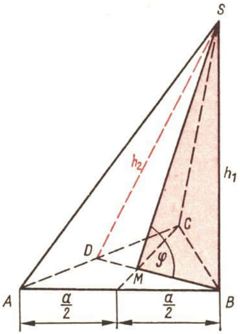


Abb. 2.41.

Aus dem $\triangle DBS$ folgt:

$$h_2{}^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + h_1{}^2 = \frac{3a^2}{4} + h_1{}^2$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + h_1{}^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 36}{4} + 64} \text{ cm}$$

$$h_2 = \sqrt{91} \text{ cm} \approx 9{,}539 \text{ cm}$$

Ergebnis: Die Höhe h_2 beträgt rund 9,5 cm.

(Ein genauerer Wert ist bei dem vorgegebenen Wert $a = 6{,}0$ cm nicht zu erreichen. Es kann deshalb mit diesem Wert weitergerechnet werden.)

N.	L.
2	0,3010
$\sqrt{3}$	0,2385 +
tan 66,59°	0,3636
8,0	0,9031

Berechnung des Mantels A_M: $A_{\triangle ACS} = A_1$ und $A_{\triangle ABS} = A_{\triangle BCS} = A_2$.

$$A_1 = \frac{a \cdot h_2}{2} = \frac{6{,}0 \cdot 9{,}5}{2}\ \text{cm}^2 = 28{,}5\ \text{cm}^2$$

$$2\,A_2 = 2 \cdot \frac{a \cdot h_1}{2} = 6{,}0 \cdot 8{,}0\ \text{cm}^2 = 48\ \text{cm}^2$$

$$A_M = A_1 + 2\,A_2 = 76{,}5\ \text{cm}^2$$

Berechnung des Oberflächeninhalts A_O:

$$A_O = A_G + A_M$$

$$A_G = \frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3} \approx \frac{36}{4} \cdot 1{,}732\ \text{cm}^2 = 15{,}588\ \text{cm}^2 \approx 15{,}6\ \text{cm}^2$$

$$A_O = 15{,}6\ \text{cm}^2 + 76{,}5\ \text{cm}^2$$

$$A_O = 92{,}1\ \text{cm}^2$$

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt beträgt 92,1 cm².

b) *Berechnung des Volumens* V:

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h_1$$

$$V = \frac{15{,}6 \cdot 8{,}0}{3}\ \text{cm}^3 = 41{,}6\ \text{cm}^3$$

Ergebnis: Das Volumen beträgt 41,6 cm³.

Pyramidenstümpfe

In der Abbildung 2.42. ist ein quadratischer Pyramidenstumpf und in Abbildung 2.43. sein Netz dargestellt. Grund- und Deckflächen sind Quadrate, die Seitenflächen gleichschenklige Trapeze. Bezeichnet man allgemein die Grundfläche mit A_G, die Deckfläche mit A_D und die Summe der Seitenflächen mit A_M, dann gilt für den

Oberflächeninhalt des Pyramidenstumpfes: $A_O = A_G + A_D + A_M$.

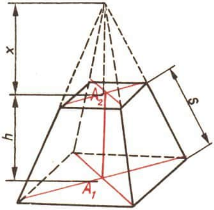


Abb. 2.42.

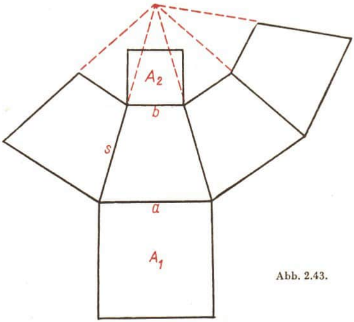


Abb. 2.43.

Konstruieren Sie das Netz eines quadratischen Pyramidenstumpfes mit der Grundkante $a = 6{,}0$ cm, der Kante der Deckfläche $b = 4{,}0$ cm und der Seitenkante $s = 4{,}5$ cm! Schneiden Sie es aus, und falten Sie es zu einem Flächenmodell des Körpers zusammen!

Das Volumen des Pyramidenstumpfes ergibt sich als Differenz der Volumina der zum Stumpf gehörenden Vollpyramide und der Ergänzungspyramide (Abb. 2.42.).

$$\underset{\text{(Höhe } h)}{V_{\text{Pyramidenstumpf}}} = \underset{\text{(Höhe } h + x)}{V_{\text{Vollpyramide}}} - \underset{\text{(Höhe } x)}{V_{\text{Ergänzungspyramide}}}$$

$$V = \frac{A_G \cdot (h + x)}{3} - \frac{A_D \cdot x}{3}$$

$$V = \frac{A_G \cdot h}{3} + \frac{A_G \cdot x}{3} - \frac{A_D \cdot x}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} A_G h + \frac{1}{3} x (A_G - A_D). \qquad \text{(I)}$$

Um Pyramidenstümpfe berechnen zu können, muß zunächst die Höhe x der Ergänzungspyramide durch andere Größen des Pyramidenstumpfes ausgedrückt werden. Wie bereits bei der Pyramide hergeleitet, verhalten sich die Grundfläche zur Schnittfläche wie die Quadrate der zugehörigen Pyramidenhöhen:

$$\frac{A_G}{A_D} = \frac{(h + x)^2}{x^2}$$

$$\frac{\sqrt{A_G}}{\sqrt{A_D}} = \frac{h + x}{x}$$

$$x \sqrt{A_G} = h \sqrt{A_D} + x \sqrt{A_D}$$

$$x \sqrt{A_G} - x \sqrt{A_D} = h \sqrt{A_D}$$

$$x = \frac{h \sqrt{A_D}}{\sqrt{A_G} - \sqrt{A_D}} = \frac{h \sqrt{A_D} \left(\sqrt{A_G} + \sqrt{A_D}\right)}{\sqrt{A_G^2} - \sqrt{A_D^2}}$$

$$x = \frac{h \sqrt{A_D} \left(\sqrt{A_G} + \sqrt{A_D}\right)}{A_G - A_D}.$$

Dieser Wert wird für x in die Gleichung (I) eingesetzt.
Man erhält:

$$V = \frac{1}{3} A_G h + \frac{1}{3} \cdot \frac{h \sqrt{A_D} \left(\sqrt{A_G} + \sqrt{A_D}\right)}{A_G - A_D} \cdot (A_G - A_D)$$

$$V = \frac{1}{3} A_G h + \frac{1}{3} h \sqrt{A_D} \left(\sqrt{A_G} + \sqrt{A_D}\right)$$

$$V = \frac{1}{3} A_G h + \frac{1}{3} \sqrt{A_G A_D}\, h + \frac{1}{3} A_D h.$$

Daraus ergibt sich nach Ausklammern von $\frac{h}{3}$ das

Volumen des Pyramidenstumpfes: $V = \frac{h}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D\right)$.

Beispiel 11:

Ein aus Stahlplatten hergestellter oben offener Kohlenbunker hat die in Abbildung 2.44. dargestellte Form. Das Fassungsvermögen des Bunkers und der Materialverbrauch sind zu berechnen.

Der Kohlenbunker setzt sich aus einem Prisma mit quadratischer Grundfläche und einem Pyramidenstumpf zusammen:

$$V = A_G h_1 + \frac{h_2}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D\right)$$

$$= 16\ \mathrm{m}^2 \cdot 4{,}5\ \mathrm{m} + \frac{1{,}5\ \mathrm{m}}{3}\left(16\ \mathrm{m}^2 + \sqrt{16 \cdot 4}\ \mathrm{m}^2 + 4\ \mathrm{m}^2\right)$$

$$V = 72\ \mathrm{m}^3 + 0{,}5 \cdot 28\ \mathrm{m}^3 = 86\ \mathrm{m}^3.$$

Ergebnis: Das Fassungsvermögen beträgt 86 m³.

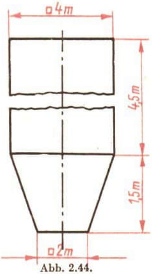


Abb. 2.44.

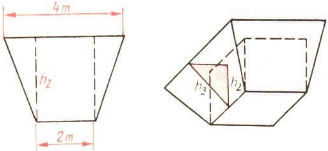


Abb. 2.45.

Die Oberfläche besteht aus vier kongruenten Rechtecken, vier gleichschenkligen Trapezen und der kleineren Grundfläche des Pyramidenstumpfes. Die Grundseiten der Trapeze sind 4 m bzw. 2 m lang. Die Flächenhöhe h_3 der Trapeze kann mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS berechnet werden (Abb. 2.45.):

$$h_3 = \sqrt{1{,}5^2 + 1^2}\ \mathrm{m} = \sqrt{3{,}25}\ \mathrm{m} \approx 1{,}80\ \mathrm{m}.$$

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist

$$A = \frac{4\ \mathrm{m} + 2\ \mathrm{m}}{2} \cdot 1{,}80\ \mathrm{m} = 5{,}4\ \mathrm{m}^2.$$

$$A_O = 4 \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot 4{,}5\,\mathrm{m} + 4 \cdot 5{,}4\,\mathrm{m}^2 + 4\,\mathrm{m}^2 = 72\,\mathrm{m}^2 + 21{,}6\,\mathrm{m}^2 + 4\,\mathrm{m}^2 = 97{,}6\,\mathrm{m}^2.$$

Ergebnis: Der Materialverbrauch an Stahlplatten beträgt 97,6 m².

Die für das Volumen des Pyramidenstumpfes hergeleitete Formel ist für den praktischen Gebrauch unbequem. Da die gemessenen Werte, die die Grundlage der Berechnung bilden, sowieso nur eine beschränkte Genauigkeit erreichen, wird an Stelle der entwickelten Formel in der Praxis oft eine einfachere **Näherungsformel** verwendet. Der Pyramidenstumpf wird ersetzt durch ein Prisma gleicher Höhe, dessen Grundfläche gleich dem arithmetischen Mittel aus der Grund- und der Deckfläche der Pyramide ist.

$$V \approx \frac{A_G + A_D}{2} h = A_m \cdot h.$$

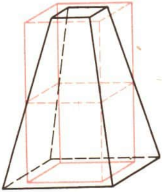


Abb. 2.46.

Die Grundfläche A_m dieses Prismas ist nicht die Schnittfläche des Pyramidenstumpfes, die in der Mitte zwischen A_G und A_D liegt. Die Abbildung 2.46. zeigt einen quadratischen Pyramidenstumpf. Für diesen Fall ergibt sich zum Beipiel:

$$A_G = a_1^2;\ A_D = a_2^2;\ A_m = a_m^2$$

$$a_m^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$$

$$a_m = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$$

Die Seite des Schnittquadrates, das genau in der Mitte zwischen A_G und A_D liegt, ist aber

$$a_m' = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Nun gilt:

$$a_m^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \neq (a_m')^2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2.$$

Aus $a_1 - a_2 > 0$ folgt nämlich $\frac{a_1 - a_2}{2} > 0$ und

$$\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} - \frac{a_1 a_2}{2} > 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} > \frac{a_1 a_2}{2} \qquad \Big| + \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4}$$

$$\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} > \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4}$$

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} > \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$$

oder

$$a_m > a_m'.$$

Das Näherungsprisma hat also eine Grundfläche A_m, die etwas größer ist als die Schnittfläche des Pyramidenstumpfes, die genau in der Mitte zwischen A_G und A_D liegt. Die Näherungsformel ermöglicht eine wesentlich einfachere Rechnung und gibt in den meisten Fällen einen ausreichend genauen Wert.
An einem Zahlenbeispiel soll nun durch Gegenüberstellung beider Berechnungsmöglichkeiten untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Anwendung der Näherungsformel zulässig ist.

Beispiel 12:

Zwei quadratische Pyramidenstümpfe mit den Kanten der Grundfläche a, der Deckfläche b und mit der Höhe h haben die folgenden Abmessungen:

a) $a = 5{,}0$ cm; $b = 2{,}0$ cm; $h = 6{,}0$ cm,

b) $a = 5{,}0$ cm; $b = 4{,}0$ cm; $h = 6{,}0$ cm.

Berechnen Sie jeweils für beide Pyramidenstümpfe das Volumen, und zwar einmal nach der Formel $V = \frac{h}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D\right)$ und zum anderen nach der Näherungsformel $V \approx \frac{A_G + A_D}{2} h$

$V = \frac{h}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D\right)$	$V \approx \frac{A_G + A_D}{2} \cdot h$
a) $V = \frac{6}{3}\left(25 + \sqrt{100} + 4\right)\ \text{cm}^3$	$V \approx \frac{25\ \text{cm}^2 + 4\ \text{cm}^2}{2} \cdot 6\ \text{cm}$
$V = 2 \cdot 39\ \text{cm}^3 = 78\ \text{cm}^3$	$V \approx 87\ \text{cm}^3$

Ergebnis: Die Abweichung vom genauen Ergebnis beträgt etwa 11,5 %.

b) $V = \frac{6}{3}\left(25 + \sqrt{400} + 16\right)\ \text{cm}^3$	$V \approx \frac{25\ \text{cm}^2 + 16\ \text{cm}^2}{2} \cdot 6\ \text{cm}$
$V = 2\ \text{cm} \cdot 61\ \text{cm}^2 = 122\ \text{cm}^3$	$V \approx 123\ \text{cm}^3$

Ergebnis: Die Abweichung vom genauen Ergebnis beträgt etwa 0,8 %.

In beiden Fällen des Beispiels 12 brachte die Anwendung der Näherungsformel zu hohe Ergebnisse. Ein Vergleich von a) und b) läßt die Vermutung zu, daß die Näherungsformel vornehmlich dann benutzt werden kann, wenn sich die beiden parallelliegenden Flächen A_G und A_D in ihrer Größe nur wenig unterscheiden. Diese Vermutung findet auch durch die folgende allgemeine Betrachtung ihre Bestätigung:

$$\frac{h}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D\right) \approx \frac{A_G + A_D}{2} \cdot h \quad |:h$$

$$\frac{1}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D\right) \approx \frac{A_G + A_D}{2} \quad |\cdot 6$$

$$2\,A_G + 2\sqrt{A_G A_D} + 2\,A_D \approx 3\,A_G + 3\,A_D$$

$$2\sqrt{A_G A_D} \approx A_G + A_D$$

$$\sqrt{A_G A_D} \approx \frac{A_G + A_D}{2}$$

Daraus geht hervor:

Nähert sich die Deckfläche A_D ihrer Größe nach immer mehr der Grundfläche A_G, dann nähern sich die beiden zuletzt erhaltenen Ausdrücke ihrem Werte nach auch immer mehr. Mit $A_D = A_G$ schließlich ist das arithmetische Mittel $\frac{A_G + A_D}{2}$ dem geometrischen Mittel $\sqrt{A_G A_D}$ gleich:

$$\frac{A_G + A_G}{2} = \sqrt{A_G A_G}$$

$$A_G = A_G.$$

In diesem Falle aber wird aus dem Pyramidenstumpf ein Prisma, für das die Anwendung der Näherungsformel genaue Werte liefert:

$$\frac{A_G + A_D}{2} \cdot h; \quad \text{für} \quad A_D = A_G \quad \text{folgt:} \quad \frac{2 A_G}{2} \cdot h = A_G \cdot h.$$

Wird A_D immer kleiner und schließlich null, dann geht der Pyramidenstumpf in eine Pyramide über. Die Näherungsformel nimmt dann den Wert $\frac{A_G}{2} \cdot h$ an, der um 50 % zu groß ist gegenüber dem genauen Wert $\frac{A_G}{3} \cdot h$.

2.6. Zusammengesetzte ebenflächige Körper

In der Technik begegnet man vielfach Körpern, die sich aus den bisher behandelten zusammensetzen. Sie werden **zusammengesetzte Körper** genannt, auch wenn aus einem Körper ein anderer ausgespart ist.
Zur Ermittlung der Oberfläche oder des Volumens solcher zusammengesetzter Körper müssen die einzelnen Teile getrennt berechnet werden. Eine gründliche Planung des Rechenweges kann dabei den Arbeitsaufwand erheblich vermindern.

Beispiel 13:

Das Dach eines Turmes, dessen Grund- und Aufriß aus der Abbildung 2.47. zu ersehen sind, besteht aus einem quadratischen Pyramidenstumpf mit der Grundkante $a = 10{,}00$ m, der oberen Kante $b = 5{,}50$ m und der Höhe $h_1 = 3{,}00$ m. Seine Seitenkanten sind so abgeschnitten, daß aus der oberen Grundfläche ein regelmäßiges Achteck wird. Über diesem Achteck erhebt sich eine gerade achtseitige Pyramide von $h_2 = 9{,}00$ m Höhe. Gesucht ist a) das Volumen, b) der Oberflächeninhalt des Dachraumes.

a) Bezeichnet man die Seite des gleichseitigen Achtecks mit x, dann ist

$$b = \frac{x}{2}\sqrt{2} + x + \frac{x}{2}\sqrt{2}$$
$$b = x\left(1 + \sqrt{2}\right)$$
$$x = \frac{b}{1+\sqrt{2}} = b\,(\sqrt{2} - 1 \approx b \cdot 0{,}414.$$

Die Fläche des Achtecks ist gleich der Fläche des Quadrats, vermindert um vier kleine halbe Quadrate, die zusammengesetzt ein Quadrat mit der Seitenlänge x ergeben:

$$A_8 = b^2 - x^2 = b^2 - b^2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2$$
$$= b^2 \cdot \left(1 - 2 + 2\sqrt{2} - 1\right)$$
$$A_8 = b^2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \approx b^2 \cdot 0{,}828.$$

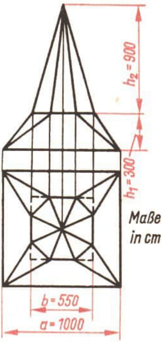


Abb. 2.47.

Das Volumen des Turmes setzt sich zusammen aus dem Pyramidenstumpf mit dem Volumen V_1, vermindert um vier kleine schiefe Pyramiden mit der Gesamtgrundfläche x^2 und der Höhe h_1 des Pyramidenstumpfes mit dem Gesamtvolumen V_2 und der achtseitigen Pyramide V_3:

$$V = V_1 - V_2 + V_3$$
$$V_1 = \frac{h_1}{3}\left(a^2 + a\,b + b^2\right)$$
$$V_2 = \frac{x^2 \cdot h_1}{3} = \frac{b^2 \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot h_1}{3} \approx b^2 \cdot h_1 \cdot 0{,}057$$
$$V_3 = \frac{A_8 \cdot h_2}{3} = \frac{b^2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot h_2}{3} \approx b^2 \cdot h_2 \cdot 0{,}276$$

Führen Sie die numerische Berechnung des Volumens selbständig durch! Zur Kontrolle wird das rechnerische Ergebnis mitgeteilt: $V = 255{,}2\ \mathrm{m}^3$.

b) Zur Berechnung des Oberflächeninhalts müssen die Höhen der Trapeze und Dreiecke ermittelt werden. Jede der Höhen läßt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmen, dessen eine Kathete die Länge des Grundrisses, die andere der Höhenunterschied ihrer Endpunkte ist:

Trapezhöhe:

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + {h_1}^2}$$

Höhe der unteren Dreiecke:

$$h_4 = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + {h_1}^2}$$

$\left(\frac{b}{2}\right.$ ist der Abstand jeder der Achteckseiten vom Mittelpunkt$\left.\right)$

Höhe der oberen Dreiecke:

$$h_5 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + {h_2}^2}$$

Die gesamte Oberfläche setzt sich aus folgenden Flächen zusammen:

$$A = 4 \cdot A_1 + 4 \cdot A_2 + 8 \cdot A_3$$
$$A_1 = \frac{a + x}{2} \cdot h_3$$
$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h_4$$
$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h_5$$

Führen Sie die numerische Berechnung des Oberflächeninhalts selbständig durch! Zur Kontrolle wird das rechnerische Ergebnis mitgeteilt:

$$A_O = 201{,}8\ \mathrm{m}^2.$$

Aufgaben

1. Ein Holzwürfel von 5,6 cm Kantenlänge wiegt 150 g. Wie groß ist seine Dichte?

2. Wie groß sind die Flächendiagonale d und die Raumdiagonale e eines Würfels mit der Kante $a = 1{,}20$ m?

3. Gibt es Würfel, für die die Maßzahl des Oberflächeninhalts gleich der Maßzahl des Volumens ist? Warum ist es falsch zu sagen: Bei diesen Würfeln ist „das Volumen gleich dem Oberflächeninhalt“?

4. Das Volumen eines Würfels ist durch die Oberfläche auszudrücken.

5. Ein Würfel werde durch eine Ebene, die senkrecht zu einer Würfelseite steht, längs einer Diagonalen dieser Fläche geschnitten. Die Schnittfigur habe einen Flächeninhalt von 213 cm². Wie groß ist **a)** die Würfelkante, **b)** das Volumen, **c)** der Oberflächeninhalt des Würfels?

6. Drei Würfel haben die Kantenlängen von 15 cm, 20 cm und 25 cm. Wie verhalten sich **a)** ihre Kantenlängen, **b)** ihre Flächendiagonalen, **c)** ihre Oberflächeninhalte und **d)** ihre Volumina zueinander?

7. Ein Klempner fertigt einen würfelförmigen oben offenen Blechbehälter an, der 50 Liter Wasser faßt. Wieviel Quadratmeter Blech werden für seine Anfertigung benötigt?

8. Das Fundament unter einer Werkzeugmaschine besteht aus einem Würfel von 0,95 m Kantenlänge. Wieviel Mauersteine sind zur Aufmauerung des Würfels notwendig, wenn man je Kubikmeter 400 Steine benötigt?

9. Aus der Raumdiagonalen eines Würfels soll **a)** das Volumen, **b)** der Oberflächeninhalt berechnet werden.

10. Aus drei Bleiwürfeln mit den Kanten 4,0 cm, 8,0 cm und 10,0 cm wird ein Würfel gegossen. Wie groß sind die Kanten und der Oberflächeninhalt des neuen Würfels?

11. Wie lang muß die Kante eines Würfels sein, damit sein Volumen doppelt so groß wie der eines Würfels von 1 cm Kantenlänge wird? Läßt sich die Kante des gesuchten Würfels mit Zirkel und Lineal als Strecke geometrisch darstellen?

12. Stellen Sie in ein und demselben Achsenkreuz geometrisch die Funktionen dar, die **a)** die Körperdiagonale e, **b)** den Oberflächeninhalt A_O, **c)** das Volumen V eines Würfels mit der Würfelkante x bilden! Welche Kurven ergeben sich?

13. Wie groß ist die Kante eines Würfels, dessen Oberfläche doppelt so groß ist wie die Oberfläche eines Würfels mit gegebener Kante a?

14. Ein Würfel soll mit einer Silberschicht von 0,5 mm Dicke versilbert werden. Die Kantenlänge des Würfels beträgt 8,00 cm. Wieviel Kilogramm Silber sind notwendig?

15. Wieviel wiegt ein Hohlwürfel aus Eichenholz $\left(\varrho = 0{,}8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ von 28 mm Wanddicke und 16,6 cm Kantenlänge?

16. Von einer Würfelfläche mit der Kantenlänge a ist der Radius $r = 7$ cm des umbeschriebenen Kreises bekannt. Wie groß ist das Volumen des Würfels?

17. Von einer Würfelfläche mit der Kantenlänge a ist der Radius r des umbeschriebenen Kreises und ϱ des einbeschriebenen Kreises bekannt. Wie groß ist der Inhalt jeder Seitenfläche des Würfels **a)** bezogen auf r und **b)** bezogen auf ϱ?

18. Verlängert man jede Kante eines Würfels um 2,0 cm, so nimmt sein Volumen um 218 cm³ zu. Berechnen Sie die Kante!

19. Läßt sich durch einen Würfel ein ebener Schnitt so führen, daß als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck entsteht?

20. Ersetzt man eine der vier Größen a, d, A_O, V durch eine Zahl, so kann man aus ihr die drei anderen Zahlen, die für die übrigen drei Größen stehen, berechnen. Man erhält dann $4 \cdot 3 = 12$ Gleichungen.
Berechnen Sie $V = a^3$ für $a = 0$, $a = 1$, ..., $a = 5$!
Zeichnen Sie das Funktionsbild $\left(V \text{ auf } \frac{1}{10} \text{ verkürzt}\right)$, und bestimmen Sie mit Hilfe des Bildes V für $a = 0{,}9$ und $a = 2{,}2$!

21. Berechnen Sie das Volumen des in Abbildung 2.48. dargestellten Körpers, dessen drei Ansichten (Grundriß, Aufriß und Kreuzriß) das gleiche Aussehen haben ($a = 27$ cm)! Die Abbildung 2.49. zeigt das Schrägbild des Körpers.

22. Berechnen Sie die Masse des Flachstahls $\left(\varrho = 7{,}85\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ nach der Abbildung 2.50.!

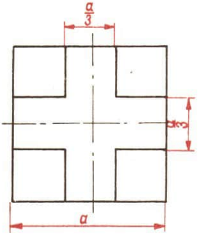


Abb. 2.48.

23. Welche Länge muß ein Quader haben, wenn seine Raumdiagonale 22,0 cm, die Breite 7,5 cm und die Höhe 5,3 cm messen?

24. Welche Heizfläche hat ein Ofen von 2,00 m Höhe, 1,10 m Breite und 0,60 m Tiefe? (Nach unten wird keine Wärme abgestrahlt!)

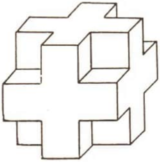


Abb. 2.49.

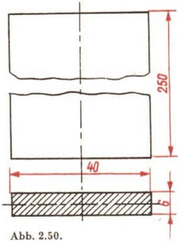


Abb. 2.50.

25. Wie dick ist ein rechteckiges Stück Blattgold $\left(\varrho = 19{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ von 62 mm Länge und 47 mm Breite, das 6,3 mg wiegt?

26. Das Volumen eines Basaltstückes wurde zu $V = 48{,}1\ \text{cm}^3$ bestimmt; die Wägung ergab 0,140 kg. Bestimmen Sie die Dichte!

27. Aus einem Festmeter Holz sollen Bretter von rechteckigem Querschnitt mit 18 mm Dicke und 22 cm Breite geschnitten werden. Wieviel laufende Meter erhält man daraus bei einem Schnittverlust von 15%?

