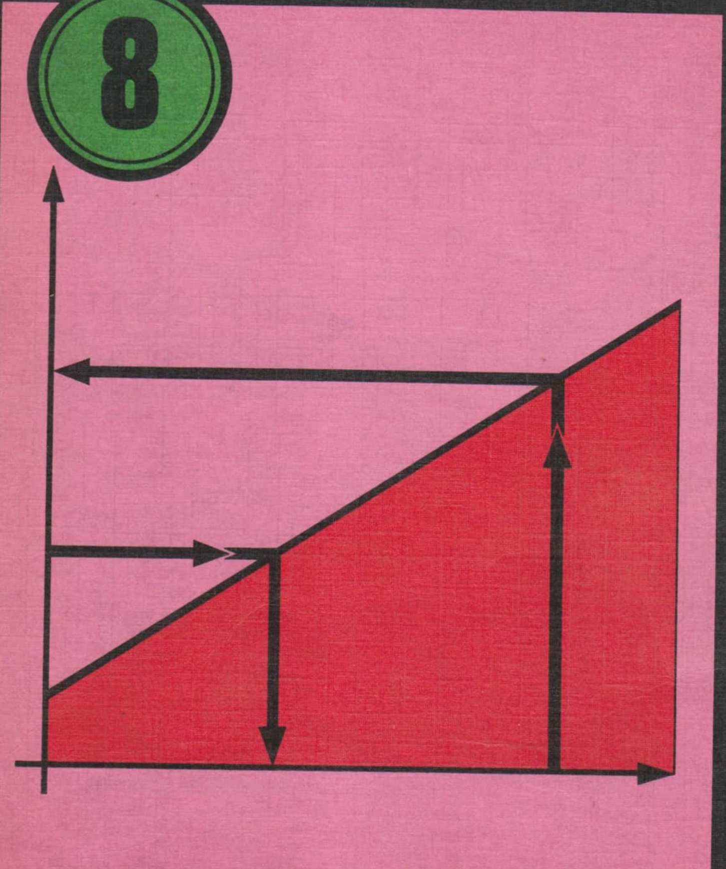
Mathematik

8



Hinweise zur Arbeit mit diesem Buch

Die Kapitel A bis D des Lehrbuchs entsprechen den vier Stoffgebieten, die nach dem Lehrplan in der achten Klasse zu behandeln sind. Jedes Kapitel gliedert sich in Abschnitte und weiter in Lerneinheiten (abgekürzt: LE). Eine Titelzeile über jeder Seite gibt darüber Auskunft, zu welchem Kapitel, zu welchem Abschnitt und zu welcher Lerneinheit diese Seite gehört.
Durch Marken am linken Rand des Textes werden hervorgehoben:

Beispiele ■; Aufträge ●; Definitionen ▶; Sätze ▷.

Verweise auf Abbildungen oder Textabschnitte beginnen mit einem schräggestellten Pfeil; zum Beispiel (↗ Auftrag B 8, S. 50) „Vergleiche mit dem Auftrag 8 des Kapitels B auf Seite 50".
Ein senkrechter Pfeil neben einer Aufgabennummer (zum Beispiel: 5. ↑ ...) bedeutet, daß weiter oben ein Aufgabentext zu beachten ist, der für mehrere Aufgaben gilt.
Ein „(L)" neben der Aufgabe deutet an, daß die errechnete Lösung mit einem Hinweis im Anhang verglichen werden kann.
Aufgaben mit erhöhten Anforderungen wurden durch einen Stern gekennzeichnet (z. B. 5*).

Beachte beim Lösen von Anwendungsaufgaben:

Genau überlegen,
welche Größen bekannt sind und wie die gesuchte Größe bestimmt werden könnte

Eine Formel anwenden,
allgemeine Lösung

Durch eine Überschlagsrechnung
die gesuchte Größe näherungsweise
bestimmen

Den Wert der gesuchten Größe
genau berechnen

Eine Gleichung aufstellen

Durch äquivalente Umformungen
die Lösungsmenge der Gleichung
bestimmen

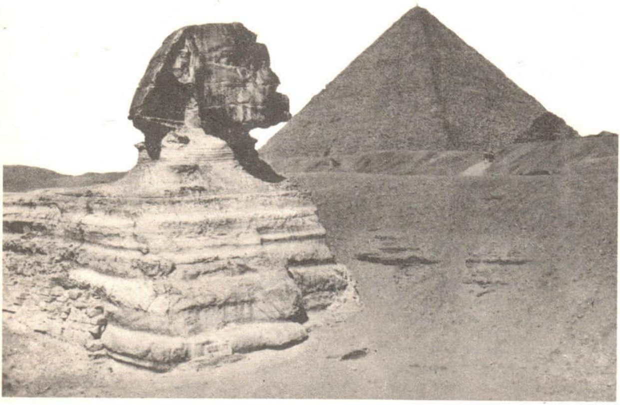
Das Ergebnis kontrollieren

Die gestellte Frage beantworten; dabei gegebenenfalls das Ergebnis sinnvoll runden

Mathematik

Lehrbuch für Klasse 8

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1986



Autorenkollektiv: Dr. Manfred Dennert, Prof. Dr. sc. Brigitte Frank, Dr. Horst Lemke, Dr. Günter Lorenz, Prof. Dr. sc. Günter Pietzsch, Dr. Manfred Rehm, Dr. Wolfgang Schulz, Dr. Edellinde Siury, Doz. Dr. sc. Werner Stoye (Kollektivleiter)

Gutachter und Berater: Renate Ansorge, Prof. Dr. habil. Hans Bock, Dr. Wolfram Eid, Dr. sc. Günter Fanghänel, Doz. Dr. sc. Lothar Flade, Reiner Franck, Dr. Sigrun Gromann, Prof. Dr. sc. Werner Jungk, Herbert Küchler, Helmut Leiße, Erika Schwerin, Eva Wolter, Doz. Dr. sc. Helmut Wolter sowie Dr. Dieter Götze, Dr. Renate Blachowiak, Alfred Knuth, Ingrid Schneider und Dr. Elke Goldberg

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt.

1. Auflage · Ausgabe 1986
Lizenz Nr. 203/1000/86 (E 000810-1)
LSV 0681
Redaktion: Karlheinz Martin
Illustrationen: Harri Förster
Zeichnungen: Jutta Wolff, Birgit Werwigk
Einband: Manfred Behrendt
Typographische Gestaltung: Atelier VWV, Karl-Heinz Bergmann
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Schrift: 9/10 Gill-Grotesk Mono
Redaktionsschluß: 8. August 1985
Bestell-Nr. 731 288 8
Schulpreis DDR: 1,60

Inhalt

A Arbeiten mit Variablen

B Ähnlichkeit

A Arbeiten mit Variablen

Grundlagen für das Arbeiten mit Variablen

1 Zur Wiederholung

● 1 Ermittle ohne Verwendung eines Taschenrechners **a)** $x + y$, **b)** $x - y$, **c)** $y - x$, **d)** $x \cdot y$, **e)** $x : y$, **f)** $y : x$ für die in der Tabelle angegebenen Zahlen!

x	18	−35	−12
y	−6	7	−3

Erläutere, wie man rationale Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert!

Mit solchen einfachen rationalen Zahlen wie im Auftrag A 1 rechnen wir auch künftig im Kopf. Bei Zahlen, die ein aufwendiges Rechnen erfordern, benutzen wir den Taschenrechner.

● 2 Überschlage! Berechne dann mit dem Taschenrechner! Kontrolliere deine Rechnung!
a) $28{,}78 + 5{,}83$ **b)** $-0{,}648 + 0{,}309$ **c)** $-53{,}4 + 76{,}6$ **d)** $572 - 358{,}7$
e) $63{,}08 - 100{,}39$ **f)** $-0{,}096 - 0{,}578$ **g)** $75 + 38{,}2 - 3{,}98 - 0{,}79 + 6{,}68$
h) $37{,}6 \cdot 2{,}4$ **i)** $3{,}8 \cdot (-12{,}7)$ **k)** $(-0{,}07) \cdot (-0{,}71)$ **l)** $12{,}6 : 10{,}5$
m) $(-594) : 22{,}5$ **n)** $0{,}78 \cdot 6{,}51 \cdot 4{,}83$ **o)** $0{,}78 \cdot (6{,}51 \cdot 4{,}83)$
p) $(-9{,}31) : (-0{,}0304)$ **q)** $405 : 14{,}4 : 4{,}5$ **r)** $405 : (14{,}4 : 4{,}5)$

● 3 **a)** Gib zum Berechnen von $\frac{10{,}62 \cdot 4{,}81}{3{,}54 \cdot 0{,}65}$ mit Hilfe des Taschenrechners zwei verschiedene Ablaufpläne für die Tastenfolge an und berechne den Quotienten nach diesen Plänen!
b) Verallgemeinere die Ablaufpläne auf das Berechnen von Quotienten der Form $\frac{a \cdot b}{c \cdot d}$! (L)

Wir wissen: Der Schulrechner SR 1 hat eine Vorrangautomatik. Er berücksichtigt den Vorrang von „Punktrechnung“ vor „Strichrechnung“[1].

---

[1] Um mit der Arbeitsweise des Taschenrechners noch besser vertraut zu werden, rechnen wir im folgenden auch Aufgaben mit „einfachen“ Zahlen, für die wir ihn eigentlich nicht brauchen.

● 4 Ralf und Beate haben verschiedene Taschenrechner. Beide rechnen entsprechend dem folgenden Ablaufplan!

5 $\boxed{+}$ 7 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$

Ralfs Rechner zeigt 26, Beates 36 als Ergebnis an. Welcher Term wurde berechnet?

● 5 Gib jeweils einen möglichst kurzen Ablaufplan zum Berechnen von **a)** $(22 + 12) \cdot 7$, **b)** $9 \cdot (53 + 18)$ mit dem Schulrechner SR 1 an! Rechne!

Auch *Quadrate* und *Wurzeln* von Zahlen können wir bereits mit dem Taschenrechner berechnen.

● 6 **a)** Gib verschiedene Möglichkeiten zum Berechnen von 23^2 mit dem Taschenrechner an! Rechne!

b) Berechne $\sqrt{23}$ auf drei Stellen nach dem Komma!

● 7 **a)** Berechne $3 \cdot 5^2$ unter Verwendung der Taste $\boxed{x^2}$! Überlege, ob der Taschenrechner den Vorrang beim Berechnen von Quadraten (Potenzen) berücksichtigt!

b) Gib einen Ablaufplan zum Berechnen von $(3 \cdot 5)^2$ an! (L)

Als eine weitere Taste des Taschenrechners lernen wir die Taste $\boxed{\frac{1}{x}}$ kennen.

● 8 Gib die Zahl 2 in deinen Taschenrechner ein! Drücke danach die Taste $\boxed{\frac{1}{x}}$! Welche Zahl erscheint im Anzeigenfeld?
Verfahre entsprechend für 10; 5; 4; 8; 3; 0 und 0,5!

Die Taste $\boxed{\frac{1}{x}}$ ist zum Berechnen von Quotienten der Form $\frac{a}{b+c}$ zweckmäßig, denn es gilt

$$\frac{a}{b+c} = \frac{1 \cdot a}{b+c} = \frac{1}{b+c} \cdot a \,.$$

● 9 Überlege, wie man die Taste $\boxed{\frac{1}{x}}$ nutzen kann, um $\frac{310}{79{,}15 - 77{,}9}$ zu berechnen! Gib einen Ablaufplan dafür an und berechne den Quotienten! (L)

Aufgaben

1. Vergleiche der Größe nach!
a) $-3{,}5;\ 2{,}9$ **b)** $-26{,}7;\ 1{,}579\,8$ **c)** $-6\,738;\ -7\,683$

Berechne im Kopf!

2.↑ **a)** $-3 + 17$ **b)** $-17 - 5$ **c)** $6 - 18$ **d)** $7 - (-5)$ **e)** $(-6) \cdot 12$
f) $5 \cdot (-15)$ **g)** $-8 \cdot 13$ **h)** $-45 : 3$ **i)** $(-66) : 3$ **k)** $(-84) : (-12)$

3.↑ **a)** $-5 + 73 - 23 + 15$ **b)** $36 - 108 - 72 - 16$ **c)** $(-2) \cdot 7 \cdot (-3{,}5)$
d) $(-4{,}1) \cdot 10 \cdot (-6)$ **e)** $(-2 + 3) \cdot (-6)$ **f)** $(8 - 36) : (-4)$
g) $8 - 36 : (-4)$ **h)** $56 : (8 - 18)$ **i)** $56 : 8 - 18$

Suche nach Fehlern! Begründe jeweils deine Entscheidung!

4.↑ **a)** $-5 + 17 = +12$ **b)** $22 - 33 = -11$ ✓ **c)** $-6 - 18 = -24$
d) $-70 - 120 = -\cancel{5}0$ **e)** $-35 - 25 = -60$ ✓ **f)** $-25 + 10 = -15$
g) $5 \cdot (-11) = -55$ **h)** $(-3) \cdot 15 = -45$

5.↑ **a)** $(-7) \cdot (-9) = +63$ **b)** $77 : (-11) = -7$ **c)** $(-42) : 7 = -6$
d) $(-48) : (-6) = +8$ **e)** $7 - 3 \cdot 5 = 20$ **f)** $3 \cdot 5 + 4 = 27$

6. Schreibe 15 **a)** als Summe zweier positiver Zahlen, **b)** als Summe zweier negativer Zahlen, **c)** als Summe einer positiven und einer negativen Zahl, **d)** als Produkt zweier positiver Zahlen, **e)** als Produkt zweier negativer Zahlen, **f)** als Produkt einer positiven und einer negativen Zahl! Führe dieselben Schritte für —21 aus!

Berechne!

7.↑ **a)** $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{5} + \frac{1}{10} - \frac{7}{5}$ **c)** $\frac{8}{9} - \frac{1}{3} - \frac{5}{3}$ **d)** $\left(-\frac{7}{10}\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)$
e) $\left(-\frac{7}{10}\right) : \left(-\frac{3}{10}\right)$ **f)** $\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)$ **g)** $\frac{5}{3} : \left(-\frac{8}{9}\right)$

8.↑ **a)** 0,43 + 7,24 + 34,1 **b)** 16,8 — 1,095 + 0,73 **c)** 327,6 + 40,507 — 31,790
d) —15,8 + 40,01 — 3,015 **e)** 4,32 + 0,768 — 2,08 **f)** 0,191 — 0,911 — 0,991

9.↑ **a)** 220 · 5,04 **b)** 12,25 · 0 **c)** —5,8 · 2,5
d) (—2,01) · 11 **e)** 4,03 · 3,1 · 8,009 **f)** 4,9 · (—0,22) · 3,5

10.↑ **a)** 5,73 · 6,7 — 34,63 **b)** 22,7 — 2,64 · 10,12 **c)** 4,56 · 0,97 — 0,81
d) 1,067 : 0,98 — 4,31 **e)** 1,067 — 0,98 : 4,31 **f)** (7,36 — 0,96) · 0,504
g) (8,67 + 0,096) : 3,14 **h)** 29,4 · (10,7 + 1,07) **i)** 8,05 · (—3,4 + 0,74)

11.↑ **a)** 23 · 47 + 56 · 98 (L) **b)** $\frac{39{,}1}{8{,}5} + \frac{24{,}3}{4{,}5}$ (L)
c) 2,57 · 2,8 — 4,9 · 7,08 (L) **d)** 0,18 : 0,075 — 1,596 : 0,42 (L)

12.↑ **a)** $6{,}04^2$ **b)** $0{,}64^2$ **c)** $0{,}604^2$ **d)** $6{,}004^2$

13.↑ **a)** $7{,}4 - 3{,}7^2$ **b)** $0{,}53 \cdot 3{,}04^2$ **c)** $36{,}5 : 4{,}1^2$ **d)** $(82{,}5 \cdot 0{,}703)^2$

14.↑ **a)** $\frac{144{,}32}{9{,}57 + 6{,}83}$ (L) **b)** $\frac{27}{0{,}43 - 0{,}79}$ (L) **c)** $\frac{101 \cdot 46{,}86}{8{,}04 - 3{,}78}$ (L)

Gib das Ergebnis auf drei Stellen nach dem Komma an!

15.↑ **a)** 52,7 : 3,8 **b)** —3,67 : 0,87 **c)** (—0,72) : (—6,7)
d) 35,25 : 3,75 **e)** 6,3 · 0,27 : 2,08 **f)** 0,71 : 6,1 · π
g) 326,8 : 43 · 0,76 **h)** 1,078 : (0,25 · 4,9) **i)** 0,057 3 : (5,762 · 0)
k) $\frac{572 \cdot 36{,}4}{89{,}7 \cdot 0{,}82}$ **l)** $\frac{6{,}73 \cdot 12{,}9}{0{,}62 \cdot 4{,}1}$ **m)** (82,4 · 36,2) : (128,4 · 0,919)

16.↑ **a)** $\sqrt{5{,}43}$ **b)** $\sqrt{0{,}034}$ **c)** $7 \cdot \sqrt{0{,}123}$ **d)** $\sqrt{\pi}$ **e)** π^2

17.* Überprüfe die Aussagen
a) $3^2 + 4^2 = 5^2$, **b)** $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$,
c) $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$!
Formuliere eine entsprechende Aussage, die mit 36^2 beginnt und in der links fünf und rechts vier Summanden stehen! Überprüfe sie! Welches könnte die nächste Aussage dieser Art sein?

2 Das Arbeiten mit dem Speicher

● **10** Lars soll das Produkt (6 + 12) (13 — 8) mit dem Taschenrechner ermitteln. Er rechnet nach folgendem Ablaufplan:

6 $\boxed{+}$ 12 $\boxed{\times}$ 13 $\boxed{-}$ 8 $\boxed{=}$

a) Erhält er so das richtige Ergebnis? Begründe!
Welchen Term hat er berechnet?
b) Wie würdest du das Produkt mit dem Schulrechner SR 1 berechnen?

Will man Summen oder Differenzen wie 6 + 12 oder 13 — 8 mit dem Taschenrechner miteinander multiplizieren, könnte man mit dem Schulrechner SR 1 nach dem folgenden Ablaufplan arbeiten:

6 [+] **12** [=]↑; man notiert 18;   **13** [−] **8** [=]↑[×] **18** [=]↑

Der Schulrechner SR 1 hat für solche Rechnungen einen **Speicher** (eine Art „Gedächtnis"), in dem er sich eine Zahl „merken" kann. Dadurch entfällt das Notieren von Zwischenergebnissen. Durch Drücken der Taste [x → M] [1]) (oder aber auch [M+]) läßt sich eine Zahl speichern. Danach kann man mit dieser oder einer anderen Zahl weiterrechnen. Die gespeicherte Zahl läßt sich zurückrufen, indem man die Taste [MR] [2]) betätigt. Sie erscheint dann wieder in der Anzeige, bleibt aber weiter im Speicher erhalten.

● **11** Taste 1,25 in deinen Taschenrechner ein! Drücke dann nacheinander die Tasten **x → M, CE · C, MR, CE · C, MR**! Beschreibe, wie sich jeweils die Anzeige ändert!

Befindet sich im Speicher z. B. die Zahl 1,25 und will man mit ihr rechnen, ruft man sie an der entsprechenden Stelle durch Betätigen der Taste **MR** zurück.

■ **1** Im Speicher befinde sich die Zahl 1,25

a) Es soll 8,75 + 1,25 berechnet werden.

Ablaufplan: **8,75** [+] [MR]↑ [=] **[10.]**

b) Es soll 8,75 · 1,25 berechnet werden.

Ablaufplan: **8,75** [×] [MR]↑ [=] **[10.9375]**

Solange ein M in der Anzeige sichtbar ist, ist der Speicher durch eine Zahl besetzt. Will man diese Zahl dort **löschen** (beseitigen), so drückt man nacheinander die Tasten 0 und **x → M** [3])

Vor jeder Rechnung sollte man überprüfen, ob der Speicher besetzt ist, damit nicht eine darin befindliche Zahl versehentlich in die weitere Rechnung eingeht und diese verfälscht.

■ **2** Es soll (6 + 12) (13 — 8) mit einem Taschenrechner berechnet werden.

1. Wir berechnen 6 + 12: **6** [+] **12** [=]↑
2. Wir speichern das Ergebnis: [x→M]↑
3. Wir berechnen 13 — 8: **13** [−] **8** [=]↑
4. Wir multiplizieren mit der gespeicherten Zahl: [×] [MR]↑ [=]↑

● **12** Berechne (6 + 12) (13 — 8) entsprechend Beispiel A 2! Welche Zahlen erscheinen jeweils bei ↑ in der Anzeige?

Beim Berechnen von Quotienten der Form $\frac{a+b}{c+d}$ ermittelt man zweckmäßigerweise zunächst den Divisor und speichert ihn: **c** [+] **d** [=]↑ [x→M]↑ **a** [+] **b** [=]↑ [÷] [MR]↑ [=]↑

---

[1]) M für „memory", engl.: Gedächtnis, Erinnerung. – Bei manchen Taschenrechnern kann eine Zahl durch Drücken der Taste **M** oder der Taste **STO** (für „store", engl.: Speicher) in den Speicher überführt werden.

[2]) MR für „memory recall", engl.: Erinnerung zurückrufen.

[3]) Beim Ausschalten des Schulrechners SR 1 wird der Speicher ebenfalls gelöscht.

● **13** Berechne den Quotienten $\frac{a+b}{c+d}$ für $a = 7{,}5$, $b = 6{,}65$, $c = 2{,}83$ und $d = -3{,}17$! (L)

Der Schulrechner SR 1 hat neben der Speichertaste $\boxed{\text{x-M}}$ auch die Speichertaste $\boxed{\text{M+}}$.

● **14** Gib unmittelbar nacheinander die Zahlen 2 und 7 mit Hilfe der Tasten **a)** $\boxed{\text{x-M}}$, **b)** $\boxed{\text{M+}}$ in den Speicher! Rufe danach die jeweils gespeicherte Zahl wieder zurück! Was stellst du fest?

Drückt man die Taste **M+**, so wird die unmittelbar zuvor eingegebene Zahl zu der bereits im Speicher befindlichen addiert. Sind Zahlen nur zu addieren, bringt das Arbeiten mit dieser Taste keinen Vorteil.[1]) Deutlicher wird ihr Vorteil, wenn wir zum Beispiel die Summe $(2+7)^2 + (4+9)^2 + (3+5)^2$ berechnen.

a) Ablaufplan ohne Verwenden der Taste **M+**:

$$2 \boxed{+} 7 \boxed{=} \boxed{x^2} \boxed{\text{x-M}} 4 \boxed{+} 9 \boxed{=} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\text{MR}} \boxed{=} \boxed{\text{x-M}} 3 \boxed{+} 5 \boxed{=} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\text{MR}} \boxed{=}$$

b) Ablaufplan bei Verwendung der Taste **M+**:

$$2 \boxed{+} 7 \boxed{=} \boxed{x^2} \boxed{\text{M+}} 4 \boxed{+} 9 \boxed{=} \boxed{x^2} \boxed{\text{M+}} 3 \boxed{+} 5 \boxed{=} \boxed{x^2} \boxed{\text{M+}} \boxed{\text{MR}}$$

● **15** Rechne gemäß beiden zuvor angegebenen Ablaufplänen!

Aufgaben

1. Gib die Zahl $x = 1{,}125$ in den Speicher ein! Berechne dann mit Hilfe des Speichers
a) $7{,}53 + x$, **b)** $8{,}88 \cdot x$, **c)** $0{,}34 - x$, **d)** $x : 0{,}75$, **e)** $61{,}357\,5 : x$!

Berechne!

2.↑ **a)** $(5{,}72 + 16{,}8)(26{,}48 - 12{,}93)$ **b)** $(0{,}388 - 0{,}608)(6{,}12 + 4{,}83)$
c) $(6{,}82 - 14{,}8)(0{,}72 - 1{,}5)$ **d)** $(0{,}89 + 1{,}71)(6{,}53 + 7{,}67)$
e) $(6{,}72 + 8{,}49 - 25{,}16)(34{,}09 - 0{,}82 - 26{,}7)$

3.↑ **a)** $\frac{1{,}986 + 1{,}512}{5{,}08 - 3{,}49}$ **b)** $\frac{1\,227 - 259}{523 + 357}$ **c)** $\frac{5{,}4 \cdot 13{,}5}{14{,}73 + 15{,}27}$
d) $\frac{4{,}5 \cdot 23{,}64}{3{,}74 - 11{,}62}$ **e)** $\frac{144{,}23 - 24{,}88}{(-6{,}2) \cdot 3{,}5}$ **f)** $\frac{14 \cdot 4{,}08}{62{,}8 - 6{,}38}$

4.↑ **a)** $9{,}5\,(4{,}2 \cdot 0{,}85 - 36 \cdot 0{,}65)$ **b)** $\frac{5{,}7}{2{,}72 \cdot 5{,}2 + 2{,}5 \cdot 2{,}342\,4}$
c) $(-8{,}4)(61 \cdot 0{,}72 + 56 \cdot 0{,}505)$ **d)** $\frac{107{,}52 \cdot 0{,}82}{0{,}080\,8 \cdot 3{,}5 + 4{,}06 \cdot 4{,}6}$

5.↑ **a)** $3{,}4 \cdot 5{,}6^2 - 2{,}1 \cdot 3{,}7^2$ (L) **b)** $(5{,}4^2 + 7{,}8^2)(5{,}83 - 19{,}78)$ (L)
c) $(5{,}7^2 + 3{,}9^2)(6{,}1^2 - 3{,}4^2)$ (L) **d)** $(14{,}6 + 12{,}064) : (8{,}6^2 - 6{,}4^2)$ (L)

6.↑ **a)** $(4{,}36 + 0{,}81)^2 + (6{,}42 + 3{,}48)^2 + (2{,}17 + 8{,}3)^2$
b) $(13{,}7 + 4{,}8)^2 + (27{,}8 - 33{,}4)^2 + (3{,}5 \cdot 6{,}3)^2$
c)* $(0{,}88 - 1{,}7)^2 - (6{,}4 - 2{,}82)^2 - (48 : 6{,}4)^2$ (L)

7.* Gib für deinen Taschenrechner einen Ablaufplan zum Berechnen eines Quotienten der Form

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2 + (e+f)^2}$$

an, ohne daß ein Zwischenergebnis notiert werden muß! Überprüfe deinen Plan!

---

[1]) Allerdings kann man bei einem Rechner ohne Vorrangautomatik den Speicher zum rationellen Berechnen von Summen der Form $ab + cd$ nutzen.

3 Beispiele für das Verwenden von Variablen

Bereits seit der 1. Klasse arbeiten wir im Mathematikunterricht mit Variablen. Wir haben in der Unterstufe zum Beispiel Aufgaben folgender Art gelöst: Berechne $2a - 3$ für $a = 5$!

● **16** Übertrage die nebenstehende Tabelle in dein Heft und vervollständige sie! Rechne im Kopf!

x	$2x - 1$	$-x + 1{,}5$	$\frac{1}{2}x - 3$
3			
1,4			
0			
−1			
−2,5			

● **17** Ermittle alle rationalen Zahlen x, für die gilt:
a) $3x - 1 = 7$, **b)** $0{,}5x + 1 > 2{,}5$!

Variablen verwenden wir auch beim Aufstellen von Gleichungen bei der Lösung von Sach- und Anwendungsaufgaben.

● **18** Gesucht ist eine Zahl, deren Dreifaches vermehrt um 7 gleich 28 ist. Stelle zu dieser Aufgabe eine Gleichung auf und löse sie!

In der Lerneinheit A 2 haben wir bei Berechnungen mit dem Taschenrechner Variablen zur Darstellung von Rechenablaufplänen verwendet.

● **19** Gib einen Ablaufplan zur Berechnung von $(a + b)(c + d)$ an!

Mit Hilfe von Variablen lassen sich viele mathematische Sätze einfach und übersichtlich formulieren.

■ **3** Das Distributivgesetz für rationale Zahlen kennen wir in der Form:
Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
Ohne Verwendung von Variablen müßte man etwa folgendermaßen formulieren:
Für alle rationalen Zahlen gilt: Das Produkt einer Zahl mit einer Summe aus zwei Summanden ist gleich der Summe der Produkte dieser Zahl mit jedem der beiden Summanden.

In der 7. Klasse haben wir die reellen Zahlen kennengelernt. Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten alle Rechengesetze, die uns vom Rechnen mit rationalen Zahlen bekannt sind.

● **20** Formuliere das Kommutativ- und das Assoziativgesetz **a)** für die Addition, **b)** für die Multiplikation reeller Zahlen unter Verwendung von Variablen!

Variablen verwenden wir nicht nur für Zahlen, sondern auch für Größen:

■ **4** **a)** Sind a und c die Längen der parallelen Seiten und h die Länge der Höhe eines Trapezes, so gilt für seinen Flächeninhalt A die Gleichung $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$.
b) Bei einer geradlinig gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit v gilt für den in der Zeit t zurückgelegten Weg s die Gleichung $s = v \cdot t$.

● **21** Gib weitere Flächeninhalts- und Volumenformeln und Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen unter Verwendung von Variablen an!

In der Geometrie werden Variablen nicht nur für Größen verwendet. Auch für geometrische Objekte selbst verwenden wir Variable.

■ **5** In der Ebene gilt: Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P, der nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade h mit der Eigenschaft: g geht durch P und $g \parallel h$.

Wir haben Variablen auch bereits bei Beweisen verwendet, um Beweisschritte kurz und übersichtlich darzustellen.

Bild A 1: François Viète (1540–1603)

Bild A 2: René Descartes (1596–1650)

■ **6** Die Summe zweier beliebiger gerader natürlicher Zahlen ist ebenfalls eine gerade natürliche Zahl.

Voraussetzung: $m \in N$, $n \in N$, m ist gerade, n ist gerade

Behauptung: $m + n$ ist gerade.

Beweis: m gerade, n gerade, also

$2 \mid m,\ 2 \mid n$	(Definition gerade Zahl)
$m = 2x,\ n = 2y;\ x, y \in N$	(Teilerdefinition)
$m + n = 2x + 2y$	
$m + n = 2(x + y)$	(Distributivgesetz)
$m + n = 2z$	$(x + y = z,\ z \in N)$
$2 \mid m + n$	(Teilerdefinition)
$m + n$ gerade	(Definition gerade Zahl)

Die Ausführungen in dieser Lerneinheit zeigen uns noch einmal:

1) Variablen stehen anstelle von Zahlen, Größen, geometrischen Objekten, also stets für die Elemente eines gewissen Grundbereiches[1]).
2) Variablen verwendet man zur Formulierung mathematischer Sätze, beim Beweisen oder auch beim Aufstellen von Gleichungen bei der Lösung von Anwendungsaufgaben.

Variablen wurden in vereinzelten Fällen schon in der Antike von griechischen Mathematikern benutzt. Systematisch werden sie in der Mathematik jedoch erst seit Beginn des 17. Jahrhunderts verwendet. Die französischen Mathematiker FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) und RENÉ DESCARTES (1596–1650) haben sich um ihre Einbeziehung in mathematische Überlegungen verdient gemacht. Heute sind Variablen ein unentbehrliches Hilfsmittel sowohl in der Mathematik als auch in anderen Wissenschaften (↗ Bilder A 1 und A 2).

Aufgaben

1. Vervollständige folgende Tabelle! Rechne im Kopf!

a	b	$a + b$	$a - b$	$a \cdot b$	$a : b$
12	−6				
−10		−5			
	1			−1	
−12					$\frac{2}{3}$

[1]) Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, soll (bei allen arithmetischen Betrachtungen) der Grundbereich immer die Menge der reellen Zahlen sein.

2. Gegeben ist die Gleichung $y = 3x - 2$.

a) Berechne y für die folgenden Zahlen x: 0; 10; -10; $-0{,}5$; 2,4; $-1{,}8$! Schreibe dein Ergebnis in Form einer Tabelle auf!

b) Für welche Zahl x erhältst du $y = -17$?

3. Überprüfe, welche der jeweils in Klammern angegebenen Zahlen Lösungen der nebenstehenden Gleichung bzw. Ungleichung sind!

a) $x - 3 = 7$ (10; 11; 0) **b)** $x^2 - x = 12$ (4; 0; -3; 2)

c) $2{,}37x + 3{,}75 < 0{,}51$ (1,35; $-5{,}64$; $-0{,}573$)

4. Gib jeweils alle dir bekannten Zahlenbereiche an, in denen die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen lösbar sind!

a) $2x - 5 = 8$	**d)** $2x + 1 = 1 + 2x$	**g)** $2x - 5 < 3$	**k)** $4x = 12$
b) $3z + 5 = 7$	**e)** $2t + 1 = 3 + 2t$	**h)** $\lvert x\rvert < 1$	**l)** $7x = 12$
c) $\lvert y\rvert - 1 = 6$	**f)** $2t + 1 < 2t - 1$	**i)** $3y - 2 > 2$	**m)** $x^2 = -1$

5. **a)** Berechne Flächeninhalt und Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 4{,}7$ cm!

b) Der Flächeninhalt eines Kreises betrage 25,7 cm². Berechne seinen Umfang!

6. Schreibe mit Hilfe von Variablen:

a) eine beliebige natürliche Zahl, die durch 3 (bzw. 5; 7) teilbar ist;

b) eine beliebige natürliche Zahl, die bei der Division durch 3; 5; 7 den Rest 2 läßt;

c) zwei beliebige natürliche Zahlen, von denen eine um 7,5 größer ist als die andere;

d) das arithmetische Mittel zweier beliebiger rationaler Zahlen;

e) die Summe aus einer beliebigen natürlichen Zahl und ihrem Quadrat!

7. Durch die Gleichung $z = x \cdot y$ können verschiedene Zusammenhänge angegeben werden. Sind beispielsweise x und y die Längen zweier benachbarter Seiten eines Rechtecks, so ist z sein Flächeninhalt.

a) Was bedeutet z, wenn x das Volumen eines Körpers und y die Dichte des Materials ist, aus dem der Körper besteht?

b) Was bedeutet z, wenn x der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch eines PKW in Liter je 100 km und y der an einem Tag von diesem PKW zurückgelegte Weg in km ist?

c) Gib weitere Beispiele für mögliche Bedeutungen der Variablen x, y und z an!

d) Gib in a), b) und für die in c) gefundenen Beispiele den jeweiligen Grundbereich für die Variablen x, y und z an!

8. Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr sind!

a) Für jede natürliche Zahl a gilt $a + a > a - a$.

b) Für jede rationale Zahl a gilt $a + a > a - a$.

c) Es gibt eine natürliche Zahl a, so daß gilt $a + a = a - a$.

d) Es gibt eine rationale Zahl b, so daß für jede rationale Zahl a gilt $a \cdot b = 0$.

e) Zu jeder rationalen Zahl a gibt es eine rationale Zahl b, so daß gilt $a + b = 0$.

f) Es gibt reelle Zahlen a und b, so daß gilt $a - b = b - a$.

g) Für beliebige rationale Zahlen x und y gilt:
Wenn $xy > 4$, so ist $x > 2$ und $y > 2$.

h) Für beliebige Punkte A und B mit $A \neq B$ gibt es genau einen Punkt, der zwischen A und B liegt und von A und B gleich weit entfernt ist.

i) Jedes Quadrat ist ein Rechteck.

k) Jedes Parallelogramm ist ein Rechteck.

l) Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß gilt $0 \mid n$. (L)

m) Es gibt eine Primzahl, die durch 2 teilbar ist. (L)

Rechenoperationen unter Verwendung von Variablen

4 Zusammenfassen in Summen

● **22** Schreibe kürzer!
a) $z + z + z + z$ **b)** $ab + ab + ab$ **c)** $x^3 + x^3 + x^3 + x^3$

Wir wissen bereits: Summen gleicher Summanden kann man als ganzzahlige Vielfache der Summanden schreiben. Man nennt aber nicht nur ein Produkt wie $4z$, sondern auch Produkte wie $\frac{3}{5}z$, $2{,}5z$ oder $-7z$ **Vielfache** von z. Dabei heißen 4, $\frac{3}{5}$, $2{,}5$ oder -7 **Koeffizienten** von z.

● **23** Gib alle reellen Zahlen x an, für die gilt:
a) $2x - 12x + 3x = 35$, **b)** $5x + 4 - 3x = 10$!

Beim Lösen von Gleichungen ist es zweckmäßig, wenn man zunächst Vielfache der vorkommenden Variablen durch Addition oder Subtraktion **zusammenfaßt.**

● **24** Begründe die folgenden Aussagen mit Hilfe dir bekannter Rechengesetze!
Für jede Zahl x gilt: **a)** $5x + 3x = 8x$, **b)** $9x - 7x = 2x$

Wir wissen, daß man z. B. $7{,}4 - 6{,}2 + 9{,}1$
eine *Summe* nennt, obwohl dabei auch zu subtrahieren ist, denn man kann die Subtraktion einer Zahl durch die *Addition* der zu ihr entgegengesetzten Zahl ersetzen:

$$7{,}4 - 6{,}2 + 9{,}1 = 7{,}4 + (-6{,}2) + 9{,}1.$$

Entsprechend nennt man $7{,}4a - 6{,}2b + 9{,}1c$ Summe, da man dafür auch

$$7{,}4a + (-6{,}2b) + 9{,}1c$$

schreiben kann. Diese Schreibweise bedeutet aber nicht, daß $7{,}4a$ positiv oder $-6{,}2b$ negativ sein muß. Der Summand $-6{,}2b$ ist nur dann negativ, wenn b eine positive Zahl ist.
Die einzelnen Summanden einer solchen Summe bezeichnet man oft als ihre **Glieder**.

● **25** Setze in die Summe $3{,}5x + 2{,}2y - 1{,}5x - 6{,}2y$ für **a)** $x = 5; y = 3$, **b)** $x = 6; y = -2$ ein und berechne die Summe! Wie läßt sich die Rechnung abkürzen?

Auch bei einer Summe mit mehreren Variablen ist es zweckmäßig, jeweils die Vielfachen der *gleichen* Variablen zusammenzufassen.

■ **7**

Wir schreiben:	*Wir überlegen:*
$3{,}5x + 2{,}2y - 1{,}5x - 6{,}2y$	Glieder der Summe ordnen
$= 3{,}5x - 1{,}5x + 2{,}2y - 6{,}2y$	Vielfache der gleichen Variablen zusammenfassen
$= \underline{\underline{2x - 4y}}$	

Setzt man in die gegebene und die erhaltene Summe für x und y jeweils gleiche Zahlen ein, so ergibt sich stets dieselbe Zahl. Wenn das Zusammenfassen nicht im Kopf möglich ist, kann man dafür den Taschenrechner benutzen.

■ **8** *Wir schreiben:*
$3{,}56x - 4{,}7y + 0{,}758x + 2{,}88y = 3{,}56x + 0{,}758x - 4{,}7y + 2{,}88y$
Wir berechnen die Koeffizienten:

3,56 $\boxed{+}$ **0,758** $\boxed{=}$ **[4.318]** **4,7** $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ **2,88** $\boxed{=}$ **[—1.82]**

Wir schreiben: $= \underline{\underline{4{,}318x - 1{,}82y}}$

Aufgaben

1. Schreibe mit Hilfe von Variablen!

a) das Zehnfache einer Zahl, **b)** das $\frac{2}{3}$fache einer Zahl

c) das 3,9fache einer Zahl, **d)** ein Fünftel einer Zahl

2. Nenne die Koeffizienten der Variablen!

$6a;\quad -7b;\quad \frac{4}{3}c;\quad 0{,}8d;\quad \frac{e}{4};\quad -\frac{f}{7};\quad g;\quad -h;\quad \frac{2i}{3};\quad -\frac{3}{7}k;\quad \frac{-5p}{9}$

3. Nenne die Summanden der Summen

a) $5x - 4y$, **b)** $-3x + 4y - 2{,}5z$, **c)** $-7x + 6{,}8y - 4{,}6z$!

4. Fasse mündlich zusammen!

a) $3x + 2x;\quad 5x - 7x;\quad 5p - 0;\quad 3x - 5y;\quad 7a - 7a;\quad 14t - 13t$

b) $0{,}8y - 1{,}2y;\quad 5{,}2x - 2{,}4x;\quad 4{,}3a - 5a;\quad 6{,}4z - 7{,}8z$

c) $8a + 7 - 6a;\quad e - 2e - 3e;\quad 4a + 5b - 6b;\quad 7y + 8x - 7y$

5. Löse folgende Gleichungen! Rechne weitestgehend im Kopf!

a) $x + 2x + 3x = 24$ **b)** $4d + 5d - d = 72$ **c)** $15y - 2 - 9y = 10$ **d)** $3p - 7 + p = 5$

6. Berechne die Summen möglichst rationell für $u = 3$, $v = 2$ und $u = 2{,}4$, $v = 5{,}2$!

a) $2u - 3v - 5v - 7u$ **b)** $2{,}3v - 3{,}2u + 4{,}7v - 1{,}8u$

c) $\frac{1}{3}u - \frac{5}{7}v - \frac{9}{7}v + \frac{1}{6}u$ **d)** $6{,}3u - 0{,}18v - 7{,}9u - 0{,}88v$

7. Überprüfe so einfach wie möglich, ob $x = 2{,}2$ und $y = 1{,}8$ die folgenden Gleichungen oder Ungleichungen erfüllen!

a) $2x + 3y + 5x - 6y = 10$ **b)** $5y - 3x - 7y + 6x < 2$

c) $5{,}32x - 4{,}8y - 6{,}74x + 3{,}63y = -5{,}23$

d) $2{,}7x - 5{,}3y + 8{,}56x + 9{,}7y > 70$

8. **a)** Udo denkt sich eine Zahl, verdoppelt sie, addiert 5 und subtrahiert die gedachte Zahl. Wie kann man die gedachte Zahl ermitteln, wenn man Udos Ergebnis kennt?

b) Erfinde selbst ein ähnliches Zahlenrätsel!

Fasse zusammen!

9.↑ **a)** $\frac{1}{2}p - \frac{1}{3}p$ **b)** $\frac{5}{4}d - \frac{3}{2}d$ **c)** $\frac{2}{5}x - \frac{7}{5} - \frac{9}{10}x$ **d)** $-\frac{3}{4}d + \frac{5}{2}d - \frac{1}{8}d$

10.↑ **a)** $5{,}3b - 3{,}5 - 6{,}1b$ **b)** $7{,}2f - 8{,}7g - 5{,}8f + 3{,}2g$

c) $0{,}82a - 7{,}4b - 6{,}32 + 7{,}39a - 0{,}874 + 0{,}014b$

11.↑ **a)** $15ab + 4ab - 10ab$ **b)** $-6xy - xy + 8xy$ **c)** $-4m^3 + 10m^3 - 8m^3$

d) $11x^2 + 4x - x^2 - 9x$ **e)** $2y^2 - 3y + 2y - y^2$ **f)** $5ab - a^2 - 6ab - 3a^2$

g) $-25k^4 - 32k^4 + 48k^4$ **h)** $mn + 2n - 8m$

12.*↑ **a)** $5ab + 3ac - 7bc + 6ab + ca - 5ba + 11ac - 6bc$ (L)

b) $30x^2 + 40y^2 + 50z^2 - 80x^2 + 10z^2 - 30y^2$ (L)

13. Schreibe **a)** $2u$, **b)** v, **c)** $3{,}57w$, **d)** $-4x$, **e)** $-y$; **f)** $-0{,}78z$ als Summe mit zwei Summanden!

14. Ergänze den linken Term so, daß aus ihm der rechte Term durch Zusammenfassen hervorgeht!

a) $3k - 8x - \boxed{} + 3x = -2k - 5x$ (L)

b) $-8x + \boxed{} + \boxed{} + 5a = -5x + 10{,}2a$

15. Ralf hat Summen zusammengefaßt. Wo hat er Fehler gemacht? Begründe!

(1) $8a + 9b = 17ab$ (4) $ab - a = b$ (7) $a + a = a^2$
(2) $9ab - 5ab = 4ab$ (5) $5a + a = 5a^2$ (8) $5a + 7a = 12a^2$
(3) $12ab - 9ab = 3$ (6) $a^2 + a^2 = a^4$ (9) $7a - a = 7a$

16.* Gibt es jeweils Zahlen a und b, so daß man beim Einsetzen in die Gleichungen aus Aufgabe 15 auf der linken Seite die gleiche Zahl erhält wie auf der rechten? (L)

5 Addition von Summen

● **26** Zu 278 ist die Summe von 345 und 122 zu addieren!
a) Schreibe die Aufgabe mit Hilfe von Klammern auf!
b) Berechne das Ergebnis auf unterschiedliche Weise! Begründe dein Vorgehen!

Für die Addition reeller Zahlen kennen wir das Kommutativ- und das Assoziativgesetz:

Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:
$a + b = b + a$
$a + (b + c) = (a + b) + c.$

Aufgrund des Assoziativgesetzes kann man statt $a + (b + c)$ bzw. statt $(a + b) + c$ einfach $a + b + c$ schreiben. Sind reelle Zahlen zu addieren, so können aufgrund dieser Gesetze
- Klammern um Summen weggelassen (aufgelöst) werden,
- Summanden beliebig miteinander vertauscht werden.

Summen und Produkte reeller Zahlen sind wieder reelle Zahlen. Daher lassen sich diese Regeln auch anwenden, wenn in $a + b + c$ die Summanden
- Produkte von reellen Zahlen
- Summen von reellen Zahlen sind.

■ **9** **a)**
$$\begin{aligned} & 7a + (5b - 4a) && \text{(Klammern auflösen)}\\ &= 7a + 5b - 4a && \text{(Ordnen)}\\ &= 7a - 4a + 5b && \text{(Zusammenfassen)}\\ &= \underline{\underline{3a + 5b}} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & (15a + b) + (-4a + 3b) && \text{(Klammern auflösen)}\\ &= 15a + b + (-4a) + 3b \\ &= 15a + b - 4a + 3b && \text{(Ordnen)}\\ &= 15a - 4a + b + 3b && \text{(Zusammenfassen)}\\ &= \underline{\underline{11a + 4b}} \end{aligned}$$

● **27** Berechne möglichst einfach $-5x + (-2y + x) + (3y - 2x)$ für $x = -2$ und $y = -3$!

Aufgaben

1. Peter vertauscht die Summanden der Summe $5b - 4a$ und erhält $4a - 5b$. Was meinst du dazu?

2. Löse die Klammern auf und fasse zusammen!
a) $u - v + (7{,}9 - u + v)$ **b)** $-13{,}2 + (10 - a) + c - a$ **c)** $7b^2 + (3b^2 + 2ab)$
d) $(4x + 8) + (x - 1)$ **e)** $(32c - 16d) + (6c + 7d)$ **f)** $2a^3 + (3a^3 - a^2b)$
g) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{2} - x\right)$ **h)** $\left(\frac{2}{5}a + \frac{1}{3}b\right) + \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right)$ **i)** $(6{,}3a - 7{,}2b) + (-2{,}7a)$
k) $(7a^2 + 7a - 3) + (-4a^2 - 2a + 7)$ **l)** $(u^2 + 2uv + v^2) + (2uv - u^2 - v^2)$

3. Schreibe mit Hilfe von Klammern und vereinfache!
a) Addiere zu $7a$ die Summe $5a + 7$!
b) Zur Differenz $1 - 5x$ ist $8x$ zu addieren!
c) Addiere die Differenzen $2m^2 - 3mn$ und $-m^2 - mn$! (L)

4. Ersetze in
a) $T_1 + T_2$, **b)** $T_1 + T_3$, **c)** $T_2 + T_3$
T_1 durch $3{,}2x - 4{,}9y$; T_2 durch $16{,}3x + 7{,}2y$; T_3 durch $-3{,}75y - 5{,}2x - 7$ und vereinfache so weit wie möglich!

5. Berechne möglichst rationell
a) $(-6u - 8v) + (7u + 6v)$, **b)** $(2u - v) + (-3u - 4v)$
für $u = 7{,}5$ und $v = -2{,}5$!

6. Die in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks haben die Zahlenwerte $x + y$, $z - x$ und $10 - 2y$.
a) Wie groß ist der Umfang eines solchen Dreiecks? (L)
b)* Gib für x, y, z Zahlen an, so daß man aus den angegebenen Seiten ein Dreieck konstruieren kann!

7. Ergänze den linken Term so, daß aus ihm der rechte Term durch Vereinfachen hervorgeht!
a) $5x + (7y - \boxed{}) = 5x + 7y - 3z$
b) $(7u + \boxed{}) + (\boxed{} + v) = 5u - 3v$
c)* $2a + (\boxed{} - \boxed{}) = a + 3b$ (L)
d)* $6m + (\boxed{} - 5n) + (\boxed{} - \boxed{}) = 4n - p$ (L)

8. Es sei n eine beliebige natürliche Zahl größer als Null.
a) Gib den Vorgänger und den Nachfolger von n an!
b) Wie groß ist n, wenn die Summe aus n, dem Vorgänger von n und dem Nachfolger von n gleich 276 ist?

9. Die Summe aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 102. Berechne diese Zahlen! (L)

10.* Einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker war CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 bis 1855), der sich auch große Verdienste auf dem Gebiet der Physik erwarb. Ihm zu Ehren wurden im Jahre 1977 zu seinem 200. Geburtstag eine Medaille und Sonderbriefmarken herausgegeben (↗ Bild A 3). Schon als neunjähriger Schüler überraschte GAUSS seinen Lehrer, als dieser seiner Klasse die Aufgabe stellte, die natürlichen Zahlen von 1 bis 40 zu addieren. GAUSS ermittelte die Summe innerhalb weniger Minuten durch die folgende Rechnung:

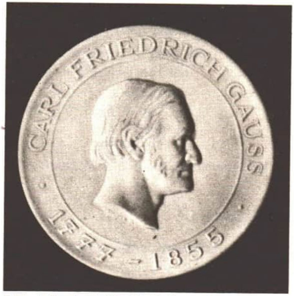


Bild A 3: Carl-Friedrich-Gauss-Medaille; gestiftet von der Akademie der Wissenschaften der DDR, Berlin 1977

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 38 + 39 + 40 = 20 \cdot 41 = 820$$

a) Erläutere diesen Rechenweg!

b) Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Berechne die Summe s der natürlichen Zahlen von 1 bis n!

Hinweis:

$$s = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$s = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + \quad 3 \quad + \quad 2 \quad + 1$$

Berechne zunächst $2s$! (L)

c) Berechne mit dem unter b gefundenen Ergebnis die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100!

6 Subtraktion von Summen

28 Von 375 ist die Summe der Zahlen 25 und 215 zu subtrahieren!

a) Schreibe die Aufgabe mit Hilfe von Klammern auf!

b) Berechne das Ergebnis der Aufgabe auf unterschiedliche Weise! Begründe dein Vorgehen!

29 Ergänze die folgende Tabelle!

a	3		$-4{,}8$				π
$-a$		$-3{,}5$			$\frac{1}{2}$	0		
$(-1) \cdot a$				1			-2	

Für jede Zahl a gilt $(-1) \cdot a = -a$. Die entgegengesetzte Zahl zu a erhält man also auch durch Multiplikation mit -1.

30 Ergänze folgende Tabelle! Rechne im Kopf!

a	b	c	$a-(b+c)$	$a-b+c$	$a-b-c$
8	2	3			
-7	5	-1			
-5	-4	7			
-3	-2	0			

Für die in der Tabelle gegebenen Zahlen a, b und c gilt $a-(b+c) = a-b-c$.

Frage: Gilt diese Gleichung für beliebige Zahlen a, b und c?

Zur Beantwortung der gestellten Frage überlegen wir:

- Von der Zahl a ist die Summe $b+c$ zu subtrahieren.
- Die Subtraktion von $b+c$ kann man durch die Addition der zu $b+c$ entgegengesetzten Zahl ersetzen.
- Die zu $b+c$ entgegengesetzte Zahl ist $(-1) \cdot (b+c)$.

Es ist

$$\begin{aligned}(-1) \cdot (b+c) &= (-1) \cdot b + (-1) \cdot c \qquad \text{(Distributivgesetz)}\\ &= (-b) + (-c) = -b-c.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir: $a-(b+c) = a+(-b-c) = a-b-c$.

Ergebnis: Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt $a-(b+c) = a-b-c$.

Man kann also eine Summe subtrahieren, indem man jeden Summanden subtrahiert.

■ **10** **a)** $7a - (5b - 4a)$ (Klammern auflösen)
$= 7a - 5b - (-4a)$
$= 7a - 5b + 4a$ (Ordnen)
$= 7a + 4a - 5b$ (Zusammenfassen)
$= \underline{\underline{11a - 5b}}$

b) $7a - (-5b - 4a)$
$= 7a - (-5b) - (-4a)$
$= 7a + 5b + 4a$
$= \underline{\underline{11a + 5b}}$

c) $-(2x + 3y - 5z) + (5x - 7y) - (-8x + 3y - 2z)$
$= -2x - 3y + 5z + 5x - 7y + 8x - 3y + 2z$
$= -2x + 5x + 8x - 3y - 7y - 3y + 5z + 2z$
$= \underline{\underline{11x - 13y + 7z}}$

■ **11** Wir lösen folgende Gleichung:
$2x - (3x - 17) + (6x - 5) = 5$
$2x - 3x + 17 + 6x - 5 = 5$
$2x - 3x + 6x + 17 - 5 = 5$
$5x + 12 = 5$
$\underline{\underline{x = -1{,}4}}$

● **31** Erläutere alle Schritte im Beispiel A 11 und mache die Probe!

Aufgaben

Löse die Klammern auf und fasse zusammen!

1.↑ **a)** $5x - (8x + 3y)$ **b)** $-11 - (10 - a)$ **c)** $8a - (-7b + 2a)$ **d)** $-(3x - 3y)$
e) $-(-4a + 7b)$ **f)** $5a + b - (3a - b + c)$ **g)** $(3x^2 + 7x) - (-x^2 + x)$
h) $-(18c - 7d) - (13c - 11d)$ **i)** $0{,}6y - (3{,}2y + 0{,}7)$
k) $(11{,}5u - 3{,}4v) - (-7{,}4v)$ **l)** $-3{,}47a - (-5{,}47a - 1{,}48b)$

2.↑ **a)** $-\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}\right) - (-0{,}6 - x)$ **b)** $-\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b\right) + \left(\frac{5}{6}a - \frac{1}{4}b\right)$
c) $-(25{,}3x - 18{,}4y) + (-9{,}7x - 7{,}3y)$
d) $-(4{,}37a^2 - 5{,}91ab) - (-2{,}31a^2 - 5{,}79ab)$ (L)
e) $(-5x - 3y + 2) - (-3x + 2y - 1) + (2x + 5y - 3)$ (L)

3. Schreibe mit Hilfe von Klammern und vereinfache!
a) Subtrahiere von $8x$ die Summe $5x + 7$!
b) Von $3 - 5a$ ist $-7a$ zu subtrahieren!
c) Subtrahiere $5z - 7u$ von $-11z$!

4. Gegeben sind die Differenzen $6m - 5n$ und $-3n - 11m$.
a) Addiere die Differenzen!
b) Subtrahiere die Differenzen voneinander!
c) Begründe, warum die Aufgabe **b)** nicht eindeutig lösbar ist!

5. Ersetze in
a) $T_1 - T_2$, **b)** $T_2 - T_1$, **c)** $T_1 - T_2 + T_3$, **d)** $-T_1 + T_2 - T_3$
T_1 durch $7{,}3a - 5{,}7b$, T_2 durch $-10{,}1a - 3{,}6b$, T_3 durch $0{,}9b + 9{,}3a$ und vereinfache so weit wie möglich!
Wodurch unterscheiden sich die Ergebnisse der Aufgaben a) und b) bzw. c) und d) voneinander? (L)

6. Schreibe als Differenz zweier Terme!
a) $3a - 4b - 6$ (L) **b)** $5xy + 3xz + 7yz$ **c)** $-4u^2 + 11v - 7w$

7. Berechne möglichst einfach
a) $-3u - (7u - 5v) - 7v$ **b)** $-(5u - 7v) + (-2u + 3v)$
c)* $\left(\frac{3}{5}u^2 - 0{,}4uv - 1{,}5v^2 + 1\right) - \left(v^2 - \frac{2}{5}uv + 0{,}6u^2\right)$ (L)
für $u = -2{,}4$ und $v = 1{,}7$!

8. Ergänze den linken Term so, daß aus ihm der rechte Term durch Vereinfachen hervorgeht!
a) $3a - (\boxed{} - 5b) = -a + 5b$ **b)** $7x - (\boxed{} - \boxed{}) = 6x + 3y$
c)* $-3c - (\boxed{} - 8d) - (\boxed{} - \boxed{}) = -4c + e$ (L)
d) *Gib jeweils an, wieviel Möglichkeiten es zur Ausfüllung der Kästchen gibt, wenn in jedes Kästchen nur ein Vielfaches einer Variablen geschrieben werden soll! (L)

9. Löse folgende Gleichungen!
a) $5x - (7 - 2x) + 8 = 15$ **b)** $7z - 6 - (5 - 3z) = 14$

10. Begründe, daß für beliebige reelle Zahlen a, b, c, d und e gilt:
$(a - b) + (c - d - e) = (a + c) - (b + d + e)$!

11. Axel schreibt eine Zahl auf. Er subtrahiert das Dreifache dieser Zahl von 7. Nun subtrahiert er die erhaltene Zahl von der notierten und erhält 29. Welche Zahl hat Axel aufgeschrieben?

12. Setze in den folgenden Gleichungen Klammern so, daß die entstehenden Gleichungen für beliebige reelle Zahlen x, y und z gelten!
a) $7x - 5y - 3z = 7x - 5y + 3z$ **b)** $-7x + 5y - 3z = -7x - 5y - 3z$ (L)

13. **a)** Für welche reellen Zahlen a und b gilt $a - b = b - a$?
b) Ändere die rechte Seite dieser Gleichung unter Verwendung von Klammern so ab, daß die neue Gleichung für alle reellen Zahlen a und b gilt!

7 Multiplikation von Produkten

● **32** **a)** Bilde das Produkt von $2{,}5b$ und $4a$!
b) Berechne es ohne Taschenrechner für $a = 3$, $b = 7$, für $a = 2{,}1$, $b = -5$, für $a = -0{,}3$, $b = -0{,}8$!
c) Wie lassen sich diese Berechnungen vereinfachen?

Produkte aus Zahlen und Variablen kann man vereinfachen, indem man die Zahlen (Koeffizienten) multipliziert und deren Produkt als Koeffizient vor das Produkt der Variablen setzt. Wir wenden dabei das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Multiplikation an. Zur besseren Übersicht ordnet man die Variablen alphabetisch.

■ **12** $2{,}5b \cdot 4a = 2{,}5 \cdot 4 \cdot b \cdot a = \underline{\underline{10ab}}$

Kommen gleiche Variable in den Faktoren vor, kann man die Produkte weiter vereinfachen. Dabei nutzen wir die Potenzschreibweise.

● **33** **a)** Schreibe kürzer: $a \cdot a$, $a \cdot a \cdot a$, $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$!
b) Was bedeutet a^n, wenn n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist?
c) Wie nennt man a und n in der Potenz a^n?

■ 13 a) $0{,}6ab \cdot 7a = 0{,}6 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b = \underline{\underline{4{,}2a^2b}}$

b) $4ab \cdot (-10ab) = 4 \cdot (-10) \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = \underline{\underline{-40a^2b^2}}$

c) $2{,}2a^2b \cdot 5b^2 = 2{,}2 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b \cdot b^2 = \underline{\underline{11a^2b^3}}$

d) $(-2{,}5a^2) \cdot 2 \cdot (-3ab) = (-2{,}5) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot a^2 \cdot a \cdot b = \underline{\underline{15a^3b}}$

Aufgaben

Vereinfache! (Die Aufgaben 1 und 2 sind im Kopf zu lösen.)

