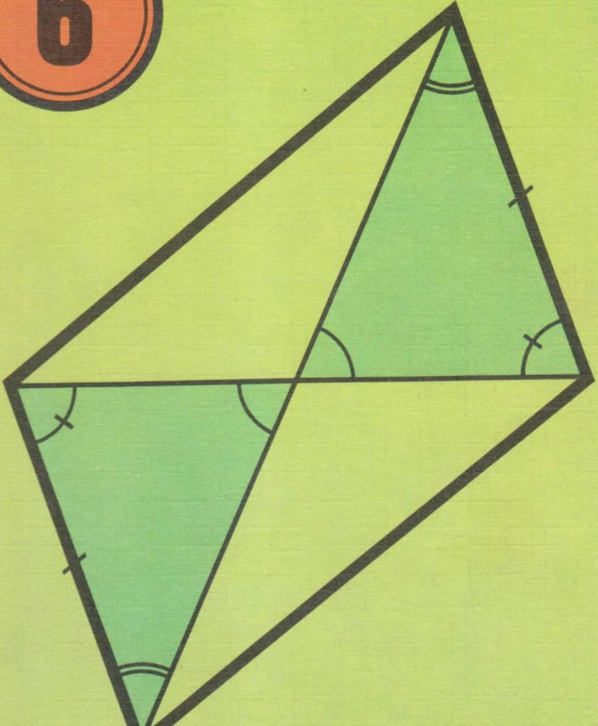
Mathematik

6



Hinweise zur Arbeit mit diesem Buch

Das Buch ist in vier Kapitel A, B, C und D gegliedert und diese weiter in Lehrbuchabschnitte, die mit blau gedruckten Überschriften eingeleitet werden.
Jedes Kapitel ist in Lerneinheiten, abgekürzt LE, eingeteilt, die jeweils durch ein Kapitel durchnumeriert sind.
Eine Titelzeile über jeder Seite gibt darüber Auskunft, zu welchem Kapitel, zu welchem Lehrbuchabschnitt und zu welcher Lerneinheit diese Seite gehört.
In den Lerneinheiten werden die Beispiele, Aufträge und Merksätze durch folgende Marken am linken Rand des Textes gekennzeichnet:

■ Beispiel; ● Auftrag; ▶ Merkstoff.

Beispiele, Aufträge und Merkstoffe sind jeweils durch ein Kapitel durchnumeriert.
Verweise auf Abbildungen oder andere Textstellen beginnen mit einem schräggestellten Pfeil. So bedeutet zum Beispiel (↗ Auftrag B 8, S. 40) „vgl. Auftrag 8 im Kapitel B auf Seite 40".
Wenn sich bei einer Aufgabennummer ein senkrechter Pfeil befindet, zum Beispiel „5.↑", so bedeutet dieser Pfeil, daß weiter oben ein Aufgabentext zu beachten ist, der für mehrere Aufgaben gilt. Aufgaben, die zusätzlich durch einen Stern gekennzeichnet sind, zeichnen sich durch einen erhöhten Schwierigkeitsgrad aus.

Mathematik

Lehrbuch für Klasse 6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1988

Autorenkollektiv: Dr. Manfred Dennert, Prof. Dr. Brigitte Frank, Dr. Marianne Grassmann, Prof. Dr. Dieter Ilse (Kollektivleiter), Dr. Günter Lorenz, Prof. Dr. Günter Pietzsch, Dr. Manfred Rehm, Dr. Wolfgang Schulz, Dr. Edellinde Siury
unter Mitarbeit von Hans-Joachim Schubert

Gutachter und Berater: Dr. Peter Birnbaum, Joachim Bundermann, Dr. Günter Erbrecht, Rolf Förster, H. Gestewitz, Dr. Sigrun Gromann, Prof. Dr. Werner Jungk, Karlheinz Lehmann, Günter Liesenberg, Rainer Rösel, Erika Schwerin

Redaktion: Ingrid Fabian, Karlheinz Martin

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt.

ISBN 3-06-000608-3

1. Auflage

Lizenz-Nr. 203 · 1000/88 (E 000608-1) vwv 1/88
Printed in the German Democratic Republic
Schrift: 9/11 Maxima, Digiset
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Illustrationen: Karl-Heinz Wieland
Zeichnungen: Jutta Wolff
Einband: Manfred Behrendt
Typographische Gestaltung: Atelier vwv, Dagny Scheidt
Redaktionsschluß: 4. August 1987
LSV 0681
Bestell-Nr. 731 343 4
Schulpreis DDR: 2,30

Inhalt

A Teilbarkeit natürlicher Zahlen

B Gebrochene Zahlen

C Planimetrie

D Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität

R Register

A Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Im Ferienlager ist eine Lagerfreundschaft mit 246 Schülern zum Appell angetreten. Kann ein Vorbeimarsch am Thälmannhain in vollen Dreierreihen erfolgen? Ist er auch in vollen Viererreihen möglich?

Aufgaben dieser Art führen uns auf Vielfache und Teiler natürlicher Zahlen. Mit ihnen werden wir uns in diesem Stoffgebiet etwas eingehender beschäftigen. Wenn dabei gelegentlich nur von Zahlen die Rede ist, so sollen dennoch stets natürliche Zahlen gemeint sein.

Wiederholung und Teilbarkeitssätze

1. Nenne den Nachfolger (Vorgänger) von 17; 331; 2000; 2099; 4100; 0; 738641; n; $k + 5$; $x - 1$; $2 \cdot m$; $3 \cdot k$!

2. Welche natürlichen Zahlen haben keinen Nachfolger (Vorgänger)?

3. Vergleiche der Größe nach! Begründe, ohne auszurechnen!
a) 217; 127 **d)** $138 + 526$; $526 + 138$ **g)** $578 \cdot 17$; $18 \cdot 578$
b) 330; $330 + 1$ **e)** $733 + 211$; $735 + 211$ **h)** $37 \cdot 45$; $45 \cdot 37$
c) 299; $300 - 1$ **f)** $618 - 12$; $619 - 13$ **i)** $660 : 12$; $540 : 12$

4. Löse folgende Gleichungen! Schreibe, wenn möglich, x als Summe oder Differenz der anderen vorkommenden Zahlen!
a) $90 + x = 100$ **d)** $738 + x = 638$ **g)** $38 - x = 31$ **k)** $x - 77 = 0$
b) $x + 12 = 12$ **e)** $x + 14 = 73$ **h)** $x - 17 = 12$ **l)** $56 - x = 57$
c) $87 + x = 123$ **f)** $x - x = 150$ **i)** $174 - x = 174$ **m)** $x - 77 = 77$

5. Rechne möglichst vorteilhaft! Welche Gesetze nutzt du dabei?
a) $138 + (16 + 12)$ **d)** $(77 \cdot 2) \cdot 5$ **g)** $32 \cdot 4$ **k)** $7 \cdot 23 + 13 \cdot 23$
b) $396 + 175 + 4$ **e)** $18 \cdot (9 \cdot 5)$ **h)** $8 \cdot 81$ **l)** $35 \cdot 17 + 17 \cdot 5$
c) $153 + 18 + 22$ **f)** $13 \cdot 4 \cdot 25$ **i)** $29 \cdot 7$ **m)** $46 \cdot 19 - 44 \cdot 19$

6. Ermittle alle natürlichen Zahlen x, für die gilt:
a) $5 \cdot x = 120$, **c)** $6 \cdot x = 750$, **e)** $13 \cdot x = 6500$, **g)** $6 \cdot x = 44$,
b) $x \cdot 5 = 0$, **d)** $1 \cdot x = 27$, **f)** $135 \cdot x = 135$, **h)** $x \cdot x = 25$!
Schreibe, wenn möglich, x jeweils als Quotient!

7. Löse folgende Gleichungen! Schreibe, wenn möglich, x als Produkt oder Quotient der anderen vorkommenden Zahlen!
a) $72 : x = 9$ **c)** $7152 : x = 1$ **e)** $x : 7 = 8$ **g)** $128 : x = 8$
b) $x : 12 = 10$ **d)** $x : 17 = 0$ **f)** $28 : x = 8$ **h)*** $0 : x = 5$

8. Schreibe als Potenz!
a) $2 \cdot 2 \cdot 2$ **b)** $5 \cdot 5$ **c)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **d)** $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ **e)** Vervollständige!
Für das Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren schreibt man ________.
Die Zahl a heißt ________, die Zahl n heißt ________ der Potenz ________.

9. Berechne! **a)** 2^5 **b)** 3^4 **c)** 5^3 **d)** $2^2 \cdot 3$ **e)** $3 \cdot 5^3$ **f)** $2^3 \cdot 3^2$

10. Löse folgende Gleichungen!
a) $10^6 = x$ **c)** $y^3 = 1000$ **e)** $10^t = 100$ **g)** $4^a = 16$
b) $z^4 = 81$ **d)** $x^2 = 25$ **f)** $2^s = 32$ **h)** $2 \cdot 3^n = 18$

11. Ermittle die Summen!
a) $7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$ **c)** $5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$
b) $10^5 + 10^3 + 10$ **d)** $6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 12$

12. Schreibe als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen!
a) 55709 **b)** $30901 + 4070$ **c)** $12345 + 76543$

13. Welche der Zahlen 12; 27; 33; 0; 68; 1; 49; 64; 60; 77 sind **a)** gerade, **b)** ungerade Zahlen? Begründe!

1 Vielfache und Teiler

Wir wissen: Mit $3 \cdot 6 = 18$ gilt zugleich $18 : 6 = 3$ und $18 : 3 = 6$.
Dies kann man auch so aussprechen:
18 ist *das Dreifache* von 6, 18 ist *das Sechsfache* von 3,
6 ist *der dritte Teil* von 18, 3 ist *der sechste Teil* von 18.
Allgemeiner sagt man auch:
18 ist *ein Vielfaches* von 6, 18 ist *ein Vielfaches* von 3,
6 ist *ein Teiler* von 18, 3 ist *ein Teiler* von 18,
18 ist durch 6 *teilbar*, 18 ist durch 3 *teilbar*.
Die drei jeweils untereinanderstehenden Formulierungen drücken den gleichen Zusammenhang aus. Wir kennen diese Sprechweisen für beliebige natürliche Zahlen a und b.

▶ 1

a ist ein Vielfaches von b.
b ist ein Teiler von a. — **bedeutet** — **Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $a = b \cdot n$ ist.**
a ist durch b teilbar.

Für **b ist ein Teiler von a** schreibt man auch: $b \mid a$. Für **b ist kein Teiler von a** schreibt man häufig: $b \nmid a$.

■ 1 $6 \mid 30$ ist eine wahre Aussage; denn es gibt eine Zahl n (nämlich $n = 5$), so daß $6 \cdot n = 30$ ist.
$6 \nmid 47$ ist ebenfalls eine wahre Aussage; denn es gibt keine Zahl n, so daß $6 \cdot n = 47$ ist. (Es ist $6 \cdot 7 < 47 < 6 \cdot 8$.)

Beachte: Nach der Festlegung ▶ 1 gilt:
Jede natürliche Zahl ist Vielfaches von sich selbst (z. B. $7 = 7 \cdot 1$). 1 ist Teiler jeder natürlichen Zahl (z. B. $1 \mid 7$).
0 ist Vielfaches jeder natürlichen Zahl (z. B. $0 = 0 \cdot 7$). Jede natürliche Zahl ist Teiler von 0 (z. B. $7 \mid 0$). Es gilt sogar $0 \mid 0$, obwohl nach wie vor $0 : 0$ nicht erklärt ist.
Im Beispiel A 1 wird von **Aussagen** gesprochen. Aussagen sind solche Formulierungen, die entweder wahr oder falsch sind.

■ 2 Beispiele für Aussagen sind:
a) 24 ist durch 6 teilbar.
b) $7 \mid 50$
c) Für alle Zahlen a und b gilt: $a \cdot b = b \cdot a$
d) Es gibt eine Zahl n, für die $n \mid 17$ gilt.
e) Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets ungerade.

Die Formulierung „*a* ist durch 3 teilbar" ist keine Aussage, da sie weder wahr noch falsch ist. Erst wenn man für *a* eine Zahl einsetzt, erhält man eine Aussage: „12 ist durch 3 teilbar" ist wahr; „13 ist durch 3 teilbar" ist falsch.
Ob eine Aussage wahr oder falsch ist, muß man **beweisen**. Im Beispiel A 1 sind die beiden Aussagen $6 \mid 30$ und $6 \nmid 47$ bereits bewiesen worden.

● 1 Peter sagt: „180 ist durch alle einstelligen Zahlen teilbar." Er begründet so:
$1 \mid 180$, denn $1 \cdot 180 = 180$;
$2 \mid 180$, denn $2 \cdot 90 = 180$;
$3 \mid 180$, denn $3 \cdot 60 = 180$; und so weiter. Hat er recht?

Peter macht nicht eine Aussage über *einen einzigen* Teiler der Zahl 180, sondern über *viele* Teiler. Kann man eine Zahl angeben, für die diese Aussage nicht gilt, so hat man die Aussage durch *ein Gegenbeispiel* als falsch nachgewiesen. (Z. B.: $7 \nmid 180$.)
Die Wahrheit einer Aussage über viele Zahlen kann man **nicht beweisen**, indem man die Aussage für *einige* Beispiele als wahr nachweist. Wie man solche Aussagen beweist, lernen wir in Lerneinheit A 6 kennen.

● 2 Welche Aussagen aus Beispiel 2 sind falsch? Begründe!

Aufgaben

1. **a)** Berechne das Dreifache von 7 (4; 15; 20; 25; 70; 82)!
b) Berechne ein Drittel von 21 (54; 31; 3; 27; 0; 39)!
c) Berechne das Einsfache von 37 (1; 0; 19; 25)!

2. Ergänze mündlich!
a) 84 ist das Zweifache von ...
b) 7 ist ein Achtel von ...
c) Von ... ist 54 die Hälfte.
d) 11 ist ein Elftel von ...
e) Von ... ist 1 ein Achtel.
f) 4 ist der ... Teil von 12.
g) Von 25 ist 5 der ... Teil.
h) 0 ist ein Fünftel von ...
i) 18376 ist das Einsfache von ...
k) Das ...fache von 20 ist 100.

3. **a)** Gib drei Vielfache von 8 (4; 1; 25; 40) an, die kleiner als 100 sind!
b) Ermittle zwei Teiler von 20 (14; 8; 11; 0; 6; 1)!

4. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
a) 32 ist die Hälfte von 64.
b) 18 ist ein Fünftel von 95.
c) 32 ist ein Drittel von 96.
d) 8 ist ein Siebentel von 54.

5. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
a) 39 ist durch 13 teilbar. **b)** 17 ist durch 17 teilbar. **c)** $2 \mid 42$
d) $9 \mid 17$ **e)** $13 \mid 0$ **f)** $17 \mid 34$ **g)** $16 \mid 8$ **h)*** $0 \mid 0$

6. Schreibe von den Zahlen 40; 19; 8; 9; 12; 0; 4; 10; 18; 5; 34; 14; 20; 2; 32; 15 diejenigen auf, die Vielfache sind von **a)** 4, **b)** 5, **c)** 6, **d)** 7, **e)** 8, **f)** 9!

7. Welche Formulierungen sind Aussagen?
a) 21 ist durch 21 teilbar.
b) 49 ist Vielfaches von 6.
c) $3 \cdot b = 12$
d) Ermittle alle Teiler von 15!
e) Es gibt eine Zahl *b*, so daß $4 \cdot b = 20$ ist.
f) Die DDR hat 15 Bezirke.
g) An welchem Fluß liegt Halle?

8.* Setze 4 und 10 für x ein! Schreibe alle wahren Aussagen auf, die du so erhältst!
a) x ist durch 4 teilbar. **b)** 5 ist Teiler von $x + 1$. **c)** 30 ist durch x teilbar.

9. **a)** Gib alle Zahlen a an, für die $a \mid 12$ gilt!
b) Gib alle Zahlen b an, die kleiner als 20 sind und für die $7 \mid b$ gilt!

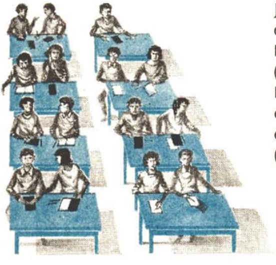
2 Beschreibung von Vielfachen mit Hilfe von Variablen

Wir haben bereits festgelegt:
Eine natürliche Zahl heißt gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.
Eine natürliche Zahl heißt ungerade, wenn sie nicht durch 2 teilbar ist.

● 3 **a)** Setze in $2 \cdot n$ für n die Zahlen 0; 1; 2; 3; 4; 1000 ein und rechne! Was für Zahlen entstehen?
b) 14; 10; 56; 2; 0; 108 sind gerade Zahlen. Schreibe jede von ihnen als Produkt aus zwei Faktoren, so daß diese Eigenschaft deutlich wird!

Wenn man in das Produkt $2 \cdot n$ für n Zahlen einsetzt, so erhält man stets gerade Zahlen
Wenn eine Zahl gerade ist, so kann sie in der Form $2 \cdot n$ geschrieben werden.
Jede ungerade Zahl ist Nachfolger einer geraden Zahl und kann daher in der Form $2 \cdot n + 1$ geschrieben werden. Umgekehrt erhält man stets eine ungerade Zahl, wenn man in $2 \cdot n + 1$ für n Zahlen einsetzt.

● 4 **a)** Welche ungeraden Zahlen erhält man, wenn in $2 \cdot n + 1$ für n eingesetzt werden: 7; 5; 28; 1; 0; 54?
b) Welches n muß man in $2 \cdot n + 1$ einsetzen, um die Zahlen 1; 3; 5; 7; 9; 2001 zu erhalten?



Jede gerade Zahl läßt sich veranschaulichen durch eine Menge von Paaren. In der linken Bankreihe (↗ Bild A 1) sitzen 8 Schüler ($8 = 2 \cdot 4$).
Für ungerade Zahlen ist eine Veranschaulichung allein durch Paare nicht möglich. In der rechten Bankreihe sitzen 7 Schüler ($7 = 2 \cdot 3 + 1$).

Bild A 1

● 5 Übertrage die Tabellen in dein Heft und vervollständige sie!

a)

n	4	3		20		7
$7 \cdot n$			35		77	

Welchen Teiler außer 1 haben **alle** Zahlen der *unteren* Zeile gemeinsam?

b)

n		7		20			
	10	35	20	100	0	25	5

Von welcher Zahl (größer als 1) sind **alle** Zahlen der *unteren* Zeile Vielfache?

Aufgaben

1. **a)** Zeichne den Teil des Zahlenstrahls, der die Zahlen 9 bis 19 enthält! Unterstreiche dann die geraden Zahlen blau, die ungeraden rot! Was stellst du fest?
b) Nenne alle geraden Zahlen zwischen 111 und 123!
c) Nenne alle ungeraden Zahlen zwischen 752 und 756!
d) Nenne zwei ungerade Zahlen, deren Differenz 16 (9) ist!
e) Nenne zwei gerade Zahlen, deren Differenz 11 (28) ist!

2. Im Bild A 2 soll N_g alle geraden und N_u alle ungeraden Zahlen enthalten.
a) Worin liegen 1; 5; 8; 11; 12; 17; 28; 84; 100; 127?
b) Nenne drei weitere Zahlen aus N_g und drei Zahlen aus N_u!
c) Nenne eine Zahl, die weder in N_g noch in N_u liegt!
d) Nenne eine Zahl, die in N_g und in N_u liegt!

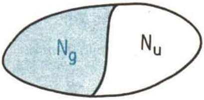


Bild A 2

3. Ordne 17; 22; 35; 2; 0; 7; 11; 26 in die *unteren* Zeilen der Tabellen passend ein! Vervollständige die Tabellen! Welche gemeinsame Eigenschaft haben jeweils die Zahlen in der unteren Zeile? Begründe!

n					
$2 \cdot n$					

n				
$2 \cdot n + 1$				

4.* Bei den folgenden Zahlen sind Ziffern durch ✱ ersetzt. Gib trotzdem an, welche Zahlen gerade sind!
$a = 2 \cdot 5{*}1{*} + 1$; $b = 2 \cdot 4{*}7{*}$; $c = 75{*}3 \cdot 2$
$d = 4 \cdot 4{*}6{*} + 1$; $e = 2 \cdot {*}{*} + 1$; $f = 3{*}4{*} \cdot 2$

5.* Welche der Zahlen a bis d sind ungerade Zahlen?
(k, m, n sollen irgendwelche natürliche Zahlen sein.)
$a = 2 \cdot k + 1$; $b = 2 \cdot k$; $c = m \cdot 2$; $d = 1 + 2 \cdot m$

6. Vervollständige die Tabellen und gib jeweils einen gemeinsamen Teiler der Zahlen in der zweiten Spalte an! (Er soll nicht gleich 1 sein.)

a)

x	$2 \cdot x$
5	
	18
11	
	24

b)

k	$3 \cdot k$
5	
	24
	36
7	

c)

n	
9	54
10	60
15	
	120

d)

6	24
9	36
16	
	60

7. Zeichne drei Tabellen nach folgendem Muster und ordne, wenn möglich, die Zahlen 20; 33; 18; 23; 60; 49; 27; 39; 25; 100; 35 und 32 in die rechten Spalten der Tabellen ein! Vervollständige dabei auch die linken Spalten!

a)

n	$2 \cdot n$
	20

b)

n	$3 \cdot n$
	33

c)

n	$5 \cdot n$
	20

8. In welcher Form läßt sich jede Zahl schreiben, wenn sie durch **a)** 8, **b)** 17, **c)** 5, **d)** 2, **e)** 10 teilbar ist?

3 Teilbarkeit eines Produktes

Wir wissen: Das Produkt $24 \cdot 15$ ist durch seine Faktoren 24 und 15 teilbar. Ohne es zu berechnen, können wir seine Teilbarkeit durch 6 und durch 5 feststellen:

$$\begin{aligned} 24 &= \mathbf{6} \cdot 4 \\ \text{also}\quad 24 \cdot 15 &= (\mathbf{6} \cdot 4) \cdot 15 \\ &= \mathbf{6} \cdot (4 \cdot 15) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 15 &= 3 \cdot \mathbf{5} \\ \text{also}\quad 24 \cdot 15 &= 24 \cdot (3 \cdot \mathbf{5}) \\ &= (24 \cdot 3) \cdot \mathbf{5} \end{aligned}$$

Das Produkt $24 \cdot 15$ ist also auch durch solche Zahlen teilbar, die Teiler der Faktoren sind. Allgemein gilt:

▶ 2 **Wenn bei einem Produkt $a \cdot b$ mindestens ein Faktor durch n teilbar ist, so ist auch das Produkt durch n teilbar.**
Kurz: Wenn $n \mid a$ oder $n \mid b$, so $n \mid a \cdot b$.

Das Umgekehrte gilt jedoch nicht:
$10 \mid 24 \cdot 15$, aber $10 \nmid 24$ und $10 \nmid 15$.
Es gilt also **nicht**: Wenn $n \mid a \cdot b$, so $n \mid a$ oder $n \mid b$.
Mit Hilfe des Merksatzes A 2 kann man die Teilbarkeit einer größeren Zahl überprüfen, indem man sie in geeignete Faktoren zerlegt und deren Teilbarkeit überprüft.

■ 3 Die Zahl 210 ist durch 3 teilbar,
denn $210 = 21 \cdot 10$, und 21 ist durch 3 teilbar.

Aufgaben

1. Sind folgende Aussagen wahr? Begründe, ohne das Produkt auszurechnen!
a) $6 \mid 24 \cdot 13$ **b)** $13 \mid 24 \cdot 13$ **c)** $7 \mid 36 \cdot 14$
d) $12 \mid 14 \cdot 36$ **e)** $7 \mid 35 \cdot 49$ **f)** $4 \mid 56 \cdot 35$
g)* $8 \mid 20 \cdot 36$ **h)*** $14 \mid 16 \cdot 21$

2. Gib Teiler des Produkts **a)** $6 \cdot 7$, **b)** $5 \cdot 16$, **c)** $6 \cdot 14$, **d)** $35 \cdot 66$, **e)** $55 \cdot 26$ an, ohne es zu berechnen!

3. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
a) $10 \cdot n$ ist stets durch 2 teilbar. **b)** $15 \cdot n$ ist stets durch 4 teilbar.

