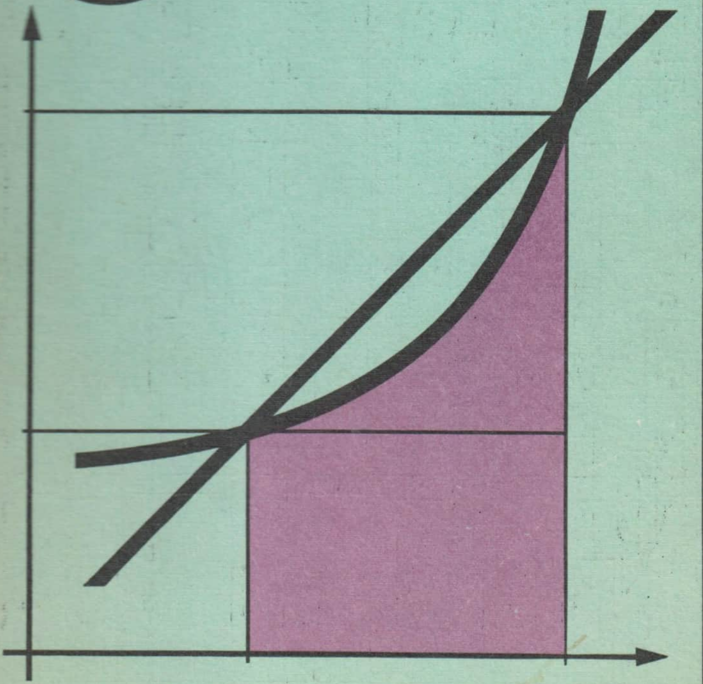
Mathematik

11



Hinweise zur Arbeit mit diesem Buch

Das Lehrbuch gliedert sich in die Kapitel A bis D, die nochmals in Abschnitte unterteilt sind und jeweils durch blau gedruckte, unnumerierte Zwischenüberschriften eingeleitet werden. Diese Gliederung entspricht der des Lehrplans Mathematik, Abiturstufe, in Stoffgebiete bzw. Stoffabschnitte.
Jedes Kapitel ist in Lerneinheiten (LE) eingeteilt; vgl. Inhaltsverzeichnis. Alle LE beginnen mit einer innerhalb des betreffenden Kapitels fortlaufend numerierten Überschrift und enthalten den Unterrichtsstoff für eine, zwei, mitunter auch drei Unterrichtsstunden.
Eine Titelzeile über jeder Seite bezeichnet den Lehrbuchabschnitt, zu dem der Text dieser Seite gehört. In den LE werden die Beispiele, Aufträge, Definitionen und Sätze durch folgende Marken am linken Rand des Textes gekennzeichnet:

■ Beispiel; ● Auftrag; ▶ Definition; ▷ Satz.

Die Ziffern rechts neben den Marken numerieren diese Teile des Lehrbuchtextes getrennt voneinander durch, und zwar ebenfalls innerhalb des betreffenden Kapitels; es gibt also z. B. eine LE A3, ein Beispiel A3, einen Auftrag A3 usw. Verweise auf andere Textstellen beginnen mit einem schrägen Pfeil; z. B. bedeutet (↗Auftrag B 8, S. ...) „vgl. Auftrag 8 im Kapitel B auf Seite ...“.
Zu den Aufgabenteilen: Nebeneinanderstehende Aufgaben beinhalten ein gleiches oder ähnliches Problem, sie sind i. a. von gleichem Schwierigkeitsgrad. Aufgaben mit Stern bei der Nummer sind von erhöhtem Schwierigkeitsgrad. Senkrechte Pfeile neben den Nummern einer Aufgabengruppe verweisen auf den weiter oben stehenden Text, der für alle Aufgaben dieser Gruppe gilt.

Mathematik

Lehrbuch für Klasse 11

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1987

Autoren:

Dr. Günter Lorenz, Prof. Dr. sc. Günter Pietzsch – Kapitel A
Diplom-Math. Dr. Horst Lemke, Dr. Werner Stoye – Kapitel B, C, D
(unter Mitarbeit von Prof. Dr. sc. Hans Wußing in der Einführung zu Kapitel C)

An der Erarbeitung der ausgewählten Lösungen waren neben den Autoren
Siegrid Bellack, Gerhard Schulze und Dr. Hannelore Siemssen beteiligt.

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt

ISBN 3-06-00 11 56-7

5. Auflage
Lizenz-Nr. 203/1000/86 (DN 00 11 56-5)
LSV 0681
Redaktion: Heinz Junge, Karlheinz Martin
Zeichnungen: Jutta Wolff
Einband: Manfred Behrend
Typografie: Atelier vwv, Wolfgang Lorenz
Printed in the German Democratic Republic
Satz: INTERDRUCK Grafischer Großbetrieb Leipzig
Druck: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Schrift: 9/10 Times Monotype
Redaktionsschluß: 7. November 1986
Bestell-Nr.: 730 748 0
Schulpreis DDR: 4,60

Inhalt

A Zahlenfolgen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Kombinatorik 7

B Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen 75

A Zahlenfolgen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Kombinatorik

Bild A 1 zeigt die ersten vier Glieder einer Folge von Figuren, die man (zumindest in Gedanken) beliebig weit fortsetzen kann: Von Figur zu Figur verändern sich die Längen der Kreisdurchmesser nicht (d sei 3 cm), die Eckenanzahl der einbeschriebenen regelmäßigen Vielecke erhöht sich jedoch um jeweils 1. Dadurch schmiegen sich die Vieleckslinien dem Kreis immer mehr an.

Bild A 2 zeigt einen ganz ähnlichen Sachverhalt: Die Strecke $\overline{AB}$ hat stets die gleiche Länge ($\overline{AB}$ sei 3 cm), die Anzahl der Halbkreise wird jeweils verdoppelt, ihr Durchmesser jedoch halbiert. Dadurch schmiegen sich auch die Halbkreislinien der Strecke immer mehr an.

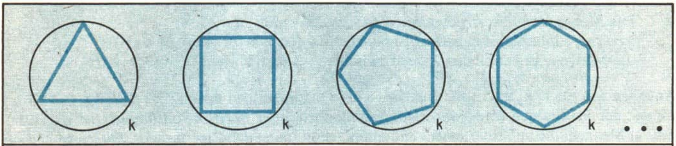
Trotz dieser Übereinstimmung im Verhalten der Vieleckslinien und der Halbkreislinien gibt es einen wichtigen Unterschied:

– Im Falle A 1 werden die Zahlenwerte[1]) der Vielecksumfänge von Schritt zu Schritt größer; sie kommen der Zahl 3π als Zahlenwert des Kreisumfanges beliebig nahe.
– Im Falle A 2 sind die Zahlenwerte der Längen der Halbkreislinien stets $1{,}5\pi$; sie kommen damit der Zahl 3 ($\overline{AB} = 3$ cm) *nicht* beliebig nahe.

Derartige Überlegungen zum Verhalten von Folgen, insbesondere Zahlenfolgen, sind für die Differential- und Integralrechnung (↗ Kapitel C und D) von großer Bedeutung. Dort wird das, was hier der Anschauung entnommen wurde, in mathematisch exakter Weise behandelt. Hier im Kapitel A werden dafür einige Grundlagen erarbeitet.

Dabei werden auch Probleme folgender Art durchdacht werden:

Bild A 1



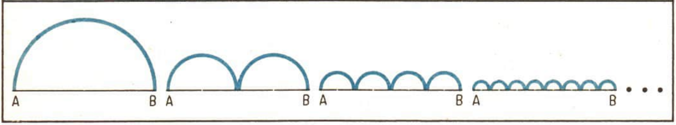


Bild A 2

[1]) Hier und im folgenden jeweils auf Zentimeter als Einheit bezogen

Eine Rotationskapselpumpe verringert durch Drehung eines Zylinders (↗ Beispiel A 32, Seite 68) in einem angeschlossenen Behälter den Luftdruck. Welcher Druck herrscht dort nach einer bestimmten Anzahl von Umdrehungen? Wie viele Umdrehungen sind nötig, um einen bestimmten Druck zu erzeugen?
Das Beispiel zeigt, daß das Untersuchen von Folgen und ihrem Verhalten nicht nur mathematische, sondern auch praktisch-technische Bedeutung hat.

Zahlenfolgen und deren Partialsummen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

1 Zur Wiederholung von Mengen und Funktionen

In Lerneinheit 2 werden wir Folgen als spezielle **Funktionen** definieren; Funktionen aber sind **Mengen** geordneter Paare. Deshalb sollen zunächst diese beiden Begriffe wiederholt werden.
In der Mathematik gelten „Menge“ und „Element einer Menge“ als Grundbegriffe, das heißt, diese Begriffe werden nicht mit Hilfe anderer Begriffe definiert. Daß beispielsweise die Zahl 3 zur Menge der natürlichen Zahlen gehört, die Zahl 0,5 jedoch nicht, drückt man so aus:

„3 ist Element von N“ oder „$3 \in N$“;
„0,5 ist *nicht* (ist *kein*) Element von N“ oder „$0{,}5 \notin N$“.

Gibt man eine Menge an, indem man ihre Elemente aufführt, so setzt man diese in geschweifte Klammern, z. B. $\{2; 3; 5; 7\}$. Man hätte diese Menge aber auch durch Eigenschaften angeben können, die ihre Elemente charakterisieren: „Primzahl und kleiner als 10“ oder „Lösung der Gleichung $(x-2)(x-3)(x-5)(x-7) = 0$“. Auch hierbei verwendet man oft geschweifte Klammern:

$$\begin{aligned}\{2; 3; 5; 7\} &= \{x;\ x \text{ ist Primzahl und } x < 10\}\\ &= \{x;\ (x-2)(x-3)(x-5)(x-7) = 0\}\end{aligned}$$

(Lies: „Menge aller x mit der Eigenschaft ...“ oder kürzer
„Menge aller x mit ...“).

Eine Menge muß man mit Hilfe von Eigenschaften ihrer Elemente angeben, wenn sie sehr viele beziehungsweise zu viele, insbesondere unendlich viele Elemente hat.

■ 1 Die Menge aller Zweierpotenzen: $\{x;\ x = 2^n \text{ und } n \in N\}$
bzw. bei Einbeziehen negativer Exponenten: $\{x;\ x = 2^k \text{ und } k \in Z$[1]$\}$;
die Menge aller rationalen Zahlen zwischen -3 und 3: $\{x;\ |x| < 3;\ x \in Q\}$

Angaben wie $\{0; 1; 4; 9; \ldots\}$ für die Menge der Quadratzahlen oder $\{2; 3; 5; 7; 11; \ldots\}$ für die Menge der Primzahlen sind zwar meist verständlich, aber doch unvollständig und damit ungenau. Mengen, die nur ein Element enthalten, nennt man auch **Einermengen**. Diejenige Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge**. Als Symbol für die leere Menge verwendet man das Zeichen „$\varnothing$“. So hat die Menge $\{x;\ x \in N \text{ und } 80 < 12x < 90\}$ nur ein Element, die Menge $\{x;\ x \in N \text{ und } 50 < 12x < 60\}$ ist leer.
Wenn alle Elemente einer Menge M_1 auch Elemente einer Menge M_2 sind, so sagt man auch „M_1 ist **Teilmenge** von M_2“. Nach dieser Erklärung ist *jede Menge Teilmenge von sich selbst*;

---

[1]) Die Zahlenbereiche werden künftig folgendermaßen bezeichnet:
N – Menge der natürlichen Zahlen; Q_+ – Menge der gebrochenen Zahlen;
Q – Menge der rationalen Zahlen; Z – Menge der ganzen Zahlen;
R – Menge der reellen Zahlen.

man spricht dann von **unechter Teilmenge**. Im Fall der **echten Teilmenge** enthält M_2 außer den Elementen von M_1 noch mindestens ein weiteres Element; man schreibt dann „$M_1 \subset M_2$".
So ist zum Beispiel $\{2; 3\}$ eine (echte) Teilmenge von $\{1; 2; 3; 4; 5\}$,
in Symbolen: $\{2; 3\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Pr sei die Menge aller Primzahlen, U die Menge aller ungeraden Zahlen. Dann gilt: $Pr \not\subset U$, aber auch $U \not\subset Pr$.
Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge; man kann nämlich jeder Menge *kein* Element entnehmen.
Teilmengenbeziehungen werden oft durch **Mengendiagramme** veranschaulicht (Bild A 3):
N – Menge der natürlichen Zahlen;
Ge – Menge der geraden Zahlen;
U – Menge der ungeraden Zahlen;
Pr – Menge der Primzahlen.

● 1 a) Deuten Sie das Mengendiagramm im Bild A 3!
Sprechen Sie auch über die Menge der Zahlen, die sowohl zu Ge als auch zu Pr gehören (**Durchschnitt** von Ge und Pr), sowie über den Durchschnitt von U und Pr!
b) Entwerfen Sie ein Mengendiagramm für die fünf Zahlenbereiche, und charakterisieren Sie N als Durchschnitt!

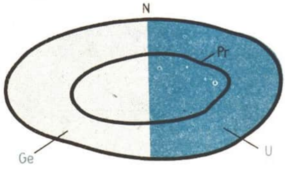


Bild A 3

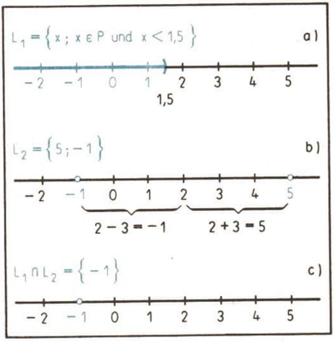


Bild A 4

Die Begriffe „Menge", „Teilmenge" usf. werden oft beim Arbeiten mit Gleichungen und Ungleichungen benutzt.

■ 2 Es sind alle Zahlen anzugeben, die Lösung sowohl der Ungleichung $4 + x < 16 - 7x$ als auch der Gleichung $|x - 2| = 3$ sind.
Lösung:
Die Lösungen der Ungleichung sind die Elemente von deren Lösungsmenge L_1; die Lösungen der Gleichung bilden die Menge L_2. Gesucht ist dann der Durchschnitt $L_1 \cap L_2$.

Ermitteln von L_1 (Bild A 4a)):

$$4 + x < 16 - 7x$$
$$8x < 12$$
$$x < 1{,}5$$

Ermitteln von L_2 (Bild A 4b)):

$$|x - 2| = 3$$
$$x_1 - 2 = 3 \quad \text{oder} \quad x_2 - 2 = -3$$
$$x_1 = 5 \quad \text{oder} \quad x_2 = -1$$
$$L_1 \cap L_2 = \{-1\} \text{ (Bild A 4c))}$$

Die Elemente der bisher betrachteten Mengen sind Zahlen. Häufig werden aber auch (geordnete) **Zahlenpaare** zu Mengen zusammengefaßt. So ist zum Beispiel

$$M_1 = \{[0;3], [1;2], [2;1], [3;0]\}$$

die Menge aller derjenigen geordneten Paare natürlicher Zahlen, die die Summe 3 haben. Würde man statt natürlicher Zahlen gebrochene zulassen, so müßte man schreiben:

$$M_2 = \{[x;y];\ x, y \in Q_+ \quad \text{und} \quad x + y = 3\}.$$

Es gilt beispielsweise

$$[0{,}5; 2{,}5] \notin M_1; \qquad [0{,}5; 2{,}5] \in M_2 \quad \text{und auch} \quad M_1 \subset M_2.$$

Eine solche Menge geordneter Paare heißt **Funktion**, wenn sie keine zwei Paare enthält, die an der ersten Stelle übereinstimmen, sich aber an der zweiten Stelle unterscheiden. Genauer:

> **Jede Menge geordneter Paare $[x; y]$, bei der zu jedem x genau ein y gehört, heißt Funktion.**

Jedes x heißt **Argument** der Funktion, jedes y heißt **Funktionswert**.
Die Menge aller Argumente heißt **Definitionsbereich** der Funktion, die Menge aller Funktionswerte heißt **Wertebereich** der Funktion.

● 2 Unter a) bis h) sind Mengen geordneter Paare $[x; y]$ angegeben. Entscheiden und begründen Sie, in welchen Fällen es sich um Funktionen handelt! Geben Sie in diesen Fällen Definitionsbereich und Wertebereich an!

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

b)

x	9	4	1	0	1	4	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	9

c) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in N$ und $y \in N$ und $x + y = 6$
d) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in Q$ und $y = 7x + 3$
e) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in R$ und $y \in N$ und $y \leqq x$
f) Menge aller $[x; y]$, die bei Darstellung im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem den Streckenzug im Bild A 5 ergeben
g) Menge aller $[x; y]$, die bei Darstellung im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Punkte $P_1, \ldots, P_8$ im Bild A 6 ergeben
h) Die Menge der Paare entsteht dadurch, daß man jeder natürlichen Zahl die Quadratwurzel ihrer 2. Potenz zuordnet.

Welche Darstellungsweisen für Funktionen wurden in a) bis h) benutzt?

Bild A 5

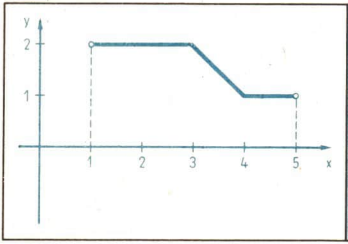
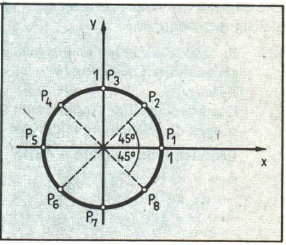


Bild A 6



Im Vordergrund unserer Betrachtungen werden – wie bisher – Funktionen stehen, deren Definitions- und Wertebereiche Mengen reeller Zahlen sind. Derartige Funktionen werden häufig durch Gleichungen gegeben. Eine solche Angabe ist ohne Festlegung des Definitionsbereiches eigentlich unvollständig, weil ja beispielsweise die Funktionen

$$f = \{[x;y];\ y = x^2 \text{ und } x \in N\} \quad \text{und} \quad g = \{[x;y];\ y = x^2 \text{ und } x \in R\}$$

trotz gemeinsamer Gleichung $y = x^2$ nicht übereinstimmen, vielmehr $f \subset g$ gilt.

Dennoch wird auf die Angabe des Definitionsbereiches häufig verzichtet, ähnlich wie man statt $\{x;\ x < 7 \text{ und } x \in P\}$ meist nur $\{x;\ x < 7\}$ schreibt. Man betrachtet dann als Definitionsbereich der Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ (kurz „der Funktion $f(x)$") die *umfassendste* Menge reeller Zahlen, für die der Term $f(x)$ erklärt ist (und somit als Funktionswerte reelle Zahlen liefert).

Die graphische Darstellung einer Funktion, deren Definitions- und Wertebereich Zahlenmengen sind, beruht auf folgenden Überlegungen: Mittels eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems werden die Zahlenpaare Punkten der Ebene eineindeutig zugeordnet; das kommt in der Schreibweise „$P(x;y)$" zum Ausdruck. Dadurch gehört zu jeder Menge geordneter Zahlenpaare (speziell zu der darzustellenden Funktion) genau eine Menge von Punkten (speziell der Graph der betreffenden Funktion) und umgekehrt. Das folgende Beispiel macht dabei auftretende Zusammenhänge deutlich.

■ 3 Bild A 7 zeigt die Graphen g_1 und g_2 der Funktionen $y = -2x + 3$ bzw. $y = x - 1$. Jede der beiden Geraden erzeugt in der x,y-Ebene drei Teilmengen von Punkten $Q(x;y)$; für g_1 zum Beispiel heißt das:

die Punkte der Geraden g_1 selbst:	$\{Q(x;y);\ x \in R \text{ und } y = -2x + 3\}$;
die Punkte oberhalb von g_1:	$\{Q(x;y);\ x \in R \text{ und } y > -2x + 3\}$;
die Punkte unterhalb von g_1:	$\{Q(x;y);\ x \in R \text{ und } y < -2x + 3\}$.

a) Es ist die im Bild A 7 blau gerasterte Punktmenge M_1 anzugeben.
Die Elemente dieser Menge sind genau die Punkte, die sowohl oberhalb von g_1 als auch oberhalb von g_2 liegen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{Q(x;y);\ x \in R \text{ und } y > -2x + 3 \text{ und } y > x - 1\} \\ &= \{Q(x;y);\ x \in R \text{ und } y > -2x + 3\} \cap \{Q(x;y);\ x \in R \text{ und } y > x - 1\}. \end{aligned}$$

b) In Worten zu beschreiben ist die Menge
$\{Q(x;y);\ x \in R \text{ und } y < 0 \text{ und } y < -2x + 3 \text{ und } y < x - 1\}$.
Es handelt sich um diejenigen Punkte, die sowohl unterhalb der x-Achse als auch unterhalb von g_1 und g_2 liegen.

c) Es ist der Strahl s mit S als Anfangspunkt anzugeben, der auf g_2 und nur im I. Quadranten liegt.

$$s = \{Q(x;y);\ x \in R \text{ und } y = x - 1 \text{ und } y \geqq -2x + 3\}$$

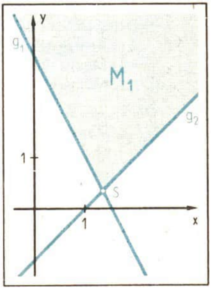


Bild A 7

Will man diese Angabe noch deutlicher machen, so kann man die Koordinaten von S benutzen. Sie sind die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{l} y = -2x + 3 \\ y = x - 1 \\ \hline -2x + 3 = x - 1 \end{array}$$

$$-3x = -4 \qquad y = \frac{4}{3} - 1$$

$$x = \frac{4}{3} \qquad y = \frac{1}{3} \qquad S\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$s = \left\{Q(x; y);\quad x \in R \quad \text{und} \quad x \geqq \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad y = x - 1\right\}$$

● 3 Stellen Sie zum Beispiel A 3 die folgenden Überlegungen an!

a) Warum wurde die Angabe „$y \in R$" weggelassen?

b) Kann „$x \geqq \frac{4}{3}$" durch eine Angabe für y ersetzt werden?

c) Welche Punktmenge wird festgelegt, wenn „$x \geqq \frac{4}{3}$" durch „$y > 0$" ersetzt wird?

d) Geben Sie den anderen Strahl auf g_2 mit S als Anfangspunkt an!

Aufgaben

1. Geben Sie folgende Mengen nach Möglichkeit an, indem Sie alle ihre Elemente aufführen! In welchen Fällen gelingt das nicht?

a) Menge aller Primzahlen, die durch 37 teilbar sind

b) Menge aller Primzahlen, die durch 6 teilbar sind

c) Menge aller natürlichen Zahlen, die Teiler sowohl von 45 als auch von 60 sind

d) Menge aller natürlichen Zahlen, die Vielfache von 18 und 30 sind

e) Menge aller rationalen Zahlen zwischen $-0{,}38$ und $-0{,}31$

2. a) Nennen Sie je drei Elemente folgender Mengen, und geben Sie die Mengen nur in Worten an!

$M_1 = \{x;\ x^2 \in N\}$ $\qquad M_2 = \{x;\ x = 2n + 1 \text{ und } n \in N\}$

$M_3 = \{x;\ |x - 1| > 0\}$ $\qquad M_4 = \{x;\ 100 < 10^x < 1000\}$

Nennen Sie je eine Zahl, die nicht Element der genannten Menge ist!

b) Drücken Sie folgende Mengen mit Hilfe der in a) benutzten Symbolik aus!

N_1: Menge aller Vielfachen von 3

N_2: Menge aller Zehnerpotenzen

N_3: Menge aller reellen Zahlen von 10 bis 20

3. Welche der folgenden Mengen sind Einermengen, welches ist die leere Menge?

M_1 = Menge aller Quadratwurzeln aus -16

M_2 = Menge aller geraden Primzahlen

$M_3 = \{x;\ x = 7n \text{ und } 30 < x < 40 \text{ und } n \in N\}$

$M_4 = \{x;\ |x| < 0\}$

4. Bild A 8 veranschaulicht die Teilmengenbeziehungen zwischen den Zahlenbereichen N, Z, Q_+, Q und R.

Die mit (1) bis (5) bezeichneten Punkte mögen jeweils Elemente der entsprechenden dargestellten Mengen repräsentieren.

a) Welche der Zahlen

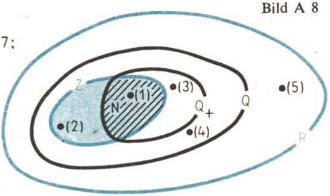
$-3;\ \sqrt{5};\ \sqrt{100};\ \pi;\ 8^{\frac{2}{3}};\ -\lg\sqrt{10};\ \log_3 17;$

$\log_5 1;\ \sin\frac{\pi}{6};\ \cos\pi$

könnte durch (1) repräsentiert werden?

b) Untersuchen Sie dieselbe Fragestellung wie in a) für die restlichen Punkte!

Bild A 8



5. Entscheiden Sie von den Aussagen a) bis e), ob sie wahr sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

a) $\varnothing \subset \{2^0; 2^1; 2^2; 2^3\}$ b) $\lg 100 \subset \{2^0; 2^1; 2^2; 2^3\}$ c) $0 \in \varnothing$

d) $0 \in \{\lg 0{,}5; \lg 1; \lg 5; \lg 10\}$ e) $\varnothing \in \{\tan 0°; \tan 45°; \tan 60°\}$

6. Um einen bestimmten Punkt der Ebene seien die Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Radien der Längen 1 cm, 2 cm, 3 cm gezeichnet. Ferner sei I_n das Innere des Kreises k_n und A_n das Äußere des Kreises k_n $(n = 1, 2, 3)$.

a) Geben Sie sämtliche Teilmengenbeziehungen zwischen diesen 9 Mengen (k_n; I_n; A_n) an!

b) Charakterisieren Sie die entstandenen 3 Kreisringe mit Hilfe der 9 Mengen!

7. Untersuchen Sie die folgenden Zahlen z auf Zugehörigkeit zu den Zahlenbereichen N, Z, Q_+, Q und R! Schreiben Sie die erkannten Beziehungen mit Hilfe des Symbols $\in$ bzw. $\notin$!

a) $z = \frac{10}{6} + \frac{1}{3}$ b) $z = \frac{7}{9} + \frac{5}{6}$ c) $z = \frac{13}{4} - \frac{20}{3}$

d) $z = 0{,}7 - \frac{3}{4}$ e) $z = \frac{5}{7} \cdot 1{,}4$ f) $z = (-8{,}5) : \frac{5}{2}$

g) $z = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$ h) $z = \sqrt{18} : \sqrt{2}$ i) $z = \frac{3}{8} - \frac{11}{4} \cdot 0{,}5$

8. Untersuchen Sie, ob die Zahl x zur Lösungsmenge der angegebenen Gleichung gehört!

a) $x = \frac{2}{15} - \frac{7}{5};\quad x + \frac{8}{5} = \frac{1}{3}$ b) $x = \frac{3}{4} + 1{,}5^2;\quad \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

c) $x = 1{,}2 - \frac{8}{5} \cdot 2;\quad 2x^2 - 3x + 14 = 0$

d) $x = \log_3 8 + 1;\quad (x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$

e) $x = 2\sqrt{3} - \sqrt{12};\quad \cos x = 1$

f) $x = \sqrt{5} + \sqrt{2};\quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

9. Untersuchen Sie, ob die Zahl s zur Lösungsmenge der angegebenen Ungleichung gehört!

a) $s = \frac{9}{11} + \frac{25}{26};\quad s + 5 < 7$ b) $s = \frac{35}{17} - \frac{8}{9};\quad 2 - s > 1$

c) $s = 0{,}5 - 0{,}45 : \frac{9}{7};\quad 6s - 0{,}4 > 8s + 0{,}2$ d) $s = 0{,}8 \cdot 0{,}97;\quad \frac{s + 1}{s - 1} < 0{,}1$

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der Gleichungen (Grundbereich R)!

10. ↑ a) $2x + 6{,}5 = 2 - x$
b) $4x + 5 = 12x - (16x + 7)$
c) $x^2 - 4x = 2x - 7$
d) $x(x + 7) = x(x - 1)$
e) $(x + 3)^2 - 13 = (x + 2)(x - 2) + 6x$

11. ↑ a) $|x| - 3 = 0$
b) $|x| + 3 = 1$
c) $|x + 0{,}5| = 2{,}5$
d) $\left|x - \frac{1}{3}\right| = 2$
e) $\frac{x}{x-2} - \frac{4}{x+1} = 2 + \frac{6}{x^2 - x - 2}$

12. Geben Sie jeweils die Lösungsmengen der beiden Ungleichungen an (Grundbereich R), und untersuchen Sie, ob eine Teilmengenbeziehung zwischen ihnen besteht! Beschreiben Sie ferner den Durchschnitt der beiden Lösungsmengen!
a) $2x > x - 3; \quad x + 3 < 7x - 6$
b) $4x + 7{,}5 < 2x + 1{,}3; \quad x + \frac{1}{4} > \frac{13}{4} - 5x$
c) $5x + 11 > 3x - 7; \quad 2x - 7 < 7x + 3$
d) $5x + 7 < 2(x + 2); \quad 3(x + 1) > 2(x - 5)$

13. Bei welchen der folgenden Mengen geordneter Paare handelt es sich um Funktionen? Bestimmen Sie deren Definitionsbereich und Wertebereich!
a) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in N$, $0 \leqq x \leqq 10$, $y \in N$ und $y > x$
b) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in Z$ und $y = x^2$
c) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in Z$ und $x = y^2$
d) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in Q$ und $y = \frac{1}{x}$
e) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in R$ und $y = \sqrt[3]{5 - x^2}$
f) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in R$ und $y \in Z$ und $x - 1 < y \leqq x$

14. Bei welchen der folgenden Gleichungen ist die Menge der Lösungen $[x; y]$ eine Funktion?
a) $3y + 2x = 10$ b) $y^2 + x^2 = 9$ c) $y^2 + 6x = 0$
d) $y - \sqrt{x} = 0$ e) $y^3 = x$ f) $y = \sqrt[3]{x}$

15. Zeichnen Sie die Graphen g_1 und g_2 der Funktionen mit den Gleichungen
$y = 0{,}5x - 1$ bzw. $y = -x + 3 \quad (x \in R)$
in ein rechtwinkliges x,y-Koordinatensystem!
Beschreiben Sie die folgenden Mengen von Punkten $Q(x; y)$ unter Verwendung der Wörter „oberhalb" und „unterhalb"!
a) $M_1 = \{Q(x; y); x \in R, y \in R, y < 0{,}5x - 1\}$
b) $M_2 = \{Q(x; y); x \in R, y \in R, y > -x + 3\}$
c) $M_3 = \{Q(x; y); x \in R, y \in R, y < 0{,}5x - 1 \text{ und } x < 0\}$
d) $M_4 = \{Q(x; y); x \in R, y \in R, y > -x + 3 \text{ und } x > 0\}$
e) $M_5 = \{Q(x; y); x \in R, y \in R, y > 0{,}5x - 1 \text{ und } y > -x + 3\}$
f) $M_6 = \{Q(x; y); x \in R, y \in R, y = 0{,}5x - 1 \text{ und } y < -x + 3\}$

2 Der Begriff der Zahlenfolge

Um den Begriff „Zahlenfolge" zu definieren, wollen wir uns durch die Bearbeitung des folgenden Auftrages das Charakteristische einer solchen Folge vergegenwärtigen.

● 4 Unter a) bis f) sind Anfangsstücke von Zahlenfolgen gegeben. Geben Sie jeweils an, nach welchem Prinzip sie gebildet worden sein könnten! Setzen Sie dementsprechend die Folgen um jeweils 4 Glieder fort!

a) $-7;\ -3;\ 1;\ \ldots$ b) $2;\ 5;\ 10;\ 17;\ \ldots$ c) $\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ -\frac{4}{5};\ \ldots$

d) $1{,}1;\ 0{,}9;\ 1{,}01;\ 0{,}99;\ \ldots$ e) $1;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{3};\ 1;\ \frac{1}{4};\ \ldots$ f) $\sqrt{2};\ 2;\ 2\sqrt{2};\ 4;\ \ldots$

In allen Beispielen im Auftrag A 4 sind Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge aufgeschrieben. So steht in c) an 3. Stelle die Zahl $\frac{3}{4}$; in f) ist diese 3. Stelle durch $2\sqrt{2}$ besetzt. Durchnumerierte Plätze sind also von Zahlen belegt. Da man zum Numerieren der Plätze natürliche Zahlen benutzt, kann man auch sagen:
Den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... sind die jeweiligen Zahlen *zugeordnet*.
Dadurch sind **geordnete Paare von Zahlen** entstanden, bei denen an erster Stelle immer eine natürliche Zahl steht. Auch wenn bei a) bis f) diese Paare nicht sichtbar aufgeschrieben sind, so ist die betreffende natürliche Zahl doch durch die jeweilige Stelle gegeben, an der das Folgenglied steht.
Damit ist eine *Zahlenfolge eine spezielle Funktion*; ihre Besonderheit liegt in der Art ihres Definitionsbereiches, eben einer Menge natürlicher Zahlen.

▶ 1

> **DEFINITION**
> ***Zahlenfolge*** $=_{\mathrm{Df}}$ ***Funktion* mit einer Menge natürlicher Zahlen als Definitionsbereich und einer Menge reeller Zahlen als Wertebereich.**

Die Elemente des Wertebereiches heißen **Glieder der Zahlenfolge**.
Je nachdem, ob der Definitionsbereich endlich viele oder unendlich viele natürliche Zahlen enthält, spricht man von einer **endlichen Zahlenfolge** bzw. von einer **unendlichen Zahlenfolge**.
Nach Definition A 1 ist zum Beispiel auch die Menge der geraden Zahlen zwischen 10 und 50 oder die Menge aller ungeraden Zahlen als Definitionsbereich möglich. Wir werden uns aber vor allem mit solchen Folgen beschäftigen, deren Definitionsbereich N selbst (meist ohne die 0) oder eine solche endliche Teilmenge von N ist, die alle und nur die Zahlen bis zu einer bestimmten enthält, ein sogenanntes **Anfangsstück** von N ist.
Wenn künftig von einer „Folge" ohne Angabe eines Definitionsbereiches gesprochen wird, so soll darunter stets eine Zahlenfolge verstanden werden, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen außer 0 ist. Durch das Ausschließen von 0 wird erreicht, daß der Zahl 1 auch tatsächlich das 1. Glied der Folge zugeordnet ist.
Zur besseren Heraushebung aus der Menge aller Funktionen verwendet man bei Folgen meist besondere Bezeichnungen. Man schreibt zum Beispiel

$k,\ m,\ n$	für das Argument;
$a_k,\ b_n$	für das zu k bzw. n gehörige Folgenglied (den Funktionswert);
$(a_k),\ (b_n)$	für die gesamte Folge, ausführlich auch

$(a_k) = (a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$ bzw. $(a_k) = (a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots)$.

4 Für die Folge, die aus der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ (x beliebig reell) durch Einschränkung des Definitionsbereiches auf die Menge der natürlichen Zahlen $n > 0$ entsteht, bedeutet die Verwendung der obengenannten Symbole:

$f(4) = a_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 1$ ist das 4. Glied der Folge.

$f(n) = a_n = \frac{1}{2}n - 1$ ist das n-te Glied der Folge.

Die Gleichung

$a_n = \frac{1}{2}n - 1$ ist eine **Zuordnungsvorschrift** der Folge und entspricht einer *Funktionsgleichung*.

$f = (a_n) = \left(\frac{1}{2}n - 1\right)$ ist die gesamte Folge.

Zum schnelleren Verständnis schreibt man mitunter auch:

$(a_n) = \left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \ldots; \frac{1}{2}n - 1; \ldots\right)$.

Wenn man 0 in den Definitionsbereich einbezieht, ihn also durch $n \in N$ oder $n \geqq 0$ kennzeichnet, so ist

$a_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 1$ das 5. Glied der Folge, weil diese mit

$a_0 = \frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1$ beginnt.

Als Wertetafel für die ersten 6 Folgenglieder erhalten wir

n	1	2	3	4	5	6
a_n	−0,5	0	0,5	1	1,5	2

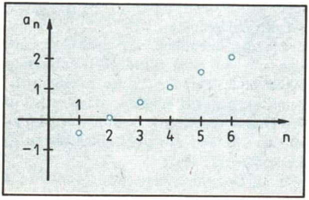


Bild A 9

Dieses Anfangsstück der Folge ist im Bild A 9 graphisch dargestellt. Wegen der Art des Definitionsbereiches besteht die graphische Darstellung der Folge aus isolierten Punkten. Würde man diese Punkte miteinander verbinden, so entstünde eine Gerade, die der Graph der Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad (x \in R)$$

im entsprechenden x, y-Koordinatensystem wäre.

5 Betrachtet werden die Folgen (1) $(3k - 1)$; (2) $\left(\frac{k}{2}\right)$; (3) $\left(\frac{3k - 4}{k}\right)$; (4) $(k - k^2)$.

a) Geben Sie jeweils a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 an!

b) Geben Sie jeweils a_{100} und a_{500} an!

c) Sind die Zahlen 17; 1; 0; −1; −20 Glieder dieser Folgen? Wenn ja, zu welchem k gehören sie jeweils?

d) Stellen Sie die Folgen für $1 \leqq k \leqq 5$ graphisch dar!

6 Geben Sie für die Folgen a), b) und f) im Auftrag A 4 eine geeignete Zuordnungsvorschrift an! Berechnen Sie danach das jeweils 23. Glied!

Bei endlichen Folgen kann man auf eine Zuordnungsvorschrift mit Hilfe eines Terms oder in Worten verzichten, wenn man sämtliche Glieder angibt.
Bei unendlichen Folgen hingegen ist die Angabe einer Zuordnungsvorschrift unbedingt notwendig; denn endlich viele Glieder können stets zu unterschiedlichen unendlichen Folgen ergänzt werden. So ist beispielsweise die Angabe $(a_k) = (1;\ 2;\ 3;\ \ldots)$ eigentlich nicht ausreichend, wenn man die Folge $(a_k) = (k)$ meint. Als Beispiel für eine andere Folge mit dem Anfangsstück $(1;\ 2;\ 3)$ sei $(a_k) = (k^3 - 6k^2 + 12k - 6)$ genannt.
Die Menge der natürlichen Zahlen hat die charakteristische Eigenschaft, daß jede Zahl genau einen (unmittelbaren) Nachfolger und – bis auf die 0 – auch jede Zahl genau einen (unmittelbaren) Vorgänger hat. Demzufolge gilt für (unendliche) Folgen:
Jedes Folgenglied hat in der betreffenden Folge genau einen Nachfolger und – bis auf das Anfangsglied – auch genau einen Vorgänger.

In gewisser Weise nutzt man dies bei einer anderen Art der Festlegung einer Folge.

5 a) Die Folge $(5k + 2)$ kann auch folgendermaßen festgelegt werden:
$a_1 = 7; \qquad a_{k+1} = a_k + 5.$
b) Die Folge $(n^2 + 1) = (2;\ 5;\ 10;\ 17;\ \ldots)$ kann auch folgendermaßen festgelegt werden:
$a_1 = 2; \qquad a_{n+1} = a_n + 2n + 1.$
c) Das Anfangsstück 1; 2; 3 hätte auch fortgesetzt werden können zu 1; 2; 3; 5; 8; ... mit der Zuordnungsvorschrift:
$a_1 = 1; \qquad a_2 = 2; \qquad a_{k+1} = a_k + a_{k-1}.$

Die Andersartigkeit der Zuordnungsvorschriften im Beispiel A 5 besteht darin, daß – von einem gegebenen Anfang ausgehend – jedes Glied aus voranstehenden Gliedern gewonnen wird; man spricht deshalb von einer **rekursiven**[1]**) Zuordnungsvorschrift**. Demgegenüber nennt man eine Zuordnungsvorschrift, wie sie im Beispiel A 4 benutzt wurde, **explizit**[2]).

7 a) Vergleichen Sie die beiden Arten von Zuordnungsvorschriften, indem Sie für das Beispiel A 5a) beschreiben, wie Sie jeweils das 100. Glied bestimmen würden!
b) Nennen Sie a_1 bis a_5 für nachstehende Folgen!

(1) $a_1 = 3; \qquad a_{k+1} = a_k + k$ (2) $a_1 = -1; \qquad a_2 = -2; \qquad a_{k+2} = a_k \cdot a_{k+1}$
(3) $a_1 = 1; \qquad a_{k+1} = 2a_k - 5$

c) Geben Sie eine rekursive Zuordnungsvorschrift für $(a_k) = (1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots)$ an!

Bei unseren weiteren Überlegungen werden wir vornehmlich explizite Zuordnungsvorschriften wählen. Wenn zum Beispiel in Aufgaben nichts Näheres gesagt wird, ist stets an eine solche Vorschrift gedacht. Es ist jedoch zu beachten, daß innerhalb der Mathematik, vor allem aber außerhalb (Naturwissenschaften, Ökonomie u. a.) Folgen zuweilen durch noch andere Zuordnungsvorschriften festgelegt werden.
Beispielsweise kann man den natürlichen Zahlen sukzessive, beginnend mit einem bestimmten Tag, die Tagesdurchschnittstemperaturen an einem bestimmten Ort zuordnen. Auch das ist eine Zuordnungsvorschrift, jedoch ist sie weder explizit noch rekursiv; man kennt die einzelnen Glieder der Folge immer nur bis zu einer bestimmten Stelle. Solche Folgen treten oft bei Meßreihen, aber auch bei statistischen Angaben über Produktionszahlen auf. Häufig bemüht man sich dann, eine Zuordnungsvorschrift zu finden, die mit Hilfe von Termen und Gleichungen formuliert ist und den realen Sachverhalt wenigstens näherungsweise beschreibt.

[1]) recurrere (lat.) – zurücklaufen
[2]) explicare (lat.) – erklären

Aufgaben

1. Geben Sie von den nachstehenden Folgen die ersten fünf Glieder an!

a) $(8k - 7)$ b) $\left(\frac{5k}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{k}\right)$ d) $(k^2 - k)$ e) $\left(\frac{5+k}{-k}\right)$ f) $\left((-1)^k \frac{3-k}{k}\right)$

2. Sind die Zahlen 1; 25; 0; −2; −30; 100 Glieder der nachstehenden Folgen? Wenn ja, zu welchem k gehören sie jeweils?

a) $\left(\frac{k}{3}\right)$ b) $(3k - 5)$ c) $(7k - k^2)$

Gegeben sind jeweils einige Glieder einer Zahlenfolge. Geben Sie eine Zuordnungsvorschrift für diese Folgen an! Ergänzen Sie dann so, daß jeweils die Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_8$ vorliegen!

3. ↑ a) $a_1 = -17;\quad a_2 = -23;\quad a_3 = -29$

b) $a_3 = 4;\quad a_4 = \frac{7}{2};\quad a_8 = \frac{3}{2}$

c) $a_1 = 1;\quad a_2 = -\frac{1}{2};$

$a_3 = \frac{1}{6};\quad a_6 = -\frac{1}{720}$

4. ↑ a) $a_2 = \frac{4}{3};\quad a_3 = \frac{6}{5};\quad a_4 = \frac{8}{7}$

b) $a_5 = 5;\quad a_6 = 2{,}5;\quad a_7 = 1{,}25$

c) $a_3 = -\frac{6}{27};\quad a_4 = \frac{8}{81};$

$a_7 = -\frac{14}{2187}$

Ermitteln Sie für nachstehende Folgen die ersten fünf Glieder, und stellen Sie diese graphisch dar! Geben Sie möglichst auch explizite Zuordnungsvorschriften an!

5. ↑ a) $a_1 = 2;\quad a_{k+1} = a_k + \frac{1}{3}$

b) $a_1 = 1;\quad a_{k+1} = 2a_k - 5$

6. ↑ a) $a_1 = \frac{3}{2};\quad a_{k+1} = \frac{4}{3}a_k$

b) $a_1 = 0;\quad a_2 = -\frac{1}{2};\quad a_{k+2} = a_k^2 \cdot a_{k+1}$

3 Monotonie von Folgen

Folgen sind spezielle Funktionen. Deshalb ist es naheliegend, bei ihnen nach dem Zutreffen wichtiger Funktionseigenschaften zu fragen und solche Eigenschaften gegebenenfalls für Folgen besonders zu formulieren. Eine derartige Eigenschaft ist die **Monotonie**.
Eine Funktion heißt **monoton wachsend**, wenn bei wachsenden Argumenten die Funktionswerte ebenfalls wachsen, zumindest nicht kleiner werden. Bei umgekehrtem Verhalten spricht man von **monotonem Fallen**.

● 8 Beschreiben Sie die im Bild A 10 dargestellten Funktionen in ihrem Monotonieverhalten!

▶ 2

DEFINITION
Eine Zahlenfolge (a_k) heißt *monoton wachsend* $=_{\mathrm{Df}}$ Für jedes k gilt $a_k \leqq a_{k+1}$
Eine Zahlenfolge (a_k) heißt *monoton fallend* $=_{\mathrm{Df}}$ Für jedes k gilt $a_k \geqq a_{k+1}$

Will man zum Ausdruck bringen, daß jedes Glied tatsächlich kleiner (bzw. größer) als sein Nachfolger ist, so spricht man von **strenger Monotonie**.
Folgen, deren Glieder sämtlich einander gleich sind, heißen **konstante Folgen**. Sie sind also sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend; denn mit $a_k = a_{k+1}$ gilt sowohl $a_k \leqq a_{k+1}$ als auch $a_k \geqq a_{k+1}$.

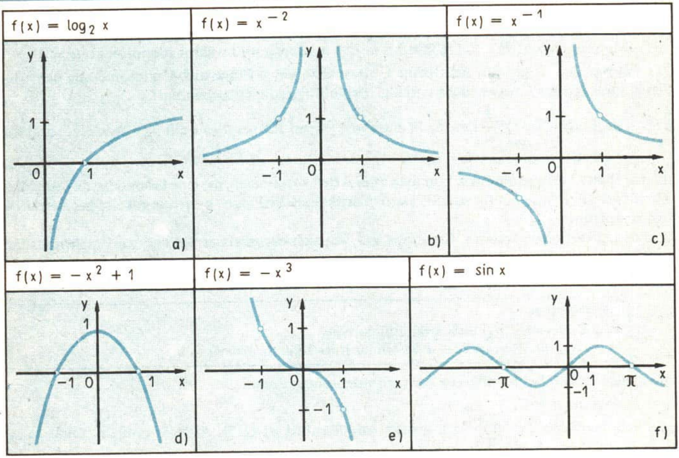


Bild A 10

Zur Untersuchung einer Folge auf Monotonie formt man die in der Definition A 2 benutzten Ungleichungen um zu den Ungleichungen

$$a_{k+1} - a_k \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad a_{k+1} - a_k \leqq 0.$$

Man untersucht also, ob die Differenzen benachbarter Glieder stets nicht negativ oder nicht positiv sind.

■ 6 Für die Folge $\left(5 - \frac{k}{2}\right)$ gilt für alle k:

$$a_{k+1} - a_k = 5 - \frac{k+1}{2} - 5 + \frac{k}{2} = \frac{k}{2} - \frac{k+1}{2} = \frac{k-k-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_{k+1} - a_k < 0$$

Da die Differenz $a_{k+1} - a_k$ für alle k negativ ist, fällt die Folge monoton, und zwar sogar streng monoton.

■ 7 Für die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots\right)$ gilt:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{(n+1)\,n} = \frac{n^2 - (n^2-1)}{(n+1)\,n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)\,n} > 0 \quad \text{(da der Nenner wegen } n > 0 \text{ stets positiv ist)}$$

Die Folge ist also streng monoton wachsend.

■ 8 Zu untersuchen ist die Folge $(k^2 - 8k)$. Bei ihr ist

$$a_{k+1} - a_k = (k+1)^2 - 8(k+1) - (k^2 - 8k) = k^2 + 2k + 1 - 8k - 8 - k^2 + 8k$$
$$= 2k - 7.$$

Diese Differenz ist für $0 < k \leqq 3$ negativ, sonst positiv. Die Folge ist also nicht monoton. Man sagt auch: Die Folge fällt bis $k < 4$ monoton und wächst monoton ab $k = 4$.

Das Beispiel A 8 zeigt, daß man beim Untersuchen einer Folge auf Monotonie aus dem Berechnen nur einiger Glieder nicht voreilige Schlußfolgerungen ziehen darf.

9 Die Folge $\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$ ist nicht monoton; denn für gerades n gilt $a_n > 0 > a_{n+1}$, und für ungerades n gilt $a_n < 0 < a_{n+1}$.

Bei den späteren Anwendungen kommen zwei Arten von Folgen, die eine besondere Regelmäßigkeit aufweisen, relativ häufig vor; sie werden **arithmetische Folgen** beziehungsweise **geometrische Folgen** genannt.

Arithmetische Folgen treten überall dort auf, wo sich ein gewisser Anfangswert mehrmals um einen festen Wert vermehrt oder auch vermindert, zum Beispiel, wenn täglich die gleiche Anzahl von Gegenständen produziert oder die gleiche Futtermenge verbraucht wird.

▶ 3 **DEFINITION**
Eine Zahlenfolge (a_k) heißt *arithmetische Folge*
$=_{Df}$ Es gibt eine Zahl d, so daß für jedes k gilt $a_{k+1} = a_k + d$

Diese feste Zahl d heißt **Differenz der** (arithmetischen) **Folge**.

Differenz $d = a_{k+1} - a_k$

Eine arithmetische Zahlenfolge mit dem Anfangsglied a_1 (z. B. $a_1 = 5$) und der Differenz d (z. B. $d = 7$) beginnt also mit

a_1;	$a_1 = 5$;
$a_2 = a_1 + d$;	$a_2 = 5 + 7 = 12$;
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$;	$a_3 = 12 + 7 = 5 + 2 \cdot 7 = 19$;
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$;	$a_4 = 19 + 7 = 5 + 3 \cdot 7 = 26$;
$\ldots = \ldots$	$\ldots = \ldots$

Das k-te Glied einer jeden arithmetischen Zahlenfolge erhält man, indem man zum Anfangsglied die Differenz $(k - 1)$-mal addiert.

k-tes Glied $a_k = a_1 + (k - 1)\,d$

(Statt a_1 wird häufig nur a geschrieben.)

Jede Folge der Vielfachen einer bestimmten Zahl z ($d = z$), jede konstante Folge ($d = 0$) und auch die Folge der natürlichen Zahlen selbst ($d = 1$) ist eine solche arithmetische Folge.

Aus jeder linearen Funktion geht eine arithmetische Folge hervor, wenn man den Definitionsbereich auf natürliche Zahlen einschränkt.

● 9 a) Geben Sie für die Folge $(a_k) = (2k - 7)$ Anfangsglied und Differenz an!

b) Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen der Funktionsgleichung $y = mx + n$ und der Gleichung $a_k = a_1 + (k - 1)\,d$!

c) Machen Sie eine Aussage über die Monotonie arithmetischer Zahlenfolgen, und beweisen Sie diese Aussage!

Von ähnlicher Einfachheit wie die arithmetischen Folgen sind die geometrischen Folgen. Bei ihnen erfolgt die Veränderung von Glied zu Glied dadurch, daß stets mit der gleichen Zahl multipliziert wird.

▶ 4 **DEFINITION**
Eine Zahlenfolge (a_k) heißt *geometrische Folge*
$=_{Df}$ Es gibt eine Zahl q ($q \neq 0$), so daß für jedes k gilt
$a_{k+1} = a_k \cdot q$

Man kann auch sagen: Aufeinanderfolgende Glieder bilden stets das gleiche Verhältnis q. Dieses konstante Verhältnis q heißt **Quotient der** (geometrischen) **Folge**.

Quotient $q = a_{k+1} : a_k$

Eine geometrische Zahlenfolge mit dem Anfangsglied a_1 (zum Beispiel $a_1 = 10$) und dem Quotienten q (zum Beispiel $q = 5$) beginnt also mit

a_1;	$a_1 = 10$;
$a_2 = a_1 \cdot q$;	$a_2 = 10 \cdot 5 = 50$;
$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$;	$a_3 = 50 \cdot 5 = 10 \cdot 5^2 = 250$;
$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$;	$a_4 = 250 \cdot 5 = 10 \cdot 5^3 = 1\,250$;
$\ldots = \ldots$	$\ldots = \ldots$

Das k-te Glied einer geometrischen Folge erhält man, indem man das Anfangsglied a_1 ($a_1 \neq 0$) $(k - 1)$-mal mit q multipliziert.

k-tes Glied $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$

(Statt a_1 schreibt man häufig nur a.)
Jede Folge der Potenzen einer bestimmten Zahl z ($q = z$), aber auch jede konstante Folge ($q = 1$), sofern ihre Glieder nicht sämtlich Null sind, ist eine geometrische Folge.
In der Praxis treten geometrische Folgen zum Beispiel beim Anwachsen eines Guthabens durch jährliche Verzinsung auf, wenn die Zinsen nicht abgehoben werden, aber auch beim ungestörten Wachstum einer Bakterienkultur oder beim radioaktiven Zerfall.

● 10 a) Welche Analogie können Sie zwischen den arithmetischen und den geometrischen Folgen feststellen?
b) Aus welchen Funktionen ergeben sich durch Einschränken des Definitionsbereiches geometrische Folgen?
c) Machen Sie Aussagen über die Monotonie geometrischer Folgen ($q > 0$), und versuchen Sie, diese Aussagen zu beweisen! (Hinweis: Achten Sie auf notwendige Fallunterscheidungen für a und q!)

Aufgaben

1. Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Monotonie!

a) $\left(\frac{k}{5}\right)$ b) $\left(\frac{5}{k}\right)$ c) (2^n) d) $\left(\frac{3m + 3}{m + 1}\right)$ e) $\left(\frac{1}{3^k}\right)$ f) $\left(\frac{5 + k}{-k}\right)$

2. Die Folgen (a_k) sind monoton wachsend. Ermitteln Sie für jede der Zahlen $z = 10; 50; 500$ ein k, für das gilt

$a_k < z \leqq a_{k+1}$!

a) $\left(\frac{k}{3}\right)$ b) $(3k + 2)$ c) $(k^2 - k)$

d) $a_1 = 1;\ a_{k+1} = 5a_k$

Beispiel für $z = 50$ zu a):

Es gilt
$$a_{149} = \frac{149}{3} < 50 = \frac{150}{3} \leqq a_{150}.$$

Also ist $k = 149$.

3. Die Folgen (b_n) sind monoton fallend. Ermitteln Sie für die Zahlen $y = -5$ und $y = -120$ ein n mit

$b_n > y \geqq b_{n+1}$!

a) $(-2n - 1)$ b) $(3n - n^2)$

c) $b_1 = 0;\ b_{n+1} = b_n - 10$

4. Setzen Sie die Folgen um vier Glieder fort, so daß arithmetische Folgen entstehen!

a) 2; 3,8; … b) 15; 7,5; … c) −1; −3; … d) 0,7; 0,9; …

Berechnen Sie die ersten sechs Glieder der arithmetischen Folge (a_k), von der Sie die folgenden Werte kennen!
Bestimmen Sie jeweils auch a_{15} und a_{27}!

5. ↑ a) $a_2 = 7; d = -1{,}5$
b) $a_3 = 11; a_8 = 31$
c) $a_4 = -23; d = -12$
d) $a_5 = 25; d = -0{,}01$
e) $a_{13} = -6; a_{22} = -9$

6. ↑ a) $a_7 = 0$; d $= 12$
b) $a_3 = 7{,}5; d = 9$
c) $a_6 = 19; a_9 = 14{,}5$
d) $a_7 = 6{,}8; d = 8{,}6$
e) $a_{13} = 5; a_{19} = 9$

7. Welche Folgen in den Aufgaben 1. bis 3. sind arithmetische Folgen?

8. Setzen Sie die Folgen um vier Glieder fort, so daß geometrische Folgen entstehen!

a) $3; 6; \ldots$ b) $36; 12; \ldots$ c) $-4; -\sqrt{16}; \ldots$

d) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \ldots$ e) $1; -2; \ldots$ f) $-20; -5; \ldots$

Berechnen Sie die ersten fünf Glieder der geometrischen Folge (a_k), von der nachstehende Werte bekannt sind! Beschreiben Sie die Folgen hinsichtlich Monotonie!

9. ↑ a) $a_1 = 0{,}7; q = 2$
b) $a_1 = 3; q = 0{,}5$
c) $a_3 = -2; q = -1$
d) $a_3 = -1; a_4 = 0{,}25$

10. ↑ a) $a_2 = 5; a_4 = 45; q < 0$
b) $a_5 = 7; q = \frac{3}{2}$
c) $a_4 = 64; q = 0{,}4$
d) $a_2 = 9{,}1; a_3 = 2{,}6$

11. Welche Folgen in den Aufgaben 1. bis 3. sind geometrische Folgen?

4 Partialsummen

In jedem Teilbetrieb eines „VEB Dienstleistungen" wird monatlich über die Produktionsleistungen abgerechnet.
So ergibt sich beispielsweise in einer Maßschneiderei für die einzelnen Monate eines Planjahres eine zwölfgliedrige Folge.

(1) Produktionsleistungen im Monat

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Leistung in TM	9,4	9,2	11,1	10,7	10,5	9,7	7,9	7,6	9,9	10,8	11,3	9,5

Für eine kontinuierliche Kontrolle der Planerfüllung ist aber beispielsweise statt der Produktionsleistung *im* Mai die Produktionsleistung *vom* Jahresbeginn *bis* zum Monat Mai einschließlich wesentlicher. Ermittelt man solche Werte für jeden Monat, so erhält man aus (1) eine neue Folge, von der die folgende Tabelle nur die Glieder für die ersten beiden Quartale ausweist.

(2) Produktionsleistungen bis einschließlich Monat

Monat	1	2	3	4	5	6	7	...
Leistung in TM	9,4	18,6	29,7	40,4	50,9	60,6	...	...

● 11 Vervollständigen Sie die Folge (2)!

● 12 Ermitteln Sie umgekehrt aus der Folge (3) die *in* jedem Quartal zu erbringenden Produktionsleistungen!

(3) Geplante Produktionsleistungen bis Ende Quartal

Quartal	I	II	III	IV
Leistung in TM	28,2	54,8	82,8	110,4

Derartige Summenbildungen treten nicht nur bei den Produktionsleistungen auf. Für die Arbeit in den Betriebsteilen sind außerdem ähnliche Angaben hinsichtlich Materialverbrauch, Lohnkosten usw. wichtig. Solchen Sachverhalten begegnen wir aber bei vielen Problemen der Planung und Leitung der Volkswirtschaft und weit über die Belange einzelner Betriebsteile oder Betriebe hinaus.

Zur allgemeinen Untersuchung der Summenbildung über mehrere Folgenglieder dient der Begriff der **Partialsumme**[1]) (Teilsumme). Es sei

$$(a_k) = (a_1;\, a_2;\, a_3;\, \ldots;\, a_n;\, \ldots)$$

eine Zahlenfolge.

Die Zahlen

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1; \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots &= \ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

bezeichnet man als Partialsummen dieser Folge (a_k).

Zum Beispiel ist $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ die dritte Partialsumme von (a_k), allgemein:

n-te Partialsumme von (a_k):

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Die **n-te Partialsumme** hat also n Summanden.

Die Partialsummen von (a_k) bilden wiederum eine Folge

$$(s_n) = (s_1;\, s_2;\, s_3;\, \ldots;\, s_n;\, \ldots).$$

Man kann sie rekursiv beschreiben durch:

$$s_1 = a_1;\; s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \text{für alle } n \geqq 1.$$

● 13 Ermitteln Sie die ersten fünf Partialsummen der Folgen a) bis c)!

a) $(3k + 5)$ b) (k^2) c) $\left(\dfrac{k}{10^k}\right)$

● 14 Eine Folge (a_k) habe die Partialsummenfolge $(s_k) = (1;\, 8;\, 27;\, \ldots;\, k^3;\, \ldots) = (k^3)$.

Geben Sie die ersten sechs Glieder der Folge (a_k) an!

Für das Arbeiten mit Summen erweist sich die Schreibweise mit dem Summenzeichen $\sum$[2]) als besonders bequem.

Für die n-te Partialsumme

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

der Folge (a_k) schreibt man kurz

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{(Lies: „Summe } a_k \text{ über alle } k \text{ von 1 bis } n\text{“).}$$

[1]) pars (lat.) – Teil

[2]) Griechischer Großbuchstabe „sigma“, entspricht dem S in der lateinischen Schrift

■ 10 a) $\sum_{k=1}^{5}(2k-1) = (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+(2\cdot 4-1)+(2\cdot 5-1)$

$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

b) $\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$

$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

c) $\sum_{n=0}^{5}(-1)^n 3^n = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243$

● 15 Welche der vier Terme a) bis d) stellen die gleiche Summe dar?

a) $\sum_{k=1}^{7} 2^{k-1}$ b) $\sum_{n=1}^{7} 2^{n-1}$ c) $\sum_{m=0}^{7} 2^m$ d) $\sum_{n=0}^{6} 2^n$

■ 11 Für die Folge der ungeraden (natürlichen) Zahlen $(a_k) = (2k-1) = (1; 3; 5; 7; 9; \ldots)$ ergeben sich die Partialsummen

$$s_2 = \sum_{k=1}^{2}(2k-1) = 1 + 3 = 4;$$

$$s_3 = \sum_{k=1}^{3}(2k-1) = 1 + 3 + 5 = 9;$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{4}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16;$$

$$s_5 = \sum_{k=1}^{5}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Auch für die erste Partialsumme s_1, die ja eigentlich keine „Summe" ist, kann man das Summenzeichen benutzen:

$$s_1 = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1.$$

Erhält man die Aufgabe, die Summe der ersten einhundert ungeraden Zahlen, also für die Folge $(a_k) = (2k-1)$ aus Beispiel A 11 die 100. Partialsumme

$$s_{100} = \sum_{k=1}^{100}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + 197 + 199$$

zu ermitteln, so wäre es äußerst mühsam, diese Aufgabe durch fortgesetzte Addition, gewissermaßen entsprechend der rekursiven Zuordnungsvorschrift von (s_n), zu lösen. Zweckmäßiger ist es, nach einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit zu suchen, also nach einer Möglichkeit, die n-te Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1)$$

durch einen einfachen Term mit der Variablen n auszudrücken. Man erhielte dann s_{100}, indem man diesen Term für $n = 100$ berechnete. Auf diese Weise hätte man zugleich eine explizite Zuordnungsvorschrift für die Folge (s_k) der Partialsummen von (a_k) und eine **Summenformel** für (a_k).

Um zu einer solchen Summenformel für die Folge der ungeraden Zahlen zu gelangen, betrachten wir die Ergebnisse von Beispiel A 11. Daraus *vermuten* wir, daß sich als Partialsummenfolge die Folge der Quadratzahlen ergibt:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Für die Summe der ersten einhundert ungeraden Zahlen hieße das

$$s_{100} = \sum_{k=1}^{100} (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 197 + 199 = 100^2 = 10000.$$

Gewißheit über die Richtigkeit dieser Angabe und erst recht darüber, ob $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$ für alle n gilt, haben wir jedoch bis jetzt noch nicht. Es ist auch kein Ersatz für eine allgemeine Beweisführung, auf die wir später noch zurückkommen werden, wenn wir errechnen:

$$s_6 = 25 + 11 = 6^2; \qquad s_7 = 36 + 13 = 7^2.$$

■ 12 Es ist eine Vermutung über eine Summenformel für die Folge $(a_k) = (2^k)$ $(k \in N)$, also für die Folge der Zweierpotenzen, aufzustellen.

Lösung:

Der Übersichtlichkeit halber stellen wir die ersten Glieder von (a_k) und die dazugehörigen Partialsummen s_k, die uns zur Vermutung einer Summenformel führen sollen, in einer Tabelle zusammen:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k	1	2	4	8	16	32	64	128	256
s_k	1	3	7	15	31	63	127	255	511

Ein Vergleich führt auf die Beziehung $s_k = 2a_k - 1$ oder $s_k = a_{k+1} - 1$

und damit auf $s_k = 2^{k+1} - 1$.

Wir vermuten also

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

als Formel für die Summe der ersten $n + 1$ Zweierpotenzen.

■ 13 Es ist eine Vermutung über eine Summenformel für die Folge $(b_k) = (3^k)$ $(k \in N)$, also für die Folge der Dreierpotenzen, aufzustellen.

Lösung:

Wie im Beispiel A 12 legen wir eine Tabelle an:

k	0	1	2	3	4	5
b_k	1	3	9	27	81	243
s_k	1	4	13	40	121	364

Wegen der Analogie zur Folge der Zweierpotenzen vermuten wir auch hier einen Zusammenhang zwischen s_k und b_k oder – in diesem Falle noch einfacher – zwischen s_k und b_{k+1}.

● 16 a) Setzen Sie die Lösung zum Beispiel A 13 fort, und verfahren Sie dabei wie bei der Folge der Zweierpotenzen im Beispiel A 12!

b) Geben Sie beide Summenformeln für die ersten n Potenzen an!

Auch die für die Summen der Zweier- und Dreierpotenzen aufgestellten Formeln sind bis jetzt lediglich Vermutungen. Wir sind auf sie wie auf die Summenformel für die ungeraden Zahlen gekommen, indem wir *Einzelergebnisse verallgemeinert* haben. Eine solche Vorgehensweise bezeichnet man als **induktiv**[1]). Derartige **Induktionen** sind in den Wissenschaften allgemein

[1]) inducere (lat.) – hineinführen

üblich, um zu neuen Erkenntnissen zu gelangen; sie liefern aber keine Sicherheit, daß die vermutete Gesetzmäßigkeit auch wirklich zutrifft.
Eine Möglichkeit, Gewißheit über die Richtigkeit der vermuteten Formeln zu erhalten, bietet das **Beweisverfahren der vollständigen Induktion.** Dieses Verfahren ist Gegenstand der nächsten Lerneinheiten.

Aufgaben

1. Schreiben Sie folgende Summen ausführlich!

a) $\sum_{k=0}^{10} (5k + 3)$ b) $\sum_{i=0}^{5} \left(\frac{1}{3}\right)^i$ c) $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k(k+1)}$ d) $\sum_{n=0}^{9} (-1)^n \frac{1}{n+1}$

2. Ordnen Sie die folgenden Terme so, daß Sie die Zeichen „<" und „=" in richtiger Weise dazwischen setzen können!

a) $\sum_{k=1}^{8} k;\quad \sum_{k=1}^{7} (k+8);\quad 1 + \sum_{k=2}^{8} k;\quad \sum_{k=1}^{5} k + \sum_{k=5}^{8} k$

b) $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n};\quad \sum_{n=2}^{11} \frac{1}{n};\quad \sum_{n=0}^{9} \frac{1}{n+1};\quad \sum_{m=2}^{11} \frac{1}{m-1}$

c) $\sum_{k=2}^{5} 2^{k-1};\quad \sum_{p=1}^{4} 2^p;\quad \sum_{n=0}^{3} 2^n;\quad \sum_{k=0}^{3} 2^k$

3. Schreiben Sie folgende Summen unter Verwendung des Summenzeichens!

a) $5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35 + 41 + 47 + 53 + 59$

b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

c) $2 - 6 + 10 - 14 + 18 - 22 + 26 - 30$

d) $2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 + 90$

4. Ermitteln Sie für die Folgen a) und b) Summenformeln in gleicher Weise wie in den Beispielen A 12 und A 13 bzw. im Auftrag A 16! Schreiben Sie die vermuteten Summenformeln mit Hilfe des Summenzeichens!

a) $(a_k) = (2k)$ b) $(b_k) = \left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$

5. Vermuten Sie allgemeine Summenformeln!

a) $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(3m-2)(3m+1)}$ b) $\sum_{k=2}^{n} k \cdot 2^{k-1}$

6. Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855) soll als Neunjähriger die vom Lehrer verlangte Addition der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 über Erwarten schnell ausgeführt haben. Dazu faßte er zunächst die Zahlen zu den 50 Paaren

$1 + 100;\ 2 + 99;\ 3 + 98;\ \ldots;\ 49 + 52;\ 50 + 51$

zusammen und erhielt als Summe: $50 \cdot 101 = 5050$.
Ermitteln Sie in gleicher Weise die Summe der ersten einhundert ungeraden Zahlen! Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Seite 25!

7. Das in Aufgabe 6. beschriebene Verfahren läßt sich abwandeln, wie nachstehendes Beispiel für die 9. Partialsumme der Folge $(3k + 2)$ $(k \geqq 0)$ zeigt:

$$s_9 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26$$
$$s_9 = 26 + 23 + 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2$$
$$s_9 + s_9 = 2s_9 = 9 \cdot 28$$
$$s_9 = 9 \cdot 14 = 126$$

In welcher Hinsicht ist dieses Verfahren zweckmäßiger?
Ermitteln Sie ebenso die Summe der ersten fünfzig natürlichen Zahlen, die bei Teilung durch 3 den Rest 1 lassen! Für welche Art von Folgen läßt sich eine Summenberechnung so verhältnismäßig bequem durchführen?

8. Vermuten Sie wie im Beispiel A 12 eine Summenformel für die Folge der Viererpotenzen!

9.* Vermuten Sie auf Grund der Ergebnisse des Beispiels A 12 und der Aufgabe 8. eine allgemeine Summenformel für die Folge $(a_k) = (z^k)$ der Potenzen einer beliebigen natürlichen Zahl $z > 1$!

Untersuchen Sie die Partialsummenfolge von $\left(\frac{1}{2^k}\right)$, und überlegen Sie daran, ob die vermutete Formel auch für gebrochene Zahlen z zutreffen kann!

Zusammenfassung

Zahlenfolgen heißen solche **Funktionen**, bei denen
– der **Definitionsbereich** D eine Menge **natürlicher Zahlen** ist ($D = N$ oder $D \subset N$);
– **der Wertebereich** W **eine Menge reeller Zahlen ist** ($W \subset R$).
Wenn D endlich ist, so heißt auch die Folge endlich.

Bezeichnungen:
– für die ganze Folge: $(a_k) = (a_1; a_2; a_3; \ldots)$;
– für das k-te Glied: a_k;
– Explizite Zuordnungsvorschrift: Term $f(k)$ mit der Variablen k;
– $a_k = f(k)$ entspricht einer Funktionsgleichung.
Graphische Darstellung im $[k; a_k]$-Koordinatensystem ergibt eine **Menge isolierter Punkte.**
(An Stelle von a und k können auch andere Variablen auftreten.)

Zahlenfolge (a_k) heißt **monoton**

wachsend, wenn für alle k gilt: $a_{k+1} \geqq a_k$.	**fallend,** wenn für alle k gilt: $a_{k+1} \leqq a_k$.

Daraus folgt für die Untersuchung einer Folge (a_k) auf Monotonie:
Wenn für alle k gilt:

$a_{k+1} - a_k \geqq 0$, so ist (a_k) monoton wachsend.	$a_{k+1} - a_k \leqq 0$, so ist (a_k) monoton fallend.

Zahlenfolge (a_k) heißt

arithmetische Folge, wenn für alle k gilt: $a_{k+1} - a_k = d$ (d fest).	**geometrische Folge,** wenn für alle k gilt: $a_{k+1} : a_k = q$ (q fest; $q \neq 0$; $a_1 \neq 0$).

Das bedeutet bei Verwendung der Abkürzung $a_1 = a$

$(a_k) = (a; a + d; a + 2d, \ldots)$ $a_k = a + (k - 1)\,d$	$(a_k) = (a; aq; aq^2; \ldots)$ $a_k = a \cdot q^{k-1}$

Arithmetische Folgen sind monoton, und zwar

monoton wachsend für $d \geqq 0$.	monoton fallend für $d \leqq 0$.

Geometrische Folgen sind

monoton wachsend	monoton fallend
für $a > 0$ und $q \geqq 1$,	für $a > 0$ und $0 < q \leqq 1$,
für $a < 0$ und $0 < q \leqq 1$.	für $a < 0$ und $q \geqq 1$.

Es gibt auch geometrische Folgen, die nicht monoton sind.

Addieren der ersten n Glieder einer Folge (a_k) führt zur n-ten Partialsumme von (a_k):

$$s_1 = a_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ heißt **n-te Partialsumme von (a_k).**

Die Folge

$$(s_1;\ s_2;\ s_3;\ \dots;\ s_n;\ \dots)$$

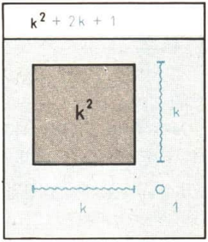
heißt **Partialsummenfolge** für (a_k).
Eine explizite Zuordnungsvorschrift für (s_k) ist eine **Summenformel** für (a_k).

5 Der Grundgedanke des Beweisverfahrens durch vollständige Induktion

Um den Grundgedanken des Beweisverfahrens durch vollständige Induktion zu erfassen, greifen wir noch einmal auf die bereits vermutete, aber noch nicht bewiesene Formel für die Summe der ungeraden Zahlen (↗ Seite 24) zurück:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2.$$

Bild A 11



Da es um Quadratzahlen geht, könnte man die Begründung von einer geometrischen Veranschaulichung ausgehend versuchen (Bild A 11). Von dem Fünferquadrat kommt man durch Anfügen von $2 \cdot 5 + 1 = 11$ Punkten zu einem Sechserquadrat, von diesem durch Anfügen von $2 \cdot 6 + 1 = 13$ Punkten zu einem Siebenerquadrat, und „so geht das offensichtlich immer weiter“. Das heißt, daß wir immer von einem Quadrat aus k^2 Gitterpunkten durch Anfügen von $2k + 1$ Punkten zu einem Quadrat aus $(k + 1)^2$ Gitterpunkten geführt werden (Bild A 12).

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + a_{k+1} \quad \text{mit} \quad a_{k+1} = 2(k + 1) - 1 = 2k + 1 \\ &= k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

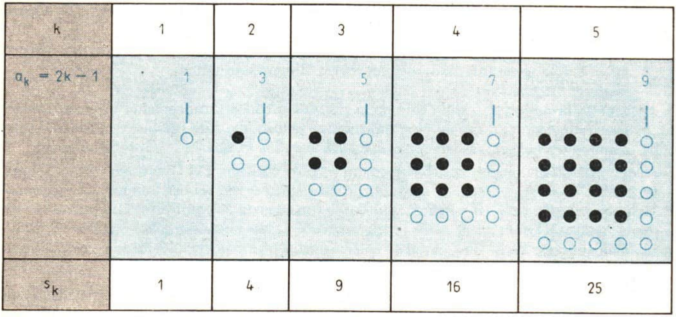


Bild A 12

Allgemein gilt also für jede beliebige natürliche Zahl k:

Wenn die Summe der ersten k ungeraden Zahlen k^2 ist,
dann ist die Summe der ersten $k + 1$ ungeraden Zahlen $(k + 1)^2$.

Oder:

Aus $s_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
folgt $s_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Die Wahrheit der zu beweisenden Aussage pflanzt sich also gewissermaßen von jeder beliebigen natürlichen Zahl k auf deren Nachfolger $k + 1$ fort, „vererbt sich".
Nun ist außerdem mit $s_1 = 1 = 1^2$ ein „Anfang" gesichert.
Das bedeutet:

Aus $s_1 = 1^2$ folgt $s_2 = 2^2$;
Aus $s_2 = 2^2$ folgt $s_3 = 3^2$;
Aus $s_3 = 3^2$ folgt $s_4 = 4^2$.
usf.

Da wir von 1 aus durch fortlaufendes Bilden des unmittelbaren Nachfolgers (fortlaufende Addition von 1) jede – noch so große – natürliche Zahl n erreichen, gilt die zu beweisende Aussage für alle natürlichen $n \geqq 1$.
Diese Überlegung sei noch einmal an zwei Beispielen veranschaulicht:

(a) Jeder Stein in einer Reihe von Dominosteinen fällt gewiß um, wenn folgendes der Fall ist (Bild A 13)[1]:
- Der erste Stein wird umgestoßen;
- die Reihe ist so aufgebaut, daß jeder fallende Stein auch den nächsten umwirft.

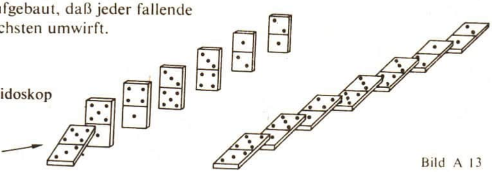


Bild A 13

[1]) Nach H. Steinhaus: Kaleidoskop der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959, S. 46

(b) Eine Gruppe, zum Beispiel eine Schulklasse, läuft auf einem Wanderpfad „im Gänsemarsch". Es ist verabredet:
Jeder informiert seinen Hintermann über wichtige Beobachtungen und gibt vom Vordermann empfangene Informationen an seinen Hintermann weiter.
Dadurch ist gesichert:
Jede Information, die von dem an der Spitze laufenden Gruppenleiter ausgeht, erreicht *jedes* Mitglied der Gruppe. Eine Information jedoch, die zum Beispiel von dem 5. Gruppenmitglied ausgeht, erhalten *nur alle nach ihm*, das 6., das 7., ... Gruppenmitglied.

Bei diesen Beispielen handelt es sich jedoch um *endliche* Mengen. Ein Übertragen dieser Schlußweise auf die *unendliche* Menge N der natürlichen Zahlen – wie bei der Summe der ungeraden Zahlen bereits erläutert – ist möglich, weil durch fortgesetzte Nachfolgerbildung von 0 aus die gesamte Menge N erfaßt wird, von n_0 (beispielsweise 1) aus alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$.
Wenn man auf diese Weise die Gültigkeit einer Aussage über natürliche Zahlen nachweisen will, muß man zweierlei zeigen.

(1) **Anfang:** Die Aussage gilt für eine bestimmte natürliche Zahl (meist 0 oder 1) als Anfangswert.

(2) **„Vererbung":** Aus der (angenommenen) Gültigkeit für eine natürliche Zahl k folgt stets die Gültigkeit für deren Nachfolger $k + 1$.

Nach (2) überträgt sich die Gültigkeit der Aussage von jeder natürlichen Zahl auf ihren Nachfolger, und da nach (1) der Anfang gesichert ist, gilt die Aussage auch für *alle* natürlichen Zahlen, die größer als der Anfangswert sind.
So soll jetzt die im Beispiel A 12 (↗ Seite 25) vermutete Summenformel $s_n = 2^{n+1} - 1$ für die Folge $(a_n) = (2^n)$ der Zweierpotenzen bestätigt werden.

■ 14 Zu beweisen ist die Gültigkeit von $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1$ für jedes natürliche n.

Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

(1) *Anfang:* Für $n = 0$ ist zu zeigen $2^0 = 2^1 - 1$.
Das ist aber richtig wegen $2^0 = 1$.

(2) *„Vererbung":* Wir nehmen an, die Formel sei für eine (beliebige, aber feste) natürliche Zahl $n = k$ gültig:

(*) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

Bei Übertragung der Gültigkeit der Formel auf den Nachfolger $k + 1$ müßte gelten

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1.$$

Daß diese Beziehung wirklich besteht, zeigt die Veränderung der linken Seite unter Benutzung von (*):

$$\begin{aligned} & \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k} + 2^{k+1} \\ = {} & 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ = {} & 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ = {} & 2^{k+2} - 1 \\ = {} & 2^{(k+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt sich aus (1) und (2):

Die Summenformel gilt für $n = 0$ und $n = 0 + 1 = 1$ und $n = 1 + 1 = 2$ und $n = 2 + 1 = 3$ und ... Da man durch fortgesetzte Nachfolgerbildung (Addition von 1) schließlich jede natürliche Zahl erreicht, gilt die Formel für alle natürlichen Zahlen.

● 17 a) Beweisen Sie wie im Beispiel A 14 die Summenformel für die Folge der Dreierpotenzen

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

(↗ Auftrag A 16, Seite 25)!

b) Beweisen Sie ebenso die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)!$$

Um zusammenfassend das „Prinzip der vollständigen Induktion“ klar formulieren zu können, machen wir uns noch mit einer häufig anzutreffenden symbolischen Schreibweise vertraut:
Im Zusammenhang mit Aussagen über natürliche Zahlen, um die es ja hier stets geht, werden Kurzschreibweisen wie

$\mathbf{H}(n)$ (Lies: $\mathbf{H}$ von n“)

benutzt. Die Ähnlichkeit mit der Funktionsschreibweise $f(x)$ ist dabei nicht nur äußerlich. Auch hier wird jeder natürlichen Zahl n (aus dem „Definitionsbereich“ von $\mathbf{H}$) eindeutig etwas zugeordnet, allerdings keine Zahl, sondern eine Aussage und damit letztlich einer der Werte „wahr“ oder „falsch“.

● 18 a) $\mathbf{H}(n)$ bedeute: „$n^2 + 3n + 7$ ist durch 5 teilbar“.
Bilden Sie $\mathbf{H}(0)$, $\mathbf{H}(2)$, $\mathbf{H}(3)$, $\mathbf{H}(4)$, $\mathbf{H}(8)$, $\mathbf{H}(10)$!
Welche der so erhaltenen Aussagen sind wahr?
Bilden Sie auch $\mathbf{H}(k-1)$, $\mathbf{H}(k+1)$, $\mathbf{H}(n+2)$, $\mathbf{H}(2n)$!

b) $\mathbf{H}(n)$ bedeute: „$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$“.
Bilden Sie $\mathbf{H}(3)$, $\mathbf{H}(5)$, $\mathbf{H}(n-1)$, $\mathbf{H}(n+1)$, $\mathbf{H}(2n+1)$!

Unter Verwendung dieser Symbolik lautet das **Prinzip der vollständigen Induktion** wie folgt.

▷ 1

Die Aussage „Für alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$ gilt $\mathbf{H}(n)$“ ist wahr, wenn folgendes gilt:
1. $\mathbf{H}(n)$ ist richtig für $n = n_0$;
2. Aus der Gültigkeit von $\mathbf{H}(n)$ für $n = k$ folgt für beliebiges k die Gültigkeit für $n = k + 1$.

Ist speziell $n_0 = 0$, so gilt $\mathbf{H}(n)$ für alle natürlichen Zahlen. Folgt beispielsweise dann aus der Gültigkeit von $\mathbf{H}(n)$ für $n = k$ die für $n = k + 2$, so ist $\mathbf{H}(n)$ für alle geraden Zahlen wahr.

Aufgaben

1. Folgende Aufgabe aus der „Unterhaltungsmathematik“ ist schon sehr alt:
Ein Brett trägt die Stifte A, B und H, auf die man zylindrische, in der Mitte durchbohrte Scheiben verschiedener Größe stecken kann. Zunächst sind die Scheiben der Größe nach auf dem Stift A angeordnet (Bild A 14). Sie sollen *einzeln*, jedoch mit *möglichst wenigen Umsetzungen* zum Stab B gebracht werden, um dort wieder solch einen Turm zu bilden; dabei darf der Hilfsstift H zum Ausweichen benutzt werden. Niemals darf jedoch irgendwo eine größere über einer kleineren Scheibe liegen.

a) Versuchen Sie, die Aufgabe mit 6 Scheiben zu lösen, und zählen Sie, wie viele Umsetzungen Sie benötigen!

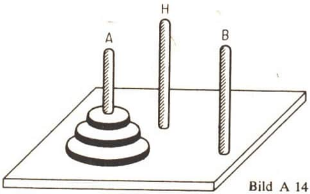


Bild A 14

(Nehmen Sie Münzen verschiedener Größe an Stelle der Kreisscheiben, und ersetzen Sie die Stifte durch markierte Stellen auf einem Stück Papier! Um wirklich die Minimalzahl von Umsetzungen zu erhalten, empfiehlt sich ein Beginn mit einer einzigen Münze und Fortschreiten über 2 Münzen, 3 Münzen usw. bis zu 6 Münzen.)

b) Erläutern Sie, welche Beziehung zwischen der Anzahl u_k und u_{k+1} der nötigen Umsetzungen für einen Turm aus k bzw. $k + 1$ Scheiben besteht!
Wie viele Umsetzungen sind demnach für einen Turm aus 8 (10, 12) Scheiben erforderlich?

c) Versuchen Sie, eine allgemeine Formel für das Umsetzen von n Scheiben aufzustellen und ihre Gültigkeit zu begründen!

2. a) Wie viele verschiedene „Wörter" kann man aus den vier Buchstaben B, E, I, L bilden, wenn kein Buchstabe mehrfach vorkommen darf und jede beliebige Buchstabenzusammenstellung (also z. B. auch ELIB) als „Wort" angesehen wird?

b) Wie kann man auf Grund des Ergebnisses von a) sofort ermitteln, wie viele „Wörter" sich aus fünf verschiedenen Buchstaben bilden lassen?

c) Erläutern Sie eine allgemeine Beziehung zwischen den Anzahlen möglicher „Wörter" aus k und aus $k + 1$ verschiedenen Buchstaben!

3. Erläutern Sie, für welche Zahlen n eine bestimmte Aussage mit Sicherheit gilt, wenn man jeweils folgendes weiß:

a) (1) Die Aussage ist gültig für $n = 0$.
(2) Für beliebiges k gilt: Wenn die Aussage für $n = k$ gültig ist, so gilt sie auch für $n = k + 3$.

b) (1) Die Aussage ist nicht gültig für 1.
(2) Für beliebiges $n = k$ folgt aus der (angenommenen) Gültigkeit der Aussage für k ihre Gültigkeit für $k + 1$.

c) (1) Die Aussage ist wahr für 0 und 1.
(2) Für beliebiges k folgt aus der Wahrheit der Aussage für k die Wahrheit für $k + 2$.

d) (1) Die Aussage gilt für $n = 1$.
(2) Aus der Gültigkeit der Aussage für $n = k$ folgt die Gültigkeit für $n = 2k$.

e) (1) Die Aussage ist wahr für $n = 100$.
(2) Aus dem Zutreffen der Aussage für $n = k$ folgt stets das Zutreffen für $n = k - 1$.

f) (1) Die Aussage trifft zu für $n = 3$.
(2) Aus der Gültigkeit der Aussage für $n = k - 1$ folgt ihre Gültigkeit für $n = k$.

6 Beweise für Summenformeln mittels vollständiger Induktion

Beweist man eine Aussage der Form

„Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\mathbf{H}(n)$"

durch vollständige Induktion, so geschieht dies gemäß dem in Satz A 1 formulierten Prinzip in zwei Schritten:

1. **Induktionsanfang**
Bilden von $\mathbf{H}(n_0)$ für eine möglichst kleine natürliche Zahl n_0; Überprüfen, ob $\mathbf{H}(n_0)$ gilt

2. **Induktionsschritt**
Zeigen, daß für alle k gilt: Wenn $\mathbf{H}(k)$, so $\mathbf{H}(k + 1)$

Im Induktionsschritt ist also eine Wenn-so-Aussage zu beweisen, am übersichtlichsten in der uns bekannten Weise:

- Bilden von $\mathbf{H}(k)$ als *Induktionsvoraussetzung*;
- Bilden von $\mathbf{H}(k+1)$ als *Induktionsbehauptung*;
- Nachweis, daß $\mathbf{H}(k+1)$ aus $\mathbf{H}(k)$ folgt (*Induktionsbeweis*).

Beim Beweisen von Summenformeln (expliziten Zuordnungsvorschriften für Partialsummenfolgen), um das es sich in dieser Lerneinheit durchweg handeln wird, geschieht der Nachweis im Induktionsschritt im allgemeinen durch Umformen der linken Gleichungsseite von $\mathbf{H}(k+1)$ so, daß sich unter Ausnutzung von $\mathbf{H}(k)$ die rechte Seite ergibt.

■ 15 Zu beweisen ist die Gültigkeit folgender Aussage für alle natürlichen Zahlen n:

„Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n beträgt $\frac{n(n+1)}{2}$".

Voraussetzung: n ist eine natürliche Zahl, $n > 0$.

Behauptung: Es gilt $\mathbf{H}(n)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis:

1. Induktionsanfang:

$\mathbf{H}(1)$ besagt $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Das ist aber offensichtlich eine wahre Aussage.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

Für $n = k$ gelte $\mathbf{H}(k)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Induktionsbehauptung:

Dann ist auch $\mathbf{H}(k+1)$ wahr: $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Induktionsbeweis:

$\underbrace{(1 + 2 + 3 + \ldots + k)} + (k+1)$ Zerlegen, um Induktionsvoraussetzung anwenden zu können

$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ Nutzen der Induktionsvoraussetzung

$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$ Addieren nach Gleichnamigmachen

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ Ausklammern

Damit ist gezeigt, daß die Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung folgt, wegen des Induktionsanfangs also auch die Gültigkeit der Aussage $\mathbf{H}(n)$ für alle natürlichen $n \geqq 1$.