1.↑ a) $1{,}2x \cdot 5$ b) $(-1{,}3) \cdot 2y$ c) $\frac{3}{4}z \cdot \frac{2}{9}$ d) $(-3{,}7u) \cdot 0v$
e) $7a \cdot 5b$ f) $9x \cdot (-3y)$ g) $(-6e) \cdot (-3f)$ h) $0{,}3x \cdot 5y$

2.↑ a) $(-3a) \cdot 2b \cdot (-c)$ b) $4x \cdot (-5y) \cdot 2z$
c) $(-2p) \cdot (-4q) \cdot (-m)$ d) $(-2x) \cdot 0 \cdot (-0{,}73y)$

3.↑ a) $2{,}5k \cdot (-0{,}41)$ b) $4{,}5 \cdot (-1{,}2v)$ c) $0{,}4u \cdot (-0{,}2v)$
d) $-6p \cdot \left(-\frac{2}{3}q\right)$ e) $(-1{,}5r) \cdot (-0{,}25s)$ f) $7{,}3p \cdot 0p$

4.↑ a) $5m \cdot 3m$ b) $2{,}5x \cdot 3x$ c) $-6{,}2t \cdot 2t$ d) $(-6c^2) \cdot 3c$
e) $(-x^2) \cdot (-x^3)$ f) $6a^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2\right)$ g) $-3c^2 \cdot 2c^2$ h) $3ab \cdot (-2a^2)$
i) $\left(-\frac{1}{5}ab\right) \cdot 10ab$ k) $1{,}25x^2y \cdot 1{,}8xy^2$ (L) l) $2{,}8x^2y \cdot 0{,}34xy$ (L)
m) $(-3{,}36d) \cdot (-0{,}225d^3)$ (L) n) $6xy \cdot (-5yz) \cdot (-2xz)$ o) $-5ab \cdot 2av \cdot (-7bv)$

5.*↑ a) $(-8a^3b^2c) \cdot (-2ab^2c^3)$ (L) b) $(-2{,}5m^3n^2p) \cdot (-3{,}4m^2np^2)$ (L)

6.↑ a) $7a \cdot 3ab + 6a^2 \cdot 8b$ b) $(-9m^2) \cdot 5n + 8mn \cdot 4m$
c)* $(-3x) \cdot (-5xy) + (-2xy) \cdot 7x$ (L)

7. Berechne $3{,}5ab \cdot 0{,}2b$ für $a = 1{,}6$ und $b = 0{,}45$!

8. Ergänze den linken Term so, daß aus ihm der rechte Term durch Vereinfachen hervorgeht!
a) $5xy \cdot \boxed{} = 35xy^2$ b) $(-7ab) \cdot \boxed{} = 56abx$
c) $6u^2v \cdot \boxed{} = -54u^3v$ d) $(-8mn) \cdot \boxed{} = 48m^2n^2$

9. Fasse a) $12xy$, b) $-15y^2$, c) $3x^9$, d) $-25x^{12}$ jeweils als Produkt zweier Faktoren auf! Wie können die beiden Faktoren heißen?

10. Tom hat Produkte vereinfacht. Suche nach Fehlern!
a) $5a^2b \cdot 0{,}7b^2 = 3{,}5a^2b^2$ c) $7yz \cdot 3az = 21z^2ya$
b) $-3ab \cdot (-5x) = -15abx$ d) $6a^2 \cdot 4a^3 = 24a^6$

8 Division von Produkten

● 34 Schreibe die folgenden Quotienten[1]) mit Hilfe eines Bruchstrichs und kürze danach!
a) $6xy : 15$ b) $12xy : y$ c) $24xy : (3x)$

---

[1]) Kommen im Divisor eines Quotienten Variable vor, so sollen diese stets für von Null verschiedene Zahlen stehen.

● **35** Der Quotient aus den Produkten $20 \cdot 12$ und $3 \cdot 4$ soll aufgeschrieben werden. Axel schreibt $(20 \cdot 12):(3 \cdot 4)$, Beate $(20 \cdot 12):3 \cdot 4$, Christa $20 \cdot 12:(3 \cdot 4)$, Daniel $20 \cdot 12:3 \cdot 4$, Elke $\frac{20 \cdot 12}{3 \cdot 4}$. Wessen Schreibweise entspricht der gestellten Aufgabe? Begründe! (L)

Sind Produkte zu dividieren, so empfiehlt es sich, beim Schreiben des Quotienten anstelle des Divisionszeichens „:" den Bruchstrich zu verwenden. Man vermeidet dadurch Mißverständnisse. Quotienten, bei denen Dividend und Divisor Produkte aus Zahlen (Koeffizienten) und Variablen sind, lassen sich häufig durch Kürzen vereinfachen.

■ **14** a) $\frac{63x}{7y} = \underline{\underline{\frac{9x}{y}}}$ c) $\frac{2{,}1u}{3v} = \underline{\underline{\frac{0{,}7u}{v}}}$ oder $\frac{2{,}1u}{3v} = \frac{21u}{30v} = \underline{\underline{\frac{7u}{10v}}}$

b) $\frac{45a}{36b} = \underline{\underline{\frac{5a}{4b}}}$ d) $\frac{35x^2}{7x} = \frac{35 \cdot x \cdot x}{7 \cdot x} = \frac{5 \cdot x}{1} = \underline{\underline{5x}}$

e) $\frac{48x^2y}{-36xy} = -\frac{48 \cdot x \cdot x \cdot y}{36 \cdot x \cdot y} = -\frac{4 \cdot x}{3} = \underline{\underline{-\frac{4x}{3}}} \left(= -\frac{4}{3}x\right)$

f) $\frac{-24a^2}{-48a^5} = +\frac{24 \cdot a \cdot a}{48 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{2 \cdot a \cdot a \cdot a} = \underline{\underline{\frac{1}{2a^3}}}$

Manchmal schreibt man einen Quotienten z. B. aus $35x^2$ und $7x$ auch in der Form $35x^2:7x$. Dann wird stillschweigend vorausgesetzt, daß dies $35x^2:(7x)$ bedeuten soll $\left(\text{was dasselbe ist wie } 35x^2 \cdot \frac{1}{7x}\right)$ und nicht etwa $35x^2:7 \cdot x$.

● **36** Berechne $35x^2:(7x)$ und $35x^2:7 \cdot x$ für $x = 2$!
Vergleiche!

Aufgaben

Vereinfache! (Die Aufgaben 1 und 2 sind im Kopf zu lösen!)

1.↑ a) $6{,}4abc:8$ b) $27xy:(-9)$ c) $1{,}8xyz:z$ d) $4mn^2:m$

2.↑ a) $\frac{8ab}{4b}$ b) $\frac{15mn}{-5n}$ c) $\frac{-6xy}{-4x}$ d) $\frac{-10pq}{6pq}$ e) $\frac{4mn}{m^2}$ f) $\frac{8a^2x}{-16ax^2}$

3.↑ a) $6abc:(-3c)$ c) $15ab:(-5ab)$ e) $(-2pq):\left(\frac{1}{2}pqr\right)$
b) $(-24xyz):(-8y)$ d) $(-4xyz):(-4xz)$ f) $27a^2x:(18ax^2)$

4.↑ a) $3a^2b:(6a^2)$ b) $3{,}2xy^2:(8x)$ c) $5{,}4cd:(9c^2)$ d) $7{,}2uv^2:(24v)$

5.↑ a) $\frac{8a^2b}{2ab}$ c) $\frac{16x^3y^2}{4x^2y}$ e) $\frac{24ab^2}{36a^2b}$ g) $\frac{-2a^3b^2c}{-6a^2bc^2}$ i) $\frac{0rs}{0{,}25r^2}$
b) $\frac{-9ab^2}{3ab}$ d) $\frac{20m^2n^3}{5m^4n^3}$ f) $\frac{25a^2b^2}{-15ab}$ h) $\frac{22x^2yz}{1{,}1xy^2z}$ k) $\frac{2{,}2xy^2z^2}{11x^2yz^2}$

6.*↑ a) $\frac{27a^2b^3}{9ab^2} + \frac{35a^2b^2}{7ab}$ (L) b) $\frac{0{,}6x^3y}{0{,}3xy} - \frac{1{,}5x^2yz}{5xz}$ (L)

7.↑ a) Gib zum Berechnen von $\frac{-25ab^2}{-15a^2b}$ mit dem Taschenrechner einen möglichst kurzen Ablaufplan an!
b) Berechne den Quotienten nach deinem Ablaufplan für $a = 0{,}37$, $b = 2{,}3$ und für $a = -0{,}65$, $b = \pi$ auf jeweils zwei Stellen nach dem Komma!

9 Multiplikation von Summen

● **37** Berechne das Produkt $0{,}75\left(4a + \frac{8}{3}b\right)$ für $a = 1{,}54$ und $b = 2{,}37$ mit dem Taschenrechner! Schreibe zunächst einen Ablaufplan für diese Berechnung auf!

Die Berechnung des Produktes im Auftrag A 37 läßt sich vereinfachen. Dazu formen wir das Produkt mit Hilfe des Distributivgesetzes in eine Summe um:

$$0{,}75\,(4a + \tfrac{8}{3}b) = 0{,}75 \cdot 4a + 0{,}75 \cdot \tfrac{8}{3}b$$
$$= 3a + 2b$$

● **38** Berechne die Summe $3a + 2b$ für die im Auftrag A 37 gegebenen Zahlen mit dem Taschenrechner! Vergleiche den Rechenaufwand dieser Berechnung mit dem im Auftrag A 37 erforderlichen!

Die Aufträge A 37 und 38 zeigen: Manchmal ist es zweckmäßig, Produkte der Form $a(b + c)$ in eine Summe umzuformen.

■ **15** **a)** $x(y - z) - y(x + z) + z(x - y)$
$= xy - xz - yx - yz + zx - zy$
$= xy - xz - xy - yz + xz - yz$
$= \underline{\underline{-2yz}}$

b) $2a^2(8a - 5ab + 7b^2) = 2a^2 \cdot 8a - 2a^2 \cdot 5ab + 2a^2 \cdot 7b^2$
$= \underline{\underline{16a^3 - 10a^3b + 14a^2b^2}}$

c) $(ab + ac) \cdot \frac{1}{a} = ab \cdot \frac{1}{a} + ac \cdot \frac{1}{a} = \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a} = \underline{\underline{b + c}}$

Die Multiplikation der Summe $ab + ac$ mit $\frac{1}{a}$ ist gleichbedeutend mit der Division dieser Summe durch a. Man kann also die Division einer Summe s durch eine Zahl a auf die Multiplikation von s mit $\frac{1}{a}$ zurückführen.

■ **16** $(15ab - 5bc) : (5b) = (15ab - 5bc) \cdot \frac{1}{5b} = \frac{15ab}{5b} - \frac{5bc}{5b} = \underline{\underline{3a - c}}$

Aufgaben

Forme folgende Produkte in eine Summe um! Rechne im Kopf!

1.↑ **a)** $7(3x - 5y)$ **c)** $-3x(0{,}5x - 0{,}1y)$ **e)** $(3m - 2n + 5) \cdot (-7m)$ **g)** $\frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)$
b) $(5u - 9v) \cdot 7$ **d)** $9a(a - b + c)$ **f)** $(-a)\,(6ab + 3c - 4)$

2.↑ **a)** $0{,}7x(0{,}7xy + 0{,}1y - 0{,}4)$ **b)** $-\frac{1}{3}u\,(-6u^2 - 9u + 12)$ **c)** $\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y\right) \cdot (-15x)$

3. Löse die Klammern auf und fasse zusammen!
a) $5x - 7(2x - 1)$ **b)** $3y(2 - x) + 4xy$ **c)** $u(v - w) - v(u - w)$
d) $4a(6b - 3) - 5(3a + 2ab)$ **e)** $-3(a + 7) + 5(a - 3) - 8(2a + 1)$
f) $2{,}7x^2(1{,}4x - 3{,}2xy) - 1{,}5x(2{,}3x^2 - 1{,}8y)$

4. Berechne möglichst einfach mit dem Taschenrechner! Runde auf Hundertstel!
a) $3u(v - w)$ für $u = 8{,}74$, $v = 5{,}91$ und $w = -3{,}47$
b) $3(2a + 5b) - 5(3a - 4b)$ für $a = \sqrt{1{,}54}$ und $b = 2{,}35$

5. Ergänze den linken Term so, daß aus ihm der rechte Term durch Vereinfachen hervorgeht!

a) $3(x + \boxed{}) - 1{,}5x = 1{,}5x - 3y$

b) $\boxed{}(4u^2 - 7u + 8) = 28u^3 - 49u^2 + 56u$

c)* $5(\boxed{} - \boxed{}) + 2x - 3y = -18x + 2y$ (L)

6.* Es seien a und b rationale Zahlen, und es gelte $-3(a - b) > 0$. Gilt dann auch $a > b$? Begründe deine Entscheidung! (L)

7. Löse folgende Gleichungen!

a) $6(x + 5) = 72$ **b)** $-5(x - 7) = 50$

c) $3(2x - 4) - (x + 7) = -14$ **d)** $2(7 - 3y) + 3(2y - 1) = 53$

8. Ein Rechteck habe die Seitenlängen $a = 4{,}5$ cm und $b = 2{,}5$ cm.

a) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks!

b) Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn b um 1,2 cm vergrößert wird?

c) Die Seite b werde um x (gemessen in cm) vergrößert. Gib den Flächeninhalt in Abhängigkeit von x an! Berechne den Flächeninhalt für $x = 0{,}8$ cm; $x = 2{,}4$ cm und $x = 8{,}7$ cm!

9.* Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:

Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der folgenden Nacht wieder $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf, in der Nacht $\frac{1}{4}$ Elle herunter. Nach wieviel Tagen erreicht die Katze die Maus? (L)

Bild A 4

10 Ausklammern

Nicht immer ist es zweckmäßig, Produkte der Form $a(b + c)$ in eine Summe umzuformen. Will man z. B. $5(7 + 3)$ ermitteln, rechnet man gewiß $5 \cdot 10 = 50$ und sicher nicht

$$5 \cdot 7 + 5 \cdot 3 = 35 + 15 = 50.$$

Für manche Berechnungen ist es umgekehrt sogar günstig, Summen der Form $ab + ac$ in ein Produkt umzuformen.

● **39** **a)** Berechne die Summe $2uv + 2uw$ für $u = 2{,}4$; $v = 3{,}7$ und $w = -1{,}8$ mit dem Taschenrechner! Schreibe zunächst einen Ablaufplan für die Berechnung auf!

b) Begründe: Für alle rationalen Zahlen u, v und w gilt: $2uv + 2uw = 2u(v + w)$!

c) Berechne $2u(v + w)$ für die in a) gegebenen Zahlen u, v und w mit dem Taschenrechner! Schreibe auch dafür einen Ablaufplan auf!

d) Vergleiche die Anzahl der Eingabeschritte in den Ablaufplänen bei a) und c)!

Beide Summanden der Summe $2uv + 2uw$ haben den gemeinsamen Faktor $2u$. Deswegen läßt sich diese Summe nach dem Distributivgesetz als Produkt $2u(v + w)$ schreiben. Man sagt, daß der gemeinsame Faktor $2u$ **ausgeklammert** wird. Die Glieder in der Klammer erhält man, indem man die ursprünglichen Summanden durch den ausgeklammerten Faktor dividiert.

■ **17** Die Summe $3ab + 9ac$ ist in ein Produkt umzuformen!

1. Wir suchen einen gemeinsamen Faktor der beiden Summanden, den wir ausklammern. Ein solcher Faktor ist z. B. $3a$.
2. Wir dividieren die gegebenen Summanden durch $3a$:
$3ab : 3a = b; \quad 9ac : 3a = 3c.$
3. Ergebnis: $3ab + 9ac = \underline{\underline{3a(b + 3c)}}.$

● **40** Gib zwei andere Möglichkeiten an, die Summe $3ab + 9ac$ als Produkt zu schreiben!

Manchmal ist in einer Summe ein gemeinsamer Faktor der Summanden nicht sofort zu erkennen. Dann ist es zweckmäßig, die einzelnen Summanden weitgehend in Faktoren zu zerlegen.

■ **18** $9x^2y - 27x^2y^2 + 15xy^2$
$= 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y - 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y + 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot y$
$= \underline{\underline{3xy(3x - 9xy - 5y)}}$

Aufgaben

1. Klammere in den folgenden Summen den jeweils angegebenen gemeinsamen Faktor aus!

a) $5x + 30y$ Faktor: 5
b) $8m^2 + 16mn - 44mn^2$ Faktor: $2; 4; 4m; -4m$
c) $-14u^2v + 21uv - 35uv^2$ Faktor: $7uv; -7uv$
d) $\frac{1}{2}ab - \frac{1}{6}ab^2 - 8b^2$ Faktor: $\frac{1}{2}b$

Forme folgende Summen in Produkte um!

2.↑ a) $5a + 5b$ b) $7x - 14y$ c) $0{,}6x + 1{,}2y$ d) $3a + 7b$ e) $12a - 9b$
f) $7uv + 7uw$ g) $\pi a - \pi b$ h) $xy + y$ i) $5a + 7a$ k) $11ab - 11a$

3.↑ a) $15ab - 5bc$ b) $24uv - 72v$ c) $36ab - 72ba$ d) $1{,}5x + 4{,}5x^2$
e) $a\sqrt{3} + b^2\sqrt{3}$ f) $-21uv - 35uw$ g) $a^2 - ab$ h) $a^2 - a$
i) $7a^2b - 21ab^2$ k) $y^2 - 3y$ l) $3{,}5xy - 4{,}5xy$ m) $26mn - 39pq$

4.↑ a) $4u - 12uv - 24v$ b) $9u - 27uv - 36uv^2$ c) $x^3 + 2x^2 - x$
d) $3ab + 9ac - 12ad$ e) $x^4 + 4x^3 - x^2$ f) $15a^3b^2 - 25a^2b^2 + 5ab^2$

5. Überprüfe, ob folgende Umformungen richtig sind! Korrigiere gegebenenfalls!
a) $24ax + 36ay - 48az = 12a(2x + 3y - 4z)$
b) $-x^3 - x^2 + 2x = -x(x^2 - x + 2)$
c) $3a^3 - 12a^2 + a = a(3a^2 - 12a)$

6. Ergänze den linken Term so, daß aus ihm der rechte Term durch Ausklammern hervorgeht!
a) $5x + 15y - \boxed{} = 5(x + 3y - 2z)$
b) $\boxed{} - 4ac - 8ad = 4a(2a - c - 2d)$

7. Berechne möglichst einfach $15a^2b - 25a^2bc + 20a^2bd$ für $a = -0{,}8$; $b = 1{,}9$; $c = 3{,}4$ und $d = -2{,}6$!

8. Löse folgende Gleichungen!
a) $x(x-3)=0$ **b)** $y^2+y=0$ **c)** $7x-21x^2=0$

9.* Forme $7x(a-b)+13y(a-b)$ in ein Produkt um! (L)

10.* Berechne $\frac{15abc}{5ab+5ac}$ für $a=2$, $b=3$ und $c=6$! (L)

11 Multiplizieren von Summen mit Summen

● **41** Das Bild A 5 zeigt ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $a+b$ und $c+d$.
a) Gib den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ an!
b) Drücke diesen Flächeninhalt durch die Flächeninhalte der vier verschieden markierten Teilrechtecke aus!

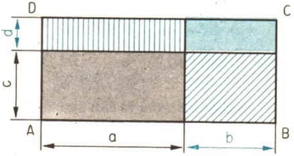


Bild A 5

Für die Seitenlängen a, b, c und d im Bild A 5 gilt offenbar

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

In dieser Gleichung sind a, b, c und d Variable für Größen, deren Zahlenwerte *positive* Zahlen sind. Gilt diese Gleichung auch für *beliebige Zahlen a, b, c und d?*
Zur Beantwortung dieser Frage versuchen wir, das Produkt $(a+b)(c+d)$ schrittweise in eine Summe umzuformen. Um auch hier mit dem Distributivgesetz arbeiten zu können, setzen wir vorübergehend $c+d=e$ und erhalten:

$$(a+b)(c+d)=(a+b)e.$$

Das Produkt $(a+b)e$ können wir in eine Summe umformen:

$$=ae+be \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$

Für e setzen wir wieder $c+d$ ein:

$$=a(c+d)+b(c+d).$$

Die beiden Produkte formen wir auch in Summen um:

$$=ac+ad+bc+bd \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$

Ergebnis:

> **Für beliebige reelle Zahlen a, b, c und d gilt**
> **$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.**

Beachte: Bei der Multiplikation zweier Summen muß jeder Summand des ersten Faktors mit jedem Summanden des zweiten Faktors multipliziert werden:

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Diese Regel läßt sich auch dann anwenden, wenn a, b, c und d Produkte (Vielfache) von reellen Zahlen sind.

■ **19** $(2u-w)(5x-3y)=10ux-6uy-5wx+3wy$

Aufgaben

Multipliziere und fasse, wenn möglich, zusammen!

1.↑ **a)** $(a+b)(c-d)$ **b)** $(a-b)(c-d)$ **c)** $(r-3)(s+1)$
d) $(2m+n)(3x-4y)$ **e)** $(5a+3)\cdot 2a-5$ **f)** $5a+3(2a-5)$
g) $(5a+3)(2a-5)$ **h)** $(5a+3a)(x+1)$ **i)** $(b-3c)(8b+5c)$

2.↑ **a)** $\left(4x+\frac{1}{2}y\right)\left(4x-\frac{1}{2}y\right)$ **b)** $(b+0{,}5b)(a+0{,}2a)$ **c)** $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$
d) $(4z-1)(4z-1)$ **e)** $(3{,}2u+1{,}5v)(7{,}8u-2{,}6v)$ **f)** $(3x+4y)^2$

3.↑ **a)** $-(x+1)(x-4)$ **b)** $-(3a+b)(3a-b)$

4.↑ **a)** $(5a-4b-3c)(2a-b)$ **b)** $(-xy+3yz-z)(x-y)$
c) $(a^2+ab+b^2)(a+b)$ **d)** $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

5. Ermittle **a)** $A\cdot B$, **b)** $A\cdot C$, **c)** $A\cdot D$, **d)** $B\cdot C$, **e)** $C\cdot D$
für $A=2a+3y$, $B=xy-1$, $C=-x+1$, $D=2-x+3y$!

6. Multipliziere und fasse zusammen!
a) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$ **b)** $(2x-3)(3x-1)-(6x+2)(x-5)$

7. Löse folgende Gleichungen!
a) $(3x+7)(x-5)-3x^2+25x=0$ (L)
b) $(3x+2)(3x-2)-9x(x-3)=50$ (L)

8. Berechne möglichst einfach!
a) $(2x+3y)^2-(4x^2+9y^2)$ für $x=3{,}45$ und $y=2{,}06$
b) $(x-y)(y+c)+y(y-x)$ für $x=0{,}86$, $y=0{,}36$, $c=1{,}2$
c) $(x-3)(x+7)-(x+5)(x-1)$ für $x=\pi$

9. Ergänze den linken Term so, daß aus ihm der rechte Term durch Multiplizieren und Zusammenfassen hervorgeht!
a) $(y+4)(y+\boxed{})=y^2+2y-8$ **b)** $(z+\boxed{})(z-5)=z^2-2z-15$
c) $(2x+3)(\boxed{}+\boxed{})=2x^2+11x+12$
d) $(a+2)(\boxed{}-\boxed{})=a^2-4$

10.* Forme folgende Summen in Produkte um!
a) $mx+my+10x+10y$ (L) **b)** $7a-7b+au-bu$ (L)
c) $ac+bc-2a-2b$ (L) **d)** x^2-9 (L)

11.* Begründe: Für alle natürlichen Zahlen $n \neq 2$ ist n^2-1 keine Primzahl. (L)

12 Beispiele für Beweisführungen unter Verwendung von Variablen

Wir wissen bereits: Viele Sätze über Zahlen oder Größen lassen sich mit Hilfe von Variablen beweisen. In Lerneinheit A 3 findest du einen Beweis eines Satzes über die Summe zweier gerader Zahlen.

● **42** Beweise den folgenden aus Klasse 6 bekannten Satz!
Wenn zwei beliebige natürliche Zahlen durch eine natürliche Zahl n teilbar sind, dann ist ihre Summe durch n teilbar.

Wir wollen weitere Beispiele für solche Beweise kennenlernen. Es soll der folgende Satz bewiesen werden:

Die Summe von drei beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

Vorüberlegung: Zunächst bezeichnen wir diese drei natürlichen Zahlen. Die erste Zahl sei n. Dann ist die zweite Zahl $n + 1$ (als Nachfolger von n) und die dritte Zahl $(n + 1) + 1 = n + 2$. Die Summe dieser drei Zahlen ist

$$s = n + n + 1 + n + 2.$$

In dem Satz wird behauptet, daß die Summe s durch 3 teilbar ist. Wir müssen also zeigen: Es gibt eine natürliche Zahl z, so daß $s = 3 \cdot z$ ist. (Das heißt, s ist das Dreifache von z.) Wir vereinfachen die Summe s, erhalten $s = 3n + 3$ und klammern den Faktor 3 aus: $s = 3(n + 1)$. Die natürliche Zahl $n + 1$ bezeichnen wir mit z; daher ist $s = 3z$. Es gibt also eine natürliche Zahl z (nämlich die Zahl $n + 1$), so daß $s = 3z$ ist. Das heißt: s ist durch 3 teilbar.
In Kurzform kann man den Beweis folgendermaßen aufschreiben:

20 *Voraussetzung:* s ist Summe von n, $n + 1$, $n + 2$; $(n \in N)$

Behauptung: $3 \mid s$

Beweis:

$s = n + n + 1 + n + 2$	(Voraussetzung)
$s = 3n + 3$	(Zusammenfassen)
$s = 3(n + 1)$	(Ausklammern)
$s = 3z$	($z = n + 1$; $z \in N$)
Also: $3 \mid s$	(Teilerdefinition)

43 **a)** Formuliere entsprechende Aussagen für vier und für fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen!
b) Beweise diese Aussagen oder widerlege sie!

Auch geometrische Sätze lassen sich unter Verwendung von Variablen beweisen. Es soll der folgende Satz bewiesen werden:

Wenn ABCD ein beliebiges Viereck ist, dessen Seiten von einem Kreis berührt werden (↗ Bild A 6), dann ist die Summe der Längen zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der beiden anderen Seitenlängen.

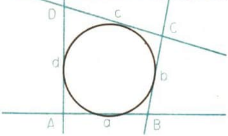


Bild A 6

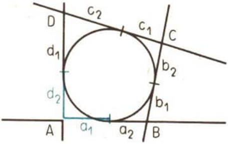


Bild A 7

Bezeichnet man die Seitenlängen mit a, b, c, d, so muß man zeigen, daß $a + c = b + d$ gilt. Die Geraden, auf denen die Vierecksseiten liegen, sind Tangenten an den Kreis. Wir wissen aus Klasse 7: Haben zwei Tangenten an einen Kreis einen Schnittpunkt, so sind die Strecken (Tangentenabschnitte) von diesem Punkt zu den Berührungspunkten der Tangenten mit dem Kreis gleich lang. Bezeichnet man sie wie im Bild A 7, so gilt $a_1 = d_2$, $a_2 = b_1$, $b_2 = c_1$, $c_2 = d_1$.

Also
$$\begin{aligned} a + c &= (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2) \\ &= (d_2 + b_1) + (b_2 + d_1) \\ &= (b_1 + b_2) + (d_1 + d_2) \\ &= \quad b \quad + \quad d. \end{aligned}$$

● 44 Schreibe eine Kurzform dieses Beweises auf! Orientiere dich dabei an dem folgenden Lückentext!

Voraussetzung: a, b, c, d sind Seitenlängen eines Vierecks; die Seiten werden von einem Kreis berührt.

Behauptung: ______________

Beweis:

$a + c =$ ______________ (Zerlegen)

$=$ ______________ (Ersetzen durch gleich lange Tangentenabschnitte)

$=$ ______________ (Grundgesetz der Addition)

$= b + d$ (Zusammensetzen)

Aufgaben

1. Es sei n eine natürliche Zahl. Gib von ihr **a)** den Nachfolger, **b)** den Vorgänger, **c)** den Nachfolger des Nachfolgers, **d)** den Vorgänger des Vorgängers an! In welchen Fällen muß eine Einschränkung für n vorgenommen werden?

2. Gib eine Definition an für **a)** $2 \mid b$, **b)** $7 \mid b$, **c)** $a \mid b$, **d)** a ist eine gerade Zahl, **e)** a ist eine ungerade Zahl! (Dabei seien a und b beliebige natürliche Zahlen.)

3. Vervollständige zu einer wahren Aussage und beweise diese! Die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine ... Zahl.

4. Beweise, daß die Summe dreier ungerader Zahlen stets ungerade ist!

5. Beweise: Wenn die kleinste von fünf beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gerade ist, dann ist deren Summe gerade.

6. Beweise: Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist, dann ist das Produkt dieser Zahlen durch 4 teilbar.

7.* Beweise: Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade. (L)

8.* Beweise: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.

9.* Vertauscht man bei einer beliebigen zweistelligen Zahl a die Ziffern, erhält man eine Zahl b. Beweise, daß die Summe von a und b durch 11 teilbar ist! (L)

10. Zeige, daß der folgende Rechenvorteil für alle natürlichen Zahlen, die auf 1 enden, gilt!
$11^2 = 10^2 + 10 + 11 \ (= 121)$, $31^2 = 30^2 + 30 + 31 \ (= 961)$

11. Beweise, daß für die Winkel α, β, γ im Bild A 8 gilt:
$\gamma = \alpha + \beta - 180°$.

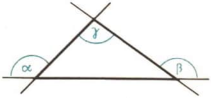


Bild A 8

12.* Zwei Dreiecke haben die Seite a gemeinsam. In dem einen Dreieck ist die Seite b um 7 cm länger, die Seite c um 2 cm kürzer als a. In dem anderen Dreieck ist die Seite b' 10 cm lang und die Seite c' fünfmal so lang wie a. Beweise, daß der Umfang des einen Dreiecks doppelt so groß wie der des anderen ist! (L)

13.* Jana rechnet mit ihrem Taschenrechner nach dem folgenden Ablaufplan:

a $\boxed{\times}$ **b** $\boxed{\div}$ **c** $\boxed{+}$ **d** $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ **c** $\boxed{=}$

Gib den Term an, den sie so berechnet! (L)

B Ähnlichkeit

Zentrische Streckung

1 Maßstäbliches Vergrößern und Verkleinern

Im täglichen Leben spricht man zuweilen von Ähnlichkeit. Man stellt zum Beispiel fest, daß Geschwister zueinander ähnlich sind. Auch in der Mathematik nennt man gewisse Figuren zueinander ähnlich, wenn sie bestimmten Festlegungen genügen.

● 1 Von welchen der Figuren b bis f im Bild B 1 würdest du sagen, daß sie zur Figur a ähnlich sind?

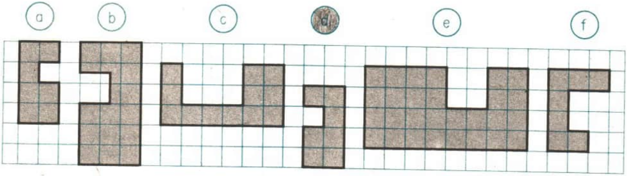


Bild B 1

Mit Sicherheit erhält man zu einer (ebenen oder räumlichen) Figur eine ähnliche, wenn man sie maßstäblich darstellt. Fertigt man von einem Filmnegativ verschieden große Fotos an, so sind diese auch zueinander ähnlich. Wie bei Landkarten, technischen Zeichnungen usw. kann man auch hier einen Maßstab angeben. Faßt man das Foto 2b als Vergrößerung des Fotos 2a auf, so ist der Maßstab der Quotient der Länge einer beliebig gewählten Strecke $\overline{CD}$ im Foto 2b zur Länge der ihr entsprechenden Strecke $\overline{AB}$ im Foto 2a. Messen ergibt beispielsweise:

	Länge des Mastes	Länge des Bootes	Länge des Großbaumes
Strecke im Foto 2a	3,3 cm	15 mm	11 mm
Strecke im Foto 2b	6,6 cm	30 mm	22 mm

Es gilt

$6{,}6\ \text{cm} : 3{,}3\ \text{cm} = 2 : 1.$

2 : 1 erhält man auch für die Verhältnisse der Längen aller anderen einander entsprechenden Strecken. Das Foto 2b ist also eine Vergrößerung des Fotos 2a im Maßstab 2 : 1. Umgekehrt ist das Foto 2a eine Verkleinerung des Fotos 2b im Maßstab 1 : 2. (Warum?) Statt 1 : 2 schreibt man auch $\frac{1}{2}$ oder 0,5. Diesen Quotienten nennt man **Streckenverhältnis von $\overline{AB}$ zu $\overline{CD}$.**

Schreibweisen wie $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 0{,}5$; $\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : 2$; $\overline{AB} : \overline{CD} = 0{,}5$ und auch $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 2$; $\overline{CD} : \overline{AB} = 2$ sind gleichbedeutend.

● **2** Gib den Maßstab für das Foto 2c als Vergrößerung des Fotos 2b bzw. für das Foto 2b als Verkleinerung des Fotos 2c an!

12. DDR-Meisterschaften der Kinder und Jugend im Segeln auf dem Schwielowsee bei Potsdam

Bild B 2 a

Bild B 2 b

Bild B 2 c

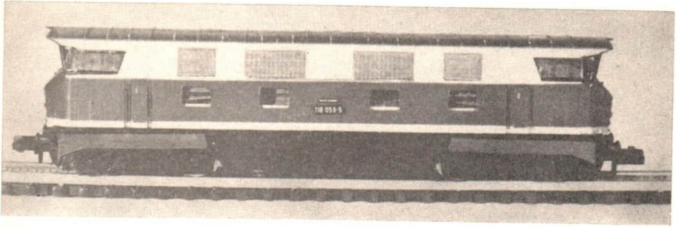


Bild B 3: Modellbahnlokomotive der Spurweite N

Vielfach werden maßstäbliche Modelle angefertigt, zum Beispiel für Bauwerke oder Werkstücke. Bekannt sind die Modelleisenbahnen in den Maßstäben 1 : 87 (Nenngröße HO), 1 : 120 (Nenngröße TT), 1 : 160 (Nenngröße N).

● 3 a) Das Bild B 3 zeigt das Modell einer Lokomotive in der Nenngröße N. Es ist 122 mm lang. Wie lang ist die Lokomotive in Wirklichkeit?

b) Bei der Deutschen Reichsbahn sind als Baureihe 132 sowjetische Diesellokomotiven im Einsatz; sie sind 20,82 m lang. Wie lang muß ein Modell in der Nenngröße N (TT, HO) sein?

Maßstäbliche Modelle dienen nicht nur der Freizeitbeschäftigung. Architekten und Städteplaner benötigen sie ebenso wie Konstrukteure von Flugzeugen oder Schiffen bzw. Erbauer von Hafen- oder Wasserschutzanlagen.

Wie stellt man nun aber von einer Figur F eine maßstäbliche Vergrößerung (Verkleinerung) her, beispielsweise für *F* im Bild B 4?

Bevor wir uns dieser Frage zuwenden, wollen wir uns daran erinnern, wie man zu einer Figur eine dazu kongruente (deckungsgleiche) erzeugte. Es wird sich zeigen, daß uns diese Überlegung weiterhelfen wird.

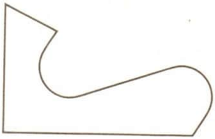


Bild B 4

Aufgaben

1. Ergänze die Tabellen!

	Maßstab	Originalstrecke	Bildstrecke
a)	1 : 40 000		1 cm
b)	1 : 25 000	400 m	
c)		10 km	2 cm
d)		5 µm	25 mm

	$\overline{AB}$	$\overline{CD}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$	$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$
e)	7 cm	21 cm		
f)	2,8 cm		0,5	
g)		1,35 m		$\frac{3}{5}$
h)	71,2 cm	3,56 m		

2. Zeichne je zwei Streckenpaare mit den Verhältnissen

a) 7 : 2; b) 2 : 7; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{4}{3}$; e) 2,5; f) 0,5!

3. Das Bild B 5 zeigt die Stirnwand eines gedeckten Güterwagens. Berechne die Maße für ein Modell in der Nenngröße
   a) HO (1 : 87), **b)** TT (1 : 120), **c)** N (1 : 160)!

4. **a)** In einem Dreieck ABC ist $a = 20{,}0$ cm, $b = 12{,}0$ cm und $c = 11{,}3$ cm. Der Flächeninhalt beträgt 60 cm². Wie lang sind die Höhen?
   b) Zeichne eine 6 cm lange Strecke $\overline{AB}$ und eine Gerade g parallel zu AB! Wähle auf g Punkte C, D und E! Beweise, daß die Dreiecke ABC, ABD und ABE denselben Flächeninhalt haben!
   c)* Beweise: In jedem Dreieck verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die zugehörigen Seiten. Es gilt also z. B. $h_a : h_b = b : a$. (L)

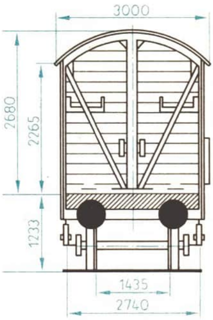


Bild B 5

2 Bewegungen und Kongruenz (Wiederholung)

Aus Klasse 6 wissen wir: **Bewegungen** einer Ebene sind **Verschiebungen, Spiegelungen** (an einer Geraden) und **Drehungen** (um einen Punkt) sowie Abbildungen, die man als **Nacheinanderausführungen** von Verschiebungen, Spiegelungen oder Drehungen erhält.

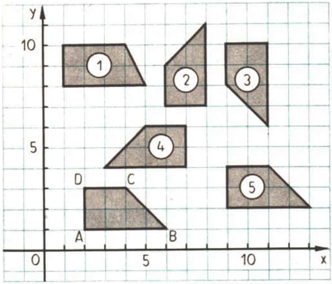


Bild B 6

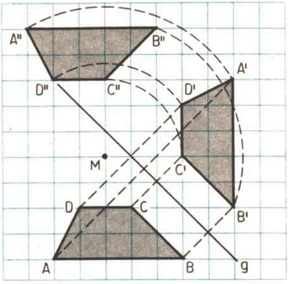


Bild B 7

4 Das Bild B 6 zeigt in einem Koordinatensystem außer $ABCD$ noch fünf weitere Trapeze.
   a) Welches davon ist Bild des Trapezes $ABCD$ bei einer Verschiebung? Begründe! Gib die Bildpunkte A', B', C', D' bei dieser Verschiebung durch ihre Koordinaten an!
   b) Löse die entsprechende Aufgabe für eine Spiegelung und beschreibe auch die Spiegelgerade!
   c) Löse die entsprechende Aufgabe für eine Drehung! Gib auch das Drehzentrum und den Drehwinkel an!

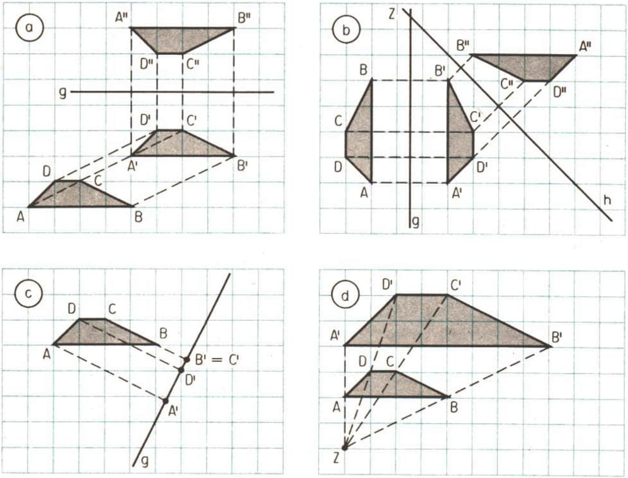


Bild B 8

Im Bild B 7 sind drei Bewegungen veranschaulicht:
- Die Spiegelung an der Geraden g bildet $ABCD$ auf $A'B'C'D'$ ab.
- Die Drehung um Punkt M um 90° bildet $A'B'C'D'$ auf $A''B''C''D''$ ab.
- Die Nacheinanderausführung der Spiegelung an g und dieser Drehung bildet $ABCD$ auf $A''B''C''D''$ ab.

5 Nenne eine weitere Möglichkeit, wie man das Trapez $ABCD$ im Bild B 7 auf $A''B''C''D''$ abbilden kann durch
a) eine Verschiebung und eine nachfolgende Spiegelung,
b) eine Spiegelung und eine nachfolgende Verschiebung!

6 Die Bilder B 8a bis d veranschaulichen ebenfalls Abbildungen. Welche dieser Bilder veranschaulichen Bewegungen? Beschreibe diese Bewegungen!

Abbildungen, bei denen
(a) jeder Punkt X genau einen Bildpunkt X' und
(b) jeder Bildpunkt Y' genau einen Originalpunkt Y hat,
nennt man **umkehrbar eindeutig**. Beispielsweise sind alle Bewegungen umkehrbar eindeutige Abbildungen. Bei Projektionen hingegen ist nur (a) erfüllt; sie sind eindeutig, aber nicht umkehrbar eindeutig (↗ Bild B 8c).
Wie wir bereits wissen, haben die Bewegungen einer Ebene u. a. folgende Eigenschaften:

(1) Jede Gerade AB hat als Bild die Gerade $A'B'$.
(2) Jede Strecke $\overline{AB}$ hat als Bild die ebenso lange Strecke $\overline{A'B'}$.
(3) Jeder Winkel hat als Bild einen Winkel gleicher Größe.
(4) Sind zwei Geraden zueinander parallel, so sind auch ihre Bildgeraden zueinander parallel.

(5) Sind zwei Geraden zueinander senkrecht, so sind auch ihre Bildgeraden zueinander senkrecht.
(6) Das Bild eines n-Ecks ist ein n-Eck.
(7) Das Bild eines Kreises ist ein Kreis mit gleichem Radius.

Das Bild B 8c veranschaulicht die senkrechte Parallelprojektion der Ebene auf die Gerade g. Bei dieser Abbildung werden alle Punkte der Geraden BC auf ein und denselben Punkt B' von g abgebildet. Die senkrechte Parallelprojektion hat also nicht die Eigenschaft (1) und kann deshalb keine Bewegung sein.

● 7. **a)** Begründe mit Hilfe des Bildes B 8c, daß senkrechte Parallelprojektionen auch nicht die Eigenschaften (2) und (3) haben!
b) Zeichne eine Gerade g und einen Kreis und ermittle sein Bild bei der senkrechten Parallelprojektion auf g! Vergleiche dein Ergebnis mit (7)!

Die Abbildung, die durch das Bild B 8d veranschaulicht wird, lernen wir bald kennen. Sie erinnert uns an maßstäbliches Vergrößern. Die Eigenschaft (2) hat sie sicher nicht, denn z. B. ist die Strecke $\overline{C'D'}$ doppelt so lang wie $\overline{CD}$.
Mit Hilfe der Bewegungen haben wir in Klasse 6 definiert, wann Figuren (d. h. Punktmengen) zueinander kongruent sind.

▶ 1 **DEFINITION: Figuren F_1 und F_2 heißen zueinander *kongruent* (deckungsgleich: $F_1 \cong F_2$), wenn es eine Bewegung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.**

So gilt in den Bildern B 7, 8a und 8b:

$$ABCD \cong A'B'C'D'; \quad A'B'C'D' \cong A''B''C''D''; \quad ABCD \cong A''B''C''D''.$$

Durch die Definition B 1 ist die Kongruenzbeziehung auch für krummlinig begrenzte Figuren erklärt. So sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit gleichem Radius stets zueinander kongruent.
Speziell für Dreiecke haben wir Kongruenzsätze kennengelernt [(sws), (wsw), (sss), (sSW)].[1]
Wenn sich auf zwei Dreiecke wenigstens einer dieser Kongruenzsätze anwenden läßt, dann sind sie zueinander kongruent.

■ 1 Die Trapeze $ABCD$ und $EFGH$ im Bild B 9 sind durch Diagonalen in Teildreiecke zerlegt. Diese Dreiecke sind auf Kongruenz zu untersuchen.
Lösung: Da die Dreiecke ABD und EGH rechtwinklig sind, die Dreiecke BCD und EFG dagegen nicht, kann höchstens gelten
(1) $\triangle ABD \cong \triangle EGH$ oder (2) $\triangle BCD \cong \triangle EFG$

Zu (1):

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{HG}\\ \overline{AD} \cong \overline{EH}\end{array}\right\}$$ (nach der Vorgabe der Figuren auf Gitterpapier)

$$\underline{\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle GHE}$$

$$\triangle ABD \cong \triangle EGH$$ (nach dem Kongruenzsatz sws)

Zu (2):

$\overline{BC} \cong \overline{FG}$ (nach der Vorgabe auf Gitterpapier)
$\overline{BD} \cong \overline{EG}$ (denn $\triangle ABD \cong \triangle EGH$)
$\overline{CD} \cong \overline{EF}$ (denn $\triangle CXD \cong \triangle YFE$ nach sws)

$$\triangle BCD \cong \triangle EFG$$ (nach dem Kongruenzsatz sss)

[1]) Vgl. „Mathematik in Übersichten", Seiten 169 ff.

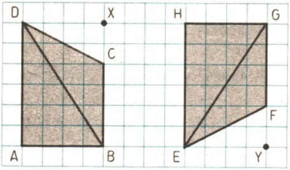


Bild B 9

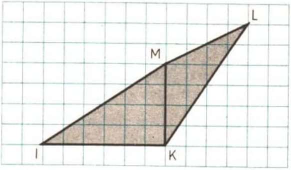


Bild B 10

● 8 a) Beweise durch Angabe einer Bewegung, daß auch für die Trapeze gilt $ABCD \cong EFGH$!

b) Das Viereck *IKLM* im Bild B 10 ist auch in Teildreiecke zerlegt. Untersuche diese Dreiecke ebenfalls auf Kongruenz zu den Dreiecken *ABD* und *BCD* im Bild B 9! Überlege, ob *IKLM* kongruent zu *ABCD* ist! Begründe deine Antwort!

Für n-Ecke ($n \geqq 3$) ergibt sich aus der Definition B 1 und den Eigenschaften (2) und (3) der Bewegungen folgender Satz:

▷ 2 **SATZ: Wenn zwei n-Ecke ($n \geqq 3$) einander kongruent sind, dann sind**
a) einander entsprechende Seiten gleich lang und
b) einander entsprechende Winkel gleich groß.

Für diesen Satz gilt auch die Umkehrung:

▷ 3 **SATZ: Wenn sich zwischen den Eckpunkten zweier n-Ecke ($n \geqq 3$) bei Beachtung der Reihenfolge eine umkehrbar eindeutige Zuordnung herstellen läßt, bei der**
a) einander zugeordnete Seiten gleich lang und
b) einander zugeordnete Winkel gleich groß sind,
dann sind die beiden n-Ecke zueinander kongruent.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man oft sehr schnell entscheiden, ob zwei gegebene n-Ecke zueinander kongruent sind oder nicht. Beispielsweise können die Vierecke *ABCD* im Bild B 9 und *IKLM* im Bild B 10 nicht kongruent sein, denn *ABCD* hat einen Innenwinkel von 90°, *IKLM* hingegen nicht.
Von Kongruenz kann man auch bei räumlichen Punktmengen und speziell bei Körpern sprechen. So sind z. B. alle Kugeln mit gleichem Radius einander kongruent, alle Würfel mit gleicher Kantenlänge usw. Bei serienmäßig hergestellten Industrieerzeugnissen gleicher Serie handelt es sich – von geringen Abweichungen durch Fertigungsungenauigkeiten abgesehen – um kongruente Gebilde.

Aufgaben

1. Zeichne ein Rechteck *ABCD* mit $\overline{AB} = 5{,}0$ cm und $\overline{BC} = 2{,}0$ cm! Konstruiere jeweils sein Bild **a)** bei der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$, **b)** bei der Drehung um *A* mit dem Drehwinkel 135°, **c)** bei der Spiegelung an der Geraden *AC*!

2. Zeichne jeweils in einem Koordinatensystem ein Quadrat $ABCD$ mit $A\ (2;0)$, $B\ (5;0)$, $C\ (5;3)$ und ermittle sein Bild bei der angegebenen Bewegung! Gib die Bilder der Eckpunkte durch ihre Koordinaten an!

a) Verschiebung $\overrightarrow{AC}$, **b)** Drehung um C mit dem Drehwinkel 90°, **c)** Spiegelung an der Parallelen zu AC durch B

3.* Zeichne wie in Aufgabe 2 jeweils ein Quadrat $ABCD$! Führe dann die drei Bewegungen von Aufgabe 2 nacheinander aus, und zwar in der Reihenfolge
(1) b), a), c); **(2)** c), a), b); **(3)** a), b), c)!
Vergleiche die drei entstandenen Bilder!

4. Welches der Vierecke ① bis ③ im Bild B 11 ist Bild des Vierecks $ABCD$ bei einer Bewegung? Fülle für diese Bewegung die Tabelle aus!

Original	A	B	C	D
Bild				

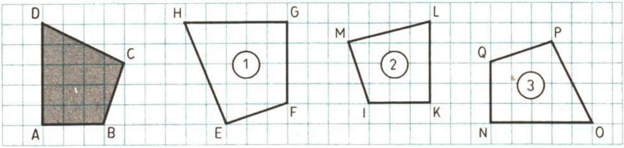
Beschreibe, wie man sie durch Nacheinanderausführen von Verschiebungen, Spiegelungen oder Drehungen erhalten kann!

5. Gib Bewegungen an, die in den Bildern B 12a bis d jeweils die Figur F_1 auf die Figur F_2 abbilden! Stelle dazu Tabellen für die Eckpunkte auf!

6.* Es sei $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ und $AB \parallel CD$. Gibt es immer eine Verschiebung (Drehung, Spiegelung), die $\overline{AB}$ auf $\overline{CD}$ abbildet? Begründe! (L)

7.* Es seien g und h voneinander verschiedene, zueinander parallele Geraden. Gib möglichst je zwei Bewegungen an, bei denen
a) g Bild von h und h Bild von g ist,
b) g und h jeweils auf sich selbst abgebildet werden,
c) g auf sich selbst abgebildet wird und h nicht,
d) g Bild von h ist, aber h nicht Bild von g,
e) g Bild von h ist und h auf sich selbst abgebildet wird! (L)

Bild B 11



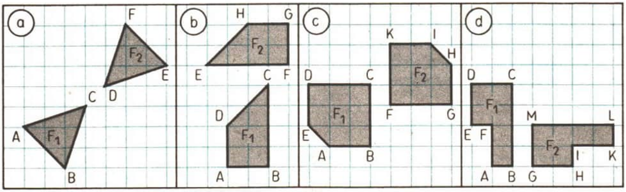


Bild B 12

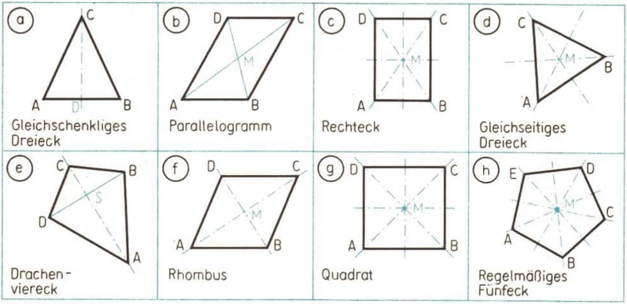


Bild B 13

8. **Beschreibe Bewegungen, die die Figuren in den Bildern B 13a bis h jeweils auf sich selbst abbilden! Gib für die Eckpunkte der Figur die Bildpunkte an!**

9. **Unter welchen Bedingungen können folgende Figuren F_1 und F_2 zueinander kongruent sein? Begründe deine Antwort!**

	F_1	F_2
a)	gleichschenkliges Dreieck	rechtwinkliges Dreieck
b)	gleichseitiges Dreieck	rechtwinkliges Dreieck
c)	gleichseitiges Dreieck	stumpfwinkliges Dreieck
d)	gleichschenkliges Dreieck	stumpfwinkliges Dreieck
e)	Quadrat	Rechteck
f)	Parallelogramm	Drachenviereck

10. **Fertige eine Skizze für folgenden Sachverhalt an:**
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ sei D, der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ sei E. Das Lot von D auf $\overline{AB}$ habe den Fußpunkt F, das Lot von E auf $\overline{AB}$ den Fußpunkt G.
Beweise a) $\triangle AFD \cong \triangle BGE$; b) $\triangle AEC \cong \triangle BCD$!

11. **Die Vierecke im Bild B 14 sind jeweils in zwei Teildreiecke I und II zerlegt.**
a) Begründe für $ABCD$ und $EFGH$, daß $\triangle ABD \cong \triangle FGH$ und $\triangle BCD \cong \triangle EFH$ ist!
b) Gib an, welche dieser Vierecke zueinander kongruent sind! Begründe deine Antwort!

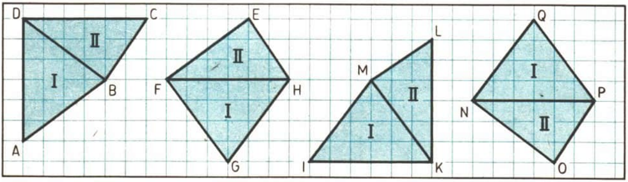


Bild B 14

3 Zentrische Streckungen

Im Bild B 15 wird eine Abbildung veranschaulicht, die einer Figur (mit den Punkten A, B, C) eine maßstäbliche Vergrößerung dieser Figur (mit A', B', C') zuordnet.

● 9 Überzeuge dich durch Stichproben, daß im Bild B 15 eine maßstäbliche Vergrößerung vorliegt! Gib den Maßstab an!

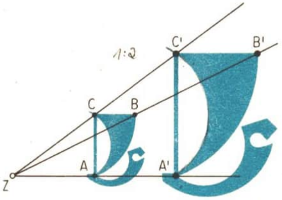


Bild B 15: Firmenzeichen des sowjetischen Autowerkes WAS

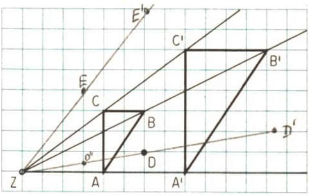


Bild B 16

Das Bild B 16 zeigt noch einmal vereinfacht (und außerdem mit einem Quadratraster) das Prinzip der Abbildung vom Bild B 15. Hier kann man auf die Vorschrift schließen, nach der bei dieser Abbildung jedem Punkt sein Bildpunkt zugeordnet wird.

● 10 a) Ermittle im Bild B 16 die Streckenverhältnisse $\overline{ZA'} : \overline{ZA}$, $\overline{ZB'} : \overline{ZB}$, $\overline{ZC'} : \overline{ZC}$ und vergleiche!

b) Wo müßte der Bildpunkt D' von D liegen, wenn er nach einer entsprechenden Vorschrift bestimmt wird?

▶ 4 **DEFINITION:** ***Zentrische Streckung*** **heißt jede Abbildung nach folgender Vorschrift:**

1. **Ein Punkt Z wird festgelegt – das *Streckungszentrum*.**
2. **Eine positive Zahl k wird festgelegt – der *Streckungsfaktor*.**
3. **Jedem Punkt P mit $P \neq Z$ wird sein Bildpunkt P' folgendermaßen zugeordnet: P' liegt auf dem Strahl ZP, und es gilt $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$.**
4. **Z hat sich selbst als Bildpunkt: $Z' = Z$.**

Die zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum Z und dem Streckungsfaktor k wird häufig mit $(Z; k)$ bezeichnet.

● 11 a) Im Bild B 17 wurden die Punkte A bis G markiert. Gib die Bilder dieser Punkte bei der Streckung $(Z; 2)$ durch ihre Koordinaten an!

b) Gib die Koordinaten der Originalpunkte für A bis G bei der Streckung $(Z; 2)$ an!

c) Welche Bildpunkte haben A bis G bei der zentrischen Streckung $(Z; 1)$?

Jede zentrische Streckung $(Z; k)$ ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer Ebene auf sich.
Wenn $k = 1$ ist, so gilt $P' = P$ für alle Punkte P.
Für $k \neq 1$ ist Z der einzige Punkt, der auf sich selbst abgebildet wird.

Aufgaben

1. **a)** Gib für die Punkte *A* bis *G* im Bild B 17 erst die Koordinaten ihrer Bildpunkte (dann die ihrer Originalpunkte) bei der zentrischen Streckung $\left(Z; \frac{1}{2}\right)$ an!

b) Verfahre ebenso für die zentrische Streckung (*Z*; 3)!

c) Verfahre ebenso für die zentrische Streckung (*Z*; 1,5)!

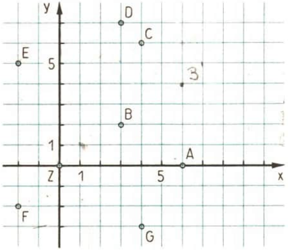


Bild B 17

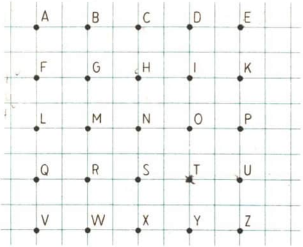


Bild B 18

2. **a)** In einem Koordinatensystem ist der Punkt *A* (1; 1) gegeben. Fülle für die zentrische Streckung (*A*; 2) die folgende Tabelle aus! (Nimm eine Skizze zur Hilfe!) (L)

Original	(3; 1)	(1; 2)	(0; 0)	(−1; 0)				
Bild					(7; 1)	(1; 1)	(7; −5)	(−2; −2)

b) Verfahre ebenso für die zentrische Streckung (*B*; 0,5) mit *B* (3; 0)!

c) Verfahre ebenso für die zentrische Streckung (*C*; 3) mit *C* (3; 1)!

3. Auf der Grundlage des Bildes B 18 sollen Tabellen für die jeweils angegebenen zentrischen Streckungen ausgefüllt werden. Gib im Falle der Aufgaben b), c), d) auch das Streckungszentrum bzw. den Streckungsfaktor an!

a) Zentrum *A*, $k = 2$

Original	*C*	*H*	*G*			
Bild				*L*	*C*	*T*

b) Zentrum *T*, $k = ?$

Original	*S*	*N*	*T*			
Bild	*Q*			*D*	*U*	*E*

4. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck *ABC* mit rechtem Winkel bei *C*, $\overline{AC} = 4{,}0$ cm und $\overline{BC} = 3{,}0$ cm!
Zeichne den Punkt *D*, der auf dem Strahl *AC* liegt und für den $\overline{AD} = 6{,}0$ cm ist!
Ermittle die Bilder der Punkte *A*, *B* und *C* bei der zentrischen Streckung (*D*; 3)!

5. Zeichne ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 4,0 cm! Ermittle den Schnittpunkt *S* der Diagonalen!

a) Ermittle A', B', C', D' bei der zentrischen Streckung (*S*; 2,5)!

b) *C* sei das Bild von *S* bei der zentrischen Streckung (*A*; *k*). Wie groß ist *k*?

6.* Zeichne ein gleichseitiges Dreieck *ABC* mit $\overline{AB} = 4{,}5$ cm! Ermittle das Streckungszentrum *Z*, wenn *A* das Bild von *B* bei der zentrischen Streckung $\left(Z; \frac{8}{5}\right)$ ist!

4 Konstruktion von Bildpunkten bei zentrischen Streckungen

● **12** Im Bild B 19 ist B das Bild von A bei der zentrischen Streckung $\left(Z; \frac{5}{3}\right)$. Übertrage die Zeichnung in dein Heft!

a) Ermittle den Bildpunkt D von C bei der gleichen zentrischen Streckung und erläutere dein Vorgehen!

b) Zeichne durch B die Parallele zu AC! Ermittle ihren Schnittpunkt mit dem Strahl ZC! Was stellst du fest?