28. Für den Versand der Erzeugnisse eines Werkes werden rechteckige Kisten verwendet. Die Maße sind 120 cm × 60 cm × 45 cm.
Ein Verbesserungsvorschlag sieht die Verwendung von würfelförmigen Kisten vor.
a) Wieviel Zentimeter muß die Länge einer Kante betragen, damit das Volumen unverändert bleibt?
b) Wieviel Quadratmeter wertvollen Materials werden in einer Woche (6 Tage) eingespart, wenn täglich 65 Kisten benötigt werden?

29. Eine Holzkiste mit Deckel hat die Außenmaße 1,60 m × 1,20 m × 0,90 m, die Dicke des Holzes beträgt 3 cm. Gesucht sind **a)** die Größe des Innenraumes, **b)** die Masse des Holzes bei einer Dichte von $0{,}6\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, **c)** der Flächeninhalt der zum Bau der Kiste erforderlichen Bretter.

30. Die Abmessungen eines quaderförmigen Kastens sollen sich im Lichten wie 1:2:3 verhalten. Wie groß müssen die Innenkanten sein, wenn der Kasten 1 m³ fassen soll?

31. Eine Kassette mit den Kanten a, b und c ist so gebaut, daß b der größere und c der kleinere Abschnitt der nach dem Goldenen Schnitt geteilten Länge $a = 18$ cm ist. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen!
Anleitung: Die Proportion für den Goldenen Schnitt ist $a : b = b : (a - b)$. In dieser Aufgabe bedeutet $(a - b)$ die dritte Kante c.

32. Welche Kantenlängen und welche Oberflächeninhalte haben zwei quadratische Prismen aus Blei bzw. aus Kork von je 10 cm Höhe und 1 kg Masse, wenn die Dichte von Blei $11{,}4\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und die Dichte von Kork $0{,}24\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ beträgt?

33. Aus einem Stück Rundstahl von 18 cm Länge und 7 cm Durchmesser soll ein größtmöglicher Quader mit quadratischem Querschnitt herausgefräst werden. Berechnen Sie die Anstelltiefe a des Fräsers und das Volumen V des entstehenden Werkstückes!

34. In ein würfelförmiges Gefäß, das innen die Kantenlänge 50 cm hat, werden 18 Liter Flüssigkeit gefüllt. Berechnen Sie den Flüssigkeitsstand h!
Hinweis: Für diese Aufgabe soll 1 Liter mit 1 Kubikdezimeter in Rechnung gestellt werden.

35. Beweisen Sie, daß sich die Raumdiagonalen eines Quaders alle in einem Punkte schneiden!

36. Ein Würfel, dessen Kanten um 3,0 cm größer als die eines anderen sind, hat ein um $146\ \mathrm{cm}^3$ größeres Volumen. Berechnen Sie die Kante jedes Würfels!

37. Aus einem rechteckigen Stück Blech von 50 cm bzw. 80 cm Seitenlänge werden aus den Ecken Quadrate von 10 cm Seitenlänge herausgeschnitten. Durch Hochbiegen der überstehenden Teile entsteht ein Kasten von der Form eines Quaders. **a)** Wie groß ist sein Volumen? **b)** Wie ändert sich das Volumen, wenn man für die an den Ecken herausgeschnittenen Quadrate der Reihe nach die Seitenlängen 5 cm, 6 cm, 7 cm und so fort bis 15 cm wählt? **c)** Die Änderung des Volumens ist durch eine grafische Darstellung zu verdeutlichen. **d)** In welchem Fall wird der Kasten den größten Inhalt erhalten?

38. Das Volumen eines geraden regelmäßigen sechsseitigen Prismas von der Höhe $h = 8{,}0$ cm ist $V = 519\ \mathrm{cm}^3$. Wie groß sind Grundkante und Oberfläche? (Rechnen Sie mit dem Rechenstab, und verwenden Sie den Näherungswert $\sqrt{3} \approx 1{,}73$!)

39. Wieviel wiegen die folgenden Profilstähle $\left(\varrho = 7{,}85\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$?
a) 13,5 m ∟-Stahl 30 mm × 30 mm × 4 mm (Abb. 2.51.)
b) 12 m ⊥-Stahl 45 mm × 45 mm × 5,5 mm (Abb. 2.52.)
c) 60 m ▭-Stahl (Bezeichnung für Flachstahl) 50 mm × 8 mm (Abb. 2.53.).

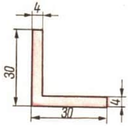


Abb. 2.51.

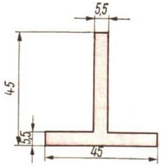


Abb. 2.52.

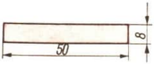


Abb. 2.53.

40. Ein schiefes Prisma mit einem Quadrat von der Seitenlänge $a = 5{,}4$ cm als Grundfläche und der Seitenkante $s = 6{,}5$ cm hat das Volumen $V = 180\ \mathrm{cm}^3$. Der Neigungswinkel φ der Seitenkante gegen die Grundfläche ist zu berechnen (Abb. 2.54.).

41. Welches Volumen hat ein Sechskantstahl von der Schlüsselweite 90 mm und der Länge 1000 mm?

42. Zu statischen Berechnungen soll der Querschnitt A eines I-Trägers aus Stahl $\left(\varrho = 7{,}850\ \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}\right)$ von der Länge $l = 8{,}6$ m ermittelt werden. Seine Masse beträgt $m = 3{,}450$ t.

43. Ein rechteckiger Platz 35 m $\times$ 12,5 m ist in der Richtung der längeren Seite geneigt, so daß die eine kürzere Seite 65 cm höher liegt als die andere. Der Platz soll horizontal gemacht werden. Wieviel Kubikmeter Erde sind abzufahren, wenn man den Platz so hoch legt wie die untere kürzere Seite?

44. In einem Gefäß sollen 75 kg Quecksilber aufbewahrt werden. Das Gefäß soll die Form eines dreiseitigen geraden Prismas haben mit der Grundfläche eines gleichseitigen Dreiecks und der Höhe von 25 cm $\left(\varrho_{\mathrm{Hg}} = 13{,}6\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\right)$. Wie groß muß die Seite der Grundfläche mindestens sein?

45. Aus einem geraden regelmäßigen dreiseitigen Prisma mit der Grundkante a und der Höhe h ist ein Prisma mit gleicher Höhe und der größtmöglichen quadratischen Grundfläche herzustellen. Wie groß sind dann die Grundkante und das Volumen?

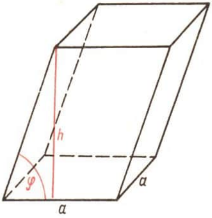


Abb. 2.54.

46. Ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Höhe $h = 5{,}0$ cm hat als Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln $a = b = 12{,}0$ cm und der Basis $c = 10{,}0$ cm. Durch die Basis der Grundfläche und die Spitze der Deckfläche wird ein Schnitt gelegt. **a)** Wie lang sind die Seiten der Schnittfigur, **b)** welchen Flächeninhalt hat sie?

47. Wie groß ist das Volumen eines regelmäßigen zwölfseitigen Prismas, dessen Grundfläche einem Kreise von $r = 7{,}0$ cm Radius einbeschrieben ist und dessen Höhe $h = 23{,}0$ cm beträgt?

48. Ein regelmäßiges gerades sechsseitiges Prisma mit dem Volumen $V = 540\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$ hat die Höhe $h = 10{,}0$ cm. Wie groß ist der Oberflächeninhalt?

49. In eine Kugel mit dem Radius $r = 10{,}0$ cm ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche so einbeschrieben, daß alle Prismenecken auf der Kugeloberfläche liegen. Die Höhe des Prismas beträgt $h = 16{,}0$ cm. Wie groß sind die Grundkante a und das Volumen des Prismas?

50. Ein gerades Prisma hat als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck von 5,4 cm Seitenlänge. Es wird schräg so abgeschnitten, daß die Schnittebene parallel zu zwei gegenüberliegenden Grundkanten liegt und die im Mittelpunkt der Grundfläche stehende Höhe 12,4 cm über dem Mittelpunkt der Grundfläche trifft. Das Volumen des abgeschnittenen Prismas ist zu berechnen.

51. Ein gerades Prisma hat als Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck $a = b = 8{,}0$ cm, $c = 5{,}0$ cm und eine Höhe $h = 12{,}0$ cm.
Durch die Grundseite der Grundfläche und die Spitze der Deckfläche ist ein Schnitt gelegt. Umfang und Inhalt der Schnittfigur sind zu berechnen.

52. Wieviel Tonnen Kohle faßt ein Wagen, dessen Wagenkasten mit trapezförmigem Querschnitt 3,00 m lang, 0,90 m tief, oben 1,40 m und unten 0,60 m breit ist? (1 m³ Steinkohle wiegt 1,2 t)

53. In Abbildung 2.55. ist der Querschnitt einer Holzleiste dargestellt. Wieviel laufende Meter solcher Leisten ergeben einen Festmeter!
Anleitung: Bestimmen Sie den Querschnitt durch Ergänzung zu einem Rechteck entsprechend der punktierten Linie!

54. Es ist die Erdmenge in Kubikmetern zu berechnen, die zum Aufschütten des in Abbildung 2.56. im Schnitt dargestellten Dammes von 2,500 km Länge benötigt wird.

55. Die Masse der Führungsplatte aus Bronze $\left(\varrho = 8{,}6\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ ist nach den in Abbildung 2.57. angegebenen Maßen zu berechnen.
Anleitung: Berechnen Sie das Volumen mit Hilfe des „Ergänzungsverfahrens", indem Sie den Körper zunächst zu einem Quader ergänzen!

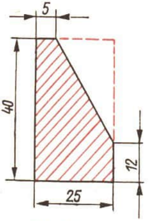


Abb. 2.55.

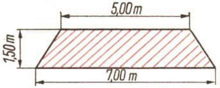


Abb. 2.56.

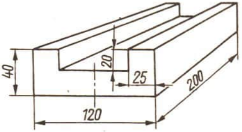


Abb. 2.57.

56. Der Querschnitt des schräg stehenden Stützbalkens in Abbildung 2.58. ist ein Rechteck von 160 cm × 20 cm. Er ist beiderseits schräg abgeschnitten. Wieviel Festmeter Holz ergeben 16 Balken dieser Größe?
Anleitung: Betrachten Sie die trapezförmigen Seitenflächen als Grundfläche bzw. Deckfläche eines Prismas!

57. Berechnen Sie das Volumen V (in m³) des in Abbildung 2.59. dargestellten Abzugschachtes mit quadratischem Querschnitt!

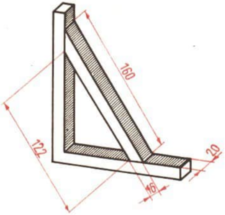


Abb. 2.58.

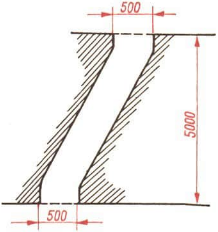


Abb. 2.59.

58. Berechnen Sie von einem schiefen Prisma die Höhe, wenn die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 6{,}0$ cm ist und das Volumen $72\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ beträgt!

59. Ein schiefes Prisma hat als Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten 13 cm, 14 cm und 15 cm. Seine Seitenkanten sind gegen die Grundfläche unter 30° geneigt und 32 cm lang. Wie groß ist sein Volumen?

60. Die Achse eines schiefen Prismas mit quadratischer Grundfläche (Grundkante a) und der Höhe h ist unter dem Winkel β gegen seine Grundfläche geneigt ($a = 6{,}0$ cm, $h = 5{,}0$ cm, $\beta = 45°$). Wie groß ist **a)** das Volumen, **b)** der Oberflächeninhalt des schiefen Prismas?

61. Ein Quader habe die Kanten $a = 12{,}5$ cm, $b = 8{,}6$ cm und $c = 4{,}9$ cm. Ein Parallelepiped habe die gleichen Kantenlängen, und die Grundkanten a und b schließen einen Winkel δ von 58° ein, und die Kante c ist um den Neigungswinkel φ von 78,2° gegen die Grundfläche geneigt.
a) Stellen Sie beide Körper im Grund- und Aufriß dar!
b) Vergleichen Sie die Volumina beider Körper!

62. Ein Hausdach hat die Form einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche. Die Grundkanten sind $a = 8{,}00$ m, $b = 6{,}00$ m und die Höhe $h = 3{,}00$ m. Wieviel Quadratmeter Dachpappe werden zum Decken des Daches benötigt?

63. Durch eine gerade quadratische Pyramide mit der Höhe $h = 30$ mm und der Grundkante $a = 24$ mm legt man einen Achsenlängsschnitt **a)** durch die Mitten gegenüberliegender Grundkanten, **b)** durch zwei Seitenkanten. Berechnen Sie die Inhalte der Schnittflächen!

64. Weshalb beträgt der Flächeninhalt der Schnittfigur nur ein Viertel des Flächeninhalts der Grundfläche, wenn durch eine Pyramide in halber Höhe ein Schnitt parallel zur Grundfläche geführt wird?

65. Die Grundfläche einer Pyramide mit gleichen Seitenkanten ist ein rechtwinkliges Dreieck. In welchen Punkt der Ebene der Grundfläche wird die Spitze der Pyramide projiziert?

66. Begründen Sie das folgende Gesetz aus der Optik: Die Beleuchtungsstärke paralleler Ebenenteile ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle!

67. Das Volumen einer geraden quadratischen Pyramide von 15 cm Höhe beträgt 380 cm³. Wie groß ist ihr Oberflächeninhalt?

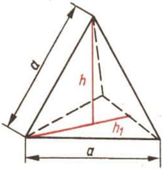


Abb. 2.60.

68. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Quadrat mit der Seite $a = 24{,}4$ cm, die Seitenkanten haben eine Neigung von 68,5° gegen die Grundfläche. Es sind **a)** die Seitenkanten, **b)** die Höhe, **c)** das Volumen, **d)** der Oberflächeninhalt der Pyramide zu berechnen.

69. Durch eine Grundkante $a = 6{,}4$ cm eines geraden regelmäßigen dreiseitigen Prismas wird eine Ebene gelegt, die gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\alpha = 51{,}3°$ geneigt ist. Welches Volumen hat die abgeschnittene Pyramide?

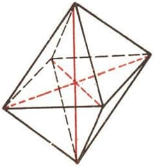


Abb. 2.61.

70. Das regelmäßige Vierflach (Tetraeder) ist eine dreiseitige Pyramide, deren Oberfläche aus vier gleichseitigen Dreiecken besteht.
a) Wie groß sind das Volumen und der Oberflächeninhalt, wenn jede Seitenkante die Länge $a = 4{,}0$ cm hat (Abb. 2.60.)?
b) Berechnen Sie die Neigungswinkel, die jeweils eine Kante und eine Seitenfläche bilden!
c) Untersuchen Sie, in welchem Verhältnis die Höhen eines Tetraeders einander schneiden!
d) Drücken Sie das Volumen eines Tetraeders durch die Höhe aus!

71. Werden zwei gleich hohe Pyramiden, deren Grundflächen kongruente Quadrate sind und deren Seitenkanten die Länge der Quadratseite a haben, mit den Grundflächen aneinandergesetzt, so entsteht ein von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzter regelmäßiger Achtflächner (Oktaeder). Wie groß sind Oberflächeninhalt A_O und Volumen V des Oktaeders (Abb. 2.61.)?

72. An ein Stück Quadratstahl 50 mm × 50 mm soll eine pyramidenförmige Spitze von 114 mm Höhe angeschweißt werden. Wieviel wiegt das Werkstück bei einer Gesamtlänge von 250 mm $\left(\text{Dichte } 7{,}85\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$?

73. Das Volumen einer schiefen Pyramide beträgt 0,75 m^3, die Grundfläche 0,5 m^2. Die Höhe ist zu berechnen.

74. Die Grundfläche einer schiefen Pyramide ist ein unregelmäßiges, aber axialsymmetrisches Fünfeck *ABCDE*, dessen Diagonale $\overline{EC} = 8{,}00$ dm der Grundkante $\overline{AB} = 10{,}00$ dm parallel läuft. Die einander entsprechenden Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AE}$ sind je 3,00 dm und $\overline{ED}$ und $\overline{CD}$ je 4,60 dm lang. Berechnen Sie das Volumen der 8,70 dm hohen Pyramide!

75. Von einem dreiseitigen Pyramidenstumpf kennt man die Grundkante $a = 8{,}0$ cm, die Deckkante $b = 5{,}0$ cm und die Höhe $h = 7{,}0$ cm. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Pyramidenstumpfes!

76. Ein dreiseitiger Pyramidenstumpf hat 7,8 cm Grundkante, die Deckkante beträgt 5,9 cm und die Seitenkante 10,4 cm. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Pyramidenstumpfes!

77. Grund- und Deckfläche eines geraden Pyramidenstumpfes sind Quadrate mit den Seiten 7,5 cm und 3,8 cm. Die Seitenkante bildet mit der Grundfläche einen Winkel von 72°. Wie groß sind Volumen und Oberflächeninhalt des Körpers?

78. Von einem Pyramidenstumpf kennt man die quadratische Grundfläche ($a = 20{,}0$ cm) und die Körperhöhe $h = 6{,}0$ cm, außerdem den Winkel $\alpha = 60°$, unter dem die Seitenflächen gegen die Grundfläche geneigt sind. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt!

79. Wie ändert sich die Kantenlänge der Deckfläche des Pyramidenstumpfes in Aufgabe 78, wenn der Winkel α nicht der Neigungswinkel der Seitenfläche gegen die Grundfläche, sondern der Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Diagonale der Grundfläche ist?

80. Ein behauener Sandsteinblock $\left(\varrho = 2{,}5\ \frac{\text{t}}{\text{m}^3}\right)$ ist 2,10 m hoch. Grund- und Deckfläche sind Quadrate von 1,60 bzw. 0,72 m Seitenlänge. Berechnen Sie seine Masse!

81. Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche eine Quadratfläche von 6,0 cm Seitenlänge und die Seitenkante $s = 5{,}0$ cm. Die Pyramide wird in halber Höhe von einer Ebene durchschnitten. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Pyramidenstumpfes!

82. Ein Abfülltrichter hat die in Abbildung 2.62. gezeigte Form. Er soll von außen gespritzt werden. Wieviel Farbmasse wird gebraucht, wenn erfahrungsgemäß 150 g Farbe je Quadratmeter benötigt werden?

83. Ein rechtwinkliger Feuerlöschteich von 3 m Tiefe hat eine Länge von 30 m und eine Breite von 15 m. Auf dem Boden ist er dagegen 20 m lang und 10 m breit. Wieviel Kubikmeter Wasser faßt der Teich? Berechnen Sie die Wassermenge **a)** nach der Näherungsformel

$$V \approx \frac{A_G + A_D}{2} \cdot h\,,$$

b) nach der Formel $V = \frac{h}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D\right)$,

und stellen Sie fest, wieviel Prozent die Abweichung vom genauen Wert beträgt! Kann das mit der Näherungsformel erzielte Ergebnis noch als zufriedenstellend bezeichnet werden?

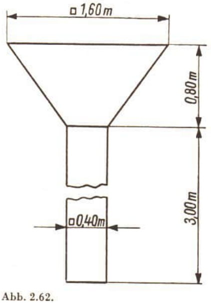


Abb. 2.62.

84. Beim Zeichnen von Körpernetzen tritt oft die Frage auf, ob aus einer gegebenen Anzahl von Vielecken mit vorgeschriebener Seitenzahl ein Körper, d. h. das Flächenmodell eines Körpers, herstellbar ist.

Zwischen der Anzahl der Ecken, der Anzahl der Flächen und der Anzahl der Kanten prismatischer Körper besteht ein wichtiger Zusammenhang, den LEONHARD EULER (geb. 1707 in Basel, gest. 1783 in Petersburg) für alle konvexen[1] Polyeder bewiesen hat. Er wird als EULERscher Polyedersatz bezeichnet und lautet:

Die Summe der Ecken- und Flächenzahl eines Körpers ist gleich der um 2 vermehrten Anzahl der Kanten.

$$E + F = K + 2$$

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich durch folgende Überlegung nachweisen:
Wir schneiden den in Abbildung 2.63. dargestellten Körper auf und führen von S_1 aus Schnitte entlang den Kanten nach den Ecken A, B, C und D. Von hier aus werden die Schnitte nach den nächsten erreichbaren Ecken so fortgesetzt, daß zu jeder Ecke nur ein Schnitt führt.

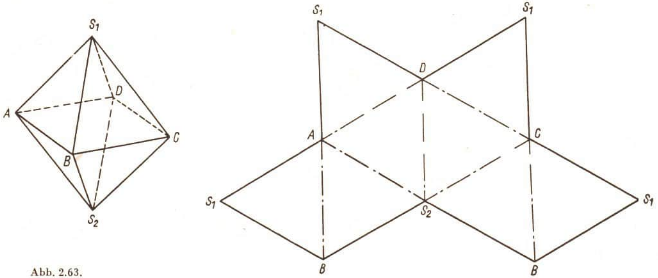


Abb. 2.63.

Anderenfalls würden wir Teilflächen vollkommen abtrennen. Bis zum Erreichen der letzten Ecke sind $E - 1$ Schnitte erforderlich, und die das Netz des Körpers bildenden Teilflächen hängen noch mit $F - 1$ Kanten zusammen. Damit ergibt sich die Kantenzahl aus

$$(E - 1) + (F - 1) = K \quad \text{und daraus} \quad E + F = K + 2.$$

a) Bestätigen Sie die Richtigkeit des Satzes durch Ergänzung der folgenden Zusammenstellung!

Körper	Ecken + Flächen = Kanten + 2
Quader	
sechsseitiges Prisma	
dreiseitige Pyramide	
fünfseitiger Pyramidenstumpf	
sechsseitige Doppelpyramide	

b) Wieviel Kanten hat ein ebenflächiger konvexer Körper mit 20 Ecken und 12 Flächen?

[1] Bei konvexen Körpern liegt die Verbindungsgerade je zweier Körperpunkte vollständig innerhalb des Körpers.

Schülerauftrag

Es gibt unendlich viele **regelmäßige Polygone** (Vielecke), jedoch nur fünf regelmäßige Polyeder, die auch die platonischen Körper (PLATO, griechischer Philosoph um 300 v. u. Z.) genannt werden.
Die **regelmäßigen Polyeder** werden von regelmäßigen kongruenten Vielecken begrenzt:

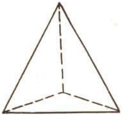


Abb. 2.64.

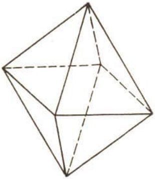


Abb. 2.65.

Der **Vierflächner** oder das **Tetraeder** wird von vier gleichseitigen kongruenten Dreiecken begrenzt (Abb. 2.64.).
Der **Achtflächner** oder das **Oktaeder** wird von acht gleichseitigen kongruenten Dreiecken begrenzt (Abb. 2.65.).
Der **Zwanzigflächner** oder das **Ikosaeder** wird von zwanzig gleichseitigen kongruenten Dreiecken begrenzt (Abb. 2.66.).
Der **Sechsflächner** (Würfel) oder das **Hexaeder** wird von sechs regelmäßigen kongruenten Vierecken (Quadraten) begrenzt (Abb. 2.67.).
Der **Zwölfflächner** oder das **Dodekaeder** wird von zwölf regelmäßigen kongruenten Fünfecken begrenzt (Abb. 2.68.).

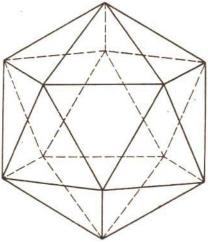


Abb. 2.66.

Abb. 2.67.

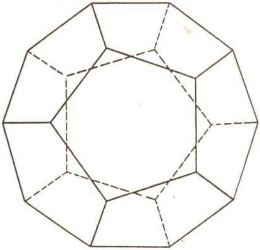


Abb. 2.68.

Jeder Eckpunkt ist

beim Tetraeder zugleich Scheitelpunkt von drei Winkeln (3mal 60°),
beim Oktaeder Scheitelpunkt von vier Winkeln (4mal 60°),
beim Ikosaeder Scheitelpunkt von fünf Winkeln (5mal 60°),
beim Hexaeder Scheitelpunkt von drei Winkeln (3mal 90°),
beim Dodekaeder Scheitelpunkt von drei Winkeln (3mal 108°).

a) Führen Sie den Nachweis, daß mehr als fünf regelmäßige Polyeder nicht möglich sind!
Anleitung: Zur Bildung einer körperlichen Ecke sind mindestens drei Seitenflächen erforderlich, ferner muß die Summe der Kantenwinkel einer solchen Ecke immer kleiner als 360° sein.

b) Fertigen Sie Flächenmodelle der platonischen Körper an!

85. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt einer Sandsteinsäule! Sie ist aus einem Sandsteinprisma gearbeitet, der Achsenschnitt in Abbildung 2.69. enthält die Maße in Dezimetern. Die Grundkante der Säule ist gleich der Grundkante des Prismas.

86. Ein Stück Stahl hat die in Abbildung 2.70. wiedergegebene Gestalt (Maße in mm). Wie berechnet man am einfachsten sein Volumen?

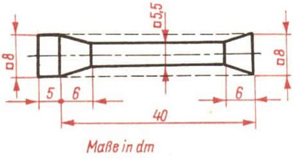


Abb. 2.69.

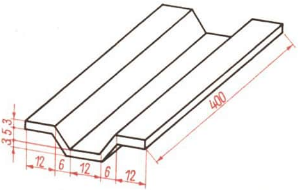


Abb. 2.70.

87. Ein aus Stahl $\left(\varrho = 7{,}85\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ gefertigter Einsatzamboß hat die in Abbildung 2.71. gezeigte Form. Berechnen Sie seine Masse m!

88. Berechnen Sie durch geeignete Zerlegung das Volumen des in der Abbildung 2.72. dargestellten Werkstücks (Maße in mm)!

89. Berechnen Sie die Masse des in der Abbildung 2.73. dargestellten und aus zwei Kronglasprismen Kr und einem Flintglasprisma Fl zusammengesetzten Geradsichtprismas!
$\left(\varrho_{\mathrm{Kr}} = 2{,}8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3},\ \varrho_{\mathrm{Fl}} = 3{,}5\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$

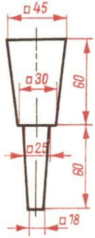


Abb. 2.71.

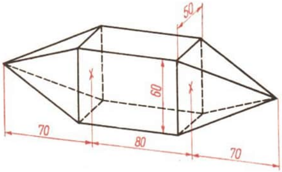


Abb. 2.72.