● 19 a) Stellen Sie die Beweisführung aus Beispiel A 15 mit Hilfe des Summenzeichens dar!

b) Vergleichen Sie die bewiesene Summenformel mit der für die geraden Zahlen (↗ Auftrag A 17b))!

c) Wie groß ist $\sum_{k=1}^{n} 3k = 3 + 6 + 9 + \ldots + 3n$?

Soll das Beweisverfahren der vollständigen Induktion angewandt werden, so muß die zu beweisende Aussage als Vermutung bereits vorliegen. Eine solche Vermutung gewinnt man oft (↗ Lerneinheit 4) durch Verallgemeinerung aus der Untersuchung einiger Einzelfälle (durch – „unvollständige" – Induktion). So werden wir auch in dem folgenden Beispiel verfahren.

■ 16 Gesucht ist eine Summenformel für die Folge (a_k) mit $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ $(k > 0)$.

Lösung:

(1)

$$(a_k) = \left(\frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{1}{3\cdot 4};\ \frac{1}{4\cdot 5};\ \dots\right) = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{12};\ \frac{1}{20};\ \dots\right)$$

Um zu einer Vermutung zu gelangen, bilden wir einige Partialsummen von (a_k):

$$s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{15+1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Daraus vermuten wir $s_n = \dfrac{n}{n+1}$, also $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(2)

Diese Summenformel beweisen wir nun mittels vollständiger Induktion.

Voraussetzung: n ist eine natürliche Zahl, $n > 0$.

Behauptung: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Beweis:

1. Induktionsanfang:

Die Gültigkeit der Aussage für $n = 1$ ist bereits durch die Untersuchung unter (1) gesichert:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

Für $n = m$ gelte $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}$.

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m+1}{m+2}$.

Induktionsbeweis:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \qquad \text{Zerlegen}$$

$$= \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \qquad \text{Anwenden der Induktionsvoraussetzung}$$

$$= \frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)}$$ Gleichnamigmachen und Addieren

$$= \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)}$$ Ausmultiplizieren im Zähler

$$= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}$$ Anwenden einer binomischen Formel

$$= \frac{m+1}{m+2}$$ Kürzen

Damit haben wir die rechte Seite der Gleichung in der Induktionsbehauptung erhalten. Die Gültigkeit der Formel für m zieht also die für $m + 1$ nach sich, und wegen des Induktionsanfangs gilt die Summenformel für alle natürlichen Zahlen $n > 0$.

Ergebnis:

Die Folge (a_k) mit $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ $(k > 0)$ hat die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Häufig verzichtet man bei Beweisen mittels vollständiger Induktion auf die Einführung eines besonderen Symbols k oder dergleichen und führt den Induktionsschritt mit n aus. Das ist im Grunde zweitrangig. Wesentlich hingegen ist, daß man sich stets – auch bei kurzer schriftlicher Fixierung – vor Augen hält, was im Induktionsschritt nachzuweisen ist:

„Für alle n gilt: Wenn $\mathbf{H}(n)$, so $\mathbf{H}(n+1)$".

Es ist *nicht* etwa nachzuweisen „Wenn für alle n gilt $\mathbf{H}(n)$, so $\mathbf{H}(n+1)$". Dabei würde ja die zu beweisende Aussage als Voraussetzung benutzt (und es bliebe gar nichts mehr zu beweisen).

17 Es ist zu beweisen, daß die Folge (k^2) der Quadratzahlen die Partialsummenfolge (s_n) mit

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

hat.

Voraussetzung: n ist eine natürliche Zahl, $n > 0$.

Behauptung: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beweis:

1. Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt die Aussage: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes n gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Induktionsbeweis:

$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$	Zerlegen
$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$	Anwenden der Induktionsvoraussetzung
$= \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$	Gleichnamigmachen und Addieren
$= \dfrac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$	Ausklammern
$= \dfrac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$	Ausmultiplizieren
$= \dfrac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$	Zusammenfassen
$= \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$	Umformen mit Blick auf die rechte Seite der Induktionsbehauptung

● 20 a) Auch $n = 0$ hätte im Beispiel A 17 in den Gültigkeitsbereich der Summenformel von vornherein mit einbezogen werden können:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Wie hätte dann der Induktionsanfang lauten müssen?

b) Untersuchen Sie die Möglichkeit des Einbeziehens von $n = 0$ auch bei den Beispielen A 15 und A 16!

Bisher wurden Summenformeln einzelner Folgen bewiesen, dabei auch für spezielle arithmetische Folgen (↗ Beispiel A 15) und geometrische Folgen (↗ Beispiel A 14). Wir wollen uns dieser Frage jetzt für *alle* arithmetischen und für *alle* geometrischen Folgen zuwenden.
Bei einer arithmetischen Folge (a_k) mit dem Anfangsglied $a_1 = a$ und der Differenz d lautet das

k-te Glied $a_k = a + (k-1)\,d$

und demzufolge die

n-te Partialsumme $\quad s_n = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d).$

Da die notwendige Vereinfachung durch Anwenden der Gesetze der Addition bei Verwenden des Summenzeichens eine gewisse Übung erfordert, schreiben wir ausführlich:

$$\begin{aligned} s_n &= a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + (n-1)\,d) \\ &= n \cdot a + (d + 2d + 3d + \ldots + (n-1)\,d) \\ &= n \cdot a + d\,(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) \\ &= n \cdot a + d \sum_{k=1}^{n-1} k \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Ergebnisses $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ von Beispiel A 15 erhalten wir (für $n-1$ an Stelle von n):

$$s_n = n \cdot a + d\,\frac{(n-1)\,n}{2}.$$

Eine etwas andere Gestalt erhält diese Summenformel, wenn man $a_n = a + (n-1)\,d$ einsetzt:

$$s_n = \frac{2na + n(n-1)\,d}{2} = \frac{n(2a + (n-1)\,d)}{2} = \frac{n(a + (a + (n-1)\,d))}{2}$$

$$s_n = \frac{n(a + a_n)}{2}$$

Summenformeln für arithmetische Folgen (a_k) mit dem Anfangsglied a und der Differenz d lassen sich also auf verschiedene Weise formulieren.

▷ 2

$$\boldsymbol{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d)}$$

$$\boldsymbol{s_n = \begin{cases} na + \dfrac{n(n-1)\,d}{2} \\[2ex] \dfrac{n}{2}\,(a + a_n) \end{cases}}$$

● 21 Wenden Sie diese Summenformeln auf die Folgen der natürlichen, der geraden und der ungeraden Zahlen für $n = 50$ sowie für $n = 100$ an, und vergleichen Sie mit den Ihnen bereits bekannten Ergebnissen!

Zur Summenformel für alle arithmetischen Folgen hat uns die Kenntnis der Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen verholfen. Ähnlich können wir zu einer Summenformel für alle geometrischen Folgen gelangen, wenn wir eine Summenformel für die n-ten Potenzen einer beliebigen Zahl z kennen.
Bis jetzt sind uns bereits Summenformeln für spezielle z bekannt:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \qquad (\nearrow \text{ Beispiel A 14});$$

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \qquad (\nearrow \text{ Auftrag A 16a})).$$

Die Summenformel für $z = 4$ lautet:

$$\sum_{k=0}^{n} 4^k = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \qquad (\nearrow \text{ Aufgabe 1a), Seite 39}).$$

Aus diesen drei Formeln läßt sich verallgemeinernd vermuten:

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}, \quad \text{falls} \quad z \neq 1.$$

Weil 0^0 nicht allgemein definiert ist, muß auch $z \neq 0$ gelten.
Die Vermutung wurde auf Grund nur weniger Werte für z, die durchweg natürliche Zahlen sind, gewonnen. Deshalb wird man vor einer allgemeinen Beweisführung an Hand einfacher Beispiele überlegen, ob auch andere Werte für z zu einem vernünftigen Ergebnis führen.

a) Bei $z = -2$, $n = 5$ würde die Formel (*) ergeben:

$$\sum_{k=0}^{5} (-2)^k = \frac{(-2)^6 - 1}{-2 - 1} = \frac{64 - 1}{-3} = -\frac{63}{3} = -21.$$

Andererseits ist

$$\sum_{k=0}^{5} (-2)^k = 1 + (-2) + 4 + (-8) + 16 + (-32)$$
$$= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$$
$$= 21 - 42 = -21$$

Auch für diesen Fall liefert die Formel das richtige Ergebnis.

b) Bei $z = \frac{1}{2}$, $n = 5$ ergibt sich nach der Formel (*):

$$\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}.$$

Andererseits ist

$$\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1}{32} = \frac{63}{32}.$$

Auch dieses Ergebnis deutet darauf hin, daß für z keine weiteren Einschränkungen gemacht werden müssen.

● 22 Beweisen Sie, daß für jede reelle Zahl z mit $z \neq 0$ und $z \neq 1$ und für jede natürliche Zahl n gilt

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}!$$

Durch Erweitern des Bruches $\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$ mit (-1) gewinnt man eine andere Form der Formel, die manchmal – insbesondere bei $0 < z < 1$ – bevorzugt wird:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad (z \neq 0,\ z \neq 1).$$

Nun können wir zu einer Summenformel für alle geometrischen Folgen gelangen.
Bei einer geometrischen Folge (a_k) mit dem Anfangsglied $a_1 = a$ und dem Quotienten q $(q \neq 0)$ lautet das

k-te Glied $a_k = a \cdot q^{k-1}$

und demzufolge die

n-te Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k$.

Ausführlich geschrieben heißt das:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$
$$= a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$
$$s_n = a \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

Die Anwendung der im Auftrag A 22 bewiesenen Formel liefert für den Fall $q \neq 1$:

$$s_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Ähnlich wie bei den arithmetischen Folgen kommt man zu einer etwas anderen Formel, wenn man $a_n = a \cdot q^{n-1}$ einsetzt:

$$s_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{aq^{n-1}q - a}{q - 1} = \frac{a_n \cdot q - a}{q - 1} = \frac{a - a_n q}{1 - q}.$$

Summenformeln für geometrische Folgen (a_k) mit dem Anfangsglied a und dem Quotienten q $(q \neq 0)$ lassen sich also folgendermaßen angeben.

▷ 3

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k$$

$$s_n = \begin{cases} a\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = a\dfrac{1 - q^n}{1 - q} \\ \dfrac{a_n q - a}{q - 1} = \dfrac{a - a_n q}{1 - q} \end{cases} \quad \text{für} \quad q \neq 1$$

$$s_n = n \cdot a \quad \text{für} \quad q = 1$$

Aufgaben

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt:

a) $4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^n = \dfrac{4^{n+1} - 1}{3}$;

b) $4 + 10 + 16 + \cdots + (6n + 4) = (n + 1)(3n + 4)$!

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ folgendes gilt!

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

b) $\dfrac{1}{2 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \dfrac{1}{(3n - 1)(3n + 2)} = \dfrac{n}{2(3n + 2)}$

3. Ermitteln Sie jeweils eine Formel für die folgenden Summen s_n, und beweisen Sie deren Richtigkeit!

a) $s_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}$

b) $s_n = 1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3)$

c) Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, die bei der Teilung durch 9 den Rest 7 lassen

4. Schreiben Sie die folgenden Summen für $n = 5$ ausführlich, und weisen Sie die Gültigkeit der angegebenen Formeln nach! Bei welchen Summen könnte die Summation schon bei 0 beginnen?

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k + 1)(k + 2) = \frac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{4}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4i - 3)(4i + 1)} = \frac{n}{4n + 1}$

c) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^r} = 1 - \frac{1}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n + 2}{2^n}$

5. Ermitteln Sie die Formeln für die folgenden Summen, und weisen Sie ihre Richtigkeit nach!

a) $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(3m-2)(3m+1)}$ b) $\sum_{k=2}^{n} k \cdot 2^{k-1}$

7 Weitere Beweise mittels vollständiger Induktion

Das Verfahren der vollständigen Induktion kann nicht nur zum Beweisen von Summenformeln dienen. Auch die Gültigkeit von Ungleichungen, Aussagen über die Teilbarkeit natürlicher Zahlen und anderes können mit seiner Hilfe bewiesen werden.
Das folgende Beispiel zeigt außerdem: Der Induktionsbeweis kann auch dadurch erbracht werden, daß die Induktionsvoraussetzung unter Benutzung bekannter Gesetzmäßigkeiten so umgeformt wird, daß sich die Induktionsbehauptung ergibt.

■ 18 Zu beweisen ist die Wahrheit der Aussage
„Für alle natürlichen Zahlen n gilt $2^n > n$".

Voraussetzung: n ist eine beliebige natürliche Zahl.

Behauptung: $2^n > n$

Beweis:

1. Induktionsanfang:

Für $n = 0$ gilt die Aussage: $2^0 > 0$.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:
Für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl n gelte $2^n > n$.

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch $2^{n+1} > n + 1$.

Induktionsbeweis:

$2^n > n$	Induktionsvoraussetzung
$2 \cdot 2^n > 2 \cdot n$	Multiplizieren mit 2
$2^{n+1} > n + n$	Umformen von $2 \cdot 2^n$ und $2n$
$2^{n+1} > n + 1$	Gilt wegen $n + n \geqq n + 1$ für $n > 0$

Da der Induktionsschritt nur für $n > 0$ durchgeführt wurde, kann $n = 0$ nicht als Anfang genommen werden. Es ist also nachträglich noch $n = 1$ zu beachten: $2^1 = 2 > 1$. Erst damit ist die behauptete Ungleichung für alle natürlichen n bewiesen.

● 23 Erläutern Sie, warum die folgende Beweisführung im Induktionsschritt unzulässig ist!

Aus $2^{n+1} > n + 1 \quad (n \geqq 1)$
folgt $2 \cdot 2^n > n + 1$,
also $2^n + 2^n > n + 1$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $2^n > n$, und da $2^n > 1$ ist, ist der Beweis erbracht.

Das nächste Beispiel soll deutlich machen, daß man den Induktionsschritt statt von k auf $k + 1$ auch von $k - 1$ auf k ausführen kann. Auch dabei handelt es sich ja um den Schluß von einer beliebigen, aber festen natürlichen Zahl auf deren Nachfolger. (Manchmal ergeben sich auf diese Weise etwas leichter zu bearbeitende Terme.)

19 Zu beweisen ist der Satz
„Die Summe der dritten Potenzen dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 9 teilbar".

Voraussetzung: n ist eine beliebige natürliche Zahl.

Behauptung: $\dfrac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{9}$ ist eine natürliche Zahl.

Beweis:

1. Induktionsanfang:

Für $n = 0$ ist $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 0 + 1^3 + 2^3 = 9$.

Also gilt die Aussage für $n = 0$.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

Für $n = k - 1$ sei

$\dfrac{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}{9}$ eine natürliche Zahl.

Induktionsbehauptung:

Dann ist auch $\dfrac{k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3}{9}$ eine natürliche Zahl.

Induktionsbeweis:

Die Terme in Induktionsvoraussetzung und Induktionsbehauptung stimmen nahezu überein, nur daß an Stelle von $(k-1)^3$ bei dem einen in dem anderen $(k+2)^3$ im Zähler auftritt. Das legt nahe, zunächst $(k-1)^3$ und $(k+2)^3$ miteinander zu vergleichen.

$$\begin{aligned}(k-1)^3 &= (k-1)(k-1)^2 \\ &= (k-1)(k^2 - 2k + 1) \\ &= k^3 - 3k^2 + 3k - 1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(k+2)^3 &= (k+2)(k+2)^2 \\ &= (k+2)(k^2 + 4k + 4) \\ &= k^3 + 6k^2 + 12k + 8\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}(k+2)^3 &= k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + 9k^2 + 9k + 9 \\ &= (k-1)^3 + 9(k^2 + k + 1).\end{aligned}$$

Daraus folgt für den Term in der Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned}\frac{k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3}{9} &= \frac{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3 + 9(k^2 + k + 1)}{9} \\ &= \frac{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}{9} + \frac{9(k^2 + k + 1)}{9} \\ &= \frac{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}{9} + (k^2 + k + 1)\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist der erste dieser beiden Summanden eine natürliche Zahl. Da auch der zweite Summand natürlich ist, ist die Summe eine natürliche Zahl. Damit ist gezeigt, daß aus der Gültigkeit der Aussage für ein beliebiges festes $n = k - 1$ die Gültigkeit für den Nachfolger $n + 1 = k$ folgt. Wegen des Induktionsanfangs gilt also die Aussage für alle natürlichen Zahlen; der Satz ist bewiesen.

Liegt der Induktionsanfang nicht bei 0, sondern erst bei einer anderen natürlichen Zahl $n_0 > 0$, so ist nach dem Induktionsschritt der betreffende Satz auch nur für alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$ nachgewiesen. Solche Fälle treten auf, wenn die betreffende Aussage für $n < n_0$ falsch oder sinnlos ist.

Nicht immer muß beim Beweis einer Aussage über natürliche Zahlen das Verfahren der vollständigen Induktion angewandt werden, es gibt sogar Fälle, in denen das Verfahren überhaupt nicht anwendbar ist. Andererseits können auch Beweise für manche geometrischen Aussagen mittels vollständiger Induktion geführt werden, sofern in den betreffenden Sachverhalten natürliche Zahlen auftreten.

■ 20 Es ist eine Formel für die Summe s_n der Innenwinkel in (einfachen)[1]) ebenen n-Ecken zu ermitteln.

(1)
Für $n = 3$ kennen wir bereits die Innenwinkelsumme: $s_3 = 180°$.

(2)
Wenn das n-Eck ($n > 3$) konvex[2]) ist, so kann man es von einem beliebigen Eckpunkt aus mittels $(n - 3)$ Diagonalen in $(n - 2)$ Dreiecke zerlegen (Bild A 15). Dabei werden auch die Innenwinkel des n-Ecks zerlegt, und ihre Teile ergeben die Innenwinkel der Dreiecke. Deshalb gilt
$s_n = (n - 2) \cdot 180°$.

(3)
Daß diese Formel für alle n-Ecke, also auch für nichtkonvexe zutrifft, zeigen wir durch vollständige Induktion.
Voraussetzung: n ist eine beliebige natürliche Zahl, $n > 3$.
Behauptung: Für die Innenwinkelsumme s_n jedes (einfachen) ebenen n-Ecks gilt
$s_n = (n - 2) \cdot 180°$.

Beweis:

1. Induktionsanfang:
Für $n = 3$
gilt die Aussage nach (1).

2. Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges $n = k$
möge gelten
$s_k = (k - 2) \cdot 180°$.
Induktionsbehauptung:
Dann gilt für $n = k + 1$

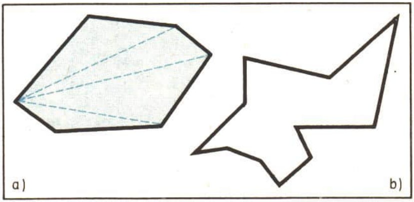


Bild A 15

$s_{k+1} = ((k + 1) - 2) \cdot 180° = (k - 1) \cdot 180°$.

Induktionsbeweis:

Das $(k + 1)$-Eck kann durch eine passend gewählte Diagonale in ein k-Eck und ein Dreieck zerlegt werden[3]). Die Innenwinkelsumme s_{k+1} des $(k + 1)$-Ecks setzt sich demnach aus der Winkelsumme s_k des k-Ecks und der des Dreiecks zusammen:

---

[1]) Wenn von n-Ecken gesprochen wird, sind meist stillschweigend „einfache" n-Ecke gemeint, das heißt solche, die „doppelpunktfrei" sind. Bei ihnen gehört kein Punkt außer den Eckpunkten mehr als einer Seite an, und auch die Eckpunkte gehören nicht zu mehr als zwei Seiten.

[2]) Ein ebenes Vieleck heißt konvex, wenn in ihm für jede Seite s gilt: Das Vieleck liegt gänzlich in einer der beiden Halbebenen, die durch die durch s verlaufende Gerade erzeugt werden.

[3]) Daß dies ausnahmslos möglich ist, erfordert allerdings etwas eingehendere Überlegungen. Eine ausführliche Darstellung findet man in: L. I. Golowina und J. M. Jaglom: Vollständige Induktion in der Geometrie, Bd. 75 der Mathematischen Schülerbücherei, S. 2 bis 4. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + s_3 & \\ &= s_k + 180^\circ & &\text{Wegen (1)} \\ &= (k-2)\cdot 180^\circ + 180^\circ & &\text{Anwenden der Induktionsvoraussetzung} \\ &= (k-1)\cdot 180^\circ & &\text{Umformen} \end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung und wegen des Induktionsanfangs die Aussage insgesamt bewiesen.

Aufgaben

1. Ermitteln Sie, von welchem n ab die folgenden Ungleichungen gelten, und beweisen Sie die Behauptungen durch vollständige Induktion!

a) $2^n > 2n$ **b)** $2^n > 2n + 1$ **c)** $2^n > n^2$

Anleitung zu c): Benutzen Sie beim Beweis das Ergebnis von b)!

2. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichung für $n > 1$!

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion!

a) $9^n - 1$ ist für jede natürliche Zahl n durch 8 teilbar.

b) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ist stets durch 133 teilbar.

c)* $2^{3^n} + 1$ ist durch 3^{n+1}, aber nicht durch 3^{n+2} teilbar.

4. Ermitteln Sie die Anzahl der Diagonalen in einem (ebenen) n-Eck, und beweisen Sie die gefundene Formel sowohl mittels vollständiger Induktion als auch ohne dieses Verfahren!

5. Beweisen Sie den folgenden Satz durch vollständige Induktion!
Haben n verschiedene Geraden einer Ebene einen Punkt gemeinsam, so wird die Ebene von den Geraden in $2n$ Teile zerlegt.

8 Übungen und Anwendungen zu Folgen und ihren Partialsummen

Da wir nun mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion einige Summenformeln für spezielle Folgen und insbesondere für zwei Klassen von Folgen, nämlich arithmetische und geometrische, bewiesen haben, sind wir in der Lage, uns dieser Formeln in unterschiedlichen Zusammenhängen zu bedienen.

■ 21 220 m Papier (Stärke 0,2 mm) werden auf eine Rolle mit dem Radius 7,5 cm gewickelt.

a) Wie viele Lagen ergeben sich?

b) Wie lang ist der Durchmesser der Rolle zum Schluß?

Lösungsüberlegung:

Wir nehmen vereinfachend an, daß die einzelnen Lagen konzentrisch gelegene Hohlzylinder sind. Dann ergibt sich die Gesamtlänge 220 m = 220000 mm als Summe der Kreisumfänge in den einzelnen Lagen. Deren Zahlenwerte[1]) u_k bilden wegen

[1]) Hier und im folgenden immer bezogen auf die Einheit Millimeter

$$u_{k+1} = 2\pi(r_k + 0{,}2) = 2\pi r_k + 0{,}4\pi = u_k + 0{,}4\pi$$

eine endliche arithmetische Folge (u_k). Die Zahlenwerte der Radien r_k bilden ebenfalls eine endliche arithmetische Folge, deren letztes Glied die Hälfte des Zahlenwertes für den endgültigen Durchmesser ist.

a) (u_k)

Gegeben: $u_1 = 2\pi \cdot 75$
$d_u = 0{,}4\pi$
$s_n = 220000$

Gesucht: n

b) (r_k)

Gegeben: $r_1 = 75$
$d_r = 0{,}2$
n (nach Lösung von a))

Gesucht: $2r_n$

Lösung:

a) Aus $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = n \cdot u_1 + \frac{(n-1)\,n}{2} \cdot d_u$

ergibt sich durch Einsetzen eine quadratische Gleichung in n:

$220000 = n \cdot 150\pi + n^2 \cdot 0{,}2\pi - n \cdot 0{,}2\pi.$

Sie hat die positive Lösung $n \approx 326$.

b) Aus $r_n = r_1 + (n-1)\,d_r$

ergibt sich durch Einsetzen

$2r_{326} = 2 \cdot (75 + 325 \cdot 0{,}2) = 280.$

Ergebnis:

Es ergeben sich 326 Lagen, und die Rolle hat schließlich einen Durchmesser von 28 cm Länge.

In den Formeln für die geometrischen Folgen tritt die Potenz q^{n-1} auf. Demzufolge sind bei Aufgaben, die auf geometrische Folgen führen, oftmals Gleichungen wie $x^5 = 29$ oder $5^x = 29$ zu lösen. Dabei benutzt man die Logarithmengesetze, die wir deshalb zunächst wiederholen.

Im Bereich der reellen Zahlen gilt der *Satz:*

Für jede Zahl $a > 0$ und jede Zahl $b > 0$ mit $b \neq 1$ gibt es genau eine Zahl x, die Lösung der Gleichung $b^x = a$ ist.

Diese Zahl heißt der **Logarithmus von a zur Basis b.** Man schreibt: „$x = \log_b a$“.

Beispiele:

$\log_2 32 = 5$; denn $2^5 = 32$

$\log_2 0{,}25 = -2$; denn $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$\log_9 3 = 0{,}5$; denn $9^{0{,}5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$\log_{10} 29 = x$ mit $1 < x < 2$; denn $10^1 = 10 < 29 < 100 = 10^2$

In diesem Fall ist x eine Irrationalzahl.

Für das Arbeiten mit Logarithmen gelten folgende *Gesetze:*

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

$$\log_b (a : c) = \log_b a - \log_b c$$

$$\log_b a^c = c \cdot \log_b a$$

Meist rechnet man mit Logarithmen zur Basis 10, das heißt mit den *dekadischen Logarithmen* (Symbol „lg“).

Sie können mit Hilfe der Logarithmentafel ermittelt werden, der (rationale Näherungswerte für) die *Mantissen* zu entnehmen sind:

Mantisse von lg 5 – 0,6990 (= lg 5);
Mantisse von lg 29 – 0,4624 (= lg 2,9).

Der Logarithmus von 29 ergibt sich durch Hinzufügen der *Kennzahl* 1 als Exponent der nächstkleineren Zehnerpotenz ($10^1 < 29 < 10^2$):

$$\lg 29 = \lg(2{,}9 \cdot 10) = \lg 2{,}9 + \lg 10 = 0{,}4624 + 1 = 1{,}4624.$$

Bei der Zahl 5 (*Numerus* 5) stimmen Logarithmus und Mantisse überein, die Kennzahl ist 0. Dieselbe Mantisse wie lg 5 bzw. lg 29 haben auch

$$\lg 500 = \lg(5 \cdot 100) = \lg 5 + \lg 100 = 0{,}6990 + 2 = 2{,}6990;$$

$$\lg 0{,}29 = \lg(2{,}9 : 10) = \lg 2{,}9 - \lg 10 = 0{,}4624 - 1.$$

Oftmals genügt auch die Genauigkeit, die der Rechenstab bietet. Dann kann man zu einem vorgegebenen Numerus den zugehörigen Logarithmus (bzw. umgekehrt zu einem Logarithmus den zugehörigen Numerus) auch mit Hilfe der *Mantissenskale* „L“ des Rechenstabes ermitteln, wie dies im Bild A 16 für $\lg 256 = 2{,}408$ angedeutet ist.

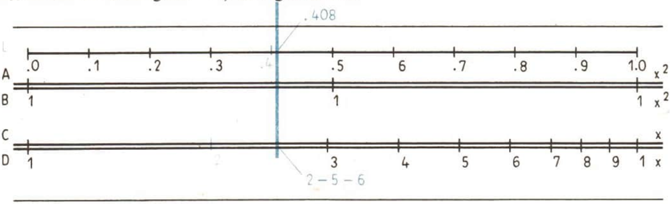


Bild A16

22 Wir lösen nun die beiden Gleichungen $x^5 = 29$ und $5^x = 29$.

Ein Überschlag ergibt für

$x^5 = 29$	$5^x = 29$
$x \approx 2$, aber $x < 2$,	$x \approx 2$, aber $x > 2$,
denn $2^4 = 16 < 29 < 32 = 2^5$	denn $5^2 = 25 < 29 < 125 = 5^3$

Beide Überlegungen beruhen auf dem monotonen Wachsen der Funktion $f(x) = x^5$ bzw. $g(x) = 5^x$.

Für das Lösen begnügen wir uns mit Rechenstabgenauigkeit:

$x^5 = 29$	$5^x = 29$
$\lg x^5 = \lg 29$	$\lg 5^x = \lg 29$
$5 \cdot \lg x = 1{,}462$	$x \cdot \lg 5 = \lg 29$
$\lg x = 1{,}462 : 5$	$x = \lg 29 : \lg 5$
$\lg x = 0{,}292$	$x = 1{,}462 : 0{,}699$
$x = 1{,}96$	$x = 2{,}09$

Ist in der Technik ein Gegenstand in mehreren Größen herzustellen, so kann man eine Größenabstufung nach einer arithmetischen oder einer geometrischen Folge wählen. Dabei kann es sich beispielsweise um Rohre, Stäbe, Platten und dergleichen handeln, und die Größenabstufung kann Längen (Höhen, Durchmesser), aber auch Flächeninhalte (Querschnitte) oder gar Volumina betreffen.

■ 23 Zwischen den Längen 15 mm und 210 mm sind weitere vier Längen so einzuschalten, daß eine geometrische Stufung erreicht wird.

Lösung:

Unter Verzicht auf die Angabe von Einheiten können wir die Aufgabe auch so formulieren:
Bei einer geometrischen Folge (l_n) sei $l_1 = 15$ und $l_6 = 210$.
Zu ermitteln sind l_2 bis l_5.
Bezeichnen wir das erste Glied der Folge mit l und den Quotienten mit q, so können wir schreiben:

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
l	lq	lq^2	lq^3	lq^4	lq^5

Wegen $l_1 = 15$ und $l_6 = 210$ gilt also

$$15q^5 = 210$$

$$q^5 = 14$$

Die für die Ermittlung der Folgenglieder notwendige Berechnung von q kann unter Ausnutzung von Logarithmengesetzen geschehen:

$$5 \lg q = \lg 14$$

$$5 \lg q = 1{,}146$$

$$\lg q = 0{,}229$$

$$q = 1{,}69 \approx 1{,}7$$

Dies liefert die Folgenglieder l_2 bis l_5:

$l_2 = 15 \cdot 1{,}7 = 25{,}5$; $\quad l_3 = 15 \cdot 1{,}7^2 = 43{,}4$;
$l_4 = 15 \cdot 1{,}7^3 = 73{,}7$; $\quad l_5 = 15 \cdot 1{,}7^4 = 125{,}3$.

Ergebnis:

Die gesuchte geometrische Stufung ist:
15 mm; 25,5 mm; 43,3 mm; 73,7 mm; 125,3 mm; 210 mm.

● 24 Jemand rechnet zur Ermittlung von q folgendermaßen:

$$5 \lg q = \lg 14$$

$$\lg q = \lg 2{,}8 \quad \text{usw.}$$

Analysieren Sie den Fehler!

Geometrische Folgen bilden in Form der sogenannten Vorzugs- oder Normzahlen die Grundlage für die Typisierung von Hauptabmessungen in der Technik und ermöglichen die Wahl zweckmäßiger Größenstufungen bei Drehzahlen, Vorschüben, Gewindedurchmessern und dergleichen mehr. Bei konsequenter Verwendung werden die wirtschaftliche Fertigung durch Reduzierung von Lehren, Werkzeugen und Vorrichtungen gefördert und das Auswechseln von Einzelteilen erleichtert.

In dem folgenden Beispiel wird das Anfangsglied einer geometrischen Folge mit a_0 bezeichnet, um deutlich zu machen, wie dann zu verfahren ist. Man beachte insbesondere, daß a_n dann nicht das n-te, sondern das $(n + 1)$-te Glied der Folge ist.

■ 24 Für welche natürliche Zahl n gilt in der monoton fallenden geometrischen Folge (a_n) mit $a_0 = 4$ und $q = \frac{19}{20}$ erstmalig $a_n < 1{,}5$?

Lösung:
Eine explizite Zuordnungsvorschrift für (a_n) lautet

$a_n = 4 \cdot 0{,}95^n \quad (n \in N)$.

Zu lösen ist die Ungleichung

$(*)\ 4 \cdot 0{,}95^n < 1{,}5$.

Folgende Umformungen führen zum Ziel:

$$0{,}95^n < 0{,}375$$

$$n \cdot \lg 0{,}95 < \lg 0{,}375$$

$$n > \frac{\lg 0{,}375}{\lg 0{,}95} = \frac{0{,}5740 - 1}{0{,}9777 - 1} = \frac{0{,}4260}{0{,}0223}$$

$$n > 19{,}1$$

Nach dieser (näherungsweisen) Lösung der Ungleichung (*) ist zu vermuten, daß $a_{19} > 1{,}5$, aber $a_{20} < 1{,}5$ gilt.

● 25 **a)** Überprüfen Sie die im Beispiel A 24 ausgesprochene Vermutung, korrigieren Sie gegebenenfalls, und beantworten Sie die in diesem Beispiel gestellte Frage!
b) Woraus erklärt sich beim Lösen der Ungleichung (*) im Beispiel A 24 der Wechsel vom Kleiner- zum Größerzeichen?

Aufgaben

1. Eine endliche arithmetische Folge (a_n) habe die Differenz -2 und als letztes Glied die Zahl 17.
a) Wie viele Glieder hat die Folge, wenn die Summe aller Glieder 897 beträgt?
b) Das wievielte Glied ist 43, wenn die Folge 50 Glieder hat?

2. Berechnen Sie $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ einer arithmetischen Folge

(a_k) mit $\sum\limits_{k=1}^{9} a_k = 92{,}25$ und $\sum\limits_{k=1}^{15} a_k = 210!$

3. In einer geometrischen Folge (a_n) sei $\frac{64}{243}$ das 7. Glied und $q = -\frac{2}{3}$.
a) Wie lautet das Anfangsglied?
b) Berechnen Sie die Partialsummen s_6 und s_7!
c) Welches Glied ist erstmalig dem Betrage nach kleiner als 0,01, das heißt, für welches n gilt $|a_n| < 0{,}01 \leqq |a_{n-1}|$?

4. Eine geometrische Folge (a_n) habe die Glieder $a_1 = 7$ und $a_6 = 2{,}29$.
a) Wie groß ist der Quotient dieser Folge?
b) Welches Glied ist erstmalig kleiner als 1?
c) Wie viele Glieder sind zu summieren, wenn die Summe 28,0 betragen soll?

5. Messungen ergeben, daß die Temperatur zum Erdinnern hin um etwa 3 °C je 100 m Tiefe zunimmt, wobei in unseren Breiten eine Temperatur von 10 °C in 25 m Tiefe zugrunde zu legen ist.
a) Welche Temperatur herrscht in 2300 m Tiefe?
b) In welcher Tiefe werden 100 °C erreicht?
c) Ein Thermalbad in Karlovy Vary wird von einer Quelle von 72 °C gespeist. Aus welcher Tiefe kommt sie?

6. Bei einer Drehmaschine ist die niedrigste Drehzahl 20 min^{-1} und die höchste 100 min^{-1}. Dazwischen liegen weitere vier Drehzahlen, die geometrisch abgestuft sind. Ermitteln Sie die gesamte Folge der Drehzahlen!

7. Die Vorzugszahlenreihen R 5, R 10, R 20 und R 40 (↗ Seite 46) sind geometrische Folgen mit $a_0 = 1$ und a_5 bzw. a_{10} bzw. a_{20} bzw. $a_{40} = 10$.
 a) Ermitteln Sie die Quotienten q und die Glieder a_1 bis a_4 für R 5 bzw. a_1 bis a_9 für R 10 (Runden auf drei gültige Ziffern)!
 b) Eine verbindliche Rundwertreihe für R 10 lautet
 1; 1,2; 1,6; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10.
 Vergleichen Sie mit den genauen Werten! Ermitteln Sie dazu die maximale prozentuale Abweichung!

8. Ein Guthaben von 4000,00 M verbleibt 10 Jahre auf einem Sparkonto und wird mit 3,25% verzinst. Wie groß ist der gesamte Zinsbetrag, wenn
 a) die Zinsen jährlich abgehoben werden;
 b) die Zinsen jeweils nach Ablauf eines Jahres dem Guthaben zur weiteren Verzinsung zugeschlagen werden?
 Stellen Sie für beide Fälle die Zinsen in Abhängigkeit von der Zeit in ein und demselben Koordinatensystem dar!

9. Ein Waldbestand wird auf 2 Millionen m^3, sein jährlicher Zuwachs auf 4% geschätzt.
 a) Wie groß ist gemäß dieser Schätzung der Holzbestand nach 10 Jahren, wenn in der Zwischenzeit kein Einschlag erfolgt?
 b) Wie groß ist der Holzbestand nach 15 Jahren, wenn jährlich 30000 m^3 eingeschlagen werden?
 c) Wie viele Kubikmeter Holz könnten jährlich eingeschlagen werden, wenn damit der Wald nach 12 Jahren völlig abgeholzt sein soll?

Zusammenfassung

Prinzip der vollständigen Induktion

Eine für alle natürlichen Zahlen formulierte Aussage ist wahr, wenn
- die Aussage für die natürliche Zahl 0 gilt und
- aus der (angenommenen) Gültigkeit der Aussage für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl k die Gültigkeit für deren Nachfolger $k + 1$ folgt.

Eine etwas allgemeinere Formulierung mit Hilfe von Symbolen:
Die Aussage
„Für alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$ gilt $\mathbf{H}(n)$"
ist wahr, wenn
1. $\mathbf{H}(n_0)$ wahr ist;
2. für beliebiges $n = k$ aus der Gültigkeit von $\mathbf{H}(k)$ die von $\mathbf{H}(k + 1)$ folgt.

Ist speziell $n_0 = 0$, so gehören alle natürlichen Zahlen zum Gültigkeitsbereich von $\mathbf{H}(n)$.

Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Das Verfahren stützt sich auf das Prinzip der vollständigen Induktion. Es besteht in dem Nachweis, daß für die betrachtete Aussage die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind.
Ein derartiger Beweis vollzieht sich in folgenden Schritten:
Induktionsanfang:
Überprüfen, ob $\mathbf{H}(0)$ wahr ist (oder $\mathbf{H}(n_0)$ mit $n_0 = 1$ oder $n_0 = 2, \ldots$)
Induktionsschritt:
- Formulieren der *Induktionsvoraussetzung* $\mathbf{H}(k)$
- Formulieren der *Induktionsbehauptung* $\mathbf{H}(k+1)$
- Führen des *Induktionsbeweises*, indem unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung die Gültigkeit der Induktionsbehauptung gezeigt wird

Möglichkeiten für den Induktionsbeweis:
- Bei Gleichungen Umformen der linken Seite von $\mathbf{H}(k+1)$ unter Benutzung von $\mathbf{H}(k)$ so, daß sich schließlich die rechte Seite von $\mathbf{H}(k+1)$ ergibt
- Umformen von $\mathbf{H}(k)$ unter Anwenden bekannter Gesetzmäßigkeiten so, daß sich $\mathbf{H}(k+1)$ ergibt

Summenformel für arithmetische Folgen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d) = \begin{cases} na + \dfrac{n(n-1)\,d}{2} \\ \dfrac{n}{2}(a + a_n) \end{cases}$$

Dabei ist das n-te Folgenglied $a_n = a + (n-1)\,d$.
Spezielle arithmetische Folgen
- Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Summe der ersten n ungeraden Zahlen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

- Summe der ersten n (von 0 verschiedenen) geraden Zahlen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

Summenformel für geometrische Folgen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = \begin{cases} a\dfrac{q^n - 1}{q-1} = a\dfrac{1-q^n}{1-q} \\ \dfrac{a_n q - a}{q-1} = \dfrac{a - a_n q}{1-q} \end{cases} \quad \text{für} \quad q \neq 1$$

$$s_n = n \cdot a \quad \text{für} \quad q = 1$$

Dabei ist das n-te Folgenglied $a_n = aq^{n-1}$.

Spezielle geometrische Folgen

– Summe der ersten n Zweierpotenzen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

– Summe der ersten n Potenzen einer reellen Zahl z

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

Weitere Summenformeln

– $(a_k) = \left(\frac{1}{1 \cdot 2}; \frac{1}{2 \cdot 3}; \frac{1}{3 \cdot 4}; \ldots; \frac{1}{k(k+1)}; \ldots\right)$ $(k > 0)$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

– Summe der ersten n (von 0 verschiedenen) Quadratzahlen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Weitere Aufgaben zu den Lerneinheiten 2 bis 8

1. Sind $1; 3; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{7}{4}$ und $\frac{7}{5}$ Glieder der nachstehenden Folgen? Wenn ja, welche?

   a) $\left(\frac{2k-1}{5}\right)$ b) $\left(\frac{7}{k}\right)$ c) $\left(\frac{3k-2}{k+1}\right)$

2. Ermitteln Sie die jeweils ersten fünf Glieder nachstehender Folgen!

   a) $\left(1 - \frac{1}{10^{k-1}}\right)$ b) $\left(\cos k\frac{\pi}{2}\right)$, $k \geqq 0$ c) $(\lg 10^k)$, $k \geqq 0$

3.* Versuchen Sie, explizite und rekursive Zuordnungsvorschriften zu geben!

   a) $\left(0; 4; \frac{8}{3}; \frac{12}{5}; \ldots\right)$ b) $\left(1; 1; \frac{3}{4}; \frac{4}{8}; \frac{5}{16}; \ldots\right)$

   c) $(2; 6; 12; 20; 30; \ldots)$ d) $\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}; \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}; \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}; \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7}; \ldots\right)$

4. Setzen Sie um jeweils vier Glieder fort, so daß geometrische Folgen (a_k) entstehen!

   a) $\left(\frac{2}{3}; 1; \frac{3}{2}; \ldots\right)$ b) $(-1; 0{,}8; \ldots)$ c) $(\sqrt{3}; 3; \ldots)$

   Stellen Sie die Folgen für $0 < k < 8$ graphisch dar!
   In welcher dieser Folgen wird 1000 überschritten, wenn man sie weit genug fortsetzt? Geben Sie in diesem Falle k mit $a_{k-1} \leqq 1000 < a_k$ an!

5. Wie viele Glieder haben die nachstehenden endlichen geometrischen Folgen?

a) $(1;\ 5;\ 25;\ \ldots;\ 15625)$ b) $\left(81;\ 54;\ 36;\ \ldots;\ 3\,\frac{13}{81}\right)$ c) $(2;\ 6;\ 18;\ \ldots;\ 4374)$

6.* Für gewisse Folgen (a_k) kann die Untersuchung auf Monotonie auch durch Betrachtung des Quotienten $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ erfolgen.
Erläutern Sie das näher an Hand der Beispiele
$(a_k) = \left(\frac{k+1}{2k-1}\right)$ und $(b_k) = \left(\frac{1-k}{2k-1}\right)$!

7. Beweisen Sie, daß die Summe der Kuben der natürlichen Zahlen von 1 bis n gleich dem Quadrat der Summe dieser natürlichen Zahlen ist!

8. Ermitteln Sie eine Summenformel für die Summe der Quadrate der ungeraden Zahlen, und beweisen Sie diese Formel!

9. Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$s_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\,n^2 = (-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

10.* Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß die folgende Gleichung für alle natürlichen $n \geqq 1$ gilt!

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$$

11. Welche Summe ergeben alle durch 11 teilbaren Zahlen x mit $0 < x < 1000$?

12. Berechnen Sie $\sum\limits_{k=17}^{33} a_k$ für die arithmetische Folge $(a_k) = (-3{,}5;\ -2{,}8;\ \ldots)$!

13. Eine geometrische Folge (a_n) habe das Anfangsglied $a_1 = 2$ und den Quotienten $q = 1{,}25$.
a) Berechnen Sie das 4. Glied und die Summe der ersten 4 Glieder!
b) Welchen Index hat das Glied, das erstmalig größer als 20 ist?

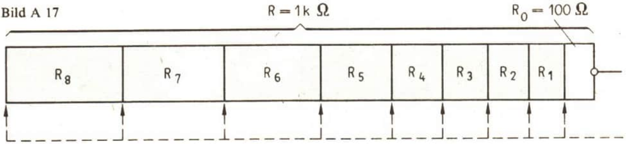
14.* a) Wenn die reellen Zahlen a, b, c eine (dreigliedrige) arithmetische Folge bilden, dann gilt

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a-b)^2 + (a+b+c)^2.$$

Beweisen Sie diesen Sachverhalt!
b) Gilt auch die Umkehrung?

15. Ein gestufter Regelwiderstand ($R = 1\ \text{k}\Omega$) ist so beschaffen, daß in jeder seiner 8 kleineren Stufen der jeweils ausgeschaltete Widerstand proportional dem vorher vorhandenen ist. Der Endwiderstand beträgt $R_0 = 100\ \Omega$. Wie groß sind die Teilwiderstände R_1 bis R_8 (↗ Bild A 17)?

Bild A 17



16. Je nach konkreter Situation werden bei einer Tablettenkur unterschiedliche Tagesdosen verordnet, zum Beispiel derart: Am 1. Tag sind 3 Tabletten zu nehmen. Dann ist täglich um 2 Tabletten bis zur Maximaldosis von 11 Tabletten zu steigern. Insgesamt soll die Kur 21 Tage dauern, wobei das Abklingen am Ende umgekehrt wie der Beginn erfolgt. Wie viele Tage lang ist die Maximaldosis zu nehmen, und wie viele Tabletten werden insgesamt für die Kur benötigt?

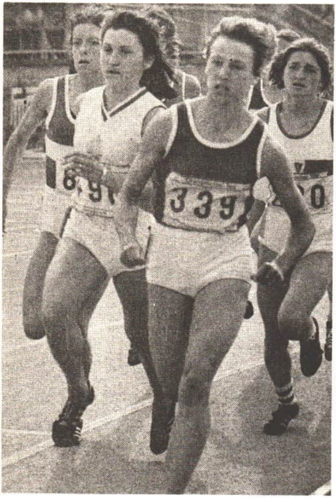
17. Nach TGL 0-476 genügen die Papierformate der A-Reihe den folgenden Bedingungen:
   1) Das Format A_0 ist ein Rechteck von 1 m² Flächeninhalt, dessen Seitenlängen a_0 und b_0 sich wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten.
   2) Alle Formate A_k ($k = 1; \ldots; 10$) entstehen aus A_{k-1} durch Halbieren der längeren Rechteckseite b_{k-1}.

   Untersuchen Sie die Zahlenfolgen (a_k) und (b_k), $k \geqq 0$!

Kombinatorik

Zur Einleitung betrachten wir folgende drei Fragen:
Bei einem Laufwettbewerb eines Leichtathletikwettkampfes, bei dem drei Medaillen (Gold, Silber, Bronze) vergeben werden, haben sich sechs Läuferinnen für den Endlauf qualifiziert.

1. Wie viele verschiedene Möglichkeiten des Einlaufs gibt es? Oder anders gefragt: Auf wie viele verschiedene Arten können die sechs Läuferinnen die Plätze 1 bis 6 belegen?
2. Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Vergabe von Gold-, Silber- und Bronzemedaille gibt es? Oder anders gefragt: Auf wie viele verschiedene Arten können die Plätze 1 bis 3 durch drei der sechs Läuferinnen belegt werden?



3. Wie viele verschiedene Möglichkeiten von Medaillenträgern überhaupt gibt es? Oder anders gefragt: Auf wie viele verschiedene Arten können drei der sechs Läuferinnen irgendeine Medaille erhalten, also ohne Berücksichtigung von Gold, Silber oder Bronze?

Mit solchen und ähnlichen Problemen unterschiedlicher Möglichkeiten der *Anordnung* und *Auswahl* beschäftigt sich die **Kombinatorik**. Aus der Fülle der dabei auftretenden Fragen werden wir in den Lerneinheiten 9 bis 11 hauptsächlich nur solche behandeln, die den genannten drei Fragen nach gewissen Anzahlen gleichartig sind. Dabei werden wir auch das Beweisverfahren der vollständigen Induktion anwenden.

9 Permutationen

Von gleicher Art wie Frage 1. sind die beiden folgenden:

Wie viele Anordnungsmöglichkeiten bestehen für die Buchstaben a, b, e, r?

Wie viele Möglichkeiten der Verteilung gibt es, wenn 8 Personen auf den 8 Sitzen eines D-Zug-Abteils Platz nehmen?

Allgemein kann man alle drei Fragen dieser Art so formulieren:

Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten der Anordnung gibt es für n Objekte (zum Beispiel 6 Läuferinnen oder 4 Buchstaben oder 8 Reisende), wenn dabei jedes der Objekte genau einmal auftreten soll?

Durch die unterschiedliche Weise der Anordnung entstehen aus einer zunächst ungeordneten Menge mehrere *geordnete Mengen*, die als voneinander verschieden anzusehen sind. Kennzeichnend für geordnete Mengen ist, daß

- für ihre Elemente eine Beziehung „... steht vor ...“ erklärt ist,
- dadurch für je zwei verschiedene Elemente a und b entweder „a vor b“ oder „b vor a“ gilt und
- außerdem gilt: Wenn a vor b und b vor c steht, so steht auch a vor c.

Endliche geordnete Mengen haben auf diese Weise genau ein erstes und genau ein letztes Element. Das uns bereits lange bekannte *geordnete Paar* ist ein Spezialfall geordneter Mengen; bekanntlich gilt für $a \neq b$

$[a; b] \neq [b; a]$, wohl aber $\{a; b\} = \{b; a\}$.

● 26 Stellen Sie aus der Menge der vier Buchstaben a, b, e, r sämtliche verschiedenen geordneten Mengen her! Schreiben Sie sie in der Reihenfolge nieder, in der sie auch in einem Wörterbuch stehen würden!

Die lexikographische Anordnung, die im Auftrag A 26 benutzt wurde, ist ein Mittel systematischen und übersichtlichen Arbeitens beim Finden und Angeben aller Anordnungen. Man nutzt dabei eine bereits bestehende Reihenfolge der Elemente, zum Beispiel das Alphabet bei Buchstaben und die Kleinerbeziehung bei Zahlen.

Jede Anordnung der n Elemente einer endlichen Menge nennt man eine **Permutation**[1]) dieser n Elemente.

Im Auftrag A 26 waren demnach alle Permutationen der Menge {a; b; e; r} zu bilden, und „aber“, „rabe“, „baer“ sind drei verschiedene der insgesamt 24 Permutationen.

Offensichtlich ist die Anzahl der Permutationen von n Elementen nicht davon abhängig, ob es sich um Personen, Buchstaben, Ziffern oder andere Objekte handelt, sondern allein von der Zahl n. Wenn wir jetzt danach suchen, *wie* die Anzahl der Permutationen von der Anzahl der Elemente abhängt, brauchen wir deren besondere Beschaffenheit nicht zu berücksichtigen.

Wir betrachten zunächst ein einfaches Beispiel, werden daraus eine Gesetzmäßigkeit für die

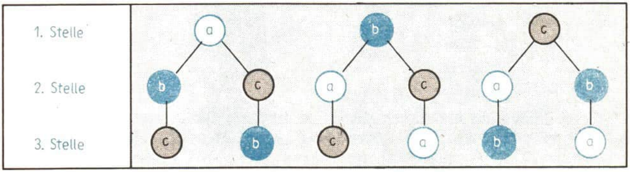


Bild A 18

[1]) permutare (lat.) – vertauschen

Anzahl der Permutationen von n **Elementen**, bezeichnet mit „P_n", vermuten und dann diese Vermutung beweisen.

■ 25 Zu bestimmen ist P_3, also die Anzahl der Permutationen von drei Elementen; sie seien mit a, b, c bezeichnet.

Lösung:

Für die Besetzung der ersten Stelle gibt es drei Möglichkeiten, nämlich a, b und c. In jedem dieser Fälle bleiben dann zwei Möglichkeiten für die zweite Stelle. Für die erste *und* zweite Stelle gibt es demnach $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten. Die dritte (letzte) Stelle ist dann jedesmal automatisch festgelegt (↗ Bild A 18 auf Seite 53).
Demnach existieren insgesamt sechs Permutationen: abc; acb; bac; bca; cab; cba;
$P_3 = 6$.

Fügt man den drei Elementen a, b, c ein viertes Element d hinzu und fragt nach P_4, so kann man folgendermaßen überlegen:
Zu *jeder* der 6 Permutationen aus drei Elementen kann d an vier verschiedenen Stellen hinzugefügt werden. So ergeben sich

aus	abc	acb	bac	bca	cab	cba
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
die Permutationen	**d**abc	**d**acb	**d**bac	**d**bca	**d**cab	**d**cba
	a**d**bc	a**d**cb	b**d**ac	b**d**ca	c**d**ab	c**d**ba
	ab**d**c	ac**d**b	ba**d**c	bc**d**a	ca**d**b	cb**d**a
	abc**d**	acb**d**	bac**d**	bca**d**	cab**d**	cba**d**

Demnach ist $P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 6 = 24$.

● 27 a) Bestimmen Sie P_5, und erläutern Sie Ihre Lösung!
b) Beantworten Sie die Frage nach den Einlaufmöglichkeiten für die sechs Läuferinnen aus Frage 1. auf Seite 52!

Verallgemeinert man die Ergebnisse $P_4 = 4 \cdot P_3$ und $P_5 = 5 \cdot P_4$, so erhält man die Formel

$$P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

Will man sie zur Bestimmung von P_n benutzen, so muß P_{n-1} bekannt sein. Es handelt sich also um eine „Rekursionsformel", wie wir sie von rekursiven Zuordnungsvorschriften für Folgen kennen. Sie führt uns jedoch leicht zu einer „expliziten" Formel für die Anzahl P_n der Permutationen von n Elementen. Dazu beachten wir, daß man ein Element nur auf eine einzige Weise und zwei Elemente auf genau zwei verschiedene Weisen anordnen kann. So ergibt sich

$$\begin{array}{llll}
P_1 = 1 & & & P_1 = 1 \\
P_2 = 2 \cdot 1 & = & 2 & P_2 = 1 \cdot 2 \\
P_3 = 3 \cdot 2 & = & 6 & P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \\
P_4 = 4 \cdot 6 & = & 24 & P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
P_5 = 5 \cdot 24 & = & 120 & P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\
\dots\dots\dots & & & \dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\,n$$

Da dieses Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n in der Kombinatorik häufig auftritt, hat man die abkürzende Schreib- und Sprechweise „$n!$" (Lies „n – Fakultät") eingeführt.

$$n! =_{\mathrm{Df}} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Zusätzlich wird definiert:

$$1! =_{\mathrm{Df}} 1 \quad \text{und} \quad 0! =_{\mathrm{Df}} 1.$$

Unsere Vermutung über die Anzahl P_n der Permutationen von n Elementen nimmt damit die folgende Form an.

▷ 4 $\boxed{P_n = n!}$

Wir *beweisen* die Gültigkeit dieser Formel durch vollständige Induktion.

Voraussetzung: $n \in N$, $n > 0$; M sei eine Menge von n Elementen, P_n die Anzahl der Permutationen dieser n Elemente.

Behauptung: $P_n = n!$

Beweis:

1. Induktionsanfang:

1 Element hat nur eine Permutation; also gilt $P_1 = 1$.
Gemäß Definition gilt aber auch $1! = 1$. Also ist $P_1 = 1!$.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

Wir nehmen an, daß $P_k = k!$ für beliebiges, aber festes k gilt.

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch $P_{k+1} = (k+1)!$.

Induktionsbeweis:

Wir überlegen wie bei 4 Elementen (↗ Seite 54):
$k + 1$ Elemente bedeutet 1 Element mehr als k Elemente. Dieses eine Element kann in *jeder* der Permutationen von k Elementen vor jedes der k Elemente und an das Ende gesetzt werden, also an $k + 1$ Stellen. Demzufolge ist

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k \cdot (k+1) \\ &= k! \cdot (k+1) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= (k+1)! && \text{(nach Erklärung von } n!\text{)} \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, daß n Elemente genau $n!$ Permutationen haben.

● 28 Beantworten Sie die auf Seite 53 gestellte Frage nach der Anzahl der Platzverteilungen für die 8 Reisenden! Wie ändern sich Problem und Antwort, wenn weniger als 8 Personen im Abteil sind?

Aufgaben

1. Wie groß ist die Summe aller dreistelligen Zahlen, die man als Permutationen der Grundziffern 2, 4, 6 schreiben kann?

2. Wie viele Permutationen lassen sich aus den Grundziffern 1, 2, 3, 4 bilden?
Denken Sie sich diese Permutationen gemäß $1 < 2 < 3 < 4$ lexikographisch geordnet! Wie viele davon stehen dann
a) vor 2134; b) zwischen 2134 und 3214; c) nach 3214?

3. Wie viele Permutationen der Elemente u, v, w, x, y, z beginnen
a) mit w; b) mit xy; c) mit vzxu?

4. Errechnen Sie die folgenden Terme für $n = 4$ auf möglichst bequeme Weise!
a) $2n!$ b) $(2n)!$ c) $n \cdot n!$ d) $\frac{n!}{n}$ e) $\frac{n!}{(n+1)!}$ f) $\frac{n!}{n!+1}$

5. Formen Sie die folgenden Terme um, indem Sie Brüche beseitigen!

a) $\frac{(n+1)!}{n!}$ b) $\frac{(n+1)!}{n+1}$ c) $\frac{(n-3)!}{(n-2)!}$ d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ e) $\frac{n!}{n-1}$

6. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $x! = 7(x-1)!$ 7 b) $x! - 120 = 0$ 6 c) $x(x-1)! = x!$ alle d) $x! = 3x!$ —

7. 7 Personen wollen von Tag zu Tag ihre Sitzordnung auf 7 Stühlen ändern, beginnend mit dem 1. 1. 1980. An welchem Tage muß sich spätestens eine bereits vorher dagewesene Sitzordnung wiederholen? Dabei sollen zwei Sitzordnungen A und B als verschieden gelten, wenn bei A mindestens eine Person auf einem anderen Platz sitzt als bei B.

10 Variationen und Kombinationen

Den Fragen 2. und 3. auf Seite 52 ist gemeinsam, daß nach einer Anzahl von Teilmengen gefragt wird, und zwar nach denjenigen, die genau 3 von den 6 Läuferinnen enthalten. Die beiden Fragen unterscheiden sich aber auch wesentlich voneinander:

In *Frage 2.* handelt es sich um geordnete Teilmengen.
Von gleicher Art ist die Frage:
„Wie viele geordnete Paare kann man aus den 26 Buchstaben des Alphabets bilden?"

In *Frage 3.* ist die Anordnung der Elemente ohne Bedeutung.
Von gleicher Art ist die Frage:
„Auf wie viele Arten lassen sich in der Figur ::: 4 der 6 Punkte kennzeichnen?"

In jedem dieser Fälle liegt eine Menge M mit n Elementen vor, und es soll die Anzahl derjenigen Teilmengen (geordnet oder nicht geordnet) ermittelt werden, die genau k verschiedene Elemente haben. Man bezeichnet jede derartige

geordnete Teilmenge als eine
Variation
von n Elementen zur k-ten Klasse,
die Anzahl mit V_n^k.

Teilmenge als eine
Kombination
von n Elementen zur k-ten Klasse,
die Anzahl mit C_n^k.

In den vier Beispielen werden also die Anzahlen

V_6^3, V_{26}^2 C_6^3, C_6^4

gesucht. Da beispielsweise ABC und ACB (die 6 Läuferinnen seien mit A, B, C, D, E, F bezeichnet) zwei verschiedene Variationen, aber ein und dieselbe Kombination von 6 Elementen zur 3. Klasse sind, gilt gewiß

$$C_6^3 < V_6^3.$$

Wir überlegen zunächst, wie die Anzahl V_n^k von n und k abhängt, beginnend mit einem Beispiel.

26 Zu $M = \{a, b, c, d, e\}$ sind $V_5^1, V_5^2, \ldots, V_5^5$ zu ermitteln.

Lösung:

Die Variationen zur 1. Klasse sind die 5 Elemente selbst:
$V_5^1 = 5$.

Die Variationen zur 2. Klasse kann man, die lexikographische Anordnung beachtend, hinschreiben und abzählen:

ab, ac, ad, ae, ba, bc, ..., eb, ec, ed,
also insgesamt 20 Variationen.
Allgemein kann man dieses Vorgehen so beschreiben:
Aus jedem der 5 Elemente, das heißt aus jeder Variation von 5 Elementen zur 1. Klasse, entstehen 4 Variationen zur 2. Klasse dadurch, daß man jeweils eines der verbleibenden 4 Elemente anfügt. Also ist

$$V_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Genauso kann man auch bei V_5^3 überlegen: Aus jeder der 20 Variationen zur 2. Klasse entstehen 3 Variationen zur 3. Klasse, indem man eines der jeweils verbleibenden 3 Elemente anfügt. Auf diese Weise entsteht tatsächlich jede Variation zur 3. Klasse genau einmal, beispielsweise cae nur durch Anfügen von e an ca. Es ist also

$$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Auf die gleiche Weise entstehen aus jeder dieser $5 \cdot 4 \cdot 3$ Variationen 2 Variationen zur 4. Klasse:

$$V_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

Schließlich sind die Variationen von 5 Elementen zur 5. Klasse gerade die Permutationen dieser 5 Elemente:

$$V_5^5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Wir versuchen nun, die fünf Zahlen V_5^k $(1 \leqq k \leqq 5)$ in Abhängigkeit von k darzustellen, und vermerken zunächst: Wie bei den Permutationen handelt es sich um Produkte aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, jedoch von 5 abwärts. An $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ fehlt jeweils ein Anfangsstück, das um so kürzer ist, je größer k ist. Dieses Stück ist gerade $(5 - k)!$. Durch Erweitern kann man also zu einem Term kommen, der sich mittels $5!$ und $(5 - k)!$ ausdrücken läßt.

$$\begin{aligned}
V_5^1 &= 5 &&= \frac{5!}{4!} = \frac{5!}{(5-1)!}\\
V_5^2 &= 5 \cdot 4 &&= \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}\\
V_5^3 &= 5 \cdot 4 \cdot 3 &&= \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}\\
V_5^4 &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 &&= \frac{5!}{1!} = \frac{5!}{(5-4)!}\\
V_5^5 &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 &&= \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{(5-5)!}
\end{aligned}$$

Allgemein:

$$V_5^k = \frac{5!}{(5-k)!} \qquad (1 \leqq k \leqq 5)$$

Daraus läßt sich die folgende allgemeine Formel vermuten.

▷ 5
$$\boxed{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

● 29 Beantworten Sie mit Hilfe der Formel A 5 die Frage nach der Medaillenplazierung für sechs Läuferinnen! Ermitteln Sie auch V_{26}^2!

Die zunächst als Vermutung aufgestellte Formel A 5 soll nun durch vollständige Induktion bewiesen werden, und zwar durch „Induktion über k". Das heißt, n wird beim Beweis als fest angenommen.

Voraussetzung: $n \in N$, $n > 0$, $k \in N$, $0 < k \leqq n$

V_n^k sei die Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse.

Behauptung: $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Beweis:

1. Induktionsanfang:

V_n^1 ist die Anzahl der Elemente selbst, also n. Dies ergibt sich aber auch nach der Formel

$$V_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $V_n^{k-1} = \dfrac{n!}{(n-(k-1))!} = \dfrac{n!}{(n-k+1)!}$

Induktionsbehauptung: $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Induktionsbeweis:

Wir können wie im Beispiel A 26 überlegen:
Es gibt V_n^{k-1} Variationen mit $k-1$ Elementen. Jede davon läßt $(n-k+1)$ Elemente unberücksichtigt. Zu den Variationen mit k Elementen kommt man, wenn man *jeder* Variation mit $k-1$ Elementen jedes der unberücksichtigt gebliebenen $(n-k+1)$ Elemente anfügt. Es gilt also:

$$V_n^k = V_n^{k-1} \cdot (n-k+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)!} \cdot (n-k+1) \qquad \text{(nach Indukationsvoraussetzung)}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k)!\,(n-k+1)} \qquad \text{(Zerlegen des Nenners gemäß}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \begin{aligned}&(n-k+1)!\\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1)\\ &= (n-k)!\,(n-k+1))\end{aligned}$$

● 30 Wie viele Wörter aus drei, vier, fünf Buchstaben des Wortes SALBE kann man bilden? Dabei soll sich in keinem Wort ein Buchstabe wiederholen; außerdem soll jede Buchstabenzusammenstellung als Wort gelten, auch wenn sie in unserer Sprache nicht als Wort existiert.

Die Anzahlen C_n^k der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse sind nun leicht zu ermitteln.
Bei dem Läufer-Beispiel muß man alle Variationen als gleich ansehen, die sich nur in der Reihenfolge der 3 Medaillenträger unterscheiden. Für je 3 Läuferinnen sind das gerade die Permutationen, 3! ist also ihre Anzahl. Um C_6^3 zu finden, muß man also V_6^3 durch 3! dividieren. Das ergibt $C_6^3 = 20$.
Allgemein kann man sagen:
Alle Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse, die in ihren Elementen übereinstimmen, unterscheiden sich nur in der Anordnung dieser k Elemente. Als Kombinationen sind sie demnach als gleich anzusehen. Demzufolge muß V_n^k durch die Anzahl der Anordnungen von k Elementen, das heißt durch die Anzahl $k!$ der Permutationen von k Elementen dividiert werden.

Also gilt:

▷ 6 $$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

● 31 Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, in der Figur : : : vier Punkte anzukreuzen? Überprüfen Sie die errechnete Anzahl durch Aufzeichnen aller Möglichkeiten!

Für das numerische Rechnen ist es zweckmäßig, den Term für C_n^k umzuformen:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k)!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

▷ 7 $$\mathrm{C}_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!}$$

Dieser Term für C_n^k in der Formel A 7 ist zwar schwerer zu merken als der zuerst angegebene, beim Einsetzen von Zahlen für n und k, zum Beispiel

$$\mathrm{C}_9^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!},$$

zeigt sich jedoch: Zähler und Nenner haben die *gleiche Anzahl* von Faktoren, im Nenner von 1 bis k aufwärts, im Zähler k Faktoren von n abwärts.

● 32 Ermitteln Sie C_n^k für $1 \leqq n \leqq 4$ und $1 \leqq k \leqq n$!

Die Anzahlen C_n^k werden auch **Binomialkoeffizienten** genannt. Dieser Name ist folgendermaßen zu erklären:

Die bekannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist ein Spezialfall der Umformung der Potenzen $(a+b)^n$ zu Summen mit möglichst wenigen Summanden. Für $0 \leqq n \leqq 5$ führt das auf

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a + 1b\\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4\\
(a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5
\end{aligned}$$

usw.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Auftrag A 32 zeigt, daß zum Beispiel $\mathrm{C}_4^2 = 6$ der Koeffizient des dritten Summanden in der Summe von $(a+b)^4$ ist. Daher ist es auch zweckmäßig,

$$\mathrm{C}_n^0 = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{C}_0^0 = 1$$

festzusetzen. Allgemein gilt, daß C_n^k der Koeffizient des $(k+1)$-ten Summanden in der Summe von $(a+b)^n$ ist.

● 33 Bestätigen Sie diese Aussage, indem Sie C_5^3 und C_5^4 nach der Formel A 7 errechnen!

Für die Binomialkoeffizienten wird auch noch die Symbolik

$\binom{n}{k}$ (Lies: „n über k")

verwandt. Es gilt also

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1) \ldots (n-(k-1))}{k!}.$$

Aus den Summendarstellungen von $(a + b)^n$ kann man zwei Gesetzmäßigkeiten für die Binomialkoeffizienten entnehmen:

(1) Offensichtlich liegt in den einzelnen Summen eine gewisse Symmetrie vor.

(2) Die Koeffizienten in einer Summe ergeben sich durch Addition benachbarter Koeffizienten in der vorangehenden Summe.

Allgemein lassen sich also folgende Formeln vermuten.

▷ 8

(1) $\mathbf{C_n^k = C_n^{n-k}}$ $\quad \boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

(2) $\mathbf{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}$ $\quad \boldsymbol{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$

Wir wollen (2) in den Formeln A 8 durch einfache Umformungen beweisen.

Voraussetzung: $n \in N,\ k \in N,\ 0 \leqq k < n$

Behauptung: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Beweis:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!\,(k+1)!}$$ (nach Formel A 6)

$$= \frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)\,k!}$$ (Zerlegen zum Erkennen gemeinsamer Faktoren)

$$= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!\,k!(k+1)}$$ (Erweitern und Addieren)

$$= \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!\,(k+1)!}$$ (Ausklammern im Zähler, Zusammenfassen im Nenner)

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(n+1-k-1)!(k+1)!}$$ (Umformen in Zähler und Nenner, orientiert am Ziel, den Quotienten für $\binom{n+1}{k+1}$ herzustellen)

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!(k+1)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

● 34 Zeigen Sie, daß die Gültigkeit von (1) in Formel A 8 für alle natürlichen n und k mit $k \leqq n$ unmittelbar aus Formel A 6 folgt!

▣ 27 Betrachtet werden die Kombinationen der 8 Elemente A, B, C, E, F, G, I, K zur 3. Klasse. Zu berechnen ist

a) die Anzahl n_a aller dieser Kombinationen;

b) die Anzahl n_b derjenigen unter diesen Kombinationen, die keinen Vokal enthalten;

c) die Anzahl n_c derjenigen unter diesen Kombinationen, die den Buchstaben E enthalten.

Lösung:

Zu a): Die gesuchte Anzahl n_a ist gemäß Formel A 7

$$n_a = C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Zu b): Sollen die drei Vokale A, E, I nicht vorkommen, so stehen an Stelle von 8 Elementen nur $8 - 3 = 5$ Elemente für die Kombinationen zur Verfügung. Die gesuchte Anzahl ist also

$$n_b = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Zur Vereinfachung wurde dabei $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ benutzt.

Zu c): Diese Anzahl erhalten wir, indem wir von den $\binom{8}{3}$ Kombinationen, die überhaupt existieren, alle die weglassen, die kein E enthalten. Das sind – nach der gleichen Überlegung wie bei b) – $\binom{7}{3}$ Kombinationen. Die gesuchte Anzahl ist also

$$n_c = \binom{8}{3} - \binom{7}{3} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21.$$

Diese Rechnung wurde durch Formel A 8, Teil (2), vereinfacht.

Denn aus $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$ folgt durch Umformung:

$$\binom{8}{3} - \binom{7}{3} = \binom{7}{2}.$$

Ergebnis:

Unter den 56 Kombinationen der 8 Elemente A, B, C, E, F, G, I, K zur 3. Klasse befinden sich 10 Kombinationen, die keinen Vokal enthalten, und 21 Kombinationen, in denen der Buchstabe E vorkommt.

Aufgaben

1. Welche der Variationen zur 3. Klasse aus den Buchstaben d, e, i, n ergeben ein in unserer Umgangssprache vorhandenes Wort? An welcher Stelle stehen sie bei lexikographischer Anordnung aller Variationen zur 3. Klasse?

2. Berechnen Sie

   a) V_7^4; b) V_{10}^3; c) V_9^4; d) V_{12}^2 !

3. Schreiben Sie als möglichst einfache Terme:

   a) V_n^2; b) V_n^{n-1}; c) V_n^{n-2}; d) V_{n+1}^n !

4. Berechnen Sie die Anzahl der Kombinationen

   a) von 9 Elementen zur 3. Klasse; b) von 7 Elementen zur 4. Klasse;
   c) von 12 Elementen zur 8. Klasse!

5. Wie viele Kombinationen der Elemente a, b, c, d, e, f, g zur 5. Klasse gibt es? Welche davon steht bei lexikographischer Anordnung an 5., 10., 15., 20. Stelle?

6. Berechnen Sie folgende Binomialkoeffizienten!

a) $\binom{7}{2}$ b) $\binom{10}{3}$ c) $\binom{30}{1}$ d) $\binom{8}{8}$ e) $\binom{12}{10}$ f) $\binom{13}{0}$

7. Berechnen Sie möglichst vorteilhaft die folgenden Summen bzw. Differenzen von Binomialkoeffizienten!

a) $\binom{9}{3} + \binom{9}{4}$ b) $\binom{16}{14} + \binom{16}{13}$ c) $\binom{15}{12} + \binom{14}{12}$ d) $\binom{12}{8} - \binom{11}{8}$

8. a) Wie viele Würfe, bei denen die einzelnen Würfel unterschiedliche Augenzahlen zeigen, sind bei zwei Würfeln möglich?
b) Wie viele Würfe sind überhaupt beim Werfen mit zwei Würfeln möglich?

9. Beim „Tele-Lotto 5 aus 35" sind 5 Zahlen von insgesamt 35 auszuwählen. Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Tips jeweils abgegeben werden müssen, um mit Sicherheit im ersten Rang (fünf richtige Zahlen), im zweiten Rang (vier richtige Zahlen) oder im dritten Rang (drei richtige Zahlen) zu gewinnen!

11 Einfache Anwendungen zur Kombinatorik

■ 28 Am Stundenplanbrett einer Schule mit insgesamt 32 Lehrkräften soll jede Lehrkraft durch ein Plättchen gekennzeichnet werden, das entweder einfarbig oder zweigeteilt und zweifarbig oder dreigeteilt und dreifarbig ist.
Kommt man mit fünf verschiedenen Farben aus?

Lösung:

(0) Wir überlegen einzeln die Anzahlen z_1 für einfarbige, z_2 für zweifarbige und z_3 für dreifarbige Plättchen. Für die gesuchte Gesamtanzahl $z = z_1 + z_2 + z_3$ muß gelten:

$z \geqq 32.$

(1) Bei 5 verschiedenen Farben gibt es 5 einfarbige Plättchen:

$z_1 = 5.$

(2) Die Anzahl der möglichen zweifarbigen Plättchen hängt davon ab, ob man die Reihenfolge der Farben mit berücksichtigt oder nicht. Unterscheidet man beispielsweise nicht zwischen „rot-blau" und „blau-rot", so handelt es sich um *Kombinationen* von 5 Elementen zur 2. Klasse. Ihre Anzahl ist also

$$z_{2C} = C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Bei Berücksichtigung der Reihenfolge hingegen liegen *Variationen* von 5 Elementen zur 2. Klasse vor. Also ist die gesuchte Anzahl

$$z_{2V} = V_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

(3) Entsprechend ergibt sich für die Anzahl der möglichen dreifarbigen Plättchen

ohne Beachtung der Reihenfolge	mit Beachtung der Reihenfolge
$z_{3C} = C_5^3 = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10.$	$z_{3V} = V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$

(4) Insgesamt erhält man als Anzahl möglicher Plättchen bei Verwendung von fünf Farben

ohne Beachtung der Reihenfolge	mit Beachtung der Reihenfolge
$z_C = 5 + 10 + 10 = 25.$	$z_V = 5 + 20 + 60 = 85.$

Ergebnis:

5 verschiedene Farben reichen nur aus, wenn man zumindest bei den zweifarbigen Plättchen die Reihenfolge der Farben berücksichtigt. (In diesem Falle sind maximal 35 verschiedene Plättchen möglich. Berücksichtigt man auch bei den dreifarbigen Plättchen die Reihenfolge, so gibt es sogar 85 verschiedene Möglichkeiten.)

● 35 a) Begründen Sie, daß man im Beispiel A 28 mit 6 verschiedenen Farben (unter sonst gleichen Bedingungen) auskommt, ohne die Reihenfolge zu berücksichtigen!

b) Reichen 5 Farben auch, falls man zwar die Reihenfolge nicht berücksichtigt, jedoch auch dreigeteilte Plättchen mit lediglich zwei Farben zuläßt, also etwa mit „blau-rot-blau" (aber nicht „blau-blau-rot" oder „rot-blau-blau") gewisse Wiederholungen von Farben gestattet?

■ 29 Es sind 9 Punkte einer Ebene gegeben, von denen niemals 3 auf ein und derselben Geraden liegen. Wie viele Geraden gibt es, die 2 der 9 Punkte enthalten?

Lösung:

Zwei Punkte A und B legen eine Gerade eindeutig fest. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt ($AB = BA$), handelt es sich um die Frage nach der Anzahl der Kombinationen von 9 Elementen zur 2. Klasse. Mithin ist die gesuchte Anzahl

$$C_9^2 = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 9 \cdot 4 = 36.$$

Ergebnis:

Durch 9 Punkte einer Ebene gibt es 36 Geraden, falls niemals 3 dieser Punkte auf ein und derselben Geraden liegen.

● 36 Überlegen Sie, wie sich die in Beispiel A 29 ermittelte Anzahl reduziert, wenn von den 9 Punkten genau 3 Punkte auf ein und derselben Geraden liegen!

Beim Arbeiten mit Permutationen haben wir in Lerneinheit 9 vorausgesetzt, daß es sich durchweg um voneinander verschiedene Elemente handelt, die permutiert werden. Auch bei Variationen und Kombinationen haben wir nur den Fall betrachtet, daß kein Element mehrfach auftritt. Wir kennen also nur Formeln für Variationen und Kombinationen „ohne Wiederholung". Das allgemein bei kombinatorischen Überlegungen zweckmäßige Vorgehen, sich systematisch eine Übersicht über alle möglichen Fälle zu verschaffen, führt allerdings auch dann zum Ziel, wenn gewisse Wiederholungen auftreten.

■ 30 Im Zugmeldeverkehr der Deutschen Reichsbahn, im Schiffs- und Amateurfunk erfolgt die Nachrichtenübermittlung mit Hilfe von Morsezeichen. Die von Morse[1]) benutzten Zeichen setzen sich aus Punkten und Strichen zusammen, die kurzen beziehungsweise langen Stromimpulsen entsprechen.

Wie viele verschiedene Buchstaben lassen sich als Folgen von jeweils höchstens vier Impulsen darstellen?

[1]) Samuel Morse (1791 bis 1872), nordamerikanischer Maler und Direktor der Akademie der bildenden Künste, erfand 1837 den „Morse-Apparat".

Lösung:

(0) Wir ermitteln einzeln die Anzahlen z_1 bis z_4 der möglichen, entweder aus einem Impuls oder aus zwei oder drei oder vier Impulsen entstehenden Zeichen. Die gesuchte Gesamtanzahl ergibt sich dann als Summe

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4.$$

(1) Für einen Impuls gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder kurz oder lang, das heißt in Zeichen entweder Punkt oder Strich. Demnach ist

$$z_1 = 2.$$

(2) Wenn man diesem Punkt oder Strich erneut einen Punkt oder Strich hinzufügt, entstehen die Zeichen für jeweils zwei Impulse. Also ist

$$z_2 = z_1 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4.$$

(3) Die Anzahl z_3 der möglichen Zeichen für drei Impulse erhalten wir, wenn wir den 4 Zeichen für zwei Impulse jeweils wieder einen Punkt oder Strich anfügen:

$$z_3 = z_2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8.$$

(4) Analog ergibt sich

$$z_4 = z_3 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16.$$

(5) Insgesamt erhalten wir

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30.$$

Ergebnis:

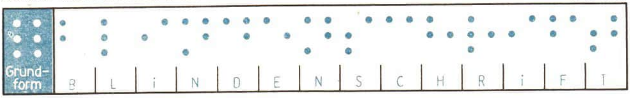
30 verschiedene Buchstaben (also mehr, als das „normale“ Alphabet enthält) lassen sich als Folgen von jeweils höchstens 4 Impulsen darstellen.

Aufgaben

1. Aus einer Produktionsserie wird bei der Qualitätskontrolle eine bestimmte Anzahl von Erzeugnissen ausgewählt und untersucht. Das Ergebnis der Untersuchung dieser einzelnen Stücke gibt Aufschluß über die Qualität der gesamten Serie.
Wie viele verschiedene Stichprobenmöglichkeiten gibt es bei einer Produktionsserie von 100 Stück, wenn bei der Stichprobe 5 Einzelstücke (10 Einzelstücke) untersucht werden sollen?

2. Bei der Blindenschrift nach Braille[1]) besteht die Grundform aus sechs zu einem Rechteck angeordneten Punkten. Jeder Buchstabe wird durch 1 bis 6 Punkte gebildet, von denen jeder an eine Stelle dieses Schemas gesetzt wird (eingedrückt oder erhaben hervortretend) (Bild A 19).
Wie viele verschiedene Zeichen lassen sich auf diese Weise bilden? Erläutern Sie an Beispielen, welche unterschiedlichen Möglichkeiten man im Interesse besserer Unterscheidbarkeit beim Abtasten wohl nicht benutzen wird!

Bild A 19



1) Louis Braille (1809 bis 1852), blinder französischer Blindenlehrer, erfand 1829 die nach ihm benannte Blindenschrift.

3. Auf wie viele verschiedene Arten kann man ein ebenes konvexes Sechseck durch Diagonalen, die einander nicht schneiden, in Dreiecke zerlegen?

4. In wie vielen Punkten höchstens können 5 (8; n) Geraden einander schneiden?

5. a) Wie viele Anschlüsse sind in einem Fernsprechnetz mit fünfstelligen Rufnummern möglich, wenn man die mit 0 und 1 beginnenden Rufnummern für Sonderanschlüsse reserviert und hier nicht berücksichtigt?
b) Wie viele Verbindungen lassen sich dann in diesem Netz herstellen (ohne Berücksichtigung der Sonderanschlüsse)?

6. Die polizeilichen Kennzeichen für Kraftfahrzeuge enthalten in jedem Bezirk der DDR außer einem diesem Bezirk zugewiesenen Kennbuchstaben entweder einen weiteren Buchstaben und eine Vierergruppe der Ziffern 0 bis 9 oder zwei weitere Buchstaben und eine Dreiergruppe solcher Ziffern.
Wie viele verschiedene Kennzeichen können in jedem dieser Fälle zu einem einzigen Kennbuchstaben vergeben werden?

7. Beim „Sportfest-Toto 6 aus 49" sind von 49 Zahlen (Sportarten) 6 beliebige Zahlen anzukreuzen.
a) Auf wie viele verschiedene Weisen kann man einen solchen Tipzettel ausfüllen, das heißt, wie viele Tips muß man abgeben, um mit Sicherheit einen „Sechser" darunter zu haben?
b)* Wie viele Tips genügen, um mit Sicherheit einen „Fünfer mit Zusatzzahl" zu haben?

Zusammenfassung

Abkürzungen zur Formulierung wichtiger Ergebnisse der Kombinatorik:

„n-Fakultät" ($n \in N$)

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} \qquad 0! = 1! = 1$$

Binomialkoeffizient „n über k" $(0 \leqq k \leqq n)$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}}$$

Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

In der Kombinatorik beschäftigt man sich unter anderen mit folgenden Fragen:

(1) Gegeben sei eine Menge mit n verschiedenen Elementen.
Wie viele unterschiedliche Anordnungsmöglichkeiten gibt es für diese n Elemente?
Oder:
Wie viele verschiedene geordnete Mengen lassen sich aus n Objekten bilden?
Jede derartige Anordnung heißt **Permutation von n Elementen.**
Für die Anzahl P_n dieser Permutationen gilt

$$\boxed{P_n = n!}.$$

(2) Gegeben sei eine Menge von n verschiedenen Elementen.
Wie viele verschiedene geordnete Teilmengen mit k Elementen ($1 \leqq k \leqq n$) lassen sich aus den n Elementen bilden?
Jede derartige geordnete Teilmenge heißt **Variation von n Elementen zur k-ten Klasse.**
Für die Anzahl V_n^k dieser Variationen gilt

$$\boxed{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

(3) Gegeben sei eine Menge von n verschiedenen Elementen.
Wie viele unterschiedliche Teilmengen mit k Elementen ($1 \leqq k \leqq n$) lassen sich aus den n Elementen bilden?
(Bei diesen Teilmengen bleibt also die Anordnung der Elemente – im Gegensatz zu den Variationen – unberücksichtigt.)
Jede derartige Teilmenge heißt **Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse.**
Für die Anzahl C_n^k dieser Kombinationen gilt

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

Bei allen drei Fragen und den Formeln zur Berechnung der Anzahlen wird vorausgesetzt, daß keines der Elemente mehr als einmal auftritt. Will man diese Einschränkung besonders betonen, so spricht man auch ausdrücklich von
„Permutationen verschiedener Elemente";
„Variationen ohne Wiederholung";
„Kombinationen ohne Wiederholung".

Übungen und Anwendungen

31 Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$ $(n \geqq 1)$.

Diese Folge und ihre Partialsummenfolge (s_n) mit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ sind auf Monotonie zu untersuchen. Außerdem ist eine explizite Zuordnungsvorschrift für die Folge (s_n) gesucht.

Lösung:

Zur besseren Vorstellung wird zunächst ein Anfangsstück der Folge (a_n) gebildet.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{110}$

Die Folge (a_n) fällt streng monoton, denn für alle n gilt

$$a_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > \frac{1}{(n+3)(n+4)} = a_{n+1} \quad \text{wegen } n+2 < n+4.$$

Da alle Glieder a_n positiv sind, ist die Partialsummenfolge (s_n) streng monoton wachsend. Ein Anfangsstück dieser Folge lautet:

$$s_1 = \frac{1}{12}$$

$$s_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

$$s_3 = \frac{2}{15} + \frac{1}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$s_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{42} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$$

$$s_5 = \frac{4}{21} + \frac{1}{56} = \frac{35}{168} = \frac{5}{24}$$

Aus s_1 bis s_5 läßt sich vermuten, daß s_n als Bruch mit dem Zähler n dargestellt werden kann; auch $s_3 = \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$ fügt sich dem ein.

Die bisherigen Nenner sind Vielfache von 3:

$12 = 3 \cdot 4$; $15 = 3 \cdot 5$; $18 = 3 \cdot 6$; $21 = 3 \cdot 7$; $24 = 3 \cdot 8$.

Die jeweils zweiten Faktoren sind um 3 größer als n.
Es ergibt sich also die *Vermutung*

$$s_n = \frac{n}{3(n+3)}.$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Voraussetzung: n ist eine natürliche Zahl mit $n > 0$.

Behauptung: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{n}{3(n+3)}$

Beweis:

1. Induktionsanfang: Ist erfüllt (siehe oben)

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

Für beliebiges festes n gelte $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{n}{3(n+3)}$.

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch $s_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{n+1}{3(n+4)}$.

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + \frac{1}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n}{3(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n(n+4)+3}{3(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

$$s_{n+1} = \frac{n^2 + 4n + 3}{3(n + 3)(n + 4)}$$
$$= \frac{(n + 1)(n + 3)}{3(n + 3)(n + 4)}$$
$$s_{n+1} = \frac{n + 1}{3(n + 4)}.$$

Diese Umformungen werden durch Vergleich mit der Induktionsbehauptung nahegelegt: Der vorhandene Zähler muß sich zu einem Produkt mit $(n + 1)$ als Faktor umformen lassen.

Damit ist die Induktionsbehauptung und somit – wegen des Induktionsanfangs – die Gültigkeit der Formel für alle natürlichen n bewiesen.

Ergebnis:

Die Folge (a_n) ist streng monoton fallend und ihre Partialsummenfolge

(s_n) mit $s_n = \dfrac{n}{3(n+3)}$ streng monoton wachsend.

32 Das Bild A 20 zeigt eine Rotationskapselpumpe im Schnitt. An den Saugstutzen S wird der Rezipient mit einem Volumen von 3000 cm³ angeschlossen. Durch den exzentrischen Vollzylinder Z können je Drehung 200 cm³ Luft zum Druckstutzen D befördert werden.

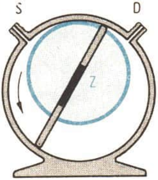
a) Wie groß ist der Druck im Rezipienten nach 5 und nach 10 Umdrehungen, wenn der ursprüngliche Druck 1000 mbar beträgt?

b) Wieviel Minuten muß die Pumpe bei 50 Umdrehungen je Minute laufen, um einen Druck von 10^{-6} mbar zu erreichen?

Lösungsüberlegung:

Nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE[1]) ist (unter der Annahme konstanter Temperatur) das Produkt von Druck p und zugehörigem Volumen V konstant.
Demnach gilt für den Anfangsdruck p_0 und den Druck p_1 nach der ersten Umdrehung

Bild A 20



$$p_1 \cdot 3200 = p_0 \cdot 3000$$
$$p_1 = p_0 \cdot \frac{15}{16}$$

und allgemein

$$p_{k+1} = p_k \cdot \frac{15}{16}.$$

Demzufolge ergibt sich eine geometrische Folge (p_k).