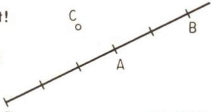


Bild B 19

Der Auftrag B 12b führt auf ein Verfahren, nach dem man (weitere) Bildpunkte zu vorgegebenen Punkten bei zentrischen Streckungen erhält, ohne ständig zu messen und zu vervielfachen. Dabei wird der folgende Satz benutzt.

▷ **5** **SATZ: Gegeben seien zwei Strahlen ZB und ZD mit gemeinsamem Anfangspunkt Z, die nicht auf derselben Geraden liegen. Ein Punkt A liege zwischen Z und B, ein Punkt C zwischen Z und D (↗ Bild B 20). Dann gilt:**

Wenn $AC \parallel BD$, so $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \dfrac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}$

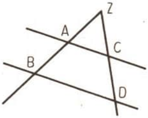


Bild B 20

Die Verhältnisgleichung im Satz B 5 läßt sich umformen zu

$\overline{ZA} \cdot \overline{ZD} = \overline{ZB} \cdot \overline{ZC}$.

Hier treten Produkte von Streckenlängen auf. Das legt den Gedanken nahe, den Beweis des Satzes über die Gleichheit von Flächeninhalten zu führen.

Voraussetzung: $AC \parallel BD$ (↗ Bild B 21)

Behauptung: $\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{ZC} : \overline{ZD}$

Beweis: Der Flächeninhalt des Dreiecks ZAC läßt sich auf zweifache Weise ausdrücken:

$$\frac{\overline{ZA} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{ZC} \cdot h_2}{2}$$

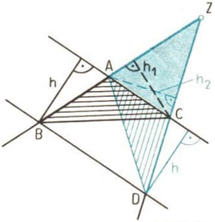


Bild B 21

Daraus folgt:

(1) $\overline{ZA} \cdot h_1 = \overline{ZC} \cdot h_2$

Die Dreiecke ACB und ACD haben den gleichen Flächeninhalt $\frac{\overline{AC} \cdot h}{2}$, denn nach Voraussetzung ist $AC \parallel BD$.

Also haben auch die Dreiecke ZBC und ZAD den gleichen Flächeninhalt:

$$\frac{\overline{ZB} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{ZD} \cdot h_2}{2}.$$

Es gilt somit: (2) $\overline{ZB} \cdot h_1 = \overline{ZD} \cdot h_2$.

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{\overline{ZA} \cdot h_1}{\overline{ZB} \cdot h_1} = \frac{\overline{ZC} \cdot h_2}{\overline{ZD} \cdot h_2}$$

$$\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{ZC} : \overline{ZD}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

■ **2** Für die Punkte B und C sind die Bilder B' und C' bei der zentrischen Streckung mit dem Streckungszentrum Z zu konstruieren, bei der A' das Bild von A ist (↗ Bild B 22).

● **13** Beschreibe die Konstruktion im Bild B 22!

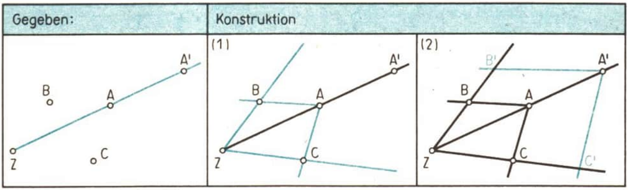


Bild B 22

Liegt eine Figur wie im Bild B 20 vor, bei der von drei der Strecken $\overline{ZA}$, $\overline{ZB}$, $\overline{ZC}$, $\overline{ZD}$ die Längen bekannt sind, so kann man mit Hilfe von Satz B 5 die Länge der vierten Strecke berechnen.

■ **3** *Gegeben:* $VX \parallel WY$, $\overline{UV} = 4$ cm, $\overline{UW} = 6$ cm, $\overline{UY} = 15$ cm (↗ Bild B 23)
Gesucht: $\overline{UX}$
Lösung: Nach Satz B 5 gilt

$$\frac{\overline{UX}}{\overline{UY}} = \frac{\overline{UV}}{\overline{UW}},$$

$$\frac{\overline{UX}}{15\ cm} = \frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} \left(= \frac{2}{3}\right).$$

Das ergibt $\underline{\underline{\overline{UX} = 10\text{ cm.}}}$

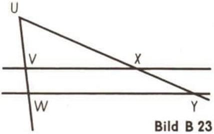


Bild B 23

● **14** **a)** Erläutere, wie man im Beispiel B 3 das Ergebnis erhalten kann! Beachte bei so einfachen Zahlen die Möglichkeit zu kürzen und zu erweitern!
b) Ermittle $\overline{UV}$, wenn $\overline{UX} = 3{,}45$ dm, $\overline{UY} = 4{,}38$ dm und $\overline{UW} = 7{,}24$ dm gegeben sind!

Der Satz B 5, den wir im Beispiel B 3 benutzt haben, enthält eine Wenn-so-Aussage. Wir wissen, daß wir von einer solchen Aussage die Umkehrung bilden können. Diese Umkehrung muß nicht immer wahr sein. Beim Satz B 5 jedoch führt das Umkehren auf eine wahre Aussage.

▷ **6** **SATZ: Gegeben seien zwei Strahlen ZB und ZD mit gemeinsamem Anfangspunkt Z, die nicht auf derselben Geraden liegen. Ein Punkt A liege zwischen Z und B, ein Punkt C zwischen Z und D. Dann gilt:**

Wenn $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \dfrac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}$, so $AC \parallel BD$.

Beweis: Für AC und BD sind zwei Fälle möglich:
(1) $AC \parallel BD$ bzw. (2) AC und BD sind nicht parallel zueinander.
Wir nehmen an: AC und BD sind nicht parallel zueinander. Die Parallele zu AC durch D

schneidet dann den Strahl ZA in einem Punkt B_1 mit $B_1 \neq B$ (↗ Bild B 24). Es gilt nun:

$$\overline{ZA} : \overline{ZB_1} = \overline{ZC} : \overline{ZD} \quad \text{(nach Satz B 5)}$$
$$\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{ZC} : \overline{ZD} \quad \text{(Voraussetzung von Satz B 6)}$$

$\overline{ZB_1} = \overline{ZB}$ und damit $B_1 = B$ und $AC \parallel BD$.

Die Annahme führt auf einen Widerspruch und ist somit falsch. Der Fall (2) ist also nicht möglich. Es gilt (1).

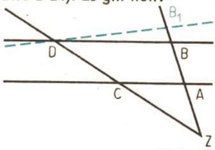
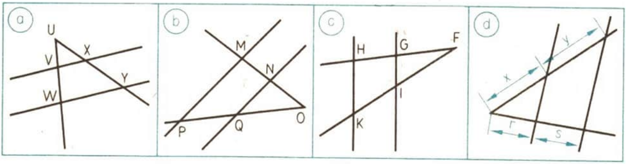


Bild B 24

Aufgaben

1. Bei den Figuren im Bild B 25 sind die Geraden, die die Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt schneiden, zueinander parallel. Formuliere die dem Satz B 5 entsprechenden Verhältnisgleichungen!

Bild B 25



2. Ergänze die Tabelle für die Punkte U, V, W, X und Y, die zueinander wie im Bild B 25a liegen ($VX \parallel WY$)!

	$\overline{UV}$	$\overline{UW}$	$\overline{UX}$	$\overline{UY}$
a)	5 cm	10 cm	6 cm	
b)	6 cm	12 cm		20 cm
c)		150 mm	100 mm	180 mm
d)	7 cm		6 cm	9 cm
e)	6 cm	11 cm	70 mm	
f)		11 m	9 m	14,1 m

3. Zeichne die Punkte A, B, C und P nach der Lochschablone und ermittle ihre Bildpunkte bei der angegebenen zentrischen Streckung!

a) $A(2)$, $B(5)$, $C(6)$, $P(3)$; zentrische Streckung $(P; 2)$

b) $A(5)$, $B(13)$, $C(15)$, $P(12)$; zentrische Streckung $\left(P; \frac{1}{3}\right)$

c) $A(4)$, $B(7)$, $C(8)$, $P(9)$; zentrische Streckung $(P; 1{,}5)$

d) $A(5)$, $B(8)$, $C(9)$, $P(12)$; zentrische Streckung $(P; 2{,}5)$

4. Zeichne nach der Lochschablone die Punkte $A(9)$, $B(10)$, $C(2)$, $D(1)$ und $M(5)$! Ermittle die Punkte, deren Bildpunkte A, B, C und D sind

a) bei der zentrischen Streckung $(A; 1{,}5)$,

b) bei der zentrischen Streckung $\left(M; \frac{2}{5}\right)$!

5. Zeichne mit der Lochschablone die Punkte $Z(8)$, $A(14)$, $A'(17)$, $B(13)$, $D(9)$, $E(4)$! Konstruiere die Bildpunkte von B, C, D, E bei der zentrischen Streckung $\left(Z; \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}\right)$!

6. Zeichne (auf Millimeterpapier) ein Koordinatensystem. Trage die Punkte $A\,(3{,}2;\ 1{,}7)$, $B\,(2{,}6;\ 4{,}1)$, $C\,(1{,}9;\ 3{,}5)$ und $D\,(-0{,}5;\ 1{,}2)$ ein! Der Bildpunkt von A bei einer zentrischen Streckung mit $(0;\ 0)$ als Zentrum hat die Abszisse 7,5. Konstruiere ihn und gib seine Ordinate an!
Konstruiere auch die Bildpunkte von B, C und D bei der gleichen zentrischen Streckung und ermittle ihre Koordinaten!

7. Bilde zu den folgenden Aussagen die Umkehrungen und prüfe, ob sie wahr sind!
a) Wenn a durch 4 teilbar ist, so ist a durch 2 teilbar.
b) Wenn $a > 0$, so ist $2a > 0$.
c) Wenn α und β Scheitelwinkel sind, so ist $\alpha = \beta$.
d) γ sei Peripheriewinkel eines Kreises. Wenn γ Peripheriewinkel über einem Halbkreis(bogen) ist, so gilt $\gamma = 90°$.
e) Wenn $\alpha = 90°$ ist, so ist α zu jedem seiner Nebenwinkel kongruent.
f) α und γ seien gegenüberliegende Innenwinkel eines Vierecks $ABCD$. Wenn $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez ist, so gilt $\alpha + \gamma = 180°$.
Nenne selbst Beispiele für wahre Aussagen mit wahren und solche mit falschen Umkehrungen!

8. Bei einer zentrischen Streckung $(Z;\ k)$ ist A' das Bild von A und B' das Bild von B (↗ Bild B 26).
a) Ermittle k! Wieviel Möglichkeiten hast du dafür? (L)
b) Begründe, daß $AB \parallel A'B'$ ist! (L)

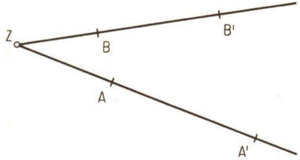


Bild B 26

5 Der erste Strahlensatz

Die Sätze B 5 und B 6 sind vielfältig anwendbar. Man verwendet sie nicht nur zur Untersuchung von Eigenschaften zentrischer Streckungen.

● **15** Uwe soll eine Strecke $\overline{MN}$ in drei kongruente Teile zerlegen. Das Bild B 27 zeigt seine Lösung. Wie ist er wohl vorgegangen?

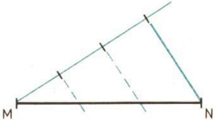


Bild B 27

Bei der Konstruktion im Auftrag B 15 wird der Satz B 5 verwendet. Dieser Satz ist eine Teilaussage des ersten Strahlensatzes.

▷ **7**

> ***1. Strahlensatz:*** **Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, dann verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die gleichliegenden Abschnitte auf dem anderen.**

Benutze zum Einprägen dieses Satzes das Bild B 28!

● **16** **a)** Erläutere an den Figuren (a) bis (c) im Bild B 28, was man unter „gleichliegenden" Strahlenabschnitten versteht!
b) Welche dieser Figuren veranschaulicht Satz B 5?

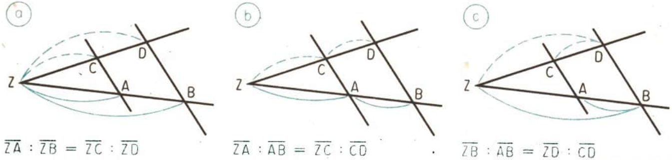


Bild B 28

***Beweis des ersten Strahlensatzes** [↗ Bild B 28, Fälle (a) bis (c)]:*

(a) ist nach Satz B 5 wahr.

(b) kann man aus (a) herleiten:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB} - \overline{ZA}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} - \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} - 1$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{ZD} - \overline{ZC}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}} - \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}} - 1$$

Wegen (a) ist $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}}$ und damit $\frac{\overline{AB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{ZC}}$,

also auch $\frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{CD}}$.

(c) läßt sich wie (b) herleiten.

● 17 **a)** Begründe das im Bild B 27 (↗ Auftrag B 15) angedeutete Konstruktionsverfahren und gib eine Konstruktionsbeschreibung dafür!

b) Wie wird man die Lage des Hilfsstrahls und die Länge der auf ihm abzutragenden Strecken wählen, um zu große Zeichenungenauigkeiten zu vermeiden?

Aufgaben

1. Ergänze die Tabelle zum Bild B 29!

	$\overline{ZA}$	$\overline{ZB}$	$\overline{AB}$	$\overline{ZC}$	$\overline{ZD}$	$\overline{CD}$
a)	4 cm	5 cm		2 cm		
b)	4,2 cm		1,2 cm		6,3 cm	
c)			10 cm		2,9 cm	7 mm
d)	9,5 cm	12,8 cm				3,3 cm
e)			2,2 cm	2,7 cm	4,5 cm	
f)				3,7 cm	5,3 cm	1,6 cm

2. Gib folgende Streckenverhältnisse mit Hilfe anderer Strecken an:

nach Bild B 30: **a)** $\frac{\overline{VU}}{\overline{VT}}$, **b)** $\frac{\overline{ZY}}{\overline{VZ}}$, **c)** $\frac{\overline{UT}}{\overline{VU}}$, **d)** $\frac{\overline{WX}}{\overline{VX}}$,

nach Bild B 31: **e)** $\overline{ZC} : \overline{BC}$, **f)** $\overline{AZ} : \overline{BZ}$, **g)** $\overline{DF} : \overline{ZD}$, **h)** $\overline{DE} : \overline{EZ}$!

3. Zeichne nach der Lochschablone die Strecke $\overline{AB}$ mit A (1) und B (10) und teile sie konstruktiv (also ohne zu messen) in 5 kongruente Teile!

4. Begründe, daß im Bild B 31 **a)** $\overline{ZA} : \overline{BC} = \overline{ZD} : \overline{EF}$, **b)** $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ gilt!

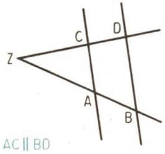


Bild B 29

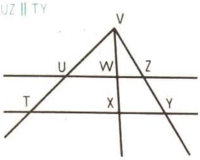


Bild B 30

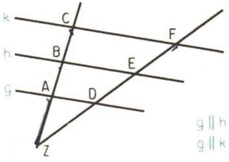


Bild B 31

5. Ergänze folgende Tabelle zum Bild B 30!

	$\overline{VU}$	$\overline{VT}$	$\overline{UT}$	$\overline{VW}$	$\overline{VX}$	$\overline{WX}$	$\overline{VZ}$	$\overline{VY}$	$\overline{ZY}$
a)	2 cm	3 cm		4 cm			5 cm		
b)		5,6 cm	2,2 cm		6 cm				3 cm
c)			1,5 cm	3 cm	6 cm			7 cm	
d)	3,3 cm		2,2 cm	3,5 cm			3,7 cm		
e)		9 cm	4 cm		8 cm				8,5 cm
f)	2,5 cm		2,5 cm			30 mm			35 mm

6.* Zeichne nach der Lochschablone die Strecke $\overline{PQ}$ mit $P\,(17)$, $Q\,(15)$! Konstruiere einen Punkt R so, daß $\overline{PR} : \overline{RQ} = 3 : 4$ gilt (d. h. $\overline{PQ}$ durch R im Verhältnis $3 : 4$ geteilt wird)!

6 Der zweite Strahlensatz

Nach dem ersten Strahlensatz werden nur Strahlenabschnitte ins Verhältnis gesetzt. Im zweiten Strahlensatz kommen auch die sogenannten Parallelenabschnitte ($\overline{MN}$ und $\overline{PQ}$ im Bild B 32) vor. Je weiter die Parallelen von Z entfernt sind, desto länger werden die Parallelenabschnitte und auch gewisse Strahlenabschnitte.

● **18** Betrachte das Bild B 32 und ergänze zu wahren Verhältnisgleichungen:

a) $\overline{ZM} : \overline{MP} = \ldots,$ **b)** $\overline{ZQ} : \overline{ZN} = \ldots,$

c) $\overline{ZP} : \overline{MP} = \ldots!$

Versuche dabei, nach Möglichkeit die Parallelenabschnitte $\overline{MN}$ und $\overline{PQ}$ zu verwenden!

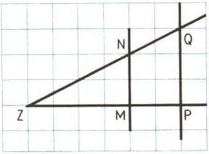


Bild B 32

Man nennt einen Strahlenabschnitt und einen Parallelenabschnitt **zueinander gehörig**, wenn der Strahlenabschnitt von Z und einem Endpunkt des Parallelenabschnitts begrenzt wird.

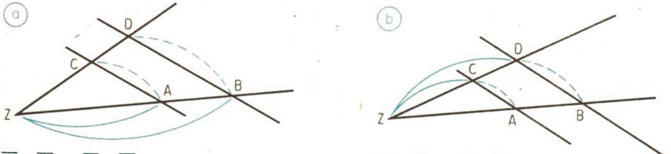
● **19** **a)** Nenne zu $\overline{ZN}$ im Bild B 32 den zugehörigen Parallelenabschnitt! Nenne zu $\overline{QP}$ die zugehörigen Strahlenabschnitte!

b) Nenne für das Bild B 29 zu $\overline{ZD}$ den zugehörigen Parallelenabschnitt!

▷ 8

> **2. *Strahlensatz:* Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Parallelenabschnitte zueinander wie die zugehörigen Abschnitte ein und desselben Strahls.**

Benutze zum Einprägen dieses Satzes das Bild B 33!



$\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{AC} : \overline{BD}$ $\qquad$ $\overline{ZC} : \overline{ZD} = \overline{AC} : \overline{BD}$

Bild B 33

Der Beweis des 2. Strahlensatzes kann durch Zurückführen auf den 1. Strahlensatz erfolgen.

Voraussetzung: $AC \parallel BD$ (↗ Bild B 34)

Behauptung: $\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{AC} : \overline{BD}$ $(= \overline{ZC} : \overline{ZD})$

Beweis: Durch A wird die Parallele zu CD gezeichnet; ihr Schnittpunkt mit BD sei E. B ist gemeinsamer Anfangspunkt der Strahlen BA und BE, die von den Parallelen AE und CD geschnitten werden.

Es gilt:

(1) $\overline{ED} = \overline{AC}$ (Gegenseiten im Parallelogramm)

(2) $\overline{ED} : \overline{BD} = \overline{AZ} : \overline{BZ}$ (1. Strahlensatz)

$\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{ZA} : \overline{ZB}$ (aus (1) und (2)) w. z. b. w.

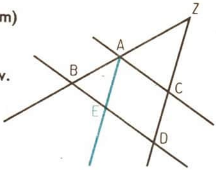


Bild B 34

■ 4 Im Bild B 35 ist $RS \parallel UV$. Ferner sei $\overline{TR} = 22{,}8$ cm, $\overline{RU} = 29{,}4$ cm, $\overline{RS} = 41{,}7$ cm. Zu berechnen ist $\overline{UV}$.

Lösung: Nach dem 2. Strahlensatz ist

$$\frac{\overline{UV}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{TU}}{\overline{TR}}, \text{ also } \frac{\overline{UV}}{41{,}7\text{ cm}} = \frac{(22{,}8 + 29{,}4)\text{ cm}}{22{,}8\text{ cm}} = \frac{52{,}2\text{ cm}}{22{,}8\text{ cm}}$$

$$\overline{UV} = \frac{52{,}2 \cdot 41{,}7}{22{,}8}\text{ cm}$$

Überschlag: $UV \approx \frac{50 \cdot 40}{20}\text{ cm} = 100\text{ cm}$

Ablaufplan: **52,2 $\boxed{\div}$ 22,8 $\boxed{\times}$ 41,7 $\boxed{=}$ [95.471052]**

Ergebnis: $\overline{UV} = 95{,}5$ cm

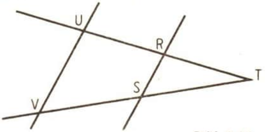
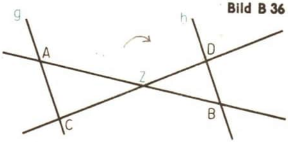


Bild B 35

● 20 Das Bild B 36 zeigt anstelle zweier Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt Z zwei Geraden mit dem Schnittpunkt Z, die von zwei Parallelen g und h geschnitten werden. Begründe, daß auch hier gilt

Bild B 36



$\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{ZC} : \overline{ZD}$ (entsprechend dem 1. Strahlensatz) und
$\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{AC} : \overline{BD}$ (entsprechend dem 2. Strahlensatz)!
Benutze dafür eine Drehung mit Z als Zentrum!

Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Strecken in der folgenden Tabelle zum Bild B 35! (L für f*)

	$\overline{TS}$	$\overline{TV}$	$\overline{SV}$	$\overline{TR}$	$\overline{TU}$	$\overline{RU}$	$\overline{RS}$	$\overline{UV}$
a)	6 cm		3 cm		12 cm		10 cm	
b)			1 cm		5,5 cm		2,4 cm	4 cm
c)		8,5 cm		52 mm			56 mm	70 mm
d)				6,2 cm	12,4 cm	6,2 cm	9,8 cm	
e)	17,8 cm	22,5 cm					14,3 cm	20,9 cm
f)*	35 cm			56 cm	104 cm			26 cm

2. **a)** Berechne die Länge der senkrechten Streben des Pultdachbinders (↗ Bild B 37)! (L)
b) Ermittle die Länge der schrägen Streben und des Obergurts zeichnerisch!

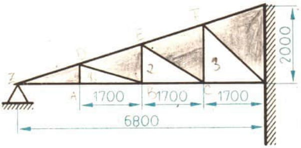


Bild B 37

3. Im Bild B 38 ist $AE \parallel BF$. Gib folgende Streckenverhältnisse mit Hilfe anderer Strecken an!
a) $\overline{ZA} : \overline{AC}$ **b)** $\overline{CE} : \overline{ZC}$ **c)** $\overline{BF} : \overline{AE}$

4. Begründe, daß für die Figur im Bild B 38 folgende Verhältnisgleichungen gelten
a) $\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}$, **b)** $\overline{AC} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{BF}$, **c)** $\overline{AE} : \overline{BF} = \overline{CE} : \overline{DF}$!

5. Begründe unter Benutzung des Bildes B 39, daß folgende Aussage falsch ist:
Wenn $\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{AC} : \overline{BD}$, so $AC \parallel BD$!

6.* Gegeben sei ein Dreieck ABC und auf Seite $\overline{AB}$ ein Punkt P. Durch P ist eine Gerade derart zu legen, daß sie die Gerade AC in einem Punkte Q so schneidet, daß $\overline{PQ}$ von BC halbiert wird. Anleitung: Zeichne zuerst eine passende Parallele zu AC oder BC! (L)

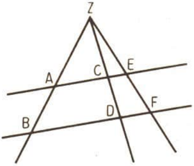


Bild B 38

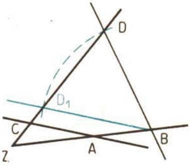


Bild B 39

7 Praktische Anwendungen der Strahlensätze

Die Strahlensätze und Satz B 6 können bei der Ermittlung der Längen unzugänglicher Strecken angewandt werden.

■ 5 Es soll die Breite $\overline{AB}$ eines Flusses ermittelt werden (↗ Bild B 40).
Lösung: Es wird senkrecht zu AB eine Strecke $\overline{BC}$ abgesteckt und vermessen. Durch Fluchten legt man einen Punkt D so fest, daß B zwischen A und D liegt. Parallel zu $\overline{BC}$ wird eine Strecke $\overline{DE}$ derart abgesteckt, daß E auf der Geraden AC liegt.
Die Messungen ergeben: $\overline{BC} = 24$ m, $\overline{DE} = 34$ m, $\overline{BD} = 20$ m.
Nach dem zweiten Strahlensatz gilt:

(1) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$$

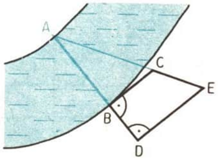


Bild B 40

Multiplikation mit $\overline{AD} \cdot \overline{DE}$ ergibt

$$\overline{AB} \cdot \overline{DE} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$

Wir setzen $\overline{AB} = x$ m und arbeiten nur mit den Zahlenwerten. Es gilt:

$$x \cdot 34 = 24(x + 20)$$
$$34x = 24x + 480$$
$$10x = 480$$
$$x = 48$$

Bevor wir das Ergebnis angeben, machen wir eine Probe mit der Ausgangsgleichung (1). Es ist tatsächlich

$$\frac{48\text{ m}}{48\text{ m} + 20\text{ m}} = \frac{48\text{ m}}{68\text{ m}} = \frac{24\text{ m}}{34\text{ m}}.$$

Also erhalten wir: Die Breite des Flusses beträgt 48 m.

● 21 a) Beschreibe das praktische Vorgehen mit Fluchtstäben und einfachem Feldwinkelmesser bei der Vermessung im Beispiel B 5!
b) Berechne die Flußbreite für folgende Meßergebnisse:
$\overline{BC} = 24{,}3$ m; $\overline{DE} = 30{,}5$ m; $\overline{BD} = 16{,}5$ m! (L)

Die Strahlensätze liegen auch dem Funktionsprinzip verschiedener Meß- und Zeichengeräte zugrunde. Kleine Abstände kann man mit einem **Meßkeil** ermitteln, den man sich auch selbst anfertigen kann. Für den lichten (inneren) Durchmesser des Röhrchens im Bild B 41 gilt nach dem 2. Strahlensatz

$$\frac{d}{1\text{ cm}} = \frac{6{,}7\text{ cm}}{10\text{ cm}}.$$

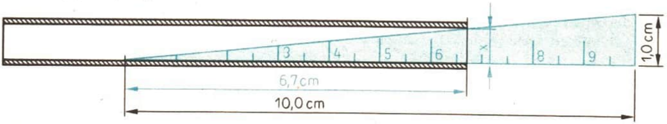


Bild B 41

Der Durchmesser beträgt also 6,7 mm.

● 22 a) Ermittle den lichten Durchmesser der Öffnung einer Milchflasche (einer Brauseflasche)! Fertige dir hierfür aus Pappe einen geeigneten Meßkeil an!
b) Erläutere, wie man mit einem **Keilausschnitt** arbeitet (↗ Bild B 42)!

Aufgaben

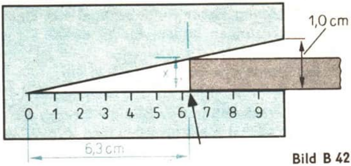


Bild B 42

1. Wenn zur Ermittlung der Flußbreite $\overline{AB}$ keine Verlängerung von $\overline{AB}$ zugänglich ist, kann auch wie im Bild B 43 vorgegangen werden.

a) Ermittle die Breite des Flusses, wenn $\overline{BC} = 29$ m, $\overline{CD} = 11$ m und $\overline{DE} = 14$ m sind!
b) Man wählt die Punkte C und D nach Möglichkeit so, daß $\overline{CB} : \overline{CD} = 1 : 1$ ist (oder $2 : 1$ oder $4 : 1$). Warum ist das vorteilhaft?

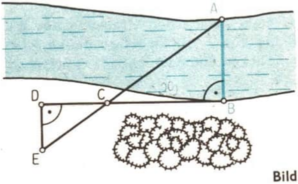


Bild B 43

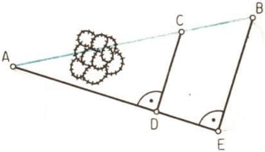


Bild B 44

2. A und B seien zwei durch ein Sichthindernis getrennte Punkte. Auf $\overline{AB}$ ist ein von A aus nicht sichtbarer Punkt C abzustecken.
a) Erläutere das Verfahren am Bild B 44!
b) Wie lang ist $\overline{DC}$ für $\overline{AE} = 96$ m, $\overline{AD} = 60$ m und $\overline{BE} = 28$ m? (L)

3. Steffen hält mit ausgestrecktem Arm (60 cm) ein Zehnpfennigstück so, daß es gerade einen Gasbehälter (Durchmesser 62 m) verdeckt. Wieviel Meter steht er vom Gasbehälter entfernt?

4. Die Entfernung des Mondes von der Erde beträgt etwa 60 Erdradien ($R = 6\,370$ km). Erläutere, wie man mit Hilfe einer Murmel oder dergleichen den Monddurchmesser näherungsweise bestimmen kann!

5. Das Bild B 45 zeigt einen Proportionalzirkel. Er ist verstellbar und dient zur Verkleinerung bzw. Vergrößerung von Strecken in vorgegebenem Maßstab. Beschreibe ihn und begründe seine Wirkungsweise!


Bild B 45

8 Eigenschaften zentrischer Streckungen

● **23** **a)** Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 3{,}0$ cm und $\overline{BC} = 5{,}0$ cm! Wähle einen Punkt Z innerhalb des Rechtecks!
b) Ermittle das Bild von $ABCD$ bei der zentrischen Streckung $(Z; 2)$!
c) Ermittle das Bild M' des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{AB}$ bei dieser Abbildung!

Bei der Lösung dieser Aufgabe wird von Eigenschaften Gebrauch gemacht, die alle zentrischen Streckungen haben. Einige dieser Eigenschaften sind in der folgenden Aufzählung enthalten.

Für jede zentrische Streckung $(Z; k)$ gilt:

(1) Jede Gerade AB hat als Bild die Gerade $A'B'$, und es ist $A'B' \parallel AB$.
(2) Jede Strecke $\overline{AB}$ hat als Bild die Strecke $\overline{A'B'}$, und es ist $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$.
(3) Jeder Winkel α hat als Bild einen Winkel α' mit $\alpha' = \alpha$.
(4) Sind zwei Geraden zueinander parallel, so sind auch ihre Bildgeraden zueinander parallel.
(5) Die Bildgeraden zweier zueinander senkrechter Geraden sind ebenfalls zueinander senkrechte Geraden.
(6) Das Bild eines n-Ecks ist wieder ein n-Eck.
(7) Das Bild eines Kreises ist ein Kreis mit k-fachem Radius.

● **24** Vergleiche diese Eigenschaften mit denen der Bewegungen (↗ S. 33f.).

● **25** Die Eigenschaft (2) drückt aus, daß bei einer zentrischen Streckung das Bild einer Figur F stets eine maßstäbliche Darstellung von F ist. Erläutere diesen Sachverhalt am Bild B 46! Überlege vorher, welche Strecken einander bei $(Z; k)$ entsprechen!

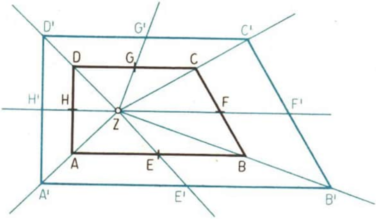


Bild B 46

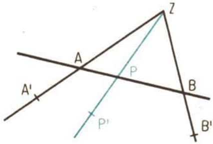


Bild B 47

Die Eigenschaften (1) bis (7) zentrischer Streckungen lassen sich mit Hilfe der Sätze B 6, B 7 und B 8 beweisen; zum Teil können sie aufeinander zurückgeführt werden.
Als Beispiel wird hier die Eigenschaft (1) bewiesen für den Fall, daß die Gerade AB nicht durch das Streckungszentrum Z geht.

Voraussetzung: Z liegt nicht auf AB (↗ Bild B 47).
Es ist $\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA}$ und $\overline{ZB'} = k \cdot \overline{ZB}$,
also $\overline{ZA'} : \overline{ZA} = k$ und $\overline{ZB'} : \overline{ZB} = k$.

Behauptung: (a) Für jeden Punkt P von AB liegt das Bild P' auf $A'B'$.
(b) Jeder Punkt von $A'B'$ ist Bild eines Punktes von AB.
(c) $A'B' \parallel AB$

Beweis zu (a) und (c): Für P und P' gilt $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$. Es ist also

$$\overline{ZP'} : \overline{ZP} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{ZP'} : \overline{ZP} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

$$\left.\begin{array}{l} P'A' \parallel PA\ (= AB) \\ P'B' \parallel PB\ (= AB) \end{array}\right\} \text{(nach Satz C 6)}$$

Da es durch P' nur eine Parallele zu AB gibt, liegen A', P' und B' auf ein und derselben Geraden, und es gilt (c).
(b) beweist man auf die gleiche Weise, ausgehend von $A'B'$.

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 3{,}0$ cm, $\overline{BC} = 4{,}0$ cm und
a) $\overline{AC} = 3{,}5$ cm, **b)** $\overline{AC} = 5{,}0$ cm, **c)** $\overline{AC} = 6{,}5$ cm!
Ermittle den Mittelpunkt Z des Umkreises! Ermittle das Bild des Dreiecks ABC bei der zentrischen Streckung $(Z; 2{,}5)$!

2. Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 4,8 cm!
Zeichne den Mittelpunkt M der Seite $\overline{AB}$ und den Mittelpunkt N der Seite $\overline{BC}$ ein!
Ermittle den Schnittpunkt Z der Strecken $\overline{MN}$ und $\overline{BD}$!
Ermittle das Bild von $ABCD$ bei der zentrischen Streckung $(Z; 1{,}5)$!

3. Zeichne einen Punkt M und zwei konzentrische Kreise um M mit den Radien $r_1 = 5$ cm und $r_2 = 6$ cm! Lege einen Punkt Z fest mit $\overline{MZ} = 7$ cm! Ermittle das Bild der beiden Kreise bei der zentrischen Streckung $(Z; 0{,}5)$!

4. Begründe mit Hilfe der Eigenschaften (1) bis (7) der zentrischen Streckungen die folgenden Aussagen! Für jede zentrische Streckung $(Z; k)$ gilt:
(a) Je zwei Strecken stehen zueinander im gleichen Verhältnis wie ihre Bilder.
(b) Das Bild jeder Strecke ist eine zu ihr parallele Strecke.
(c) Das Bild jedes gleichschenkligen Trapezes ist ein gleichschenkliges Trapez.

5. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Begründung!)
Bei jeder zentrischen Streckung hat
a) jedes Rechteck als Bild ein Rechteck;
b) jedes Rechteck als Bild ein Quadrat;
c) jedes Rechteck als Bild ein Parallelogramm.

6.* In der Ebene sei eine „Geradenstreckung" gemäß Bild B 48 erklärt:
$$\overline{FP'} : \overline{FP} = \overline{GQ'} : \overline{GQ} = 2;$$
alle Punkte von g haben sich selbst als Bild.
a) Handelt es sich um eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich?
b) Ist das Bild jeder Geraden eine Gerade?
c) Ist das Bild jedes Kreises ein Kreis?
d) Ist jede Gerade zu ihrer Bildgeraden parallel?

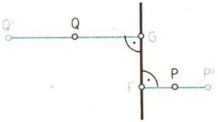


Bild B 48

Zusammenfassung

Eigenschaften zentrischer Streckungen $(Z; k)$

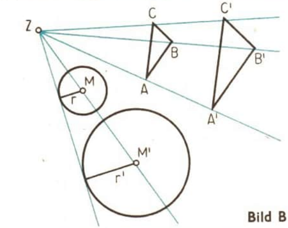


Bild B 49

Original	**Bild**
Gerade $g = AB$	Gerade $g' = A'B'$
Strecke $\overline{AB}$	Strecke $\overline{A'B'}$; $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$
Winkel α	Winkel α'; $\alpha' = \alpha$
Geraden g und h; $g \parallel h$	Geraden g' und h'; $g' \parallel h'$

Original	Bild
Geraden g und h; $g \perp h$	Geraden g' und h'; $g' \perp h'$
n-Eck	n-Eck
Kreis um M; Radius r	Kreis um M'; Radius $r' = k \cdot r$

Erster Strahlensatz

Voraussetzung: $AC \parallel BD$

Behauptung:

(a) $\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{ZC} : \overline{ZD}$

(b) $\overline{ZA} : \overline{AB} = \overline{ZC} : \overline{CD}$

(c) $\overline{ZB} : \overline{AB} = \overline{ZD} : \overline{CD}$

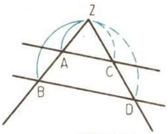


Bild B 50

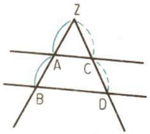


Bild B 51

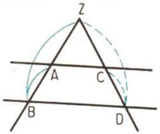


Bild B 52

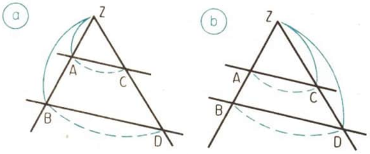
Zweiter Strahlensatz

Voraussetzung: $AC \parallel BD$

Behauptung:

$\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{AC} : \overline{BD}$

$\overline{ZC} : \overline{ZD} = \overline{AC} : \overline{BD}$



Bilder B 53 a und b

Umkehrung der Teilaussage (a) des ersten Strahlensatzes

Voraussetzung: $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \dfrac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}$

Behauptung: $AC \parallel BD$

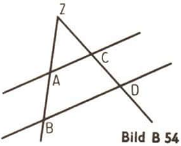


Bild B 54

Ähnliche Figuren

9 Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

Wir können nun erklären, wann man in der Mathematik Figuren zueinander ähnlich nennt.
Für das Bild B 55 gilt: Dreieck ABC wird durch die Drehung um A um 90° auf Dreieck $A'B'C'$ abgebildet, Dreieck $A'B'C'$ durch die zentrische Streckung $(Z; 2)$ auf Dreieck $A''B''C''$.
Wir sagen auch:
Die **Nacheinanderausführung** der Drehung um A um 90° und der zentrischen Streckung $(Z; 2)$ bildet Dreieck ABC auf Dreieck $A''B''C''$ ab.

● 26 Die Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ im Bild B 55 sind maßstäbliche Darstellungen des Dreiecks ABC. Gib jeweils den Maßstab an!

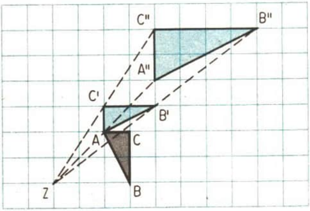


Bild B 55

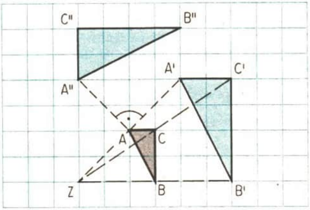


Bild B 56

● 27 Für das Bild B 56 gilt: Dreieck ABC wird durch eine zentrische Streckung auf Dreieck $A'B'C'$ abgebildet und durch die Nacheinanderausführung der zentrischen Streckung und einer Drehung auf das Dreieck $A''B''C''$. Vergleiche auch hier die Dreiecke!

● 28 Im Bild B 57 ist das Sechseck $KLMNOP$ eine maßstäbliche Verkleinerung des Sechsecks $ABCDEF$. Gib eine Abbildung an, bei der $KLMNOP$ das Bild von $ABCDEF$ ist!

Es gelten die folgenden Aussagen, die hier nicht bewiesen werden:
(1) Wenn eine Figur F_1 bei der Nacheinanderausführung einer zentrischen Streckung und einer Bewegung auf eine Figur F_2 abgebildet wird, so ist F_2 eine maßstäbliche Darstellung von F_1.
(2) Wenn eine Figur F_2 eine maßstäbliche Darstellung einer Figur F_1 ist, dann gibt es eine zentrische Streckung und eine Bewegung, bei deren Nacheinanderausführung F_2 das Bild von F_1 ist.

Diese beiden Aussagen erinnern an den Zusammenhang zwischen der Kongruenz (Deckungsgleichheit) von Figuren und den Bewegungen. Es liegt deshalb nahe, folgendermaßen zu definieren:

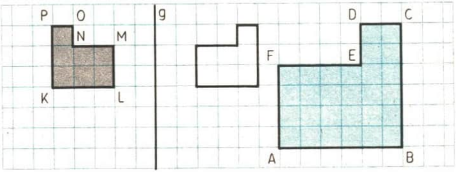


Bild B 57

▶ 9 **DEFINITION: Jede Nacheinanderausführung einer zentrischen Streckung und einer Bewegung (bzw. einer Bewegung und einer zentrischen Streckung) heißt *Ähnlichkeitsabbildung*. Den Streckungsfaktor nennt man nun auch *Ähnlichkeitsfaktor*.**

▶ 10 **DEFINITION: Eine Figur F_1 heißt ähnlich zu einer Figur F_2, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.**

Man schreibt dafür kurz: $F_1 \sim F_2$ (lies: F_1 ist ähnlich zu F_2).

● 29 Begründe, daß **a)** jede Bewegung, **b)** jede zentrische Streckung eine Ähnlichkeitsabbildung ist! (Beachte zentrische Streckungen mit $k = 1$!) (L)

Die Definition B 9 erfaßt damit auch den Fall, daß eine Figur im Maßstab 1:1 abgebildet wird. Nach Definition B 10 ist damit die Kongruenz von Figuren ein Sonderfall der Ähnlichkeit; der Ähnlichkeitsfaktor ist dann 1.
Die Ähnlichkeitsbeziehung ist für beliebige Figuren
So sind zum Beispiel zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 sowie den Radien r_1 bzw. r_2 stets zueinander ähnlich. Als Ähnlichkeitsabbildung kann man die Nacheinanderausführung der Verschiebung $\overrightarrow{M_1M_2}$ und der zentrischen Streckung $\left(M_1, \frac{r_2}{r_1}\right)$ wie auch der Verschiebung $\overrightarrow{M_2M_1}$ und der zentrischen Streckung $\left(M_2, \frac{r_1}{r_2}\right)$ angeben. Das berechtigt zu der Sprechweise „F_1 und F_2 sind **einander** ähnlich".
Wie bei der Kongruenz spricht man auch bei ähnlichen Figuren von einander entsprechenden Punkten, Seiten, Winkeln, ...
Die Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen können aus den Eigenschaften der Bewegungen und der zentrischen Streckungen abgeleitet werden.

● 30 Vergleiche die Eigenschaften der Bewegungen (↗ S. 33 f.) mit den Eigenschaften der zentrischen Streckungen (↗ S. 50)! Gib Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen an!

Aufgaben

1. Zeichne nach der Lochschablone ein Dreieck ABC mit A (9), B (10) und C (5)! Ermittle sein Bild $A'B'C'$ bei folgenden Abbildungen: **a)** Streckung (A; 2), dann Verschiebung $\overrightarrow{AC}$, **b)** Verschiebung $\overrightarrow{AC}$, dann Streckung (A; 2).

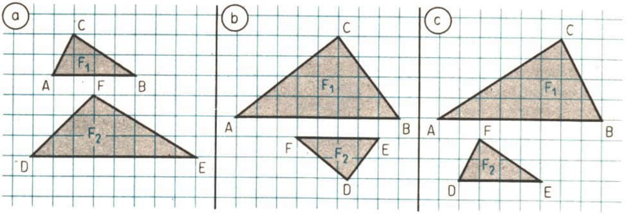


Bild B 58 a bis c

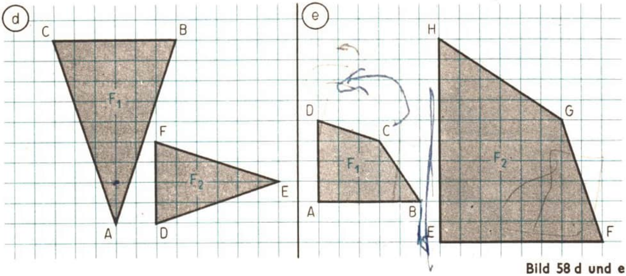


Bild 58 d und e

2. Sind die Figuren F_1 und F_2 in den Bildern B 58a bis e jeweils zueinander ähnlich? Begründe deine Entscheidung! Gib im Falle der Ähnlichkeit Paare einander entsprechender Punkte, Seiten und Winkel an! (Benutze dafür Tabellen!)

3. Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 3 cm! Konstruiere den Inkreis K!
   a) Ermittle das Bild von $ABCD$ und K bei der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ und der anschließenden Streckung $(A; 2)$!
   b) Erläutere anhand deiner Zeichnung Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen aus der Zusammenfassung auf Seite 51!
   c)* Ermittle das Bild von $ABCD$ und K bei der Streckung $(A; 2)$ und der anschließenden Verschiebung $\overrightarrow{AC}$! Vergleiche das dabei erhaltene Bild mit dem bei a) erhaltenen!

4. Nenne eine Eigenschaft, die
   a) alle Bewegungen haben, aber nicht alle Ähnlichkeitsabbildungen,
   b) alle zentrischen Streckungen haben, aber nicht alle Ähnlichkeitsabbildungen,
   c) alle Ähnlichkeitsabbildungen haben, aber nicht alle Bewegungen!

5. Haben alle Ähnlichkeitsabbildungen folgende Eigenschaften? Begründe oder widerlege durch ein Beispiel!
   a) Das Bild des Mittelpunktes einer Strecke ist stets Mittelpunkt der Bildstrecke.
   b) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gleich dem Flächeninhalt des Bilddreiecks.
   c) Jede Gerade g ist zu ihrer Bildgeraden g' parallel.
   d) Das Bild eines Quadrates ist stets ein Rechteck.

10 Nacheinanderausführung von Ähnlichkeitsabbildungen

Wir wissen bereits: Die Nacheinanderausführung zweier Bewegungen ist wieder eine Bewegung. Daraus folgt für Figuren F_1, F_2 und F_3: Wenn $F_1 \cong F_2$ und $F_2 \cong F_3$, so $F_1 \cong F_3$.
Gilt eine entsprechende Aussage auch für die Ähnlichkeit von Figuren?

● **31** Über die Dreiecke im Bild B 59 sei folgendes bekannt:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (zentrische Streckung $\left(Z; \frac{1}{2}\right)$),
$\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ (zentrische Streckung $(Z; 3)$).

Untersuche, ob das Dreieck ABC auch zum Dreieck $A''B''C''$ ähnlich ist! Gib gegebenenfalls den Ähnlichkeitsfaktor an!

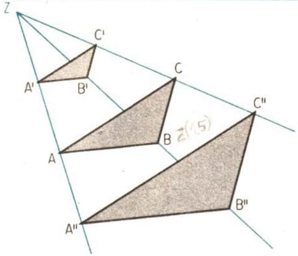


Bild B 59

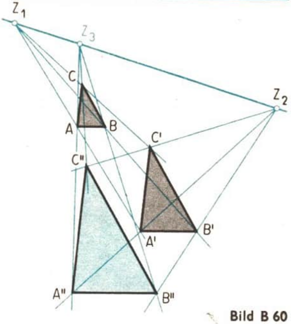


Bild B 60

Im Auftrag B 31 hatten beide Streckungen das gleiche Streckungszentrum. An einem Beispiel soll nun untersucht werden, ob die Nacheinanderausführung zweier Streckungen mit verschiedenen Zentren ebenfalls eine Ähnlichkeitsabbildung ist.

■ **6** Im Bild B 60 wurden auf das Dreieck ABC nacheinander die zentrischen Streckungen $(Z_1; 2)$ und $\left(Z_2; \frac{3}{2}\right)$ angewendet. Damit gilt also:
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ und $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$.
Zu untersuchen ist, ob auch gilt $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

Wir betrachten zunächst nur die Strecke $\overline{AB}$ und ihre Bilder $\overline{A'B'}$ und $\overline{A''B''}$. Aus den Eigenschaften der zentrischen Streckungen folgt:
(1) $A''B'' \parallel A'B'$, $\quad A'B' \parallel AB$ und damit $A''B'' \parallel AB$;
(2) $\overline{A''B''} = \frac{3}{2}\,\overline{A'B'}$, $\quad \overline{A'B'} = 2\,\overline{AB}$ und damit $\overline{A''B''} = \frac{3}{2} \cdot 2\,\overline{AB} = 3\,\overline{AB}$.

$\overline{A''B''}$ und $\overline{AB}$ sind in dem Viereck $A''B''BA$ gegenüberliegende Seiten. Nach (1) und (2) sind sie parallel und verschieden lang. Deshalb schneiden sich die Geraden $A''A$ und $B''B$ in einem Punkt Z_3. Nach dem zweiten Strahlensatz bildet die zentrische Streckung $(Z_3; 3)$ die Strecke $\overline{AB}$ auf $\overline{A''B''}$ ab.

● **32** **a)** Begründe, daß im Beispiel B 6 C'' das Bild von C ist bei $(Z_3; 3)$!
b) Im Beispiel B 6 ist $k_1 \cdot k_2 \neq 1$. Was geschieht, wenn $k_1 \cdot k_2 = 1$ ist? (↗ Bild B 61)

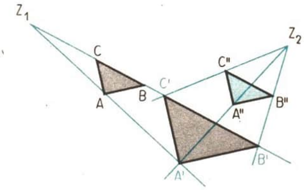


Bild B 61

Man kann zeigen:
Die Nacheinanderausführung einer Ähnlichkeitsabbildung mit dem Ähnlichkeitsfaktor k_1 und einer Ähnlichkeitsabbildung mit dem Ähnlichkeitsfaktor k_2 ist eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Ähnlichkeitsfaktor $k_3 = k_1 \cdot k_2$.

Es gilt deshalb auch folgende Aussage:
Wenn für drei Figuren F_1, F_2 und F_3 gilt $F_1 \sim F_2$ und $F_2 \sim F_3$, so ist $F_1 \sim F_3$.

Aufgaben

1. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A\,(2;1)$, $B\,(4;1)$, $C\,(2;3)$, $Z_1\,(0;1)$, $Z_2\,(-6;7)$! Wende auf das Dreieck ABC die zentrische Streckung $(Z_1;2)$ an und auf das Bilddreieck $A'B'C'$ die Streckung $(Z_2;1{,}5)$! Welche Ähnlichkeitsabbildung bildet ABC auf $A''B''C''$ ab?

2. Zeichne nach der Lochschablone die Punkte $A\,(8)$, $B\,(12)$, $C\,(9)$, $Z_1\,(1)$ und $Z_2\,(15)$! Wende auf das Dreieck ABC die zentrische Streckung $(Z_1;3)$ an und $\left(Z_2;\frac{1}{3}\right)$ auf das Bilddreieck $A'B'C'$! Welche Ähnlichkeitsabbildung bildet ABC auf $A''B''C''$ ab?

3. Es sei Z ein Punkt. Gib die Ähnlichkeitsabbildung an, die die Nacheinanderausführung folgender zentrischer Streckungen ist!
   a) $(Z;2)$ und $\left(Z;\frac{2}{3}\right)$ **b)** $\left(Z;\frac{2}{3}\right)$ und $\left(Z;\frac{3}{4}\right)$ **c)** $(Z;0{,}5)$ und $(Z;2)$

4. Die Seitenlängen eines Rechtecks seien 3 cm und 5 cm. Auf das Rechteck wird die Nacheinanderausführung zweier Ähnlichkeitsabbildungen mit den Ähnlichkeitsfaktoren k_1 und k_2 angewendet.
   Wie lang sind die Seiten des Bildrechtecks?
   a) $k_1 = 2$ und $k_2 = 3$ **b)** $k_1 = \frac{2}{3}$ und $k_2 = \frac{3}{4}$ **c)** $k_1 = 2$ und $k_2 = 8$

5. k_1 und k_2 seien die Ähnlichkeitsfaktoren zweier Ähnlichkeitsabbildungen, k_3 der Ähnlichkeitsfaktor von deren Nacheinanderausführung. Ermittle die in der nebenstehenden Tabelle fehlenden Werte!

	k_1	k_2	k_3
a)	1,5	3	
b)		2	4
c)	3		5

11 Ähnlichkeit von Vielecken, insbesondere von Dreiecken

Wir wissen:

Wenn eine Figur F_1 durch eine Ähnlichkeitsabbildung (bzw. Bewegung) auf eine Figur F_2 abgebildet wird, so sind F_1 und F_2 einander ähnlich (bzw. kongruent).

Woran kann man nun aber erkennen, ob zwei Figuren, wie zum Beispiel F_1 und F_2 im Bild B 62, einander ähnlich sind? Nach der Definition muß dazu geprüft werden, ob es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet. Das ist oft langwierig.
Bei der Kongruenz von Figuren haben wir für Dreiecke und Vielecke Entscheidungshilfen (Kriterien) kennengelernt, die Kongruenzsätze. Analoge Sätze gibt es auch für die Ähnlichkeit von Dreiecken und Vielecken. Man kann sie finden, wenn man bedenkt:

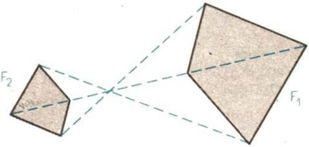


Bild B 62

(1) Die Kongruenz von Figuren ist ein Sonderfall der Ähnlichkeit ($k = 1$).
(2) Bei Ähnlichkeitsabbildungen wird jede Strecke auf eine Strecke der k-fachen Länge abgebildet.
(3) Bei Ähnlichkeitsabbildungen bleibt die Winkelgröße erhalten.

Mit folgender Tabelle verschaffen wir uns zunächst eine Übersicht über mögliche Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.

Kongruenzsatz in der Form: Wenn ..., so $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.	**Entsprechender Ähnlichkeitssatz in der Form: Wenn ..., so $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.**
Kongruenzsatz (wsw) Wenn $\beta' = \beta$, $a' = a$, $\gamma' = \gamma$, so ...	Wenn $\beta' = \beta$, $a' = ka$, $\gamma' = \gamma$, so ...
Kongruenzsatz (sws) Wenn $a' = a$, $\gamma' = \gamma$, $b' = b$, so ...	Wenn $a' = ka$, $\gamma' = \gamma$, $b' = kb$, so ...
Kongruenzsatz (sss) Wenn $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, so ...	Wenn $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$, so ...
Kongruenzsatz (sSW) Wenn $a' = a$, $b' = b (a > b)$, $\alpha' = \alpha$, so ...	Wenn $a' = ka$, $b' = kb (a > b)$, $\alpha' = \alpha$, so ...

Die Sätze in der rechten Spalte müssen noch bewiesen werden. Anstelle der Gleichungen $a' = ka$, ... kann man dabei auch Seitenverhältnisse $a' : a = k$, ... schreiben. Im ersten Satz kann man $a' : a = k$ sogar weglassen, denn da nur für *ein einziges* Paar Seiten das Seitenverhältnis k auftritt, ist sein Wert für die vorliegende Fragestellung uninteressant. Es ergibt sich so ein besonders einfaches Kriterium:

▷ 11 ***HAUPTÄHNLICHKEITSSATZ* (ww)_ : Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so sind sie einander ähnlich.**

Voraussetzung: Gegeben sind die Dreiecke ABC und DEF (↗ Bild B 63) mit $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle FDE$ und $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$.
Behauptung: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
Beweis: Wir müssen zeigen, daß es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die das Dreieck ABC auf das Dreieck DEF abbildet.

(1) Wegen $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle FDE$ gibt es eine Bewegung, die das Dreieck ABC auf ein solches Dreieck $A'B'C'$ abbildet, daß $A' = D$ ist, B' auf dem Strahl DE liegt und C' auf dem Strahl DF.
(2) $EF \parallel B'C'$, denn $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ (Umkehrung des Stufenwinkelsatzes).

(3) $\overline{A'B'} : \overline{DE} = \overline{A'C'} : \overline{DF} = k$ [wegen (2) und wegen Satz B 5]
Die zentrische Streckung $(D; k)$ bildet das Dreieck $A'B'C'$ auf das Dreieck DEF ab, und zwar $A' = D$ auf sich, B' auf E und C' auf F.

(4) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, denn die Nacheinanderausführung der Bewegung aus (1) und der zentrischen Streckung aus (3) ist eine Ähnlichkeitsabbildung, und sie bildet A auf D, B auf E, C auf F ab, also $\triangle ABC$ auf $\triangle DEF$ (was zu zeigen war).

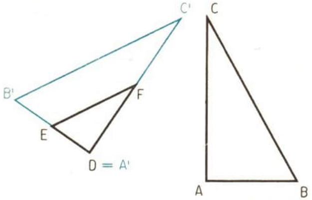


Bild B 63

Die folgenden Ähnlichkeitssätze lassen sich ebenso beweisen; man verwendet dabei die entsprechenden Kongruenzsätze.

▷ 12 **SATZ (sws)$_\sim$: Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen und die dem Winkel anliegenden Seiten gleiche Verhältnisse bilden, so sind die Dreiecke einander ähnlich.**

▷ 13 **SATZ (sss)$_\sim$: Wenn jede Seite eines Dreiecks mit je einer Seite eines anderen Dreiecks gleiche Verhältnisse bildet, so sind die Dreiecke einander ähnlich.**

▷ 14 **SATZ (sSW)$_\sim$: Wenn zwei Seiten eines Dreiecks mit je einer Seite eines anderen Dreiecks gleiche Verhältnisse bilden und wenn die beiden Dreiecke in dem Winkel übereinstimmen, der der jeweils größeren der beiden Seiten gegenüberliegt, so sind die Dreiecke einander ähnlich.**

Mit Hilfe der Sätze B 11 bis 14 können wir die Ähnlichkeit von Dreiecken nachweisen, indem wir für gewisse Winkel und Seitenverhältnisse zeigen, daß sie gleich sind.

■ 7 Es soll geprüft werden, ob die Dreiecke ABC und DEF im Bild B 64 einander ähnlich sind. In diesen Dreiecken sind $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle DFE$ rechte Winkel sowie $\overline{EF}$ und $\overline{AB}$ die kürzeren der anliegenden Seiten. Falls eine Ähnlichkeitsabbildung existiert, die DEF auf ABC abbildet, kommt nur folgende Zuordnung der Eckpunkte in Frage:

D	E	F
C	B	A

Nach der Vorgabe der Dreiecke auf Gitterpapier ist
$\overline{AB} : \overline{EF} = 4 : 3$
und
$\overline{AC} : \overline{FD} = 6 : 4{,}5 = 60 : 45 = 4 : 3.$
Die Voraussetzungen des Satzes B 12 sind damit erfüllt. Es gilt: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

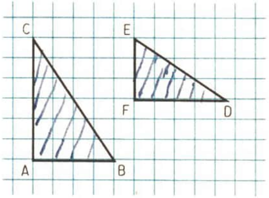


Bild B 64

33 Zeichne ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle BCA = 90°$! Zeichne die Höhe $\overline{CD}$! Untersuche die Dreiecke ABC, ADC und CDB auf Ähnlichkeit!

Für Vielecke gilt folgender Ähnlichkeitssatz:

15 **SATZ: Wenn sich zwischen den Eckpunkten zweier n-Ecke ($n \geqq 3$) bei Beachtung der Reihenfolge eine umkehrbar eindeutige Zuordnung herstellen läßt, so daß**
a) einander zugeordnete Innenwinkel gleich groß sind und
b) einander zugeordnete Seiten das gleiche Verhältnis bilden,
dann sind die n-Ecke einander ähnlich (↗ Bild B 65).

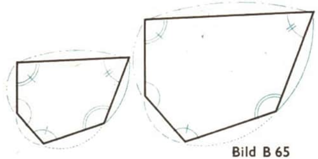


Bild B 65

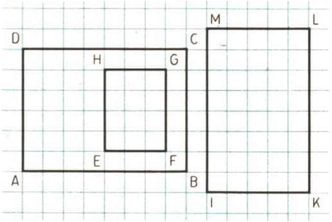


Bild B 66

34 a) Beweise, daß die Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$ im Bild B 66 einander ähnlich sind!
b) Untersuche auch die Rechtecke $ABCD$ und $IKLM$ sowie $EFGH$ und $IKLM$ im Bild B 66 auf Ähnlichkeit! Überlege, wie du rationell vorgehen kannst!