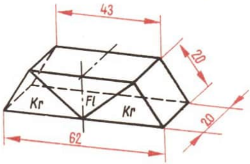


Abb. 2.73.

90. In der Abbildung 2.74. ist die dimetrische Projektion eines Werkstücks gegeben. Berechnen Sie sein Volumen (Maße in cm)!

91. Beim Wiederaufbau von Kulturstätten müssen oftmals scheitrechte (d. h.: nicht gewölbte) Mauerbogen aus Naturstein hergestellt werden, bei denen sogenannte Hakensteine Verwendung finden (Abb. 2.75., Maße in cm).

a) Berechnen Sie die fehlenden Kantenlängen des perspektivisch gezeichneten Hakensteines!

b) Berechnen Sie die Masse des Steines $\left(\varrho = 2{,}5\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\right)$!

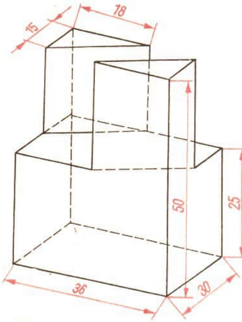


Abb. 2.74.

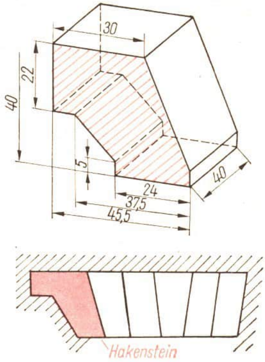


Abb. 2.75.

2.7. Krummflächig begrenzte Körper

Läßt man beliebige Flächenstücke um eine Achse rotieren, so entstehen **Drehkörper,** auch **Rotationskörper** genannt (Abb. 2.76. bis 2.79.). Rotationskörper gehören zu den krummflächig begrenzten Körpern. Rotationskörper entstehen auch bei Dreharbeiten auf der Drehmaschine.

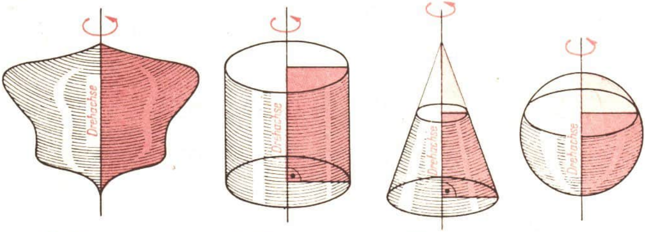


Abb. 2.76. Abb. 2.77. Abb. 2.78. Abb. 2.79.

Kreiszylinder

Rotiert ein Rechteck um eine seiner Seiten, so erzeugt die Rechteckfläche einen **geraden Kreiszylinder.**

Ein gerader Kreiszylinder wird von zwei gleich großen, in parallelen Ebenen liegenden Kreisflächen (Grund- und Deckfläche) und von einer gleichmäßig gekrümmten

Fläche, dem Mantel, begrenzt. Sind die parallel liegenden Flächen elliptisch, so spricht man von elliptischen Zylindern. (Da wir uns jedoch nur mit geraden Kreiszylindern beschäftigen werden, sprechen wir im folgenden einfach nur von Zylindern.) In der Abbildung 2.80. ist ein Zylinder im Grund- und Aufriß und im Schrägbild dargestellt. Die beiden Kreisflächen bilden die Grund- und Deckfläche, die gekrümmte Fläche den Mantel des Zylinders. Der Abstand der beiden Kreisebenen heißt die Höhe, die Verbindungsstrecke der Kreismittelpunkte die Achse des Zylinders. Durch jeden Punkt des Mantels läßt sich eine und nur eine Parallele zur Zylinderachse legen; sie ist gleich der Höhe des Zylinders und wird **Mantellinie** s genannt. Ein Zylinder heißt gerade, wenn die Achse senkrecht auf der Grundfläche steht. Im anderen Falle heißt er schief (Abb. 2.81.). Wird der Mantel längs einer Mantellinie aufgeschnitten, so kann er in die Ebene ausgebreitet werden. Als Abwicklungsfläche erhält man eine Rechteckfläche, deren eine Seite gleich dem Kreisumfang $2\pi r = \pi d$ des Grundkreises und deren andere Seite gleich einer Mantellinie s ist (Abb. 2.82.). Da die Länge der Mantellinie mit der Zylinderhöhe h übereinstimmt, ergibt sich als

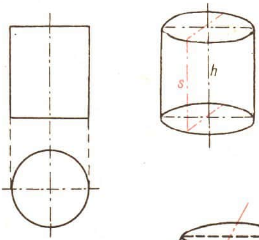


Abb. 2.80.

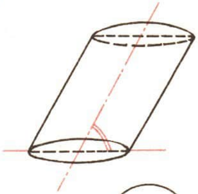


Abb. 2.81.

Mantel des Zylinders: $A_M = 2\pi r h$
oder $A_M = \pi d h$.

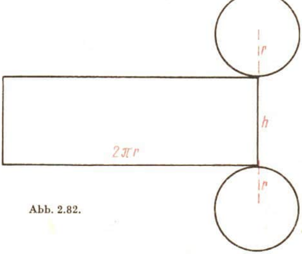


Abb. 2.82.

Da in der Praxis bei zylindrischen Körpern der Durchmesser d meist mit dem Meßschieber festgestellt wird, bevorzugt man die Formel, die den Grundkreisdurchmesser d enthält. Die Abbildung 2.82. zeigt das Netz eines Zylinders. Es besteht aus zwei gleich großen Kreisflächen, der Grund- und Deckfläche, sowie aus dem Mantel. Die Oberfläche A_O setzt sich aus der Summe dieser Begrenzungsflächen zusammen. Es gilt also

$$A_O = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

und nach Ausklammern von $2\pi r$ erhält man den

Oberflächeninhalt des Zylinders: $A_O = 2\pi r(r + h)$
oder $A_O = \pi d\left(\frac{d}{2} + h\right)$.

a) Welche Symmetrieeigenschaften hat ein gerader Zylinder?

b) Stellen Sie einen Zylinder, dessen Achsenschnitt quadratisch ist, einen sogenannten gleichseitigen Zylinder, im Grund- und Aufriß dar! Wie verhalten sich Grundkreisradius und Höhe zueinander?

Beispiel 1:

Der Achsenschnitt einer zylindrischen Konservendose ist ein Quadrat von 11 cm Seitenlänge. 10 000 Dosen sollen mit einem Papierstreifen als Etikett umklebt werden. Welche Papiermenge wird benötigt? Wie groß ist der Blechbedarf zur Herstellung der Dosen, wenn der Verschnitt unberücksichtigt bleibt? Den Papierbedarf für eine Dose erhalten wir durch Berechnung des Mantels.

$$A_M = \pi d \cdot h = \pi \cdot 11\text{ cm} \cdot 11\text{ cm} = \pi \cdot 121\text{ cm}^2 = 380{,}1\text{ cm}^2$$

$$A_O = 2\,\frac{\pi}{4}\,d^2 + A_M = \pi\,\frac{121}{2}\text{ cm}^2 + 380{,}1\text{ cm}^2 = 570{,}2\text{ cm}^2$$

Ergebnis: Es werden 570 m² Blech und 380 m² Papier benötigt.

Zur Herleitung der Formel für die Berechnung des Zylindervolumens kann man einen geraden und einen schiefen Zylinder mit einem quadratischen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe vergleichen (Abb. 2.83.). Es gelten dann sinngemäß die schon für die Prismen gewonnenen Sätze:

Jeder der drei Körper wird durch Parallelebenen zur Grundfläche in kongruenten Schnittfiguren geschnitten.

Jede Ebene, die parallel zur Ebene der Grundfläche verläuft, ergibt für die beiden Zylinder und das Prisma Schnittfiguren, die alle den gleichen Flächeninhalt haben.

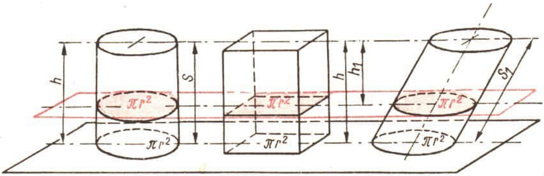


Abb. 2.83.

Nach dem Satz des Cavalieri folgt daraus, daß das Volumen der drei Körper gleich ist. Aus der Volumenformel für das Prisma $V = A_G \cdot h$ erhalten wir wegen

$A_G = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4}\,d^2$ die Formel für das

Volumen des Zylinders: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

oder $V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$.

Diese Formel gilt für alle Zylinder, gleichgültig, ob sie gerade sind oder schief. Es ist jedoch zu beachten, daß die Höhe h nur bei geraden Zylindern gleich der Länge der Mantellinie s ist. Allgemein ist h der Abstand von Grund- und Deckfläche.

Beispiel 2:

Der Mantel eines zylindrischen Kessels mißt 7,00 m², seine Länge 2,50 m. Welches Volumen hat er?

Gegeben: $A_M = 7{,}00\ \mathrm{m}^2$; $h = 2{,}50\ \mathrm{m}$.

Gesucht: V (in m³).

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Der unbekannte Durchmesser läßt sich aus dem Mantelinhalt berechnen.

$$A_M = \pi \cdot d \cdot h$$

$$d = \frac{A_M}{\pi \cdot h} = \frac{7{,}00\ \mathrm{m}^2}{3{,}14 \cdot 2{,}50\ \mathrm{m}} = \frac{2{,}8\ \mathrm{m}}{3{,}14} \approx 0{,}9\ \mathrm{m}$$

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}81 \cdot 2{,}5\ \mathrm{m}^3$$

$$= \frac{2{,}545 \cdot 25\ \mathrm{m}^3}{4}$$

$$V \approx 1{,}591\ \mathrm{m}^3$$

Ergebnis: Der Kessel hat ein Fassungsvermögen von 1,591 m³.

Das Volumen des geraden **Hohlzylinders** (Abb. 2.84.) wird als Differenz aus dem Volumen des Vollzylinders mit dem größeren Grundkreisradius r_1 und dem Volumen des Vollzylinders mit dem kleineren Grundkreisradius r_2 berechnet. Ist h die gemeinsame Höhe beider Zylinder, so folgt

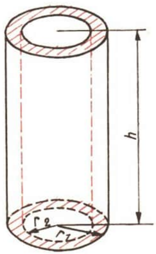


Abb. 2.84.

$$V = \pi r_1^2 \cdot h - \pi r_2^2 \cdot h$$

und nach Ausklammern von πh

Volumen des Hohlzylinders: $V = \pi \cdot h(r_1^2 - r_2^2) \quad (r_1 > r_2)$

oder $V = \frac{\pi}{4} \cdot h(d_1^2 - d_2^2) \quad (d_1 > d_2)$.

Beispiel 3:

Ein Rohr aus Grauguß $\left(\varrho = 7{,}2\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ wiegt 156 kg. Der Außendurchmesser beträgt 140 mm, die Wanddicke 10 mm. Die Rohrlänge ist zu berechnen.

Aus der Masse m kann das Volumen V und daraus die Länge h bestimmt werden.

$$m = \varrho \cdot V = \varrho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot h\,(d_1^2 - d_2^2)$$

$$h = \frac{m}{\varrho \cdot \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)} = \frac{156\,000}{7{,}2 \cdot \frac{3{,}14}{4} \cdot (14^2 - 12^2)}\ \mathrm{cm}$$

Der Ausdruck $(14^2 - 12^2)$ kann in $(14 + 12)(14 - 12) = 26 \cdot 2 = 52$ umgeformt werden.

$$h = \frac{4 \cdot 156\,000}{7{,}2\ \mathrm{g} \cdot 3{,}14 \cdot 52}\ \mathrm{cm}$$

$$h = \frac{12\,000\ \mathrm{cm}}{22{,}6} \approx 530{,}50\ \mathrm{cm}$$

Ergebnis: Die Rohrlänge beträgt rund 5,31 m.

Schiefe Kreiszylinder

Nach den im vorangegangenen Abschnitt erfolgten Erklärungen gilt für das Volumen des schiefen Kreiszylinders die Formel für das Volumen des geraden Kreiszylinders. Man hat als Höhe nur den Abstand von Grund- und Deckfläche einzusetzen.
Für den Mantel und die Oberfläche des schiefen Kreiszylinders gibt es keine einfachen algebraischen Formeln.

Führen Sie senkrecht zur Achse eines schiefen Kreiszylinders einen Schnitt!

a) Welche Gestalt hat die Schnittfigur?

b) Weshalb kann der schiefe Kreiszylinder nicht als Rotationskörper aufgefaßt werden?

c) Stellen Sie Grund- und Aufriß eines schiefen Kreiszylinders dar, dessen Projektion der Deckfläche außerhalb der Grundfläche liegt!

Beispiel 4:

Bei einem schiefen Kreiszylinder sind Grund- und Deckfläche so gegeneinander versetzt, daß ihre Projektionen einander gerade berühren (Abb. 2.85.). Die Mantellinie ist mit $s = 3r$ gegeben. a) Unter welchem Winkel α ist die Achse gegen die Grundfläche geneigt? b) Wie groß ist das Volumen?

a) Der Neigungswinkel α ergibt sich mit

$$\cos\alpha = \frac{2r}{3r} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6667$$
$$\alpha = 48{,}18^\circ$$

Die Achse ist unter einem Winkel von 48,18° gegen die Grundfläche geneigt.

b) Die unbekannte Höhe h erhält man aus der Beziehung

$$h^2 = s^2 - (2r)^2 = 9r^2 - 4r^2 = 5r^2$$
$$h = r\sqrt{5}.$$

Damit ergibt sich das gesuchte Volumen

$$V = \pi r^2 h$$
$$= \pi r^2 \cdot r\sqrt{5}$$
$$V = \pi r^3 \sqrt{5}.$$

Ergebnis: Das Volumen des schiefen Kreiszylinders beträgt $V = \pi r^3 \sqrt{5}$.

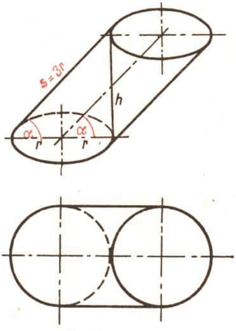


Abb. 2.85.

Kreiskegel

Rotiert ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten, so beschreibt die Dreieckfläche einen **geraden Kreiskegel** (Abb. 2.78.).
Ein Kreiskegel wird von einer Kreisfläche, der Grundfläche, und von einer regelmäßig gekrümmten Fläche, dem Mantel, begrenzt.

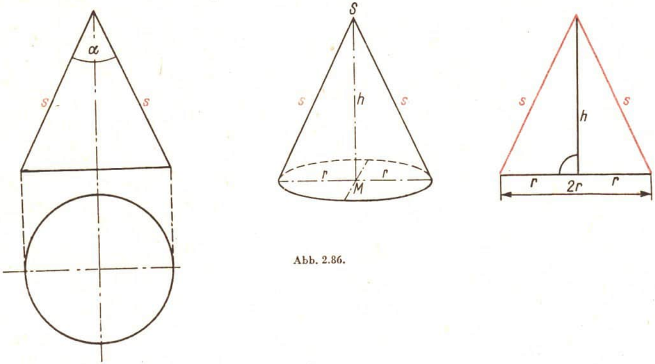


Abb. 2.86.

Wie beim Zylinder lassen sich auch Kegel erzeugen, deren Grundfläche nicht kreisförmig ist. (Wir werden jedoch nur Kreiskegel behandeln, die wir im folgenden kurz Kegel nennen wollen.)
Alle von der **Spitze** S des Kegels zum Grundkreis verlaufenden Geraden liegen auf dem Mantel und heißen **Mantellinien** s (Abb. 2.86.).[1] Der Winkel α an der Spitze ist der **Öffnungswinkel** des Kegels. Der Abstand der Spitze von der Grundfläche wird Höhe genannt. Die durch die Spitze S und den Grundkreismittelpunkt M verlaufende Gerade ist die **Achse** des Kegels. Steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche, dann ist der Kegel **gerade,** im anderen Falle ist er schief (Abb. 2.87.).

a) Führen Sie Achsenschnitte (Abb. 2.86.) durch den geraden Kegel!
Was für Schnittfiguren ergeben sich?
Beweisen Sie mit Hilfe der Schnittfiguren, daß alle Mantellinien gleich lang sind!

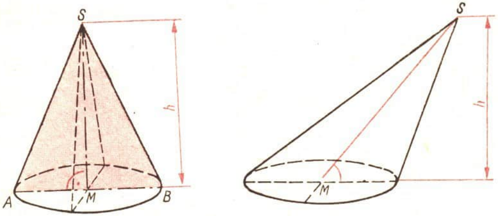


Abb. 2.87.

[1] Mantellinien sind Strecken mit der Länge $\overline{SP_i} = s$, wobei die P_i auf dem Grundkreis liegen.

b) Führen Sie Schnitte parallel zur Grundfläche!
Was läßt sich über die Schnittfiguren aussagen?
Wie verhalten sich die Schnittflächen in bezug auf den jeweiligen Abstand, den sie von der Grundfläche haben? Anleitung: Es sind analoge Betrachtungen wie bei der Pyramide anzustellen.

Schneidet man den gekrümmten Mantel eines geraden Kegels längs einer Mantellinie s auf, so läßt sich der Mantel in die Ebene abwickeln (Abb. 2.88.). Der abgewickelte Kegelmantel ist eine Kreissektorfläche, die die Mantellinie s zum Radius hat und deren Bogen b gleich dem Umfang des Grundkreises ist. Die Berechnung des Flächeninhalts des Mantels läuft also auf die Berechnung eines Kreissektors hinaus (Abb. 2.89.).

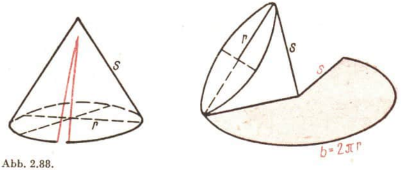


Abb. 2.88.

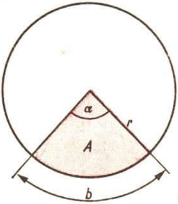


Abb. 2.89.

a) Leiten Sie die Formel für die Länge des Kreisbogens b her!
b) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel die Bogenlänge eines Kreissektors mit dem Zentriwinkel $\alpha = 100°$ und dem Radius $r = 5{,}0$ cm!

Der Flächeninhalt des Kreissektors hängt von der Größe des zugehörigen Zentriwinkels α ab, also auch von der Größe des zugehörigen Bogens b. Deshalb gilt:

Kreissektorfläche : Bogen = Kreisfläche : Kreisumfang

$$A : b = \pi r^2 : 2\pi r$$
$$A \cdot 2\pi r = b \cdot \pi r^2$$
$$A = \frac{b \cdot \pi r^2}{2\pi r}$$

Flächeninhalt des Kreissektors: $A = \frac{b \cdot r}{2}$

Wird $b = \frac{\pi r \alpha°}{180°}$ gesetzt, erhält man

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha°}{360°}$$

Der Durchmesser eines Kreises beträgt $d = 72{,}0$ cm. Welchen Flächeninhalt hat der zum Zentriwinkel $\alpha = 40°$ gehörige Kreissektor A?

Setzt man in die Formel für den Flächeninhalt des Kreissektors $A = \frac{b \cdot r}{2}$ für $b = 2\pi r = \pi d$ und für $r = s$, dann ergibt sich als Formel für den Flächeninhalt des Mantels eines Kegels

$$A_M = \frac{2\pi r \cdot s}{2}.$$

Durch Kürzen erhält man den

Mantel des geraden Kreiskegels: $A_M = \pi \cdot r \cdot s$
oder $A_M = \frac{\pi}{2} \cdot d \cdot s$.

Beispiel 5:

Ein trichterförmiges Filter soll einen Oberflächeninhalt von 150 cm² erhalten. Wie groß muß der obere Trichterdurchmesser für das Filter mindestens gewählt werden, wenn der Achsenschnitt des Trichters ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck (Abb. 2.90.) ist?
Der Oberflächeninhalt des Filters entspricht dem Mantel eines Kegels.

$$A_M = \frac{\pi}{2} \cdot d \cdot s.$$

In dieser Gleichung ist außer dem zu suchenden Durchmesser d noch die Mantellinie s unbekannt. Es gilt jedoch

$$2s^2 = d^2$$
$$s^2 = \frac{d^2}{2}$$
$$s = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

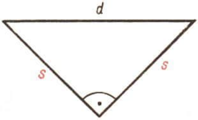


Abb. 2.90.

Nach dem Einsetzen dieses Ausdrucks für s und des gegebenen Wertes für A_M in die obige Gleichung erhält man

$$150\ \text{cm}^2 = \frac{\pi}{2} \cdot d \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

und daraus nach Umformung

$$d^2 = \frac{600}{\sqrt{2} \cdot \pi}\ \text{cm}^2 = \frac{600 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \pi}\ \text{cm}^2 = \frac{300 \cdot \sqrt{2}}{\pi}\ \text{cm}^2$$
$$d = \sqrt{\frac{300 \cdot \sqrt{2}}{\pi}\ \text{cm}^2} \approx \sqrt{\frac{423}{\pi}}\ \text{cm} \approx \sqrt{135}\ \text{cm} \approx 11{,}6\ \text{cm}.$$

Ergebnis: Der obere Trichterdurchmesser muß rund 11,6 cm betragen.

Zeichnen Sie Kreissektoren mit dem Radius $r = 6{,}0$ cm und den Zentriwinkeln a) $\alpha = 120°$, b) $\alpha = 180°$, c) $\alpha = 270°$, und falten Sie daraus Kegel! Vergleichen Sie die entstehenden Kegelformen miteinander!

Aus der Übung geht hervor:

> Wird der Zentriwinkel α größer, dann wird der Kegel flacher und damit der Öffnungswinkel γ des Kegels größer. Zwischen den beiden Winkeln α und γ besteht eine Abhängigkeit, die auf Zusammenhänge zwischen Mantel und Kegelform führt (Abb. 2.91.).

Der Mantel des geraden Kegels kann in der Form

$$A_M = \pi r s ,$$

aber auch als Kreissektorfläche mit dem Radius s und dem Zentriwinkel α geschrieben werden, also

$$A_M = \frac{\pi s^2 \alpha^\circ}{360^\circ}.$$

Setzt man die Ausdrücke gleich:

$$\pi r s = \frac{\pi s^2 \alpha^\circ}{360^\circ},$$

so erhält man nach dem Kürzen mit πs^2 die Proportion

$$\frac{r}{s} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}.$$

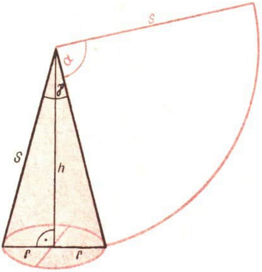


Abb. 2.91.

Sie besagt:

> Beim geraden Kreiskegel verhält sich der Grundkreisradius r zur Mantellinie s wie der Mantelwinkel α° zum Vollwinkel.

Für das Verhältnis zwischen der Grundfläche A_G und dem Mantel A_M findet man

$$\frac{A_G}{A_M} = \frac{\pi \cdot r^2}{\pi \cdot r \cdot s}, \quad \text{also} \quad \frac{A_G}{A_M} = \frac{r}{s}.$$

Das heißt, der Grundflächenradius r verhält sich zur Mantellinie s genauso wie die Grundfläche zum Mantel.
Die gewonnenen Erkenntnisse ermöglichen es, die Abwicklung eines geraden Kegels auf einfache Weise herzustellen.

Beispiel 6:

Es ist das Netz des geraden Kegels mit dem Radius $r = 1{,}6$ cm und der Höhe $h = 4{,}1$ cm zu zeichnen.
Zunächst berechnet man nach dem Satz des Pythagoras die Mantellinie s (Abb. 2.92.).

$$s^2 = r^2 + h^2$$
$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$s = \sqrt{19{,}37}\ \text{cm} \approx 4{,}4\ \text{cm}.$$

Aus der Proportion

$$\frac{r}{s} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

erhält man nach Einsetzen der Werte für r und s den Zentriwinkel α des Kreisausschnitts:

$$\frac{1{,}6\ \text{cm}}{4{,}4\ \text{cm}} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

$$\alpha^\circ = \frac{1{,}6\ \text{cm} \cdot 360^\circ}{4{,}4\ \text{cm}} \approx 131^\circ.$$

Nun kann die Konstruktion des Mantels auf bekannte Weise erfolgen (Abb. 2.93.).

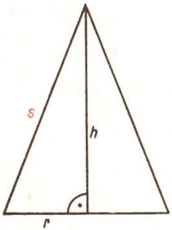


Abb. 2.92.

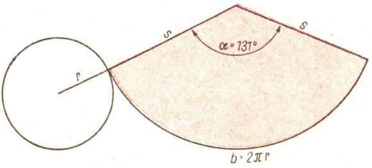


Abb. 2.93.

1. *Konstruieren Sie das Netz eines geraden Kegels mit dem Radius $r = 3{,}0$ cm und der Höhe $h = 8{,}0$ cm! Schneiden Sie es aus, und fügen Sie es zu einem Modell des Körpers zusammen!*
2. *Zeichnen Sie auf den abgewickelten Mantel eines geraden Kegels, a) dessen Höhe, b) dessen Mantellinie gleich dem Grundkreisdurchmesser ist, je eine Schar von Mantellinien und eine Schar von Kreisbögen um die Kegelspitze S! Beide Linienscharen schneiden einander rechtwinklig (warum?). Was ergeben die beiden Linienscharen auf den aufgewickelten Kegelmänteln? Bleibt der rechtwinklige Schnitt der beiden Kurvenscharen bei Aufwicklung der Mäntel erhalten?*

Die Oberfläche des geraden Kegels setzt sich aus dem Mantel und dem Grundkreis zusammen: $A_O = \pi r s + \pi r^2$.

Oberflächeninhalt des geraden Kegels: $A_O = \pi r (r + s)$

oder $A_O = \frac{\pi}{4} \cdot d(d + 2s)$.

Diese Formeln gelten nur für gerade Kreiskegel. Der Mantel und die Oberfläche eines schiefen Kegels lassen sich durch einfache algebraische Formeln nicht ausdrücken.

Beispiel 7:

Ein halbkreisförmiges Blech mit dem Radius 90 mm wird zu einem Kegelmantel zusammengerollt und mit einem Grundkreis versehen. Oberflächeninhalt und Öffnungswinkel des Kegels sind zu bestimmen.
Den Radius r des Kegels erhalten wir aus der Beziehung

$$\frac{r}{s} = \frac{\alpha°}{360°}$$

$$r = \frac{90 \cdot 180}{360} \text{ mm} = 45 \text{ mm}$$

$$A_O = \pi r (r + s)$$

$$A_O = \pi \cdot 45 (45 + 90) \text{ mm}^2$$

$$A_O = \pi \cdot 6075 \text{ mm}^2 \approx 19085 \text{ mm}^2.$$

Der Oberflächeninhalt beträgt rund 191 cm².