Gegeben: $p_0 = 1000$ mbar
$q = \dfrac{15}{16}$

Gesucht: a) p_5; p_{10}
b) $t = \dfrac{n}{50}$ min mit $p_n = 10^{-6}$ mbar

Lösung:

a) Aus $p_n = p_0 \cdot q^n$ ergibt sich durch Einsetzen

$$p_5 = 1000 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^5 \text{ mbar} \qquad p_{10} = 1000 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{10} \text{ mbar}$$
$$p_5 = 724 \text{ mbar} \qquad p_{10} = 525 \text{ mbar}$$

[1]) ROBERT BOYLE (1627 bis 1691), englischer Physiker und Chemiker, entdeckte dieses Gesetz, das EDME MARIOTTE (um 1620 bis 1684), französischer Physiker, unabhängig von BOYLE fand, exakt formulierte und anwandte.

b) Aus $p_n = 1000 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^n$ mbar $= 10^{-6}$ mbar ergibt sich durch Umformen

$$\left(\frac{15}{16}\right)^n = 10^{-9}$$

$$n \cdot \lg\left(\frac{15}{16}\right) = -9$$

$$n = \frac{9}{\lg 16 - \lg 15} = 321$$

$$t = \frac{321}{50}\,\text{min} \approx 6{,}4\,\text{min}$$

Ergebnis:

Nach 5 Umdrehungen beträgt der Druck 724 mbar, nach 10 Umdrehungen 525 mbar, und die Pumpe muß 6,4 min laufen, damit im Rezipienten ein Druck von 10^{-6} mbar herrscht.

33 Für die Fertigung eines Werkstücks sind unter anderen (an der gleichen Maschine) folgende Arbeitsgänge auszuführen:
(1) Bohren, ∅ 6 mm;
(2) Senken;
(3) Bohren, ∅ 2,4 mm (für Gewinde 3 mm);
(4) Gewindeschneiden M 3;
(5) Fräsen.
Wie viele verschiedene Reihenfolgen dieser Arbeitsgänge sind bei der Entwicklung der Technologie in Betracht zu ziehen, wenn als Einschränkung nur zu beachten ist, daß (2) erst nach (1) und (4) erst nach (3) erfolgen kann (allerdings nicht unmittelbar danach erfolgen muß)?

Lösung:

Es sind die 5 Arbeitsgänge (1) bis (5) auszuführen. Wären die einschränkenden Bedingungen nicht vorhanden, so ginge es demnach um die Anzahl der Permutationen von 5 Elementen. Einfach, aber recht zeitaufwendig kann man diese Aufgabe lösen, indem man diese $P_5 = 5! = 120$ Permutationen zunächst aufschreibt (zweckmäßigerweise in lexikographischer Reihenfolge) und dann alle diejenigen streicht, bei denen (2) vor (1) oder (4) vor (3) steht.
Es geht aber auch schneller:
Da die Arbeitsgänge (1) und (2) als Elemente der Permutationen gleichberechtigt sind, gibt es unter den 120 Permutationen ebenso viele, bei denen (1) vor (2) steht, wie solche, bei denen (2) vor (1) steht. So bleiben bei Berücksichtigung der ersten Einschränkung nur 60 Permutationen übrig. Unter diesen gibt es wieder ebenso viele, bei denen (3) vor (4) steht, wie solche, bei denen (4) vor (3) steht. Es gibt also nur 30 Permutationen, die beiden einschränkenden Bedingungen genügen.

Ergebnis:

30 Reihenfolgen der Arbeitsgänge (1) bis (5) sind bei der Entwicklung der Technologie in Betracht zu ziehen.

Aufgaben

1. Betrachtet werden die Folgen $(a_n) = \left(\frac{n^2}{n!}\right)$, $(b_n) = \left(\frac{2^n}{n!}\right)$, $(c_n) = \left(\frac{4^n}{n!}\right)$.

   a) Berechnen Sie die ersten sechs Glieder dieser Folgen, und stellen Sie sie in ein und demselben Koordinatensystem dar! (Wählen Sie einen geeigneten Maßstab!)

   b) Machen Sie Aussagen über die Monotonie dieser Folgen, und beweisen Sie diese Aussagen!

   Wie steht es mit der Monotonie der Folgen $\left(\frac{10^n}{n!}\right)$ und $\left(\frac{100^n}{n!}\right)$?

   Betrachten Sie auch $\left(\frac{n^n}{n!}\right)$!

2. Untersuchen Sie, für welche natürlichen n die folgenden Ungleichungen gelten, und beweisen Sie Ihre Aussagen!

   a) $\binom{2n}{n} \geqq 2^n$ b) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

3. In einer Ebene mögen n Geraden so verlaufen, daß keine Gerade zu einer anderen parallel ist und es keinen Punkt der Ebene gibt, durch den mehr als zwei der Geraden gehen.
   Es ist zu untersuchen, in wie viele Teile die Ebene durch diese Geraden zerlegt wird.

   a) Veranschaulichen Sie sich den Fall $n = 3$ durch eine Skizze!

   b) Nehmen Sie eine vierte Gerade hinzu, und erläutern Sie, warum die Hinzunahme einer $(k+1)$-ten Geraden zu k bereits vorhandenen die Anzahl der Ebenenteile um $k+1$ erhöht!

   c) Ermitteln Sie eine Formel für die Anzahl der Ebenenteile bei n Geraden, und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion!

4. Ein Walmdach (zwei Teilflächen sind gleichschenklige Dreiecke, zwei Teilflächen sind gleichschenklige Trapeze) soll mit Ziegeln gedeckt werden. Die unterste (längste) Schicht enthält an der kürzeren Hausseite 35 Ziegel, an der längeren 65 Ziegel. Auf jeder Teilfläche werden es von Schicht zu Schicht zwei Ziegel weniger.
   Wie viele Ziegel werden für das Dachdecken mindestens benötigt, wenn mit 8% Abfall zu rechnen ist?

5. Rohre, Rundstähle und dergleichen werden häufig so verladen beziehungsweise gestapelt, daß in jeder höheren Schicht die Rohre in den Lücken der darunterliegenden Schicht liegen.

   a) Geben Sie an, wie viele Rohre ein Stapel höchstens haben kann, wenn in der untersten Schicht 6 (n) Rohre liegen!

   b) Mit wie vielen Schichten muß man beim Stapeln von 50 Rohren mindestens rechnen, wenn in der untersten Schicht nicht mehr als 10 Rohre liegen können? Wie hoch ist der Stapel in diesem Fall (Rohrdurchmesser d)?

   c) Wie viele Rohre von 0,6 m Durchmesser und 5 m Länge können in dieser Weise höchstens gestapelt werden, wenn für die unterste Schicht eine rechteckige Fläche von 10 m Länge und 6 m Breite zur Verfügung steht?

6. Bei der Lagerhaltung werden häufig Materialien unterschiedlicher Rohstoffzusammensetzungen und Abmessungen durch Farbmarkierungen gekennzeichnet. Bei Rohren soll jede Sorte mit drei verschiedenfarbigen Ringen am Rohrende markiert sein. Wie viele verschiedene Sorten kann man so mit Hilfe von fünf Farben kennzeichnen?

7. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit drei (unterscheidbaren) Würfeln insgesamt
   a) 6 Augen,
   b) 14 Augen

   zu werfen? Für welche Augenzahl gibt es die größte Anzahl von Möglichkeiten?

8. Zu einem Eishockeyturnier werden 20 Spieler eines Verbandes gemeldet.
   a) Wie viele Möglichkeiten, die Rückennummern 1 bis 20 zu verteilen, gibt es, wenn ein bestimmter Spieler auf jeden Fall die Nummer 11 erhält und ein zweiter keinesfalls die Nummer 9 tragen soll?
   b)* Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn außerdem ein dritter Spieler entweder 3 oder 7 bekommen soll?

9. Bei einem Schulsportfest haben sich vier Schüler (A, B, C, D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Nach den Vorlaufzeiten war für den Einlauf ins Ziel die Reihenfolge C–B–D–A zu vermuten. Der tatsächliche Einlauf ergab aber sowohl einen anderen Platz für jeden einzelnen Läufer als auch sämtlich andere (geordnete) Paare direkt aufeinanderfolgender Läufer. Der Sportlehrer hatte die Reihenfolge A–D–B–C vorausgesagt, doch stimmten auch hier nur zwei Plätze mit dem tatsächlichen Ergebnis überein. In welcher Reihenfolge kamen die Läufer ins Ziel?

10. Neun Touristen übernachten in einer Berghütte. Wie viele Möglichkeiten der Verteilung der Plätze gibt es in folgenden Fällen?
    a) Es stehen ein Raum mit vier und ein Raum mit fünf Betten zur Verfügung.
    b) Es können zwei Räume mit je sechs Betten bezogen werden.
    c) Es können drei Räume mit je drei Betten genutzt werden.
    d)* Es stehen drei Räume mit je vier Betten zur Verfügung.

    Bei b) bis d)* sollen Fälle nicht unterschieden werden, in denen gleiche Personengruppen beieinander bleiben, jedoch unterschiedliche Zimmer belegen.

11. In der näheren Umgebung eines Erholungsortes gibt es 7 (13; 22) verschiedene Wanderrouten. Wie viele Farben benötigt man zur unterschiedlichen Kennzeichnung dieser Routen unter folgenden Bedingungen?
    a) Die Kennzeichnung kann durch einen waagerechten Strich, ein Kreuz, einen Kreis oder ein Dreieck erfolgen.
    b) Die Kennzeichnung erfolgt durch zwei parallele Striche in verschiedenen Farben, deren Reihenfolge nicht berücksichtigt wird. (Beispielsweise werden „grün-rot“ und „rot-grün“ nicht unterschieden.)
    c) Die Kennzeichnung erfolgt durch zwei parallele Striche. Dabei dürfen beide Striche auch die gleiche Farbe haben, und die Reihenfolge der Farben wird nicht berücksichtigt.
    d) Die Kennzeichnung erfolgt durch zwei parallele Striche in verschiedenen Farben, bei denen aber die Reihenfolge beachtet wird.

12. Die Entwertung von Fahrscheinen für Nahverkehrsmittel erfolgt vielfach durch das Einstanzen von 1 bis 6 Löchern an verschiedenen Stellen eines 2-mal-3-Schemas wie bei der Grundform der Blindenschrift (↗ Aufgabe 2. auf Seite 64).
    a) Wie viele verschiedene Kennzeichnungen sind auf diese Weise möglich?
    b)* Bei Kontrollen können Irrtümer dadurch entstehen, daß der Fahrgast seinen Fahrschein verkehrt herum in den Entwerter gesteckt hat. Auf welchen Wert reduziert sich die bei a) errechnete Anzahl, wenn man derartige Irrtümer ausschalten will?

13. Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte „stufenweise Verdünnung“ an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe mit 10 cm^3 chemisch reinen

Wassers auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt abermals mit 10 cm^3 reinen Wassers auf.

a) Nach wie vielen Aufschwemmungen ist ein Mischungsverhältnis von $1 : (2 \cdot 10^6)$ erreicht?

b) 1 cm^3 der fünften Aufschwemmung enthalte noch zehn Bakterien. Wie viele Bakterien enthält dann durchschnittlich 1 cm^3 der Bodenprobe?

14. Ein Fläschchen mit 100 cm^3 Fassungsvermögen ist völlig mit einer Farbstofflösung gefüllt, die 40 g Farbstoff enthält. Beim Leeren des Fläschchens bleiben 0,5 cm^3 der Flüssigkeit zurück. Nach zweimaligem Ausspülen (jedesmal wird das Fläschchen mit Wasser vollständig aufgefüllt) ist die dritte Wasserfüllung immer noch gefärbt. Wieviel Gramm Farbstoff enthält sie noch?

15. a) Stellen Sie nach dem Fallgesetz je eine Tabelle für die Wege bzw. die Geschwindigkeiten am Ende der 1., 2., ..., 10. Sekunde des Fallvorganges auf! Charakterisieren Sie die Folgen der Wege und der Geschwindigkeiten!

b) Wie ändern sich die Folgen, wenn dem Körper zu Beginn eine Geschwindigkeit von 15 ms^{-1} senkrecht nach unten (oben) erteilt wird?

16. Von einem Radiumpräparat zerfällt in 23 Jahren durchschnittlich etwa 1%. Wie lange dauert es, bis die Hälfte des Präparats zerfallen ist, das heißt, wie groß ist die „Halbwertszeit"?
Das radioaktive Kohlenstoffisotop ${}^{14}_{6}C$ hat eine Halbwertszeit von 5600 Jahren. Ihre Kenntnis ermöglicht die Datierung archäologischer Funde. Wie alt sind in Oregon (USA) gefundene Sandalen, wenn sie nur noch 33% des normalen Gehalts an ${}^{14}_{6}C$ aufweisen?
Anleitung: Betrachten Sie die Abnahme des Gehalts an ${}^{14}_{6}C$ nach jeweils 100 Jahren!

17.* Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab. Wenn die Höhen eine arithmetische Folge bilden, so bilden die zugehörigen Luftdruckwerte eine geometrische Folge. Bei einer Höhenzunahme von 0 m (Meereshöhe) auf 10,5 m sinkt normalerweise der Luftdruck von 1013 mbar auf 1012 mbar.

a) Welcher Druck herrscht in 1000 m Höhe?

b) Wie hoch liegt ein Ort, in dem unter Normalbedingungen ein Luftdruck von 990 mbar herrscht?

c) Wie hoch fliegt ein Flugzeug, das einen äußeren Luftdruck von 650 mbar mißt, während gleichzeitig in Meereshöhe ein Druck von 1020 mbar herrscht?

18. Ein Wellenende soll auf einer Drehmaschine bearbeitet werden (Bild A 21).

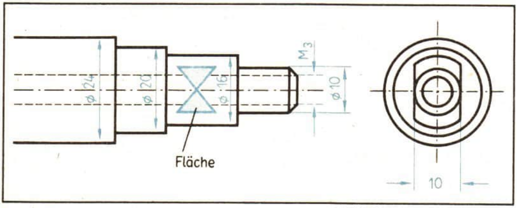


Bild A 21

Folgende Arbeitsstufen sind erforderlich:
(1) Drehen, ∅ 10 mm;
(2) Drehen, ∅ 16 mm;
(3) Drehen, ∅ 20 mm;
(4) Fräsen der Flächen;
(5) Bohren, ∅ 2,4 mm;
(6) Gewindeschneiden M 3.
Man ermittle die Anzahl der verschiedenen Reihenfolgen dieser Stufen, die unter Beachtung folgender Einschränkungen theoretisch möglich sind: (6) kann erst nach (5) erfolgen; (4) kann erst nach (2) erfolgen.

19. Auf einer Werkzeugmaschine sind vier verschiedene Werkstücke W_1 bis W_4 zu bearbeiten. Der Arbeitsprozeß gliedert sich in ständig wiederkehrende Zyklen, bei denen jeweils jedes der vier Werkstücke in einer bestimmten Stückzahl die Maschine durchläuft, also etwa W_1-W_3-W_4-W_2-W_1-W_3-W_4-W_2-W_1-... Die Bearbeitungsreihenfolge der vier Werkstücke innerhalb eines Zyklus ist frei wählbar. Die folgende Tabelle enthält die Einrichtezeiten, die für die Umstellung der Maschine von der Bearbeitung eines Werkstücks auf die eines anderen erforderlich sind.

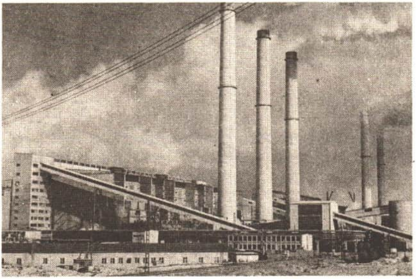
Einrichtezeiten in min		**Folgende Werkstücke**			
		W_1	W_2	W_3	W_4
Vorangehende Werkstücke	W_1	–	30	24	4
	W_2	8	–	25	10
	W_3	18	12	–	6
	W_4	20	5	14	–

a) Ermitteln Sie für jede Bearbeitungsreihenfolge die insgesamt erforderliche Einrichtezeit, und geben Sie die diesbezüglich optimale Bearbeitungsreihenfolge an!
b) Schätzen Sie den Arbeitsaufwand für eine derartige Lösung solcher Optimierungsaufgaben („Maschinenbelegungsprobleme") bei einer höheren Anzahl von Werkstükken ein!

20. Ein Volkseigener Betrieb schafft für insgesamt 8000000 M neue Maschinen an. 60% dieses Betrages werden aus den betriebseigenen Umlaufmitteln entnommen. Für den Rest erhält der Betrieb einen Bankkredit, für den ihm 6% Zinsen (je Jahr und bezogen auf den jeweils noch verbleibenden Schuldbetrag) berechnet werden.
a) Wie lange dauert es, bis der Kredit getilgt ist, wenn jeweils nach Ablauf eines Jahres – sofern nicht der verbleibende Schuldbetrag einschließlich Zinsen geringer ist – 850000 M an die Bank gezahlt werden?
b) Der jährlich an die Bank zu zahlende Betrag soll ein Vielfaches von 50000 M betragen und – bis auf den letzten – immer gleich groß sein. Wie groß ist er zu wählen, wenn die Tilgung des Kredits bereits in drei Jahren erfolgen soll?

21. Die Steigerung in der Erzeugung von Elektroenergie in der DDR von 1950 bis 1975 ist in der folgenden Tabelle gekennzeichnet.

Jahr	**1950**	**1955**	**1960**	**1965**	**1970**	**1975**
Erzeugung in Mrd kWh	19	29	40	54	68	85



Großkraftwerk Vetschau
im Bezirk Cottbus

a) Ermitteln Sie eine geometrische Folge (a_n), die die Werte von 1950 und 1975 als a_1 bzw. a_6 enthält, und überprüfen Sie, in welcher Weise die angegebenen Zwischenwerte von den Werten für $a_2, \ldots, a_5$ abweichen!

b) Ermitteln Sie eine geometrische Folge (b_n), die die Werte von 1970 und 1975 als b_1 bzw. b_6 enthält!

c) Die Direktive zum Fünfjahrplan 1976 bis 1980 sagt aus, daß in diesem Zeitraum die Erzeugung von Elektroenergie insgesamt 485 Mrd kWh betragen soll.
Überprüfen Sie, ob (b_n) auch die Entwicklung in den Jahren 1975 bis 1980 widerspiegelt! Wenn nicht, so versuchen Sie, durch korrigierendes Abschätzen zu einer neuen Folge zu kommen, die dem genannten Gesamtwert entspricht!

d) Etwa 9% der erzeugten Elektroenergie werden in Haushalten verbraucht. Vereinfachend kann man annehmen, daß dieser Verbrauch der Personenzahl proportional ist. Vergleichen Sie den jährlichen Verbrauch Ihres Haushalts mit dem Durchschnittswert!

e) Wieviel Kilowattstunden könnten 1980 in der DDR insgesamt dadurch eingespart werden, daß in jedem Haushalt 1% des sonst üblichen Verbrauchs an Elektroenergie eingespart wird?

B Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen

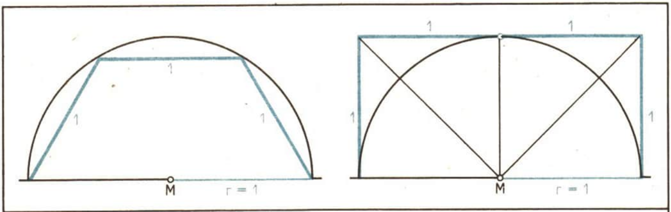
Die Bogenlänge eines Halbkreises mit dem Radius 1 beträgt π. Wie wir bereits wissen, ist π eine irrationale Zahl. Wenn man den Halbkreis durch Streckenzüge annähert, kann man Näherungswerte für die Zahl π errechnen. Aus Bild B 1 entnehmen wir sofort

$$3 < \pi < 4.$$

Verdoppeln wir jeweils die Anzahl der Strecken wie im Bild B 2, so erhalten wir

$$3{,}10 < \pi < 3{,}32.$$

Bild B 1



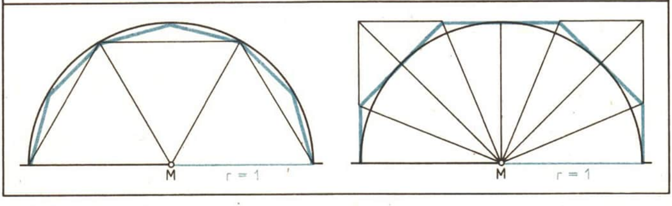


Bild B 2

● 1 Bestätigen Sie unter Verwendung von Bild B 3 (↗ Seite 76), daß $3{,}10 < \pi$ gilt!

Setzt man das Verfahren der Verdopplung der Anzahl der Strecken fort, so erhält man zwei Folgen (a_n) und (b_n).
Die Folge (a_n) besteht aus zu kleinen Näherungswerten von π, die Folge (b_n) aus zu großen Näherungswerten von π. Beide Folgen haben die Eigenschaft, daß ihre Glieder mit wachsender Nummer n der Zahl π beliebig nahekommen.

ARCHIMEDES

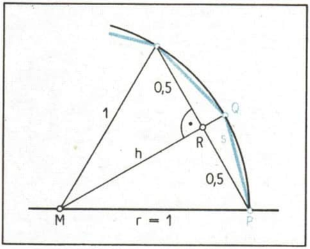


Bild B 3

Der griechische Mathematiker und Physiker ARCHIMEDES (etwa 287 bis 212 v. u. Z.) führte auf diese Weise das erste Beispiel einer **Grenzwertberechnung** durch. Dabei fand er für π die Ungleichung

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Heute ist der Grenzwertbegriff zu einem grundlegenden Begriff eines ganzen Teilgebietes der Mathematik – der Analysis – geworden. Die Entstehung der Analysis ist mit den Namen bedeutender Mathematiker verbunden, von denen wir hier ISAAK NEWTON (englischer Mathematiker und Physiker, 1643 bis 1727), GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (deutscher Mathematiker und Philosoph, 1646 bis 1716), AUGUSTIN CAUCHY (französischer Mathematiker, 1789 bis 1857) und KARL WEIERSTRASS (deutscher Mathematiker, 1815 bis 1897) nennen möchten (↗ Bilder B 4 bis B 7).

Bild B4

Bild B 5

Bild B 6

Bild B 7

Wir werden in diesem Kapitel weitere Eigenschaften von Folgen[1]) kennenlernen. Insbesondere soll präzisiert werden, was es heißt, daß die Glieder einer Folge mit wachsender Nummer n einer Zahl beliebig nahekommen. Diese Überlegungen führen zur Definition des Grenzwertbegriffs für Folgen, den wir dann im letzten Abschnitt dieses Kapitels als Hilfsmittel für die Untersuchung des Verhaltens von Funktionen anwenden.

[1]) In diesem Kapitel B und auch in den Kapiteln C und D betrachten wir nur noch *unendliche* Zahlenfolgen.

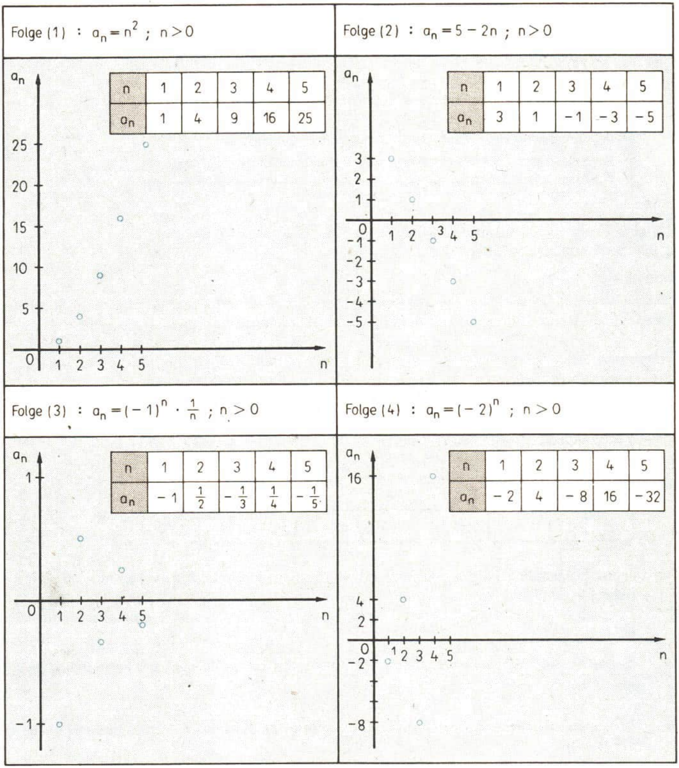
Schranken, Grenzen und Grenzwerte von Zahlenfolgen

1 Schranken von Zahlenfolgen

Im Bild B 8 sind vier Folgen angegeben, jeweils die ersten fünf Glieder genannt und im Koordinatensystem veranschaulicht.

● 2 Untersuchen Sie, ob die im Bild B 8 dargestellten Zahlenfolgen monoton wachsend oder monoton fallend oder nicht monoton sind!

Bild B 8



Folge (1) : $a_n = n^2$; $n > 0$

n	1	2	3	4	5
a_n	1	4	9	16	25

Folge (2) : $a_n = 5 - 2n$; $n > 0$

n	1	2	3	4	5
a_n	3	1	−1	−3	−5

Folge (3) : $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$; $n > 0$

n	1	2	3	4	5
a_n	−1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$

Folge (4) : $a_n = (-2)^n$; $n > 0$

n	1	2	3	4	5
a_n	−2	4	−8	16	−32

Wir wollen die Lage der Folgenglieder im Koordinatensystem genauer eingrenzen (↗ Bild B 8).

Folge (1): Alle Folgenglieder liegen oberhalb der Null.
Man sagt: 0 ist eine **untere Schranke** der Folge (a_n).

Folge (2): Alle Folgenglieder liegen unterhalb der Zahl 5.
Man sagt: 5 ist eine **obere Schranke** der Folge (a_n).

Folge (3): Alle Folgenglieder liegen im Intervall $\langle -1; 1\rangle$.
-1 ist eine untere Schranke von (a_n), und 1 ist eine obere Schranke von (a_n).
Man sagt: Die Folge (a_n) ist **beschränkt**.

Folge (4): Die Glieder der Folge haben wechselndes Vorzeichen. Für gerade n ist $a_n = 2^n$, für ungerade n ist $a_n = -2^n$. Die Folge hat keine obere Schranke, denn wie man auch eine Zahl S wählt, stets gibt es eine gerade natürliche Zahl n, so daß $a_n = 2^n > S$ gilt. Wählt man zum Beispiel $S = 1000$, so gilt bereits für $n = 10$, daß $a_n = 2^{10} = 1024 > 1000$ ist. Die Folge hat auch keine untere Schranke.
Man sagt: Die Folge (a_n) ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

▶ 1 **DEFINITION**

(a_n) sei eine beliebige Zahlenfolge, S eine beliebige reelle Zahl.
S ist eine *untere Schranke* von $(a_n) =_{\mathrm{Df}}$ Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $S \leqq a_n$.
S ist eine *obere Schranke* von $(a_n) =_{\mathrm{Df}}$ Für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_n \leqq S$.

Hat eine Folge (a_n) eine untere (obere) Schranke, so sagt man:
(a_n) ist **nach unten (oben) beschränkt**.

Bemerkung:

Bei der Folge (2) (↗ Bild B 8) liegen alle Folgenglieder unterhalb der Zahl 5, aber auch unterhalb der Zahl 6, auch unterhalb der Zahl 20. Offensichtlich hat die Folge (2) viele obere Schranken.
Untere und obere Schranken von Folgen sind also nicht eindeutig bestimmt. Wenn eine Folge eine untere (obere) Schranke hat, so hat sie viele untere (obere) Schranken.

■ 1 Wir untersuchen die Folge (a_n) mit $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{10^i}$ auf untere und obere Schranken.
Die ersten fünf Folgenglieder sind:

n	1	2	3	4	5
a_n	0,3	0,33	0,333	0,3333	0,33333

Jedes Folgenglied ist ein positiver Dezimalbruch, der mit „0, …" beginnt, das heißt, jedes Folgenglied liegt im Intervall $\langle 0; 1\rangle$.
Folglich ist (a_n) eine beschränkte Folge. Eine untere Schranke ist 0, eine obere Schranke ist 1.

● 3 Geben Sie weitere untere und obere Schranken für die im Beispiel B 1 betrachtete Folge an!

■ 2 Wir untersuchen die geometrische Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ auf untere und obere Schranken.

Jedes Folgenglied von (a_n) ist positiv. Also ist 0 eine untere Schranke von (a_n).

Wegen $a_1 = \frac{2}{3}$ und $q = \frac{2}{3} < 1$ ist (a_n) monoton fallend (↗ Seite 18). Dann ist

$a_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$ das größte Folgenglied der Folge (a_n).

Für alle n gilt: $a_n \leqq \frac{2}{3}$. Damit ist $\frac{2}{3}$ eine obere Schranke von (a_n).

Die Folge (a_n) hat also eine untere und eine obere Schranke. Sie ist beschränkt.

Wir untersuchen die geometrische Folge (a_n) mit $a_n = 2^n$. Diese Folge ist *nicht* nach oben beschränkt. Wie man auch eine reelle Zahl S wählt, stets gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß das Folgenglied mit der Nummer n die Zahl S übertrifft, kurz: daß $2^n > S$ gilt.
Wählen wir $S = 1000$, so übertrifft das Folgenglied mit der Nummer 10 bereits die Zahl S, wie wir bereits bei der Untersuchung der Folge (4) (↗ Seite 78) gesehen haben.
Ja, es gibt überhaupt nur endlich viele Nummern n mit $2^n \leqq 1000$, nämlich 0, 1, 2, 3, ..., 9.
Für alle anderen Nummern n gilt: $2^n > 1000$.
Für alle natürlichen Zahlen n bis auf endlich viele Ausnahmen gilt: $2^n > 1000$.
Dafür sagt man auch kürzer:

Für fast alle natürlichen Zahlen n gilt: $2^n > 1000$.

Wählen wir statt 1000 eine andere Zahl S, so gilt wiederum:
Für fast alle natürlichen Zahlen n ist $2^n > S$ (↗ Bild B 9).
Vergleichen wir die Folge (2^n) mit der Folge (4) aus Bild B 8, so stellen wir fest, daß für jede reelle Zahl S gilt:

Folge (2^n)	Es gibt nur *endlich viele* n mit $2^n < S$.	Es gibt unendlich viele n mit $2^n > S$.
Folge $((-2)^n)$	Es gibt unendlich viele n mit $(-2)^n < S$.	Es gibt unendlich viele n mit $(-2)^n > S$.

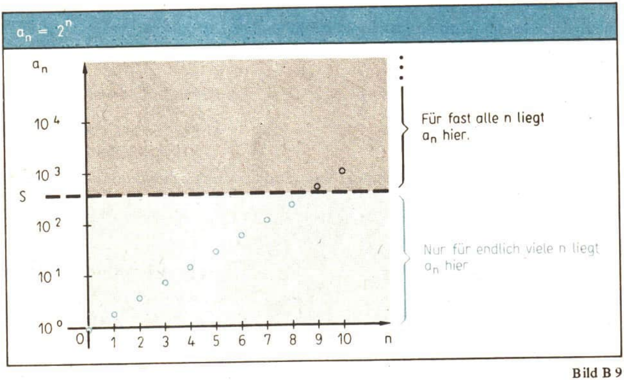


Bild B 9

Im Gegensatz zur Folge $((-2)^n)$ hat die Folge (a_n) mit $a_n = 2^n$ also die folgende Eigenschaft:

Wie man auch eine reelle Zahl S wählt, stets gilt für fast alle natürlichen Zahlen n, daß $a_n > S$ ist.

Man sagt auch: Die Folge (a_n) **wächst unbeschränkt.**

● 4 Erläutern Sie am Beispiel der Folge (a_n) mit $a_n = -10^n$, was man unter einer unbeschränkt fallenden Folge versteht!

Aufgaben

Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Monotonie, und geben Sie jeweils – falls möglich – eine obere und eine untere Schranke von (a_n) an!

1.↑ a) $a_n = n^2 - 1$ b) $a_n = 4 + \frac{2}{n}$ c) $a_n = (-1)^n$

2.↑ a) $a_n = -n^3$ b) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ c) $a_n = (-1)^n \frac{1}{10^n}$

Prüfen Sie, ob 2 eine obere Schranke der Folge (a_n) ist!

3.↑ a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + 1$ b) $a_n = \frac{n+4}{n^2+1}$

4.↑ a) $a_n = \frac{n^2}{n+6}$ b) $a_n = \frac{n+1}{n}$

5. Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{2n+1}{n}$.

a) Geben Sie eine obere und eine untere Schranke der Folge an!
b) Veranschaulichen Sie die ersten 10 Glieder der Folge zusammen mit einer unteren und einer oberen Scnranke im Koordinatensystem!

Geben Sie eine Folge (a_n) an, die folgenden Bedingungen genügt!

6.↑ (a_n) ist monoton wachsend, und 0 ist eine obere Schranke von (a_n).

7.↑ (a_n) ist monoton fallend, und 3 ist eine untere Schranke der Folge (a_n).

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen über natürliche Zahlen wahr sind!

8.↑ a) Für fast alle n gilt: $n^2 > n$.
b) Für fast alle n gilt: $\frac{1}{n} < \frac{1}{5}$.
c) Für fast alle n gilt: $2n$ ist keine Primzahl.

9.↑ a) Für fast alle n gilt: $0 \leqq n \leqq 100$.
b) Für fast alle n gilt: $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$.
c) Für fast alle n gilt: n ist keine Primzahl.

Welche der Folgen (a_n) ist unbeschränkt wachsend bzw. unbeschränkt fallend?

10.↑ a) $a_n = n^2$ b) $a_n = -(2n+1)$ c) $a_n = \sqrt{n}$ d) $a_n = \frac{1}{n^2}$

11.↑ a) $a_n = n^3$ b) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ c) $a_n = 1 - n^2$ d) $a_n = 10^n$

2 Obere und untere Grenze einer Zahlenfolge

Jedes Glied der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist positiv. Folglich ist 0 eine untere Schranke der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Kann man eine untere Schranke von $\left(\frac{1}{n}\right)$ *finden, die größer als* 0 *ist?*

Eine solche untere Schranke müßte dann eine positive Zahl sein.

● 5 Prüfen Sie, ob die folgenden positiven Zahlen untere Schranken von $\left(\frac{1}{n}\right)$ sind!

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{10^2}$ c) $\frac{1}{10^6}$ d) 0,0004

■ 3 Wir bestimmen die größte untere Schranke der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Lösung:
Wir haben bereits festgestellt, daß 0 eine untere Schranke der Folge ist. Jede Zahl a, die größer als 0 ist, kann nicht untere Schranke von $\left(\frac{1}{n}\right)$ sein. Die Glieder der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ kommen nämlich mit wachsender Nummer n der Zahl 0 beliebig nahe. Wählt man also n nur genügend groß, so gilt $0 < \frac{1}{n} < a$.

Also ist *nicht* $\frac{1}{n} \geqq a$ für alle $n \geqq 1$.

Damit ist 0 die größte untere Schranke von $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist auch nach oben beschränkt. Obere Schranken von $\left(\frac{1}{n}\right)$ sind zum Beispiel

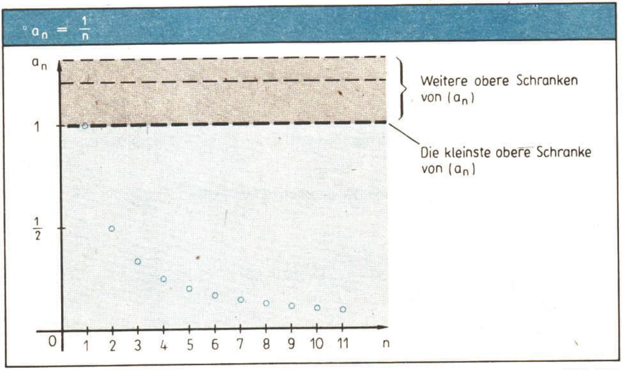


Bild B 10

die Zahlen 10; 3; 1; 7; 2; 1000; 1,5. Unter allen oberen Schranken von $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist 1 die kleinste obere Schranke (↗ Bild B 10 auf Seite 81).

▶ 2

DEFINITION

(a_n) sei eine nach oben (unten) beschränkte Zahlenfolge.
Hat (a_n) eine kleinste obere (größte untere) Schranke, so heißt diese Schranke *obere (untere) Grenze* von (a_n).

■ 4 Es ist zu untersuchen, ob die Folge (a_n) mit $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ eine obere und eine untere Grenze hat.

Lösung:

a)

Wir untersuchen die Folge auf eine untere Grenze.

Die Folge ist monoton wachsend. Deshalb ist $a_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$ das kleinste Folgenglied.

Für alle $n \geqq 1$ gilt also $a_n \geqq a_1 = 0$. Damit ist 0 *eine* untere Schranke der Folge (a_n). Da $a_1 = 0$ Glied der Folge (a_n) ist, gibt es laut Definition B 1 für diese Folge keine untere Schranke, die größer als 0 ist. Folglich ist 0 die größte untere Schranke, das heißt die untere Grenze von (a_n).

b)

Wir untersuchen die Folge auf eine obere Grenze.

Wegen $1 - \frac{1}{n} < 1$ für alle n ist 1 eine obere Schranke von (a_n). Eine noch kleinere obere Schranke S der Folge kann es nicht geben, da sich $1 - \frac{1}{n}$ nur beliebig wenig von 1 unterscheidet, wenn man nur n genügend groß wählt (↗ Auftrag B 6). Damit ist 1 die kleinste obere Schranke, das heißt die obere Grenze von (a_n).

● 6 Es ist $1 - \frac{1}{n} > 0{,}9$ für $n = 11$. Ermitteln Sie jeweils eine natürliche Zahl n derart, daß

a) $1 - \frac{1}{n} > 0{,}99$; b) $1 - \frac{1}{n} > 0{,}999$

ist!

■ 5 Es ist die obere Grenze der Folge (s_n) mit $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{10^i}$ zu ermitteln.

Lösung:

(s_n) ist die Partialsummenfolge der geometrischen Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Es ist also $a_1 = \frac{3}{10}$ und $q = \frac{1}{10}$. Deshalb gilt (↗ Seite 39):

$$s_n = a_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 10^n}.$$

Für alle n ist demzufolge $s_n < \frac{1}{3}$, das heißt, $\frac{1}{3}$ ist eine obere Schranke von (s_n). Mit wachsender Nummer n kommt jedoch s_n der Zahl $\frac{1}{3}$ beliebig nahe, so daß es keine obere Schranke von (s_n) geben kann, die kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Folglich ist $\frac{1}{3}$ die kleinste obere Schranke von (s_n), das heißt die obere Grenze von (s_n).

Daß jede nach oben beschränkte Zahlenfolge auch eine *kleinste* obere Schranke, also eine *obere Grenze* hat, wird im folgenden Satz formuliert.

▷ 1

SATZ von der oberen Grenze
Jede nach oben beschränkte Zahlenfolge hat eine obere Grenze.
Entsprechend gilt auch:
Jede nach unten beschränkte Zahlenfolge hat eine untere Grenze.

Der Beweis dieses Satzes erfordert gründliche Kenntnisse über den Bereich der reellen Zahlen. Wir wollen hier auf den Beweis verzichten.
Es soll jedoch vermerkt werden, daß dieser Satz im Bereich der rationalen Zahlen nicht gilt. Es gibt nämlich Folgen rationaler Zahlen, die zwar viele rationale Zahlen als obere Schranken haben, aber unter diesen rationalen oberen Schranken gibt es keine kleinste.
Eine solche Folge ist zum Beispiel:

$$1; \quad 1 + \frac{1}{4}; \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}; \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}; \quad \ldots$$

Alle Folgenglieder sind rationale Zahlen. Die Folge ist auch nach oben beschränkt. Aber die kleinste obere Schranke der Folge ist die *irrationale* Zahl $\frac{\pi^2}{6}$.

Aufgaben

Geben Sie jeweils – falls vorhanden – die untere und die obere Grenze der Folge (a_n) an!

1.↑ a) $a_n = n^2 - 1$ b) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}$ c) $a_n = n + \frac{1}{n}$

2.↑ a) $a_n = 1 - n^2$ b) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2}$ c) $a_n = n - \frac{1}{n}$

3. Gegeben sei die Folge (a_n) mit

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^2}.$$

a) Begründen Sie, daß 1 die untere Grenze der Folge ist!
b) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, so daß $1 < a_n < 1{,}01$ ist!

4. Gegeben sei die Folge (a_n) mit

$$a_n = 2 - \frac{1}{10^n}.$$

a) Begründen Sie, daß 2 die obere Grenze der Folge ist!
b) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, so daß $1{,}999 < a_n < 2$ ist!

5. Geben Sie eine nach oben beschränkte Zahlenfolge an, deren obere Grenze Glied der Folge ist!

6. Geben Sie eine nach oben beschränkte Zahlenfolge an, deren obere Grenze *nicht* Glied der Folge ist!

3 Grenzwert einer Zahlenfolge

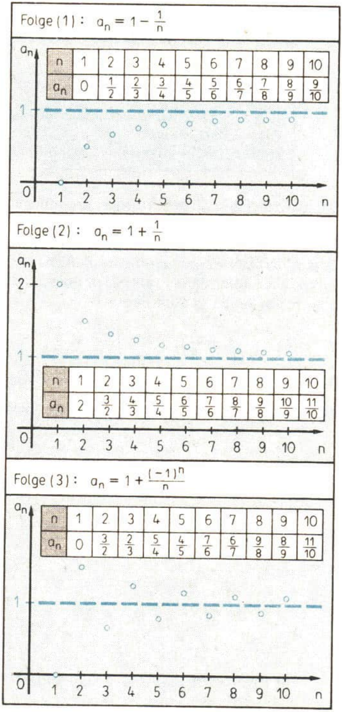
Schon mehrfach haben wir die Redeweise gebraucht, daß eine Folge (a_n) mit wachsender Nummer n einer Zahl beliebig nahekommt. Wir wollen nun eine Präzisierung dieser Redeweise vornehmen.

Wir betrachten dazu die Folgen

(1) (a_n) mit $a_n = 1 - \frac{1}{n}$;

(2) (a_n) mit $a_n = 1 + \frac{1}{n}$;

(3) (a_n) mit $a_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$.



Bilder B 11, B 12, B13

In den Bildern B 11 bis B 13 sind jeweils die ersten zehn Glieder dieser Folgen im Koordinatensystem veranschaulicht.

Wir entnehmen der Anschauung, daß sich die Glieder der Folgen bei wachsender Nummer n der Zahl 1 „nähern". Der Abstand[1]) zwischen a_n und der Zahl 1 wird beliebig klein, wenn man nur n genügend groß wählt. So ist zum Beispiel bei der Folge (1) der Abstand zwischen a_n und 1 kleiner als $\frac{1}{10}$, wenn nur n größer als 10 gewählt wird. Mit anderen Worten: Für fast alle n ist der Abstand zwischen a_n und 1 kleiner als $\frac{1}{10}$.

Es gibt auch nur endlich viele n, für die der Abstand zwischen a_n und 1 größer als $\frac{1}{100}$ ist.

Für fast alle n ist der Abstand zwischen a_n und 1 kleiner als $\frac{1}{100}$, nämlich für alle n mit $n > 100$.

● 7 Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, für die der Abstand zwischen a_n und 1 bei der Folge (3) kleiner als $\frac{1}{5}$ ist!

Um nun das bisher im anschaulichen Sinne verwendete Annähern einer Folge an eine Zahl präzise erfassen zu können, führen wir einen neuen Begriff ein, und zwar den Begriff der **ε-Umgebung** einer Zahl[2]).

---

[1]) Unter dem Abstand der Zahlen a und b verstehen wir den Abstand der Punkte, die den Zahlen auf der Zahlengeraden zugeordnet sind.

[2]) ε – griechischer Buchstabe (Lies: „epsilon")

Sind a und b reelle Zahlen mit $a < b$, so nennt man die Menge aller reellen Zahlen x mit $a < x < b$ das **offene Intervall** von a bis b (↗ Bild B 14) und schreibt dafür $(a; b)$.
Nimmt man zu $(a; b)$ noch die Zahlen a und b hinzu, so erhält man das uns schon bekannte *abgeschlossene Intervall* $\langle a; b \rangle$.

Ist a eine beliebige reelle Zahl und ε eine beliebige positive reelle Zahl, so nennt man das offene Intervall $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ die ε-Umgebung von a (↗ Bild B 15).

Bild B 14

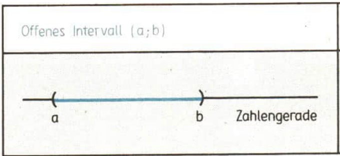
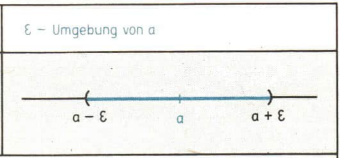


Bild B 15



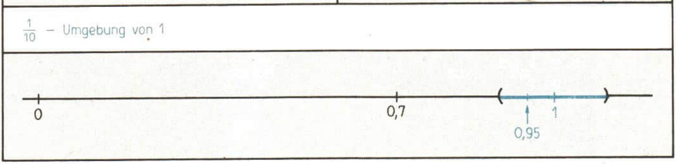


Bild B 16

Zu einer vorgegebenen Zahl a gibt es unendlich viele ε-Umgebungen. Erst nachdem man ein ε fest gewählt hat, ist es sinnvoll, von *der* ε-Umgebung von a zu sprechen. Ist zum Beispiel $a = 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{10}$, so ist das offene Intervall $\left(1 - \frac{1}{10}; 1 + \frac{1}{10}\right)$, das heißt das Intervall $(0{,}9; 1{,}1)$, die $\frac{1}{10}$-Umgebung von 1. Wegen $0{,}9 < 0{,}95 < 1{,}1$ liegt die Zahl 0,95 in der $\frac{1}{10}$-Umgebung von 1. Dagegen liegt die Zahl 0,7 wegen $0{,}7 < 0{,}9$ nicht in der $\frac{1}{10}$-Umgebung von 1 (↗ Bild B 16).

● 8 Es sei a eine beliebige Zahl und ε eine positive Zahl. Dann ist die ε-Umgebung von a gerade die Menge jener Zahlen x, für die $|x - a| < \varepsilon$ gilt.
Begründen Sie diese Aussage mit Hilfe von Bild B 17!

Wir kommen nun zur Folge (a_n) mit $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ zurück.

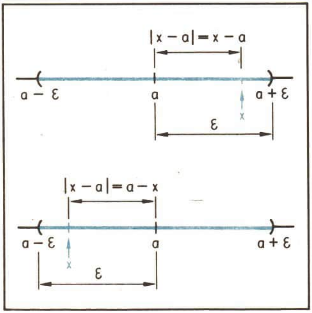


Bild B 17

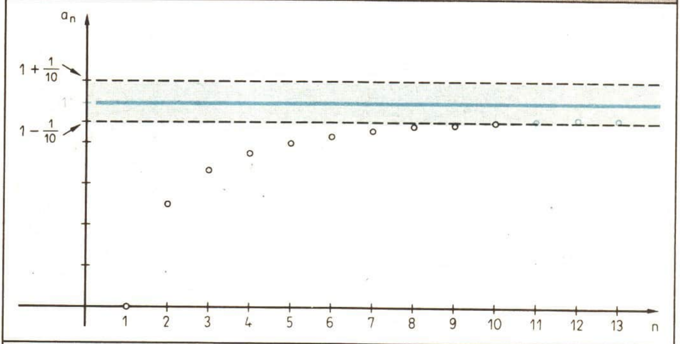
Die Ergebnisse der zu Beginn dieser Lerneinheit durchgeführten Überlegung können wir jetzt wie folgt formulieren:

Ist $\varepsilon = \frac{1}{10}$, so liegt a_n *für fast alle n* in der ε-Umgebung von 1 (↗ Bild B 18).

Ist $\varepsilon = \frac{1}{100}$, so liegt a_n *für fast alle n* in der ε-Umgebung von 1.

Dabei ist die Wahl der Zahl ε gar nicht entscheidend. Ist ε eine beliebige positive Zahl, so muß für die Glieder a_n, die in der ε-Umgebung von 1 liegen, die Ungleichung $|a_n - 1| < \varepsilon$ gelten. Nun ist $\left|a_n - 1\right| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, und es gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$ genau dann, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Die zuletzt genannte Ungleichung gilt jedoch für fast alle n.

$\frac{1}{10}$ – Umgebung von 1 für $a_n = 1 - \frac{1}{n}$



Für fast alle n liegt a_n in dem blauen Streifen, nämlich ab n = 11.

Bild B 18

● 9 Es sei $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Untersuchen Sie, für welche natürlichen Zahlen n die Glieder a_n der Folge (2) (↗ Seite 84) in der ε-Umgebung von 1 liegen!

Bei den Folgen (1), (2) und (3) gilt:

Wie man auch eine ε-Umgebung von 1 wählt, stets gilt: Für fast alle n liegt a_n in der ε-Umgebung von 1. Man sagt: Die Zahl 1 ist **Grenzwert der Folge (a_n).**

▶ 3

DEFINITION

Es sei (a_n) eine Zahlenfolge und g eine Zahl.

***g* ist *Grenzwert von* (a_n) $=_{\mathrm{Df}}$ Bei jedem positiven ε gilt für fast alle n:**

a_n liegt in der ε-Umgebung von g.

Gleichwertig mit der Formulierung in Definition B 3 und für manche Anwendungen besser geeignet sind die folgenden Formulierungen:

g ist Grenzwert von $(a_n) =_{\mathrm{Df}}$ Bei jedem positiven ε gilt für fast alle n:

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

g ist Grenzwert von $(a_n) =_{\mathrm{Df}}$ Bei jedem positiven ε gilt:
Es gibt nur endlich viele n, für die a_n außerhalb der ε-Umgebung von g liegt.

Diese Definition des Grenzwertbegriffs präzisiert gerade jene anschaulichen Vorstellungen, die wir mit dem „Nähern" der Glieder einer Folge an eine Zahl verbinden.

Eine Folge, die einen Grenzwert g hat, heißt **konvergent.**
Man sagt auch: Die Folge **konvergiert gegen g.**

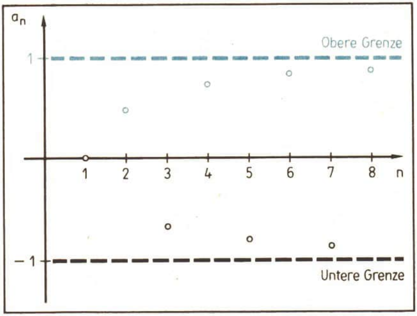


Bild B 19

■ 6 Es sei $a_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Hat (a_n) einen Grenzwert?
Die Folge ist zwar nach oben und auch nach unten beschränkt. Jedoch nähern sich die Folgenglieder keiner Zahl in dem Sinne, wie es durch die Definition B 3 präzisiert wird (↗ Bild B 19). Die Folge hat keinen Grenzwert.

Folgen, die keinen Grenzwert haben, heißen **divergent.**

Die Folge (a_n) im Beispiel B 6 ist also divergent.
Dieses Beispiel macht zugleich den Unterschied zwischen „oberer bzw. unterer Grenze" einerseits und „Grenzwert" andererseits deutlich. Die Folge (a_n) hat sowohl eine obere als auch eine untere Grenze, jedoch keinen Grenzwert.
Folgen, die nicht beschränkt sind, sind auch nicht konvergent.

Aufgaben

Markieren Sie die ε-Umgebung von a wie im Bild B 16 für folgende Werte von a und ε!

1.↑ a) $\varepsilon = 0{,}5; \quad a = 2$

b) $\varepsilon = \frac{1}{10}; \quad a = 0{,}5$

2.↑ a) $\varepsilon = 0{,}3; \quad a = 1{,}5$

b) $\varepsilon = \frac{1}{3}; \quad a = 0$

Entscheiden Sie, ob die Zahl x zur ε-Umgebung von a gehört, wenn x, ε und a folgende Werte annehmen!

3.↑ a) $\varepsilon = \frac{1}{10}; \quad a = 1$

$x = 0{,}8;\ 1{,}02;\ 1;\ \frac{12}{11}$

b) $\varepsilon = \frac{1}{100}; \quad a = 0$

$x = 0{,}09;\ 0{,}009;\ 0{,}99;\ -0{,}001;\ 0$

4.↑ a) $\varepsilon = \frac{1}{10}; \quad a = -1$

$x = -0{,}09;\ -1{,}005;\ -\frac{12}{11};\ -0{,}98$

b) $\varepsilon = \frac{1}{100}; a = \frac{1}{2}$

$x = 0{,}499;\ 0{,}505;\ 0{,}51;\ 0{,}501$

5. Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

a) Liegt a_{20} in der 0,1-Umgebung von 1?

b) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, für die a_n in der $\frac{1}{1000}$-Umgebung von 1 liegt!

6. Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_n = 1 + \frac{1}{n}$.

a) Liegt a_{20} in der 0,01-Umgebung von 1?

b) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, für die a_n in der 0,01-Umgebung von 1 liegt!

4 Untersuchungen von Zahlenfolgen auf Konvergenz

Wir wollen in dieser Lerneinheit die Definition B 3 (↗ Lerneinheit 3) auf einige Zahlenfolgen anwenden.

■ 7 Man beweise, daß $\frac{1}{2}$ Grenzwert der Folge $\left(\frac{n+1}{2n}\right)$ ist.

Lösung:
Nach Definition B 3 ist zu zeigen: Bei jedem positiven ε gilt für fast alle n:

$$\left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

(a) Zunächst vereinfachen wir durch äquivalente Umformungen die linke Seite der Ungleichung (1). Es ist

$$\left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1-n}{2n}\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}.$$

Die Ungleichung (1) ist also gleichwertig mit

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon\,. \tag{2}$$

(b) Wir lösen (2) durch äquivalente Umformungen nach n auf. Man erhält aus (2) zunächst $2n > \frac{1}{\varepsilon}$ und schließlich

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}\,. \tag{3}$$

(c) Wir prüfen, ob bei jedem positiven ε für fast alle n die Ungleichung (3) gilt.

ε	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Die Ungleichung (3) gilt für folgende natürliche Zahlen n.	$n > 5$	$n > 10$	$n > 50$	$n > 500$

Es sei nun ε eine beliebige positive Zahl. Dann ist auch $\frac{1}{2\varepsilon}$ eine positive Zahl. Es gibt nur endlich viele natürliche Zahlen, die kleiner oder gleich der Zahl $\frac{1}{2\varepsilon}$ sind. Damit gilt für fast alle n:

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}\,.$$

Ergebnis:

Die Folge $\left(\frac{n+1}{2n}\right)$ hat die Zahl $\frac{1}{2}$ als Grenzwert.

10 Überprüfen Sie durch Nachrechnen die in der Tabelle im Beispiel B 7 angegebenen Ungleichungen!

8 Man beweise, daß $\left(\frac{1}{n}\right)$ gegen 0 konvergiert.

Lösung:

(a) Zunächst vereinfachen wir die linke Seite der Ungleichung

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \tag{1}$$

durch äquivalente Umformungen. Es ist $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

Damit ist (1) gleichwertig mit

$$\frac{1}{n} < \varepsilon\,. \tag{2}$$

(b) Wir lösen (2) nach n auf und erhalten

$$n > \frac{1}{\varepsilon}\,. \tag{3}$$

(c) Wie man auch eine positive Zahl ε wählt, stets gilt dann für fast alle n: $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ergebnis:

Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ hat die Zahl 0 als Grenzwert.

Eine Folge, die Null als Grenzwert hat, nennt man auch **Nullfolge.**

Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist also eine Nullfolge.

■ 9 Wir zeigen: 2 ist *nicht* Grenzwert von $\left(\frac{7n+1}{3n}\right)$.

Lösung:

(a) Wir vereinfachen wiederum die linke Seite der Ungleichung $\left|\frac{7n+1}{3n} - 2\right| < \varepsilon$.

Es ist

$$\left|\frac{7n+1}{3n} - 2\right| = \left|\frac{7n+1}{3n} - \frac{2 \cdot 3n}{3n}\right| = \left|\frac{7n+1-6n}{3n}\right| = \left|\frac{n+1}{3n}\right| = \frac{n+1}{3n}$$

$$= \frac{n}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n}.$$

(b) Wir erkennen, daß die Ungleichung

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3n} < \varepsilon$ bei beliebiger Wahl von ε *nicht* für fast alle natürlichen Zahlen n erfüllt ist.

Wählen wir zum Beispiel $\varepsilon = \frac{1}{3}$, so gilt für kein n die Ungleichung $\frac{1}{3} + \frac{1}{3n} < \frac{1}{3}$.

Damit haben wir nachgewiesen, daß 2 *nicht* Grenzwert der Folge $\left(\frac{7n+1}{3n}\right)$ ist.

Ist eine Zahl g nicht Grenzwert einer Zahlenfolge (a_n), so ist damit aber noch nicht entschieden, ob die Zahlenfolge (a_n) konvergent oder divergent ist.
Wie wir bisher gesehen haben, gibt es Folgen, die einen Grenzwert haben (konvergente Folgen), und solche, die keinen Grenzwert haben (divergente Folgen). Es bleibt die Frage, ob der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist, mit anderen Worten:

Kann eine konvergente Folge zwei Grenzwerte haben?

● 11 Erläutern Sie unter Verwendung des Bildes B 20, daß eine konvergente Folge höchstens einen Grenzwert haben kann!

Hinweis: Begründen Sie die Behauptung indirekt, indem Sie annehmen, eine Folge (a_n) hätte zwei Grenzwerte a und b!

Ist eine Folge konvergent, so hat sie genau einen Grenzwert g.
Man schreibt dafür auch:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g$$

(Lies: „limes[1]) a_n für n gegen Unendlich ist gleich g“).

[1]) limes (lat.) – Grenze

Bild B 20

So haben wir also im Beispiel B 7 gezeigt, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2},$$

und im Beispiel B 8, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Die Ergebnisse bezüglich der in Lerneinheit 3 untersuchten Folgen lassen sich nun auch wie folgt darstellen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1.$$

Ist (a_n) eine konstante Folge, das heißt, gibt es eine reelle Zahl c, so daß für alle n gilt $a_n = c$, so konvergiert die Folge selbstverständlich gegen c, mit anderen Worten:
Stets ist $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Aufgaben

Zeigen Sie entsprechend dem Beispiel B 7, daß folgende Gleichungen gelten!

1.↑ a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n-1}{n} = -1$

2.↑ a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = -\frac{1}{2}$

3. Gegeben sei die Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{3n+1}{n}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Folge den Grenzwert 3 hat!

4. Gegeben sei die Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{2n-1}{n}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Folge den Grenzwert 2 hat!

b) Für welche natürlichen Zahlen n gilt $|a_n - 3| < \varepsilon$, wenn

$$\varepsilon = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\right) \text{ ist?}$$

b) Für welche natürlichen Zahlen n gilt $|a_n - 2| < \varepsilon$, wenn

$$\varepsilon = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\right) \text{ ist?}$$

Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen Nullfolgen sind!

5.↑ a) $\left(\frac{2}{n}\right)$ b) $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ c) $\left(2 + \frac{1}{n}\right)$

6.↑ a) $\left(\frac{10}{n}\right)$ b) $\left(4 - \frac{1}{n}\right)$ c) $\left(\frac{1}{n+5}\right)$

Zeigen Sie, daß die Zahl a nicht Grenzwert der Folge (a_n) ist!

7.↑ $a_n = \frac{5n+1}{n}$; $a = 4$

8.↑ $a_n = 3^n$; $a = 100$

5 Konvergenzverhalten monotoner Folgen

● 12 Wiederholen Sie den Satz von der oberen Grenze!

● 13 Welche Eigenschaften (Monotonie, Beschränktheit, Existenz von Grenzen, Konvergenz) hat die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$?

Die Frage, ob eine gegebene Zahlenfolge konvergiert oder nicht, ist in vielen Fällen schwierig zu beantworten. Noch komplizierter ist im allgemeinen die Bestimmung des Grenzwertes einer konvergenten Folge. Bei **monotonen Folgen** ist es jedoch, wie wir im folgenden zeigen werden, relativ einfach zu entscheiden, ob sie konvergieren oder nicht.

Die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ **wächst monoton und ist nach oben beschränkt.** Sie hat die obere Grenze 1 (↗ Beispiel B 4). Diese Zahl ist auch Grenzwert der Folge (↗ Lerneinheit 3). Die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ **konvergiert also gegen ihre obere Grenze.**

● 14 Zeigen Sie, daß die Folge $\left(-\frac{1}{n}\right)$ monoton wächst und nach oben beschränkt ist! Bestimmen Sie die obere Grenze und den Grenzwert dieser Folge! Was stellen Sie fest?

Konvergiert jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir eine beliebige Zahlenfolge (a_n), die folgende Voraussetzungen erfüllt (↗ Bild B 21):

(1) **(a_n) ist nach oben beschränkt.**
(2) **(a_n) wächst monoton.**

Was folgt aus diesen Voraussetzungen?

Aus (1) folgt (Anwendung des Satzes von der oberen Grenze), daß (a_n) **eine obere Grenze hat, diese sei G.**

Damit wissen wir:

(3) Für jede natürliche Zahl n gilt $a_n \leqq G$.
(4) Jede Zahl, die kleiner ist als G, kann nicht obere Schranke von (a_n) sein.

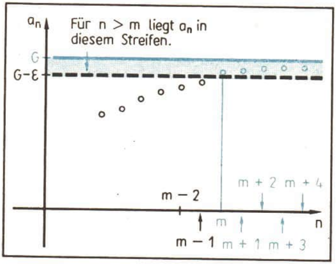


Bild B 21

Ist also ε **eine beliebige positive Zahl,** so ist die Zahl $G - \varepsilon$ nicht obere Schranke von (a_n). Folglich gibt es mindestens ein Folgenglied, das größer als $G - \varepsilon$ ist. Das heißt, es gibt eine natürliche Zahl m mit $G - \varepsilon < a_m$. Aus (2) folgt dann: Für *jede* natürliche Zahl n mit $n > m$ gilt

$$G - \varepsilon < a_m \leqq a_n.$$

Unter Verwendung von (3) erhalten wir hieraus:
Für jede natürliche Zahl n mit $n > m$ gilt (↗ Bild B 21)

$$G - \varepsilon < a_m \leqq a_n \leqq G.$$

Unterhalb von $G - \varepsilon$ können höchstens die Glieder $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ (also endlich viele) liegen. Das heißt aber:

Für fast alle n ist $G - \varepsilon < a_n \leqq G$.

Dann gilt erst recht:

Für fast alle n ist $G - \varepsilon < a_n < G + \varepsilon$.

Folglich ist

$$\lim_{n \to \infty} a_n = G.$$

Ergebnis:
Da wir die vorstehenden Überlegungen für eine *beliebige* monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge durchgeführt haben, haben wir bewiesen, daß *jede* monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergiert und daß ihr Grenzwert gleich ihrer oberen Grenze ist.

● 15 Beweisen Sie, daß jede nach unten beschränkte monoton fallende Zahlenfolge gegen ihre untere Grenze konvergiert!

Als Ergebnis dieser Untersuchungen erhalten wir den folgenden Satz.

▷ 2 **SATZ**
Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.
Dabei konvergiert jede beschränkte monoton wachsende Folge gegen ihre obere Grenze und jede beschränkte monoton fallende Folge gegen ihre untere Grenze.

Auf Grund von Satz B 2 gilt:

Um die Konvergenz einer monotonen Zahlenfolge nachzuweisen, genügt es, die Beschränktheit der betreffenden Folge zu zeigen.

Der Nachweis der Beschränktheit einer Zahlenfolge ist im allgemeinen wesentlich leichter zu führen als der Nachweis der Konvergenz.
Der Satz B 2 sagt nur aus, daß eine monotone und beschränkte Zahlenfolge konvergent ist (also einen Grenzwert hat), ohne die Zahl zu liefern, die Grenzwert der Folge ist. Nur in jenen Fällen, in denen die obere bzw. untere Grenze bekannt ist, kennt man auch den Grenzwert der betreffenden Folge. Die Bedeutung des Satzes B 2 besteht weniger darin, Grenzwerte von monotonen beschränkten Zahlenfolgen zu bestimmen, sondern vielmehr in der Feststellung, daß solche Folgen überhaupt einen Grenzwert haben. Im Kapitel D werden wir den Satz B 2 bei der Erarbeitung eines weiteren wichtigen Begriffes der Analysis anwenden.

■ 10 Die Folge $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ fällt monoton und ist nach unten beschränkt (↗ Beispiel B 2).
Nach Satz B 2 ist die Folge $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergent.

● 16 Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für jede natürliche Zahl n mit $n > 0$ gilt
$\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n-1}{n}$!

■ 11 Gegeben sei die Folge der Partialsummen der Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, also die Folge (s_n) mit $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$.
Wir zeigen, daß die Folge (s_n) monoton wächst und nach oben beschränkt ist und deshalb (nach Satz B 2) konvergiert.

Nachweis der Monotonie:

Für eine beliebige natürliche Zahl n $(n > 0)$ folgt aus

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

und

$$s_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

wegen $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ unmittelbar

$$s_n < s_{n+1}.$$

Ergebnis:
Die Folge (s_n) wächst (streng) monoton.

Nachweis der Beschränktheit:

Für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ gilt $n^2 > n^2 - n = (n-1)\,n$

und folglich

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\,n}.$$

Für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ gilt dann

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$s_n < 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)}.$$

Die Folge (s_n) ist sicher dann nach oben beschränkt, wenn die Folge $\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)}\right)$ nach oben beschränkt ist.
Nun gilt für jede natürliche Zahl n mit $n > 0$ (↗ Auftrag B 16)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \qquad \text{und folglich} \qquad s_n < 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} < 2.$$

Ergebnis:

Die Zahl 2 ist eine obere Schranke der Folge (s_n). Nach Satz B 2 ist die Folge (s_n) konvergent.

Bemerkung: Nach dieser Untersuchung wissen wir zwar, daß die Folge $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)$ konvergiert, ihren Grenzwert kennen wir jedoch nicht. Es würde wohl kaum jemand vermuten, daß diese Folge den Grenzwert $\frac{\pi^2}{6}$ hat (↗ auch Seite 83).

Aufgaben

1. Weisen Sie nach, daß die Folgen

a) (10^n); b) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$; c) $\left(\frac{2n}{3n+4}\right)$; d) $(1{,}1)^n$

monoton wachsen!
Welche dieser Folgen sind konvergent? Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

2. Weisen Sie nach, daß die Folgen

a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$; b) $\left(\frac{n+1}{2n}\right)$; c) $(0{,}9^n)$; d) $(-n^3)$

monoton fallen!
Welche dieser Folgen sind konvergent? Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

3. Berechnen Sie die ersten 10 Glieder der Folge $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)$! Vergleichen Sie $\frac{\pi^2}{6}$ mit a_{10}!
(Verwenden Sie dazu „Tabellen und Formeln", Seite 9!)

6 Grenzwertsätze für Zahlenfolgen

● 17 Zeigen Sie unter Verwendung des Monotoniegesetzes der Addition, daß für beliebige reelle Zahlen a, b, c und d gilt:
Wenn $a < b$ und $c < d$, so $a + c < b + d$!

Die Beispiele in der Lerneinheit 4 haben gezeigt, daß der Nachweis der Konvergenz einer Zahlenfolge recht aufwendig ist. Außerdem mußte eine Zahl g vorgegeben sein, um nachweisen zu können, ob g Grenzwert einer gegebenen Folge ist oder nicht. Auch der Satz B 2 sichert uns nur die *Existenz* des Grenzwertes einer monotonen und beschränkten Folge und liefert uns den Grenzwert nicht.
In dieser Lerneinheit wollen wir zeigen, wie man die Grenzwerte gewisser konvergenter Folgen mit Hilfe bereits bekannter Grenzwerte anderer Folgen **berechnen** kann. Unser Ziel besteht darin, gegebene Zahlenfolgen in einfachere Folgen zu zerlegen. Wenn es gelingt, eine gegebene Folge in *konvergente* Folgen mit bereits bekannten Grenzwerten zu zerlegen, so kann man aus den Grenzwerten der so erhaltenen Folgen den Grenzwert der gegebenen Folge *berechnen.*
Bevor wir diese Problematik näher untersuchen, wollen wir zunächst erörtern, wie man aus gegebenen Folgen neue Folgen bilden kann.

■ 12 Aus den Zahlenfolgen

$$(a_n): 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots \quad \text{und}$$

$$(b_n): 1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \frac{7}{12}, \ldots, \frac{n+1}{2n}, \ldots$$

erhalten wir durch gliedweise Addition die Folge

$$(a_n + b_n): 1, \frac{5}{4}, \frac{8}{6}, \frac{11}{8}, \frac{14}{10}, \frac{17}{12}, \ldots, \underbrace{\frac{n-1}{n} + \frac{n+1}{2n}}_{\frac{3n-1}{2n}}, \ldots$$

Analog kann man aus gegebenen Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) durch gliedweise Subtraktion, Multiplikation und unter gewissen Einschränkungen (welchen?) auch durch gliedweise Division neue Folgen bilden.

● 18 Bilden Sie aus den im Beispiel B 12 gegebenen Folgen durch gliedweise Subtraktion, Multiplikation und Division die Folgen $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$!

Aus dem Beispiel B 12 entnehmen wir, daß die Folge (c_n) mit $c_n = \frac{3n-1}{2n}$ die Summe der Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n = \frac{n-1}{n}$ und $b_n = \frac{n+1}{2n}$ ist. Man sagt auch: Die Folge (c_n) läßt sich in die Folgen (a_n) und (b_n) *zerlegen.*
Die Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent. Ihre Grenzwerte kennen wir bereits. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \quad (\nearrow \text{Seite } 91) \quad \text{und}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (\nearrow \text{Beispiel B } 7).$$

Kann man aus der Konvergenz der Folgen (a_n) und (b_n) auf die Konvergenz der Folge (c_n) schließen?

● 19 Berechnen Sie von der Folge (c_n) die Glieder c_{10}, c_{100}, c_{1000}, c_{10000} und c_{100000}!

Das Ergebnis des Auftrages B 19 legt die Vermutung nahe, daß die Folge (c_n) den Grenzwert $\frac{3}{2}$ hat.

● 20 Weisen Sie nach, daß die Folge $(c_n) = \left(\frac{3n-1}{2n}\right)$ den Grenzwert $\frac{3}{2}$ hat!

Mit der Lösung des Auftrages B 20 ist nachgewiesen, daß der Grenzwert der Folge (c_n) gleich der Summe der Grenzwerte der Folgen (a_n) und (b_n) ist.
Dieser Zusammenhang gilt nicht nur für das hier betrachtete Beispiel, wie der folgende Satz zeigt.

▷ 3

SATZ
Wenn die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren, so konvergiert auch die Folge $(a_n + b_n)$, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweis:
Voraussetzung: Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
Behauptung: Die Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$.
Um diese Behauptung zu beweisen, haben wir zu zeigen:
Bei jedem positiven ε gilt für fast alle n:

$$a + b - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon.$$

Wie erhalten wir diese Behauptung?

Zunächst einmal wählen wir eine beliebige positive Zahl ε. Für die weitere Beweisführung ist es zweckmäßig, mit der Zahl $\frac{\varepsilon}{2}$, die ebenfalls positiv ist, zu arbeiten. Aus der Voraussetzung erhalten wir unter Verwendung der Grenzwertdefinition:
Für fast alle n, etwa für alle n mit $n > n_1$ gilt

$$(1) \quad a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für fast alle n, etwa für alle n mit $n > n_2$ gilt

$$(2) \quad b - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < b + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Durch Addition der Ungleichungen (1) und (2) erhalten wir (↗ Auftrag B 17)

$$(3) \quad a + b - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon.$$

Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung (3)?

Die erste Ungleichung gilt für alle n mit $n > n_1$, die zweite für alle n mit $n > n_2$. Dann gilt die Ungleichung (3) gewiß für alle n mit $n > n_1$ und $n > n_2$, also in jedem Falle für alle n mit $n > n^*$, wobei n^* die größere der beiden Zahlen n_1, n_2 ist. Das heißt aber, sie gilt für fast alle n.

Da ε beliebig, aber positiv gewählt wurde, gilt unser Ergebnis für jedes positive ε.
Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ohne Beweis teilen wir hier mit, daß analoge Beziehungen auch für solche Folgen gelten, die durch gliedweise Subtraktion, Multiplikation und Division aus konvergenten Folgen entstanden sind.

▷ 4 **SATZ**

Wenn die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren, so konvergieren auch die Folgen $(a_n - b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n;$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ist $b_n \neq 0$ für alle n und überdies (b_n) keine Nullfolge, so konvergiert auch $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, und es ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Die Sätze B 3 und B 4 nennt man kurz **Grenzwertsätze für Zahlenfolgen.**

Aufgaben

1. Gegeben seien die Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n = \frac{3n-1}{2n}$ und $b_n = \frac{n+1}{n}$.
   a) Bilden Sie die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$!
   b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Sätze B 3 und B 4 die Grenzwerte dieser Folgen!
2. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $\left(\frac{7n+1}{n}\right)$, indem Sie diese Folge als Summe zweier konvergenter Folgen angeben!

7 Anwendung der Grenzwertsätze

In den folgenden Beispielen wollen wir zeigen, wie man die Konvergenz von Zahlenfolgen mit Hilfe der Grenzwertsätze nachweisen und ihre Grenzwerte bestimmen kann.

■ 13 Im Beispiel B 7 wurde unter Verwendung der Grenzwertdefinition gezeigt, daß die Folge $\left(\frac{n+1}{2n}\right)$ den Grenzwert $\frac{1}{2}$ hat. Unter Verwendung von Satz B 3 können wir den Grenzwert dieser Folge folgendermaßen bestimmen:
Für jede natürliche Zahl n mit $n > 0$ ist

$$\frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Die Folge $\left(\frac{n+1}{2n}\right)$ kann man also durch gliedweise Addition der Folgen $\left(\frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{2n}\right)$ erhalten.

Die Folge $\left(\frac{1}{2}\right)$ ist eine konstante Folge. Die Folge $\left(\frac{1}{2n}\right)$ ist eine Nullfolge. Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Nach Satz B 3 konvergiert dann auch die Folge $\left(\frac{n+1}{2n}\right)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

■ 14 Gegeben sei die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Wegen $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ entsteht die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ durch gliedweise Multiplikation der Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)$ mit sich selbst. Unter Verwendung von Satz B 4 erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

● 21 Begründen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Beispiel B 14, daß auch die Folgen $\left(\frac{1}{n^3}\right)$, $\left(\frac{1}{n^4}\right)$ und $\left(\frac{1}{n^5}\right)$ Nullfolgen sind!

■ 15 Für eine beliebige reelle Zahl a erhalten wir den Grenzwert der Folge $\left(\frac{a}{n^2}\right)$ folgendermaßen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(a \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = a \cdot 0 = 0.$$

■ 16 Gegeben sei die Folge $\left(\frac{3n^2 - 2n + 5}{5n^2 + 7n - 1}\right)$.
Die Folgen $(3n^2 - 2n + 5)$ und $(5n^2 + 7n - 1)$ wachsen monoton und sind nach oben nicht beschränkt (Begründung!), beide Folgen sind also divergent. In einem solchen Fall ist zunächst keine Aussage über das Konvergenzverhalten der gegebenen Folge möglich. Insbesondere darf man nicht folgern, daß diese dann auch divergent sein müsse.
Wir werden zeigen, daß die gegebene Folge konvergiert, indem wir sie in konvergente Folgen zerlegen. Dazu formen wir den Term $\frac{3n^2 - 2n + 5}{5n^2 + 7n - 1}$ derart um, daß mindestens im Nenner nur noch konstante Folgen beziehungsweise Nullfolgen auftreten. Das erreicht man, indem man im Zähler und Nenner die höchste im Nenner auftretende Potenz von n ausklammert und anschließend kürzt. Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt

$$\frac{3n^2 - 2n + 5}{5n^2 + 7n - 1} = \frac{n^2\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(5 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}}.$$

Für $n > 0$ kann man die gegebene Folge durch gliedweise Division aus den Folgen $\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)$ und $\left(5 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$ erhalten. Diese beiden Folgen, die sich wiederum aus einfacheren Folgen zusammensetzen lassen, sind konvergent.

Aus

$\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0,$

$\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} = 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ folgt

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 3$ und

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(5 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 5.$

Nach Satz B 4 konvergiert dann auch die gegebene Folge, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n + 5}{5n^2 + 7n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{5}.$$

Aufgaben

Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der Folgen!

1. ↑ a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ b) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$
c) $\left(\frac{1}{n^6}\right)$ d) $\left(\frac{-5}{n^4}\right)$
e) $\left(\frac{3n+4}{n-5}\right)$ f) $\left(\frac{n-5}{3n+4}\right)$
g) $\left(\frac{(3n-2)(3n+2)}{n^3+1}\right)$
h) $\left(\frac{(3n+1)^2-(n-1)^2}{(3n+1)^2-(n+1)^2}\right)$
i) $\left(\frac{5n^3-7n^2+8n-1}{-6n^3+5n^2-n+8}\right)$
k) $\left(\frac{n!}{(n+1)!-n!}\right)$

2. ↑ a) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$ b) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$
c) $\left(\frac{10^6}{n}\right)$ d) $\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$
e) $\left(\frac{3n-4}{n^2+1}\right)$ f) $\left(\frac{n^2+1}{n^3+6}\right)$
g) $\left(\frac{n^2-n+1}{2n^2-n+1}\right)$
h) $\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^3+5n}\right)$
i) $\left(\left(\frac{\sqrt{2}\cdot 10^n-1}{10^n}\right)^2\right)$
k) $\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}\right)$

3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert für jede natürliche Zahl m mit $m \geqq 1$ die Folge (a_n^m) gegen a^m!

Geben Sie jeweils eine Folge (a_n) mit folgenden Eigenschaften an!

4. ↑ a) (a_n) ist monoton fallend und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
b) (a_n) ist monoton wachsend und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
c) (a_n) ist nicht monoton und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

5. ↑ a) (a_n) ist monoton fallend und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$.
b) (a_n) ist monoton wachsend und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$.
c) (a_n) ist nicht monoton und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$.

Zusammenfassung

Schranken und Grenzen von Zahlenfolgen

Eine Zahl S ist **untere (obere) Schranke** einer Zahlenfolge (a_n)
$=_{\mathrm{Df}}$ Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$S \leqq a_n \quad (S \geqq a_n).$$

Eine Zahl G ist **untere (obere) Grenze** einer nach unten (oben) beschränkten Zahlenfolge (a_n)
$=_{\mathrm{Df}}$ G ist die größte untere (kleinste obere) Schranke von (a_n).

n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	-1	$1-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$1-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$1-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$	...

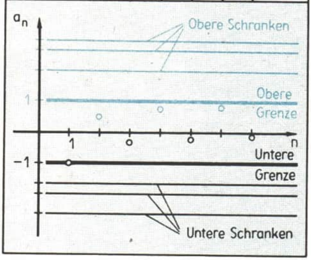


Bild B 22

Jede nach oben (unten) beschränkte Zahlenfolge hat eine obere (untere) Grenze.

Eine Zahlenfolge (a_n) **wächst (fällt) unbeschränkt,** wenn gilt:
Wie man auch eine reelle Zahl S wählt, stets gilt $a_n > S$ $(a_n < S)$ für fast alle natürlichen Zahlen n.

Die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = 2^n$ wächst unbeschränkt.
Die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = -10^n$ fällt unbeschränkt.

Grenzwert einer Zahlenfolge

(a_n) sei eine Zahlenfolge, g eine Zahl.
g **ist Grenzwert von** (a_n)
$=_{\mathrm{Df}}$ Bei jedem positiven ε gilt für fast alle n:

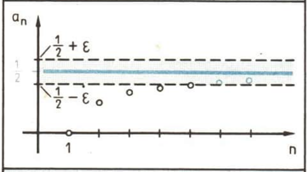
$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Man schreibt dafür

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Hat (a_n) einen Grenzwert, so nennt man (a_n) **konvergent.**
Anderenfalls heißt (a_n) **divergent.**
Eine konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.

$a_n = \dfrac{n-1}{2n}$; $n > 0$



Für fast alle n liegt a_n in dem blauen Streifen.

$\dfrac{1}{2}$ ist Grenzwert von $\left(\dfrac{n-1}{2n}\right)$. Bild B 23

(a)
Wir vereinfachen die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$, das heißt

$$\left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

durch äquivalente Umformung. Wegen

$$\left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-1-n}{2n}\right| = \left|-\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$$

ist (1) gleichwertig mit $\frac{1}{2n} < \varepsilon.$ (2)

(b)
Auflösen von (2) nach n liefert $n > \frac{1}{2\varepsilon}$.

(c)
Ist ε eine beliebige positive Zahl, so gibt es nur endlich viele natürliche Zahlen n mit $n \leqq \frac{1}{2\varepsilon}$. Also gilt für fast alle n:

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so nennt man (a_n) eine **Nullfolge.**

SATZ:
Jede monotone beschränkte Folge ist konvergent.

$\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{10^n}\right), \left(-\frac{1}{n}\right), \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ sind Nullfolgen.

Grenzwertsätze

Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$, falls (b_n) keine Nullfolge

Mit Hilfe der Grenzwertsätze lassen sich Grenzwerte gewisser konvergenter Zahlenfolgen auf bereits bekannte Grenzwerte einfacherer Folgen zurückführen.

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{4n^2-5n}$

a) Ausklammern der höchsten im Nenner vorkommenden Potenz von n im Zähler und Nenner und kürzen:

$$\frac{3n^2+2}{4n^2-5n} = \frac{n^2\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{5}{n}\right)} = \frac{3+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{5}{n}}$$

b) Anwenden der Grenzwertsätze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{4n^2-5n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{5}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n}} = \frac{3+0}{4-0} = \frac{3}{4}$$

Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit

8 Beispiele für unstetige Funktionen

● 22 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

a) $f(x) = 2x - 3$; b) $f(x) = x^2 - 5x + 4$!

Zur Erwärmung einer bestimmten Menge Eis ist die Zuführung von Wärmeenergie erforderlich. Bild B 24 zeigt die erforderliche Wärmemenge, die zugeführt werden muß, in Abhängigkeit von der Temperatur, die erreicht werden soll. Will man eine Temperatur erreichen, die – wenn auch nur wenig – über der Schmelztemperatur T_S liegt, so muß dem Eis neben der für die Temperaturerhöhung notwendigen Wärmemenge auch noch die Schmelzwärme zugeführt werden. Dadurch weist die Funktion an der Stelle T_S einen **Sprung** auf (↗ Bild B 24 auf Seite 104).

Wie dieses Beispiel zeigt, treten bei der Beschreibung von Vorgängen in der Natur auch Funktionen auf, die *nicht* zu den bereits bekannten Funktionen (lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Winkelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen) gehören.
Wir wollen deshalb unsere Kenntnisse über Funktionen erweitern, indem wir weitere Funktionen kennenlernen sowie Methoden und Begriffe entwickeln, um ihre Eigenschaften zu beschreiben.

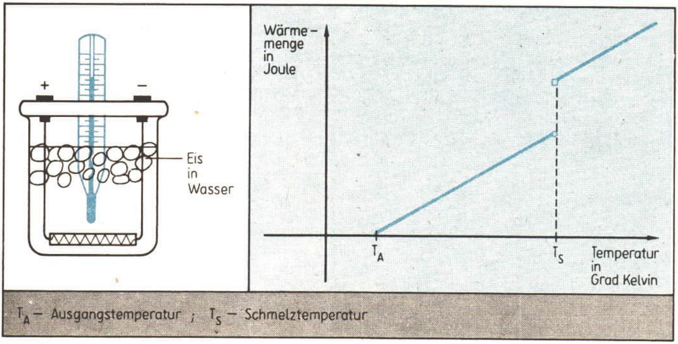


Bild B 24

● 23 Gegeben seien die Funktionen

$$(1)\ f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; \qquad (2)\ f(x) = |x|;$$

$$(3)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geqq 1 \end{cases}; \qquad (4)\ f(x) = \frac{|x|}{x}; \qquad (5)\ f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

In den Beispielen (1) bis (5) sind keine Definitionsbereiche angegeben. Wir vereinbaren, daß der Definitionsbereich von (1) die Menge aller reellen Zahlen x ist, für die $\frac{x^2-1}{x-1}$ erklärt ist. Entsprechend verfahren wir bei den anderen Funktionen.

a) Ermitteln Sie für jede der genannten Funktionen den Definitionsbereich!
b) Fertigen Sie für jede der Funktionen eine Wertetabelle an, indem Sie die Funktionswerte für folgende Zahlen x errechnen: -2; -1; 0; 0,5; 1,5; 2; 3; 4 !

In den Bildern B 25 bis B 29[1]) sind die Graphen der Funktionen (1) bis (5) aus Auftrag B 23 skizziert.

● 24 a) Welche der Funktionen (1) bis (5) in Auftrag B 23 ist monoton wachsend?
b) Geben Sie jeweils ein Intervall an, in dem die Funktion (2) bzw. (5) monoton fallend ist!
c) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion (3) rechnerisch!

Für $x \neq 1$ fällt die Funktion (1) mit der Funktion $g(x) = x + 1$ zusammen. Es ist nämlich $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$, und für $x \neq 1$ ist $x - 1 \neq 0$, so daß man $(x - 1)$ herauskürzen kann.

---

[1]) „□“ soll hier und in den folgenden Bildern bedeuten, daß der eingerahmte Punkt *nicht* zum Graph der Funktion gehört.
„○“ soll dagegen bedeuten, daß dieser Punkt zum Graph der Funktion gehört.

Die Funktionen (1), (3) und (5) zeigen an der Stelle 1 ein ungewöhnliches Verhalten, die Funktion (4) an der Stelle 0. Während man den Graph der Funktion (2) in einem Zuge (d. h. ohne den Zeichenstift abzusetzen) zeichnen könnte, gelingt das bei den Graphen der übrigen Funktionen nicht. Bei diesen muß der Zeichenstift an der Stelle 1 bzw. 0 abgesetzt werden. Man sagt, die Funktionen (1), (3) und (5) sind an der Stelle 1 **unstetig.** Die Funktion (4) ist an der Stelle 0 unstetig. Die Funktion (2) dagegen nennt man **an jeder Stelle stetig.**

Diese *anschauliche* Vorstellung von der Stetigkeit einer Funktion bedarf noch einer Präzisierung. In vielen Fällen steht uns ja der Graph der zu untersuchenden Funktion nicht zur Verfügung. Im Gegenteil: Den Graph der Funktion müssen wir erst durch Untersuchungen erarbeiten.

Deshalb werden in den folgenden Lerneinheiten Methoden entwickelt, die es gestatten, das Verhalten einer Funktion in einer Umgebung einer Stelle zu beschreiben. Wir werden dabei Zahlenfolgen verwenden, die gegen die betreffende Stelle konvergieren. So wird der Grenzwertbegriff für Zahlenfolgen ein wichtiges Hilfsmittel beim Untersuchen von Funktionen.

Bild B 25

(1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

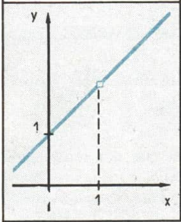


Bild B 26

(2) $f(x) = |x|$

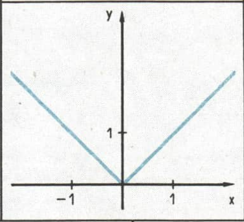
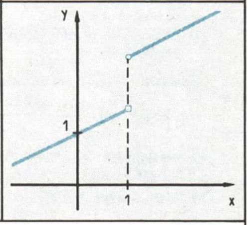


Bild B 27

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geqq 1 \end{cases}$



(4) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

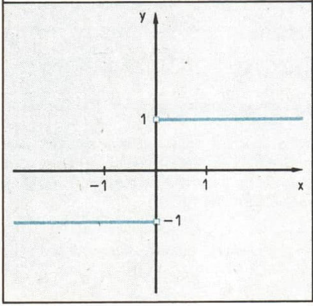


Bild B 28

(5) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

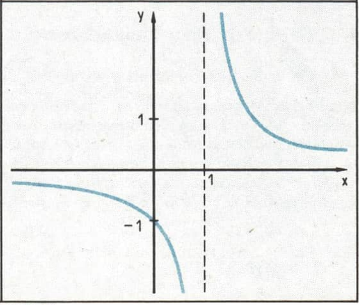


Bild B 29

Aufgaben

1. Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f!
b) Zeichnen Sie den Graph von f auf Grund einer Wertetabelle!
c) Mit welcher linearen Funktion stimmt f für alle x ihres Definitionsbereiches überein?

2. Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f!
b) Zeichnen Sie den Graph von f auf Grund einer Wertetabelle!
c) Mit welcher linearen Funktion stimmt f für alle x ihres Definitionsbereiches überein?

3. Es sei $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x + 1}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f!
b) Skizzieren Sie den Graph von f!
c) Mit welcher quadratischen Funktion stimmt f für alle x ihres Definitionsbereiches überein?
d) Geben Sie je ein Intervall an, in dem f monoton fällt beziehungsweise monoton wächst!

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = |x^2 - 1|.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f!
b) Zeichnen Sie den Graph von f!
c) Geben Sie ein Intervall an, in dem f monoton wächst!
d) Bestimmen Sie die Nullstellen von f!

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f!
b) Zeichnen Sie den Graph von f!
c) Geben Sie ein Intervall an, in dem f monoton fällt!
d) Für welche Zahlen x ist $f(x) = 1$?

9 Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

● 25 Geben Sie fünf Zahlenfolgen an, die den Grenzwert 1 haben!

Es sei f eine Funktion, die in einer Umgebung einer Stelle x_0 definiert ist.[1]) Die Zahl x_0 selbst *kann, aber muß nicht* zum Definitionsbereich von f gehören.
Um das Verhalten der Funktion f in dieser Umgebung zu beschreiben, wählen wir eine beliebige Zahlenfolge (x_n), die gegen x_0 konvergiert und deren Glieder alle in der Umgebung liegen, aber von x_0 verschieden sind. Da die Funktion f nach Voraussetzung in der betreffenden Umgebung definiert ist, gibt es zu jeder Zahl x_n der Folge (x_n) genau eine Zahl $f(x_n)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & \ldots, & x_n, & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
f(x_1), & f(x_2), & f(x_3), & f(x_4), & \ldots, & f(x_n), & \ldots
\end{array}$$

[1]) Wenn wir von einer Umgebung einer Zahl x_0 sprechen, so ist stets eine ε-Umgebung von x_0 gemeint.

Die Funktionswerte

$$f(x_1),\quad f(x_2),\quad f(x_3),\quad f(x_4),\quad \dots,\quad f(x_n),\quad \dots$$

bilden ebenfalls eine Zahlenfolge. So wird also der Folge (x_n) eine eindeutig bestimmte Folge $(f(x_n))$ zugeordnet. Mit Hilfe solcher Folgen $(f(x_n))$ können wir das Verhalten der Funktion f in der Umgebung von x_0 charakterisieren.

● 26 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x + 1$ und die Folge (x_n) mit $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folge $(f(x_n))$! Zeichnen Sie den Graph von f, und markieren Sie auf ihm die Punkte $(x_n; f(x_n))$!

Gegeben seien die Funktionen (↗ Bilder B 25 und B 27)

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für} \quad x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für} \quad x \geqq 1 \end{cases}$$

Die Funktion f_1 ist an der Stelle 1 nicht definiert. Für alle x mit $x \neq 1$ stimmt die Funktion f_1 mit der Funktion $g(x) = x + 1$ überein (↗ Seite 104).
Die Funktion f_2 ist für alle x definiert. Ihr Graph hat an der Stelle 1 einen Sprung.
Wir wollen untersuchen, wie sich die Funktionen f_1 und f_2 bei Annäherung an die Stelle 1 verhalten. Dazu betrachten wir Zahlenfolgen (x_n) mit

$$(*)\ \lim_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \text{und} \quad x_n \neq 1 \text{ für alle } n$$

und untersuchen jeweils die Folgen der zugehörigen Funktionswerte $(f_1(x_n))$ und $(f_2(x_n))$.
Wir wählen zunächst *eine* Folge (x_n), die die Bedingung (*) erfüllt, zum Beispiel

$$(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Wegen $x_n < 1$ für alle n wird dieser Folge durch die Funktion

f_1 die Folge $(f_1(x_n))$ mit

$$f_1(x_n) = g(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \quad \text{bzw.}$$

$$f_1(x_n) = 2 - \frac{1}{n}$$

zugeordnet. Die Folge $(f_1(x_n))$ konvergiert gegen 2.

f_2 die Folge $(f_2(x_n))$ mit

$$f_2(x_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \quad \text{bzw.}$$

$$f_2(x_n) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$$

zugeordnet. Die Folge $(f_2(x_n))$ konvergiert gegen $\frac{3}{2}$.

Die gleichen Untersuchungen führen wir für die Folge $(\bar{x}_n)$ mit $\bar{x}_n = 1 + \frac{1}{n}$ durch, die ebenfalls die Bedingung (*) erfüllt.
Wegen $\bar{x}_n > 1$ für alle n gilt

$$f_1(\bar{x}_n) = g(\bar{x}_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1$$

$$f_1(\bar{x}_n) = 2 + \frac{1}{n}.$$

Die Folge $(f_1(\bar{x}_n))$ konvergiert ebenfalls gegen 2.

$$f_2(\bar{x}_n) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2$$

$$f_2(\bar{x}_n) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Die Folge $(f_2(\bar{x}_n))$ konvergiert gegen $\frac{5}{2}$.

Diese Betrachtungen zeigen bereits, daß sich die Funktionen f_1 und f_2 bei Annäherung an die Stelle 1 sehr unterschiedlich verhalten.
Bei der Funktion f_1 konvergiert sowohl die Folge $(f_1(x_n))$ als auch die Folge $(f_1(\bar{x}_n))$ gegen 2.
Bei der Funktion f_2 haben die Folgen $(f_2(x_n))$ und $(f_2(\bar{x}_n))$ verschiedene Grenzwerte.

*Konvergiert bei der Funktion f_1 für **jede** gegen 1 konvergierende Folge (x_n) die Folge $(f_1(x_n))$ gegen 2?*

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir eine ganz *beliebige* Folge (x_n) mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \text{und} \quad x_n \neq 1 \quad \text{für alle } n.$$

Die durch (x_n) eindeutig bestimmte Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die Folge $(f_1(x_n))$ mit

$$f_1(x_n) = g(x_n) = x_n + 1\,.$$

Nach Voraussetzung ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} (f_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (x_n + 1) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} 1 = 2.$$

Ergebnis:

Für *jede* gegen 1 konvergierende Folge (x_n), deren Glieder Elemente des Definitionsbereiches der Funktion f_1 sind, konvergiert die Folge $(f_1(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte gegen 2.
Mit anderen Worten: Wenn wir nur *genügend nahe* an die Stelle 1 herangehen, so erhalten wir Funktionswerte, die sich *beliebig wenig* von der Zahl 2 unterscheiden.
Das Verhalten einer Funktion f an einer Stelle x_0, zum Beispiel der Funktion $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ an der Stelle 1, erfassen wir durch die folgende Definition.

▶ 4

DEFINITION
Es sei f eine Funktion, x_0 und g seien reelle Zahlen.
f sei in einer Umgebung von x_0 – eventuell unter Ausschluß von x_0 – definiert.
f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g
$=_{\mathrm{Df}}$ Für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) konvergiert die Folge $(f(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte gegen g.

Bemerkung: Dabei sind nur solche Folgen (x_n) zugelassen, deren Glieder von x_0 verschieden sind und in der gewählten Umgebung von x_0 liegen.

Hat die Funktion f an der Stelle x_0 den Grenzwert g, so bedeutet das anschaulich, daß der Graph von f sowohl von links als auch von rechts in den Punkt $(x_0; g)$ einmündet, ganz unabhängig davon, ob f an der Stelle x_0 definiert ist oder nicht.
Ist g Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0, so schreibt man

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

(Lies: „Limes f von x für x gegen x_0 gleich g“).

Das Ergebnis der oben durchgeführten Untersuchung besagt, daß die Funktion $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ $(x \neq 1)$ an der Stelle 1 den Grenzwert 2 hat. Es ist also

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2.$$

Die Funktion $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für} \quad x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für} \quad x \geqq 1 \end{cases}$ hat an der Stelle 1 keinen Grenzwert, da für die Folgen (x_n) und $(\bar{x}_n)$ mit $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ bzw. $\bar{x}_n = 1 + \frac{1}{n}$ die Folgen $(f_2(x_n))$ und $(f_2(\bar{x}_n))$ gegen verschiedene Zahlen konvergieren.

■ 17 Hat die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle 1 einen Grenzwert?

Lösung:

(1) Wir wählen eine beliebige Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ und $x_n \neq 1$ für alle n.

(2) Wir bilden zu der Folge (x_n) die Folge $(f(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte und erhalten $(f(x_n)) = (x_n^2 + 1)$.

(3) Wir untersuchen die Folge $(f(x_n))$ auf Konvergenz. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + 1) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + \lim_{n\to\infty} 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

Ergebnis:

Da (x_n) eine beliebige gegen 1 konvergierende Folge mit $x_n \neq 1$ für alle n ist, konvergiert für jede gegen 1 konvergierende Folge (x_n) die Folge $(f(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte gegen 2. Also ist $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 1) = 2$.

■ 18 Es ist zu zeigen, daß die Funktion $f(x) = |x|$ (↗ Bild B 26) an der Stelle 0 den Grenzwert 0 hat.

Lösung:

(1) Wir wählen eine beliebige Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $x_n \neq 0$ für alle n.

(2) Wir bilden zu der Folge (x_n) die Folge $(f(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte und erhalten die Folge $(f(x_n)) = (|x_n|)$.

(3) Wir zeigen, daß die Folge $(|x_n|)$ eine Nullfolge ist. Nach Voraussetzung ist (x_n) eine Nullfolge. Bei jedem positiven ε gilt also für fast alle n die Ungleichung

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon.$$

Dann ist auch die Folge $(|x_n|)$ eine Nullfolge, denn es ist $||x_n| - 0| = ||x_n|| = |x_n|$.

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

Ergebnis: $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

● 27 Begründen Sie: Jede für alle x definierte konstante Funktion $f(x) = c$ hat an der beliebig gewählten Stelle x_0 den Grenzwert c!

● 28 Zeigen Sie: An der beliebig gewählten Stelle x_0 hat die Funktion

a) $f(x) = x$ den Grenzwert x_0; b) $f(x) = 5x$ den Grenzwert $5x_0$!

Nach Definition B 4 hat eine Funktion f an der Stelle x_0 einen Grenzwert, wenn für *jede* gegen x_0 konvergierende Folge (x_n), deren Glieder zum Definitionsbereich von f gehören und von x_0 verschieden sind, die Folge $(f(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte konvergiert, und zwar immer gegen *ein und dieselbe Zahl.* Damit besagt Definition B 4 aber auch, daß eine Funktion f an der Stelle x_0 keinen Grenzwert hat, wenn es unter all den gegen x_0 konvergierenden Folgen (x_n) auch nur *eine* gibt, für die die Folge $(f(x_n))$ *divergent* ist.

■ 19 Es ist zu zeigen, daß die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (↗ Bild B 29) an der Stelle 1 keinen Grenzwert hat.

Lösung:

Wir zeigen, daß es eine gegen 1 konvergierende Folge (x_n) gibt, für die die Folge $(f(x_n))$ divergiert. Wählen wir zum Beispiel die Folge (x_n) mit $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, so gilt

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$ und $x_n \neq 1$ für alle n.

Die Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die Folge $(f(x_n))$ mit

$$f(x_n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n.$$

Die Folge (n) ist (als unbeschränkt wachsende Folge) divergent.

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1}$ hat an der Stelle 1 keinen Grenzwert.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle -2!

2. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1}$ an der Stelle 2!

3. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $f(x) = x^0$, und untersuchen Sie, ob die Funktion f an der Stelle 0 einen Grenzwert hat!

4. Wodurch unterscheiden sich die Funktionen $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = \frac{x^3 + x}{x}$? Ermitteln Sie die Grenzwerte der Funktionen f und g an der Stelle 0!

5. Hat die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ an der Stelle 3 einen Grenzwert?

6. Hat die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$ an der Stelle -2 einen Grenzwert?

7. Begründen Sie, daß die Funktion $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (↗ Bild B 28) an der Stelle 0 keinen Grenzwert hat!
Hinweis: Geben Sie zwei verschiedene Nullfolgen an, für die die Folgen der zugehörigen Funktionswerte der Funktion f gegen verschiedene Grenzwerte konvergieren!

10 Grenzwertsätze für Funktionen

Mit Hilfe der Grenzwertsätze für Zahlenfolgen konnten wir die Berechnung der Grenzwerte gegebener Folgen auf bereits bekannte Grenzwerte zurückführen. Den Begriff „Grenzwert einer Funktion f an einer Stelle x_0“ haben wir unter Verwendung des Konvergenzbegriffes für Zahlenfolgen definiert.
Aus den Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen folgen nun analoge Sätze für Grenzwerte von Funktionen. Mit ihrer Hilfe kann man die Grenzwerte gewisser Funktionen auf bereits bekannte Grenzwerte einfacherer Funktionen zurückführen.
Diese sogenannten **Grenzwertsätze für Funktionen** wollen wir in dieser Lerneinheit kennenlernen und anwenden. Auf die Herleitung dieser Sätze aus den entsprechenden Sätzen für Zahlenfolgen verzichten wir hier.
Zunächst wollen wir jedoch kurz erörtern, wie man aus gegebenen Funktionen neue Funktionen bilden kann, um dann – wie bereits bei Zahlenfolgen – auch gegebene Funktionen in einfachere Funktionen zerlegen zu können.
Es seien u und v Funktionen, die einen gemeinsamen Definitionsbereich D haben.
Unter der **Summe der Funktionen u und v** versteht man diejenige Funktion s, bei der für jedes $x \in D$ gilt:

$$s(x) = u(x) + v(x).$$

■ 20 Gegeben seien die Funktionen u und v mit $u(x) = x^2 + 1$ und $v(x) = 5x$. Die Summe der Funktionen u und v ist die Funktion s mit $s(x) = x^2 + 5x + 1$.

● 29 Es seien u und v Funktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich D.
Wie wird man – analog zur Bildung der Summe s – die Differenz d, das Produkt p und den Quotienten q der Funktionen u und v definieren?
Was ist bei der Bildung des Quotienten zu beachten?
Bilden Sie die Differenz d, das Produkt p und den Quotienten q der im Beispiel B 20 gegebenen Funktionen u und v!

● 30 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + 5x + 1$.
Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion f an der Stelle 1!
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis unter Berücksichtigung des Beispiels B 20 mit den Ergebnissen von Beispiel B 17 und Auftrag B 28!

▷ 5

SATZ
Wenn die Funktionen u und v an der Stelle x_0 einen Grenzwert haben, so gilt:

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} (u(x) + v(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} u(x) + \lim\limits_{x \to x_0} v(x);$

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} (u(x) - v(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} u(x) - \lim\limits_{x \to x_0} v(x);$

(c) $\lim\limits_{x \to x_0} (u(x) \cdot v(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} u(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} v(x);$

(d) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)}$, **falls** $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) \neq 0.$

■ 21 Den Grenzwert der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle 1 (↗ Beispiel B 17) können wir jetzt folgendermaßen berechnen.
Die Funktion f ist die Summe der Funktionen u und v mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = 1$.

Die Funktion u ist das Produkt der Funktion $w(x) = x$ mit sich selbst.
Nach Auftrag B 28 bzw. B 27 gilt $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ und $\lim\limits_{x \to 1} 1 = 1$.

Nach Satz B 5 (c) folgt

$$\lim_{x \to 1} x^2 = \lim_{x \to 1} x \cdot \lim_{x \to 1} x = 1\,.$$

Unter Verwendung von Satz B 5 (a) erhält man

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 1 = 2\,.$$

■ 22 Hat die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 + 8x}$ $(x \neq 0)$ an der Stelle 0 einen Grenzwert?

Lösung:

Für jedes $x \neq 0$ gilt $\dfrac{x^2 - 5x}{x^2 + 8x} = \dfrac{x(x-5)}{x(x+8)} = \dfrac{x-5}{x+8}$.

Für $x \neq 0$ ist die Funktion f der Quotient der linearen Funktionen $u(x) = x - 5$ und $v(x) = x + 8$.

Es ist $\lim\limits_{x \to 0} (x - 5) = -5$ und $\lim\limits_{x \to 0} (x + 8) = 8$.

Unter Verwendung von Satz B 5 (d) erhält man

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-5}{x+8} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} (x-5)}{\lim\limits_{x \to 0} (x+8)} = -\frac{5}{8}.$$

Ergebnis:

Die Funktion f hat an der Stelle 0 den Grenzwert $-\dfrac{5}{8}$.

■ 23 Hat die Funktion f mit $f(h) = \dfrac{2h + h^2}{h}$ $(h \neq 0)$ an der Stelle 0 einen Grenzwert?

Lösung:

Für $h \neq 0$ gilt $\dfrac{2h + h^2}{h} = \dfrac{h(2+h)}{h} = 2 + h$.

Nun ist $\lim\limits_{h \to 0} (2 + h) = 2$

und folglich auch $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h + h^2}{h} = 2$.

Ergebnis:

Die Funktion f hat an der Stelle 0 den Grenzwert 2.

■ 24 Es ist der Grenzwert der Funktion f mit $f(h) = \dfrac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$ $(h \neq 0)$ an der Stelle 0 zu bestimmen.

Lösung:

Für $h \neq 0$ gilt $f(h) = \dfrac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \dfrac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 + h$.

Nach dieser Umformung erhält man

$$\lim_{h \to 0} f(h) = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0\,.$$

Ergebnis:

$$\lim_{h \to 0} f(h) = 2x_0$$

Aufgaben

Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse der Aufträge B 27 und B 28 sowie des Satzes B 5 folgende Grenzwerte!

1.↑ a) $\lim\limits_{x \to 3} x^3$ b) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} (5x^4 + 3x^3 - x^2 + 1)$

2.↑ a) $\lim\limits_{x \to 3} x^4$ b) $\lim\limits_{x \to -1} (1 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to -1} (5x^4 + 3x^3 - x^2 + 1)$

3.↑ a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{1 + x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{1 + x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x}{x^3 - 5x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 5x}{x^3 + 6x^2 - x}$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x - 1}$

4.↑ • a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{1 + x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 1}{1 + x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 4x}{x^3 - 5x}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 5x}{x^3 + 6x^2 - x}$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \left(3x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}\right)$

5.↑ a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + h}{h}$ b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}$

6.↑ a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h - h^2}{h}$ b) $\lim\limits_{h \to 1} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h}$

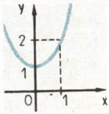
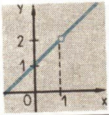
11 Stetigkeit

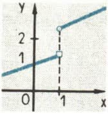
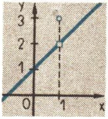
In den vorangegangenen Lerneinheiten haben wir das Verhalten der Funktionen $f(x) = x^2 + 1$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{und} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 \text{ für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 \text{ für } x \geqq 1 \end{cases}$$

in einer Umgebung der Stelle 1 untersucht.

Wir stellen die Ergebnisse in nachfolgender Tabelle zusammen und fügen ein viertes Beispiel hinzu.

$f(x) = x^2 + 1$		$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ $f(1) = 2$
$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$		$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ f ist an der Stelle 1 nicht definiert.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geqq 1 \end{cases}$		$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existiert nicht. $f(1) = 2{,}5$
$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{für } x \neq 1 \\ 3 & \text{für } x = 1 \end{cases}$		$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ $f(1) = 3$

Der Graph von f läßt sich in einer Umgebung der Stelle 1 nur im Falle des ersten Beispiels ohne Absetzen des Stiftes zeichnen. In diesem Falle ist f an der Stelle 1 definiert, es existiert $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, und es ist $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. In allen anderen Fällen ist eine der Bedingungen nicht erfüllt.
Damit gelingt uns eine präzise Definition der in Lerneinheit 8 bereits anschaulich gewonnenen Eigenschaft der **Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle.**

▶ 5

DEFINITION

***f* ist stetig an der Stelle x_0** $=_{Df}$ **(1) f ist an der Stelle x_0 definiert**
und
(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert[1]
und
(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Bemerkung: Die Bedingung (3) der Definition B 5 wird natürlich erst sinnvoll, wenn f an der Stelle x_0 definiert ist und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, das heißt, wenn die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind.
Ist auch nur eine der drei Bedingungen dieser Definition nicht erfüllt, so heißt **f an der Stelle x_0 unstetig.**

■ 25 a) Die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ ist an der Stelle 1 stetig; denn
(1) f ist an der Stelle 1 definiert, es ist $f(1) = 2$;
(2) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 1)$ existiert, es ist $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2$ (↗ Beispiel B 21);
(3) es ist $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist an der Stelle 1 nicht stetig. Zwar existiert $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (↗ Seite 108), aber f ist an der Stelle 1 nicht definiert.

[1]) Das bedeutet (↗ Definition 4), daß die Funktion f sogar in einer Umgebung von x_0 definiert sein muß.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für} \quad x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für} \quad x \geqq 1 \end{cases}$ ist an der Stelle 1 nicht stetig.

Es ist zwar $f(1) = 2{,}5$; aber $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existiert nicht (↗ Seite 109).

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{für} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$ ist an der Stelle 1 nicht stetig.

Zwar existiert $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ und

f ist auch an der Stelle 1 definiert, aber es ist $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

■ 26 a) Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle 0 stetig, denn f ist an der Stelle 0 definiert, es existiert $\lim\limits_{x \to 0} |x|$ (↗ Beispiel B 18), und es ist $\lim\limits_{x \to 0} |x| = f(0)$.

b) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ ist an der Stelle 1 nicht stetig, da sie an dieser Stelle nicht definiert ist (↗ Bild B 29). Wählt man jedoch zum Beispiel irgendeine Stelle x_0 aus dem Intervall $(2; 3)$, so ist

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} (x - 1)} = \frac{1}{x_0 - 1} = f(x_0)\,.$$

Das heißt, f ist an jeder Stelle des Intervalls $(2; 3)$ stetig.

Ist eine Funktion f an *jeder* Stelle eines Intervalls I stetig, so sagt man kurz: **f ist in I stetig.**
Bemerkung: Falls I ein abgeschlossenes Intervall $\langle a; b \rangle$ ist, fordern wir $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$ bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(b)$ nur für solche Folgen (x_n), die ganz im Intervall verlaufen und gegen a bzw. b konvergieren. Das bedeutet, daß wir uns der Zahl a nur von rechts und der Zahl b nur von links nähern.
Ist eine Funktion f an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereiches stetig, so sagt man kurz:
f ist stetig.

■ 27 Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist im Intervall $\langle 1; 2 \rangle$ und auch im Intervall $(0; 2)$ stetig, nicht aber im Intervall $(-1; 1)$, denn im zuletzt genannten Intervall liegt die Zahl 0, für die f nicht definiert ist.
Für alle $x_0 \neq 0$ dagegen ist f definiert, und es gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0)\,.$$

Also ist f für alle $x_0 \neq 0$ stetig, das heißt, f ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig.

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

Bemerkung: Wie Beispiel B 27 zeigt, kann eine stetige Funktion f in einem Intervall durchaus unstetig sein, nämlich dann, wenn das Intervall eine Zahl enthält, die nicht zum Definitionsbereich von f gehört.

■ 28 *Beispiel einer Funktion, die überall definiert, aber an keiner Stelle stetig ist.*

Es sei $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \text{ eine rationale Zahl} \\ 2, \text{ falls } x \text{ eine irrationale Zahl} \end{cases}$

Diese Funktion (↗ Bild B 30), die an jeder Stelle definiert ist, ist an keiner Stelle x_0 stetig, weil an keiner Stelle x_0 der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$ existiert. Ist nämlich (x_n) eine Folge von rationalen Zahlen, die gegen x_0 konvergiert, so ist $f(x_n) = 1$ für alle n und demzufolge $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_0) = 1$.
Ist dagegen (x_n) eine Folge von irrationalen Zahlen, die gegen x_0 konvergiert, so ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 2$.

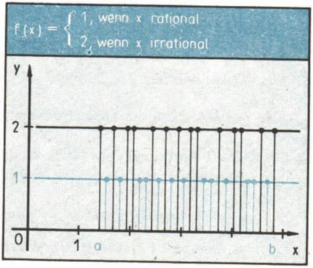


Bild B 30

Aufgaben

1. Prüfen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ stetig sind!
   a) $f(x) = x + 1$
   b) $f(x) = x^2$
   c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$

2. Prüfen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle $x_0 = 2$ stetig sind!
   a) $f(x) = x + 2$
   b) $f(x) = x^2$
   c) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{für } x \leqq 2 \\ x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

Beweisen Sie, daß folgende Funktionen stetig sind (das heißt, an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig sind)!

3.↑ a) $f(x) = x$
   b) $f(x) = 3x + 4$
   c) $f(x) = 3$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

4.↑ a) $f(x) = x^2$
   b) $f(x) = 2x^2 - 1$
   c) $f(x) = -2$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

12 Eigenschaften stetiger Funktionen

Die **Stetigkeit** einer Funktion in einem **abgeschlossenen Intervall** hat weitreichende anwendungsfähige Folgerungen.
Gegeben sei die Gleichung $x^3 - x - 3 = 0$.

Hat diese Gleichung eine Lösung x_0 mit $0 \leqq x_0 \leqq 2$?

Die Fragestellung ist gleichwertig damit, ob die Funktion $f(x) = x^3 - x - 3$ im Intervall $\langle 0; 2\rangle$ eine Nullstelle hat.
Es ist $f(0) = -3$ und $f(2) = 2^3 - 2 - 3 = 3$.
Zum Graph von f gehören also die Punkte $(0; -3)$ und $(2; 3)$. Der eine Punkt liegt unterhalb, der andere oberhalb der x-Achse. Da die Funktion f in dem Intervall $\langle 0; 2\rangle$ stetig ist, kann man den Graph von f zeichnen, ohne den Zeichenstift abzusetzen. Man wird deshalb beim Zeichnen des Graphen im Intervall $\langle 0; 2\rangle$ wenigstens einmal die x-Achse schneiden müssen (↗ Bild B 31). Das bedeutet aber, daß der Graph von f im Intervall $\langle 0; 2\rangle$ wenigstens einen Schnittpunkt mit der x-Achse, das heißt f im Intervall $\langle 0; 2\rangle$ eine Nullstelle haben muß.
Diese anschaulich gewonnene Eigenschaft gilt tatsächlich für stetige Funktionen:

Satz von Bolzano

> Ist f eine in einem abgeschlossenen Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion, und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen, so gibt es wenigstens eine Stelle x_0 im Intervall $\langle a; b\rangle$ mit $f(x_0) = 0$.

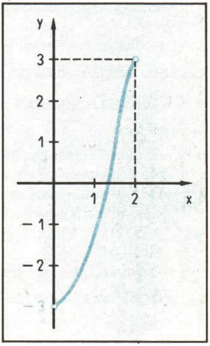


Bild B 31

Diese Aussage kann sogar noch verallgemeinert werden.
Ist zum Beispiel $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so ist 0 nur ein spezieller Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$.
Ist y irgendeine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so muß auch diese unter den Funktionswerten der im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetigen Funktion vorkommen (↗ Bild B 32). Es kommt auch gar nicht darauf an, daß $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist, wenn nur $f(a) \neq f(b)$ gilt (↗ Bild B 33).

Bild B 32

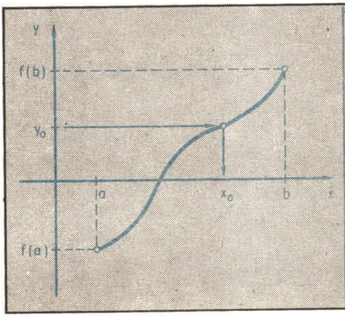
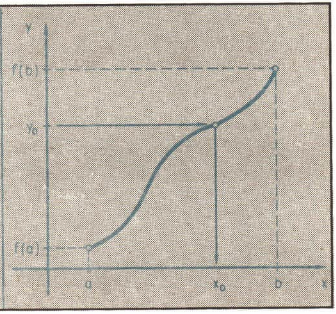


Bild B 33



Unsere Überlegungen führen zu dem folgenden Satz.

▷ 6

SATZ über die Annahme der Zwischenwerte Folgerung

Wenn

***f* eine in einem abgeschlossenen Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion ist und $f(a) \neq f(b)$ gilt,**

so

nimmt *f* im Intervall $\langle a; b\rangle$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens einmal an.

Auf den Beweis des Satzes B 6, der sich auf die Definition B 5 stützt, verzichten wir hier.

Mit Hilfe von Satz B 6 können wir Nullstellen einer Funktion näherungsweise berechnen.

■ 29 Es ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - x - 3$ zu berechnen.

Lösung:

Wir hatten bereits $f(0) = -3$ und $f(2) = 3$ ermittelt.
Da f im Intervall $\langle 0; 2\rangle$ stetig ist, hat f in diesem Intervall eine Nullstelle x_0.
Durch Ausrechnen weiterer Funktionswerte von f im Intervall $\langle 0; 2\rangle$ versuchen wir, die Lage einer Nullstelle x_0 weiter einzugrenzen.
Aus $f(1) = 1 - 1 - 3 = -3$ folgt, daß f im Intervall $\langle 1; 2\rangle$ eine Nullstelle haben muß, also $1 < x_0 < 2$.
Wir berechnen den Funktionswert von f an der Stelle 1,5 und erhalten

$$f(1{,}5) = (1{,}5)^3 - 1{,}5 - 3 = 1{,}5((1{,}5)^2 - 1) - 3 = 1{,}5 \cdot 1{,}25 - 3 = -1{,}125.$$

Folglich hat f im Intervall $\langle 1{,}5; 2\rangle$ eine Nullstelle x_0, also $1{,}5 < x_0 < 2$.

Aus $f(1{,}7) = (1{,}7)^3 - 1{,}7 - 3 = 1{,}7((1{,}7)^2 - 1) - 3 = 0{,}213$
und $f(1{,}6) = (1{,}6)^3 - 1{,}6 - 3 = 1{,}6((1{,}6)^2 - 1) - 3 = -0{,}504$

erhalten wir $1{,}6 < x_0 < 1{,}7$. Damit gilt:
Eine Nullstelle x_0 von f liegt zwischen 1,6 und 1,7.

● 31 a) Erläutern Sie an Hand des Bildes B 34, daß in der Formulierung von Satz B 6 „wenigstens" *nicht* durch „genau" ersetzt werden kann!

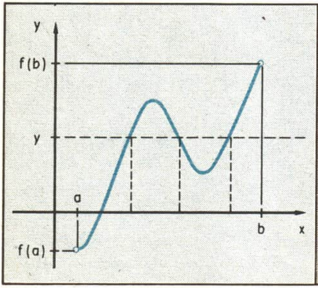


Bild B 34

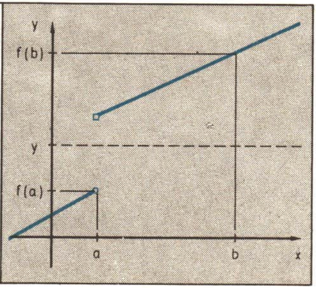


Bild B 35

b) Erläutern Sie an Hand des Bildes B 35, daß im Satz B 6 die Stetigkeit von f in dem *abgeschlossenen* Intervall $\langle a; b\rangle$ und nicht nur in dem *offenen* Intervall $(a; b)$ gefordert werden muß!

Wir wollen uns im Hinblick auf spätere Anwendungen noch einer weiteren Eigenschaft stetiger Funktionen zuwenden. Dazu betrachten wir zwei Funktionen f und g in geeigneten Intervallen (↗ Bilder B 36 und B 37).

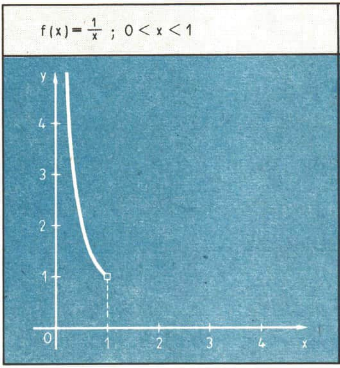


Bild B 36

Der Wertebereich von f ist die Menge aller y mit $y > 1$. Diese Menge enthält keine *größte* und auch keine *kleinste* Zahl.

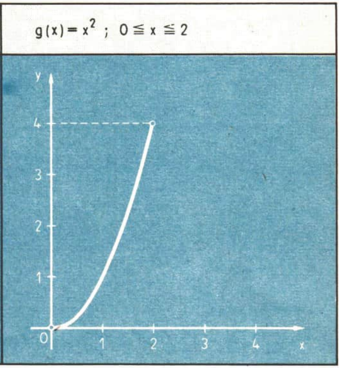


Bild B 37

Der Wertebereich von g ist die Menge aller y mit $0 \leqq y \leqq 4$. In dieser Menge ist 0 die *kleinste* und 4 die *größte* Zahl.

Gibt es unter den Funktionswerten von f in einem Intervall I eine größte Zahl, so nennt man diese **das Maximum von f in I**. Es muß dann also im Intervall I wenigstens eine Stelle x_0 geben, so daß $f(x_0)$ das Maximum von f in I ist. Für alle $x \in I$ gilt $f(x) \leqq f(x_0)$.

● 32 Erklären Sie analog zu der oben gegebenen Erläuterung, was man unter dem **Minimum von f in I** versteht!

■ 30 a) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat im Intervall $(0; 1)$ kein Minimum und kein Maximum.

b) Die Funktion $g(x) = x^2$ wächst im Intervall $\langle 0; 2\rangle$ monoton.
Ihr Minimum 0 nimmt sie deshalb an der Stelle 0 und ihr Maximum 4 an der Stelle 2 an.

Die Beispiele zeigen, daß es Funktionen gibt, die ein Maximum und ein Minimum in einem Intervall I haben, und solche, die kein Maximum bzw. Minimum haben. Im Falle stetiger Funktionen in abgeschlossenen Intervallen gilt jedoch, wie hier ohne Beweis mitgeteilt wird (↗ Bild B 38 auf Seite 120), folgender Satz.

▷ 7

SATZ vom Maximum und Minimum Weierstraß

Wenn

f eine in einem *abgeschlossenen* Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion ist,

so

hat f in $\langle a; b\rangle$ ein Maximum und ein Minimum.

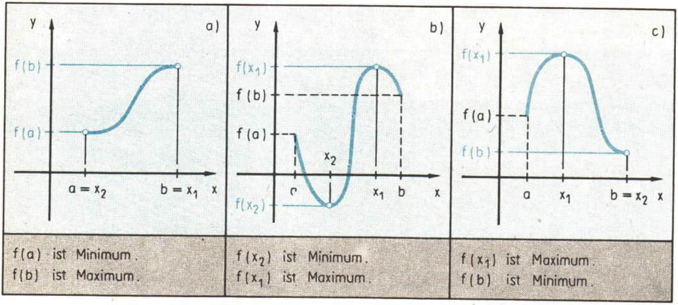


Bild B 38

Aufgaben

Beweisen Sie, daß folgende Funktionen f im angegebenen Intervall I eine Nullstelle haben!

1.↑ a) $f(x) = x^2 - 3;\quad I = \langle 0; 2\rangle$

b) $f(x) = x^7 - 12;\ I = \langle 1; 2\rangle$

2.↑ a) $f(x) = x^3 + 2x - 8;\quad I = \langle 1; 2\rangle$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 3;\ I = \left\langle \dfrac{1}{2}; 1\right\rangle$

Bestimmen Sie eine Nullstelle der angegebenen Funktion näherungsweise auf eine Stelle nach dem Komma!

3.↑ $f(x) = x^3 + x - 6$

4.↑ $f(x) = x^3 + 2x - 8$

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen im angegebenen Intervall ein Maximum und ein Minimum haben, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls!

5.↑ a) $f(x) = 5 - x;\quad \langle 5; 7\rangle$

b) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{2};\quad \left(-1; \sqrt{2}\right)$

6.↑ a) $f(x) = x^2 - 4x + 1;\quad \langle 0; 5\rangle$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x};\ \langle 0; 4\rangle$

7.* Beweisen Sie mit Hilfe von Satz B 6 folgende Aussage!
Wenn f im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetig ist und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so hat f im Intervall $\langle a; b\rangle$ eine Nullstelle.

Zusammenfassung

Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

Mit Hilfe des Grenzwertbegriffes für Zahlenfolgen definiert man den Grenzwert g einer Funktion f an der Stelle x_0.

f sei eine Funktion, x_0 und g seien reelle Zahlen, f sei in einer Umgebung von x_0 – eventuell unter Ausschluß von x_0 – definiert.

***f* hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g**

$=_{\mathrm{Df}}$ Für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) konvergiert die Folge $(f(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte gegen g.

Hierbei sind nur solche Folgen (x_n) zugelassen, deren Glieder von x_0 verschieden sind und in der gewählten Umgebung von x_0 liegen.

$\lim\limits_{x\to 2} x^2$

Es sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ und $x_n \neq 2$ für alle n.

Die Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die Folge $(f(x_n))$ mit $f(x_n) = x_n^2$.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 4.$

Also ist

$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$

Grenzwertsätze für Funktionen

Haben die Funktionen u und v an der Stelle x_0 einen Grenzwert, so gilt

$$\lim_{x\to x_0} (u(x) + v(x)) = \lim_{x\to x_0} u(x) + \lim_{x\to x_0} v(x).$$

Entsprechende Beziehungen gelten für die Differenz, das Produkt und den Quotienten der Funktionen u und v (↗ Satz B 5, Seite 111).

Mit Hilfe dieser Grenzwertsätze lassen sich die Grenzwerte gewisser Funktionen auf bereits bekannte Grenzwerte einfacherer Funktionen zurückführen.

a) $$\lim_{x\to 2} (x^2 + x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} x = 4 + 2 = 6$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$$

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - x}$ ist an der Stelle 0 nicht definiert.

Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} (x+1)}{\lim\limits_{x\to 0} (x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} 1}$$

$$= \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

Stetigkeit

Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0

$=_{Df}$ 1) f ist an der Stelle x_0 definiert und

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f heißt **stetig in** I, wenn f an jeder Stelle des Intervalls I stetig ist.
f heißt **stetig**, wenn f an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist.

Ist f in dem abgeschlossenen Intervall $\langle a; b\rangle$ stetig, so gilt:

(1) Ist $f(a) \neq f(b)$, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ im Intervall $\langle a; b\rangle$ wenigstens einmal an.

(2) f hat in $\langle a; b\rangle$ ein Maximum und ein Minimum.

Übungen und Anwendungen

1. Untersuchen Sie nachstehende Folgen (a_n) auf Monotonie und Beschränktheit! Bestimmen Sie, falls die Folgen konvergent sind, jeweils den Grenzwert!

a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ b) $a_n = \frac{n^2+1}{n(n+1)}$ c) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ d) $a_n = \frac{n!}{n^2}$

e) $a_n = 3^n$ f) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ g) $a_n = \frac{2n^2+5}{3n^3-10}$ h) $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$

i) $a_n = 2 - \frac{5}{n^2}$ k) $a_n = 2 + \frac{5}{n^2}$

2. Zeigen Sie unter Verwendung der Grenzwertdefinition, daß die Folgen Nullfolgen sind!

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ b) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

3. Begründen Sie, daß die Folgen unbeschränkt wachsen!

a) $(\sqrt{n})$ b) $(\sqrt[3]{n^2})$

4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen!

a) Ist (a_n) eine Nullfolge, die nur positive Glieder hat, so ist $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ eine Folge, die unbeschränkt wächst.

b) Ist (a_n) eine unbeschränkt wachsende Folge, so ist $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ eine Nullfolge.

5. a) Formulieren Sie einen entsprechenden Satz wie in Aufgabe 4. a) für Nullfolgen, die nur negative Glieder haben, und beweisen Sie diesen Satz!

b) Formulieren Sie einen entsprechenden Satz wie in Aufgabe 4. b) für unbeschränkt fallende Folgen, und beweisen Sie diesen Satz!

6. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert!

a) $\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ c) $\left((-1)^n \frac{1}{2^n}\right)$

d) $\left(\frac{1}{n!}\right)$ e) $((-1)^n)$ f) $\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)$

g) $\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)$ h) $\left(\frac{n^2-1}{n-1}\right)$ i) $\left(\frac{5n^2-7n+8}{5-7n+8n^2}\right)$

7. Berechnen Sie!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{6n^3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}$

8. Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie, Beschränktheit, Existenz von Grenzen und Konvergenz!

a) $\left(\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$ b) $\left(\frac{1}{n}\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$

9. Bilden Sie zu der Folge $((-1)^n)$ die Folge der Partialsummen, und untersuchen Sie diese auf Konvergenz!

10. Gegeben seien die geometrischen Folgen

a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$; b) (2^n).

Untersuchen Sie die zu diesen Folgen gehörenden Partialsummenfolgen bezüglich Konvergenz!

11. Gegeben sei die geometrische Folge (q^n).

a) Berechnen Sie die Glieder q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5 für den Fall $q = 0{,}9$ und für den Fall $q = 1{,}1$!

b) Berechnen Sie q^{10} für die unter a) angegebenen Werte von q!

c) Für welche n liegen die Glieder der Folge $(0{,}9^n)$ außerhalb der ε-Umgebung von 0, wenn $\varepsilon = 10^{-3}$ ist?
Hinweis: Rechnen Sie logarithmisch (↗ Seite 44ff.)!

d) Für $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge.
Untersuchen Sie die zu der geometrischen Folge (q^n) gehörende Partialsummenfolge (s_n) für den Fall, daß $|q| < 1$ ist, auf Konvergenz!

12. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a_1 sei ein zweites einbeschrieben, dessen Eckpunkte auf den Mitten der Seiten des ersten Quadrates liegen. In der gleichen Weise sei dem zweiten Quadrat ein drittes, dem dritten ein viertes usf. einbeschrieben.

a) Die Längen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ der so bestimmten Quadrate bilden eine unendliche Folge (a_n). Geben Sie die Glieder a_1, a_2, a_3 und a_n dieser Folge in Abhängigkeit von a_1 an!

b) Berechnen Sie die Summe der Umfänge aller dieser Quadrate!

c) Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte aller dieser Quadrate!

13. Im Bild B 39 auf Seite 124 sind Halbkreise dargestellt. Der erste Halbkreis mit der Bogenlänge b_1 hat den Radius r.
Der Radius jedes weiteren Halbkreises ist halb so groß wie der Radius seines unmittelbaren Vorgängers.

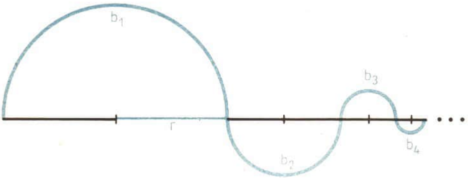


Bild B 39

a) Die Längen $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ der Halbkreisbögen bilden eine unendliche Folge (b_n). Geben Sie die Glieder b_1, b_2, b_3 und b_n dieser Folge in Abhängigkeit von r an!

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für die Summe s_n der ersten n Glieder der Folge (b_n) gilt: $s_n = 2\pi r\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$!

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (s_n)!

14. Man stelle sich einen Turm vor, der aus unendlich vielen übereinanderstehenden Würfeln aufgebaut ist. Der unterste Würfel W_0 habe die Kantenlänge 1, der unmittelbar daraufstehende Würfel W_1 die Kantenlänge $\dfrac{1}{3}$, der auf diesem stehende Würfel W_2 die Kantenlänge $\dfrac{1}{9}$ usf. Die Kantenlänge jedes Würfels beträgt $\dfrac{1}{3}$ der Kantenlänge des unmittelbar unter ihm befindlichen Würfels (↗ Bild B 40).

a) Ermitteln Sie die Kantenlänge des Würfels W_n!

b) Wie hoch ist der Turm bis zum n-ten Würfel einschließlich?

c) Wie hoch ist der Turm insgesamt?

d) Ermitteln Sie das Volumen des n-ten Würfels W_n!

e) Wie groß ist das Volumen des gesamten Turms?

15. Gegeben sei ein regelmäßiges in den Einheitskreis einbeschriebenes Achteck. Man fälle von einer Ecke P_0 das Lot auf den Radius, der zu einer benachbarten Ecke des Achtecks gezogen ist. Der Fußpunkt sei P_1. Von diesem fälle man wiederum das Lot auf den Radius, der zur nächsten Ecke des Achtecks führt usf. (↗ Bild B 41).

Bild B 40

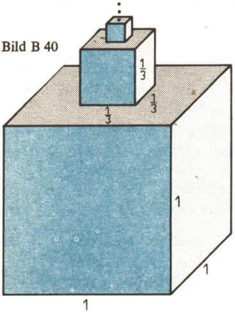
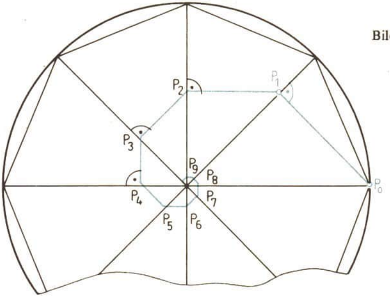


Bild B 41



Es sei $s_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \ldots + \overline{P_{n-1}P_n}$.

a) Berechnen Sie $s_1 = \overline{P_0P_1}$!
b) Berechnen Sie $s_2 = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2}$!
c) Berechnen Sie s_n!
d) Ermitteln Sie $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$!

16. Gegeben sei die Folge (s_n) mit $s_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

a) Berechnen Sie die ersten fünf Glieder der Folge (s_n)!
b) Weisen Sie nach, daß die Folge (s_n) monoton wächst!
c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (s_n)!
d) Wie viele Glieder der Folge (s_n) sind kleiner als 1,99?
e) Nun sei (s_n) die Partialsummenfolge einer Folge (a_n). Berechnen Sie die ersten fünf Glieder der Folge (a_n)!
f) Geben Sie eine Zuordnungsvorschrift für die Folge (a_n) an!

17. Gegeben sei die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \dfrac{5n+3}{p}$. Wählen Sie p so, daß

a) (a_n) den Grenzwert 1 hat;
b) (a_n) den Grenzwert $\dfrac{1}{2}$ hat;
c) (a_n) eine Nullfolge ist;
d) (a_n) divergent ist!

18.* Zeigen Sie, daß für jede konvergente Folge (a_n) gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$!

19. Gegeben sei eine geometrische Folge (a_n) mit $a_1 = 32$ und $a_2 = 8$.

a) Nennen Sie die ersten 6 Glieder dieser Folge, und veranschaulichen Sie diese in einem Koordinatensystem!
b) Bestimmen Sie a_n!
c) Bilden Sie zu der Folge (a_n) die Folge (s_n) der Partialsummen!
d) Untersuchen Sie beide Folgen auf Monotonie, Beschränktheit, Existenz von Grenzen und Konvergenz!
e) Berechnen Sie die Grenzwerte beider Folgen, falls diese existieren!

20. Berechnen Sie folgende Grenzwerte!

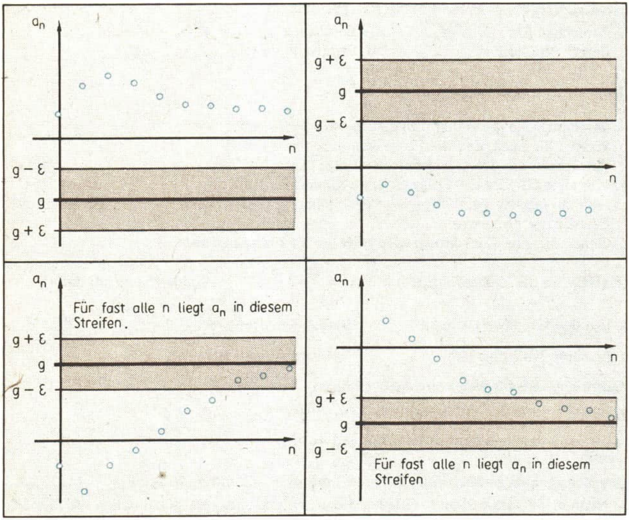
a) $\lim\limits_{x\to -1} (x^2 - 5x + 2)$
b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2}$
c) $\lim\limits_{z\to 0} (z^2 - 6z + 17)$
d) $\lim\limits_{a\to 2} (2a^2 - 2a - 6)$
e) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{18h^3 - 12h^2 + 6h}{h}$
f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x}$
g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x}$
h)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$
i)* $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10}$

21.* Sind u und v Funktionen mit $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = g_1$ und $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = g_2$, so gilt

$\lim\limits_{x\to x_0} (u(x) + v(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x) + \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = g_1 + g_2$.

Beweisen Sie diesen Satz!

Hinweis: Wählen Sie eine beliebige Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $x_n \neq x_0$ für alle n und $x_n \in U$ für alle n (wobei U eine geeignete Umgebung von x_0 ist), und zeigen Sie, daß die Folge $(u(x_n) + v(x_n))$ gegen $g_1 + g_2$ konvergiert!



Bilder B 42, B 43 (oben) Bilder B 44, B 45 (unten)

22. Begründen Sie mit Hilfe der Bilder B 42 bis B 45, daß folgende Aussagen wahr sind!

a) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Wenn (a_n) nur positive Glieder hat, so ist g nicht negativ. (↗ Bild B 42)

Begründen Sie die Behauptung indirekt, indem Sie annehmen, daß g negativ sei!

b) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Wenn (a_n) nur negative Glieder hat, so ist g nicht positiv. (↗ Bild B 43)

c) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Wenn $g > 0$ ist, so gilt für fast alle n, daß $a_n > 0$ ist. (↗ Bild B 44)

d) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Wenn $g < 0$ ist, so gilt für fast alle n, daß $a_n < 0$ ist. (↗ Bild B 45)

23. Geben Sie ein Intervall an, in dem die Funktion f eine Nullstelle hat!

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - 2$

c) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8x + 1$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1} + 1$

24. Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen in dem angegebenen Intervall ein Maximum und ein Minimum haben! Bestimmen Sie diese gegebenenfalls!

a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$; $\langle -1; 4\rangle$ b) $f(x) = -x^2 + 4$; $\langle -2; 3\rangle$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $\langle -2; 3\rangle$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; $\langle -1; +1\rangle$

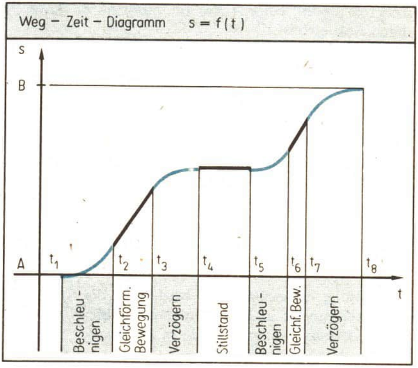
C Differentialrechnung

Ein Personenkraftwagen fährt auf einer geradlinig verlaufenden Straße von A nach B (Bild C 1). Das Bild C 2 zeigt das Weg-Zeit-Diagramm dieser Bewegung.
Zum Zeitpunkt t_1 fährt das Fahrzeug an. Nach dem Anfahren wird das Fahrzeug im Zeitintervall $\langle t_1; t_2 \rangle$ beschleunigt. Im Intervall $\langle t_2; t_3 \rangle$ bewegt sich das Fahrzeug annähernd gleichförmig. Zum Zeitpunkt t_3 erkennt der Fahrzeugführer eine Verkehrsampel, die rotes Licht zeigt, und beginnt zu bremsen. Zum Zeitpunkt t_4 hält der Pkw. Zum Zeitpunkt t_5 zeigt die Ampel grünes Licht, und der Fahrzeugführer fährt erneut an, beschleunigt das Fahrzeug und hat nach einem Bremsvorgang zum Zeitpunkt t_8 das vorgesehene Ziel erreicht.
Während der Fahrt ist die Geschwindigkeit des Fahrzeuges nicht konstant. Der Quotient $\frac{\overline{AB}}{t_8 - t_1}$ gibt die **Durchschnittsgeschwindigkeit** während der Fahrt an. Es erscheint jedoch anschaulich einleuchtend, daß das Fahrzeug zu jedem Zeitpunkt t mit $t_1 \leqq t \leqq t_8$ eine bestimmte **Augenblicksgeschwindigkeit** hat.

Was versteht man bei einer ungleichförmigen Bewegung unter der Augenblicksgeschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt?

Bild C 1

Bild C 2



Bevor wir uns in Lerneinheit 2 dieser Frage zuwenden, betrachten wir noch ein weiteres Beispiel.
Ein Betrieb soll bei möglichst sparsamem Materialverbrauch allseitig geschlossene quaderförmige Container herstellen, die ein vorgegebenes Volumen haben und deren Breite halb so groß wie ihre Länge ist.
Da das Volumen der Container vorgegeben ist, bedeutet möglichst sparsamer Materialverbrauch, daß der Oberflächeninhalt der Container einen möglichst kleinen Wert annimmt. Der Oberflächeninhalt eines Quaders hängt von seinen Kantenlängen a, b und c ab. Für die hier zu betrachtenden Container gilt $b = \frac{a}{2}$. Bei gegebenem Volumen gibt es Quader mit $b = \frac{a}{2}$, deren Oberflächeninhalte stark voneinander abweichen. Das Bild C 3 zeigt drei solcher Quader mit gleichem Volumen in Kavaliersperspektive.

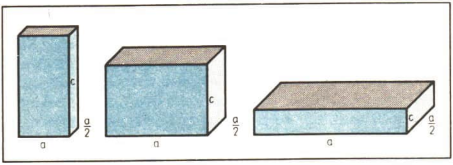
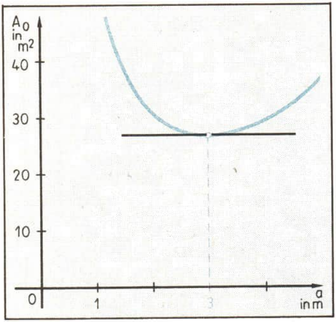


Bild C 3

Um nun der Forderung nach möglichst geringem Materialverbrauch zu genügen, müssen die Kantenlängen a und c so gewählt werden, daß der Oberflächeninhalt einen möglichst kleinen Wert annimmt. Bei gegebenem Volumen V läßt sich der Oberflächeninhalt A_0 eines Quaders mit $b = \frac{a}{2}$ in Abhängigkeit von a durch die Funktion f mit $A_0 = f(a) = a^2 + \frac{6V}{a}$ $(a > 0)$ angeben. Auf die Herleitung dieser Gleichung wird hier nicht eingegangen; sie kann auf Seite 208 f. nachgelesen werden. Das Bild C 4 zeigt den Graph der Funktion f für das Volumen $V = 9\,\text{m}^3$. Dieser Abbildung entnehmen wir, daß die Funktion f ihren kleinsten Funktionswert (Minimum) bei $a = 3$ m annimmt. An dieser Stelle hat der Graph von f eine Tangente, deren Anstieg 0 ist.

Bild C 4



Wie kann man die Stelle, an der die Funktion f ihr Minimum annimmt, berechnen?

Wie wir bald erkennen werden, führen die hier aufgeworfenen Fragen – und noch viele andere – alle auf das folgende Problem:

Hat der Graph einer gegebenen Funktion f an einer gegebenen Stelle x_0 eine Tangente, und welchen Anstieg hat die Tangente gegebenenfalls?

Die Lösung dieses Problems wird durch die Begriffsbildungen und Verfahren der **Differentialrechnung** ermöglicht, die in der zwei-


Bild C 5


Bild C 6


Bild C 7

ten Hälfte des 17. Jahrhunderts unabhängig voneinander von dem englischen Physiker und Mathematiker ISAAC NEWTON (1643 bis 1727) (↗ Bild B 4) und dem deutschen Mathematiker und Philosophen GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 bis 1716) (↗ Bild B 5) entwickelt wurde, nachdem bereits andere bedeutende Mathematiker – unter ihnen GALILEO GALILEI[1]) in Italien (Bild C 5), JOHANNES KEPLER[2]) in Deutschland (Bild C 6), BLAISE PASCAL[3]) in Frankreich (Bild C 7) und ISAAC BARROW[4]) in England – wesentliche Vorarbeiten geleistet hatten.

Die Herausbildung der Differentialrechnung ist ein Teil der wissenschaftlichen Revolution der Mathematik, die sich während des 17. Jahrhunderts, in der historischen Übergangsperiode vom Feudalismus zum Kapitalismus in Europa, vollzog. Der Hauptinhalt dieser Revolution bestand im Übergang von der Mathematik der konstanten Größen zur Mathematik der Variablen.

Drei herausragende Errungenschaften markieren diesen Wendepunkt in der Geschichte der Mathematik, nämlich die Herausbildung der analytischen Geometrie, mit der wir uns in der 12. Klasse beschäftigen werden, die Entwicklung der Infinitesimalrechnung und das Hervortreten des gegenseitigen Zusammenhangs zwischen variablen Größen, der begrifflich mit dem Wort „Funktion" fixiert wurde.

Die Gründe für diese Umwälzung hat man letzten Endes in zwei Sphären gesellschaftlicher Tätigkeit zu suchen, in der Entwicklung der Naturwissenschaft und in der Entwicklung der materiellen Produktivkräfte. Sowohl bei der Behandlung von Grundproblemen der Naturwissenschaft jener Zeit – der Probleme des Falles, des Wurfes, der Bewegung der Planeten und des Stoßes – als auch bei der Konstruktion von Maschinen zum Beispiel zur Wasserhaltung in Bergwerken, von Maschinen in den sich entwickelnden Manufakturen, bei Wasserrädern, Seilzugaggregaten usf. wurde es notwendig, Bewegungsprobleme mathematisch zu beschreiben und berechenbar zu machen.

Bei der Herausbildung der Differentialrechnung ließ sich LEIBNIZ von philosophischen und mathematischen Fragestellungen, insbesondere vom Tangentenproblem leiten (↗ Lerneinheit 1). NEWTON schuf eine „Fluxionsrechnung" als mathematisches Werkzeug zur Behandlung der physikalisch-mechanischen Bewegungsprobleme. Beispielsweise gelang es NEWTON, die von KEPLER aus astronomischen Beobachtungen herausgefundenen Gesetze der Planeten-

---

1) GALILEO GALILEI (1564 bis 1642), italienischer Mathematiker, Physiker und Astronom, wegen seines Eintretens für die heliozentrische Lehre vom römischen Inquisitionsgericht verfolgt

2) JOHANNES KEPLER (1571 bis 1630), Astronom, Physiker, Mathematiker und Philosoph

3) BLAISE PASCAL (1623 bis 1662), französischer Mathematiker und Physiker

4) ISAAC BARROW (1630 bis 1677), englischer Mathematiker, Lehrer NEWTONS

bewegung mathematisch herzuleiten, die Theorie des Falles und Wurfes und die Theorie der Mondbewegung sowie Ebbe und Flut rechnerisch zu behandeln (↗ Lerneinheit 2).
Die Differentialrechnung – das Wort rührt von LEIBNIZ her – wurde zu einem wichtigen Hilfsmittel bei der Beschreibung und Erforschung der Natur. Zusammen mit den anderen Gebieten der Infinitesimalmathematik konnten die theoretische und praktische Leistungsfähigkeit der Mathematik entscheidend verbessert werden, sowohl bei der Verbindung von Mathematik und Naturwissenschaften als auch bei den direkten Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik in Technik und Produktion.

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden linearen Funktionen!

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ d) $f(x) = -2{,}5x - 0{,}5$

Welche Bedeutung haben die Koeffizienten m und n für den Verlauf des Graphen der Funktion $f(x) = mx + n$?

2. a) Berechnen Sie α unter Verwendung der in Bild C 8 gegebenen Stücke!
b) Berechnen Sie die Länge der Höhe auf der Seite $\overline{AC}$!

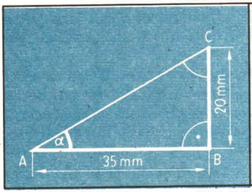


Bild C 8

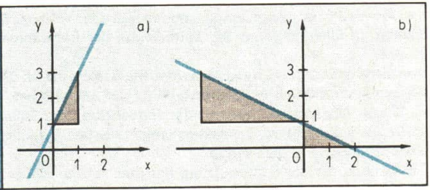


Bild C 9

Ableitung einer Funktion

1 Anstieg einer Kurve in einem Punkt

● 1 Berechnen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x \to 0} (2x + 7)$ b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h + h^2}{h}$

● 2 Geben Sie den Anstieg der in Bild C 9 a) und b) dargestellten Geraden an!

Der Graph der linearen Funktion $f(x) = mx + n$ ist eine Gerade. Der Verlauf dieser Geraden g wird durch den Winkel α charakterisiert, den die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.
Wählt man zwei Punkte P_0 und P_1 auf der Geraden g, so kann man $\tan \alpha$ mit Hilfe der Koordi-

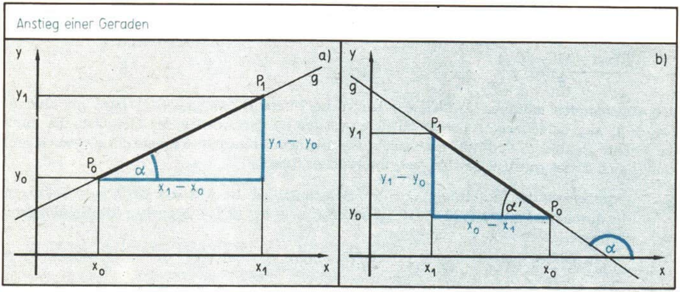


Bild C 10

naten der Punkte P_0 und P_1 berechnen. Man erhält für $0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ (↗ Bild C 10a))

$$\tan \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Das gleiche Ergebnis erhält man für $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (↗ Bild C 10b)), denn wegen $\alpha = \pi - \alpha'$ ist

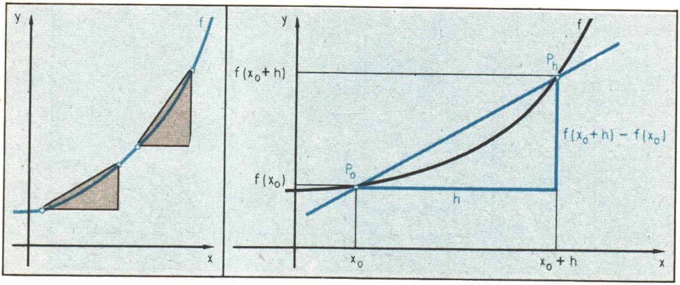
$$\tan \alpha = -\tan \alpha' = -\frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Wegen $y_1 = f(x_1) = mx_1 + n$ und $y_0 = f(x_0) = mx_0 + n$ gilt

$$\tan \alpha = \frac{mx_1 + n - (mx_0 + n)}{x_1 - x_0} = \frac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m.$$

Der Anstieg m der Geraden g ist also der Tangens des Winkels, den g mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt.

Ist der Graph einer nichtlinearen Funktion f gegeben (Bild C 11), so kann man nicht mehr von *dem* Anstieg dieser Kurve[1]) sprechen.



Bilder C 11, C 12

[1]) Unter einer Kurve wollen wir hier stets den Graph einer Funktion verstehen.

Wir können nur für zwei beliebige Kurvenpunkte $P_0(x_0; f(x_0))$ und $P_h(x_0 + h; f(x_0 + h))$ mit $h \neq 0$ (↗ Bild C 12 auf Seite 131) mit Hilfe des Quotienten

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

den sogenannten **mittleren Anstieg** der Kurve im Intervall $\langle x_0;\ x_0 + h \rangle$ bzw. im Intervall $\langle x_0 + h;\ x_0 \rangle$ berechnen.[1] Dieser mittlere Anstieg ist der Anstieg der Geraden, die durch die Punkte P_0 und P_h verläuft. Eine solche Gerade nennt man eine **Sekante** der Kurve. Jedoch ändert sich dieser mittlere Anstieg von Intervall zu Intervall.

● 3 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$. Berechnen Sie die Anstiege derjenigen Sekanten, die durch die Punkte $P_0(0{,}5; f(0{,}5))$ und $P_h(0{,}5 + h; f(0{,}5 + h))$ gehen für die folgenden Zahlen h!

a) $1;\ 0{,}1;\ 0{,}01$ b) $-1;\ -0{,}1;\ -0{,}01$

Wenn man nur den mittleren Anstieg einer Kurve in einem Intervall kennt, so weiß man natürlich nicht, wie die Kurve in dem betreffenden Intervall wirklich verläuft. Man müßte schon solche Kurvenpunkte wählen, deren Entfernung hinreichend klein ist, um annähernd brauchbare Aussagen über den Kurvenverlauf in dem betreffenden Intervall machen zu können.

Was soll man unter dem Anstieg einer Kurve in einem gegebenen Punkt verstehen?

Wir wollen diese Problematik zuerst an einem Beispiel erörtern.

■ 1 Gegeben sei der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ in einer Umgebung der Stelle $x_0 = 0{,}5$. Wir verallgemeinern die Überlegungen des Auftrags C 3 und wählen eine *beliebige* reelle Zahl h mit $h \neq 0$ (↗ Bild C 13 für $h = 1{,}5$). Den Anstieg der Sekante durch die Punkte $P_0(0{,}5; f(0{,}5))$ und $P_h(0{,}5 + h; f(0{,}5 + h))$ können wir folgendermaßen berechnen:

$$m = \tan \alpha_h = \frac{f(0{,}5 + h) - f(0{,}5)}{h} = \frac{(0{,}5 + h)^2 - 0{,}5^2}{h}$$
$$= \frac{0{,}5^2 + h + h^2 - 0{,}5^2}{h} = \frac{h + h^2}{h}.$$

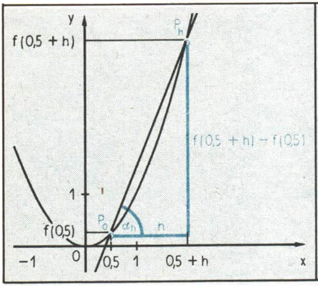


Bild C 13

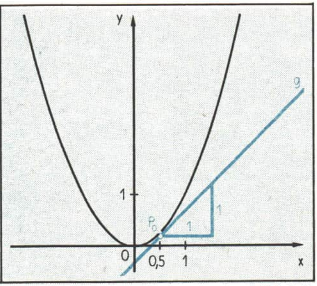


Bild C 14

[1]) In der Mathematik ist es üblich, den Argumentzuwachs durch h zu bezeichnen.

Zu jeder Zahl $h \neq 0$ gehört eine eindeutig bestimmte Sekante der Parabel durch die Punkte $P_0(0{,}5; 0{,}5^2)$ und $P_h(0{,}5 + h; (0{,}5 + h)^2)$. Jede dieser Sekanten hat einen eindeutig bestimmten Anstieg m, der von h abhängt. Folglich ist die Menge der geordneten Paare $\left[h; \frac{h + h^2}{h}\right]$ mit $h \neq 0$ eine Funktion, die für $h = 0$ nicht definiert ist. Sie hat dort aber einen Grenzwert, denn wegen $\frac{h + h^2}{h} = 1 + h$ für $h \neq 0$ ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (1 + h) = 1.$$

Diesen Grenzwert nennen wir den **Anstieg der Parabel $y = x^2$ an der Stelle $x_0 = 0{,}5$.** Das Bild C 14 zeigt den Graph der Funktion $f(x) = x^2$ und die Gerade g durch den Punkt $P_0(0{,}5; 0{,}5^2)$ mit dem Anstieg 1.

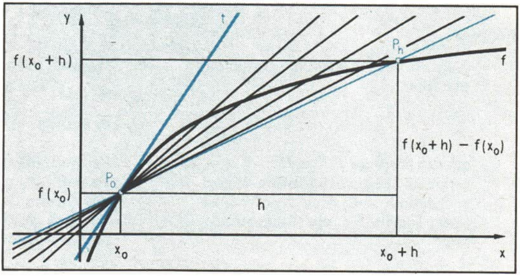


Bild C 15

Die Überlegungen im Beispiel C 1 lassen sich verallgemeinern:
Gegeben sei der Graph einer Funktion f, die in einer Umgebung U einer Stelle x_0 definiert ist. Für jede Zahl h mit $h \neq 0$ und $x_0 + h \in U$ gibt es genau eine Sekante durch die Kurvenpunkte $P_0(x_0; f(x_0))$ und $P_h(x_0 + h; f(x_0 + h))$. Im Bild C 15 sind einige Sekanten des Graphen von f durch P_0 und P_h für verschiedene Zahlen h dargestellt. Hält man den Punkt P_0 fest und läßt h die Zahlen einer Nullfolge (h_n) mit $h_n \neq 0$ für alle n durchlaufen, so dreht sich die Sekante durch P_0 und P_h um den Punkt P_0 und „nähert" sich immer mehr einer „Grenzgeraden" t. Ist h eine beliebige Zahl mit $h \neq 0$ und $x_0 + h \in U$, so ist

$$m = \tan \alpha_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

der Anstieg der Sekante durch die Punkte P_0 und P_h. Die Zahl m ist der mittlere Anstieg der Kurve im Intervall $\langle x_0; x_0 + h\rangle$ für $h > 0$ bzw. im Intervall $\langle x_0 + h; x_0\rangle$ für $h < 0$.

Die Menge D der geordneten Paare $\left[h; \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right]$ mit $h \neq 0$ ist eine Funktion.

▶ 1

DEFINITION

Ist f eine Funktion, die in einer Umgebung U von x_0 definiert ist, so nennt man die Funktion D mit

$$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h \neq 0,\ x_0 + h \in U)$$

den *Differenzenquotienten der Funktion f an der Stelle* x_0.

Hat die Funktion D an der Stelle $h = 0$ einen Grenzwert, existiert also $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$,

so nennt man diesen Grenzwert den **Anstieg der Kurve im Punkt P_0** (bzw. an der Stelle x_0). Die Gerade t durch den Punkt P_0, deren Anstieg gleich diesem Grenzwert ist, heißt

Tangente an den Graph von f im Punkt P_0.

Existiert also für eine gegebene Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, so hat der Graph von f im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ eine Tangente, deren Anstieg der genannte Grenzwert ist.

Der Anstieg einer Kurve in einem Punkt P_0 beschreibt den **lokalen Verlauf** der Kurve an der Stelle x_0. Er gibt darüber Auskunft, wie „steil" die Kurve an der betreffenden Stelle verläuft.

Aufgaben

1. Welchen Winkel bildet der Graph der Funktion

   a) $f(x) = 2x - 3$; b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

   mit der positiven x-Achse?
   Ermitteln Sie den betreffenden Winkel zeichnerisch und unter Verwendung einer Tabelle für die Tangensfunktion!

2. Gegeben seien die Punkte

   a) $P_1(1; 2)$ und $P_2(5; 7)$;

   b) $P_1(\sqrt{2}; -2)$ und $P_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}; 1\right)$.

   Zeichnen Sie die Gerade durch die Punkte P_1 und P_2, und berechnen Sie den Anstieg der Geraden!
   Welchen Winkel bildet die Gerade mit der positiven x-Achse?

3.* Ermitteln Sie eine Gleichung[1]) für die in Bild C 14 dargestellte Gerade g, und überzeugen Sie sich durch Rechnung davon, daß die Gerade g mit der Parabel $y = x^2$ nur den Punkt $P_0(0{,}5; 0{,}5^2)$ gemeinsam hat!

4. Berechnen Sie wie im Falle des Beispiels C 1 den Anstieg des Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle -2!

5. Berechnen Sie wie im Falle des Beispiels C 1 den Anstieg des Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ an einer beliebig gewählten Stelle x_0!

2 Augenblicksgeschwindigkeit bei geradlinigen Bewegungen

● 4 Charakterisieren Sie die geradlinige, gleichförmige und die geradlinige, ungleichförmige Bewegung! Gehen Sie dabei auch auf die geradlinige, *gleichmäßig beschleunigte* Bewegung ein (↗ Wissensspeicher Physik, S. 97)!
Wie lautet das Weg-Zeit-Gesetz für eine geradlinige, gleichförmige Bewegung?
Was können Sie über die Geschwindigkeit und die Beschleunigung einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung aussagen?

---

[1]) Die Gerade g ist der Graph einer linearen Funktion. Gesucht ist also eine Gleichung dieser linearen Funktion.

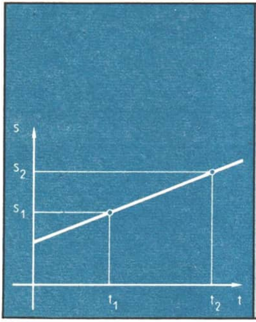


Bild C 16

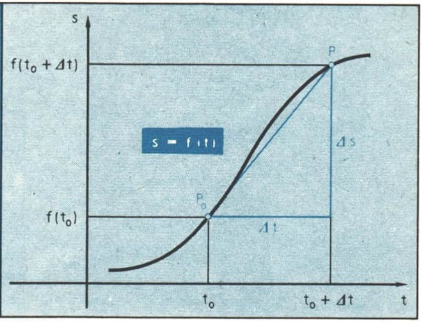


Bild C 17

● 5 Ein geradlinig, gleichförmig bewegter Körper habe zum Zeitpunkt t_1 den Weg s_1 und zum Zeitpunkt t_2 den Weg s_2 zurückgelegt (Bild C 16). Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Körper?

Im Physikunterricht haben wir kennengelernt, wie man bei geradlinigen, gleichmäßig beschleunigten Bewegungen die Geschwindigkeit für einen beliebigen Zeitpunkt (die sogenannte Augenblicksgeschwindigkeit) berechnen kann. Wir werden uns nun mit dem Problem der **Augenblicksgeschwindigkeit bei beliebigen geradlinigen Bewegungen** befassen.
Erfolgt die Bewegung *gleichförmig*, also mit konstanter Geschwindigkeit, so ist diese konstante Geschwindigkeit auch die Augenblicksgeschwindigkeit für jeden Zeitpunkt während der Bewegung.
Das Bild C 17 zeigt das Weg-Zeit-Diagramm eines geradlinig bewegten Körpers.
Die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges s von der Zeit t sei durch die Funktion f (Weg-Zeit-Gesetz) gegeben:

$$s = f(t).$$

Welche Augenblicksgeschwindigkeit hat der Körper zum Zeitpunkt t_0?[1])

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir eine beliebige Zeitspanne Δt[2]) mit $\Delta t \neq 0$. In der Zeit Δt legt der Körper den Weg $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ zurück (↗ Bild C 17 für $\Delta t > 0$). Der Quotient

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

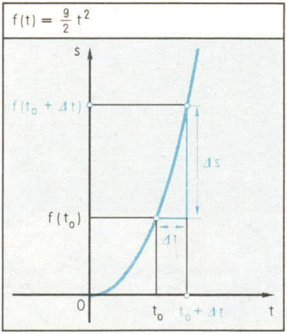
gibt die Durchschnittsgeschwindigkeit an, mit der sich der Körper in der Zeit Δt bewegt. Auch dieser Quotient ist ein Differenzenquotient. Er ist gleich dem Anstieg der Sekante $\overline{P_0P}$ (↗ Bild C 17).
Unsere Vorstellungen von einem Bewegungsablauf legen nahe, daß diese Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 um so besser annähert, je kleiner wir Δt wählen. Zu jedem Δt mit $\Delta t \neq 0$ gehört ein eindeutig bestimmter Weg Δs, den der Körper während des

---

[1]) t_0 ist hier ein *beliebig* gewählter, aber festgehaltener Zeitpunkt.
[2]) In der Lerneinheit 1 hatten wir den Argumentzuwachs, wie in der Mathematik üblich, mit h bezeichnet.

Bild C 18

Bild C 19



Zeitintervalls Δt zurücklegt. Also ist die Menge der geordneten Paare $\left[\Delta t; \frac{\Delta s}{\Delta t}\right]$ mit $\Delta t \neq 0$ eine Funktion.

Unter der **Augenblicksgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0** versteht man den **Grenzwert**[1])

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}}\,.$$

Die Augenblicksgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 entspricht also dem Anstieg der Tangente an den Graph von f im Punkt P_0. (Bild C 18 zeigt ein Prüfgerät der Deutschen Volkspolizei zur Kontrolle der Geschwindigkeit von Kraftfahrzeugen.)

■ 2 Das im Physikunterricht induktiv gewonnene Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen wollen wir jetzt am Beispiel des freien Falles aus dem Weg-Zeit-Gesetz dieser Bewegung herleiten.
Welche Augenblicksgeschwindigkeit hat ein frei fallender Körper zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 mit $t_0 > 0$, wenn die Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt?

Lösung:

Die Weg-Zeit-Funktion für den freien Fall ist die Funktion f mit $s = f(t) = \frac{g}{2} t^2$.

Wir betrachten wieder einen beliebigen Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ mit $\Delta t > 0$ (↗ Bild C 19). Zum Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ hat der Körper den Weg

[1]) Auf Grund des gegebenen Sachverhaltes können wir voraussetzen, daß dieser Grenzwert existiert.

$$f(t_0 + \Delta t) = \frac{g}{2}(t_0 + \Delta t)^2$$

zurückgelegt. Die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitintervalls Δt beträgt

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{\frac{g}{2}(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot \frac{(t_0 + \Delta t)^2 - t_0{}^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{g}{2} \cdot \frac{t_0^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2 - t_0^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{g}{2} \cdot \frac{\Delta t(2t_0 + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Wegen $\Delta t \neq 0$ gilt $\dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \dfrac{g}{2}(2t_0 + \Delta t)$.

Die Menge der geordneten Paare $\left[\Delta t; \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}\right]$ ist eine Funktion, die für $\Delta t = 0$ nicht definiert ist.

Wir bestimmen den Grenzwert dieser Funktion für $\Delta t \to 0$ und erhalten

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g}{2}(2t_0 + \Delta t) = \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \to 0} (2t_0 + \Delta t) = \frac{g}{2} \cdot 2t_0 = gt_0.$$

Ergebnis:

Die Augenblicksgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 beträgt $g \cdot t_0$.

Aufgaben

1. Ein Körper fällt von einem Turm mit der Höhe 100 m frei nach unten.

a) Welchen Weg legt er innerhalb der ersten 2 s zurück?

b) Nach wieviel Sekunden hat er den Erdboden erreicht?

c) Berechnen Sie $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ für folgende Zeitdifferenzen Δt bezüglich des Zeitpunktes $t_0 = 2\,\text{s}$!

$\Delta t = 1\,\text{s}$; $\Delta t = 0{,}1\,\text{s}$; $\Delta t = 0{,}01\,\text{s}$; $\Delta t = 0{,}0001\,\text{s}$

d) Welche Augenblicksgeschwindigkeit hat der Körper nach 2 s?

2.* Es sei

$$f(t) = \begin{cases} at^2 & \text{für } 0\,\text{s} \leqq t \leqq 2\,\text{s} \\ bt - c & \text{für } 2\,\text{s} \leqq t \leqq 5\,\text{s} \end{cases}$$

mit $a = 0{,}5\,\text{ms}^{-2}$, $b = 2\,\text{ms}^{-1}$ und $c = 2\,\text{m}$ die Weg-Zeit-Funktion einer geradlinigen Bewegung.

a) Zeichnen Sie das Weg-Zeit-Diagramm der Bewegung!

b) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit für die Zeitintervalle $\langle 0\,\text{s}; 0{,}5\,\text{s}\rangle$, $\langle 0\,\text{s}; 5\,\text{s}\rangle$, $\langle 1\,\text{s}; 2\,\text{s}\rangle$, $\langle 2\,\text{s}; 5\,\text{s}\rangle$ und $\langle 1{,}5\,\text{s}; 3\,\text{s}\rangle$!

c) Welche Augenblicksgeschwindigkeit hat der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 2\,\text{s}$?

3 Ableitung einer Funktion an einer Stelle

Die Betrachtungen in den Lerneinheiten 1 und 2 zeigen, daß mit Hilfe gewisser Grenzwerte das lokale Verhalten von Funktionen beschrieben werden kann. Begriffe wie „Anstieg einer Kurve in einem Punkt", „Augenblicksgeschwindigkeit" bei einer Bewegung und noch viele andere (z. B. „chemische Reaktionsgeschwindigkeit" oder „Augenblicksspannung bei einem Induktionsvorgang" zu einem festen Zeitpunkt) werden durch solche Grenzwerte definiert. Es erscheint daher gerechtfertigt, von der konkreten Aufgabenstellung in den betrachteten Beispielen zu abstrahieren und das *mathematische Problem*, das in allen Beispielen dasselbe ist, zu erörtern. Dieses mathematische Problem läßt sich folgendermaßen charakterisieren:
Es sei f eine Funktion und x_0 eine Zahl. f sei in einer Umgebung U von x_0 definiert.

- Zu der gegebenen Funktion f wird für die gegebene Stelle x_0 der Differenzenquotient D mit

$$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  gebildet. Da f in einer Umgebung U von x_0 definiert ist, ist die Funktion D für alle Zahlen h mit $h \neq 0$ und $x_0 + h \in U$ definiert.

- Es wird geprüft, ob der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} D(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  existiert. Wenn dieser Grenzwert existiert, so nennt man die Funktion f an der Stelle x_0 **differenzierbar.**

▶ 2

DEFINITION

Es sei f eine Funktion, x_0 eine Zahl; f sei in einer Umgebung von x_0 definiert.

f ist an der Stelle x_0 differenzierbar $=_{\mathrm{Df}}$ **Der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert.**

Bemerkung: Nach Definition des Grenzwertes einer Funktion (↗ Seite 108) existiert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ genau dann, wenn für jede Nullfolge (h_n), mit $h_n \neq 0$ für alle n und $x_0 + h_n \in U$, für alle n die Folge $\left(\dfrac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}\right)$ gegen dieselbe Zahl konvergiert.

■ 3 Die Funktion $f(x) = x^2$ ist an der Stelle $x_0 = 0{,}5$ differenzierbar (↗ Beispiel C 1).

■ 4 Die Funktion $f(t) = \frac{g}{2} t^2$ ist an der beliebig gewählten Stelle t_0 differenzierbar (↗ Beispiel C 2).

▶ 3

DEFINITION

Ist f eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion, so nennt man den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

die 1. Ableitung[1]) der Funktion f an der Stelle x_0 oder auch den Differentialquotienten der Funktion f an der Stelle x_0.

[1]) An Stelle von „1. Ableitung" sagt man oft nur „Ableitung".

Für die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 verwendet man folgende Schreibweisen:

$f'(x_0)$ (Lies: „f Strich von x_0") oder

$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$ (Lies: „df nach dx an der Stelle x_0") oder

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$ (Lies: „dy nach dx an der Stelle x_0"),

falls die Funktion f durch eine Gleichung $y = f(x)$ gegeben ist.

■ 5 Für die Funktion $f(x) = x^2$ gilt $f'(0{,}5) = 1$. Diese Zahl ist der Anstieg des Graphen von f an der Stelle 0,5 (↗ Beispiel C 1).

■ 6 Die Ableitung der Funktion $f(t) = \frac{g}{2}t^2$ an der Stelle t_0 ist $f'(t_0) = gt_0$. Diese Zahl ist die Augenblicksgeschwindigkeit eines frei fallenden Körpers zum Zeitpunkt t_0 (↗ Beispiel C 2).

4 Beispiele für die Berechnung von Ableitungen

In dieser Lerneinheit werden wir für einige ausgewählte Funktionen die Ableitung an einer gegebenen Stelle berechnen. Außerdem wollen wir zeigen, wie man für die Tangente an den Graph einer gegebenen Funktion an einer gegebenen Stelle eine Gleichung erhält.
Der Begriff „Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0" ist nur sinnvoll, wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist. Das bedeutet aber (↗ Definition C 2), daß der Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0 für $h \to 0$ einen Grenzwert hat. Wir haben also in jedem Fall den Grenzwert eines Differenzenquotienten für $h \to 0$ zu bestimmen.

● 6 Ermitteln Sie die Funktionswerte der Funktion $f(x) = x^3$ an den Stellen 1,5 und $1{,}5 + h$!

■ 7 Es ist zu zeigen, daß die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1{,}5$ differenzierbar ist.

Lösung:

(1) Bestimmen des Differenzenquotienten der Funktion f an der Stelle 1,5:

Da der Definitionsbereich von f alle reellen Zahlen enthält, ist f in jeder Umgebung von 1,5 definiert. Der Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle 1,5 ist die Funktion D mit

$$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(1{,}5 + h)^3 - 1{,}5^3}{h} \quad (h \neq 0).$$

(2) Umformen des Differenzenquotienten:

Um den Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} D(h)$ bestimmen zu können, muß der Quotient $\frac{(1{,}5 + h)^3 - 1{,}5^3}{h}$ so umgeformt werden, daß h nicht mehr im Nenner vorkommt.

Es ist (↗ Auftrag C 6)

$$D(h) = \frac{1{,}5^3 + 3 \cdot 1{,}5^2 h + 3 \cdot 1{,}5 h^2 + h^3 - 1{,}5^3}{h} = \frac{3 \cdot 1{,}5^2 h + 3 \cdot 1{,}5 h^2 + h^3}{h}.$$

Wegen $h \neq 0$ gilt $D(h) = 3 \cdot 1{,}5^2 + 3 \cdot 1{,}5h + h^2$.

(3) Bestimmen des Grenzwertes des Differenzenquotienten für $h \to 0$:

Es ist

$$\lim_{h\to 0} D(h) = \lim_{h\to 0} (3 \cdot 1{,}5^2 + 3 \cdot 1{,}5h + h^2).$$

Unter Verwendung des Satzes B 5 (↗ Seite 111) erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} D(h) = \lim_{h\to 0} 3 \cdot 1{,}5^2 + \lim_{h\to 0} (3 \cdot 1{,}5h) + \lim_{h\to 0} h^2 = 3 \cdot 1{,}5^2.$$

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = x^3$ ist an der Stelle 1,5 differenzierbar. Es ist $f'(1{,}5) = 3 \cdot 1{,}5^2 = 6{,}75$.

■ 8 Für eine beliebige reelle Zahl x_0 ist die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ an der Stelle x_0 zu berechnen.

Lösung:

Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl.

(1) Bestimmen des Differenzenquotienten der Funktion f an der Stelle x_0.

Die Funktion f ist in jeder Umgebung von x_0 definiert.
Es sei h eine beliebige reelle Zahl mit $h \neq 0$. Es ist

$$f(x_0) = x_0^3 + x_0^2; \quad f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3 + (x_0 + h)^2.$$

Der Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0 ist die Funktion

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^3 + (x_0 + h)^2 - (x_0^3 + x_0^2)}{h},$$

die für alle reellen Zahlen h mit $h \neq 0$ definiert ist.

(2) Umformen des Differenzenquotienten

Es ist

$$\frac{(x_0 + h)^3 + (x_0 + h)^2 - (x_0^3 + x_0^2)}{h}$$

$$= \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^3 - x_0^2}{h}$$

$$= \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + 2x_0h + h^2}{h} = \frac{h(3x_0^2 + 3x_0h + h^2 + 2x_0 + h)}{h}$$

$$= 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 + 2x_0 + h \quad \text{für} \quad h \neq 0.$$

Folglich gilt $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 + 2x_0 + h.$

(3) Bestimmen des Grenzwertes des Differenzenquotienten für $h \to 0$

Es ist

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2 + 2x_0 + h)$$

$$= 3x_0^2 + 2x_0.$$

Ergebnis:

Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ an der Stelle x_0 ist $f'(x_0) = 3{x_0}^2 + 2x_0$, wobei x_0 eine beliebige reelle Zahl ist.

Bemerkung: Dieses Ergebnis besagt, daß die Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist. Ist x eine beliebige reelle Zahl, so gilt $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

■ 9 Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$ an der Stelle $x_0\ (x_0 \neq 0)$ ist zu berechnen.