Aufgaben

1. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 70$ cm, $\overline{BC} = 60$ cm, $\overline{AC} = 50$ cm, $\sphericalangle CAB = 57{,}1°$, $\sphericalangle ABC = 44{,}4°$, $\sphericalangle BCA = 78{,}5°$. Prüfe nach, ob Dreieck ABC zu Dreieck DEF ähnlich ist, wenn für Dreieck DEF gilt:
a) $\overline{DE} = 12$ cm, $\overline{EF} = 10$ cm, $\overline{FD} = 14$ cm;
b) $\sphericalangle DEF = 57{,}1°$, $\sphericalangle FDE = 78{,}5°$, $\overline{DE} = 50$ cm;
c) $\sphericalangle EFD = 44{,}4°$, $\overline{FD} = 42$ cm, $\overline{EF} = 45$ cm;
d) $\overline{DE} = 84$ cm, $\overline{DF} = 60$ cm, $\sphericalangle EDF = 78{,}5°$;
e) $\overline{DE} = 35$ cm, $\overline{EF} = 30$ cm, $\sphericalangle FDE = 57{,}1°$;
f) $\sphericalangle DEF = 44{,}4°$, $\overline{DE} = 60$ cm, $\overline{EF} = 70$ cm!

2. In jedem Trapez werden von beiden Diagonalen zwei ähnliche Dreiecke erzeugt.
a) Beweise diese Aussage!
b) Stelle Proportionen zwischen den Diagonalabschnitten und den Grundseiten auf! Ziehe eine Folgerung für das Parallelogramm!

3.* Beweise: Wenn D, E, F die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks ABC sind, so gilt $\triangle ABC \sim \triangle DEF$!

4. a) Begründe, daß zwei Quadrate stets zueinander ähnlich sind!
b) Gib eine Bedingung dafür an, daß zwei Rhomben zueinander ähnlich sind!
c)* Löse Aufgabe 4b für zwei Rechtecke (Parallelogramme, gleichschenklige Dreiecke)!

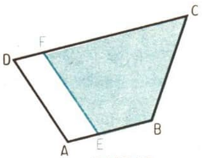


Bild B 67

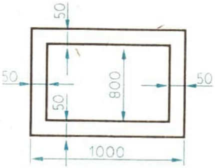


Bild B 68

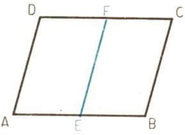


Bild B 69

5. Im Bild B 67 sind $EF \parallel AD$ und $AB \parallel DC$. Untersuche, ob die Trapeze $ABCD$ und $EBCF$ einander ähnlich sind!

6. Überprüfe, ob das innere und das äußere Rechteck des Bilderrahmens im Bild B 68 einander ähnlich sind!

7. Im Parallelogramm $ABCD$ (↗ Bild B 69) sei $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm, E der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und F der Mittelpunkt von $\overline{CD}$. Begründe, warum $AEFD$ nicht ähnlich zu $ABCD$ ist!

12 Ähnlichkeit von krummlinig begrenzten Figuren und von Körpern

In Lerneinheit B 9 haben wir festgestellt, daß zwei Kreise stets zueinander ähnlich sind. Für beliebige krummlinig begrenzte Figuren F_1 und F_2 kann man im allgemeinen nicht wie bei Vielecken mit Hilfe eines Ähnlichkeitssatzes entscheiden, ob sie zueinander ähnlich sind. Man muß fast stets prüfen, ob es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.
Mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke bzw. Vielecke kann man nicht nur erkennen, ob zwei Figuren zueinander ähnlich sind. Man verwendet diese Sätze auch bei der Konstruktion von zueinander ähnlichen Vielecken und sogar zur näherungsweisen Konstruktion ähnlicher krummlinig begrenzter Figuren.

● **35** In der Zeitung „Junge Welt" findet man oft Anregungen zum Selbstschneidern modischer Bekleidung. Die Schnittmuster werden verkleinert und auf Karopapier dargestellt. Eine Angabe wie „1 Kästchen = 2 cm breit / 2 cm hoch" ermöglicht die Herstellung eines passenden Schnittbogens.

a) Mit Hilfe des Bildes B 70 soll ein Trägerpulli entstehen (V – Vorderteil, R – Rückenteil). Beschreibe die Herstellung der beiden Teile des Schnittes nach dieser Vorlage im angegebenen Vergrößerungsverhältnis! Begründe, daß die Schnitteile zu den Figuren im Bild B 70 ähnlich sind!

b) Wenn die Schnitteile krummlinig begrenzte Figuren sind (↗ Bild B 71), erleichtern Hilfslinien (↗ Bild B 72) das Vergrößern. Beschreibe auch hier die Schnittherstellung!

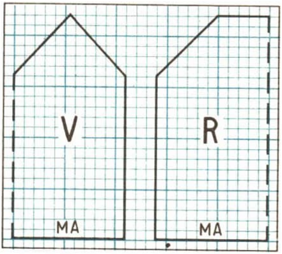


Bild B 70

Genaue maßstäbliche Darstellungen krummlinig begrenzter ebener Figuren können mit dem Pantograph angefertigt werden (↗ LE 15).
Auch im Raum spricht man von der Ähnlichkeit von Figuren, beispielsweise der von Körpern.

36 Die in Lerneinheit B 3 angegebene Definition für die zentrische Streckung kann wörtlich auf den Raum übertragen werden. Im Bild B 73 wurde auf die Pyramide $ABCZ$ die zentrische Streckung $(Z; 3)$ angewendet. Begründe, daß für die Punkte A, B und C sowie ihre Bilder A', B' und C' gilt:

a) $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$,
$A'C' \parallel AC$;

b) $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$,
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'}$,
$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{A'C'} : \overline{B'C'}$!

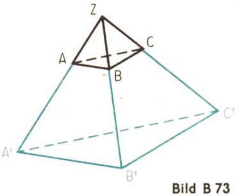


Bild B 73

Analog zur Ebene nennt man die Nacheinanderausführung einer zentrischen Streckung und einer Bewegung des Raumes eine Ähnlichkeitsabbildung. Damit kann auch die Definition der Ähnlichkeit von Figuren wörtlich auf räumliche Figuren übertragen werden. Wie für ebene zueinander ähnliche Figuren gilt auch im Raum:
– *Einander entsprechende Strecken stehen im gleichen Verhältnis* und
– *Einander entsprechende Winkel sind gleich groß.*
Außerdem sind entsprechende Flächen einander ähnlich.

37 Begründe, daß je zwei Kugeln einander ähnlich sind!

38 Das Bild B 74 zeigt zwei Würfel der Kantenlänge 1 cm bzw. 4 cm. Beweise, daß der Würfel $AIKLMNOP$ das Bild des Würfels $ABCDEFGH$ bei der zentrischen Streckung $(A; 4)$ ist!
Formuliere eine Aussage über die Ähnlichkeit von Würfeln!

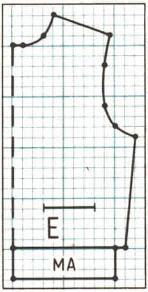


Bild B 71

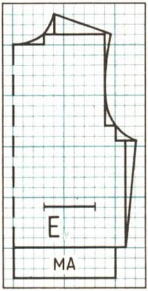


Bild B 72

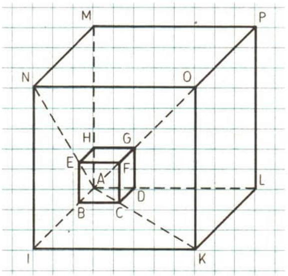


Bild B 74

Aufgaben

1. Unter welchen Voraussetzungen sind zwei Kreisringe aus Kreisen mit den Radien r_1, R_1 bzw. r_2, R_2 einander ähnlich?

2. Eine Pyramide mit der Höhe h und mit einem Rechteck (Seiten a und b) als Grundfläche werde in der Höhe h^* parallel zur Grundfläche geschnitten. Die Schnittfigur ist ein Rechteck mit den Seiten a_0 und b_0. Ermittle jeweils die fehlenden Größen!

a)	$a = 20$ cm,	$b = 12$ cm,	$h = 32$ cm,	$h^* = 24$ cm
b)	$a = 25$ cm,	$b = 35$ cm,	$a_0 = 15$ cm,	$h = 40$ cm
c)	$a = 24$ cm,	$b = 15$ cm,	$a_0 = 16$ cm,	$h^* = 7$ cm
d)	$a_0 = 9$ cm,	$b_0 = 4{,}5$ cm,	$h = 16$ cm,	$h^* = 4$ cm

3. Überprüfe, ob die Milchflaschen von $\frac{1}{4}$ l und $\frac{1}{2}$ l Fassungsvermögen einander ähnlich sind! Vergleiche große und kleine Brauseflaschen!

13 Umfang und Inhalt ähnlicher Figuren

● 39 **a)** Fotopapier des Formats 9 cm × 12 cm ist ähnlich zu solchem des Formats 18 cm × 24 cm. 100 Blatt des Formats 9 cm × 12 cm kosten 4,00 M. Wieviel kosten wohl 100 Blatt vom Format 18 cm × 24 cm? Vergleiche mit dem Ähnlichkeitsfaktor!

b) Vergleiche die Flächeninhalte von quadratischen Wiesenstücken, die man mit 40 m Zaun und mit 120 m Zaun umzäunen kann!

▷ 16 **SATZ: Haben zwei beliebige ähnliche Figuren F und F' mit dem Ähnlichkeitsfaktor k die Umfänge u_F und $u_{F'}$ und die Flächeninhalte A_F und $A_{F'}$, so gilt $u_{F'} = k \cdot u_F$ und $A_{F'} = k^2 \cdot A_F$.**

Auf einen Beweis für diesen Satz verzichten wir und betrachten lediglich als Beispiel zwei Kreise mit den Radien r_1 und $r_2 = k \cdot r_1$. Für sie gilt:

$$u_1 = 2\pi r_1, \quad u_2 = 2\pi r_2 = 2\pi\,(k \cdot r_1) = k \cdot 2\pi r_1 = k \cdot u_1$$
$$A_1 = \pi r^2_1, \quad A_2 = \pi r^2_2 = \pi\,(k \cdot r_1)^2 = \pi k^2 \cdot r^2_1 = k^2 \cdot \pi r^2_1 = k^2 \cdot A_1\,.$$

● 40 Mach dir die Veränderungen von Oberflächeninhalt und Volumen bei maßstäblicher Vergrößerung (Verkleinerung) an Würfeln unterschiedlicher Kantenlänge (1 cm, 2 cm, 3 cm) klar!

● 41 In seinem utopischen Roman „Gullivers Reisen" versetzt JONATHAN SWIFT) seinen Helden in das Land Lilliput (↗ Bild B 75). Dort wird er von den Lilliputanern mit Speisen und Bekleidung versorgt. Bei der Berechnung des Aufwandes für Gullivers Ernährung und Bekleidung gehen die Lilliputaner davon aus, daß er etwa eine zwölffache Vergrößerung eines erwachsenen Lilliputaners ist.

Bild B 75

So wird ihm eine tägliche Ration an Speisen und Getränken zugesichert, die zur Ernährung von 1 728 Lilliputanern ausreichen würde.

a) Welche Überlegungen haben wohl zur Festlegung dieser Zahl geführt?

b) Für wieviel Lilliputaneranzüge würde der Stoff ausreichen, der für einen von Gullivers Anzügen benötigt wird?

c) Auf der Weltausstellung 1851 in London waren die Sonneberger Puppenhersteller mit einer Figurengruppe vertreten, die man heute noch im Spielzeugmuseum in Sonneberg (Thür.) bewundern kann. Bei ihr ist Gulliver etwa 15mal so groß wie die Einwohner von Lilliput. Wie müßten bei diesem Größenverhältnis die Zahlen aus a) und b) lauten?

▷ 17 **SATZ: Haben zwei ähnliche Körper K und K' mit dem Ähnlichkeitsfaktor k die Oberflächeninhalte A_{O_K} bzw. $A_{O_{K'}}$ und die Volumina V_K bzw. $V_{K'}$, so gilt $A_{O_{K'}} = k^2 \cdot A_{O_K}$ und $V_{K'} = k^3 \cdot V_K$.**

Auch bei diesem Satz verzichten wir auf einen Beweis.

Aufgaben

1. Bei zwei ähnlichen Vielecken sind mit a und a' einander entsprechende Seiten, mit u und u' die Umfänge und mit A und A' die Flächeninhalte bezeichnet. Berechne die Angaben für die offenen Felder!

a	a'	u	u'	A	A'
3 cm	6 cm	11 cm		5 cm²	
12 cm		60 cm	35 cm	180 cm²	
4 cm		18 cm		15 cm²	135 cm²

2. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm! Teile das Dreieck durch eine Parallele zu AB folgendermaßen:

a) der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks soll sich zum Inhalt des Dreiecks ABC wie 1 : 4 verhalten;

b) der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks soll sich zum Inhalt des entstehenden Trapezes wie 1 : 8 verhalten.

3. Die Summe der Flächeninhalte dreier ähnlicher Vielecke beträgt 232 cm², ihre Umfänge verhalten sich wie 2 : 3 : 4. Bestimme den Flächeninhalt eines jeden der Vielecke! (L)

4. Welche Kantenlänge muß eine Streichholzschachtel haben, die das achtfache Fassungsvermögen der üblichen haben soll und zu ihr ähnlich ist? In welchem Verhältnis stehen die Materialaufwendungen, wenn beide Schachteln aus dem gleichen Material angefertigt werden?

5.* Berechne den Quotienten von Oberflächeninhalt und Volumen für Würfel verschiedener Kantenlängen! (L)

a) $a = 20$ cm **b)** $a = 2$ cm **c)** $a = 0{,}2$ cm **d)** $a = 0{,}02$ cm

Ziehe Folgerungen für den Quotienten aus Oberflächeninhalt und Gewichtskraft bei gleichem Material und damit für das Verhalten im lufterfüllten Raum!

14 Konstruktionen mit Hilfe der Ähnlichkeit

● **42** Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis sich zu den Schenkeln wie **2 : 3** verhält und dessen Schenkel **a)** 9 cm, **b)** 5 cm, **c)** 2 cm lang sind! Wie kann man die Dreiecke konstruieren, ohne stets die Länge der Basis zu berechnen?

Bei manchen Konstruktionsaufgaben kommt man sehr zweckmäßig zum Ziel, wenn man folgendermaßen vorgeht:

1. Man konstruiert eine *Hilfsfigur*, die nur *einem Teil* der gestellten *Bedingungen* genügt.
2. Man konstruiert die gesuchte Figur, indem man die Hilfsfigur geeignet abbildet (beispielsweise vergrößert oder verkleinert).

Welche Bedingung(en) man zunächst vernachlässigt, überlegt man sich anhand einer Skizze (Planfigur).

■ **8** Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren mit $a : c = 4 : 3$, $\beta = 70°$ und $b = 2{,}5$ cm.
Lösungsüberlegung: Aus der Planfigur (↗ Bild 76) wird deutlich: Wenden wir auf das Dreieck ABC eine zentrische Streckung $(C; k)$ an, so gilt (wegen der Eigenschaften der zentrischen Streckungen) für das Bilddreieck $A_1B_1C_1$ auch $a_1 : c_1 = 4 : 3$ und $\beta_1 = 70°$. Dabei kann k so gewählt werden, daß $a_1 = 4$ cm und somit $c_1 = 3$ cm ist. Wegen des Kongruenzsatzes (sws) ist das Dreieck $A_1B_1C_1$ (unsere Hilfsfigur) eindeutig konstruierbar. Das Dreieck $A_1B_1C_1$ läßt sich umgekehrt auch durch eine zentrische Streckung $(C_1; k_1)$ auf die gesuchte Figur (das Dreieck ABC) abbilden. Man kann somit folgendermaßen vorgehen:

Konstruktion (↗ Bild B 77):

1. Wir konstruieren als Hilfsfigur ein Dreieck $A_1B_1C_1$ mit $a_1 = 4$ cm, $c_1 = 3$ cm und $\beta_1 = 70°$.
2. Auf dem Strahl C_1A_1 tragen wir (von C_1 aus) eine Strecke der Länge $b = 2{,}5$ cm ab und erhalten A.
3. Die Parallele durch A zu A_1B_1 schneidet C_1B_1 im Punkt B.

Das Dreieck ABC hat die verlangten Eigenschaften.

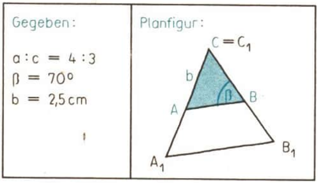


Bild B 76

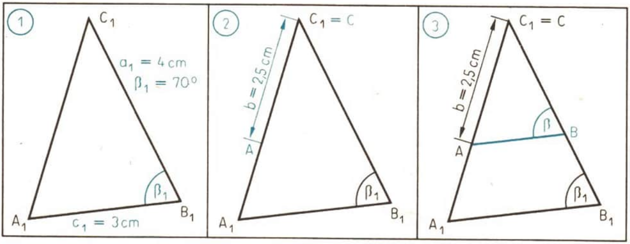


Bild B 77

43 a) Begründe, daß das Dreieck ABC im Beispiel B 8 das Bild vom Dreieck $A_1B_1C_1$ bei einer zentrischen Streckung $(C_1; k_1)$ ist! Ermittle k_1! (L)

b) Udo hat zunächst ebenso ein Dreieck $A_1B_1C_1$ konstruiert, dann aber das gesuchte Dreieck wie im Bild B 78 gefunden. Beschreibe sein Vorgehen und begründe es!

c) Wie läßt sich die Aufgabe mit einer zentrischen Streckung von A_1 aus lösen?

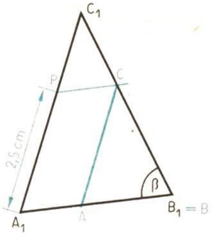


Bild B 78

9 Einem gegebenen Dreieck ABC ist ein Quadrat $PQRS$ so einzubeschreiben, daß P auf $\overline{AC}$, Q und R auf $\overline{AB}$ und S auf $\overline{BC}$ liegt.

Lösungsüberlegung: Anhand der Planfigur (↗ Bild B 79) erkennen wir, daß das gesuchte Quadrat zu einer Schar von Quadraten gehört, die einander bei zentrischen Streckungen $(A; k)$ entsprechen. Dabei liegt der P entsprechende Eckpunkt stets auf dem Strahl AC und der S entsprechende Eckpunkt auf dem Strahl AS. Den Strahl AS kann man finden, indem man zunächst ein beliebiges Quadrat $P_1Q_1R_1S_1$ der Schar konstruiert.

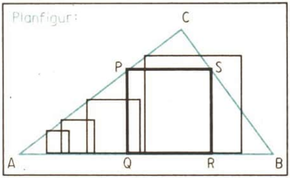


Bild B 79

Konstruktion (↗ Bild B 80):

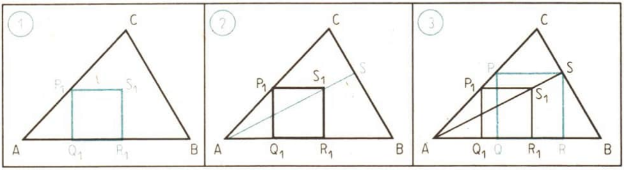


Bild B 80

44 a) Führe diese Konstruktion des Beispiels B 9 aus und wähle dabei nach der Lochschablone A (14), B (15) und C (3)! Beschreibe dein Vorgehen! Wie lang sind die Quadratseiten?

b) Erläutere, wie die gleiche Konstruktionsaufgabe mit einer zentrischen Streckung von C aus zu lösen ist!

Aufgaben

1. Einem Halbkreis ($r = 3$ cm) ist **a)** ein Quadrat, **b)** ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $4:3$ einzubeschreiben. Dabei soll eine Seite auf dem Durchmesser liegen, die anderen Eckpunkte auf der Kreislinie.

2. Einem Rhombus $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6$ cm und $\sphericalangle ABC = 110°$ ist ein Quadrat einzubeschreiben.

3. Das Giebelfeld eines Satteldaches soll eine rechteckige Fensteröffnung erhalten, deren Ecken 1 m Abstand von den Dachsimsen haben und deren Breite sich zur Höhe wie 5 : 3 verhält. Entnimm die Maße dem Bild B 81 und ermittle Lage und Maße der Fensteröffnung!

4. Einem gegebenen Dreieck ist ein anderes einzubeschreiben, dessen Seiten parallel (senkrecht) zu den Seiten des gegebenen Dreiecks verlaufen.

5. Konstruiere ein Dreieck mit den angegebenen Maßen und achte auf nicht lösbare und nicht eindeutig lösbare Aufgaben!
   a) $b : c = 1 : 0{,}75;\quad \alpha = 65°;\quad h_a = 5\ \text{cm}$
   b) $a : b = 3 : 5;\quad \gamma = 60°;\quad \alpha = 45°$
   c) $a : c = 2 : 3;\quad \gamma = 50°;\quad s_a = 5\ \text{cm}$
   d) $a : c = 2 : 3;\quad \alpha = 30°;\quad h_c = 2\ \text{cm}$
   e) $a : b : c = 3 : 4 : 5;\quad h_c = 6\ \text{cm}$
   f) $a : b : c = 7 : 8 : 9;\quad \beta = 90°$

6. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\sphericalangle BCA = 90°$) mit $a : b = 5 : 6$; $h_c = 4$ cm!

7. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck mit c als Basis und $a : c = 4 : 5$; $h_c = 5{,}5$ cm!

8. Konstruiere ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AC} : \overline{AB} = 7 : 5$; $\overline{BC} = 4$ cm!

9.* Konstruiere alle Kreise durch P, die g_1 und g_2 berühren (↗ Bild B 82)!

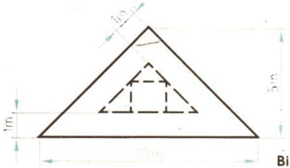


Bild B 81

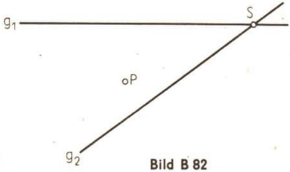


Bild B 82

15 Anwendungen der Ähnlichkeit

In der Lerneinheit B 7 haben wir einige Anwendungen des Strahlensatzes und damit der Ähnlichkeit ebener Figuren kennengelernt. Es gibt aber noch weitere Meß- und Zeichengeräte, bei denen Ähnlichkeit ausgenutzt wird.
Ein Gerät zur mechanischen Vergrößerung und Verkleinerung ebener Figuren ist der **Pantograph**. (Eine vereinfachte Ausführung wird auch als Storchschnabel bezeichnet.) Er wurde bereits im Jahre 1600 erfunden und beruht auf folgendem Prinzip (↗ Bild B 83):

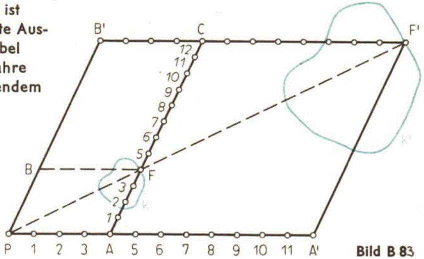


Bild B 83

Ein Parallelogramm *PAFB* ist mit einem größeren *PA'F'B'* durch einen Querstab $\overline{AC}$ fest verbunden. Alle Eckpunkte sind als Gelenkpunkte ausgebildet, doch sind die beiden Parallelogramme in jeder Lage einander ähnlich. Hält man den „Pol" *P* fest und beschreibt mit dem „Fahrstift" *F* eine beliebige Kurve *K*, so beschreibt der „Zeichenstift" *F'* eine dazu ähnliche Kurve *K'*. Der Ähnlichkeitsfaktor (der Maßstab) beträgt

$$k = \overline{F'A'} : \overline{FA} = \overline{PA'} : \overline{PA}.$$

Im Bild B 83 ist $k = 12 : 4 = 3$. Vertauscht man Fahrstift und Zeichenstift, so dient der Pantograph zum Verkleinern.

● **45** Der Ähnlichkeitsfaktor wird beim Pantograph durch Verschieben des Stabes $\overline{AC}$ längs *PA* eingestellt. Beschreibe anhand einer Skizze die Einstellung für **a)** $k = 4$, **b)** $k = \frac{3}{2}$, **c)** $k = \frac{1}{6}$!

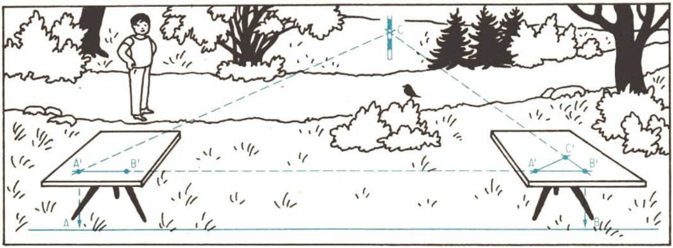


Bild B 84

Die kartographische Aufnahme eines Geländestücks kann mit dem **Meßtischverfahren** erfolgen (↗ Bild B 84). Eine quadratische Platte, die mit Zeichenpapier überspannt ist, ruht als Meßtisch auf einem Dreifuß und ist um eine lotrechte Achse schwenkbar. Eine Wasserwaage dient zum waagerechten Einstellen. In dem aufzunehmenden Gelände sei die waagerechte Entfernung zweier Punkte *A* und *B* bekannt. Die Standlinie $\overline{AB}$ wird im gewünschten Maßstab (meist 1 : 25 000) als Strecke $\overline{A'B'}$ auf das Meßtischblatt übertragen. Um das Bild *C'* eines dritten Geländepunktes *C* festzulegen, stellt man den Meßtisch zunächst in *A* so auf, daß *A'* lotrecht über *A* liegt und $\overline{A'B'}$ parallel zu $\overline{AB}$ verläuft. Der Strahl *A'C'* wird durch den Peilstrahl nach *C* bestimmt. Danach stellt man den Meßtisch in *B* so auf, daß *B'* lotrecht über *B* liegt und verfährt entsprechend. *C'* ergibt sich als Schnittpunkt der Strahlen *A'C* und *B'C*. Wendet man dieses Verfahren für verschiedene Geländepunkte an, so erhält man auf dem Meßtischblatt ein Bild des Geländes im gewünschten Maßstab. Mit dem Meßtischverfahren können auf diese Weise auch unzugängliche Strecken aufgenommen werden. Damit sind Strecken über sumpfiges Gelände, über einen Wasserlauf hinweg o. ä. gemeint.

Aufgaben

1. Wie hoch ist ein Baum, der einen 6,00 m langen Schatten wirft, wenn gleichzeitig ein 1,25 m langer Stab einen 0,75 m langen Schatten hat?
2. Die Drahtseilbahn auf den 1 214 m hohen Fichtelberg überwindet bei einer Streckenlänge von 1 175 m einen Höhenunterschied von 305 m.

a) Ermittle die durchschnittliche Streckenlänge, bei der die Gondel um 10 m steigt!
b) Wie groß ist der Höhenunterschied, der durchschnittlich auf 100 m Streckenlänge überwunden wird?

3. Am Beginn einer 700 m langen Gefällstrecke steht ein Warnzeichen (↗ Bild B 85).
a) Ermittle zeichnerisch, wieviel Meter der Endpunkt der Strecke tiefer liegt als der Anfangspunkt!
b) Gib den Winkel an, unter dem die Straße fällt!
c) Welcher Winkel gehört zu einem Gefälle von 100%?

Bild B 85

4. Das Papierformat A 0 ist ein Rechteck, dessen Flächeninhalt genau 1 m² ist und das beim Falten längs einer Symmetrieachse ein zum Ausgangsrechteck ähnliches Rechteck (A 1) ergibt.
a) Ermittle die Seitenlängen für die Papierformate A 0, A 1 und A 2 in Millimeter! (L)
b) Berechne auch die Abmessungen für die Formate A 3 (Zeichenbogen), A 4 (Schreibmaschinenpapier), A 5 (kleines Schulheft) und A 6 (Postkarte)!

5. Um 200 v. u. Z. bestimmte der Grieche ERATOSTHENES den Erdumfang aus folgenden Messungen (↗ Bild B 86):
– Entfernung Alexandria–Syene (heute Assuan) 5 000 Stadien (1 Stadion = 184,3 m).
– Genau zu dem Zeitpunkt, an dem die Sonne senkrecht über Syene steht, wird in Alexandria aus der Länge eines senkrecht stehenden Stabes und seiner Schattenlänge ermittelt, daß die Sonnenstrahlen mit dem Stab einen Winkel von 7,2° bilden.
a) Erläutere anhand des (nicht maßstäblichen) Bildes B 86, wie man daraus den Erdumfang U bestimmen kann!
b) Berechne den von ERATOSTHENES ermittelten Wert!
c) Ermittle den absoluten und den relativen Fehler dieser Messung!

6.* Eine Kugel mit der Masse $m = 120$ kg rollt auf einer geneigten Ebene (↗ Bild B 87), die folgende Abmessungen hat: $l = 184$ cm, $h = 43$ cm, $s = 189$ cm. Berechne die Normalkraft F_N und die Hangabtriebskraft F_H! (L)
Hinweis: Untersuche die im Bild B 87 auftretenden Dreiecke auf Ähnlichkeit! Die Gewichtskraft F_G ergibt sich aus der Masse (1 kg ≙ 10 N).

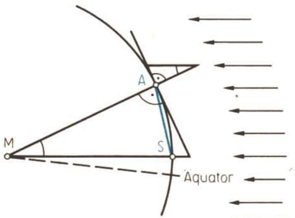


Bild B 86

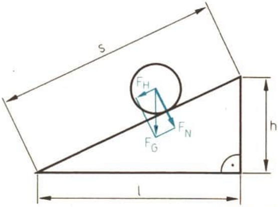


Bild B 87

Zusammenfassung

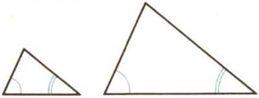
Ähnlichkeitsabbildung nennt man jede Nacheinanderausführung einer zentrischen Streckung (Z; k) und einer Bewegung; k heißt der **Ähnlichkeitsfaktor**.
Zwei Figuren F_1 und F_2 heißen **ähnlich** zueinander ($F_1 \sim F_2$), wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.

Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen

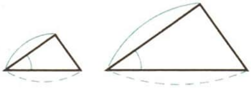
Original	Bild
Gerade $g = AB$	Gerade $g' = A'B'$
Strecke $\overline{AB}$	Strecke $\overline{A'B'}$, $\quad \overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$
Winkel α	Winkel α', $\alpha' = \alpha$
Geraden g und h, $g \parallel h$	Geraden g' und h', $g' \parallel h'$
Geraden g und h, $g \perp h$	Geraden g' und h', $g' \perp h'$
n-Eck F	n-Eck F'
Kreis um M mit Radius r	Kreis um M' mit Radius $r' = k \cdot r$
Ebene Figur F mit Umfang u_F und Flächeninhalt A_F	Ebene Figur F' mit Umfang $u_{F'} = k \cdot u_F$ und Flächeninhalt $A_{F'} = k^2 \cdot A_F$.
Körper K mit Oberflächeninhalt A_{O_K} und Volumen V_K	Körper K' mit Oberflächeninhalt $A_{O_{K'}} = k^2 \cdot A_{O_K}$ und Volumen $V_{K'} = k^3 \cdot V_K$

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich,

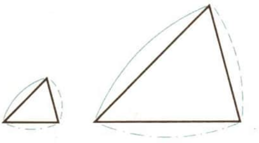
(a) wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen [Hauptähnlichkeitssatz, $(ww)_\sim$];



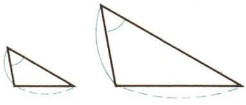
(b) wenn sie in einem Winkel übereinstimmen und die anliegenden Seiten gleiche Verhältnisse bilden $(sws)_\sim$;



(c) wenn jede Seite eines Dreiecks mit je einer Seite des anderen gleiche Verhältnisse bildet $(sss)_\sim$;



(d) wenn zwei Seiten eines Dreiecks mit je einer Seite des anderen gleiche Verhältnisse bilden und die Dreiecke in dem Winkel übereinstimmen, der der jeweils größeren der beiden Seiten gegenüberliegt $(sSW)_\sim$.



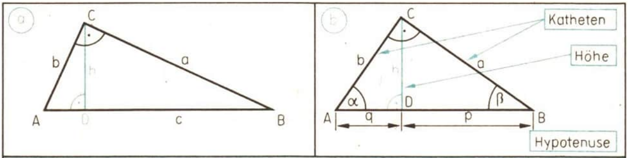
Die Satzgruppe des Pythagoras

16 Ähnlichkeit im rechtwinkligen Dreieck

● 46 Konstruiere ein Dreieck mit
a) $a = 6{,}0$ cm; $c = 8{,}0$ cm; $\gamma = 90°$, **b)** $a = 5{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $\gamma = 90°$!
Ermittle die Längen der Höhen und der dritten Seiten!

Im Auftrag B 33 (↗ S. 60) erkannten wir mit Hilfe des Hauptähnlichkeitssatzes (ww)$_{\_}$:
Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ entstehen durch die Höhe $\overline{CD}$ zwei Dreiecke, die untereinander und zum Dreieck ABC ähnlich sind (↗ Bild B 89a).
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC, ADC und DBC lassen sich Sätze ableiten. Sie ermöglichen es, für ein rechtwinkliges Dreieck nach der Länge gewisser Stücke die Länge weiterer Stücke zu berechnen.

● 47 **a)** Begründe, warum in jedem rechtwinkligen Dreieck eine Seite, die Hypotenuse, länger ist als jede der beiden anderen!
b) Erkläre, was man unter der Hypotenuse und den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks versteht (↗ Bild B 89b)!



q : Hypotenusenabschnitt zu b p : Hypotenusenabschnitt zu a

Bild B 89

Wir betrachten nun ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ (↗ Bild B 89) und stellen fest, welche Seiten der Dreiecke ABC, ADC und DBC einander entsprechen:

	△ABC	△DBC	△ADC
Hypotenuse	c	a	b
Kathete gegenüber α ($\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle DCB$)	a	p	h
Kathete gegenüber β ($\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle DCA$)	b	h	q

a, b und h kommen in jeweils zwei Dreiecken vor. Wegen der Ähnlichkeit dieser Dreiecke gelten unter anderen die Gleichungen
(1) $h : p = q : h$ (denn $\triangle DBC \sim \triangle ADC$),
(2) $a : p = c : a$ (denn $\triangle ABC \sim \triangle DBC$),
(3) $b : q = c : b$ (denn $\triangle ABC \sim \triangle ADC$).
Diese Gleichungen können bereits für Berechnungen verwendet werden.

■ 10 Für das Dreieck ABC aus dem Auftrag B 46a ist $a = h_b = 6$ cm und $c = 8$ cm. Zu berechnen sind b ($= h_a$) und h ($= h_c$).

Lösungsüberlegung: In die Gleichungen (1) bis (3) gehen a, b, c und h ein, aber auch p und q. Dabei gilt $c = p + q$. Weil hier a und c gegeben sind, kann p aus (2) berechnet werden:

$6\text{ cm} : p = 8\text{ cm} : 6\text{ cm}$

$\frac{6\text{ cm}}{p} = \frac{8\text{ cm}}{6\text{ cm}} \quad \left(= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\right)$

$6\text{ cm} = \frac{4}{3} p$

$p = \frac{3}{4} \cdot 6\text{ cm}$, also $\underline{\underline{p = 4{,}5\text{ cm}}}$

Wegen $c = p + q$ ist $q = c - p = 8\text{ cm} - 4{,}5\text{ cm}$, also $\underline{\underline{q = 3{,}5\text{ cm}}}$.

Nun können h und b aus (1) bzw. (3) berechnet werden.

● **48** Führe die Berechnung von h und b zum Beispiel B 10 selbst aus! Kontrolliere dein Ergebnis anhand der Zeichnung zum Auftrag B 46a!

Aufgaben

1. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck wie im Bild B 89a und fälle die Lote $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$ von D auf a bzw. b! Gib Hypotenusen, Katheten usw. in den entstandenen Dreiecken an!

2. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Hypotenusenabschnitte $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ bekannt. Wie lang ist die Höhe $\overline{CD}$? Berechne auch die Länge der Seiten c, a und b!

a) $\overline{AD} = 2$ cm; $\overline{DB} = 2{,}5$ cm **b)** $\overline{AD} = 3$ cm; $\overline{DB} = 3$ cm
c) $\overline{AD} = 4{,}1$ cm; $\overline{DB} = 2{,}2$ cm (L) **d)** $\overline{AD} = 2{,}8$ cm; $\overline{DB} = 3{,}7$ cm (L)

3. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Hypotenuse $\overline{AB}$ und der Hypotenusenabschnitt $\overline{AD}$ bekannt. Wie lang sind die Katheten und die Höhe?

a) $\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{AD} = 2$ cm **b)** $\overline{AB} = 6{,}1$ cm; $\overline{AD} = 4{,}7$ cm
c) $\overline{AB} = 5{,}7$ cm; $\overline{AD} = 2{,}8$ cm **d)** $\overline{AB} = 4{,}9$ cm; $\overline{AD} = 1{,}3$ cm

4. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Hypotenuse $\overline{AB}$ und die Kathete $\overline{AC}$ bekannt. Berechne die Hypotenusenabschnitte, die andere Kathete und die Höhe!

a) $\overline{AB} = 9$ cm; $\overline{AC} = 6$ cm **b)** $\overline{AB} = 8$ cm; $\overline{AC} = 5$ cm
c) $\overline{AB} = 21$ cm; $\overline{AC} = 20$ cm **d)** $\overline{AB} = 3{,}2$ cm; $\overline{AC} = 1{,}4$ cm

5.* Beweise, daß für jedes rechtwinklige Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$
a) $a^2 : b^2 = p : q$ und **b)** $hc = ab$ gilt! Welche geometrische Aussage kommt in der Gleichung b) zum Ausdruck?

17 Der Höhensatz

Für die Gleichung (1) aus der Lerneinheit B 16 können wir auch schreiben

$$\frac{h}{p} = \frac{q}{h} \quad \text{oder} \quad \boxed{h^2 = p \cdot q}$$

In der letzten Gleichung ist h^2 der Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge h, und $p \cdot q$ ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen p und q (↗ Bild B 90).

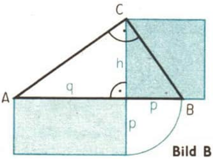


Bild B 90

▷ **18** **HÖHENSATZ:** **In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Höhe gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus den Hypotenusenabschnitten.**

Mit Hilfe des Höhensatzes kann zu jedem Rechteck *ABCD* ein Quadrat gleichen Flächeninhalts konstruiert werden (↗ Bild B 91). Man braucht dazu nur die Rechteckseiten a und b als Hypotenusenabschnitte q und p eines rechtwinkligen Dreiecks aufzufassen. Es ist dann

$$a \cdot b = q \cdot p = p \cdot q = h^2.$$

Das Quadrat über der Höhe h hat mit *ABCD* den gleichen Flächeninhalt.

● **49** **a)** Im Bild B 91 ist für das Rechteck *ABCD* die Konstruktion ausgeführt. Gib eine Konstruktionsbeschreibung an!

b) Konstruiere ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $A = 10\,\text{cm}^2$! Gehe von einem Rechteck mit diesem Flächeninhalt aus!

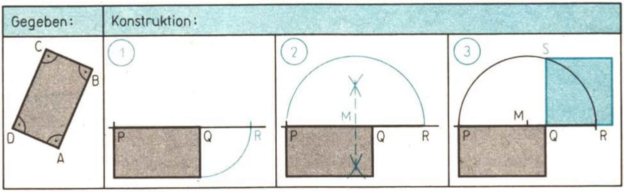


Bild B 91

Das nach Auftrag 49b konstruierte Quadrat hat eine Seitenlänge von $\sqrt{10}$ cm. Da man jede Zahl a als Produkt schreiben kann, beispielsweise als $a \cdot 1$, läßt sich mit Hilfe des Höhensatzes zu jeder positiven Zahl a

- ein Quadrat mit dem Flächeninhalt a cm² und damit
- eine Strecke der Länge $\sqrt{a}$ cm

konstruieren. Als irrationale Zahlen wie $\sqrt{10}$ noch unbekannt waren, hatten Sätze über Flächenumwandlungen große Bedeutung. Mit ihnen beschäftigte man sich intensiv vor etwa 2000 Jahren im antiken Griechenland.

Aufgaben

1. Stelle für die Höhen der Dreiecke *ACF*, *CEF* und *ACE* im Bild B 92 die Gleichungen nach dem Höhensatz auf!

2. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe 6 cm lang.
   a) Wie lang könnten die Hypotenusenabschnitte sein?
   b) Wie lang sind sie, wenn ihr Verhältnis 1 : 4 beträgt?
   c) Beantworte a) und b) für den Fall, daß die Höhe 10 cm lang ist!

3. In einem rechtwinkligen Dreieck ist $h = 3{,}5$ cm.
   a) Wie lang muß die Hypotenuse mindestens sein?
   b)* Wie lang kann die Hypotenuse höchstens sein?

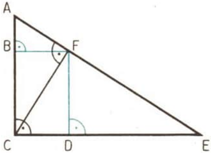


Bild B 92

4. Konstruiere zum Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ ein Quadrat gleichen Flächeninhalts! Überprüfe die Genauigkeit der Konstruktion durch Rechnung!
   a) $\overline{AB} = 1{,}5$ cm, $\overline{BC} = 3{,}7$ cm b) $\overline{AB} = 5{,}6$ cm, $\overline{BC} = 4{,}2$ cm

5. Konstruiere ein Quadrat mit dem Flächeninhalt a) 6 cm², b) 7 cm², c) 12 cm²!

6. Konstruiere eine Strecke der Länge a! Miß diese Strecke und überprüfe den gemessenen Wert mit Hilfe des Taschenrechners!
   a) $a = \sqrt{15}$ cm b) $a = \sqrt{11}$ cm c) $a = \sqrt{18}$ cm d) $a = \sqrt{24}$ cm

18 Der Kathetensatz

Für die Gleichungen (2) und (3) aus Lerneinheit B 16 können wir schreiben

$$\frac{a}{p} = \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \frac{b}{q} = \frac{c}{b}$$

oder

$$\boxed{a^2 = c \cdot p \text{ und } b^2 = c \cdot q.}$$

Es gilt demnach der folgende Satz (↗ Bild B 93):

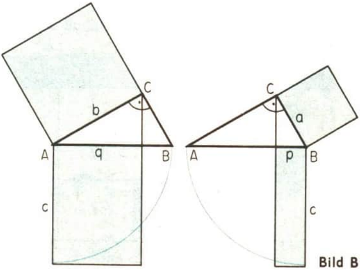


Bild B 93

▷ 19 **KATHETENSATZ:** **In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über jeder Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem (der Kathete) zugehörigen Hypotenusenabschnitt.**

Den Kathetensatz nennt man auch **Satz des EUKLID**[1]). Er kann ebenfalls bei Flächenumwandlungen angewendet werden.

■ 11 Zu dem Quadrat $ABCD$ (↗ Bild B 94a) soll ein Rechteck gleichen Flächeninhalts konstruiert werden, dessen eine Seite so lang wie $\overline{KL}$ sein soll.

Lösungsüberlegung: Nach dem Kathetensatz wird ein rechtwinkliges Dreieck gesucht, in dem eine Kathete die Länge a hat und der zugehörige Hypotenusenabschnitt die Länge l. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist dann die gesuchte zweite Rechteckseite.
Konstruktion (↗ Bild B 94b):

1. Auf einer Geraden wird eine Strecke $\overline{PQ}$ der Länge l festgelegt und auf $\overline{PQ}$ in Q die Senkrechte errichtet. Um P wird ein Kreis mit dem Radius a gezeichnet; er schneidet die Senkrechte in R.

[1]) EUKLID VON ALEXANDRIA (etwa 365 bis etwa 300 v. u. Z.); griechischer Mathematiker, der längere Zeit seines Lebens in Alexandria verbracht hat.

2. Auf PR wird in R die Senkrechte errichtet. Sie schneidet PQ in S.
3. Das Rechteck mit den Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{PT}$ ($\overline{PT} \cong \overline{PS}$) hat den gleichen Flächeninhalt wie $ABCD$.

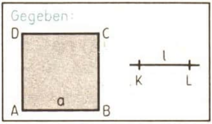


Bild B 94a

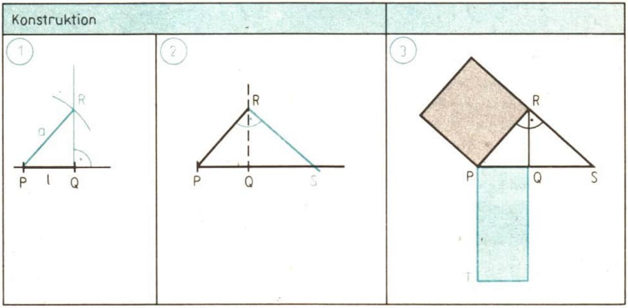


Bild B 94b

● 50 a) Kann im Falle des Beispiels B 11 die vorgegebene Rechteckseite beliebig lang sein?
b) Wie verläuft die Konstruktion, wenn die vorgegebene Rechteckseite länger als die Quadratseite ist?
c) Erläutere, wie man die Aufgabe im Beispiel B 11 mit Hilfe des Höhensatzes lösen kann!

Aufgaben

1. Stelle für die Katheten der Dreiecke ACE, ACF und CEF im Bild B 92 (↗ S. 73) die Gleichungen nach dem Kathetensatz auf!

2. Berechne die fehlenden Größen in der folgenden Tabelle unter der Voraussetzung, daß im Dreieck ABC der Winkel ACB ein Rechter ist!

	$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
a)			3 cm	4 cm		
b)		3,9 cm		5,1 cm		
c)	6,2 cm				3,5 cm	
d)	5,5 cm					4,1 cm
e)			2,1 cm			4,9 cm
f)		5 cm			5,4 cm	

3. Konstruiere zu einem gegebenen Quadrat $ABCD$ ein Rechteck $PQRS$ gleichen Flächeninhalts, für das die Länge der Seite $\overline{PQ}$ gegeben ist! Miß $\overline{QR}$ und überprüfe rechnerisch!
 a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{PQ} = 3$ cm b) $\overline{AB} = 5{,}6$ cm, $\overline{PQ} = 4{,}1$ cm
 c) $\overline{AB} = 3{,}4$ cm, $\overline{PQ} = 4{,}8$ cm

4. Löse die Aufgabe 4 der Lerneinheit 17 (↗ Seite 74) mit Hilfe des Kathetensatzes!

19 Der Satz des Pythagoras

Beim rechtwinkligen Dreieck ergeben die beiden Rechtecke aus der Hypotenuse und den Hypotenusenabschnitten zusammen das Quadrat über der Hypotenuse (↗ Bild B 95):

$$c \cdot p + c \cdot q = c(p + q) = c \cdot c = c^2.$$

Da $c \cdot p = a^2$ und $c \cdot q = b^2$ ist, erhalten wir

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2.}$$

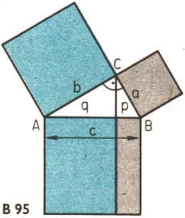


Bild B 95

Damit ist folgender Satz bewiesen:

▷ 20 **SATZ DES PYTHAGORAS[1]): Wenn ein Dreieck ABC rechtwinklig ist und c ist seine Hypotenuse, so gilt für die Seiten a, b und c des Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$.**

● 51 Gib den Satz des Pythagoras mit eigenen Worten wieder! Beginne wie beim Höhen- und Kathetensatz mit „In jedem rechtwinkligen Dreieck ...“!

Im Gegensatz zu den Beziehungen (1) bis (3) auf Seite 71 und den Sätzen B 18 und 19 stellt der Satz des Pythagoras eine direkte Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks her.

■ 12 Die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks sind 3 cm bzw. 4 cm lang. Wie lang ist seine Hypotenuse c?

Lösung: Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$c^2 = a^2 + b^2$.
Wir setzen für a und b ein und vereinfachen:
$c^2 = (3\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2 = 25\text{ cm}^2$,
$c = \sqrt{25}\text{ cm} = 5\text{ cm}$.
Ergebnis: Die Hypotenuse ist 5 cm lang.

■ 13 In einem gleichschenkligen Dreieck seien die Basis 18 cm, die Schenkel 25 cm lang. Der Flächeninhalt ist zu berechnen.

---

[1]) PYTHAGORAS (etwa 580 bis 500 v. u. Z.) war ein griechischer Philosoph und Mathematiker. In der von ihm gegründeten Schule wurden wahrscheinlich erstmalig Sätze der Geometrie und Beweise für sie zusammenhängend aufgeschrieben. Der Satz des Pythagoras wurde wohl deshalb nach ihm benannt, obwohl er schon vorher bekannt war.

Lösungsüberlegung: Der Flächeninhalt A ist nach der Formel $A = \frac{g \cdot h_g}{2}$ zu berechnen, wobei g eine Seite und h_g die zugehörige Höhe ist. Gleichschenklige Dreiecke werden durch die Höhe auf die Basis in zwei (rechtwinklige) kongruente Teildreiecke zerlegt (↗ Bild B 96). Es ist also zweckmäßig, die Basis b als „Grundseite" zu wählen. Dann läßt sich die Höhe nach dem Satz des Pythagoras aus einem der Teildreiecke ermitteln.

Allgemeine Lösung:

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2; \qquad A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

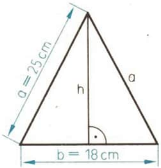


Bild B 96

Numerische Lösung:

$h = \sqrt{25^2\ \text{cm}^2 - 9^2\ \text{cm}^2} = \sqrt{625 - 81}\ \text{cm} = \sqrt{544}\ \text{cm}$

$h = 23{,}323\,808$ cm (Taschenrechner)

$A = \frac{18 \cdot 23{,}323808}{2}\ \text{cm}^2 = 209{,}914\,27\ \text{cm}^2 \approx 210\ \text{cm}^2$

Unter Beachtung der Regeln für sinnvolle Genauigkeit kann der Flächeninhalt A des Dreiecks mit 210 cm² angegeben werden.

● **52** **a)** Wie lang sind die Höhen in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 24 cm? (L)

b) Gib eine Formel für die Länge der Höhen im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a an! (L)

Aufgaben

1. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Katheten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bekannt. Berechne die Länge der Hypotenuse!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{AC}$	24 cm	2 cm	3,3 cm	2,7 cm	16 mm	6,32 dm	27,5 m
$\overline{BC}$	7 cm	2,1 cm	5,6 cm	0,9 cm	37 mm	23,8 cm	27,5 dm

2. Berechne die fehlenden Größen in der Tabelle unter der Voraussetzung, daß im Dreieck PRQ der Winkel $\sphericalangle PQR = 90°$ ist!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\overline{PQ}$	3,6 cm		2,3 cm	7,22 m	469 mm		37,1 m
$\overline{QR}$	7,7 cm	9,9 cm	1,4 cm	5,37 m		9,82 m	
$\overline{RP}$		10,1 cm			7,58 dm	10,5 m	27,5 m

3. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Hypotenuse $\overline{AB}$ und die Kathete $\overline{BC}$ bekannt. Berechne $\overline{AC}$!
   a) $\overline{AB} = 10{,}9$ cm, $\overline{BC} = 9{,}1$ cm **b)** $\overline{AB} = 0{,}85$ m, $\overline{BC} = 7{,}2$ dm
   c) $\overline{AB} = 634$ mm, $\overline{BC} = 2{,}75$ dm

4. Die Diagonalen eines Rhombus sind 42,4 cm und 35,2 cm lang. Berechne Umfang und Flächeninhalt!

5. Gegeben sei ein Kreis mit einem Radius von 10 cm.
   a) Welchen Abstand vom Mittelpunkt hat eine 14 cm lange Sehne? (L)
   b) Von einem Punkt P ist an den Kreis eine Tangente gelegt. Die Strecke von P zum Tangentenberührungspunkt ist 15 cm lang. Welchen Abstand hat P vom Mittelpunkt des Kreises? (L)

6. **a)** Die Höhen eines gleichseitigen Dreiecks sind 5,7 cm lang. Wie groß ist der Umfang des Dreiecks? (L)
   b) Leite eine Formel für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a her!

7. Berechne für die Punkte im Bild B 97 die Längen folgender Strecken: **a)** $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{DF}$, $\overline{AF}$, $\overline{CE}$ **b)*** $\overline{DE}$, $\overline{AE}$! (L)

8. Wie lang sind die Raumdiagonalen eines Würfels, wenn $a = 7$ cm ist (↗ Bild B 98)?

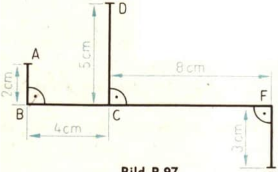


Bild B 97

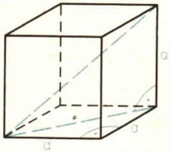


Bild B 98

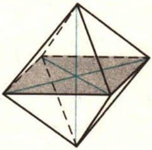


Bild B 99

9. **a)** Wie lang sind die Raumdiagonalen einer Streichholzschachtel?
   b)* Gib eine Formel an für die Länge der Raumdiagonalen eines Quaders mit den Kanten a, b und c!

10.* Ein regelmäßiges Oktaeder wird von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt (↗ Bild B 99).
   a) Berechne die Länge einer jeden der im Bild B 99 eingezeichneten Körperachsen, wenn die Körperkanten 3,0 cm lang sind! (L)
   b) Berechne den Oberflächeninhalt des Oktaeders von a)! (L)

20 Umkehrung des Satzes des Pythagoras

Rechtwinklige Dreiecke kannte man bereits um 2300 v. u. Z. Die altägyptischen Seilspanner gingen beim Abstecken eines rechten Winkels im Gelände so vor: Ein Seil wurde (etwa durch Knoten) in 12 Teilstücke gleicher Länge eingeteilt. Aus diesem Seil wurde ein Dreieck gelegt, dessen Seiten 3, 4 und 5 der 12 Teilstücke maßen. Der Winkel gegenüber der größten Seite war ein Rechter.

53 **a)** Fertige dir eine solche Knotenschnur an und lege ein derartiges Dreieck!
b) Konstruiere ein Dreieck *ABC* mit $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm! Miß den Winkel *BCA*!
c) Überlege, ob bei dem Vorgehen der Seilspanner der Satz des Pythagoras benutzt wurde!

▷ **21**

> **SATZ (Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS):**
> **Wenn für die Seiten *a*, *b* und *c* eines Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig und *c* Hypotenuse.**

Voraussetzung: $\triangle ABC$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ (↗ Bild B 100 a)
Behauptung: $\sphericalangle BCA = 90°$
Beweis: Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck $A_1B_1C_1$ mit *a* und *b* als Katheten (↗ Bild B 100 b);
seine Hypotenuse sei c_1. Dann gilt:

$$
\begin{array}{ll}
a^2 + b^2 = c_1^2 & \text{(Satz des Pythagoras, } \triangle A_1B_1C_1\text{)} \\
\underline{a^2 + b^2 = c^2} & \text{(Voraussetzung)} \\
\quad c_1^2 = c^2, \text{ also } c_1 = c; & \\
\underline{\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1} & \text{[Kongruenzsatz (sss)]} \\
\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1C_1A_1 = 90°, & \text{was zu beweisen war.}
\end{array}
$$

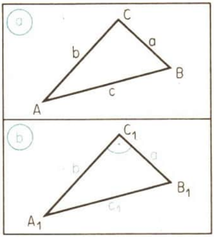


Bild B 100

Wir wissen: Will man die Umkehrung eines Satzes bilden, ist deutliches Unterscheiden von Voraussetzung und Behauptung nötig. Dazu ist es zweckmäßig, den Satz in „Wenn-so-Form" auszusprechen. Weiß man, daß eine Aussage „Wenn A, so B" und ihre Umkehrung „Wenn B, so A" gelten, dann kann man beide Sätze zu einem einzigen zusammenfassen:

„A genau dann, wenn B" oder „A dann und nur dann, wenn B".

Für den Satz des Pythagoras und seine Umkehrung heißt das z. B.

▷ **22**

> **SATZ: In einem Dreieck *ABC* gilt $\sphericalangle BCA = 90°$ genau dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist.**

54 Die Umkehrungen der Ähnlichkeitssätze sind auch wahr. Formuliere zu jedem der Sätze B 11 bis B 15 die Umkehrung und fasse jeweils zu einem neuen Satz zusammen!

Aufgaben

1. Ist das Dreieck *ABC* rechtwinklig? Nenne gegebenenfalls den rechten Winkel!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
$\overline{AB}$	17 cm	0,7 cm	12 cm	5 cm	3,6 cm	1 cm	2,6 cm	3,2 cm
$\overline{AC}$	8 cm	2,4 cm	13 cm	6 cm	2,7 cm	2,1 cm	4 cm	2,4 cm
$\overline{BC}$	15 cm	2,5 cm	5 cm	5 cm	4,5 cm	1,7 cm	4,2 cm	4 cm

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck *ABC*, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ eine Länge von 6,8 cm hat und in dem eine Kathete 3,2 cm lang ist! Welche Länge hat die zweite Kathete?

3. *ABC* sei ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Basis der Länge *b* und Schenkeln der Länge *a*. Unter welchen Bedingungen für *a* und *b* ist das Dreieck **a)** rechtwinklig, **b)** spitzwinklig, **c)** stumpfwinklig? Begründe deine Aussage!
Gilt ihre Umkehrung? (Hinweis: Vergleiche gleichschenklige Dreiecke miteinander, die ein und dieselbe Basis haben!)

4. Bilde für folgende Aussagen die Umkehrung, und prüfe, ob sie gilt! Fasse im Falle der Gültigkeit beide Aussagen zu einem Satz zusammen!
a) Wenn $2 \mid a$ und $3 \mid a$, so $6 \mid a$ (a – natürliche Zahl).
b) Wenn $c \mid a$ und $c \mid b$, so $c \mid a + b$ (a, b, c – natürliche Zahlen).
c) Wenn $c \mid a$ und $c \mid b$, so $c \mid a \cdot b$ (a, b, c – natürliche Zahlen).
d) Wenn das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm ist, so halbieren die Diagonalen einander.
e) Wenn das Viereck *ABCD* ein Rhombus ist, so stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

5. Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen heißen pythagoreische Dreiecke.
a) In Indien benutzte man zum Abstecken eines rechten Winkels ein Dreieck mit Seiten der Länge 5, 12 und 13 (Einheiten). Prüfe, ob es ein pythagoreisches Dreieck ist!
b) Gib weitere pythagoreische Dreiecke an! Beachte dabei die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke!

21 Umkehrungen von Höhen- und Kathetensatz

Wir wollen untersuchen, ob auch die Umkehrungen von Höhen- und Kathetensatz gelten.

● **55** Formuliere beide Sätze in „Wenn-so-Form"!

▷ **23** **SATZ (Umkehrung des Höhensatzes): Gegeben sei ein Dreieck, in dem eine Seite durch die zugehörige Höhe h in zwei Abschnitte p und q geteilt wird (↗ Bild B 101).**
Wenn $h^2 = p \cdot q$, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Voraussetzung: $h = \overline{CD}$ liegt im Innern von $\triangle ABC$,
$h^2 = p \cdot q \quad (p = \overline{DB},\ q = \overline{AD})$
Behauptung: $\sphericalangle BCA = 90°$
Beweis: Es ist zu prüfen, ob bei den gegebenen Voraussetzungen $\sphericalangle BCA \neq 90°$ sein kann. Angenommen, es sei $\sphericalangle BCA \neq 90°$. Die Senkrechte auf *AC* im Punkt *C* schneidet dann die Gerade *AB* im Punkt $B_1 \neq B$ (innerhalb oder außerhalb von $\overline{DB}$), und es ist $\overline{DB_1} = p_1 \neq p$.