4. Prüfe durch Zerlegen in geeignete Faktoren, ob
a) 4200 durch 6, **b)** 56000 durch 7, **c)** 2700 durch 4,
d) 27000 durch 4, **e)** 6900 durch 25, **f)** 30000 durch 25
teilbar ist!

5.* Von zwei Zahlen x und y sei bekannt:
x ist durch 4 teilbar; y ist durch 15 teilbar.
Durch welche Zahlen ist das Produkt $x \cdot y$ gewiß teilbar?

6.* Welche Aussage ist wahr, welche falsch? Begründe!
a) Wenn x und y gerade Zahlen sind, so gilt: $4 \mid x \cdot y$.
b) Wenn x und y ungerade Zahlen sind, so gilt: $3 \mid x \cdot y$.

7. Ralf kauft 8 einzelne Farbstifte. Er weiß zwar, daß alle den gleichen Preis haben, kennt diesen aber nicht. Insgesamt soll er 2,85 M bezahlen.
„Das kann nicht stimmen", meint er zur Verkäuferin und begründet: „Den Preis müßte man durch 2 teilen können." Hat er recht?

Bild A 3

8. Für eine Klassenfahrt hat jeder Teilnehmer 20 M zu bezahlen. Entscheide, ob man den Gesamtbetrag **a)** nur aus Fünfmarkstücken, **b)** nur aus Zehnmarkscheinen, **c)** nur aus Zwanzigmarkscheinen, **d)** nur aus Fünfzigmarkscheinen zusammensetzen kann!

9. Zerlege 24 so in zwei Faktoren, daß **a)** beide gerade sind, **b)** genau einer gerade ist, **c)** keiner gerade ist!

10. Zerlege 36 so in zwei Faktoren, daß **a)** beide durch 4 teilbar sind, **b)** genau einer durch 4 teilbar ist, **c)** keiner durch 4 teilbar ist!

4 Mengen von Teilern und Vielfachen

● 6 Bei den folgenden Aussagen wird „Menge" in unterschiedlicher Bedeutung verwendet. Vergleiche!
a) Die Menge der geraden Zahlen enthält die Zahl 38.
b) Unser Alphabet ist eine Menge von 26 Buchstaben.
c) Auf dem Sportplatz sind eine Menge Zuschauer.
d) Im Eimer ist eine Menge Wasser.

In der Mathematik verwendet man das Wort **Menge**, wenn man unterscheidbare Objekte zusammenfaßt. Man benutzt es **nicht** an Stelle von *viel.*
Beispiele für Mengen sind:
Die Menge T_{12} der Teiler von 12.
Die Menge T_6 der Teiler von 6.
Die Menge Z der zweistelligen Zahlen, die durch 80 teilbar sind.
Die Menge V_6 der Vielfachen von 6.
Man nennt diejenigen Objekte, die zu einer Menge gehören, die **Elemente** dieser Menge. Wir sagen z. B.: *3 ist ein Element der Menge* T_{12} und schreiben dafür: $3 \in T_{12}$.

● 7 Nenne einige Elemente der Mengen T_{12}, T_6, Z und V_6!

Die Mengen T_{12}, T_6 und Z kann man auch durch Aufzählen ihrer Elemente angeben. Dazu verwendet man geschweifte Klammern. Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge an, in der man die Elemente aufschreibt.

■ 4 $T_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\} = \{3; 2; 6; 1; 4; 12\}$
$T_6 = \{1; 2; 3; 6\} = \{2; 6; 3; 1\}$
$Z = \{80\}$

Die Menge Z enthält nur ein einziges Element. Die Menge V_6 enthält dagegen unendlich viele Elemente; sie läßt sich nicht durch Aufzählung ihrer Elemente angeben.
Zwischen den Mengen T_{12} und T_6 besteht ein Zusammenhang. Jedes Element von T_6 ist auch ein Element von T_{12}. Umgekehrt gibt es in T_{12} Zahlen, die nicht zu T_6 gehören.
Wir sagen: T_6 ist eine **Teilmenge** von T_{12}.
Wir schreiben: $T_6 \subset T_{12}$.
Das **Mengendiagramm** im Bild A 4 veranschaulicht diese Beziehung.

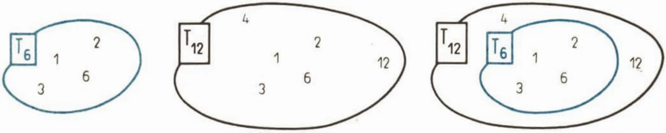


Bild A 4

Aufgaben

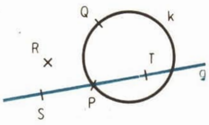
1. Bei welchen Aussagen wird *Menge* im Sinne einer Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte verwendet?
   a) Dresden gehört zur Menge der Bezirksstädte der DDR.
   b) In der *Menge* der Vielfachen von 7 ist 28 enthalten.
   c) Fred hatte in der letzten Woche eine *Menge* Ärger.
   d) Ute nimmt statt Milch die gleiche *Menge* Wasser.

2. **a)** Gib die folgenden Mengen in der Schreibweise $M = \{\ldots\}$ an!
   M_1 sei die Menge der Teiler von 16.
   M_2 sei die Menge der Vielfachen von 4, die kleiner als 19 sind.
   M_3 sei die Menge der durch 10 teilbaren Zahlen zwischen 12 und 29.
   b) Welche Aussagen sind wahr? $16 \in M_1$, $18 \in M_2$, $20 \in M_3$, $12 \in M_2$, $12 \in M_1$, $10 \in M_3$

3. Gib die Menge der zweistelligen Zahlen z an, für die gilt:
   a) $z \mid 100$, **b)** $z \mid 36$, **c)** $25 \mid z$, **d)** $11 \mid z$!

4. Es sei k die Menge der Punkte des Kreises und g die Menge der Punkte der Geraden im Bild A 5. Welche Aussagen sind wahr?
   a) $P \in k$, $Q \in k$, $R \in k$, $S \in k$, $T \in k$
   b) $P \in g$, $Q \in g$, $R \in g$, $S \in g$, $T \in g$

Bild A 5



5. Prüfe, welche Aussagen wahr sind!
   a) $\{6; 18; 30\} \subset \{6; 12; 18; 24; 30\}$
   b) $\{75; 60; 45\} \subset \{14; 30; 45; 60; 75\}$
   c) $\{2; 3; 5\} \subset \{2; 4; 5; 6\}$
   d) $\{3; 5; 6; 7\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
   e) Veranschauliche **a)** und **d)** durch Mengendiagramme!

6. Welche Aussagen sind wahr?
   a) Die Menge der Vielfachen von 8 ist eine Teilmenge der Menge der Vielfachen von 4.
   b) Die Menge aller zweistelligen Zahlen ist Teilmenge der Menge aller dreistelligen Zahlen.
   c)* Die Menge aller geraden Zahlen ist Teilmenge der Menge aller Vielfachen von 3.

7. Es sei N die Menge der natürlichen, N_g die Menge der geraden, N_u die Menge der ungeraden Zahlen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe!
   a) $N_u \subset N$ **b)** $N \subset N_g$ **c)** $N_g \subset N$ **d)** $N_u \subset N_g$
   Veranschauliche die wahren Aussagen in einem einzigen Mengendiagramm!

8. Gib von {34; 35; 36; 37}
   a) drei Teilmengen mit unterschiedlicher Anzahl von Elementen,
   b)* alle Teilmengen mit drei Elementen an!

9.* **a)** Gib eine Menge mit möglichst wenig Elementen an, von der sowohl {2; 3; 4} als auch {4; 5; 6} Teilmengen sind!
   b) Gib eine Menge mit möglichst vielen Elementen an, die Teilmenge von {1; 2; 3; 4; 5} und von {3; 4; 5; 6; 7} ist!

10.* **a)** Nenne acht Wörter, deren Buchstaben eine Teilmenge der Buchstabenmenge des Wortes BUCHREGAL bilden!
   b) Nenne ein Wort, für dessen Buchstabenmenge sowohl {D, E, R} als auch {D, I, E} Teilmengen sind!
   c) Nenne ein Wort, dessen Buchstabenmenge Teilmenge sowohl von {T, E, I, L} als auch von {V, I, E, L} ist!

11. **a)** Es sei V_5 die Menge der Vielfachen von 5 und V_{10} die Menge der Vielfachen von 10. Welche Beziehung besteht zwischen V_5 und V_{10}?
   b)* Was gilt für V_a und V_b, wenn $a \mid b$ gilt?

5 Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Alle Teiler einer Zahl kann man in Form eines „Teilersterns" übersichtlich aufschreiben (↗ Bild A 6). Um keinen Teiler zum Beispiel von 20 zu übersehen, ermittelt man alle Paare von Zahlen, deren Produkt 20 ist.

Bild A 6

● 8 Schreibe alle Teiler der Zahlen **a)** 21, **b)** 23, **c)** 25, **d)** 28, **e)** 1 übersichtlich auf! Gib jeweils auch die Anzahl der Teiler an!

Die Zahl 1 hat genau einen Teiler, nämlich 1 selbst. Jede andere natürliche Zahl hat mindestens zwei Teiler, nämlich 1 und sich selbst. Es gibt Zahlen mit genau zwei und solche mit mehr als zwei Teilern. Null hat sogar unendlich viele Teiler.

5 a) $12 = 1 \cdot 12$ b) $3 = 1 \cdot 3$ c) $1 = 1 \cdot 1$ d) $0 = 0 \cdot 0$

$$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

$$0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 = \ldots$$

Jede natürliche Zahl läßt sich als Produkt von Teilern schreiben. Wenn *alle* Faktoren des Produktes größer als 1 sind, aber auch nur dann, spricht man von einer **Zerlegung** der Zahl. So sind $2 \cdot 6$ und $3 \cdot 4$ Zerlegungen von 12. Es gibt aber auch nicht zerlegbare Zahlen, zum Beispiel 3.

Gegebene Zahl:	12	
Zerlegungen in zwei Faktoren:	$2 \cdot 6$	$4 \cdot 3$
Weitergehende Zerlegung:	$2 \cdot 2 \cdot 3$	

Jede zerlegbare Zahl läßt sich in ein Produkt solcher Zahlen zerlegen, die sich nicht weiter zerlegen lassen. Solche Zahlen können als „Bausteine" für die anderen Zahlen angesehen werden. Sie sind größer als 1 und haben nur 1 und sich selbst als Teiler. Wir legen für diese Zahlen einen gemeinsamen Namen fest: **Primzahlen**. Eine solche Festlegung nennt man eine **Definition**.

Man muß Definitionen von Aussagen unterscheiden. Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Definitionen sind Verabredungen, Festlegungen, Namensgebungen.

Wir kennen bereits solche Festlegungen. In ▶ 1 steht zum Beispiel eine Definition für die Teilbarkeit natürlicher Zahlen, zu Beginn von Lerneinheit A 2 eine Definition für „gerade Zahl" bzw. „ungerade Zahl".

▶ 3 **DEFINITION: Primzahl heißt jede natürliche Zahl, die größer als 1 und nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.**

Alle übrigen natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind, heißen **zusammengesetzte Zahlen**. 0 und 1 sind weder Primzahlen noch zusammengesetzte Zahlen.

● 9 a) Gib alle Primzahlen bis 15 an! b) Gib alle zusammengesetzten Zahlen bis 15 an! Schreibe sie als Produkte von Primzahlen!

Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich in Primfaktoren zerlegen.

6 a) $72 = 9 \cdot 8$

$72 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$

$\underline{\underline{72 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}$

b) $72 = 2 \cdot 36$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 18$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9$

$\underline{\underline{72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}}$

Ebenso wie 72 hat jede zusammengesetzte Zahl *genau eine* **Zerlegung in Primfaktoren.** Man kann sie durch Verwenden von Potenzen kürzer schreiben: $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

2 [000608]

Aufgaben

1. Gib alle Teiler der folgenden Zahlen übersichtlich an!
a) 15 **b)** 16 **c)** 35 **d)** 19

2. Es sollen 32 Spielkarten unter Mitspielern gleichmäßig aufgeteilt werden. Welche Möglichkeiten gibt es für die Anzahl der Spieler?

3. **a)** Udo meint: „Je größer eine Zahl ist, desto mehr Teiler hat sie." Ist seine Aussage wahr?
b) Ilka behauptet: „Jede Zahl, die größer als 1 ist, hat eine gerade Anzahl von Teilern." Ist ihre Aussage wahr?

4. Welche Aussage ist wahr, welche falsch? Begründe!
a) 1 hat genau einen Teiler.
b) Jede Zahl, die größer als 1 ist, hat mindestens zwei Teiler.
c) Jede Zahl hat einen Teiler.
d) Jede Zahl hat genau einen Teiler.

5. Ermittle alle Primzahlen von **a)** 15 bis 30, **b)** 30 bis 40!

6. Welche der folgenden Zahlen sind Primzahlen?
a) 7; 9; 17; 21; 27; 49; 75; 138 **b)** 19; 29; 39; 43; 56; 73; 77; 81

7. **a)** Gib alle geraden Primzahlen an!
b) Gib alle durch 11 teilbaren Primzahlen an!
c) Nenne alle durch 15 teilbaren Primzahlen!

8. Zerlege in Primfaktoren!
a) 44 **b)** 46 **c)** 75 **d)** 60 **e)** 49 **f)** 100 **g)** 140 **h)** 306 **i)** 96 **k)** 256

9. Ermittle alle Teiler von n, die kleiner als n sind! (Dabei soll n nicht berechnet werden.) **a)** $n = 3 \cdot 7 \cdot 11$ **b)** $n = 3 \cdot 7 \cdot 7$ **c)** $n = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

10.* Welche der Zahlen **a)** $2 \cdot 11$, **b)** $2^2 \cdot 3 \cdot 11$, **c)** $3^2 \cdot 11$ sind Teiler von $z = 2 \cdot 3^4 \cdot 11$?

11.* Vergleiche der Größe nach!
a) $25 \cdot 16 \cdot 21 \cdot 7$ und $175 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 3$, **b)** $56 \cdot 25 \cdot 27$ und $12 \cdot 18 \cdot 75$

12.* Die Seitenlängen eines Rechtecks seien mit Hilfe natürlicher Zahlen angegeben. Kann man **a)** den Umfang, **b)** den Flächeninhalt durch eine Primzahl angeben?

6 Teilbarkeit von Summen und Differenzen

Wir wissen aus Lerneinheit 3: Die Teilbarkeit der Zahl 2436 durch 3 kann man feststellen, indem man sie in geeignete Faktoren zerlegt, zum Beispiel in $12 \cdot 203$. Da 12 durch 3 teilbar ist, ist es auch 2436. Dabei stützt man sich auf die wahre Aussage:

Wenn bei einem Produkt mindestens ein Faktor durch 3 teilbar ist, so ist auch das Produkt durch 3 teilbar.

Oft ist es aber leichter, eine Zahl nicht in Faktoren, sondern in Summanden zu zerlegen. Das führt auf die Frage, ob eine entsprechende Aussage auch für Summen gilt.

● **10** **a)** Ersetze in der Aussage auf Seite 18 unten *Produkt* und *Faktor* durch *Summe* und *Summand*! Welche Aussage erhältst du?

b) Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie!
Überprüfe danach, ob die von dir in **a)** formulierte Aussage wahr ist!

a	b	$3 \mid a$	$3 \mid b$	$3 \mid a+b$
21	7	ja	nein	
14	18			
2400	36			

Aus Auftrag A 10b) läßt sich vermuten, daß die folgende Aussage wahr ist:

> *Wenn zwei Zahlen* a *und* b *durch 3 teilbar sind, dann ist ihre Summe* $a+b$ *durch 3 teilbar.*

Wir haben bereits erkannt, daß die Wahrheit einer solchen Aussage nicht durch Angeben einzelner Beispiele nachgewiesen werden kann. Wir wollen nun **beweisen**, daß die Aussage für alle durch 3 teilbaren Zahlen a und b gilt. Dazu überlegen wir:

1. Wir **setzen voraus**, daß a und b durch 3 teilbar sind. Das bedeutet: Die Summanden a und b lassen sich als Produkte mit dem Faktor 3 schreiben. Es gibt also Zahlen x und y, so daß gilt: $a = 3 \cdot x$ und $b = 3 \cdot y$ (↗ Bild A 7).
2. Wir **behaupten**, daß auch $a+b$ durch 3 teilbar ist. Das bedeutet: Auch die Summe $a+b$ muß sich als Produkt mit dem Faktor 3 schreiben lassen.

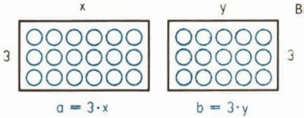


Bild A 7

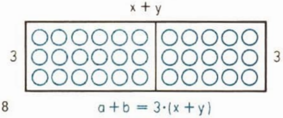


Bild A 8

3. Beim **Beweisen** zeigen wir: Wenn sich a und b als Produkte mit dem Faktor 3 schreiben lassen, so ist das auch für $a+b$ möglich. Beim Umformen der Summe $a+b$ zu einem solchen Produkt benutzen wir das, was wir über a und b voraussetzen:
   $a + b = 3 \cdot x + 3 \cdot y.$
   Nach dem Distributivgesetz können wir dafür auch schreiben: (↗ Bild A 8)
   $a + b = 3 \cdot (x + y).$
   Damit ist unsere Vermutung bewiesen.

Wir schreiben das nun kurz und übersichtlich auf.

■ **7** Wenn $3 \mid a$ und $3 \mid b$, so $3 \mid a + b$.

Voraussetzung: $3 \mid a;\ 3 \mid b$

Behauptung: $3 \mid a + b$

Beweis:

$3 \mid a;\ 3 \mid b$	(Voraussetzung)
$a = 3 \cdot x;\ b = 3 \cdot y$	(Teilerdefinition, $x \in N$, $y \in N$)
$a + b = 3 \cdot x + 3 \cdot y$	
$a + b = 3 \cdot (x + y)$	(Distributivgesetz, $x + y \in N$)
$3 \mid a + b$	(Teilerdefinition) (w.z.b.w.)[1]

[1] w.z.b.w. soll bedeuten: **w**as **z**u **b**eweisen **w**ar.

● 11 Beweise wie im Beispiel A 7!
a) Wenn $7 \mid a$ und $7 \mid b$, so $7 \mid a + b$.
b) Wenn $n \mid a$ und $n \mid b$, so $n \mid a + b$.

Eine wichtige wahre Aussage nennt man in der Mathematik **Satz**.

▶ 4 **SATZ: Wenn zwei Zahlen a und b durch n teilbar sind, so ist auch ihre Summe $a + b$ durch n teilbar.**

Umgekehrt gilt jedoch nicht:
Wenn die Summe zweier Zahlen durch n teilbar ist, so sind die Zahlen selbst durch n teilbar.
Zum Beispiel gilt für $17 + 13 = 30$ zwar $3 \mid 30$, nicht aber $3 \mid 17$ und $3 \mid 13$.
Wir wissen aus Auftrag A 10: Wenn von zwei Zahlen a und b nur eine durch n teilbar ist, so muß nicht $a + b$ durch n teilbar sein. Tatsächlich gilt sogar stets:

▶ 5 **SATZ: Wenn $n \mid a$ und $n \nmid b$, so $n \nmid a + b$.**

Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir. Auch künftig werden wir nicht alle Sätze beweisen. Für die Teilbarkeit der Differenz zweier Zahlen gelten entsprechende Sätze.

● 12 Formuliere entsprechend den Sätzen 4 und 5 Sätze für die Teilbarkeit der Differenz zweier Zahlen!

Die neuen Sätze erleichtern uns, die Teilbarkeit größerer Zahlen zu untersuchen.

■ 8 a) $7 \mid 721$, denn $721 = 700 + 21$ und $7 \mid 700$ und $7 \mid 21$.
b) $7 \nmid 725$, denn $725 = 700 + 25$ und $7 \mid 700$ und $7 \nmid 25$.
c) $7 \mid 693$, denn $693 = 700 - 7$ und $7 \mid 700$ und $7 \mid 7$.
d) $7 \nmid 695$, denn $695 = 700 - 5$ und $7 \mid 700$ und $7 \nmid 5$.

Aufgaben

1. Fülle die Tabelle wie in der ersten Zeile aus!

a	b	$a = 3 \cdot x$	$b = 3 \cdot y$	$a + b = 3 \cdot z$
24	6	$24 = 3 \cdot 8$	$6 = 3 \cdot 2$	$24 + 6 = 3 \cdot 10$
27	18			
21	36			

Welcher Zusammenhang besteht zwischen x, y, z?

2. Nenne Teiler der Summen, ohne diese zu berechnen!
a) $15 + 21$ b) $9 + 12$ c) $10 + 15$ d) $20 + 36$ e) $24 + 36$

3. Überprüfe, ob $x + y$ durch n teilbar ist! Begründe!
a) $x = 600$, $y = 78$, $n = 4$ b) $x = 78$, $y = 36$, $n = 6$
c) $x = 21$, $y = 22$, $n = 7$ d) $x = 7200$, $y = 56$, $n = 8$

4. Überprüfe die folgenden Aussagen! Begründe!
a) $5 \mid 65 + 70$ c) $4 \mid 210 + 38$ e) $9 \mid 900 - 80$
b) $3 \mid 270 + 25$ d) $7 \mid 560 - 35$ f) $6 \mid 420 - 54$

5. Welche der Zahlen 603; 214; 96; 3072; 4205 sind durch 3 teilbar? Begründe!

6. Welche der Zahlen 1428; 63006; 2828; 70777; 4915 sind durch 7 teilbar? Begründe!

7. Setze in $36 + n$ eine solche Zahl für n ein, daß die Summe
a) durch 12, **b)** nicht durch 6, **c)** durch 7 teilbar ist!

8.* Gib ein Zahlenpaar (x, y) an, für das gilt:
a) $5 \mid x$, $5 \mid y$ und $5 \mid x + y$, **b)** $5 \mid x$, $5 \mid y$ und $5 \nmid x + y$,
c) $5 \mid x$, $5 \nmid y$ und $5 \mid x + y$, **d)** $5 \mid x$, $5 \nmid y$ und $5 \nmid x + y$,
e) $5 \nmid x$, $5 \nmid y$ und $5 \mid x + y$, **f)** $5 \nmid x$, $5 \nmid y$ und $5 \nmid x + y$!

9. Überprüfe die folgenden Aussagen! Begründe!
a) $24 + 48 + 36$ ist durch 6 teilbar.
b) $81 + 9 + 17$ ist durch 9 teilbar.

10. Stelle fest, ob z durch n teilbar ist!
a) $z = 693$, $n = 7$ **b)** $z = 882$, $n = 9$ **c)** $z = 354$, $n = 6$

11. Ersetze ✱ in 42✱80 durch eine solche Ziffer, daß eine
a) durch 7, **b)** durch 6 teilbare Zahl entsteht!

12. Berechne mündlich! **a)** $177 : 3$ **b)** $252 : 9$ **c)** $445 : 5$ **d)** $891 : 3$ **e)** $343 : 7$

13.* Ergänze die Tabelle! Formuliere jeweils eine Aussage dazu! Beweise sie! (Bei $a - b$ sei b nicht größer als a.)

a	b	$a + b$	$a - b$
gerade	gerade		
gerade	ungerade		

14. Zerlege 24 so in zwei Summanden, daß **a)** beide gerade sind, **b)** nur ein Summand gerade ist, **c)** kein Summand gerade ist!

15. An einem Stand werden Handtücher zu je 7 M verkauft. Abends enthält die Kasse 1430 M. Woher weiß man, daß dieser Betrag nicht stimmen kann? Welche Beträge zwischen 1420 M und 1450 M wären möglich?

7 Teilbarkeitsregeln

Wir kennen bereits spezielle Sätze für die Teilbarkeit einer Zahl durch 2, 5 und 10. Sie werden Teilbarkeitsregeln genannt. Durch sie kann man sich das Untersuchen auf Teilbarkeit erleichtern. Zum Beispiel ist 5738 durch 2 teilbar, weil 8 die letzte Ziffer dieser Zahl ist.

Jede Zahl, deren letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist, ist durch 2 teilbar.
Jede Zahl, deren letzte Ziffer 0 oder 5 ist, ist durch 5 teilbar.
Jede Zahl, deren letzte Ziffer 0 ist, ist durch 10 teilbar.
Alle anderen Zahlen sind nicht durch 2, 5 oder 10 teilbar.