Um den Öffnungswinkel γ zu bestimmen, zeichnen wir den Achsenschnitt. Er stellt in dieser Aufgabe ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 90 mm dar, da $\alpha = 2r = 2 \cdot 45$ mm $= 90$ mm ist.
Die beiden anderen Seiten als Mantellinien sind ebenfalls 90 mm lang. Der gesuchte Öffnungswinkel ist demnach $\gamma = 60°$.

Das Beispiel 7 zeigt:

Der Mantel eines Kegels, dessen Öffnungswinkel 60° beträgt, ergibt bei der Abwicklung eine halbkreisförmige Fläche.

Die Formel für das Volumen des Kegels kann nach dem Satz von Cavalieri aus der Pyramide gewonnen werden. Die Abbildung 2.94. veranschaulicht den Vergleich zwischen einem beliebigen Kegel mit einer Pyramide gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Aus der Formel für das Volumen der Pyramide

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$$

folgt wegen $A_G = \pi r^2$ sofort das

Volumen des Kegels: $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$

oder $V = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$.

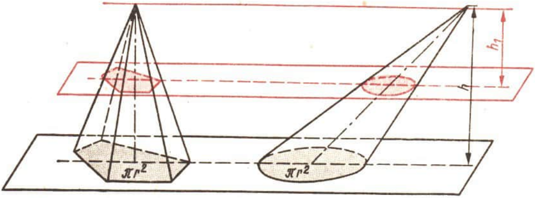


Abb. 2.94.

Diese Formeln haben auch für schiefe Kegel Gültigkeit. Man kann sich einen geraden Kreiskegel auch aus einer regelmäßigen geraden Pyramide entstanden denken, indem man der Grundfläche der Pyramide einen Kreis mit dem Flächeninhalt A umbeschreibt. Dann wird das regelmäßige Vieleck schrittweise durch regelmäßige Vielecke mit größerer Eckenzahl ersetzt, wobei die Ecken stets auf dem Kreis liegen sollen (Abb. 2.95.).

Für alle Inhalte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ der von den Vielecken umschlossenen Flächenstücke gilt offenbar $a_n < A$. Dabei wird A als *obere Schranke* der Folge der a_n bezeichnet. In gleicher Weise läßt sich der Kreis von regelmäßigen Tangentenvielecken mit den Inhalten $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ einhüllen, für die sämtlich $A_n > A$ zutrifft. In diesem Falle heißt A die *untere Schranke* der Folge der A_n. Es gilt also

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < A < A_n < \ldots < A_3 < A_2 < A_1.$$

Bei wachsendem n schmiegen sich die regelmäßigen Sehnen- und Tangentenvielecke dem Kreise immer enger an. Wenn auch keines der a_n oder A_n gleich A ist, so unterscheiden sich doch alle a_n und A_n, für die n hinreichend groß ist, beliebig wenig von A. Man sagt, beide Folgen von Flächeninhaltswerten *streben gegen A* oder *haben den Grenzwert A*.

Führt man die Berechnung der dem Kreis ein- und umbeschriebenen Vielecksflächen durch, so erhält man die in der nachstehenden Tabelle auf drei Dezimalen gekürzten Zahlenwerte.

n	a_n	A_n
6	$2{,}598 \cdot r^2$	$3{,}464 \cdot r^2$
12	$3{,}000 \cdot r^2$	$3{,}215 \cdot r^2$
24	$3{,}106 \cdot r^2$	$3{,}160 \cdot r^2$
48	$3{,}133 \cdot r^2$	$3{,}146 \cdot r^2$
96	$3{,}139 \cdot r^2$	$3{,}143 \cdot r^2$

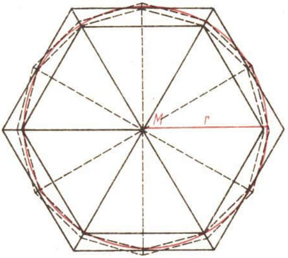


Abb. 2.95.

Wie man erkennt, sind die Flächeninhalte proportional dem Quadrat des Radius (r^2). Für die Kreisfläche geht dieser Proportionalitätsfaktor in π über.[1] Es ist also der Inhalt der Kreisfläche $A = \pi r^2$. Entsprechend nähert sich die regelmäßige Pyramide einem Kreiskegel. Derartige Grenzprozesse, bei denen die Anzahl irgendwelcher Zahlen größer wird als jede angebbare Zahl, kommen sehr häufig vor und nehmen in der Mathematik eine zentrale Stellung ein. Sie lassen sich jedoch mit den mathematischen Kenntnissen, die uns auf dieser Stufe zur Verfügung stehen, noch nicht exakt fassen.

[1] Diese Gedanken zur Berechnung des Inhalts einer Kreisfläche werden in ihrem prinzipiellen Gehalt bereits von ANTIPHON und BRYSON (beide um 430 v. u. Z.) geäußert. ARCHIMEDES (287—217 v. u. Z.) hat dann mit Hilfe dieses Verfahrens für π den Näherungswert $3\frac{10}{71}$ berechnet, indem er die Untersuchung bis zum 96-Eck führte. Etwa um 1600 berechnete LUDOLF VAN CEULEN die Zahl π bis auf 35 Dezimalen genau. Ihm zu Ehren wird π deshalb auch als LUDOLFsche Zahl bezeichnet. Sie ist ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch, man sagt auch, eine transzendente Zahl. Ihre ersten neun Ziffern lauten: $\pi = 3{,}14159265\ldots$ Heute läßt sich π verhältnismäßig leicht mit den Mitteln der höheren Mathematik beliebig genau bestimmen. Kürzlich wurde mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine die Zahl π in nur 96 Stunden sogar auf 2035 Stellen berechnet. Der Wert einer solchen Berechnung ist sehr zweifelhaft. Bei früheren Berechnungen spielte dabei nicht nur die Rekordsucht eine Rolle, sondern auch die Hoffnung, eine Gesetzmäßigkeit in den Ziffern zu entdecken, die jedoch enttäuscht werden mußte.

Beispiel 8:

Ein zu einem geraden Kegel aufgeschütteter Haufen Sand $\left(\varrho = 1{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ soll mit Lastkraftwagen von 3 t Ladefähigkeit abgefahren werden. Um schnell festzustellen, wieviel Fahrten notwendig sind, wird der Umfang des Grundkreises durch Abschreiten auf 24 m geschätzt und die Höhe des Haufens mit 2,5 m angenommen. Wieviel Fahrten sind erforderlich? $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$
Zur Berechnung der Sandmenge, die sich nach der Formel

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

ermitteln läßt, wird der unbekannte Radius r aus der Beziehung

$$u = 2\pi r$$

$$r = \frac{u}{2\pi}$$

gewonnen. Damit wird

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{u^2}{2^2 \cdot \pi^2} \cdot h = \frac{u^2 \cdot h}{12\pi}$$

$$V = \frac{24^2 \cdot 2{,}5}{12 \cdot \frac{22}{7}}\,\text{m}^3 = \frac{420}{11}\,\text{m}^3 \approx 38\,\text{m}^3\,.$$

Die Sandmenge ergibt sich zu

$$m = \varrho \cdot V$$

$$m = 1{,}8 \cdot 38\,\text{t} = 68{,}4\,\text{t}\,.$$

Ergebnis: Der Lastkraftwagen muß 23 Fahrten durchführen.

Beispiel 9:

Die handelsüblichen Einfülltrichter sind so geformt, daß sich in ihren kegelförmigen Teil ein kreisrundes Filterpapier nach zweimaligem Falten und anschließendem Öffnen zu einem Kegel glatt einlegen läßt. Die eine Hälfte des eingelegten Blattes besteht dann aus einfachem, die andere Hälfte aus dreifachem Filterpapier. Wie groß müssen Durchmesser und Seitenlänge des kegelförmigen Teiles sein, wenn der Trichter 1 Liter fassen soll?
Der halbe Umfang des Filterpapiers wird zum Umfang des Kegelgrundkreises. Ist r der Grundkreisradius, s die Länge der Mantellinie, zugleich der Radius des Filterpapiers, und h die Kegelhöhe, so gelten die folgenden drei Gleichungen:

$$\pi \cdot s = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$s = 2 \cdot r$$

und deshalb

$$h = \sqrt{4r^2 - r^2}$$

$$h = r \cdot \sqrt{3}\,.$$

Wird das Volumen des Trichters in Kubikzentimetern gerechnet, dann gilt:

$$1000 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot r \cdot \sqrt{3}}{3},$$

$$r^3 = \frac{3000}{\pi \cdot \sqrt{3}} = \frac{1000 \cdot \sqrt{3}}{\pi}\,.$$

L.	N.	
1000	3,0000	
3	0,2385	+
	3,2385	
π	0,4971	—
r^3	2,7414	: 3
$r = 8{,}20$	0,9138	

Ergebnis: Der kegelförmige Teil des Trichters hat als größten Durchmesser und zugleich als Seitenlänge 16,4 cm. Der Querschnitt des kegelförmigen Trichterteiles ist demnach ein gleichseitiges Dreieck.

Kegelstümpfe

Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so erhält man einen **Kegelstumpf** und den Ergänzungskegel des Stumpfes (Abb. 2.96. und 2.97.). Grund- und Deckfläche eines Kegelstumpfes sind Kreise, die zueinander parallel liegen und verschieden groß sind. Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche ist die **Höhe** h des Kegelstumpfes. Der Teil der Mantellinie eines geraden Kegels zwischen Grund- und Deckfläche heißt Mantellinie s des geraden Kegelstumpfes.

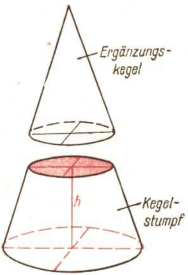


Abb. 2.96.

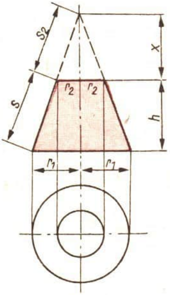


Abb. 2.97.

Einen geraden Kreiskegelstumpf kann man sich auch durch Rotation eines rechtwinkligen Trapezes entstanden denken (Abb. 2.78.). Bei der Drehung erzeugt der Schenkel des Trapezes, der nicht auf den parallelen Seiten senkrecht steht, den Mantel des Kegelstumpfes, die eine der parallelen Seiten die Grundfläche mit dem Radius r_1, die andere die Deckfläche mit dem Radius r_2.

Der Mantel ist in die Ebene abwickelbar (Abb. 2.98.). Der abgewickelte Kegelmantel kann als Differenz zweier Kreissektoren angesehen werden. Der eine Sektor ist auf den Mantel des Vollkegels mit dem Radius r_1 und der Mantellinie $(s+s_2)$ zurückzuführen, der andere auf den Ergänzungskegel mit dem Radius r_2 und der Mantellinie s_2:

$$A_M = \pi \cdot r_1 (s + s_2) - \pi \cdot r_2 \cdot s_2 .$$

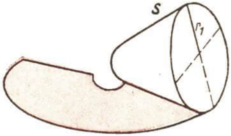


Abb. 2.98.

In dieser Formel kommt die Größe s_2 vor, die am Kegelstumpf nicht auftritt. Sie wird durch die Mantellinie s ersetzt. Nach dem Strahlensatz gilt die Proportion:

$$\begin{aligned} r_1 : r_2 &= (s + s_2) : s_2 \\ r_1 \cdot s_2 &= r_2 \cdot s + r_2 \cdot s_2 \\ s_2 \cdot (r_1 - r_2) &= r_2 \cdot s \\ s_2 &= \frac{r_2 \cdot s}{r_1 - r_2} \end{aligned}$$

Setzt man für s_2 den errechneten Ausdruck in die Formel für den Mantel ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_M &= \pi r_1 \left(s + \frac{r_2 s}{r_1 - r_2}\right) - \pi r_2 \cdot \frac{r_2 s}{r_1 - r_2} \\ A_M &= \pi s \left(r_1 + \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}\right) - \pi s \cdot \frac{r_2^2}{r_1 - r_2} \\ A_M &= \frac{\pi s}{r_1 - r_2} [r_1 (r_1 - r_2) + r_1 r_2] - \frac{s}{r_1 - r_2} \cdot r_2^2 \\ A_M &= \frac{\pi s}{r_1 - r_2} (r_1^2 - r_1 r_2 + r_1 r_2 - r_2^2) \\ A_M &= \frac{\pi s}{r_1 - r_2} (r_1^2 - r_2^2) \\ A_M &= \frac{\pi s}{r_1 - r_2} (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) . \end{aligned}$$

Mantel des Kegelstumpfes: $A_M = \pi s (r_1 + r_2)$

oder $A_M = \frac{\pi s}{2} (d_1 + d_2)$.

Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes läßt sich auch durch die Formel

$$A_M = \pi m s$$

ausdrücken. Sie stellt keine Näherungsformel dar. Mit m wird der mittlere Durchmesser des Kegelstumpfes bezeichnet.

a) Welche geometrische Bedeutung hat diese Formel?

b) Leiten Sie die Formel her!

Die Oberfläche des Kegelstumpfes setzt sich aus dem Mantel und der Grund- und Deckfläche zusammen:

$$A_O = \pi s (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

Oberflächeninhalt des Kegelstumpfes: $A_O = \pi [r_1^2 + r_2^2 + s (r_1 + r_2)]$

oder $A_O = \frac{\pi}{4} [d_1^2 + d_2^2 + 2 s (d_1 + d_2)]$

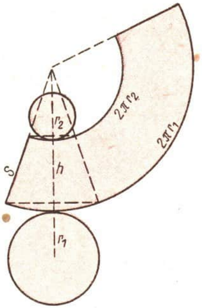


Abb. 2.99.

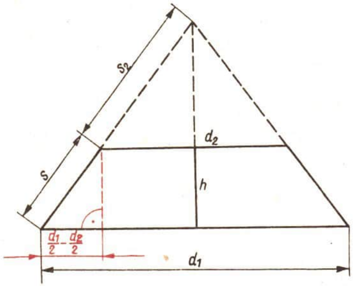


Abb. 2.100.

Die Abbildung 2.99. zeigt das Netz eines Kegelstumpfes.

Zeichnen Sie die Abwicklung des Kegelstumpfes mit den Radien $r_1 = 3{,}0$ cm, $r_2 = 2{,}0$ cm *und der Höhe* $h = 4{,}0$ cm*! Stellen Sie das Flächenmodell des Kegelstumpfes daraus her!*

Beispiel 10:

Der Stumpf eines geraden Kreiskegels (Abb. 2.100.) hat als oberen Durchmesser $d_2 = 108$ mm, als unteren $d_1 = 180$ mm und als Höhe $h = 48$ mm.

a) Wie groß ist der Oberflächeninhalt?

b) Welchen Winkel α bilden die Mantellinien, die den in eine Ebene abgerollten Kegelstumpfmantel begrenzen?

Zu a)

$$A_O = \frac{\pi}{4}\left[d_1^2 + d_2^2 + 2s\,(d_1 + d_2)\right]$$

Die Mantellinie s erhalten wir aus der Beziehung

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2$$

$$s^2 = 48^2\ \text{mm}^2 + \left(\frac{180}{2} - \frac{108}{2}\right)^2 \text{mm}^2$$

$$s^2 = 2304\ \text{mm}^2 + 1296\ \text{mm}^2 = 3600\ \text{mm}^2$$

$$s = 60\ \text{mm}$$

$$A_O = \frac{\pi}{4}\left[32\,400\ \text{mm}^2 + 11\,660\ \text{mm}^2 + 120\ \text{mm}\,(180 + 108)\ \text{mm}\right]$$

$$A_O = \frac{\pi}{4} \cdot 78\,620\ \text{mm}^2$$

$$A_O = \pi \cdot 19\,655\ \text{mm}^2 \approx 61\,747{,}8\ \text{mm}^2.$$

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt beträgt rund 617,5 cm².

Zu b)

Zur Berechnung des Mantelwinkels α benutzen wir die Formel

$$\frac{r}{s} = \frac{\alpha°}{360°}.$$

Aus der Abbildung 2.100. geht hervor, daß der Winkel α auch in dem Dreieck enthalten ist, das zur Berechnung von s herangezogen wurde. Es gilt also:

$$\frac{\frac{d_1 - d_2}{2}}{s} = \frac{\alpha}{360°}$$

$$\frac{(d_1 - d_2)\, 360°}{2\, s} = \alpha$$

$$\alpha = \frac{(180 - 108)\, 180°}{60}$$

$$\alpha = 72 \cdot 3°$$

$$\alpha = 216°.$$

Ergebnis: Der Winkel der Mantellinien beträgt 216°.

Die Berechnung des Volumens des Kegelstumpfes entspricht der Berechnung des Volumens des Pyramidenstumpfes (Abb. 2.96.):

$$V = \frac{\pi}{3} r_1^2 \cdot (h + x) - \frac{\pi}{3} r_2^2 \cdot x$$

$$V = \frac{\pi}{3} [r_1^2 h + x (r_1^2 - r_2^2)].$$

Nach dem Strahlensatz gilt

$$x : r_2 = (h + x) : r_1$$

$$x = \frac{h \cdot r_2}{r_1 - r_2}.$$

Damit wird

$$V = \frac{\pi}{3} \left[r_1^2 h + \frac{h \cdot r_2}{r_1 - r_2} \cdot (r_1^2 - r_2^2)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3} [r_1^2 h + h \cdot r_2 (r_1 + r_2)].$$

Volumen des Kegelstumpfes: $V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

oder $V = \frac{\pi h}{12} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$.

Man kann den Kegelstumpf mit einem Pyramidenstumpf von gleichem Grundflächeninhalt $A_1 = \pi r_1^2$, gleichem Deckflächeninhalt $A_2 = \pi r_2^2$ und gleicher Höhe h vergleichen. Die Volumina beider Körper sind nach dem Satz des CAVALIERI gleich.

Leiten Sie die Formel für das Volumen des Kegelstumpfes auf diese Weise her!

In der Volumenformel und der Formel für den Mantel des Kegelstumpfes sind die Formeln für Zylinder und Kegel enthalten.

Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit dieser Behauptung, indem Sie $r_1 = r_2$ und $r_2 = 0$ setzen!

Beispiel 11:

Ein Wassereimer soll 15 Liter fassen. Wieviel Material wird zu seiner Herstellung benötigt, wenn der Boden 22,0 cm Durchmesser hat und der obere Durchmesser 30,0 cm beträgt?
Aus dem Volumen und den gegebenen Durchmessern läßt sich die Höhe h des Kegelstumpfes berechnen:

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$
$$h = \frac{12\,V}{\pi(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)}$$
$$h = \frac{12 \cdot 15}{\pi(3^2 + 3 \cdot 2{,}2 + 2{,}2^2)}\ \text{dm}$$
$$h = \frac{180}{\pi \cdot 20{,}44}\ \text{dm}$$
$$h \approx \frac{180}{64{,}21}\ \text{dm} \approx 2{,}80\ \text{dm}$$

Die Mantellinie s des Kegelstumpfes wird aus h, d_1 und d_2 bestimmt:

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2$$
$$s^2 = 28^2\ \text{cm}^2 + 4^2\ \text{cm}^2 = 784\ \text{cm}^2 + 16\ \text{cm}^2 = 800\ \text{cm}^2$$
$$s \approx 28{,}28\ \text{cm} \approx 28\ \text{cm}.$$

Vergleichen Sie die Lösung für s mit dem errechneten Wert für h! Zu welcher Schlußfolgerung kommen Sie?

Der Materialverbrauch ergibt sich aus der Summe von Mantelfläche und Bodenfläche:

$$A_O = \frac{\pi s}{2}(d_1 + d_2) + \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2$$
$$A_O = \frac{\pi}{2}\left[s\,(d_1 + d_2) + \frac{d_2^2}{2}\right]$$
$$A_O = \frac{\pi}{2}\left[28\,(30 + 22) + \frac{22^2}{2}\right]\text{cm}^2$$
$$= \frac{\pi}{2}(1456 + 242)\ \text{cm}^2$$
$$= 849\,\pi\ \text{cm}^2$$
$$A_O \approx 2667\ \text{cm}^2 \approx 26{,}7\ \text{dm}^2.$$

Ergebnis: Zur Herstellung des Eimers werden rund 27 dm² Material verbraucht.

Da der Kegelstumpf, der in der Technik auch als K o n u s bezeichnet wird, ein sehr häufig vorkommendes Konstruktionselement ist, werden bei Berechnungen seines Volumens oft Näherungsformeln benutzt. Die dabei erzielten Rechenvorteile sind jedoch nicht so groß wie beim Pyramidenstumpf.
Bei der Verwendung der Formel

$$V \approx \pi h \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$$

wird der Kegelstumpf als Zylinder aufgefaßt, der die gleiche Höhe hat und dessen Grundfläche das arithmetische Mittel aus der Grund- und Deckfläche des Stumpfes ist. Das entspricht der beim Pyramidenstumpf verwendeten Näherungsformel. Die damit erzielten Ergebnisse sind wie dort stets etwas größer als die mit der genauen Volumenformel errechneten Worte. Sie sind um so genauer, je weniger r_1 und r_2 voneinander abweichen.

Begründen Sie in analoger Weise wie beim Pyramidenstumpf die gegenüber den wahren Werten zu hohen Ergebnisse!

Bei Verwendung einer anderen Näherungsformel wird der Berechnung die mittlere Grundfläche des Kegelstumpfes (Abb. 2.101.)

$$A_m = \pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2$$

zugrunde gelegt. Dabei wird das Volumen eines Kegelstumpfes als gleich angenommen mit dem eines Zylinders, der die gleiche Höhe wie der Kegelstumpf hat und dessen Grundfläche den Mittelschnitt darstellt:

$$V \approx \frac{\pi}{4} \cdot h\,(r_1 + r_2)^2.$$

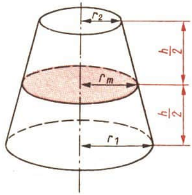


Abb 2.101.

Vergleicht man das mit dieser Näherungsformel errechnete Volumen V' mit dem wahren Volumen V, indem man jeweils den Zahlenfaktor $\frac{\pi h}{12}$ vor die Klammer stellt,

$$V' = \frac{\pi h}{12}(3r_1^2 + 6r_1r_2 + 3r_2^2)$$

und

$$V = \frac{\pi h}{12}(4r_1^2 + 4r_1r_2 + 4r_2^2),$$

so ergibt sich wegen $r_1 > r_2$:

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &> 0 \\ (r_1 - r_2)^2 &> 0 \\ r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 &> 0 \\ r_1^2 + r_2^2 &> 2r_1r_2 \qquad\qquad + 3r_1^2 + 3r_2^2 + 4r_1r_2 \\ 4r_1^2 + 4r_2^2 + 4r_1r_2 &> 3r_1^2 + 3r_2^2 + 6r_1r_2 \\ V &> V'. \end{aligned}$$

Die vorstehende Näherungsformel liefert also immer kleinere Werte als die wahren Werte. Sie sind wiederum um so genauer, je weniger sich r_1 und r_2 voneinander unterscheiden. Die Formel wird vor allem dort mit Vorteil angewendet, wo der Durchmesser des Mittelschnitts

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

durch direkte Messung, z. B. bei Baumstämmen, bestimmt werden kann.

Beispiel 12:

Ein Waldarbeiter mißt mit der Kluppe die Durchmesser eines 10 m langen Baumstammes am oberen und unteren Ende mit 38 cm und 48 cm.

a) Wieviel Festmeter (fm) Holz hat der Baumstamm nach der genauen Volumenformel?

b) Es ist der Unterschied zwischen der genauen und den näherungsweisen Berechnungen festzustellen!

Zu a)

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V = \frac{\pi \cdot 1000}{3} (576 + 456 + 361) \text{ cm}^3$$

$$V \approx \pi \cdot 464\,333 \text{ cm}^3 \approx 1\,458\,712 \text{ cm}^3 \approx 1{,}459 \text{ fm}.$$

Ergebnis: Der Baumstamm hat nach der genauen Volumenformel rund 1,459 fm Holz.

Zu b) Nach der Näherungsformel: $V \approx \frac{\pi}{2} \cdot h\,(r_1^2 + r_2^2)$

$$V \approx \frac{\pi \cdot 1000}{2} (576 + 361) \text{ cm}^3$$

$$V \approx \pi \cdot 468\,500 \text{ cm}^3$$

$$V \approx 1\,471\,804 \text{ cm}^3 \approx 1{,}472 \text{ fm}.$$

Ergebnis: Das errechnete Ergebnis liegt mit etwa 0,9 % über dem genauen Wert.

Nach der Näherungsformel: $V \approx \frac{\pi}{4} \cdot h\,(r_1 + r_2)^2$

$$V \approx \frac{\pi}{4} \cdot 1000\,(24 + 19)^2 \text{ cm}^3$$

$$V \approx \pi \cdot 462\,250 \text{ cm}^3 \approx 1\,452\,169 \text{ cm}^3 \approx 1{,}452 \text{ fm}.$$

Ergebnis: Das errechnete Ergebnis liegt mit etwa 0,5 % unter dem genauen Wert.

Für die meisten in der Praxis auftretenden Fälle dürften die Werte der Näherungsformeln hinreichend genau sein.

Kugeln

Wird ein Halbkreis um seinen Durchmesser gedreht, bis er in die Ausgangslage zurückkehrt, so beschreibt er eine gleichmäßig gekrümmte Fläche (Abb. 2.79.). Der auf diese Weise entstehende Körper heißt **Kugel.** Der Mittelpunkt M des sich drehenden Halbkreises wird zum **Kugelmittelpunkt.** Da beim Kreis alle Punkte des Umfanges denselben Abstand r vom Mittelpunkt haben, müssen alle Punkte der Kugeloberfläche gleich weit vom Mittelpunkt der Kugel entfernt sein. Deshalb heißt r auch der *Radius* der Kugel. Durch ihn ist die Kugel eindeutig bestimmt.

Die Kugel ist die Menge aller Punkte, deren Abstand von einem festen Punkt, dem Kugelmittelpunkt, kleiner oder gleich einem vorgegebenen Abstand, dem Radius, ist.