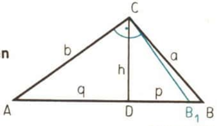


Bild B 101

Es gilt also $h^2 = p_1 \cdot q \quad (\triangle AB_1C$, Höhensatz)
und $h^2 = p \cdot q \quad$ (Voraussetzung).
Bei $p_1 \neq p$ können beide Beziehungen nicht gleichzeitig gelten. Die Annahme $\sphericalangle BCA \neq 90°$ führt also auf einen Widerspruch und ist somit falsch.

● **56** **a)** Fasse den Höhensatz und seine Umkehrung zu einem Satz zusammen!
b) In der Umkehrung des Höhensatzes wird vorausgesetzt, daß der Fußpunkt D der Höhe zwischen A und B liegt. Erläutere anhand einer Skizze, daß diese Voraussetzung notwendig ist, indem du zeigst, daß es ein stumpfwinkliges Dreieck ABC mit der Höhe $\overline{CD}$ gibt, für das ebenfalls $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$ gilt!

Der Beweis der Umkehrung des Höhensatzes wurde „indirekt" geführt. Beim indirekten Beweis nutzt man aus, daß eine Aussage (hier die Behauptung) entweder wahr oder falsch ist. Man geht nun folgendermaßen vor:
a) Man nimmt zunächst an, die Behauptung sei falsch.
b) Man zeigt, daß diese Annahme zu einem Ergebnis führt, das der Voraussetzung oder einem bereits als wahr erkannten Satz widerspricht.
Damit ist nachgewiesen, daß die Behauptung nicht falsch sein kann. Sie muß also wahr sein.
Einen indirekten Beweis führt man oftmals dann, wenn die Umkehrung eines (bereits bewiesenen) Satzes zu beweisen ist. Dabei benutzt man dann den Satz selbst. In Lerneinheit B 4 wurde bereits der Satz B 6 indirekt bewiesen.
Wie der Höhensatz, so ist auch der Kathetensatz umkehrbar.

▷ **24** **SATZ (Umkehrung des Kathetensatzes): Wenn für die Seiten a, b und $c = p + q$ eines Dreiecks (↗ Bild B 101) gilt $a^2 = c \cdot p$ (oder $b^2 = c \cdot q$), so ist das Dreieck rechtwinklig, und c ist Hypotenuse.**

● **57** **a)** Beweise den Satz B 24 (indirekt)!
b) Begründe, warum für das Dreieck im Bild B 101 mit $a^2 = c \cdot p$ stets auch $b^2 = c \cdot q$ gilt!
c) Fasse den Kathetensatz und seine Umkehrung zu einem Satz zusammen!

Aufgaben

1. Gib an, ob bei folgenden Maßangaben das Dreieck ABC mit dem Höhenfußpunkt D zwischen A und B rechtwinklig ist oder nicht!
a) $\overline{AD} = 3$ cm; $\overline{DB} = 12$ cm; $\overline{CD} = 6$ cm
b) $\overline{AC} = 12$ cm; $\overline{DB} = 18$ cm; $\overline{AD} = 6$ cm
c) $\overline{DB} = 5$ cm; $\overline{AB} = 20$ cm; $\overline{BC} = 5$ cm
d) $\overline{AD} = 3$ cm; $\overline{DB} = 5$ cm; $\overline{CD} = 4$ cm

2. Entscheide, ob $\sphericalangle PQR$ im Dreieck PRQ ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist! Der Höhenfußpunkt S liegt zwischen P und R.
a) $\overline{PS} = 9$ cm; $\overline{SR} = 16$ cm; $\overline{QS} = 12$ cm
b) $\overline{PS} = 9$ cm; $\overline{SR} = 5$ cm; $\overline{QS} = 4$ cm
c) $\overline{PR} = 11$ cm; $\overline{RS} = 4$ cm; $\overline{QR} = 7$ cm
d) $\overline{PR} = 8$ cm; $\overline{RS} = 3$ cm; $\overline{PQ} = 6$ cm

22 Anwendungen

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras läßt sich auch die Länge von Strecken ermitteln, deren Endpunkte durch ihre Koordinaten gegeben sind. Im Bild B 102 liegt die Strecke im I. Quadranten. Die Einheit betrage 1 cm.

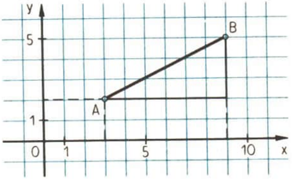


Bild B 102

58 a) Wie lang ist $\overline{AB}$ im Bild B 102?
b) Berechne $\overline{AB}$ für $A\,(12;\,8)$ und $B\,(7;\,6)$!
c) Berechne $\overline{PQ}$ für $P\,(1;\,3)$ und $Q\,(6;\,-1)$!

14 Ein Antennenmast von 103,5 m Höhe soll in $\frac{3}{4}$ seiner Höhe durch vier Seile abgespannt werden. Die Verankerungen der Abspannseile am Erdboden sind vom Fußpunkt des Mastes 51,5 m entfernt. Wie lang sind die Seile zusammen?

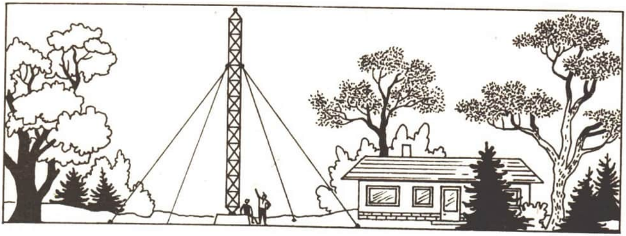


Bild B 103

Lösungsüberlegung (↗ Bild B 103)*:* Wir ermitteln zunächst die Länge a eines Abspannseiles und multiplizieren dann mit 4. Jedes Abspannseil ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Kathetenlängen $\frac{3}{4}$ der Antennenmasthöhe und 51,5 m betragen.

Gegeben: $h = \frac{3}{4} \cdot 103{,}5\ \text{m} \approx 77{,}6\ \text{m}$

$e = 51{,}5\ \text{m}$

Gesucht: $s := 4a$ (in Meter)

Allgemeine Lösung: $a^2 = h^2 + e^2$

$a = \sqrt{h^2 + e^2}$

$s = 4a = 4\sqrt{h^2 + e^2}$

Überschlag: $4\sqrt{80^2 + 50^2} = 4\sqrt{6\,400 + 2500} = 4\sqrt{8\,900}$

Wegen $90 = \sqrt{8\,100}$ gilt $s \approx 360$ m.

Ablaufplan:

77,6 [x²] [+] 51,5 [x²] [=] [√] [×] 4 [=] [372.53746]

Vergleich mit Überschlag: $360 \approx 372, \ldots$

Für die Beantwortung der Frage nach der Seillänge ist das Ergebnis noch zu runden, und zwar entsprechend der Genauigkeit der Ausgangsdaten und dem praktischen Sachverhalt.

Ergebnis: Insgesamt sind die Abspannseile rund 373 m lang.

59 a) Ermittle den Seilbedarf im Beispiel B 14, wenn für die Befestigung der Seile am Mast und für die Verankerung 3% Zuschlag zu berücksichtigen sind!
b) Die Verankerungen der vier Abspannseile sollen die Ecken eines Quadrats bilden, das einzuzäunen ist. Wie groß ist mindestens die gesamte Zaunlänge? (L)

Aufgaben

Den Aufgaben 1 bis 5 ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm zugrunde gelegt.

1.↑ Welchen Abstand haben die Punkte $A\,(5;12)$, $B\,(7;24)$, $C\,(6;-8)$, $D\,(-8;15)$, $E\,(0;15)$ und $F\,(-3;0)$ vom Koordinatenursprung?

2.↑ Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$ für folgende Punkte A und B!
a) $A\,(1;2)$, $B\,(10;-3)$ **b)** $A\,(-3;-2)$, $B\,(2;5)$ **c)** $A\,(7{,}2;9{,}3)$, $B\,(6{,}4;3{,}7)$
d) $A\,(1{,}8;5{,}4)$, $B\,(8{,}5;2{,}9)$ **e)** $A\,(2{,}5;4{,}6)$, $B\,(-1{,}4;8{,}2)$ **f)** $A\,(5{,}8;3{,}1)$, $B\,(4{,}2;-2{,}7)$
g) $A\,(-10{,}9;6{,}5)$, $B\,(-7{,}4;-3{,}8)$ (L) **h)** $A\,(-1{,}6;-5{,}0)$, $B\,(11{,}2;-0{,}7)$ (L)

3.↑ Berechne den Umfang des Vierecks $ABCD$ mit den Eckpunkten $A\,(-7;2)$, $B\,(5;-2)$, $C\,(8;4)$ und $D\,(-4;8)$! (L)

4.↑ **a)** Zeichne ein Koordinatensystem und trage folgende Punkte ein: $A\,(5;0)$, $B\,(3;4)$, $C\,(0;5)$, $D\,(-3;4)$, $E\,(-4;-3)$ und $F\,(0;-5)$!
b) Berechne ihren Abstand vom Koordinatenursprung! Auf welcher Figur liegen diese Punkte?
c) Nenne weitere Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die mit den Punkten von a) auf der gleichen Figur liegen!

5.*↑ In einer Ebene mit Koordinatensystem sei K ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius r.
a) Welche Beziehung gilt zwischen den Koordinaten der Punkte $P\,(x;y)$ des Kreises und seinem Radius r? (L)
b) Formuliere dein Ergebnis in der „Wenn-so-Form"!
c) Gilt die Umkehrung deiner Aussage? Begründe! Fasse zusammen!
d) Gib eine Bedingung an, der die Koordinaten der Punkte der durch K bestimmten Kreisfläche genügen! (L)

6. Zum Schleifen eines Spiralbohrers von 20 mm Durchmesser soll eine Lehre angefertigt werden. Berechne h für die im Bild B 104 eingetragenen Maße!

7. Jürgen läßt einen Drachen steigen, so hoch es der 87 m lange Bindfaden zuläßt. Michael sieht den Drachen senkrecht über sich. Welche Höhe hat der Drachen erreicht, wenn Michael von Jürgen 60 Schritte von je 80 cm Länge entfernt steht? (Der Durchhang der Drachenschnur wird vernachlässigt.)

8. Wie groß sind bei dem Dachbinder im Bild B 105 die Firsthöhe und die Sparrenlängen, wenn $a = b = c = 1{,}5$ m gilt? (L)

9. Ermittle die Länge des Obergurts, der Diagonalen und der Senkrechten des Dachbinders im Bild B 106! (Der Untergurt wird in 6 gleich lange Stücke unterteilt.)

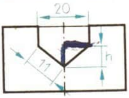


Bild B 104

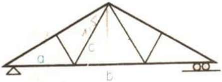


Bild B 105

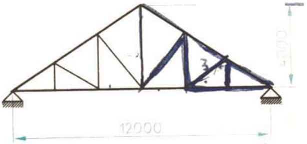


Bild B 106

10.* Die Holzbrücke im Bild B 107 ist eine sogenannte Sprengwerksbrücke. Wie lang müssen etwa die blau gekennzeichneten Balken sein, wenn die Länge $s = 7a = 14{,}5$ m beträgt und $h = 2{,}8$ m ist? (L)

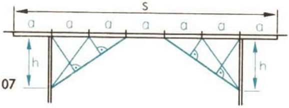


Bild B 107

11.* In einer mindestens 2 000 Jahre alten chinesischen Arithmetik findet sich folgende Aufgabe:
Im Mittelpunkt eines quadratischen Teiches von 10 Fuß Seitenlänge wächst ein Schilf, das einen Fuß über der Wasserfläche emporsteht. Wenn man es ans Ufer nach der Mitte einer Seite hin zieht, reicht es gerade bis an den Rand des Teiches. Wie tief ist das Wasser an der Stelle, wo die Pflanze wächst? (L)

Zusammenfassung

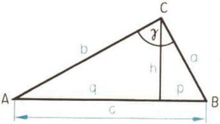


Bild B 108

$c = p + q$

Satz des Pythagoras Voraussetzung: $\gamma = 90°$ Behauptung: $c^2 = a^2 + b^2$	**Umkehrung des Satzes des Pythagoras** Voraussetzung: $c^2 = a^2 + b^2$ Behauptung: $\gamma = 90°$
Höhensatz Voraussetzung: $\gamma = 90°$ Behauptung: $h^2 = p \cdot q$	**Umkehrung des Höhensatzes** Voraussetzung: $h^2 = p \cdot q$ Behauptung: $\gamma = 90°$
Kathetensatz Voraussetzung: $\gamma = 90°$ Behauptung: $a^2 = c \cdot p$ $(b^2 = c \cdot q)$	**Umkehrung des Kathetensatzes** Voraussetzung: $a^2 = c \cdot p$ $(b^2 = c \cdot q)$ Behauptung: $\gamma = 90°$

Komplexe Übungen

1. In einem Würfel der Kantenlänge $a = 5{,}5$ cm entstanden durch Schnitte mit Ebenen das Rechteck $ACGE$ und das Dreieck ACF (Bild B 109). Welchen Flächeninhalt hat jede dieser Figuren?

2. Ein Würfel soll auf verschiedene Arten durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt werden. Können dabei folgende Schnittfiguren entstehen?

a) gleichseitiges Dreieck ja
b) rechtwinkliges Dreieck nein
c) ungleichschenkliges Dreieck
d) Quadrat
e) Rechteck (nicht quadratisch)
f) Sechseck

Welche möglichen Schnittfiguren sind in der Aufzählung nicht enthalten? Stütze dich bei deinen Überlegungen auf eine Schrägbilddarstellung eines Würfels!

3. Untersuche, bei welchen der nachstehend angegebenen Maße sich der im Bild B 110 dargestellte Körper durch Verlängerung der Seitenkanten zu einer Pyramide ergänzen läßt, es sich also um einen Pyramidenstumpf handelt!

a) $a = 40$ cm, $b = 30$ cm, $a_0 = 20$ cm, $b_0 = 15$ cm
b) $a = 45$ cm, $b = 33$ cm, $a_0 = 30$ cm, $b_0 = 20$ cm
c) $a = 60$ cm, $b = 42$ cm, $a_0 = 40$ cm, $b_0 = 28$ cm

4. **a)** Beweise, daß zwei Rechtecke nicht stets zueinander ähnlich sind!
b) Zerlege ein Rechteck mit den Seiten $a = 2$ cm und $b = 5$ cm in zwei zueinander ähnliche, nicht kongruente Teilrechtecke!

5. Wird ein Körper nur von regelmäßigen, einander kongruenten n-Ecken begrenzt, so nennt man ihn ein **regelmäßiges Vielflach**. Bis auf Ähnlichkeit gibt es nur fünf verschiedene Körper dieser Art, die sogenannten Platonischen Körper (↗ Bilder auf der dritten Umschlagseite). Sie werden nur von gleichseitigen Dreiecken, Vierecken oder Fünfecken berandet. Zeichne auf festem Papier für jeden dieser Körper ein Netz! Wähle als Kantenlänge 4 cm! Versieh die Netze mit geeigneten Klebefalzen, schneide sie aus und fertige daraus Modelle der Platonischen Körper!

6. Zeichne einen Würfel mit der Kantenlänge $a = 5$ cm im Schrägbild $\left(\alpha = 45°;\ q = \frac{1}{2}\right)$! Markiere die Mittelpunkte der den Würfel begrenzenden Quadrate! Zeichne den Körper, der diese Punkte als Eckpunkte hat! Welcher Art n-Ecke begrenzen ihn und wie viele? Benenne den Körper!

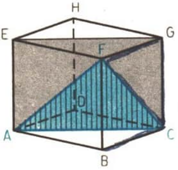


Bild B 109

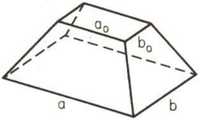


Bild B 110

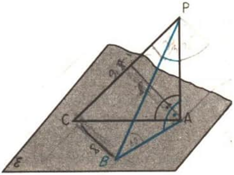


Bild B 111

7. In der Figur im Bild B 111 liegt das Dreieck ABC in der Ebene ε, und PA steht auf dieser Ebene senkrecht. Es ist $\overline{PB} = \overline{BC} = 8$ cm, $\overline{PC} = 9{,}8$ cm und $\sphericalangle BPA = 30°$. Ermittle für möglichst viele der anderen Strecken und Winkel deren Länge bzw. Größe! (Hinweis: Ergänze das Dreieck BAP zu einem gleichschenkligen Dreieck!)

8.* Auf die Seitenflächen eines Würfels werden Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen zu den Seitenflächen des Würfels kongruent sind und deren Seitenflächen mit der Grundfläche einen Winkel von 45° bilden. Wie viele Seitenflächen hat der so entstandene Körper? Welche Form haben diese?

9. Zwei gleich lange und zueinander senkrechte Sehnen eines Kreises werden durch ihren Schnittpunkt S jeweils in Strecken der Länge 10 mm bzw. 16 mm geteilt. Berechne den Radius des Kreises! (L)

10. Erläutere, warum die Sechsecke *ABCDEF* und *GHIKLM* im Bild B 112 einander nicht ähnlich sind, obwohl sich zu jedem Winkel in dem einen Sechseck ein gleich großer in dem anderen angeben läßt und sich auch die Seiten so einander zuordnen lassen, daß die Seitenverhältnisse gleich sind!

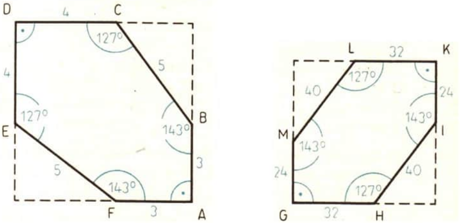


Bild B 112

11. Zwei Kreise haben die Radien $r_1 = 2$ cm und $r_2 = 6$ cm. Der Abstand ihrer Mittelpunkte ist $\overline{M_1M_2} = 10$ cm.

a) An die Kreise ist eine gemeinsame äußere Tangente gelegt (↗ Bild B 113; Gerade g_1). Wie lang ist der Abstand $\overline{AB}$ der Berührungspunkte der Tangente mit den Kreisen? (L)

b) Löse die Aufgabe für die gemeinsame innere Tangente g_2! (L)

12. Beweise: Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind einander kongruent!

13. Durch einen Punkt *S* außerhalb eines Kreises *k* seien zwei Geraden gezeichnet, die *k* in den Punkten *A* und *B* bzw. *C* und *D* schneiden (↗ Bild B 114).

a) Beweise die Ähnlichkeit der Dreiecke *SAC* und *SDB*!

b) Zeige, daß stets gilt $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SD} \cdot \overline{SC}$!

c)* Beweise a) und b) für den Fall, daß der Schnittpunkt *S* der Sekanten innerhalb von *k* liegt (↗ Bild B 115)!

14. **a)** Welche Sichtweite auf die Erde hat man von einem Flugzeug aus, das in 4 000 m Höhe fliegt (Erdradius: 6 370 km)? Löse die Aufgabe mit Hilfe des Satzes des Pythagoras! (L)

b) Welche Sichtweite auf die Erde hat man von der Spitze des Fernsehturmes in Berlin (Höhe 365 m) bzw. in Moskau (Höhe 533 m)?

c) Wie hoch muß ein Turm sein, von dem aus man eine Aussichtsweite von 20 km hat?

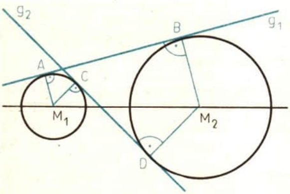


Bild B 113

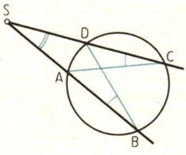


Bild B 114

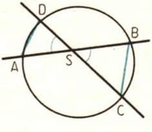


Bild B 115

15. Können in einem rechtwinkligen Dreieck die Längen der drei Seiten gleichzeitig **a)** geradzahlig, **b)** ungeradzahlig sein? Begründe!

16. Im Dreieck ABC sei $a = 38$ cm, $b = 16$ cm, $\gamma = 90°$. Berechne den Flächeninhalt der blau gezeichneten Rechtecke I und II **a)** im Bild B 116, **b)** im Bild B 117, **c)** im Bild B 118!

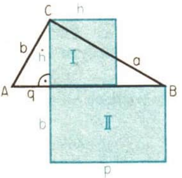


Bild B 116

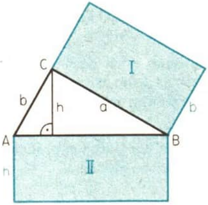


Bild B 117

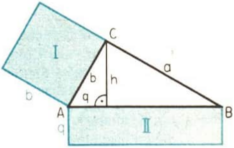


Bild B 118

17. In zwei einander ähnlichen Vielecken sind die kürzesten Seiten 35 cm bzw. 21 cm lang, und die Differenz ihrer Umfänge beträgt 40 cm. Welchen Umfang haben die Vielecke?

18. Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke betragen $A_1 = 6{,}4\ \text{cm}^2$ und $A_2 = 2{,}4\ \text{cm}^2$. Im ersten Dreieck hat die Seite a_1 eine Länge von 4 cm. Berechne die zu a gehörende Höhe h_1 dieses Dreiecks sowie die entsprechenden Stücke a_2 und h_2 des zweiten Dreiecks! Können die Dreiecke nach diesen Angaben eindeutig konstruiert werden?

19.* Konstruiere zu folgenden Figuren jeweils ein flächengleiches Rechteck $PQRS$! Eine Seite dieses Rechtecks, z. B. $\overline{PQ}$, soll die angegebene Länge haben!

Figur	$\overline{PQ}$
a) rechtwinkliges Dreieck ABC, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 90°$	4 cm (3 cm)
b) Quadrat $ABCD$, $a = 2$ cm	8 cm
c) Parallelogramm $ABCD$, $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 30°$	5 cm (4 cm; 2 cm)
d) Trapez $ABCD$, $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 1$ cm, $\alpha = 30°$	5 cm (2,5 cm)

20. Konstruiere ein Dreieck mit den angegebenen Maßen!
a) $c = 4{,}0$ cm; $\beta = 60°$; $\gamma = 80°$ 40
b) $c = 6{,}0$ cm; $\alpha = 55°$; $h_c = 4{,}0$ cm
c) $a = 5{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $s_c = 3{,}0$ cm
d) $a : b : c = 7 : 4 : 5$; $w_{\gamma} = 5$ cm

21. Auf einer Karte (Maßstab 1 : 25 000) liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden. Der Karte können die folgenden Größen entnommen werden. Kann C von A aus eingesehen werden?

	A	B	C	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$
a)	625 m	570 m	550 m	32 cm	16 cm
b)	750 m	720 m	710 m	32 cm	8 cm
c)	1 225 m	1 170 m	1 140 m	20,4 cm	18,8 cm
d)	775 m	660 m	625 m	18,8 cm	5,2 cm

22. Ein Weg, der für eine kartographische Aufnahme vermessen wurde, steigt auf 330,0 m um 46,0 m gleichmäßig an. In die Karte wird seine Projektion auf die Horizontalebene eingetragen. Wie lang erscheint sie auf einer Karte im Maßstab 1 : 40 000?

23. Auf einer Karte im Maßstab 1 : 25 000 erscheint die Projektion eines Skilifts, der einen Höhenunterschied von 120 m überwindet, 12 mm lang.
a) Wie lang ist der Skilift etwa in Wirklichkeit?
b) Ist der in a) errechnete Wert ein Mindest-, Höchst- oder Mittelwert?

24. Die Eisenbahnstrecke von Dresden nach Karl-Marx-Stadt steigt zwischen Tharandt und Klingenberg-Colmnitz bei 11,6 km Streckenlänge um 228 m an. Ermittle die durchschnittliche Steigung! Vergleiche mit der für Hauptbahnen zulässigen Steigung von maximal 2,5%!

25. Ein Kraftwerk wird von einem See her durch eine sechsfache Rohrleitung gespeist, für deren Hauptpunkte folgende Angaben gelten:

	Mündung am Turbinenhaus	Knickpunkt 1	Knickpunkt 2	Knickpunkt 3	Anfang am Wasserschloß
Waagerechte Entfernung vom Turbinenhaus	0	127,5 m	171,0 m	235,5 m	354,0 m
Höhe über NN	603,0 m	618,0 m	649,5 m	711,0 m	783,0 m

a) Zeichne einen Längsschnitt durch das Leitungssystem im Maßstab 1 : 5 000 mit der Höhenlinie 600 m über NN als Bezugslinie!
b) Berechne die Längen der Teilstücke der Leitung, die Gesamtlänge der Leitung und die Länge der Luftlinie vom Anfang bis zur Mündung!

26. Für zwei durch einen Berg voneinander getrennte Punkte A und B ist die Entfernung (Luftlinie) zu ermitteln. Das Bild B 119 zeigt, wie man vorgehen kann, wenn A und B von einem Punkt C aus gesehen und die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ vermessen werden können:
– Man legt auf $\overline{AC}$ einen Punkt D fest mit $\overline{AD} : \overline{DC} = m : n$.
– Man sucht auf $\overline{BC}$ den Punkt E, der $\overline{BC}$ im Verhältnis $m : n$ teilt.
– Man vermißt $\overline{DE}$ und berechnet $\overline{AB}$.
a) Ermittle $\overline{AB}$ aus $\overline{AC} = 4\,200$ m, $\overline{BC} = 5\,040$ m, $\overline{DE} = 1\,900$ m und $m : n = 9 : 5$!
b)* Auf der Strecke $\overline{AB}$ soll von A in Richtung auf B ein Tunnel durch den Berg getrieben werden. Als Visierpunkt benötigt man auf $\overline{AB}$ einen Punkt G, der vor dem Berg liegt. Wie kann man ihn mit Hilfe eines Punktes F von $\overline{DE}$ festlegen? Wo liegt er für $\overline{CF} = 1\,350$ m?

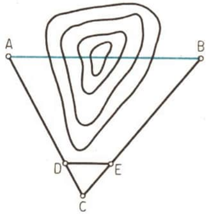


Bild B 119

27. Auf einem Lagerplatz sind Rohre gestapelt. Der äußere Durchmesser der Rohre beträgt 1 225 mm.
a) Wie hoch ist der Stapel, wenn zwei (drei) Lagen übereinander liegen?
b) Wie viele Rohre faßt der Lagerplatz, wenn in der unteren Lage Platz ist für 7 Rohre hintereinander und 15 Rohre nebeneinander?

C Lineare Funktionen

Der Funktionsbegriff

1 Zuordnungen; Funktionen

Im täglichen Leben, in der Mathematik, in anderen Unterrichtsfächern und in der Technik kommen oft Zuordnungen vor. Wir betrachten dazu einige Beispiele:

Zuordnung 1: In Berlin bezahlt man für eine Fahrt mit einem Taxi 0,80 M pro Kilometer und eine Grundgebühr von 0,50 M. Der Fahrpreis hängt also von der Länge des Weges ab. Fahren wir z. B. 4 km, so haben wir wegen

$$4 \cdot 0{,}80 + 0{,}50 = 3{,}70$$

als Fahrpreis 3,70 M zu bezahlen. Die nebenstehende Tabelle gibt einige Weglängen mit den zugeordneten Fahrpreisen an.

Weglänge in km	Fahrpreis in M
4	3,70
10	8,50
1	1,30
4,5	4,10
7	x
3,5	y
z	5,30

● 1 Ermittle x, y und z in der Tabelle entsprechend der Zuordnung 1!

Zuordnung 2: Wir wissen aus Klasse 7, daß der Umfang u eines Kreises von dessen Durchmesser d abhängt. Er kann nach der Formel $u = \pi \cdot d$ berechnet werden. Jedem Durchmesser ist ein Umfang zugeordnet. Für diese Zuordnung finden wir im *Tafelwerk* auf den Seiten 10/11 eine Tabelle.

● 2 Lies aus der Tabelle im *Tafelwerk*, Seiten 10/11, zu folgenden Durchmessern d den zugeordneten Kreisumfang ab!
a) $d = 1{,}6$ cm **b)** $d = 6{,}73$ cm **c)** $d = 55$ cm **d)** $d = 0{,}9$ cm

Zuordnung 3: Wir runden natürliche Zahlen auf Vielfache von 10. (Vgl. nebenstehende Tabelle!)

Zahl	gerundete Zahl
17	20
21	20
25	30
30	30

● 3 Fertige in deinem Heft eine Tabelle wie bei Zuordnung 3 an! Ordne den Zahlen 91; 124; 119; 121; 86; 94; 85 und 90 die entsprechende gerundete Zahl zu!

Zuordnung 4: Die nebenstehende Tabelle gibt einige Zahlen *a* und ihnen zugeordnete Teiler an: So wird der natürlichen Zahl 6 z. B. die Zahl 2 zugeordnet, ihr wird aber auch die Zahl 3 zugeordnet.

a	Teiler von *a*
6	2
6	3
4	1
4	2
1	1
8	4
8	8

Zuordnung 5: Gegeben ist eine Gerade *g* in einer Ebene. Wir ordnen jedem Punkt *P* der Ebene dessen Spiegelbild *P'* bezüglich der Geraden *g* zu (↗ Bild C 1).

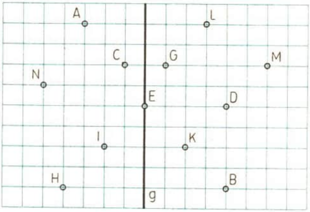


Bild C1

● 4

Spiegelung an *g*							
	Originalpunkt	*A*					
	Bildpunkt	*L*					

Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie für die Originalpunkte *B*, *C*, *I*, *E*, *K*!

Wir vergleichen die fünf Zuordnungen.
Bei der Zuordnung 1 ist jeder Weglänge **genau ein** Fahrpreis zugeordnet. Beim Kreis ist jedem Durchmesser **genau ein** Umfang zugeordnet (Zuordnung 2). Ebenso ist jeder natürlichen Zahl beim Runden auf Vielfache von 10 **genau eine** Zahl zugeordnet (Zuordnung 3). Bei einer Spiegelung an einer Geraden ist jedem Punkt der Ebene **genau ein** Punkt als Spiegelbild zugeordnet (Zuordnung 5). Bei der Zuordnung 4 dagegen kann z. B. der Zahl 6 der Teiler 2, aber auch der Teiler 3 zugeordnet werden. Es gibt also mehrere Möglichkeiten.
Für Zuordnungen in der Geometrie, wie Spiegelung, Drehung und Verschiebung, haben wir bereits das Wort „Abbildung" verwendet. Wir werden nun jede Zuordnung auch als Abbildung bezeichnen.
Abbildungen, bei denen jedem Original (das ist das Objekt, von dem man ausgeht) stets **genau ein** Bild zugeordnet wird, heißen **eindeutige** Abbildungen. Die Zuordnung 4 ist keine eindeutige Abbildung.

Für die eindeutigen Abbildungen hat man in der Mathematik eine besondere Bezeichnung:

▶ 1 **DEFINITION: Eindeutige Abbildungen heißen *Funktionen*.**

Die genannten Bewegungen, aber auch zentrische Streckungen und Projektionen sind eindeutige Abbildungen, also Funktionen.

Aufgaben

1. Fertige für jede der folgenden Abbildungen eine Tabelle an! Trage jeweils in die Tabelle die angegebenen Eingangswerte und die zugeordneten Werte ein!
   a) Die Zahlen $b = 6{,}2$ ($-1{,}9$; 4; 0; $-\pi$) seien die Eingangswerte. Ordne jeder Zahl b ihren absoluten Betrag zu!
   b) Ordne den Zahlen 6; 1,5; −2; 0,5; −3,5; 3,5 jeweils die entgegengesetzte Zahl zu!
   c) Ordne jeder natürlichen Zahl a eine Primzahl zu, die Teiler von a ist! $a = 18$ (24; 56; 27; 5; 39). Gib alle Möglichkeiten an! (L)
   (Hinweis: Verfahre wie bei Zuordnung 4 auf Seite 90!)
   d) Bei den polizeilichen Kennzeichen von Kraftfahrzeugen ist aus dem ersten Buchstaben der Bezirk erkennbar, in dem das Fahrzeug zugelassen wurde. Wir wählen die Buchstaben A, C, D, F, L, N, P. Ordne jedem dieser Buchstaben den entsprechenden Bezirk zu!
   e) Ordne den chemischen Verbindungen Wasser, Schwefelsäure, Kohlendioxid, Salzsäure, Kochsalz, Kalziumsulfat (Gips) jeweils ein chemisches Element zu, das an der Verbindung beteiligt ist! Gib alle Möglichkeiten an!
   f)* Das produzierte Nationaleinkommen nahm in der DDR von 1977 bis 1984 jährlich um etwa 4% zu. Im Jahre 1977 betrug es rund 166 Milliarden M. Ordne den Jahren 1977 bis 1984 jeweils das produzierte Nationaleinkommen zu! (L)

2. **a)** Welche der in Aufgabe 1 genannten Abbildungen sind Funktionen? Begründe!
   b) Wie erkennt man an einer Tabelle, ob die dargestellte Abbildung eindeutig ist?

3. Entscheide, ob die folgenden Zuordnungen Funktionen sind!
   a) Zu jedem Luftdruck gehört eine Siedetemperatur des Wassers.
   b) Zu jeder Geschwindigkeit eines PKW gehört eine Leistung des Motors.

4. Nenne selbst zwei Beispiele für Funktionen!

5. Nenne ein Beispiel für eine Abbildung, die keine Funktion ist!

2 Funktionen als Mengen geordneter Paare

In den folgenden Lerneinheiten dieses Kapitels werden wir uns vor allem mit solchen Funktionen beschäftigen, die Zahlen wieder Zahlen zuordnen.

Zuordnung 6: Wir ordnen jeder natürlichen Zahl ihr Zweifaches zu. Diese Zuordnung ist eine Funktion. Wir können für diese Funktion eine Tabelle anfertigen. In der Tabelle stehen jeweils zwei Zahlen nebeneinander; sie bilden ein Zahlenpaar. Der links stehenden Zahl wird die rechts stehende Zahl zugeordnet. Es ist also für jedes Zahlenpaar wichtig, welche Zahl links und welche rechts steht. Es sind **geordnete Zahlenpaare**.

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Die Funktion, die jeder natürlichen Zahl ihr Zweifaches zuordnet, besteht aus der Menge der geordneten Zahlenpaare

$$(0; 0), (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8), \ldots$$

Wir können nicht alle geordneten Zahlenpaare aufschreiben, die zu dieser Funktion gehören.

● 5 a) Welche der folgenden geordneten Zahlenpaare gehören zu der oben genannten Funktion?
(7; 14), (100; 200), (24; 12), (56; 102), (1,5; 3).

b) Ermittle x bzw. y, so daß die folgenden Zahlenpaare zu der oben genannten Funktion gehören!
(12; y), (x; 96), (x; 3 240), (142; y), (0,2; y).

Jede Funktion ist eine Menge geordneter Paare. Die Menge der Zahlen, die jeweils an der ersten Stelle der geordneten Paare vorkommen, heißt der **Definitionsbereich der Funktion.** Die Menge der Zahlen, die jeweils an der zweiten Stelle der geordneten Paare vorkommen, heißt der **Wertebereich der Funktion.**
Der Definitionsbereich der Funktion, die oben genannt ist (Zuordnung 6), ist die Menge der natürlichen Zahlen. Der Wertebereich dieser Funktion ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen. So gehören zum Wertebereich dieser Funktion z. B. die Zahlen 0, 2, 4, 6, aber zum Beispiel nicht die Zahl 5.

Um eine Funktion anzugeben, haben wir mehrere Möglichkeiten:

Möglichkeit	Beispiel
Wortvorschrift	Jeder natürlichen Zahl wird ihr Zweifaches zugeordnet.
Menge geordneter Paare (häufig als Wertetabelle geschrieben)	$\{(0; 0), (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8), \ldots\}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \hline y & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots \end{array}$ In beiden Fällen können nur endlich viele geordnete Paare angegeben werden.
Gleichung	$y = 2x,\ x \in N$ (Mit $x \in N$ wird der Definitionsbereich der Funktion angegeben. Man sagt auch: Es wird damit ausgedrückt, welche Zahlen für x eingesetzt werden sollen.)

In der nächsten Lerneinheit lernen wir eine weitere Möglichkeit der Darstellung von Funktionen kennen.
Ordnet eine Funktion einer Zahl x die Zahl y zu, so schreibt man auch
$y = f(x)$ (lies: y gleich f von x).
Die Zahl x nennt man **Argument**. Die Zahl $f(x)$ nennt man den **Funktionswert**, der der Zahl x zugeordnet wird.
Statt *die Funktion mit der Gleichung* $y = f(x) = 2x$, $x \in N$, schreibt man kürzer *die Funktion* $f(x) = 2x$, $x \in N$, oder auch *die Funktion* $y = 2x$, $x \in N$.
Für die Funktion $f(x) = 2x$, $x \in N$, ist z. B. $f(4) = 8$, $f(5) = 10$, $f(0) = 0$. Dagegen ist $f(1{,}5)$ nicht erklärt, weil 1,5 nicht zum Definitionsbereich dieser Funktion gehört, und $f(x) = 7$ ist nicht lösbar, weil 7 nicht zum Wertebereich dieser Funktion gehört.

Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 3x + 4,\ x \in R$.
   a) Fertige eine Wertetabelle an! Wähle aus dem Definitionsbereich die Argumente $2;\ 5;\ 1;\ -2;\ -3;\ 0$!
   b) Ermittle $f(2)$, $f(4)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2) + f(3)$, $f(0) + f(6)$!
   c) Gib $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ an!

2. Die Funktion $y = f(x)$ ordne jeder Zahl x ihres Definitionsbereiches die zu x reziproke Zahl zu.
   a) Gib eine Gleichung für die Funktion an!
   b) Gib den größtmöglichen Definitionsbereich dieser Funktion an!
   c) Gibt es eine Zahl, die nicht zum Wertebereich dieser Funktion gehört?
   d) Nenne jeweils den Funktionswert $f(x)$ für $x = 5$ $\left(2;\ -5;\ \frac{1}{2};\ -2{,}5;\ 1;\ -0{,}25;\ \frac{3}{5};\ -\frac{13}{17}\right)$! Rechne im Kopf!

3. Ermittle unter Verwendung eines Taschenrechners Funktionswerte für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$!
   a) $f(2)$, $f(-7)$, $f(0{,}3)$, $f(0{,}19)$, $f(-0{,}002)$
   b) $x = 1{,}8$; $x = 0{,}67$; $x = -602$; $x = 5\,327$; $x = 0{,}002\,5$ (L)
   c) Wende auf verschiedene Eingabewerte zweimal hintereinander die Taste $\frac{1}{x}$ an! Was stellst du fest?

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2^x,\ x \in N,\ x > 0$.
   a) Fertige eine Wertetabelle an! Rechne im Kopf! $(x = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 10)$
   b) Entscheide, ob die folgenden Paare zu dieser Funktion gehören! $(2; 4)$, $(3; 8)$, $(5; 24)$, $(7; 128)$, $(256; 8)$, $(9; 1\,024)$
   c) Ermittle $f(2)$, $f(7)$, $f(4)$, $f(10)$!
   d) Ermittle jeweils x!
   $f(x) = 4$, $f(x) = 1\,024$, $f(x) = 32$, $f(x) = 256$, $f(x) = 10$ (L)

5. Eine Funktion ist gegeben durch $y = \sqrt{x},\ x \geqq 0$.
   a) Fertige eine Wertetabelle an! Verwende deinen Taschenrechner! $x = 0$ $(1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 1{,}5;\ 0{,}25)$
   b) Gib die Funktion durch eine Wortvorschrift an! (L)
   c) Warum können die negativen Zahlen nicht zum Definitionsbereich gehören? (L)

3 Graphische Darstellung von Funktionen im Koordinatensystem

Wir wissen bereits: Ein Koordinatensystem besteht aus zwei senkrecht aufeinanderstehenden Zahlengeraden, den Koordinatenachsen. Man legt die beiden Zahlengeraden im allgemeinen so, daß sie einander in den Nullpunkten schneiden. Dann nennt man den Schnittpunkt **Koordinatenursprung.**
Durch die Zahlengeraden wird die Ebene in vier Teile, die **Quadranten,** zerlegt (↗ Bild C 2). Mit Hilfe eines Koordinatensystems kann man jedem Punkt der Ebene genau ein geordnetes Zahlenpaar zuordnen. Die erste Koordinate eines Punktes nennt man **Abszisse** des Punktes, die zweite Koordinate **Ordinate** des Punktes. Entsprechend heißen die Koordinatenachsen auch **Abszissenachse** (x-Achse) bzw. **Ordinatenachse** (y-Achse).

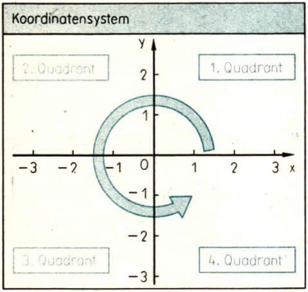


Bild C 2

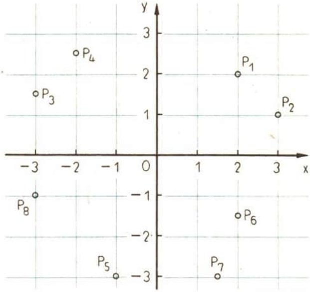


Bild C 3

6 **a)** Lies die Koordinaten der Punkte P_1 bis P_8 im Bild C 3 ab!
b) Zeichne ein Koordinatensystem und trage folgende Punkte ein: $P_1(4; 2)$, $P_2(-1; -1)$, $P_3(-4; 2)$, $P_4(1; -4)$, $P_5(0; -2)$, $P_6(3; 0)$!
c) Nenne je zwei Punkte, die im 1. (2., 3., 4.) Quadranten liegen!

Jedem geordneten Zahlenpaar entspricht bei gegebenem Koordinatensystem auch genau ein Punkt der Ebene. Deshalb können Zuordnungen, bei denen Zahlen wieder Zahlen zugeordnet werden, im Koordinatensystem dargestellt werden.

1 Wir ordnen jeder reellen Zahl ihr Quadrat zu. Einige geordnete Paare sind in der Tabelle angegeben und im Koordinatensystem eingetragen (↗ Bild C 4).

x	y
1	1
1,5	2,25
–1	1
0	0
–1,5	2,25
$\sqrt{2}$	2

2 Das Bild C 5 ist eine graphische Darstellung für die *Zuordnung* 4 auf Seite 90.

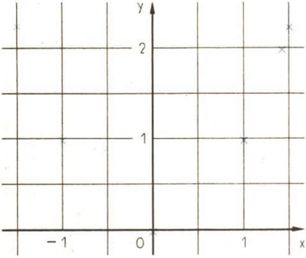


Bild C 4

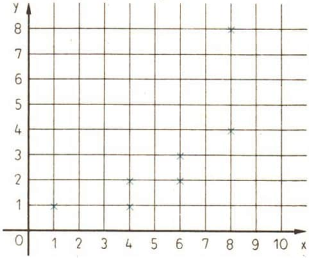


Bild C 5

● 7 Woran erkennt man in einer graphischen Darstellung, ob die dargestellte Zuordnung eindeutig ist, d. h. ob die Zuordnung eine Funktion ist? Vergleiche dazu die Bilder C 4 und C 5 miteinander! (L)

An einem Märztag wurde in Erfurt die Lufttemperatur gemessen. Jeder Uhrzeit ist eine Lufttemperatur zugeordnet. Diese Zuordnung ist eine Funktion. Einige Uhrzeiten mit der jeweils dazugehörigen Lufttemperatur gibt die Tabelle an. Wir stellen die in der Tabelle angegebenen Paare in einem Koordinatensystem dar. Da zu jeder Uhrzeit eine Lufttemperatur gehört, ist es sinnvoll, die Punkte durch eine Linie zu verbinden Dafür gibt es viele Möglichkeiten. Aus Erfahrung haben wir die Punkte so wie im Bild C 6 verbunden.

Uhrzeit in Stunden	Lufttemperatur in °C
2	1
6	–2
10	–1
14	5
18	4
22	3

Auf dem Bild C 6 können wir für 12 Uhr eine Lufttemperatur von 3,3 °C ablesen. Wir können jedoch nicht sicher sein, daß die Temperatur tatsächlich 3,3 °C betrug. Je mehr Meßwerte zur Verfügung stehen, desto besser gibt die Linie den wirklichen Temperaturverlauf wieder.
Zur graphischen Darstellung einer Funktion sagt man auch **Graph** der Funktion. Die aus anderen Unterrichtsfächern bekannten Diagramme zur Darstellung der Abhängigkeit einer Größe von einer anderen sind auch Graphen von Funktionen.

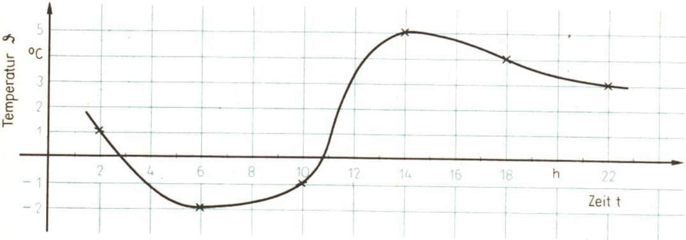


Bild C 6

Aufgaben

1. Gib die Koordinaten der **a)** im Bild C 7, **b)** im Bild C 8 benannten Punkte an!

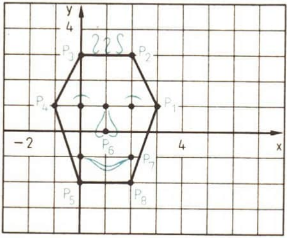


Bild C 7

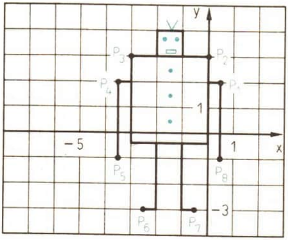


Bild C 8

2. Stelle folgende geordnete Paare in einem Koordinatensystem dar!

a) (2; 4), (3; 6), (2; −6), (0,5; 1) **b)** (−1,5; 1), (0; 2), (0; −3), (0; 0)

c) (7; 0), (−5; 0), (−3; 4,5), (3,2; −4) **d)** (3; 3), (−1,8; 2,7), (3,6; −1,5), (−3,2; 2,3)

3. Trage folgende Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinde die Punkte in der angegebenen Reihenfolge durch einen Streckenzug!

a) $P_1(2; -1)$, $P_2(-5; -1)$, $P_3(-6; 0)$, $P_4(-1; 0)$, $P_5(-1; 0{,}5)$, $P_6(0; 0{,}5)$, $P_7(0; 2)$, $P_8(2; 2)$, $P_9(2; 0)$, $P_{10}(3; 0)$, P_1,

b) $P_1(-4; 0)$, $P_2(-5; 1)$, $P_3(-3; 4)$, $P_4(0; 1)$, $P_5(7; 1)$, $P_6(5; 0)$, $P_7(5; -4)$, $P_8(4; -4)$, $P_9(4; -1)$, $P_{10}(-1; -1)$, $P_{11}(-1; -4)$, $P_{12}(-2; -4)$, $P_{13}(-2; 1)$, $P_{14}(-3; 2)$, P_1.

4. Ordnet man dem Lebensalter eines Kindes die Körpergröße zu, so erhält man eine Funktion. Frau Müller hat die Entwicklung der Körpergröße ihres Sohnes Torsten in einer Tabelle festgehalten:

Lebensalter in Jahren	0	1	2	4	6	8	10	13
Körpergröße in cm	55	76	87	102	116	129	144	152

a) Trage die geordneten Paare der Wertetabelle in ein Körpergröße-Lebensalter-Diagramm ein! Wähle die Einheiten so, daß 1 cm auf der Abszissenachse einem Lebensjahr und 1 cm auf der Ordinatenachse einer Körperhöhe von 10 cm entspricht!

b) Begründe, warum es sinnvoll ist, die in a ermittelten Punkte in diesem Fall durch eine Linie zu verbinden!

c) Lies aus der graphischen Darstellung ab!
In welchem Zeitraum wuchs Torsten besonders schnell?
Wie groß war Torsten mit 3 (5; 7; 9) Jahren?
Wie groß war Torsten ungefähr, als er $1\frac{1}{2}$ Jahre alt war?
Wie groß wird Torsten mit 14 Jahren sein?

5.* Das Bild C 9 greift noch einmal das Beispiel C 1 von Seite 94 auf. Einige Punkte wurden auf verschiedene Weise miteinander verbunden.

a) Warum ist es sinnvoll, die Punkte durch eine Linie zu verbinden?

b) Welcher der beiden Graphen gibt die Funktion besser wieder? Entscheide die Frage, indem du weitere geordnete Paare dieser Funktion ausrechnest und ihre Lage im Koordinatensystem überprüfst (z. B. $x = 0{,}5$ und $x = -0{,}5$)!

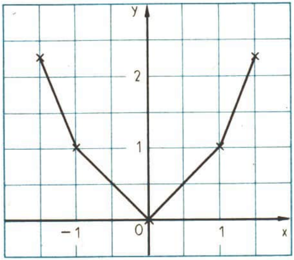


Bild C 9a

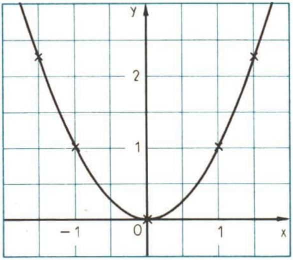


Bild C 9b

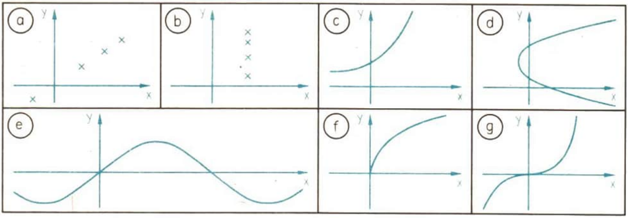
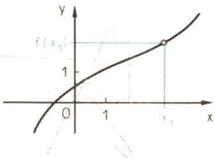


Bild C 10

6. Welche der im Bild C 10 graphisch dargestellten Zuordnungen sind Funktionen? Begründe!

Zusammenfassung

Zuordnungen werden auch **Abbildungen** genannt.
Eindeutige Abbildungen nennt man **Funktionen**.

Begriff	Beispiel
Funktion **Argument x** **Funktionswert $f(x)$** **Definitionsbereich der Funktion** **Wertebereich der Funktion**	$f(x) = 2x,\ x \in N$ 4 $f(4)$ N Menge der geraden natürlichen Zahlen
Zur Angabe von Funktionen werden – Wortvorschriften, – Wertetabellen, – Gleichungen oder – graphische Darstellungen genutzt. Aus der graphischen Darstellung einer Funktion kann man Aussagen über den Verlauf der Funktion oftmals besonders leicht ablesen (↗ Bild C 11).	
Mit Funktionen kann man Zusammenhänge beschreiben, die im täglichen Leben, in der Mathematik, in anderen Wissenschaften und in der Technik vorkommen.	Abhängigkeit der Längenänderung eines festen Körpers von der Temperaturänderung

Lineare Funktionen

4 Direkte Proportionalität; Funktionen $f(x) = mx$

Ein PKW fährt eine längere Strecke auf der Autobahn mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit $95 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Es handelt sich hierbei um eine nahezu geradlinige gleichförmige Bewegung. Zwischen dem Weg s und der Zeit t besteht (direkte) Proportionalität ($s \sim t$). Der Proportionalitätsfaktor ist $95 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Zu jeder Fahrzeit t (in h) gehört genau eine Fahrstrecke $s = f(t)$ (in km). Es gilt

$$s = f(t) = 95 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t.$$

Für die Zahlenwerte gilt $y = 95 \cdot x$.
Diese Funktion ist hier für positive Zahlen definiert.

■ 3 Wir stellen mit Hilfe des Taschenrechners eine Wertetabelle für $y = 95 \cdot x$ für die Argumente 0,50; 0,75; 1,25; 1,5 und 1,75 auf und nutzen die Konstantenautomatik des Taschenrechners SR 1. Dazu bilden wir Produkte $x \cdot 95$:

Aufgabe	Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
0,50 · 95	[,] [5] [×] [9] [5] [=]	**47.5**
0,75 · 95	[,] [7] [5] [=]	**71.25**
1,25 · 95	[1] [,] [2] [5] [=]	**118.75**
1,5 · 95	[1] [,] [5] [=]	**142.5**
1,75 · 95	[1] [,] [7] [5] [=]	**166.25**

Bei Beachtung der Genauigkeit der Ausgangswerte ergibt sich als Wertetabelle:

x	0,5	0,75	1,25	1,5	1,75
y	48	71	120	140	170

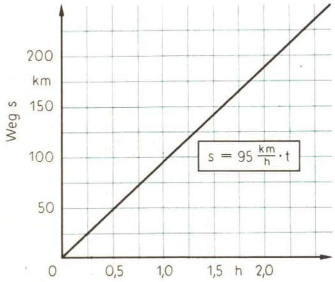


Bild C 12

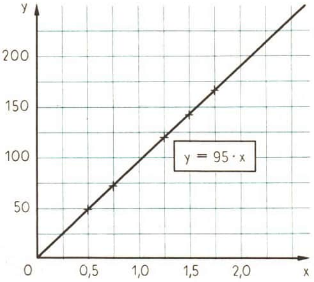


Bild C 13

Wir wissen bereits, daß die graphische Darstellung einer direkten Proportionalität Punkte auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung ergibt (↗ Bilder C 12 und C 13).
Immer wenn direkte Proportionalität vorliegt, ergibt sich eine Funktion $f(x) = m \cdot x$ $(m \neq 0)$, wobei die feste Zahl m der Proportionalitätsfaktor ist. Wenn für eine Funktion $y = f(x)$ die Quotienten $\frac{f(x)}{x}$ $(x \neq 0)$ stets die gleiche von Null verschiedene Zahl ergeben, liegt direkte Proportionalität vor.

■ 4 Ist die durch folgende Tabelle gegebene Funktion eine direkte Proportionalität?

a)

x	−2	3	7	12	15
$f(x)$	−1,5	2,25	5,25	9	11,25
$\frac{f(x)}{x}$	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75

Ergebnis:
Die Funktion ist eine direkte Proportionalität.
Es gilt:
$f(x) = 0{,}75 \cdot x$

b)

x	−3	−2	−1	1	2
$f(x)$	3	1,5	0	−3	−4,5
$\frac{f(x)}{x}$	−1	−0,75			

Ergebnis:
Die Funktion ist keine direkte Proportionalität.

Nun wird der Einfluß von m auf den Verlauf des Graphen der Funktion $f(x) = m \cdot x$ untersucht. Im Bild C 14 sind die für alle reellen Zahlen definierten Funktionen

$f(x) = \frac{1}{2}x$; $f(x) = x$; $f(x) = \pi x$;
$f(x) = -0{,}75x$; $f(x) = -x$;
$f(x) = -2{,}4x$

graphisch dargestellt. Wir betrachten die Geraden in Richtung wachsender x-Werte und stellen fest:
Wenn $m > 0$ ist, so steigt die Gerade;
Wenn $m < 0$ ist, so fällt die Gerade.
Je größer der Betrag von m ist, desto steiler verläuft die Gerade. Die Zahl m ist ein Maß für das Steigen oder Fallen der Geraden, die zu der Funktion $f(x) = mx$ gehört.
Man nennt die Zahl m den **Anstieg** der Geraden bzw. der Funktion.

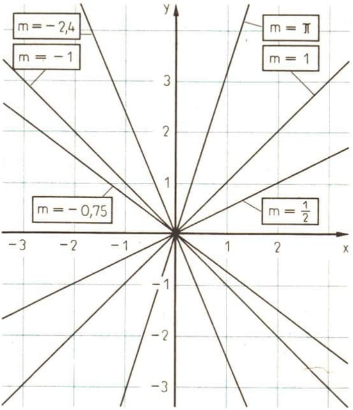


Bild C 14

Aufgaben

1. Stelle fest, ob Proportionalität besteht! Versuche für die Sachverhalte eine Gleichung anzugeben!
   a) Zu jeder Anzahl von Brötchen gehört ein Kaufpreis. (L)
   b) Zu jeder Entfernung, die man mit dem D-Zug zurücklegt, gehört ein Fahrpreis. (L)
   c) Bei Körpern aus gleichem Material ist jedem Volumen seine Masse zugeordnet. (L)

d) Die jährliche Gasabrechnung (in Mark) in einem Haushalt hängt von der verbrauchten Gasmenge (gemessen in m³) ab. (L)

e) Bei gleicher Auflagefläche A ist jeder Kraft F, die senkrecht an der Auflagefläche angreift, ein Auflagedruck p zugeordnet.

2. Stelle für die folgenden Funktionen eine Wertetabelle auf und fertige eine graphische Darstellung an!

a) $y = 0{,}4x;\quad x \in N$ **b)** $f(a) = 4a;\quad a > 0$ **c)** $f(x) = -2x;\quad x \in R$

d) $y = 1{,}45x;\quad x \in N$ **e)** $f(r) = 2\pi r;\quad r \geqq 0$ **f)** $y = 0 \cdot x;\quad x \in R$

g) $y = -3{,}4x;\quad x \in Z$ **h)** $y = \frac{3}{4}x;\ x \in R$ **i)** $f(r) = \pi r^2;\quad r > 0$

3. **a)** Zeichne die Graphen der Funktionen $f(x) = mx$ mit $m \in \left\{0{,}5; 1{,}5; -2; -1{,}5; -\frac{1}{2}\right\}$ in ein Koordinatensystem! Jeder Graph bildet mit der x-Achse einen Winkel der Größe α (↗ Bild C 15).

b) Formuliere, wie α von m abhängt!

c) Gilt $\alpha \sim m$? Begründe!

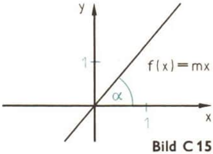


Bild C 15

4. Zeichne in ein Koordinatensystem die Bilder folgender Funktionen für $-3 \leqq x \leqq 3$! Was stellst du fest?

a) $y = 3x$ und $y = -3x$

b) $y = 0{,}5x$ und $y = -0{,}5x$

c) $y = x$ und $y = -x$

5. **a)** Ermittle aus dem Bild C 12, welche Strecke das Auto ungefähr in $\frac{1}{4}$ h, in 1 h, in 75 min zurücklegt!

b) Wie lange ist das Auto ungefähr nach 50 km, nach 120 km, nach 200 km unterwegs?

6. Beschreibe umgekehrte Proportionalität mit einer Funktionsgleichung!

7. Ist die durch folgende Tabelle gegebene Funktion eine direkte Proportionalität? Begründe!

a)

x	$-2{,}7$	$4{,}8$	$3{,}2$	$-1{,}5$
$f(x)$	$-7{,}695$	$13{,}68$	$8{,}84$	$-4{,}275$

b)

x	$2{,}3$	$-0{,}6$	12	-2
$f(x)$	$7{,}866$	$-2{,}052$	$41{,}04$	$-6{,}84$

5 Funktionen $f(x) = mx + n$ und ihre graphische Darstellung

Es gibt auch Funktionen, deren graphische Darstellung eine Gerade ist, ohne daß direkte Proportionalität besteht.
Im Bild C 16 wurden für einige Taxifahrten die Fahrpreise in Abhängigkeit von der Weglänge in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Alle diese Punkte liegen auf einer Geraden, die nicht durch den Koordinatenursprung geht. Verbinden wir die Punkte miteinander durch eine gerade Linie, so können wir den Fahrpreis für weitere Taxifahrten ungefähr ablesen (↗ Bild C 17).
So kostet z. B. eine Fahrt von 5 km Länge 4,50 M. Dieses Ergebnis können wir auch durch Rechnung bestätigen:

$$5 \cdot 0{,}80 + 0{,}50 = 4{,}50.$$

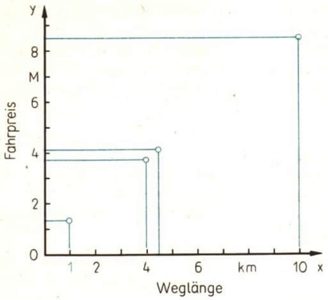


Bild C 16

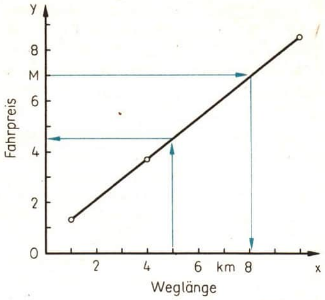


Bild C 17

Das zeigt uns, daß es sinnvoll war, die Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden.
Aus dem Bild C 17 kann man auch ablesen, daß man z. B. für 7,00 M etwas mehr als 8 km fahren kann.
Wir können die Funktion, die für jede Wegstrecke den Fahrpreis angibt, durch eine Gleichung beschreiben. Dazu legen wir fest:

x ist der Zahlenwert für die Weglänge (in km).
$f(x)$ ist der Zahlenwert für den Fahrpreis (in M).