Diese und auch andere Regeln kann man mit Hilfe der Sätze über die Teilbarkeit von Produkten und Summen beweisen.

● 13 Überprüfe mit Hilfe der Sätze über die Teilbarkeit von Produkten und Summen, ob **a)** 7300, **b)** 7332, **c)** 7315 durch 4 teilbar sind! Begründe!

Hinweis: Schreibe die Zahlen als Vielfache von 100 oder als Summen, bei denen ein Summand ein Vielfaches von 100 und der andere kleiner als 100 ist!

▶ 6 **SATZ: Jede Zahl, deren letzte beide Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden, ist durch 4 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 4 teilbar.**

■ 9 Wir untersuchen, ob 52836 und 73439 durch 4 teilbar sind.
a) $4 \mid 52836$, denn $4 \mid 36$ **b)** $4 \nmid 73439$, denn $4 \nmid 39$

Auch für die Teilbarkeit durch 3 und 9 gibt es Regeln. In ihnen wird aber nichts über die letzten Ziffern einer Zahl ausgesagt, sondern über ihre **Quersumme**. Die Quersumme von 7251 ist $7 + 2 + 5 + 1$, also 15.

▶ 7 **SATZ: Jede Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, ist durch 3 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 3 teilbar.**

▶ 8 **SATZ: Jede Zahl, deren Quersumme durch 9 teilbar ist, ist durch 9 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 9 teilbar.**

■ 10 Wir untersuchen, ob 5346 und 3728 durch 3 und durch 9 teilbar sind.

5346 hat die Quersumme 18.	3728 hat die Quersumme 20.
$3 \mid 18$; also $3 \mid 5346$	$3 \nmid 20$; also $3 \nmid 3728$
$9 \mid 18$; also $9 \mid 5346$	$9 \nmid 20$; also $9 \nmid 3728$

● 14 Begründe die folgende Aussage!
*Wenn eine Zahl a durch **6** teilbar ist, so ist a durch **2** und durch **3** teilbar.*

Wir wollen überlegen, ob auch das Umgekehrte gilt.

*Wenn eine Zahl a durch **2** und durch **3** teilbar ist, so ist a durch **6** (durch **2 · 3**) teilbar.*

● 15 Ergänze die Tabelle! Überprüfe daran die Aussage!

a	18	27	22	42
$2 \mid a$	ja			
$3 \mid a$	ja			
$6 \mid a$	ja			

Aus den Ergebnissen des Auftrags A 15 läßt sich vermuten:

▶ 9 **SATZ: Jede Zahl, die durch 2 und 3 teilbar ist, ist durch 6 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 6 teilbar.**

Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir.

■ 11 Wir untersuchen, ob 5478 und 5854 durch 6 teilbar sind.

$2 \mid 5478$, denn 5478 endet auf 8.
$3 \mid 5478$, denn
$5+4+7+8=24$ und $3 \mid 24$.
Also gilt: $6 \mid 5478$.

$2 \mid 5854$, denn 5854 endet auf 4.
$3 \nmid 5854$, denn
$5+8+5+4=22$ und $3 \nmid 22$.
Also gilt: $6 \nmid 5854$.

Aufgaben

1. Welche der folgenden Zahlen sind **a)** durch 10, **b)** durch 100, **c)** durch 5, **d)** durch 2 teilbar? Begründe!
2370; 43765; 7800; 776; 460; 37000; 9874; 1395

2. Gib eine vierstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 schreiben läßt und
a) durch 2 teilbar ist, **b)** nicht durch 2 teilbar ist,
c) durch 5 teilbar ist, **d)** nicht durch 5 teilbar ist!

3.* **a)** Gib die größte und die kleinste fünfstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 0, 2, 4, 7 und 9 schreiben läßt und durch 5 teilbar ist!
b) Gib die größte und die kleinste vierstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 5 und 7 schreiben läßt und durch 5 teilbar ist!

4. Eine vierstellige Zahl hat **a)** 0 als letzte Ziffer, **b)** 0 als letzte und vorletzte Ziffer. Nenne Teiler der Zahl!

5.* Begründe mit Hilfe der Sätze über die Teilbarkeit von Produkten und Summen, daß 7300 und 7375 durch 25 teilbar sind und daß 7323 nicht durch 25 teilbar ist! Formuliere eine Teilbarkeitsregel für 25!

6. Welche der folgenden Zahlen sind **a)** durch 4, **b)*** durch 25 teilbar?
5716; 3120; 9815; 2350; 4980; 25234; 29940; 14475

7. **a)** Gib eine fünfstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 0, 1, 3, 5 und 6 schreiben läßt und durch 4 teilbar ist!
b)* Gib die größte und die kleinste fünfstellige Zahl an, die sich mit den Ziffern 2, 3, 5, 7 und 8 schreiben läßt und durch 4 teilbar ist!

8. Welche der folgenden Zahlen sind durch 3 teilbar?
517; 4257; 8721; 24036; 20188; 58761; 213421; 539820

9. Welche der folgenden Zahlen sind durch 9 teilbar?
783; 3481; 8685; 11201; 26743; 87444; 387644; 564291

10. Gib drei fünfstellige Zahlen an, die
a) durch 3 teilbar sind, **b)** nicht durch 3 teilbar sind,
c) durch 9 teilbar sind, **d)** nicht durch 9 teilbar sind,
e) durch 3, aber nicht durch 9 teilbar sind!

11. Überprüfe die Teilbarkeit der folgenden Zahlen durch 2; 3; 4; 5; 9 und 10 mit Hilfe von Teilbarkeitsregeln!
a) 3678 **b)** 14586 **c)** 67924 **d)** 23456100
e) 5925 **f)** 20000 **g)** 72273 **h)** 15656565

12. Ersetze ∗ in 725∗6 durch eine solche Ziffer, daß eine
a) durch 4, **b)** durch 5, **c)** durch 3, **d)** durch 9 teilbare Zahl entsteht!

13. Welche der folgenden Zahlen sind durch 6 teilbar?
a) 756 **b)** 2847 **c)** 9462 **d)** 5344 **e)** 78528

14.* Gib die kleinste und die größte vierstellige Zahl an, die durch 6 teilbar ist!

15.* **a)** Überprüfe, ob es eine dem Satz A 9 entsprechende Teilbarkeitsregel für 8 gibt!
b) Formuliere entsprechend Satz A 9 eine Teilbarkeitsregel für 12! Untersuche dazu einige Beispiele!

16.* **a)** Nenne die kleinste durch 8 teilbare Zehnerpotenz!
b) Verwende das Ergebnis von **a)**, um festzustellen, ob 27320 (45776; 73641) durch 8 teilbar ist!
c) Formuliere entsprechend dem Satz A 6 eine Teilbarkeitsregel für 8!

17.* Auf welche Ziffern können Primzahlen, die größer als 10 sind, nicht enden?

Zusammenfassung

Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Durch einen **Beweis** wird die Wahrheit einer Aussage nachgewiesen. Wichtige wahre Aussagen heißen **Sätze**. Läßt sich für eine Aussage ein Gegenbeispiel angeben, so ist sie als falsch nachgewiesen.

Definitionen sind Festlegungen oder Namensgebungen.
Definition: $a \mid b$ bedeutet: Es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $a \cdot n = b$ ist.
Definition: a ist Primzahl bedeutet: a ist größer als 1 und nur durch 1 und a teilbar.

Satz: Wenn $n \mid a$ oder $n \mid b$, so $n \mid a \cdot b$.
Satz: Wenn $n \mid a$ und $n \mid b$, so $n \mid a + b$ und $n \mid a - b$.
Satz: Wenn $n \mid a$ und $n \nmid b$, so $n \nmid a + b$ und $n \nmid a - b$.

Teilbarkeitsregeln (Kurzform):

$10 \mid n$	Letzte Ziffer von n ist 0.
$2 \mid n$	Letzte Ziffer von n ist 0, 2, 4, 6 oder 8.
$5 \mid n$	Letzte Ziffer von n ist 0 oder 5.
$4 \mid n$	Letzte zwei Ziffern bilden eine durch 4 teilbare Zahl.
$3 \mid n$	Quersumme von n ist durch 3 teilbar.
$9 \mid n$	Quersumme von n ist durch 9 teilbar.
$6 \mid n$	n ist durch 2 und durch 3 teilbar.

Gemeinsame Vielfache; gemeinsame Teiler

8 Gemeinsame Teiler

● 16 **a)** Herr Müller will an zwei Seiten seines Gartens aus gleich langen Holzgittern einen Zaun setzen. Die eine Gartenseite mißt 24 m, die andere 18 m. Für die Gitterlängen kommen nur volle Meter in Frage.
Welche Längen sind möglich?
b) Welche Längen sind möglich, wenn die Seiten 25 m und 18 m lang sind?

Es gibt Zahlen, die Teiler sowohl von 18 als auch von 24 sind. Solche Zahlen nennt man **gemeinsame Teiler** von 18 und 24.

■ 12 **a)**

Teiler von 24	1	2	3	4	6	8		12		24
Teiler von 18	1	2	3		6		9		18	

1, 2, 3, 6 sind gemeinsame Teiler von 24 und 18.

b)

Teiler von 25	1			5				25
Teiler von 18	1	2	3		6	9	18	

1 ist der einzige gemeinsame Teiler von 25 und 18.

Der **größte gemeinsame Teiler** (g. g. T.) von 24 und 18 ist 6. Der g. g. T. von 25 und 18 ist 1.
Zwei natürliche Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen zueinander **teilerfremd**. Die Zahlen 25 und 18 sind zueinander teilerfremd.

Aufgaben

1. Ermittle alle gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen!
a) 12 und 15 **b)** 7 und 9 **c)** 6 und 60 **d)** 45 und 75

2. Gib alle Teiler von 24 an! Suche unter ihnen diejenigen heraus, die auch Teiler von **a)** 4, **b)** 7, **c)** 48, **d)** 36 sind!

3. Ermittle den g. g. T. der folgenden Zahlen!
a) 12 und 18 **b)** 45 und 60 **c)** 28 und 49 **d)** 36 und 55 **e)** 63 und 72
f)* 12, 18 und 15 **g)*** 25, 26 und 130

4. Kürze folgende Brüche so weit wie möglich!
a) $\frac{4}{10}, \frac{6}{9}, \frac{7}{5}, \frac{6}{36}, \frac{27}{18}$ **b)** $\frac{8}{12}, \frac{54}{60}, \frac{0}{29}, \frac{72}{48}, \frac{36}{12}$
c) $\frac{4}{8}, \frac{10}{12}, \frac{8}{12}, \frac{2}{12}, \frac{5}{25}$ **d)** $\frac{7}{14}, \frac{20}{24}, \frac{3}{2}, \frac{0}{5}, \frac{7}{21}$

5. Schreibe von den folgenden Zahlenpaaren (a; b) diejenigen heraus, bei denen a und b zueinander teilerfremd sind!
(8; 22), (23; 47), (41; 164), (19; 58), (42; 63), (17; 82)

6. Welche Zahlen sind kleiner als 30 und zu 30 teilerfremd?

7. Im Bild A 9 bedeuten T_{12} die Menge der Teiler von 12, T_{28} die Menge der Teiler von 28. Einige Teiler sind durch Buchstaben ersetzt.

a) Für welche Zahlen stehen Buchstaben?

b) Schreibe die Menge T der gemeinsamen Teiler von 12 und 28 heraus!

c) Welche Beziehung besteht zwischen T und T_{12}?

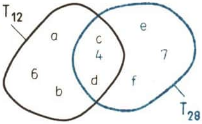


Bild A 9

8.* Das Diagramm im Bild A 10 für Teilermengen der Zahlen m und n enthält nicht alle Teiler. Man kann aber ersehen, wieviel Zahlen in jedes „Gebiet" gehören. Vervollständige das Diagramm! Gib die Zahlen m und n an!

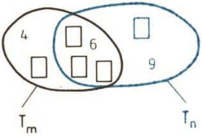


Bild A 10

9 Gemeinsame Vielfache

● **17** An einer Haltestelle verkehren zwei verschiedene Straßenbahnlinien; die eine hat einen Zugabstand von 8 Minuten, die andere von 12 Minuten. Um 6 Uhr fahren Züge beider Linien gleichzeitig ab. Nach wieviel Minuten geschieht das zum **a)** ersten, **b)** zweiten, **c)** dritten, **d)** vierten Mal wieder?

Es gibt Zahlen, die Vielfache von 8 und zugleich Vielfache von 12 sind. Solche Zahlen nennt man **gemeinsame Vielfache** von 8 und 12.

■ **13**

Vielfache von 8	0	8		16	24	32		40	48	56		64	72	80		88	96
Vielfache von 12	0		12		24		36		48		60		72		84		96

Gemeinsame Vielfache von 8 und 12 sind 0, 24, 48, 72, 96, ...

Unter den gemeinsamen Vielfachen von 8 und 12 ist 24 deshalb von besonderer Bedeutung, weil alle gemeinsamen Vielfachen auch Vielfache von 24 sind. Man nennt 24 das **kleinste gemeinsame Vielfache** (k. g. V.) von 8 und 12, obwohl 0 kleiner als 24 und auch gemeinsames Vielfaches von 8 und 12 ist.
Bei künftigen Überlegungen über gemeinsame Vielfache zweier Zahlen a und b schließen wir Null sowohl für a und b als auch für deren gemeinsame Vielfache aus.

● **18** Ermittle das k. g. V. von **a)** 10 und 15, **b)** 4 und 5, **c)** 6 und 18!
Wie groß kann das k. g. V. zweier Zahlen höchstens sein?
Wie groß muß es mindestens sein?

Wir ermitteln das k. g. V. zweier Zahlen a und b, für die $a < b$ gilt, folgendermaßen:	
Wir bilden nacheinander die Vielfachen von b, bis wir zu dem kleinsten gelangen, das auch Vielfaches von a ist.	■ $a = 12$, $b = 15$ $12 \nmid 15$, $12 \nmid 30$, $12 \nmid 45$, $12 \mid 60$ Das k. g. V. von 12 und 15 ist 60
Vereinfachungen	
(1) Wenn $a \mid b$, dann ist b das k. g. V.	■ $a = 7$, $b = 28$ $7 \mid 28$ Das k. g. V. von 7 und 28 ist 28
(2) Wenn a und b teilerfremd sind, dann ist $a \cdot b$ das k. g. V.	■ $a = 7$, $b = 9$ 7 und 9 sind teilerfremd. Das k. g. V. von 7 und 9 ist $7 \cdot 9 = 63$

Das Produkt zweier Zahlen ist stets gemeinsames Vielfaches beider Zahlen.
Das k. g. V. dreier Zahlen ermitteln wir schrittweise:

■ 14 Gesucht ist das k. g. V. von 4; 6 und 9.
Das k. g. V. von 4 und 6 ist 12; das k. g. V. von 12 und 9 ist 36. Also:
Das k. g. V. von 4; 6 und 9 ist 36.

■ 15 Gesucht ist das k. g. V. von 5; 12 und 15.
Das k. g. V. von 5 und 15 ist 15; das k. g. V. von 12 und 15 ist 60. Also:
Das k. g. V. von 5; 12 und 15 ist 60.

Aufgaben

1. Ermittle drei gemeinsame Vielfache von
a) 20; 30 **b)** 24; 20 **c)** 18; 50 **d)** 15; 60 **e)** 12; 16

2. Berechne das k. g. V. von
a) 8; 20, **b)** 18; 9, **c)** 10; 7, **d)** 1; 5, **e)** 15; 20,
f) 15; 9, **g)** 3; 33, **h)** 12; 28, **i)** 45; 35, **k)** 30; 50,
l) 6; 9; 12, **m)** 7; 12; 21, **n)** 8; 12; 15, **o)** 90; 15; 18!

3. Nenne jeweils zwei natürliche Zahlen x und y, für die gilt:
a) 50 ist ein gemeinsames Vielfaches von x und y,
b) 60 ist ein gemeinsames Vielfaches von x und y, aber nicht das k. g. V.
c) 40 ist das k. g. V. von x und y!

4. V_4 sei die Menge der Vielfachen von 4, V_{10} die Menge der Vielfachen von 10.
a) Ermittle das k. g. V. von 4 und 10! Wo muß es im Bild A 11 eingetragen werden?
b) Gib drei Zahlen an, die sowohl zu V_4 als auch zu V_{10} gehören!
c)* Die gemeinsamen Vielfachen von 4 und 10 sind Vielfache einer Zahl, die größer als 10 ist. Wie heißt sie?

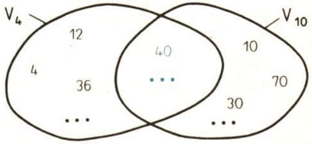


Bild A 11

5. Gib zwei natürliche Zahlen an, die **a)** 24, **b)** 15, **c)** 17, **d)** 20 als gemeinsames Vielfaches (als k. g. V.) haben!

6. Ermittle Zahlen, die anstelle der Variablen stehen könnten!

Zahl	a	b	7	12	30
Zahl	6	15	c	d	e
k. g. V.	18	30	20	d	30

Zahl	9	g	h	i	j
Zahl	f	40	5	25	8
gem. Vielf.	72	20	65	100	6

7. Welche Aussagen können nicht wahr sein? Begründe!
a) Das k. g. V. von 72 und 45 ist 360.
b) Das k. g. V. von 27 und 32 ist 1368.
c) Ein gemeinsames Vielfaches von 180 und 720 ist 360.
d) Ein gemeinsames Vielfaches von 135 und 28 ist 536.

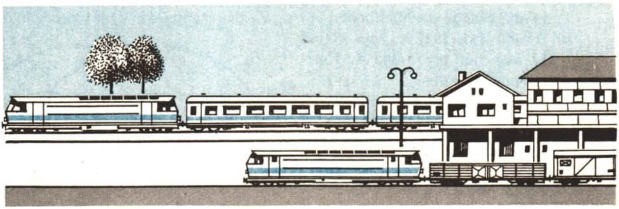
8. Schreibe das k. g. V. von m und n als Produkt von Primzahlpotenzen!
a) $m = 2 \cdot 7,\ \ n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ **b)** $m = 2 \cdot 3 \cdot 13,\ n = 3^2$
c) $m = 3 \cdot 11,\ n = 5 \cdot 13$ **d)** $m = 2^2 \cdot 5 \cdot 7,\ \ n = 2 \cdot 3 \cdot 5$

9.* Das k. g. V. von 8, 12 und x sei 120.
a) Welche Primfaktoren muß x unbedingt enthalten?
b) Welche Primfaktoren kann x enthalten?
c) Gib eine Primzahl an, die kleiner als 10 und nicht Primfaktor von x ist!

10. Eine Krankenhausstation bestellt n Packungen mit je 50 Tabletten. In der Apotheke sind nur Packungen mit je 20 Tabletten vorhanden. Für welche Zahlen n kann die Belieferung in der gewünschten Anzahl erfolgen?

11. Claudia erzählt: „Im Ferienlager machten wir mit Bussen Ausflüge. Beim ersten Ausflug hatten wir Busse mit 24 Plätzen für die Fahrgäste, beim zweiten mit 16 Plätzen. Beide Male blieb kein Platz frei, und die Zahl der Fahrgäste war stets dieselbe. Sie lag zwischen 70 und 100." Wieviel Fahrgäste waren an jedem Ausflug beteiligt?

12.* Auf einer Modelleisenbahnanlage mit Zweizugbetrieb verkehren ein Schnellzug und ein Güterzug. Der Schnellzug benötigt für eine Runde 15 s, der Güterzug 21 s. Beide Züge starten gleichzeitig am Bahnhof. Nach welcher Zeit durchfahren sie wieder gleichzeitig den Bahnhof? Wieviel Runden haben sie dann jeweils zurückgelegt?



Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung

1. Ein würfelförmiges Stück Zucker hat eine durchschnittliche Kantenlänge von 15 mm. Zur Verpackung werden quaderförmige Schachteln hergestellt. Deren Kantenlängen sollen höchstens 50 mm, 80 mm und 110 mm betragen und diesen Werten möglichst nahekommen. Wie lang müssen die Innenkanten einer Schachtel sein, wenn sie durch Zuckerstücke lückenlos ausgefüllt sein soll? Könnte man diese Schachtel auch durch Würfelzucker bei einer durchschnittlichen Kantenlänge von 10 mm lückenlos ausfüllen?

2. Stelle die Teilbarkeit der Zahlen
   a) 459; 798; 819; 2736 durch 3 (9; 6) fest,
   b) 638; 856; 1028; 9632 durch 4 (8; 7) fest,
   c)* 187; 341; 273; 442 durch 11 (13; 17) fest!

3.* Gib alle einstelligen Zahlen n an, für die gilt:
   a) $n \cdot n + n + 1$ ist durch 3,
   b) $n \cdot n + n + 3$ ist durch 2 teilbar!

4.* Untersuche, ob die folgende Aussage wahr ist!
   Für jede natürliche Zahl n *ist* $n \cdot n + n + 11$ eine Primzahl.

5. Nenne alle Zahlen zwischen 40 und 50, die sich in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben lassen! Begründe! Welche von ihnen sind Primzahlen, welche Primzahlpotenzen?

6. V_2, V_4 und V_6 seien die Mengen der Vielfachen von 2, von 4 und von 6.
   a) Gib je 3 Elemente von V_2, V_4, V_6 an!
   b)* Was läßt sich über die Teilbarkeit von $x + y$ und $x \cdot y$ sagen, wenn (1) $x \in V_2$ und $y \in V_4$, (2) $x \in V_2$ und $y \in V_6$, (3) $x \in V_4$ und $y \in V_6$ sind?

7. Gib die größte und die kleinste fünfstellige Zahl an, die
   a) durch 3 teilbar ist, **b)** durch 9 teilbar ist!

8.* Welche Aussage ist wahr, welche falsch? Begründe!
   Die Summe zweier ungerader Zahlen ist
   a) eine ungerade Zahl, **b)** eine gerade Zahl.

9. Ist die folgende Aussage wahr? Begründe!
   Der Vorgänger jeder durch 6 teilbaren Zahl ist eine Primzahl.

10. Ergänze durch Einfügen von $|$, $\in$ oder $\subset$ zu wahren Aussagen!
    a) 5 45 **b)** 7 N **c)** $\{0, 1, 2\}$ N
    d) $\{6, 12, 18\}$ $\{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$
    e) 12 $\{4, 8, 12, 16\}$ **f)** 18 36
    g) 7 $\{7, 14, 21\}$

11. **a)** Axel sagt: „Primzahlen heißen diejenigen natürlichen Zahlen, die höchstens zwei Teiler haben." Warum kann das keine Definition für „Primzahl" sein? Versuche, daraus eine geeignete Definition herzustellen!
    b) Beate sagt: „Primzahlen heißen die Zahlen 2; 3; 5; 7; 11; 13 und so weiter." Warum ist dies keine brauchbare Definition?

B Gebrochene Zahlen

Bild B 1 Silbermünze
aus dem Jahre 1869

Bild B 2 Briefmarken, die im Jahre 1868
für den Norddeutschen Postbezirk ausgegeben wurden

Gebrochene Zahlen werden mit Hilfe gemeiner Brüche oder mit Hilfe von Dezimalbrüchen angegeben. Während früher im täglichen Leben die gemeinen Brüche eine große Rolle spielten, trifft man sie heute seltener an. Die Dezimalbrüche haben die gemeinen Brüche immer mehr verdrängt. Ganz besonders deutlich wird dieser Wandel bei der Angabe von Größen. Auf einer Münze aus dem Jahre 1869 finden wir die Prägung „$2\frac{1}{2}$ Silbergroschen“ (↗ Bild B 1). Im Norddeutschen Postbezirk wurden im Jahre 1868 Briefmarken im Wert von $\frac{1}{4}$ Groschen, $\frac{1}{3}$ Groschen und $\frac{1}{2}$ Groschen eingeführt (↗ Bild B 2). Aber auch heute werden gemeine Brüche noch verwendet. Milch wird in Flaschen oder in Packungen mit $\frac{1}{2}$ l und $\frac{1}{4}$ l Inhalt verkauft. Der Rohrleger bezeichnet noch heute die Größe von Rohren, Muffen, Rohrverbindungen unter Anwendung des englischen Längenmaßes „ZOLL“ (1 Zoll = 1″ = 25,4 mm) und sagt dann „Das Rohr hat einen Durchmesser von $\frac{3}{4}$ Zoll“. Beim Fotografieren gibt man die verschiedenen Belichtungszeiten mit Hilfe gemeiner Brüche an: $\frac{1}{2}$ s, $\frac{1}{4}$ s, $\frac{1}{8}$ s, $\frac{1}{15}$ s, $\frac{1}{30}$ s, $\frac{1}{60}$ s, $\frac{1}{125}$ s. Im folgenden Kapitel werden wir lernen, wie man mit gebrochenen Zahlen in beiden Darstellungsformen rechnet.