Lösung:

(1) Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl mit $x_0 \neq 0$.
Dann existiert eine Umgebung U von x_0 derart, daß f in U definiert ist und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ gilt.
Für eine beliebige reelle Zahl h mit $h \neq 0$ und $x_0 + h \in U$ gilt

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} \quad \text{und} \quad f(x_0 + h) = \frac{1}{x_0 + h}.$$

Der Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0 ist die Funktion

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} \quad (x_0 \neq 0,\ x_0 + h \in U).$$

(2) Es ist

$$\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0}{x_0(x_0 + h)} - \frac{x_0 + h}{x_0(x_0 + h)} = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{x_0(x_0 + h)} = -\frac{h}{x_0(x_0 + h)}.$$

Folglich ist

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \frac{1}{h}\left(-\frac{h}{x_0(x_0 + h)}\right) = -\frac{1}{x_0(x_0 + h)}.$$

(3) Der Grenzwert dieses Differenzenquotienten für $h \to 0$ ist

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} = \frac{\lim\limits_{h \to 0}(-1)}{\lim\limits_{h \to 0} x_0 \cdot \lim\limits_{h \to 0}(x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Ergebnis:

Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0\ (x_0 \neq 0)$ ist $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.
Dieses Ergebnis zeigt, daß auch die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist.

■ 10 Es ist eine Gleichung für die Tangente an den Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$ an der Stelle -2 zu ermitteln und der Schnittwinkel α dieser Tangente mit der x-Achse anzugeben.

Lösung:

Die Tangente an den Graph der Funktion f an der Stelle -2 ist die Gerade durch den Punkt $P\,(-2; f(-2))$ mit dem Anstieg $f'(-2)$.
Diese Gerade ist der Graph einer linearen Funktion

$y = mx + n.$

Der Anstieg m der Tangente ist $f'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$ (↗ Beispiel C 9).

Folglich ist

(1) $y = -\frac{1}{4}x + n.$

Die Konstante n bestimmen wir, indem wir die Koordinaten des Punktes P in die Gleichung (1) einsetzen. Wegen $f(-2) = -\frac{1}{2}$ erhalten wir

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(-2) + n \quad \text{bzw.} \quad n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Also ist $y = -\frac{1}{4}x - 1.$

Für den Schnittwinkel α der Tangente mit der x-Achse gilt

$\tan \alpha = m = -\frac{1}{4}.$

Demzufolge ist $\alpha \approx 166°$.

Ergebnis:

Die Gleichung $y = -\frac{1}{4}x - 1$ ist eine Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ an der Stelle $x_0 = -2$ (Bild C 20).
Der Schnittwinkel der Tangente mit der x-Achse beträgt $\alpha \approx 166°$.

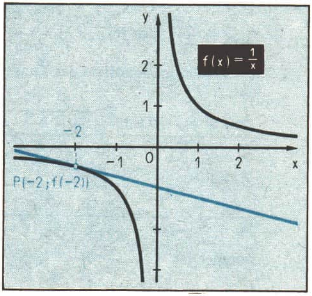


Bild C 20

Aufgaben

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0!

1.↑ **a)** $f(x) = x^3$; $x_0 = \sqrt{3}$
b) $f(x) = 2x - 3$; $x_0 = -0{,}5$

2.↑ **a)** $f(x) = x^3 - 2$; $x_0 = \sqrt{3}$
b) $f(x) = 2x^2$; $x_0 = 2$

3. Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen an jeder Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches differenzierbar sind, indem Sie jeweils $f'(x_0)$ bestimmen!

a) $f(x) = x$ **b)** $f(x) = x^2$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ **d)** $f(x) = x^3$

4. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$, wenn

a) $f(x) = x^3$; $x_0 = \sqrt{3}$; **b)** $f(x) = 2x^2$; $x_0 = 2$!

Bestimmen Sie jeweils den Schnittwinkel α der Tangente mit der x-Achse!
Zeichnen Sie jeweils den Graph von f und die Tangente an den Graph von f im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$!

5 Ableitung einer Funktion in einem Intervall

Das Ergebnis der Aufgabe 3. b) in Lerneinheit 4 zeigt, daß die Funktion f mit $f(x) = x^2$ an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist. Ist x eine beliebige reelle Zahl, so gilt $f'(x) = 2x$. So gilt beispielsweise

$$f'(0) = 0; \qquad f'(1{,}5) = 3;$$
$$f'(-1) = -2; \qquad f'(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3};$$
$$f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}; \qquad f'\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5}.$$

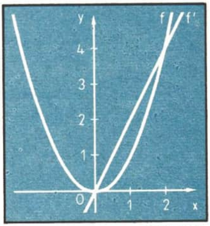


Bild C 21

Jeder reellen Zahl x wird durch die Bildung der Ableitung an der Stelle x genau eine reelle Zahl $f'(x)$ zugeordnet. Folglich ist die Menge der geordneten Paare $[x; f'(x)]$ eine Funktion. Wir bezeichnen sie mit f' und nennen sie die 1. Ableitung von f.

● 7 Das Bild C 21 zeigt die Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und ihrer Ableitung f' in ein und demselben Koordinatensystem.

a) Welche geometrische Bedeutung hat für eine beliebige Zahl x die Zahl $f'(x)$?

b) Wie verhält sich die Funktion f für diejenigen Zahlen x, für die $f'(x) > 0$, $f'(x) = 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gilt?

Wir betrachten eine Funktion f, die in einem Intervall I definiert ist (insbesondere kann I die Menge aller reellen Zahlen sein).
Ist f an jeder Stelle des Intervalls I differenzierbar – man sagt kurz: f ist im Intervall I differenzierbar – so ist auch die Menge f' der geordneten Paare $[x; f'(x)]$ mit $x \in I$ eine Funktion.
Die Funktion f' heißt die **1. Ableitung**[1] **der Funktion f im Intervall I.**
Beachten Sie:
Ist f eine im Intervall I differenzierbare Funktion und x eine beliebige Zahl aus I, so ist $f'(x)$ eine **Zahl.** Die Menge f' der geordneten Paare $[x; f'(x)]$ mit $x \in I$ dagegen ist eine **Funktion**!
Ist f eine Funktion, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist, so nennt man f eine **differenzierbare Funktion.** Die Ableitung f' von f nennt man dann einfach **die Ableitung von f.**
Statt „die Ableitung von f bilden" sagt man auch „die Funktion f ableiten" oder auch „die Funktion f differenzieren".

■ 11 a) Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3 + x^2$ ist die Funktion f' mit $f'(x) = 3x^2 + 2x$ (↗ Beispiel C 8).

b) Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^{-1}$ $(x \neq 0)$ ist die Funktion f' mit $f'(x) = -x^{-2}$ $(x \neq 0)$ (↗ Beispiel C 9).

c) Die Ableitung der Funktion f mit $f(t) = \frac{g}{2}t^2$ $(t \neq 0)$ ist die Funktion f' mit $f'(t) = gt$ (↗ Beispiel C 2).

● 8 Es sei c eine beliebige reelle Zahl.
Bestimmen Sie die Ableitung der konstanten Funktion f mit $f(x) = c$!
Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

[1]) Statt „1. Ableitung von f in I" sagen wir kurz: „Ableitung von f in I".

Aufgaben

1. Differenzieren Sie folgende Funktionen, und bestimmen Sie diejenigen Zahlen x, für die $f'(x) = 0$ ist!

 a) $f(x) = x^2 + 2$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$

 Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen der Aufgabe 3. in Lerneinheit 4!

2. Berechnen Sie diejenigen Stellen, an denen die Tangenten an den Graph der Funktion $f(x) = x^3$ parallel zu der Sekante durch die Punkte $P_1(-1; f(-1))$ und $P_2(2; f(2))$ sind!
 Zeichnen Sie den Graph von f, die Sekante durch die Punkte P_1 und P_2 sowie die Tangenten an den Graph von f an den berechneten Stellen!

6 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

● 9 a) Ermitteln Sie $|x|$ für $x = -3$; $x = 2$; $x = -0{,}38$ und $x = 0$!

b) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $f(x) = |x|$!

c) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$ stetig ist, daß also $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ gilt!

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Beispiel B 18!

Wir haben bisher zwei wichtige lokale Eigenschaften von Funktionen kennengelernt, nämlich **Stetigkeit an einer Stelle** (↗ Definition B 5, Seite 114) und **Differenzierbarkeit an einer Stelle** (↗ Definition C 3). In dieser Lerneinheit werden wir untersuchen, ob es einen Zusammenhang zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0 gibt.
Es sei f eine Funktion, die in einer Umgebung einer Stelle x_0 definiert ist.

Folgt aus der Stetigkeit von f an der Stelle x_0 die Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0?

Diese Frage soll durch das folgende Beispiel beantwortet werden.

■ 12 Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = |x|$. Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig (↗ Auftrag C 9).
Um zu untersuchen, ob f an der Stelle 0 auch differenzierbar ist, haben wir zu prüfen, ob der Grenzwert des Differenzenquotienten der Funktion f an der Stelle 0 existiert.
Der Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle 0 ist die Funktion D mit

$$D(h) = \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} \quad \text{und} \quad h \neq 0.$$

Der Grenzwert der Funktion D an der Stelle 0 existiert genau dann, wenn für jede Nullfolge (h_n) mit $h_n \neq 0$ für alle n die Folge $\left(\frac{|h_n|}{h_n}\right)$ gegen dieselbe Zahl konvergiert.
Wählen wir eine beliebige Nullfolge (h_n) mit $h_n > 0$ für alle n, so ist

$$\frac{|h_n|}{h_n} = \frac{h_n}{h_n} = 1 \quad \text{und folglich} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{|h_n|}{h_n} = 1.$$

Wählen wir dagegen eine Nullfolge (h_n^*) mit $h_n^* < 0$ für alle n, so gilt

$$\frac{|h_n^*|}{h_n^*} = \frac{-h_n^*}{h_n^*} = -1 \quad \text{und folglich} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{|h_n^*|}{h_n^*} = -1.$$

Da die Folgen $\left(\frac{|h_n|}{h_n}\right)$ und $\left(\frac{|h_n^*|}{h_n^*}\right)$ verschiedene Grenzwerte haben, existiert der Grenzwert des betrachteten Differenzenquotienten nicht, das heißt:
Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Ergebnis:

Wenn f an der Stelle x_0 stetig ist, so folgt daraus nicht, daß f an der Stelle x_0 differenzierbar ist.
Jedoch gilt – wie hier ohne Beweis mitgeteilt wird – der folgende Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

Wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, **so** ist f an der Stelle x_0 stetig

Mit anderen Worten:
Aus der Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0 folgt die Stetigkeit von f an der Stelle x_0.
Den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit formuliert man auch folgendermaßen:

Die Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0 ist eine **hinreichende Bedingung für**

die Stetigkeit von f an der Stelle x_0

Oder auch:

Die Stetigkeit von f an der Stelle x_0 ist eine **notwendige Bedingung für**

die Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0

Zusammenfassung

Ist f in einer Umgebung einer Stelle x_0 definiert, so nennt man die Funktion

$$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0,$$

den **Differenzenquotienten** der Funktion f an der Stelle x_0.

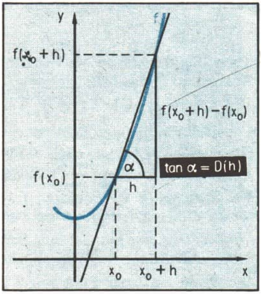


Bild C 22

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

so heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar.**
Den Grenzwert nennt man die **Ableitung** von f an der Stelle x_0; man schreibt dafür

$$f'(x_0) \text{ oder } \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x = x_0}.$$

Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist $f'(x_0)$ der **Anstieg der Tangente** an den Graph von f im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$.

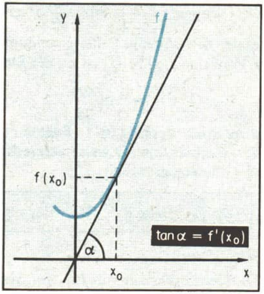


Bild C 23

Schrittfolge zum Berechnen der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0:	$f(x) = x^2 + 1; \quad x_0 = 1$
(1) Bestimmen des Differenzenquotienten von von f an der Stelle x_0	$D(h) = \dfrac{[(1 + h)^2 + 1] - [1^2 + 1]}{h}$
(2) Umformen des Differenzenquotienten	$D(h) = \dfrac{1 + 2h + h^2 + 1 - 1 - 1}{h} = 2 + h$
(3) Bestimmen des Grenzwertes des Differenzenquotienten für $h \to 0$	$\lim\limits_{h \to 0} D(h) = \lim\limits_{h \to 0} (2 + h) = 2; \quad f'(1) = 2$
Ist f im Intervall I differenzierbar, so ist die Menge der geordneten Paare $[x; f'(x)]$ mit $x \in I$ eine **Funktion.** Man nennt sie die **erste Ableitung** von f im Intervall I und schreibt dafür f'.	Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ ist die Funktion $f'(x) = 2x$.

Wenn f an der Stelle x_0 **differenzierbar** ist, **so** ist f an der Stelle x_0 **stetig.**
Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.

Aufgaben

1. Zeichnen Sie den Graph der Funktion f, und untersuchen Sie die Funktion f bezüglich Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle x_0, wenn
   a) $f(x) = |x - 1|$ und $x_0 = 1$; b) $f(x) = |x^2 - 4|$ und $x_0 = 2$!

2. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung!
   a) Die Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle x_0 ist keine notwendige Bedingung für die Stetigkeit von f an der Stelle x_0.
   b) Die Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x_0 ist keine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0.
   c) $f'(x_0) = 0$ ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Tangente an den Graph von f im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ parallel zur x-Achse verläuft.
   d) Die Stetigkeit einer Funktion f in dem abgeschlossenen Intervall $\langle a; b\rangle$ ist eine notwendige Bedingung dafür, daß f im Intervall $\langle a; b\rangle$ ein Maximum hat.

Differentiationsregeln; die Differentiation von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen

Die einführenden Beispiele haben gezeigt, daß es mit Hilfe der Differentialrechnung möglich ist, lokale Eigenschaften von Funktionen zu untersuchen. Solche Untersuchungen werden im weiteren Verlauf des Unterrichts einen Schwerpunkt bilden. Bei diesen Untersuchungen werden wir immer wieder Ableitungen gegebener Funktionen zu berechnen haben. Andererseits haben die Beispiele und Aufgaben in den vorangegangenen Lerneinheiten verdeutlicht, daß der Aufwand zur Berechnung der Ableitung von Funktionen relativ hoch ist. Nun wurde der Begriff „Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0" mit Hilfe des Grenzwertbegriffs für Funktionen definiert. Deswegen liegt es nahe zu untersuchen, welche Folgerungen sich aus den Grenzwertsätzen für Funktionen für die Berechnung der Ableitung zusammengesetzter Funktionen, zum Beispiel der Summe, des Produkts und des Quotienten gegebener differenzierbarer Funktionen, ergeben. Diese Untersuchungen führen zu sogenannten **Differentiationsregeln,** die bei der Berechnung der Ableitung gegebener Funktionen wesentliche Vereinfachungen ermöglichen.

7 Ableitung einer Summe

● 10 Wiederholen Sie die Grenzwertsätze für Funktionen!

■ 13 Die Funktionen $u(x) = x^3$ und $v(x) = x^2$ sind an jeder Stelle x ihres Definitionsbereiches differenzierbar. Es gilt (↗ Aufgabe 3., Seite 142)

$$u'(x) = 3x^2 \quad \text{und} \quad v'(x) = 2x.$$

Im Beispiel C 8 auf Seite 140f. wurde gezeigt, daß die Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ ebenfalls an jeder Stelle x ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist, wobei

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

gilt. Die Funktion f ist die Summe der Funktionen u und v.
Für die Funktionen f, u und v gilt also

$$f'(x) = u'(x) + v'(x),$$

wobei x eine beliebige reelle Zahl ist.

Läßt sich dieses Ergebnis auf die Summe beliebiger differenzierbarer Funktionen übertragen?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir beliebige Funktionen u und v, die an einer Stelle x_0 differenzierbar sind. Das bedeutet: Die Funktionen u und v sind in einer Umgebung von x_0 definiert, und die Grenzwerte

$$u'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad v'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$$

existieren.
Wir haben zu untersuchen, ob die Funktion s mit $s(x) = u(x) + v(x)$ in x_0 differenzierbar ist und ob

$$s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

gilt. Dabei gehen wir wie in den Beispielen C 7 bis C 9 vor.

(1) Bestimmen des Differenzenquotienten der Funktion s an der Stelle x_0

Da die Funktionen u und v in einer Umgebung von x_0 definiert sind, gibt es eine Umgebung U von x_0, in der die Funktion s definiert ist. Es ist

$$s(x_0) = u(x_0) + v(x_0) \quad \text{und} \quad s(x_0 + h) = u(x_0 + h) + v(x_0 + h).$$

Betrachten wir nur solche Zahlen h, für die $h \neq 0$ und $x_0 + h \in U$ gilt, so ist der Differenzenquotient der Funktion s an der Stelle x_0 für alle diese Zahlen h definiert, und es gilt

$$\frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h) + v(x_0 + h) - [u(x_0) + v(x_0)]}{h}.$$

(2) Umformen des Differenzenquotienten

Wir formen den Differenzenquotienten der Funktion s so um, daß wir die Differenzenquotienten der Funktionen u und v erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} &= \frac{u(x_0 + h) + v(x_0 + h) - u(x_0) - v(x_0)}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}.\end{aligned}$$

(3) Bestimmen des Grenzwertes des Differenzenquotienten für $h \to 0$

Nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}.$$

Dann erhalten wir unter Verwendung des Satzes B 5, Seite 111,

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \\ &= u'(x_0) + v'(x_0).\end{aligned}$$

Folglich ist die Funktion s an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt

$$s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Damit können wir die oben gestellte Frage bejahen. Es gilt also der folgende Satz.

▷ 1

> **SATZ**
>
> **Sind die Funktionen u und v in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion s mit**
> **$s(x) = u(x) + v(x)$**
> **in x_0 differenzierbar, und für die Ableitung der Funktion s an der Stelle x_0 gilt:**
> **$s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$.**

Satz C 1 besagt nicht nur, daß die Summe s zweier in x_0 differenzierbarer Funktionen u und v wiederum eine in x_0 differenzierbare Funktion ist, sondern auch, wie man die Ableitung der Funktion s an der Stelle x_0 aus den Ableitungen der Funktionen u und v berechnen kann. Diese Regel zum Differenzieren einer Summe von Funktionen nennen wir kurz **Summenregel,** die man auch in folgender Kurzform schreibt:

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}\,.$$

Die Summenregel läßt sich auch auf mehr als zwei Summanden ausdehnen:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'.$$

■ 14 Gegeben seien die Funktionen u und v mit $u(x) = x^3 + x^2$ und $v(x) = x^{-1}$ $(x \neq 0)$.

Die Funktion u ist für jedes x differenzierbar. Es ist $u'(x) = 3x^2 + 2x$ (↗ Beispiel C 8, Seite 140f.).

Die Funktion v ist für jedes x mit $x \neq 0$ differenzierbar. Es ist $v'(x) = -x^{-2}$ (↗ Beispiel C 9, Seite 141).

Dann ist die Funktion s mit $s(x) = u(x) + v(x)$ für jedes $x \neq 0$ differenzierbar, und es gilt $s'(x) = u'(x) + v'(x) = 3x^2 + 2x - x^{-2}$.

Im Satz C 1 wird vorausgesetzt, daß die Funktionen u und v an einer Stelle x_0 differenzierbar sind. Sind die Funktionen u und v in einem Intervall I differenzierbar, so ist auch die Funktion s mit $s(x) = u(x) + v(x)$ in I differenzierbar, und es gilt

$$s'(x) = u'(x) + v'(x) \quad \text{für jedes} \quad x \in I.$$

Aufgaben

1. Wenden Sie den Satz C 1 auf den Spezialfall an, daß u eine beliebige in x_0 differenzierbare Funktion und v eine konstante Funktion ist!

2. Gegeben seien die Funktionen

   $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = x^2 - 0{,}5 \quad$ und $\quad h(x) = x^2 - 2.$

   a) Bestimmen Sie die Ableitungen dieser Funktionen!
   b) Zeichnen Sie die Graphen dieser Funktionen und die Tangenten an diese Graphen in den Punkten mit der Abszisse 0,5! Was stellen Sie fest?

3. Ermitteln Sie unter Verwendung der Ergebnisse der Aufgabe 3. in Lerneinheit 4, der Aufgabe 2. in Lerneinheit 5, des Beispiels C 9 und des Auftrages C 8 die Ableitungen folgender Funktionen!

   a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5$ b) $f(z) = \frac{1}{3}z^3 + z^2 + \sqrt{2}$

   c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

   e) $f(s) = (s - 2)(s + 3)$ f) $f(x) = x(1 + x)$

4. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3$.
   a) Für welches x gilt $f'(x) = 0$?
   b) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse!
   c) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an den Graph von f in diesen Schnittpunkten!
   Welche Winkel bilden die betreffenden Tangenten mit der x-Achse?

5.* Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
   Sind die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion s mit $s(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt: $s'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} u_i'(x_0)$!

8 Ableitung eines Produkts; Ableitung von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

● 11 Untersuchen Sie am Beispiel der Funktion f mit $f(x) = x^3 = x^2 \cdot x$, ob die Ableitung eines Produkts gleich dem Produkt der Ableitungen der einzelnen Faktoren ist!

In dieser Lerneinheit wollen wir zeigen, daß das Produkt zweier in x_0 differenzierbarer Funktionen u und v ebenfalls in x_0 differenzierbar ist, und im Zusammenhang damit eine **Regel zur Bestimmung der Ableitung der Funktion $u \cdot v$ an der Stelle x_0** herleiten.

▷ 2 **SATZ**

Sind die Funktionen u und v in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion p mit $p(x) = u(x) \cdot v(x)$ in x_0 differenzierbar, und für die Ableitung der Funktion p an der Stelle x_0 gilt:

$p'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$.

Beweis:

Voraussetzung: Es seien u und v Funktionen, die an der Stelle x_0 differenzierbar sind.
Das bedeutet: Die Funktionen u und v sind in einer Umgebung von x_0 definiert, und die Grenzwerte

$$u'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad v'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$$

existieren.

Behauptung: Die Funktion p mit $p(x) = u(x) \cdot v(x)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt $p'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$.

Wie erhalten wir diese Behauptung?

(1) Bestimmen des Differenzenquotienten der Funktion p an der Stelle x_0

Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung U von x_0, in der die Funktion p definiert ist. Dann ist der Differenzenquotient der Funktion p für alle h mit $h \neq 0$ und $x_0 + h \in U$ definiert.
Wegen $p(x_0) = u(x_0) \cdot v(x_0)$ und $p(x_0 + h) = u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h)$

gilt $$\frac{p(x_0 + h) - p(x_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}.$$

(2) Umformen des Differenzenquotienten

Um bei der Grenzwertbildung die obigen Voraussetzungen anwenden zu können, muß der Differenzenquotient der Funktion p so umgeformt werden, daß die Differenzenquotienten der Funktionen u und v vorkommen. Das erreichen wir, indem wir im Zähler das *Produkt $u(x_0) \cdot v(x_0 + h)$ erst subtrahieren und dann wieder addieren*, so daß der Zähler selbst nicht geändert wird. Anschließend ergeben sich durch Ausklammern die gewünschten Differenzenquotienten. Damit erhalten wir

$$\frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0 + h) + u(x_0) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

$$= \frac{[u(x_0 + h) - u(x_0)] \cdot v(x_0 + h) + u(x_0)\,[v(x_0 + h) - v(x_0)]}{h}$$

$$= \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}\, v(x_0 + h) + u(x_0)\, \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}.$$

(3) Bestimmen des Grenzwertes des Differenzenquotienten für $h \to 0$

Nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}.$$

Aus der Differenzierbarkeit der Funktion v an der Stelle x_0 folgt die Stetigkeit von v an der Stelle x_0 (↗ Lerneinheit 6, Seite 145). Folglich muß ihr Funktionswert an der Stelle x_0 mit dem Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} v(x_0 + h)$ übereinstimmen, das heißt, es ist

$$\lim_{h\to 0} v(x_0 + h) = v(x_0).$$

Unter Verwendung des Satzes B 5, Seite 111, erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} v(x_0 + h) + u(x_0) \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} v(x_0 + h) + \lim_{h\to 0} u(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$$
$$= u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0).$$

Folglich ist die Funktion p an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt

$$p'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0).$$

Die somit erhaltene Differentiationsregel nennt man **Produktregel.** Man schreibt kurz:

$$\boxed{(u \cdot v)' = u'v + uv'}\,.$$

Die Produktregel gilt auch für mehr als zwei Faktoren. So ist zum Beispiel

$$(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Im Satz C 2 wird vorausgesetzt, daß die Funktionen u und v an einer Stelle x_0 differenzierbar sind. Sind die Funktionen u und v in einem Intervall I differenzierbar, so ist auch die Funktion p mit $p(x) = u(x) \cdot v(x)$ in I differenzierbar, und es gilt

$$p'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad \text{für jedes} \quad x \in I.$$

■ 15 Gegeben seien die Funktionen u und v mit

$$u(x) = x^3 + x^2 - 3 \quad \text{und} \quad v(x) = x^2 + x - 1,$$

die für jedes x differenzierbar sind. Für eine beliebige reelle Zahl x gilt

$$u'(x) = 3x^2 + 2x \quad \text{und} \quad v'(x) = 2x + 1.$$

Nach Satz C 2 ist die Funktion p mit

$$p(x) = u(x) \cdot v(x) = (x^3 + x^2 - 3)(x^2 + x - 1)$$

für jedes x differenzierbar, und es gilt

$$p'(x) = \underbrace{(3x^2 + 2x)}_{u'(x)}\underbrace{(x^2 + x - 1)}_{v(x)} + \underbrace{(x^3 + x^2 - 3)}_{u(x)}\underbrace{(2x + 1)}_{v'(x)} = 5x^4 + 8x^3 - 8x - 3.$$

● 12 **a)** Beweisen Sie durch Anwendung der Produktregel den Satz:
Ist v eine in x_0 differenzierbare Funktion und c eine beliebige reelle Zahl, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = c \cdot v(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = c \cdot v'(x_0)$!

b) Beweisen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) und des Satzes C 1 den Satz:
Sind die Funktionen u und v in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion d mit $d(x) = u(x) - v(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt $d'(x_0) = u'(x_0) - v'(x_0)$!

■ 16 Unter Verwendung der Produktregel ist zu zeigen, daß die Funktion $f(x) = x^4$ die Ableitung $f'(x) = 4x^3$ hat.

Lösung:

Es ist $f(x) = x^4 = x^3 \cdot x$.
Wir setzen $u(x) = x^3$ und $v(x) = x$. Die Funktionen u und v sind differenzierbar, es gilt $u'(x) = 3x^2$ und $v'(x) = 1$.

Folglich ist $f'(x) = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 3x^3 + x^3 = 4x^3$.

Ergebnis: Die Funktion $f(x) = x^4$ hat die Ableitung $f'(x) = 4x^3$.

● 13 Zeichnen Sie die Graphen der Potenzfunktionen $y = x^n$ für $n = 1, 2, 3$ und 4!

Die im Auftrag C 13 betrachteten Potenzfunktionen haben wir bereits als differenzierbare Funktionen kennengelernt. Es ist

$$(x^1)' = 1 \quad = 1 \cdot x^{1-1};$$
$$(x^2)' = 2x \quad = 2 \cdot x^{2-1};$$
$$(x^3)' = 3x^2 = 3 \cdot x^{3-1};$$
$$(x^4)' = 4x^3 = 4 \cdot x^{4-1}.$$

Diese hier erkennbare Gesetzmäßigkeit gilt tatsächlich für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq 1$.

▷ 3

SATZ
Jede Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in N$ und $n \geqq 1$ ist differenzierbar. Ihre Ableitung ist $f'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis:

Wir beweisen diesen Satz durch vollständige Induktion über n.

1. Induktionsanfang: Für die natürliche Zahl 1 gilt der Satz (siehe oben).

2. Induktionsschritt: Es sei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geqq 1$.

Induktionsvoraussetzung:
Die Funktion $u(x) = x^n$ ist differenzierbar, und es gilt $u'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Induktionsbehauptung:
Die Funktion $f(x) = x^{n+1}$ ist differenzierbar, und es gilt $f'(x) = (n + 1)\, x^n$.

Induktionsbeweis:

Es ist $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$.

Wir setzen $u(x) = x^n$ und $v(x) = x$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist die Funktion u differenzierbar, und es gilt

$$\boxed{u'(x) = n \cdot x^{n-1}}\,.$$

Nach dem Induktionsanfang ist die Funktion v differenzierbar, und es gilt

$$\boxed{v'(x) = 1}\,.$$

Unter Verwendung der Produktregel folgt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = n \cdot x^n + x^n = (n + 1)\, x^n.$$

Damit ist der Satz C 3 bewiesen.

Aufgaben

Ermitteln Sie die Ableitungen folgender Funktionen!

1.↑ a) $f(x) = x^5$
b) $f(x) = 3x^4$
c) $f(z) = \frac{1}{2}(z^2 + 1)$
d) $u(x) = (x^2 - 7x)(x^3 + 5)$
e) $g(a) = a(a + 1)(a - 2)$

2.↑ a) $f(x) = x^7$
b) $f(x) = -0{,}5 \cdot x^6$
c) $f(t) = (2t^2 + 1)\left(t + \frac{1}{t}\right)$
d) $v(x) = (0{,}5x^3 - 3x^2)(4x^3 - \sqrt{2x})$
e) $w(z) = z^3(z^2 + 1)(2z + 3)$

3. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 + 1{,}5$.
a) Berechnen Sie den Anstieg des Graphen von f an den Stellen 0; 0,5; −0,5; 2; −2!
b) An welcher Stelle hat der Graph von f den Anstieg 4?
Geben Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graph von f für diese Stelle an!

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 1$.
a) In welchen Punkten schneidet der Graph von f die Koordinatenachsen?
b) Berechnen Sie die Anstiege der Tangenten an den Graph von f in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen!
c) Gibt es eine weitere Tangente an den Graph von f, die den gleichen Anstieg wie die Tangente im Schnittpunkt mit der x-Achse hat?

Ermitteln Sie die Ableitungen folgender Funktionen!

5.↑ $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

6.↑ $f(x) = 2x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 6$

7. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - ax^2 + 2 \quad (a \in R)$.
Bestimmen Sie die Zahl a für den Fall, daß $f'(2) = 0$ ist!

8. Wenden Sie die Produktregel (↗ Satz C 2, Seite 150) auf den Spezialfall $u = v$ an!

9.* Beweisen Sie unter Verwendung der Produktregel (↗ Satz C 2, Seite 150):
Sind die Funktionen u, v und w in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion p mit $p(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$p'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) \cdot w(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0) \cdot w(x_0) + u(x_0) \cdot v(x_0) \cdot w'(x_0).$$

9 Ableitung eines Quotienten

Wie wir schon wissen, sind die Funktionen $u(x) = 2x^3 - 5x$ und $v(x) = x^2 + 1$ an jeder Stelle x differenzierbar. Wegen $v(x) \neq 0$ für alle x ist die Funktion

$$q(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{2x^3 - 5x}{x^2 + 1}$$

für alle x definiert.

Mit den uns bisher bekannten Sätzen und Differentiationsregeln wissen wir aber noch nicht, ob die Funktion q differenzierbar ist und wie man gegebenenfalls ihre Ableitung erhält. Man kann jedoch analog zu den Lerneinheiten 7 und 8 zeigen, daß auch der Quotient zweier in x_0 differenzierbarer Funktionen u und v mit $v(x_0) \neq 0$ in x_0 differenzierbar ist. Auf diesen Nachweis wollen wir hier verzichten. Wir teilen die Regel für die Differentiation eines Quotienten differenzierbarer Funktionen u und v ohne Beweis mit.

▷ 4

SATZ

Sind u und v an der Stelle x_0 differenzierbare Funktionen mit $v(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion q mit $q(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und für die Ableitung der Funktion q an der Stelle x_0 gilt:

$$q'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{(v(x_0))^2}.$$

Diese Differentiationsregel nennt man **Quotientenregel.** Man schreibt kurz:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}.$$

● 14 Formulieren Sie analog zu den Lerneinheiten 7 und 8 die Quotientenregel für den Fall, daß u und v in einem Intervall I differenzierbar sind und $v(x) \neq 0$ für jedes $x \in I$ gilt!

■ 17 Nach Satz C 4 ist die Funktion q mit $q(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{2x^3 - 5x}{x^2 + 1}$ differenzierbar. Aus $u'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 5$ und $v'(x) = 2x$ folgt

$$q'(x) = \frac{(6x^2 - 5)(x^2 + 1) - (2x^3 - 5x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 11x^2 - 5}{(x^2 + 1)^2}.$$

■ 18 Für eine beliebige natürliche Zahl n mit $n \geqq 1$ ist die Ableitung der Funktion $f(x) = x^{-n}$ $(x \neq 0)$ zu ermitteln.

Lösung:

Es ist $f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(x \neq 0)$.

Wir setzen $u(x) = 1$ und $v(x) = x^n$. Wegen $u'(x) = 0$ und $v'(x) = n \cdot x^{n-1}$ erhält man unter Verwendung der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -n \cdot \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1} \quad (x \neq 0).$$

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = x^{-n}$ $(n \in N,\ n \geqq 1)$ hat die Ableitung $f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$.

Folgerung:

Die Regel zur Differentiation von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten (↗ Satz C 3) gilt auch für Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten.

Aufgaben

Bilden Sie die Ableitung der folgenden Funktionen, und geben Sie gegebenenfalls diejenigen Stellen an, an denen die Funktionen nicht differenzierbar sind!

1.↑ a) $f(x) = \dfrac{7}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 7x - 5}{x + 1}$

c) $f(t) = \dfrac{4 - t^2}{t^2 - 4}$ d) $f(x) = \dfrac{5}{x^3}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^2}$

2.↑ a) $f(x) = \dfrac{7 - x}{x^2 + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^2 + 7}$

c) $f(z) = \dfrac{0{,}5z^4 + 3z^2 + 7}{z^2 - 4z + 3}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{5x^3}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{1}{x^3}$

3. Welchen Anstieg hat der Graph der Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ an der Stelle $x_0 = 3$?

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^{-1}$ $(x \neq 0)$.

a) Berechnen Sie den Anstieg der Sekante des Graphen von f durch die Punkte $P_1(0{,}25; f(0{,}25))$ und $P_2(4; f(4))$!

b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte des Graphen von f, in denen der Tangentenanstieg mit dem berechneten Sekantenanstieg übereinstimmt!

c) Geben Sie für die unter b) berechneten Punkte jeweils eine Gleichung der Tangente an den Graph von f an!

5. Beweisen Sie mit Hilfe der Quotientenregel: Ist v eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion mit $v(x_0) \neq 0$, so gilt $\left(\dfrac{1}{v(x_0)}\right) = -\dfrac{v'(x_0)}{v(x_0)^2}$!

Differenzieren Sie folgende Funktionen!

6.↑ a) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 5x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

7.↑ a) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{ax + b}$ $(a, b \in R)$

8. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2x + a}$ $(a \in R)$.

Für welche Zahlen a ist $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$?

10 Differentiation rationaler Funktionen

Wir kennen bereits lineare und quadratische Funktionen. Zum Beispiel heißt f eine *lineare Funktion*, wenn es reelle Zahlen a_0 und a_1 mit $a_1 \neq 0$ gibt, so daß $f(x) = a_1x + a_0$ für jedes x gilt.[1])
Analog heißt f eine *quadratische Funktion*, wenn es reelle Zahlen a_0, a_1 und a_2 mit $a_2 \neq 0$ gibt, so daß $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ für jedes x gilt.[2])

---

[1]) Bisher haben wir die Koeffizienten meist mit m und n bezeichnet.
[2]) Bisher haben wir die Koeffizienten meist mit a, b, c bezeichnet.

Allgemeiner nennt man f eine **ganze rationale Funktion,** wenn es eine natürliche Zahl n und reelle Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ gibt, so daß für jedes x gilt

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Man nennt die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ die **Koeffizienten** und die natürliche Zahl n den **Grad** der ganzen rationalen Funktion f. Ganze rationale Funktionen sind für alle reellen Zahlen definiert. Wir werden deshalb im folgenden nur dann den Definitionsbereich einer ganzen rationalen Funktion ausdrücklich angeben, wenn er eingeschränkt werden soll.

■ 19 a) Die Funktion $f(x) = 6x^5 + \sqrt{2}\,x^3 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 + x - 15$ ist eine ganze rationale Funktion. Ihre Koeffizienten sind:

$$a_5 = 6; \quad a_4 = 0; \quad a_3 = \sqrt{2}; \quad a_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}; \quad a_1 = 1; \quad a_0 = -15.$$

Ihr Grad ist 5. Man sagt auch: f ist eine ganze rationale Funktion fünften Grades.

b) Jede quadratische Funktion ist eine ganze rationale Funktion zweiten Grades.

c) Jede lineare Funktion ist eine ganze rationale Funktion ersten Grades.

d) Jede konstante Funktion $f(x) = c$ ($c \in P$) ist eine ganze rationale Funktion. Auch die Funktion f mit $f(x) = 0$ für alle x zählt man zu den ganzen rationalen Funktionen.

Eine noch umfangreichere Menge von Funktionen bilden die **rationalen Funktionen.** Das sind jene Funktionen, die als Quotient ganzer rationaler Funktionen dargestellt werden können. Mit anderen Worten:

Man nennt f eine **rationale Funktion,** wenn es ganze rationale Funktionen u und v gibt, so daß f für jedes x mit $v(x) \neq 0$ definiert ist und $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ gilt.

■ 20 a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist eine rationale Funktion. Hier ist $u(x) = x^2 - 1$ und $v(x) = x - 1$.

Die Funktion f ist für alle $x \neq 1$ definiert.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ ist ebenfalls eine rationale Funktion. Es ist hier $u(x) = 1$ und $v(x) = x$.

Die Funktion f ist für alle x mit $x \neq 0$ definiert.

c) Die Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $f(x) = |x|$ und die Winkelfunktionen sind *keine* rationalen Funktionen. Solche Funktionen nennt man *nichtrationale* Funktionen.

Die Funktion $f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 3x + 4)}{x^2 + 1}$ ist eine rationale Funktion. Da aber die Funktion $v(x) = x^2 + 1$ für *alle* x von Null verschieden ist, gilt $f(x) = x^2 - 3x + 4$ für alle x, das heißt, f ist sogar eine *ganze* rationale Funktion.

Rationale Funktionen, die nicht ganze rationale Funktionen sind, nennt man **gebrochene rationale Funktionen.**

Der Definitionsbereich einer gebrochenen rationalen Funktion enthält alle reellen Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen der Nennerfunktion. Wir werden deshalb im folgenden auch den Definitionsbereich einer gebrochenen rationalen Funktion nur dann ausdrücklich angeben, wenn er eingeschränkt werden soll.
Wir wollen nun die rationalen Funktionen auf Differenzierbarkeit untersuchen.

■ 21 a) Wir differenzieren die ganze rationale Funktion $f(x) = 3x^4 - 6{,}2x^2 + 2x - 3{,}2$.
Unter Verwendung der bereits behandelten Differentiationsregeln erhalten wir $f'(x) = 12x^3 - 12{,}4x + 2$.
Diese Beziehung gilt für alle reellen Zahlen x. f ist also überall differenzierbar, und die Ableitung von f ist wieder eine ganze rationale Funktion.

b) Wir differenzieren die rationale Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1}$ $(x \neq \pm 1)$.
Mit Hilfe der Quotientenregel erhält man

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(x^2 - 1) - (x^2 - 3x - 5) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

f ist an allen Stellen des Definitionsbereiches differenzierbar, und die Ableitung von f ist wieder eine rationale Funktion.

Jede rationale Funktion setzt sich mittels Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aus Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und konstanten Funktionen zusammen. Wir wissen bereits, daß die Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und die konstanten Funktionen differenzierbar sind.

Damit folgt aus den Differentiationsregeln, daß **jede rationale Funktion** an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches **differenzierbar** und die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aus diesem Ergebnis folgt (↗ Lerneinheit 6) auch sofort, daß **jede rationale Funktion** in ihrem gesamten Definitionsbereich **stetig** ist.
Die Ableitung einer beliebigen rationalen Funktion f kann durch Anwendung der bisher behandelten Differentiationsregeln leicht und schnell ermittelt werden.
Auch kann man den Funktionswert $f(x)$ einer rationalen Funktion an einer beliebigen Stelle x durch Anwendung der vier Grundrechenoperationen leicht berechnen. Wegen dieser vorteilhaften Eigenschaften versucht man häufig, Prozesse in Natur und Gesellschaft durch rationale Funktionen angenähert zu beschreiben, zum Beispiel bei der Anwendung der Bewegungsgesetze (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes), des OHMschen Gesetzes, der Optimierung von Produktionskosten (↗ Beispiel C 66 auf Seite 208 f.). In den folgenden Lerneinheiten werden wir uns deshalb ausführlich mit rationalen Funktionen beschäftigen.

Aufgaben

Welche der folgenden Funktionen sind rational, gebrochen rational, ganz rational?

1.↑ a) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 15x}{3}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

c) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

2.↑ a) $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$

c) $f(x) = x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{2}$

3. Differenzieren Sie die in den Aufgaben 1. und 2. genannten Funktionen, sofern es sich um rationale Funktionen handelt!

4. Welche der folgenden Funktionen sind rationale, gebrochene rationale, ganze rationale Funktionen?

a) $f(x) = 3x^2 + \lg x + 10$ b) $f(x) = \sqrt{3}\,x + \frac{1}{4}$

c) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 4z + 25}$ d) $g(t) = |t + 4|$

Geben Sie je eine ganze rationale Funktion f an, die folgenden Bedingungen genügt!

5.↑ a) Grad von f gleich 1,
$f(0) = 2$
b) Grad von f gleich 2,
$f(0) = 0, f(1) = 0, a_2 = 1$

6.↑ a) Grad von f gleich 1,
$f(0) = 0, a_1 = 7$
b) Grad von f gleich 2,
$f(0) = -1$

7. Untersuchen Sie, welche der Aufgaben 5. a), b) und 6. a), b) *eindeutig* lösbar sind!

8. Begründen Sie, daß die Ableitung einer ganzen rationalen Funktion wieder eine ganze rationale Funktion ist!

9. Begründen Sie, warum die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$ *nicht* mit der ganzen rationalen Funktion $g(x) = x + 1$ übereinstimmt!

11 Umkehrfunktion

● 15 a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^3$ in ein und dasselbe Koordinatensystem! Nennen Sie Eigenschaften dieser Funktionen!

b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ und $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem! Nennen Sie Eigenschaften dieser Funktionen!

Bild C 24 zeigt das Volumen V eines Würfels in Abhängigkeit von der Kantenlänge a. Es ist

$V = f(a) = a^3$ (1).

Zu jeder Kantenlänge a_0 ($a \geqq 0$) gehört ein eindeutig bestimmtes Volumen V_0.

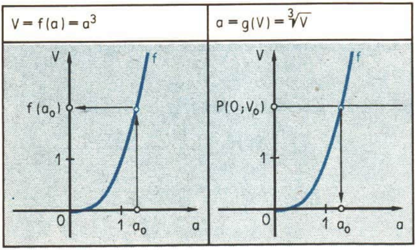


Bild C 24, C 25

Kann man aus dem angegebenen Volumen auch eindeutig die Kantenlänge a des Würfels bestimmen?

Mit anderen Worten:

Ist die Kantenlänge a auch eine Funktion des Volumens V des Würfels?

Es sei V_0 das gegebene Volumen ($V_0 \geqq 0$). Legen wir eine Parallele zur a-Achse durch den Punkt $P(0;\ V_0)$ auf der V-Achse, so schneidet diese den Graph von f in genau einem Punkt (↗ Bild C 25). Das geordnete Paar $[a_0;\ V_0]$ ist das einzige Paar, das zur Funktion f gehört und an zweiter Stelle den Wert V_0 hat. Dem Volumen V_0 ist damit eindeutig die Kantenlänge a_0 zugeordnet, das heißt, die Kantenlänge ist auch eine Funktion g des Volumens:

$$a = g(V).$$

Eine Funktionsgleichung für g können wir ermitteln, indem wir die Gleichung (1) nach a auflösen. Es ist $a = \sqrt[3]{V}$, also

$$a = g(V) = \sqrt[3]{V}.$$

Man nennt g die **Umkehrfunktion** von f.
Zu f gehören zum Beispiel die geordneten Paare [1; 1], [2; 8], [5; 125].
Zu g gehören die geordneten Paare [1; 1], [8; 2], 125; 5].

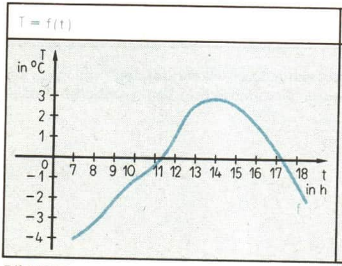


Bild C 26

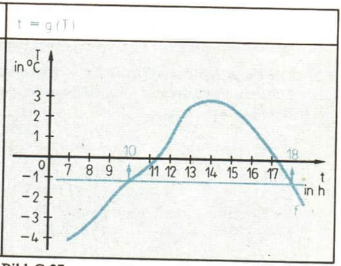


Bild C 27

In Bild C 26 ist der Temperaturverlauf eines Februartages in Berlin dargestellt. Die Temperatur ist eine Funktion der Zeit: $T = f(t)$.

Zu jedem Zeitpunkt t gehört eine eindeutig bestimmte Temperatur $f(t)$. So entnehmen wir dem Bild C 26:

t	7	9	10	12	14	17	18
$T = f(t)$	−4	−2	−1	+1	+3	+0,5	−1

Gehört umgekehrt zu jeder Temperatur T auch ein eindeutig bestimmter Zeitpunkt t?

Wählen wir zum Beispiel die Temperatur von −1 °C, so entnehmen wir dem Bild C 27, daß diese Temperatur sowohl um 10 Uhr als auch um 18 Uhr gemessen wurde.

Es gibt also zwei geordnete Paare, die zur Funktion f gehören und an zweiter Stelle den Wert -1 haben, nämlich $[10; -1]$ und $[18; -1]$. Folglich kann man nicht eindeutig von der Temperatur auf die Uhrzeit schließen. Diese Funktion f ist nicht umkehrbar. Ihr fehlt jene Eigenschaft, die die Umkehrung ermöglicht, nämlich die sogenannte **Eineindeutigkeit.**

Eine Funktion f heißt **eineindeutig,** wenn es zu jedem y aus dem Wertebereich von f *genau ein* x aus dem Definitionsbereich von f mit $y = f(x)$ gibt.

■ 22 Die Funktion $f(x) = x^2$, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, ist nicht eineindeutig. Schränkt man dagegen den Definitionsbereich auf die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen ein, das heißt, betrachtet man die Funktion $g(x) = x^2$ mit $x \geqq 0$, so existiert zu jedem y aus dem Wertebereich von g genau ein x aus dem Definitionsbereich von g mit $y = g(x)$. Die Funktion g ist also eineindeutig.

● 16 Begründen Sie:
Für jede Funktion f gilt: Wenn f streng monoton ist, so ist f eineindeutig!

▶ 4 **DEFINITION**

Es sei f eine eineindeutige Funktion.
Die Menge der geordneten Paare $[y; x]$, für die $[x; y]$ zu f gehört, heißt die *Umkehrfunktion* (auch *inverse Funktion*) von f.
Wir bezeichnen die Umkehrfunktion von f mit $\bar{f}$.

■ 23 Die Funktion f mit $f(x) = 2x + 1$ ist eineindeutig. Die Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f geht aus f durch Vertauschen von erster und zweiter Komponente in den geordneten Paaren hervor.

f		$\bar{f}$
$[0; 1]$	$\longrightarrow$	$[1; 0]$
$[2; 5]$	$\longrightarrow$	$[5; 2]$
$[-3; -5]$	$\longrightarrow$	$[-5; -3]$
$[2{,}4; 5{,}8]$	$\longrightarrow$	$[5{,}8; 2{,}4]$

Durch Auflösen der Funktionsgleichung $y = 2x + 1$ nach x finden wir eine Funktionsgleichung für $\bar{f}$:

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}.$$

Es ist also $\bar{f}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ beziehungsweise – wenn man die übliche Bezeichnung x für die Argumentwerte einführt, das heißt, wenn man eine **Umbenennung der Variablen** durchführt –

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Durch die Umbenennung der Variablen bleibt die Funktion unverändert, denn die Menge der geordneten Paare $[y; x]$ mit $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ ist gleich der Menge der geordneten

Paare $[x; y]$ mit $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Die Gleichungen $\bar{f}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ und $\bar{f}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ beschreiben also ein und dieselbe Funktion.

● 17 Ermitteln Sie die Umkehrfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$!

Ist f eine eineindeutige Funktion, so kann man f umkehren, und man erhält eine Funktion $\bar{f}$. Kehrt man die Funktion $\bar{f}$ um, so erhält man wieder die Funktion f. Man sagt deshalb auch: *Die Funktionen f und $\bar{f}$ sind zueinander invers.*

■ 24 Die Funktion $f(x) = x^n$, $x \geqq 0$, $n \geqq 2$, n natürliche Zahl, ist ebenfalls eineindeutig. Wir ermitteln eine Funktionsgleichung für die Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f.

Lösung:

$y = x^n$

Auflösen nach x: $x = \sqrt[n]{y}$. Also $\bar{f}(y) = \sqrt[n]{y}$ bzw. $\bar{f}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Jede Funktion f mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ($x \geqq 0$, $n \geqq 2$, n natürliche Zahl) heißt Wurzelfunktion.

● 18 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

Ist $\bar{f}$ die Umkehrfunktion von f, so liegen die Graphen von f und $\bar{f}$ achsensymmetrisch zur Geraden $y = x$. Der Definitionsbereich von $\bar{f}$ ist der Wertebereich von f, und der Wertebereich von $\bar{f}$ ist der Definitionsbereich von f.

Wie hier ohne Beweis mitgeteilt wird, übertragen sich die Eigenschaften der Monotonie und Stetigkeit von f auf die Umkehrfunktion $\bar{f}$, das heißt:

Ist $\bar{f}$ die Umkehrfunktion von f, so gilt:

1. Wenn f monoton wachsend ist, so ist auch $\bar{f}$ monoton wachsend.
2. Wenn f monoton fallend ist, so ist auch $\bar{f}$ monoton fallend.
3. Wenn f stetig ist, so ist auch $\bar{f}$ stetig.

■ 25 Die Funktion $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $x \geqq -1$, ist eineindeutig.

$\bar{f}$ finden wir wie folgt:

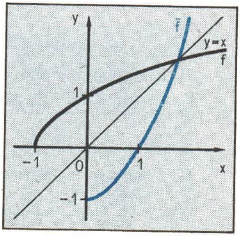
$y = \sqrt{x + 1}$; $y^2 = x + 1$; $x = y^2 - 1$;

also $\bar{f}(y) = y^2 - 1$ beziehungsweise nach Umbenennung der Variablen $\bar{f}(x) = x^2 - 1$.

	f	$\bar{f}$
Definitionsbereich	$x \geqq -1$	$x \geqq 0$
Wertebereich	$y \geqq 0$	$y \geqq -1$

Bild C 28 zeigt die Graphen von f und $\bar{f}$.

Bild C 28



11 [001156]

Aufgaben

1. Bild C 29 zeigt Graphen verschiedener Funktionen. Welche dieser Funktionen sind eineindeutig?

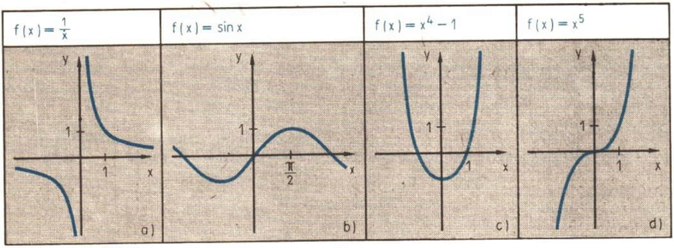


Bild C 29

Welche der folgenden Funktionen sind eineindeutig?

2.↑ **a)** $f(x) = 3x + 1$ **b)** $f(x) = -x - 2$ **c)** $f(x) = 3x^2$ **d)** $f(x) = 3x^2, \quad x \geqq 2$ **e)** $f(x) = |x|$

3.↑ **a)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$ **c)** $f(x) = x^2, \quad x \leqq 0$ **d)** $f(x) = x^6$ **e)** $f(x) = |x|, \quad x \geqq 0$

Ermitteln Sie von den folgenden eineindeutigen Funktionen f jeweils die Umkehrfunktion $\bar{f}$, und skizzieren Sie die Graphen von f und $\bar{f}$ jeweils in ein und dasselbe Koordinatensystem!

4. ↑ **a)** $f(x) = 2x^2, \ x \geqq 0$
b) $f(x) = x^2, \quad x \leqq 0$
c) $f(x) = x^6, \quad x \geqq 0$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

5. ↑ **a)** $f(x) = 3x + 1$
b) $f(x) = x$
c) $f(x) = -\sqrt{x}$
d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

12 Differentiation von Wurzelfunktionen

■ 26 Es ist zu zeigen, daß die Funktion $y = g(x) = \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ für jedes positive x differenzierbar ist.

Lösung:

Es sei x_0 eine beliebige positive Zahl.

(1) Bestimmen des Differenzenquotienten der Funktion g an der Stelle x_0

Es ist $\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$, wobei $h \neq 0$ so gewählt werden muß, daß $x_0 + h \geqq 0$ ist.

(2) Umformen des Differenzenquotienten

Wegen $\frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}$ gilt

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}.$$

(3) Bestimmen des Grenzwertes des Differenzenquotienten für $h \to 0$

Es ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{x_0 + h} + \lim\limits_{h\to 0} \sqrt{x_0}}.$$

Da die Funktion $y = \sqrt{x}$ als Umkehrfunktion einer stetigen Funktion auch stetig ist, gilt $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{x_0 + h} = \sqrt{x_0}$. Also ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Ergebnis:

Die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ ist für jedes positive x differenzierbar. Ihre Ableitung ist $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Das Beispiel C 26 zeigt, daß der Aufwand bei der Bestimmung der Ableitung der Funktion $y = \sqrt{x}$ relativ hoch ist.

Läßt sich die Ableitung der Funktion $y = g(x) = \sqrt{x}$ rationeller ermitteln?

● 19 Gegeben seien die Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ $(x \geqq 0)$ und $g(x) = \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$.

a) Berechnen Sie den Anstieg des Graphen von f im Punkt $P_1(1{,}5;\ 1{,}5^2)$ und den Anstieg des Graphen von g im Punkt $P_2(1{,}5^2;\ 1{,}5)$!

b) Bild C 30 zeigt den Graph der Funktion f mit der Tangente im Punkt P_1 sowie den Graph von g mit der Tangente im Punkt P_2. Die Punkte P_1 und P_2 liegen symmetrisch zur Geraden $y = x$.
Bestätigen Sie an Hand der Abbildung, daß für die Winkel α und β die Beziehung $\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}$ gilt!

Die Gleichung $\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}$ (↗ Bild C 30, Seite 164) besagt, daß es zwischen den Ableitungen der Funktionen

$$y = f(x) = x^2 \quad (x \geqq 0) \quad \text{und} \quad y = g(x) = \sqrt{x} \quad (x \geqq 0)$$

einen einfachen Zusammenhang gibt. Dieser Zusammenhang läßt sich auch ohne Bezugnahme auf Bild C 30 angeben.
Die Funktion

$$y = g(x) = \sqrt{x} \quad (x \geqq 0) \text{ bzw. (Umbenennung der Variablen) } x = g(y) = \sqrt{y} \quad (y \geqq 0)$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion

$$y = f(x) = x^2 \quad (x \geqq 0).$$

Es sei x_0 eine beliebige positive Zahl. Dann gilt $f'(x_0) = 2x_0 > 0$.

Die Funktion g hat an der Stelle $y_0 = f(x_0) = x_0^2 > 0$ die Ableitung (↗ Beispiel C 26)

$$g'(y_0) = \frac{1}{2\sqrt{y_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0^2}} = \frac{1}{2x_0}.$$

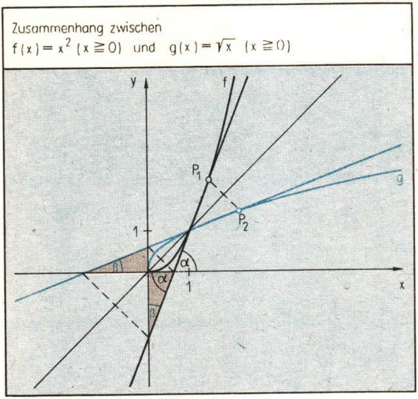


Bild C 30

Folglich gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (x_0 > 0).$$

Auch für andere zueinander inverse Funktionen, deren Ableitungen uns bereits bekannt sind, können wir eine solche Beziehung angeben.

■ 27 Gegeben sei eine lineare Funktion $y = f(x) = mx + n$ mit $m \neq 0$.

Die zu f inverse Funktion ist die Funktion $x = \bar{f}(y) = \frac{1}{m}(y - n)$.

Wegen $f'(x) = m$ und $\bar{f}'(y) = \frac{1}{m}$ gilt $\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Diese in den betrachteten Beispielen erkennbare Gesetzmäßigkeit gilt für die Ableitungen beliebiger zueinander inverser Funktionen, was hier ohne Beweis mitgeteilt werden soll.

▷ 5 **SATZ**

Es sei f eine eineindeutige Funktion, die in einer Umgebung der Stelle x_0 differenzierbar ist, und es gelte $f'(x_0) \neq 0$.
Dann ist die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■ 28 Die Ableitung der Funktion $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $(x \geqq 0)$ ist zu ermitteln.

Lösung:

Die gegebene Funktion ist die Umkehrfunktion der Funktion

$y = f(x) = x^3 \quad (x \geqq 0)$.

Die Funktion f ist für jedes x mit $x > 0$ differenzierbar, es gilt $f'(x) = 3x^2$.
Für $x > 0$ ist $f'(x) > 0$.
Nach Satz C 5 ist dann auch die Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f, also die Funktion

$x = \bar{f}(y) = y^{\frac{1}{3}} \quad (y \geqq 0)$,
für $y > 0$ differenzierbar, und es gilt $\bar{f}'(y) = \dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}x^{-2} = \dfrac{1}{3}\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$

bzw. nach Umbenennung der Variablen $\bar{f}'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad (x > 0)$.

Ergebnis:

Die Funktion $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}\ (x \geqq 0)$ hat die Ableitung

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0).$$

Nach Beispiel C 26 gilt $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \quad (x > 0)$.

Nach Beispiel C 28 ist $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} \quad (x > 0)$.

Die Regel zur Differentiation der Potenzfunktionen mit natürlichen Zahlen als Exponenten gilt also auch für die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Lassen sich alle Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in N$, $n > 1$, nach dieser Regel differenzieren?

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n > 1$.

Wir bestimmen die Ableitung der Funktion $y = x^{\frac{1}{n}}\ (x \geqq 0)$ wie im Beispiel C 28. Die Funktion $y = x^{\frac{1}{n}}$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $y = f(x) = x^n \quad (x \geqq 0)$, die für jedes $x > 0$ die von Null verschiedene Ableitung

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

hat. Nach Satz C 5 ist die Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f, also die Funktion

$$x = \bar{f}(y) = y^{\frac{1}{n}} \quad (y \geqq 0)$$

für $y > 0$ differenzierbar. Ihre Ableitung ist

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{1-n} = \frac{1}{n}\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1} \quad (y > 0)$$

bzw. nach Umbenennung der Variablen

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \quad (x > 0).$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Regel zur Differentiation der Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten auch für die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in N$, $n > 1$, gilt.
Mit dieser Differentiationsregel lassen sich die Wurzelfunktionen auf rationelle Weise differenzieren.

■ 29 Die Ableitung der Funktion $y = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}} \quad (x \geqq 0)$ ist die Funktion

$$y' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \quad (x > 0).$$

Aufgaben

Gegeben sei die Funktion f. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f und die Ableitung von $\bar{f}$!

1. ↑ a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

c) $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (x > 1)$

2. ↑ a) $f(x) = -x + 7$

b) $f(x) = x^2 \quad (x \leqq 0)$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x > 0)$

Ermitteln Sie die Ableitungen folgender Funktionen, und geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Funktionen und ihrer Ableitung an!

3. ↑ a) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ b) $f(x) = x^{-\frac{1}{5}}$

c) $f(t) = 5\sqrt{t}$

d) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

e) $f(z) = \left(z - \sqrt{z}\right)^2$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ g) $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$

h) $f(a) = \frac{\sqrt[3]{a}}{a+\sqrt{a}}$ i) $f(x) = \frac{ax}{\sqrt[4]{x}}$

4. ↑ a) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ b) $f(x) = \sqrt[8]{x}$

c) $f(t) = \sqrt{5}\sqrt{t}$

d) $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{x}$

e) $f(z) = \sqrt{z} + \sqrt[3]{z} + \sqrt[4]{z}$

f) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}}$ g) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x}$

h) $f(a) = \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$ i) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$

5. Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x-2)\sqrt{x} \ (x \geqq 0)$. Berechnen Sie den Anstieg des Graphen von f an der Stelle 4, und geben Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graph von f für diese Stelle an!

6. Berechnen Sie die Anstiege des Graphen der Funktion

a) $f(x) = \sqrt{x}$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

an den Stellen 1; 10; 100 und 1000!

13 Verkettung von Funktionen

● 20 Gegeben seien die Funktionen u und v mit $u(x) = x^2 - 1$ und $v(x) = x^2 + 1$.

Bilden Sie die Funktionen $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ und $\frac{u}{v}$!

Der Auftrag C 20 soll uns noch einmal daran erinnern, wie man mit Hilfe der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aus gegebenen Funktionen u und v, die einen gemeinsamen Definitionsbereich haben, neue Funktionen erhalten kann.
In dieser Lerneinheit wollen wir eine andere Operation kennenlernen, die ebenfalls gegebenen Funktionen u und v – unter gewissen Einschränkungen – eine neue Funktion f eindeutig zuordnet.

■ 30 Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = (x^2 - 1)^5$, die für alle reellen Zahlen x definiert ist. Wenn wir Funktionswerte der Funktion f ermitteln sollen, so berechnen wir zu einer vorgegebenen Zahl x zunächst die Zahl $x^2 - 1 = z$. Wir bestimmen also zuerst für die betreffenden Zahlen x die Funktionswerte der Funktion

$z = v(x) = x^2 - 1.$

Anschließend potenzieren wir die so erhaltenen Zahlen z mit 5, das heißt, wir berechnen die Funktionswerte der Funktion

$y = u(z) = z^5$

und erhalten somit die Funktionswerte der Funktion f. Die Funktion f ist aus den Funktionen $z = v(x) = x^2 - 1$ und $y = u(z) = z^5$ zusammengesetzt. Es gilt

$y = f(x) = u(z) = u(v(x)).$

Sind umgekehrt die Funktionen v und u mit $z = v(x) = x^2 - 1$ und $y = u(z) = z^5$ gegeben, so ist durch diese Funktionen die Funktion f mit $y = f(x) = (x^2 - 1)^5$ eindeutig bestimmt.

Die im Beispiel C 30 durchgeführten Überlegungen lassen sich verallgemeinern.
Es seien A, B und C Mengen reeller Zahlen, v eine Funktion, die jeder Zahl $x \in A$ eine Zahl $z \in B$ zuordnet, und u eine Funktion, die jeder Zahl $z \in B$ eine Zahl $y \in C$ zuordnet. Dann ordnet die Funktion f mit $f(x) = u(v(x))$ jedem $x \in A$ genau ein $y \in C$ zu (↗ Bild C 31).

f heißt die Verkettung der Funktion u mit der Funktion v.

Die Funktion v nennt man auch die **innere Funktion** und die Funktion u die **äußere Funktion** der Verkettung von u mit v. Die Verkettung f von u mit v ist nur für diejenigen Zahlen $x \in A$ definiert, für die es ein $z \in B$ gibt mit $[x; z] \in v$ und $[z; y] \in u$. Das bedeutet, daß der Wertebereich der inneren Funktion v eine Teilmenge des Definitionsbereiches der äußeren Funktion u ist.

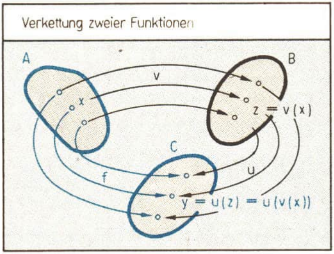


Bild C 31

31 Gegeben seien die Funktionen u und v mit $z = v(x) = x^2 - 1$ und $y = u(z) = \sqrt{z}$. Dann ist die Verkettung von u mit v diejenige Funktion f, für die

$y = f(x) = u(v(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$

gilt. Da die Funktion u nur für nichtnegative Zahlen z definiert ist, ist die Funktion f nur für diejenigen Zahlen x definiert, für die $x^2 - 1 \geqq 0$ beziehungsweise $x^2 \geqq 1$ gilt.

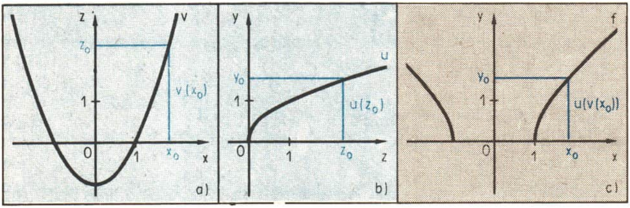


Bild C 32

Aus dem Verlauf der Normalparabel erkennen wir, daß f also für diejenigen Zahlen x nicht definiert ist, für die $-1 < x < 1$ gilt. Die Bilder C 32 a) bis c) zeigen die Graphen der Funktionen v, u und f (↗ Seite 167).

■ 32 Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$.

Die Funktion f erhält man durch Verkettung der Funktion u mit der Funktion v, wobei $u(z) = \sin z$ die äußere und $z = v(x) = \frac{1}{2}x + 3$ die innere Funktion ist.

Es gilt also $f(x) = u(v(x)) = \sin\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$.

Aufgaben

1. Bilden Sie zu den Funktionen u und v die Verkettung f mit $f(x) = u(v(x))$, wenn gilt:
   a) $u(z) = z^3$ und $z = v(x) = x - 1$; b) $u(z) = \lg z$ und $z = v(x) = x^2 - 1$;
   c) $u(z) = \sqrt{z}$ und $z = v(x) = 3x - 5$!
   Geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Funktion f an!

2.* Zeigen Sie an einem Beispiel, daß die Verkettung der Funktionen u und v nicht kommutativ ist, daß also (im allgemeinen) $u(v(x)) \neq v(u(x))$ gilt!

3. Geben Sie die Funktion f als Verkettung einfacherer Funktionen an, wenn
   a) $f(x) = (ax - b)^7$; b) $f(x) = \sqrt{x - 1}\ (x \neq 1)$; c) $f(x) = \frac{1}{(x + 5)^2}$;
   d) $f(x) = \cos(2x + 1)$; e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$; f) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$!

4. Begründen Sie, daß für die Funktionen u und v mit
   $z = v(x) = -x^2 - 4$ und $y = u(z) = \sqrt{z}$
   die Verkettung f mit $f(x) = u(v(x))$ nicht gebildet werden kann!
   Prüfen Sie, ob die Funktion g mit $g(x) = v(u(x))$ existiert!

14 Ableitung der Verkettung zweier Funktionen

● 21 Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = (x^2 + 1)^3$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Produktregel, daß die Ableitung dieser Funktion die Funktion f' mit $f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x$ ist!

Die Funktion $f(x) = (x^2 + 1)^3$ ist die Verkettung der Funktion u mit der Funktion v, wobei

$$u(z) = z^3 \quad \text{und} \quad z = v(x) = x^2 + 1$$

ist. Es ist

$$v'(x) = 2x \quad \text{und} \quad u'(z) = 3z^2 = 3(x^2 + 1) = u'(v(x)).$$

Wegen $f'(x) = [u(v(x))]' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x$ (↗ Auftrag C 21) gilt offenbar

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

Diese für das betrachtete Beispiel erhaltene Beziehung zwischen den Ableitungen der Funktionen f, u und v gilt für die Ableitung der Verkettung beliebiger differenzierbarer Funktionen, wie wir hier ohne Beweis mitteilen:

Ist die Funktion v an der Stelle x_0 und die Funktion u an der Stelle $v(x_0)$ differenzierbar, so ist die Funktion f mit $f(x) = u(v(x))$ an der Stelle x_0 differenzierbar. Für die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 gilt

$$f'(x) = [u(v(x_0))]' = u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0).$$

Diese Differentiationsregel heißt **Kettenregel.**
Nach der Kettenregel erhält man die Ableitung von f an der Stelle x_0, indem man die Ableitung der *äußeren* Funktion an der Stelle $v(x_0)$ mit der Ableitung der *inneren* Funktion an der Stelle x_0 multipliziert
Verwenden wir die auf Seite 139 eingeführte Symbolik für die 1. Ableitung, so läßt sich die Kettenregel wie folgt merken:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

wobei $v'(x) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ und $u'(z) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$ ist.

33 Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (5x^2 - 7x + 1)^{20}$ ist zu ermitteln.

Lösung:

Die Funktion f ist die Verkettung der Funktion u mit der Funktion v, wobei $y = u(z) = z^{20}$ die äußere und $z = v(x) = 5x^2 - 7x + 1$ die innere Funktion ist. Es ist

$$u'(z) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = 20z^{19} \quad \text{und} \quad v'(x) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 10x - 7.$$

Unter Verwendung der Kettenregel erhalten wir

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 20z^{19}(10x - 7).$$

Ergebnis:

Die Funktion f hat die Ableitung $f'(x) = 20(5x^2 - 7x + 1)^{19} \cdot (10x - 7)$.

34 Die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 1}$ ist zu ermitteln.

Lösung:

Die Funktion f ist die Verkettung der Funktion u mit der Funktion v, wobei

$u(z) = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}$ und $z = v(x) = x^4 + 1$ ist.

Die Ableitung der Funktion f erhalten wir durch Anwendung der Kettenregel. Es ist

$u'(z) = \dfrac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{z^2}}$ und $v'(x) = 4x^3$. Folglich ist

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(x^4 + 1)^2}}.$$

Ergebnis: Die Funktion f hat die Ableitung $f'(x) = \dfrac{4x^3}{3\sqrt[3]{(x^4 + 1)^2}}$.

■ 35 Die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{x^3 + 1}}$ $(x > -1)$ ist zu ermitteln.

Lösung:

Die Funktion f ist der Quotient der Funktionen g und h mit $g(x) = x - 5$ und $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$. Folglich erhalten wir die Ableitung von f durch Anwenden der Quotientenregel. Dazu benötigen wir die Ableitungen der Funktionen g und h. Es ist

$g'(x) = 1$.

Die Funktion h ist die Verkettung der Funktion u mit der Funktion v, wobei $u(z) = z^{\frac{1}{2}}$ und $z = v(x) = x^3 + 1$ ist. Es ist

$$u'(z) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad \text{und} \quad v'(x) = 3x^2.$$

Durch Anwenden der Kettenregel erhalten wir

$$h'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 1}} \cdot 3x^2.$$

Durch Anwenden der Quotientenregel auf die Funktion $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ erhalten wir

$$f'(x) = \frac{g'(x)\,h(x) - g(x)\,h'(x)}{(h(x))^2} = \frac{1\sqrt{x^3 + 1} - (x - 5)\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}}{\left(\sqrt{x^3 + 1}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{2\sqrt{x^3 + 1}\sqrt{x^3 + 1} - (x - 5) \cdot 3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}}{\left(\sqrt{x^3 + 1}\right)^2} = \frac{2(x^3 + 1) - (x - 5)\,3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}\,(x^3 + 1)}.$$

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{x^3 + 1}}$ $(x > -1)$ hat die Ableitung

$$f'(x) = \frac{2(x^3 + 1) - (x - 5)\,3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}\,(x^3 + 1)} \quad (x > -1).$$

■ 36 Es ist zu zeigen, daß die Funktion $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ $(x \geqq 0)$ mit $m, n \in N$, $m > 1$ und $n \geqq 2$, für jedes positive x differenzierbar ist und ihre Ableitung $f'(x) = \dfrac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}$ ist.

Lösung:

Die Funktion $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ ist die Verkettung der Funktion $u(z) = z^m$ mit der Funktion $v(x) = x^{\frac{1}{n}}$, wobei $z = x^{\frac{1}{n}}$ ist.

Die Funktion v ist für jedes positive x differenzierbar (↗ Lerneinheit 12), es gilt

$$v'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} \quad (x > 0).$$

Dann ist auch die Funktion f für jedes positive x differenzierbar.

Unter Verwendung der Kettenregel erhält man

$$f'(x) = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - \frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}.$$

Ergebnis:

Die Funktion $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ $(x \geqq 0)$ ist für jedes positive x differenzierbar. Ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \quad (x > 0).$$

● 22 Zeigen Sie, daß auch jede Potenzfunktion

$y = x^{-\frac{m}{n}}$ $(x > 0)$ mit $m, n \in N$, $m \geqq 1$ und $n \geqq 2$ differenzierbar ist und die Ableitung

$y' = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1}$ $(x > 0)$ hat!

Aus dem Beispiel C 36 und dem Auftrag C 22 entnehmen wir, daß jede Potenzfunktion mit rationalem Exponenten für jedes positive x differenzierbar ist. Außerdem erkennen wir, daß die Differentiationsregel für Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten auch für Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten gilt.

Aufgaben

Bilden Sie die Ableitungen folgender Funktionen!

1. ↑ a) $f(x) = (2x - 3)^5$ b) $f(x) = (x^2 + 1)^{10}$ c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x + 6}$ f) $y = x^{-\frac{4}{5}}$

2. ↑ a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 7\right)^7$ b) $f(x) = (1 - x^2)^4$ c) $f(x) = (x^2 + 3x + 10)^{\frac{1}{2}}$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 5}$ e) $f(x) = \sqrt{x^3 + 8x}$ f) $z(a) = a^{-\frac{1}{2}}$

3. ↑ a) $f(x) = \frac{3}{(3x - 5)^2}$ b) $f(x) = (4 + x)^3 (x - 5)^4$ c) $f(x) = \left(\frac{2x + 5}{3x - 1}\right)^3$
d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$ e) $f(x) = \sqrt{x^3}(x^2 - 7x)$ f) $f(x) = \frac{2x - 5}{\sqrt{3x - x^2}}$

4. ↑ a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^3}$ b) $f(x) = [(x^2 + 1)(x - 7)]^4$ c) $f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^3$
d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 5}}$ e) $f(x) = x^3 + 5 - \sqrt{2x}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{5 - 2x}$

5. Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen!
a) $f(x) = (ax + b)^n$ b) $f(x) = \sqrt[n]{ax + b}$ $(ax + b > 0)$

6. Es sei g eine differenzierbare Funktion, n eine natürliche Zahl mit $n > 1$. Wenden Sie die Kettenregel auf folgende Spezialfälle an!
a) $f(x) = [g(x)]^n$ b) $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ $(g(x) > 0)$

7. Differenzieren Sie folgende Funktionen!
a) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 7x + 8}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$
c) $f(x) = \sqrt{x^4 + x^3 - x}$ d) $f(x) = \sqrt{3x^3 + 2x^2 + x + 1}$

8. Bestimmen Sie den Anstieg des Graphen der Funktion f an der Stelle x_0, wenn
a) $f(x) = (x^2 - 1)^{15}$, $x_0 = 2$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x_0 = 3$
ist!

15 Ableitungen höherer Ordnung

● 23 Bilden Sie die Ableitung der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = 3x^2$ c) $f(x) = 6x$

Das Ergebnis des Auftrages C 23 zeigt, daß die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f ebenfalls differenzierbar sein kann.
Es sei f eine differenzierbare Funktion. Ist die Funktion f' in einer Umgebung von x_0 definiert und existiert der Grenzwert

$$(*) \quad \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h},$$

so sagt man, daß die Funktion f **an der Stelle x_0 zweimal differenzierbar** ist. Den Grenzwert (*) nennt man die **2. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0**, und bezeichnet ihn mit $f''(x_0)$ oder auch mit $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$ (Lies: „f zwei Strich von x_0" bzw. „d zwei y nach dx Quadrat an der Stelle x_0").

Existiert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}$$

für jedes x eines Intervalls I, so heißt die Menge der geordneten Paare $[x; f''(x)]$ mit $x \in I$ die **2. Ableitung der Funktion f** oder auch der **2. Differentialquotient der Funktion f im Intervall I.**
Diese Funktion bezeichnet man durch

$$f'' \quad \text{oder auch} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Allgemein kann man für eine natürliche Zahl $n \geqq 2$ die **Ableitung n-ter Ordnung** oder kurz die **n-te Ableitung** einer Funktion f durch

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = (f^{(n-1)})'(x)$$

definieren, vorausgesetzt, daß die Funktion f und ihre Ableitungen bis zur $(n - 1)$-ten Ordnung differenzierbar sind. Für $n = 3$ schreibt man $y''' = f'''(x) = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$. Für Ableitungen mit einer Ordnung $n \geqq 4$ verwendet man die oben bereits benutzte Schreibweise, also zum Beispiel $y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$ usf.

■ 37 Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 4x^5 - 7x^4 + 8x^3 - \sqrt{2}\,x^2 + x - \frac{1}{2}$,
von der die Ableitung 6. Ordnung zu bestimmen ist.
Man erhält

$f'(x) = 20x^4 - 28x^3 + 24x^2 - 2\sqrt{2}x + 1;$ $f^{(4)}(x) = 480x - 168;$

$f''(x) = 80x^3 - 84x^2 + 48x - 2\sqrt{2};$ $f^{(5)}(x) = 480;$

$f'''(x) = 240x^2 - 168x + 48;$ $f^{(6)}(x) = 0.$

Für alle n mit $n \geqq 6$ gilt $f^{(n)}(x) = 0$.

Aufgaben

Bilden Sie die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionen!

1. ↑ a) $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$
b) $f(x) = (x^2 + 1)^3$
c) $f(x) = (x^2 + 1)(2x^3 + 5)$
d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$

2. ↑ a) $f(x) = \dfrac{1}{5}x^3 + 7x^2 - x + \sqrt{7}$
b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x - 5\right)^4$
c) $f(x) = (1 - x^2)(5 - x^3)$
d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 7}{2x^2 + x + 10}$

3. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f, f' und f'' jeweils in ein und dasselbe Koordinatensystem, wenn
a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$;
b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$!

4. a) Bestimmen Sie die 8. Ableitung der Funktion $f(x) = x^8$!
b) Bestimmen Sie die 3. Ableitung der Funktion $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x + 3$!
c) Bestimmen Sie die 4. Ableitung der Funktion $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$!

Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionen! An welchen Stellen des Definitionsbereiches von f sind f' und f'' nicht definiert?

5. ↑ a) $f(x) = \sqrt{x};\quad x \geqq 0$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2};\quad x \geqq 0$ c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2};\quad |x| \leqq 1$

6. ↑ a) $f(x) = \sqrt[3]{x};\quad x \geqq 0$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\quad x > 0$ c) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}};\quad x \geqq 1$

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionen!

7. ↑ a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ c) $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

8. ↑ a) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1 - x}}$ c) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ d) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$

Zusammenfassung

Die in den vorangegangenen Lerneinheiten behandelten **Differentiationsregeln** merkt man sich leicht in folgender Kurzform:

Regel	*Beispiel*	
$c' = 0$ (c eine reelle Zahl)	$f(x) = 5;$	$f'(x) = 0$
$(u + v)' = u' + v'$	$f(x) = x^2 + x^3;$	$f'(x) = 2x + 3x^2$
$(u - v)' = u' - v'$	$f(x) = x^2 - x^3;$	$f'(x) = 2x - 3x^2$
$(u \cdot v)' = u'v + uv'$	$f(x) = x^2 \cdot (x^3 + 5);$	$f'(x) = 2x(x^3 + 5) + x^2 \cdot 3x^2$
$(c \cdot v)' = c \cdot v'$	$f(x) = 5x^2;$	$f'(x) = 5 \cdot 2x$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^4};$	$f'(x) = \dfrac{2x(1 + x^4) - x^2 \cdot 4x^3}{(1 + x^4)^2}$

Kettenregel:

Ist $f(x) = u(v(x))$, so gilt $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; äußere Funktion $u(z) = \sqrt{z}$, innere Funktion $v(x) = 1 + x^2$; $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}$

Diese Regeln gelten nur für solche Zahlen x, für die die Funktionen u und v differenzierbar und die auftretenden Nenner von Null verschieden sind.

Ist f eine eineindeutige differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$, so ist **die zu f inverse Funktion $\bar{f}$** ebenfalls differenzierbar; ihre Ableitung ist

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Mit Hilfe dieser Regeln kann man insbesondere differenzieren:

Potenzfunktionen

$f(x) = x^r$; r rational	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
Diese Regel gilt	
– für alle x, wenn r eine natürliche Zahl,	$f(x) = x^7$; $f'(x) = 7x^6$
– für alle $x \neq 0$, wenn r eine negative ganze Zahl,	$f(x) = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$; $f'(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$
– für alle $x > 0$, wenn r nicht ganzzahlig.	$f(x) = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$; $f'(x) = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Rationale Funktionen

Ganze rationale Funktionen	$f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ $f'(x) = 28x^3 + 9x^2 - 4x + 5$
Gebrochene rationale Funktionen	$f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{1 + x^2}$ $f'(x) = \dfrac{(6x - 5)(1 + x^2) - (3x^2 - 5x) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}$

Kurvenuntersuchungen; Extremwertaufgaben

In den einleitenden Betrachtungen zum Kapitel C (↗ Seite 128) haben wir das Problem aufgeworfen, einen Container bei Einhaltung vorgegebener Bedingungen mit möglichst geringem Materialverbrauch zu konstruieren. Dieses Problem zu lösen bedeutet, jene Stelle a zu ermitteln, an der die Funktion f mit $f(a) = a^2 + \dfrac{6V}{a}$, $a > 0$, ihr Minimum annimmt.

So wie bei diesem Beispiel lassen sich Problemstellungen aus Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaft auf die Untersuchung von Funktionen zurückführen. Wir werden uns deshalb mit Begriffen und Methoden beschäftigen, die für die Untersuchung des Verhaltens von Funktionen und ihrer Graphen geeignet sind. Wir werden dabei folgende Probleme behandeln.

Nullstellen von Funktionen

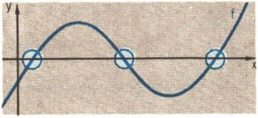


Bild C 33

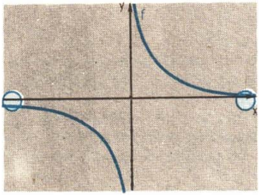


Bild C 34

Verhalten von Funktionen für unbeschränkt wachsendes bzw. fallendes x

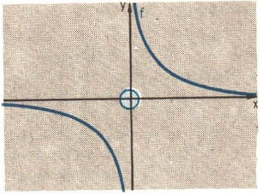


Bild C 35

Verhalten gebrochener rationaler Funktionen an jenen Stellen, für die die Nennerfunktion gleich Null ist

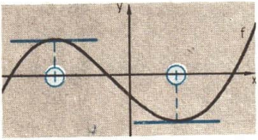


Bild C 36

Ermitteln jener Stellen, an denen der Graph einer Funktion f Tangenten hat, die parallel zur x-Achse sind

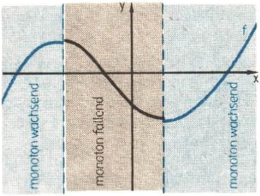


Bild C 37

Ermitteln des Monotonieverhaltens einer Funktion

Die beiden zuletzt genannten Probleme werden durch die Untersuchung der ersten und manchmal auch der zweiten Ableitung der betreffenden Funktion gelöst.

16 Nullstellen ganzer rationaler Funktionen

● 24 Die positive Nullstelle der quadratischen Funktion[1]) $s(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$ gibt den Zeitpunkt an, zu dem ein senkrecht nach oben geworfener Körper wieder die Ausgangshöhe erreicht. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt!

---

[1]) Ausführlicher hätten wir zu schreiben: $s = f(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$. Jedoch ist die oben verwendete kürzere Schreibweise auch gebräuchlich, wenn keine Verwechslungen von Funktion und Funktionswert möglich sind.

● 25 Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

a) $f(x) = 3x + \sqrt{2}$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 6$

c) $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ d) $f(x) = -4x^2 + 12x + 20$

Wir wenden uns nun den **Nullstellen ganzer rationaler Funktionen** zu.
Die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

sind die Lösungen der Gleichung

(1) $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$

Im Falle $n = 1$ bzw. $n = 2$ erhalten wir eine lineare bzw. eine quadratische Gleichung, für die wir bereits Lösungsmethoden kennen. Ist $n \geqq 3$, so sind die Lösungen der Gleichung (1) im allgemeinen nicht mehr so leicht zu ermitteln.
In der Praxis wendet man zur Berechnung der Nullstellen gewisse Näherungsverfahren an, mit denen man die Nullstellen mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen kann (↗ zum Beispiel Kapitel B, Beispiel B 29). Wir beschränken uns hier auf solche Fälle, die mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln bearbeitet werden können.

■ 38 Es sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 12x$ zu berechnen.
Wir bestimmen die Lösungen der Gleichung

(1) $x^3 + 2x^2 - 12x = 0.$

Es handelt sich um eine Gleichung dritten Grades, für die wir keine Lösungsmethoden kennen. Indem wir jedoch x ausklammern, erhalten wir aus (1)

(2) $x(x^2 + 2x - 12) = 0.$

Ein Produkt ist gleich Null, wenn wenigstens ein Faktor gleich Null ist. Deshalb ist (2) gleichwertig mit $x = 0$ *oder* $x^2 + 2x - 12 = 0$.
Damit haben wir eine Lösung, nämlich $x_1 = 0$, gefunden.
Es bleibt noch die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 12 = 0$ zu lösen. Es ist

$x_{2;3} = -1 \pm \sqrt{1 + 12}$, also $x_2 = -1 + \sqrt{13}$; $x_3 = -1 - \sqrt{13}$.

Damit hat f drei Nullstellen, nämlich 0; $-1 + \sqrt{13}$ und $-1 - \sqrt{13}$.

■ 39 Es sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 4x^2 - 12$ zu bestimmen.
Wir suchen die Lösungen der Gleichung

(1) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0.$

Indem wir für x^2 die Variable z einführen, erhalten wir die quadratische Gleichung

(2) $z^2 - 4z - 12 = 0.$

Die Lösungen von (2) sind $z_{1;2} = 2 \pm \sqrt{4 + 12}$, also $z_1 = 6$, $z_2 = -2$.
Aus $x^2 = z$ erhalten wir dann einerseits $x^2 = 6$ und damit $x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = -\sqrt{6}$.
Andererseits ist $x^2 = -2$. Diese Gleichung hat keine reellen Lösungen.
Damit hat die Gleichung (1) zwei Lösungen und die Funktion f die Nullstellen $\sqrt{6}$ und $-\sqrt{6}$.
Bemerkung: Das Lösen der Gleichung vierten Grades

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

durch Zurückführen auf das Lösen quadratischer Gleichungen ist immer dann möglich, wenn a_3 und a_1 gleich Null sind.

■ 40 Es sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = (x^2 - 25)(x^4 - 4x^2 - 12)$ zu bestimmen.
Die Nullstellen von f sind die Lösungen der Gleichung

(1) $(x^2 - 25)(x^4 - 4x^2 - 12) = 0.$

Gleichung (1) ist gleichwertig mit

(2) $x^2 - 25 = 0$ *oder* (3) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0.$

Die Lösungen von (2) sind $x_1 = 5$ und $x_2 = -5$.
Die Lösungen von (3) sind $x_3 = \sqrt{6}$ und $x_4 = -\sqrt{6}$ (↗ Beispiel C 39).
Damit hat die Funktion f die Nullstellen 5; -5; $\sqrt{6}$ und $-\sqrt{6}$.

■ 41 Es sind die Schnittpunkte der Graphen von $f(x) = 2x^2$ und $g(x) = -3x + 2$ zu ermitteln.

Lösung:

Die Schnittpunkte sind jene Punkte $[x; y]$, für die $f(x) = g(x) = y$ gilt.
Indem wir die Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen, berechnen wir zunächst die x-Koordinaten der gesuchten Schnittpunkte.
Aus $2x^2 = -3x + 2$ erhalten wir die quadratische Gleichung $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Die Lösungen der Gleichung sind $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$.

Durch Einsetzen der ermittelten Zahlen x_1 und x_2 in eine der Funktionsgleichungen finden wir die y-Koordinaten der Schnittpunkte:

$f(x_1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, $f(x_2) = 2 \cdot (-2)^2 = 8$.