Die Kugel hat in der Technik große Bedeutung. So wird sie im Kugelgelenk als Verbindung zweier Bauteile, die nach vielen Richtungen beweglich sein müssen, verwendet. Im Kugellager wird mit ihrer Hilfe Gleitreibung in Rollreibung verwandelt und damit der Reibungswiderstand vermindert. Die optische Industrie verwendet Kugelteile bei fast allen Linsen. Im Vergleich zu anderen Körpern besitzt die Kugel bei gleichem Volumen die kleinste Oberfläche.
Während sich auf allen bisher behandelten krummflächigen Körpern in einer bestimmten Richtung Geraden ziehen lassen, können auf einer Kugelfläche in keiner Richtung Geraden gezeichnet werden. Der Mantel des Kegels wie auch der des Zylinders ist anders gekrümmt als die Oberfläche der Kugel. Im Gegensatz zu Kegel und Zylinder handelt es sich bei der Kugeloberfläche um eine nichtabwickelbare gekrümmte Fläche. Man kann deshalb kein wirklichkeitstreues Abbild der Kugeloberfläche und der Figuren auf ihr in der Ebene entwerfen.
Da sich die Kugeloberfläche nicht auf einer Ebene ausbreiten und deshalb auch kein Flächenmodell des Körpers herstellen läßt, soll nun zur besseren Anschauung ein Gerüstmodell angefertigt werden.

Abb. 2.102. a b c

Schneiden Sie aus dünnem Karton drei gleich große Kreise (Abb. 2.102.)! Zwei davon erhalten in den senkrecht aufeinanderstehenden Durchmessern vom Rande her je einen Einschnitt (in der Abb. 2.102. a stark ausgezogen). Der dritte Kreis ist in den Durchmessern von der Mitte aus mit zwei einander rechtwinklig schneidenden Schlitzen zu versehen (Abb. 2.102. b). Die beiden nach der Abbildung 2.102. a vorbereiteten Kreise sind in den aufgeschnittenen Radien ineinanderzustecken, so daß sie sich rechtwinklig durchdringen. Schon diese Form ergibt ein Kugelmodell, nur ist es wenig stabil. Um ihm mehr Halt zu geben, schieben Sie es durch die Schlitze des dritten Kreises (Abb. 2.102. b)! Dazu müssen die in Abbildung 2.102. a schraffierten Teile umgefaltet werden; sie sind nach dem Aufstecken des dritten Kreises wieder aufzuklappen. Das fertige Kugelmodell zeigt die Abbildung 2.102. c.

Jede Gerade durch den Kugelmittelpunkt ist **Achse** der Kugel. Die Verbindungsstrecke der Durchstoßpunkte der Achse durch die Kugeloberfläche heißt **Durchmesser** d der Kugel. Er ist doppelt so groß wie der Radius der Kugel ($d = 2r$).

Welche Symmetrieeigenschaften hat die Kugel?

Wird eine Kugel von einer Ebene geschnitten, so entstehen als Schnittfiguren stets Kreise.

Beweis:

Die Ebene E steht auf dem Durchmesser $\overline{AB}$ in O senkrecht (Abb. 2.103.). Ihr Abstand vom Kugelmittelpunkt M ist $\overline{MO} = a$. Es ist P ein Punkt der Schnittkurve der Ebene mit der Kugelfläche. Ziehen wir $\overline{PO}$, so ist $\overline{PO} \perp \overline{AB}$, das Dreieck POM also rechtwinklig. Demnach gilt $\overline{PO}^2 = \overline{PM}^2 - \overline{MO}^2$ oder $\overline{PO}^2 = r^2 - a^2$, also $\varrho = \sqrt{r^2 - a^2}$.

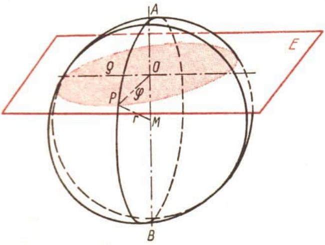


Abb. 2.103.

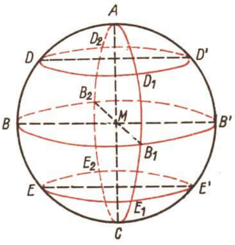


Abb. 2.104.

Da r und a bei gegebener Schnittfläche konstant bleiben, an welcher Stelle der Schnittkurve P auch liegen mag, so folgt, daß ϱ für alle Punkte der Schnittkurve dieselbe Länge hat. Die Schnittkurve ist deshalb ein Kreis mit dem Radius ϱ.
Aus diesem Beweis ergeben sich wichtige Folgerungen:
Je größer der Abstand der Ebene vom Kugelmittelpunkt, um so kleiner ist der Schnittkreis.
Für $a = r$ ist $\varrho = 0$, der Kreis entartet zu einem Punkt.
Die Schnittebene wird zur Tangentialebene der Kugel.
Für $a = 0$ nimmt ϱ seinen größten Wert r an, das heißt, daß jede Schnittebene, die den Kugelmittelpunkt enthält, die Kugel in einem „größten" Kreise schneidet, der als **Großkreis** (AB_1CB_2 und $BB_1B'B_2$) bezeichnet wird (Abb. 2.104.).
Alle Kugelkreise, die zu einem bestimmten Großkreis parallel liegen, heißen **Parallelkreise** zu diesem Großkreis ($DD_1D'D_2$ und $EE_1E'E_2$) oder auch **Breitenkreise**, eine Bezeichnung, die in der Geographie üblich ist. Die Parallelkreise haben verschieden große Durchmesser.

1. *Führen Sie für die folgenden Sätze die Beweise!*
   a) *Schneiden zwei Kugeln einander, so ist die Schnittfigur der beiden Kugeln ein Kreis.*
   Anleitung: Zeichnen Sie zwei einander schneidende Kreise und ihre gemeinsame Sehne! Lassen Sie die ganze Figur sich um die Zentrale der beiden Kreise als Rotationsachse drehen!
   b) *Zwei verschiedene Großkreise einer Kugel halbieren einander stets.*
   Anleitung: Lassen Sie den einen Großkreis sich um den gemeinsamen Durchmesser der beiden Großkreise drehen!

c) Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r ist der Großkreisbogen durch diese Punkte (Großkreise auf einer Kugelfläche entsprechen geraden Linien in der Ebene).

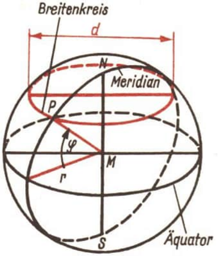
Anleitung: Jede Ebene durch die beiden Kugelpunkte P_1 und P_2 schneidet die Kugel in einem Kreis vom Radius $\varrho \leqq r$. Welcher von allen möglichen Kreisbogen mit dem Radius $\varrho \leqq r$ durch zwei feste Punkte P_1 und P_2 hat die kürzeste Bogenlänge?

2. *Berechnen Sie den Durchmesser des Nördlichen Wendekreises (geographische Breite $\varrho = 23{,}5°$ N), wenn der mittlere Erdradius $r = 6370$ km beträgt!*
Anleitung: Durch einen beliebigen Punkt P des Breitenkreises wird ein Meridian (Großkreis) gelegt. Äquator und Breitenkreis schneiden auf dem Meridian von P einen Bogen aus. Der Winkel, der zu diesem Bogen gehört, ist die geographische Breite (Abb. 2.105.).

Nach dem Satz des CAVALIERI haben alle Körper gleiches Volumen, wenn alle in gleicher Höhe gelegenen Querschnitte, die zur Grundfläche parallel liegen, flächengleich sind.
Zur Bestimmung des Volumens der Kugel wird deshalb ein Vergleichskörper gesucht. In der Abbildung 2.106. sind eine Halbkugel und ein gerader Kreiszylinder dargestellt, wobei Grundkreisradius und Höhe des Zylinders gleich dem Kugelradius r sind. Aus dem Zylinder ist ein gerader Kreiskegel mit den gleichen Maßen herausgeschnitten, so daß ein Restkörper verbleibt, dessen Volumen zwei Drittel des Zylindervolumens beträgt:

$$V_R = V_Z - V_K$$
$$V_R = \pi r^2 h - \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Abb. 2.105.



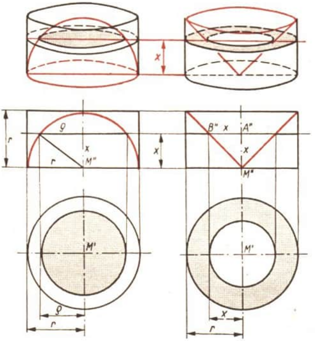


Abb. 2.106.

Da $h = r$ gewählt wurde, folgt:

$$V_R = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Es wird nun behauptet, daß der Inhalt des Restkörpers gleich dem Inhalt der Halbkugel ist.
Zum Beweis wird ein beliebiger Schnitt parallel zur Grundfläche der beiden Körper im Abstand x ausgeführt. Die Schnittfigur der Halbkugel ist ein Kreis mit dem Radius ϱ und dem Flächeninhalt $A_H = \pi\varrho^2$. Da $\varrho^2 = r^2 - x^2$ ist, gilt $A_H = \pi\,(r^2 - x^2)$. Der in derselben Höhe liegende Querschnitt des Restkörpers ist eine Kreisringfläche mit den Radien r und x. (Die Kegelmantellinie ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten beide die Länge r haben. Das Dreieck $A''B''M''$ ist diesem Dreieck ähnlich und deshalb auch rechtwinklig und gleichschenklig.) Sein Flächeninhalt beträgt $A_R = \pi r^2 - \pi x^2 = \pi\,(r^2 - x^2)$.
Diese Beziehungen gelten unabhängig vom gewählten Abstand x der Schnittebene von der Ebene der Grundfläche. Halbkugel und Restkörper haben also in derselben Höhe stets flächengleiche Querschnitte. Nach dem Satz des CAVALIERI folgt daraus, daß das Volumen der Halbkugel gleich dem des Restkörpers ist.

Halbkugel = Restkörper = Zylinder − Kegel

Volumen der Halbkugel $= \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Folglich ist das

Volumen der Kugel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

oder $V = \frac{\pi}{6} d^3$.

1. *Die Volumina von Kegel, Halbkugel und Zylinder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe verhalten sich wie 1 : 2 : 3. Führen Sie den Beweis dieses Satzes, der als Satz des* ARCHIMEDES *bekannt ist!*

2. *Bei Überschlagsrechnungen in der Praxis wird für die Berechnung des Volumens einer Kugel die Formel* $V \approx \frac{1}{2} d^3$ *verwendet.*

   a) Begründen Sie diese Formel!

   b) Welche geometrische Bedeutung hat die Näherungsformel?

   c) Um etwa wieviel Prozent ist diese Formel ungenau?

Das Volumen einer Hohlkugel wird als Differenz der Volumina zweier Vollkugeln mit den Radien r_1 und r_2 berechnet:

Volumen der Hohlkugel: $V = \frac{4}{3}\pi\,(r_1^3 - r_2^3)$

oder $V = \frac{\pi}{6}\,(d_1^3 - d_2^3)$.

Beispiel 13:

Eine hohle kupferne Kugel $\left(\varrho_2 = 8{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ mit $d = 20$ cm äußerem Durchmesser sinkt genau bis zur Hälfte in Wasser $\left(\varrho_1 = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ ein. Wie dick ist ihre Wand?
Das verdrängte Wasser hat das Volumen

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r_1{}^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 1000\ \text{cm}^3$$

und die Masse

$$m_1 = \varrho_1 \cdot V_1 = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 1000\ \text{cm}^3 = 2000 \cdot \frac{\pi}{3}\ \text{g}.$$

Die Masse der Halbkugel beträgt

$$m_2 = \varrho_2 \cdot V_2 = \varrho_2 \cdot \frac{4}{3}\pi\left(r_1{}^3 - r_2{}^3\right)$$
$$= 8{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{4}{3}\pi\left(1000\ \text{cm}^3 - r_2{}^3\right)$$
$$m_2 = 8{,}9 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{3}\left(1000 - r_2{}^3\right)\ \text{g}.$$

Wir setzen die Massen gleich:

$$m_1 = m_2$$
$$2000 \cdot \frac{\pi}{3}\ \text{g} = 8{,}9 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{3}\left(1000 - r_2{}^3\right)\ \text{g}$$

und berechnen aus dieser Gleichung r_2:

$$2000 = 35{,}6\left(1000 - r_2{}^3\right)$$
$$r_2{}^2 \approx 943\ \text{cm}^3$$
$$r_2 \approx 9{,}8\ \text{cm}$$
$$r_1 - r_2 = 10\ \text{cm} - 9{,}8\ \text{cm} = 0{,}2\ \text{cm}.$$

Ergebnis: Die Wanddicke der Hohlkugel beträgt 2 mm.

Zwischen dem Volumen und dem Oberflächeninhalt einer Kugel besteht folgender Zusammenhang, der für die Herleitung der Formel für die Kugeloberfläche verwendet werden soll:
Denkt man sich die Oberfläche der Kugel in eine große Anzahl sehr kleiner Flächen zerlegt und weiter die Ecken aller dieser Flächenteile mit dem Mittelpunkt der Kugel verbunden, so entsteht dadurch eine Vielzahl pyramidenförmiger Körper. Die Höhen dieser Körper sind nahezu gleich dem Kugelradius r, und die Grundflächen können, wenn sie beliebig klein angenommen werden, als eben gelten. Der Gesamtinhalt aller dieser Pyramiden ist dann annähernd gleich dem Volumen der Kugel.
Bezeichnet man die Grundflächen mit $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, dann ist das Volumen aller Pyramiden

$$V = \frac{1}{3}A_1 r + \frac{1}{3}A_2 r + \frac{1}{3}A_3 r + \cdots + \frac{1}{3}A_n r$$

oder

$$V = \frac{1}{3}r\left(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n\right) = \frac{1}{3}r \cdot A_O,$$

wobei die Kugeloberfläche als Gesamtheit aller Pyramidengrundflächen aufgefaßt wird.
Die Teilung der Kugeloberfläche und damit des Kugelvolumens läßt sich immer weiter fortsetzen, bis die Anzahl der Teile größer wird als jede angebbare Zahl. Dann wird der Wert des Volumens der Teilkörpersumme dem Wert des Kugelvolumens beliebig nahe kommen, d. h., der Unterschied zwischen beiden wird kleiner als jede noch so kleine Zahl.
Einen solchen Vorgang nennt man einen **Grenzübergang.** Daß die Summe aus einer beliebig großen Anzahl von Summanden einen bestimmten Wert annehmen kann, soll an dem folgenden einfachen Zahlenbeispiel gezeigt werden:
Man addiert zu der Zahl 1 die Hälfte dieser Zahl, dazu wieder die Hälfte dieser Hälfte und fährt so ohne Ende fort. Man bildet also die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$
Man wird dabei nicht über die Zahl 2 hinauskommen, ganz gleich, wieviel derart gewonnene Summanden addiert werden. Man wird die Zahl 2 nicht einmal erreichen, da ja immer nur die Hälfte des Restes bis zur 2 addiert wird. Man kann aber der Zahl 2 beliebig nahe kommen, so daß man als Ergebnis dieser Summierung die Zahl 2 niederschreiben kann.
Geometrisch kann man das durch die Abbildung 2.107. veranschaulichen.

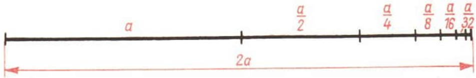


Abb. 2.107.

Zwischen dem Volumen V und der Oberfläche A_O der Kugel mit dem Radius r besteht somit die Beziehung:

$$V = \frac{1}{3} r \cdot A_O \quad \text{oder} \quad V = \frac{d}{6} \cdot A_O.$$

Setzt man den bereits gefundenen Ausdruck für das Kugelvolumen ein, so erhält man

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} r \cdot A_O$$

und schließlich den

Oberflächeninhalt der Kugel: $A = 4\pi r^2$
oder $A = \pi d^2$.

Die Formel läßt erkennen, daß die Oberfläche einer Kugel stets genau viermal so groß ist wie die Fläche eines Großkreises dieser Kugel.
Bei der Herleitung der Formel ist noch eine Lücke geblieben. Es wurde die Höhe h der Pyramiden durch den Kugelradius r ersetzt und dabei nicht berücksichtigt, daß h von r immer noch um einen gewissen, wenn auch noch so kleinen Betrag verschieden ist. Diese Lücke kann nur mit Mitteln der höheren Mathematik geschlossen werden, die uns noch nicht zur Verfügung stehen.
Für Überschlagsrechnungen genügt es fast immer, bei der Oberflächenbestimmung für π den Näherungswert 3 zu setzen:

$$A_O \approx 3\,d^2.$$

Beispiel 14:

Der Oberflächeninhalt einer Kugel, deren Radius 2,4 cm beträgt, soll durch gleichmäßiges Abschleifen um den dritten Teil verringert werden. Der Durchmesser der bearbeiteten Kugel ist zu bestimmen.

Bezeichnen wir den Oberflächeninhalt der zu bearbeitenden Kugel und ihren Durchmesser mit A_1 bzw. d_1, der bearbeiteten Kugel mit A_2 bzw. d_2, dann besteht die Beziehung

$$A_2 = \frac{2}{3} A_1$$

$$\pi d_2^2 = \frac{2}{3} \pi d_1^2$$

$$d_2^2 = \frac{2}{3} d_1^2$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot d_1^2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 23{,}04}{3}} \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt{15{,}36} \text{ cm} \approx 3{,}92 \text{ cm}.$$

Ergebnis: Der Durchmesser der abgeschliffenen Kugel beträgt etwa 3,9 cm.

Kugelteile

Jede Schnittebene durch eine Kugel zerlegt diese in zwei **Kugelabschnitte** oder **Kugelsegmente** (Abb. 2.108.). Geht die Schnittebene durch den Mittelpunkt, so entstehen zwei **Halbkugeln** als Sonderfall des Segments. Der krummflächige Teil der Oberfläche des Segments heißt **Kugelkappe** oder **Kalotte.**

Die Höhe der Kugelkappe oder des Kugelsegments wird meist mit h, der Radius des Schnittkreises mit ϱ und der Radius der Kugel mit r bezeichnet (Abb. 2.108.).

Der Raumteil einer Kugel, der durch eine Kalotte und den durch ihren Kugelkreis und den Kugelmittelpunkt bestimmten Kegelmantel begrenzt wird, ist ein **Kugelausschnitt** oder **Kugelsektor** (Abb. 2.109.). Die Höhe h des Kugelsegments gilt zugleich als Höhe des zugehörigen Kugelsektors.

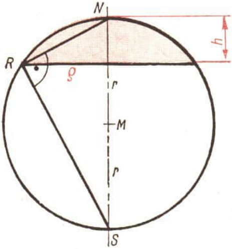


Abb. 2.108.

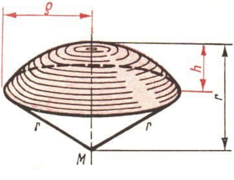


Abb. 2.109.

Die Beziehungen zwischen den Größen r, ϱ und h können der Abbildung 2.108. entnommen werden. In dem rechtwinkligen Dreieck NRS gilt der Höhensatz $\varrho^2 = h\,(2r - h)$, der nach Umformung $h^2 - 2rh + \varrho^2 = 0$ ergibt.

Bestimmen Sie aus der vorstehenden Gleichung h und dann r! Begründen Sie am Kugelmodell, warum sich für h zwei Werte ergeben!

Wird eine Kugel von zwei zueinander parallelen Ebenen geschnitten, so wird der zwischen den Ebenen liegende Körper als **Kugelschicht** bezeichnet (Abb. 2.110. und 2.111.). Der gekrümmte Mantel der Kugelschicht heißt **Kugelzone.**

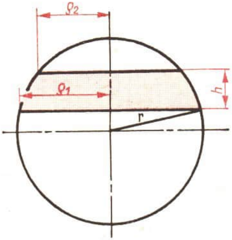


Abb. 2.110.

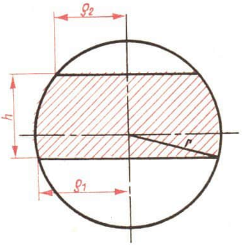


Abb. 2.111.

Der Abstand der beiden Schnittflächen voneinander wird als Höhe h der Kugelschicht bezeichnet. Dabei sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Der Mittelpunkt liegt entweder innerhalb oder außerhalb der Kugelschicht. Das zeigen auch die Beziehungen zwischen den vier Größen r, ϱ_1, ϱ_2 und h, die aus den Abbildungen 2.110. und 2.111. gewonnen werden können. Sie lassen sich zusammenfassen zu:

$$h = \sqrt{r^2 - \varrho_2{}^2} \pm \sqrt{r^2 - \varrho_1{}^2}\,.$$

Dabei gilt das positive Vorzeichen, wenn der Mittelpunkt der Kugel innerhalb der Kugelschicht liegt. Im anderen Falle ist das negative Vorzeichen zu setzen.

Die Volumenformel für das **Kugelsegment** wird in gleicher Weise hergeleitet wie die Formel für das Kugelvolumen (Abb. 2.112.). Der oberhalb des Schnittkreises gelegene Kugelabschnitt ist volumengleich dem Restkörper, der gebildet wird aus der Differenz des Zylinders mit der Höhe h und dem Grundkreisradius r, vermindert um das Volumen des Kegelstumpfes mit der Höhe h und den Radien des Grund- und Deckkreises r und $r - h$.

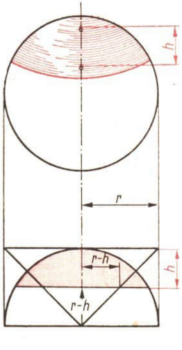


Abb. 2.112.

Das Volumen des Restkörpers beträgt also

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2]$$
$$= \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}(3r^2 - 3rh + h^2)$$
$$V = \pi r^2 h - \pi r^2 h + \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3}$$

und damit das

Volumen des Kugelsegmentes: $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$

oder $V = \frac{\pi}{6} h^2 (3d - 2h)$.

Betrachten Sie die Kugel als Kugelabschnitt mit der Höhe $h = 2r$, und leiten Sie die Volumenformel der Kugel auf diese Weise her!

Das Volumen des **Kugelausschnittes** setzt sich aus dem Volumen des zugehörigen Kugelsegmentes und dem Volumen des Kegels zusammen, der den Schnittkreis des Kugelsegmentes zur Grundfläche und den Kugelmittelpunkt als Spitze hat (Abb. 2.111.).

$$V_{\text{Sektor}} = V_{\text{Segment}} + V_{\text{Kegel}}$$
$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) + \frac{\pi}{3} \varrho^2 (r - h).$$

Nach dem Höhensatz (Abb. 2.108.) ist

$$\varrho^2 = h(2r - h).$$

Also ist

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) + \frac{\pi}{3} h (2r - h)(r - h),$$

und daraus ergibt sich das

Volumen des Kugelsektors: $V = \frac{2\pi}{3} r^2 h$

oder $V = \frac{\pi}{6} d^2 h$.

1. *Erklären Sie das Kugelsegment und den Kugelsektor als Drehkörper!*

2. *Wie groß sind a) die Fläche des Schnittkreises eines Kugelsegments, b) der Mantel des Ergänzungskegels eines Kugelsektors mit den Höhen $h = r$ und dem Kugelradius r?*

3. *Wie groß werden a) die Fläche des Schnittkreises eines Kugelsegments, b) der Mantel des Ergänzungskegels eines Kugelsektors mit den Höhen h und dem Kugelradius r, wenn $h = 2r$ wird?*

Das Volumen einer **Kugelschicht** wird als Differenz zweier Kugelabschnitte berechnet (Abb. 2.113.). Die Höhe h der Kugelschicht ist der Abstand der beiden Begrenzungskreise ϱ_1 und ϱ_2.

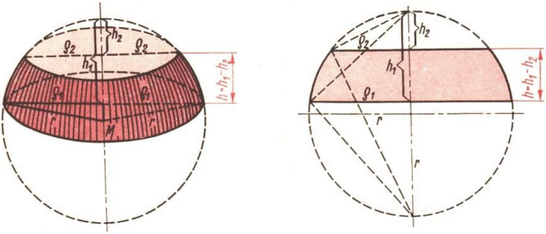


Abb. 2.113

Bezeichnet man die Höhen der von den Schnittkreisen gebildeten oberen Kugelabschnitte mit h_1 und h_2, so ist das Volumen der Kugelschicht

$$V = \frac{\pi h_1^2}{3}(3r - h_1) - \frac{\pi h_2^2}{3}(3r - h_2)$$

$$= \frac{\pi \cdot 3h_1^2 \cdot r}{3} - \frac{\pi h_1^3}{3} - \frac{\pi \cdot 3h_2^2 \cdot r}{3} + \frac{\pi h_2^3}{3}$$

$$V = \pi r(h_1^2 - h_2^2) - \frac{\pi}{3}(h_1^3 - h_2^3)\,.$$

Zur Vereinfachung des Ausdrucks $h_1^3 - h_2^3$ wird die folgende Nebenrechnung ausgeführt.

$$(h_1^3 - h_2^3) : (h_1 - h_2) = h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2$$

$$V = \pi r(h_1 + h_2)(h_1 - h_2) - \frac{\pi}{3}(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)(h_1 - h_2)\,.$$

Da $h_1 - h_2 = h$ ist, ergibt

$$V = \pi r h(h_1 + h_2) - \frac{\pi}{3} h(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)$$

$$V = \pi h\left[r(h_1 + h_2) - \frac{1}{3}(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)\right].$$

Nach dem Höhensatz ist

$$\varrho_1^2 = (2r - h_1)\,h_1$$
$$\varrho_2^2 = (2r - h_2)\,h_2$$

und deshalb

$$2rh_1 = \varrho_1^2 + h_1^2$$
$$2rh_2 = \varrho_2^2 + h_2^2\,.$$

Nach Addition der beiden vorstehenden Gleichungen erhält man daraus

$$r(h_1 + h_2) = \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{2}\,.$$

Setzt man diesen Wert in den Ausdruck für V ein, dann ist

$$V = \pi h\left[\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{2} - \frac{1}{3}(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)\right]$$

$$= \pi h\left(\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2} + \frac{3h_1^2 + 3h_2^2 - 2h_1^2 - 2h_1 h_2 - 2h_2^2}{6}\right)$$

$$= \pi h\left(\frac{3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2}{6}\right)$$

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot h\,[3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + (h_1 - h_2)^2]\,.$$

Volumen der Kugelschicht: $V = \frac{\pi}{6} h (3 \varrho_1^2 + 3 \varrho_2^2 + h^2)$.