Ordnung gebrochener Zahlen

1 Brüche und gebrochene Zahlen

Zur Angabe ein und derselben Größe oder auch ein und derselben Warenmenge können verschiedene Brüche verwendet werden. Treten dabei Zehnerbrüche auf, so kann man diese auch als Dezimalbrüche schreiben.

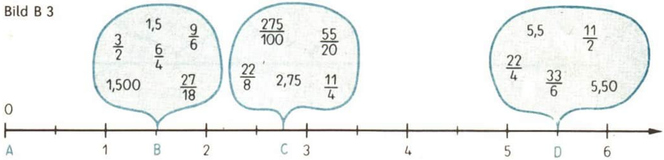
● 1 Welche der folgenden Angaben sind gleichwertig?

a) 0,5 cm; $\frac{5}{10}$ cm **b)** eine halbe Torte; $\frac{6}{12}$ einer Torte

c) $\frac{3}{4}$ m; $\frac{750}{1000}$ m **d)** 0,5 kg; $\frac{1}{5}$ kg **e)** 0,4 l; $\frac{2}{5}$ l

Im Bild B 3 bezeichnen **alle** Brüche, die zu ein und demselben Punkt des Zahlenstrahls gehören, den Zahlenwert der Längen von $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AD}$.

Bild B 3



● 2 Gib für jede der Streckenlängen von $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ drei weitere Brüche an!

Wir fassen nun jeweils alle Brüche, die ein und denselben Punkt des Zahlenstrahls bezeichnen, zu einer Menge zusammen. Jede solche Menge nennen wir eine **gebrochene Zahl**.

Wir wissen, daß alle Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, zu ein und derselben gebrochenen Zahl gehören. Brüche, die nicht durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, gehören zu verschiedenen gebrochenen Zahlen. Es kann kein Bruch zu mehr als einer dieser Mengen gehören, und jeder Bruch gehört zu einer gebrochenen Zahl.

Zur Angabe einer gebrochenen Zahl kann jeder in der betreffenden Menge liegende Bruch verwendet werden. So sagen wir zum Beispiel kurz: *Die gebrochene* Zahl $\frac{5}{2}$ $\left(\text{oder auch } \frac{15}{6};\ \frac{10}{4};\ \frac{25}{10};\ 2{,}5\ \ldots\right)$

anstelle von: *Die durch den Bruch* $\frac{5}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{15}{6};\ \frac{10}{4};\ \frac{25}{10};\ 2{,}5\ \ldots\right)$ *gegebene gebrochene Zahl.*

Wir schreiben: $\frac{5}{2} = \frac{15}{6} = \frac{10}{4} = \frac{25}{10} = \ \ldots$

Die Menge **aller** gebrochenen Zahlen wird mit Q_+ bezeichnet.

Da sich die natürlichen Zahlen als gemeine Brüche oder als Dezimalbrüche schreiben lassen, gehören sie zu den gebrochenen Zahlen.

■ 1 $\mathbf{7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{21}{3} = \ldots; \qquad 7 = 7{,}0 = 7{,}00 = 7{,}000 = \ldots}$

▸ 1 **Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der gebrochenen Zahlen.** $\mathbf{N \subset Q_+}$

Zur Darstellung gebrochener Zahlen am Zahlenstrahl können wir aus den Mengen im Bild B 4 je einen Bruch auswählen. Die gebrochenen Zahlen $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{1}$; $\frac{2}{1}$ usw. können dabei durch die natürlichen Zahlen 0, 1, 2 usw. angegeben werden (↗ Bild B 5).

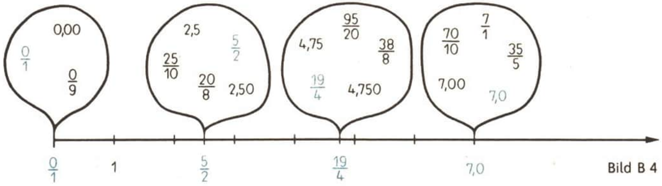


Bild B 4

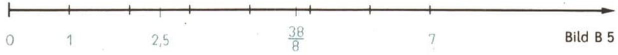


Bild B 5

Zwei beliebige gebrochene Zahlen können stets auch durch zueinander **gleichnamige Brüche** dargestellt werden. So können $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$ durch die gleichnamigen Brüche

$\frac{10}{24}$ und $\frac{9}{24}$ oder $\frac{20}{48}$ und $\frac{18}{48}$ oder $\frac{30}{72}$ und $\frac{27}{72}$ usw.

dargestellt werden. Dabei sind die Nenner gemeinsame Vielfache von 8 und 12.

$$\frac{5}{12} = \boxed{\frac{10}{24}} = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{20}{48}} = \frac{25}{60} = \boxed{\frac{30}{72}} = \cdots$$

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{9}{24}} = \frac{12}{32} = \frac{15}{40} = \boxed{\frac{18}{48}} = \frac{21}{56} = \frac{24}{64} = \boxed{\frac{27}{72}} = \cdots$$

■ 2 Stelle $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ durch gleichnamige Brüche dar!

Wir überlegen: Gemeinsame Vielfache von 2 und 3 sind 6, 12, 18, ...

$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ können also auch durch die gleichnamigen Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{6}$ oder $\frac{6}{12}$ und $\frac{4}{12}$ usw. dargestellt werden.

■ 3 Stelle $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{3}$ durch gleichnamige Brüche dar!

Wir überlegen: 9 ist Vielfaches von 3.

$\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{3}$ können durch die gleichnamigen Brüche $\frac{2}{9}$ und $\frac{3}{9}$ angegeben werden.

Bei diesem Vorgehen haben wir $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{3}$ „gleichnamig gemacht".

Bisher standen Variable meistens für natürliche Zahlen. Von jetzt ab wollen wir Variable auch für gebrochene Zahlen verwenden. Soll für die Variable a eine gebrochene Zahl eingesetzt werden, so könnte man zum Beispiel $\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{8}$, aber auch 1,847 oder 7,00 usw. einsetzen. Wir kennen damit zwei Variablengrundbereiche, nämlich N und Q_+. Es muß jetzt also stets deutlich gesagt werden, ob eine Variable für eine natürliche Zahl oder für eine gebrochene Zahl steht.

Aufgaben

1. Suche für die folgenden Brüche zugehörige Punkte auf dem Zahlenstrahl!

a) Bild B 6a: $\frac{2}{3}, \frac{6}{24}, \frac{4}{6}, \frac{7}{6}, \frac{10}{10}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{9}{18}, \frac{8}{8}, \frac{1}{2}, \frac{25}{24}$

b) Bild B 6b: $\frac{5}{10}, \frac{12}{10}, \frac{7}{5}, \frac{8}{10}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{7}, \frac{13}{10}, \frac{5}{4}$

Bei wie vielen der markierten Punkte wird nur ein Bruch eingetragen, bei wie vielen mehrere?

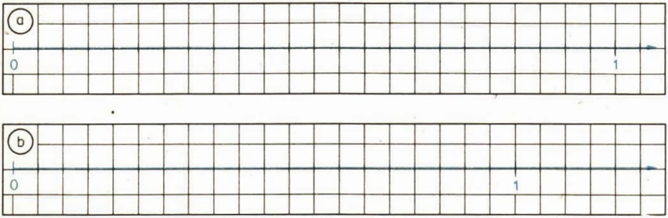


Bild B 6

Bild B 7

2. Nenne jeweils zwei gemeine Brüche, die an den im Bild B 7 durch Buchstaben bezeichneten Punkten stehen könnten!

3. Gib zu jedem Bruch mindestens drei weitere an, die zur gleichen gebrochenen Zahl gehören!

a) $\frac{2}{3}$ **b)** 0,5 **c)** $\frac{7}{9}$ **d)** $\frac{12}{48}$ **e)** $\frac{28}{21}$ **f)** 5 **g)** 1,81 **h)** 0,6

4. Kürze die folgenden Brüche so weit wie möglich!

a) $\frac{15}{25}$ c) $\frac{88}{121}$ e) $\frac{12}{16}$ g) $\frac{7 \cdot 80}{8 \cdot 70}$ i)* $\frac{18 \cdot 8 \cdot 37}{185 \cdot 72}$

b) $\frac{64}{56}$ d) $\frac{105}{70}$ f) $\frac{11}{36}$ h)* $\frac{5 \cdot 370}{37 \cdot 50}$ k)* $\frac{17 \cdot 3 \cdot 9}{6 \cdot 51 \cdot 15}$

5. Erweitere folgende Brüche so, daß ihr Nenner 48 wird!

a) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{6}{7}$ e) $\frac{8}{9}$ g) $\frac{48}{6}$ i) $\frac{101}{480}$ l) $\frac{25}{24}$ n) $\frac{11}{12}$

b) $\frac{9}{12}$ d) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{9}{8}$ h) $\frac{7}{4}$ k) $\frac{1}{32}$ m) $\frac{7}{96}$ o) $\frac{5}{3}$

6. Gib jeweils eine natürliche Zahl n an, so daß die Brüche durch Kürzen auseinander hervorgehen! Durch welche Zahl wurde gekürzt?

a) $\frac{10}{30}$ und $\frac{1}{n}$ d) $\frac{75}{125}$ und $\frac{3}{n}$ g) $\frac{n}{12}$ und $\frac{100}{60}$ k) $\frac{0}{4}$ und $\frac{n}{12}$

b) $\frac{16}{64}$ und $\frac{n}{8}$ e) $\frac{n}{5}$ und $\frac{125}{75}$ h) $\frac{12}{n}$ und $\frac{132}{72}$ l) $\frac{6}{18}$ und $\frac{1}{n}$

c) $\frac{21}{28}$ und $\frac{42}{n}$ f) $\frac{34}{2}$ und $\frac{17}{n}$ i) $\frac{0}{4}$ und $\frac{0}{n}$ m) $\frac{6}{18}$ und $\frac{n}{35}$

7. Stellen die beiden Brüche jeweils die gleiche gebrochene Zahl dar? Begründe!

a) $\frac{7}{11}$ und $\frac{49}{77}$ d) $\frac{6}{8}$ und $\frac{9}{12}$ g) $\frac{9}{8}$ und $\frac{81}{64}$ k) $\frac{0}{5}$ und $\frac{3}{15}$

b) $\frac{12}{8}$ und $\frac{3}{2}$ e) $\frac{11}{121}$ und $\frac{2}{22}$ h) $\frac{8}{12}$ und $\frac{12}{22}$ l) $\frac{7}{12}$ und $\frac{9}{14}$

c) $\frac{3}{5}$ und $\frac{9}{15}$ f) $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{9}$ i) $\frac{12}{16}$ und $\frac{9}{12}$ m) $\frac{0}{32}$ und $\frac{0}{4}$

8. Welche Brüche gehören jeweils zu ein und derselben gebrochenen Zahl?

a) $\frac{5}{4}, \frac{0}{2}, \frac{15}{12}, \frac{50}{45}, \frac{55}{44}$ c) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{12}{16}, \frac{12}{15}, \frac{36}{48}$ e) $\frac{9}{12}, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{12}{16}, \frac{99}{132}$

b) $\frac{7}{1}, \frac{21}{3}, \frac{63}{8}, \frac{1}{7}, \frac{77}{11}$ d) $\frac{5}{1}, \frac{20}{15}, \frac{40}{8}, \frac{55}{11}, \frac{0}{100}$ f) $\frac{12}{15}, \frac{16}{25}, \frac{25}{20}, \frac{8}{30}, \frac{132}{165}$

9. Welcher gemeine Bruch und welcher Dezimalbruch gehören zur gleichen gebrochenen Zahl? Präge dir diese Paare fest ein!

$\frac{1}{4}; \frac{1}{10}; \frac{1}{2}; \frac{1}{8}; \frac{1}{5}$; 0,2; 0,5; 0,25; 0,1; 0,125

10. Kann die gebrochene Zahl $\frac{1}{3}$ durch einen Bruch mit dem Nenner **a)** 6, **b)** 8, **c)** 12, **d)** 15, **e)** 17 dargestellt werden? Begründe!

11. Gib die gebrochene Zahl $\frac{2}{5}$ durch einen Bruch mit dem Zähler **a)** 6, **b)** 9, **c)** 12, **d)** 21, **e)** 1 an!

12. Erweitere $\frac{5}{7}$ so, daß ein Bruch mit dem Nenner **a)** 63, **b)** 15, **c)** 28 entsteht!

13. Mache gleichnamig!

a) $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{15}$ d) $\frac{1}{9}$ und $\frac{2}{7}$ g) $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{4}$ k) $\frac{5}{12}$ und $\frac{1}{8}$

b) $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{6}$ e) $\frac{4}{15}$ und $\frac{4}{30}$ h) $\frac{8}{11}$ und $\frac{55}{77}$ l) $\frac{3}{24}$ und $\frac{2}{16}$

c) $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{8}$ f) $\frac{3}{14}$ und $\frac{3}{4}$ i) $\frac{7}{16}$ und $\frac{3}{64}$ m) $\frac{14}{15}$ und $\frac{15}{14}$

14. Gib die folgenden gebrochenen Zahlen durch gleichnamige Brüche mit dem Nenner 15 an!

a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{5}$

c) $\frac{3}{7}$ und $\frac{15}{30}$ d) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{10}$

15. Gib die folgenden gebrochenen Zahlen durch gleichnamige Brüche mit möglichst kleinem Nenner an!

a) $\frac{3}{7}$ und $\frac{7}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{10}$

c) $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{2}$ d) $\frac{4}{9}$ und $\frac{5}{12}$

2 Vergleichen und Ordnen gebrochener Zahlen

● 3 Trage $\frac{3}{2}$ und 2,5 auf dem Zahlenstrahl ein! Welche Zahl ist kleiner? Begründe!

Wie beim Vergleich von natürlichen Zahlen gilt auch für gebrochene Zahlen:

► 2 **DEFINITION: Von zwei gebrochenen Zahlen ist diejenige *kleiner*, die auf dem Zahlenstrahl weiter links liegt.**

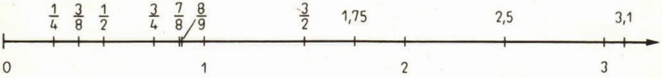


Bild B 8

Auf dem Zahlenstrahl im Bild B 8 können wir zum Beispiel ablesen:

$0 < \frac{1}{4}$; $1 > \frac{7}{8}$; $\frac{3}{4} < \frac{8}{9}$; $2{,}5 > \frac{3}{2}$.

Ordnet man die Zahlen aus dem Bild B 8 der Größe nach, so erhält man:

$$0 < \frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9} < 1 < \frac{3}{2} < 1{,}75 < 2 < 2{,}5 < 3 < 3{,}1.$$

Da wir nicht immer einen Zahlenstrahl benutzen können, überlegen wir uns einen gleichwertigen, aber kürzeren Weg. Dabei nutzen wir aus, daß wir gleichnamige Brüche und Dezimalbrüche schon vergleichen können.

● 4 a) Ordne nach der Größe! Beginne mit dem kleinsten Bruch!

$\frac{5}{17}, \frac{13}{17}, \frac{22}{17}, \frac{0}{17}, \frac{17}{17}$

b) Vergleiche $\frac{2}{3}$ mit $\frac{5}{6}$! c) Vergleiche $\frac{8}{10}$ mit $\frac{3}{5}$!

Jetzt wollen wir $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$ miteinander vergleichen.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} \\ \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15} \end{array}\right\} \frac{9}{15} < \frac{10}{15}, \text{ also } \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

Dies zeigt sich auch am Zahlenstrahl (↗ Bild B 9).

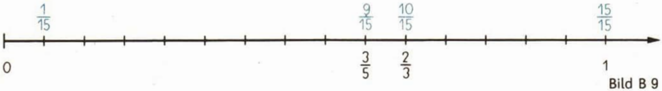


Bild B 9

▸ 3 **Zwei gebrochene Zahlen können miteinander verglichen werden, indem man zugehörige gleichnamige Brüche miteinander vergleicht.**

Wir vergleichen die gebrochenen Zahlen $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ miteinander.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{9}{12}} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \boxed{\frac{18}{24}} = \frac{21}{28} = \frac{24}{32} = \boxed{\frac{27}{36}} = \ldots$$

$$\frac{5}{6} = \boxed{\frac{10}{12}} = \frac{15}{18} = \boxed{\frac{20}{24}} = \frac{25}{30} = \boxed{\frac{30}{36}} = \frac{35}{42} = \ldots$$

Es gilt $\frac{9}{12} < \frac{10}{12}$, $\frac{18}{24} < \frac{20}{24}$ usw., also $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

Das Produkt $4 \cdot 6$ liefert einen gemeinsamen Nenner, aber nicht den kleinsten. Der **kleinste gemeinsame Nenner** ist das k. g. V. der Nenner 4 und 6, nämlich die Zahl 12.
Das k. g. V. der Nenner gegebener Brüche nennt man auch *Hauptnenner* (HN) dieser Brüche. Damit die Nenner der gleichnamigen Brüche nicht zu groß werden, wird oft mit dem Hauptnenner gearbeitet.

■ 4 $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$ sind miteinander zu vergleichen.

Wir überlegen:
8 ist kein gemeinsamer Nenner, denn $6 \nmid 8$;
16 ist kein gemeinsamer Nenner, denn $6 \nmid 16$;
24 ist ein gemeinsamer Nenner (sogar HN), denn $6 \mid 24$ und $8 \mid 24$; $3 \cdot 8 = 24$ und $4 \cdot 6 = 24$.

$\frac{7}{8} \overset{\cdot 3}{=} \frac{21}{24}$; $\frac{5}{6} \overset{\cdot 4}{=} \frac{20}{24}$;

$\frac{21}{24} > \frac{20}{24}$

Also: $\underline{\underline{\frac{7}{8} > \frac{5}{6}}}$.

Für gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gilt stets nur eine der drei Möglichkeiten:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ **oder** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **oder** $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

Null ist die kleinste gebrochene Zahl.

■ 5 **a)** Die gemischte Zahl $3\frac{3}{4}$ bedeutet:

$$3\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}.$$

b) Den gemeinen Bruch $\frac{18}{7}$ können wir als gemischte Zahl schreiben:

$$\frac{18}{7} = \frac{14}{7} + \frac{4}{7} = 2 + \frac{4}{7} = \underline{\underline{2\frac{4}{7}}}.$$

In dieser Schreibweise kann man gebrochene Zahlen leichter vergleichen. Man erkennt zum Beispiel sofort, daß $14\frac{3}{8}$ zwischen 14 und 15 liegt, was aus der Darstellung $\frac{115}{8}$ nicht sofort ersichtlich ist.

Die folgenden Beispiele zeigen, wie in manchen Fällen schnell verglichen werden kann.

■ 6 **a)** $\frac{5}{6} < \frac{9}{8}$, weil $\frac{5}{6} < 1$ und $\frac{9}{8} > 1$.

b) $\frac{15}{4} < \frac{36}{7}$, weil $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ und $\frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$.

c) $\frac{2}{5} > \frac{2}{9}$, weil $5 < 9$.

d) $\frac{3}{7} < \frac{5}{9}$, weil $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$ und $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$.

Mit $4 < 7$ gilt auch $\frac{4}{1} < \frac{7}{1}$ und $\frac{8}{2} < \frac{21}{3}$. Beim Vergleichen können natürliche Zahlen durch zugehörige Brüche ersetzt werden. Dezimalbrüche vergleichen wir wie bisher.

● 5 Ordne der Größe nach! Beginne mit dem kleinsten Bruch!
8,932; 20,1; 21,0; 83,2; 20,009; 111

Aufgaben

1. Zeichne einen Zahlenstrahl und trage auf ihm die folgenden Zahlen ein!
a) $\frac{4}{12}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{3}$; 0,5 **b)** 0,9; $\frac{1}{4}$; $\frac{13}{12}$; $\frac{7}{8}$; 0,25
Stelle, ausgehend von dem Zahlenstrahl, fünf Ungleichungen auf!

2. Vergleiche miteinander! Überlege, wie du am besten vorgehst!
a) $\frac{5}{8}$ und $\frac{3}{7}$ **b)** $\frac{7}{11}$ und $\frac{5}{12}$ **c)** $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{2}{5}$ und $\frac{4}{7}$

3. Vergleiche!

a) $\frac{7}{5}$ und $\frac{19}{15}$ d) $\frac{7}{6}$ und $\frac{14}{12}$ g) $\frac{4}{3}$ und $\frac{7}{9}$ k) $\frac{7}{9}$ und $\frac{12}{18}$

b) $\frac{11}{12}$ und $\frac{8}{9}$ e) $\frac{10}{8}$ und $\frac{7}{4}$ h) $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ l) $\frac{12}{9}$ und $\frac{4}{3}$

c) $\frac{7}{3}$ und $\frac{9}{4}$ f) $\frac{9}{15}$ und $\frac{20}{15}$ i) $\frac{9}{5}$ und $\frac{11}{8}$ m) $\frac{8}{12}$ und $\frac{15}{12}$

4. Vergleiche, indem du die Dezimalbrüche in gemeine Brüche umwandelst!

a) $\frac{7}{30}$ und 0,25 b) $\frac{4}{5}$ und 0,95 c) 0,99 und $\frac{119}{120}$ d) $\frac{9}{10}$ und 0,91

5. Vergleiche, indem du die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche umwandelst!

a) $\frac{3}{2}$ und 1,49 b) $\frac{3}{4}$ und 0,76 c) $\frac{11}{20}$ und 0,54

d) 0,48 und $\frac{12}{25}$ e) $\frac{7}{8}$ und 0,9 f) 1,007 und $\frac{17}{16}$

Ordne der Größe nach! Beginne mit der kleinsten Zahl!

6.↑ a) $\frac{6}{5}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{6}{10}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{6}{15}$; $\frac{6}{1}$ b) $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{2}{4}$

7.↑ a) $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{0}{8}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{12}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{3}{10}$

c) $\frac{5}{24}$; $\frac{7}{18}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{17}{16}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{13}{24}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{5}{6}$ d) $\frac{4}{5}$; $\frac{19}{9}$; 0,6; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{15}$

8.↑ a) 0,284; 0,078; 0,978; 0,0654 b) 2,81; 8,21; 12,8; 18,2; 8,12
c) 0,0481; 0,00184; 0,0841; 0,0814 d) 732; 7,325; 73,25; 0,732

Ordne der Größe nach! Beginne mit der größten Zahl!

9.↑ a) $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{3}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{5}{1}$ b) $\frac{97}{136}$; $\frac{41}{68}$; $\frac{11}{17}$; $\frac{59}{85}$; $\frac{21}{34}$; $\frac{52}{17}$; $\frac{40}{51}$

10.↑ a) 0,021; 0,54; 0,054; 0,21 b) 5,91; 9,15; 9,51; 19,5; 59,1
c) 1,035; 0,135; 1,305; 1,503 d) 0,987; 0,9087; 9,807; 987

11. Schreibe als gemeine Brüche!

a) $4\frac{3}{5}$ b) $6\frac{2}{4}$ c) $11\frac{1}{10}$ d) $7\frac{24}{34}$ e) $9\frac{8}{9}$ g) $2\frac{9}{17}$ g) $3\frac{5}{12}$

12. Schreibe als gemischte Zahlen und vergleiche!

a) $\frac{17}{5}$ und $\frac{6}{4}$ b) $\frac{13}{7}$ und $\frac{12}{6}$ c) $\frac{31}{3}$ und $\frac{81}{18}$ d) $\frac{27}{2}$ und $\frac{37}{3}$ e) $\frac{7}{3}$ und $\frac{15}{7}$

13. Was ist mehr

a) $\frac{5}{7}$ von 21 l oder $\frac{1}{2}$ von 30 l? c) $\frac{1}{2}$ von 5 l oder $\frac{1}{2}$ von 4 l?

b)* $\frac{3}{4}$ von 7 km oder $\frac{2}{3}$ von 8 km? d) $\frac{3}{8}$ von 20 kg oder $\frac{6}{8}$ von 40 kg?