Die Schnittpunkte der Graphen von f und g sind die Punkte $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ und $[-2; 8]$ (↗ Bild C 38).

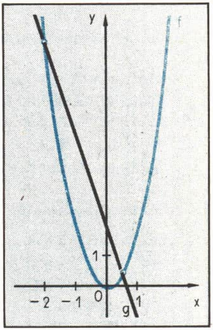


Bild C 38

Aufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

1.↑ a) $f(x) = x^2 - 10x - 2$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2$
c) $f(x) = x^2 - 2x - 12{,}6$

2.↑ a) $f(x = 8x - 4x^2$
b) $f(x) = x^5 - x^4 - x^3$
c) $f(x) = 2x^3 + 5{,}6x^2 + 3{,}92x$

3.↑ a) $f(x) = x^4 - 17x^2 + 72$
b) $f(x) = x^5 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x$
c) $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 3x^2 + x)$

4.↑ a) $f(x) = 3x^4 - 4{,}8x^3 + 1{,}92x^2$
b) $f(x) = -6x^4 + 18x^3 - 110{,}4x^2$
c) $f(x) = (x + \sqrt{2})(x^4 - 4x^2 + 4)$

5. Bestimmen Sie eine quadratische Funktion $f(x) = x^2 + 6x + q$, die die Zahl $x_0 = -2$ als Nullstelle hat!

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen folgender Funktionen!

6. ↑ $f(x) = 7x + 2, \quad g(x) = 3x - 4$

7. ↑ $f(x) = x + 10, \quad g(x) = 3x^2 + 10x - 2$

8. ↑ $f(x) = x^4, \quad g(x) = 11x^2 - 18$

17 Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen

Es sei f eine **rationale Funktion.** Dann gibt es ganze rationale Funktionen u und v derart, daß für alle x des Definitionsbereiches von f gilt

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

f ist nur für solche x definiert, für die $v(x) \neq 0$ ist. Soll nun $f(x) = 0$ sein, so erhalten wir

$$\frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

Hieraus folgt wegen $v(x) \neq 0$ durch Multiplikation mit $v(x)$: $\quad u(x) = 0$.

Die Nullstellen von f sind also jene Stellen x, für die $u(x) = 0$ und $v(x) \neq 0$ ist.

■ 42 Wir ermitteln die Nullstellen der rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2 - 12}{x + \sqrt{6}}$.

Hier ist $u(x) = x^4 - 4x^2 - 12$ und $v(x) = x + \sqrt{6}$.
Die Nullstellen von u sind $\sqrt{6}$ und $-\sqrt{6}$ (↗ Beispiel C 39).
Wir überprüfen nun noch, ob v an diesen Stellen verschieden von Null ist.
Es ist $v(\sqrt{6}) = \sqrt{6} + \sqrt{6} \neq 0$ und $v(-\sqrt{6}) = -\sqrt{6} + \sqrt{6} = 0$. Folglich ist f an der Stelle $-\sqrt{6}$ nicht definiert. Damit bleibt nur $\sqrt{6}$ als Nullstelle von f.

Übersicht zur Ermittlung der Nullstellen einer gebrochenen rationalen Funktion $f = \dfrac{u}{v}$

1. Schritt:	Ermitteln der Nullstellen von u
2. Schritt:	Überprüfen, ob v an den Nullstellen von u verschieden von Null ist
Ergebnis:	Die Nullstellen von f sind jene Stellen x, für die $u(x) = 0$ und $v(x) \neq 0$ ist.

Aufgaben

Ermitteln Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

1.↑ a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 2}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

2.↑ a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{1 - x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{2}{4 - x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 3}$

3.↑ a) $f(x) = \dfrac{(x - 3)(x^2 - 0{,}5x - 2)}{x^2 - 9}$ b) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 7x + 5)(3x^3 - x^2 + 6x)}{x(x + 1)}$

4. Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und $g(x) = x + 3$!

18 Nullstellen von Wurzelfunktionen

● 26 Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \sqrt{2x + 5}$ b) $f(x) = \sqrt{x + 2} - 5$

c) $f(x) = 7\sqrt{9 - x^2}$ d) $f(x) = 3\sqrt{x^2 - 4}$

Die Berechnung der Nullstellen von Wurzelfunktionen führt auf sogenannte **Wurzelgleichungen.**
In einfachen Fällen kann das Lösen dieser Gleichungen durch Quadrieren auf das Lösen linearer oder quadratischer Gleichungen zurückgeführt werden.

■ 43 Gesucht sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = \sqrt{2x + 5}$.

Lösung:

Die Nullstellen von f sind die Lösungen der Gleichung $\sqrt{2x + 5} = 0$.
Durch Quadrieren erhalten wir die lineare Gleichung $2x + 5 = 0$.

Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $x = -\frac{5}{2}$.

Indem wir $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ berechnen, überzeugen wir uns davon, daß $-\frac{5}{2}$ Nullstelle von f ist.

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \sqrt{2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) + 5} = \sqrt{-5 + 5} = 0$$

■ 44 Wir berechnen die Nullstellen der Funktion $f(x) = \sqrt{x + 2} - 5$.

Lösung:

Wir lösen die Gleichung $\sqrt{x + 2} - 5 = 0$.

Würden wir hier sofort quadrieren, so erhielten wir

$(x + 2) - 10\sqrt{x + 2} + 25 = 0$,

das heißt, die Wurzel wäre damit noch nicht beseitigt. Wir formen deshalb die Gleichung zuerst so um, daß auf der einen Seite der Gleichung nur noch die Wurzel steht:

$\sqrt{x + 2} = 5$.

Nun erhalten wir durch Quadrieren die Gleichung

$x + 2 = 25$ und damit als Lösung $x = 23$.

Tatsächlich ist $f(23) = \sqrt{23 + 2} - 5 = 0$.

■ 45 Gesucht sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x - \sqrt{2x} + 4$.

Lösung:

Wir formen die Gleichung $x - \sqrt{2x} + 4 = 0$ so um, daß auf der einen Seite der Gleichung nur noch die Wurzel steht: $x + 4 = \sqrt{2x}$.

Das Quadrieren führt auf die quadratische Gleichung $x^2 + 6x + 16 = 0$.

Diese Gleichung hat keine Lösung. Folglich hat f keine Nullstelle.

■ 46 Es sind die Nullstellen der Funktion

$f(x) = \sqrt{2x} - x\sqrt{x + 1}$ zu ermitteln.

Lösung:

$$\sqrt{2x} - x\sqrt{x+1} = 0$$

$$\sqrt{2x} = x\sqrt{x+1}$$

Nun stehen zwar auf beiden Seiten der Gleichung Wurzeln, doch verschwinden beim Quadrieren beide Wurzeln. Wir erhalten

$$2x = x^2(x+1)$$

$$0 = x^2(x+1) - 2x$$

$$0 = x[x(x+1) - 2]$$

$$0 = x(x^2 + x - 2).$$

Eine Lösung der Gleichung ist $x_1 = 0$.
Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind

$x_2 = 1$ und $x_3 = -2$.

Die Probe ergibt, daß -2 keine Nullstelle von f ist, da f für $x = -2$ nicht definiert ist. Somit erhalten wir als Nullstellen von f die Zahlen

$x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

Bemerkung: Das Beispiel C 46 macht deutlich, daß das Quadrieren einer Gleichung im allgemeinen keine äquivalente Umformung ist. Deshalb können bei der umgeformten Gleichung Lösungen auftreten, die *nicht* Lösung der Ausgangsgleichung sind. Um solche Lösungen auszuschließen, muß **unbedingt die Probe, und zwar in der Ausgangsgleichung,** vorgenommen werden.

Aus den Beispielen entnehmen wir die folgenden **Arbeitsschritte zur Ermittlung von Nullstellen einer Wurzelfunktion.**

Arbeitsschritt	*Beispiel:* $f(x) = \sqrt{x-7} + \dfrac{4}{\sqrt{x-7}} - \sqrt{2x+9}$
Aufstellen der Wurzelgleichung	$\sqrt{x-7} + \dfrac{4}{\sqrt{x-7}} - \sqrt{2x+9} = 0$
Umformen der Gleichung	$\sqrt{x-7} + \dfrac{4}{\sqrt{x-7}} - \sqrt{2x+9} = 0 \quad \mid \cdot \sqrt{x-7}$ $x - 7 + 4 - \sqrt{2x+9} \cdot \sqrt{x-7} = 0$ $x - 3 = \sqrt{(2x+9)(x-7)}$
Quadrieren	$x^2 - 6x + 9 = 2x^2 - 5x - 63$
Lösen der entstandenen Gleichung	$0 = x^2 + x - 72$ $x_1 = 8;\ x_2 = -9$
Probe	$f(8) = \sqrt{8-7} + \dfrac{4}{\sqrt{8-7}} - \sqrt{16+9} = 0$ $f(-9)$ ist nicht definiert.
Formulieren des Ergebnisses	Nullstelle von f ist die Zahl 8.

Aufgaben

Ermitteln Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

1.↑ a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2} - 1$ b) $f(x) = -2\sqrt{5 - x^2} + 4$ c) $f(x) = 4 - \sqrt{7x + 2}$

d) $f(x) = \sqrt{x + 12} - \dfrac{10}{\sqrt{x + 12}} - \sqrt{5x - 56}$

2.↑ a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - 1$ b) $f(x) = \sqrt{2 - x} - \sqrt{x^2}$ c) $f(x) = 4 - \sqrt{9x - 2}$

d) $f(x) = \sqrt{2x + 7} - \sqrt{x - 5} - \dfrac{6}{\sqrt{x - 5}}$

Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen folgender Funktionen!

3.↑ $f(x) = \sqrt{3x + 1}$; $g(x) = \sqrt{7x - 2}$ **4.↑** $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$; $g(x) = \sqrt{x}$

19 Verhalten rationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$

● 27 Geben Sie je eine Folge (x_n) reeller Zahlen an, die unbeschränkt wächst, und untersuchen Sie die Folge $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ auf Konvergenz!

● 28 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$!

Beschreiben Sie den Verlauf dieser Graphen für unbeschränkt wachsendes bzw. unbeschränkt fallendes x!

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ist für alle x definiert.

Wie verhält sich die Funktion f für unbeschränkt wachsende x?
Mit anderen Worten:
Wie verläuft der Graph der Funktion f für unbeschränkt wachsende x?

Zur Beantwortung dieser Frage werden wir uns wiederum auf gewisse Folgen stützen. Wir wählen jetzt solche Folgen (x_n), die unbeschränkt wachsen, und untersuchen dann den Verlauf der Folgen $(f(x_n))$ der dazugehörigen Funktionswerte.
Eine solche Folge (x_n) ist zum Beispiel die Folge (n). Wegen $x_n = n$ ist

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n^2 + 1} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

$\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ist eine Nullfolge. Damit erhalten wir unter Verwendung der Grenzwertsätze für Folgen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Nun könnte aber bei Wahl einer anderen unbeschränkt wachsenden Folge (x_n) die dazugehörige Folge $(f(x_n))$ der Funktionswerte ein anderes Verhalten zeigen. Sie könnte zum Beispiel gegen eine von 1 verschiedene Zahl konvergieren oder aber divergent sein. Es genügt also nicht, das Verhalten der Folge $(f(x_n))$ bei einer speziell gewählten Folge (x_n) zu untersuchen, sondern wir brauchen eine Aussage über das Verhalten der Folge $(f(x_n))$ für jede unbeschränkt wachsende Folge (x_n).
Es sei nun (x_n) eine beliebige unbeschränkt wachsende Folge. Dann gilt für die zu den Folgengliedern gehörenden Funktionswerte:

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n^2 + 1} = \frac{x_n^2\left(1 - \frac{1}{x_n^2}\right)}{x_n^2\left(1 + \frac{1}{x_n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{x_n^2}}{1 + \frac{1}{x_n^2}}, \quad x_n \neq 0.$$

Da die Folge (x_n) unbeschränkt wächst, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Man sagt dann: *f hat bei unbeschränkt wachsendem x den Grenzwert 1.*
Man schreibt: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ (Lies: „Limes $f(x)$ für x gegen plus Unendlich ist Eins").

Der Graph der Funktion f kommt der Geraden $y = 1$ bei unbeschränkt wachsendem x beliebig nahe (↗ Bild C 39). Man nennt die Gerade $y = 1$ eine **Asymptote** der Kurve.

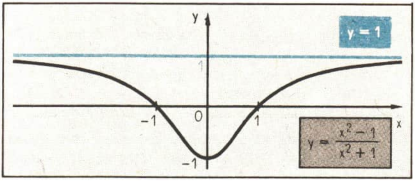


Bild C 39

29 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ für unbeschränkt fallendes x!

Bemerkung: Die zu Beginn dieser Lerneinheit gestellte Frage wird auch wie folgt formuliert:

Wie verhält sich die Funktion im Unendlichen?

47 Wir untersuchen das Verhalten der Funktion

$f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ für $x \to \pm\infty$.

Indem wir die höchste auftretende Potenz von x ausklammern, erhalten wir

$$f(x) = x^3\left(6 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right).$$

Ist (x_n) eine beliebige unbeschränkt wachsende Folge, dann wächst auch die Folge (x_n^3) unbeschränkt, während $\left(6 - \frac{4}{x_n} + \frac{3}{x_n^2} - \frac{5}{x_n^3}\right)$ gegen 6 konvergiert.

Das Produkt beider Folgen wächst damit unbeschränkt. Man schreibt dafür
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (Lies: „Limes $f(x)$ für x gegen plus Unendlich ist plus Unendlich").

Entsprechend gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

48 Man bestimme das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{3x + 4}$ im Unendlichen.

Für $x \neq 0$ erhalten wir durch entsprechendes Ausklammern und Kürzen

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)}{x\left(3 + \frac{4}{x}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{4}{x}}.$$

Ist (x_n) eine beliebige unbeschränkt wachsende Folge, so ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{5}{x_n^2}}{3 + \frac{4}{x_n}} = \frac{1}{3}, \quad \text{folglich wächst} \quad \left(x_n \cdot \frac{1 + \frac{2}{x_n} - \frac{5}{x_n^2}}{3 + \frac{4}{x_n}}\right) \quad \text{unbeschränkt.}$$

Damit ist $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - 5}{3x + 4} = +\infty$.

Analog erhält man $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x - 5}{3x + 4} = -\infty$.

49 Man bestimme das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{-2x^2 + 4}{x^4 + x^2 + 2}$ im Unendlichen.
Für $x \neq 0$ ist

$$f(x) = \frac{x^2\left(-2 + \frac{4}{x^2}\right)}{x^4\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x_4}\right)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-2 + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}}.$$

Ist (x_n) eine beliebige unbeschränkt wachsende Folge, so ist

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{x_n^2} \cdot \frac{-2 + \frac{4}{x_n^2}}{1 + \frac{1}{x_n^2} + \frac{2}{x_n^4}}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n{}^2} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{-2 + \frac{4}{x_n^2}}{1 + \frac{1}{x_n^2} + \frac{2}{x_n^4}} = 0 \cdot \left(\frac{-2}{1}\right) = 0.$$

Damit gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 + 4}{x^4 + x^2 + 2} = 0$. Entsprechend gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^2 + 4}{x^4 + x^2 + 2} = 0$.

Die Gerade $y = 0$ ist eine Asymptote des Graphen der Funktion.

Nach der in den Beispielen C 47 bis C 49 angewendeten Methode läßt sich in jedem Falle verfahren.
Aus diesen Beispielen entnehmen wir die in der folgenden Übersicht dargestellten Arbeitsschritte.

	Arbeitsschritte			
Beispiele	(1) Ausklammern der höchsten Potenz im Zähler und Nenner	(2) Kürzen	(3) Ermitteln von $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
$f(x) = x^3 + 5$	$f(x) = x^3\left(1 + \frac{5}{x^3}\right)$		$+\infty$	$-\infty$
$f(x) = \frac{x^2+5}{2x^2-2}$	$f(x) = \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x^2}\right)}$	$f(x) = \frac{1+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{2}{x^2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{x^3+5}{2x^2-2}$	$f(x) = \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x^2}\right)}$	$f(x) = x\cdot\frac{1+\frac{5}{x^3}}{2-\frac{2}{x^2}}$	$+\infty$	$-\infty$
$f(x) = \frac{x^2+5}{2x^3-2}$	$f(x) = \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{2}{x^3}\right)}$	$f(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{2}{x^3}}$	0	0

Aufgaben

Untersuchen Sie das Verhalten folgender Funktionen im Unendlichen!

1.↑ a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{2x+2}$

d) $f(x) = 4x^3 + x - 17$ e) $f(x) = \frac{7}{4x^2-3}$ f) $f(x) = \frac{ax^2}{bx^2+cx+d}$ $(a, b \neq 0)$

2.↑ a) $f(x) = \frac{4x-3}{-3x+2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ c) $f(x) = 3x^5 + x^4 - 16x + 2$

d) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-5x+6}$ e) $f(x) = \frac{3x^2-9}{6}$ f) $f(x) = \frac{ax^3}{x^2+x-17}$ $(a \neq 0)$

3.* Begründen Sie, daß für alle Funktionen $f(x) = x^n$ ($n \geqq 1$, n natürliche Zahl) gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -\infty, & \text{wenn } n \text{ ungerade!} \end{cases}$$

20 Polstellen rationaler Funktionen

● 30 (x_n) sei eine Nullfolge mit nur positiven Folgengliedern. Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ unbeschränkt wächst!

● 31 Beschreiben Sie das Verhalten der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$ in der Nähe der Stelle 0!

Jede rationale Funktion f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ (u, v ganze rationale Funktionen) ist nur an jenen Stellen *nicht* definiert, an denen $v(x) = 0$ ist.

Ist x_0 eine solche Stelle, gilt also $v(x_0) = 0$ und ist $u(x_0) \neq 0$, so nennt man x_0 eine **Polstelle** der rationalen Funktion f.[1]

Ganze rationale Funktionen haben keine Polstellen.

Wie verhält sich eine gebrochene rationale Funktion bei Annäherung an eine Polstelle?

50 Die eben gestellte Frage wollen wir für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1}$ beantworten.

In diesem Fall ist $u(x) = 1$, $v(x) = x - 1$.
Die Zahl 1 ist Nullstelle von v, dagegen ist u stets verschieden von Null. Folglich hat f an der Stelle 1 eine Polstelle.

Wie verhält sich also f bei der Annäherung an die Stelle 1?

Auch bei der Lösung dieses Problems arbeiten wir wieder mit Folgen. Wir wählen eine Folge (x_n) mit $x_n \neq 1$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Wir fordern noch zusätzlich, daß $x_n > 1$ für alle n gilt, das heißt, die Folge (x_n) soll von rechts gegen 1 konvergieren.

Es sei etwa $x_n = 1 + \frac{1}{10^n}$. Dann ist $f(x_n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{10^n} - 1} = 10^n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	...
x_n	$1 + \frac{1}{10}$	$1 + \frac{1}{10^2}$	$1 + \frac{1}{10^3}$	$1 + \frac{1}{10^4}$	$1 + \frac{1}{10^5}$	$1 + \frac{1}{10^6}$	$1 + \frac{1}{10^7}$	...
$f(x_n)$	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	...

Offenbar wächst $(f(x_n))$ unbeschränkt.
Ist nun (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ und $x_n > 1$ für alle n, so ist $(x_n - 1)$ eine Nullfolge mit nur positiven Gliedern. Die Folge $\left(\frac{1}{x_n - 1}\right)$ wächst dann unbeschränkt.

Wir schreiben dafür $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

32 Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$ ist!

Wählen Sie dazu eine beliebige Folge (x_n), die von links gegen 1 konvergiert, und untersuchen Sie die Folge der dazugehörigen Funktionswerte!

[1] Der Fall, daß Zähler und Nenner eine gemeinsame Nullstelle x_0 haben, trat bereits in Lerneinheit B 8 (↗ Bild B 25 auf Seite 105), auf. Die dort untersuchte Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ hat an der Stelle 1 *keine* Polstelle.

Für die Funktion f im Beispiel C 50 gilt:
Nähert sich x der Polstelle von rechts, so wachsen die Funktionswerte von f unbeschränkt.
Nähert sich x der Polstelle von links, so fallen die Funktionswerte von f unbeschränkt.
Daraus folgt: Bei Annäherung an die Polstelle nähert sich der Graph der Funktion f der Geraden $x = 1$ an. Man sagt auch in diesem Fall, daß die Gerade $x = 1$ eine **Asymptote** der Kurve ist (↗ Bild C 40).
Hat eine Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ an der Stelle x_0 einen Pol, so ist die Gerade $x = x_0$ eine Asymptote des Graphen der Funktion f.
Für die Annäherung der Kurve an die Gerade sind vier Fälle zu unterscheiden, die im Bild C 41 dargestellt sind. Welcher der dargestellten Fälle eintritt, ist durch Berechnen geeigneter Funktionswerte leicht zu entscheiden.

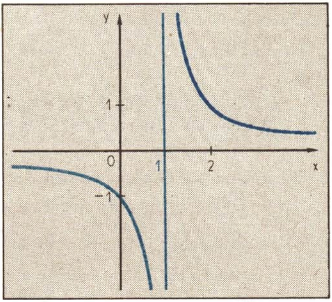
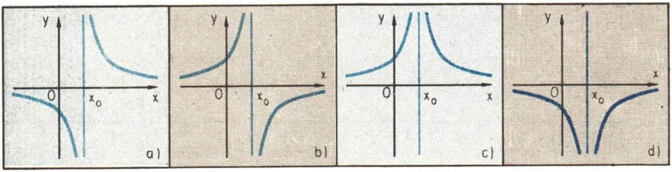


Bild C 40

Bild C 41


■ 51 Es ist das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$ bei Annäherung an ihre Polstellen zu ermitteln.

Lösung:
Die Nullstellen der Nennerfunktion $v(x) = x^2 - 9$ sind $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$. Für die Zählerfunktion $u(x) = x^2 + 6x + 9$ gilt $u(3) \neq 0$ und $u(-3) = 0$.
Die einzige Polstelle der Funktion f ist also 3.
Wir untersuchen nun das Verhalten von f bei Annäherung an die Stelle 3.

Ist $x > 3$, so ist $u(x) > 0$ und $v(x) > 0$, also $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} > 0$.

Folglich kann nur $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$ sein.

Ist $x < 3$, aber x noch größer als Null, so ist $u(x) > 0$ und $v(x) < 0$,

also $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} < 0$.

Folglich kann nur

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$ sein.

Es liegt also der Fall (a) aus Bild C 41 vor.

Aufgaben

Bestimmen Sie die Polstellen der folgenden Funktionen!

1.↑ a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 12}{x^2 - 4}$ 2.↑ a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x + 6)(x^2 - 2x + 1)}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 2x^2 - 4x}$

Untersuchen Sie das Verhalten der folgenden Funktionen in einer Umgebung der entsprechenden Polstellen!

3.↑ a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 2x^2 - 4x}$ 4.↑ a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$

21 Lokale und globale Extrema von Funktionen

Wir wollen uns jetzt der Aufgabe zuwenden, Maxima und Minima von Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung zu ermitteln.

■ 52 Von allen Rechtecken mit dem Umfang 100 suchen wir ein solches mit möglichst großem Flächeninhalt.

Lösung:

(1) Wir führen das gestellte Problem auf ein Problem der Untersuchung von Funktionen zurück.

Sind x und y die Seitenlängen des Rechtecks, so gilt $2x + 2y = 100$ und damit $y = 50 - x$. Dabei gilt auf Grund der Aufgabenstellung, daß $x, y > 0$, also $0 < x < 50$ ist. Für den Flächeninhalt des Rechtecks erhalten wir dann

$A = x \cdot y = x(50 - x) = -x^2 + 50x.$

Die oben gestellte Aufgabe können wir jetzt wie folgt formulieren:
Es ist der größte Funktionswert der Funktion

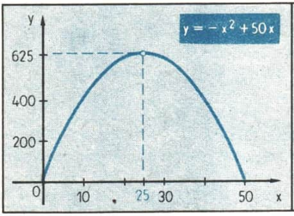
$f(x) = -x^2 + 50x$ im Intervall $0 < x < 50$ gesucht.

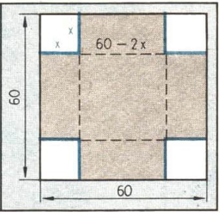
(2) f ist eine quadratische Funktion. Da der Koeffizient von x^2 negativ ist, hat f einen größten Funktionswert. Dieser ist die Ordinate des Scheitelpunktes der Parabel. Nun ist $f(0) = f(50) = 0$.

Parabelpunkte mit gleichen Ordinaten liegen aber symmetrisch zur Achse der Parabel, auf der ja auch der Scheitel der Parabel liegen muß. Daraus folgt, daß der Scheitel die Abszisse $\dfrac{0 + 50}{2} = 25$ haben muß. Diese Stelle liegt im betrachteten Intervall. Der größte Funktionswert von f im betrachteten Intervall ist $f(25) = 25(50 - 25) = 625$ (Bild C 42 auf Seite 188).

Damit ist die Aufgabe gelöst. Unter allen Rechtecken mit dem Umfang 100 ist das Quadrat mit der Seitenlänge 25 das mit dem größten Flächeninhalt.[1])

[1]) Auf die Lösung der Aufgabe hat die Einheit keinen Einfluß. Wir haben sie deshalb hier nicht berücksichtigt. So ist zum Beispiel von allen Rechtecken mit dem Umfang 100 m das Quadrat mit der Seitenlänge 25 m das mit dem größten Flächeninhalt.





Bilder
C 42, C 43

■ 53 Gegeben ist ein quadratisches Stück Blech mit der Seitenlänge 60 cm. Durch Herausschneiden von vier gleichen Quadraten an den Ecken und anschließendes Falzen soll ein oben offener Kasten mit möglichst großem Volumen hergestellt werden (↗ Bild C 43). Das Volumen des entstehenden Kastens hängt davon ab, wie groß die Seitenlänge der herauszuschneidenden Quadrate gewählt wird. Bezeichnen wir die Maßzahl der Seitenlänge mit x und die Maßzahl des dazugehörigen Volumens mit $V(x)$, so ist

$$V(x) = (60 - 2x)(60 - 2x) \cdot x = 3600x - 240x^2 + 4x^3.$$

Wir erhalten eine ganze rationale Funktion dritten Grades. Dabei genügt es auf Grund der Aufgabenstellung, die Funktion im Intervall $0 \leqq x \leqq 30$ zu untersuchen. Die Funktion V ist als ganze rationale Funktion in dem Intervall $\langle 0; 30 \rangle$ stetig und hat deshalb dort ein Maximum (↗ Satz B 7, Seite 120). Weil aber $V(0) = V(30) = 0$ und $V(x) > 0$ für $0 < x < 30$ gilt, muß V das Maximum im Innern des Intervalls $\langle 0; 30 \rangle$ annehmen.

Es gibt also wenigstens eine Lösung der Aufgabe im Beispiel C 53. Jedoch kennen wir *bisher kein Verfahren* zur Ermittlung einer solchen Stelle, an der V sein Maximum annimmt.
Um solche Probleme wie im Beispiel C 53 lösen zu können, benötigen wir noch tiefere Einsichten über Eigenschaften differenzierbarer Funktionen. Mittels dieser schrittweise erworbenen Einsichten werden wir schließlich zu einem recht einfachen Lösungsverfahren gelangen.
Wir führen zunächst den folgenden Begriff ein.

▶ 5 **DEFINITION**

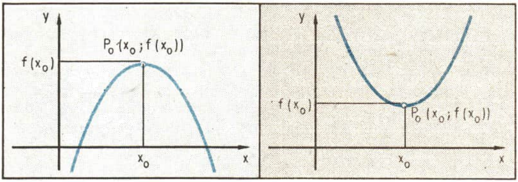
f sei eine Funktion, x_0 sei eine reelle Zahl, und f sei in einer Umgebung der Stelle x_0 definiert.

f hat an der Stelle x_0 ein lokales Maximum	$=_{\mathrm{Df}}$	**Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes x mit $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ und $x \neq x_0$ gilt $f(x) < f(x_0)$.**

● 33 Definieren Sie analog zur Definition C 5: f hat an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum**!

Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum oder Minimum, so sagt man auch: f hat an der Stelle x_0 ein **lokales Extremum.** x_0 ist dann eine **lokale Extremstelle** von f und $f(x_0)$ ein **lokaler Extremwert.** Der Punkt $[x_0; f(x_0)]$ heißt dann ein **lokaler Extrempunkt** (↗ Tabelle S. 189).
Wir müssen beachten, daß ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum) einer Funktion f nicht immer mit dem Maximum (bzw. Minimum) der Funktion f in einem Intervall übereinstimmen muß. Im Unterschied zum **lokalen Maximum,** das sich immer auf eine *hinreichend kleine Umgebung* der betreffenden Stellen bezieht, nennt man das in Kapitel B auf Seite 119 definierte Maximum einer Funktion **globales Maximum** (entsprechend **globales Minimum**).

	f hat an der Stelle x_0 ein lokales Extremum	
x_0	ist lokale Extremstelle	
	lokale Maximumstelle	lokale Minimumstelle
$f(x_0)$	ist lokaler Extremwert (Extremum)	
	lokales Maximum	lokales Minimum
$P_0[x_0; f(x_0)]$	ist lokaler Extrempunkt	
	lokaler Maximumpunkt (Bild C 44)	lokaler Minimumpunkt (Bild C 45)



Bilder C 44, C 45

54 Die im Bild C 46 dargestellte Funktion hat an den Stellen x_1, x_3 und x_5 lokale Maxima, an den Stellen x_2, x_4 und x_6 lokale Minima.
Im Intervall $\langle a; b \rangle$ nimmt die Funktion f das globale Maximum an der Stelle b und das globale Minimum an der Stelle x_4 an.

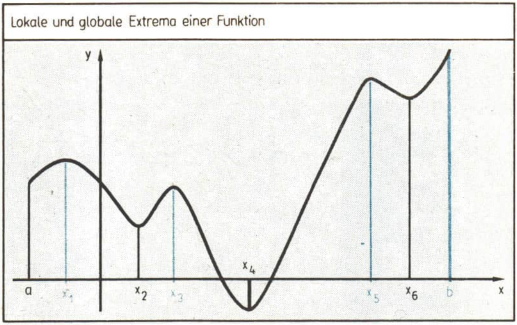


Bild C 46

Aufgaben

1. f sei die im Bild C 46 dargestellte Funktion.
Ermitteln Sie die in der folgenden Tabelle fehlenden Werte!

Intervall	Globales Maximum von f	Lokale Maxima von f	Globales Minimum von f	Lokale Minima von f
$\langle a; 0\rangle$ $\langle 0, b\rangle$ $\langle x_1; x_3\rangle$ $\langle x_1; x_4\rangle$				

Geben Sie von folgenden Funktionen lokale und globale Extrema – soweit vorhanden – im jeweils vorgegebenen Intervall an!

2.↑ **a)** $f(x) = 2x + 1;\quad \langle 1; 3\rangle$
b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 2;\quad \langle -3; 4\rangle$

3.↑ **a)** $f(x) = |x|;\quad \langle -1; 1\rangle$
b) $f(x) = -3x^2 + x - 6;\quad \langle -6; +4\rangle$

4. Skizzieren Sie den Graph einer Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $\langle a; b\rangle$, die jeweils folgende Bedingungen erfüllt!
a) f habe in $\langle a;\ b\rangle$ zwei lokale Minima und zwei lokale Maxima und globale Extremwerte, die mit je einem lokalen Extremum zusammenfallen.
b)* f habe in $\langle a; b\rangle$ zwei lokale Maxima, aber kein lokales Minimum.
c)* f habe je ein lokales Maximum und ein lokales Minimum in $\langle a; b\rangle$, aber keine globalen Extrema in $\langle a; b\rangle$.

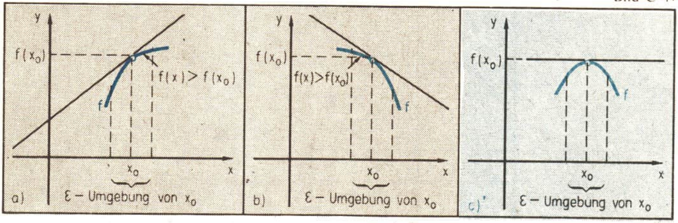
22 Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema

● 34 Bestimmen Sie die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = -x^2 + 50x$ an der Stelle $x = 25$!

● 35 Begründen Sie: Wenn eine konvergente Zahlenfolge nur positive Glieder hat, so kann ihr Grenzwert nicht negativ sein (↗ Bild B 42 auf Seite 126)!

Wir wollen jetzt annehmen, daß eine Funktion f an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum** hat. Nach Definition C 5 gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ derart, daß
für jedes $x \neq x_0$ und $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ gilt: $f(x) < f(x_0)$.

Bild C 47



Wenn die *Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar* ist, so hat der Graph von f im Punkt $P_0[x_0; f(x_0)]$ eine Tangente. Die Bilder C 47 a) bis c) legen nahe, daß diese Tangente offenbar parallel zur x-Achse verläuft. Das würde bedeuten, daß die Ableitung von f an der Stelle x_0 gleich 0 sein muß, also $f'(x_0) = 0$ gilt.

Tatsächlich können wir diese Vermutung unter Beachtung der Definition des Differentialquotienten beweisen.

▷ 6

SATZ

f sei eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion.
Wenn f in x_0 ein lokales Extremum hat, so gilt
$f'(x_0) = 0$.

Beweis:

Wir führen den Beweis für den Fall, daß f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum hat. Im Falle eines lokalen Minimums verläuft der Beweis analog.
Es sei also f eine Funktion, die folgenden *Voraussetzungen* genügt:
(1) f hat in x_0 ein lokales Maximum;
(2) f ist in x_0 differenzierbar.
Behauptung: $f'(x_0) = 0$.
Aus (1) folgt, daß es eine ε-Umgebung U von x_0 gibt derart, daß für alle $x \in U$ mit $x \neq x_0$ gilt:

$$f(x) < f(x_0) \quad (\nearrow \text{ Bild C 48}).$$

Aus (2) folgt, daß der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

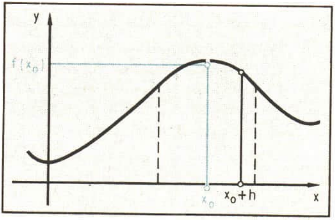


Bild C 48

Wie zeigen wir nun, daß dieser Grenzwert gleich Null ist?

Nach Definition des Grenzwertes muß für jede gegen Null konvergierende Folge (h_n) mit $h_n \neq 0$ und $x_0 + h_n \in U$ für alle n gelten:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = f'(x_0).$$

Wir wählen zunächst eine Folge (h_n), die von rechts gegen Null konvergiert. In dem Differenzenquotienten $\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$ ist dann der Nenner positiv, der Zähler aber negativ. Da demnach die Folge $\left(\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}\right)$ nur negative Glieder hat, kann ihr Grenzwert nicht positiv sein, also gilt $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \leqq 0$, das heißt $f'(x_0) \leqq 0$. (*)

Wählen wir dagegen eine von links gegen Null konvergierende Folge (h_n), so ist für alle n wegen $h_n < 0$ und $f(x_0 + h_n) - f(x_0) < 0$ der Differenzenquotient $\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$ größer als Null.

Wenn die Folge $\left(\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}\right)$ nur positive Glieder hat, kann ihr Grenzwert nicht negativ sein, also gilt $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \geqq 0$, das heißt $f'(x_0) \geqq 0$. (**)

Da sowohl (*) als auch (**) gelten muß, folgt $f'(x_0) = 0$.

Satz C 6 leistet beim Aufsuchen lokaler Extrema von *differenzierbaren* Funktionen wertvolle Dienste.
Ist nämlich $f'(x_0) \neq 0$, so kann f an der Stelle x_0 kein lokales Extremum haben. Lokale Extrema einer differenzierbaren Funktion können höchstens an solchen Stellen vorhanden sein, an denen die Ableitung von f gleich Null ist.

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist also *notwendig* für das Vorhandensein eines lokalen Extremwertes von f an der Stelle x_0.

Suchen wir die lokalen Extrema einer differenzierbaren Funktion f, so kommen dafür allenfalls Stellen x_0 in Frage, für die $f'(x_0) = 0$ gilt. Mit anderen Worten:

Nur die Nullstellen der ersten Ableitung von f können Stellen lokaler Extremwerte sein.

Ob jedoch an den Nullstellen der ersten Ableitung von f tatsächlich lokale Extremwerte vorliegen, kann erst durch weitere Untersuchungen entschieden werden.

■ 55 f sei die Funktion aus Beispiel C 53, also $f(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x, \quad 0 \leqq x \leqq 30$.

Da diese Funktion differenzierbar ist, kann ein lokales Maximum nur dort vorhanden sein, wo die erste Ableitung eine Nullstelle hat.
Es ist $f'(x) = 12x^2 - 480x + 3600$.
Wir bestimmen die Nullstellen von f'.

$$12x^2 - 480x + 3600 = 0$$
$$x^2 - 40x + 300 = 0 \qquad x_{1;2} = 20 \pm \sqrt{400 - 300} = 20 \pm \sqrt{100} = 20 \pm 10$$

Damit erhalten wir $x_1 = 30$ und $x_2 = 10$.
Die Nullstelle x_1 scheidet als Lösung aus, weil sie nicht im Innern des Intervalls $\langle 0; 30 \rangle$ liegt.
Da wir schon wissen, daß im Innern des Intervalls das Maximum angenommen wird, kann dieses nur an der Stelle $x_2 = 10$ liegen.
Der größte Funktionswert von f im Intervall $\langle 0; 30 \rangle$ ist dann

$$f(10) = (60 - 20)^2 \cdot 10 = 40^2 \cdot 10 = 16000.$$

■ 56 Hat die Funktion $f(x) = x^3$ lokale Extrema?
Die erste Ableitung dieser Funktion ist $f'(x) = 3x^2$. Die einzige Nullstelle der Ableitung ist 0. Falls die Funktion f ein lokales Extremum hat, so kommt dafür nur die Stelle 0 in Frage.
Wie wir jedoch aus dem Verlauf des Graphen der Funktion f wissen, liegt an dieser Stelle kein lokales Extremum vor. Für alle $x < 0$ ist nämlich $f(x) < 0$, und für alle $x > 0$ ist $f(x) > 0$.

Wie Beispiel C 56 zeigt, gilt die Umkehrung des Satzes C 6 *nicht*.

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist nicht *hinreichend* für das Vorhandensein eines lokalen Extremums an der Stelle x_0.

■ 57 Hat die Funktion $f(x) = |x|$ lokale Extrema?
Es ist $f(0) = |0| = 0$.
Für $x > 0$ ist $f(x) = |x| = x > 0$, und für $x < 0$ ist ebenfalls $f(x) = |x| = -x > 0$.
Folglich hat f nach Definition C 5 an der Stelle 0 ein lokales Minimum. Jedoch ist hier Satz C 6 nicht anwendbar, da f an der betreffenden Stelle *nicht differenzierbar* ist (↗ Auftrag C 9 auf Seite 144).

Wir müssen also stets beachten, daß die im Satz C 6 formulierte notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extremwerte nur für differenzierbare Funktionen gilt.

Aufgaben

Welche Stellen kommen nach Satz C 6 als lokale Extremstellen der folgenden Funktionen in Frage?

1.↑ a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$
b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 2$
c) $f(x) = x^4 + 2x^3$

2.↑ a) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 3$
c) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2$

Welche der folgenden Funktionen hat im Intervall $\langle 0; 2\rangle$ *kein* lokales Extremum?

3.↑ a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 5$
b) $f(x) = 2x^3 + 18x - 40$

4.↑ a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 12$
b) $f(x) = x^5 + x + 12$

Warum kann die Funktion f keinen lokalen Extremwert haben?

5.↑ $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; $x \neq -1$

6.↑ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; $x > -1$

7. Jede quadratische Funktion hat genau ein lokales Extremum. Die Stelle, an der dieses Extremum angenommen wird, fällt mit der Abszisse des Scheitelpunktes zusammen. Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz C 6 die Koordinaten des Scheitelpunktes des Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + px + q$!

8.* Verfahren Sie wie in Aufgabe 7. mit der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$!
Wovon hängt es ab, ob das lokale Extremum ein Maximum oder Minimum ist?

9. Geben Sie eine Funktion an, die genau eine Extremstelle x_0 hat!
a) $x_0 = 2$ b) $x_0 = -3$

23 Der Satz von ROLLE und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Mit Satz C 6 haben wir eine notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extrema gefunden. Dieser Satz liefert bei der Frage nach lokalen Extremstellen einer differenzierbaren Funktion die Berechtigung, weitere Untersuchungen auf die Nullstellen der 1. Ableitung zu beschränken.

Ob aber an einer Nullstelle der 1. Ableitung überhaupt ein Extremum vorliegt und ob dies ein lokales Maximum bzw. Minimum ist, kann mit den bisherigen Mitteln im allgemeinen nicht entschieden werden.

Um für dieses Problem eine Lösung zu finden, müssen wir noch weiter in die Theorie der Differentialrechnung eindringen.

● 36 Zeichnen Sie den Graph einer in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ stetigen Funktion, die nicht konstant ist und a und b als Nullstellen hat!

Wir betrachten eine Funktion f, die in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ stetig und wenigstens im Innern des Intervalls auch differenzierbar ist. Weiter sei $f(a) = f(b) = 0$.
Wenn f in irgendeinem Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ konstant ist, so muß in diesem Teilintervall die Ableitung von f gleich Null sein (↗ Bild C 49 a) auf Seite 194).
Ist aber f in keinem Teilintervall konstant, so hat f in $(a; b)$ an wenigstens einer Stelle ein lokales

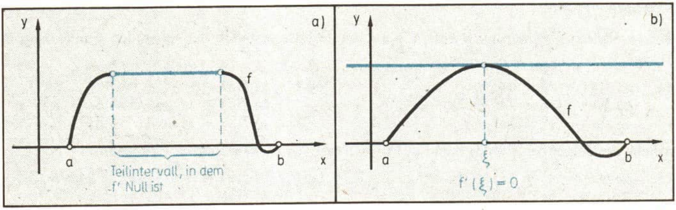


Bild C 49

Maximum oder Minimum (↗ Satz B 7, Seite 120). Aus Satz C 6 folgt, daß die Ableitung von f an dieser Stelle gleich Null ist (↗ Bild C 49 b)).
Diese Aussage wurde zuerst von dem französischen Mathematiker MICHEL ROLLE (1652 bis 1719) formuliert.

▷ 7 **SATZ von ROLLE**

Wenn **f eine im Intervall $\langle a;\ b\rangle$ stetige Funktion ist, die in $(a;\ b)$ sogar differenzierbar ist und für die $f(a) = f(b) = 0$ gilt,**
so **gibt es wenigstens eine Stelle im Intervall $(a;\ b)$, an der die Ableitung von f gleich Null ist.**

Sind die Voraussetzungen des Satzes von ROLLE erfüllt, so gibt es eine Stelle ξ im Intervall $(a;\ b)$, an der die Tangente an den Graph der Funktion parallel zur x-Achse verläuft, die wegen $f(a) = f(b) = 0$ Sekante der Kurve ist.
Diesen Sachverhalt kann man verallgemeinern: Ist eine Funktion f in einem Intervall $\langle a;\ b\rangle$ stetig und im Innern des Intervalls differenzierbar, so gibt es wenigstens eine Stelle ξ im Intervall $(a;\ b)$, an der die Tangente an den Graph der Funktion f zu der Sekante durch $P_1[a;\ f(a)]$ und $P_2[b;\ f(b)]$ parallel verläuft (↗ Bild C 50). Diese Aussage wird in dem folgenden Satz wiedergegeben.

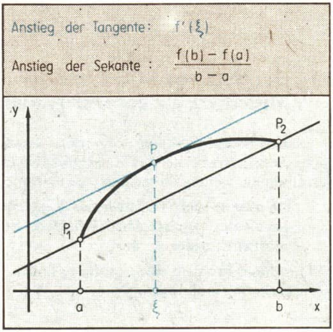


Bild C 50

▷ 8 **MITTELWERTSATZ der Differentialrechnung**

Wenn **eine Funktion f in einem Intervall $\langle a;\ b\rangle$ stetig und in $(a;\ b)$ differenzierbar ist,**
so **gibt es eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ und**

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Auf den Beweis dieses Satzes wollen wir hier verzichten.

Bemerkung: Der Mittelwertsatz sowie auch der Satz von ROLLE sind reine Existenzsätze, das heißt, es wird jeweils nur die Existenz einer solchen Stelle ξ festgestellt. Mit anderen Worten: Es wird nur behauptet, daß es wenigstens eine solche Stelle *gibt*. Es bleibt völlig offen, wie man eine solche Stelle ermitteln kann. Wir werden jedoch im weiteren sehen, daß bereits die Kenntnis der Existenz einer solchen Stelle nützliche Dienste leistet.

Aufgaben

1. Gegeben ist eine im Intervall $\langle 0; 5\rangle$ differenzierbare Funktion f, deren Graph durch die Punkte $P_1(1; 2)$ und $P_2(5; 9)$ geht. Welche Zahl kommt dann bestimmt im Wertebereich von f' vor?

2. Es sei $f(x) = x^2$.
   Bestimmen Sie eine Zahl ξ derart, daß die Tangente an die Parabel im Punkt $P(\xi; \xi^2)$ parallel zur Sekante durch die Punkte $P_1(0; 0)$ und $P_2(4; 16)$ ist!

3. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen wahr sind!
   a) Bei der Funktion $f(x) = x^2$ gibt es in jedem Intervall $\langle a; b\rangle$ genau ein ξ, welches den Bedingungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

   $$\left(a < \xi < b \quad \text{und} \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \text{ genügt.}$$

   b) Dieses ξ liegt genau in der Mitte des Intervalls $\langle a; b\rangle$.

4. Benutzen Sie das Ergebnis der Aufgabe 3. zur Konstruktion der Tangente an die Parabel $y = x^2$ im Punkt $P(1; 1)$!

24 Eine hinreichende Bedingung für die Monotonie

● 37 Zerlegen Sie die folgenden Terme in Linearfaktoren!

a) $x^2 - 2x - 3$ b) $x^2 - 4x + 4$

● 38 Es sei $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Zeichnen Sie die Graphen von f und f'! Wie verhält sich f, wenn $f'(x) \geqq 0$ bzw. $f'(x) \leqq 0$ ist?

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung ist es möglich, einen Zusammenhang zwischen der Monotonie einer Funktion in einem Intervall und gewissen Eigenschaften ihrer 1. Ableitung in diesem Intervall aufzudecken. Die Kenntnis des Monotonieverhaltens einer Funktion f in einer Umgebung einer Stelle x_0 ermöglicht eine Entscheidung darüber, ob an der Stelle x_0 ein Extremwert von f vorliegt oder nicht.

▷ 9

SATZ

f sei eine in einem Intervall differenzierbare Funktion.

a) *Wenn* für alle x aus diesem Intervall $f'(x) \geqq 0$ ist,
**   *so* ist f in dem Intervall *monoton wachsend.***

b) *Wenn* für alle x aus diesem Intervall $f'(x) \leqq 0$ ist,
**   *so* ist f in dem Intervall *monoton fallend.***

Beweis:
Voraussetzung: f sei eine in einem Intervall I differenzierbare Funktion mit $f'(x) \geqq 0$ für alle x aus dem Intervall.
Behauptung: f ist in dem Intervall I monoton wachsend.
Wir haben zu zeigen: Für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leqq f(x_2)$.
Die Funktion f erfüllt in dem Intervall $\langle x_1; x_2 \rangle$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach gibt es eine Zahl ξ mit $x_1 < \xi < x_2$ und

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad \text{bzw.} \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

Wegen $x_1 < x_2$ ist $x_2 - x_1 > 0$, und nach Voraussetzung ist auch $f'(\xi) \geqq 0$. Damit gilt

$$f(x_2) - f(x_1) \geqq 0, \text{ also } f(x_1) \leqq f(x_2).$$

● 39 Beweisen Sie die Behauptung b) im Satz C 9!

Bemerkungen:

(1) Satz C 9 enthält eine hinreichende Bedingung für die Monotonie einer Funktion in einem Intervall. Die Bedingung **$f'(x) \geqq 0$ für alle x eines Intervalls I ist hinreichend für das monotone Wachsen der Funktion in I.**

(2) **Ist insbesondere $f'(x) > 0$ für alle x eines Intervalls I, so folgt aus $x_1 < x_2$, daß $f(x_1) < f(x_2)$ ist. In diesem Fall ist f sogar streng monoton wachsend im Intervall I.** (Bei $f'(x) < 0$ für alle x eines Intervalls I ist f streng monoton fallend in I.)

■ 58 Wir untersuchen den Verlauf der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$.

Mit Hilfe von Satz C 6 bestimmen wir zunächst jene Stellen, die für Extremstellen in Frage kommen. Es ist $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

Die Nullstellen der Ableitung sind $x_1 = -1$ und $x_2 = +3$.
Wenn die Funktion f lokale Extrema hat, dann an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = +3$. Ob an diesen Stellen tatsächlich lokale Extrema vorliegen, können wir jetzt noch nicht entscheiden.
Wir wollen weiter das Monotonieverhalten von f untersuchen. Dazu bestimmen wir zunächst jene x, für die $f'(x) > 0$ ist.
Das sind die Lösungen der Ungleichung
$x^2 - 2x - 3 > 0$, das heißt $(x + 1)(x - 3) > 0$.

Das Produkt $(x + 1)(x - 3)$ ist positiv, wenn beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind.
1. Fall: $x + 1 > 0$ und $x - 3 > 0$
2. Fall: $x + 1 < 0$ und $x - 3 < 0$
Im 1. Fall erhalten wir $x > 3$, im 2. Fall $x < -1$.
Damit ist f für alle $x < -1$ und alle $x > 3$ streng monoton wachsend.
Nun bestimmen wir auf die gleiche Weise die Lösungen der Ungleichung
$(x + 1)(x - 3) < 0$
und erhalten, daß f im Intervall $(-1; 3)$ streng monoton fällt.

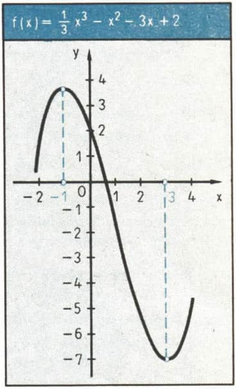


Bild C 51

Aus dem Monotonieverhalten von f können wir schließen, daß f an der Stelle $x_1 = -1$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x_2 = 3$ ein lokales Minimum hat (Bild C 51 zeigt eine Skizze des Graphen von f im Intervall $\langle -2; 4\rangle$).

■ 59 Wir untersuchen das Monotonieverhalten der gebrochenen rationalen Funktion
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$
Es ist
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2},$$
wobei $x \neq +1$ und $x \neq -1$ zu fordern ist.
Für $x^2 \neq 1$ ist $(x^2 - 1)^2$ stets positiv, und folglich hängt das Vorzeichen von $f'(x)$ allein vom Vorzeichen von $-4x$ ab.
Damit ist für negative x ($x \neq -1$) die Ableitung $f'(x)$ positiv und folglich die Funktion f streng monoton wachsend und für positive x ($x \neq 1$) die Ableitung $f'(x)$ negativ und also f streng monoton fallend.

Aufgaben

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen mit Hilfe der 1. Ableitung! Geben Sie die lokalen Extrempunkte an! Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen!

1.↑ a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x$

c) $f(x) = x^4 + 2x^3$

d) $f(x) = \sqrt{x} - x$

2.↑ a) $f(x) = -x^2 + 3x - 8$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

d) $f(x) = -\sqrt{x} - x$

25 Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Bei der Suche nach lokalen Extremwerten von differenzierbaren Funktionen gestattet uns die im Satz C 6 formulierte notwendige Bedingung, bestimmte Stellen herauszufinden, die dann nur noch als Stellen lokaler Extremwerte in Frage kommen.
Eine Möglichkeit, eine solche Stelle als lokale Extremwertstelle nachzuweisen, haben wir in Beispiel C 58 kennengelernt. Wir haben dabei das Monotonieverhalten der betreffenden Funktion untersucht und daraus auf das Vorhandensein eines lokalen Maximums bzw. Minimums an einer in Frage stehenden Stelle geschlossen. Die Untersuchung des Monotonieverhaltens der Funktion ist jedoch recht aufwendig.

Gibt es ein rationelleres Verfahren, um festzustellen, ob eine Funktion f an einer Stelle x_0 ein lokales Maximum bzw. Minimum hat?

Der folgende Satz zeigt, daß diese Frage unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über die Funktion f (die jedoch in den von uns betrachteten Fällen immer erfüllt sind) bejaht werden kann.

▷ 10 **SATZ**

f sei eine an der Stelle x_0 zweimal differenzierbare Funktion, und f'' sei an der Stelle x_0 stetig. Dann gilt:

(a) *Wenn* $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$,
***so* hat f an der Stelle x_0 ein lokales *Maximum*.**

(b) *Wenn* $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$,
***so* hat f an der Stelle x_0 ein lokales *Minimum*.**

Beweis:

Wir beweisen die Aussage (a).

Voraussetzung:

f sei eine an der Stelle x_0 zweimal differenzierbare Funktion und f'' an der Stelle x_0 stetig. Ferner gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

Behauptung:

f hat an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

Da f'' an der Stelle x_0 stetig ist und $f''(x_0) < 0$ gilt, gibt es eine Umgebung U von x_0, in der f'' nur negative Werte annimmt.[1] Das bedeutet aber, daß in U die erste Ableitung von f, also die Funktion f', streng monoton fällt.

Da außerdem $f'(x_0) = 0$ ist, gilt für alle $x \in U$, die kleiner als x_0 sind, $f'(x) > 0$, das heißt, dort ist die Funktion f streng monoton wachsend.

Für alle $x \in U$, die größer als x_0 sind, gilt $f'(x) < 0$, das heißt, dort ist f streng monoton fallend (↗ Bild C 52).

Wir haben damit eine Umgebung von x_0 gefunden derart, daß f in dieser Umgebung links von x_0 streng monoton wächst und rechts von x_0 streng monoton fällt. Folglich gilt für alle $x \neq x_0$ dieser Umgebung, daß $f(x) < f(x_0)$ ist, das heißt, f hat an dieser Stelle ein lokales Maximum.

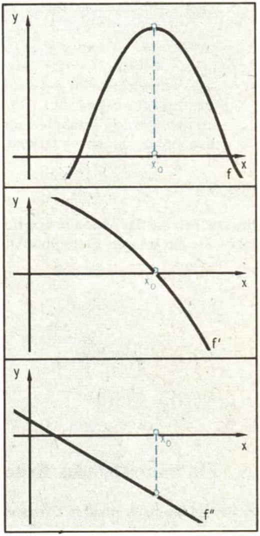


Bild C 52

● 40 Führen Sie den Beweis für die Aussage b) in Satz C 10!

Die im Satz C 10 formulierte Bedingung ist eine **hinreichende Bedingung für die Existenz lokaler Extrema.**

● 41 Zeigen Sie am Beispiel der Funktion $f(x) = x^4$, daß die im Satz C 10 formulierte Bedingung *nicht* notwendig für das Vorliegen eines lokalen Extremwertes ist!

Wenn also für eine zweimal differenzierbare Funktion f gilt, daß $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, so kann mit Hilfe von Satz C 10 keine Entscheidung über das Vorliegen eines lokalen Extremwertes getroffen werden. In solchen Fällen können wir jedoch das Monotonieverhalten der Funktion zur Entscheidungsfindung heranziehen.

[1]) Für Zahlenfolgen gilt: Wenn $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$ und $g < 0$, so ist $a_n < 0$ für fast alle n. Daraus folgt: Ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ und $g < 0$, so gibt es eine Umgebung U von x_0 derart, daß für jedes x mit $x \neq x_0$ und $x \in U$ gilt: $f(x) < 0$.

■ 60 Wir wenden den Satz C 10 auf die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ aus Beispiel C 58 an. Die Nullstellen der 1. Ableitung $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.
Die 2. Ableitung von f ist $f''(x) = 2x - 2$. Aus $f''(-1) = 2(-1) - 2 = -4 < 0$ folgt, daß f an der Stelle -1 ein lokales Maximum hat. Entsprechend folgt aus $f''(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 > 0$, daß f an der Stelle 3 ein lokales Minimum hat.

Mit den Sätzen C 6 und C 10 haben wir ein einfaches Verfahren zur Ermittlung lokaler Extremstellen erhalten.

Gegeben: f (f zweimal differenzierbar, f'' stetig)

↓

Bilde f'!

↓

Bilde f''!

Ermittle die Nullstellen x_k von f'! (Löse die Gleichung $f'(x) = 0$!)

↓

Berechne $f''(x_k)$!

$f''(x_k) \neq 0$:

Wenn $f''(x_k) < 0$,
so hat f an der Stelle x_k ein lokales Maximum.
Wenn $f''(x_k) > 0$,
so hat f an der Stelle x_k ein lokales Minimum.

$f''(x_k) = 0$:

In diesem Fall ziehen wir das Monotonieverhalten von f in einer Umgebung von x_k zur Entscheidungsfindung heran.

Aufgaben

Bestimmen Sie die lokalen Extrempunkte folgender Funktionen!

1.↑ a) $f(x) = x^3 - x - 2$
b) $f(x) = 4x^2 + 3x - 1$
c) $f(x) = 4x^5$
d) $f(x) = 30 - 24x + 9x^2 - x^3$
e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
f) $f(x) = \sqrt{x} - x$

2.↑ a) $f(x) = x^3 - 13x + 27$
b) $f(x) = -(2x - 5)^2$
c) $f(x) = 2x^4 - 32x^2 - 10$
d) $f(x) = -6x^7 + 32$
e) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Für welche Zahlen a hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum bzw. Minimum?

3.↑ $f(x) = \frac{ax - 1}{x^2 + 1}$; $x_0 = 3$

4.↑ $f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$; $x_0 = 1$

26 Kurvendiskussionen

Viele Zusammenhänge in den Naturwissenschaften und in der Technik werden durch Funktionen beschrieben. Dadurch macht die Lösung vieler Probleme aus diesen Bereichen die Untersuchung des Verhaltens der betreffenden Funktion erforderlich. Bei dieser Untersuchung spielt das Ermitteln gewisser charakteristischer Stellen der Funktion eine wesentliche Rolle. Zu diesen charakteristischen Stellen zählen Nullstellen, Extremstellen und Polstellen. Weitere Eigenschaften sind das Monotonieverhalten, das Verhalten der Funktion im Unendlichen, Beschränktheit des Wertebereiches, Symmetrieeigenschaften des Graphen sowie ein eventuell vorhandener Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse.
Mit Hilfe der Untersuchungsergebnisse ist man meist in der Lage, den Graph der Funktion (auch Kurve genannt) mit seinen wesentlichen Eigenschaften im Koordinatensystem darzustellen. Man nennt deshalb die obengenannten Untersuchungen auch **Kurvendiskussionen.**
Wir wollen hier einige Beispiele für die Diskussion von Funktionen angeben.

■ 61 Wir untersuchen das Verhalten der ganzen rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6}(3x^4 + 4x^3 - 12x^2).$$

(1) **Nullstellen**

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{6}(3x^4 + 4x^3 - 12x^2) = 0.$$

Äquivalent mit dieser Gleichung ist $x^2(3x^2 + 4x - 12) = 0$.

Eine Lösung der Gleichung ist also $x_1 = 0$.
Weitere Lösungen erhalten wir aus der Gleichung

$$3x^2 + 4x - 12 = 0 \quad \text{beziehungsweise} \quad x^2 + \frac{4}{3}x - 4 = 0.$$

Die Lösungen sind $x_{2;3} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + 4} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{40}}{3} = -\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{10}$.

Unter Verwendung der Zahlentafel bzw. des Rechenstabes erhalten wir

$x_2 \approx 1{,}44$ und $x_3 \approx -2{,}77$ (↗ Bild C 53).

(2) **Lokale Extrempunkte**

Zunächst bilden wir die ersten beiden Ableitungen von f.
Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{6}(12x^3 + 12x^2 - 24x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x \quad \text{und} \quad f''(x) = 6x^2 + 4x - 4.$$

Entsprechend dem Schema am Ende von Lerneinheit 25 ermitteln wir die Nullstellen von f', das heißt die Lösungen der Gleichung

$$2x^3 + 2x^2 - 4x = 2x(x^2 + x - 2) = 0.$$

Als Lösungen erhalten wir $x_4 = 0$ und die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$, also $x_5 = 1$ und $x_6 = -2$.
Wenn also die Funktion f lokale Extremwerte hat, so nur an den Stellen $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ und $x_6 = -2$. Ob an diesen Stellen tatsächlich lokale Extrema vorhanden sind, entscheiden wir mit Hilfe der 2. Ableitung.

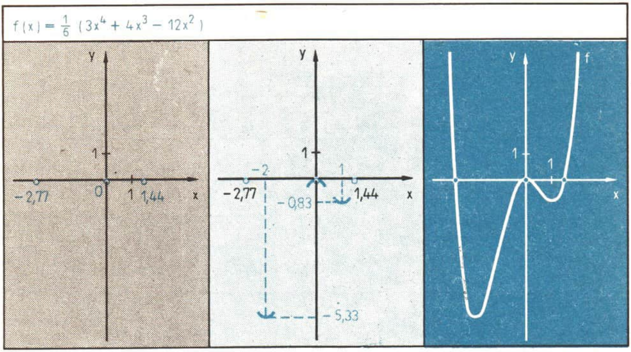


Bild C 53 Bild C 54 Bild C 55

Es ist

$$f''(0) = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 4 = -4 < 0;$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 4 = 6 > 0;$$

$$f''(-2) = 6 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) - 4 = 12 > 0.$$

Folglich hat f an der Stelle 0 ein lokales Maximum und an den Stellen 1 und -2 lokale Minima. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind

$$f(0) = 0; \;\; f(1) = -\frac{5}{6} \approx -0{,}83; \;\; f(-2) = -\frac{16}{3} \approx -5{,}33 \quad (\nearrow \text{ Bild C 54}).$$

(3) Verhalten im Unendlichen

Es ist $f(x) = \dfrac{1}{6}(3x^4 + 4x^3 - 12x^2) = x^4\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$.

Es sei (x_n) eine beliebige unbeschränkt wachsende Folge reeller Zahlen. Dann wächst auch die Folge (x_n^4) unbeschränkt, während $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3x_n} - \dfrac{2}{x_n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$ ist.

Damit erhalten wir $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Entsprechend erhalten wir $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Die Ergebnisse von (1) bis (3) gestatten es, den Graph der Funktion f mit seinen wesentlichen Merkmalen zu skizzieren ($\nearrow$ Bild C 55).

■ 62 Wir untersuchen das Verhalten der gebrochenen rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

(1) Nullstellen und Polstellen

Wir ermitteln zunächst die Nullstellen der Funktionen

$u(x) = x$ und $v(x) = x^2 + 1$.

Die einzige Nullstelle von u ist $x_1 = 0$. Die Funktion v hat keine Nullstellen.
Folglich hat f die Nullstelle $x_1 = 0$, jedoch hat f keine Polstellen ($\nearrow$ Bild C 56 a)).

(2) Lokale Extrempunkte

Wir ermitteln die ersten beiden Ableitungen von f. Es ist

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

und

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)(2x^3-6x)}{(x^2+1)^4}$$
$$= \frac{(2x^3-6x)}{(x^2+1)^3}.$$

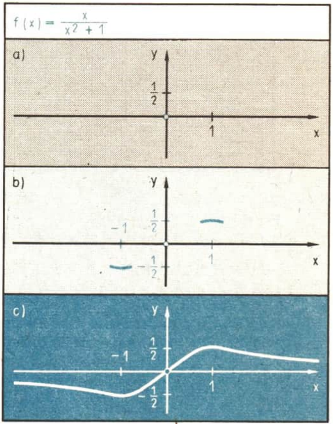


Bild C 56

Die Nullstellen von f' sind die Lösungen der Gleichung $1 - x^2 = 0$, also $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$, da $x^2 + 1$ stets verschieden von Null ist.

$$f''(1) = \frac{-4}{2^3} < 0 \quad \text{und}$$

$$f''(-1) = \frac{4}{2^3} > 0$$

Folglich hat f an der Stelle 1 ein lokales Maximum und an der Stelle -1 ein lokales Minimum.

Die betreffenden Funktionswerte sind

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = -\frac{1}{2}$$

(↗ Bild C 56 b)).

(3) Verhalten im Unendlichen

Aus

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{folgt} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

das heißt, die x-Achse ist Asymptote der Kurve (↗ Bild C 56 c)).

Aus (1), (2) und (3) folgt unmittelbar, daß die lokalen Extremwerte der Funktion f zugleich auch die globalen Extremwerte der Funktion f sind. Damit gilt für alle x:

$$-\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{das heißt, der Wertebereich von } f \text{ ist beschränkt.}$$

Man sagt auch kurz: f ist beschränkt.

■ 63 Wir untersuchen die gebrochene rationale Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Wegen $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$ ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse.

Auf Grund dieser Eigenschaft genügt es, die Funktion für $x \geqq 0$ zu untersuchen.

(1) Nullstellen und Polstellen

Wir bestimmen zunächst die Nullstellen von $u(x) = x^2 + 1$ und $v(x) = x^2 - 1$.
Da u keine Nullstellen hat, hat auch f keine Nullstellen.
Die Nullstellen von v sind $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.
Also sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ Polstellen von f und die Geraden $x = 1$ und $x = -1$ Asymptoten der Kurve.

(2) Lokale Extremwerte

Es ist $f'(x) = \dfrac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$.

Die einzige Nullstelle von f' ist $x_3 = 0$.
Aus dem im Beispiel C 59 untersuchten Monotonieverhalten der Funktion f folgt sofort, daß an dieser Stelle ein lokales Maximum vorliegt. Der Funktionswert an dieser Stelle ist -1.

(3) Verhalten im Unendlichen

Für $x \neq 0$ ist $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.

Ist (x_n) eine beliebige unbeschränkt wachsende Folge, so ist $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{x_n^2}}{1 - \dfrac{1}{x_n^2}} = 1$.

Folglich ist $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$.

Aus Symmetriegründen folgt sofort $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$.

Die Gerade $y = 1$ ist folglich ebenfalls eine Asymptote der Kurve.

Graph der Funktion f

Wir zeichnen zuerst die Asymptoten des Graphen in das Koordinatensystem ein. Die bisher berechneten Werte gestatten jedoch vorerst nur eine sehr grobe Skizze des Kurvenverlaufs. So könnte der Graph von f zum Beispiel wie in Bild C 57 a), aber auch wie in

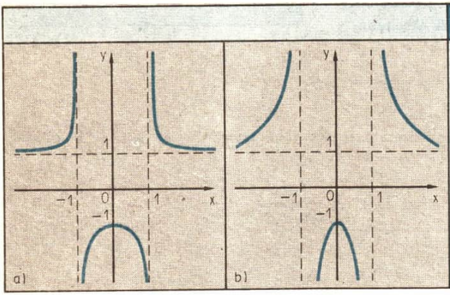


Bild C 57

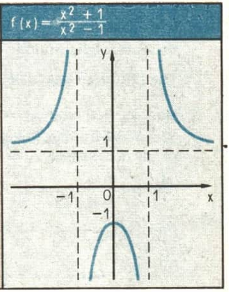


Bild C 58

Bild C 57 b) (Seite 203) aussehen. Der genauere Verlauf ergibt sich aus der Berechnung weiterer Funktionswerte. Wegen der Symmetrieeigenschaft von f können wir uns auf positive Argumente beschränken.

x	0,25	0,5	0,7	1,5	2	3
$f(x)$	−1,13	−1,7	−3,0	2,6	1,7	1,3

Unter Verwendung dieser berechneten Werte erhalten wir den in Bild C 58 (Seite 203) skizzierten Graph von f.

■ 64 Wir untersuchen das Verhalten der Funktion $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$.

(1) **Definitionsbereich von f**

$\sqrt{8 - x^2}$ ist nur für $8 - x^2 \geqq 0$ definiert.
Daraus ergibt sich für x die Einschränkung
$|x| \leqq \sqrt{8}$, das heißt $-\sqrt{8} \leqq x \leqq \sqrt{8}$.

(2) **Nullstellen von f**

Wir ermitteln dazu die Lösungen der Gleichung
$x \cdot \sqrt{8 - x^2} = 0$.
Wir erhalten $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{8} \approx 2{,}828$;
$x_3 = -\sqrt{8} \approx -2{,}828$.

(3) **Lokale Extremwerte von f**

Es ist

$$f'(x) = \sqrt{8 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{8 - x^2}} = \frac{8 - 2x^2}{\sqrt{8 - x^2}}.$$

Hier sind natürlich jene Stellen auszuschließen, für die $\sqrt{8 - x^2} = 0$ ist, also $x = \sqrt{8}$ und $x = -\sqrt{8}$. Die Ableitung f' existiert folglich nur für $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$.

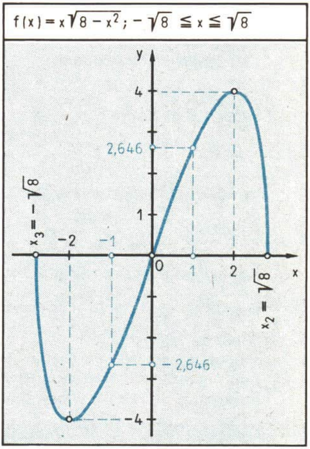


Bild C 59

Die Lösungen der Gleichung $\dfrac{8 - 2x^2}{\sqrt{8 - x^2}} = 0$
sind $x_4 = 2$ und $x_5 = -2$.

Wenn demzufolge lokale Extremwerte von f im Intervall $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$ vorliegen, so an den Stellen $x_4 = 2$ bzw. $x_5 = -2$.

Es ist

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{8 - x^2} - (8 - 2x^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{8 - x^2}}}{8 - x^2}$$

$$= \frac{-4x(8 - x^2) + (8 - 2x^2)\,x}{\sqrt{(8 - x^2)^3}} = 2x \cdot \frac{x^2 - 12}{\sqrt{(8 - x^2)^3}}.$$

Wegen $f''(2) < 0$ nimmt f an der Stelle $x_4 = 2$ ein lokales Maximum an.
Das lokale Maximum ist $f(2) = 2\sqrt{8 - 2^2} = 4$.
Wegen $f''(-2) > 0$ nimmt f an der Stelle $x_5 = -2$ ein lokales Minimum an.
Das lokale Minimum ist $f(-2) = (-2)\sqrt{8 - (-2)^2} = -4$.
Um den Graph genauer skizzieren zu können, errechnen wir noch

$f(1) = 1\sqrt{8-1} = \sqrt{7} \approx 2{,}646$ und $f(-1) = (-1)\sqrt{8-(-1)^2} = -\sqrt{7} \approx -2{,}646$

(↗ Bild C 59).

Zusammenfassung

Kurvenuntersuchungen		
	$f(x) = \frac{1}{6}(3x^4 + 4x^3 - 12x^2)$ (↗ Beispiel C 61)	$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (↗ Beispiel C 63)
Nullstellen (Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$)	$0 = \frac{1}{6}(3x^4 + 4x^3 - 12x^2)$ $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10}$; $x_3 = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{10}$	$f(x) = 0$ genau dann, wenn $u(x) = x^2 + 1 = 0$ und $v(x) = x^2 - 1 \neq 0$. Wegen $x^2 + 1 > 0$ für alle x hat f keine Nullstellen.
Polstellen		Jene Stellen x, für die $v(x) = 0$ und $u(x) \neq 0$ gilt: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Die Geraden $x = 1$ und $x = -1$ sind Asymptoten der Kurve.
Lokale Extrempunkte (↗ Übersicht auf Seite 189)	$f'(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$ $f''(x) = 6x^2 + 4x - 4$ Nullstellen der 1. Ableitung von f: $x_4 = 0$; $x_5 = 1$; $x_6 = -2$ $f''(0) < 0$, $f(0) = 0$ $f''(1) > 0$, $f(1) = -\frac{5}{6}$ $f''(-2) > 0$, $f(-2) = -\frac{16}{3}$ Lokaler Maximumpunkt: $(0; 0)$ Lokale Minimumpunkte: $\left(-2; -\frac{16}{3}\right)$ und $\left(1; -\frac{5}{6}\right)$	$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ Nullstellen von f': $x_3 = 0$ Für $x < 0$ ist $f'(x) > 0$, also f streng monoton wachsend. Für $x > 0$ ist $f'(x) < 0$, also f streng monoton fallend. $f(0) = -1$ Lokaler Maximumpunkt: $(0; -1)$

Verhalten im Unendlichen (↗ Übersicht auf Seite 184)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$
Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse	$x = 0;\ f(0) = 0$	$x = 0;\ f(0) = -1$
Um den genaueren Verlauf des Graphen von f zu skizzieren, sind manchmal noch an einigen geeigneten Stellen die Funktionswerte von f zu berechnen.		

Aufgaben

Untersuchen Sie das Verhalten folgender Funktionen, und skizzieren Sie deren Graphen!

1.↑ a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 22}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(x^5 - \dfrac{19}{3}x^3 - 4x\right)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{4}(x^2 - 4)\sqrt{5 - x}$

2.↑ a) $f(x) = x^3 - x^2 - 11x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{3 - x^2}$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x^4 - 8x^2 + 12)$

d) $f(x) = (x - 2)\sqrt{5 - x}$

27 Extremwertaufgaben

● 42 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck (↗ Bild C 60).

a) Berechnen Sie a aus b und c!
b) Berechnen Sie q aus b und c!
c) Berechnen Sie h aus q und p!
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks aus a und b!

● 43 Gegeben sei die Figur in Bild C 61, in der die Geraden g_1 und g_2 parallel zueinander sind.

a) Berechnen Sie b aus a, c und d!
b) Berechnen Sie b aus e, f und a!

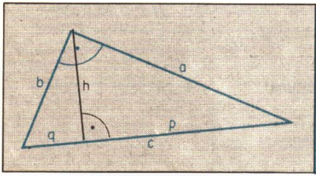


Bild C 60

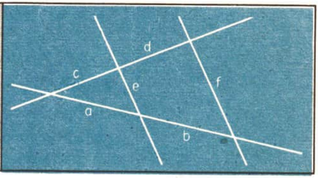


Bild C 61

Die Beispiele C 52 und C 53 aus der Lerneinheit 21 haben uns bereits gezeigt, welche Bedeutung die Berechnung von Extremstellen von Funktionen für die Anwendung der Mathematik hat. Man nennt Aufgaben, die durch die Berechnung von Extremstellen bzw. Extremwerten einer Funktion gelöst werden können, **Extremwertaufgaben.**
Es handelt sich stets darum, für eine Funktion die **globalen Extrema** in einem durch die Aufgabenstellung festgelegten Intervall zu berechnen (↗ Bild C 46 auf Seite 189).
Diese globalen Extrema werden in den meisten Fällen zugleich lokale Extrema sein, nämlich immer dann, wenn sie im Inneren des betreffenden Intervalls angenommen werden. Ist das betreffende Intervall abgeschlossen, müssen wir die berechneten lokalen Extrema mit den Funktionswerten an den Intervallenden vergleichen, um so den größten bzw. kleinsten Funktionswert zu finden.
Mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln können wir nur solche Aufgaben lösen, bei denen das Problem letzten Endes durch eine Funktion beschrieben wird, die nur von einer einzigen Variablen abhängt.[1])

■ 65 Ein Geschoß werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 400\ \mathrm{ms}^{-1}$ aus einem Gewehr senkrecht nach oben geschossen. Welche maximale Höhe erreicht es, wenn man den Luftwiderstand unberücksichtigt läßt?

Lösung:

1. **Ermitteln der Funktion,** die die Höhe des Geschosses in Abhängigkeit von der Zeit und der Anfangsgeschwindigkeit ausdrückt

Aus dem Physikunterricht kennen wir das Weg-Zeit-Gesetz für den senkrechten Wurf nach oben: $s(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2, \quad t \geqq 0.$

Entsprechend der Aufgabenstellung suchen wir den größten Funktionswert von s.

2. **Untersuchen von s auf das Vorhandensein lokaler Extremwerte**

Es ist $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt$ [2]). Aus $v_0 - gt = 0$ folgt $t = \frac{v_0}{g}$.

Wegen $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -g$ hat s an der Stelle $\frac{v_0}{g}$ ein Maximum. Es ist

$$s_{\max} = s\left(\frac{v_0}{g}\right) = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g}.$$

3. **Bestimmen der globalen Extremwerte von s**

Da das Problem durch eine quadratische Funktion beschrieben wird, folgt unmittelbar, daß das errechnete lokale Maximum zugleich das globale Maximum von s sein muß.

Ergebnis:

Bei der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 400\ \mathrm{ms}^{-1}$ beträgt die maximale Höhe, die das Geschoß erreicht, etwa 8000 m, wenn man $g = 10\ \mathrm{ms}^{-2}$ setzt.

Bemerkung:

Die Formel $s_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g}$ hätten wir auch aus der Zahlentafel entnehmen können. Beispiel C 65 zeigt, wie man diese Formel herleiten kann.

---

[1]) In der Praxis begegnen wir vor allem Problemen, die durch Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen beschrieben werden.
[2]) An Stelle von s' schreiben wir hier $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Letztere Schreibweise wird besonders oft in der Physik verwendet.

■ 66 Ein Betrieb soll bei möglichst sparsamem Materialverbrauch allseitig geschlossene quaderförmige Container herstellen, die ein vorgegebenes Volumen haben und deren Breite halb so groß wie ihre Länge ist (↗ Einführungsbeispiel auf Seite 128).

Lösung:

1. **Ermitteln der Funktion,** die die benötigte Menge Blech in Abhängigkeit von den Abmessungen des Quaders beschreibt (↗ Bild C 3).

Die benötigte Menge Blech für den quaderförmigen Behälter wird durch dessen Oberflächeninhalt bestimmt. Sind a, b und c die Kantenlängen des Behälters, so gilt für dessen Oberflächeninhalt A_0 die Gleichung

$$A_0 = 2(ab + bc + ac). \qquad (1)$$

A_0 hängt von a, b und c ab. Unter Verwendung der in der Aufgabenstellung angegebenen Bedingungen versuchen wir, zwei der Variablen durch die dritte auszudrücken, damit wir schließlich A_0 in Abhängigkeit von nur noch *einer* Variablen erhalten. Wir nutzen dabei, daß das Volumen V des Behälters gegeben ist und daß eine Kante des Behälters doppelt so lang wie eine andere Kante ist. Wir haben also als

Nebenbedingungen: $b = \frac{a}{2}$ (2) und $V = a \cdot b \cdot c.$ (3)

Wegen (3) können wir in (1) c durch $\frac{V}{a \cdot b}$ ersetzen und erhalten

$A_0 = 2\left(ab + \frac{b \cdot V}{a \cdot b} + \frac{a \cdot V}{a \cdot b}\right).$ Ersetzen wir nun noch b durch $\frac{a}{2}$, so ist

$$A_0 = 2\left(a \cdot \frac{a}{2} + \frac{V}{a} + \frac{2V}{a}\right) = 2\left(\frac{a^2}{2} + \frac{3V}{a}\right) = a^2 + \frac{6V}{a}.$$

Damit haben wir den Oberflächeninhalt des Behälters in Abhängigkeit von a dargestellt:

$A_0(a) = a^2 + \frac{6V}{a}$. Auf Grund der Aufgabenstellung ist $a > 0$.

2. **Untersuchen von A_0 auf das Vorhandensein lokaler minimaler Werte**

Wir bilden die 1. Ableitung von A_0. Es ist $A_0'(a) = \frac{dA_0}{da} = 2a - \frac{6V}{a^2}$.

Die Nullstellen der 1. Ableitung sind die Lösungen der Gleichung $2a - \frac{6V}{a^2} = 0$.

Durch Auflösen nach a erhalten wir $a = \sqrt[3]{3V}$.

Um zu entscheiden, ob an dieser Stelle ein Minimum vorliegt, bilden wir die 2. Ableitung von A_0. Es ist $A_0''(a) = 2 + \frac{12V}{a^3}$.

Für $a > 0$ ist stets $A_0''(a) > 0$, also auch an der Stelle $\sqrt[3]{3V}$. Damit liegt an dieser Stelle ein lokales Minimum vor.

3. **Bestimmen des globalen Minimums von A_0**

Die Funktion A_0 haben wir nur für $a > 0$ definiert; dort ist sie differenzierbar. Da die Stelle $a = \sqrt[3]{3V}$, an der A_0 ein lokales Minimum hat, die einzige Extremstelle von A_0 im Definitionsbereich ist, muß dieses lokale Minimum zugleich auch das globale Minimum sein. Aus (2) erhalten wir für b:

$$b = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{3V}.$$

Aus (3) erhalten wir schließlich für c:

$$c = \frac{V}{a \cdot b} = \frac{V}{\sqrt[3]{3V} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{3V}} = 2 \cdot \frac{V}{\sqrt[3]{9V^2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{V^3}}{\sqrt[3]{9V^2}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{9}}.$$

Ergebnis:
Der geringste Blechverbrauch ergibt sich, wenn man den Behälter mit den Abmessungen

$a = \sqrt[3]{3V}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt[3]{3V}$ und $c = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{9}}$ baut.

■ 67 Gesucht ist ein Rechteck mit folgenden Bedingungen:
a) Der Flächeninhalt A soll 1 m² betragen;
b) Keine Seite des Rechtecks soll länger als 2 m sein.
Daß es solche Rechtecke gibt, ist offensichtlich. So erfüllt zum Beispiel ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 m die Bedingungen. Auch ein Rechteck mit den Seitenlängen 1,6 m und 0,625 m genügt den gestellten Anforderungen.
Gibt es unter den Rechtecken, die die Bedingungen a) und b) erfüllen, ein Rechteck mit größtem Umfang?
Lösung:

1. Ermitteln der Funktion

Bezeichnen wir die Maßzahl des Umfangs des Rechtecks mit U und die Maßzahlen der Seitenlängen mit a und b, so ist $U = 2a + 2b$.
Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung, daß der Flächeninhalt des Rechtecks 1 m² betragen soll, können wir die Variable b durch a ausdrücken.
Es ist $a \cdot b = 1$, also

$b = \frac{1}{a}$. Damit erhalten wir

$U(a) = 2a + \frac{2}{a} = 2\left(a + \frac{1}{a}\right)$, wobei auf Grund der Voraussetzungen $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 2$ gilt.[1]

2. Untersuchen von U auf das Vorhandensein lokaler maximaler Werte

Es ist

$$U'(a) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a} = 2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right).$$

Die einzige Nullstelle von U', die im betrachteten Intervall liegt, ist $a_1 = 1$.

Aus der 2. Ableitung $U''(a) = 2 \cdot \frac{2}{a^3} = \frac{4}{a^3}$ folgt $U''(1) > 0$. Also hat U an der Stelle 1 ein lokales Minimum. Ein lokales Maximum hat die Funktion U nicht.

3. Bestimmen des globalen Maximums von U

Der größte Funktionswert kann nur an einem der Intervallenden angenommen werden.
Es ist

$$U\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 5 \quad \text{und} \quad U(2) = 2\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 5.$$

[1]) Wenn $a < \frac{1}{2}$ ist, so folgt aus $b = \frac{1}{a}$ sofort $b > 2$ im Widerspruch dazu, daß keine Seite des Rechtecks länger als 2 m sein soll.

Ergebnis:
Unter den gegebenen Bedingungen hat dasjenige Rechteck den größten Umfang, dessen Seitenlängen 2 m und 0,5 m betragen.

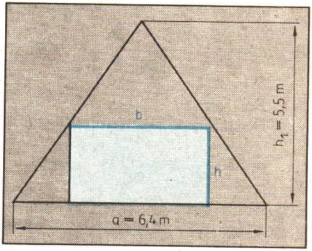


Bild C 62

● 44 Der Dachboden eines Einfamilienhauses soll ausgebaut werden. Sein Querschnitt ist ein gleichschenkliges Dreieck (↗ Bild C 62). Wie müßten die Länge b und die Höhe h des Zimmers gewählt werden, wenn der vorhandene Raum bei rechteckigem Zimmerquerschnitt maximal ausgenutzt werden soll?
Lösungshinweis: Geben Sie den Flächeninhalt A des Zimmerquerschnitts als Funktion von h an! Verwenden Sie dabei den Strahlensatz!

■ 68 Zwei Punkte A und B einer geradlinig verlaufenden Straße seien $a = 650$ m voneinander entfernt. Ein Ortsteil C habe den Abstand $\overline{BC} = b = 180$ m von der Straße. Der Ortsteil soll Gasanschluß bekommen, beginnend im Punkt A. Die Baukosten mögen längs der Straße $k_1 = 72$ Mark je Meter, im Gelände jedoch $k_2 = 85$ Mark je Meter betragen. An welcher Stelle muß beim Bau von der Straße geradlinig abgezweigt werden, damit die Baukosten möglichst gering bleiben?

Lösung:

1. **Ermitteln der Funktion**

Es sei D die Stelle auf $\overline{AB}$ (↗ Bild C 63), an der die Gasleitung geradlinig von der Straße abgezweigt wird. Es sei

$\overline{DB} = x$, dann ist $\overline{AD} = a - x$.

Für die Baukosten erhalten wir die Gleichung

$k = (a - x)\,k_1 + y \cdot k_2.$

Mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS können wir y durch x ausdrücken. Es ist

$y = \sqrt{b^2 + x^2}.$

Damit erhalten wir

$k(x) = (a - x)\,k_1 + \sqrt{b^2 + x^2}\,k_2,$

wobei $0 \leqq x \leqq a$ gilt.

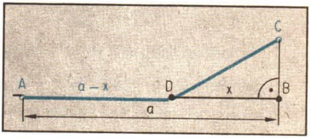


Bild C 63

2. **Untersuchen von k auf das Vorhandensein lokaler Minima**

Es ist $k'(x) = -k_1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{b^2 + x^2}}\,k_2 = -k_1 + \dfrac{k_2 x}{\sqrt{b^2 + x^2}}.$

Die Nullstellen von k' sind die Lösungen der Gleichung

$$k_1 = \frac{k_2 x}{\sqrt{b^2 + x^2}} \quad \text{bzw.} \quad k_1\sqrt{b^2 + x^2} = k_2 x.$$

Durch Quadrieren erhalten wir die Gleichung

$$k_1^2(b^2 + x^2) = k_2^2x^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2(k_2^2 - k_1^2) = b^2k_1^2.$$

Wegen $x \geqq 0$ hat diese Gleichung die Lösung

$$x_0 = \frac{bk_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}.$$

Die Probe zeigt, daß x_0 auch Lösung der Ausgangsgleichung und damit die einzige Nullstelle von k' ist. Es ist

$$k_1\sqrt{b^2 + x_0^2} = k_1\sqrt{b^2 + \frac{b^2k_1^2}{k_2^2 - k_1^2}} = k_1\sqrt{\frac{b^2(k_2^2 - k_1^2) + b^2k_1^2}{k_2^2 - k_1^2}}$$

$$= k_1\frac{\sqrt{b^2k_2^2}}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} = k_2\frac{bk_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} = k_2x_0.$$

Um zu entscheiden, ob k an der Stelle x_0 ein lokales Minimum hat, bilden wir die 2. Ableitung von k. Es ist

$$k''(x) = \frac{k_2\sqrt{b^2 + x^2} - k_2x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{b^2 + x^2}}}{b^2 + x^2} = \frac{k_2(b^2 + x^2) - k_2x^2}{\sqrt{b^2 + x^2}\,(b^2 + x^2)}$$

$$= \frac{k_2b^2}{\sqrt{b^2 + x^2}\,(b^2 + x^2)} > 0 \text{ für jedes } x.$$

Folglich hat k an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

3. **Bestimmen des globalen Minimums von k**

Durch Einsetzen der gegebenen Größen finden wir $x_0 \approx 287$ m und

$$k(x_0) = (a - x_0)\,k_1 + \sqrt{b^2 + x_0^2}\,k_2 \approx 54900 \text{ M}.$$

Der Vergleich des Funktionswertes $k(x_0)$ mit den Funktionswerten

$$k(0) = ak_1 + bk_2 = 62100 \text{ M} \quad \text{und} \quad k(a) = \sqrt{b^2 + a^2}\,k_2 \approx 57300 \text{ M}$$

zeigt, daß das lokale Minimum $k(x_0)$ auch das globale Minimum von k in dem betrachteten Intervall ist.