Für $\varrho_2 = 0$ wird die Kugelschicht zum Kugelabschnitt. Bestimmen Sie auf diese Weise sein Volumen!
Anleitung: Drücken Sie ϱ_1 durch die Größen r und h aus (Abb. 2.108.)!

Für die Berechnung des Oberflächeninhalts einer **Kugelkappe** gelten die bereits bei der Herleitung der Formel für den Oberflächeninhalt der Kugel angestellten Betrachtungen. Die bei der Kugel gefundene Beziehung

$$V = \frac{1}{3} r A_O$$

kann auch auf einen Kugelsektor und die zugehörige Kugelkappe A_M angewendet werden. Setzt man für V das Volumen des Kugelsektors ein,

$$\frac{2\pi}{3} r^2 h = \frac{1}{3} r A_M,$$

und löst die Gleichung nach A_M auf, so erhält man den

Flächeninhalt der Kugelkappe: $A_M = 2\pi r h$
oder $A_M = \pi d h$.

1. *Erklären Sie die Entstehung einer Kugelkappe als Drehfläche!*
2. *Woraus setzt sich die Oberfläche a) eines Kugelsegments, b) eines Kugelsektors zusammen?*
3. *Für welchen Sektor einer Kugel mit dem Radius r ist eine Kugelkappe flächengleich dem Mantel seines Ergänzungskegels?*

Die **Kugelzone** ist der Mantel der Kugelschicht (Abb. 2.113.). Die Kugelzone läßt sich als Differenz zweier Kugelkappen mit den Höhen h_1 und h_2 berechnen:

$$A_M = 2\pi r h_1 - 2\pi r h_2$$
$$A_M = 2\pi r (h_1 - h_2).$$

Da $h_1 - h_2 = h$ ist, folgt für den

Flächeninhalt der Kugelzone: $A_M = 2\pi r h$
oder $A_M = \pi d h$.

1. *Welche Körper haben Kugelkappen mit den Höhen $h = r$ bzw. $h = 2r$?*
2. *Die Formeln für den Flächeninhalt einer Kugelkappe und einer Kugelzone bei gleicher Höhe h und gleichem Radius r sind gleich. Welche geometrische Bedeutung ergibt sich aus dieser Gleichheit (Abb. 2.114.)?*

3. *Legt man um eine Kugelzone (Kugelkappe) von der Höhe h und dem Radius r a) einen Zylinder vom Grundkreisradius r und der Höhe h, b) einen Kegelstumpf von der Höhe h, dessen Mantel die Kugelzone (Kugelkappe) in der Kreislinie seiner mittleren Grundfläche berührt, so haben Kugelzone (Kugelkappe), Kegelstumpf und Zylinder flächeninhaltsgleiche Mäntel (Abb. 2.114.). Führen Sie den Beweis!*

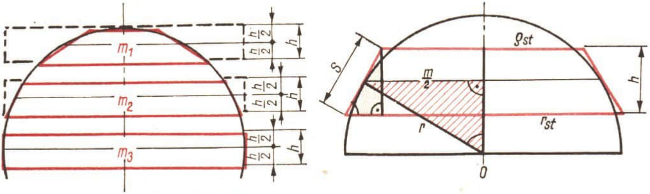


Abb. 2.114.

Beispiel 15:

Ein Kessel hat die Form eines Kugelsegments. Der Durchmesser der Öffnung beträgt 1,50 m, die Tiefe 50 cm. Das Volumen des Kessels ist zu berechnen.

Zunächst wird der Kugelradius r bestimmt (Abb. 2.115.):

$$\varrho^2 = h\,(2r - h)$$

und daraus

$$r = \frac{\varrho^2 + h^2}{2h}.$$

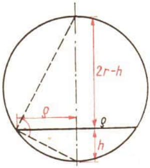


Abb. 2.115.

Damit ergibt sich

$$V = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$$

$$= \frac{\pi}{3}h^2\left(\frac{3\varrho^2 + 3h^2}{2h} - h\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}h^2\left(\frac{3\varrho^2 + 3h^2 - 2h^2}{2h}\right)$$

$$V = \frac{\pi}{6}h\,(3\varrho^2 + h^2).$$

Für die im Beispiel gegebenen Werte beträgt der Inhalt des Kessels rund 0,507 m³.

Führen Sie die Berechnung im Beispiel 15 selbst aus!

Beispiel 16:

Von einem Kugelsektor sind das Volumen $V = 20\ \text{cm}^3$ und der Flächeninhalt $A_M = 10\ \text{cm}^2$ der zugehörigen Kappe bekannt. Wie groß sind der Radius der Kugel und die Höhe der Kappe?

$$V = \frac{2\pi}{3}r^2h \qquad A = 2\pi r h$$

Die für V und A_M eingesetzten Werte ergeben das Gleichungssystem:

$$\text{(I)} \quad 20\,\text{cm}^3 = \frac{2\pi}{3} r^2 h \qquad \text{(II)} \quad 10\,\text{cm}^2 = 2\pi r h.$$

Die Auflösung nach r führt auf die quadratische Gleichung

$$30\pi r - 5\pi r^2 = 0$$

$$5\pi r(6 - r) = 0$$

$$r_1 = 0\,\text{cm (unbrauchbar)}$$

$$r_2 = 6\,\text{cm}$$

Der Radius der Kugel beträgt 6 cm.
Die Höhe wird aus

$$A_M = 2\pi r h$$

zu

$$h = \frac{10}{12\pi}\,\text{cm} \approx 0{,}265\,\text{cm}$$

berechnet.

Ergebnis: Die Höhe der Kappe beträgt rund 0,27 cm.

Beispiel 17:

Zwei parallele Ebenen schneiden aus einer Kugel von 40,0 cm Durchmesser eine 8,0 cm dicke Schicht (Abb. 2.116.) aus. Der erste Kugelabschnitt hat eine Höhe von 3,0 cm. Das Volumen der Kugelschicht ist zu berechnen.

$$V = \frac{\pi}{6} h(3\varrho_1{}^2 + 3\varrho_2{}^2 + h^2)$$

Zunächst lassen sich $\varrho_1{}^2$ und $\varrho_2{}^2$ aus rechtwinkligen Dreiecken berechnen.

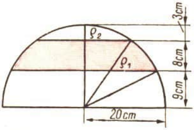


Abb. 2.116.

$$\varrho_1{}^2 = 20^2\,\text{cm}^2 - 9^2\,\text{cm}^2 = 319\,\text{cm}^2$$

$$\varrho_2{}^2 = 20^2\,\text{cm}^2 - 17^2\,\text{cm}^2 = 111\,\text{cm}^2$$

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot 8\,\text{cm}\,(957\,\text{cm}^2 + 333\,\text{cm}^2 + 64\,\text{cm}^2)$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 1354\,\text{cm}^2 \approx 1805\pi\,\text{cm}^3 \approx 5671\,\text{cm}^3.$$

Ergebnis: Das Volumen der Kugelschicht beträgt rund 5671 cm³.

Zusammengesetzte krummflächige Körper

Zur Berechnung von zusammengesetzten krummflächigen Körpern zerlegt man diese in solche Bestandteile, die mit Hilfe der bekannten Formeln berechnet werden können, also in Kugeln, Kugelteile, Kegel und Zylinder. Man berechnet dann die einzelnen Teilkörper bzw. die Differenz der Inhalte.

Beispiel 18:

Die Masse und der Oberflächeninhalt der polierten (gekrümmten) Flächen A_M der in der Abbildung 2.117. dargestellten Bikonkavlinse $\left(\varrho = 3{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ sind zu berechnen. Die Linse ist durch Herausschleifen zweier Kugelabschnitte aus einem Zylinder entstanden.

Das Volumen ergibt sich als Differenz aus dem Volumen des Zylinders und dem der beiden Kugelabschnitte. Damit ist die Masse

$$m = \varrho\,(V_1 - 2\,V_2).$$

V_1 ist ein Zylinder mit $d = 10{,}0$ cm und $h = 2{,}0$ cm:

$$V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \cdot 2\text{ cm}^3 = 50\,\pi\text{ cm}^3.$$

V_2 ist ein Kugelabschnitt mit $\varrho = 5{,}0$ cm und $h = 0{,}6$ cm. Aus ϱ kann der Kugelradius r durch die Beziehung (Beispiel 15) $\varrho^2 = h(2r - h)$ gewonnen werden, also

$$r = \frac{\varrho^2 + h^2}{2h}$$

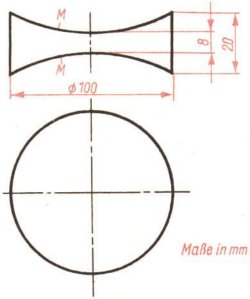


Abb. 2.117.

und damit

$$V_2 = \frac{\pi}{6} h\,(3\varrho^2 + h^2)$$

$$V_2 = \frac{\pi}{6}\,0{,}6\,(3 \cdot 5^2 + 0{,}6^2)\text{ cm}^3 = 7{,}526\,\pi\text{ cm}^3.$$

Diese Berechnungen führen auf die Gleichung

$$m = 3{,}2\,(50\,\pi - 2 \cdot 7{,}526\,\pi)\text{ g}$$

$$= 3{,}2 \cdot 34{,}948\,\pi\text{ g}$$

$$m = 351{,}38\text{ g}.$$

Ergebnis: Die Masse beträgt rund 351 g.

Die Oberfläche A_M der Linse ist eine Kugelkappe mit $\varrho = 5{,}0$ cm und $h = 0{,}6$ cm. Der Kugelradius ergibt sich wiederum mit $r = \frac{\varrho^2 + h^2}{2h}$ und damit zu

$$A_M = 2\,\pi\,r\,h$$

$$= 2\,\pi \cdot \frac{\varrho^2 + h^2}{2h} \cdot h = \pi\,(\varrho^2 + h^2) = 25{,}36\,\pi\text{ cm}^2$$

$$A_M = 79{,}63\text{ cm}^2.$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt der polierten Flächen beträgt rund 159,3 cm².

Aufgaben

1. Zur Berechnung eines geraden Kreiszylinders sind von den fünf Größen r, h, A_M, A_O, V jeweils zwei gegeben. Berechnen Sie die fehlenden drei!

a) $r = 4{,}0$ cm $h = 6{,}5$ cm	**b)** $h = 8{,}0$ m $A_M = 25\ \text{m}^2$	**c)** $A_M = 0{,}4\ \text{m}^2$ $A_O = 1{,}2\ \text{m}^2$	**d)** $A_O = 15\ \text{dm}^2$ $r = 1{,}0$ dm
e) $r = 3{,}0$ cm $V = 75\ \text{cm}^3$	**f)** $V = 25{,}0$ l $h = 0{,}5$ m	**g)** $V = 3{,}0$ hl $A_O = 1{,}2\ \text{m}^2$	**h)** $A_O = 2{,}0\ \text{m}^2$ $h = 4{,}0$ m

2. Eine Konservendose von 1,00 l Inhalt hat einen Durchmesser von 12,0 cm. Wieviel Blech wird für 500 Dosen benötigt, wenn für den Abfall 15 % gerechnet werden?

3. Der Motor der „Wartburg“-Limousine hat drei Zylinder, einen Hub von 78 mm und eine Bohrung (Innendurchmesser des Zylinders) von 70 mm. Wie groß ist der Gesamthubraum?

4. Ein zylindrischer Behälter von 1,20 m Durchmesser enthält 3000 kg Natronlauge der Dichte $1{,}250\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Wie hoch steht die Lauge im Behälter?

5. Es ist die Masse einer 56 m langen Stahlrohrleitung ($\varrho = 7{,}85\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) von 32 mm Innendurchmesser und 8 mm Wanddicke zu berechnen, durch die Benzin ($\varrho = 0{,}720\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) gepumpt wird. Die Flüssigkeit füllt den Rohrquerschnitt vollkommen aus.

6. Ein zylindrisches Standgefäß von 30 mm lichter Weite soll mit Teilstrichen für je $1\ \text{cm}^3$ Fassungsvermögen versehen werden. In welchen Abständen voneinander müssen diese angebracht werden?

7. Einem Würfel von 10,0 cm Kantenlänge ist ein Zylinder einbeschrieben, ein zweiter umbeschrieben. Berechnen Sie von beiden Zylindern Volumen und Oberflächeninhalt, und vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander!

8. Ein Rechteck mit den Seiten **a)** 3,0 cm und 5,0 cm; **b)** a und b rotiert einmal um die eine, dann um die andere Seite. Vergleichen Sie die Oberflächeninhalte und Volumina der beiden entstehenden Zylinder miteinander!

9. Wieviel Flaschenkorken von 3,5 cm Länge und 2,0 cm Durchmesser wiegen 1 kg ($\varrho = 0{,}2\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)?

10. Eine regelmäßige sechsseitige Säule aus Sandstein ($\varrho = 2{,}2\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) mit der Kantenlänge 25 cm und der Höhe $h = 3{,}00$ m wird rundgeschliffen. Wieviel verliert sie an Masse?

11. Ein schwimmender zylindrischer Holzstamm von 40 cm Durchmesser ragt 10 cm aus dem Wasser heraus. Es ist die Dichte des Holzes zu bestimmen.

12. Durch einen Kreiszylinder mit $r = 4$ cm und $h = 11$ cm wird parallel zur Achse in 1 cm Entfernung von dieser ein Schnitt geführt. Wie groß ist das Volumen der beiden Teile?

13. In welcher Zeit kann ein Rohr von 50 cm Durchmesser bei einer Strömungsgeschwindigkeit von $12\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ein Wasserbecken füllen, das 18,00 m lang, 9,00 m breit und 2,25 m tief ist?

14. Wie groß ist der Materialbedarf für die in Abbildung 2.118. dargestellte Schutzkappe?

15. In einem Hohlzylinder von 30 mm lichter Weite steigt das Wasser um 52 mm, wenn ein Körper eingesenkt wird. Welches Volumen hat der Körper?

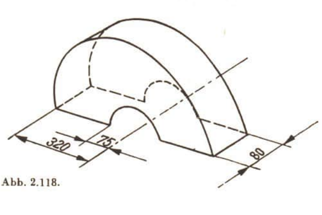


Abb. 2.118.

16. Für einen tönernen, walzenförmigen Wasserbehälter, wie er zum Feuchthalten der Luft in Räumen mit Zentralheizung benutzt wird, braucht man zur genügenden Verdunstung einen Mantel mit einem Flächeninhalt von mindestens 1200 cm^2. Die Höhe soll nicht über 30 cm betragen. Welches ist der kleinste Halbmesser, den man dem Gefäß geben kann?

17. Ein gezogenes Kupferrohr hat einen äußeren Durchmesser von 20 mm. Das laufende Meter wiegt 1,007 kg. Welche Wanddicke hat es?

18. Die fünf Größen r, h, A_M, A_O und V eines geraden Kreiszylinders sind durch drei Gleichungen verbunden. Es müssen also zwei von ihnen gegeben sein, um die drei anderen berechnen zu können. Faßt man diese drei Größen als Variable auf, für die man beliebige Zahlen einsetzen kann, so stellen die erhaltenen Gleichungen Funktionsgleichungen dar. Diese drei zu berechnenden Variablen sind Funktionen der beiden gegebenen Variablen, also Funktionen zweier Variabler. Bleibt aber eine der beiden gegebenen Variablen konstant oder ist sie als Funktion der anderen gegeben, so werden die drei zu berechnenden Variablen Funktionen einer Variablen.
Beispiel: Ist die Höhe h als Funktion von r gegeben, nämlich $h = k \cdot r$, so sind A_M, A_O und V Funktionen von r und umgekehrt. Stellen Sie diese Funktionen für $k = 2$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar, und lesen Sie aus den Funktionsbildern ab, für welche Werte von r die Maßzahlen des Mantels, der Oberfläche und des Volumens übereinstimmen!

19. a) Wieviel Quadratzentimeter Weißblech braucht man für eine Konservenbüchse von 1,0 Liter Inhalt, wenn man als Halbmesser der Büchse 2,0 cm, 3,0 cm, ..., 6,0 cm wählt?

b) Stellen Sie eine allgemeine Formel auf, aus der Sie für diese Aufgabe den Oberflächeninhalt berechnen können, sobald der Halbmesser gegeben ist!

c) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Oberflächeninhalt und Halbmesser durch eine Kurve dar!

d) Untersuchen Sie an Hand der Kurve, welche Form die Konservenbüchse haben müßte, wenn zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht werden soll!

20. In der Technik bestimmt man die Masse eines laufenden Meters Rundstahl oft durch die Faustregel $m \approx 612\, d^2$, wobei d in Zentimetern eingesetzt wird und das Ergebnis in Gramm berechnet ist. Für Überschlagsrechnungen rundet man 612 auf 600. Begründen Sie die Brauchbarkeit dieser Faustformel!

21. Bei einem schiefen Kreiszylinder beträgt der Neigungswinkel der Mantellinien zur Grundfläche 70°. Wie groß ist das Volumen für $r = 5{,}2$ cm und $s = 16{,}3$ cm?

22. Von einem schiefen Kreiszylinder mit $r = 1{,}6$ cm, $h = 4{,}2$ cm und der Mantellinie $s = 6{,}0$ cm ist der Neigungswinkel der Achse gegen die Grundfläche zu berechnen.

23. Das Volumen von Fässern und Tonnen wird mit guter Annäherung wie das Volumen eines Zylinders mit gleicher Höhe und dem mittleren Faßdurchmesser d_m berechnet (KEPLERsche Faßregel):

$$V \approx \frac{\pi}{4} d_m^2 \cdot h.$$

Unter dem mittleren Durchmesser eines Fasses oder einer Tonne ist das arithmetische Mittel zwischen dem Bodenkreisdurchmesser d_1 und zwei Spundkreisdurchmessern d_2 zu verstehen (Abb. 2.119.):

$$d_m = \frac{d_1 + d_2 + d_2}{3} = \frac{d_1 + 2\,d_2}{3}.$$

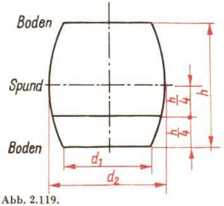


Abb. 2.119.

a) Begründen Sie die Formel für den mittleren Durchmesser d_m eines Fasses!

b) Zeigen Sie, daß der mittlere Durchmesser eines Fasses auch

$$d_m = d_1 + \frac{2}{3}(d_2 - d_1)$$

ist!

c) Zeigen Sie, daß der mittlere Radius eines Fasses

$$r_m = \frac{r_1 + 2r_2}{3} \quad \text{oder} \quad r_m = r_1 + \frac{2 \cdot (r_2 - r_1)}{3}$$

ist!

d) Leiten Sie die Näherungsformel für das Volumen eines Fasses her!

e) Wieviel Liter faßt eine Tonne mit dem Bodendurchmesser $d_1 = 70$ cm, dem Spunddurchmesser $d_2 = 80$ cm und der Höhe $h = 100$ cm? Die Wanddicke des Fasses beträgt durchweg 2 cm.

24. Es ist eine allgemeine Formel für das Kegelvolumen aufzustellen, wenn der Grundkreisradius r und die Mantellinie s bekannt sind.

25. Der Umfang des Grundkreises eines geraden Kegels ist 384 cm, die Seitenlinie 3,00 m. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Mantels, den Oberflächeninhalt und das Volumen!

26. Ein kreisförmiges Zelt (ohne Boden) soll eine Grundfläche von 14,0 m² haben. Wieviel Zeltstoff wird gebraucht, wenn die Zelthöhe 2,00 m betragen soll?

27. Es ist der Neigungswinkel φ einer Mantellinie eines geraden Kegels zu berechnen, wenn **a)** $r = 4{,}4$ cm; $A_M = 108{,}3$ cm², **b)** $h = 7{,}9$ cm; $V = 200$ cm³, **c)** $s = 7{,}0$ cm; $A_O = 30\,\pi$ gegeben sind.

28. Ein gleichseitiger Kegel hat mit einem gleichseitigen Zylinder gleiches Volumen. Wie verhalten sich **a)** die Mäntel, **b)** die Oberflächen?

29. Unter welcher Bedingung sind die Mäntel eines geraden Zylinders und eines geraden Kegels von gleichen Grundflächen und Höhen flächengleich?

30. Bei einem Kegel ist der Mantel doppelt so groß wie die Grundfläche. Wie groß ist sein Öffnungswinkel (Winkel an der Spitze des Achsenschnittes)?

31. Aus einem kreisförmigen Stück Blech von 1,00 m Radius wird ein Stück unter dem Zentriwinkel von 135° ausgeschnitten und zu einem Kegel zusammengerollt. Wie groß sind Radius, Höhe und Volumen des entstehenden Kegels?

32. Eine Viertelkreisfläche vom Radius 40 cm wird zu einem Kegelmantel aufgebogen. Wie groß sind **a)** der Grundkreisradius, **b)** die Höhe und **c)** das Volumen des entstehenden Kegels?

33. Wieviel wiegen 1000 Nietköpfe $\left(\varrho = 7{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ mit $r = 6$ mm von der in Abbildung 2.120. im Achsenschnitt angegebenen Gestalt?

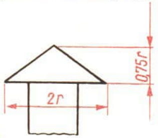


Abb. 2.120.

34. Der Mantel eines Kegels beträgt 694 cm², sein Öffnungswinkel $\alpha = 34°$. Wie groß sind Grundkreis und Oberfläche?

35. Es ist das Volumen und der Flächeninhalt des Mantels eines geraden Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zu berechnen.

36. Ein schiefwinkliges Dreieck dreht sich der Reihe nach um jede seiner drei Seiten. Beweisen Sie, daß die Volumina der drei entstehenden Doppelkegel sich wie die reziproken Werte der Dreiecksseiten verhalten!

37. Es ist der Oberflächeninhalt des in Abbildung 2.121. gezeigten Daches zu berechnen. Die Grundfläche ist mit zu berücksichtigen.

38. Ein kegelförmiges Gefäß, dessen Mantellinie die gleiche Länge wie der Durchmesser des Grundkreises hat, wird mit Quecksilber gefüllt. Wieviel Kilogramm sind notwendig, wenn $s = 60$ cm und $\varrho_{Hg} = 13{,}6\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ sind? ($\sqrt{3} \approx 1{,}73$)

39. Ein Schwimmkörper besteht aus einer Walze mit zwei aufgesetzten Kegeln und hat den in Abbildung 2.122. dargestellten Achsenschnitt (Maße in cm). Wie groß ist sein Volumen?

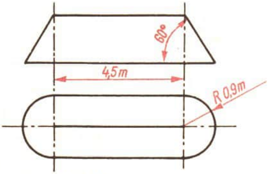


Abb. 2.121.

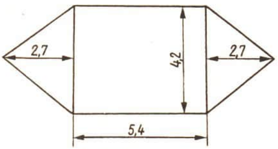


Abb. 2.122.

40. Die Formulierung „Kegel 1 : x" bedeutet in der Technik: Auf die Länge x (mm) verjüngt sich der Kegel im Durchmesser um 1 (mm). Berechnen Sie den Zentriwinkel des ausgebreiteten Mantels für einen Kegel mit dem Radius 3,0 cm und der Verjüngung 1 : 0,5!

41. Ein Kelchglas von 7,6 cm oberem Durchmesser und 11,3 cm Höhe ist bis zur Hälfte seiner Höhe gefüllt. **a)** Wie groß ist die Benetzungsfläche? **b)** Welchen Teil der ganzen Innenfläche des Glases macht diese Benetzungsfläche aus?

42. Eine kegelförmige Abraumhalde hat bei einem Böschungswinkel von 45° eine Höhe von 23 m erreicht. Geben Sie das Volumen der Abraummenge an!

43. Die Größen r, h, s eines geraden Kreiskegels sind durch die Gleichung $s^2 = r^2 + h^2$ miteinander verbunden. Setzt man für s den Wert $\sqrt{r^2 + h^2}$ ein, so kommen in den drei Gleichungen für V, A_M und A_O nur noch fünf Größen vor. Es müssen also zwei von ihnen gegeben sein, um die drei anderen berechnen zu können. Faßt man diese drei Größen als Variable auf, für die man beliebige Zahlen einsetzen kann, so stellen diese Gleichungen Funktionsgleichungen dar. Es gelten deshalb die Betrachtungen der Aufgabe 18 auch für den geraden Kreiskegel.

a) Berechnen Sie das Volumen und den Flächeninhalt des Mantels eines geraden Kegels, wenn der Radius der Grundfläche und das Verhältnis k der Höhe zum Radius gegeben sind! Geben Sie eine grafische Darstellung dieser Funktionen!

b) Bleibt das Volumen eines geraden Kegels unverändert, so ist sein Mantel eine Funktion des Radius r. Stellen Sie diese Funktion grafisch dar!

44. Die folgenden Sätze aus der Schrift *Über Kugel und Zylinder* von ARCHIMEDES (287—212 v.u.Z.) sind an Hand der von uns entwickelten Formeln zu bestätigen:

a) „Der Mantel eines jeden geraden Kegels ist gleich einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale zu jeder Mantellinie des Kegels und dem Radius des Grundkreises ist."

b) „Der Mantel eines jeden geraden Kegels verhält sich zu seiner Grundfläche wie die Mantellinie des Kegels zum Radius der Grundfläche."

45. Wieviel Quadratmeter Material wird zur Herstellung eines Eimers mit den Maßen $r_1 = 15$ cm, $r_2 = 10$ cm und $s = 30$ cm gebraucht?

46. Wieviel Kubikmeter Erde enthält ein Erdhaufen von der Form eines Kegelstumpfes, wenn gegeben sind: der Durchmesser des Grundkreises $d_1 = 30$ cm, der Durchmesser des Deckkreises $d = 24$ cm und die Höhe $h = 18$ cm?

47. Wie groß sind Volumen, Flächeninhalt des Mantels und Oberflächeninhalt eines geraden Kegelstumpfes, von dem man den Grundkreisdurchmesser $d_1 = 45$ cm, den Deckkreisdurchmesser $d_2 = 32$ cm und die Mantellinie $s = 53$ cm kennt?

48. In welcher Höhe muß ein Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten werden, wenn durch den Schnitt das Volumen des Kegels halbiert werden soll? Wie ist der Schnitt zu legen, wenn durch ihn der Mantel des Kegels halbiert werden soll?

49. Wie verhalten sich zueinander Volumen und Flächeninhalt des Mantels der beiden Teile, in die ein Kegel durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt geteilt wird, der die Höhe des Kegels halbiert?