14. Gib jeweils eine gebrochene Zahl an, die kleiner ist als

a) $\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{1}{10000}$, **c)** 0,0008, **d)** $\frac{1}{15}$, **e)** 0,000001!

15. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) $10 < \frac{250}{250}$ **c)** $9{,}5 < 9{,}49$ **e)** $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$ **g)** $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ **i)** $\frac{1}{5} < 0{,}2$

b) $10 < 11$ **d)** $9{,}5 < 9{,}51$ **f)** $\frac{8}{9} < \frac{9}{10}$ **h)** $0{,}2 > \frac{1}{4}$ **k)** $0{,}3 < \frac{1}{3}$

16.* Für welche natürlichen Zahlen n entsteht eine wahre Aussage?

a) $\frac{3}{5} < \frac{n}{5} < \frac{8}{5}$ **c)** $\frac{3}{5} < \frac{4}{n} < \frac{5}{3}$ $(n \neq 0)$ **e)** $\frac{9}{11} < \frac{n}{2} < \frac{8}{9}$

b) $\frac{4}{7} < \frac{n}{3} < \frac{5}{8}$ **d)** $\frac{2}{9} < \frac{n}{9} < \frac{7}{9}$ **f)** $\frac{4}{7} < \frac{5}{n} < \frac{3}{4}$ $(n \neq 0)$

3 Wieviel Zahlen liegen zwischen 19 und 20?

● 6 **a)** Gib eine natürliche Zahl an, die kleiner als 20 ist und die sich möglichst wenig von 20 unterscheidet!

b) Gib eine natürliche Zahl an, die größer als 20 ist und die sich möglichst wenig von 20 unterscheidet!

● 7 **a)** Welche der Zahlen 19,89; 19,94; 19,9 und 19,909 unterscheidet sich am wenigsten von 20? Gib drei weitere Zahlen an, die kleiner sind als 20 und sich noch weniger von 20 unterscheiden!

b) Gegeben sind die gebrochenen Zahlen $20\frac{1}{4}$, $20\frac{2}{3}$, $20\frac{1}{5}$ und $20\frac{4}{7}$. Welche dieser Zahlen unterscheidet sich am wenigsten von 20?

Jede natürliche Zahl hat eine ganz bestimmte Zahl zum Nachfolger. **Zwischen** einer natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger liegt keine weitere natürliche Zahl.
Im Bereich der gebrochenen Zahlen können wir jedoch nicht vom Nachfolger einer Zahl sprechen.

Jemand behauptet: $\frac{8}{10}$ ist Nachfolger von $\frac{7}{10}$.

Das ist falsch, denn wenn man $\frac{7}{10}$ zu $\frac{70}{100}$ und entsprechend $\frac{8}{10}$ zu $\frac{80}{100}$ erweitert, so erkennt man sofort, daß zum Beispiel

$$\frac{71}{100}, \frac{72}{100}, \frac{73}{100}, \frac{74}{100}, \frac{75}{100}\left(=\frac{3}{4}\right), \frac{76}{100}, \frac{77}{100}, \frac{78}{100}, \frac{79}{100}$$

zwischen $\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{10}$ liegen (↗ Bild B 10).

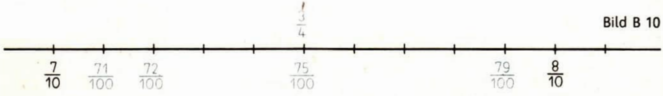


Bild B 10

● 8 Nenne gebrochene Zahlen, die zwischen $\frac{71}{100}$ und $\frac{70}{100}$ liegen!

Wie man zwei gebrochene Zahlen *a* und *b* auch wählt, immer findet man (beliebig viele) gebrochene Zahlen, die zwischen *a* und *b* liegen. Man sagt auch: Die gebrochenen Zahlen liegen überall dicht.

Aufgaben

1. Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft! Fülle sie so aus, daß gilt $c < x < d$!

a)

c	x	d
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
	$\frac{9}{10}$	$\frac{14}{15}$
0,2	$\frac{1}{4}$	

b)

c	x	d
$\frac{3}{5}$	$\frac{}{5}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{4}{7}$	$\frac{}{2}$	$\frac{5}{8}$
0,7		0,8

c)

c	x	d
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{12}{11}$	
	0,2	$\frac{1}{4}$

d)

c	x	d
$\frac{1}{8}$		$\frac{2}{8}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{}$	$\frac{5}{5}$
0,44		0,45

2. Gib mindestens fünf gebrochene Zahlen x an, für die $y < x < z$ gilt!

a) $y = \frac{1}{5}$ und $z = \frac{1}{4}$ **c)** $y = 1{,}4$ und $z = 1{,}5$ **e)** $y = \frac{1}{4}$ und $z = \frac{1}{2}$

b) $y = \frac{1}{100}$ und $z = \frac{1}{10}$ **d)** $y = 0{,}2$ und $z = 0{,}22$ **f)** $y = 0{,}2$ und $z = \frac{1}{4}$

3. Gib jeweils drei gebrochene Zahlen an, die zwischen y und z liegen!

a) $y = 0$ und $z = \frac{1}{4}$ **f)** $y = \frac{1}{10}$ und $z = 0$

b) $y = 0{,}3$ und $z = 0{,}45$ **g)** $y = 1{,}41$ und $z = 1{,}42$

c) $y = \frac{2}{3}$ und $z = \frac{1}{3}$ **h)** $y = 0{,}2$ und $z = \frac{1}{5}$

d) $y = 0{,}7$ und $z = \frac{3}{4}$ **i)** $y = 1{,}42$ und $z = 1{,}41$

e) $y = 0{,}5$ und $z = \frac{1}{3}$

4. Setze in $\frac{n}{n+1}$ der Reihe nach für n die Zahlen 1, 2, 3, 4, 10, 49, 75 und 100 ein! Ordne dann die gebrochenen Zahlen der Größe nach und vergleiche sie mit 1!

5.* Gib diejenige Zahl an, die in der Mitte liegt zwischen

a) 0,75 und 0,76, **b)** $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, **c)** $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{4}$, **d)** $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$!

6.* Gib n so an, daß sich $\frac{1}{n}$

a) von 0 um weniger als $\frac{1}{1000}$, **b)** von $\frac{1}{4}$ um weniger als $\frac{1}{8}$ unterscheidet!

4 Kleiner, gleich oder größer?

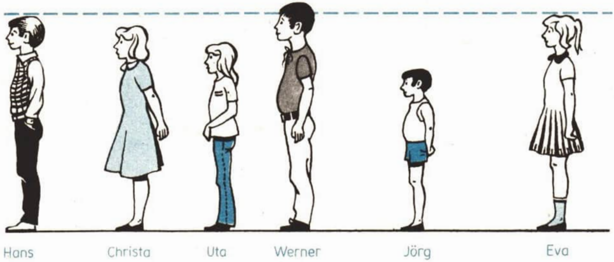


Bild B 11

● 9 Vergleiche die Körpergröße aller Kinder im Bild B 11 mit der von Hans!

Werner ist größer als Hans. Alle anderen sind **nicht** größer als Hans; sie sind **kleiner als er oder genauso groß wie er.**
Manchmal ist es zweckmäßig, die Zeichen < und = zu einem Zeichen zusammenzufassen. Man schreibt zum Beispiel

$$2{,}5\ \text{cm} \leqq a \leqq 2{,}7\ \text{cm},$$

wenn man folgendes ausdrücken will: Die Länge a kann 2,5 cm oder 2,7 cm betragen oder einen Wert annehmen, der zwischen 2,5 und 2,7 cm liegt.
Man sagt dazu: a ist größer als 2,5 cm oder gleich 2,5 cm und kleiner als 2,7 cm oder gleich 2,7 cm.
Anstelle von
„Die Subtraktion $a - b$ (a, $b \in N$) ist ausführbar, wenn $a > b$ oder $a = b$"
können wir mit Hilfe des Zeichens $\geqq$ (größer oder gleich) schreiben
„Die Subtraktion $a - b$ (a, $b \in N$) ist ausführbar, wenn $a \geqq b$".
Im Bild B 12 sind alle **natürlichen Zahlen** n markiert, für die gilt: $1 \leqq n \leqq 10$.

Bild B 12

● 10 Zeichne einen Zahlenstrahl! Markiere auf ihm alle natürlichen Zahlen n, für die gilt $2 \leqq n < 9$! Beschreibe dieselbe Menge, indem du nur das Zeichen < verwendest!

Bild B 13

Im Bild B 13 sind alle **gebrochenen Zahlen** x veranschaulicht, für die gilt:
$1{,}5 \leqq x \leqq 2{,}4$.

Aufgaben

1. Veranschauliche auf dem Zahlenstrahl die Menge aller gebrochenen Zahlen x, für die gilt: $1 \leqq x \leqq \frac{6}{5}$!

2. Für welche der folgenden natürlichen Zahlen n ist $13 \leqq n$ eine wahre Aussage?
a) 10 **b)** 17 **c)** 13 **d)** 14

3. Für welche der folgenden gebrochenen Zahlen x ist $x \leqq 1{,}5$ eine wahre Aussage?
a) 0 **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{4}{5}$ **d)** 1,499

4. **a)** Gib die Menge aller natürlichen Zahlen n mit $12 \leqq n < 27$ an!
b) Gib weitere Möglichkeiten zur Beschreibung dieser Menge an!

5. Gib alle natürlichen Zahlen n an, die
a) $n \leqq 9$, **b)** $n < 11$, **c)** $7 < n \leqq 15$
zu einer wahren Aussage machen! Gib in jedem Fall die kleinste und die größte der dabei auftretenden Lösungen an!

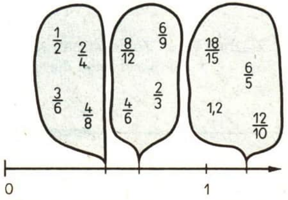
6. M_1, M_2, M_3, M_4 seien die Mengen derjenigen natürlichen Zahlen, die (1) $10 \leqq n \leqq 100$, (2) $10 \leqq n < 100$, (3) $10 < n \leqq 100$, (4) $10 < n < 100$ zu wahren Aussagen machen. Wie unterscheiden sich diese Mengen voneinander? Welche Teilmengenbeziehungen bestehen zwischen ihnen?

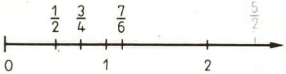
7. M sei die Menge aller natürlichen Zahlen x, für die gilt: $29 \leqq x \leqq 31$.
K sei die Menge aller gebrochenen Zahlen x, für die gilt: $29 \leqq x \leqq 31$.
a) Nenne alle Elemente von M!
b) Nenne zwei Elemente von K, die keine natürlichen Zahlen sind!
c) Veranschauliche M und K am Zahlenstrahl!

8.* Setze in 29 … n … 31 Zeichen ein, so daß für
a) genau eine natürliche Zahl,
b) zwei natürliche Zahlen,
c) drei natürliche Zahlen eine wahre Aussage entsteht!

Zusammenfassung

Brüche, die ein und denselben Punkt des Zahlenstrahles bezeichnen, werden zu einer **gebrochenen Zahl** zusammengefaßt.
Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, stellen die gleiche gebrochene Zahl dar.



I Die kleinere von zwei gebrochenen Zahlen liegt auf dem Zahlenstrahl jeweils links von der größeren. Für zwei gebrochene Zahlen a und b gilt stets einer der Fälle: $a = b,\ a < b,\ a > b.$ 0 ist die kleinste gebrochene Zahl.	
II Gebrochene Zahlen werden verglichen, indem man Brüche vergleicht, durch die sie gegeben sind. (1) Brüche mit gleichem Nenner: Zähler vergleichen! Der kleinere von zwei Zählern gehört zur kleineren gebrochenen Zahl.	$\frac{7}{11} < \frac{9}{11}$, denn $7 < 9$ $\frac{4}{3} > \frac{2}{3}$, denn $4 > 2$
(2) Brüche mit unterschiedlichen Nennern: Gleichnamig machen und dann die Zähler vergleichen!	$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, denn $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$
(3) Dezimalbrüche: Von links beginnend die Stellen einzeln vergleichen!	$12{,}258 > 12{,}257$ $0{,}4315 < 0{,}4328$
III Zu zwei gebrochenen Zahlen a und b mit $a < b$ gibt es stets gebrochene Zahlen x mit $a < x < b$.	$\frac{7}{10} < \frac{71}{100} < \frac{72}{100} < \ldots < \frac{79}{100} < \frac{8}{10}$

Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen

Das Rechnen mit Brüchen wird schon in den ältesten bekannten Aufzeichnungen mit mathematischem Inhalt beschrieben. So enthält das Rechenbuch des Ahmes, das auch „Papyrus Rhind" genannt wird und vor etwa 4000 Jahren in Ägypten entstand, Regeln für das Rechnen mit Stammbrüchen. Stammbrüche nennt man alle Brüche mit dem Zähler 1, also $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ Andere Brüche werden in diesem Buch als Summen aus Stammbrüchen dargestellt. (Vgl. dazu mit der Aufgabe 39 auf S. 84)

Von den Ägyptern übernahmen die Araber die Regeln über das Rechnen mit Brüchen, und während der arabischen Eroberungszüge im Mittelalter gelangten diese Kenntnisse auch nach Europa.

Da zuerst nur mit Stammbrüchen gerechnet wurde, war eine sehr einfache Bezeichnungsweise möglich: die Ägypter setzten nur einen Punkt über die Ziffer und bezeichneten so den Stammbruch, der die betreffende Ziffer zum Nenner hat $\left(\dot{5} \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{5}\right)$. Die Schreibweise mit Hilfe des Bruchstrichs findet man erstmals in einem Rechenbuch von Leonardo Fibonacci, einem italienischen Mathematiker aus Pisa, der im Jahre 1202 das berühmte Buch „Liber abaci" schrieb. Aber erst zum Ende des 15. Jahrhunderts war diese Schreibweise allgemein üblich geworden. Dezimalbrüche in der heutigen Schreibweise

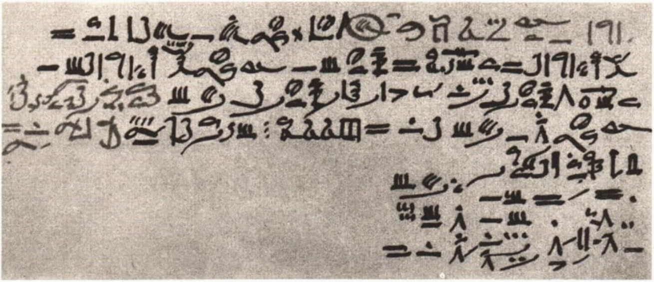


Bild B 14 Seite aus dem Papyrus Rhind, einem altägyptischen Schriftstück

wurden noch später eingeführt. Der Schweizer Mathematiker Jost Bürgi (1552–1632) führte die Darstellungsform ein, nachdem das Beharren auf der Zahldarstellung mit Hilfe römischer Ziffern überwunden war. Die Belange der Praxis waren es, die dem dekadischen Positionssystem und der Verwendung arabischer Ziffern zum Durchbruch verhalfen. Der holländische Ingenieur Simon Stevin (1548–1620) verwendete in seinen Schriften eine Dezimalbruchdarstellung, die als Vorläufer unserer Schreibweise angesehen werden kann. Er schrieb z. B. den Dezimalbruch 237,578 in der Form 237(0)5(1)7(2)8(3). Damit war es ihm möglich, schwierige Rechnungen mit Brüchen auf Rechnungen mit natürlichen Zahlen zurückzuführen.

5 Addition gebrochener Zahlen

Im Kühlschrank stehen zwei Flaschen Apfelsaft. In der einen Flasche ist $\frac{1}{2}$ l und in der anderen $\frac{1}{3}$ l Apfelsaft. Der Inhalt beider Flaschen soll in einen Krug mit einem Fassungsvermögen von 1 l umgefüllt werden. Ist das möglich? Zur Beantwortung dieser Frage lösen wir die Aufgabe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Bild B 15

● 11 Addiere die folgenden Brüche!

a) $\frac{5}{12} + \frac{3}{12}$ b) $\frac{7}{24} + \frac{11}{24}$ c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Wir führen die Addition gebrochener Zahlen auf die Addition gleichnamiger Brüche zurück.

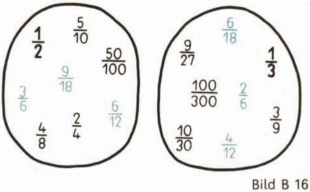


Bild B 16

Anstelle der oben gestellten Aufgabe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ können wir auch rechnen

(↗ Bild B 16 auf Seite 44):

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \ldots$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \ldots$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9}{18} + \frac{6}{18} = \ldots$

● 12 Berechne für alle drei Aufgaben die Summe! Vergleiche die Ergebnisse!

Die Summe der gebrochenen Zahlen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ist die gebrochene Zahl $\frac{5}{6}$. Es sind also zusammen $\frac{5}{6}$ l Apfelsaft in den beiden Flaschen. Da $\frac{5}{6} < 1$ ist, paßt der Inhalt beider Flaschen in den Krug.

■ 7 $\frac{7}{12} + \frac{5}{8}$

Wir überlegen:
12 ist kein gemeinsamer Nenner, denn $8 \nmid 12$.
24 ist Hauptnenner:
$2 \cdot 12 = \boxed{24}$ und $3 \cdot 8 = \boxed{24}$.

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{8} = \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{14 + 15}{24} = \underline{\underline{\frac{29}{24}}}$$

▶ 4

Gebrochene Zahlen als gemeine Brüche[1] werden addiert, indem man
1. diese Brüche gleichnamig macht und
2. die gleichnamigen Brüche addiert.

Die Addition kann man veranschaulichen (↗ Bild B 17).

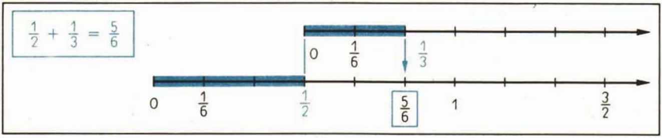


Bild B 17

Zu zwei gebrochenen Zahlen gibt es stets genau eine gebrochene Zahl, die deren Summe ist.

■ 8 a) $\frac{3}{5} + \frac{16}{15}$

Wir überlegen:
15 ist gemeinsamer Nenner, denn $5 \mid 15$.
$5 \cdot 3 = 15$; $\frac{3}{5} \overset{\cdot 3}{=} \frac{9}{15}$

$$\frac{3}{5} + \frac{16}{15} = \frac{9 + 16}{15} = \frac{25}{15} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}} = \underline{\underline{1\frac{2}{3}}}$$

Unechte Brüche können als gemischte Zahlen geschrieben werden.

[1] Man sagt auch: „Gemeine Brüche werden addiert, indem man ...".

b) $\frac{7}{4} + \frac{27}{12}$

Wir überlegen:

$\frac{27}{12}$ kann durch 3 gekürzt werden.

$\frac{27}{12} \overset{:3}{=} \frac{9}{4}$

$\frac{7}{4} + \frac{27}{12} = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} = \frac{7+9}{4} = \underline{\underline{\frac{16}{4}}} = \underline{\underline{4}}$

Das Ergebnis kürzen wir soweit wie möglich.

c) $\frac{5}{9} + \frac{3}{5}$

Wir überlegen:

9 und 5 haben keinen gemeinsamen Teiler. Das Produkt $5 \cdot 9 = 45$ ist Hauptnenner.

$\frac{5}{9} \overset{\cdot 5}{=} \frac{25}{45}$ und $\frac{3}{5} \overset{\cdot 9}{=} \frac{27}{45}$

$\frac{5}{9} + \frac{3}{5} = \frac{25+27}{45} = \underline{\underline{\frac{52}{45}}} = \underline{\underline{1\frac{7}{45}}}$

Die uns bekannte Addition von Dezimalbrüchen können wir jetzt auf die Addition von Zehnerbrüchen zurückführen und dadurch begründen.

■ 9

$$\begin{array}{r} 0{,}6 \\ +\ 1{,}25 \\ \hline 1{,}85 \end{array}$$

$$0{,}6 + 1{,}25 = \frac{6}{10} + \frac{125}{100} = \frac{60+125}{100} = \frac{185}{100} = \underline{\underline{1{,}85}}$$

Aufgaben

Berechne möglichst vorteilhaft!

1.↑ a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{3} + \frac{3}{8}$ g) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ i) $\frac{5}{6} + \frac{8}{24}$

b) $\frac{3}{7} + \frac{5}{4}$ d) $\frac{3}{5} + \frac{1}{6}$ f) $\frac{2}{3} + \frac{7}{9}$ h) $\frac{4}{9} + \frac{2}{5}$ k) $\frac{7}{9} + \frac{5}{18}$

2.↑ a) $\frac{7}{27} + \frac{7}{9}$ c) $\frac{5}{20} + \frac{3}{4}$ e) $\frac{3}{5} + \frac{3}{2}$ g) $\frac{7}{20} + \frac{9}{10}$ i) $\frac{4}{13} + \frac{2}{26}$

b) $\frac{7}{9} + \frac{7}{27}$ d) $\frac{5}{8} + \frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{6} + \frac{11}{22}$ h) $\frac{15}{30} + \frac{7}{2}$ k) $\frac{5}{7} + \frac{1}{35}$

3.↑ a) $\frac{6}{9} + \frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{24} + \frac{5}{8}$ c) $\frac{2}{15} + \frac{4}{30}$ d) $\frac{5}{7} + \frac{0}{14}$ e) $\frac{18}{42} + \frac{4}{7}$

4.↑ a) $\frac{2}{5} + \frac{7}{20}$ b) $\frac{9}{12} + \frac{5}{15}$ c) $\frac{5}{12} + \frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{4} + 0{,}8$ e) $\frac{5}{7} + \frac{3}{4}$

5.↑ a) $0{,}67 + 0{,}76$ b) $7{,}03 + 2{,}25$ c) $0{,}33 + 1{,}7$ d) $11{,}2 + 8{,}53$

6.↑ a) $\frac{1}{4} + 0{,}2$ c) $0{,}1 + \frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{5} + 0{,}25$ g) $\frac{1}{4} + 0{,}75$ i) $0{,}3 + \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} + 0{,}25$ d) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ f) $0{,}5 + \frac{1}{2}$ h) $\frac{2}{5} + 0{,}4$ k) $0{,}9 + \frac{4}{5}$

7. Berechne die Summen und kürze soweit wie möglich!

a) $\frac{3}{20}+\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{4}+\frac{11}{20}$ c) $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}$ d)* $\frac{7}{51}+\frac{6}{34}$ e) $\frac{39}{40}+\frac{49}{50}$

8. Ermittle alle natürlichen Zahlen x und y, die die folgenden Gleichungen erfüllen!

a) $\frac{x}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{2}+\frac{y}{4}=\frac{10}{5}$ e) $\frac{4}{5}+\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$ g) $\frac{x}{y}+\frac{2}{7}=1$

b) $\frac{4}{5}+\frac{x}{5}=\frac{8}{10}$ d) $\frac{x}{5}+\frac{3}{5}=1$ f) $\frac{2}{3}+\frac{y}{9}=\frac{6}{9}$ h) $\frac{2}{3}+\frac{x}{y}=\frac{7}{7}$

9. Gib drei Paare natürlicher Zahlen $(x;\ y)$ an, für die gilt:

a) $\frac{1}{2}+\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$, b) $\frac{8}{15}+\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}+\frac{x}{y}=1$, d)* $\frac{2}{3}+\frac{x}{y}<1$!

10. Für welche gebrochenen Zahlen sind folgende Gleichungen wahre Aussagen?

a) $0{,}2+b=0{,}7$ d) $b+0{,}4=0{,}07$ g) $a+\frac{3}{8}=1$

b) $0{,}3+a=0{,}36$ e) $a+0{,}5=0{,}75$ h) $\frac{7}{5}+b=1$

c) $0{,}8+a=0{,}804$ f) $b+0{,}20=0{,}200$ i) $\frac{1}{3}+a=\frac{4}{4}$

11. Stelle $\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{12}\right)$ als Summe **a)** von zwei gleichnamigen Brüchen, **b)** von zwei ungleichnamigen Brüchen dar!