Damit ergibt sich

$$y = f(x) = 0{,}80 \cdot x + 0{,}50.$$

● **8** Begründe, warum zum Definitionsbereich und zum Wertebereich der Funktion für den Taxifahrpreis nur positive Zahlen gehören!

● **9** Wir ordnen jeder reellen Zahl ihr um eins verkleinertes Doppeltes zu.
a) Gib eine Gleichung für diese Funktion an!
b) Übertrage die zu ihr gehörige Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

in ein Koordinatensystem! Was stellst du fest?

Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = mx + n$ $(m \neq 0)$, wobei m und n feste Zahlen sind, heißen **lineare[1]) Funktionen.**
In unserem Taxibeispiel ist $m = 0{,}80$ und $n = 0{,}50$ und in dem Beispiel aus Auftrag C 9 ist $m = 2$ und $n = -1$, denn wir können schreiben $f(x) = 2x + (-1)$. Beides sind lineare Funktionen, allerdings mit unterschiedlichen Definitionsbereichen.
Auch die Funktionen $f(x) = 2x$ $(x \in N)$ und $y = 95x$ $(x \geqq 0)$ sind lineare Funktionen ($m = 2$; $n = 0$ bzw. $m = 95$; $n = 0$). Für $m = 0$ ergibt sich $f(x) = n$. Es ist eine konstante[2]) Funktion.

● **10** Nenne drei lineare Funktionen durch Angabe ihrer Gleichungen und Definitionsbereiche! Es sollen sein
a) $m > 0$; $n > 0{,}5$, **b)** $m > 1$; $n < 0$, **c)** $m < -2$; $n > 1$.

---

[1]) „linear" kommt aus dem Lateinischen und bedeutet soviel wie geradlinig.
[2]) „konstant" kommt aus dem Lateinischen und bedeutet soviel wie feststehend.

Wir verabreden, daß der Definitionsbereich einer linearen Funktion, falls nichts anderes vereinbart wird, aus den reellen Zahlen bestehen soll.
Immer dann, wenn der Definitionsbereich aus allen reellen Zahlen besteht, ist die graphische Darstellung einer linearen Funktion eine Gerade. In allen anderen Fällen liegen die Punkte des Graphen der linearen Funktion zwar auf ein und derselben Geraden, füllen sie aber nicht aus.

● **11 a)** Zeichne in ein Koordinatensystem
- eine Gerade, die nur im 1. und 3. Quadranten liegt,
- die Gerade, die parallel zur x-Achse liegt und durch den Punkt $P(0; 2)$ geht,
- die Gerade, die parallel zur y-Achse liegt und durch den Punkt $Q(-1; 0)$ geht!

b) Welche der genannten Geraden kann graphische Darstellung einer linearen Funktion sein? Verallgemeinere dein Ergebnis!

Da eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt ist, reichen auch zwei Zahlenpaare aus, um den Graph einer linearen Funktion zeichnen zu können. Die Genauigkeit der Darstellung leidet, wenn die beiden Punkte sehr dicht beieinanderliegen. Darüber hinaus ist es günstig, ein drittes Zahlenpaar als Kontrolle zu benutzen.

■ **5** Wir stellen die Funktion $f(x) = -3x + 1$ graphisch dar. Es ist eine lineare Funktion mit $m = -3$ und $n = 1$. Der Graph ist eine Gerade, denn der Definitionsbereich wurde nicht eingeschränkt.

Wir bereiten eine Wertetabelle für drei Zahlenpaare vor.

x			
$f(x)$			

Wir wählen z. B. $x = 1$; $x = 3$; $x = -2$.

$f(1) = -3 \cdot 1 + 1 = -3 + 1 = -2$
$f(3) = -3 \cdot 3 + 1 = -9 + 1 = -8$
$f(-2) = -3 \cdot (-2) + 1 = 6 + 1 = 7$

x	1	3	−2
$f(x)$	−2	−8	7

Wir tragen die Punkte $P_1(1; -2)$, $P_2(3; -8)$ und $P_3(-2; 7)$ in ein Koordinatensystem ein.
Wir überprüfen durch Anlegen des Lineals, ob sie auf ein und derselben Geraden liegen.
Dies ist der Fall, also zeichnen wir die Gerade durch P_1, P_2 und P_3 (↗ Bild C 18).

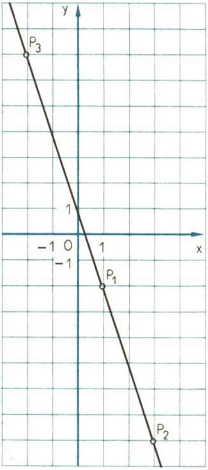


Bild C 18

Einige Vorgänge aus dem täglichen Leben (↗ S. 89: Taxibeispiel) und der Physik (↗ S. 98: geradlinig gleichförmige Bewegung) lassen sich mit linearen Funktionen vereinfacht[1]) beschreiben.

[1]) Wenn die Funktion $y = 0{,}8x + 0{,}50$ **genau** das Taxibeispiel beschreiben würde, müßte man z. B. für 4,355 km Fahrstrecke 3,984 M bezahlen.

Aufgaben

1. Die Deutsche Post erhebt für einen Telefonanschluß in Berlin eine monatliche Grundgebühr von 9,00 M. Jedes Ortsgespräch kostet 15 Pf.
   a) Wie hoch ist die Telefonrechnung für einen Monat, wenn 17 (32; 5; 21; 50) Ortsgespräche und keine Ferngespräche geführt wurden?
   b) Ordnet man der Anzahl x der Ortsgespräche in einem Monat die in Mark angegebene Telefonrechnung y zu, so erhält man eine Funktion. Gib für diese Funktion eine Gleichung an! Aus welchen Zahlen besteht der Definitionsbereich dieser Funktion? (L)
   c) Fertige eine graphische Darstellung an! Überlege dir, wie du die Einheiten auf den Koordinatenachsen wählst!

2. Zeichne (mit Hilfe einer Wertetabelle) die Graphen der folgenden Funktionen! Welche Funktionen sind linear?

a) $f(x) = 2x$	b) $f(v) = \frac{1}{2}v + 2$	c) $f(x) = -0{,}5x$
d) $f(x) = 4x - 3$	e) $f(x) = 0 \cdot x$	f) $f(x) = 0 \cdot x + 7$
g) $f(x) = 3x - 1{,}5$	h) $f(a) = -2{,}5a + \frac{1}{2}$	i) $f(x) = -x + 2$
k) $f(t) = \frac{2}{3}t$	l) $f(u) = -\frac{1}{4}u$	m) $f(s) = -1{,}5s - 3$
n) $f(x) = \|x\|$	o) $f(x) = \|x\| + 1$	p) $f(x) = \sqrt{3}\,x - 1{,}5$

3. Entscheide, ob die folgenden Angaben zu einer linearen Funktion führen! Begründe!
   a) $f(x) = 1\,000x - 1\,000; \quad x \in N$
   b) Jeder Zahl x wird die Zahl 3 zugeordnet.
   c) $f(x)$ ergibt sich durch Multiplikation von x mit Null und anschließender Addition von 4,5; $x \in R$. (L)
   d) Jeder Zahl wird die zu ihr entgegengesetzte Zahl zugeordnet. (L)
   e) $f(x)$ ergibt sich, indem x durch 2 dividiert wird; $x \in \{0; 2; 4; 6\}$. (L)
   f) $f(x)$ ergibt sich durch Division von 2 durch x; $x \in R$, $x \neq 0$. (L)
   g) Das Porto für einen Brief innerhalb der DDR hängt von seiner Masse ab.

Briefe bis 20 g	0,20 M
Briefe über 20 g bis 250 g	0,40 M
Briefe über 250 g bis 500 g	0,60 M

   h) Eine Schraubenfeder ist 12,0 cm lang. Sie wird durch Kräfte gedehnt, und zwar je Newton (N) um 0,5 cm.

4. a) Entscheide, ob die Paare (2; 6), (3; 10), (−1; −30), (1,5; 1), (0; −18) zu der linearen Funktion $f(x) = 12x - 18$ gehören! Rechne im Kopf!
   b) Für welche y gehören die Paare $(2; y)$, $(5; y)$, $(0; y)$, $(-3; y)$, $(-10; y)$ zur Funktion $f(x) = 1\,200x + 200$?
   c) Für welche x gehören die Paare $(x; 16)$, $(x; 200)$, $(x; 19)$, $(x; 0)$, $(x; -16)$ zur Funktion $f(x) = 16x$?

5. Stelle die folgenden linearen Funktionen graphisch dar! Wähle jeweils ein geeignetes Koordinatensystem!
   a) $y = 0{,}2x + 17{,}3$ b) $y = -0{,}1x - 16{,}4$
   c) $y = 1{,}37x + 256$ d) $y = 125x + 82$

6. Welche der in den Aufgaben 2 und 3 genannten Funktionen sind konstante Funktionen?

7. Stelle für die folgenden Funktionen unter Benutzung der Konstantenautomatik eine Wertetabelle auf! Wähle für x fünf Werte! Fertige einen Ablaufplan an!
a) $f(x) = x + 2{,}3;\quad x \in Q$ **b)** $f(x) = x - 12{,}2;\quad x \in Q_+$

6 Der Einfluß von m und n auf den Graph von $f(x) = mx + n$

Um den Einfluß von m und n auf den Graph von $f(x) = mx + n$ zu erkennen, vergleichen wir die linearen Funktionen $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ und $g(x) = \frac{3}{4}x$ miteinander. Beide Funktionen stimmen in m überein.

Aus der Gleichung $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ wird deutlich:

Wir erhalten den Funktionswert $f(x)$, indem wir zu dem Funktionswert $g(x)$ die Zahl 2 addieren.
Das bedeutet:

Wir erhalten den Graph von $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ als Bild des Graphen von $g(x) = \frac{3}{4}x$ bei einer Verschiebung in Richtung der positiven y-Achse. Die Verschiebungsweite ist 2 (↗ Bild C 19).

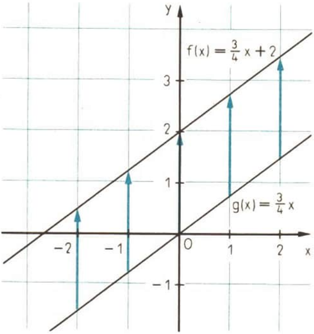


Bild C 19

● 12 **a)** Wie ergibt sich der Graph von $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$ aus dem Graph von $g(x) = \frac{3}{4}x$?
b) Welche Lage haben beide Graphen zueinander?
c) Wo schneidet der Graph von $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$ die y-Achse?

Allgemein gilt: Der Graph einer linearen Funktion mit der Gleichung $f(x) = mx + n$ schneidet die y-Achse im Punkt $(0; n)$.
Stimmen lineare Funktionen in m überein, so sind ihre Graphen zueinander parallel. Die Zahl m wird deshalb bei allen linearen Funktionen $f(x) = mx + n$ Anstieg genannt.

● 13 Der Graph von $f(x) = mx + n;\ x \in R$ ist eine Gerade.
a) Für welche Werte von m steigt die Gerade? **b)** Für welche Werte von m fällt die Gerade? **c)** Wie verläuft die Gerade für $m = 0$?

Aufgaben

1. Nenne die Gleichung einer Funktion, deren graphische Darstellung im Vergleich zum Graph von $f(x) = \frac{2}{3}x - 1{,}5$ **a)** parallel verläuft, **b)** stärker steigt, **c)** schwächer steigt, **d)** fällt und die y-Achse im gleichen Punkt schneidet!

2. Nenne Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den graphischen Darstellungen der folgenden Funktionen!
a) $y = 2x + 3$ und $y = -2x + 3$ **b)** $y = 2x - 3$ und $y = -2x - 3$
c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ und $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ **d)** $y = 1{,}5x - 2{,}5$ und $y = -2{,}5x + 1{,}5$

3. Entscheide für die Geraden in den Bildern C 20a bis d, ob die Zahlen m und n der zugehörigen Funktionsgleichung positiv oder negativ sind! Vergleiche die Anstiege miteinander! Vergleiche die Zahlen n miteinander! (L für a und d)

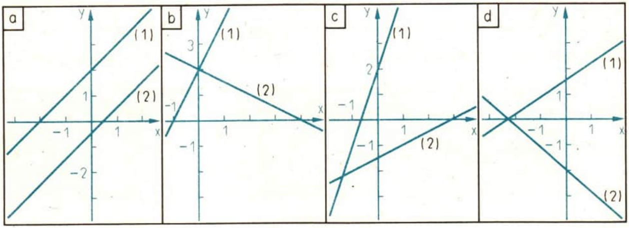


Bild C 20

4. Für welche x gehören die Paare $(x; 2)$, $(x; 16{,}5)$, $(x; -2)$, $(x; 0)$, $(x; -8{,}5)$ zur Funktion $f(x) = 2x + 3$?

5. Beschreibe die Graphen der folgenden Funktionen, ohne sie zu zeichnen (Steigen oder Fallen; Schnittpunkt mit der y-Achse; Quadranten, in denen der Graph verläuft)!

a) $f(x) = 2x + 3$ **b)** $f(x) = -2x + 5$ **c)** $f(x) = 5x - 2$
d) $f(x) = -5x - 3$ **e)** $f(x) = 0 \cdot x$ **f)** $f(x) = 7$
g) $f(x) = 2{,}4x - 1{,}2$ **h)** $f(x) = -7x$ **i)** $f(x) = -0{,}9x - 0{,}9$

7 Ermitteln des Anstiegs einer linearen Funktion

Wir wissen bereits: Bei direkter Proportionalität $[f(x) = mx]$ sind bestimmte Quotienten immer gleich $\left[\frac{f(x)}{x} = m \text{ für } x \neq 0\right]$.

Für lineare Funktionen gilt Entsprechendes.

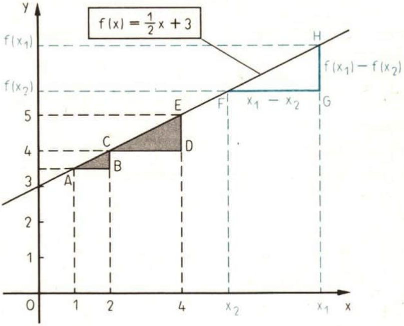


Bild C 21

● **14** Im Bild C 21 ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ graphisch dargestellt. Betrachte die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ und $\triangle FGH$, deren Katheten jeweils parallel zu einer Koordinatenachse sind!

a) Wie lang sind die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$?

b) Welche Beziehung besteht zwischen den Dreiecken? (L)

c) Was läßt sich über die Streckenverhältnisse $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}$ und $\frac{\overline{GH}}{\overline{FG}}$ sagen? (L)

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}$, $\frac{\overline{GH}}{\overline{FG}}$ und m? (L)

Die Erkenntnisse aus dem Auftrag C 14 gelten entsprechend für alle linearen Funktionen.

▷ 2

SATZ: Wenn $y = f(x)$ eine lineare Funktion mit dem Anstieg m ist, so gilt für $x_1 \neq x_2$ immer

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m.$$

Wir machen uns den Satz C 2 erst an zwei Beispielen klar, bevor wir ihn beweisen.

---

(1) **Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$. Es ist $m = \frac{1}{2}$ (↗ Auftrag C 14)**

Für $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ ergibt sich

$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 4$ bzw. $f(x_2) = f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 3 = 3{,}5$.

Dann gilt: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 3{,}5}{2 - 1} = \frac{1}{2} = m.$

---

(2) **Gegeben ist $f(x) = -3x + 2$. Es ist $m = -3$.**

Für $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$ ergibt sich

$f(x_1) = f(2) = -3 \cdot 2 + 2 = -4$ bzw. $f(x_2) = f(5) = -3 \cdot 5 + 2 = -13$.

Dann gilt: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(2) - f(5)}{2 - 5} = \frac{-4 - (-13)}{2 - 5} = \frac{9}{-3} = -3 = m.$

Beweis des Satzes C 2:

Voraussetzung: $f(x) = mx + n$

Behauptung: Für alle $x_1 \neq x_2$ ist $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m.$

Beweis:

Beweisschritt	Begründung
$f(x) = mx + n$	Voraussetzung
$f(x_1) = mx_1 + n$	Funktionswert für x_1
$f(x_2) = mx_2 + n$	Funktionswert für x_2
$f(x_1) - f(x_2) = mx_1 + n - (mx_2 + n)$	Differenzbildung
$= mx_1 + n - mx_2 - n$	Klammern auflösen
$= mx_1 - mx_2$	Vereinfachen
$= m(x_1 - x_2)$	Ausklammern
$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m$	Division durch $(x_1 - x_2)$ für $x_1 \neq x_2$

Also gilt: Für alle $x_1 \neq x_2$ ist $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m$, w. z. b. w.

Ist eine lineare Funktion durch eine Wertetabelle gegeben, so kann mit Hilfe des Satzes C 2 der Anstieg berechnet werden.

■ 6 Von einer linearen Funktion $y = f(x)$ sind folgende Paare bekannt:

x	0	2	5	10
$f(x)$	3	15	33	63

Wie groß ist m?

Da die Funktion linear ist, gilt immer $m = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Da $\dfrac{f(10) - f(5)}{10 - 5} = \dfrac{63 - 33}{10 - 5} = \dfrac{30}{5} = 6$ ist, ist $m = 6$.

Mit Hilfe von Satz C 2 kann man auch erkennen, ob Funktionen nicht linear sind.

■ 7 Durch die folgende Tabelle ist eine Funktion $y = f(x)$ gegeben. Ist diese Funktion linear?

x	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$f(x)$	4,5	6,2	8,0	10,2	12,6

Wenn $y = f(x)$ eine lineare Funktion ist, dann sind z. B. die Quotienten $\dfrac{f(1{,}4) - f(1{,}2)}{1{,}4 - 1{,}2}$ und $\dfrac{f(2{,}0) - f(1{,}6)}{2{,}0 - 1{,}6}$ gleich (↗ Satz C 2). Nun ist

$$\frac{f(1{,}4) - f(1{,}2)}{1{,}4 - 1{,}2} = \frac{6{,}2 - 4{,}5}{1{,}4 - 1{,}2} = \frac{1{,}7}{0{,}2} = 8{,}5 \text{ und}$$

$$\frac{f(2{,}0) - f(1{,}6)}{2{,}0 - 1{,}6} = \frac{12{,}6 - 8{,}0}{2{,}0 - 1{,}6} = \frac{4{,}6}{0{,}4} = 11{,}5\,.$$

Die Quotienten sind voneinander verschieden; also ist die Funktion nicht linear.

● 15 Versuche, durch Probieren für die im Bild C 22 dargestellte lineare Funktion eine Gleichung zu finden!

Wir nutzen nun den Satz C 2, um aus der graphischen Darstellung einer linearen Funktion ihre Gleichung zu bestimmen.

Im Bild C 22 ist eine Gerade in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Wie findet man eine Gleichung zu dieser Geraden? Da die Gerade weder parallel zur y-Achse noch parallel zur x-Achse liegt, ist sie Graph einer linearen Funktion

$$f(x) = mx + n.$$

Die Zahlen m und n sind zu ermitteln.

n ergibt sich als Ordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse. Also ist $n = f(0) \approx 3{,}5$.

Der Punkt P_1 im Bild C 22 hat näherungsweise die Koordinaten (1; 2). Das bedeutet doch, daß $f(1) \approx 2$ ist. Mit Hilfe von $f(0)$ und $f(1)$ ermitteln wir m:

$$m = \frac{f(0) - f(1)}{0 - 1} = \frac{3{,}5 - 2}{-1} = -1{,}5.$$

Näherungsweise gilt $f(x) = -1{,}5x + 3{,}5$.

Die Qualität des Ergebnisses hängt sehr davon ab, mit welcher Genauigkeit die Koordinaten der Punkte $P\,(0;\,n)$ und P_1 abgelesen werden.

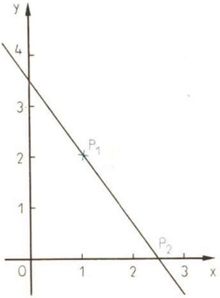


Bild C 22

● **16** Die Gerade im Bild C 22 schneidet die x-Achse im Punkte P_2. Seine Koordinaten sind ungefähr (2,5; 0), das heißt $f(2,5) \approx 0$. Ermittle m mit Hilfe von $P(0; n)$ und von P_2! Welche der beiden Gleichungen beschreibt die Gerade vermutlich besser?

Aufgaben

1. Durch die folgenden Wertetabellen ist jeweils eine lineare Funktion gegeben. Ermittle m! Gib für die Funktionen jeweils eine Gleichung an! (L für e und f)

a)

x	0	2	3	4
$f(x)$	1	3	4	5

b)

x	0	−1	−3	−4
$f(x)$	0	6	18	24

Arbeite in den Aufgaben 1c – f mit dem Taschenrechner!
Tastenfolge für den Schulrechner SR 1:

x_1 $\boxed{-}$ x_2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{x-M}}$ $f(x_1)$ $\boxed{-}$ $f(x_2)$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

c)

x	−2,5	−0,5	0	2,5
$f(x)$	−8,05	−2,65	−1,3	5,45

d)

x	−3	−1,5	−0,5	0
$f(x)$	12	7,2	4	2,4

e)*

x	10	20	35	40
$f(x)$	68	138	243	278

f)

x	0	5,4	8,7	12,3
$f(x)$	−12	−37,92	−53,76	−71,04

2. Durch die folgenden Wertetabellen ist jeweils eine Funktion gegeben. Zeige, daß diese Funktionen keine linearen Funktionen sind!

a)

x	1	2	3	5	10
$f(x)$	0	3	8	24	99

b)

x	−1,5	$-\frac{2}{3}$	0	2,5
$f(x)$	1,5	$\frac{2}{3}$	0	2,5

c)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	1,4	1,7	2	2,2

d)

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{13}{12}$

3. Ermittle näherungsweise die Gleichungen der Funktionen, die im Bild C 20 dargestellt sind!

4. Die geordneten Paare in den nachstehenden Tabellen gehören zu linearen Funktionen. Stelle die Funktionen graphisch dar und ermittle die Gleichungen der Funktionen!

a)

x	4	6	−10
$f(x)$	−2	−3	5

b)

x	−2	0	5
$f(x)$	−1	1	6

c)

x	−3	−1	4
$f(x)$	1,6	0	−4

5. Zeichne die Punkte $A(-2; -2)$, $B(2; 3)$ und $C(0; 3)$ in ein Koordinatensystem! Zeichne durch je zwei Punkte eine Gerade und gib jeweils die Funktionsgleichung an!

6. Wasser wurde gleichmäßig erhitzt. Es ergaben sich folgende Meßwerte:

Zeit t in min	0	2	3	6	8
Temperatur ϑ in °C	20	35	42,5	65	80

Für die Zahlenwerte x der Zeit t und die Zahlenwerte y der Temperatur ϑ besteht eine Funktion $y = f(x)$.

a) Entscheide mit der graphischen Darstellung, ob die Funktion linear ist!
b) Gib eine Gleichung für die Funktion an!
c) Welche Temperatur hat das Wasser nach 16 min? (L)

7. Bei der Ermittlung der Schallgeschwindigkeit erhielt man bei verschiedenen Temperaturen auf experimentellem Wege die folgende Wertetabelle:

ϑ (in °C)	−30	−16	−8	−4	0	4	8	12	20	30
v (in $\frac{m}{s}$)	313	323	327	330	332	334	337	339	343	349

a) Fertige eine graphische Darstellung der durch die Wertetabelle gegebenen Funktion an! (Hinweis: Lege ein Koordinatensystem wie im Bild C 23 an!)
b) Ersetze die graphische Darstellung näherungsweise durch eine Gerade!
c) Ermittle eine Funktionsgleichung für die in b gezeichnete Gerade!
d) Wie groß ist v ungefähr für $\vartheta = 2\ °C$ (15 °C; 25 °C)?

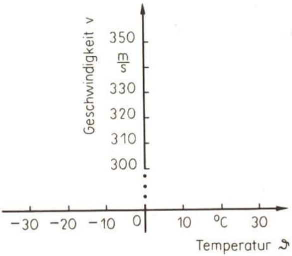


Bild C 23

Zusammenfassung

Jede Funktion mit einer Gleichung der Form $f(x) = mx + n$ $(m \neq 0)$ heißt **lineare Funktion**.
Jede direkte Proportionalität ist eine lineare Funktion der Form $f(x) = mx$. Dabei ist m der Proportionalitätsfaktor.

Die **graphische Darstellung einer linearen Funktion** ergibt Punkte auf ein und derselben Geraden. Diese Gerade ist durch zwei zur Funktion gehörende Zahlenpaare festgelegt.
Parallelen zu den Koordinatenachsen sind die einzigen Geraden, die nicht Graph einer linearen Funktion sind.

$$f(x) = \boxed{m}x + \boxed{n}$$

Anstieg $m > 0$; Graph steigend
$m < 0$; Graph fallend

Graph schneidet y-Achse im Punkt $P(0;n)$

Wenn $y = f(x)$ eine lineare Funktion mit dem Anstieg m ist, so gilt für $x_1 \neq x_2$ stets
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m.$$

Nullstellen linearer Funktionen; lineare Gleichungen

8 Graphisches Lösen von Gleichungen

Wir wissen bereits: **Gleichungen** bestehen aus zwei Termen, die durch das Zeichen „=" verbunden sind. Eine Gleichung **lösen** heißt: alle Zahlen aus dem Variablengrundbereich ermitteln, die die Gleichung **erfüllen**.

● **17** **a)** Überprüfe, ob die Zahl 1,2 die Gleichung $4{,}8x + 2{,}83 = 8{,}59$ erfüllt!
b) Ermittle alle Zahlen, die die Ungleichung $x^2 < 5$, $x \in N$ erfüllen!

Jede Zahl aus dem Variablengrundbereich, die eine Gleichung bzw. Ungleichung erfüllt, nennt man eine **Lösung** der Gleichung bzw. Ungleichung. Die Menge aller dieser Zahlen heißt **Lösungsmenge** der Gleichung bzw. Ungleichung.
Wir erinnern uns an das Taxibeispiel und betrachten noch einmal das Bild C 17 auf Seite 101. Die graphische Darstellung der Funktion $f(x) = 0{,}8x + 0{,}5$ ermöglicht nicht nur, zu gegebenem Argument x den zugehörigen Funktionswert abzulesen. Man kann auch umgekehrt vorgehen. Zu gegebenem Funktionswert $f(x)$ kann man aus der graphischen Darstellung x ermitteln. Wir haben aus dem Bild C 17 abgelesen, welcher Zahl x z. B. die Zahl 7 zugeordnet ist. Damit haben wir die Gleichung $7 = 0{,}8x + 0{,}5$ gelöst, d. h., wir haben ermittelt, wie weit man für 7 M mit einem Taxi fahren kann.

● **18** Lies aus dem Bild C 17 ab, wie weit man für 5 M (2 M; 4,50 M) fahren kann!

Liest man die Lösung einer Gleichung aus der graphischen Darstellung einer geeigneten Funktion ab, so spricht man vom **graphischen Lösen** der Gleichung.

■ **8** Es soll die Gleichung $3 = |x|$ graphisch gelöst werden. *Lösung:* Wir stellen die Funktion $y = |x|$ graphisch dar (↗ Bild C 24). Aus der graphischen Darstellung lesen wir ab, daß zum Funktionswert 3 sowohl das Argument 3 als auch das Argument −3 gehört.

● **19** **a)** Löse die Gleichung $3 = |x|$ rechnerisch!
b) Vergleiche die unter a erhaltene Lösung mit der aus Beispiel C 8!

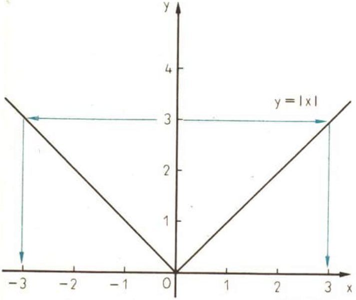


Bild C 24

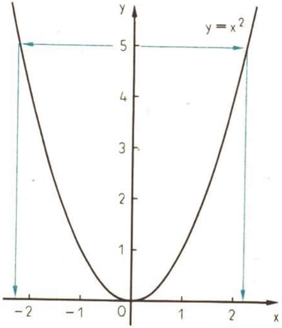


Bild C 25

■ **9** Es soll die Gleichung $5 = x^2$ graphisch gelöst werden. *Lösung:* Wir stellen die Funktion $y = x^2$ graphisch dar (↗ Bild C 25). Dann lesen wir aus dem Bild ab, welchen Zahlen x die Zahl 5 zugeordnet ist. Wir erhalten zwei Lösungen, nämlich $x_1 \approx -2{,}2$ und $x_2 \approx 2{,}2$.

● **20** Überprüfe die im Beispiel C 9 erhaltenen Lösungen mit dem Taschenrechner!

Gleichungen wie

$7 = 0{,}8x + 0{,}5$ und $4 = 3x - 2$, aber auch $4(x + 0{,}5) - x = 4 - 2(15 - x) - x$

nennt man **lineare Gleichungen.** $5 = x^2$ und $|x| = 3$ sind keine linearen Gleichungen. Aus Graphen kann man *nur Näherungswerte* für Lösungen von Gleichungen ablesen.

● **21** Ermittle unter Verwendung des Bildes C 25 Näherungslösungen der folgenden Gleichungen! Kontrolliere dein Ergebnis mit dem Taschenrechner!
a) $x^2 = 2$ **b)** $x^2 = 3{,}5$ **c)** $x^2 = 0$ **d)** $x^2 = -1$

Aufgaben

Stelle die folgende lineare Funktion im Koordinatensystem dar und lies aus der graphischen Darstellung ab, welcher Zahl x jeweils der angegebene Funktionswert y zugeordnet ist!

1.↑ $y = 2{,}5x - 1$ **a)** $y = 4$ **b)** $y = 9$ **c)** $y = 2$ **d)** $y = 7$

2.↑ $f(x) = -2x + 0{,}8$ **a)** $f(x) = -3$ **b)** $f(x) = 2$ **c)** $f(x) = 1{,}5$ **d)** $f(x) = 0$

3. Löse folgende lineare Gleichungen graphisch!
a) $9 = 4x + 1$ **b)** $2{,}5x + 1 = 5$ **c)** $-2 = 3x + 1$ **d)** $-2x + 7 = 6$

4. Fertige eine graphische Darstellung der Funktion $f(x) = |x|$ an und lies daraus Näherungslösungen folgender Gleichungen ab!
a) $2 = |x|$ **b)** $|x| = 1{,}5$ **c)** $0 = |x|$ **d)** $|x| = -1$

5.* Löse folgende Gleichungen graphisch! **a)** $3 = |x| - 4$ (L) **b)** $|x - 2| = 3$ (L)

6. Stelle die Funktion $f(x) = |x| - 2$ graphisch dar und lies aus dem Bild die Lösungen folgender Gleichungen ab!
a) $1 = |x| - 2$ **b)** $|x| - 2 = 1{,}5$ **c)** $|x| - 2 = -3$ **d)** $|x| - 2 = 0$

9 Nullstellen von Funktionen

Die Gleichung $0 = 0{,}5x - 1$ kann man graphisch lösen. Aus der graphischen Darstellung der Funktion $f(x) = 0{,}5x - 1$ lesen wir 2 als Lösung ab (↗ Bild C 26). Man sagt: 2 ist **Nullstelle der Funktion,** denn zum Argument 2 gehört der Funktionswert 0.

Die Lösung der Gleichung $0 = 0{,}5x - 1$ ist also zugleich Nullstelle der Funktion $f(x) = 0{,}5x - 1$. Anders ausgedrückt: Da der Punkt mit den Koordinaten $(2; 0)$ Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse ist, ist die Nullstelle die Abszisse dieses Schnittpunktes.

Auch bei anderen Funktionen spricht man von Nullstellen, wenn ihre Graphen die x-Achse schneiden oder berühren.

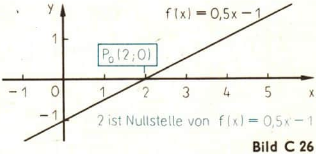


Bild C 26

▶ 3

> **DEFINITION: Jede Zahl x aus dem Definitionsbereich einer Funktion $y = f(x)$, die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ ist, heißt *Nullstelle* der Funktion.**

Wollen wir Nullstellen einer linearen Funktion $f(x) = mx + n$ ermitteln, so lösen wir die lineare Gleichung $0 = mx + n$.

■ **10** Es sollen alle Nullstellen der folgenden Funktionen ermittelt werden.

a) $f(x) = 3x - 12$ **b)** $f(x) = |x| - 2$

c) $f(x) = 0{,}8x + 0{,}5, \quad x \geqq 0$
(vgl. Taxibeispiel, S. 89)

Lösung:

a) Wir lösen die Gleichung $3x - 12 = 0$.

$$\begin{aligned} 3x - 12 &= 0 \quad &| +12 \\ 3x &= 12 \quad &| :3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Da 4 zum Definitionsbereich der Funktion gehört, ist 4 Nullstelle von $f(x) = 3x - 12$.

b) Wir lösen die Gleichung $|x| - 2 = 0$.

$$\begin{aligned} |x| - 2 &= 0 \quad &| +2 \\ |x| &= 2 \end{aligned}$$

1. Fall: $x = 2$; 2. Fall: $-x = 2$, d. h. $x = -2$.

Da 2 und -2 zum Definitionsbereich der Funktion gehören, hat $f(x) = |x| - 2$ die Nullstellen 2 und -2.

c) Als Lösung der Gleichung $0{,}8x + 0{,}5 = 0$ erhält man $-0{,}625$. Da diese Zahl aber nicht zum Definitionsbereich der Funktion $f(x) = 0{,}8x + 0{,}5$ $(x \geqq 0)$ gehört, hat die Funktion keine Nullstelle.

● **22** **a)** Was vermutest du über die Anzahl der Nullstellen einer **linearen** Funktion? (L)
b) Begründe deine Vermutung! (L)

Aufgaben

1. Die Bilder C 27 bis 30 zeigen jeweils die graphische Darstellung einer Funktion. Lies die Nullstellen der betreffenden Funktionen aus den Bildern ab!

2. Zeichne jeweils zwei Funktionen in ein Koordinatensystem, die die angegebene Zahl x_0 als Nullstelle haben!

a) $x_0 = 1$ **b)** $x_0 = -2$ **c)** $x_0 = 2{,}5$ **d)** $x_0 = 0$

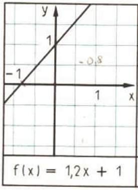


Bild C 27

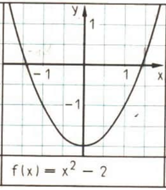


Bild C 28

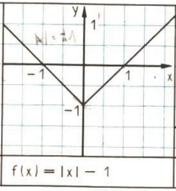


Bild C 29

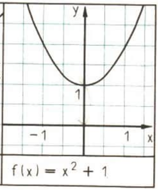


Bild C 30

3. Stelle die lineare Funktion graphisch dar und lies – falls vorhanden – die Nullstelle ab! (L für b, c, f)
a) $f(x) = 2x - 1$ **b)** $f(x) = -x + 1{,}7$ **c)** $f(x) = 1{,}5x + 0{,}5,\ x \geqq 0$
d) $f(x) = -1{,}2x + 1$ **e)** $f(x) = 4x - 1,\ x \geqq 1$ **f)** $f(x) = 0{,}5x - 2{,}5,\ x \geqq 0$

4. Gib jeweils eine lineare Funktion (Funktionsgleichung) an, die die Zahl x_0 als Nullstelle hat!
a) $x_0 = 2$ **b)** $x_0 = -3$ **c)** $x_0 = 4{,}5$ **d)** $x_0 = -3{,}25$
Gibt es jeweils nur eine lineare Funktion? Begründe deine Antwort!

5. Ermittle von folgenden linearen Funktionen – falls vorhanden – die Nullstelle rechnerisch! (Beachte jeweils den Definitionsbereich der Funktion!)
a) $f(x) = 3x - 2$ **d)** $f(x) = -1{,}25x - 5,\quad x < 0$
b) $y = 6x + 36$ **e)** $f(t) = 3{,}9t - 42$ (L)
c) $y = -4x + 6,\quad x < 0$ (L) **f)** $g(t) = 3{,}6t + 11{,}2,\quad t > 0$

6. Wie ist m zu wählen, damit die lineare Funktion $f(x) = mx + 5$ die Nullstelle x_0 hat?
a) $x_0 = 2{,}5$ **b)** $x_0 = -2{,}5$ **c)** $x_0 = 10$ (L) **d)** $x_0 = 1$ (L)

7.* Gegeben ist eine lineare Funktion. Stelle die Funktion graphisch dar, indem du zuerst die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen ermittelst und dann den Graph mit Hilfe dieser beiden Punkte zeichnest! (L)
a) $f(x) = 3x - 2$ **b)** $f(x) = 0{,}54x + 3{,}95$

Lösen linearer Gleichungen

10 Wiederholung der Umformungsregeln für Gleichungen

Man kann eine Gleichung bzw. Ungleichung durch Probieren lösen. Wir erinnern uns, daß man Gleichungen in bezug auf einen Grundbereich **zueinander äquivalent** nennt, wenn sie in diesem dieselbe Lösungsmenge besitzen. Oft kann man eine Gleichung in eine zu ihr äquivalente Gleichung umformen, aus der man die Lösung sofort ablesen kann.

● **23** Erläutere anhand der folgenden Beispiele die jeweils verwendete Regel zum äquivalenten Umformen von Gleichungen!

	Ausgangsgleichung	Gleichung nach dem Umformen
a)	$3x + 2 = 11$	$11 = 3x + 2$
b)	$4x + 6 = 13$	$4x = 7$
c)	$6 - 3x = 9x$	$6 = 12x$
d)	$3x = 9$	$x = 3$
e)	$\frac{x}{8} = 5$	$x = 40$

An einem Beispiel wiederholen wir die Schritte, die wir in Klasse 7 beim Lösen einer Gleichung kennengelernt haben.

■ **11** Es soll die Gleichung $x + 2(x - 3) = 5x - 4(2x - 9)$ gelöst werden.

Lösung:

$x + 2(x - 3) = 5x - 4(2x - 9)$		Klammern auflösen
$x + 2x - 6 = 5x - 8x + 36$		Zusammenfassen
$3x - 6 = -3x + 36$	$\mid + 3x + 6$	Ordnen (Anwenden von Umformungsregeln)
$6x = 42$	$\mid : 6$	Isolieren (Anwenden von Umformungsregeln)
$x = 7$		

Probe: $7 + 2(7 - 3) = 5 \cdot 7 - 4(2 \cdot 7 - 9)$

$7 + 8 = 35 - 20$

$15 = 15$ (wahr)

Ergebnis: 7 ist Lösung der Gleichung.

● **24** In einer Klassenarbeit schreibt Peter folgendes auf:

$$\begin{aligned} x(x+2) &= x(x+3) && \mid\ : x \\ x + 2 &= x + 3 && \mid\ -2 \\ x &= x + 1 \end{aligned}$$

Die Gleichung $x = x + 1$ hat keine Lösung, also ist die Lösungsmenge leer. $L = \emptyset$.

a) Überzeuge dich davon, daß 0 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist! Beachte, daß die Probe stets in der Ausgangsgleichung vorzunehmen ist!

b) Offenbar sind die Ausgangsgleichung und die Gleichung $x = x + 1$ nicht zueinander äquivalent. Was hat Peter falsch gemacht? (L)

c) Wie würdest du die Gleichung lösen?

Zur Kontrolle der Rechnung beim Lösen einer Gleichung ist eine Probe zweckmäßig.
Wird in den folgenden Aufgaben nicht ausdrücklich etwas über den Grundbereich der Variablen gesagt, so soll der Grundbereich die Menge der reellen Zahlen sein.

Aufgaben

1. Überprüfe, ob die in Klammern angegebenen Zahlen jeweils Lösung der Gleichung sind! (Verwende den Taschenrechner!) (L für b, d)

a) $1{,}2x - 3{,}6 = 1{,}32$ (3,9; 4,1; −4,1)

b) $-0{,}3x + 1{,}7 = 0{,}08$ (5,4; −5,4)

c) $x^3 - 0{,}2 = 1{,}528$ (1,2; 1,02)

d) $x^2 + 1 = 3{,}25$ (2,5; 1,5; −1,5)

2. Gegeben ist die Gleichung $5x = 10$, $x \in R$.

a) Gib drei Gleichungen an, die zu $5x = 10$ äquivalent sind!

b) Ist die Gleichung $7x - 3{,}4 = 10{,}6$ zu $5x = 10$ äquivalent?

c) Multipliziere beide Seiten der Gleichung $5x = 10$ mit Null! Ist die Gleichung, die du erhältst, zur Ausgangsgleichung äquivalent? Begründe deine Antwort!

3. Gegeben ist die Ungleichung $2^x < 40$, $x \in N$.

a) Welche der folgenden Zahlen erfüllen die Ungleichung?
3; 5; 7; 10; 2.

b) Nenne weitere Lösungen dieser Ungleichung!

4.* Gegeben ist die Gleichung $x = \sqrt{x^2}$, $x \in R$.
a) Welche der folgenden Zahlen erfüllen die Gleichung? (L)
$3;\ 1{,}5;\ 2;\ -0{,}5;\ 5;\ -3;\ 0;\ -1$
b) Gib die Lösungsmenge dieser Gleichung an! (L)

5. Finde jeweils eine Lösung der Gleichung durch Probieren!
a) $x^2 - 1 = 24$ **b)** $x^3 = 27$ **c)** $2^x = 16$
d) $x^2 = 22{,}09$ **e)** $x^2 = 157{,}251\,6$ **f)** $x^3 = 42{,}875$

Löse folgende Gleichungen! Mache stets eine Probe!

6.↑ **a)** $0 = 12x - 30$ **e)** $\frac{2}{x} = 5$ **i)** $8{,}58 + 1{,}2x = 2{,}4x + 9{,}3$
b) $1{,}5x = 2{,}25$ **f)** $-8 = \frac{16}{x}$ **k)** $5x + 2 + x = 20$
c) $5x - 3 = 17$ **g)** $\frac{x}{-4} + 3 = 7$ **l)** $18x + 9x = 44 + 5x$
d) $\frac{x}{18} = 4{,}2$ **h)** $11{,}2 = 6{,}8 - \frac{x}{6}$ **m)** $8{,}4 - 6x = 10x - 9{,}6 - x$

7.↑ **a)** $|x| - 3{,}4 = 0{,}6$ **b)** $7 + |x| = 5{,}9$ **c)** $|x| + 0{,}25 = 1{,}40$

8. Gib jeweils drei Gleichungen an, die die angegebene Zahl als Lösung haben!
a) 2 **b)** -3 **c)** 1,8 **d)** $-0{,}8$

9.* Gib für jede der folgenden Gleichungen die Lösungsmenge an! (L)
a) $x(x - 1) = x(x + 1)$ **b)** $(x - 2)(x - 4) = (x - 5) \cdot x$

10. Löse die folgenden Gleichungen rechnerisch und graphisch!
a) $5 = 2x - 7$ **b)** $-2 = x - 3$ **c)** $-\frac{1}{2}x + 3 = 0$

11. Vereinfache folgende Terme!
a) $-2(5 + 3) - (6 + 2)$ **e)** $3x - 9x + 6 - 7 - 13 + x$
b) $18(8 - 11) + 3(5 - 19)$ **f)** $16 - (x + 2) + (x - 20)$
c) $-7 + 9 - (6 - 24)$ **g)** $x + 2(x - 5) - x(7 - 9)$
d) $(-40) \cdot (6 - 13)$ **h)** $x + 19(x + 3x) - 4(x + 5)$

Löse folgende Gleichungen!

12. **a)** $3(2x - 1) = 69$ **e)** $5(3x + 4) = 140$
b) $15 - 9(x - 7) = 24$ **f)** $60 - 8(6 - 2x) = 44$
c) $(x + 5) \cdot 7 + 9 = 30$ **g)** $52 - (2x - 3) \cdot 8 = 12$
d) $2(x + 1) = (x - 7) \cdot 4$ **h)** $4(5 - 2x) = 10 \cdot (1 - x)$

13. **a)** $3x - (5 + x) = 9x - 5(x + 9)$ (L)
b) $100 + 2x - 9x + 15 = 10 - 7x + 5 - 11x$ (L)
c) $(8x + 5) + (5x - 8) + 7 = 10x - (3 - 2x - 8)$ (L)
d) $x - (7x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 8)$ (L)

14. Löse folgende Gleichungen! Verwende dabei den Taschenrechner! Runde das Ergebnis sinnvoll!
a) $1{,}2(3{,}1x - 1{,}5) = 14{,}1$ **b)** $60{,}2 - 4{,}1(0{,}8x + 3{,}7) = 9{,}5$

15.* Gegeben sei die Gleichung $m \cdot x + 4 = 16$.
a) Für welche natürlichen Zahlen m ist die Lösung der Gleichung eine ganze Zahl?
b) Kann man eine Zahl m so finden, daß 24 Lösung der Gleichung ist?
c) Für welche natürlichen Zahlen m ist die Lösung der Gleichung eine gerade Zahl? (L)

11 Lineare Gleichungen mit Brüchen

Bei der Lösung von Aufgaben ergeben sich manchmal Gleichungen, in denen die Variable in Brüchen auftritt. Oftmals lassen sich solche Gleichungen in lineare Gleichungen äquivalent umformen. Wie man dabei vorgeht, zeigen die folgenden Beispiele.

■ **12** Es ist die Gleichung $\frac{2x+1}{10} = \frac{x}{4}$ zu lösen.

Lösung: Zuerst beseitigen wir die Brüche, indem wir mit einem gemeinsamen Vielfachen aller auftretenden Nenner multiplizieren.

$$\frac{2x+1}{10} = \frac{x}{4} \quad \Big| \cdot 20$$

$$\frac{(2x+1)\cdot \cancel{20}^{2}}{\cancel{10}_{1}} = \frac{x \cdot \cancel{20}^{5}}{\cancel{4}_{1}}$$

$$(2x+1)\cdot 2 = 5x \qquad \text{Klammern auflösen}$$
$$4x + 2 = 5x \qquad \text{Ordnen}$$
$$2 = x$$

Probe: $\frac{2\cdot 2+1}{10} = \frac{2}{4}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (wahr) *Ergebnis:* $\underline{\underline{L = \{2\}}}$

Die Variable kann auch im Nenner auftreten. Wie man dann die Gleichung löst, wird an dem folgenden Beispiel erläutert.

■ **13** $\frac{34}{x} - \frac{8}{3} = 3, \quad x \neq 0.$

Lösung: $\frac{34}{x} - \frac{8}{3} = 3 \quad \Big| \cdot 3x$

$$\frac{34\cdot 3\cancel{x}}{\cancel{x}_1} - \frac{8\cdot \cancel{3}x}{\cancel{3}_1} = 3\cdot 3x$$

$$102 - 8x = 9x \quad \big| + 8x$$
$$102 = 17x \quad \big| : 17$$
$$6 = x$$

Ergebnis: $\underline{\underline{L = \{6\}}}$

Bei verschiedenen Anwendungen in der Mathematik und auch in anderen Unterrichtsfächern ist es häufig erforderlich, eine Formel nach einer Variablen aufzulösen. Auch dabei werden die Regeln zum äquivalenten Umformen von Gleichungen angewendet.

■ **14** Gegeben sind der Flächeninhalt A und eine Seitenlänge b eines Rechtecks. Es soll daraus die Seitenlänge a ermittelt werden. Es ist $A = a \cdot b$.
Um a zu ermitteln, wird die Gleichung nach a aufgelöst:

$$A = a \cdot b \quad \big| : b \text{ (zulässig, da } b \neq 0)$$

$$\frac{A}{b} = a$$

$$a = \frac{A}{b}$$

■ **15** **Gegeben sind der Widerstand R und die Spannung U in einem Gleichstromkreis. Es soll die Stromstärke I ermittelt werden. Es ist $R = \frac{U}{I}$.**

Wir lösen die Gleichung nach I auf:

$$\begin{aligned} R &= \frac{U}{I} & &\mid \cdot I \\ I \cdot R &= U & &\mid : R \\ I &= \frac{U}{R} \end{aligned}$$

Aufgaben

1. Löse folgende Gleichungen! Mache die Probe!

a) $\frac{2x}{21} = \frac{4}{3}$ b) $\frac{15x}{8} = \frac{45}{2}$ c) $\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$ d) $\frac{6}{x} = \frac{1}{36}$

e) $\frac{7x}{30} = \frac{-7}{15}$ f) $\frac{20}{-3} = \frac{-4x}{9}$ g) $\frac{2(-x)}{35} = \frac{8}{3}$ h) $\frac{12x}{35} = -\frac{24}{14}$

2. Löse folgende Gleichungen!

a) $\frac{3x+3}{8} = \frac{9}{4}$ (L) b) $\frac{2x+3}{9} = \frac{x+2}{5}$ (L) c) $\frac{4x-5}{3} = \frac{x+7}{2}$

d) $\frac{2x+13}{15} = \frac{3}{5}$ (L) e) $\frac{2x+3}{4} = \frac{2}{3}$ f) $\frac{3x-7}{24} = \frac{5}{6}$

g) $\frac{2}{x+3} = \frac{5}{x+6}$ (L) h) $\frac{2}{3x} + \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$

3. Ersetze a, b und c durch Zahlen, so daß die Gleichung $a + b(2x+5) = c$ die folgende Lösung hat!

a) 3 b) 7 c) -4 d) $-2{,}5$

4. Löse die folgenden Gleichungen nacheinander nach den Variablen a, b und c auf!

a) $\frac{a}{c} = b$ b) $\frac{a}{b} - 3 = c$ (L) c) $\frac{6a}{b} = c$ d) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 1$ (L)

5. Erläutere, welcher Sachverhalt den nachstehenden Formeln zugrunde liegt und löse die Formeln jeweils nach der in Klammern angegebenen Variablen auf!

a) $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ (h_c) e) $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ (h) i) $\varrho = \frac{m}{V}$ (V)

b) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (β) f) $v = \frac{s}{t}$ (s) k) $P = \frac{W}{t}$ (t)

c) $V = a \cdot b \cdot c$ (c) g) $v = \frac{s}{t}$ (t) l) $p = \frac{F}{A}$ (A)

d) $\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = k$ $(\overline{ZA})$ h) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$ (F_2) m) $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$ (ΔT)

6. Löse die folgenden Formeln nacheinander nach jeder der auftretenden Variablen auf!

a) $a^2 + b^2 = c^2$ b) $W = F \cdot s$ c) $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$

12 Lösen von Sachaufgaben

Wir wollen uns nun solchen Sachaufgaben zuwenden, die mit Hilfe linearer Gleichungen gelöst werden können. Wie man dabei vorgeht, wiederholen wir an einem Beispiel. Wir richten uns dabei nach den Schritten, die wir in Klasse 7 kennengelernt haben (↗ 2. Umschlagseite).

■ **16** Für das Ausheben einer Baugrube mit einem Volumen von 21 000 m³ werden zwei Löffelbagger verschiedener Leistung eingesetzt. Nachdem der größere Bagger, der pro Stunde 130 m³ Erde mehr aushebt als der kleinere, 16 Stunden und der kleinere 24 Stunden gearbeitet haben, ist die Baugrube ausgehoben.
Wieviel Erde hob jeder Bagger pro Stunde aus?

Lösung:
1. *Wir überlegen:*

Gegeben: – insgesamt 21 000 m³ Erde
– großer Bagger schafft 130 m³ pro Stunde mehr als kleiner Bagger
– großer Bagger 16 Stunden, kleiner Bagger 24 Stunden.
Gesucht: Wieviel Kubikmeter Erde hebt jeder der beiden Bagger pro Stunde aus?

2. *Wir stellen eine Gleichung auf:*

Kleiner Bagger: x m³ pro Stunde; arbeitet 24 Stunden; schafft insgesamt: $24 \cdot x$ m³.
Großer Bagger: $(x + 130)$ m³ pro Stunde; arbeitet 16 Stunden; schafft insgesamt: $16(x + 130)$ m³.
Zusammen: 21 000 m³
$24x + 16(x + 130) = 21\,000$

3. *Wir lösen die Gleichung:*

$$\begin{aligned} 24x + 16(x + 130) &= 21\,000 && && \text{Klammern auflösen} \\ 24x + 16x + 2\,080 &= 21\,000 && && \text{Zusammenfassen} \\ 40x + 2\,080 &= 21\,000 && \mid -2\,080 \\ 40x &= 18\,920 && \mid :40 \\ x &= 473 \end{aligned}$$

4. *Wir machen die Probe am Text:*

Kleiner Bagger: 473 m³ pro Stunde.
Großer Bagger: 473 m³ + 130 m³ = 603 m³, also 603 m³ pro Stunde.
$24 \cdot 473 + 16 \cdot 603 = 21\,000$
Dem Sachverhalt angemessen, runden wir das Ergebnis auf ein Vielfaches von 10.

5. *Antwortsatz:* Der kleine Bagger hebt pro Stunde etwa 470 m³, der große etwa 600 m³ aus.

Aufgaben

1. Beschreibe die Objekte jeweils unter Verwendung einer Variablen!
a) Von zwei Zahlen sei die eine Zahl um 19 größer als die andere;
b) Von zwei Zahlen sei die eine Zahl um 34,5 kleiner als die andere;
c) Von zwei Zahlen sei die eine um 260 größer als die andere;
d) drei Zahlen; die zweite Zahl ist um 3 größer als die erste, die dritte ist um 5 kleiner als die erste Zahl;
e) drei Seiten eines Dreiecks; die erste ist doppelt so lang wie die zweite Seite, und die dritte Seite ist 2 cm kürzer als die erste Seite.

2. Wie heißt die Zahl?
Vermindert man 76 um die gesuchte Zahl und multipliziert man die Differenz mit 3, so erhält man 210.

3. Gesucht sind zwei Zahlen. Die zweite Zahl ist um 18 größer als die erste. Multipliziert man die erste mit drei und vermindert die zweite Zahl um 16, so erhält man jeweils dieselbe Zahl.

4. Ermittle x im Bild C 31! (L)

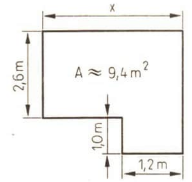


Bild C 31

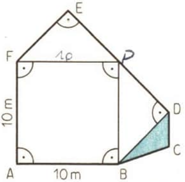


Bild C 32

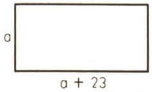


Bild C 33

5. Der Flächeninhalt der im Bild C 32 gegebenen Figur *ABCDEF* soll 160 m² betragen. Welchen Flächeninhalt hat dann das blaue Dreieck? (L)

6. Der Umfang eines Rechtecks betrage 414 m. Die eine Seite ist um 23 m länger als die andere Seite (↗ Bild C 33).
a) Schätze die Länge der Seiten!
b) Ermittle die Seitenlängen des Rechtecks rechnerisch!
c) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks!

7. An einem im Gleichgewicht befindlichen zweiseitigen Hebel mit Hebelarmen von 21 cm und 9 cm Länge ist eine Last um 0,6 N größer als die andere. Berechne beide Lasten! Fertige zuerst eine Skizze an! (L)

8. Bei einem Wettbewerb um die „Goldene Fahrkarte" erreichte ein Schütze bei 3 Schuß 26 Ringe. Beim 1. Schuß erzielte er einen Ring mehr als beim 2. Schuß und beim 3. Schuß zwei Ringe weniger als beim 2. Schuß. Wieviel Ringe erzielte er bei jedem Schuß? (Fertige zuerst eine Tabelle an!)

9. Gibt es drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren Summe 842 beträgt?

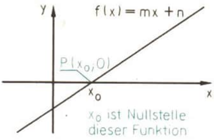
10. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist 252. Welche Zahlen sind es?

11.* Udo sagt: „Ich habe mir zwei Zahlen aufgeschrieben, von denen die eine um 2 kleiner ist als die andere. Wenn ich die größere mit 4, die kleinere mit 3 multipliziere und die beiden Produkte addiere, ergibt sich 57."
Welche Zahlen hat Udo aufgeschrieben? (L)

12.* Item 1 Leb vnd 1 hunt vnt 1 Wolff. Die essen mit eynander 1 Schoff. Vnd der Leb esz das Schoff alleyn in eyner Stund. Vnd der Wolff in 4 Stunden vnd der hunt in 6 Stunden. Nu ist die frag, wen sy das Schoff all 3 mit eynander essen in wie langer Zeyt sy das essen. (L)
(Aus einem Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert)

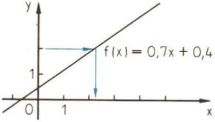
Zusammenfassung

$f(x) = mx + n$, $m \neq 0$, sei eine lineare Funktion.
Die Gleichung
$0 = mx + n$, $x \in R$,
hat genau eine Lösung. Gehört die Lösung x_0 zum Definitionsbereich von $f(x) = mx + n$, so heißt x_0 Nullstelle dieser Funktion.



Lineare Gleichungen kann man rechnerisch und graphisch lösen.
$2 = 0{,}7x + 0{,}4$

rechnerisch	graphisch
$2 = 0{,}7x + 0{,}4 \quad \vert\ -0{,}4$	$f(x) = 0{,}7x + 0{,}4$
$1{,}6 = 0{,}7x \quad \vert\ :0{,}7$	$f(x) = 2$
$\frac{16}{7} = x$	
$x \approx 2{,}3$	Ablesen: $x \approx 2{,}2$



Durch eine Probe kann man 2,3 als Lösung bestätigen $L = \{2{,}3\}$.
Wegen der begrenzten Zeichen- und Ablesegenauigkeit erhält man beim graphischen Lösen im allgemeinen einen Näherungswert.
Das Lösen von linearen Gleichungen, in denen die Variable in Brüchen auftritt, kann auf das Lösen von Gleichungen ohne Brüche zurückgeführt werden. Man beseitigt die Brüche, indem man jede Seite der Gleichung mit einem gemeinsamen Vielfachen aller auftretenden Nenner multipliziert (vgl. Beispiel C 12).

Komplexe Übungen

1. Eine lineare Funktion $y = 2x + b$ nehme bei $x = 4$ den Funktionswert 9 an. Ermittle b! Rechne im Kopf!

2. a) Ermittle n derart, daß die lineare Funktion $f(x) = x + n$ die Nullstelle x_0 hat! Rechne im Kopf! $x_0 = 3$; $x_0 = 5$; $x_0 = -4$; $x_0 = -2$.
   b) Welchen Zusammenhang vermutest du zwischen der Nullstelle x_0 und n?
   c) Beweise deine Vermutung, indem du die Gleichung $f(x_0) = 0$, also die Gleichung $x_0 + n = 0$, löst!

3. Gegeben sind die linearen Funktionen $f_1(x) = m_1x + n_1$ und $f_2(x) = m_2x + n_2$.
   Welche Bedingungen müssen m_1, m_2, n_1, n_2 erfüllen, damit die Graphen der Funktionen
   a) zusammenfallen,
   b) parallel zueinander verlaufen, aber nicht zusammenfallen,
   c) einander in genau einem Punkt schneiden?
   Gib für jeden der drei Fälle zwei Funktionen an!