50. Ein gleichseitiger Trichter faßt 1,0 Liter Wasser. Wie hoch steht das Wasser noch in ihm, wenn 0,4 l abgelaufen sind?

51. Ein Schornstein hat die Form eines Kegelstumpfes. Seine Abmessungen sind: untere Durchmesser 3,5 m bzw. 11,3 m; obere Durchmesser 1,8 m bzw. 1,5 m; Höhe 25 m. Wieviel Kubikmeter Mauerwerk enthält er?

52. Ein Baumstamm von 6,00 m Länge hat einen oberen Umfang von 2,50 m und einen unteren Umfang von 3,20 m (ohne Rinde). Wieviel Festmeter Holz liefert er (auf drei Stellen genau)?

53. Eine Blechkanne besteht aus einem Zylinder mit aufgesetztem Kegelstumpf. Der Durchmesser beträgt 20 cm und die Höhe 48 cm. Der zylindrische Teil ist dreimal so hoch wie der Kegelstumpf, der oben 10 cm Durchmesser hat. **a)** Wieviel Liter faßt die Kanne? **b)** Wieviel Material wird zu ihrer Herstellung benötigt?

54. Stellen Sie fest, um wieviel Prozent im ungünstigsten Falle die nach den beiden Näherungsformeln berechneten Werte für das Kugelstumpfvolumen vom genauen Wert abweichen, wenn der Kegelstumpf zum Kegel entartet! (Die Deckfläche wird mit Null gerechnet.)

55. Von den drei Größen r, A_O, V einer Kugel ist eine gegeben. Berechnen Sie die anderen!

a) $r = 4$ cm **b)** $r = 0{,}8$ m **c)** $A_O = 1\ \text{dm}^2$ **d)** $A_O = 0{,}09\ \text{m}^2$
e) $V = 1$ l **f)** $V = 1235\ \text{mm}^3$

56. Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muß der Durchmesser der Kelle sein, wenn sie 1 Liter Flüssigkeit fassen soll?

57. Prüfen Sie nach, ob Sie eine Korkkugel $\left(\varrho = 0{,}24\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ von 1 m Durchmesser tragen könnten!

58. Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall, wenn aus einem Würfel die größtmögliche Kugel gedreht wird?

59. Um wieviel Prozent ist der Oberflächeninhalt einer Kugel kleiner als der eines volumengleichen Würfels?

60. Eine halbkugelförmige Kuppel von 25 m Durchmesser soll mit Metallplatten eingedeckt werden, von denen jede 0,9 m² bedeckt. Wieviel Platten sind erforderlich, wenn wegen der Falze und des Verschnittes 8% mehr berechnet werden?

61. Zwei Kugeln haben die Durchmesser d_1 und d_2. Welchen Durchmesser d_3 muß eine dritte Kugel haben, deren Oberfläche so groß ist wie die Oberflächen der beiden Kugeln zusammen?

62. Es soll eine Glaskugel von 20 cm Durchmesser und einer Wanddicke von 0,8 mm geblasen werden. Wieviel Material ist erforderlich?

63. Welches Volumen hat eine Kugel von $113\frac{1}{7}\ \text{cm}^2$ Oberflächeninhalt? Wie erklärt sich das im ersten Augenblick sonderbar erscheinende Zahlenergebnis?
Anleitung: Setzen Sie $\pi \approx \frac{22}{7}$!

64. Wie groß sind Oberflächeninhalt und Volumen der Erde, wenn diese als eine Kugel angesehen wird, deren Umfang 40 000 km ist?

65. Der Umfang der Erde beträgt rund 40 000 km. Er soll um 1 Meter zunehmen. Um wieviel würde sich dadurch der Radius der Erde vergrößern?

66. Die Oberflächeninhalte zweier Kugeln verhalten sich wie 16 : 25. Wie groß ist das Verhältnis ihrer Volumina?

67. Welche Masse hat eine Kupferhohlkugel von 1,00 m Durchmesser und 2 mm Blechdicke $\left(\varrho = 8{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$?

68. Aus einem Tropfen Seifenlösung, dessen Gestalt als Kugel mit 1 mm Durchmesser angenommen wird, entsteht eine Seifenblase von 30 mm Durchmesser. Wie dick ist die Flüssigkeitsschicht, die die Seifenblase bildet?

69. Die nördliche gemäßigte Zone der Erde liegt zwischen dem nördlichen Polarkreis und dem Wendekreis des Krebses. Der Abstand der beiden Kreisebenen beträgt rund 3300 km, der Erdradius 6370 km. Welchen Flächeninhalt hat die Zone?

70. Ein zylindrischer Kraftstoffbehälter ist an seinen beiden Enden durch Kalotten abgeschlossen und hat die in der Abbildung 2.123. angegebenen Maße. Wieviel Liter Fassungsvermögen besitzt er?

71. Welche Fläche in Quadratkilometern konnte der erste Kosmonaut, Gagarin, aus seiner Gipfelhöhe von 302 km übersehen, wenn die Erde als Kugel mit dem Radius 6370 km angenommen wird (Abb. 2.124.)?
Anleitung: Die Höhe h der Kugelkappe ist nach dem Satz des Euklid zu berechnen: $r^2 = (r + H)(r - h)$.

Abb. 2.123.

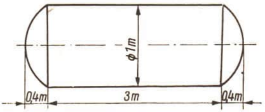
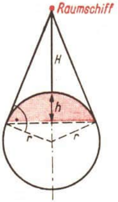


Abb. 2.124.



72. Eine Holzkugel von 18 cm Durchmesser taucht in Wasser schwimmend 14 cm ein. Wie groß ist der Teil der Oberfläche, der nicht vom Wasser benetzt wird?

73. Wie hoch muß eine Rakete steigen, damit von ihr aus $\frac{1}{100}$ der Erdoberfläche im Bild aufgenommen werden kann?

74. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, den wir erhalten, wenn wir alle Punkte einer Kugelzone mit dem Kugelmittelpunkt verbinden!

75. Eine bikonvexe Linse mit gleicher Krümmung auf beiden Seiten hat einen Durchmesser von 10,0 cm und eine größte Dicke von 1,2 cm. Wie schwer ist die Linse $\left(\varrho = 3{,}1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$?

76. Ein Senklot aus Stahl $\left(\varrho = 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ hat die Form eines Kugelausschnittes. Der Kugelradius beträgt 4,0 cm, die Höhe der zugehörigen Kugelkappe 0,3 cm. Die Masse des Senklotes ist zu berechnen.

77. Von einer Kugel mit 10 cm Durchmesser sind an zwei gegenüberliegenden Stellen durch parallele Schnitte zwei Kugelsegmente von je 1 cm Höhe abgeschnitten. Wie groß sind für die übrigbleibende Kugelschicht

a) die beiden Halbmesser ϱ_1 und ϱ_1 der Endflächen,

b) das Volumen V der Kugelschicht?

78. Welche Höhe hat eine Kugelzone von 230 dm² Fläche, wenn der Kugelradius 20 dm ist?

79. Eine Holzkugel von 8 cm Durchmesser wird auf ein kegelförmig zugespitztes Rundholz aufgeleimt. Sie muß deshalb mit einer Aussparung versehen werden, die die Form eines Sektors mit dem Kegelöffnungswinkel 60° hat. Der Materialabfall ist anzugeben.
Anleitung: Setzen Sie $\sqrt{3} \approx 1{,}73$!

80. Aus einem 75 mm langen runden Stahlstab von 20 mm Durchmesser soll ein Senklot hergestellt werden, das die Form eines Zylinders mit zwei aufgesetzten Kegeln hat. Der eine Kegel hat 20 mm, der andere 5 mm Höhe.

a) Wie groß ist das Volumen des Senklotes?

b) Wieviel wiegt der Abfall, wenn die Dichte des Stahls $7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt?

81. Wie groß ist das Volumen der konisch ausgebohrten Büchse nach Abbildung 2.125.?
Anleitung: Bestimmen Sie das Volumen als Summe zweier Zylinder, vermindert um einen Kegelstumpf!

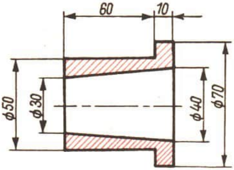


Abb. 2.125.

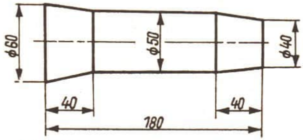


Abb. 2.126.

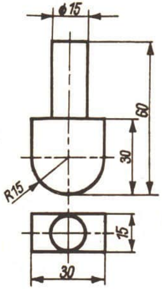


Abb. 2.127.

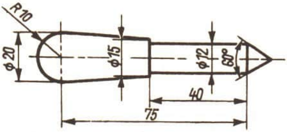


Abb. 2.128.

82. Es ist die Masse eines Kreuzkopfzapfens zu berechnen. Die Dichte des Materials beträgt $7{,}85\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, die Maße sind der Abbildung 2.126. zu entnehmen.

83. Es ist die Masse des in Abbildung 2.127. dargestellten Einzelteiles zu berechnen $\left(\varrho = 7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$.

84. Berechnen Sie das Volumen eines aus Rundstahl gedrehten Bolzens, dessen Achsenschnitt die Abbildung 2.128. zeigt!

85. Berechnen Sie die Masse des in Abbildung 2.129. dargestellten Kugelgelenkbolzens $\left(\varrho = 7{,}85\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$!

86. Es ist der Blechverbrauch bei der Herstellung eines Kruges nach Abbildung 2.130. zu ermitteln.

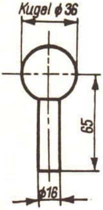


Abb. 2.129.

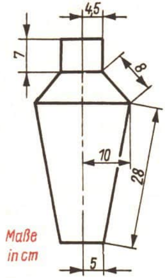
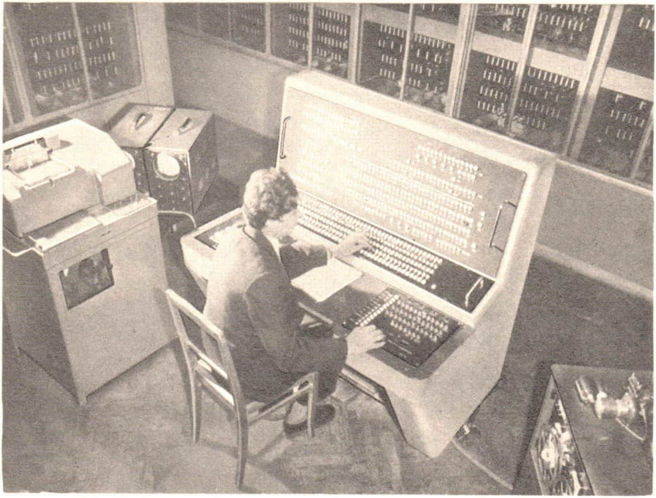


Abb. 2.130.



3. Dualzahlen

Eine Hauptlinie des technischen Fortschritts im Sozialismus ist die Mechanisierung und Automatisierung der Produktion. Unter Mechanisierung versteht man die Ablösung der menschlichen Arbeit durch maschinelle Arbeit, unter Automatisierung die Anwendung von Maschinen, die in ihrem Arbeitsablauf maschinell gesteuert werden. Darüber hinaus ist es das Ziel der Automatisierung, Automaten zu konstruieren, die bestimmte Aufgaben, die bisher von Menschen nur unter sehr großem Zeitaufwand bearbeitet werden konnten, selbständig steuern und lösen. Solche Aufgaben sind hauptsächlich komplizierte Rechenoperationen, zu deren Durchführung eine große Anzahl von Mathematikern für eine lange Zeit in Anspruch genommen würde. Umfangreiche Rechnungen werden in dem Maße in immer größerem Umfang erforderlich, wie der Mensch in Natur und Technik, in Forschung und Industrialisierung weiter vordringt. Die Vorausberechnung der Bahn der interplanetarischen Raketen, die Entwicklung neuer optischer Geräte, die Konstruktion von Großmaschinen auf verschiedenen Gebieten der Industrie und Landwirtschaft, um nur einige Beispiele zu nennen, stellen laufend rechnerische Probleme an Wissenschaftler und Konstrukteure, die

ohne mechanische oder elektronische Rechenhilfsmittel nicht mehr zu bewältigen sind. Rechnungen, für die mehrere Mathematiker Stunden, Tage oder Monate benötigen würden, können mit Rechenmaschinen in Minuten oder Sekunden bewältigt werden. Solche Rechengeschwindigkeiten werden häufig benötigt; man denke nur an die laufende Überwachung und Korrektur des Fluges einer Rakete.
Aber auch weniger weitreichende Aufgaben werden in der Technik im allgemeinen mit Hilfe der verschiedenen mathematischen Hilfsmittel gelöst. Zu solchen mathematischen Hilfsmitteln zählt man nicht nur die Rechenmaschinen, sondern auch Logarithmentafeln, Tafeln spezieller Funktionen, den Rechenstab, das Planimeter u. a. Bei den Rechenmaschinen unterscheidet man *Analogrechner* und *Digitalrechner*. In Analogrechnern wird der Ablauf einer Berechnung durch einen analogen physikalischen Prozeß (mechanisch oder elektrisch) dargestellt. Den Zahlen sind physikalische Größen zugeordnet und umgekehrt. So werden z. B. beim Rechenstab, dessen vorliegende Form schon 300 Jahre alt ist, Zahlen durch Strecken dargestellt. In Digitalrechnern gibt man diskrete Einheiten für die Zahlendarstellung vor. Man rechnet z. B. mit Steinen verschiedener Wertigkeit oder mit Kugeln, die auf Schnüre gezogen und auf einen Holzrahmen gespannt sind — mit dem sogenannten Abacus, der mindestens 3000 Jahre alt ist. Diese diskreten Einheiten reiht man aneinander. Der Wert einer Einheit hängt von der Stelle ab, an der diese Einheit aufgeführt ist. Diese Überlegungen wurden beim Aufbau von mechanischen Digitalrechnern berücksichtigt. Diese Rechner können die vier Grundrechenoperationen ausführen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Hierzu werden sie mittels Handkurbel oder Elektromotors angetrieben. Die älteste mechanische digitale Rechenmaschine baute der deutsche Altphilologe, Mathematiker und Astronom WILHELM SCHICKARD (1592—1635), ein Freund des Astronomen JOHANNES KEPLER. Mit dieser Rechenmaschine konnten die vier Grundrechenoperationen ausgeführt werden. Der französische Philosoph und Mathematiker BLAISE PASCAL (1623—1662) stellte 1640/41 eine Additions- und Subtraktionsmaschine her. Kurze Zeit später (1670—1673) konstruierte der deutsche Philosoph und Mathematiker GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646—1716) eine noch heute funktionsfähige Rechenmaschine, die die vier Grundrechenoperationen ausführen kann.
Die Berechnungen erfolgen mit Hilfe dieser Rechengeräte und Tabellen stets nach folgendem Schema: Der menschliche Rechner erhält eine Aufgabe mit gewissen Daten und eine bestimmte Rechenvorschrift (Formeln), Papier und Schreibgerät, Tabellen und eine (digitale) Tischrechenmaschine. Zuerst schreibt (speichert) er Rechenvorschrift (Programm) und Daten auf das Papier (Speicher). Dann benutzt er die Rechenmaschine (Rechenwerk) zur Ausführung der jeweils erforderlichen Grundrechenoperationen und gebraucht eventuell Tabellen, Tafeln u. a. Er (Steuerwerk) notiert (speichert) sich Zwischenergebnisse. Dieser Ablauf wird ständig vom menschlichen Rechner (Steuerwerk) wiederholt, bis er zu Endergebnissen gelangt. Der menschliche Rechner steuert Schritt für Schritt den Rechenvorgang. In welchem Ziffernsystem (10, 12, 60, 5 oder 2 usw.) gerechnet wird, hängt von der Ausbildung des menschlichen Rechners und der Zahlendarstellung in den vorliegenden Rechenhilfsmitteln ab, jedoch nicht von ihrer mechanischen, elektromechanischen oder elektronischen Ausführung.
Im vorigen Jahrhundert versuchte der englische Mathematiker und Konstrukteur CHARLES BABBAGE (1792—1871), den menschlichen Rechner (im obigen Schema) zu ersetzen durch eine automatische Steuerung des Berechnungsablaufs nach dem Vor-

bild der durch Lochstreifen gesteuerten vollautomatischen Webstühle. So sollten lange Berechnungen ohne menschlichen Eingriff allein durch Programmsteuerung möglich werden. Nach diesem Prinzip arbeiten auch heute die programmgesteuerten elektronischen Digitalrechenautomaten. Erst durch den Einsatz elektromechanischer (Relais) und elektronischer (Elektronenröhre, Transistor, Halbleiter) Bauelemente beim Bau von Rechenautomaten konnten die Vorstellungen von CHARLES BABBAGE ganz verwirklicht werden. Vor ungefähr dreißig Jahren setzte eine sprunghafte Entwicklung der elektronischen digitalen Rechenautomaten ein, die auch weiterhin anhält. Es gibt kaum Länder, die nicht kleine oder große elektronische Rechenautomaten für Wirtschaft, Technik und Wissenschaft besitzen.[1] Es werden Jahr für Jahr neue Rechenzentren eingerichtet und ältere Maschinen, die oftmals erst drei oder vier Jahre alt sind, durch neue Entwicklungstypen ersetzt.

Man beachte, daß auch der modernste elektronische Digitalrechner nur die vier Grundrechenoperationen ausführen kann. Jedes zu lösende Problem muß auf diese zurückgeführt werden. Innerhalb des Gerätes werden die vier Grundrechenoperationen aus noch einfacheren Operationen aufgebaut, aus Operationen, die sich technisch leicht darstellen lassen. Hierzu gehört z. B. das kleine Einmaleins im System der Dualzahlen.

Um einen Einblick in die moderne Mechanisierung und Automatisierung auf dem Gebiete der Rechentechnik zu erhalten, wollen wir uns deshalb kurz mit anderen Ziffernsystemen als unserem Zehnersystem, speziell mit dem Zweiersystem, beschäftigen.

3.1. Zur Wiederholung

1. a) Lesen Sie die Zahlen 12 345,678 9 und 102 030 405,060 708 09!

b) Welche Grundziffern benutzt man zur Darstellung der Zahlen in unserem Ziffernsystem?

c) Welche Werte haben die einzelnen Grundziffern in den beiden Zahlen?

d) Welche wichtige Aufgabe hat die Null?

2. a) Welche Symbole benutzt man zur Darstellung der Zahlen im römischen Ziffernsystem?

b) Lesen Sie die Zahlen XXXVI, CLIX, MDCLXVI, MMCDXCIX!

c) Lesen Sie die Zahlen VI und 51; IV und 15;
MDCLXVI und 1 000 500 100 501 051!

d) Warum nennt man unser Ziffernsystem ein Stellenwertsystem, das römische aber ein Additionssystem?

3. a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen als eine Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen!
2 576; 2,576; 300,14; 30,014; 1 234,567 89; 9 807 006,500 403 21

b) Warum heißt unser Ziffernsystem dekadisches oder Zehnersystem?

c) Wievieler Grundziffern bedarf es zur Darstellung aller Zahlen im Zehnersystem?

[1] In diesem Zusammenhang sei auf den Beruf „technisch-wissenschaftlicher Rechner" verwiesen. Absolventen der zehnklassigen polytechnischen Oberschule oder der erweiterten polytechnischen Oberschule können diesen Beruf erlernen. Den Beruf „Programmierer" gibt es nicht. Diese Bezeichnung stammt aus der Anfangszeit des automatischen Rechnens, als die Bedienung eines Rechenautomaten noch kompliziert war.

4. a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in das dezimale Stellenwertsystem um!
DCCLXXXII; XIX; CMXCIX; CMXLIX

b) Schreiben Sie folgende Zahlen mit römischen Zahlzeichen!
368; 497; 89; 1 945

c) Welche Zahlenschreibung ist vorteilhafter? Begründen Sie Ihre Antwort!

3.2. Das Zehnersystem

In dem von uns verwendeten **Zehnersystem** werden zehn **Grundziffern** benutzt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Unter ihnen befindet sich die Null. Dieser kommt hierbei wie in jedem Stellenwert- (oder Positions-) System eine besondere Bedeutung zu. Sie wird zur Kennzeichnung der „leeren Stellen" in einem Zahlbild benötigt.
Ihr erstes Vorkommen in einer indischen Handschrift um 800 u. Z. bedeutet in der Entwicklung der Stellenwertsysteme einen entscheidenden Fortschritt. (Positionssysteme ohne Verwendung der Null finden sich bereits lange vor dieser Zeit, zum ersten Male um 2000 v. u. Z. in Babylonien.)
Die Verwendung von nur 10 unterschiedlichen Schriftzeichen bedeutet, daß, von der Null angefangen, bereits jede 11. Zahl in der Zahlenfolge der ganzen Zahlen durch ein Zahlbild wiedergegeben werden muß, das kein eigenes Schriftzeichen (Individualzeichen) darstellt. Das wird bekanntlich dadurch erreicht, daß gewisse Ziffern im Zahlbild an andere Stellen gesetzt werden. Benachbarte Stellenwerte im Zahlbild verhalten sich infolgedessen jeweils wie 10:1 (Stellenwertfaktor 10).
Im dekadischen System hat deshalb jedes Zahlbild folgende Form:

$$\begin{aligned} z = \ldots a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + \\ + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + a_{-3} \cdot 10^{-3} + \cdots + \\ + \cdots + a_{-n} \cdot 10^{-n} + \cdots \end{aligned}$$

n: positive ganze Zahlen,

$a_{-n} \ldots a_n$: jeweils eine der Grundziffern 1, 2, 3, ..., 8, 9, 0.

Jede Zahl kann also als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen dargestellt werden.

Beispiel 1:

$$z = 2\,057{,}602\,38$$

$$\begin{aligned} z = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + \\ + 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Also:

$a_3 = 2$; $a_2 = 0$; $a_1 = 5$; $a_0 = 7$;
$a_{-1} = 6$; $a_{-2} = 0$; $a_{-3} = 2$; $a_{-4} = 3$; $a_{-5} = 8$

Es sind also gekennzeichnet die		durch den Exponenten $n =$
...		...
Zehntausender	(ZT)	4
Tausender	(T)	3
Hunderter	(H)	2
Zehner	(Z)	1
Einer	(E)	0
Zehntel	(z)	-1
Hundertstel	(h)	-2
Tausendstel	(t)	-3
...		...

Aufgaben

1. Folgende Ziffern sind als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen zu schreiben (Zahlenanalyse)!
12 058; 99,99; 100,001; 0,000 598 3; 473 000 000; 270 038; 51 525,3; 175,250 008; 120 005 002; 9 876,543 21.

2. Folgende algebraischen Summen sind als Ziffern im Zehnersystem zu schreiben (Zahlensynthese)!

a) $5 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2$

b) $7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-3} + 10^{-5}$

c) $4 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^7 + 10^6$ **d)** $9 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^{-5}$

e) $10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 10^0 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + 10^{-8}$

f) $5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-3}$ **g)** $3 \cdot 10^{-6} + 10^{-7} + 8 \cdot 10^{-8}$

h) $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^{-6}$ **i)** 10^{-9} **k)** $3 \cdot 10^{10}$

3. Schreiben Sie als Ziffern im Zehnersystem und als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen!

a) 9 ZT 8 T 7 H 4 Z 5 E **b)** 4 E 2 z 1 h **c)** 6 Millionen **d)** 7 Millionstel **e)** 13 Milliarden
f) 300 T **g)** 6 Z 6 z **h)** 1 E 1 h 1 t **i)** 50 zt **k)** 6 Billionstel

3.3. Andere Stellenwertsysteme

Die Wahl von gerade zehn verschiedenen Schriftzeichen (Ziffern) zum Aufbau der Zahlbilder ist mehr oder weniger willkürlich. Obwohl sie sich bei vielen Völkern und zu allen Zeiten findet, ist der oft vermutete Zusammenhang mit den zehn Fingern nicht erwiesen, aber als Ursache der Wahl wahrscheinlich. Ebenso hat es zu allen Zeiten auch schon andere Positionssysteme, teils mit weniger, teils mit mehr als 10 Grundschriftzeichen, gegeben.

Das Fünfersystem

Das Fünfersystem enthält nur fünf Ziffern. Im folgenden werden dazu die Schriftzeichen 1, 2, 3, 4, 0 benutzt. Jede Zahl der Zahlenfolge der ganzen Zahlen muß daher durch diese Schriftzeichen dargestellt werden. Benachbarte Stellenwerte verhalten sich hier wie 5:1 (Stellenwertfaktor 5), und jede Zahl kann als eine Summe von Vielfachen von Fünferpotenzen dargestellt werden:

$$z = \ldots a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot 5^3 + a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5^1 + \\ + a_0 \cdot 5^0 + a_{-1} \cdot 5^{-1} + a_{-2} \cdot 5^{-2} + a_{-3} \cdot 5^{-3} + \cdots + \\ + \cdots + a_{-n} \cdot 5^{-n} + \cdots,$$

n: positive ganze Zahlen.

$a_{-n} \ldots a_n$: jeweils eine der Grundziffern 1, 2, 3, 4, 0.

Die Zahlenfolge der positiven ganzen Zahlen einschließlich der 0 hat also hier folgendes Aussehen:

0; 1; 2; 3; 4;   10; 11; 12; 13; 14;   20; 21; 22; 23; 24;
30 ...   ... 42; 43; 44;   100; 101; 102; 103; 104;   110; 111; ...