12.* In der folgenden Summe tritt jede der Ziffern 0 bis 9 einmal auf. Wie groß ist x?

a) $\frac{35}{70}+\frac{148}{296}=x$ b) $78\,\frac{3}{5}+21\,\frac{46}{90}=x$

13. Von der Gesamtfläche der DDR werden etwa $\frac{9}{20}$ als Ackerland, $\frac{3}{25}$ als Grünland und $\frac{3}{100}$ für sonstige landwirtschaftliche Produktion genutzt. Wie groß ist der Anteil der landwirtschaftlichen Nutzfläche an der Gesamtfläche der DDR?

6 Subtraktion gebrochener Zahlen

Auch die Subtraktion gebrochener Zahlen wird auf die Subtraktion gleichnamiger Brüche zurückgeführt. Anstelle von $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ können wir rechnen:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}.$$

Die Differenz der gebrochenen Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ist die gebrochene Zahl $\frac{1}{6}$.

Wie bei den natürlichen Zahlen ist auch bei den gebrochenen Zahlen die Subtraktion die Umkehrung der Addition.

Mit $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ gilt auch $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

▸ 5

Gebrochene Zahlen als gemeine Brüche[1] werden subtrahiert, indem man:
1. diese Brüche gleichnamig macht und
2. die gleichnamigen Brüche subtrahiert.

Die Subtraktion kann man veranschaulichen (↗ Bild B 18).

$\boxed{\frac{6}{5} - \frac{3}{10} = x}$

oder $x + \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$

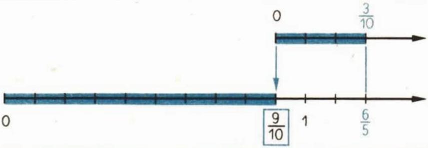


Bild B 18

■ 10 a) $\frac{7}{5} - \frac{3}{10}$

Wir überlegen:
Das k. g. V. von 5 und 10 ist 10

$$\frac{7}{5} - \frac{3}{10} = \frac{14}{10} - \frac{3}{10} = \frac{14-3}{10} = \underline{\underline{\frac{11}{10}}}$$

b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$

Wir überlegen:
Der Hauptnenner von 6 und 8 ist 24.
$4 \cdot 6 = 24$ und $3 \cdot 8 = 24$

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{20-9}{24} = \underline{\underline{\frac{11}{24}}}$$

c) $\frac{7}{15} - \frac{6}{30}$

Wir überlegen:
$\frac{6}{30}$ kann gekürzt werden: $\frac{6}{30} \overset{:2}{=} \frac{3}{15}$

$$\frac{7}{15} - \frac{6}{30} = \frac{7}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7-3}{15} = \underline{\underline{\frac{4}{15}}}$$

● 13 Berechne $m - n$ für

a) $m = \frac{4}{9}$; $n = \frac{12}{18}$, b) $m = \frac{5}{6}$; $n = \frac{2}{3}$, c) $m = \frac{3}{4}$; $n = 0{,}75$!

Genau wie bei den natürlichen Zahlen ist auch im Bereich der gebrochenen Zahlen die Subtraktion $a - b$ nur dann ausführbar, wenn $a \geqq b$.

Aufgaben

Berechne!

1.↑ a) $\frac{7}{5} - \frac{3}{5}$ b) $\frac{25}{3} - \frac{8}{3}$ c) $\frac{37}{2} - \frac{19}{2}$ d) $\frac{27}{6} - \frac{41}{6}$ e) $\frac{18}{7} - \frac{18}{7}$

2.↑ a) $0{,}7 - 0{,}3$ b) $0{,}75 - \frac{1}{2}$ c) $10{,}8 - 7{,}5$ d) $0{,}8 - \frac{3}{5}$

[1] Man sagt auch: „Gemeine Brüche werden subtrahiert, indem man ..."

3.↑ a) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}-\frac{3}{8}$ e) $\frac{8}{9}-\frac{7}{18}$ g) $\frac{3}{2}-\frac{4}{3}$ i) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$
b) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$ d) $\frac{9}{10}-\frac{7}{20}$ f) $\frac{4}{6}-\frac{11}{22}$ h) $\frac{3}{5}-\frac{9}{20}$ k) $\frac{5}{12}-\frac{5}{6}$

4.↑ a) $\frac{11}{12}-\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{18}-\frac{11}{12}$ e) $\frac{3}{4}-0{,}6$ g) $1{,}2-\frac{1}{2}$
b) $\frac{7}{12}-\frac{3}{8}$ d) $\frac{8}{24}-\frac{9}{45}$ f) $6{,}7-\frac{15}{4}$ h) $\frac{3}{4}-0{,}5$

5.* Die Länge eines Rechtecks betrage $3\frac{1}{2}$ cm. Die Breite dieses Rechtecks ist um $\frac{2}{5}$ cm geringer. Zeichne dieses Rechteck! Berechne den Umfang!

6. Berechne die Differenzen und kürze soweit wie möglich!
a) $\frac{5}{12}-\frac{7}{9}$ d) $\frac{12}{15}-\frac{7}{20}$ g) $\frac{8}{5}-\frac{11}{4}$ k) $\frac{35}{45}-\frac{28}{9}$
b) $\frac{15}{25}-\frac{2}{15}$ e) $\frac{7}{18}-\frac{5}{12}$ h) $\frac{4}{5}-\frac{5}{16}$ l) $\frac{19}{15}-\frac{11}{12}$
c) $\frac{11}{12}-\frac{10}{15}$ f) $\frac{150}{24}-\frac{200}{32}$ i) $\frac{29}{6}-\frac{12}{8}$ m) $\frac{12}{13}-\frac{15}{17}$

7. Ermittle alle natürlichen Zahlen *m* und *n*, die die folgenden Gleichungen erfüllen!
a) $\frac{m}{3}-\frac{2}{3}=1$ d) $\frac{m}{2}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ g) $\frac{5}{6}-\frac{n}{3}=\frac{1}{2}$ k) $\frac{7}{5}-\frac{m}{10}=\frac{14}{10}$
b) $\frac{3}{4}-\frac{n}{2}=\frac{1}{4}$ e) $\frac{n}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ h) $\frac{m}{2}-\frac{n}{2}=1$ l) $\frac{1}{2}-\frac{m}{n}=0$
c) $\frac{m}{4}-\frac{4}{8}=0$ f) $\frac{m}{2}-\frac{3}{4}=0$ i) $\frac{1}{2}-\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$ m) $\frac{7}{8}-\frac{1}{m}=\frac{5}{8}$

8. Löse folgende Gleichungen im Bereich der gebrochenen Zahlen!
a) $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{4}$ c)* $\frac{1}{2}-x=\frac{2}{3}$ e) $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ g)* $x-\frac{7}{8}=\frac{15}{16}$
b) $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}$ d)* $\frac{1}{2}-x=0{,}4$ f) $\frac{2}{3}+x=\frac{3}{4}$ h)* $x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

9. Gib je fünf gebrochene Zahlen *x* an, so daß gilt:
a) $\frac{13}{6}-x>2$, c)* $\frac{7}{3}-x>2$, e) $x-\frac{80}{31}>2$,
b) $\frac{8}{3}-x>2$, d)* $x-\frac{5}{3}>2$, f) $\frac{201}{100}-x>2$!

10.* Gib eine gebrochene Zahl *x* an, die sich
a) von $\frac{1}{3}$ um weniger als $\frac{1}{9}$, b) von $\frac{1}{8}$ um weniger als $\frac{1}{100}$ unterscheidet!

11. Von einem Ballen mit 30 m Stoff werden zuerst 2,60 m und dann $3\frac{1}{2}$ m verkauft. Wieviel Meter Stoff sind dann noch auf dem Ballen?

7 Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition

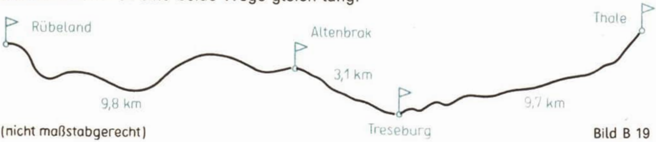
Eine Touristengruppe wandert von Rübeland über Treseburg (Mittagspause) nach Thale. Die Länge des gewanderten Weges ergibt sich als:

9,8 km + 3,1 km + 9,7 km = 22,6 km (↗ Bild B 19).

Eine andere Gruppe wandert von Thale über Treseburg (Mittagspause) nach Rübeland. Die Länge des von dieser Gruppe gewanderten Weges ergibt sich als:

9,7 km + 3,1 km + 9,8 km = 22,6 km.

Selbstverständlich sind beide Wege gleich lang.



(nicht maßstabgerecht) Bild B 19

Wie für die Addition natürlicher Zahlen gelten auch im Bereich der gebrochenen Zahlen folgende Gesetze, die wir hier nicht beweisen.

▶ 6

> **SATZ: Für alle gebrochenen Zahlen a und b gilt:**
> **$a + b = b + a$** **(Kommutativgesetz)**

Im Beispiel B 11 wird der Zusammenhang mit dem Kommutativgesetz der Addition natürlicher Zahlen deutlich.

■ 11 $\boxed{\frac{3}{4} + \frac{3}{8}} = \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{\boxed{6+3}}{8} = \frac{\boxed{3+6}}{8} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} = \boxed{\frac{3}{8} + \frac{3}{4}}$

▶ 7

> **SATZ: Für alle gebrochenen Zahlen a, b und c gilt:**
> **$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$** **(Assoziativgesetz)**

Jetzt können wir sofort mehr als zwei gebrochene Zahlen addieren.

■ 12 a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

Wir überlegen:
8 ist kein gemeinsamer Nenner, denn $3 \nmid 8$.
12 ist HN; $6 \cdot 2 = 12$, $4 \cdot 3 = 12$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{6+8+9}{12} = \underline{\underline{\frac{23}{12}}}$$

b) $\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{7}{10}$

Wir überlegen:
20 ist kein gemeinsamer Nenner, denn $3 \nmid 20$.
30 ist HN; $6 \cdot 5 = 30$, $10 \cdot 3 = 30$, $15 \cdot 2 = 30$

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{7}{10} = \frac{12+40+45+21}{30} = \frac{118}{30} = \underline{\underline{\frac{59}{15}}}$$

Durch die Anwendung dieser Gesetze können sich Rechenvorteile ergeben.

■ 13 a) $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}$

$= \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \frac{1}{3} = \underline{\underline{2\frac{1}{3}}}$

b) $0{,}81 + 2{,}47 + 1{,}19 = (0{,}81 + 1{,}19) + 2{,}47 = 2 + 2{,}47 = \underline{\underline{4{,}47}}$

Auch in Q_+ gelten für die Subtraktion Kommutativ- und Assoziativgesetz nicht.
Traten beim Rechnen mit natürlichen Zahlen mehrere Subtrahenden auf, so haben wir diese in einem ersten Rechenschritt addiert. Wir rechneten zum Beispiel

$121 - 26 - 35 = 121 - (26 + 35) = 121 - 61 = 60.$

Ebenso kann man die folgende Aufgabe lösen:

■ 14 $\frac{7}{2}-\frac{3}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{2}-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{7}{2}-\frac{7}{10}$

$=\frac{35-7}{10}=\frac{28}{10}=\underline{\underline{\frac{14}{5}}}$

Nebenrechnung:

$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{6+1}{10}=\frac{7}{10}$

● 14 Berechne und vergleiche die Ergebnisse miteinander!

a) $\frac{5}{3}-\frac{5}{6}-\frac{1}{12}$ b) $\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{12}\right)$ c) $\frac{5}{3}-\frac{5}{6}+\frac{1}{12}$ d) $\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{12}\right)$

Aufgaben

1. Berechne und kürze so weit wie möglich!

a) $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{4}+\frac{2}{2}+\frac{3}{1}$ g) $\frac{3}{8}+\frac{9}{11}+\frac{1}{4}$ k) $\frac{11}{25}+\frac{7}{15}+\frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{1}+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}$ h) $\frac{9}{10}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$ l) $\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{9}$

c) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$ f) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{7}{10}$ i) $\frac{6}{7}+\frac{7}{6}+\frac{41}{42}$ m) $\frac{11}{24}+\frac{17}{36}+\frac{7}{9}$

2.↑* a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{7}{15}+\frac{9}{20}+\frac{5}{8}+\frac{9}{10}$ c) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{5}+\frac{3}{10}+\frac{5}{12}+\frac{19}{30}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{7}+\frac{1}{6}+\frac{9}{14}+\frac{5}{12}+\frac{16}{21}+\frac{1}{3}+\frac{7}{8}$

3.↑ a) $\frac{21}{12}-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}$ b) $\frac{39}{18}-\frac{50}{45}-\frac{11}{36}-\frac{81}{90}$ c) $\frac{5}{12}-\frac{3}{8}-\frac{1}{32}-\frac{1}{96}$

4.↑ a) $\frac{2}{3}-\frac{11}{12}+\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}-\left(\frac{11}{12}-\frac{1}{4}\right)$ e) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-0{,}75$

b) $\frac{5}{7}-\left(\frac{1}{14}+\frac{25}{28}\right)$ d) $\frac{5}{7}-\frac{1}{14}-\frac{25}{28}$ f) $0{,}5+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$

5.↑ a) $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{5}$ b) $\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right)$ c) $\frac{7}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{3}{8}$

6.↑ a) $2\frac{3}{4}+7\frac{1}{4}+2\frac{1}{5}$ b) $1\frac{9}{10}+9\frac{1}{10}$ c) $3\frac{1}{5}-2\frac{1}{6}$ d) $11\frac{7}{8}-1\frac{3}{4}$

7. Stelle am Zahlenstrahl dar! Gib das Ergebnis an!

a) $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{12}-\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$

8. Für welche gebrochenen Zahlen x gilt

a) $x+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}+\frac{1}{7}$, b) $\frac{5}{9}+\frac{7}{10}=x+\frac{5}{9}$, c) $\left(\frac{5}{7}+\frac{4}{9}\right)+x=\frac{5}{7}+\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{7}\right)$,

d) $\frac{3}{8}+\left(x+\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{7}$, e) $x+\frac{4}{9}+\frac{2}{7}=\frac{2}{7}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}$?

9.* Setze Klammern, so daß eine wahre Aussage entsteht!

a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{7}+\frac{3}{42}=\frac{10}{21}$ c) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

b) $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{41}{60}$ d) $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}-\frac{2}{6}=\frac{7}{24}$

10. Die Summe zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{47}{60}$. Der eine Summand sei

a) $\frac{33}{60}$, b) $\frac{5}{12}$, c) $\frac{8}{36}$, d) $\frac{4}{15}$, e) $\frac{11}{40}$.

Wie groß ist der andere Summand?

11. Ermittle die Zahl, die um a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $\frac{7}{8}$, e) $\frac{11}{5}$ kleiner als $\frac{5}{2}$ ist!

12. Schreibe mit Klammern! Rechne aus!

a) Addiere zur Summe der Zahlen $\frac{5}{3}$ und $\frac{5}{6}$ die Zahl $\frac{4}{7}$!

b) Subtrahiere $\frac{1}{2}$ von der Summe der Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{5}$!

c) Addiere zu $\frac{2}{5}$ die Differenz der Zahlen $\frac{5}{2}$ und $\frac{7}{10}$!

d) Subtrahiere $\frac{1}{6}$ von der Differenz der Zahlen $\frac{7}{12}$ und $\frac{1}{8}$!

e) Addiere $\frac{1}{3}$ zur Differenz der Zahlen $\frac{5}{6}$ und $\frac{6}{5}$!

13. Vergleiche die Summen und Differenzen der Größe nach, ohne sie auszurechnen!

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}+\frac{7}{4}$ b) $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}+\frac{5}{4}$ c) $5\frac{1}{3}-3\frac{1}{2}$; $4\frac{9}{10}-3\frac{1}{2}$

d) $2\frac{1}{5}+7\frac{3}{8}$; $6\frac{1}{10}+2\frac{1}{5}$ e) $\frac{7}{3}-\frac{1}{5}$; $\frac{10}{3}-\frac{1}{5}$ f)* $\frac{8}{9}-\frac{2}{7}$; $\frac{7}{8}-\frac{4}{7}$

14. Für welche gebrochenen Zahlen x gilt

a) $x+0=x$, c) $x-0=\frac{1}{7}$, e) $x-x=0$, g) $0-x=0$,

b) $0+x=\frac{3}{5}$, d) $x-0=x$, f) $x-x=\frac{7}{10}$, h) $0-x=\frac{4}{5}$?

8 Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen in verschiedenen Darstellungen

Wir können bereits Dezimalbrüche schriftlich addieren und subtrahieren.

■ 15 a)
$$\begin{array}{r} 221{,}47 \\ +\ 45{,}23 \\ +101{,}7 \\ \hline 368{,}40 \end{array}$$

b) $221{,}47 - 45{,}23 - 101{,}7 = \underline{\underline{74{,}54}}$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} 45{,}23 \\ +101{,}7 \\ \hline 146{,}93 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 221{,}47 \\ -146{,}93 \\ \hline 74{,}54 \end{array}$$

In manchen Aufgaben treten sowohl gemeine als auch Dezimalbrüche auf. In solchen Fällen entscheiden wir uns für *eine* Darstellungsart.

■ 16 a) $4{,}3 + \boxed{\frac{5}{2}} + 0{,}3 + \boxed{\frac{3}{4}}$

Wir wandeln die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche um.

$4{,}3 + \boxed{2{,}5} + 0{,}3 + \boxed{0{,}75} = \underline{\underline{7{,}85}}$

b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \boxed{0{,}6} + \frac{4}{5}$

Wir wandeln 0,6 in einen gemeinen Bruch um.

$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = \underline{\underline{2}}$

● 15 a) Wandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalbrüche um!

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{1}{8}, \frac{5}{6}$

b) Wandle die folgenden Dezimalbrüche in gemeine Brüche um!

0,25; 0,2; 2,5; 1,125; 3,4; 0,6

● 16 Zerlege die Zahlen 10, 100 und 1000 in Primfaktoren!

Die Nenner von Zehnerbrüchen haben **nur** die Primfaktoren 2 und 5. Treten im Nenner eines Bruches andere Primfaktoren auf, so können wir diesen Bruch **nicht** in einen Zehnerbruch umwandeln.[1] Zur Berechnung der Summe $\frac{7}{3} + 1{,}6 + \frac{4}{5} + 2{,}8$ können wir nur so vorgehen wie im Beispiel B 16b, denn wir können $\frac{7}{3}$ noch nicht als Dezimalbruch schreiben. Wir rechnen also:

$$\frac{7}{3} + \frac{16}{10} + \frac{4}{5} + \frac{28}{10} = \frac{70 + 48 + 24 + 84}{30} = \frac{226}{30} = \underline{\underline{\frac{113}{15}}}.$$

● 17 Berechne! Überlege dabei, wie du geschickt vorgehst!

a) $\frac{1}{2} - 0{,}25 + \frac{2}{3} + 0{,}75$ c) $121{,}41 - \left(\frac{27}{4} + 0{,}25\right) - 101{,}07$

b) $38{,}5 - 7\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$ d) $\frac{7}{1} + 0{,}5 - \frac{3}{2} + 5$

[1] Wir gehen wieder davon aus, daß Zähler und Nenner der gegebenen Brüche teilerfremd sind. $\left(\frac{3}{30} = \frac{1}{10}\right.$ ist ja durchaus in einen Dezimalbruch umwandelbar.$\left.\right)$

Treten Dezimalbrüche als Ergebnis von Messungen auf, so handelt es sich um **Näherungswerte**. Wird mit diesen Näherungswerten gerechnet, muß man bekanntlich überlegen, wie genau das Ergebnis sein kann.

■ 17 Die Pioniere Ralf, Torsten, Arnim und Andreas haben Altpapier zur Schule mitgebracht. Sie hatten die Papierbündel zu Hause mit verschiedenen Arten von Waagen gewogen und erhielten folgende (unterschiedlich genaue) Ergebnisse: 18 kg; 5,6 kg; 3,62 kg und 4,7 kg. Wie groß ist die Gesamtmasse? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die einzelnen Näherungswerte addieren.

$$18\text{ kg} + 5{,}6\text{ kg} + 3{,}62\text{ kg} + 4{,}7\text{ kg} = 31{,}92\text{ kg}$$

Die Stellen nach dem Komma täuschen eine nicht mögliche Genauigkeit vor. Die erste Masse ist nur auf Kilogramm genau angegeben, also kann das Ergebnis auch nur auf Kilogramm genau angegeben werden.
Die Pioniergruppe sammelte 32 kg Altpapier.

● 18 Peter bringt noch drei alte Hefte mit, die zusammen eine Masse von 117 g haben. Wie ändert sich das Sammelergebnis der Gruppe im Beispiel B 17?

■ 18 Ein rechteckiger Garten mit 35 m Länge und 33 m Breite soll eingezäunt werden. An einer Ecke innerhalb des Gartens steht eine 6,45 m lange und 4,15 m breite Garage, so daß der Zaun nicht das ganze Grundstück umschließen muß. Wieviel Meter Zaun werden benötigt?
Für den Umfang des Gartens erhalten wir:

$$u = 2 \cdot 35\text{ m} + 2 \cdot 33\text{ m} = 136\text{ m}.$$

Davon sind Länge und Breite der Garage zu subtrahieren:

$$136\text{ m} - 6{,}45\text{ m} - 4{,}15\text{ m} = 125{,}40\text{ m}.$$

Schauen wir uns alle Ausgangswerte an, so muß die Antwort lauten:
Es werden 126 m Zaun benötigt.

● 19 Begründe, warum nicht auf 125 m gerundet wurde!

Aufgaben

1. Wandle in einen Dezimalbruch um!

a) $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{21}{10}$; $3\frac{1}{2}$; $1\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{9}{5}$; $\frac{17}{10}$; $\frac{21}{2}$; $\frac{7}{9}$; $7\frac{1}{4}$; $3\frac{3}{4}$

2. Vergleiche!

a) $\frac{23}{8}$ und 3 **c)** $\frac{38}{7}$ und 6 **e)** 2,4 und $\frac{12}{2}$ **g)** 3,2 und $\frac{14}{3}$

b) 4 und $\frac{32}{5}$ **d)** $\frac{28}{5}$ und 4,5 **f)** $\frac{9}{4}$ und 2,2 **h)** $\frac{21}{6}$ und 3,6

3. Berechne!

a) $4{,}5 + \left(3 - \frac{3}{4}\right)$ **d)** $\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - 0{,}25$ **g)** $23{,}95 - \frac{7}{2} - 4{,}321$

b) $3{,}4 - \left(\frac{9}{2} - 3\right)$ **e)** $1{,}25 - \frac{5}{9} - 0{,}8$ **h)** $14{,}7 - \frac{3}{5} + 0{,}035$

c) $\frac{1}{3} + 0{,}7 - 0{,}003$ **f)** $\frac{3}{2} - \frac{1}{5} + 0{,}7$ **i)** $2{,}8 + \frac{1}{3} - 1{,}2$

4. Berechne $84 - x$ und $x + 6{,}546$, wenn
a) $x = 30{,}4$; **b)** $x = 2{,}454$; **c)** $x = 83{,}98$; **d)** $x = 91{,}5$!