4. Zwei lineare Funktionen (1) und (2) schneiden einander in $P(0; 4)$. Dabei hat (1) den Anstieg 2 und (2) den Anstieg $-\frac{1}{2}$.

a) Stelle beide Funktionen in einem Koordinatensystem dar!
b) Gib für (1) und (2) jeweils eine Funktionsgleichung an!
c) Berechne die Nullstellen von (1) und (2)!

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2{,}2x - 1{,}5$.

a) Zeichne den Graph der Funktion für $-2 \leq x \leq 4$! (Wähle als Koordinateneinheit 1 cm!)
b) Lies die Nullstelle der Funktion aus der graphischen Darstellung ab!
c) Ermittle die Nullstelle der Funktion rechnerisch!
d) Der Graph der Funktion schneide die Ordinatenachse im Punkt P und die Abszissenachse im Punkt Q. Gib die Koordinaten von P und Q an!
e) Berechne die Länge der Strecke $\overline{PQ}$!
f) Eine Gerade g schneide die Ordinatenachse im Punkt $R(0; -3)$ und die Abszissenachse im Punkt S. Die Gerade g liege parallel zum Graph von $f(x) = 2{,}2x - 1{,}5$. Zeichne g in dasselbe Koordinatensystem ein!
g) g ist Graph einer Funktion.
Gib eine Gleichung für diese Funktion an!
h) Begründe, daß $\triangle PQO$ und $\triangle RSO$ einander ähnlich sind! (O sei der Koordinatenursprung.) Gib einen Ähnlichkeitsfaktor an!
i) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks PQO!

6. Ermittle eine Gleichung der linearen Funktion, die durch die Punkte $P_1(0; 6)$ und $P_2(3; 7)$ geht!

7. Durch die folgenden Wertetabellen ist jeweils eine Funktion gegeben. Trage die gegebenen geordneten Paare in ein Koordinatensystem ein! Ist die Funktion linear? Wenn ja, so gib eine Gleichung für die Funktion an!

a)

x	-1	0	4,5	5
$f(x)$	4	1,5	$-9{,}75$	-11

b)

x	-4	-2	0	3
$f(x)$	9,5	3,5	$-2{,}5$	$-11{,}5$

8*. Lassen sich die Fahrkosten bei der Deutschen Reichsbahn in Abhängigkeit von der Entfernung mit linearen Funktionen beschreiben, und zwar

a) bei Fahrten mit einem Personenzug,
b) bei Fahrten mit einem Schnellzug,
c) bei Gruppenfahrten mit einem Schnellzug?

9. In einem Becherglas werden 500 g Wasser durch gleichmäßige Wärmezufuhr erwärmt (↗ Bild C 36).
Zu jeder Wärmezufuhr Q gehört genau eine Wassertemperatur ϑ.

$$\vartheta = f(Q)$$

a) Stelle die Funktion graphisch dar!
b) Ermittle eine Gleichung, die die Funktion möglichst gut beschreibt!
c) Welche Temperatur erreicht das Wasser, wenn die Wärmezufuhr 75 kJ beträgt?
d) Welche Wärmezufuhr ist erforderlich, um das Wasser auf 80 °C zu erhitzen?

Q in kJ	ϑ in °C
0	18,0
8	21,6
16	25,1
24	28,8
32	32,2
40	35,8
48	39,5

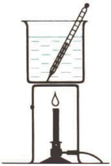


Bild C 36

10. Eine brennende Haushaltskerze, die einmal 25 cm lang war, wird beobachtet. Zu Beginn der Beobachtung ist sie 12 cm lang. Nach 20 Minuten ist sie nur noch 10 cm lang. Nach einer weiteren Stunde beträgt ihre Länge noch 4 cm.

a) Wie lange brennt die Kerze noch?
b) Wie lange kann die Kerze insgesamt brennen?

11. Der mittlere Luftdruck p nimmt mit der Höhe h über dem Meeresspiegel ab:

$p = f(h)$.

a) Stelle die Funktion graphisch dar!
b) Ist diese Funktion linear?
c) Überprüfe, ob es sich um eine umgekehrte Proportionalität handelt!

h in m	P in hPa
0	1 013
1 000	894
2 000	776
3 000	696
4 000	614

12. Das Bild C 37 zeigt das Absinken des Kohlevorrats einer Heißwasserbereitungsanlage.

a) Nach wieviel Tagen ist der Kohlevorrat verbraucht?
b) Ermittle den Jahresbedarf der Anlage!
c) Durch verbesserte Fahrweise der Anlage kann der tägliche Bedarf um 6,2% gesenkt werden. Wieviel Tage reicht der Kohlevorrat von 60 t dann?
d) Wieviel Tonnen Kohle werden durch die verbesserte Fahrweise der Anlage im Jahr eingespart?

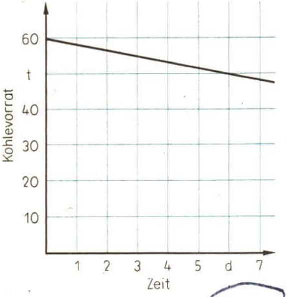


Bild C 37

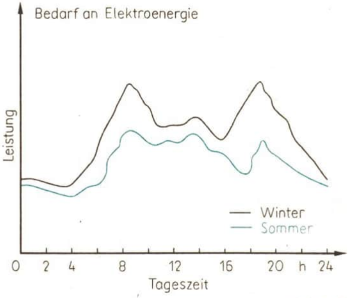


Bild C 38

13. Das Bild C 38 gibt die Belastung des Elektro-Stadtnetzes einer Industriestadt in Abhängigkeit von der Tageszeit an.

a) Zu welcher Tageszeit ist die Belastung am größten?
b) In welchen Zeitabschnitten steigt, in welchen fällt die Belastung?
c) Was kannst du noch aus der graphischen Darstellung ablesen? Überlege Ursachen für die Erscheinungen!

14. Löse die folgenden Gleichungen im Kopf!

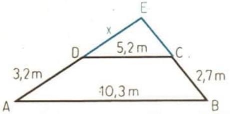
a) $8x = 24$	**d)** $8 - x = 24$	**g)** $x - 8 = 24$	**k)** $\|8 - x\| = 24$
b) $8 + x = 24$	**e)** $\frac{x}{8} = 24$	**h)** $8 = 24x$	**l)** $x(x - 5) = 24$
c) $\frac{8}{x} = 24$	**f)** $\frac{1}{8} : x = 24$	**i)** $\|x - 8\| = 24$	**m)** $x(x - 2) = 24$

15. Gegeben sind die Seitenlängen eines Trapezes (↗ Bild C 39). Ermittle rechnerisch die Seiten des Dreiecks *DCE*!

16. Die Zahl 80 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der eine Summand 60% des anderen beträgt!

17. Bei einer Lösung gibt die Prozentzahl meist die Masse des gelösten Stoffes in 100 Masseteilen der Lösung an. Es soll eine 15prozentige Natronlauge hergestellt werden. Wieviel Gramm Ätznatron (NaOH) sind in 250 g Wasser zu lösen? (L)

18. Wieviel Wasser muß im Gradierwerk aus je 100 kg einer 7prozentigen Sole verdunsten, damit die Sole 25prozentig wird?



(nicht maßstabgerecht) **Bild C 39**

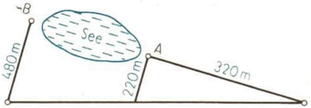


Bild C 40

19. Nach Messungen im Gelände wurde eine Skizze angefertigt, die die Meßwerte enthält (↗ Bild C 40). Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$!

20. Löse folgende Gleichungen!

a) $(129x + 58) \cdot 3{,}6 = 572$ **b)** $20{,}2x - 35{,}8 = 4{,}8(x - 1{,}7)$ **c)** $\frac{x+4}{7} = \frac{x+5}{8}$

d) $\frac{17x + 15}{20} = \frac{3 + 6x}{4}$ **e)** $\frac{15}{x} + \frac{4}{21} = \frac{7}{3}$ **f)** $\frac{7}{6} - \frac{5}{x} = -\frac{1}{12}$

21.* Ein Reisender steigt in ein Taxi und sagt zum Taxichauffeur: „Fahren Sie mich geradeaus jene Strecke, für die der Zahlenwert der Streckenlänge (in km) gleich dem Zahlenwert des Fahrpreises (in M) ist." Wie weit fährt der Taxifahrer den Reisenden? (L)

22.* Begründe, daß auch das folgende Verfahren zum Graph der linearen Funktion $y = mx + n$ führt!
Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck *PQR* mit $P(0; n)$, $Q(1; n)$ und $R(1; n + m)$! Die Gerade *PR* ist der Graph der Funktion $y = mx + n$.

23.* Wir wollen einmal annehmen, daß beim Taschenrechner SR 1 nur noch die Tasten $\boxed{7}$, $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$, $\boxed{=}$ benutzt werden können. Stelle einen Rechenablaufplan auf, so daß dieser Rechner die Ziffer 1 (2; 3; ...; 10) anzeigt!

Aus der Geschichte des Funktionsbegriffs

Eine der wichtigsten Entdeckungen der Menschen vor vielen tausend Jahren war, daß gewisse Naturerscheinungen eine Folge anderer Ereignisse sind, daß also ein Zusammenhang zwischen Ereignissen besteht. Diese Erkenntnis ermöglichte es ihnen, ihre Umwelt gezielt zu beeinflussen.
In der Mathematik tritt uns das Erkennen eines Zusammenhangs zwischen Zahlen wohl zuerst bei der Anlage von Zahlentafeln entgegen, die damit als eines der frühesten Rechenhilfsmittel

P. Fermat

W. Leibniz

L. Euler

anzusehen sind. So verwendeten beispielsweise die Babylonier um 1800 v. d. Z. Multiplikationstabellen, Quadratwurzeltabellen, sogar Tabellen von Kubikwurzeln. Zum Funktionsbegriff führten diese Tabellen und andere Formen aber noch nicht.

Die Herausbildung des Funktionsbegriffs vollzog sich im 17. Jahrhundert. Der durch die gesellschaftliche Entwicklung zum Frühkapitalismus eingeleitete Aufschwung von Mathematik und Naturwissenschaften führte zu einem neuen technischen Bewußtsein. Er lenkte die Aufmerksamkeit auf das wissenschaftliche Studium von Veränderungen, insbesondere von Bewegungsabläufen. Um diese mathematisch zu beschreiben, wurde der wichtige Begriff einer Veränderlichen in die Mathematik eingeführt. Die französischen Mathematiker P. FERMAT (1601–1665) und R. DESCARTES (1596–1650) unterschieden bewußt zwischen konstanten und variablen Größen.

Durch das Arbeiten mit Variablen ergab sich die Notwendigkeit, auch für die Abhängigkeit der Veränderlichen neue Begriffe zu suchen.

Als erster verwendete der deutsche Philosoph und Mathematiker G. W. LEIBNIZ (1646–1716), der Gründer unserer Akademie der Wissenschaften, die Bezeichnung „Funktion".[1])

LEIBNIZ gebrauchte den Namen „Funktion" zunächst für verschiedene Sachverhalte. In Zusammenarbeit mit anderen Mathematikern formte sich aber bald ein bestimmter Begriffsinhalt heraus. Allgemein üblich wurde die Verwendung des Namens „Funktion" besonders durch die Arbeiten des Schweizer Mathematikers L. EULER (1707bis 1783), der im Jahre 1748 folgende Definition angab:

„Eine Funktion einer veränderlichen Zahlgröße ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Zahlgröße und aus eigentlichen Zahlen oder aus konstanten Zahlgrößen zusammengesetzt ist."

Diese Definition wurde erst im 19. Jahrhundert verallgemeinert.

Die auf Seite 90 angegebene Definition berücksichtigt Ergebnisse des 19. Jahrhunderts. Sie ist allgemeiner als die von EULER angegebene Definition, denn sie läßt zum Beispiel auch geometrische Abbildungen als Funktionen zu.

[1]) „Funktion" kommt aus dem Lateinischen und bedeutet so viel wie „ausführen", „eine Verpflichtung erfüllen".

D Stereometrie

Wiederholung; Volumen schiefer Prismen und schiefer Kreiszylinder

1 Prismen und Kreiszylinder (Wiederholung)

● 1 **a)** Welche Körper im Bild D 1 sind Prismen, welche Kreiszylinder? Benenne möglichst auch die anderen dargestellten Körper! Nenne jeweils Gegenstände, die diese Form haben!

b) Bei welchen der dargestellten Körper kann man von Grund- oder Deckflächen sprechen?

Wir wissen: **Bei jedem Prisma sind Grund- und Deckfläche kongruente *n*-Ecke und zueinander parallel.** Dies reicht aber noch nicht zur Charakterisierung von Prismen aus, wie zum Beispiel das Bild D 1 i zeigt.

● 2 **a)** Was muß in der Definition des Prismas noch gefordert werden? Erläutere den Unterschied zwischen geraden und schiefen Prismen!

b) Beschreibe einen geraden Kreiszylinder! Erläutere dabei die Begriffe *Grund-* und *Deckfläche*, *Mantellinie* und *Mantel*!

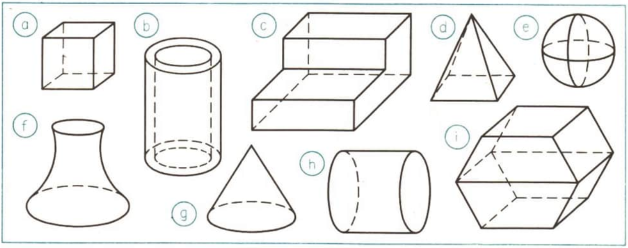


Bild D 1

Das Volumen gerader Prismen und Kreiszylinder ergibt sich als Produkt des Inhalts A_G der Grundfläche und der (zugehörigen) Körperhöhe h. Beim Kreiszylinder kann A_G durch den Radius r oder den Durchmesser d des Grundkreises ausgedrückt werden.

▶ 1

Gerades Prisma	**Gerader Kreiszylinder**
$V = A_G \cdot h$	$V = A_G \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$

● 3 Berechne von folgenden Körpern das Volumen auf Kubikmillimeter genau und stelle die Körper in Zweitafelprojektion dar!

a) Gerades Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche (Grundkantenlänge $a = 3$ cm, Höhe $h = 6$ cm)[1])

b) Kreiszylinder, der durch Drehung eines Rechtecks mit $a = 6$ cm und $b = 1{,}5$ cm um eine der längeren Seiten entsteht

Wir wissen: Bei Prismen sind alle Seitenkanten zueinander parallel; bei geraden Prismen stehen sie senkrecht auf Grund- und Deckfläche, bei schiefen nicht. Entsprechendes gilt für die Mantellinien gerader und schiefer Kreiszylinder (Mantellinien sind diejenigen Verbindungsstrecken von Grund- und Deckkreis, die parallel zur Verbindungsstrecke der Mittelpunkte sind).

● 4 **a)** Zeichne Netze für die im Auftrag D 3 dargestellten Körper!

b) Skizziere ein Netz für ein schiefes Prisma, das als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck hat!

c) Ingmar behauptet, der Mantel eines schiefen Kreiszylinders ergäbe bei Abwicklung in die Ebene ein Parallelogramm. Stimmt das?

Die Oberfläche von Prismen und Zylindern setzt sich aus Grundfläche, Deckfläche und Mantel zusammen. Für Prismen und gerade Kreiszylinder können wir den Inhalt der Oberfläche bereits berechnen.

● 5 Berechne den Oberflächeninhalt der Körper aus Auftrag D 3!

Aufgaben

1. Von einem Quader sind gegeben: $a = 4{,}3$ cm; $b = 6{,}5$ cm; $c = 5{,}5$ cm.
   a) Stelle den Quader in Zweitafelprojektion dar!
   b) Zeichne ein Netz dieses Quaders!
   c) Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt des Quaders! Runde auf Kubikmillimeter bzw. auf Quadratmillimeter!

2. Löse die Aufgabe 1 für einen geraden Kreiszylinder $r = 45$ mm und $h = 73$ mm!

3. Ein gerades Prisma mit dem Volumen $V = 138\ \text{cm}^3$ und der Höhe $h = 3{,}6$ cm habe als Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Berechne die Längen der Grundkanten! (Runde auf Millimeter!) Stelle das Prisma in Zweitafelprojektion dar!

4. Berechne die gesuchten Größen für gerade Kreiszylinder!
   a) $d = 2$ cm; $V = 10\ \text{cm}^3$; gesucht: h (in mm)
   b) $V = 12{,}5\ \text{cm}^3$; $h = 2{,}5$ cm; gesucht: d (in mm)

[1]) Gerade Prismen mit regelmäßigen n-Ecken als Grundfläche werden regelmäßige Prismen genannt. Bei regelmäßigen n-Ecken sind alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß.

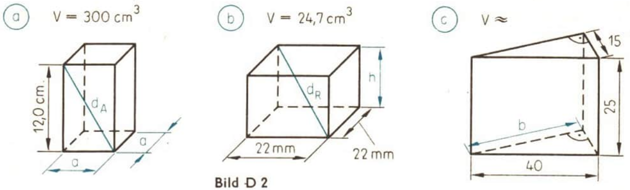


Bild D 2

5. Berechne für die geraden Prismen im Bild D 2 jeweils die mit Variablen gekennzeichneten Stücke! (L)

6. Wie groß ist die Masse eines Mauerziegels, dessen Kanten zu 240 mm, 115 mm bzw. 71 mm gemessen wurden? (L)

7. Von einem zylindrischen Werkstück wurden folgende Größen ermittelt: Durchmesser 50 mm; Höhe 75 mm; Masse 1,150 kg. Berechne die Dichte des Materials!

8. Ein zylindrisches Gefäß hat einen Innendurchmesser von 150 mm, und es ist 20 cm hoch. Wie hoch ist es gefüllt, wenn genau 2 l Wasser eingegossen werden?

9. Ein Aquarium, das die Form eines Quaders mit $a = 35$ cm, $b = 25$ cm und $h = 40$ cm hat, ist bis 12 cm unter dem Rand mit Wasser gefüllt. Dieses Wasser soll in ein zylindrisches Gefäß umgefüllt werden. Gib drei verschiedene Mindestmaße (Innendurchmesser und Höhe) für ein solches Gefäß an!

10. **a)** Wie verändert sich das Volumen eines Prismas mit rechteckiger Grundfläche, wenn seine Höhe verdreifacht wird und seine Grundfläche unverändert bleibt (jede Seite seiner Grundfläche verdoppelt wird und seine Höhe unverändert bleibt)?
b) Wie verändert sich das Volumen eines Kreiszylinders, wenn sein Grundkreisradius halbiert wird und seine Höhe unverändert bleibt (sein Grundkreisradius verdreifacht und seine Höhe halbiert wird)?

11.* Was gilt für die Durchmesser (Höhen) zweier Zylinder mit gleichem Volumen, wenn sich ihre Höhen (Durchmesser) wie 1 : 2 verhalten? (L)

12. Aus einem rechteckigen Stück Blech ($a = 12$ cm, $b = 20$ cm) läßt sich auf zwei Arten der Mantel eines zylindrischen Gefäßes herstellen. Vergleiche die Volumina!

13.* Jens meint: „Von zwei geraden Prismen mit gleicher Grundfläche hat dasjenige mit dem größeren Oberflächeninhalt auch das größere Volumen."
Jörg antwortet: „Ja, und bei Prismen mit gleicher Höhe hat auch das mit dem größeren Oberflächeninhalt das größere Volumen."
Nimm zu beiden Aussagen Stellung!

2 Dritte Potenzen und Kubikwurzeln

Volumina kann man berechnen, indem man drei Längen miteinander multipliziert; dies macht auch der Exponent 3 in den Einheiten deutlich (zum Beispiel m³). Sind alle drei Längen gleich, so kann für den Zahlenwert ebenfalls die Potenzschreibweise benutzt werden. Vorteilhaft ist eine solche Überlegung für die Arbeit mit dem Taschenrechner.

Ist z. B. das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge 7,3 cm zu berechnen, so können wir die Konstantenautomatik anwenden:

7,3 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ **[389.017]**

Man kann $7{,}3^3$ jedoch auch durch Betätigen der Taste y^x ermitteln:

7,3 $\boxed{y^x}$ **3** $\boxed{=}$

Die Taste y^x ermöglicht die Berechnung beliebiger Potenzen. Potenziert wird diejenige Zahl y (die Basis), die vorher in der Anzeige war, und zwar mit der anschließend einzugebenden Zahl x als Exponent. Anders als bei der Quadrattaste x^2 erscheint das Ergebnis jedoch erst, nachdem die Taste $=$ gedrückt ist.

● **6** **a)** Die Kanten eines Würfels sind 12,7 cm lang. Gib sein Volumen auf Kubikzentimeter genau an!
b) Wie müßte die Angabe erfolgen, wenn die Kantenlänge ein Meßwert ist und man sich nach den Regeln über das Rechnen mit Meßwerten richtet?
c) Berechne $5{,}16^3$; $23{,}84^3$; $293{,}5^3$; $0{,}47^3$; $0{,}0862^3$!
Vergleiche die Ergebnisse mit den Resultaten von Überschlagsrechnungen, die du vorher im Kopf ausgeführt hast!

Wir wollen in Zukunft vorzugsweise mit der Taste y^x arbeiten, um uns an ihre Benutzung zu gewöhnen.

■ **1** Es ist das Volumen eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt zu berechnen, dessen Grundkreisradius zu 18,7 cm gemessen wurde.

Lösungsüberlegung: Quadratischer Achsenschnitt bedeutet, daß die Höhe des Zylinders ebenso lang wie der Durchmesser des Grundkreises ist (↗ Bild D 3).

Gegeben: $r = 18{,}7$ cm; $h = d = 2r$ *Gesucht:* V (in dm³)
Lösung: $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$
$V = 2\pi \cdot 18{,}7^3\ \text{cm}^3$
Überschlag: $V \approx 2 \cdot 3 \cdot 20^3\ \text{cm}^3 = 6 \cdot 8000\ \text{cm}^3 = 48000\ \text{cm}^3$

Ablaufplan[1]: **2** $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ **18,7** $\boxed{y^x}$ **3** $\boxed{=}$ **[41087.005]**

Vergleich mit dem Überschlag: $41\,087{,}005 \approx 48\,000$
Antwortsatz: Der Zylinder hat ein Volumen von 41,1 dm³.

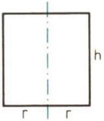


Bild D 3

Wir haben das Ergebnis nach den Regeln des Arbeitens mit Näherungswerten auf 41 100 cm³, das sind 41,1 dm³, gerundet.[2]) Wenn aus dem Text nicht (durch das Wort „gemessen") hervorginge, daß es sich um einen realen Körper handelt, dürfte das Ergebnis auch mit mehr als dreistelliger Genauigkeit angegeben werden. Zur sinnvollen Resultatsangabe werden wir aber stets wie im Beispiel D 1 verfahren.
Die dritten Potenzen natürlicher Zahlen nennt man auch **Kubikzahlen**[3]): $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, ...
Zur Ermittlung der dritten Potenzen rationaler Zahlen steht uns neben dem Taschenrechner noch die Tabelle auf den Seiten 8/9 des Tafelwerks zur Verfügung. Mit dieser Tafel wird

---

[1]) Bei Taschenrechnern ohne Vorrangautomatik für das Potenzieren muß mit der Berechnung von $18{,}7^3$ begonnen werden.
[2]) In Wirklichkeit ist das Ergebnis noch ungenauer. Der Meßwert $r = 18{,}7$ cm bedeutet nämlich $18{,}65\ \text{cm} \leqq r \leqq 18{,}75\ \text{cm}$. Daraus erhält man $40{,}76\ \text{dm}^3 \leqq V \leqq 41{,}42\ \text{dm}^3$.
[3]) cubus (lat.) – Würfel; vgl. „Kubikmeter"

genauso gearbeitet wie mit der Quadrattafel. Wie diese enthält sie vierziffrige Angaben (fast durchweg Näherungswerte) für die Potenzen. Die dritten Potenzen der Zahlen im Intervall 1,00 bis 9,99 können unmittelbar aus der Tafel abgelesen werden. Für andere Zahlen sind gesonderte Überlegungen zur Größenordnung erforderlich.

● 7 Ermittle mit der Kubiktafel $3{,}58^3$; $35{,}8^3$; $0{,}358^3$!
Erläutere an den Faktorenzerlegungen $35{,}8 = 3{,}58 \cdot 10$ und $0{,}358 = 3{,}58 \cdot \frac{1}{10}$ die Regel über das „Rücken des Kommas" aus dem Tafelwerk (S. 8 unten)!

Mit der Kubiktafel läßt sich auch umgekehrt bei vorgegebener dritter Potenz die Basis (näherungsweise) ermitteln. Für 496,8 beispielsweise erhält man wegen $7{,}92^3 = 496{,}8$ als **Kubikwurzel** oder **dritte Wurzel** 7,92;
man schreibt

$$\sqrt[3]{496{,}8} = 7{,}92.$$

Allgemein versteht man unter der Kubikwurzel einer reellen Zahl $a \geqq 0$ diejenige Zahl b, deren dritte Potenz die Zahl a ist:
Für $a \geqq 0$ ist $\sqrt[3]{a} = b$ gleichbedeutend mit $b^3 = a$.

Wie bei der Quadratwurzel wird die Zahl a, von der die Kubikwurzel bestimmt wird, **Radikand**[1]) genannt.

■ 2 Zu ermitteln ist die Kantenlänge eines Würfels, dessen Volumen 325 dm³ beträgt.
Gegeben: $V = 325\ \text{dm}^3$ *Gesucht:* a (in dm)
Lösung: $V = a^3$; $a = \sqrt[3]{V}$; $a = \sqrt[3]{325}\ \text{dm}$
Überschlag: Wegen $7^3 = 49 \cdot 7 \approx 350$ ist $a \approx 7$ dm

Arbeit mit der Tafel: Die Kubiktafel enthält 325 als dritte Potenz nicht, aber 324,2 und 325,7. Die letztere Zahl liegt näher an 325; sie liefert 6,88.
Vergleich mit dem Überschlag: $6{,}88 \approx 7$
Antwortsatz: Die Würfelkanten sind 6,88 dm lang.

Wenn der Radikand nicht im Intervall von $1 = 1^3$ bis $1\,000 = 10^3$ liegt, sind – wie beim Quadratwurzelziehen mit der Tafel – zusätzliche Überlegungen nötig.

■ 3 a) $\sqrt[3]{8\,120} = \sqrt[3]{1\,000 \cdot 8{,}12} = \sqrt[3]{1\,000} \cdot \sqrt[3]{8{,}12} = 10 \cdot 2{,}01 = \underline{\underline{20{,}1}}$
b) $\sqrt[3]{81\,200} = \sqrt[3]{1\,000 \cdot 81{,}2} = \sqrt[3]{1\,000} \cdot \sqrt[3]{81{,}2} = \ldots$
c) $\sqrt[3]{812\,000} = \sqrt[3]{1\,000 \cdot 812} = \ldots$

● 8 a) Vervollständige das Beispiel D 3!
b) Ermittle analog mit Hilfe der Kubiktafel $\sqrt[3]{0{,}536}$, $\sqrt[3]{0{,}053\,6}$ und $\sqrt[3]{0{,}005\,36}$!
c) Jemand erhält $\sqrt[3]{1\,861} = 26{,}5$. Zeige durch einen Überschlag, daß diese Angabe falsch sein muß! Welcher Fehler hat wohl zu ihr geführt? Ermittle den richtigen Wert!

[1]) radix (lat.) – Wurzel; vgl. „Radieschen"

Beim Ermitteln der Kubikwurzeln mit dem Taschenrechner SR 1 werden die Tasten y^x und $\frac{1}{x}$ benötigt.[1]) Man bedient den Rechner so, als sei der Radikand „mit $\frac{1}{3}$ zu potenzieren".

■ 4

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$\sqrt[3]{4\,790}$	**4 790** $\boxed{y^x}$ **3** $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$	**16.8569**

Obwohl der Taschenrechner mehr Stellen als die Kubiktafel liefert, handelt es sich auch hier (fast durchweg) nur um Näherungswerte. Die meisten Kubikwurzeln rationaler Zahlen sind – ebenso wie die Quadratwurzeln – irrationale Zahlen.

● 9 **a)** Überprüfe das Ergebnis im Beispiel D 4, indem du mit 3 potenzierst! Verfahre entsprechend mit $\sqrt[3]{4791}$! Liefert der Taschenrechner hier einen genauen Wert?

b) Rechne entsprechend dem folgenden Ablaufplan!

28561 $\boxed{y^x}$ **4** $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$

Welche Eigenschaft hat wohl die berechnete Zahl? Überprüfe deine Vermutung!

Aufgaben

1. Ermittle folgende Kubikzahlen! (Rechne, wo es möglich ist, im Kopf! Mache bei den anderen Aufgaben erst einen Überschlag!)
   a) $5{,}7^3$; $12{,}1^3$; $0{,}8^3$; $8{,}94^3$; $0{,}02^3$; 444^3; $17{,}3^3$; $0{,}002\,5^3$
   b) $6{,}8^3$; $0{,}68^3$; 90^3; $0{,}09^3$; $13{,}7^3$; $1\,370^3$; $0{,}005^3$; 206^3

2. Ermittle folgende Kubikwurzeln! Mache erst einen Überschlag!
   a) $\sqrt[3]{37{,}6}$; $\sqrt[3]{376}$; $\sqrt[3]{128}$; $\sqrt[3]{1{,}28}$; $\sqrt[3]{887}$; $\sqrt[3]{0{,}887}$; $\sqrt[3]{612}$; $\sqrt[3]{512}$
   b) $\sqrt[3]{68}$; $\sqrt[3]{0{,}68}$; $\sqrt[3]{680}$; $\sqrt[3]{0{,}125}$; $\sqrt[3]{1\,250}$; $\sqrt[3]{2\,197}$; $\sqrt[3]{21{,}97}$; $\sqrt[3]{2{,}197}$

3. **a)** Welche Werte in der Kubiktafel (↗ Tafelwerk S. 8/9) sind keine Näherungswerte?
   b)* Wie kann man für $2{,}3^3$ aufgrund des Näherungswertes in der Tafel sofort den genauen Wert angeben? Gib weitere Zahlen an, bei denen das möglich ist! (L)

4. Berechne für einen Würfel aus Stahl mit der Kantenlänge 655 mm die Masse in Kilogramm!

5. Ein Zylinder habe einen (Grundkreis-) Durchmesser von 17,8 cm und eine Höhe, die gleich seinem Grundkreisumfang ist. Berechne sein Volumen!

6. Für einen Betrieb soll ein würfelförmiger geschlossener Behälter hergestellt werden, der 1,45 hl Flüssigkeit fassen kann. Es werden Bleche von 5 mm Stärke verwendet. Ermittle die äußeren Abmessungen! (L)

7. Zu Anschauungszwecken sollen aus Stahl, Kupfer und Aluminium drei Würfel mit der gleichen Masse von 100 g hergestellt werden. Berechne die jeweiligen Kantenlängen!

8.* Ein Prisma habe als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge a, seine Höhe sei $2a$ und sein Volumen betrage 755 cm³. Berechne a! (L)

[1]) Hinweis: Es gibt auch Taschenrechner (etwa den MR 610), bei denen Kubikwurzeln mittels einer besonderen Taste ermittelt werden können.

3 Das Volumen schiefer Prismen

10 Das Bild D 4 zeigt ein Prisma in Zweitafelprojektion.
Der Originalkörper hat die Maße
$\overline{AB}$ (= $\overline{CD}$) = 7,0 cm; $\overline{AD}$ (= $\overline{BC}$) = 5,0 cm;
$\overline{AE}$ (= $\overline{CG}$) = 6,0 cm.
Das Lot von C auf AB ist 4,0 cm lang.

a) Zeichne auf starkem Papier ein Netz dieses Prismas! Versieh es mit Klebefalzen und klebe es zusammen!
b) Erläutere, warum man diesen Körper sowohl als gerades als auch als schiefes Prisma ansehen kann! Gib dann jeweils Grundfläche und Höhe an!
c) Berechne das Volumen!

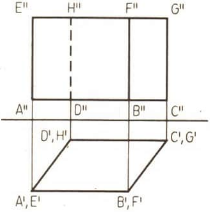


Bild D 4

Für gerade Prismen kennen wir bereits die Volumenformel. Mit ihr kann man das Volumen eines Prismas wie im Auftrag D 10 berechnen.

11 Erläutere, daß die Volumenformel $V = A_G \cdot h$ auch den richtigen Wert liefert, wenn man das Prisma aus Auftrag D 10 als schief ansieht, beispielsweise $ABFE$ als Grundfläche wählt!

Man kann sogar das Volumen jedes schiefen Prismas nach der bekannten Formel ermitteln.

▷ 2

SATZ: Das *Volumen V eines jeden Prismas* mit dem Grundflächeninhalt A_G und der zugehörigen Höhe *h* beträgt: $\quad V = A_G \cdot h.$

Für den Fall schiefer Prismen stehen uns die mathematischen Hilfsmittel für einen Beweis nicht zur Verfügung. Deshalb begnügen wir uns mit einer Überlegung, die die Gültigkeit dieses Satzes nahelegt. Dazu stellen wir uns vor, daß ein schiefes Prisma aus einem geraden (↗ Bild D 5) folgendermaßen entsteht: Das gerade Prisma wird in Schichten zerlegt, und aus diesen Schichten wird ein „Treppenkörper" (↗ Bild D 6) aufgebaut. Er hat dann gewiß das gleiche Volumen wie das gerade Prisma. Allerdings ist er noch kein schiefes Prisma. Er kommt aber einem solchen um so näher, je dünner die Schichten sind, aus denen er aufgebaut ist. Eine gute Vorstellung davon bekommt man anhand von zwei gleich hohen Stapeln Spielkarten, deren Volumengleichheit erhalten bleibt, wenn man die Form eines Stapels verändert. Nimmt man statt der Spielkarten dünne Papierblätter, so unterscheidet sich der Treppenkörper noch weniger von einem schiefen Prisma.
Diese Überlegungen führen uns zu der Einsicht, daß das Volumen schiefer Prismen ebenfalls nur vom Grundflächeninhalt und der zugehörigen Höhe abhängt.

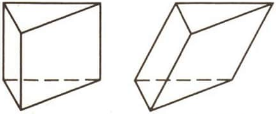


Bild D 5

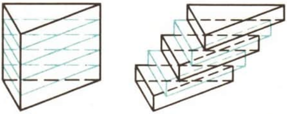


Bild D 6

● 12 Formuliere eine analoge Aussage für den Flächeninhalt ebener Figuren, beispielsweise für Dreiecke (↗ Bild D 7)!

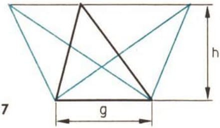


Bild D 7

Aufgaben

1. Der Mittelpunkt der quadratischen Deckfläche eines Prismas liege senkrecht über einem Eckpunkt der Grundfläche. Die Grundkante sei a, die Höhe h und das Volumen V. Berechne jeweils die fehlende Größe und stelle das Prisma in Zweitafelprojektion dar!
   a) $a = 4$ cm, $h = 6{,}2$ cm **b)** $a = 8$ cm, $V = 320$ cm³ **c)** $h = 3$ cm, $V = 75$ cm³ **d)** $h = 4{,}7$ cm, $V = 126$ cm³

2. **a)** Warum muß ein Körper, der gleichzeitig als gerades und schiefes Prisma angesehen werden kann, ein vierseitiges Prisma sein?
   b)* Kann ein (1) dreiseitiges, (2) vierseitiges, (3) fünfseitiges Prisma genau eine (zwei, drei) rechteckige Seitenfläche(n) haben? (L)

3. Die Grundfläche eines Prismas sei ein Rechteck. Der Mittelpunkt der Deckfläche liege senkrecht über dem Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten der Grundfläche. Die Länge der Seitenkanten sei s. Berechne jeweils die zu ermittelnden Größen und stelle das Prisma in Zweitafelprojektion dar!
   a) $a = 4{,}2$ cm; $b = 2{,}8$ cm; $h = 3{,}5$ cm; zu ermitteln ist V.
   b) $a = 3{,}2$ cm; $b = 5{,}1$ cm; $s = 6$ cm; zu ermitteln sind h und V.
   c) $a = 5{,}6$ cm; $h = 4{,}8$ cm; $V = 47$ cm³; zu ermitteln sind b und s.
   d) $a = 1{,}9$ cm; $b = 3{,}7$ cm; $V = 26$ cm³; zu ermitteln sind h und A_0.

4. Die Grundfläche eines Prismas sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis c und mit h_c als zugehöriger Höhe. Der Basismittelpunkt des Deckflächendreiecks liege senkrecht über der Spitze des Grundflächendreiecks. Zu ermitteln sind Volumen sowie Grund- und Seitenkanten(längen). Skizziere den Körper!
   a) $c = 6$ cm; $h_c = 5{,}3$ cm; $h = 9{,}8$ cm **b)** $c = 78$ mm; $h_c = 32$ mm; $h = 48$ mm

4 Der Satz von CAVALIERI und das Volumen schiefer Kreiszylinder

Die Überlegungen, die uns die Übereinstimmung des Volumens von geraden und schiefen Prismen gleicher Grundfläche und Höhe erkennen ließen, können in verschiedener Hinsicht verallgemeinert werden. Dabei werden immer Körper gleicher Höhe verglichen, die aus Schichten aufgebaut sind.
Damit ihre Volumina gleich sind,
- muß der eine aus dem anderen nicht unbedingt allein durch Verschieben der Schichten hervorgehen (↗ Bild D 8),
- müssen die Querschnitte, die die Schichten in gleicher Höhe begrenzen, nicht zueinander kongruent sein; es genügt Flächengleichheit (↗ Bilder D 9 und D 10),
- müssen die Körper nicht ebenflächig begrenzt sein (↗ Bild D 10).

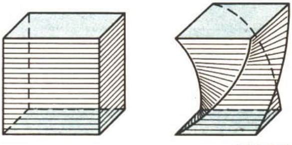


Bild D 8

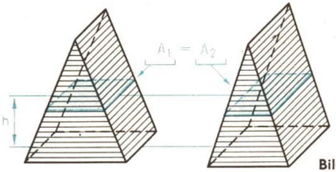


Bild D 9

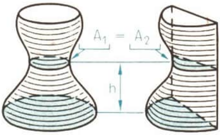


Bild D 10

Derartige Überlegungen führen zu einem Satz, der auf den italienischen Mathematiker FRANCESCO BONAVENTURA ÇAVALIERI (1598–1647), einen Schüler von GALILEI, zurückgeht.

▷ 3 **_Satz von CAVALIERI_: Von zwei Körpern mit den Volumina V_1 und V_2 mögen die Grundflächen in ein und derselben Ebene liegen. Wenn dann gilt**
(1) die Grundflächen haben den gleichen Inhalt,
(2) die Höhen sind gleich lang,
(3) _jeder_ ebene Schnitt parallel zur Grundfläche erzeugt bei beiden Körpern inhaltsgleiche Schnittflächen,
so ist $V_1 = V_2$.

Ein entsprechender Satz gilt auch für Körper, bei denen man nicht von einer Grundfläche sprechen kann (↗ Bild D 11).
Zu jedem schiefen Kreiszylinder gibt es auch einen geraden Kreiszylinder mit gleicher Höhe und gleichem Grundkreisradius.

● 13 Erläutere anhand des Bildes D 12, daß für beide Kreiszylinder die Bedingungen des Satzes von CAVALIERI erfüllt sind!

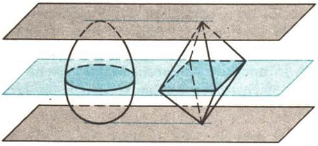


Bild D 11

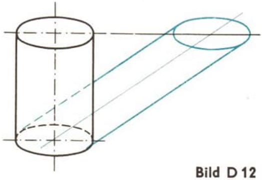


Bild D 12

Auch das Volumen eines schiefen Kreiszylinders ergibt sich nach einer der bekannten Formeln:

$V = \pi r^2 \cdot h$	$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$

Aufgaben

1. Berechne die Höhe eines Kreiszylinders, von dem folgende Größen gegeben sind!
a) $V = 190\ \text{cm}^3$; $r = 3\ \text{cm}$ b) $V = 160\ \text{cm}^3$; $d = 65\ \text{mm}$

Bild D 13

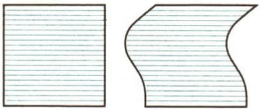


Bild D 14

2. Bei einem schiefen Kreiszylinder seien Grund- und Deckfläche so gegeneinander versetzt, daß ihre Grundrisse einander berühren. Der Grundkreisdurchmesser sei d, die Länge einer Mantellinie $s = 2d = 140$ mm. Fertige eine Skizze an und berechne das Volumen!

3.* **a)** Die ebene Figur F im Bild D 13 wird von zwei zueinander parallelen Strecken der Länge 4,5 cm und zwei Halbkreisen mit dem Radius 1,2 cm begrenzt. Berechne ihren Flächeninhalt!

b) Man kann den Flächeninhalt von F auch nach einem Satz berechnen, der dem für den Raum gültigen Satz D 3 entspricht (↗ Bild D 14). Formuliere diese Aussage und berechne nach ihr ebenfalls den Flächeninhalt von F! Vergleiche mit dem Ergebnis von a)!

Pyramiden

5 Pyramiden — ihre Kanten und Begrenzungsflächen

Der Name „Pyramide" für gewisse geometrische Körper stammt von monumentalen Bauwerken her, die in Ägypten im 3. Jahrtausend v. u. Z. als Grabstätten der Pharaonen errichtet wurden und heute noch eine Sehenswürdigkeit darstellen (↗ Bild auf dem Innentitel des Buches, auf Seite 1). Ihr Bau war mit großen Anstrengungen und Opfern unter den Erbauern, darunter vielen Sklaven, verbunden. Auch in anderen Kulturen, beispielsweise bei den Mayas in Mexiko, wurden als Grabstätten oder Sternwarten Bauten errichtet, die man Pyramiden nennt.

14 Worin weichen die Bauwerke im Bild D 15 von dem ab, was du über Pyramiden als geometrische Körper bereits weißt?

Pyramidenbauten haben als Grundfläche (fast) immer ein Quadrat, und ihre Spitze befindet sich senkrecht über dessen Mittelpunkt. Beim geometrischen Körper „Pyramide" muß das nicht so sein.

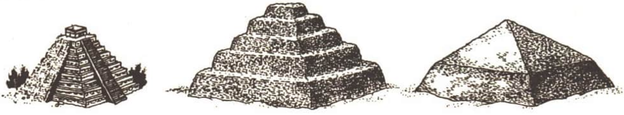


Bild D 15: Pyramide der Mayas in Mittelamerika und zwei ägyptische Pyramiden

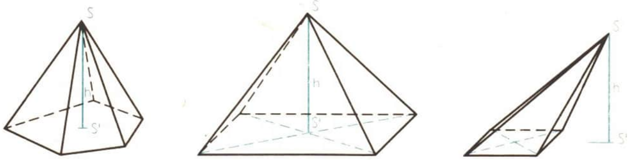
Bild D 15

▶ 4

DEFINITION: Ein geometrischer Körper heißt *n-seitige Pyramide*, wenn er begrenzt wird von
(1) einer *n*-Ecksfläche und
(2) *n* Dreiecksflächen, die einen Eckpunkt gemeinsam haben.

Eine Pyramide kann man sich dadurch entstanden denken, daß man die Punkte eines n-Ecks mit einem Punkt S, der nicht in der Ebene des n-Ecks liegt, verbindet.
Das n-Eck heißt **Grundfläche**, die n Dreiecksflächen **Seitenflächen** und S die **Spitze** der Pyramide. Das Lot von S auf die Grundflächenebene (oder auch seine Länge) heißt **Höhe** der Pyramide; dabei nennt man S' auch Höhenfußpunkt (↗ Bild D 16).
Die Seiten der Grundfläche der Pyramide bezeichnet man als **Grundkanten**, die von der Spitze ausgehenden Kanten als **Seitenkanten** der Pyramide.

15 **a)** Das Bild D 17 zeigt eine dreiseitige Pyramide $ABCD$, ein **Tetraeder**[1]). Was läßt sich hier über Grundfläche, Spitze und Höhe sagen?
b) Stelle eine 4 seitige Pyramide im Grund- und Aufriß dar, bei der die Grundfläche ein Rechteck $ABCD$ mit $a = 4$ cm, $b = 5{,}5$ cm ist und die Höhe 6 cm beträgt!



Fünfseitige Pyramide — Gerade vierseitige Pyramide — Schiefe vierseitige (quadratische) Pyramide

Bild D 16

Man unterscheidet gerade und schiefe Pyramiden. Eine solche Unterscheidung ist jedoch nur sinnvoll, wenn in der Grundfläche ein Punkt M derart enthalten ist, daß bei einer Drehung um M die Grundfläche auf sich selbst abgebildet wird (Drehwinkel $\alpha < 360°$). Bei geraden Pyramiden fällt der Höhenfußpunkt S' mit M zusammen, bei schiefen nicht (↗ Bild D 16).
Gerade Pyramiden mit regelmäßigen n-Ecken als Grundfläche nennt man auch **regelmäßige Pyramiden.**
Bei Berechnungen an Pyramiden muß man sorgfältig zwischen der Körperhöhe und den Höhen der Seitenflächen unterscheiden.

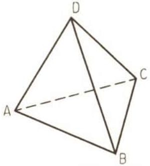


Bild D 17

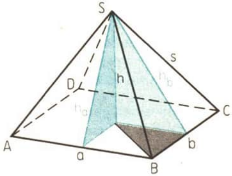


Bild D 18

[1]) tetraedron (griech.) – Vierflächner

● 16 a) Vergleiche die Seitenflächen der geraden Pyramide $ABCDS$ mit rechteckiger Grundfläche (↗ Bild D 18) für den Fall $a \neq b$ und für den Fall $a = b$ („quadratische Pyramide")!
b) Erläutere anhand des Bildes D 18, welche rechtwinkligen Dreiecke man bei einer quadratischen Pyramide benutzen kann, um aus Grundkante a und Höhe h die Seitenkante s zu berechnen!
c) Berechne die Höhen der Seitenflächen für eine gerade Pyramide mit den Maßen aus Auftrag 15b!

Die Seitenflächen einer Pyramide bilden ihren **Mantel**. Aus Mantel und Grundfläche setzt sich die **Oberfläche** der Pyramide zusammen. Für die Berechnung des Oberflächeninhalts A_O einer Pyramide sind also die Inhalte A_M des Mantels und A_G der Grundfläche zu addieren:

$$A_O = A_M + A_G.$$

■ 5 Das Dach eines Hauses hat die Form einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkantenlänge $a = 12{,}0$ m und der Höhe $h = 2{,}5$ m. Wie groß ist der Inhalt der Dachfläche?

Lösungsüberlegung: Zu berechnen ist der Mantelinhalt der Pyramide. Er setzt sich zusammen aus den Inhalten der vier Seitendreiecke. Da die Pyramide gerade und quadratisch ist, sind die Seitenflächen zueinander kongruente gleichschenklige Dreiecke und damit flächeninhaltsgleich.

Lösung: Es gilt $A_M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot a \cdot h_a$.

Nach dem *Satz des Pythagoras* kann die Seitenflächenhöhe h_a berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned} h_a^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \\ h_a &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} \end{aligned}\right\}$$

Damit erhalten wir $A_M = 2a \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$

● 17 a) Führe die im Beispiel D 5 begonnene Rechnung zu Ende! (L)
b) Berechne die Längen der Dachgrate (Seitenkanten)! (L)

Aufgaben

1. Zeichne ein Netz und ein Schrägbild
a) der regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mit der Grundkante $a = 3{,}2$ cm und der Seitenkante $s = 5$ cm,
b) der dreiseitigen Pyramide, deren Begrenzungsflächen vier gleichseitige Dreiecke mit $a = 4{,}3$ cm sind („regelmäßiges Tetraeder")!

2. Von einer geraden quadratischen Pyramide sind gegeben:
a) $a = 3{,}5$ cm; $h = 5{,}5$ cm, b) $a = 55$ mm; $h_a = 6$ cm, c) $h = 6$ m; $h_a = 7{,}5$ m.
Berechne jeweils den Oberflächeninhalt! Skizziere je ein Netz!

3. Ein Spielzelt für Kinder hat die Gestalt einer geraden quadratischen Pyramide. Der Umfang am Boden wurde mit 3,5 m ermittelt. Der Stab, der die Spitze abstützt, ist 1,10 m lang. Berechne den Inhalt des Mantels! (L)

4. Von einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide wurden die Grundkante a und die Seitenflächenhöhe h_a gemessen. Berechne A_M, wenn die Messung $a = 5{,}1$ cm und $h_a = 3{,}4$ cm ergab!

5. Ein Dach in Form einer quadratischen Pyramide mit 5,80 m langer Grundkante und 2,55 m Seitenflächenhöhe soll mit Dachpappe gedeckt werden. Welcher Preis ist für die Dachpappe zu veranschlagen, wenn 1 m² Pappe 1,10 M kostet und 10% Zuschlag für Überlappungen und Verschnitt gerechnet werden müssen? (L)

6.* Eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche und der Seitenkantenlänge 8 cm hat einen Mantelinhalt von 140 cm². Sie wird durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten; dabei wird eine Pyramide abgeschnitten, deren Seitenkanten 4 cm lang sind. Wie groß ist der Mantelinhalt der abgeschnittenen Pyramide? Skizziere den Sachverhalt! (L)

6 Das Volumen von Pyramiden

● 18 Wie verändert sich das Volumen eines Prismas (eines Zylinders), wenn
a) die Höhe vergrößert wird und die Grundfläche unverändert bleibt?
b) die Grundfläche verkleinert wird und die Höhe unverändert bleibt?
Stelle derartige Überlegungen auch für Pyramiden an!

Wie bei Prismen und Zylindern hängt auch bei Pyramiden das Volumen allein vom Grundflächeninhalt und der Höhe ab. Zwei Pyramiden mit gleichen Grundflächeninhalten und Höhen erfüllen nämlich die Voraussetzungen des *Satzes von CAVALIERI*. Zum Nachweis genügt es zu zeigen, daß durch jeden ebenen Schnitt parallel zur Grundfläche im gleichen Abstand a bei beiden Pyramiden flächengleiche Schnittfiguren erzeugt werden. Das folgt aber daraus, daß die Schnittfiguren zur jeweiligen Grundfläche ähnlich sind.

● 19 **a)** Begründe anhand des Bildes D 19 die Ähnlichkeit von Grundfläche und Schnittfigur für eine dreiseitige Pyramide und für eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche!
b) Erläutere, wie aus der Flächengleichheit der Grundflächen die Flächengleichheit der Schnittfiguren folgt! (L)

▷ 5 **SATZ: Pyramiden mit gleichen Grundflächeninhalten und Höhen sind volumengleich.**

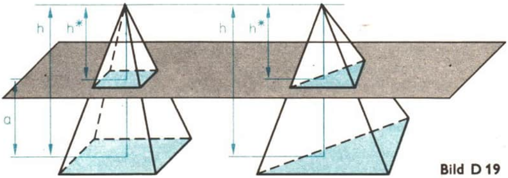


Bild D 19

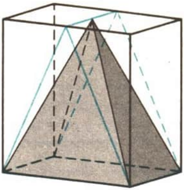


Bild D 20

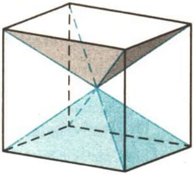


Bild D 21

Bei Prismen und Zylindern besteht sogar direkte Proportionalität zwischen Grundflächeninhalt und Volumen bei gleicher Höhe sowie zwischen Körperhöhe und Volumen bei gleichem Grundflächeninhalt. Auch bei Pyramiden ist dies so; deshalb kann man als Volumenformel ansetzen:

$$V = c \cdot A_G \cdot h.$$

Dabei ist c ein noch zu ermittelnder konstanter Faktor.

20 **a)** Warum muß gewiß $c < 1$ gelten?

b) Erläutere anhand des Bildes D 20, daß sogar $c < \frac{1}{2}$ sein muß!

c) Ein Würfel (Kantenlänge a) läßt sich durch geeignete Schnitte in 6 volumengleiche (sogar kongruente) Pyramiden zerlegen (↗ Bild D 21); ihre Spitze ist jeweils der Würfelmittelpunkt. Ermittle c!

▷ 6 **SATZ:** ***Das Volumen V jeder Pyramide mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhe h beträgt***

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h.$$

Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir. (Die Aufgabe 7* auf Seite 140 läßt den Grundgedanken für einen solchen Beweis erkennen.)

Die Erbauer der ersten Pyramiden, die Ägypter, besaßen wahrscheinlich keine Kenntnisse zur Ermittlung des Rauminhalts *beliebiger* Pyramiden. Jedoch findet sich in dem knapp 4 Jahrtausende alten, nach seinem jetzigen Aufbewahrungsort benannten Moskauer Papyrus die Berechnung für einen ganz speziellen „Pyramidenstumpf" (↗ Bild D 22).

Im antiken Griechenland wußte man bereits, daß Pyramiden mit gleichem Grundflächeninhalt und gleicher Höhe gleiches Volumen haben. Dieser Satz findet sich in den berühmten „Elementen" des EUKLEIDES (365–300 v. u. Z.), ebenso wie die Aussage, daß das Volumen jeder Pyramide ein Drittel des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe beträgt.

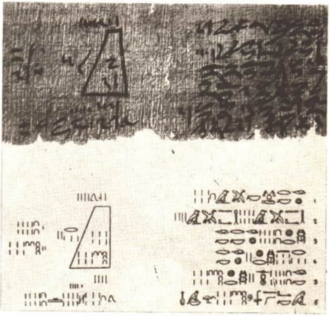


Bild D 22: Moskauer Papyrus mit der Berechnung eines Pyramidenstumpfes

6 Eine gerade quadratische Pyramide sei 0,85 m hoch und habe ein Volumen von 4281 dm³. Wie lang sind ihre Grundkanten?

Lösungsüberlegung: Die Volumenformel $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ lautet für diesen Fall $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$. Daraus läßt sich die Länge a der Grundkanten berechnen. Damit sie sich in Meter ergibt, muß die Volumenangabe in Kubikmeter umgerechnet werden.
Gegeben: $h = 0{,}85$ m; $V = 4\,281$ dm³ $= 4{,}281$ m³
Gesucht: a (in Meter)

Lösung: $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h; \quad a^2 = \frac{3V}{h}; \quad a = \sqrt{\frac{3V}{h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 4{,}281}{0{,}85}}$ m

Überschlag: $a \approx \sqrt{16}$ m $= 4$ m

Ablaufplan: 3 $\boxed{\times}$ 4,281 $\boxed{\div}$ 0,85 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ [3.8870827]

Vergleich mit Überschlag: 3,88 ... ≈ 4
Antwortsatz: Die Grundkanten der Pyramide sind etwa 3,9 m lang.

Aufgaben

1. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rechteck mit den Seitenlängen 23,5 cm bzw. 16,8 cm.
Wie groß ist das Volumen, wenn die Höhe mit 18,2 cm angenommen wird?

2. Eine Pyramide habe als Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck (Länge der Basis 4,2 cm, Länge der Schenkel 7,5 cm). Die Höhe sei 12 cm lang. Wie groß ist das Volumen?

3. Gegeben sei
   a) eine gerade quadratische Pyramide mit den Maßen $a = 6$ cm (Grundkanten) und $h = 24$ cm (Körperhöhe);
   b) eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche und den Maßen $a = 12$ m, $b = 8$ m (Grundkanten) sowie $h = 16$ m (Körperhöhe). (L)
   Berechne jeweils das Volumen und den Oberflächeninhalt!

4. Eine quadratische Pyramide mit 6 cm langen Grundkanten habe ein Volumen von 260 cm³. Wie hoch ist die Pyramide?

5. Das Bild D 23 zeigt drei regelmäßige Pyramiden.
   a) Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide im Bild D 23a!
   b) Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide im Bild D 23b!
   c) Stelle die Pyramide im Bild D 23c in Zweitafelprojektion dar und berechne ihr Volumen! (L)

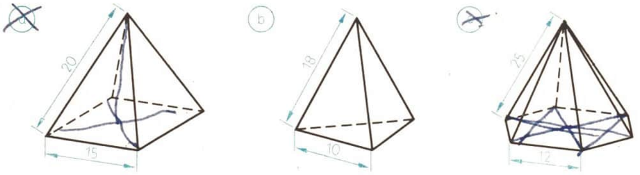


Bild D 23

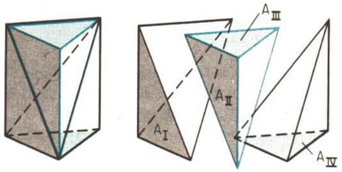


Bild D 24

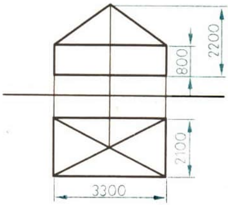


Bild D 25

6. Wie verändert sich das Volumen einer quadratischen Pyramide,
a) wenn die Höhe verdoppelt wird,
b) wenn die Länge der Grundkanten halbiert wird,
c) wenn sowohl Höhe als auch Grundkanten doppelt so lang gewählt werden?

7.* Ein dreiseitiges Prisma wird durch zwei geeignete Schnitte in drei Pyramiden zerlegt (↗ Bild D 24). Weise nach, daß alle drei Pyramiden das gleiche Volumen haben!

8. Ein Winterzelt für sechs Soldaten habe die Form eines Quaders mit aufgesetzter Pyramide (Maße siehe Bild D 25).
a) Wieviel Kubikmeter Luftraum werden von diesem Zelt eingeschlossen?
b) Wieviel Quadratmeter Zeltstoff werden für das Zelt gebraucht, wenn die Bodenfläche unberücksichtigt bleibt?

Kreiskegel

7 Kreiskegel und ihr Volumen

Beim Abkippen von Sand, Kies und anderen Materialien entsteht ein sogenannter Schüttkegel. Dabei hängt der Böschungswinkel (↗ Bild D 26) vom Material ab (für Sand $\alpha \approx 33°$).
Einen mathematischen Körper dieser Form bezeichnet man als **Kreiskegel**, denn die Grundfläche ist ein Kreis. Man nennt ihn auch **geraden** Kreiskegel, denn der Fußpunkt des Lotes von der Spitze S auf die Grundfläche ist deren Mittelpunkt.

● **21** **a)** Nenne weitere Körper aus der Umwelt, die die Form eines Kreiskegels haben!
b) Erläutere am Bild D 27, wie man einen geraden Kreiskegel als Rotationskörper erhält! Gib die Rotationsachse an!

Bild D 26

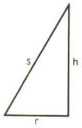


Bild D 27

In der gleichen Beziehung wie der Kreiszylinder zum Prisma steht der Kreiskegel zur Pyramide (↗ Bild D 28). So spricht man auch beim Kreiskegel von **Mantel** und **Höhe**. Die Strecken, die einen Punkt des Grundkreises mit der Spitze des Kegels verbinden, heißen **Mantellinien**.

● 22 Begründe, daß bei einem geraden Kreiskegel alle Mantellinien gleich lang sind! Vergleiche mit den Seitenkanten einer Pyramide!

Die enge Verwandtschaft von Pyramide und Kegel drückt sich auch in der Gültigkeit der Volumenformel $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ für den Kegel aus.

▷ 7 **SATZ:** ***Das Volumen V eines jeden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r, dem Grundkreisdurchmesser d und der Höhe h beträgt:***

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$
bzw.
$$V = \frac{1}{12}\pi d^2 \cdot h.$$

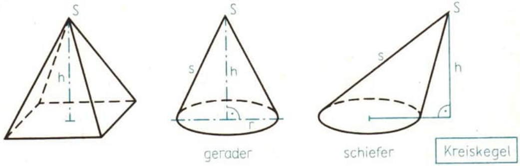


Bild D 28

Zum Beweis kann man wieder den *Satz des CAVALIERI* verwenden. Dazu vergleicht man einen Kegel und eine Pyramide, die gleiche Höhe und gleichen Grundflächeninhalt haben.