Man darf dabei zum Beispiel die Ziffer 13 nicht als „dreizehn" lesen; denn die Eins hat hier nicht den Wert $1 \cdot 10$, sondern den Wert $1 \cdot 5$, also 5. Deshalb liest man 13 als „eins – drei" und macht das durch eine eckige Klammer mit dem Index 5 kenntlich: $[13]_5$ gelesen: eins–drei im Fünfersystem. Dieser Ziffer entspricht im Zehnersystem die Ziffer 8:

$$[13]_5 = 8; \text{ denn } [13]_5 = 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 5 + 3 = 8.$$

Beispiel 2:

$$[4\,043\,021]_5 = 4 \cdot 5^6 + 4 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0$$
$$= 4 \cdot 15\,625 + 4 \cdot 625 + 3 \cdot 125 + 2 \cdot 5 + 1$$
$$[4\,043\,021]_5 = 62\,500 + 2500 + 375 + 10 + 1 = 65\,386$$

Beispiel 3:

$$[2{,}314]_5 = 2 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^{-1} + 1 \cdot 5^{-2} + 4 \cdot 5^{-3}$$
$$= 2 + \frac{3}{5} + \frac{1}{25} + \frac{4}{125}$$
$$= 2 + 0{,}6 + 0{,}04 + 0{,}032$$
$$[2{,}314]_5 = 2{,}672$$

Die Umkehrung, das Ermitteln des Zahlbildes im Fünfersystem bei gegebenem Zahlbild im Zehnersystem, wird folgendermaßen dargestellt:

Beispiel 4:

$$14\,578 = 4 \cdot 3125 + 3 \cdot 625 + 1 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 3$$
$$= 4 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^0$$
$$14\,578 = [431\,303]_5$$

Das Zwölfersystem

Im Zwölfersystem benötigt man zwölf unterschiedliche Zahlzeichen für die elf ersten Zahlen aus der Folge der positiven ganzen Zahlen und für die Null. Im folgenden werden dazu die Schriftzeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, z, e, 0 benutzt.
Die Stufenwerte für die einzelnen Stellen sind diesmal die Zwölferpotenzen.

$$z = \ldots a_n \cdot 12^n + a_{n-1} \cdot 12^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot 12^3 + a_2 \cdot 12^2 + \\ + a_1 \cdot 12^1 + a_0 \cdot 12^0 + a_{-1} \cdot 12^{-1} + a_{-2} \cdot 12^{-2} + \\ + a_{-3} \cdot 12^{-3} + \cdots + a_{-n} \cdot 12^{-n} + \cdots$$

n: positive Zahlen.

$a_{-n} \ldots a_n$: jeweils eine der Ziffern 1, 2, 3, ..., 9, z, e, 0.

Die Zahlenfolge der nichtnegativen ganzen Zahlen lautet: 0; 1; 2; 3; ...; 9; z; e; 10; 11; 12; 13; ...; 19; 1z; 1e; 20; 21; 22; 23; ...; 29; 2z; 2e; 30; ...; 40; ...; 90; ...; 98; 99; 9z; 9e; z0; z1; z2; z3; ...; z9; zz; ze; e0; e1; e2; ...; e9; ez; ee; 100; 101; 102; 103; ...; 200; ...; 300; ...; z00; ...; e00; e01; e02; ...; ee9; eez; eee; 1000 ...

Die Umrechnung geht aus den folgenden Beispielen hervor.

Beispiel 5:

$$[3405]_{12} = 3 \cdot 12^3 + 4 \cdot 12^2 + 0 \cdot 12^1 + 5 \cdot 12^0$$
$$= 3 \cdot 1728 + 4 \cdot 144 + 5 \cdot 1$$
$$[3405]_{12} = 5765$$

Beispiel 6:

$$[ze,\ 02e]_{12} = 10 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0 + 0 \cdot 12^{-1} + 2 \cdot 12^{-2} + 11 \cdot 12^{-3}$$
$$= 10 \cdot 12 + 11 \cdot 1 + \frac{2}{144} + \frac{11}{1728}$$
$$= 120 + 11 + \frac{2}{144} + \frac{11}{1728}$$
$$[ze,\ 02e]_{12} = 131\,\frac{35}{1728}$$

Beispiel 7:

$$5902 = 3 \cdot 1728 + 4 \cdot 144 + 11 \cdot 12 + 10$$
$$= 3 \cdot 12^3 + 4 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12^1 + 10 \cdot 12^0$$
$$5902 = [34\ e\ z]_{12}$$

Aufgaben

1. Schreiben Sie im dekadischen System!

a) $[2103{,}4]_5$ **b)** $[0{,}1234]_5$ **c)** $[10\,203\,040]_5$
d) $[4\ e,\ z]_{12}$ **e)** $[0{,}941]_{12}$ **f)** $[8\ e,\ z\ z\ z]_{12}$

2. Schreiben Sie **a)** im Fünfersystem, **b)** im Zwölfersystem!
24 402; 998 877; 1 000 001

3. Welche Zahlen werden im Fünfer-, Zehner- und Zwölfersystem durch dieselben Zahlzeichen dargestellt, welche außerdem nur im Zehner- und Zwölfersystem?

3.4. Das Dualsystem

1. *Es sollen Zahlen durch Flaggensignale derart übertragen werden, daß jede Grundziffer durch eine andersartige Flagge dargestellt wird und diese entsprechend der Aufeinanderfolge der Grundziffern im Zahlzeichen nacheinander gehißt werden. Wieviel verschiedenartige Flaggen benötigt man bei den verschiedenen Positionssystemen?*

2. *Es soll dieselbe Übertragung auf elektrischem Wege durch ein mehradriges Kabel durchgeführt werden, so daß jede Ziffer durch einen Stromstoß in der zu ihr gehörenden Ader signalisiert wird. Wieviel Adern muß das Kabel bei den verschiedenen Positionssystemen haben?*

3. *Im Fernsprechverkehr werden die gewählten Rufnummern ebenfalls durch Stromstöße in den Wählersaal des Fernsprechamts übertragen, jedoch durch Stromstöße auf einer normalen Leitung. Wie wird das mit Hilfe der Wählerscheibe erreicht?*
   Wieviel Kontakte hat sie, wenn mit dem Zehnersystem gearbeitet wird? Wieviel müßte sie in anderen Positionssystemen haben?

Die Überlegungen in den Schüleraufträgen 1 bis 3 zeigen, daß die Übertragung von Zahlen um so weniger technischen Aufwand erfordert, je kleiner die Grundzahl des Positionssystems ist. Allerdings wird mit abnehmender Stufenzahl die Anzahl der Stellen für ein und dieselbe darzustellende Zahl immer größer (vgl. vorigen Abschnitt), so daß bei der Übertragung von größeren Zahlen durch Stromstöße dem Vorteil der kleineren Grundzahl der Nachteil der größeren Stellenanzahl gegenübersteht.

Beispiel 8:

Bei der Übertragung von Zahlen im Fernsprechverkehr würde die größte fünfstellige Ziffer des Zehnersystems 99 999 genau $5 \cdot 9 = 45$ Stromstöße und vier Pausen erfordern. Für die gleiche Übertragung wären bei Benutzung des Fünfersystems trotz der größeren Stellenzahl aber nur 23 Stromstöße mit sieben Pausen erforderlich: denn $99\,999 = [11\,144\,444]_5$.

Mitunter ergibt sich allerdings im Fünfersystem auch eine größere Anzahl von Signalen als im Zehnersystem.

Beispiel 9:

Die fünfstellige Ziffer des Zehnersystems $11\,111 = [323\,421]_5$ erfordert $5 \cdot 1 = 5$ Stromstöße mit vier Pausen beim Zehnersystem, aber 15 Stromstöße mit fünf Pausen beim Fünfersystem. Der technische Aufwand bleibt beim Fünfersystem aber trotzdem kleiner als beim Zehnersystem.

In konsequenter Fortführung dieses Gedankens müßten die geringsten technischen Schwierigkeiten bei Benutzung der Grundzahl 2 entstehen. In diesem System gibt es nur zwei Grundziffern, von denen die eine wiederum die Nulll sein muß. Sie werden im folgenden mit L und 0 bezeichnet. Dann kann man, da Verwechselungen ausgeschlossen sind, die eckige Klammer mit dem Index 2 weglassen. Die Stellenwerte benachbarter Ziffern in einem Zahlsymbol verhalten sich dabei jeweils wie 2 : 1 (Stellenwertfaktor 2). Die Zahl zeigt dann folgenden Aufbau:

$$z = \dots a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 + \\ + a_{-1} \cdot 2^{-1} + a_{-2} \cdot 2^{-2} + a_{-3} \cdot 2^{-3} + \cdots a_{-n} \cdot 2^{-n} + \cdots$$

n: positive ganze Zahlen, $a_{-n} \dots a_n$: jeweils eine der beiden Ziffern L oder 0.
Dieses Ziffernsystem heißt das **Zweiersystem** oder **Dualsystem** (gelegentlich auch **Binärsystem**). Dieses System ist für mechanische Übertragungen von Zahlen besonders geeignet, da es nur zweier Signale bedarf (Prinzip des Entweder-Oder), z. B. Flagge rechts oder Flagge links; bei elektrischer Übertragung Stromstoß oder stromlos; bei optischer Übertragung Licht oder Dunkel usw. Als Nachteil muß allerdings die außerordentliche Länge der Zahlbilder festgestellt werden.
Die Zahlenfolge der nichtnegativen ganzen Zahlen heißt hier:

0; L; L0; LL; L00; L0L; LL0; LLL; L000; ...

Die Umrechnung geht aus den folgenden Beispielen hervor.

Beispiel 10:

$$\text{LLL00LLL} = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ = 128 + 64 + 32 + 4 + 2 + 1 = 231$$

Beispiel 11:

$$\text{LL, 0L0L} = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \\ = 2 + 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} = 3\tfrac{5}{16}$$

Beispiel 12:

$$15209 = 1 \cdot 8192 + 1 \cdot 4096 + 1 \cdot 2048 + 0 \cdot 1024 + 1 \cdot 512 + 1 \cdot 256 + \\ + 0 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \\ = 1 \cdot 2^{13} + 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + \\ + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$15209 = \text{LLL0LL0LL0L00L}$$

Trotz der Länge des Zahlbildes gestaltet sich die Umrechnung ins dekadische System sehr einfach, da die Grundzahlpotenzen (hier die Potenzen von 2) niemals wie bei anderen Systemen mit irgendwelchen Zahlen multipliziert werden müssen, sondern lediglich eine Addition gewisser Zweierpotenzen zum dekadischen Zahlbild führt. Dabei fängt man am besten mit dem niedrigsten Stellenwert im Zweiersystem an.

Beispiel 13:

$$\text{L0LL00L} = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^6 \\ = 1 + 8 + 16 + 64 = 89$$

Im umgekehrten Fall kommt man durch fortlaufende Subtraktion von Zweierpotenzen zum Ziel. Dabei beginnt man mit der größten, die in der Zahl enthalten ist.

Beispiel 14:

$$
\begin{aligned}
185 &= 128 + (185 - 128)\\
&= 128 + \quad 57\\
&= 128 + 32 + (57 - 32)\\
&= 128 + 32 + \quad 25\\
&= 128 + 32 + 16 + (25 - 16)\\
&= 128 + 32 + 16 + \quad 9\\
&= 128 + 32 + 16 + 8 + (9 - 8)\\
&= 128 + 32 + 16 + 8 + \quad 1\\
185 &= 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + \quad 2^0 = \mathrm{L0LLL00L}
\end{aligned}
$$

Aufgaben

1. Wie heißen die Potenzen von 2? Stellen Sie eine Tabelle für $n = 0$ bis $n = 15$ auf!

2. Zählen Sie im Dualsystem **a)** von 0 bis 20 in Einersprüngen vorwärts, **b)** von 16 bis 2 in Einersprüngen rückwärts, **c)** von 0 bis 16 in Zweiersprüngen vorwärts, **d)** von 10 bis 50 in Zehnersprüngen vorwärts!

3. Welche ungleichmäßigen Sprünge ermöglichen **a)** im Zehnersystem, **b)** im Dualsystem ein besonders einfaches Zählen?

4. Schreiben Sie in das Dualsystem um!
25; 999; 10 000; 265 423; 18 005; 3 003; 60 606; 75; 910; 33

5. Schreiben Sie in das dekadische Ziffernsystem um!
LLL; L00L0LL0; L00000000; LL00LLL000LL; LL0LL; L00L00; L0LL00LLL; LL00LL00; LL00L0L; LL0,L0L; 0,00LL

3.5. Rechenoperationen im Dualsystem

Jedes Rechnen ist vereinfachtes Zählen. So läßt sich das Potenzieren (mit positiven, ganzzahligen Exponenten) als vereinfachtes Multiplizieren, dieses als vereinfachtes Addieren und dies wieder als abgekürztes Vorwärtszählen auffassen. Die Umkehroperationen, Dividieren und Subtrahieren, stellen sinngemäß letzten Endes ein vereinfachtes Rückwärtszählen dar. Die Grundlage aller Grundrechenoperationen bilden deshalb die Zahlenfolgen des Einsundeins und des Einmaleins. Je größer die Grundzahl des Systems, desto größer ist die Zahl der Zahlenfolgen und desto länger ist jede von ihnen. Beim Zehnersystem sind es bekanntlich zehn Folgen zu je zehn Gliedern.

$$
\begin{array}{llll}
0+0 & 0+1 & 0+2 \ldots & 0+9\\
1+0 & 1+1 & 1+2 \ldots & 1+9\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
9+0 & 9+1 & 9+2 \ldots & 9+9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 2 \ldots & 0\cdot 9\\
1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 2 \ldots & 1\cdot 9\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
9\cdot 0 & 9\cdot 1 & 9\cdot 2 \ldots & 9\cdot 9
\end{array}
$$

Beim Zwölfersystem sind es je zwölf solcher Folgen zu je zwölf Gliedern, beim Fünfersystem aber nur fünf Folgen zu je fünf Gliedern, auf die alle anderen Rechenoperationen zurückgeführt werden können.
Beim Dualsystem reduzieren sich Einsundeins und Einmaleins auf ein Mindestmaß:

Einsundeins

$$0 + 0 = 0 \quad 0 + L = L$$
$$L + 0 = L \quad L + L = L0$$

Einmaleins

$$0 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot L = 0$$
$$L \cdot 0 = 0 \quad L \cdot L = L$$

In rechnerischer Hinsicht stellt also das Dualsystem das denkbar einfachste Ziffernsystem dar. Die umgekehrten Rechenoperationen ergeben sich daraus wie üblich:

Einswegeins

$$0 - 0 = 0 \quad L - L = 0$$
$$L - 0 = L \quad L0 - L = L$$

Einsdurcheins

$$\left.\begin{matrix} 0 : 0 = \\ L : 0 = \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{nicht} \\ \text{erklärt} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 : L = 0 \\ L : L = L \end{matrix}$$

Addition und Multiplikation

Beispiel 15:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle L} \\ LL0L \\ LL0 \\ \hline L00LL \end{array}$$

Sprechen Sie beim Rechnen wie folgt!

a) 0 und L ist L
b) L und 0 ist L
c) L und L ist L0, schreibe 0, merke L
d) L und L ist L0

Zur Probe kann man die Aufgabe ins dekadische System übertragen:

$$\begin{array}{r} LL0L = 13 \\ LL0 = 6 \\ \hline L00LL = 19 \end{array}$$

Beispiel 16:

$$\begin{array}{r} LL0L0 \cdot L0L \\ \hline LL0L0 \\ 0 \\ LL0L0 \\ \hline L0000L0 \end{array}$$

Sprechen Sie beim Rechnen wie folgt!

a) L mal LL0L0 ist LL0L0
b) 0 mal LL0L0 ist 0
c) L mal LL0L0 ist LL0L0
d) addieren wie beim 1. Beispiel

Probe im dekadischen System: $\frac{26 \cdot 5}{130}$

Subtraktion

Beispiel 17:

$$\begin{array}{r} L0LL \\ -\quad L0 \\ \hline L00L \end{array}$$

Probe im dekadischen System:
$11 - 2 = 9$

Sprechen Sie beim Rechnen wie folgt!

a) 0 und L ist L
b) L und 0 ist L
c) 0 und 0 ist 0
d) 0 und L ist L

Beispiel 18:

Hier ergibt sich eine Schwierigkeit, wenn in einer Spalte der Subtrahend größer als der Minuend ist. Im Dualsystem kann das nur darin bestehen, daß die Aufgabe 0 – L vorkommt. Dann muß auch hier auf die nächsthöhere Stelle zurückgegriffen werden, so daß die Aufgabe L0 – L entsteht:

```
  L L 0 L
– L 0 L L
    L
---------
  0 0 L 0
```

Sprechen Sie beim Rechnen wie folgt!

a) L und 0 ist L
b) L zu 0 zu ergänzen ist nicht möglich, also L und L ist L 0, merke L
c) nicht mehr 0, sondern (L + 0 =) L und 0 ist L d) L und 0 ist L

Probe im dekadischen System: 13 – 11 = 2

Beispiel 19:

Sehr häufig kommt es vor, daß über mehrere höhere Stellenwerte zurückgegriffen werden muß:

```
  L L 0 0 0 L
–     L L L 0
      L L L
-------------
  L 0 0 0 L L
```

Probe im dekadischen System:

49 – 14 = 35

Sprechen Sie beim Rechnen wie folgt!

a) 0 und L ist L
b) L und L ist L0, merke L
c) nicht mehr L, sondern (L + L =) L0 und 0 ist L0, merke L
d) wieder (L + L =) L0 und 0 ist L0, merke L
e) L und 0 ist L
f) 0 und L ist L

Division

Die Division verläuft nach dem üblichen Schema. Da aber nur 0 oder L herauskommen kann, entfallen das Probieren und das besondere Ausmultiplizieren. Es bleiben nur das Subtrahieren und das Herunterziehen übrig.

Beispiel 20:

```
  L 0 L 0 L 0 0 : L 0 0 = L 0 L 0 L
– L 0 0
-------
      L 0 L
    – L 0 0
    -------
          L 0 0
        – L 0 0
        -------
```

Probe im dekadischen System:

84 : 4 = 21

Beispiel 21:

```
L 0 L L 0 0 0 0 0 L : L L L L = L 0 L L L L
– L L L L
---------
    L L L 0 0
  – L L L L
  ---------
      L L 0 L 0
    – L L L L
    ---------
        L 0 L L 0
      – L L L L
      ---------
          L L L L
        – L L L L
        ---------
```

Probe im dekadischen System: 705 : 15 = 47

Aufgaben

Machen Sie jeweils die Probe durch Übertragen ins dekadische System!

1. a) L0LL0 + LL0L b) LLLLLL + LLLL0 c) L00L00L + LL0LL
   d) L0L0LL + LL0L0 + L0L e) LL000 + L0LL + L0L
   f) L0LL0L + LL0LL + L000L + L0L0LL
2. a) L0LL0L − L000L b) L0L0L0 − L0L0L c) L00000 − LL0LL
   d) LLL00L − L0L − LLLL
   e) L0L00L00 − LLLL − L00L00
   f) L00LL00 − L000L − L00L − L0L
3. a) L0LL0 · LL0L b) L0LL · LL00L c) LLLL · LLLL
   d) LL0 · L0L · L00 e) LL · L00L · L0 f) L0 · LL · L0L0L
   g) $\mathrm{LLL}^{\mathrm{LL}}$ h) $\mathrm{L0L}^{\mathrm{L00}}$ i) $\mathrm{LL}^{\mathrm{L0L}}$
4. a) LL00000 : LL00 b) L0000L0L : L00LL
   c) L00L0LL00 : LLLL d) LLLL00 : LLLLL
   e) L0000L : LL f) L00000L : L0L

3.6. Zur praktischen Bedeutung der Dualzahlen

Erste systematische Untersuchungen des Dualzahlensystems gehen auf den deutschen Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und den englischen Philosophen, Logiker und Mathematiker George Boole (1815–1869) zurück.

Außerordentliche praktische Bedeutung erlangten die Dualzahlen vor allem beim Bau von programmgesteuerten elektronischen Digitalrechenautomaten. In welchem Zahlensystem der Automat rechnen soll, hängt im wesentlichen von seinem Einsatzgebiet ab. Für technisch-wissenschaftliche elektronische Digitalrechner bevorzugt man das Dualsystem für die Zahlendarstellung, für Datenverarbeitungsanlagen legt man im allgemeinen ein gemischtes Zehner-Zweier-System fest. Hierbei werden die einzelnen Grundziffern als Dualzahlen dargestellt und dann entsprechend der Dezimalziffernfolge aneinandergereiht.

Die Rechenautomaten haben die Eigenschaft, schneller und unermüdlicher als ein Mensch und fast fehlerfrei zu rechnen. Dadurch sind sie zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel für Wissenschaftler, Ingenieure und Wirtschaftsfachleute geworden. Dabei ist der programmgesteuerte Digitalrechenautomat weder ein Roboter noch ein Elektronengehirn oder eine Denkmaschine, auch wenn durch neue Bauelemente eine sprunghafte Weiterentwicklung im Rechenautomatenaufbau einsetzen wird und „lernende" Automaten zum Lösen von komplizierten Problemen bereits eingesetzt werden. Diese Maschinen sind stets Hilfsmittel, um Aufgaben schnell, billig und sicher zu lösen. Aus diesem Grunde werden die Rechenautomaten zur Lösung von Problemen aus den verschiedensten Gebieten eingesetzt. Hierzu gehören Fragen aus der reinen Mathematik und aus der praktischen Mathematik, aus der Kern- und

Raketentechnik sowie jede Art von technisch-wissenschaftlichen Rechnungen. Verkehrsprobleme, Steuerungsprobleme bei Werkzeugmaschinen, sogar Fragen, die mit dem Ablauf ganzer Produktionsprozesse zusammenhängen, werden gelöst. Zu den Einsatzbereichen moderner Rechenautomaten gehören auch die Überwachung von Raketenflügen, die Buchung von Platzkarten für den Eisenbahn-, Flug- und Schiffsverkehr über Tage und Monate hinaus, Übersetzungen von einer Sprache in eine andere, Probleme der Lagerhaltung, Materialabrechnungen und Inventuren, die Buchführung bei Sparkassen, Banken und Versicherungen, numerische Wettervorhersagen, die schnelle Errechnung von Ranglisten bei Sportveranstaltungen (Olympiaden), die Bestimmung von Witterungseinflüssen auf die Milchleistung von Kühen oder auf die Aufzucht bestimmter Tier- und Pflanzenarten, die Berechnung optimaler Schaltungsnetzwerke für zukünftige Rechenautomaten, die Simulierung (Nachahmung) von Probeflügen neuer Flugzeugtypen (Einsparung kostspieliger Modellbildungen), die Auswertung von Versuchen aus Psychologie, Pädagogik, Medizin. Alles, was man zahlenmäßig erfassen kann, läßt sich mit Rechenautomaten bearbeiten. Doch ist damit noch nicht entschieden, ob der Einsatz von teuren Rechenautomaten für ein bestimmtes konkretes Problem auch zweckmäßig ist oder ob man auf den herkömmlichen elektrischen Tischrechenmaschinen arbeiten sollte. Die Tischrechenmaschinen und die Tafelwerke werden von den Rechenautomaten keineswegs gänzlich verdrängt.

So wird man einen Rechenautomaten nicht für die Lösung von Schülerhausaufgaben einsetzen. Der Einsatz würde die Lösung nur komplizieren. Der Schüler müßte seine Aufgabe und das mathematische Problem genau beherrschen, vielleicht auch mehrere Lösungswege übersehen. Außerdem müßte der Schüler den Automaten bedienen können, um ihm seine Aufgabe mitzuteilen. Der Automat nimmt dem Schüler wie jedem Benutzer nicht das Denken ab.

Mittels Rechenautomaten kann man aber die geistige Routinearbeit eines Menschen für ein vorliegendes Problem auf ein Minimum beschränken. So können lange komplizierte Rechnungen ohne menschlichen Eingriff durchgeführt werden.

Die Anzahl der Rechenoperationen, die ein Rechenautomat je Sekunde ausführen kann, ist ein Maß für seine Leistungsfähigkeit. Ein menschlicher Rechner, mit einer elektrischen Tischrechenmaschine ausgestattet, kann im Mittel in 20 s eine Rechenoperation mit zwei zehnstelligen Dezimalzahlen durchführen, mittels Papiers und Bleistifts ungefähr in 2 min eine Operation. Der Relaisrechner OPREMA vom *VEB Carl Zeiss* in Jena erledigt im Durchschnitt 2 Operationen je Sekunde. Der Rechenautomat ZRA 1 führt annähernd 150 Operationen in einer Sekunde aus, die Ural II kann 5000 bis 8000 Operationen je Sekunde bearbeiten und der Rechenautomat M 20 ungefähr 20000. Der Rechenautomat TR 4 führt sogar 50000 bis 60000 Operationen je Sekunde aus und kann im Dual- und Dezimalsystem rechnen. Es gibt weiterhin Rechenautomaten, die 200000 und auch 1000000 Additionen je Sekunde bewältigen. Die schnellarbeitenden Geräte sind aus Halbleiterbauelementen und Ferritkernen — als wesentliche Teile — aufgebaut und überschreiten kaum die räumliche Ausdehnung des Rechenautomaten ZRA 1. Mittelschnell (5000 bis 50000 Operationen je Sekunde) arbeitende Rechenautomaten können ohne weiteres in Schreibtischgröße hergestellt werden. Die schnellen Automaten braucht man im wesentlichen für die Lösung von Problemen aus der Atomtheorie und Reaktortechnik und für Wettervorhersagen, da hier oft Milliarden von Rechenoperationen auszuführen sind, um zum Ergebnis zu gelangen.

INHALTSVERZEICHNIS

Abbildungsnachweis

Abb. 1.0. Werkfoto VEB Sachsenwerk Niedersedlitz
Abb. 1.30. Volk und Wissen
Abb. 1.79. Museum für deutsche Geschichte
Abb. 1.144. Reproduktion aus G. STEINDORFF: *Die Kunst der Ägypter*, Leipzig 1928
Abb. 1.145. Reproduktion aus O. NEUGEBAUER: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, 1. Band: Vorgriechische Mathematik, Berlin 1934
Abb. 1.146. Reproduktion aus O. NEUGEBAUER: *Mathematische Keilschrifttexte*, zweiter Teil: Register, Glossar, Nachträge, Tafeln; Berlin 1935
Abb. 1.147. Reproduktion aus A. EISENLOHR: *Ein altbabylonischer Felderplan*, Leipzig 1896
Abb. 1.148. Reproduktion aus H. SCHÖNE: *Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra*, Vol. III
Abb. 1.151. Reproduktion des Titelblattes einer Abhandlung von PETER APIAN (1533)
Abb. 1.152. Reproduktion aus C. KING: *The history of the telescope*
Abb. 1.153. Reproduktion aus D. E. SMITH: *History of mathematics*, Vol. 1, 1922
Abb. 1.154. Reproduktion aus PRESTAGE: *Die portugiesischen Entdecker*, Bern-Leipzig-Wien 1936
Abb. 1.155. Reproduktion aus SMITH and MIKAMI: *A history of Japanese mathematics*
Abb. 1.156. Reproduktion aus A. WOLF: *A history of science*, 18. Jh., London, sec. edition
Abb. 2.0. Zentralbild
Abb. 3.0. Zentralbild

001001-4
2,90