5.* Setze Klammern so, daß eine wahre Aussage entsteht!
a) $61{,}5 - 2{,}5 - \frac{3}{2} = 60{,}5$ **b)** $84{,}7 - 5{,}4 - 7{,}6 - 4{,}6 = 76{,}3$

6. Berechne!
a) $68{,}7 - (44{,}7 + 0{,}375)$ **d)** $(504 - 47{,}9) + (58{,}7 - 49)$
b) $(90{,}4 + 65{,}4) - 90{,}8$ **e)** $7{,}654 + (37 - 22{,}9) + 0{,}345$
c) $18{,}6 - 7{,}35 - 4{,}5$ **f)** $3{,}15 - (25{,}4 - 24{,}965)$

7.* Löse folgende Gleichungen im Bereich der gebrochenen Zahlen!
a) $\frac{2}{5} - 0{,}4 + x = 1$ **d)** $\frac{3}{4} - 0{,}6 + z = 1$ **g)** $10 - m + 4{,}3 = 10{,}7$
b) $1{,}9 - \frac{7}{4} + w = 1$ **e)** $1{,}2 - \frac{1}{5} + v = 1$ **h)** $x - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = 1$
c) $\frac{3}{2} - 0{,}8 + y = 1$ **f)** $4{,}1 + a = 20{,}3 - 4{,}9$ **i)** $2{,}5 - k - \frac{5}{4} = 1{,}25$

8.* Berechne!
a) $56{,}24 - (27{,}11 - (43{,}76 - 27{,}11))$ **b)** $537 - (47{,}23 + (32{,}77 + 0{,}13))$
c) $8{,}7 + (100 - (12{,}91 - 11{,}97))$

9. Welche Summe ist größer? Entscheide, ohne zu rechnen!
a) $3{,}72 + 0{,}89 + 5{,}21$ oder $3{,}84 + 0{,}98 + 5{,}64$
b) $21{,}4 + 8{,}3 + 6{,}1$ oder $20{,}7 + 8{,}1 + 5{,}73$
c) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ oder $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$

10. Ergänze folgende magische Quadrate so, daß die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale 1 beträgt!

$\frac{1}{2}$		
	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{5}{9}$	

$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{9}$	
		$\frac{1}{4}$

	$\frac{1}{5}$	
$\frac{4}{15}$		
$\frac{3}{10}$		

Berechne!
11.↑ **a)** $2{,}3 + 3{,}77 + 3{,}23 + 1{,}82$ **d)** $1{,}39 + 4{,}94 + 27{,}2 + 7{,}801 + 6{,}309$
b) $5{,}7 + 3{,}89 + 11{,}2 + 7{,}23$ **e)** $18{,}28 + 19{,}84 + 9{,}43 + 5{,}55 + 10{,}02$
c) $4{,}93 + 9{,}712 + 4{,}3 + 7{,}2$ **f)** $0{,}021 + 0{,}0021 + 0{,}21 + 0{,}00021$

12.↑ **a)** $2{,}88 - 0{,}33 - 1{,}47$ **d)** $2{,}074 - 1{,}382 - 0{,}377 - 0{,}298$
b) $0{,}044 - 0{,}23 - 0{,}009 - 0{,}019$ **e)** $15{,}008 - 7{,}403 - 0{,}0201 - 3{,}004$
c) $33{,}4 - 28{,}7 - 2{,}87 - 0{,}287$ **f)** $2700{,}4 - 328{,}9 - 1999{,}8 - 32{,}07$

13. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $0{,}6 - \frac{3}{10} + 1{,}75 = 2$ b) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} + 0{,}25 < 1$

c) $3{,}7 - \frac{1}{4} - 2{,}65 > 1$ d) $2{,}375 + \frac{3}{4} - 1{,}5 - \frac{3}{10} = 1{,}3$

e) $7{,}3 - \frac{2}{3} + 0{,}5 > 6$ f) $3{,}7 - \frac{6}{15} - 0{,}55 + 4{,}75 > 7{,}5$

14. Eine LPG hat sich auf den Obstanbau spezialisiert. Sie hat folgende Anbauflächen: 71,5 ha Äpfel; 10,6 ha Sauerkirschen; 7,75 ha Süßkirschen; 5,1 ha Pflaumen und 5,18 ha Erdbeeren. Auf wieviel Hektar wird insgesamt Obst angebaut? Überlege, wie du das Ergebnis runden mußt!

15. Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Im einzelnen werden folgende Massen angegeben: 7,5 kg; 4,64 kg; 12 kg; 2,5 kg und 1,75 kg. Gib die gesammelte Menge Altpapier in Kilogramm an!

16. Die Straßenfront eines 47 m breiten Grundstücks soll neu eingezäunt werden. Die 1,25 m breite Tür und das 4,30 m breite Tor sollen wieder verwendet werden. An dieser Straßenfront befinden sich außerdem sechs je 40 cm breite Pfeiler. Wieviel Meter Zaun werden benötigt?

17. Ein Museumswärter sagt: „Als ich vor 11 Jahren hier anfing zu arbeiten, wurde gesagt, daß diese Mumie 4000 Jahre alt ist. Dann ist sie jetzt also 4011 Jahre alt." Was sagst du dazu?

Zusammenfassung

Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen	
I Es treten nur gemeine Brüche auf 1. Gleichnamig machen 2. Zähler der gleichnamigen Brüche addieren 3. Gemeinsamen Nenner beibehalten	$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{9+10}{12} = \underline{\underline{\frac{19}{12}}}$ $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4-3}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$
II Es treten nur Dezimalbrüche auf 1. Dezimalbrüche so untereinander schreiben, daß Komma unter Komma steht 2. Addieren bzw. subtrahieren wie bei natürlichen Zahlen 3. Im Ergebnis Komma so setzen, daß es unter den Kommas der Summanden steht	$\begin{array}{r} 44{,}97 \\ +\ 21{,}3 \\ +\ \ 4{,}753 \\ \hline \underline{\underline{71{,}023}} \end{array}$ $\begin{array}{r} 44{,}97 \\ -\ 26{,}053 \\ \hline \underline{\underline{18{,}917}} \end{array}$

<table>
<tr>
<td>III Es treten sowohl gemeine als auch Dezimalbrüche auf
Entweder alle gebrochenen Zahlen als gemeine Brüche schreiben oder alle gebrochenen Zahlen als Dezimalbrüche schreiben (jeweils die günstigste Möglichkeit wählen).
Dann wie bei I bzw. wie bei II weiterrechnen.</td>
<td>$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+0{,}75$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$
oder
$=0{,}25+0{,}5+0{,}75=1{,}50$

$1{,}5-\frac{2}{3}-0{,}25$
$=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$
$=\frac{18-8-3}{12}=\frac{7}{12}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">– Die Addition gebrochener Zahlen ist immer ausführbar. Zu je zwei gebrochenen Zahlen gibt es genau eine gebrochene Zahl, die deren Summe ist.
Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz.
– Die Subtraktion ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist.
– Die Brüche mit dem Nenner 1 können bei der Addition und Subtraktion durch die entsprechenden natürlichen Zahlen ersetzt werden und umgekehrt.</td>
</tr>
</table>

Multiplikation und Division gebrochener Zahlen

9 Multiplikation gebrochener Zahlen

● 20 Gegeben seien zwei Quadrate mit 1 m bzw. $\frac{1}{2}$ m Seitenlänge (↗ Bild B 20). Vergleiche die Flächeninhalte der beiden Quadrate miteinander!
Welche Zahl könnte das Ergebnis der Multiplikation $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ sein? (*Hinweis:* Denke daran, daß du Dezimalbrüche schon multiplizieren kannst! Berechne auch $0{,}5\cdot 0{,}5$!)

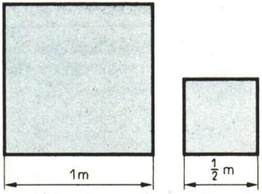


Bild B 20

Es ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit $a = \frac{2}{3}$ m und $b = \frac{1}{2}$ m zu bestimmen.

Aus dem Bild B 21 können wir entnehmen, daß der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks $\frac{2}{6}$ m² beträgt. Es muß also gelten:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}.$$

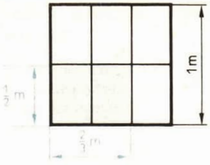


Bild B 21

● 21 Welche Regel für die Multiplikation gebrochener Zahlen vermutest du?

Wir können auch von der Multiplikation natürlicher Zahlen ausgehen, um diese Regel zu finden. Es gilt: $5 \cdot 4 = 20$.

Führt man die Multiplikation $5 \cdot 4$ mit anderen Darstellungen der Faktoren aus, soll das Ergebnis natürlich wieder 20 sein.

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \ldots$$
$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \ldots$$

Also rechnen wir: $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{1} = 20 = \frac{20}{1}$

Es soll auch gelten: $\frac{10}{2} \cdot \frac{8}{2} = 20$

Multipliziert man hier die Zähler miteinander, so erhält man $10 \cdot 8 = 80$. Damit das Produkt 20 ist, werden wir $\left(\text{wie oben bei } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}\right)$ auch die Nenner miteinander multiplizieren.

$$\frac{10}{2} \cdot \frac{8}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2 \cdot 2} = \frac{80}{4} = \underline{\underline{20}}$$

Genauso rechnet man

$$\frac{20}{4} \cdot \frac{12}{3} = \frac{20 \cdot 12}{4 \cdot 3} = \frac{240}{12} = \underline{\underline{20}}.$$

Man legt deshalb fest:

▶ 8

Gebrochene Zahlen als gemeine Brüche[1] werden multipliziert, indem man:
1. die Zähler dieser Brüche multipliziert und
2. die Nenner dieser Brüche multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (a, b, c, d \in N;\ b, d \neq 0)$$

Zu zwei gebrochenen Zahlen gibt es stets genau eine gebrochene Zahl, die deren Produkt ist. Vor dem Ausrechnen der Produkte kürzen wir soweit wie möglich. Gemischte Zahlen wandelt man vor dem Multiplizieren in unechte Brüche um.

[1] Man sagt auch: „Gemeine Brüche werden multipliziert, indem man …"

■ 19 a) $\frac{56}{9} \cdot \frac{15}{8} = \frac{\overset{7}{\cancel{56}} \cdot \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot \underset{1}{\cancel{8}}} = \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \underline{\underline{\frac{35}{3}}}$

b) $7\frac{4}{5} \cdot 1\frac{8}{13} = \frac{39}{5} \cdot \frac{21}{13} = \frac{\overset{3}{\cancel{39}} \cdot 21}{5 \cdot \underset{1}{\cancel{13}}} = \frac{3 \cdot 21}{5} = \underline{\underline{\frac{63}{5}}}$

■ 20 a) $7 \cdot \frac{4}{3} = \frac{7}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{28}{3}}}$ oder: $7 \cdot \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 4}{3} = \underline{\underline{\frac{28}{3}}}$

b) $\frac{2}{7} \cdot 4 = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{1} = \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 1} = \underline{\underline{\frac{8}{7}}}$ oder: $\frac{2}{7} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{7} = \underline{\underline{\frac{8}{7}}}$

● 22 Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft! Fülle sie aus und vergleiche!

Das Doppelte von 9 ist … Das Siebenfache von $\frac{1}{2}$ ist …		$2 \cdot 9 =$ $7 \cdot \frac{1}{2} =$	
$\frac{1}{3}$ von 3 ist 1 $\frac{2}{3}$ von 3 sind … $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ l ist …	$\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ $\frac{2}{3} \cdot 3 =$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$	$\frac{1}{4}$ von $\frac{8}{7}$ sind … $\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{7}$ sind … $\frac{1}{9}$ von 18 km sind …	$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} =$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} =$ $\frac{1}{9} \cdot 18 =$

Wir erkennen: $\frac{a}{b}$ von c ist das gleiche wie $\frac{a}{b} \cdot c$.

● 23 Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und fülle sie aus!

x	y	$y \geqq 1$	$x \cdot y$	$x \cdot y < x$	$x \cdot y > x$	$x \cdot y < y$	$x \cdot y > y$
10	$\frac{3}{2}$	$y > 1$	15	nein	ja	nein	ja
10	$\frac{1}{2}$	$y < 1$					
3	$\frac{1}{4}$						
$\frac{1}{2}$			5	nein	ja		
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$						

Wir erkennen: Bei der Multiplikation gebrochener Zahlen kann das Produkt *kleiner* sein als jeder der Faktoren.

● 24 Was kannst du über die gebrochenen Zahlen a und b sagen, wenn gilt:
$a \cdot b < a$ und $a \cdot b < b$?

Aufgaben

Berechne!

1.↑ a) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}$ c) $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{5}$ e) $\frac{9}{4} \cdot \frac{11}{7}$ g) $\frac{8}{7} \cdot \frac{3}{13}$ i) $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2}$ l) $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{2}$

b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9}$ d) $\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{11}$ f) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10}$ h) $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{2}$ k) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$ m) $\frac{4}{9} \cdot \frac{27}{2}$

2.↑ a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}$ e) $3 \cdot \frac{5}{2}$ g) $7 \cdot 1\frac{1}{2}$ i) $\frac{5}{2} \cdot 3$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ d) $\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{5}$ f) $\frac{9}{11} \cdot \frac{33}{12}$ h) $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$ k) $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3}$

3. Kürze soweit wie möglich, bevor du multiplizierst!

a) $\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4}$ d) $\frac{11}{33} \cdot \frac{1}{3}$ g) $\frac{16}{7} \cdot \frac{28}{64}$ k) $\frac{35}{48} \cdot \frac{36}{25}$ n) $\frac{7}{3} \cdot 5\frac{1}{4}$

b) $\frac{9}{18} \cdot \frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{14} \cdot \frac{70}{55}$ h) $\frac{5}{8} \cdot \frac{16}{24}$ l) $\frac{12}{17} \cdot \frac{34}{60}$ o) $\frac{12}{18} \cdot \frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{17}{51}$ f) $\frac{9}{12} \cdot \frac{96}{81}$ i) $\frac{15}{26} \cdot \frac{65}{75}$ m) $\frac{8}{25} \cdot \frac{15}{22}$ p) $\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{11}$

4. Welche natürliche Zahl n macht die Gleichung zu einer wahren Aussage?

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{n}{4} = \frac{21}{20}$ c) $\frac{9}{8} \cdot \frac{n}{4} = \frac{9}{8}$ e) $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{n} = \frac{1}{3}$ $(n \neq 0)$

b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{n}{3} = \frac{19}{21}$ d) $\frac{n}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0$ f) $\frac{8}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ $(n \neq 0)$

5. Welche natürliche Zahl n erfüllt die Gleichung?

a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{n}{9} = \frac{35}{63}$ b) $\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{n} = \frac{28}{20}$ c) $\frac{18}{15} \cdot \frac{4}{n} = \frac{24}{100}$

6. Für welche gebrochene Zahl x entsteht eine wahre Aussage?

a) $\frac{5}{7} \cdot x = 1$ b) $\frac{3}{2} \cdot x < 1$ c) $\frac{5}{3} \cdot x = 0$ d) $\frac{7}{8} \cdot x = \frac{7}{8}$

7. Löse folgende Gleichungen!

a) $\frac{7}{4} \cdot x = 1$ b) $\frac{7}{11} \cdot x = 0$ c) $\frac{17}{20} \cdot y = \frac{17}{20}$ d) $z \cdot 0 = \frac{17}{11}$

8. Löse die folgenden Gleichungen im Bereich der gebrochenen Zahlen!

a) $\frac{3}{8} \cdot x = 1$ b) $1{,}5 \cdot x = 1$ c) $y \cdot 0{,}5 = 1$

d) $\frac{3}{5} \cdot x = 1$ e) $\frac{7}{4} \cdot x = 5$ f) $x \cdot 11 = \frac{7}{11}$

9. a) Überprüfe! Es gibt *gebrochene Zahlen* x und y $(x \neq 0,\ y \neq 0)$, so daß gilt: $x \cdot y < x$.

b) Überprüfe! Es gibt *natürliche Zahlen* x und y $(x \neq 0,\ y \neq 0)$, so daß gilt: $x \cdot y < x$.

10. Gib zwei gebrochene Zahlen z $(z \neq 0)$ an, für die gilt:

a) $\frac{1}{2} \cdot z < \frac{1}{2}$, b) $3 \cdot z < 3$, c) $z \cdot \frac{4}{7} < \frac{4}{7}$ d)* $z \cdot \frac{3}{2} < z$

11. Gib alle natürlichen Zahlen m an, für die gilt:

a) $m \cdot \frac{1}{2} < 2$, b) $\frac{7}{5} \cdot m < \frac{31}{5}$, c) $m \cdot \frac{4}{7} > 1$, d) $m \cdot \frac{7}{11} < 4{,}5$,

e) $\frac{m}{4} \cdot m < 4$, f) $\frac{m}{9} \cdot m < 9$, g) $\frac{m}{5} \cdot m > 7$, h)* $2 < \frac{m}{9} \cdot m < 9$!

12. Der Schall legt in einer Sekunde einen Weg von etwa $\frac{1}{3}$ km zurück. Wie weit ist ein Gewitter entfernt, wenn nach dem Blitz noch a) 3 s, b) $5\frac{1}{2}$ s, c) 12 s, d) 2,5 s bis zum Ertönen des Donners vergehen?

Bild B 22

13. Berechne x^2!

a) $x = 5$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = \frac{7}{4}$ d) $x = 2{,}5$ e) $x = \frac{3}{14}$

14. Wieviel ist

a) $\frac{2}{3}$ von 18 kg, d) $\frac{3}{10}$ von 4 t, g) $\frac{6}{7}$ von 7 kg, k) $\frac{1}{2}$ von 5 l,

b) $\frac{3}{4}$ von 2 h, e) $\frac{5}{12}$ von 1 h, h) $\frac{2}{3}$ von 90 kg, l) $\frac{4}{5}$ von $\frac{5}{4}$ m,

c) $\frac{4}{5}$ von 3 m, f) $\frac{3}{5}$ von 6 km, i) $\frac{4}{5}$ von 25 M, m) $\frac{2}{3}$ von 1 h?

15. Was ist die Hälfte eines Halbkreises?

16. Was ist die Hälfte eines Viertels (Achtels)?

17.* Wieviel ist das Achtfache (Neunfache) von der Hälfte eines Viertels (Drittels)?

18.* Bestimme n so, daß eine wahre Aussage entsteht!

a) $\frac{3}{n}$ von 24 sind 18 b) $\frac{n}{4}$ von 32 sind 24 c) $\frac{5}{7}$ von n sind 30

19.* Gib Paare natürlicher Zahlen (m, n) an, so daß wahre Aussagen entstehen!

a) $\frac{m}{n}$ von 60 sind 30 b) $\frac{m}{n}$ von 121 sind 11 c) $\frac{3}{4}$ von m ist n

10 Multiplikation gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung

● 25 In einem Konfektionsbetrieb sollen an einem Tag 150 Blusen genäht werden. Für eine Bluse benötigt man 2,25 m Stoff (90 cm breit). Wieviel Meter Stoff werden an einem Tag verbraucht?

Wir wissen bereits, daß Dezimalbrüche wie natürliche Zahlen multipliziert werden. Im Ergebnis setzt man dann das Komma so, daß das Produkt so viele Dezimalstellen hat wie beide Faktoren zusammen.

■ 21 $27{,}25 \cdot 4{,}7$ *Überschlag:* $30 \cdot 5 = 150$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} \underline{2725 \cdot 47} \\ 10900 \\ \underline{19075} \\ 128075 \end{array}$$

Ergebnis:

$27{,}25 \cdot 4{,}7 = \underline{\underline{128{,}075}}$

Dieses aus der Klasse 5 bekannte Verfahren können wir durch die Multiplikation von Zehnerbrüchen begründen.

$$27{,}25 \cdot 4{,}7 = \frac{2725}{100} \cdot \frac{47}{10} = \frac{2725 \cdot 47}{100 \cdot 10} = \frac{2725 \cdot 47}{1000} = \frac{128075}{1000} = \underline{\underline{128{,}075}}$$

Dezimalbrüche sind oft Näherungswerte, die man im Ergebnis von Messungen erhält. Rechnet man mit solchen Näherungswerten, muß man sich gründlich überlegen, wie genau das Ergebnis sein kann.

Der Flächeninhalt der rechteckigen Grundfläche eines Zimmers soll berechnet werden. Für die Länge l und die Breite b wurden 4,2 m bzw. 3,4 m gemessen.

Berechnen wir den Flächeninhalt mit diesen Werten, so erhalten wir:

$A = 4{,}2\ \text{m} \cdot 3{,}4\ \text{m}$ *Überschlag:* $4\ \text{m} \cdot 3\ \text{m} = 12\ \text{m}^2$

$\quad = 14{,}28\ \text{m}^2$

Als sinnvolles Ergebnis gibt man $A = 14\ \text{m}^2$ an.

Wie unsinnig die Angabe $14{,}28\ \text{m}^2$ für den Flächeninhalt ist, erkennt man auch, wenn man beachtet, zwischen welchen Werten die genauen Werte von l und b liegen. Setzen wir voraus, daß die Strecken gemessen und auf Dezimeter gerundet wurden, gilt für die genauen Werte l und b:

$$4{,}15\ \text{m} \leqq l < 4{,}25\ \text{m} \quad \text{bzw.} \quad 3{,}35\ \text{m} \leqq b < 3{,}45\ \text{m}.$$

Für den Flächeninhalt bedeutet das:

$$4{,}15\ \text{m} \cdot 3{,}35\ \text{m} \leqq A < 4{,}25\ \text{m} \cdot 3{,}45\ \text{m}$$

$$13{,}9025\ \text{m}^2 \leqq A < 14{,}6625\ \text{m}^2$$

Auch hieraus erkennen wir, daß eine dem Sachverhalt entsprechende Antwort lautet: Der Flächeninhalt beträgt $14\ \text{m}^2$.

Aufgaben

1. Multipliziere 143,25 (9,7031) der Reihe nach mit 10; 100; 1000; 0,1; 0,01; 0,001!

2. Rechne im Kopf!

   a) $0{,}8 \cdot 4$ c) $2 \cdot 0{,}27$ e) $0{,}8 \cdot 0{,}1$ g) $\frac{1}{2} \cdot 2{,}5$ i) $\frac{9}{10} \cdot 0{,}9$

   b) $5 \cdot 0{,}5$ d) $0{,}4 \cdot 0{,}4$ f) $0{,}1 \cdot 1{,}27$ h) $7 \cdot 0{,}7$

3. Schreibe nur einen Überschlag auf!

   a) $14{,}5 \cdot 0{,}18$ b) $0{,}37 \cdot 97{,}8$ c) $25{,}1 \cdot 3{,}98 \cdot 1{,}05$ d) $0{,}27 \cdot 0{,}68 \cdot 0{,}9$

4. Mache einen Überschlag, rechne und vergleiche mit dem Überschlag!

   a) $2{,}9 \cdot 0{,}074$ d) $1{,}88 \cdot 0{,}067$ g) $15{,}74 \cdot 0{,}73$ k) $3{,}074 \cdot 0{,}71$

   b) $0{,}84 \cdot 2{,}79$ e) $12{,}9 \cdot 3{,}4$ h) $12{,}25 \cdot 0$ l) $0{,}76 \cdot 100$

   c) $24{,}15 \cdot 3{,}73$ f) $4{,}6 \cdot 2{,}54$ i) $0{,}055 \cdot 0{,}22$ m) $50 \cdot 0{,}13 \cdot 0{,}2$

5. Bei der Aufgabe $7{,}67 \cdot 35{,}8$ erhalten fünf Schüler folgende Ergebnisse:
a) 274,586; **b)** 2745,86 **c)** 274,86 **d)** 274,588; **e)** 27,4586
Welche Ergebnisse sind gewiß falsch? Begründe!

6. Löse folgende Gleichungen! Mache die Probe!
a) $\frac{2}{5} \cdot x = \frac{6}{25}$ **b)** $0{,}3 \cdot y = \frac{21}{40}$ **c)** $z \cdot \frac{7}{2} = 3{,}5$ **d)** $x \cdot \frac{4}{5} = 0{,}8$

7.* Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?
a) $27{,}9 \cdot 0{,}028 < 1$
b) $54{,}3 \cdot 0{,}021 > 15{,}4 \cdot 0{,}074$
c) $0{,}052 \cdot 6{,}74 < 0{,}073 \cdot 230{,}8$
d) $0{,}98 \cdot 0{,}99 > 1$
e) $0{,}67 \cdot 0{,}98 < 3{,}7 \cdot 0{,}17$
f) $4{,}2 \cdot 0{,}83 < 0{,}81 \cdot 8{,}05$

8. Berechne x^2! **a)** $x = 12{,}3$ **b)** $x = 1{,}02$ **c)** $x = 0{,}1$ **d)** $x = 0{,}05$ **e)** $x = 421{,}5$

9. Gib den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den gemessenen Seitenlängen 4,5 cm und 5,7 cm auf cm^2 genau an!

10. Der Fußboden eines Zimmers mit rechteckiger Grundfläche soll gestrichen werden. Eine Dose Farbe reicht für 5 m^2. Für Länge und Breite des Zimmers wurden 5,4 m bzw. 3,6 m gemessen. Wieviel Dosen werden benötigt?