● 23 Eine gerade quadratische Pyramide und ein gerader Kreiskegel haben gleichen Grundflächeninhalt ($A_G = 27\ \text{cm}^2$) und gleiche Höhe ($h = 12$ cm). Beide werden in einer Höhe von 8 cm über der Grundfläche durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten.

a) Skizziere ein Schrägbild beider Körper mit ihren Schnittflächen!

b) Wie groß ist der Flächeninhalt der Schnittflächen? (L)

c) Erläutere, daß in jeder Höhe die beiden Schnittflächen inhaltsgleich sind!

■ 7 Ein kegelförmiger Sandhaufen soll abgefahren werden. Der Umfang dieses Kegels wurde durch Abschreiten näherungsweise mit 22 m ermittelt, seine Höhe auf 2 m geschätzt.
Wieviel Fahrten müssen gemacht werden, wenn ein Lastwagen 3 t Tragfähigkeit hat und 1 m³ Sand 1 800 kg wiegt?

Lösungsüberlegung: Die Masse des Sandes ist aus Volumen und Dichte zu berechnen. Zunächst ist der Radius des Grundkreises aus dem Umfang zu ermitteln.

Gegeben: $u = 22$ m, $h = 2$ m, $\varrho = 1\,800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $L = 3\text{t}$

Gesucht: Anzahl n der Fahrten

Überschlag: $u = 22$ m, also $r \approx 4$ m; $A_G \approx 45\ \text{m}^2$; $V \approx 30\ \text{m}^3$
Da je Fahrt etwa 2 m³ transportiert werden können, müssen etwa 15 Fahrten angesetzt werden.

Lösung: $u = 22\ \text{m}$ $\qquad 22\ \text{m} = 2\pi r$

$$r = \frac{11}{\pi}\ \text{m}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \qquad V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{11}{\pi}\right)^2 \cdot 2\ \text{m}^3 = \frac{121 \cdot 2}{3\pi}\ \text{m}^3$$

$$m = \varrho \cdot V \qquad m = \frac{1{,}8 \cdot 121 \cdot 2}{3 \cdot \pi}\text{t}$$

$$n = \frac{m}{L} \qquad n \approx \frac{1{,}8 \cdot 242}{9\pi}$$

Die Berechnung mit dem Taschenrechner liefert $n \approx 15{,}406\,199$
Antwortsatz: Es müssen 16 Fahrten gemacht werden.

Aufgaben

1. Berechne das Volumen eines Kreiskegels auf Kubikzentimeter genau! (Grundkreisradius r, Grundkreisdurchmesser d, Höhe h)
   a) $r = 4{,}5\ \text{cm}$; $h = 7{,}8\ \text{cm}$ **b)** $r = 11{,}3\ \text{cm}$; $h = 20{,}9\ \text{cm}$
   c) $d = 6\ \text{cm}$; $h = 11\ \text{cm}$ **d)** $d = 11\ \text{cm}$; $h = 6\ \text{cm}$

2. Berechne für folgende gerade Kreiskegel die fehlenden Größen!

	Radius	Durchm.	Umfang	Inhalt	Höhe	Mantellinie	Volumen
	der Grundfläche						
a)			25 cm		5,5 cm		
b)					4,5 cm		51 cm³
c)		4,4 cm					46 cm³
d)				18,5 cm²			75,7 cm³
e)		6,5 cm				7,8 cm	

3. Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck wird um eine Kathete ($a = 3{,}5\ \text{cm}$) gedreht. Berechne das Volumen des entstehenden Kegels!

4. Aus einem Zylinder mit $h = 9{,}3\ \text{cm}$ und $r = 4{,}5\ \text{cm}$ wird ein gerader Kreiskegel mit gleicher Höhe und gleichem Grundkreisradius hergestellt. Berechne den Abfall!

5. Eine kegelförmige Abraumhalde hat bei einem Böschungswinkel von **a)** 45°, **b)*** 30° (L) eine Höhe von 23 m. Ermittle die Abraummenge!

6.* Ein Abraumkegel hat eine Höhe von 1,5 m und einen Grundkreisdurchmesser von 4,2 m. Durch Aufschüttung vergrößert sich die Höhe um 0,5 m. Wieviel Abraum ist dazugekommen? (L)

8 Mantel- und Oberflächeninhalt gerader Kreiskegel

Wird der Mantel eines geraden Kreiskegels längs einer Mantellinie aufgeschnitten, so läßt er sich in die Ebene abwickeln (↗ Bild D 29). Dabei entsteht ein Kreisausschnitt mit dem Radius s, wobei der Kreisbogen ebenso lang wie der Umfang des Kegelgrundkreises ist. Bezeichnet man mit A_M den Flächeninhalt des Kegelmantels und mit A_{K_s} den des Kreises mit dem Radius s, so gilt:

$$\frac{A_M}{A_{Ks}} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s} \qquad A_{Ks} = \pi s^2$$

$$A_M = \frac{r}{s} \cdot A_{Ks} = \frac{r}{s} \cdot \pi s^2 = \pi r s$$

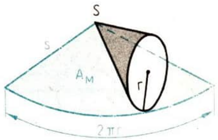


Bild D 29

▷ 8 **SATZ: Der *Mantelinhalt* A_M *eines geraden Kreiskegels* mit dem Grundkreisradius r und der Mantellinie s beträgt:** $A_M = \pi r s$.

Da sich die Oberfläche eines Kegels aus Grundkreis und Mantel zusammensetzt, erhält man ihren Inhalt als Summe der betreffenden Flächeninhalte:

$$A_O = A_M + A_G = \pi r s + \pi r^2.$$

▷ 9 **Der *Oberflächeninhalt* A_O *eines geraden Kreiskegels* mit dem Grundkreisradius r und der Mantellinie s beträgt:** $A_O = \pi r(s + r)$.

24 Gib Formeln für Mantel- und Oberflächeninhalt eines geraden Kreiskegels an, die statt des Radius den Durchmesser des Grundkreises enthalten!

8 Von einem geraden Kreiskegel mit $r = 6$ m und $h = 8$ m soll der Oberflächeninhalt berechnet werden.

Lösungsüberlegung: Zur Berechnung des Oberflächeninhalts wird die Länge s der Mantellinie benötigt. Sie kann nach dem *Satz des PYTHAGORAS* aus h und r berechnet werden.

Allgemeine Lösung: $s = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$A_O = \pi r\left(\sqrt{h^2 + r^2} + r\right)$$

25 **a)** Führe die Rechnung zum Beispiel D 8 im Kopf aus, und vergleiche mit der Angabe im Lösungsanhang! (L)

b) Wie groß ist der Zahlenwert von A_O, wenn man für π den Näherungswert 3,14 (3,141 6) verwendet? Werte eine solche Angabe unter der Voraussetzung, daß auch die Ausgangswerte Näherungswerte sind!

c) Stelle den Kegel in Zweitafelprojektion dar und zeichne sein Netz in einem geeigneten Maßstab!

Aufgaben

1. Berechne den Oberflächeninhalt eines geraden Kreiskegels, für den die folgenden Maße angenommen werden! (Mantellinie s, Grundkreisradius r, Grundkreisdurchmesser d, Höhe h, Umfang u)

a) $s = 7$ cm; $r = 3$ cm **b)** $u = 11$ cm; $s = 3{,}5$ cm **c)** $s = 9{,}5$ cm; $d = 4{,}5$ cm
d) $s = 4{,}5$ cm; $d = 9{,}5$ cm **e)** $r = 2{,}6$ cm; $h = 10{,}5$ cm **f)** $d = 5{,}2$ cm; $h = 10{,}5$ cm

2. Berechne für einen geraden Kreiskegel die fehlenden Größen!

	Radius der Grundfläche	Umfang der Grundfläche	Höhe	Mantellinie	Mantelinhalt	Oberflächeninhalt
a)		64 cm		70 cm		
b)	35 cm		75 cm			
c)					200 cm²	355 cm²
d)	5 cm					276 cm²

3. Ein Werkstück besteht aus einem Zylinder ($d = 70$ mm, $h = 120$ mm) mit aufgesetztem Kegel von gleicher Grundfläche und halber Höhe des Zylinders. Ermittle den Oberflächeninhalt!

4. Aus kreisförmigem Filterpapier ($d = 10$ cm) werden durch zweimaliges Falten Trichter hergestellt. Welche Höhe und welches Fassungsvermögen haben sie?

5.* Aus Blechscheiben mit dem Durchmesser von 120 mm sollen Trichter durch Biegen von Kreisausschnitten mit den Zentriwinkeln **a)** 120°, **b)** 180°, **c)** 270° hergestellt werden. Wie hoch werden die Trichter, und wie groß wird ihr Fassungsvermögen? (L)

6. Der Mantel eines Kreiskegels sei ein Kreisausschnitt mit dem Radius 3,5 cm und dem Zentriwinkel 240°. Berechne Raum- und Oberflächeninhalt des Kegels! Zeichne ein Netz!

Kugeln

9 Kugeln und ihr Volumen

● 26 Nenne Beispiele aus dem täglichen Leben und aus der Technik für das Auftreten von Kugeln! Warum wurde dabei wohl Kugelform gewählt?

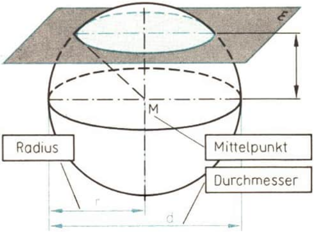
Die Kugel ist wie der gerade Kreiszylinder und der gerade Kreiskegel ein *Rotationskörper.*

● 27 **a)** Welche ebene Figur kann bei Rotation um eine Achse eine Kugel erzeugen? Wie muß die Achse liegen?
b) Die Kugel kann man auch als Menge von Punkten mit einer Abstandseigenschaft definieren. Gib eine solche Definition an!

Wie beim Kreis werden auch bei der Kugel die Wörter „Radius" und „Durchmesser" in doppelter Bedeutung verwendet. So ist einerseits jede Strecke, die von einem Punkt der Kugeloberfläche und dem Mittelpunkt M der Kugel begrenzt wird, ein Radius der Kugel. Andererseits wird die Länge all dieser Strecken ebenfalls als (der) Radius der Kugel bezeichnet.
Jede Ebene ε, die von M einen kleineren Abstand als r hat, schneidet die Kugel in einem Kreis (↗ Bild D 30).

● 28 **a)** Welchen Radius hat der Schnittkreis, wenn M in der Schnittebene liegt?
b) Berechne den Radius des Schnittkreises für eine Kugel mit dem Radius 10 cm, wenn M von der Schnittebene den Abstand 6 cm hat!

● 29 **a)** Von welchen Größen wird das Volumen einer Kugel wohl abhängen?
b) Wie kann man durch Messungen zu einer Vermutung über eine Volumenformel kommen?



Die Volumenberechnung der Kugel geht auf ARCHIMEDES (etwa 287 bis 212 v. u. Z.) zurück, der in der Stadt Syrakus auf Sizilien lebte. ARCHIMEDES war nicht nur ein bedeutender Mathematiker des Altertums, sondern auch ein bekannter Techniker. Die von ihm entwickelten Verteidigungswaffen trugen dazu bei, daß seine Heimatstadt zwei Jahre lang der Belagerung durch die zahlenmäßig weit überlegenen Römer trotzen konnte.
Schließlich gelang es den Römern durch eine List, die Stadt zu erobern, wobei auch ARCHIMEDES ums Leben kam. Sein Grabmal wurde mit einer Figur geschmückt, die an seine Berechnung des Kugelvolumens erinnern sollte.
ARCHIMEDES hatte das Volumen der Kugel mit dem Volumen des der Kugel umbeschriebenen Zylinders verglichen. Dabei war er zu dem Ergebnis gelangt, daß das Kugelvolumen $\frac{2}{3}$ des Volumens des umbeschriebenen Zylinders beträgt (↗ Bild D 31).

● 30 Berechne $\frac{2}{3}$ des Volumens des umbeschriebenen Zylinders!

Statt die Überlegungen von ARCHIMEDES nachzuvollziehen, wollen wir die im Auftrag D 30 erhaltene Volumenformel für die Kugel mit Hilfe des *Satzes von CAVALIERI* (vgl. ▷ 3 S. 133) bestätigen. Dabei ist es günstig, sich auf die Halbkugel zu beschränken und neben dem umbeschriebenen Zylinder auch den einbeschriebenen Kegel mit zu betrachten (↗ Bild D 32).
Aus dem Ergebnis des Auftrags D 30 erhalten wir als

Volumen der Halbkugel: $V_{HK} = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Dieses Volumen läßt sich als Differenz des Zylindervolumens $V_Z = \pi r^3$ und des Kegelvolumens $V_{Ke} = \frac{1}{3}\pi r^3$ ausdrücken. Deshalb genügt es nachzuweisen, daß die Halbkugel das gleiche Volumen wie der Restkörper (im Bild D 32 schwarz gerastert) hat. Für diesen Nachweis stellen wir uns den Kegel so in den Zylinder einbeschrieben vor, wie es das Bild D 33 zeigt.

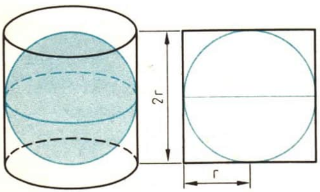
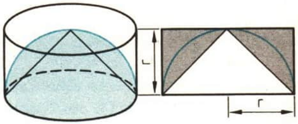


Bild D 31



$V_{Zyl} = r^2\pi r = \pi r^3$

$V_{Ke} = \frac{1}{3}r^2\pi r = \frac{1}{3}\pi r^3$

$V_{Restkörper} = \frac{2}{3}\pi r^3$

Bild D 32

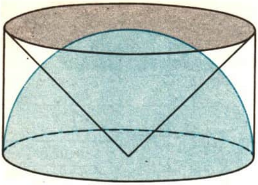


Bild D 33

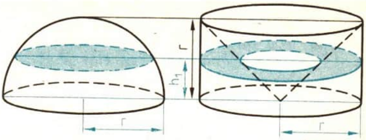
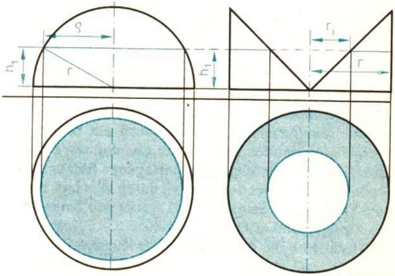


Bild D 34



Dann gilt:

Bild D 35

Halbkugel und Restkörper haben gleiche Grundflächeninhalte und gleich lange Höhen. Damit sind die Voraussetzungen (1) und (2) des *Satzes von CAVALIERI* (↗ Seite 133) erfüllt. Um das Erfülltsein von (3) zu überprüfen, legen wir einen ebenen Schnitt parallel zu den Grundflächen im Abstand *h* (↗ Bild D 34). Dieser Schnitt liefert

im Falle der Halbkugel
einen Kreis mit dem Radius ϱ.
Es gilt (↗ Bild D 35):
$\varrho^2 = r^2 - h_1^2$ (*Satz des Pythagoras*)

$A_K = \pi\varrho^2$

$A_K = \pi(r^2 - h_1^2)$

im Falle des Restkörpers
einen Kreisring mit den Radien r_i und r_a.
Es gilt (↗ Bild D 35):
$r_i \;= h_1$ (Schenkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck)
$r_a \;= r$
$A_{KR} = \pi r^2_a - \pi r^2_i$
$A_{KR} = \pi r^2 - \pi h_1^2 = \pi(r^2 - h^2_1)$.

Also sind die Flächeninhalte gleich (↗ Bild D 35). Restkörper und Halbkugel sind also nach dem *Satz des CAVALIERI* volumengleich. Damit gilt für das Kugelvolumen:

▷ 10 **SATZ: Das *Volumen V einer jeden Kugel* mit dem Radius *r* beträgt:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

● 31 Stelle eine Formel für das Kugelvolumen auf, die den Durchmesser *d* enthält!

■ 9 Es ist die Masse einer Eisenkugel mit dem Durchmesser 12,9 cm zu berechnen.

Lösungsüberlegung: Da zwischen Volumen und Masse Proportionalität besteht (mit der Dichte ϱ als Proportionalitätsfaktor), kann die Masse aus dem Volumen berechnet werden.

Gegeben: $d = 12{,}9\ \text{cm}$; $\varrho = 7{,}86\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (↗ Tafelwerk, S. 59)

Gesucht: m (in g)

Lösung: $m = \varrho \cdot V$; $m\left(= \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3\right) = \varrho \cdot \frac{\pi}{6} d^3$

$$m = 7{,}86 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 12{,}9^3\ \text{g}$$

Überschlag: $m \approx 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 13^3\ \text{g} \approx 4 \cdot 2000\ \text{g} = 8000\ \text{g}$

Ablaufplan: **7,86** $\boxed{\times}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\div}$ **6** $\boxed{\times}$ **12,9** $\boxed{y^x}$ **3** $\boxed{=}$ **[8834.6734]**

Vergleich mit dem Überschlag: 8834, ... ≈ 8000
Antwortsatz: Die Kugel hat eine Masse von 8,83 kg.

Aufgaben

1. Eine Kugel habe den Durchmesser d (bzw. den Radius r). Berechne das Volumen!
   a) $d = 15{,}4$ cm **b)** $r = 15{,}4$ cm **c)** $r = 32{,}5$ cm **d)** $d = 32{,}5$ mm

2. Eine Kugel habe das Volumen V. Berechne ihren Radius und ihren Durchmesser!
   a) $V = 322\ \text{cm}^3$ **b)** $V = 32{,}2\ \text{dm}^3$ **c)** $V = 3{,}22\ \text{dm}^3$

3. Bei normalem Luftdruck (1013 kPa) und 0 °C beträgt die Dichte von Luft $0{,}001\,29\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
   Welche Luftmasse wird unter diesen Bedingungen von einem Ballon mit einem Durchmesser von 4,3 m verdrängt?

4. Kannst du eine Korkkugel tragen, die einen Durchmesser von 1 m hat (Dichte $\varrho = 0{,}24\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)?

5. Berechne die Masse einer ausgehöhlten eisernen Halbkugel, deren äußerer Durchmesser mit 15,0 cm und deren Wanddicke mit 1,0 cm bestimmt wurde!

6. Ein Vollgummiball hat eine Masse von 90 g und einen Umfang von 22 cm. Wie groß ist die Dichte?

7.* Zum Kugelstoßen wird eine Kugel mit einer Masse von 7,25 kg verwendet. Der Umfang soll 391 mm betragen, wenn sie aus Stahl besteht. Enthält sie eine bleihaltige Füllung, so beträgt der Umfang 346 mm, und der Stahlmantel ist 7 mm dick.
   a) Berechne die Dichte des Stahls! (L)
   b) Berechne für die Kugel mit der bleihaltigen Füllung die Masse des Stahlmantels und der Bleifüllung!

10 Oberflächeninhalt von Kugeln

Während der Mantel und damit die Oberfläche von Zylinder und Kegel in die Ebene abgewickelt werden können, ist dies bei der Kugeloberfläche nicht der Fall. Deshalb gibt es auch keine Landkarten, die die Erdoberfläche völlig verzerrungsfrei abbilden. Obwohl der Oberflächeninhalt bei Kugeln schwerer als bei Zylindern oder Kegeln zu ermitteln ist, kam schon ARCHIMEDES auch hier zu einem genauen Resultat. Er erkannte, daß der Oberflächeninhalt einer Kugel viermal so groß ist wie der Inhalt eines Kreises mit gleichem Radius.

▷ 11 **Der Oberflächeninhalt A_O jeder Kugel mit dem Radius r beträgt:** $\quad A_O = 4\pi r^2$.

● 32 **a)** Vergleiche diesen Wert mit dem Inhalt des Mantels (der Oberfläche) des umbeschriebenen Zylinders, den ARCHIMEDES betrachtete (↗ Bild D 31)!
b) Gib eine Formel für den Oberflächeninhalt in Abhängigkeit vom Durchmesser d an!

Auf einen Beweis für den Satz D 11 verzichten wir und begnügen uns mit folgender Überlegung: Statt der Kugel betrachten wir ebenflächig begrenzte Körper, deren Begrenzungsflächen sämtlich die Kugel berühren. Der der Kugel umbeschriebene Würfel (↗ Bild D 36a) ist ein einfacher Körper dieser Art. Er nähert die Kugel nur sehr grob an; der von 24 Vielecksflächen begrenzte Körper im Bild D 36b ist schon eine bessere Annäherung. Jeden derartigen Körper kann man sich zusammengesetzt denken aus n Pyramiden, und alle Pyramidenhöhen sind so lang wie der Kugelradius. (Bei dem Körper im Bild D 36b sind es 12 dreiseitige und 12 vierseitige Pyramiden.) Alle Pyramidengrundflächen zusammen bilden die Oberfläche des Körpers; ihre Inhalte $A_1, \ldots, A_n$ ergeben also summiert den Inhalt A_O der Körperoberfläche.
Für das Volumen jeder dieser n Pyramiden gilt $V_k = \frac{1}{3} A_k \cdot r \; (k = 1, 2, \ldots, n)$. Das Volumen V dieses Körpers ist dann die Summe der Volumina $V_1, V_2, \ldots, V_n$ der n Pyramiden:

$$V = \frac{1}{3} A_1 \cdot r + \frac{1}{3} A_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3} A_n \cdot r$$
$$= \frac{r}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \frac{r}{3} \cdot A_O$$

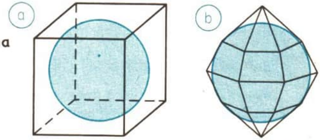


Bild D 36

● 33 **a)** Von wieviel Vielecksflächen muß ein solcher Körper mindestens begrenzt sein, d. h. welches ist die kleinste mögliche natürliche Zahl für n?
b) Bestätige die Beziehung $V = \frac{r}{3} \cdot A_O$ für den der Kugel umbeschriebenen Würfel!

Den Oberflächeninhalt eines der Kugel umbeschriebenen Körpers erhält man also, indem man das Volumen durch $\frac{r}{3}$ dividiert (mit $\frac{3}{r}$ multipliziert). Das gilt für jeden derartigen Körper, möge er auch noch soviel Flächen von noch so geringer Größe haben und damit die Kugel ausgezeichnet annähern. Diese Beziehung gilt auch für die Kugel selbst.

● 34 Erläutere, wie man aus der Beziehung $V = \frac{r}{3} A_O$ die Formel ▷ 11 erhält!

■ 10 Es ist der Inhalt der Oberfläche einer Kugel mit dem Volumen 5,0 m³ zu ermitteln.

Lösungsüberlegung: Aus dem Volumen ist nach Umstellen der Volumenformel der Radius (bzw. Durchmesser) zu ermitteln.

Gegeben: $V = 5{,}0 \text{ m}^3$ *Gesucht:* A_O (in m²)

Lösung: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $r^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot V$; $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot V}$

$$A_O = 4\pi r^2;\; A_O = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot V}\right)^2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot 5}\right)^2 \text{ m}^2$$

Ablaufplan: Wir beginnen mit der Wurzel

3 [×] 5 [÷] 4 [÷] [π] [=] [y^x] 3 [1/x] [=] [x^2] [×] 4 [×] [π] [=] [14.140361]

Überschlag:

$A_O \approx 12 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right)^2\, m^2 = 12\, m^2$

Vergleich mit dem Überschlag:
14, 14... $\sim$ 12
Antwortsatz: Der Oberflächeninhalt der Kugel beträgt rund 14 m².

● 35 **a)** Berechne den Oberflächeninhalt eines Würfels mit dem Volumen 5 m³! Vergleiche mit dem Ergebnis im Beispiel D 10!
b) Stelle die gleichen Überlegungen für einen Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt an!

Von allen Körpern mit gleichem Volumen hat die Kugel den kleinsten Oberflächeninhalt. Es gilt auch: Von allen Körpern mit gleichem Oberflächeninhalt hat die Kugel das größte Volumen. Diese Eigenschaft der Kugel ist beispielsweise maßgebend dafür, daß Seifenblasen Kugelform annehmen. Auch einige technische Anwendungen von Kugeln, etwa bei Bauwerken, beruhen darauf. (↗ Bild D 37)

Bild D 37: Wassertürme in Al-Kuweit

Aufgaben

1. Berechne Oberflächeninhalt und Volumen der Kugeln mit den folgenden Durchmessern!
a) 1 m **b)** 2 m **c)** 3 m **d)** 4 m **e)** 5 m **f)** 6 m
Stelle die Lösungen übersichtlich zusammen und sprich das Ergebnis in einem Satz aus!

2. Eine Kugel habe den Oberflächeninhalt A_O. Berechne Radius und Volumen!
a) $A_O = 616\ cm^2$ **b)** $A_O = 1\,000\ cm^2$ **c)** $A_O = 55{,}44\ m^2$

3. Wie groß sind Durchmesser, Oberflächeninhalt und Volumen einer Kugel mit folgendem Umfang u? **a)** $u = 157$ cm **b)** $u = 2{,}05$ m **c)** $u = 100$ mm

4. Ein Wasserbehälter besteht aus einem Zylinder, der unten durch eine Halbkugel abgeschlossen ist. Der zylindrische Teil des Behälters ist 1,80 m hoch, sein Grundkreis hat 2,00 m Durchmesser (lichte Weite). **a)** Wieviel Hektoliter Wasser faßt dieser Behälter? **b)** Wie groß ist die Benetzungsfläche des Behälters?

5. Die menschliche Lunge besteht aus rund 1,6 Milliarden Bläschen mit je rund 0,2 mm Durchmesser. Berechne die Oberfläche aller Bläschen und vergleiche mit einer dir bekannten Fläche!

6.* Berechne die Dicke der Haut einer Seifenblase von 10 cm Durchmesser, die aus einem Tropfen mit 4 mm Durchmesser entstanden ist! (Führe dieselbe Berechnung näherungsweise mit Hilfe der Oberflächenformel aus! Vergleiche deine Ergebnisse!) (L)

Komplexe Übungen

1. Konstruiere ein Netz einer regelmäßigen Pyramide, deren Volumen 25 cm³ beträgt und die als Grundfläche
 a) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3,5 cm,
 b) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 4,0 cm hat!

2. Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt der folgenden Körper, von denen die angegebenen Stücke gemessen wurden!
 a) Regelmäßige sechsseitige Pyramide, Grundkante $a = 3{,}0$ cm, Seitenkante $s = 6{,}1$ cm
 b) Regelmäßiges Tetraeder, Kantenlänge $a = 8{,}2$ cm

3. Das Bild D 38 zeigt ein regelmäßiges Oktaeder (Achtflächner). Berechne seinen Oberflächeninhalt, wenn die Kantenlänge 5,6 cm beträgt!

4.* Setzt man auf die Begrenzungsflächen eines Würfels mit der Kantenlänge a Pyramiden der Höhe $h = \frac{a}{2}$ auf, so entsteht ein sogenannter Rhombendodekaeder.
 a) Zeichne einen solchen Körper in Zweitafelprojektion und als Schrägbild ($\alpha = 30°$; $q = \frac{1}{2}$)!
 b) Berechne seinen Oberflächeninhalt und sein Volumen!

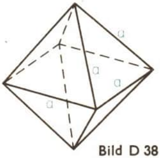


Bild D 38

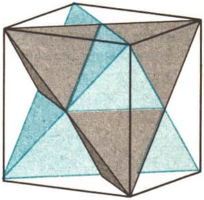


Bild D 39

5.* In einen Würfel lassen sich zwei regelmäßige Tetraeder einbeschreiben, die einander durchdringen und die Flächendiagonalen des Würfels als Kanten haben (Bild D 39).
 a) Stelle ein solches Tetraeder im Schrägbild dar!
 b) Berechne Oberflächeninhalt und Volumen des aus beiden Tetraedern bestehenden „sternförmigen Oktaeders"!

6.* Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit **a)** 7,5 cm langen Katheten, **b)** 7,5 cm langer Hypotenuse. Der Kegel werde von einer Ebene parallel zur Grundfläche im Abstand von 4 cm geschnitten. Berechne das Volumen des abgeschnittenen Kegels und das des Restkörpers!

7. Berechne für die Körper im Bild D 40 a und b die Oberflächeninhalte und die Volumina!

8. Aus einem prismatischen Werkstück mit quadratischer Grundfläche ($a = 80$ mm, $h = 32$ mm) soll ein Zylinder gleicher Höhe mit größtmöglichem Durchmesser hergestellt werden. Wie groß ist der prozentuale Abfall? Fertige eine Skizze an!

9. Ein Stück Rundstahl wird zum Teil kegelförmig abgedreht (↗ Bild D 41). Wieviel Prozent beträgt der Abfall?

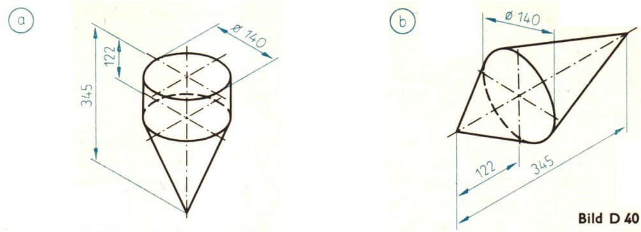


Bild D 40

10. Aus Blech soll ein Trichter von 15 cm Durchmesser angefertigt werden, der ein Volumen von 2,0 dm³ besitzt. Wie lang sind seine Mantellinien und wieviel Blech ist erforderlich?

11. Wieviel Kugeln mit **a)** 10 mm, **b)** 5 mm Durchmesser kann man gießen, wenn genau 5 kg Blei zur Verfügung stehen und der Verlust unberücksichtigt bleibt?

12. Aus einem Holzwürfel mit 28 cm langen Kanten wird eine Kugel so hergestellt, daß möglichst wenig Abfall entsteht!
Wieviel Kubikzentimeter Holz beträgt der Abfall?

13. Ein Schwimmer hat die Form eines Zylinders, der an beiden Enden halbkugelförmig abgeschlossen ist. Seine Maße werden angegeben mit: Länge (88 ± 1) cm, Durchmesser (18 ± 0,2) cm. Mit welchem prozentualen Fehler sind die Werte behaftet? Berechne den Oberflächeninhalt des Schwimmers!

14. Berechne die Masse des Stahlbolzens im Bild D 42!

15. Berechne die Masse des Spitzsenkers mit Zylinderschaft aus Schnellstahl $\left(\varrho = 8{,}1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ im Bild D 43!

16.* Ein Wasserleitungsrohr aus Grauguß $\left(\varrho = 7{,}25\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ ist 5,25 m lang, besitzt einen Umfang von 2,20 m und wiegt 1 220 kg.
Wie dick ist die Rohrwand?

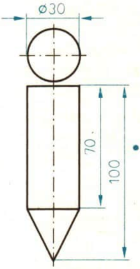


Bild D 41

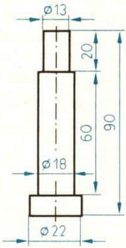


Bild D 42

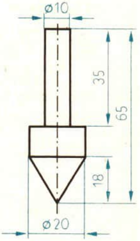


Bild D 43

17. Ein Eisenbahndamm ist aufzuschütten, der im Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez darstellt. Die Dammsohle soll 12,9 m breit, die Krone 6,0 m breit sein und der Böschungswinkel soll 33,7° betragen. Der Damm soll genau 2 km lang werden.
a) Ermittle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Dammhöhe!
b) Wieviel Erdstoff muß für den Damm angefahren werden?
c) Wie groß ist die zu befestigende Böschungsfläche?

18. Ein Turm wird durch eine regelmäßige sechsseitige Pyramide abgeschlossen. Eine Grundkante mißt 2,50 m, die Seitendreiecke sind 3,75 m hoch. Wieviel Quadratmeter Zinkblech sind für vollständiges Eindecken des Daches erforderlich, wenn 5% für Zusammenfügen und Abfall veranschlagt werden müssen?

19. Die größte aller ägyptischen Pyramiden ist die Cheopspyramide (↗ Bild auf Seite 1). Die ursprünglich 230 m langen Seiten ihrer quadratischen Grundfläche sind heute nur noch 227 m lang; die Höhe, die nach der Fertigstellung (um 2650 v. u. Z.) rund 146 m betrug, mißt jetzt nur noch 139 m.
a) Wie groß ist die Fläche, die die Pyramide einstmals bedeckte?
b) Berechne das (ursprüngliche) Volumen der Pyramide!
c) Wieviel Tonnen Gestein (Dichte $2{,}6\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) sind seit der Erbauung durch Verwitterung abgetragen worden?
d) Um wieviel Prozent hat sich das Volumen der Pyramide durch die Verwitterung verringert?

20. Zu den Salzen, die in Form regelmäßiger Oktaeder kristallisieren, gehört Alaun. Welche Masse hat ein Alaunkristall, dessen Kanten 4,6 cm lang sind ($\varrho = 1{,}7\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$)?

21. In ein zylindrisches Gefäß mit dem Innendurchmesser 65 mm werden 240 cm³ Wasser eingefüllt. Es soll Natriumhydroxid zugefügt werden, bis der Flüssigkeitsspiegel eine Marke in 102 mm Höhe über dem Boden erreicht.
a) Um wieviel Kubikzentimeter ist das Volumen angewachsen?
b)* Welche Konzentration hat die entstandene Natronlauge? (Beachte, daß sich derartige Prozentangaben auf die Masse, nicht auf das Volumen beziehen!)

22. Welche Dicke hat eine kreisförmige, auf dem Wasser schwimmende Ölschicht von 1 m Durchmesser, die aus einem Öltropfen mit 5 mm Durchmesser entstanden ist?

23. **a)** Der Radius der Erde wird mit 6370 km angegeben. Berechne unter der Voraussetzung, daß die Erde eine Kugel ist, den Oberflächeninhalt und den Rauminhalt!
b) Für den Mond wurde der Durchmesser mit 3476 km ermittelt. Vergleiche Oberflächeninhalt und Volumen des Mondes mit den für die Erde ermittelten Werten!
c) Der Radius der Sonne beträgt 695 400 km. Wieviel Kugeln von der Größe der Erde haben zusammen das gleiche Volumen wie die Sonne?

24.* Ein großer Schulglobus hat einen Durchmesser von 84 cm. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Oberflächeninhalte, **b)** die Rauminhalte von Globus und Erdkugel zueinander?

L Ausgewählte Lösungen

Zum Kapitel A: Arbeiten mit Variablen

LE 1: ● 3 b) a $\boxed{\div}$ c $\boxed{\times}$ b $\boxed{\div}$ d $\boxed{=}$ oder a $\boxed{\times}$ b $\boxed{\div}$ c $\boxed{\div}$ d $\boxed{=}$

● 7 b) 3 $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ [225.]

● 9 79,15 $\boxed{-}$ 77,9 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\times}$ 310 $\boxed{=}$ [248.]

11. a) 6 569 b) 10 c) $-27{,}496$ d) $-1{,}4$
Bei Taschenrechnern mit Vorrangautomatik, wie z. B. beim SR 1, kann man die Zahlen und Operationszeichen von links nach rechts eingeben.

14. a) 8,8 b) -75 c) 1 111

LE 2: ● 13 2,83 $\boxed{-}$ 3,17 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{x-M}}$ 7,5 $\boxed{+}$ 6,65 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ [—41.617647]

5. a) 77,875 b) $-1\,255{,}5$ c) 1 223,505 d) 0,808
6. c)* $-68{,}394$

LE 3: 8. l) Die Aussage ist wahr. Aus Klasse 6 wissen wir: **Jede natürliche Zahl ist ein Teiler von 0.** Also ist auch 0 Teiler von 0. Im vorliegenden Fall erfüllt $n = 0$ die Forderung.
m) Die Aussage ist wahr: 2 ist durch 2 teilbar.

LE 4: 12.* a) $6ab + 15ac - 13bc$ b) $-50x^2 + 10y^2 + 60z^2$
14. a) $3k - 8x - 5k + 3x = -2k - 5x$
16. (1) ja; z. B. $a = b = 0$; (2) ja; jedes Paar $(a; b)$ reeller Zahlen erfüllt die Gleichung; (3) ja; z. B. $a = b = 1$; (4) ja; z. B. $a = b = 0$; (5) bis (9) ja; z. B. $a = 0$

LE 5: 3. c) $(2m^2 - 3mn) + (-m^2 - mn) = m^2 - 4mn$
6. a) $u = -y + z + 10$
7. c)* $2a + (\mathbf{3b} - \mathbf{a})$ d)* $6m + (\mathbf{-p} - 5n) + (\mathbf{9n} - \mathbf{6m})$
9. 33; 34 und 35 10.* b) $s = \frac{n}{2} \cdot (1 + n)$; $s = 5\,050$

LE 6: 2. d) $-2{,}06a^2 + 11{,}7ab$ e) 0
5. a) $17{,}4a - 2{,}1b$ b) $-17{,}4a + 2{,}1b$ c) $26{,}7a - 1{,}2b$ d) $-26{,}7a + 1{,}2b$
Die Ergebnisse von a und b bzw. von c und d sind zueinander entgegengesetzte Zahlen.
6. a) $3a - (4b + 6)$ oder $(3a - 4b) - 6$ 7.* c) $-6{,}225$
8. c)* Eine Möglichkeit wäre: $-3c - (\boxed{c} - 8d) - (\boxed{8d} - \boxed{e})$
d)* Für a gibt es eine, für b zwei und für c sechs Möglichkeiten.
12. b) $-(7x + 5y) - 3z = -7x - 5y - 3z$

LE 7: 4. k) $2{,}25x^3y^3$ l) $0{,}952x^3y^2$ m) $0{,}756d^4$
5.* a) $16a^4b^4c^4$ b) $8{,}5m^5n^3p^3$ 6. c)* x^2y

LE 8: ● 35 Der gestellten Aufgabe entspricht die Schreibweise bei Axel $(20 \cdot 12) : (3 \cdot 4)$, wobei das erste Produkt nicht in Klammern eingeschlossen werden muß, also derjenigen bei Christa entsprechen kann $20 \cdot 12 : (3 \cdot 4)$.
Auch Elkes Schreibweise ist selbstverständlich richtig. Alle drei würden das Produkt $3 \cdot 4$ bilden und dann das erste Produkt durch 12 dividieren (bzw. vorher kürzen) und schließlich 20 als Resultat erhalten. Dagegen müßten Beate und Daniel von links nach rechts den Term berechnen. Sie erhielten $240 : 3 = 80$ und weiter $80 \cdot 4 = 320$. Dieses Ergebnis wäre nicht **der Quotient** aus dem Produkt $20 \cdot 12$ (das ist der Dividend) und dem Produkt $3 \cdot 4$ (das ist der Divisor); sondern es wäre **ein Produkt** aus dem Faktor $\frac{20 \cdot 12}{3}$ und dem Faktor 4.
6.* a) $8ab$ b) $2x^2 - 0{,}3xy$

LE 9: 5. c)* $5(\boxed{-4x} - \boxed{-y}) + 2x - 3y = -18x + 2y$
6.* Nein. Wenn $-3(a - b) > 0$, so muß $a - b < 0$ gelten.
(Begründung: Wenn $a > b$, so $a - b > 0$ und folglich $-3(a - b) < 0$.)
9.* Im Verlaufe des 56. Tages erreicht die Katze die Maus.

LE 10: 9.* $(7x + 13y)(a - b)$ 10.* 6

LE 11: 7. a) $x = \frac{35}{17}$ b) $x = 2$
10.* a) $(m + 10)(x + y)$ b) $(7 + u)(a - b)$ c) $(a + b)(c - 2)$ d) $(x + 3)(x - 3)$
11.* In Klasse 6 wurde definiert:
Primzahlen heißen diejenigen natürlichen Zahlen, die größer als 1 und nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind.
$n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$
$\boldsymbol{n = 0}$: $n^2 - 1$ ist keine natürliche Zahl
$\boldsymbol{n = 1}$: $n^2 - 1 = 0$ (Jede natürliche Zahl ist Teiler von $n^2 - 1$.)
$\boldsymbol{n = 2}$: $n^2 - 1 = 3$ (Primzahl)
$\boldsymbol{n > 2}$: In diesem Fall ist $n^2 - 1$ außer durch 1 und durch sich selbst mindestens noch durch $n - 1$ $(n > 1)$ teilbar, also keine Primzahl.

LE 12: 7.* Es gelte $a = 2k + 1$. Dann ist
$(2k + 1)(2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
Dabei ist $2k^2 + 2k = z$ eine natürliche Zahl. Mit $2 \cdot z + 1$ wird deutlich, daß das Quadrat einer jeden ungeraden Zahl wieder eine ungerade Zahl ist.
9.* Es gelte $a = 10k + l$ und $b = 10l + k$. Dann ergibt die Summe aus a und b:
$a + b = 10k + l + 10l + k = 11k + 11l = 11(k + l)$.
Damit ist gesichert, daß 11 Teiler der Summe $a + b$ ist.
12.* Das Dreieck ABC setzt sich aus den Seiten a, $b = a + 7$, $c = a - 2$ und das Dreieck $A'B'C'$ aus den Seiten $a' = a$, $b' = 10$, $c' = 5a$ zusammen.
$$\left.\begin{aligned} u &= a + a + 7 + a - 2 = 3a + 5 \\ u' &= a + 10 + 5a = 6a + 10 = 2(3a + 5) \end{aligned}\right\} u' = 2u$$
13.* $a \cdot b + c \cdot d$

Zum Kapitel B: Ähnlichkeit

LE 1: 4. c)* Wir beweisen $h_a : h_b = b : a$.
Wegen $A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$ gilt $A = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ und $A = \frac{1}{2} b \cdot h_b$ und damit
$a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

Da alle Stücke des Dreiecks größer Null vorausgesetzt werden können, darf zur Verhältnisgleichung übergegangen werden:
$h_a : h_b = b : a$.

LE 2: 7.* Verschiebung: ja. Verschiebungspfeil $\overrightarrow{AC}$, falls B und D in derselben Halbebene bezüglich AC liegen.
Drehung: ja. Drehwinkel: 180°. Drehzentrum ist der Mittelpunkt von $\overline{AD}$, falls B und C in verschiedenen Halbebenen bezüglich AD liegen.
Spiegelung: nein. Eine Spiegelung existiert nur dann, wenn $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ auf ein und derselben Geraden liegen oder wenn sich die Endpunkte der Strecken so verbinden lassen, daß ein Rechteck entsteht.

8.* Folgende Bewegungen erfüllen die Aufgabenstellung:
a) (1) Spiegelung an der Mittelparallelen von g und h
(2) Drehung um einen Punkt der Mittelparallelen von g und h um 180°
b) (1) Spiegelung an einer Senkrechten zu g und h
(2) Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ mit $A \in g$ und $B \in g$, $A \neq B$
c) (1) Spiegelung an g
(2) Drehung um einen Punkt P der Geraden g um 180°
d) Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ mit $A \in g$ und $B \in g$, $A \neq B$
e) eine solche Abbildung ist nicht möglich

LE 3: 2. **a)**

Orig.	(3; 1)	(1; 2)	(0; 0)	(−1; 0)	(4; 1)	(1; 1)	(4; −2)	(−0,5; −0,5)
Bild	(5; 1)	(1; 3)	(−1; −1)	(−3; −1)	(7; 1)	(1; 1)	(7; −5)	(−2; −2)

LE 4: 8. **a)** Zwei Möglichkeiten: $\dfrac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$ und $\dfrac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$

b) Nach Satz B 6 gilt: Wenn $\dfrac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \dfrac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$, so $AB \parallel A'B'$.
Da hier bekannt ist, daß A' und B' Bilder von A bzw. B bei einer zentrischen Streckung sind, ist die Voraussetzung von Satz B 6 erfüllt. Also gilt $AB \parallel A'B'$.

LE 6: 1. **f)*** Nach formaler Rechnung ergibt sich: $\overline{TV} = 65$ cm; $\overline{SV} = 30$ cm; $\overline{RU} = 48$ cm und $\overline{SR} = 14$ cm. Das kann aber nicht sein wegen $\overline{TS} + \overline{SR} < \overline{TR}$ bzw. $\overline{TV} + \overline{VU} < \overline{TU}$ (Dreiecksungleichung nicht erfüllt).

2. **a)** 500 mm; 1 000 mm; 1 500 mm

6.* Die Parallele zu AC durch P möge $\overline{BC}$ in D schneiden. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ sei M. Der gesuchte Punkt Q ist der Schnittpunkt von PM und AC, denn $\triangle MDP \cong \triangle MQC$ und $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$ als einander entsprechende Seiten dieser Dreiecke.

LE 7: ● 21 **b)** Zweiter Strahlensatz: $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{BD}}{\overline{AB}}$

Umformen zu $\overline{AB} \cdot \overline{DE} = \overline{BC}(\overline{AB} + \overline{BD})$

und weiter zu $\overline{AB}(\overline{DE} - \overline{BC}) = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}{\overline{DE} - \overline{BC}} \approx 64{,}7 \text{ m}$$

2. **b)** $\overline{DC} \approx 18$ m

LE 9: ● 29 **a)** Jede Bewegung kann als Nacheinanderausführung dieser Bewegung und der identischen Abbildung (einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor 1) aufgefaßt werden.
b) Jede zentrische Streckung kann als Nacheinanderausführung dieser zentrischen Streckung und der identischen Abbildung (Verschiebung $\overrightarrow{PP}$ oder Drehung um einen Punkt mit dem Drehwinkel 0°) aufgefaßt werden.

LE 13: 3. $A_1 = 32\ \text{cm}^2$; $A_2 = 72\ \text{cm}^2$; $A_3 = 128\ \text{cm}^2$

5.* a) $0{,}3\,\frac{1}{\text{cm}}$ b) $3\,\frac{1}{\text{cm}}$ c) $30\,\frac{1}{\text{cm}}$ d) $300\,\frac{1}{\text{cm}}$

Allgemein: $\frac{A}{V} = \frac{6}{a}$; je kleiner a, desto größer $\frac{A}{V}$ und auch das Verhältnis Oberfläche : Gewichtskraft.

LE 14: ● 43 a) etwa 0,61

LE 15: 4. a) Format A 0 1 189 mm × 841 mm; Format A 2 594 mm × 420 mm 6.* $F_H = 273$ N; $F_N = 1\,168$ N

LE 16: 2. c) $\overline{CD} \approx 3{,}0$ cm; $a \approx 3{,}7$ cm; $b \approx 5{,}1$ cm; $c = 6{,}3$ cm

d) $\overline{CD} \approx 3{,}2$ cm; $a \approx 4{,}9$ cm; $b \approx 4{,}3$ cm; $c = 6{,}5$ cm

LE 19: ● 52 a) $h \approx 20{,}78$ cm b) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

5. a) $d \approx 7{,}1$ cm b) $e \approx 18$ cm 6. a) $u \approx 19{,}7$ cm

7. b) DE schneidet CF in einem Punkt S. Unter Anwendung des zweiten Strahlensatzes kann man die Strahlenabschnitte berechnen und dann mit Hilfe des Satzes des Pythagoras $\overline{DE} \approx 11{,}3$ cm und entsprechend auch $\overline{AE} = 13$ cm ermitteln.

10.* a) rund 4,2 cm b) $A_O \approx 31\ \text{cm}^2$

LE 22: ● 59 b) $u \approx 291{,}3$ m

2. g) $\overline{AB} \approx 10{,}9$ cm h) $\overline{AB} \approx 13{,}5$ cm

3. $u \approx 38{,}7$ cm 5.* a) $x^2 + y^2 = r^2$ d) $x^2 + y^2 \leqq r^2$

8. Firsthöhe: 1,3 m; Länge des Obergurtes: 2,6 m
Länge der Schrägstrebe: 0,75 m

10.* Starke Stützbalken: 5,00 m Schwächere Streben: 3,48 m
Längere, senkrecht verlaufende Strebe: 2,32 m
Kürzere, senkrecht verlaufende Strebe: 1,16 m

11.* 12 Fuß

Komplexe Übungen:

9. $r \approx 13{,}3$ mm 11. a) $\overline{AB} \approx 9{,}2$ mm b) $\overline{AB} = 6$ cm

14. a) rund 220 km

Zum Kapitel C: Lineare Funktionen

LE 1: 1. c)

Eingangswerte	18	18	24	24	56	56	27	5	39	39
zugeordnete Werte	2	3	2	3	2	7	3	5	3	13

f)*

Jahr	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Mrd. M	166	173	180	187	194	202	210	218

LE 2: 3. b) 0,555 55; 1,492 537 3; −0,001 661 1; 0,000 187 72; 400

4. d) $x = 2$; $x = 10$; $x = 5$; $x = 8$; n. l.

5. b) Jeder nichtnegativen Zahl wird ihre Quadratwurzel zugeordnet.
c) Für negative Zahlen sind keine Quadratwurzeln definiert.

LE 3: ● 7 Auf jeder Parallelen zur y-Achse liegt höchstens ein Punkt des Graphen. Im Bild C 5 liegt keine Eindeutigkeit vor.

LE 4: 1. a) ja; $y = 0{,}05\,x$ b) nein c) ja; $m = \varrho \cdot V$
d) ja, falls Zählermiete nicht berücksichtigt wird; $y = 0{,}16 \cdot x$
nein, falls Zählermiete berücksichtigt wird.
(Für die Lösung wurde Stadtgas berücksichtigt.)

LE 5: 1. b) $y = 0{,}15x + 9{,}00;\quad x \in N$
3. c) nein; $f(x) = 4{,}5$ entspricht nicht der Gleichung $f(x) = mx + n\ (m \neq 0)$
d) ja, $f(x) = -x$ mit $m = -1$ und $n = 0$
e) ja, $f(x) = \frac{1}{2}x$ mit $m = \frac{1}{2}$ und $n = 0$
f) nein; $f(x) = \frac{2}{x}\ (x \neq 0)$ entspricht nicht der Gleichung $f(x) = mx + n\ (m \neq 0)$

LE 6: 3. a) (1) $m_1 > 0;\ n_1 > 0$ (2) $m_2 > 0;\ n_2 < 0;\ m_1 = m_2;\ n_1 > n_2$
d) (1) $m_1 > 0;\ n_1 > 0$ (2) $m_2 < 0;\ n_2 < 0;\ m_1 > m_2;\ n_1 > n_2$

LE 7: ● 14 b) $\triangle ABC \sim \triangle CDE;\ \triangle ABC \sim \triangle FGH;\ \triangle CDE \sim \triangle FGH$
c) jeweils $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{FG}} = \frac{1}{2} = m$
1. e)* $f(x) = 7x - 2$ f) $f(x) = -4{,}8x - 12$
6. c) $f(16) = 140$ ist nicht möglich, da Wasser bei normalem Druck bei 100 °C siedet.

LE 8: 5.* a) $L = \{7; -7\}$ b) $L = \{5; -1\}$

LE 9: ● 22 a) Jede lineare Funktion hat **höchstens eine** (d. h. eine oder keine) Nullstelle.
b) Der Graph einer linearen Funktion liegt auf einer Geraden, die nicht parallel zur x-Achse ist und somit genau einen Schnittpunkt mit der Achse hat. Dieser Schnittpunkt kann jedoch außerhalb des Definitionsbereichs der Funktion liegen; in diesem Fall hat die Funktion keine Nullstelle.
3. b) $x_0 = 1{,}7$ c) keine Nullstelle f) $x_0 = 5$
5. c) keine Nullstelle e) $t_0 = \frac{420}{39} \approx 10{,}769\,231$
6. c) $m = -0{,}5$ d) $m = -5$
7.* a) $P_1\left(\frac{2}{3}; 0\right), P_2(0; -2)$ b) $P_1\left(-\frac{395}{54}; 0\right), P_2(0; 3{,}95)$

LE 10: ● 24 b) Peter hat durch x dividiert, was nur zulässig ist, wenn $x \neq 0$ ist. Der Fall $x = 0$ muß also gesondert untersucht werden. Indem man 0 in die Ausgangsgleichung einsetzt, überprüft man, ob diese Zahl Lösung ist oder nicht.
1. b) 5,4 ist Lösung d) 1,5 und −1,5 sind Lösungen
4.* a) 3; 1,5; 2; 5; 0 b) $L = \{x \in R;\ x \geqq 0\}$
9.* a) $x = 0$ b) $x = 8$
13. a) $x = 20$ b) $x = -\frac{100}{11}$ c) $x = 1$ d) $x = 11$
15.* c) $m \in \{1; 2; 3; 6\}$

LE 11: 2. a) $x = 5$ b) $x = 3$ d) $x = -2$ g) $x = -1$
4. b) $a = b(c + 3);\ b = \frac{a}{c + 3};\ c = \frac{a}{b} - 3$
d) $a = b - c;\ b = a + c;\ c = b - a$

LE 12: 4. $x \approx 3{,}2$ m 5. $x = 10\ \mathrm{m}^2$ 7. 0,45 N und 1,05 N
11.* 9 und 7 12.* In etwas mehr als 42 min.

Komplexe Übungen:
17. rund 44 g 21.* 2,5 km lang ist die Fahrstrecke

Zum Kapitel D: Stereometrie

LE 1: 5. Bild D 2a: $a = 5{,}0$ cm; $d_A = 13{,}0$ cm
Bild D 2b: $h \approx 51$ mm; $d_R \approx 60$ mm
Bild D 2c: $b \approx 37$ mm; $V \approx 6{,}95$ cm^3

6. $m \approx 3{,}3$ kg

11.* Für $h_1 : h_2 = 1 : 2$ gilt $d_1 : d_2 = \sqrt{2} : 1$.
Für $d_1 : d_2 = 1 : 2$ gilt $h_1 : h_2 = 4 : 1$.

LE 2: 3.* **b)** Tafelwert: $2{,}3^3 = 12{,}17$. Das Produkt $2{,}3 \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}3$ weist drei Dezimalstellen auf, wobei die letzte wegen $3^3 = 27$ eine 7 ist. Das macht offenkundig, daß der Näherungswert 12,17 durch Aufrunden entstanden ist. Der genaue Wert ist also 12,167.

6. Die äußere Würfelkante ergibt sich zu 53,535 9 cm, was zur Sicherung des Fassungsvermögens auf 53,6 cm führt.

8.* $a \approx 9{,}6$ cm

LE 3: 2.* **b)**

	ein	zwei	drei Rechtecke
dreiseitig	ja	nein	ja
vierseitig	nein	ja	nein
fünfseitig	ja	nein	nein

(Beim fünfseitigen Prisma wird vorausgesetzt, daß nicht 2 Seiten der Grundfläche zueinander parallel sind.)

LE 5: ● 17 **a)** $A_M = 156$ m^2 **b)** $s \approx 8{,}8$ m
3. $A_M \approx 2{,}07$ m^2 5. 35,80 M 6.* 35 cm^2

LE 6: ● 19 **b)** Da auf beide Figuren mit den Flächeninhalten A_1 bzw. A_2 die gleiche Streckung mit dem Faktor k angewandt wurde, weisen die beiden Schnittfiguren Flächeninhalte A'_1 bzw. A'_2 auf, denen die Beziehung $A'_1 = k^2A_1$ bzw. $A'_2 = k^2A_2$ zugrunde liegt. Wenn nun $A_1 = A_2$, so muß auch $A'_1 = A'_2$ gelten.

3. **b)** $V = 512$ m^3; $A_0 \approx 430{,}6$ m^2 5. **c)** $V \approx 2{,}7$ cm^3

LE 7: ● 23 **b)** $A' = 3$ cm^2 in beiden Fällen. (Begründung: Der Schnitt in 8 cm Höhe erzeugt einen Kreiskegel – bzw. eine Pyramide – mit der Höhe 4 cm. Dieser Kegel kann als das Ergebnis einer zentrischen Streckung $\left(S; \frac{1}{3}\right)$ angesehen werden. Für die Höhen gilt zum Beispiel

$$h' = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot 12 \text{ cm} = 4 \text{ cm}.$$

Dann gilt für die Flächeninhalte

$$A' = \frac{1}{k^2}A = \frac{1}{9} \cdot 27 \text{ cm}^2 = 3 \text{ cm}^2.)$$

5. **b)*** Der Achsenschnitt liefert zwei rechtwinklige Dreiecke. Spiegelt man eins dieser Dreiecke am Grundkreisradius, so bilden Original und Bild bei dieser Spiegelung ein gleichseitiges Dreieck, in dem alle Seiten die Länge s haben. Daraus folgt, daß $h = \frac{s}{2}$ gilt. $V \approx 38\,200$ m^3 [38 223.758]

6.* rund 9,5 m^3

LE 8: ● 25 **a)** $A_O = 96\,\pi$ m$^2 \approx 300$ m^2
5. **a)** $h \approx 56{,}6$ mm; $V \approx 23{,}7$ cm^3 **b)** $h \approx 52{,}0$ mm; $V \approx 49{,}0$ cm^3
c) $h \approx 39{,}7$ mm; $V \approx 84{,}2$ cm^3

LE 9: 7.* **a)** $\varrho \approx 7{,}18 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

LE 10: 6.* Die Haut ist $\frac{1}{1000}$ mm = 1 µm dick.

R Register

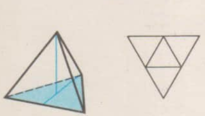
Im folgenden Register findest du alphabetisch geordnet Stichwörter mit Seitenangaben, die dir das Aufsuchen von Begriffen und wichtigen Merksätzen erleichtern. Steht hinter der Seitenziffer noch ein „f", so bedeutet das, daß sich die Erklärungen zu diesem Stichwort bis zur folgenden Seite erstrecken. Folgt der Seitenziffer das Zeichen „ff.", so erstrecken sich die Erklärungen sogar über mehrere der folgenden Seiten.

Innentitelseite: Reproduktion aus Löhrich „Die Wunder der Welt"; **Bild A 1:** Reproduktion aus Struik „A Concise History of Mathematics"; **Bilder A 2, C 42, D 22:** Archiv Volk und Wissen; **Bilder A 3, B 3:** Foto Seifert; **Bild B 2:** ADN Zentralbild; **Bild C 41:** Reproduktion aus Tietze „Gelöste und ungelöste mathematische Probleme", München 1949; **Bild C 43:** Reproduktion aus A. Wolf: „A History of Science", London; **Bild D 37:** Dr. Günter Blutke, Berlin

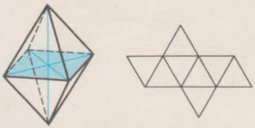
Regelmäßige Polyeder (Vielflache)

Besteht die Oberfläche eines Körpers nur aus regelmäßigen, untereinander kongruenten n-Ecken, so spricht man von regelmäßigen Polyedern. So wird das Tetraeder von 4 regelmäßigen (gleichseitigen), zueinander kongruenten Dreiecken begrenzt. Man kann nachweisen, daß es nur 5 regelmäßige Polyeder gibt, die zu Ehren des berühmten griechischen Philosophen Plato, der von 427 bis 347 v. u. Z. lebte, auch die 5 Platonischen Körper genannt werden.

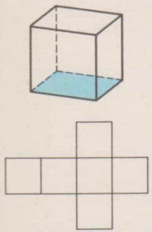
Tetraeder



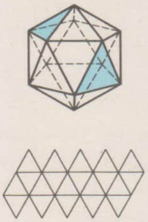
Oktaeder



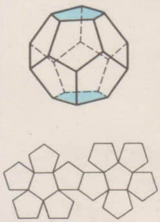
Hexaeder (Würfel)



Ikosaeder



Dodekaeder



Einige Kristalle begegnen uns in der Gestalt der regelmäßigen Polyeder:

Würfel:	Steinsalz
Oktaeder:	Magneteisenstein
Tetraeder:	Fahlerz
Dodekaeder:	Schwefelkies

Kurzwort: 000810 Lehrb. Mathe Kl8
Schulpreis DDR: 1,60