Ergebnis:
Um die Kosten für den geforderten Gasanschluß möglichst gering zu halten, muß die Gasleitung etwa 287 m von B entfernt von der Straße abgezweigt werden.

Zusammenfassung

Beim **Lösen von Extremwertaufgaben** sind folgende Schritte zu beachten.

(1) Ermitteln einer Funktion,
die das betreffende Problem beschreibt, und des Definitionsbereiches der Funktion (entsprechend den durch das Problem gegebenen Bedingungen)
Wenn in der Funktionsgleichung mehrere Variable auftreten, so unter Verwendung der in der Aufgabenstellung gegebenen Nebenbedingungen alle Variablen bis auf eine durch diese eine ersetzen (zum Beispiel Flächeninhalts- oder Volumenformel, Strahlensatz, Kathetensatz verwenden)

(2) Untersuchen der betreffenden Funktion auf das Vorhandensein lokaler Extremwerte

(3) **Bestimmen des gesuchten globalen Extremwertes der betreffenden Funktion,** das heißt: Entscheiden, ob einer der gefundenen lokalen Extremwerte das gesuchte globale Extremum ist beziehungsweise ob dieses in den Randpunkten des Intervalls angenommen wird.

(4) **Formulieren des Antwortsatzes**

Aufgaben

1. Aus einem 4,80 m langen Stück Winkeleisen soll das Kantengerüst für ein Aquarium hergestellt werden. Die Kantenlängen der Bodenfläche sollen im Verhältnis 2 : 3 stehen.
Welche Abmessungen muß das Aquarium haben, damit sein Volumen möglichst groß wird?

2. Das Kantengerüst eines quaderförmigen Transportkäfigs soll aus 36 m Winkeleisen hergestellt werden.
Bei welchen Abmessungen für Länge, Breite und Höhe erhält man das größte Volumen des Käfigs, wenn dessen Höhe halb so groß wie die Länge sein soll?

3. Von allen geraden Kreiskegeln, deren Mantellinien $s = 12$ cm lang sind, wird derjenige mit dem größten Volumen gesucht.
Berechnen Sie für diesen Kegel Höhe und Grundkreisradius!

4. Welcher Kreiszylinder hat bei gegebenem Oberflächeninhalt A_0 das größte Volumen?
Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen von Grundkreisradius und Höhe!

5. Es soll ein Sportplatz, bestehend aus einem möglichst großen rechteckigen Spielfeld und einer 400-m-Laufbahn, angelegt werden. Das zur Verfügung stehende Gelände läßt aber höchstens eine Spielfeldbreite von 50 m zu.
Wie ist der Sportplatz anzulegen? Welchen Flächeninhalt hat das Spielfeld?

6. Mit 100 m Maschendraht soll ein rechteckiges Tiergehege eingezäunt werden, und zwar
a) freistehend,
b) mit einer Seite an eine Mauer angrenzend,
c) mit zwei Seiten in eine Mauerecke eingebaut.
Bei welchen Abmessungen des Rechtecks ergibt sich jeweils die größte Gehegefläche?
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte bei a), b) und c)?
Fertigen Sie maßstabgerechte Skizzen für die drei Fälle an!

7. Einem Halbkreis soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt so einbeschrieben werden, daß eine Rechteckseite auf dem den Halbkreis begrenzenden Kreisdurchmesser liegt.
In welchem Verhältnis müssen die Längen der Rechteckseiten zueinander stehen?

8. Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Funktionswert, den die Funktion $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ im Intervall $\langle -1; 2\rangle$ annimmt!

Stammfunktionen

28 Umkehrung der Differentiation

Durch die Differentiation wird einer gegebenen differenzierbaren Funktion f die Funktion f' zugeordnet.
Umgekehrt ist es bei vielen Problemstellungen der Mathematik und ihren Anwendungen notwendig, zu einer gegebenen Funktion f eine Funktion F zu ermitteln, die f als Ableitung hat.
Diese Fragestellung tritt zum Beispiel auf, wenn zu der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion einer Bewegung die Weg-Zeit-Funktion dieser Bewegung bestimmt werden soll.

■ 69

f	F
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = 1$	$F(x) = x + 7$
$f(x) = x^{-2}$	$F(x) = -x^{-1}$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$

● 45 Überprüfen Sie durch Differenzieren, daß für die im Beispiel C 69 genannten Funktionen $F' = f$ gilt!
Bilden Sie selbst weitere Beispiele!

▶ 6

DEFINITION

Es seien f und F in einem Intervall I definierte Funktionen, F sei in I differenzierbar. Ist $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in I$, so heißt F eine *Stammfunktion* von f im Intervall I.

Bemerkung: Gilt $F'(x) = f(x)$ für jedes x des gemeinsamen Definitionsbereiches von F und f, so nennen wir F **eine Stammfunktion von f.**

● 46 Ermitteln Sie – falls möglich – für folgende Funktionen je eine Stammfunktion!

a) $f(x) = 4x$ b) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$

Für welche Funktionen gibt es eine Stammfunktion?
Kann es zu einer Funktion mehrere Stammfunktionen geben?

Von diesen beiden Fragen ist die erste zweifellos die schwierigere. Wir stellen diese Frage vorläufig zurück. Im Kapitel D werden wir zeigen, daß für jede im Intervall I stetige Funktion eine Stammfunktion in I existiert.
Wir wenden uns der zweiten Frage zu.

● 47 a) Zeigen Sie, daß die Funktionen $F_1(x) = x^2 - 2x - 2$, $F_2(x) = x^2 - 2x + 0{,}5$ und $F_3(x) = x^2 - 2x + \sqrt{3}$ Stammfunktionen der Funktion $f(x) = 2x - 2$ sind!
b) Skizzieren und vergleichen Sie die Graphen der Funktionen F_1, F_2, F_3!

c) Wodurch unterscheiden sich die angegebenen Stammfunktionen voneinander?
d) Es sei F eine Stammfunktion von f im Intervall I. Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl c ist die Funktion $F + c$ ebenfalls eine Stammfunktion von f!

Aus dem Ergebnis des Auftrages C 47 folgt:

> Existiert zu einer gegebenen Funktion f in einem Intervall I eine Stammfunktion F, so gibt es unendlich viele solche Stammfunktionen.

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß F *eine* Stammfunktion von f ist. Aus dem Ergebnis des Auftrags C 47 d) entnehmen wir, daß dann auch die Funktion $F + c$ für jedes reelle c eine Stammfunktion von f ist.

Gibt es außer den genannten Stammfunktionen noch weitere Stammfunktionen von f?

Der Beantwortung dieser Frage dienen die beiden folgenden Aussagen (*) und (**).

(*) **f ist eine konstante Funktion genau dann, wenn für jedes x gilt: $f'(x) = 0$.**

Beweis der Aussage (*):

Die Aussage (*) besteht aus zwei Teilaussagen:

a) Wenn f eine konstante Funktion ist, so gilt $f'(x) = 0$ für jedes x.
b) Wenn $f'(x) = 0$ für jedes x gilt, so ist f eine konstante Funktion.

Daß die Teilaussage a) gilt, wissen wir bereits, denn die Ableitung jeder konstanten Funktion ist Null.

Wir beweisen die *Aussage b)*.

Voraussetzung: Für jedes x gilt $f'(x) = 0$.

Behauptung: f ist eine konstante Funktion.

Wir zeigen, daß die Funktionswerte von f an beliebigen Stellen a und b übereinstimmen, das heißt, wie man auch Zahlen a und b wählt, stets ist $f(a) = f(b)$.

Dazu wenden wir den Mittelwertsatz (↗ Satz C 8) an. Sind nämlich a und b beliebige reelle Zahlen mit $a < b$, so gibt es nach dem Mittelwertsatz eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \qquad (1)$$

Aus (1) folgt durch Multiplikation mit $(b - a)$ sofort $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Da nun nach Voraussetzung f' an jeder Stelle den Wert Null hat, ist $f'(\xi) = 0$, also

$$f(b) - f(a) = 0,$$

woraus

$$f(b) = f(a)$$

folgt. Da a und b beliebig gewählt waren, stimmen die Funktionswerte von f an allen Stellen überein, das heißt aber: f ist eine konstante Funktion. Damit ist die Aussage (*) bewiesen.

(**) **f und g seien differenzierbare Funktionen.**
Wenn **$f' = g'$,**
so **unterscheiden sich f und g nur um eine Konstante.**

Bemerkungen:

a) $f' = g'$ besagt, daß die Funktionen f' und g' ein und denselben Definitionsbereich haben und für alle x aus diesem Definitionsbereich $f'(x) = g'(x)$ gilt.

b) Wenn es eine reelle Zahl c gibt, so daß für alle x gilt $f(x) = g(x) + c$, so sagt man: f und g unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Beweis der Aussage (**):

Voraussetzung: Es ist $f' = g'$.

Behauptung: Es gibt eine Konstante c mit $f(x) = g(x) + c$ für alle x.

Wir finden eine solche Konstante dadurch, daß wir Aussage (*) auf die Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ anwenden. Für ihre Ableitung gilt nach Voraussetzung

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

für alle x. Aus Aussage (*) folgt dann, daß h eine konstante Funktion ist. Also gibt es eine reelle Zahl c mit $h(x) = c$ für alle x. Damit gilt

$$f(x) - g(x) = c \quad \text{bzw.} \quad f(x) = g(x) + c.$$

Nun können wir die zuletzt gestellte Frage (↗ Seite 213) beantworten.
Es sei F eine Stammfunktion von f. Ist G eine andere Stammfunktion von f, so gilt

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

für jedes x des Definitionsbereiches von f. Nach Aussage (**) unterscheiden sich F und G nur um eine Konstante, das heißt, es gibt eine Zahl c derart, daß für jedes x aus dem Definitionsbereich gilt:

$$G(x) = F(x) + c.$$

▷ 11

SATZ

Kennt man wenigstens eine Stammfunktion F einer gegebenen Funktion f, so kennt man bereits die Menge aller Stammfunktionen von f. Diese Menge enthält genau diejenigen Funktionen, die man aus der Funktion F durch Addition beliebiger Konstanten c erhält.

■ 70 Gibt es eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = 2x$, die an der Stelle 1 den Funktionswert (-3) hat?

Lösung:

Die Funktion $F(x) = x^2$ ist *eine* Stammfunktion der Funktion f. Wegen $F(1) = 1$ enthält F nicht das geordnete Paar $[1; -3]$. Alle anderen Stammfunktionen von f erhält man aus F durch Addition einer Konstanten. Wir haben also zu prüfen, ob es eine Konstante c gibt derart, daß $x^2 + c$ an der Stelle 1 den Wert (-3) hat, das heißt, ob die Gleichung

$1^2 + c = -3$ eine Lösung hat.

Die Zahl (-4) ist Lösung der Gleichung und damit erfüllt die Funktion $G(x) = x^2 - 4$ die obengenannten Bedingungen.

Aufgaben

Geben Sie jeweils drei verschiedene Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen an!

1.↑ a) $f(x) = x^2$

b) $f(t) = \dfrac{1}{t^2} + 6$

2.↑ a) $f(x) = 3x^2$

b) $g(z) = z^2 - \dfrac{1}{z^2}$

3. Geben Sie drei verschiedene Funktionen f mit der Ableitung $f'(x) = 2x - 2$ an, und stellen Sie diese graphisch in ein und demselben Koordinatensystem dar!

Bestimmen Sie je eine Funktion f, die den angegebenen Bedingungen genügt!

4.↑ a) $f'(x) = \frac{x}{2} + 6$; $f(1) = 4$

b) $f''(x) = 4$; $f(0) = 2, f(1) = 0$

c) $f'(x) = 1$; $f(1) = 1$

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f(1) = 1$

5.↑ a) $f'(x) = \frac{x^2}{6} + 2x - 3$; $f(0) = 0$

b) $f''(x) = \frac{x}{2}$; $f(0) = 2$

c) $f'(x) = ax$; $a \in R$

d) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f(0) = -2$

29 Regeln für das Aufsuchen von Stammfunktionen

Da das Aufsuchen von Stammfunktionen die Umkehrung des Differenzierens ist, erhalten wir aus den uns bekannten Differentiationsregeln Regeln für das Aufsuchen von Stammfunktionen. So erhält man beispielsweise folgende **Regeln:**

(a) Ist F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g, so ist $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$.[1])

(b) Ist F eine Stammfunktion von f und c eine beliebige reelle Zahl, so ist $c \cdot F$ eine Stammfunktion von $c \cdot f$.

(c) Für jede rationale Zahl r mit $r \neq -1$ ist die Funktion $F(x) = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1}$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = x^r$.[2])

● 48 Beweisen Sie die Regeln (a), (b) und (c)!

■ 71

Gegebene Funktion f	Eine Stammfunktion F von f
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4$
$f(x) = \frac{5}{2}x^3$	$F(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4}x^4 = \frac{5}{8}x^4$
$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$	$F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$
$f(x) = 4x^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{5}$	$F(x) = x^4 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x} - \sqrt{5} \cdot x$

[1]) Man beachte, daß diese Regel nur sinnvoll ist, wenn f und g einen gemeinsamen Definitionsbereich haben.
[2]) Man beachte die notwendigen Einschränkungen für x in Abhängigkeit vom Exponenten r.

Aufgaben

Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils drei Stammfunktionen an!

1.↑ a) $f(x) = x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$ c) $f(x) = -3x^{-3}$ d) $f(x) = 0$

2.↑ a) $f(x) = x - 5$ b) $f(x) = \pi - \frac{2}{3}x$ c) $f(x) = 4{,}2x^{-2}$ d) $f(x) = \sqrt{3}$

Geben Sie zu jeder der folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an!

3.↑ a) $f(x) = n \cdot x^{n-1}$ $(n > 0)$
b) $f(t) = t^3 + t^2 + t + 1$
c) $g(h) = (h^3 + 1)\,h^2$
d) $f(x) = \frac{a}{bx^n}$ $(n > 1,\ x \neq 0,\ b \neq 0)$
e) $f(t) = \sqrt{a} - t + \sqrt{b}$ $(a > 0,\ b > 0)$

4.↑ a) $f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(n > 1,\ x \neq 0)$
b) $f(x) = x(x^2 + 2)$
c) $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
d) $f(z) = (z + 3)\left(z^2 - \frac{1}{3}z + 3\right)$
e) $f(a) = ax^2 + a^2x^3 + x^4$

5.↑ a) $f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$
b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$
c) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$ $(x > 0)$
d) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2}$ $(x > 0)$

6.↑ a) $f(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$
b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$
c) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$
d) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^5}}$ $(x > 0)$

7. Verallgemeinern Sie die Regel (a) auf n Funktionen (n beliebige natürliche Zahl, $n \geqq 2$), und beweisen Sie diese Regel durch vollständige Induktion!

8. Begründen Sie, daß es zu jeder ganzen rationalen Funktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ eine Stammfunktion gibt, die wiederum eine ganze rationale Funktion ist!

Ermitteln Sie eine Stammfunktion F von f, die folgenden Bedingungen genügt!

9.↑ a) $f(x) = 3$; $F(0{,}5) = 7$
b) $f(x) = \frac{3}{5}x^2 - 0{,}2x + 1$; $F(0) = 0$
c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$; $F(1) = \frac{4}{5}$

10.↑ a) $f(x) = -\sqrt{5}$; $F(\sqrt{2}) = -\sqrt{7}$
b) $f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{3}$; $F(\pi) = \pi$
c) $f(x) = x\sqrt{x}$; $F(2) = \frac{2}{5}\sqrt{2}$

Übungen und Anwendungen

Bestimmen Sie unter Verwendung der Ihnen bekannten Differentiationsregeln die 1. Ableitung folgender Funktionen!

1.↑ a) $f(x) = x^2(1 - x^2)$
b) $f(x) = (x^2 - ax)^2$

2.↑ a) $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
b) $f(x) = (x^3 - a)(x^3 + b)$

c) $f(x) = \frac{5}{6-x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

e) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$

f) $f(x) = (4x^5 - 20x + 1)^4$

c) $f(x) = \frac{-7x}{3 - 10x}$

d) $f(x) = \frac{x+a}{x-a}$

e) $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2}{x^2 + 12x + 36}$

f) $f(x) = [(x^2 + x)(x^2 - 5x + 1)]^3$

3.↑ a) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$

b) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

4.↑ a) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$

b) $f(x) = \frac{a + b\sqrt{x}}{c + dx}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{9x^2 - 25}}$

5. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{4} - 5x$.

a) Berechnen Sie den Differenzenquotienten von f an der Stelle $x_0 = 0$, und ermitteln Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$!
b) Berechnen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung von f!
c) Berechnen Sie die Zahl $f'(2) - f'(-2)$!
d) Berechnen Sie die Nullstellen der 1. Ableitung von f!
e) Für welche Zahlen x ist $f'(x) = f''(x)$?
f) Zeigen Sie, daß für alle x gilt: $f(x) \cdot f'''(x) + 5 \cdot f''(x) = \frac{3}{8}x^3$!

6. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + \frac{5}{x}$.

a) Berechnen Sie die erste, zweite, dritte und vierte Ableitung von f!
b) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und Polstellen!
c) Berechnen Sie die Nullstellen der 1. Ableitung von f!
d) Berechnen Sie die Zahlen $f(2)$, $f'(1{,}2)$, $f''(-2)$, $f^{(4)}(1)$!

7. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^3$.
a) Welchen Anstieg hat der Graph von f an der Stelle 0?
b) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f und die Tangente an diesen Graph im Punkt $P(0; 0)$! Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f bezüglich der Tangente in einer Umgebung von 0!
c) Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graph von f im Punkt mit der Abszisse $x = 2$ an!

8. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$.
a) Welchen Winkel bildet die Tangente an den Graph von f im Punkt $P(-2; f(-2))$ mit der positiven x-Achse?
b) Geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an!
c) Berechnen Sie die Schnittpunkte dieser Tangente mit den Koordinatenachsen!

9. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-1}$.
a) Berechnen Sie diejenigen Punkte, in denen die Tangente an den Graph von f mit der positiven x-Achse den Winkel 45° bildet!

b) Zeichnen Sie den Graph von f und die betreffenden Tangenten!
c) Geben Sie für die betreffenden Tangenten eine Gleichung an!

10. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3x + 5$.
a) Berechnen Sie die Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von f den Anstieg 1 bzw. -3 hat!
b) Bestimmen Sie für die berechneten Punkte jeweils eine Gleichung der Tangente an den Graph von f!
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der betreffenden Tangenten!
d) Zeichnen Sie den Graph von f und die Tangenten an den Graph von f in den berechneten Punkten! Lesen Sie aus der Zeichnung Näherungswerte für die Winkel ab, die die Tangenten mit der positiven x-Achse bilden!

11. Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$.
Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Parabel $y = x^2 + x + 1$, die dem Graph von f parallel ist!

12. Es sei g eine an der Stelle 0 differenzierbare Funktion.
a) Zeigen Sie, daß die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot g(x)$ an der Stelle 0 ebenfalls differenzierbar ist!
b) Berechnen Sie $f'(0)$!

13. Gegeben sei $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$.
a) Zeigen Sie, daß $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ ist!
b) Überprüfen Sie an Hand der unter a) gewonnenen Formel, ob die Funktion $g(x) = \dfrac{2x-3}{5x+1}$ $\left(x \neq -\dfrac{1}{5}\right)$ monoton wachsend bzw. fallend ist!
c) Welcher Bedingung muß a genügen, damit die Funktion $g(x) = \dfrac{ax+4}{2x+5}$ $\left(x \neq -\dfrac{2}{5}\right)$ monoton fallend ist?

14. Weisen Sie nach, daß für die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{2}$ folgende Gleichung gilt: $1 + (f')^2 = 2f \cdot f''$!

15. Zeigen Sie, daß für die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ folgende Gleichung gilt:
$f(x) = \dfrac{1-x^4}{4x} \cdot f'(x)$ $(x \neq 0, x^2 \neq 1)$!

16. Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x^2 - 2)(1 + x)^3$.
a) Stellen Sie fest, welche Ableitungen der Funktion f für alle x Null sind!
b) Wie oft muß man f ableiten, um eine ganze rationale Funktion 2. Grades zu erhalten?
c) Bestimmen Sie n derart, daß der Graph der n-ten Ableitung von f eine Gerade ist, die nicht parallel zur x-Achse ist!
d) Berechnen Sie $f'(x)$!
e) Berechnen Sie die Nullstellen der 1. Ableitung von f!

17. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $(x \neq 1)$.
a) Berechnen Sie diejenigen Stellen x, für die $f'(x) = 1$ gilt!
b) Berechnen Sie die zweite, dritte und vierte Ableitung der Funktion f!

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n > 1$ $f^{(n)}(x) = n!\,(1 - x)^{-n-1}$ gilt!

18. Berechnen Sie, nach welcher Zeit ein Körper aus 120 m Höhe im freien Fall den Erdboden erreicht (der Luftwiderstand soll unberücksichtigt bleiben, die Fallbeschleunigung auf der Erde $10\ \mathrm{ms}^{-2}$ gesetzt werden)?
Welche Geschwindigkeit hat der Körper beim Auftreffen auf den Erdboden?

19. Es sei $s = f(t)$ die Weg-Zeit-Funktion einer geradlinigen Bewegung.

a) Begründen Sie: Ist f eine differenzierbare Funktion, so ist die Funktion $v = f'(t)$ die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion dieser Bewegung!

b) Geben Sie die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion für den freien Fall an!

c) Ist die Funktion f' an der Stelle t_1 differenzierbar, so ist $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f'(t_1 + \Delta t) - f'(t_1)}{\Delta t}$ die Augenblicksbeschleunigung zum Zeitpunkt t_1.
Zeigen Sie, daß die Beschleunigung beim freien Fall konstant ist!

d)* Bilden Sie für die in Aufgabe 2.* der Lerneinheit 2 auf Seite 137 beschriebene Bewegung die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion, und zeichnen Sie das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der Bewegung!

e)* Ist die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion der unter d)* betrachteten Bewegung an der Stelle $t = 2s$ differenzierbar?

f) Es sei $f(t) = at^2 + bt + c$ die Weg-Zeit-Funktion eines sich auf geradliniger Bahn mit konstanter Beschleunigung bewegenden Körpers.
Bestimmen Sie a und b, wenn bekannt ist, daß $c = 5$ m und im Zeitpunkt $t = 2\,s$ die Geschwindigkeit $15\ \mathrm{ms}^{-1}$ und die Beschleunigung $3\ \mathrm{ms}^{-2}$ beträgt!

20.[1] Die Flugbahn einer Bombe im luftleeren Raum kann (unter vereinfachten Bedingungen) durch die Funktion f mit $f(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2}x^2 + h$ beschrieben werden. Dabei ist x die waagerechte Entfernung der Bombe vom Abwurfort, $f(x)$ die Höhe der Bombe über dem ebenen Gelände, v_0 die Geschwindigkeit des Flugzeuges, g die Erdbeschleunigung und h die Höhe des Flugzeuges.

a) An welcher Stelle trifft die Bombe auf dem Gelände auf?

b) Welchen Anstieg hat die Flugbahn an der Stelle, an der die Bombe auf dem Gelände auftrifft?

c) Berechnen Sie die betreffenden Werte für $h = 1000$ m und $v_0 = 800\ \mathrm{kmh}^{-1}$!

d) Zeichnen Sie den Graph von f für die unter c) angegebenen Werte!

21.[1] Die Flugbahn einer Luft-Boden-Rakete werde durch die Funktion f mit $f(x) = -0{,}01\,x^2 + 0{,}6x + 15$ beschrieben.
Gibt x die waagerechte Entfernung der Rakete vom Abschußort in Kilometer an, so ist $f(x)$ die Höhe über dem ebenen Gelände in Kilometer.

a) In welcher Höhe wurde die Rakete gestartet?

b) An welcher Stelle trifft die Rakete auf?

c) Unter welchem Winkel trifft sie auf?

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Gipfelpunktes der Flugbahn!

e) Zeichnen Sie den Graph der Funktion!

[1]) Entnommen aus: FUCHS, S., u. a.: Elementarmathematik Hinweise, Formeln und Aufgaben zur Vorbereitung auf das Studium an einer Militärakademie. Studienmaterial Dresden: Militärakademie Friedrich Engels 1974

22. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$.
a) Bestimmen Sie diejenigen Stellen, an denen die Funktion f nicht stetig ist!
b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f bei Annäherung an diese Stellen!

23. Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Funktionswert der Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 3$ im Intervall $\langle -1{,}5; 2{,}5 \rangle$!

24. Weisen Sie nach, daß für die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ gilt:
a) $f(-2) = f(3)$; b) f hat im Intervall $(-2; 3)$ ein lokales Extremum!

25. Es sei $f(x) = x^3 - px + q$.
Geben Sie Bedingungen für p und q derart an, daß f sowohl ein lokales Maximum als auch ein lokales Minimum hat! Berechnen Sie die Extremstellen!

Berechnen Sie die Extremstellen folgender Funktionen (falls solche existieren)!

26.↑ a) $f(x) = x^3 - 3x^2$
b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$
c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$
d) $f(x) = \frac{x^3}{(x - 5)^2}$
e) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$

27.↑ a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$
b) $f(x) = x^4 - \frac{x}{2} + \frac{5}{6}$
c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$
d) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9}$
e) $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 9}$

28.↑ a) $f(x) = x\sqrt{x + 3}$
b) $F(a) = a\sqrt{4r^2 - a^2}$; $0 \leqq a \leqq 2r$

29.↑ a) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$
b) $g(b) = 2b + 6 - \sqrt{b^2 - 2{,}25}$; $b \geqq 1{,}5$

30. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen f im Intervall $\langle 0; 4 \rangle$ monoton sind!
a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$
b) $f(x) = \sqrt{x}$
c) $f(x) = 36 - 10x - 9x^2 + 3x^3$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x(1 - x)}$

31. Berechnen Sie den größten und den kleinsten Funktionswert von $f(x) = x^3 - 9x$ im Intervall $\langle -4; +1 \rangle$! Zeichnen Sie den Graph von f im genannten Intervall!

Bestimmen Sie – soweit vorhanden – Nullstellen Polstellen, lokale Extremstellen und das Verhalten im Unendlichen der folgenden Funktionen f, und zeichnen Sie jeweils den Graph von f!

32.↑ a) $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$
b) $f(x) = \frac{1}{10}(x^4 - 13x^2 + 36)$
c) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2}$
d) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 8}$

33.↑ a) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 10$
b) $f(x) = \frac{x^4}{16} + \frac{5x^2}{2} + 9$
c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4}$
d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$

34. Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen und lokalen Extremwerte der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$ b) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$

35. Bestimmen Sie den Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, lokale Extremwerte und das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ und skizzieren Sie ihren Graph!

36. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.
a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f!
b) Berechnen Sie die Nullstellen von f!
c) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extremwerte!
d) Berechnen Sie die Anstiege des Graphen von f an den Stellen 1; 4; 6,25; 10!
e) Skizzieren Sie den Graph von f!

37. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten sowie die lokalen Extremstellen von f!

a) $f(x) = (x + 2)(x - 3)^2$ b) $f(x) = (x - 1)^2(x - 6)$

38. Für welche positive Zahl x ist die Differenz $x - x^3$ am größten?

39. Für welche positive Zahl x ist die Summe $x + \dfrac{1}{x}$ am kleinsten?

40. Die Zahl 8 soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß (falls möglich)
a) das Produkt; b) die Summe der Quadrate;
c) die Differenz der Quadrate; d) die Summe der dritten Potenzen;
e) die Differenz der dritten Potenzen
der beiden Summanden einen Extremwert annimmt.

41. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = |x^2 - 1|$.
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f!
b) Begründen Sie, daß die Funktion f an den Stellen 1 und -1 nicht differenzierbar ist!
c) Geben Sie die lokalen Extrema der Funktion f an!
d) Hat die Funktion globale Extrema?

42. Einem gleichseitigen Dreieck soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden, wobei eine Rechteckseite auf einer Dreieckseite liegen soll (↗ Bild C 64).

43. Einem geraden Kreiskegel mit dem Radius R und der Höhe H soll ein Kreiszylinder mit möglichst großem Volumen einbeschrieben werden (↗ Bild C 65).

44. Wählen Sie unter allen Kreissektoren mit dem Umfang U denjenigen mit dem größten Flächeninhalt aus!

45. Der Querschnitt eines 25 m langen Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis (↗ Bild C 66). Der Umfang des Querschnitts beträgt 18 m. Wie ist der Radius des Halbkreises zu wählen, damit das Volumen des Tunnels möglichst groß wird?

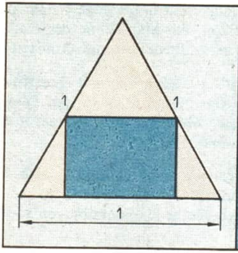


Bild C 64

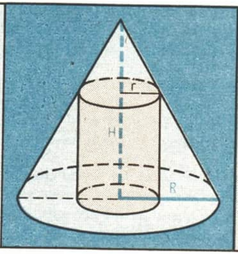


Bild C 65

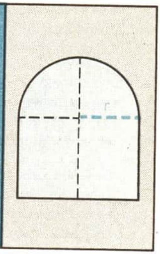


Bild C 66

46. Man zerlege eine 20 cm lange Strecke so in zwei Teile, daß der Flächeninhalt der aus den Teilstrecken konstruierten Rechteckflächen möglichst klein wird.

47. In ein beliebiges Dreieck mit der Grundseite g und der Höhe h legen wir ein Parallelogramm mit möglichst großem Flächeninhalt derart, daß eine Parallelogrammseite auf der Grundseite des Dreiecks liegt. Wie viele Lösungen hat die Aufgabe?

48. Welche Abmessungen müßten zylindrische Konservendosen mit gegebenem Volumen V haben, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht wird?

49. In eine gegebene Halbkugel soll ein Kegel einbeschrieben werden, dessen Spitze im Mittelpunkt der Grundfläche der Halbkugel liegt.
   a) Fertigen Sie eine Skizze von Halbkugel und Kegel an (Achsenschnitt)!
   b) Bestimmen Sie die Abmessungen des Kegels in Abhängigkeit vom Radius R der Halbkugel, wenn das Volumen des Kegels möglichst groß sein soll!
   c) Berechnen Sie das maximale Volumen!

50. Ein oben offener quaderförmiger Behälter mit quadratischer Grundfläche soll ein Fassungsvermögen von 32 m³ haben. Welche Abmessungen muß der Behälter haben, damit für seine Innenauskleidung möglichst wenig Material benötigt wird?

51. Zwei OHMsche Widerstände R_1 und R_2 ergeben bei Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 90 Ω. In Reihenschaltung soll ihr Gesamtwiderstand minimal sein. Berechnen Sie R_1 und R_2!

52. Bild C 67 zeigt den Grundriß eines Hauses, das aus drei Räumen und einem Flur der Breite x besteht. Die Gesamtlänge der Wände soll 90 m betragen. Wie groß ist x zu wählen, damit die Grundfläche der drei Räume zusammen möglichst groß wird?
Fertigen Sie eine maßstabgetreue Skizze des Grundrisses unter Verwendung der errechneten Werte an!

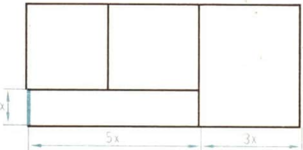
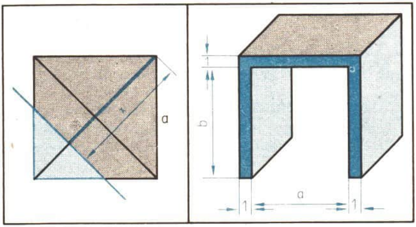


Bild C 67

53. Ein Wasserbehälter soll die Form eines Kreiszylinders mit unten angesetztem geradem Kreiskegel haben. Die Höhe des Zylinders soll 2 m, die Mantellinie des Kegels 6 m betragen. Welche Abmessungen muß der Behälter bei größtem Fassungsvermögen haben?

54. Aus einem 90 cm breiten rechteckigen Blech mit der Länge 5 m soll eine Rinne von trapezförmigem Querschnitt hergestellt werden. Dazu biegt man an den Längsseiten gleich breite Ränder um 60° hoch. Wie breit müssen die Randstreifen gemacht werden, wenn der Querschnitt der Rinne möglichst groß werden soll?

55. Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a, das von einer parallel zu einer Diagonalen des Quadrates verlaufenden Geraden geschnitten werde (↗ Bild C 68).
a) Geben Sie den Flächeninhalt A der schraffierten Fläche als Funktion von x an!
b) Diskutieren Sie diese Funktion!



Bilder C 68, C 69

56. Aus drei Holzbrettern von je 20 cm Breite soll eine Wasserrinne von trapezförmigem Querschnitt mit möglichst großem Fassungsvermögen gebaut werden.
Geben Sie eine genaue Konstruktionsanweisung!

57. Einem Halbkreis mit dem Radius r soll ein gleichschenkliges Trapez so einbeschrieben werden, daß eine parallele Seite der Durchmesser des Halbkreises ist.
Berechnen Sie die Länge der anderen parallelen Seite für den Fall, daß der Flächeninhalt des Trapezes am größten ist!

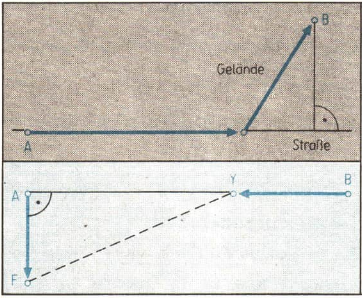
58. Zum Schutz gegen mechanische Beschädigungen werden unterirdisch verlegte Kabel mit Formstücken aus Beton so abgeschirmt, daß die Kabel in einem Hohlraum liegen (↗ Bild C 69). Der Hohlraum soll eine rechteckige Querschnittsfläche von 18 dm² Inhalt haben. Wand- und Deckenstärke betragen jeweils 1 dm. Für die Herstellung der Formstücke soll möglichst wenig Beton verbraucht werden, das heißt, der Inhalt der in der Skizze dunkelblau gefärbten Fläche soll minimal werden. Berechnen Sie für diesen Fall die Abmessungen a und b der Querschnittsfläche des Hohlraumes!

59.* Von allen Kegeln mit konstantem Volumen V ist derjenige gesucht, dessen Mantel den kleinsten Flächeninhalt hat.

60. Zum Bau eines an den Stirnwänden offenen Schuppens sollen zwei senkrecht aufzustellende Bretterwände mit der Höhe $a = 3{,}5$ m durch zwei Wellbleche von der Breite $b = 4{,}65$ m ein Satteldach erhalten. Die Bleche sollen außen jeweils 15 cm überstehen. Welchen Abstand müssen die senkrechten Wände voneinander haben, damit das Fassungsvermögen des Schuppens am größten wird?

61. Beweisen Sie, daß von allen Dreiecken mit einer gegebenen Grundseite g und gegebenem Umfang $2s$ das gleichschenklige den größten Flächeninhalt hat!
Anleitung: Der Flächeninhalt eines Dreiecks kann aus den drei Seiten a, b, c des Dreiecks nach der Formel von HERON[1]) $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $a + b + c = 2s$ bestimmt werden.

62. Eine Artillerie-Einheit der Nationalen Volksarmee hat einen Stellungswechsel von A nach B (↗ Bild C 70) durchzuführen. Während A an einer geradlinig verlaufenden Straße liegt, ist B ein 12 km von der Straße entfernt liegender Geländepunkt. Der Fußpunkt des Lotes von B auf die Straße ist 20 km von A entfernt. Die Marschgeschwindigkeit der Einheit beträgt auf der Straße $v_1 = 50\,\text{kmh}^{-1}$ und im Gelände $v_2 = 25\,\text{kmh}^{-1}$. An welcher Stelle muß die Kolonne von der Straße abbiegen, um den Stellungswechsel in möglichst kurzer Zeit zu vollziehen?



Bilder C 70, C 71

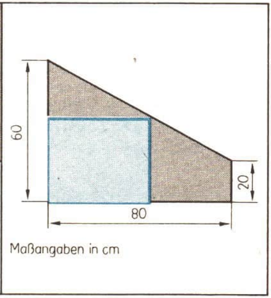


Bild C 72

63. Von den Punkten A und B mögen ein Frachtschiff und eine Yacht gleichzeitig in zueinander senkrechten Richtungen abfahren (↗ Bild C 71). Ihre Geschwindigkeiten sind $v_F = 24\,\text{kmh}^{-1}$, $v_Y = 40\,\text{kmh}^{-1}$.
Nach welcher Zeit ist der Abstand zwischen ihnen am geringsten, wenn $\overline{AB} = 145$ km beträgt?

64. Aus trapezförmigen Blechabfällen (↗ Bild C 72) sollen Rechtecktafeln mit größtem Flächeninhalt zur weiteren Verwertung herausgeschnitten werden. Berechnen Sie die Seitenlängen einer solchen Rechtecktafel!

65. In einem volkseigenen Betrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1 M je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar Anfang Januar und Anfang Juli. Die Verwaltungskosten betragen für jede Bestellung 30 M. Die Kosten der Lagerhaltung betragen jährlich 20% des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials.

[1]) HERON VON ALEXANDRIA (um 75 u. Z.), griechischer Mathematiker und Techniker

15 [00 11 56]

a) Wie hoch sind die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung?

b) Wie hoch sind die Kosten, wenn viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird?

c) Bei welcher Anzahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten, wenn man davon ausgeht, daß bei jeder Bestellung die gleiche Stückzahl für einen gleich langen Zeitraum bestellt wird? Wie hoch sind die Kosten in diesem Falle?

66.[1] Ein Betrieb fertigt ein gewisses Erzeugnis, dessen Bedarf während einer Zeitspanne T genau r Stück beträgt. Der Betrieb fertigt das betreffende Erzeugnis in Losen.[2] Die Gesamtkosten, die bei der Produktion der r Erzeugnisse in Losen zu je x Stück auftreten, lassen sich durch die Funktion K mit $K(x) = u + \frac{rc}{x} + \frac{lT}{2}x$ beschreiben. Dabei ist x die Losgröße, u sind die Lohn- und Materialkosten aller r Erzeugnisse, c sind die Rüstkosten (Kosten für die Vorbereitung und den Abschluß) eines Loses und l sind die Lagerkosten je Erzeugnis und Zeiteinheit.

a) Ermitteln Sie die optimale Losgröße, das heißt eine solche Losgröße, bei der die insgesamt anfallenden Kosten minimal sind!

b) Berechnen Sie die optimale Losgröße für $r = 40000$, $c = 300$ M, $T = 12$ Monate und $l = 0{,}50$ M je Stück und Monat!

c) In wie vielen Losen fertigt der Betrieb die 40000 Erzeugnisse, wenn die optimale Losgröße zugrunde gelegt wird?

67. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{c}{x}$ $(x > 0)$.

a) Ermitteln Sie die Ableitung von f an einer Stelle $x_0 > 0$!

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graph von f im Punkt $P_0\left(x_0; \frac{c}{x_0}\right)$!

c) Die Tangente schneidet die x-Achse im Punkt $(x_T; 0)$. Berechnen Sie x_T, und leiten Sie daraus ein Konstruktionsverfahren für die Tangente her!

d) Die Tangente schneidet die y-Achse im Punkt $(0; y_T)$. Berechnen Sie y_T und den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch beide Koordinatenachsen und die Tangente begrenzt wird!

68. Die Anzahl N der Kraftfahrzeuge, die auf einer Straße in einer Richtung im Verlaufe einer Stunde fahren können, hängt von der Fahrzeuglänge l und der Geschwindigkeit v (wegen des Sicherheitsabstandes) ab. Es gilt etwa

$$N = \frac{3600v}{l + 0{,}5v + 0{,}166v^2},$$

wobei l in Meter und v in Meter je Sekunde zu messen sind.
Eine Kolonne von Fahrzeugen der einheitlichen Länge $l = 10$ m soll die Straße befahren. Bei welcher Geschwindigkeit ist die Durchlaßfähigkeit der Straße am größten?

---

[1]) Entnommen aus: Mathematik für ökonomische und ingenieur-ökonomische Fachrichtungen, Teil 1 (Mathematische Grundlagen), Berlin 1971

[2]) Ein „Los" ist eine Anzahl konstruktiv gleichartiger Einzelteile, die in einem Arbeitsgang in zusammenhängender Folge unter Gewährung einer einmaligen Vorbereitungs- und Abschlußzeit hergestellt werden.

D Integralrechnung

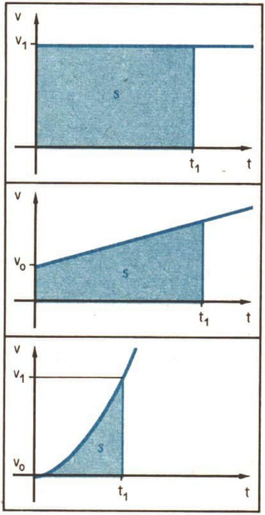
Bei einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung ist der in einer bestimmten Zeit t zurückgelegte Weg s gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit v und der Zeit t. Die Maßzahl des Weges s bei gegebener Geschwindigkeit v_1 und bei gegebener Zeit t_1 ist der Flächeninhalt[1]) der im Bild D 1 blau gerasterten Punktmenge.

Das Bild D 2 zeigt das v,t-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung wie etwa beim freien Fall.

Die Bewegung eines Raumschiffes, das durch eine Rakete auf eine Erdumlaufbahn gebracht wird, erfolgt in der Startphase *nicht* gleichmäßig beschleunigt. Die Schubkraft der Rakete ist annähernd konstant. Da aber die Masse wegen des Treibstoffverbrauchs kontinuierlich abnimmt, muß die Beschleunigung ständig wachsen. Bild D 3 zeigt das v,t-Diagramm einer solchen Bewegung mit wachsender Beschleunigung.

Auch in solchen Fällen ist der Flächeninhalt der blau gerasterten Punktmengen jeweils gleich der Maßzahl des in der Zeit t_1 zurückgelegten Weges. Während wir in den in den Bildern D 1 und D 2 dargestellten Fällen die Flächeninhalte der betreffenden Punktmengen berechnen können, ist uns das im Fall des Bildes D 3 noch nicht möglich.

Auch viele andere Zusammenhänge in Naturwissenschaften und Technik lassen sich auf die Frage nach dem Flächeninhalt gewisser Punktmengen zurückführen. So ist zum Beispiel – wie wir aus dem Physikunterricht der Klasse 10 wissen – der Flächeninhalt unter der Leistungskurve



Bilder D 1, D 2, D 3

[1]) Der Flächeninhalt einer Punktmenge ist eine Größe, bestehend aus Maßzahl und Einheit. Hier und im folgenden verzichten wir der Einfachheit halber auf die Angabe der Einheit und fassen den Flächeninhalt als Zahl auf. Die Einheit ergibt sich jeweils aus den gewählten Koordinateneinheiten. Ist zum Beispiel die Koordinateneinheit 1 cm, so ist die betreffende Einheit des Flächeninhalts 1 cm². Bei Anwendungsaufgaben ergibt sich die Einheit des Flächeninhalts aus den gegebenen Daten und muß selbstverständlich im Ergebnis mit angegeben werden.

für ein Schaltelement mit einem OHMschen Widerstand im Wechselstromkreis ein Maß für die elektrische Arbeit (↗ Bild D 4).
Die Berechnung derartiger Flächeninhalte ist eine Aufgabe, die neben anderen zur Integralrechnung gehört. In den folgenden Lerneinheiten werden wir uns mit der Lösung solcher Aufgaben befassen.

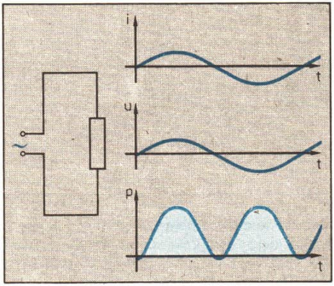


Bild D 4

Aufgaben

1. Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt der im Bild D 5 blau gerasterten Punktmengen!

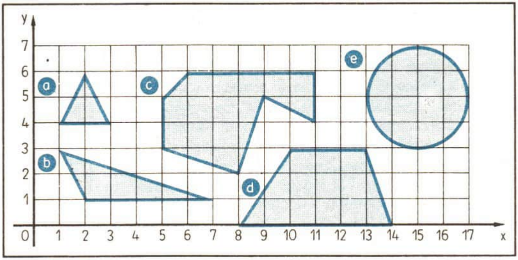


Bild D 5

2. Wiederholen Sie den Satz B 7 (Seite 120)!
Bestimmen Sie jeweils den kleinsten und größten Funktionswert der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ in folgenden Intervallen!

a) $\langle 0; 1 \rangle$

b) $\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$

c) $\left\langle 0; \frac{1}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{1}{4}; \frac{2}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{2}{4}; \frac{3}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{3}{4}; 1 \right\rangle$

3. Berechnen Sie!

a) $\sum_{i=1}^{10} 2 \cdot i$ b) $\sum_{i=1}^{10} a \cdot i$ c) $\sum_{i=1}^{n} a \cdot i$

d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{a}{b} i$ e) $\sum_{i=1}^{n} 1$

4. a) Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\frac{2^n - 1}{2^n} \right)$ monoton wächst und die Folge $\left(\frac{2^n + 1}{2^n} \right)$ monoton fällt!

b) Weisen Sie mit Hilfe des Satzes B 2 (Seite 93) nach, daß beide unter a) genannten Folgen konvergieren!

c) Zeigen Sie, daß beide Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren, und bestimmen Sie diesen!

5. Berechnen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} \quad (a \in R)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2^n)^2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)$

Bestimmtes Integral

1 Flächeninhalt einer Punktmenge unter der Parabel $y = x^2 + 1$

Flächeninhalte konnten wir bisher nur von Vielecken und Kreisen berechnen (↗ Aufgabe 1., Seite 228). Wir wollen uns jetzt mit dem Problem befassen, gewissen Punktmengen Q, die vom Graph einer Funktion, der x-Achse und Parallelen zur y-Achse begrenzt werden, einen Flächeninhalt zuzuordnen. Das Problem besteht darin,

1. festzulegen, *welche* Zahl der Flächeninhalt von Q sein soll, und
2. Methoden zu entwickeln, um diese Zahl mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Wie man zu einer Lösung des hier aufgeworfenen Problems gelangen kann, wollen wir zunächst am Beispiel der Punktmenge Q zeigen, die vom Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 1$, der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird. Q ist die Menge derjenigen Punkte $[x; y]$, für die $0 \leqq x \leqq 1$ und $0 \leqq y \leqq x^2 + 1$ gilt (↗ Bild D 6).

Welche Zahl ist als Flächeninhalt von Q festzulegen?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir einerseits die Flächeninhalte von Vieleckflächen, die man in Q hineinlegen kann, und andererseits die Flächeninhalte solcher Vieleckflächen, die Q überdecken. Wir werden zeigen, daß es genau eine Zahl gibt, die größer als die Inhalte aller in Q enthaltenen Vieleckflächen und kleiner als die Inhalte aller Q überdeckenden Vieleckflächen ist. Es liegt nahe, in Übereinstimmung mit den praktischen Erfahrungen und den anschaulichen Vorstellungen vom Messen diese Zahl als den Flächeninhalt der Punktmenge Q festzulegen.
Auf diese Weise wird der Inhalt von Q auf den schon bekannten Inhalt von Vieleckflächen zurückgeführt.

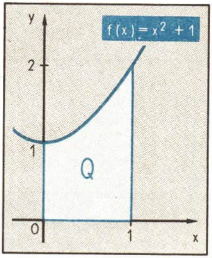


Bild D 6

Wir wollen jetzt präzisieren, mit *welchen* Vieleckflächen bei der Lösung des Problems gearbeitet wird.

Der einfachen Berechnung wegen arbeiten wir mit Vieleckflächen, die sich aus Rechteckflächen zusammensetzen. Dabei lassen wir **nur solche Rechtecke zu, deren Seiten zu den Koordinatenachsen parallel** sind. Nun zerlegen wir das Intervall $\langle 0; 1\rangle$ in gleich lange Teilintervalle. In jedem Teilintervall wählen wir dasjenige Rechteck, dessen Breite die Intervallänge und dessen Länge **der kleinste Funktionswert von f in diesem Teilintervall** ist. Dieses Rechteck ist das größte, das in dem betreffenden Teilintervall noch innerhalb von Q liegt.
Die Vieleckfläche, die sich aus all diesen Rechtecken zusammensetzt, liegt in Q (↗ Bilder D 7 bis D 9). Ferner wählen wir in jedem Teilintervall dasjenige Rechteck, dessen Breite wiederum die Intervallänge und dessen Länge **der größte Funktionswert von f in diesem Teilintervall** ist. Dieses Rechteck ist das kleinste, das in diesem Teilintervall den betreffenden Teil der Punktmenge Q überdeckt. Die Vieleckfläche, die sich aus all diesen Rechtecken zusammensetzt, überdeckt Q. Bei **fortgesetzter Verdoppelung** der Anzahl der Teilintervalle wird der Inhalt der einbeschriebenen Vieleckfläche größer, der Inhalt der überdeckenden Vieleckfläche kleiner.

	Nummer *n* der Teilung	**Anzahl der Teilintervalle**	**Teilintervalle**	**Länge der Teilintervalle**
↗ Bild D 7	0	$2^0 = 1$	$\langle 0; 1 \rangle$	1
↗ Bild D 8	1	$2^1 = 2$	$\left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$ $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$	$\frac{1}{2}$
↗ Bild D 9	2	$2^2 = 4$	$\left\langle 0; \frac{1}{4} \right\rangle$ $\left\langle \frac{1}{4}; \frac{2}{4} \right\rangle$ $\left\langle \frac{2}{4}; \frac{3}{4} \right\rangle$ $\left\langle \frac{3}{4}; 1 \right\rangle$	$\frac{1}{4}$

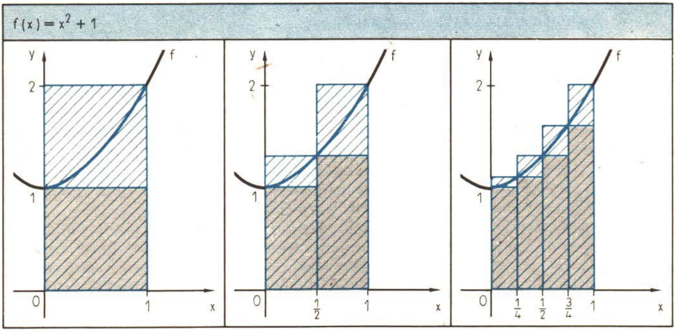


Bild D 7 Bild D 8 Bild D 9

Kleinster Funktionswert im Teilintervall	**Größter Funktionswert im Teilintervall**	**Inhalt s_n des in Q liegenden Vielecks / Inhalt S_n des Q überdeckenden Vielecks**
$f(0) = 1$	$f(1) = 2$	$s_0 = 1 \cdot 1 = 1$
		$S_0 = 1 \cdot 2 = 2$
$f(0) = 1$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$	$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2^1}\left[\left(\frac{i-1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{9}{8} = 1{,}125$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$	$f(1) = 2$	$S_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2^1}\left[\left(\frac{i}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{13}{8} = 1{,}625$
$f(0) = 1$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1$	$s_2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1\right]$
$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1$	$f\left(\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{2}{4}\right)^2 + 1$	$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2^2}\left[\left(\frac{i-1}{4}\right)^2 + 1\right] = \frac{39}{32} = 1{,}21875$
$f\left(\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{2}{4}\right)^2 + 1$	$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1$	$S_2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{4} \cdot 2$
$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1$	$f(1) = 2$	$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2^2}\left[\left(\frac{i}{4}\right)^2 + 1\right] = \frac{47}{32} = 1{,}46875$

In der Tabelle auf den Seiten 230f. ist dieses Vorgehen für die ersten Schritte dargestellt (↗ auch Aufgabe 2. auf Seite 231).
Durch **fortgesetzte Halbierung** erhalten wir die Zahlenfolgen (s_n) und (S_n) mit[1])

$$s_n = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\left[\left(\frac{i-1}{2^n}\right)^2 + 1\right] \quad \text{und} \quad S_n = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\left[\left(\frac{i}{2^n}\right)^2 + 1\right].$$

Man kann zeigen, daß beide Folgen konvergieren, und zwar gegen ein und denselben Grenzwert. **Dieser gemeinsame Grenzwert wird der Punktmenge Q als Flächeninhalt zugeordnet.**
Den Nachweis, daß die Folgen (s_n) und (S_n) gegen ein und denselben Grenzwert konvergieren, führen wir in Lerneinheit 3 (↗ Beispiel D 3).

Aufgaben

1. Berechnen Sie in Fortsetzung der Tabelle auf den Seiten 230f.

a) s_3; **b)** S_3!

2. Berechnen Sie analog zu dem abgehandelten Beispiel für die Punktmenge, die von dem Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 1$, der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 2$ begrenzt wird, die Zahlen s_n und S_n für $n = 0$, 1 und 2!

[1]) Beachten Sie, daß die Summen s_n und S_n jeweils aus 2^n Summanden bestehen!

2 Definition des bestimmten Integrals

Das in Lerneinheit 1 behandelte Beispiel macht deutlich, daß zur Beantwortung der Frage nach dem Flächeninhalt *wiederum* **Grenzwerte von Zahlenfolgen** erforderlich sind. Bei der arithmetischen Beschreibung dieser Grenzprozesse werden wir auf einen Begriff geführt, der über das Flächeninhaltsproblem hinaus in der Mathematik und den Naturwissenschaften vielfältig angewendet wird. Dieser Begriff ist der des **bestimmten Integrals für Funktionen,** den wir uns nunmehr erarbeiten werden, indem wir die im Beispiel der Lerneinheit 1 durchgeführten Überlegungen verallgemeinern.
Zunächst wollen wir erörtern, mit *welchen* Funktionen wir dabei arbeiten werden. In dem genannten Beispiel haben wir bei der Bildung der Summen s_n und S_n jeweils den kleinsten und den größten Funktionswert der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ in den betrachteten Teilintervallen verwendet. Um die dort durchgeführten Überlegungen verallgemeinern zu können, liegt es nahe, jetzt mit solchen Funktionen zu arbeiten, die in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ definiert sind und in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ **einen kleinsten und einen größten Funktionswert** haben.
Diese Eigenschaft haben sehr viele Funktionen. Wie wir bereits wissen, hat jede **stetige Funktion** in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Definitionsbereiches einen kleinsten und einen größten Funktionswert (↗ Satz B 7, Seite 120).
Auch jede **monotone Funktion** hat in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Definitionsbereiches einen kleinsten und einen größten Funktionswert. Ist f zum Beispiel eine monoton

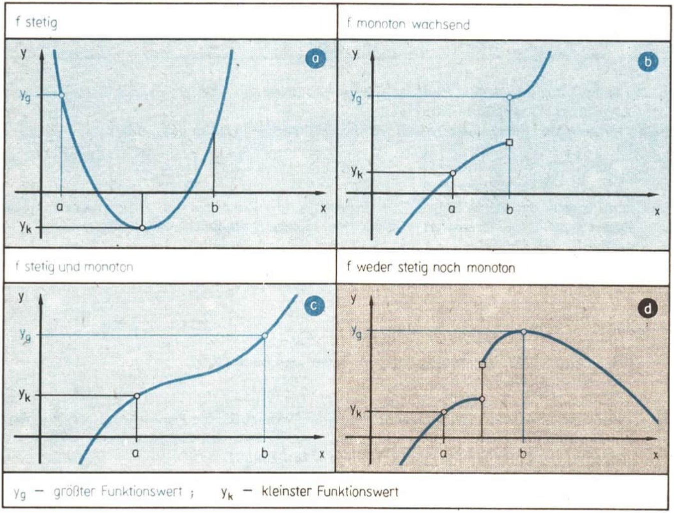


Bild D 10

wachsende Funktion, so nimmt f den kleinsten Funktionswert am linken und den größten Funktionswert am rechten Intervallende des betreffenden Intervalls an. Darüber hinaus gibt es Funktionen mit dieser Eigenschaft, die **weder stetig noch monoton** sind (↗ Bild D 10).

Es sei nun f eine beliebige Funktion, die in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ definiert ist und in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ einen kleinsten und einen größten Funktionswert hat.

(1) Wir wählen eine beliebige natürliche Zahl n und zerlegen das Intervall in 2^n gleich lange Teilintervalle. Die Endpunkte dieser Teilintervalle seien

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2^n-1},\ x_{2^n} = b$$

mit $x_i < x_j$ für $i < j$. Jedes dieser 2^n Teilintervalle hat die Länge $\dfrac{b-a}{2^n} = \Delta x$.

(2) Nach Voraussetzung hat f in jedem Teilintervall $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$ einen kleinsten Funktionswert m_i und einen größten Funktionswert M_i.[1]) Wir bilden

1. für jedes Intervall $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ die Produkte $m_i \cdot \Delta x$ und $M_i \cdot \Delta x$ und
2. die Summen

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n} m_i \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad S_n = \sum_{i=1}^{2^n} M_i \cdot \Delta x.$$

Die Bilder D 11 (a) bis (d) veranschaulichen unsere Erörterungen für eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ nichtnegative stetige Funktion f, die Bilder D 12 (a) bis (d) für eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ nichtnegative monoton wachsende Funktion f für die natürlichen Zahlen 0, 1, 2 und 3. Bezeichnen wir in diesen Fällen die Punktmenge, die von dem Graph von f, von der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, mit Q, so bedeutet $m_i \cdot \Delta x$ den Flächeninhalt des größten Rechtecks mit der Breite Δx, das der Punktmenge Q im Intervall $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ einbeschrieben ist. In den Bildern D 11 bzw. D 12 ist das betreffende Rechteck jeweils blau gerastert. Entsprechend ist $M_i \cdot \Delta x$ der Flächeninhalt des kleinsten Rechtecks mit der Breite Δx, das der Punktmenge Q im Intervall $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ umbeschrieben ist. In den Bildern D 11 bzw. D 12 Seite 234) setzt sich dieses Rechteck jeweils aus einem blau gerasterten und dem darüber liegenden Rechteck zusammen.

(3) Ordnet man jeder natürlichen Zahl n einerseits s_n und andererseits S_n zu, so erhält man zwei Zahlenfolgen, nämlich (s_n) und (S_n).

Welche Eigenschaften haben die Folgen (s_n) und (S_n)?

Es sei m der kleinste und M der größte Funktionswert von f in $\langle a; b\rangle$. Wie wir aus den Bildern D 13 und D 14 (Seite 235) ersehen können, ist für die dort dargestellte Funktion f im Intervall $\langle a; b\rangle$ stets

$$m(b-a) \leqq s_n \leqq S_n \leqq M(b-a).$$

Diese Ungleichung gilt für jede Funktion f, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ einen kleinsten und einen größten Funktionswert hat.[2]) Wir entnehmen aus dieser Ungleichung:

(s_n) ist nach oben beschränkt; (S_n) ist nach unten beschränkt.

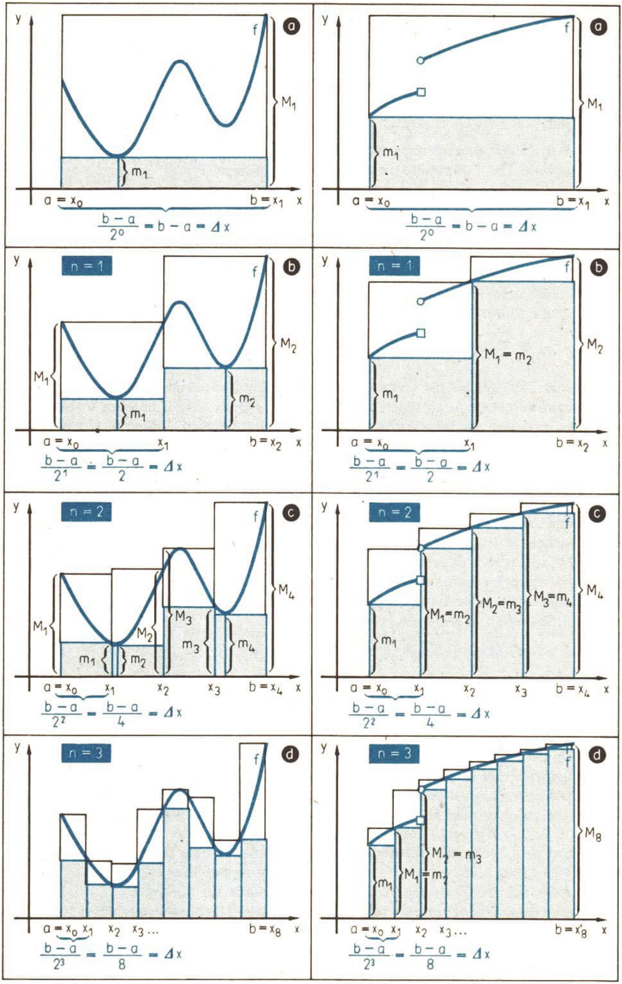
Beim Übergang von der n-ten Zerlegung zur $(n+1)$-ten Zerlegung wird jedes der 2^n Teilintervalle $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ halbiert. Es sei $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ ein beliebiges der 2^n Teilintervalle bei der n-ten Zerlegung und ξ_i der neu hinzukommende Teilpunkt bei der $(n+1)$-ten Zerlegung. Aus dem Bild D 15 (Seite 235) ist erkennbar, daß der Beitrag des Intervalls $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ zur Summe s_{n+1} *nicht kleiner* sein kann als der Beitrag dieses Intervalls zur Summe s_n.

Führt man diese Überlegung für jedes der 2^n Teilintervalle durch, so erhält man, daß beim Über-

[1]) Ist f eine konstante Funktion, so ist stets $m_i = M_i$.

[2]) Beachten Sie, daß m und M natürlich von der betreffenden Funktion f abhängig sind!

Bilder D 11, D 12



gang von der n-ten Zerlegung zur $(n+1)$-ten Zerlegung die dazugehörige Summe s_{n+1} nicht kleiner sein kann als die Summe s_n. Für alle n gilt also

$$s_n \leqq s_{n+1},$$

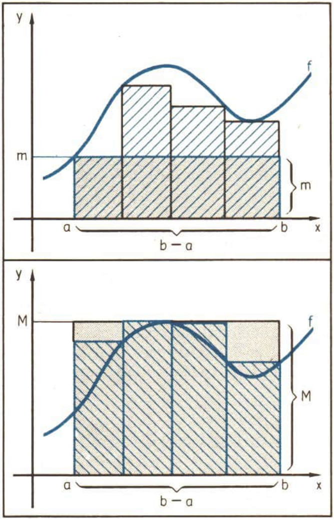
das heißt, die Folge (s_n) ist monoton wachsend.

● 1 Erläutern Sie an einer dem Bild D 15 entsprechenden Abbildung, daß die Folge (S_n) monoton fallend ist!

Wir wissen bereits, daß jede monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert. Folglich existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} s_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Wir interessieren uns nun für solche Funktionen, bei denen die Grenzwerte der Folgen (s_n) und (S_n) zusammenfallen (↗ auch die in Lerneinheit 1 betrachtete Funktion).



Bilder D 13, D 14

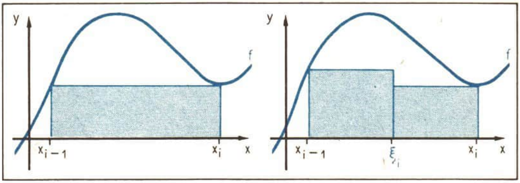


Bild D 15

▶ 1 **DEFINITION**

Es sei f eine im Intervall $\langle a;\, b\rangle$ definierte Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a;\, b\rangle$ einen kleinsten und einen größten Funktionswert hat.
Haben die Folgen (s_n) und (S_n) einen gemeinsamen Grenzwert, das heißt, gilt

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

so heißt dieser gemeinsame Grenzwert das *bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $\langle a;b\rangle$*.

Das bestimmte Integral einer Funktion f im Intervall $\langle a;\, b\rangle$ ist also eine reelle Zahl, und zwar der gemeinsame Grenzwert der Folgen (s_n) und (S_n). Ob das bestimmte Integral einer Funktion f

in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ existiert, hängt davon ab, ob die Grenzwerte der Folgen (s_n) und (S_n) übereinstimmen.

Man bezeichnet das bestimmte Integral von f in $\langle a; b\rangle$ durch $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
(Lies: „Integral f von x-d-x von a bis b")[1]).
Die Zahlen a und b nennt man die **Integrationsgrenzen,** x die **Integrationsvariable** und das Intervall $\langle a; b\rangle$ das **Integrationsintervall.**

■ 1 Wir wollen zeigen, daß für die Funktion $f(x) = x$ das bestimmte Integral im Intervall $\langle 0; b\rangle$ existiert, und dieses Integral berechnen.
Die Funktion f ist stetig (und auch monoton) und hat daher in jedem abgeschlossenen Intervall einen kleinsten und einen größten Funktionswert.

(1) Zerlegen des Intervalls

Für eine beliebige natürliche Zahl n zerlegen wir das Intervall $\langle 0; b\rangle$ in 2^n gleich lange Teilintervalle der Länge

$$\Delta x = \frac{b}{2^n}.$$

Abkürzend setzen wir k für 2^n, so daß

$$\Delta x = \frac{b}{k}$$

ist.

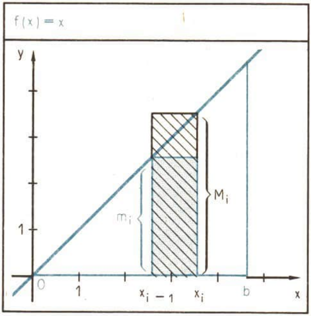


Bild D 16

(2) Bilden der Summen s_n und S_n

Es sei $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ das i-te Teilintervall ($i = 1, 2, \ldots, k$) bei dieser Zerlegung (Bild D 16). Zur Berechnung der Produkte $m_i \cdot \Delta x$ und $M_i \cdot \Delta x$ benötigen wir x_{i-1}, x_i, m_i und M_i.
Es ist

$$x_{i-1} = (i-1)\cdot\Delta x = (i-1)\cdot\frac{b}{k} \qquad\qquad x_i = i\cdot\Delta x = i\cdot\frac{b}{k}$$

$$m_i = f(x_{i-1}) = x_{i-1} = (i-1)\cdot\frac{b}{k}. \qquad\qquad M_i = f(x_i) = i\cdot\frac{b}{k}.$$

Damit finden wir

$$s_n = \sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{k} (i-1)\frac{b}{k}\cdot\frac{b}{k}. \qquad\qquad S_n = \sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{k} i\cdot\frac{b}{k}\cdot\frac{b}{k}.$$

Da alle Summanden von s_n und S_n den Faktor $\frac{b^2}{k^2}$ enthalten, gilt

$$s_n = \frac{b^2}{k^2}\sum_{i=1}^{k}(i-1). \qquad\qquad S_n = \frac{b^2}{k^2}\sum_{i=1}^{k} i.$$

Für jede natürliche Zahl k ist (↗ Seite 33)

[1]) Das von LEIBNIZ eingeführte Zeichen „∫" ist ein stilisiertes „S" und soll an die Summenbildung erinnern.

$$\sum_{i=1}^{k} (i-1) = \frac{(k-1)k}{2}. \qquad \Big| \qquad \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Also ist

$$s_n = \frac{b^2}{k^2} \cdot \frac{(k-1)k}{2} = \frac{b^2}{k} \cdot \frac{k-1}{2} = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right). \qquad \Big| \qquad S_n = \frac{b^2}{k^2} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{b^2}{k} \cdot \frac{(k+1)}{2} = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Setzen wir wieder 2^n für k, so erhalten wir

$$s_n = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \qquad \Big| \qquad S_n = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

(3) Berechnen der Grenzwerte der Folgen (s_n) und (S_n)

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b^2}{2}$,

das heißt:

$\int\limits_0^b x\,dx$ existiert, und es ist $\int\limits_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$.

● 2 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x$.
- a) Skizzieren Sie die Punktmenge unter dem Graph der Funktion im Intervall $\langle 0; 5\rangle$!
- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge mit Hilfe der Inhaltsformel für Dreiecke!
- c) Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Resultat des Beispiels D 1!

Mit Hilfe des bestimmten Integrals können wir nun die auf Seite 229 gestellte Frage nach dem Flächeninhalt für gewisse Punktmengen beantworten.

► 2 **DEFINITION**

Es sei f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ definierte Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ einen kleinsten und einen größten Funktionswert hat. Ferner gelte $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \langle a; b\rangle$.
Unter dem *Flächeninhalt* der Punktmenge, die von dem Graph von f, der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse durch a und b begrenzt wird, versteht man das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Existiert das bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $\langle a; b\rangle$ nicht, so hat die Punktmenge keinen Flächeninhalt.
Bemerkung: Jene Fälle, in denen die Voraussetzung $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \langle a; b\rangle$ nicht erfüllt ist, behandeln wir in Lerneinheit 9.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die im Beispiel D 1 angegebenen Summen s_n und S_n für $n = 0, 1, 2, 3$ und 4, falls $b = 4$ ist!
2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x$.
   a) Skizzieren Sie die Punktmenge, die durch den Graph von f, die x-Achse und die Geraden $x = 2$ und $x = 7$ begrenzt wird!

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge unter Verwendung Ihnen bereits bekannter Inhaltsformeln!

c) Wie kann man den Flächeninhalt dieser Punktmenge unter Verwendung des Ergebnisses des Beispiels D 1 erhalten?

3. a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$ im Intervall $\langle 0; 4 \rangle$!

b) Berechnen Sie s_n und S_n für $n = 0$, 1 und 2!

c) Zeichnen Sie für die unter b) vorgenommenen Zerlegungen des Intervalls $\langle 0; 4 \rangle$ die entsprechenden Rechtecke wie im Bild D 11 bzw. D 12! Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Inhalten der Rechtecke und den Zahlen s_n und S_n?

3 Existenz des bestimmten Integrals

● 3 Berechnen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{k}{2^n}$ $(k \in R)$!

● 4 Geben Sie drei rationale und drei irrationale Zahlen an, und markieren Sie diese auf der Zahlengeraden!

■ 2 Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \text{ rational} \\ 2, & \text{wenn } x \text{ irrational.} \end{cases}$

Das Bild B 30 auf Seite 116 veranschaulicht einige Funktionswerte dieser Funktion. Diese Funktion ist nicht stetig und auch nicht monoton, sie hat aber in jedem abgeschlossenen Teilintervall eines gegebenen Intervalls $\langle a; b \rangle$ einen kleinsten und einen größten Funktionswert.

Existiert das bestimmte Integral dieser Funktion im Intervall $\langle a; b \rangle$?

Zur Beantwortung dieser Frage überprüfen wir, ob die entsprechenden Folgen (s_n) und (S_n) gegen ein und denselben Grenzwert konvergieren.

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir zerlegen das Intervall $\langle a; b \rangle$ in 2^n gleich lange Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{2^n}$. In jedem der 2^n Teilintervalle liegt (wenigstens) eine rationale und (wenigstens) eine irrationale Zahl. Folglich ist der kleinste Funktionswert der Funktion f in jedem der 2^n Teilintervalle 1 und der größte Funktionswert 2. Damit erhalten wir

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n} m_i \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{2^n} \Delta x = 2^n \cdot \frac{b-a}{2^n} = b - a \qquad \text{und}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{2^n} M_i \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{2^n} 2 \cdot \Delta x = 2 \cdot 2^n \cdot \frac{b-a}{2^n} = 2(b-a).$$

Die Folgen (s_n) und (S_n) sind also konstant. Folglich ist

$$\lim_{n \to \infty} s_n = b - a \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} S_n = 2(b-a).$$

Ergebnis:

Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} s_n \neq \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ existiert das bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $\langle a; b \rangle$ nicht.

Das Beispiel D 2 zeigt: Es gibt Funktionen, für die das bestimmte Integral in einem vorgegebenen Intervall *nicht* existiert.
Wir betrachten nun eine beliebige in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ definierte Funktion f, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ einen kleinsten und einen größten Funktionswert hat.

Gibt es Eigenschaften von f, die gewährleisten, daß $\int_a^b f(x)\,dx$ *existiert?*

Zwei solcher Eigenschaften, die stark genug sind, die Existenz des bestimmten Integrals zu sichern, sind die **Monotonie** und die **Stetigkeit**[1]), das heißt, es gelten folgende Sätze.

▷ 1

SATZ

Wenn f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ monotone Funktion ist, so existiert $\int_a^b f(x)\,dx$.

▷ 2

SATZ

Wenn f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion ist, so existiert $\int_a^b f(x)\,dx$.

Von diesen beiden Sätzen beweisen wir hier nur den Satz D 1.
Beweis:
Es sei f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ monoton wachsende Funktion.
(1) Für eine beliebige natürliche Zahl n sei das Intervall $\langle a; b\rangle$ wiederum in 2^n gleich lange Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{2^n}$ zerlegt. Es sei $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ das i-te Teilintervall ($i = 1, 2, \ldots, 2^n$) bei dieser Zerlegung.

(2) Da f monoton wächst, gilt $m_i = f(x_{i-1})$ und $M_i = f(x_i)$, wobei m_i der kleinste und M_i der größte Funktionswert der Funktion f im i-ten Teilintervall ist (↗ Bild D 16). Folglich ist

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad S_n = \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i) \cdot \Delta x.$$

(3) Aus Lerneinheit 2 wissen wir bereits, daß die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existieren. Wir untersuchen nun noch, ob auch die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist gewiß erfüllt, wenn $(S_n - s_n)$ eine Nullfolge ist. Es ist

$$S_n = \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i) \cdot \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i) = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2^n-1}) + f(x_{2^n})] \text{ und}$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{2^n} f(x_{i-1}) = \Delta x[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2^n-1})].$$

Folglich ist (↗ auch Bild D 18 auf Seite 240)

$$S_n - s_n = \Delta x[f(x_{2^n}) - f(x_0)].$$

Da $x_{2^n} = b$, $x_0 = a$ und $\Delta x = \frac{b-a}{2^n}$ ist, gilt $S_n - s_n = \frac{b-a}{2^n}[f(b) - f(a)] = \frac{K}{2^n}$, wenn $(b - a)[f(b) - f(a)] = K$ gesetzt wird.

[1]) Sowohl die Monotonie als auch die Stetigkeit sind hinreichend, aber nicht notwendig für die Existenz des bestimmten Integrals.

Die Folge $\left(\frac{K}{2^n}\right)$ ist eine Nullfolge. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

beziehungsweise

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Das bedeutet aber: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

Völlig analog kann man zeigen, daß das bestimmte Integral für jede in $\langle a; b\rangle$ monoton fallende Funktion existiert.
Damit ist Satz D 1 bewiesen.

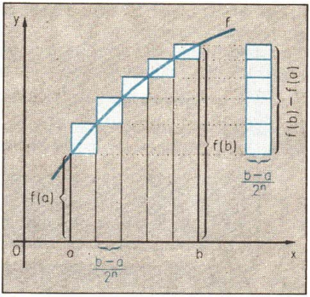
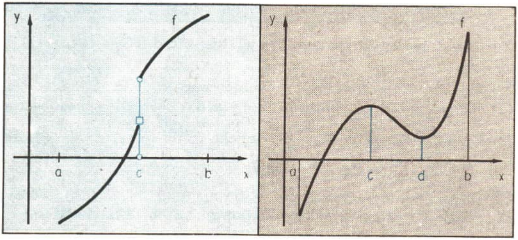


Bild D 18



Bilder D 19, D 20

Das Bild D 19 zeigt den Graph einer in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ monotonen Funktion f, die an der Stelle c nicht stetig ist. Nach Satz D 1 existiert das bestimmte Integral von f in $\langle a; b\rangle$.
Das Bild D 20 zeigt den Graph einer in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ stetigen Funktion f, die in $\langle a; b\rangle$ nicht monoton ist.
Nach Satz D 1 können wir für diese Funktion zwar aussagen, daß zum Beispiel die Integrale $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existieren, aber nicht, daß das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.
Die Existenz dieses Integrals folgt aus Satz D 2.

● 5 Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} 1$!

■ 3 Zu berechnen ist der Flächeninhalt der in Lerneinheit 1 betrachteten Punktmenge Q (↗ Bild D 6), die vom Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 1$, der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird.

Lösung:

Da die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ im Intervall $\langle 0; 1\rangle$ monoton ist, existiert nach Satz D 1 das bestimmte Integral $\int_0^1 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$, das heißt, die betreffenden Folgen (s_n) und (S_n) konvergieren gegen ein und denselben Grenzwert. Also ist $\int_0^1 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Dieser gemeinsame Grenzwert ist der Flächeninhalt A der Punktmenge Q. Zu seiner Berechnung genügt es, zum Beispiel den Grenzwert der Folge (S_n) auszurechnen. In Lerneinheit 1 hatten wir bereits $S_n = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=1}^{2^n} \left[\left(\frac{i}{2^n}\right)^2 + 1\right]$ ermittelt. Setzen wir wieder $2^n = k$, so vereinfacht sich der Term auf der rechten Seite.
Es ist dann[1])

$$S_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{i}{k}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k^2} + \sum_{i=1}^{k} 1\right] = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k^2} + k\right]$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k^2} + 1 = \frac{1}{k^3} \sum_{i=1}^{k} i^2 + 1.$$

Unter Verwendung der Summenformel für $\sum_{i=1}^{k} i^2$ (↗ Seite 35) erhalten wir

$$S_n = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + 1 = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} + 1$$

$$= \frac{1}{6}\left(2 + \frac{3}{k} + \frac{1}{k^2}\right) + 1.$$

Setzen wir wieder 2^n für k, so erhalten wir $S_n = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{3}{2^n} + \frac{1}{(2^n)^2}\right) + 1.$

Dann ist $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{6} + 1 = \frac{4}{3}.$

Ergebnis: $A = \int\limits_0^1 (x^2 + 1)\,dx = \frac{4}{3}$

Damit haben wir das in Lerneinheit 1 gestellte Problem, den Flächeninhalt der Punktmenge Q zu ermitteln, vollständig gelöst.

Aufgaben

1. Begründen Sie, daß folgende Integrale existieren!

a) $\int\limits_2^3 \frac{1}{x}\,dx$ **b)** $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$

2. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{wenn } -1 \leqq x \leqq 2 \\ x + 1, & \text{wenn } 2 < x \leqq 4. \end{cases}$

a) Skizzieren Sie den Graph dieser Funktion!

b) Begründen Sie, daß $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\,dx$ existiert!

[1]) Beachten Sie: $\sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i$!

3. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x + 1$.

a) Skizzieren Sie die Punktmenge Q, die durch den Graph von f, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzt wird!

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Q unter Verwendung Ihnen bereits bekannter Inhaltsformeln!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Q mit Hilfe der Integralrechnung!

Hinweis: Verfahren Sie wie im Beispiel D 3!

4 Erweiterung des Integralbegriffs, Additivität

Für manche Anwendungen des Integralbegriffs ist es – wie wir später noch sehen werden – zweckmäßig, den Begriff des bestimmten Integrals auch für solche Fälle zur Verfügung zu haben, bei denen die obere Integrationsgrenze kleiner als die untere ist.
Wenn das bestimmte Integral von f im Intervall $\langle a; b\rangle$ existiert, so setzt man

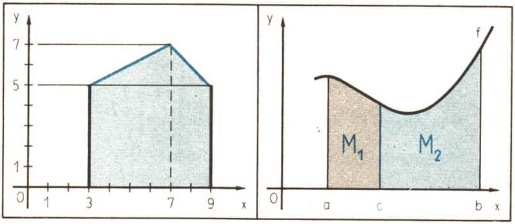
(1) $$\boxed{\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x =_{\mathrm{Df}} -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

■ 4 Es ist $\displaystyle\int_1^0 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{3}$ (↗ Beispiel D 3).

Der Vollständigkeit halber wird das bestimmte Integral auch für den Fall erklärt, daß untere und obere Integrationsgrenze zusammenfallen.
Wenn die Beziehung (1) auch für diesen noch zu erklärenden Fall gültig bleiben soll, so müßte gelten $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Die einzige Zahl, die dieser Gleichung genügt, ist die Zahl Null. Deshalb setzt man zweckmäßigerweise

(2) $$\boxed{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x =_{\mathrm{Df}} 0}\,.$$

● 6 Berechnen Sie den Flächeninhalt der im Bild D 21 blau gerasterten Punktmenge!



Bilder D 21, D 22

Es sei f eine Funktion, die im Intervall $\langle a; b\rangle$ keine negativen Funktionswerte hat (↗ Bild D 22) und für die $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert. Ferner sei c eine beliebige Zahl aus dem Intervall $\langle a; b\rangle$. Die Feststellung, daß der Flächeninhalt der aus M_1 und M_2 zusammengesetzten Punktmenge gleich der Summe der Flächeninhalte von M_1 und M_2 ist, besagt – als Aussage über Integrale formuliert – gerade:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diese Beziehung läßt sich viel allgemeiner – und zwar ohne Rückgang auf den Flächeninhalt – allein aus der Integraldefinition gewinnen.

▷ 3

SATZ

Existiert das bestimmte Integral einer Funktion f in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ und ist c eine beliebige Zahl aus $\langle a; b\rangle$, so ist

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die im Satz D 3 formulierte Eigenschaft nennt man **Additivität des bestimmten Integrals.** Auf den Beweis dieses Satzes verzichten wir hier.

Das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist eine eindeutig bestimmte reelle Zahl, die nur von der gegebenen Funktion f und den Integrationsgrenzen a und b und von nichts anderem abhängt. **Es kommt deshalb auf die Wahl der Integrationsvariablen nicht an.** So ist beispielsweise

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Natürlich kann man als Integrationsvariable nicht eine der Integrationsgrenzen wählen.

Aufgaben

Ermitteln Sie folgende Zahlen!

1.↑ a) $\int\limits_0^0 x\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_\pi^\pi x^5\,\mathrm{d}x$

2.↑ a) $\int\limits_5^5 \sin x\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_{-2}^{-2} (x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x$

3.↑ a) $\int\limits_0^b x\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_b^0 x\,\mathrm{d}x$ (↗ Beispiel D 1)

4.↑ a) $\int\limits_0^b z\,\mathrm{d}z$ b) $\int\limits_b^0 t\,\mathrm{d}t$

5.↑ $\int\limits_1^4 (x^3 + x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^7 (x^3 + x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_7^1 (x^3 + x)\,\mathrm{d}x$

6.↑ $\int\limits_0^{0,3} (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0,3}^1 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$ (↗ Beispiel D 3)

Zusammenfassung

Das Problem der Berechnung des Flächeninhalts nicht allseitig geradlinig begrenzter Punktmengen führt zum Begriff des **bestimmten Integrals.**
Es sei f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ definierte Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ einen kleinsten und einen größten Funktionswert hat (diese Voraussetzung wird zum Beispiel von jeder in $\langle a; b\rangle$ stetigen Funktion, aber auch von jeder in $\langle a; b\rangle$ monotonen Funktion erfüllt).

f; $\langle a; b\rangle$	Beispiel (↗ Beispiel D 1) $f(x) = x$; $\langle 0; b\rangle$
(1) Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir zerlegen das Intervall $\langle a; b\rangle$ in 2^n gleich lange Teilintervalle der Länge $\Delta x = \dfrac{b-a}{2^n}$.	$\Delta x = \dfrac{b-0}{2^n} = \dfrac{b}{2^n}$
Die Endpunkte dieser Intervalle seien $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2^n-1} < x_{2^n} = b$,	$x_0 = 0$; $x_1 = \dfrac{b}{2^n}$; $x_2 = \dfrac{2b}{2^n}$; …; $x_{2^n-1} = \dfrac{(2^n-1)\,b}{2^n}$; $x_{2^n} = b$
der kleinste Funktionswert von f im Intervall $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ sei m_i,	$m_i = f(x_{i-1}) = (i-1)\dfrac{b}{2^n}$
der größte M_i.	$M_i = f(x_i) = i\dfrac{b}{2^n}$
Wir bilden die Summen $s_n = \sum\limits_{i=1}^{2^n} m_i\,\Delta x$ und	$s_n = \sum\limits_{i=1}^{2^n} (i-1)\dfrac{b}{2^n}\cdot\dfrac{b}{2^n} = \dfrac{b^2}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$
$S_n = \sum\limits_{i=1}^{2^n} M_i\,\Delta x$.	$S_n = \sum\limits_{i=1}^{2^n} i\dfrac{b}{2^n} = \dfrac{b^2}{2}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$
(2) Führt man die Überlegung (1) für jede natürliche Zahl n durch, so erhält man die Zahlenfolgen (s_n) und	$(s_n) = \left(\dfrac{b^2}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)\right)$
(S_n).	$(S_n) = \left(\dfrac{b^2}{2}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)\right)$
Die Folge (s_n) wächst monoton, die Folge (S_n) fällt monoton, und für jedes n gilt $s_n \leqq S_n$. Deshalb konvergieren beide Folgen. Haben beide Folgen **ein und denselben** Grenzwert, d. h., ist	
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$,	$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{b^2}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b^2}{2}$

so heißt dieser gemeinsame Grenzwert **das bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $\langle a; b\rangle$.** Für diese reelle Zahl schreibt man $\int_a^b f(x)\,dx$.	Das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = x$ im Intervall $\langle 0; b\rangle$ existiert; es ist $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$.

Wenn f in $\langle a; b\rangle$ stetig beziehungsweise monoton ist, so ist in jedem Falle $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$, das heißt, dann existiert das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Wenn $\int_a^b f(x)\,dx$ definiert ist, so gilt $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$; $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx; \quad c \in \langle a; b\rangle.$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

5 Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze

● 7 Berechnen Sie den Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = 2x^2$ an einer beliebigen Stelle x, und ermitteln Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$!

● 8 Begründen Sie: Die Funktion $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + \sqrt{x}$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 5x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$!

Wie die Beispiele D 1 und D 3 gezeigt haben, ist die Berechnung des bestimmten Integrals durch Rückgang auf die Folgen (s_n) und (S_n) selbst für einfache Funktionen im allgemeinen sehr aufwendig. Im folgenden werden wir zeigen:

Wenn man zu einer gegebenen Funktion f eine beliebige Stammfunktion F in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ kennt, so kann das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ wesentlich einfacher berechnet werden.

Im Beispiel D 1 (↗ Seite 236f.) hatten wir $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$ berechnet.

Für jede Zahl b ($b \geqq 0$) erhalten wir eine eindeutig bestimmte Zahl. In der folgenden Tabelle ist für einige Zahlen b jeweils die Zahl $\int_0^b x\,dx$ angegeben.

b	0	1	7	10	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	10^4	π
$\int_0^b x\,dx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{49}{2}$	50	$\frac{1}{8}$	1	$5 \cdot 10^7$	$\frac{\pi^2}{2}$

Die Menge der geordneten Paare $\left[b; \int\limits_0^b x\,\mathrm{d}x\right]$ ist die Funktion Φ mit

$$\Phi(b) = \int\limits_0^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2}.$$

Φ ist also eine Funktion, deren Argument die obere Integrationsgrenze eines bestimmten Integrals ist.
Bezeichnet man – wie üblich – das Argument dieser Funktion mit x (statt mit b), so muß als Integrationsvariable ein anderer Buchstabe verwendet werden, etwa t. Dann ist

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Wegen $\Phi'(x) = x$ ist die Funktion $\Phi(x) = \int\limits_0^x t\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion des Integranden $f(x) = x$.

Dieser Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Stammfunktion gilt sogar für beliebige **stetige** Funktionen.
Ist f eine beliebige, in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion, so ist auch die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine in $\langle a; b\rangle$ definierte Funktion[1]), und zwar eine Stammfunktion von f.
Diesen Sachverhalt formulieren wir in dem folgenden Satz.

▷ 4 **SATZ**

Wenn f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion ist, so ist die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f in $\langle a; b\rangle$.

Beweis:

Es sei f eine beliebige im Intervall $\langle a;b\rangle$ stetige Funktion, Φ die Funktion mit $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Wir müssen zeigen, daß Φ eine Stammfunktion von f ist, das heißt: Ist x eine beliebige Stelle aus dem Intervall $\langle a; b\rangle$, so gilt $\Phi'(x) = f(x)$.
Wir gliedern den Beweis in drei Schritte:

(1) Wir bilden den Differenzenquotienten der Funktion Φ an der beliebig gewählten Stelle x, die wir bei den weiteren Betrachtungen unverändert lassen,
(2) schätzen den Differenzenquotienten nach unten und oben ab,
(3) berechnen den Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$.

Zu (1): Bilden des Differenzenquotienten

Es ist $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ und $\Phi(x+h) = \int\limits_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Für $h \neq 0$ erhalten wir $$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{\int\limits_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h}.$$

[1]) Sind die Funktionswerte von f im Intervall $\langle a; b\rangle$ nicht negativ, so läßt sich die Funktion Φ leicht geometrisch veranschaulichen. Für ein beliebiges x aus dem Intervall $\langle a; b\rangle$ ist $\Phi(x)$ der Flächeninhalt der im Bild D 23 grau gerasterten Punktmenge.

(Selbstverständlich muß h so gewählt werden, daß $x + h$ im Intervall $\langle a; b\rangle$ liegt.)
Nach Satz D 3 gilt

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.\ ^{1)}$$

Hieraus folgt

$$\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Also ist

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\cdot \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

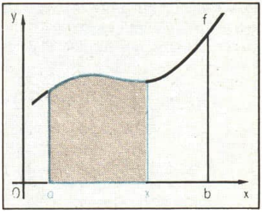
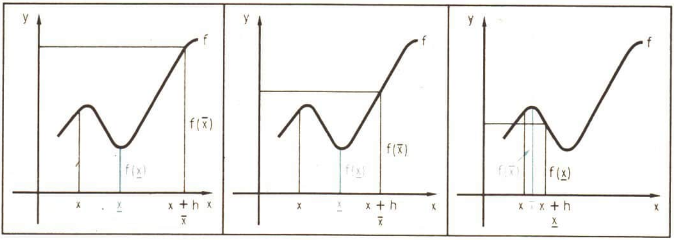
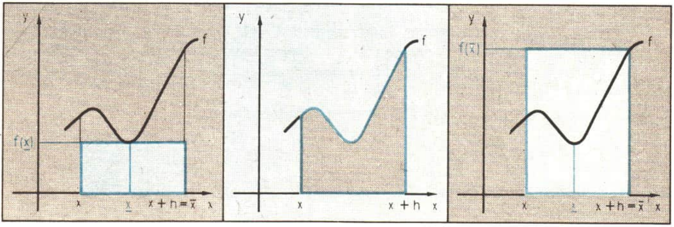


Bild D 23

Zu (2): Abschätzen des Differenzenquotienten nach oben und unten
Wir behandeln hier den Fall $h > 0$.
Da f stetig ist, gibt es nach Satz B 7 (Seite 120) Stellen $\underline{x}$ und $\bar{x}$ im Intervall $\langle x; x + h\rangle$ derart, daß $f(\underline{x})$ der kleinste und $f(\bar{x})$ der größte Funktionswert von f im Intervall $\langle x; x + h\rangle$ ist. Im allgemeinen hängen die Zahlen $\underline{x}$ und $\bar{x}$ von h ab (↗ Bild D 24). Nach Definition des bestimmten Integrals ist dann (*) $f(\underline{x})\cdot h \leqq \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqq f(\bar{x})\cdot h$.

Bilder D 24, D 25





[1]) Beachten Sie: Wenn $h < 0$ ist, so gilt $x + h < x$! Dann ist die obere Integrationsgrenze kleiner als die untere. Hier wird also von der Definition (1) auf Seite 242 Gebrauch gemacht.

(Das Bild D 25 auf Seite 247 veranschaulicht diesen Sachverhalt für eine im Intervall $\langle x; x + h\rangle$ stetige Funktion mit nichtnegativen Funktionswerten.)
Aus (*) erhalten wir für den Differenzenquotienten von Φ an der Stelle x die Abschätzung

$$f(\underline{x}) \leqq \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqq f(\bar{x}) \qquad \text{und folglich}$$

$$(^{**})\quad \lim_{h\to 0} f(\underline{x}) \leqq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqq \lim_{h\to 0} f(\bar{x}).$$

Zu (3): Berechnen des Grenzwertes des Differenzenquotienten für $h \to 0$

Wir zeigen, daß der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert und gleich $f(x)$ ist. Da f stetig ist, gilt

$$\lim_{h\to 0} f(\underline{x}) = \lim_{h\to 0} f(\bar{x}) = f(x).$$

Somit folgt aus (**)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Wir haben bei der vorangegangenen Überlegung $h > 0$ angenommen. Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch für $h < 0$. Damit haben wir gezeigt:

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = f(x),$$

womit der Satz D 4 bewiesen ist.

Durch diesen Beweis ist auch gesichert:

Jede in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion hat dort eine Stammfunktion.

Bemerkung: Für jede in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion f stellt der Satz D 4 eine Beziehung zwischen dem bestimmten Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und einer Stammfunktion von f her.

Es ist üblich, für eine im Intervall I definierte Funktion f die Menge aller Stammfunktionen von f in I **das unbestimmte Integral** dieser Funktion zu nennen und es mit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ zu bezeichnen.

Ist f zum Beispiel die Funktion mit $f(x) = x^2 - 1$, so schreibt man

$$\int (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x + c,$$

wobei c alle reellen Zahlen durchläuft.

6 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; Berechnung bestimmter Integrale

Mit Hilfe des Satzes D 4 kann man für eine beliebige in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion f das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sehr einfach berechnen, wenn nur irgendeine Stammfunktion von f in $\langle a; b\rangle$ bekannt ist. Das wollen wir im folgenden erläutern.
Es sei f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion und F irgendeine Stammfunktion von f in $\langle a; b\rangle$.

Wie erhält man die Zahl $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *mit Hilfe von F?*

Nach Satz D 4 ist die Funktion Φ mit

(1) $\quad \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

ebenfalls eine Stammfunktion von f in $\langle a; b\rangle$. Das zu berechnende Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist wegen (1) nichts anderes als die Zahl $\Phi(b)$, das heißt, es ist $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$.

Den Funktionswert $\Phi(b)$ können wir nun mit Hilfe der vorgegebenen Stammfunktion F berechnen. Wie wir aus Lerneinheit C 28 wissen, unterscheiden sich F und Φ nur um eine Konstante c, das heißt, es gibt eine Zahl c derart, daß für alle x aus $\langle a; b\rangle$ gilt

(2) $\quad \Phi(x) = F(x) + c.$

Aus dieser Gleichung folgt

(3) $\quad \Phi(b) = F(b) + c.$

Mit F ist auch der Funktionswert $F(b)$ bekannt. Die Zahl c erhalten wir folgendermaßen: Wir setzen in (1) und (2) jeweils $x = a$ und erhalten

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{und} \qquad \Phi(a) = F(a) + c.$$

Also ist $\quad c = -F(a). \qquad$ Damit folgt aus (3) $\quad \Phi(b) = F(b) - F(a) \qquad$ und somit

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

beziehungsweise nach Umbenennung der Integrationsvariablen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Mit diesen Überlegungen haben wir den folgenden Satz bewiesen.

▷ 5 **HAUPTSATZ der Differential- und Integralrechnung**
Ist f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion und F irgendeine Stammfunktion von f, so ist
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Für die Differenz $F(b) - F(a)$ schreibt man auch $[F(x)]_a^b$.

● 9 Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an!

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

■ 5 Das bestimmte Integral $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ ist zu berechnen (↗ Beispiel D 3).

Lösung:

Die Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = x^2 + 1$. Nach Satz D 5 gilt

$$\int_0^1 (x^2+1)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1 - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 0\right) = \frac{4}{3}.$$

Verwendet man für die Differenz $F(1) - F(0)$ die oben eingeführte Schreibweise, so läßt sich die Berechnung von $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ wie folgt darstellen:

$$\int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1 - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 0\right) = \frac{4}{3}.$$

Bemerkung: Die im Beispiel D 5 durchgeführte Berechnung von $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ macht mit aller Deutlichkeit klar, daß sich die Verallgemeinerung des in der Einführung aufgeworfenen Problems und das Suchen nach Gesetzmäßigkeiten beziehungsweise Zusammenhängen gelohnt hat. Die Berechnung von $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ kann jetzt wesentlich rationeller erfolgen.

■ 6 $$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}$$

■ 7 $$\int_{-1}^3 \left(x^3 - 2x^2 + 0{,}4x + \frac{1}{3}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_{-1}^3$$

$$= \frac{81}{4} - 18 + \frac{9}{5} + 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{81}{4} - 18 + \frac{9}{5} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{80}{4} - 17 + \frac{8}{5} - \frac{1}{3} = \frac{64}{15}$$

■ 8 $$\int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \int_1^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^9$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{2}{3}\left(9\cdot\sqrt{9} - \sqrt{1}\right) = \frac{2}{3}(9\cdot 3 - 1) = \frac{2}{3}\cdot 26 = \frac{52}{3}$$

Aus dem Satz D 5 und den Regeln (a) und (b) aus Lerneinheit C 29 folgt: Sind f und g in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktionen, so gilt

(a) $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(b) $$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

■ 9 $$\int_2^4 \left(5x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_2^4 5x\,dx + \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 5\int_2^4 x\,dx + \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= 5\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^4 + \left[2\sqrt{x}\right]_2^4 = \frac{5}{2}(16-4) + 2\left(\sqrt{4}-\sqrt{2}\right) = 30 + 4 - 2\sqrt{2} = 34 - 2\sqrt{2}$$

Die Sätze D 4 und D 5 sind nicht nur für die Berechnung bestimmter Integrale nützlich, sondern sie stellen auch den Zusammenhang zwischen dem Aufsuchen einer Stammfunktion und dem bestimmten Integral und damit den Zusammenhang zwischen der Differential- und Integralrechnung dar. Das *Aufsuchen einer Stammfunktion* ist die **Umkehrung der Differentiation.** Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ einer (stetigen) Funktion f wurde unabhängig von der Differentialrechnung durch Grenzwerte gewisser Zahlenfolgen definiert. Durch den Hauptsatz werden also die von völlig unterschiedlichen Problemstellungen her entwickelten Theorien, nämlich einerseits die Differentialrechnung und andererseits die Integralrechnung, zusammengeführt. Das große Verdienst, diesen Zusammenhang erstmalig erkannt und angewendet zu haben, gebührt Leibniz und Newton.

Aufgaben

Berechnen Sie folgende Integrale!

1.↑ a) $\int_0^3 x\,dx$ b) $\int_3^3 x\,dx$ c) $\int_{-1}^1 2\,dx$ d) $\int_{-0,5}^{-1} (-3)\,dx$ e) $\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{3}t\right) dt$ f) $\int_1^2 ab^2\,da$

2.↑ a) $\int_1^4 x\,dx$ b) $\int_1^4 2x\,dx$ c) $\int_{-0,5}^{+0,5} (-3)\,dx$ d) $\int_4^1 2x\,dx$ e) $\int_{-1,5}^{0,5} \frac{1}{5}s\,ds$ f) $\int_1^2 ab^2\,db$

3.↑ a) $\int_1^7 \left(-\frac{x^2}{5} - x\right) dx$ b) $\int_1^4 x^{-2}\,dx$ c) $\int_1^3 \frac{4}{r^4}\,dr$ d) $\int_0^4 (x^2 + x + 1)\,dx$ e) $\int_2^1 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx$

4.↑ a) $\int_{-2}^0 (3x^2 + x - 1)\,dx$ b) $\int_{-3}^{-2} x^{-3}\,dx$ c) $\int_{-2}^{-1} 3t^{-5}\,dt$ d) $\int_{-1}^0 (x^3 + x^2 + x + 1)\,dx$ e) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right) dx$

5.↑ a) $\int_2^7 \sqrt{x}\,dx$ b) $\int_1^5 p^{-\frac{1}{2}}\,dp$ c) $\int_1^4 5\sqrt[4]{x}\,dx$

6.↑ a) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$ b) $\int_1^4 q^{-\frac{1}{3}}\,dq$ c) $\int_1^4 \frac{5}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

d) $\int_2^3 \left(x + \sqrt[3]{x}\right) \mathrm{d}x$

e) $\int_0^1 \left(2 + \sqrt{4x}\right) \mathrm{d}x$

d) $\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \mathrm{d}x$

e) $\int_0^1 \left(5 - \sqrt[3]{8x}\right) \mathrm{d}x$

7. Berechnen Sie die bestimmten Integrale der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x$ in den Intervallen $\langle 0; 2\rangle$, $\langle 2; 4\rangle$ und $\langle 0; 4\rangle$!

8. Wählen Sie innerhalb des Intervalls $\langle 3; 6\rangle$ eine Zahl c, und berechnen Sie die bestimmten Integrale der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ in den Intervallen $\langle 3; c\rangle$, $\langle c; 6\rangle$ und $\langle 3; 6\rangle$!

9.* Beweisen Sie die auf Seite 250 angegebenen Regeln!

7 Berechnung von Integralen verketteter Funktionen

■ 10 Es ist $\int_0^3 \sqrt{5x + 3}\, \mathrm{d}x$ zu berechnen.

Lösung:

Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden zu können, benötigen wir eine Stammfunktion zu $g(x) = \sqrt{5x + 3}$. Nun ist g die Verkettung der Wurzelfunktion $f(z) = \sqrt{z}$ mit der linearen Funktion $z(x) = 5x + 3$. Eine Stammfunktion zu $f(z) = \sqrt{z}$ ist $F(z) = \frac{2}{3}\sqrt{z^3}$ (↗ Regel c) aus Lerneinheit C 29 auf Seite 216). Wir probieren, ob die Funktion, die durch Verkettung von F mit z entsteht, also die Funktion

$$F(z(x)) = \frac{2}{3}\sqrt{(5x + 3)^3} \tag{1}$$

eine Stammfunktion von $g(x) = \sqrt{5x + 3}$ ist. Dazu differenzieren wir die Funktion (1). Nach der Kettenregel (↗ Lerneinheit C 14, Seite 169) ist

$$\left[\frac{2}{3}\sqrt{(5x + 3)^3}\right]' = \left[\frac{2}{3}(5x + 3)^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(5x + 3)^{\frac{1}{2}} \cdot 5, \qquad \text{also}$$

$$\left[\frac{2}{3}\sqrt{(5x + 3)^3}\right]' = 5 \cdot \sqrt{5x + 3}\,. \tag{2}$$

Bis auf den Faktor 5 erhalten wir das gewünschte Ergebnis. Dividieren wir jedoch beide Seiten der Gleichung (2) durch 5, so finden wir

$$\frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(5x + 3)^3}\right]' = \sqrt{5x + 3} \quad \text{beziehungsweise} \quad \left[\frac{2}{15}\sqrt{(5x + 3)^3}\right]' = \sqrt{5x + 3}\,.$$

Eine Stammfunktion von $g(x) = \sqrt{5x + 3}$ ist also die Funktion

$$G(x) = \frac{1}{5}F(z(x)) = \frac{2}{15}\sqrt{(5x + 3)^3}\,.$$

Damit erhalten wir bei Anwendung des Hauptsatzes

$$\int_0^3 \sqrt{5x+3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{15}\sqrt{(5x+3)^3}\right]_0^3 = \frac{2}{15}\sqrt{18^3} - \frac{2}{15}\sqrt{3^3} = \frac{2}{15}\left(\sqrt{18^3} - \sqrt{3^3}\right)$$

$$= \frac{2}{15}\left(3^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{2}{5}\left(18\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$$

Wir verallgemeinern die im Beispiel D 10 angewandte Methode zum Aufsuchen einer Stammfunktion, wobei wir uns auf solche Fälle beschränken, bei denen die innere Funktion eine lineare Funktion ist.

Beispiel	**Verallgemeinerung**
Wir kennen eine Stammfunktion zu $f(z) = \sqrt{z}$, nämlich $F(z) = \frac{2}{3}\sqrt{z^3}$. Wir suchen eine Stammfunktion zu $g(x) = f(z(x))$ mit $z(x) = 5x + 3$. Wir finden $G(x) = \frac{1}{5}F(z(x)) = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(5x+3)^3}\right)$.	Es sei F eine Stammfunktion von f. Wir verketten f mit einer linearen Funktion $z(x) = ax + b$ und erhalten $g(x) = f(z(x)) = f(ax + b)$. Wir suchen eine Stammfunktion G von g. *Behauptung:* $G(x) = \frac{1}{a}\cdot F(z(x)) = \frac{1}{a}\cdot F(ax + b)$ ist eine Stammfunktion von g.

Durch Differentiation können wir uns sofort von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugen.

Es ist $G'(x) = \left[\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}\cdot F'(ax+b)\cdot a = F'(ax+b) = f(ax+b) = g(x)$.

Damit erhalten wir:

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist

$$\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]_{x_1}^{x_2}.$$

11 Zu berechnen ist $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt[n]{ax+b}\,\mathrm{d}x$, wobei $n > 0$, $x_1 < x_2$ und $ax + b \geqq 0$ für alle $x \in \langle x_1; x_2\rangle$ sei.

Lösung:

Setzen wir $g(x) = \sqrt[n]{ax+b}$ und $f(z) = \sqrt[n]{z}$, so ist g die Verkettung von f mit der linearen Funktion $z(x) = ax + b$. Eine Stammfunktion von f ist $F(z) = \frac{n}{n+1}\cdot z^{\frac{n+1}{n}}$ (↗ Regel (c) auf Seite 216). Damit ist

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt[n]{ax+b}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{a}\cdot\frac{n}{n+1}(ax+b)^{\frac{n+1}{n}}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{n}{a(n+1)}\left[\sqrt[n]{(ax_2+b)^{n+1}} - \sqrt[n]{(ax_1+b)^{n+1}}\right].$$

10 Berechnen Sie $\int_{x_1}^{x_2} (ax+b)^n\,\mathrm{d}x$, $n \neq -1$, n ganz, analog zum Beispiel D 11!

Aufgaben

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale!

1.↑ a) $\int_{0}^{5} (4x + 5)^2 \, dx$ b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2x - 6)^3} dx$ c) $\int_{-1}^{1} (6t + 1)^3 \, dt$

2.↑ a) $\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}x + 1\right)^4 dx$ b) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{(5 - x)^2}$ c) $\int_{0}^{2} \frac{4}{(4t + 3)^3} dt$

3.↑ a) $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{(2x + 5)^2} \, dx$ b) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{5 - 3x}}$ c) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x + 2}}$

4.↑ a) $\int_{-0,1}^{0,4} \sqrt{0,5 + x} \, dx$ b) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4x + 2}}$ c) $\int_{1}^{2} \sqrt[3]{(4x - 3)^5} \, dx$

Zusammenfassung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt einen engen Zusammenhang zwischen der Differential- und Integralrechnung her:

Ist f eine im Intervall $\langle a; b \rangle$ stetige Funktion und F irgendeine Stammfunktion von f, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes kann man die Berechnung bestimmter Integrale sehr rationell durchführen, vorausgesetzt, daß man eine Stammfunktion F des stetigen Integranden f kennt.	*Beispiel:* $\int_1^2 (x^2 + 1)\,dx$ ist zu berechnen. Der Integrand ist $f(x) = x^2 + 1$. Eine Stammfunktion von f ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$. Folglich ist $\int_1^2 (x^2 + 1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^2$ $= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1\right) = \frac{10}{3}$
Ist der Integrand eine durch Verkettung entstandene Funktion, bei der die innere Funktion eine lineare Funktion ist, so gilt	*Beispiel:* $\int_1^2 (4x + 5)^2\,dx$ ist zu berechnen.

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\,dx = \left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]_{x_1}^{x_2},$$ vorausgesetzt, daß f stetig und F eine Stammfunktion von f ist.	Der Integrand ist die Verkettung der Funktion $f(z) = z^2$ mit der linearen Funktion $z(x) = 4x + 5$. Eine Stammfunktion F von f ist $F(z) = \frac{1}{3}z^3$. Damit ist $$\int\limits_1^2 (4x+5)^2\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(4x+5)^3\right]_1^2$$ $$= \frac{1}{12}(13^3 - 9^3) = \frac{367}{3} \approx 122{,}3$$

Flächeninhaltsberechnungen

In den folgenden Lerneinheiten werden wir den Begriff des bestimmten Integrals zunächst bei der Berechnung von Flächeninhalten anwenden. Wir werden den Inhalt solcher Punktmengen berechnen, wie sie in den Bildern D 26 a) bis c) skizziert sind.
Schließlich wenden wir die Integralrechnung noch bei der Lösung eines physikalischen Problems an.

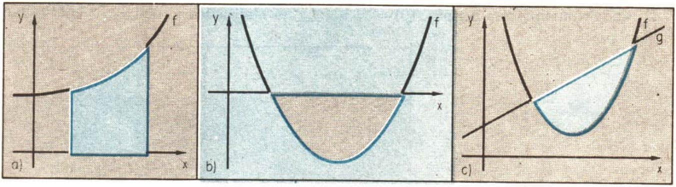


Bild D 26

8 Punktmengen, die oberhalb der x-Achse liegen

● 11 Berechnen Sie die Flächeninhalte der in den Bildern D 27 a) bis e) grau bzw. blau gerasterten Punktmengen unter Verwendung Ihnen bekannter Flächeninhaltsformeln!

● 12 Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

a) $f(a) = a^2 - \frac{15}{2}a + \frac{25}{2}$ b) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

Die Flächeninhalte der in den Bildern D 27 a) bis e) dargestellten Punktmengen können aus den angegebenen Daten durch Anwendung der Rechenoperationen Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division berechnet werden (↗ Seite 256).
Die Berechnung des Flächeninhalts der im Bild D 28 blau gerasterten Punktmenge erfordert jedoch die Anwendung der Integralrechnung (↗ Seite 256).

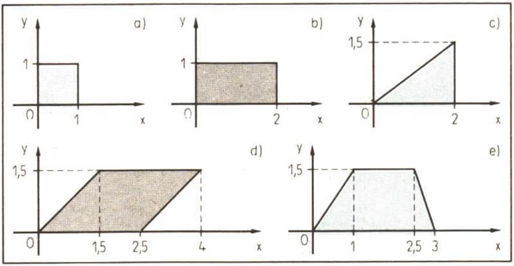


Bild D 27

13 Wiederholen Sie die in Definition D 2 auf Seite 237 angegebene Erklärung des Flächeninhalts, und berechnen Sie den Flächeninhalt der im Bild D 28 blau gerasterten Punktmenge!

12 Zu berechnen ist der Flächeninhalt der Punktmenge, die von dem Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ und der x-Achse begrenzt wird.

Lösung:

Der Graph von f ist eine nach unten geöffnete Parabel. Da f auch positive Funktionswerte annimmt (zum Beispiel $f(0) = 5$), hat f zwei Nullstellen x_1 und x_2 (↗ Bild D 29).

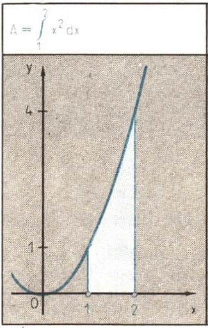


Bild D 28

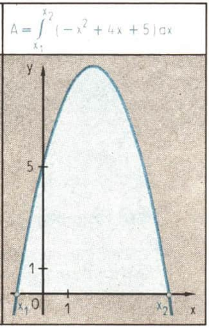


Bild D 29

Der Flächeninhalt der betreffenden Punktmenge ist

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (-x^2 + 4x + 5) \, dx.$$

Um dieses Integral berechnen zu können, benötigen wir die *Nullstellen von f*. Aus der quadratischen Gleichung

$-x^2 + 4x + 5 = 0$

erhält man $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$.
Folglich ist

$$A = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{5}$$
$$= -\frac{125}{3} + 50 + 25 - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5\right) = -\frac{126}{3} + 78 = -42 + 78 = 36$$

Ergebnis:

Der Flächeninhalt der vom Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ und der x-Achse begrenzten Punktmenge beträgt 36.

13 Wir berechnen den Flächeninhalt der im Bild D 30 grau gerasterten Punktmenge M.

Lösung:

Für den Flächeninhalt der Punktmenge M gilt $A = \int_{0,5}^{a} \sqrt{2x-1}\,dx + \int_{a}^{b} (-2x+7)\,dx$.

Zur Berechnung der hier auftretenden Integrale benötigen wir die Zahlen a und b. Die Zahl a ist die Abszisse des (im 1. Quadranten liegenden) Schnittpunktes der Graphen von f und g. Für diese Zahl a gilt $\sqrt{2a-1} = -2a + 7$.

Wenn wir beide Seiten der Gleichung quadrieren, erhalten wir:

$$2a - 1 = (-2a + 7)^2$$
$$2a - 1 = 4a^2 - 28a + 49$$
$$0 = 4a^2 - 30a + 50$$
$$0 = a^2 - \frac{15}{2}a + \frac{25}{2}.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$a_1 = \frac{20}{4} = 5; \qquad a_2 = \frac{10}{4} = 2,5$$

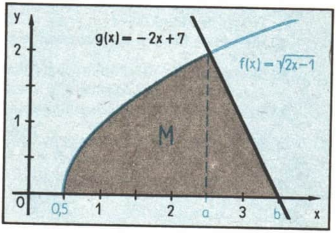


Bild D 30

(↗ Auftrag D 12 a)).
Wegen $f(x) \geqq 0$ für alle x des Definitionsbereiches von f und wegen $g(a_1) = g(5) = -2 \cdot 5 + 7 = -3$ kann bei a_1 kein Schnittpunkt liegen.
An der Stelle a_2 schneiden die Graphen von f und g einander, denn es ist $f(2,5) = g(2,5) = 2$.
Folglich ist die Abszisse a des gesuchten Schnittpunktes 2,5. Die Zahl b ist die Nullstelle von g, das heißt, es gilt $-2b + 7 = 0$. Folglich ist $b = 3,5$. Damit ist

$$A = \int_{0,5}^{2,5} \sqrt{2x-1}\,dx + \int_{2,5}^{3,5} (-2x+7)\,dx = \left[\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}\right]_{0,5}^{2,5} + \left[-x^2 + 7x\right]_{2,5}^{3,5}$$
$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{64} - \sqrt{0}\right] + \left[(-12,25 + 24,5) - (-6,25 + 17,5)\right] = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}.$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt von M beträgt $\frac{11}{3}$.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Flächeninhalte der in den Bildern D 31 a) und b) blau bzw. grau gerasterten Punktmengen!

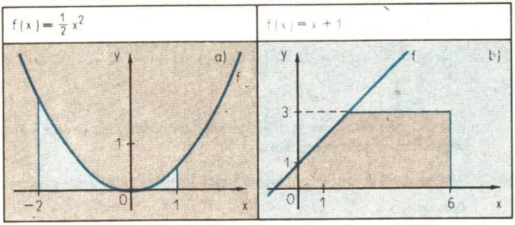


Bild D 31

2. Skizzieren Sie die Punktmenge, die von dem Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^3}{2} + 4$, der x-Achse und der Geraden $x = 2$ begrenzt wird! Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge!

3. **a)** Skizzieren Sie die Punktmenge, die oberhalb der x-Achse liegt und von dieser und dem Graph der Funktion $f(x) = (x - 3)(x^2 - 4)$ begrenzt wird!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge!

4. **a)** Skizzieren Sie die Punktmenge, die von dem Graph der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$, der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 8$ begrenzt wird!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge!

5. **a)** Skizzieren Sie die Punktmenge, die von dem Graph der Funktion $f(x) = \sqrt[4]{3x + 6}$, der x-Achse und der Geraden $x = 2$ begrenzt wird!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge!

9 Punktmengen, die unterhalb der x-Achse liegen

● 14 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,\mathrm{d}x$!

■ 14 Der Flächeninhalt der Punktmenge M, die von der x-Achse und der Parabel $y = x^2 - 5x + 4$ begrenzt wird, ist zu berechnen (↗ Bild D 32 a)).

Lösung:

Wie wir aus Auftrag D 14 wissen, ist das Integral $\int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,\mathrm{d}x$ negativ und kommt deshalb für den Flächeninhalt von M nicht in Frage.
Durch Spiegelung an der x-Achse wird die Punktmenge M in die Punktmenge M' (↗ Bild D 32 b)) übergeführt, die völlig oberhalb der x-Achse liegt. Bei dieser Spiegelung geht die Parabel $y = x^2 - 5x + 4$ in die Parabel $y = -(x^2 - 5x + 4)$ über. Die Punktmengen M und M' sind kongruent und haben deshalb denselben Flächeninhalt. Der Inhalt von M' ist (↗ Auftrag D 14)

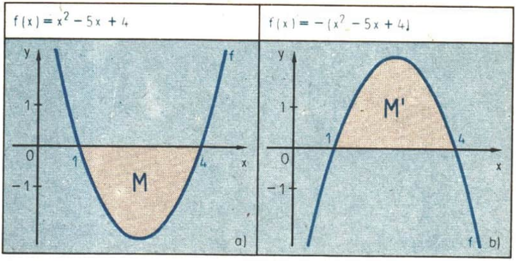


Bild D 32

$$A_{M'} = \int_1^4 [-(x^2 - 5x + 4)]\,\mathrm{d}x = -\int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,\mathrm{d}x = -(-4{,}5) = 4{,}5.$$

Ergebnis: $A_M = A_{M'} = 4{,}5$

Der Flächeninhalt der Punktmenge M ist also $A_M = \left|\int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,\mathrm{d}x\right|$.

Ist M eine unterhalb der x-Achse liegende Punktmenge, die von dem Graph einer Funktion f, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, so setzen wir analog zum Beispiel D 14 für ihren Flächeninhalt A fest[1]):

$$A = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

■ **15** Zu berechnen ist der Flächeninhalt der im Bild D 33 blau gerasterten Punktmenge, die unten durch einen Parabelbogen begrenzt wird (↗ Seite 260).

Lösung:

a) Wir ermitteln zunächst eine Gleichung für die im Bild D 33 skizzierte Parabel. Da deren Scheitel auf der y-Achse liegt, läßt sich die Parabel durch die Gleichung

(1) $f(x) = ax^2 + c$

beschreiben.

Aus Bild D 33 lesen wir sofort $c = -8$ ab. Damit folgt aus (1)

(2) $f(x) = ax^2 - 8$.

Es bleibt noch der Koeffizient a zu bestimmen.

Der Punkt $P(4; 0)$ liegt auf der Parabel. Die Koordinaten von P müssen deshalb der Gleichung (2) genügen, das heißt, es gilt

$0 = a \cdot 4^2 - 8$

beziehungsweise

$a = \frac{1}{2}$.

Folglich ist $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$ eine Gleichung der betreffenden Parabel.

b) Für den Flächeninhalt A der im Bild D 33 blau gerasterten Punktmenge erhalten wir:

---

[1]) Wir setzen natürlich voraus, daß $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

$$A = \left| \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x^2 - 8\right) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{6}x^3 - 8x\right]_{-2}^{3} \right|$$

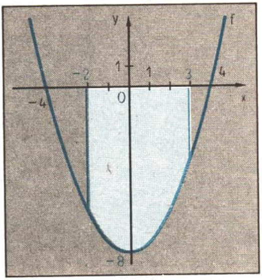
$$= \left| \left(\frac{27}{6} - 24\right) - \left(-\frac{8}{6} + 16\right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{35}{6} - 40\right) \right| = \left| -\frac{205}{6} \right|$$

Ergebnis:

Der Flächeninhalt beträgt $\frac{205}{6}$.

Bild D 33



■ 16 Es ist der Flächeninhalt der Punktmenge M zu berechnen, die von dem Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

Lösung:

a) Wir ermitteln zunächst die Integrationsgrenzen und prüfen, ob M oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt.

Dazu ist es erforderlich, die *Nullstellen* von f zu berechnen.
Die Nullstellen von f sind die Lösungen der Gleichung

$x(x^2 - 6x + 8) = 0.$

Man erhält $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$.
Wegen $f(1) = 3 > 0$ liegt die Punktmenge für $0 \leqq x \leqq 2$ oberhalb und für $2 \leqq x \leqq 4$ unterhalb der x-Achse.

b) Für den Flächeninhalt A_1 desjenigen Teiles der Punktmenge M, der oberhalb der x-Achse liegt, gilt

$$A_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 4.$$

Für den Flächeninhalt A_2 desjenigen Teils der Punktmenge M, der unterhalb der x-Achse liegt, erhalten wir

$$A_2 = \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 \right|$$

$$= |-4| = 4.$$

Ergebnis:
Der Flächeninhalt der Punktmenge M ist also $A_1 + A_2 = 8$.

Aufgaben

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen, und berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt der Punktmenge, die durch den Graph von f, die x-Achse und die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird!

1.↑ a) $f(x) = -x^2 + 1;\quad a = -3,\quad b = -1$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3;\quad a = -3,\quad b = +1$

c) $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 4;\quad a = \frac{1}{2},\quad b = +1$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2;\quad a = 1,\quad b = 6$

e) $f(x) = 3 - \sqrt{x};\quad a = 0,\quad b = 16$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{2}}} - \frac{3}{4};\quad a = 1,\quad b = 7$

2.↑ a) $f(x) = 2x + 1;\quad a = -3,\quad b = 1$

b) $f(x) = x^2 - 8x + 7;\quad a = 0,\quad b = 5$

c) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - 2;\quad a = 0,\quad b = 2$

d) $f(x) = \sqrt{x - 2} - 1{,}5;\quad a = 3,\quad b = 6$

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse einschließt, wenn
a) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5x$; b) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$
ist!

10 Punktmengen, die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen werden

■ 17 Wir berechnen den Flächeninhalt des im Bild D 34 a) blau gerasterten Parabelsegmentes.

Lösung:

Der Inhalt des im Bild D 34 a) dargestellten Parabelsegmentes ist die Differenz des Flächeninhalts des Trapezes ABCD und des Inhaltes der Punktmenge, die von der Parabel, der x-Achse und den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ begrenzt wird (↗ Seite 262).

a) Bestimmen der Integrationsgrenzen

Die Integrationsgrenzen sind die Abszissen der Schnittpunkte von Gerade und Parabel, also die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 6 = 2x + 1$ bzw. $x^2 - 6x + 5 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$.

b) Berechnen des Flächeninhalts

Der Flächeninhalt A des Parabelsegmentes ist die Differenz der Zahlen $\int\limits_1^5 f_1(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int\limits_1^5 g_1(x)\,\mathrm{d}x$. Dann gilt

$A = \int\limits_1^5 f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^5 g_1(x)\,\mathrm{d}x$ und wegen der Regeln (a) und (b) auf Seite 250

$A = \int\limits_1^5 (f_1(x) - g_1(x))\,\mathrm{d}x$. Folglich ist

$$A = \int\limits_1^5 [(2x+1) - (x^2 - 4x + 6)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x\right]_1^5 = \frac{32}{3}.$$

Ergebnis:

Der Flächeninhalt des Parabelsegmentes beträgt $\frac{32}{3}$.

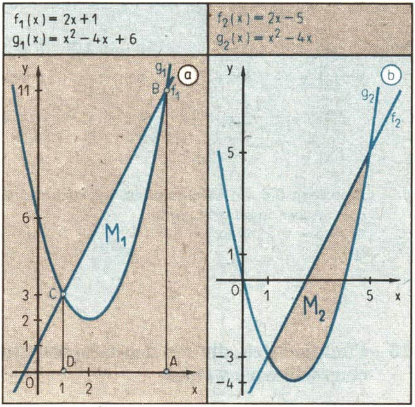


Bild D 34

■ 18 Wir berechnen den Flächeninhalt des im Bild D 34 b) grau gerasterten Parabelsegmentes.

Lösung:

Im Gegensatz zu Beispiel D 17 liegt das hier betrachtete Parabelsegment teilweise unterhalb der x-Achse. Durch eine Verschiebung parallel zur y-Achse läßt sich erreichen, daß die Punktmenge M_2 auf die im Bild D 34 a) dargestellte Punktmenge M_1 abgebildet wird. Da kongruente Punktmengen ein und denselben Flächeninhalt haben, gilt

$$A_{M_2} = A_{M_1} = \frac{32}{3}.$$

Offensichtlich stimmen die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen von f_2 und g_2 mit den Abszissen der Schnittpunkte der Graphen von f_1 und g_1 überein. Für jedes x gilt:

$f_1(x) = f_2(x) + 6$ und $g_1(x) = g_2(x) + 6$.

Deshalb ist

$$\int_1^5 (f_1(x) - g_1(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^5 [(f_2(x) + 6 - (g_2(x) + 6)]\,\mathrm{d}x = \int_1^5 (f_2(x) - g_2(x))\,\mathrm{d}x.$$

Wir können also den Flächeninhalt der Punktmenge M_2 nach demselben Verfahren wie im Beispiel D 17 berechnen, das heißt, es ist

$$A_{M_2} = \int_1^5 (f_2(x) - g_2(x))\,\mathrm{d}x.$$

Es sei nun M eine beliebige Punktmenge, die von den Graphen zweier Funktionen f und g eingeschlossen wird (↗ Bild D 35). Die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen seien a und b. Der Graph von f sei der obere und der Graph von g der untere Rand von M, das heißt, für jedes x aus $\langle a; b\rangle$ gilt $f(x) \geqq g(x)$.

Analog zu den Beispielen D 17 und D 18 setzen wir für den Flächeninhalt von M fest:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

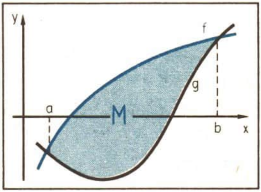


Bild D 35

■ 19 Es ist der Flächeninhalt der von den Parabeln

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$$

eingeschlossenen Punktmenge zu berechnen.

Lösung:

a) Berechnen der Abszissen der Schnittpunkte der Parabeln

Die Abszissen der Schnittpunkte der gegebenen Parabeln sind die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ beziehungsweise $x^2 = 8$.

Die Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 = 2\sqrt{2}$ und $x_2 = -2\sqrt{2}$.

b) Berechnen des Flächeninhalts A der gegebenen Punktmenge

Es ist

$$A = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left[\left(-\frac{1}{8}x^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\right]\mathrm{d}x = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(-\frac{3}{8}x^2 + 3\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{8}x^3 + 3x\right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{8}\cdot 16\cdot\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot 16\cdot\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right)$$

$$= -4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

Ergebnis: $A = 8\sqrt{2}$

● 15 Begründen Sie, daß Sie den Flächeninhalt der im Beispiel D 19 gegebenen Punktmenge auch wie folgt berechnen können!

$$A = 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left(-\frac{3}{8}x^2 + 3\right)\mathrm{d}x$$

■ 20 Wie groß ist die positive Zahl a zu wählen, damit der Flächeninhalt der im Bild D 36 blau gerasterten Punktmenge M gleich $\frac{5}{3}$ ist?

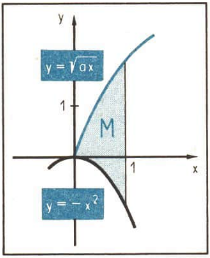


Bild D 36

Lösung:

Es ist $A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$, wobei $f(x) = \sqrt{ax}$ und $g(x) = -x^2$ zu setzen ist, also

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{ax} - (-x^2)\right) dx.$$

Wir errechnen zuerst A nach dieser Formel:

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{ax} + x^2\right) dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{a}\sqrt{x^3} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{a} + \frac{1}{3}.$$

Setzen wir nun für A den vorgegebenen Wert ein, so erhalten wir eine Gleichung, aus der wir a errechnen können.

$$\frac{5}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{a} + \frac{1}{3}; \qquad \sqrt{a} = 2; \qquad a = 4$$

Ergebnis:

Wählt man $a = 4$, so ist $\frac{5}{3}$ der Flächeninhalt von M.

Aufgaben

1. Welchen Flächeninhalt hat die Punktmenge, die von den Parabeln

a) $y = x^2 - 1$ und $y = -2x^2 + 11$;

b) $y = 2x^2 - 2x - 4$ und $y = (x - 2)^2$

eingeschlossen wird?

2. Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt der Punktmenge, die von der Parabel und der Geraden eingeschlossen wird!

a) $y = x^2 - 4x + 7$; $y = x + 3$ b) $y = x^2 + 6x + 11$; $y = -x + 1$

3. Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt der Punktmenge, die von den Graphen der Funktionen f und g und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird!

a) $f(x) = x^2 - 3x + 14$; $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$; $a = 1$, $b = 4$

b) $f(x) = x^3$; $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$; $a = -1$, $b = 2$

c) $f(x) = x^{-2}$; $g(x) = -2x + 8$; $a = 1$, $b = 2$

d) $f(x) = x^{-3}$; $g(x) = x + 1$; $a = 2$, $b = 4$

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt der im Bild D 37 blau gerasterten Punktmenge!

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt der im Bild D 38 blau gerasterten Punktmenge!

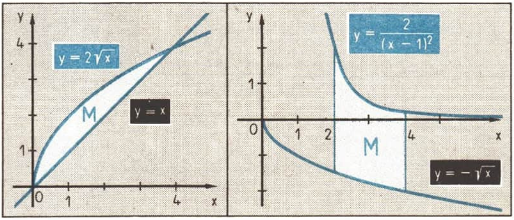


Bild D 37 Bild D 38

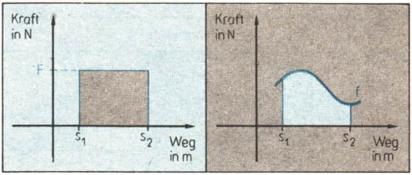
11 Physikalische Arbeit

Um einen Körper, an dem eine Kraft $\vec{F}$ angreift, von einer Stelle s_1 bis zu einer Stelle s_2 zu verschieben, muß eine Arbeit aufgewendet werden.
Dabei sollen Kraft- und Wegrichtung übereinstimmen und der Weg geradlinig sein.
Ist die Kraft $\vec{F}$ längs des Weges von s_1 bis s_2 konstant und F der Betrag dieser Kraft, so beträgt die Arbeit

$$W = F \cdot (s_2 - s_1).$$

Die Maßzahl von W ist gleich der Maßzahl des Flächeninhalts des im Bild D 39 grau gerasterten Rechtecks.
Ist die Kraft längs des Weges nicht konstant, so hängt $\vec{F}$ vom Weg ab.
Es sei f diejenige Funktion, die den Betrag der Kraft in Abhängigkeit vom Weg s im Intervall $s_1 \leqq s \leqq s_2$ angibt. Auch in diesem Fall wird die Arbeit so definiert, daß ihre Maßzahl gleich der Maßzahl der im Bild D 40 blau gerasterten Punktmenge ist, das heißt

$$W =_{\mathrm{Df}} \int_{s_1}^{s_2} f(s)\,\mathrm{d}s.$$



Bilder D 39, D 40

■ 21 Ein Körper sei an einer Schraubenfeder befestigt (↗ Bild D 41 auf Seite 266). Bewegt man den Körper von s_1 nach s_2, so wird die Feder gedehnt. Die dazu erforderliche Kraft, die der Zugkraft der Feder entgegenwirkt, ist dem zurückgelegten Weg proportional. Der Proportionalitätsfaktor k heißt die **Federkonstante.**
Zu berechnen ist die Arbeit, die man aufwenden muß, um den Körper von s_1 nach s_2 zu bewegen.

Lösung:

Da F zu dem Weg s proportional ist, gilt

$F = f(s) = k \cdot s$.

Die aufzuwendende Arbeit beträgt

$$W = \int_{s_1}^{s_2} k \cdot s \cdot \mathrm{d}s = k \int_{s_1}^{s_2} s \, \mathrm{d}s = \frac{k}{2} [s^2]_{s_1}^{s_2}.$$

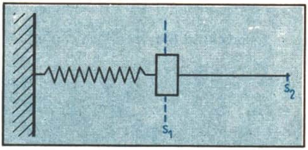


Bild D 41

Ergebnis: $W = \frac{k}{2}(s_2^2 - s_1^2)$

● 16 Berechnen Sie die Arbeit, die bei der Dehnung einer Feder verrichtet wird, für $k = 0{,}4\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{cm}^{-1}$, $s_1 = 0\,\mathrm{cm}$ und $s_2 = 12\,\mathrm{cm}$!

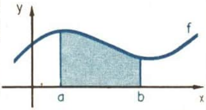
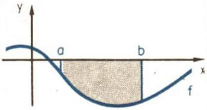
Aufgaben

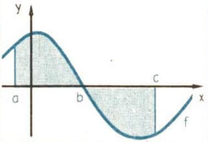
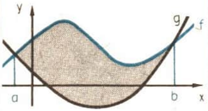
1. An einem Körper greift eine Kraft $\vec{F}$ vom Betrage F an, die als Funktion des Weges s gegeben ist: $F = f(s) = k \cdot s^2 - \frac{1}{2}s$ (k eine Konstante).
Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um den Körper von s_1 nach s_2 geradlinig zu verschieben!

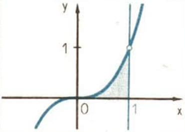
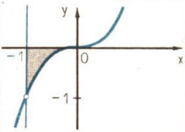
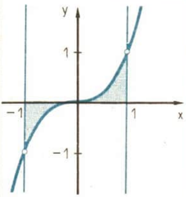
2. Zwischen zwei ungleichnamigen Ladungen Q_1 und Q_2, die sich im Abstand r voneinander befinden, wirkt die Kraft $\vec{F}$ mit $F(r) = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ (k eine Konstante).
Die Ladung Q_2 soll auf geradlinigem Wege von r_1 nach r_2 ($r_1 < r_2$) gebracht werden. Berechnen Sie die zu verrichtende Arbeit!

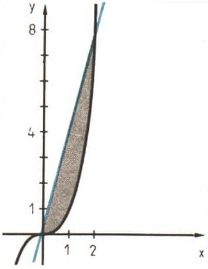
Zusammenfassung

Mit Hilfe des bestimmten Integrals lassen sich **Flächeninhalte gewisser Punktmengen** berechnen.
Dabei unterscheidet man folgende Fälle.

	Lage der Punktmenge		Flächeninhalt
(1)	Oberhalb der x-Achse		$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
(2)	Unterhalb der x-Achse		$A = \left\lvert \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert$

(3)	Teilweise oberhalb, teilweise unterhalb der x-Achse		$A = \int_a^b f(x)\,dx + \left\lvert \int_b^c f(x)\,dx \right\rvert$
(4)	Von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen		$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

Beispiele zu (1) bis (4)			
	M wird begrenzt durch		Flächeninhalt
(1)	Graph von $f(x) = x^3$, x-Achse und Gerade $x = 1$		$A = \int_0^1 x^3\,dx$ $= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$
(2)	Graph von $f(x) = x^3$, x-Achse und Gerade $x = -1$		$A = \left\lvert \int_{-1}^0 x^3\,dx \right\rvert$ $= \left\lvert \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0 \right\rvert = \frac{1}{4}$
(3)	Graph von $f(x) = x^3$, x-Achse und Geraden $x = 1$ und $x = -1$		$x_0 = 0$ ist Nullstelle im Intervall $\langle -1; 1 \rangle$. $A = \left\lvert \int_{-1}^0 x^3\,dx \right\rvert + \int_0^1 x^3\,dx$ $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(4)	Graph von $f(x) = x^3, \quad x \geqq 0$; Graph von $f(x) = 4x, \quad x \geqq 0$		Abszissen der Schnittpunkte: $x_1 = 0;\ x_2 = 2$ $A = \int\limits_0^2 (4x - x^3)\,\mathrm{d}x$ $= \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$ $= 8 - 4 = 4$

Es ist also besonders zu beachten:
Soll der Flächeninhalt einer Punktmenge M berechnet werden, die zwischen der x-Achse und dem Graph einer Funktion f liegt, so ist zunächst zu prüfen, ob

M oberhalb oder unterhalb der x-Achse

oder **teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse**

liegt. Dazu ist es erforderlich zu untersuchen, ob f **im Integrationsintervall Nullstellen** hat.

Übungen und Anwendungen

Berechnen Sie die folgenden Integrale!

1.↑ a) $\int\limits_{-2}^{1} \left(5x^4 - \frac{1}{5}x^2 - 3\right) \mathrm{d}x$ b) $\int\limits_{-1}^{4} (3 - t^2 + t^3)\,\mathrm{d}t$ c) $\int\limits_{1}^{5} \frac{4x^4 + 5x^3 + 1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

d) $\int\limits_{0}^{\pi} \left(\sin\frac{\pi}{2} + 1\right) \mathrm{d}x$ e) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ f) $\int\limits_{-4}^{4} \frac{4}{\sqrt{5 - x}}\,\mathrm{d}x$

2.↑ a) $\int\limits_{0}^{3} (3x^2 + 4x + 5)\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_{-1}^{4} (v^3 - v^2 + 3)\,\mathrm{d}v$ c) $\int\limits_{-2}^{-1} \left(\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right) \mathrm{d}x$

d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2x + \cos\pi)\,\mathrm{d}x$ e) $\int\limits_{0}^{-\sqrt{3}} (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x$ f) $\int\limits_{-4}^{0} \left[(2x + 1)^3 + \frac{1}{(1 - 2x)^3}\right] \mathrm{d}x$

3.↑ a) $\int\limits_{0}^{1} (a_2x^2 + a_1x + a_0)\,\mathrm{d}x$ b) $\int\limits_{1}^{2} \frac{w^2}{z^3}\,\mathrm{d}z$ c) $\int\limits_{0}^{1} \frac{z}{\sqrt{x + 1}}\,\mathrm{d}z$

4.↑ a) $\int\limits_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} (\sqrt{a} - z + \sqrt{b})\,\mathrm{d}z$ b) $\int\limits_{1}^{2} \frac{w^2}{z^3}\,\mathrm{d}w$ c) $\int\limits_{0}^{1} \frac{z}{\sqrt{x + 1}}\,\mathrm{d}x$

5. Für welche Zahl c ist

a) $\int\limits_1^c x^{-2}\,dx = \frac{1}{2}$; b) $\int\limits_1^c \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx = \frac{1}{10}$?

6. Berechnen Sie jeweils k!

a) $\int\limits_0^k x\,dx = 6$ b) $\int\limits_0^1 kx\,dx = 0{,}2$

c) $\int\limits_0^1 (x^2 + k)\,dx = 1$ d) $\int\limits_0^1 (kx + k)\,dx = 1$

7. Berechnen Sie die Flächeninhalte der im Bild D 27 grau bzw. blau gerasterten Punktmengen mit Hilfe der Integralrechnung!

8. Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$, die x-Achse und die Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ ($x_1 < x_2$) begrenzen eine Punktmenge.
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge!
b) Zeigen Sie, daß man dasselbe Ergebnis erhält, wenn man die Formel

$A = \frac{x_2 - x_1}{6}(f(x_1) + f(x_2) + 4f(x_m))$ anwendet, wobei $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ist!

9. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ und $g(x) = 3x - 2$ eingeschlossen wird!

10. Spiegeln Sie die Parabel $y = x^2$ an der Geraden $y = x$! Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die von der Parabel $y = x^2$ und ihrem Spiegelbild begrenzt wird!

11. Es seien die Gerade $y = 2x - 7$ und die Parabel $y = -x^2 + 8x - 12$ gegeben.
a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von Gerade und Parabel!
b) Zeichnen Sie die Gerade und die Parabel in ein und dasselbe Koordinatensystem!
c) Die Gerade schneidet von der Parabel ein Segment ab. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segmentes!

12. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die von den Graphen der Funktionen

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$;

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $g(x) = \frac{1}{12}x^2 + 6$

eingeschlossen wird! Veranschaulichen Sie jeweils die Punktmenge!

13. Es seien die Funktionen $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$ und $g(x) = 2x^2 + 2x$ gegeben.
a) Berechnen Sie Nullstellen und lokale Extrempunkte von f!
b) Berechnen Sie Nullstellen und lokale Extrempunkte von g!
c) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g!
d) Skizzieren Sie die Graphen von f und g in ein und dasselbe Koordinatensystem!
e) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von den Graphen von f und g eingeschlossenen Punktmenge!

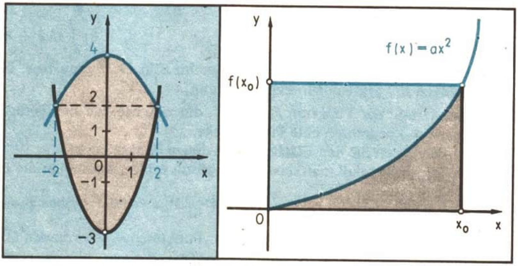
14. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 11x^2 + 18$.
a) Berechnen Sie die Nullstellen von f! b) Berechnen Sie die lokalen Extrema von f!
c) Zeichnen Sie den Graph von f im Intervall $\langle -4; 4\rangle$!
d) Zeichnen Sie die Tangente an den Graph von f im lokalen Maximumpunkt, und berechnen Sie die Schnittpunkte dieser Tangente mit dem Graph von f!
e) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die von dieser Tangente und dem Graph von f begrenzt wird!

15. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^{-2}$.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge M, die von dem Graph von f, der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 5$ begrenzt wird!

b) Welche Länge hat ein Rechteck mit der Breite 4, dessen Flächeninhalt mit dem der Punktmenge M übereinstimmt?

c) Veranschaulichen Sie die Punktmenge M und das in b) verlangte Rechteck!



Bilder D 42, D 43

16. Gegeben seien die Funktion $f(x) = x^3$ und eine Gerade $y = ax$ $(a > 0)$.

a) Die Gerade schneidet den Graph von f im 1. Quadranten in einem Punkt P. Berechnen Sie die Koordinaten von P!

b) Die Gerade $y = ax$, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse durch den Punkt P begrenzen eine Punktmenge. Beweisen Sie, daß der Graph von f diese Punktmenge in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt!

17. A_n sei der Flächeninhalt der durch die Graphen von $f(x) = x$ und $g(x) = x^n$ im Intervall $\langle 0; 1 \rangle$ begrenzten Punktmenge.

a) Berechnen Sie A_n! b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$!

18. Eine Punktmenge werde durch zwei quadratische Parabeln begrenzt (↗ Bild D 42).

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Parabeln!

b) Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Punktmenge!

19. Gegeben seien eine Parabel $f(x) = ax^2$ $(a > 0)$ und eine positive Zahl x_0. Zeigen Sie, daß die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen x_0 und $f(x_0)$ durch die Parabel im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird (↗ Bild D 43)!

20. Der Punktmenge M, von der Parabel $f(x) = 3 - \frac{1}{3}x^2$ und der x-Achse begrenzt, ist ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

a) Gibt es ein solches Rechteck mit maximalem Umfang?

b) Gibt es ein solches Rechteck mit maximalem Flächeninhalt?

Berechnen Sie im Fall b) das Verhältnis der Flächeninhalte des Rechtecks und der Punktmenge M!

21. Die senkrecht auf der Parabelachse stehende Sehne $\overline{P_1P_2}$ des im Bild D 44 skizzierten Parabelsegmentes sei 10 cm lang. Die im Punkt P_1 an die Parabel gelegte Tangente bilde mit der Sehne einen Winkel von 45°.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Parabel!
Hinweis: Wählen Sie das Koordinatensystem so, daß der Scheitel der Parabel im Ursprung liegt!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Parabelsegmentes!

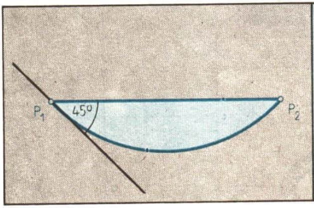


Bild D 44

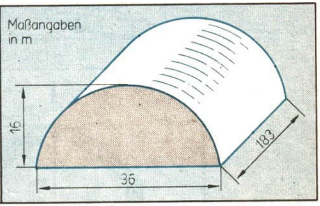


Bild D 45

22. Beim Bau eines Speichers werden parabolische Bogenkonstruktionen verwendet (↗ Bild D 45).
a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Parabel!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Querschnittsfläche des Speichers!
c) Berechnen Sie das Volumen des Speichers!

23. Gegeben sei die Funktion f mit

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 30$; b) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 12$.

Berechnen Sie die lokalen Extremstellen x_1 und x_2 von f und den Flächeninhalt der Punktmenge, die von dem Graph von f, der x-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt wird!

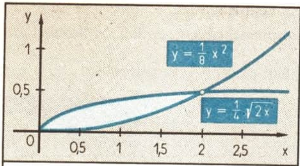
24. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
a) Untersuchen Sie das Verhalten von f!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die von dem Graph der Funktion f und der Tangente an den Graph von f im lokalen Maximumpunkt eingeschlossen wird!
c) Es seien x_1 und x_2 die unter a) berechneten Stellen, an denen f lokale Minima hat. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die durch den Graph von f, die Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ und die unter b) ermittelte Tangente begrenzt wird!

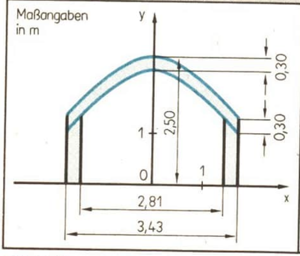
25. Der Querschnitt der Tragfläche eines Flugkörpers wird durch die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2x}$ und $g = \frac{x^2}{8}$ begrenzt (↗ Bild D 46 auf Seite 272).
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Querschnitts!

26. Bild D 47 zeigt eine Punktmenge M, die durch die Graphen von vier Funktionen begrenzt wird (↗ Seite 272).
a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2!
b) Unter welchem Winkel schneiden einander die Graphen von f_1 und f_2 im Punkt P_1?
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von M!

27. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von den Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ und $g(x) = \sqrt{8x}$ eingeschlossenen Punktmenge!

Bild D 46





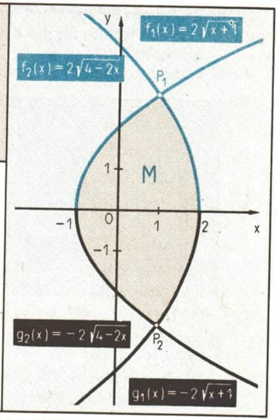


Bild D 48

Bild D 47

28. Ein Tonnengewölbe hat die im Bild D 48 angegebenen Maße. Die Gewölbedecke ist parabolisch gekrümmt.

a) Wieviel Kubikmeter Mauerwerk sind je Meter Gewölbelänge (einschließlich der Seitenwände) erforderlich?

b) Wieviel Prozent des erforderlichen Mauerwerks entfallen auf die Gewölbedecke?

c) Wieviel Kubikmeter Luft sind je Meter Gewölbelänge enthalten?

29. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ und $g(x) = x$ eingeschlossen wird!

Lösungshinweise:

1. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g!
2. Skizzieren Sie die Punktmenge, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird!
3. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge!
   Beachten Sie dabei, daß Sie hier – bedingt durch drei Schnittpunkte der Graphen – zwei Integrale zu berechnen haben!

30. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = 4x - x^3$ und $g(x) = 2x - x^2$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g!

b) Ermitteln Sie die Nullstellen beider Funktionen!

c) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f und g!

d) Skizzieren Sie die Graphen von f und g!

e) Die Graphen der Funktionen f und g begrenzen zwei Punktmengen. Berechnen Sie die Flächeninhalte beider Punktmengen!

31. Welche Arbeit ist aufzuwenden, um ein Raumschiff mit der Masse $m = 10^4$ kg bis zum Abstand R von der Erdoberfläche zu bringen?
(Die für die Beförderung der Trägerrakete notwendige Arbeit lassen wir hier unberücksichtigt.)
Es ist $F(r) = k\dfrac{M \cdot m}{r^2}$ mit $k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m (Erdradius), $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg (Erdmasse).

32. Ein Körper habe zum Zeitpunkt $t = 0$ s die Anfangsgeschwindigkeit 2 $\mathrm{ms^{-1}}$. Auf ihn wirke eine Kraft, die eine gleichmäßige Beschleunigung des Körpers von 0,6 $\mathrm{ms^{-2}}$ hervorruft.
Welchen Weg hat der Körper nach 6 s zurückgelegt?

33. Ein Motor gibt auf Grund schwankender Belastung eine von der Zeit abhängige Leistung ab. Bild D 49 zeigt den Graph der Funktion, die die Leistung in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Dabei gilt

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 & \text{für } 0 \leqq t \leqq 1 \\ t - \dfrac{1}{2} & \text{für } 1 \leqq t \leqq 5. \end{cases}$$

Berechnen Sie die vom Motor verrichtete Arbeit im Zeitintervall von 0 bis 5 Sekunden! (Die Maßzahl der Arbeit entspricht gerade der Maßzahl des Flächeninhalts der im Bild D 49 blau gerasterten Punktmenge.)

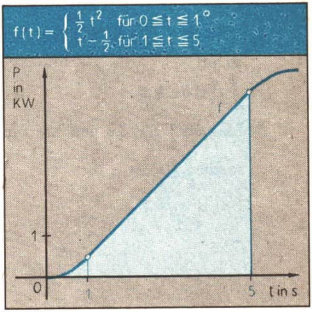


Bild D 49

34. Bestimmen Sie alle Zahlen p, für die

$$\int_1^5 (x^2 + px + 11)\,\mathrm{d}x = 13\tfrac{1}{3}$$

ist!

35.* Gegeben sei die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, die folgenden Bedingungen genügt. Der Graph der Funktion geht durch den Ursprung, schneidet die x-Achse auch an der Stelle 4, und es ist $f'(0) = 2$, $f''(0) = 4$.

a) Berechnen Sie die Zahlen a, b, c und d!
b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f, und skizzieren Sie den Graph von f!
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt!

36.* Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$ $(x > 0)$.

Die Gerade $y = mx + n$ möge den Graph von f in den Punkten $P_1\,(1;\,2)$ und $P_2\left(4;\,\dfrac{1}{8}\right)$ schneiden.

a) Bestimmen Sie m und n!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die vom Graph von f und der Geraden eingeschlossen wird!

37.* Berechnen Sie den Flächeninhalt der Punktmenge, die begrenzt wird vom Graph der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x^3}$ $(x > 0)$, der x-Achse und der Geraden $x = t$ $(t > 1)$!

a) Fertigen Sie eine Skizze der betreffenden Punktmenge an!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Punktmenge in Abhängigkeit von t!
c) Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} A(t)$!

38.* Geben Sie eine stetige Funktion f an, die für alle reellen Zahlen x des Intervalls $\langle 0; 10 \rangle$ definiert ist und für die gilt

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Primzahl} \\ 0, & \text{falls } n \in N \text{ und } n \text{ keine Primzahl!} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt, den der Graph der von Ihnen ermittelten Funktion mit der x-Achse einschließt!

39.* Begründen Sie!

a) Existiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und hat f im Intervall $\langle a; b \rangle$ keine negativen Funktionswerte, so gilt
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0.$$

b) Existiert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und hat f im Intervall $\langle a; b \rangle$ keine positiven Funktionswerte, so gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq 0.$

L Ausgewählte Lösungen

Zum Kapitel A: Zahlenfolgen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Kombinatorik

LE 2 ● 4 **a)** Anfang -7; jedes Glied um 4 größer als das vorangehende.
$\ldots; 5; 9; 13; 17$

b) Quadratzahlen, dazu 1 addiert. $\ldots; 26; 37; 50; 65$

c) Abwechselnd positiv und negativ, Zähler und Nenner um 1 größer werdend; Anfang $\frac{1}{2}$.
$\ldots; \frac{5}{6}; -\frac{6}{7}; \frac{7}{8}; -\frac{8}{9}$

d) Abwechselnd größer und kleiner als 1, Abstand zur 1 immer der 10. Teil vom vorigen
$\ldots; 1{,}001; 0{,}999; 1{,}0001; 0{,}9999$

e) Die Zahl 1 wechselt mit den Brüchen $\frac{1}{n}$.
$\ldots; 1; \frac{1}{5}; 1; \frac{1}{6}$

f) Von Glied zu Glied Multiplikation mit $\sqrt{2}$; Anfang $\sqrt{2}$
$\ldots; 4\sqrt{2}; 8; 8\sqrt{2}; 16$

● 6 **a)** $a_k = 4k - 11; a_{23} = 81$

4. **a)** $a_k = \frac{2k}{2k-1}; a_1 = 2; \ldots; \frac{10}{9}; \frac{12}{11}; \frac{14}{13}; \frac{16}{15} = a_8$

b) $a_1 = 80; a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k; \quad a_k = \frac{80}{2^{k-1}}$
$a_1 = 80; 40; 20; 10; \ldots; 0{,}625 = a_8$

c) $a_k = (-1)^k \cdot \frac{2k}{3^k}; a_1 = -\frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \ldots; -\frac{10}{243}; \frac{12}{729}; -\frac{14}{2187}; \frac{16}{6561} = a_8$

LE 3 3. **a)** $b_1 > -5 \geqq b_2; \quad b_{59} > -120 \geqq b_{60}$

b) $b_4 > -5 \geqq b_5; \quad b_{12} > -120 \geqq b_{13}$

c) $b_1 > -5 \geqq b_2; \quad b_{12} > -120 \geqq b_{13}$

6.

	a)	b)	c)	d)	e)
a_{15}	96	115,5	5,5	75,6	$6\frac{1}{3}$
a_{27}	240	223,5	$-12,5$	178,8	$14\frac{1}{3}$

LE 4 4. b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

5. b) $\sum_{k=2}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n$

8. $\sum_{k=0}^{n-1} 4^k = \frac{4^n - 1}{3}$

9.* $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1}$ Sie kann auch für gebrochene Zahlen zutreffen.

LE 5 1. a) (mindestens) 63 Umsetzungen

2. b) 120 mögliche „Wörter"

LE 6 3. b) $\sum_{k=1}^{n} (4k - 3) = n(2n - 1)$ c) $\sum_{k=1}^{n} (9k - 2) = \frac{n(9n + 5)}{2}$

5. b) $\sum_{k=2}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n$

LE 7 4. $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$

LE 8 1. a) $n = 23$ b) $a_{37} = 43$

2. $a_1 = 5{,}25$; $a_{15} = 22{,}75$

3. a) $a_1 = 3$ b) $s_7 = \frac{463}{243}$ c) $n = 16$

5. a) ca. 78°

8. a) 1300,– M b) 1508,– M

9. a) rund 2,96 Mill. m^3

b) rund 3 Mill. m^3 (unter Verwendung von $q = 1{,}027$)

Weitere Aufgaben zu den Lerneinheiten A 2 bis A 8

2. a) $a_1 = 0$; $a_2 = 0{,}9$; $a_3 = 0{,}99$; $a_4 = 0{,}999$; $a_5 = 0{,}9999$

b) $a_1 = 1$; $a_2 = 0$ $a_3 = -1$; $a_4 = 0$; $a_5 = 1$

c) $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 3$; $a_5 = 4$

3.* a) $a_k = \frac{4k}{2k - 1}$ $(k \geqq 0)$ bzw. $a_k = \frac{4(k-1)}{2k-3}$ $(k > 0)$

$$a_0 = 0; \quad a_{k+1} = a_k \frac{2k-1}{2k+1} + \frac{4}{2k+1} \quad (k \geqq 0)$$

bzw. $a_1 = 0;\quad a_{k+1} = a_k \dfrac{2k-3}{2k-1} + \dfrac{4}{2k-1} \quad (k < 0)$

b) $a_k = \dfrac{k+1}{2^k} \quad (k \geqq 0)$ bzw. $a_k = \dfrac{k}{2^{k-1}} \quad (k > 0)$

$a_0 = 1;\ a_{k+1} = \dfrac{1}{2} a_k + \dfrac{1}{2^k} \quad (k \geqq 0)$

bzw. $a_1 = 1;\ a_{k+1} = \dfrac{1}{2} a_k + \dfrac{1}{2^{k-1}} \quad (k > 0)$

c) $a_k = k^2 + k$; rekursiv $a_1 = 2;\ a_{k+1} = a_k + 2(k+1)$

d) $a_k = \dfrac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}$

$a_1 = \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4};\ a_{k+1} = a_k \cdot \dfrac{(k+1)^2 \cdot (k+3)^2}{k \cdot (k+2)^2 \cdot (k+4)}$

4. **a)** $\ldots, \dfrac{9}{4}, \dfrac{27}{8}, \dfrac{81}{16}, \dfrac{243}{32}$ Für $k = 19$ gilt: $a_{19} < 1000 < a_{20}$.

6.* (a_k) fällt monoton wegen $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \left(= \dfrac{2k^2 + 3k - 2}{2k^2 + 3k + 1} \right) < 1$ und $a_k > 0$ für alle k.

(b_k) fällt monoton wegen $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} \left(= \dfrac{2k^2 - k}{2k^2 - k - 1} \right) > 1$ und $b_k < 0$ für alle $k > 1$.

11. 45045 **12.** 226,1 **16.** insgesamt 191 Tabletten

LE 9 ● **27** **a)** $P_5 = 5 \cdot 24 = 120$ Das 5. Element kann in jeder der 24 Permutationen von 4 Elementen an 5 verschiedenen Stellen stehen.

b) Es gibt 720 verschiedene Einlaufmöglichkeiten.

5. **c)** $\dfrac{1}{n-2}$ **d)** $n(n+1)$ **e)** $(n-2)! \cdot n$

6. **b)** 5 **d)** nicht lösbar

LE 10 ● **29** 120; 650 ● **30** 60; 120; 120

2. **c)** 3024 **d)** 132 **3.** **c)** $\dfrac{1}{2} n!$ **d)** $(n+1)!$

9. 324632; 52360; 6545

LE 11 **1.** 75287520 **3.** 14

5. **b)** 3199960 **7.** **a)** 13983816 **b)** 12271512

Übungen und Anwendungen

4. 2583 Ziegel **5.** **c)** 110

6. Ohne Beachtung der Reihenfolge: 10

Mit Beachtung der Reihenfolge: 60

10. **a)** 126 **b)** 210 **c)** 1680 **d)*** 3570

12. **a)** 63 **b)*** 32 **14.** $5 \cdot 10^{-6}$ g

16. Halbwertzeit: 1570 a Alter rund 9000 a

17.* **a)** 943 mbar **b)** rund 240 m **c)** rund 4800 m

20. **a)** 5 a **b)** 1200000 Mark

Zum Kapitel B: Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen

LE 1 **1.** **a)** monoton wachsend; $-1 \leqq a_n$
b) monoton fallend; $4 < a_n \leqq 6$
c) nicht monoton; $-1 \leqq a_n \leqq 1$

6. z. B. $\left(-\frac{1}{n}\right)$ oder $\left(-1-\frac{1}{n}\right)$

LE 2 **● 6** **a)** Jedes n mit $n > 100$ **b)** Jedes n mit $n > 1000$
2. **b)** $G_u = 0$; $G_0 = 1$ **c)** $G_u = 0$; G_0 existiert nicht

LE 3 **● 9** $n > 1000$ **4.** **a)** ja für $x = -1{,}005$; $-\frac{12}{11}$; $-0{,}98$

LE 4 **1.** **a)** $\left|\frac{n+1}{n}-1\right| < \varepsilon$ ist gleichwertig mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ist nun ε beliebig vorgegeben, so ist die letzte Ungleichung für fast alle n erfüllt.

LE 5 **3.**

$a_1 = 1$	$a_5 = 1{,}4636$	$a_9 = 1{,}5398$
$a_2 = 1{,}25$	$a_6 = 1{,}4914$	$a_{10} = 1{,}5498$
$a_3 = 1{,}3611$	$a_7 = 1{,}5118$	
$a_4 = 1{,}4236$	$a_8 = 1{,}5274$	

LE 6 **2.** $\frac{7n+1}{n} = 7 + \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\frac{1}{n}\right) = 7$

LE 7 **2.** **a)** 1 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 0 **e)** 0 **f)** 0 **g)** $\frac{1}{2}$ **h)** 0

LE 10 **4.** **a)** $-\frac{2}{5}$ **b)** $-\frac{1}{5}$ **c)** 4 **d)** $-\frac{4}{5}$ **e)** $-\frac{7}{15}$ **f)** 8,5

Übungen und Anwendungen

1. **b)** nicht monoton (für alle n mit $n \geqq 3$ wächst die Folge streng monoton); beschränkt; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

d) nicht monoton (für alle n mit $n \geqq 2$ wächst die Folge streng monoton); nach unten beschränkt; divergent

2. **a)** $\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$ ist äquivalent mit $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ $(\varepsilon > 0)$. Ist nun ε beliebig vorgegeben, so ist die letzte Ungleichung für fast alle n erfüllt. Also ist $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ eine Nullfolge.

11. **b)** $0{,}9^{10} = 0{,}3486784401$; $1{,}1^{10} = 2{,}5937424601$

14. **c)** $\frac{3}{2}$ **e)** $\frac{27}{26}$

20. **b)** $\frac{6}{7}$ **d)** -2 **e)** 6 **g)** 1 **i)*** $-\frac{5}{3}$

Zum Kapitel C: Differentialrechnung

LE 2 **1.** **a)** $s \approx 19{,}62\ \mathrm{m}$
b) $t \approx 4{,}5\ \mathrm{s}$
d) $v \approx 19{,}62\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

c)

Δt	1 s	0,1 s	0,01 s	0,0001 s
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	$24{,}52\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$	$20{,}11\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$	$19{,}67\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$	$19{,}62\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

LE 4 **2.** **a)** 9 **b)** 8 **3.** **c)** $f'(x_0) = x_0$ **d)** $f'(x_0) = 3x_0^2$
4. **b)** $y = 8x - 8;$ $\alpha \approx 82{,}9°$

LE 5 ● **7** **a)** $f'(x)$ ist der Anstieg des Graphen von f an der Stelle x.
b) $f'(x) > 0$: Die Funktion f wächst monoton.
$f'(x) = 0$: Der Anstieg von f ist an der Stelle $x = 0$ gleich Null.
$f'(x) < 0$: Die Funktion f fällt monoton.

LE 8 **3.** **a)**

x	0	0,5	$-0{,}5$	2	-2
$f'(x)$	0	0,5	$-0{,}5$	32	-32

b) $f'(1) = 4,$ $y = 4x - 1{,}5$

4. **b)** $f'(0) = 0,$ $f'(1) = 3$ **c)** $f'(-1) = 3$

LE 9 **2.** **a)** $f'(x) = \dfrac{x^2 - 14x - 2}{(x^2 + 2)^2}$ **b)** $f' = \dfrac{2x^4 + 21x^2 - 32x}{(2x^2 + 7)^2}$

c) $f'(z) = \dfrac{z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 4z + 28}{(z^2 - 4z + 3)^2}$ $(z \neq 1,\ z \neq 3)$

d) $f'(x) = -\dfrac{3}{5x^4}$ $(x \neq 0)$ **e)** $f'(x) = -\dfrac{5}{x^6} - \dfrac{3}{x^4}$ $(x \neq 0)$

7. **a)** $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2 + 1)^3}$ **b)** $f'(x) = \dfrac{-a}{(ax + b)^2}$

LE 10 **3.** **(2) a)** $f'(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{x^2}$ $(x \neq 0)$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^2}$ $(x \neq -1)$ **c)** $f'(x) = 2 \cdot \sin \dfrac{1}{2} \cdot x$

LE 11 ● **16** Es sei f eine streng monoton wachsende Funktion.

Wir zeigen: Für beliebige x_1, x_2 gilt:
Wenn $x_1 \neq x_2$, so $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Es sei $x_1 \neq x_2$, also entweder $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$. Da f streng monoton wächst, gilt $f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$ bzw. $f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 < x_1$.

LE 12 **2.** **a)** $\bar{f}(y) = -y + 7;$ $\bar{f}'(y) = -1$

b) $\bar{f}(y) = -\sqrt{y}$ $(y \geqq 0);$ $\bar{f}'(y) = \dfrac{-1}{2\sqrt{y}}$ $(y > 0)$

c) $f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \quad (y > 0)$; $\quad f'(y) = \dfrac{-1}{2\sqrt{y^3}} \quad (y > 0)$

4. d) $f'(x) = \dfrac{4x+1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $x > 0$ $\quad$ e) $f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{z^2}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{z^3}}$; $z > 0$

f) $f'(x) = \dfrac{x+2}{2x\sqrt{x}}$; $x > 0$ $\quad$ g) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{2x^2}$; $x > 0$

h) $f'(a) = \dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\sqrt[3]{a} - (a + \sqrt{a})\dfrac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2}}$; $a > 0$

i) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3x}}$; $x > 0$

(Hier nur Definitionsbereiche der abgeleiteten Funktionen)

LE 14 4. a) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^3}$

b) $f'(x) = 4\,[(x^2+1)(x-7)]^3\,[2x(x-7) + (x^2+1)]$

c) $f'(x) = \dfrac{12x\,(x^4 - 2x^2 + 1)}{(x^2+1)^4}$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{3(x^2-5)\sqrt[3]{x^2-5}}$

e) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ $\quad$ f) $f'(x) = \dfrac{4x - 15}{2(5-2x)^2\sqrt{x^2 - 3x}}$

7. b) $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$ $\quad$ d) $f'(x) = \dfrac{9x^2 + 4x + 1}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + x + 1}}$

LE 15 2. a) $f''(x) = \dfrac{6}{5}x + 14$ $\quad$ b) $f''(x) = 3\left(\dfrac{1}{2}x - 5\right)^2$

c) $f''(x) = 20x^3 - 6x - 10$

d) $f''(x) = \dfrac{(-18x + 48)(2x^2 + x + 10)^2}{(2x^2 + x + 10)^4} - \dfrac{2(-9x^2 + 48x + 57)(2x^2 + x + 10)(4x + 1)}{(2x^2 + x + 10)^4}$

8. a) $f''(x) = -\dfrac{2x^2 + 6}{9(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$ $\quad$ b) $f''(x) = -\dfrac{5}{16(1-x)^2\sqrt[4]{1-x}}$

c) $f''(x) = \dfrac{10}{9x^2\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0)$ $\quad$ d) $f''(x) = \dfrac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0)$

LE 20 ● **32** Es sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $x_n < 1$ für alle n. Dann konvergiert $(x_n - 1)$ von links gegen 0. Folglich fällt $\left(\frac{1}{x_n - 1}\right)$ unbeschränkt, das heißt

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

LE 25 **2.** **c)** Max.: $(0; -10)$, Min.: $\left(2\sqrt{2}; -138\right)$ und $\left(-2\sqrt{2}; -138\right)$

d) keine lokalen Extrempunkte

e) Max.: $(1; 1)$, Min.: $(-1; -1)$

f) Min.: $(0; 1)$, kein Max.

LE 27 **2.** $a = 4\,\text{m}$, $b = 3\,\text{m}$, $u = 2\,\text{m}$ **4.** $r:h = 1:2$

6. $a = 25\,\text{m}$, $b = 25\,\text{m}$ **7.** $a:b = 2:1$

$a = 25\,\text{m}$, $b = 50\,\text{m}$

$a = 50\,\text{m}$, $b = 50\,\text{m}$

LE 29 **6.** **a)** $F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

c) $F(x) = 3a\sqrt[3]{x} + 3b\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **d)** $F(x) = 2\sqrt{x}$

8. $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

10. **b)** $F(x) = \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{\pi}{3}x + \pi + \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^3}{4}$ **c)** $F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt{2}$

Übungen und Anwendungen

4. **a)** $f'(x) = -\frac{2}{3}ax^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}bx^{-\frac{7}{3}}$ **b)** $f'(x) = \frac{bc - 2ad\sqrt{x} - bdx}{2\sqrt{x}\,(c + dx)^2}$

c) $f'(x) = \frac{11x}{(9x^2 - 25)\sqrt{x^2 - 4}\sqrt{9x^2 - 25}}$

6. **d)** $f(2) = 10{,}5$; $f'(1{,}2) \approx 0{,}85$; $f''(-2) = -13{,}25$; $f^{(4)}(1) = 120$

8. **c)** $(0; 17)$ und $(-1{,}7; 0)$ **9.** **c)** $y = x - \frac{3}{4}$

10. **c)** $(1; 2)$ **18.** $v \approx 49\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

20. **c)** $x_0 \approx 3140\,\text{m}$; $f'(x_0) \approx -0{,}64$

21. **d)** $x_g \approx 30\,\text{km}$; $y_g \approx 24\,\text{km}$

29. **a)** Max.: $\left(2; 3\sqrt[3]{4} \approx 4{,}761\right)$ **b)** Min.: $\left(\sqrt{3} \approx 1{,}732; \frac{3}{2}\sqrt{3} + 6 \approx 8{,}598\right)$

42. $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

43. Radius: $\frac{2}{3}R$; Höhe: $\frac{1}{3}H$

44. Radius: $\frac{u}{4}$; Bogen: $\frac{u}{2}$; $\varphi \approx 115°$

45. $r \approx 2{,}52$ m

48. $r = \frac{h}{2}$

50. Seitenlänge der Grundfläche: 4,00 m, Höhe: 2,00 m

52. $x = 2{,}00$ m

53. $r = 4\sqrt{2}$ m; $h = 2{,}00$ m

56. Obere Breite: 40 cm; Höhe: $10\sqrt{3}$ cm

58. $a = 6$ dm; $b = 3$ dm

59.* Radius: $r = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \cdot V}$; Höhe: $h = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$

62. Ungefähr 13,1 km vom Punkt A entfernt

63. Nach etwa 2 Stunden und 40 Minuten

65. **a)** 660,00 M **b)** 420,00 M **c)** 6 Bestellungen; Kosten: 380,00 M

68. $v \approx 27{,}9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Zum Kapitel D: Integralrechnung

Aufgaben in der Einführung

3. **a)** 110 **d)** $\frac{a}{b} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ **e)** n

4. **a)** $\frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)$ monoton fallend, $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ monoton wachsend

$\left(\frac{1}{2^n}\right)$ monoton fallend, $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ monoton fallend

b) Für alle n gilt $1 - \frac{1}{2^n} < 1$ und $1 + \frac{1}{2^n} > 1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1$

LE 1 **1.** **a)** $s_3 = \frac{652}{512} \approx 1{,}27$ **b)** $S_3 = \frac{716}{512} \approx 1{,}40$

2. $s_0 = 2$; $s_1 = \frac{21}{8} = 2{,}625$; $s_2 = \frac{190}{64} = 2{,}96875$

$S_0 = 5;$ $\quad S_1 = \frac{33}{8} = 4{,}125;$ $\quad S_3 = \frac{238}{64} = 3{,}71875$

LE 2 **3.** **b)** $s_0 = -20;$ $\quad s_1 = -18;$ $\quad s_2 = -16{,}5$
$S_0 = -4;$ $\quad S_1 = -10;$ $\quad S_2 = -12{,}5$

LE 3 **3.** **b)** $A = 18$

c) $\Delta x = \frac{3}{2^n}, \; x_i = 1 + i\frac{3}{2^n};$ $\quad U_i = 2\left(1 + i\frac{3}{2^n}\right) + 1$

$S_n = \sum_{i=1}^{2^n}\left(3 + i\frac{6}{2^n}\right)\frac{3}{2^n} = 9 + \frac{9}{2^n}(2^n + 1)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 18$

LE 4 **1.** **a)** 0 $\quad$ **3.** **b)** $-\frac{b^2}{2}$ $\quad$ **6.** $\frac{4}{3}$

LE 6 **2.** **a)** $\frac{15}{2}$ $\quad$ **b)** 15 $\quad$ **c)** -3

d) -15 $\quad$ **e)** $-0{,}2$

4. **a)** 4 $\quad$ **b)** $-\frac{5}{72}$ $\quad$ **c)** $-\frac{45}{64}$

d) $\frac{7}{12}$ $\quad$ **e)** $-\frac{19}{8}$

6. **a)** $\frac{45}{4}$ $\quad$ **b)** $\frac{3}{2}\left(2\sqrt[3]{2} - 1\right) \approx 2{,}28$ $\quad$ **c)** $\frac{20}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 12{,}19$

d) $\frac{1}{2}\left(5 - 3\sqrt[3]{4}\right) \approx 0{,}119$ $\quad$ **e)** $\frac{7}{2}$

LE 7 **2.** **a)** 2,25 $\quad$ **b)** $\frac{3}{8}$ $\quad$ **c)** 0,05

4. **a)** 0,401 $\quad$ **b)** 0,518

c) $\frac{3}{32}\left(25 \cdot \sqrt[3]{25} - 1\right) \approx 6{,}76$

LE 8 **1.** **a)** $A = \frac{3}{2}$ $\quad$ **b)** $A = 16{,}5$ $\quad$ **3.** **b)** $A = 32$

5. **b)** $A \approx 5{,}96$

LE 9 **2.** **a)** $A = 8{,}5$ $\quad$ **b)** $A = 30$ $\quad$ **c)** $A = 3\frac{1}{3}$ $\quad$ **d)** $A = 0{,}75$

LE 10 **2.** **b)** $A = 4{,}5$ $\quad$ **3.** **b)** $A = 9$ $\quad$ **d)** $A \approx 7{,}906$
5. $A \approx 4{,}78$

Übungen und Anwendungen

2. **a)** 60 **b)** $57\frac{7}{12}$ **c)** $-\frac{19}{8}$

d) $-\pi$ **e)** 5,25 **f)** $302\frac{20}{81}$

4. **a)** $\frac{b-a}{2}$ **b)** $\frac{7}{3z^3}$ **c)** $2z\left(\sqrt{2}-1\right)$

6. **b)** $k = 0{,}4$ **d)** $k = \frac{2}{3}$ **9.** $A = \frac{37}{12}$ **10.** $A = \frac{1}{3}$

12. **a)** $A = 4{,}5$ **b)** $A = 48$ **15.** **a)** $A = \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{1}{5}$

18. **b)** $A = \frac{56}{3}$ **21.** **b)** $A = \frac{50}{3}$ **22.** **c)** $V = 70272\ \mathrm{m}^3$

25. $A = \frac{1}{3}$ **28.** **b)** 54,8% **c)** 5,55 m^3 Luft

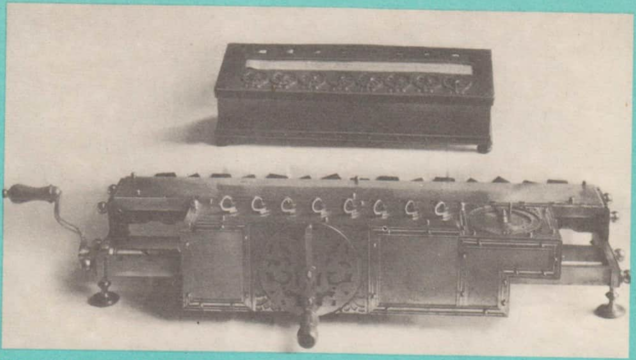
31. $W \approx 3 \cdot 10^{11}$ Nm **33.** $W = 10\frac{1}{6}$ k Ws

36.* **b)** $A = \frac{27}{16}$

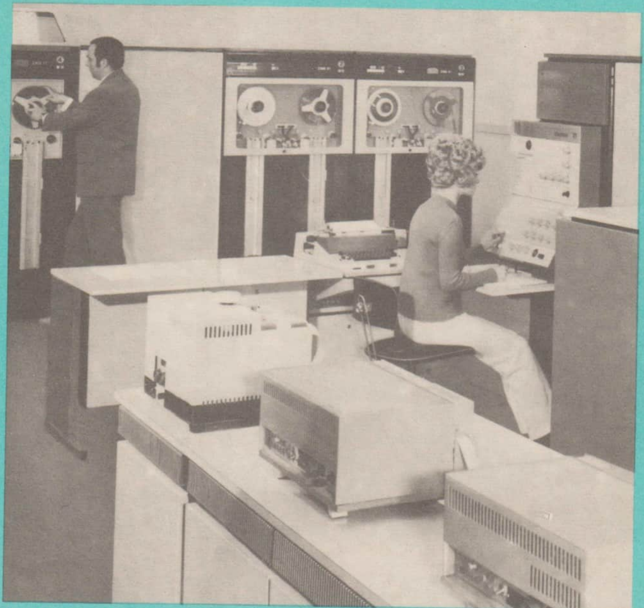
R Register

Bildnachweis

ADN Zentralbild: Abb. C 7
ADN Zentralbild/Großmann: Abb. S. 74
ADN Zentralbild/Häßler: Abb. S. 52
ADN Zentralbild/Hesse: Abb. C 18
Aus Smith, D. E.: History of mathematics, Bd. 1, 1923: Abb. B 6
VWV Bildarchiv: Abb. B 4, B 5, B 7, C 5, C 6, Archimedes S. 76
VWV/Seifert: Abb. C 1



Die von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ konstruierte Rechenmaschine



Elektronische Datenverarbeitungsanlage Robotron 21

Kurzwort: 001156 Lehrb. Mathe Kl 11
Schulpreis DDR: 4,60
ISBN 3-06-001156-7