11. Die Kantenlänge eines Würfels wurde mit 12,6 cm auf 0,1 cm genau gemessen.
a) Zwischen welchen Werten liegt das Volumen des Würfels?
b) Gib ein zweckmäßig gerundetes Ergebnis an!

11 Eigenschaften der Multiplikation gebrochener Zahlen

Wie für die Multiplikation natürlicher Zahlen gelten auch für die Multiplikation gebrochener Zahlen folgende Gesetze, die wir hier nicht beweisen.

▸ 9

SATZ: Für alle gebrochenen Zahlen a und b gilt:
$a \cdot b = b \cdot a$. **(Kommutativgesetz)**

■ 22 **a)** $\boxed{\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \boxed{\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}}$ **b)** $1{,}2 \cdot 0{,}5 = \frac{12}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{10} \cdot \frac{12}{10} = 0{,}5 \cdot 1{,}2$

▸ 10

SATZ: Für alle gebrochenen Zahlen a, b und c gilt:
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$. **(Assoziativgesetz)**

■ 23 Bei der Berechnung des Flächeninhalts des im Bild B 23 dargestellten (zusammengesetzten) Rechtecks können wir zwei Wege gehen:

1. Weg:
$A = 2{,}3\text{ cm} \cdot (2{,}6\text{ cm} + 1{,}2\text{ cm})$
$A = 2{,}3\text{ cm} \cdot 3{,}8\text{ cm}$
$\underline{\underline{A = 8{,}74\text{ cm}^2}}$

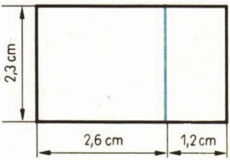


Bild B 23

2. Weg:
$A = (2{,}3\ \text{cm} \cdot 2{,}6\ \text{cm}) + (2{,}3\ \text{cm} \cdot 1{,}2\ \text{cm})$
$A = 5{,}98\ \text{cm}^2 + 2{,}76\ \text{cm}^2$
$\underline{\underline{A = 8{,}74\ \text{cm}^2}}$

Im Beispiel B 23 führen beide Wege zum gleichen Resultat; es gilt also:
$2{,}3 \cdot (2{,}6 + 1{,}2) = 2{,}3 \cdot 2{,}6 + 2{,}3 \cdot 1{,}2.$
Allgemein gilt der folgende Satz, der hier nicht bewiesen wird:

▸ 11 **SATZ: Für alle gebrochenen Zahlen *a, b* und *c* gilt:**
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$ **(Distributivgesetz)**

■ 24 $\boxed{\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right)} = \boxed{\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9}}$

Denn:

$$\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right) = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{36 + 10}{45}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{46}{45} = \frac{322}{135}$$

und:

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{28}{15} + \frac{14}{27} = \frac{252 + 70}{135} = \frac{322}{135}$$

Manchmal können wir uns das Rechnen erleichtern, indem wir das Distributivgesetz anwenden.

■ 25 **a)** $\left(\frac{5}{4} + \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{5} = 1 + \frac{16}{35} = \underline{\underline{1\,\frac{16}{35}}}$

b) $23{,}78 \cdot 7{,}3 + 76{,}22 \cdot 7{,}3 = (23{,}78 + 76{,}22) \cdot 7{,}3$
$= 100 \cdot 7{,}3 = \underline{\underline{730}}$

● 26 Rechne die Aufgabe aus Beispiel B 25b, *ohne* daß du das Distributivgesetz anwendest!

■ 26 $0{,}75 \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} = \left(0{,}75 + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{7} = 1 \cdot \frac{3}{7} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$

Bei dieser Anwendung des Distributivgesetzes sagt man auch: Wir klammern in einer Summe den gemeinsamen Faktor der Summanden aus.

● 27 Berechne!

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)$ **c)** $2{,}7 \cdot 3{,}8 - 2{,}7 \cdot 1{,}9$

Auch bei Subtraktionsaufgaben können wir gemeinsame Faktoren ausklammern.

■ 27 **a)** $(7 - 4{,}8) \cdot 20{,}2 - 31{,}44 = 2{,}2 \cdot 20{,}2 - 31{,}44$
$= 44{,}44 - 31{,}44 = \underline{\underline{13}}$

b) $12{,}2 + 2{,}5 \cdot 3 - 1{,}2 \cdot 2{,}6 = 12{,}2 + 7{,}5 - 3{,}12$
$= 19{,}7 - 3{,}12 = \underline{\underline{16{,}58}}$

Auch für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen gilt:
- Was in Klammern steht, zuerst berechnen.
- Erst Produkte bzw. Quotienten und dann Summen bzw. Differenzen berechnen.

● 28 Berechne folgende Produkte!

a) $\frac{7}{3} \cdot 1$ b) $0{,}27 \cdot 1{,}0$ c) $0{,}89 \cdot 0$ d) $\frac{48}{7} \cdot \frac{2}{4} - \frac{48}{7} \cdot \frac{1}{2}$ e) $1 \cdot 0{,}77$

► 12

Für jede gebrochene Zahl a gilt:
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ und $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Aufgaben

1. Berechne!
a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ d) $\frac{8}{51} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{0}{31}$

2.↑ Berechne!
a) $0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8$ c) $81{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 4{,}5$ e) $0{,}1 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}001$
b) $1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1$ d) $0{,}2 \cdot 2{,}0 \cdot 0{,}02$ f) $17{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}04$

3.↑ a) $0{,}2 \cdot 1{,}4 \cdot \frac{5}{7}$ c) $\frac{2}{3} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{6}{5}$ e) $0{,}5^3$
b) $\frac{1}{2} \cdot 2{,}4 \cdot \frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{5} \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}5$ f) $0{,}02^2$

4.↑ Mache nur einen Überschlag!
a) $2{,}8 \cdot 4{,}7 \cdot 6{,}3$ c) $26{,}3 \cdot 0{,}076 \cdot 7{,}2$ e) $7{,}3 \cdot 0{,}064 \cdot 4{,}7$
b) $0{,}46 \cdot 5{,}5 \cdot 9{,}7$ d) $5{,}3 \cdot 0{,}0036 \cdot 7{,}3$ f) $0{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}03$

5. Berechne das Ergebnis auf zwei Wegen!
a) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{11}{13} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right)$ c) $\frac{8}{11} \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{8}\right)$ d) $\frac{17}{91} \cdot \left(\frac{12}{30} - \frac{4}{10}\right)$

Berechne und kürze soweit wie möglich!

6.↑ a) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) \cdot \frac{5}{3}$ c) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}$ e) $\left(\frac{11}{13} - \frac{11}{13}\right) \cdot 5\frac{1}{3}$ g) $\frac{5}{3} \cdot 4 - \frac{7}{4}$
b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{3}$ d) $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{18}{13}$ f) $\left(3\frac{2}{5} - \frac{8}{15}\right) \cdot \frac{15}{43}$ h) $\frac{5}{2} \cdot \frac{11}{5} - \frac{5}{11}$

7.↑ a) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right)$ e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2}$
b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{7} \cdot \frac{21}{8} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$ f) $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

8. a) $\frac{3}{10} + 0{,}7 \cdot 0{,}5$ b) $1{,}2 - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2}$ c) $\left(\frac{3}{10} + 0{,}7\right) \cdot 0{,}5$ d) $\left(1{,}2 - \frac{6}{5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

9. Übertrage den folgenden Tabellenkopf in dein Heft! Setze dann für x die Zahlen
a) 0,1 b) 0,5 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$ e) 3,4 f) $\frac{141}{10}$ ein und rechne!

x	$633 \cdot x + 637 \cdot x$	$583 \cdot x - 283 \cdot x$	$2{,}3 \cdot x + x$

Berechne!

10.↑ a) $0{,}18 \cdot (8{,}5 + 163{,}48) - 10{,}63$ c) $19{,}5 + 7{,}5 \cdot (4{,}73 + 2{,}27)$
b) $45{,}41 - 5{,}41 \cdot (2{,}8 + 2{,}27)$ d) $12{,}5 - 3{,}5 \cdot (6{,}35 - 2{,}31)$

11.↑ a) $2{,}1 \cdot 7{,}6 + 3{,}9 \cdot 7{,}6$ d) $\left(\frac{7}{3} - \frac{14}{12}\right) \cdot \frac{3}{7}$ f) $2 + \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4}$
b) $\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{12}$ e) $(0{,}4 + 0{,}03) \cdot 0{,}6$ g) $2{,}4 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 + 3 \cdot 1{,}5$
c) $6{,}5 \cdot 8{,}2 - 3{,}5 \cdot 8{,}2$

12. Übertrage die Tabelle in dein Heft und fülle sie aus! Was stellst du fest?

a	b	$a \cdot b$
27,4	9,8	
$2 \cdot 27{,}4$ 27,4	9,8 $2 \cdot 9{,}8$	
$3 \cdot 27{,}4$ 27,4	9,8 $3 \cdot 9{,}8$	

13. Wie groß ist
a) das 2,9fache von 21,55,
b) das 9,2fache der Summe von 4,21 und 6,79,
c) die Differenz von $27{,}5 \cdot 8{,}9$ und $6{,}6 \cdot 7{,}2$?

14. Berechne $4{,}7 \cdot x - 2{,}5 \cdot y$ für:
a) $x = 2{,}5;\ y = 2{,}7$,
b) $x = 2{,}5;\ y = 4{,}7$,
c) $x = 1{,}2;\ y = 5$!

15. Löse folgende Gleichungen!
a) $4 \cdot x + 4 \cdot x = 400$ b) $\frac{1}{2} \cdot x + 0{,}5 \cdot x = 12\frac{1}{2}$

16. Für welche x gilt:
a) $x \cdot x = 0{,}25$, b) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{49}$, c) $x \cdot x \cdot x = 0{,}001$, d) $x \cdot x \cdot x = 1$?

17. Stelle ohne zu rechnen fest, welches der beiden Produkte jeweils größer ist!
a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{6}$ und $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6}$ c) $3{,}5 \cdot 0{,}03$ und $0{,}03 \cdot 3{,}52$
b) $\frac{10}{3} \cdot \frac{7}{6}$ und $\frac{7}{9} \cdot \frac{5}{2}$ d) $2{,}6 \cdot 0{,}008$ und $2{,}58 \cdot 0{,}0075$

18.* Setze Klammern so, daß das Ergebnis richtig ist!
a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{15} - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{2}{15}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} - \frac{1}{3} = 0$ d) $0{,}2 \cdot 12 - 3{,}8 = 1{,}64$

Zusammenfassung

Multiplikation gebrochener Zahlen	
I Es treten nur gemeine Brüche auf 1. Zähler der Brüche multiplizieren 2. Nenner der Brüche multiplizieren	$\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{8}{63}}}$
II Es treten nur Dezimalbrüche auf 1. Multiplizieren wie natürliche Zahlen 2. Komma im Ergebnis so setzen, daß das Produkt so viel Dezimalstellen hat, wie beide Faktoren zusammen	$1{,}52 \cdot 47{,}3$ *Ü.*: $2 \cdot 50 = 100$ *Nebenrechnung:* 1,52 · 47,3 608 1064 456 71,896 $1{,}52 \cdot 47{,}3 = \underline{\underline{71{,}896}}$
III Es treten sowohl gemeine als auch Dezimalbrüche auf 1. Umwandeln, daß nur eine Form auftritt 2. Produkt nach I oder II berechnen	$0{,}75 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$ $1{,}11 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}11 \cdot 0{,}5 = \underline{\underline{0{,}555}}$
Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist immer ausführbar. Zu je zwei gebrochenen Zahlen gibt es genau eine gebrochene Zahl, die deren Produkt ist. Es gelten das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz.	

12 Division gebrochener Zahlen

● 29 Löse folgende Divisionsaufgaben!
a) $255:5$ **b)** $27:4$ **c)** $32:8$ **d)** $8:3$ **e)** $9:15$

● 30 Es werden 3 Äpfel auf 4 Kinder gleichmäßig verteilt. Wieviel bekommt jedes Kind?

● 31 Löse folgende Gleichungen!
a) $\frac{1}{7} \cdot x = 1$ **b)** $\frac{2}{3} \cdot y = 1$ **c)** $3 \cdot t = 1$ **d)** $0 \cdot z = 1$

▸ 13 **DEFINITION:** $\frac{b}{a}$ **heißt die zu** $\frac{a}{b}$ **reziproke Zahl**[1] **oder das Reziproke von** $\frac{a}{b}$ **(**$a \neq 0$; $b \neq 0$**).**

Man sagt auch:

$\frac{b}{a}$ ist das **Reziproke von** $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$) und $\frac{a}{b}$ ist das Reziproke von $\frac{b}{a}$ ($b \neq 0$).

[1] Reziprok stammt von dem lateinischen Wort „reciprocus", was so viel wie „wechselweise" bedeutet.

Beim Rechnen mit dem Reziproken ist beachtenswert:

(1) Das Produkt einer beliebigen (von 0 verschiedenen) gebrochenen Zahl und der zu ihr reziproken Zahl ist 1.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$$

(2) Multipliziert man eine beliebige Zahl x zuerst mit $\frac{a}{b}$ und dann mit $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0,$ $b \neq 0)$, so erhält man wieder x.

$$\left(x \cdot \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{b}{a} = x \cdot \left(\frac{a \cdot b}{b \cdot a}\right) = x \cdot 1 = x$$

Wie bei den natürlichen Zahlen soll auch bei den gebrochenen Zahlen die Division die Umkehrung der Multiplikation sein.

Die Aufgabe

$$\boxed{\frac{8}{15} : \frac{4}{3} = \frac{x}{y}}$$

zu lösen bedeutet, eine gebrochene Zahl $\frac{x}{y}$ zu finden, so daß gilt:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}, \quad \frac{x \cdot 4}{y \cdot 3} = \frac{8}{15}.$$

Da $2 \cdot 4 = 8$ und $5 \cdot 3 = 15$, können wir in diesem Beispiel die Lösung der Divisionsaufgabe angeben:

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}, \text{ denn } \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}.$$

Wie kann aber die Aufgabe

$$\boxed{\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{x}{y}}$$

gelöst werden? Wir müssen eine gebrochene Zahl $\frac{x}{y}$ finden, für die gilt:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{3}{4} = \frac{x \cdot 3}{y \cdot 4} = \frac{2}{5}.$$

Da 2 kein Vielfaches von 3 und 5 kein Vielfaches von 4 ist, muß $\frac{x}{y}$ so beschaffen sein, daß sich beim Multiplizieren mit $\frac{3}{4}$ die 3 und die 4 kürzen lassen und $\frac{2}{5}$ stehen bleibt.

Das ist erfüllt bei:

$$\frac{x}{y} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3}, \text{ denn } \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{5 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{2}{5}.$$

Also ist $\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$ Lösung der Divisionsaufgabe $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$. Damit gilt:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}.$$

● **32** Schau dir die hervorgehobenen Zahlen genau an! Welche Beziehung besteht zwischen ihnen?

Allgemein wird festgelegt:

▶ 14

> **Zwei gebrochene Zahlen als gemeine Brüche werden dividiert, indem man:**
> **1. das Reziproke des Divisors bildet und**
> **2. den Dividenden mit diesem Reziproken multipliziert.**
> $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (c \neq 0)$$

■ 28 a) $\frac{3}{5} : \frac{7}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \underline{\underline{\frac{12}{35}}}$ *Kontrolle*: $\frac{12}{35} \cdot \frac{7}{4} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{5}{\cancel{35}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3} : \frac{3}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$ *Kontrolle*: $\frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3}$

c) $3 : \frac{2}{5} = 3 \cdot \frac{5}{2} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$ *Kontrolle*: $\frac{15}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 5} = 3$

d) $0 : \frac{4}{5} = 0 \cdot \frac{5}{4} = \underline{\underline{0}}$ *Kontrolle*: $0 \cdot \frac{4}{5} = \frac{0 \cdot 4}{5} = 0$

Für jede von Null verschiedene gebrochene Zahl a gilt: $0 : a = 0$.
Natürliche Zahlen können durch zugehörige Brüche ersetzt werden. Auch im Bereich der gebrochenen Zahlen hat die Division durch 0 keinen Sinn.

> $\frac{4}{7} : 0 = a$ zu lösen würde bedeuten, genau eine gebrochene Zahl a zu finden, für die gilt:
> $a \cdot 0 = \frac{4}{7}$.
>
> Eine solche gebrochene Zahl gibt es nicht. Für jede gebrochene Zahl a gilt: $a \cdot 0 = 0 \neq \frac{4}{7}$
> (↗ ▶ 12 S. 65).

● 33 Was weißt du bereits über 0 : 0?

In einem Mathematiklehrbuch der Sowjetunion wird den Schülern die *Einschränkung der Division* durch das nebenstehende Bild mitgeteilt (*делить* – dividieren).

Bild B 24 „делить нельзя!" Eine Abbildung aus einem sowjetischen Lehrbuch

Wir wissen jetzt:
- Bis auf 0 hat jede gebrochene Zahl genau ein Reziprokes.
- Zwei beliebige gebrochene Zahlen haben genau ein Produkt.

Also:

> Zwei beliebige gebrochene Zahlen haben stets genau eine gebrochene Zahl als Quotient, sofern der Divisor verschieden von Null ist.

Vor dem Berechnen eines Quotienten kürzen wir soweit wie möglich. Gemischte Zahlen werden in unechte Brüche umgewandelt.

29 a) $\frac{2}{35} : \frac{4}{7} = \frac{2}{35} \cdot \frac{7}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{5}{\cancel{35}} \cdot \underset{2}{\cancel{4}}} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$ *Kontrolle:* $\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{10}} \cdot 7} = \frac{2}{35}$

b) $2\frac{2}{3} : \frac{5}{9} = \frac{8}{3} : \frac{5}{9} = \frac{8}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{5} = \underline{\underline{\frac{24}{5}}}$ *Kontrolle:* $\frac{24}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

30 $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9}\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} \cdot 2 = \frac{7}{9} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = \frac{7}{9} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{7}{9}}}$

34 Übertrage in dein Heft! Fülle aus!

x	y	$x : y$	$x : y < x$	$x : y > x$
2	3	$\frac{2}{3}$	ja	nein
2	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$			
$\frac{1}{2}$	2			

Wir erkennen: Bei der Division gebrochener Zahlen kann der Quotient *größer* sein als der Dividend.

35 Was kannst du über die gebrochene Zahl b sagen, wenn $a : b > a$?

Aufgaben

Berechne und kontrolliere jeweils das Ergebnis!

1.↑ a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6} : \frac{11}{12}$ c) $\frac{11}{12} : \frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ e) $\frac{0}{56} : \frac{18}{31}$

2.↑ a) $\frac{1}{5} : \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{8} : \frac{9}{12}$ c) $\frac{9}{12} : \frac{1}{8}$ d) $\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$ e) $\frac{25}{55} : \frac{65}{77}$

3.↑ a) $\frac{45}{23} : \frac{9}{46}$ b) $\frac{0}{4} : \frac{3}{8}$ c) $\frac{63}{54} : \frac{18}{21}$ d) $\frac{112}{77} : \frac{28}{33}$ e) $\frac{63}{56} : \frac{36}{32}$

4.↑ a) $4\frac{3}{5} : \frac{46}{15}$ b) $2\frac{3}{4} : \frac{22}{7}$ c) $\frac{33}{5} : \frac{22}{10}$ d) $\frac{2}{5} : \frac{8}{5}$ e) $\frac{5}{3} : 2\frac{2}{9}$

5.↑ a) $\frac{5}{3} : 6$ b) $\frac{2}{9} : 14$ c) $4 : \frac{8}{9}$ d) $15 : \frac{6}{7}$ e) $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$

6.↑ a) $\frac{7}{9} : \frac{5}{8}$ b) $\frac{12}{7} : \frac{9}{14}$ c) $\frac{15}{2} : \frac{8}{5}$ d) $0 : \frac{3}{2}$

7. a) Dividiere 12 der Reihe nach durch 12; 8; 6; 4; 3; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{12}$!

b) Berechne $\frac{1}{2}$ von 12 $\left(\text{und weiter } \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{8} \text{ von } 12\right)$!

8. Welche Zahl muß für x eingesetzt werden, damit eine wahre Aussage entsteht?

a) $\frac{4}{5} : x = \frac{2}{5}$ b) $\frac{10}{17} : x = \frac{5}{17}$ c) $\frac{6}{11} : x = \frac{2}{55}$ d) $\frac{3}{4} : x = \frac{1}{16}$

e) $x : \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$ f) $x : 5 = \frac{2}{11}$ g) $x : \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$ h) $x : 4 = \frac{1}{7}$

9. Für welche natürlichen Zahlen n sind folgende Gleichungen wahre Aussagen?

a) $\frac{2}{3} : \frac{n}{5} = \frac{10}{21}$ b) $\frac{5}{4} : \frac{3}{n} = \frac{25}{12}$ c)* $\frac{n}{10} : \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$ d)* $\frac{4}{n} : \frac{5}{21} = \frac{13}{5}$

10. Löse folgende Gleichungen!

a) $x : \frac{2}{5} = \frac{15}{4}$ b) $\frac{2}{3} : x = \frac{2}{3}$ c) $\frac{x}{2} : \frac{7}{5} = \frac{15}{14}$ d) $x : x = 1$

11. Fülle die Tabelle aus!

a) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ c) $x = \frac{11}{5}$, $y = \frac{7}{3}$ e) $x = \frac{7}{20}$, $y = \frac{4}{15}$

b) $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{4}{5}$ d) $x = \frac{3}{8}$, $x = \frac{5}{12}$ f) $x = \frac{5}{12}$, $y = \frac{3}{8}$!

x	y	$x+y$	$x-y$	$y-x$	$x \cdot y$	$x : y$	$y : x$	y^2	$x : y \lesseqgtr y : x$

12. Überprüfe, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind! Begründe!

a) Zu jeder gebrochenen Zahl x gibt es eine gebrochene Zahl y mit $x \cdot y = 1$.

b) Zu jeder von Null verschiedenen gebrochenen Zahl x gibt es eine gebrochene Zahl y mit $x \cdot y = 1$.

c) Zu jeder natürlichen Zahl n $(n > 0)$ gibt es eine natürliche Zahl m mit $n \cdot m = 1$.

13. Gib je zwei gebrochene Zahlen an, für die gilt:

a) $\frac{1}{2} : x > \frac{1}{2}$, b) $7 : t > 7$, c) $\frac{3}{2} : z > \frac{3}{2}$, d) $z : \frac{1}{2} > z$,

e) $\frac{3}{4} : x < \frac{3}{4}$, f) $\frac{7}{5} : x > \frac{7}{5}$, g) $x : \frac{7}{5} < x$, h)* $z : \frac{3}{2} > z$!

14. Überprüfe!

a) Es gibt gebrochene Zahlen x und y, so daß gilt: $x : y > x$.

b) Es gibt natürliche Zahlen n und m, so daß gilt: $n : m > n$.

13 Bruchstrich und Divisionszeichen

Im Bereich der natürlichen Zahlen sind viele Divisionsaufgaben, wie z. B. die Aufgabe 27 : 4, nicht lösbar. Im Bereich der gebrochenen Zahlen sind auch diese Aufgaben lösbar.

■ **31** **a)** $27:4=\frac{27}{1}:\frac{4}{1}=\frac{27}{1}\cdot\frac{1}{4}=\underline{\underline{\frac{27}{4}}}$ **b)** $8:3=\frac{8}{1}:\frac{3}{1}=\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{8}{3}}}$

c) Beachte, daß auch $35:7=\frac{35}{1}:\frac{7}{1}=\frac{35}{1}\cdot\frac{1}{7}=\underline{\underline{5}}$ gilt!

● **36** Stelle für 32 : 8, 205 : 50, 7 : 14, 21 : 3, $\frac{42}{4}:\frac{3}{2}$ eine Tabelle nach folgendem Muster auf!

Aufgabe	Lösung in N	Lösung in Q_+

Was stellst du fest?

Im Beispiel B 31 haben wir gesehen, wie man jede Division natürlicher Zahlen (außer durch Null) in Q_+ ausführen kann. Andererseits können wir jede gebrochene Zahl als Quotient natürlicher Zahlen schreiben.

▶ **15** **Für alle natürlichen Zahlen a und b mit $b \neq 0$ gilt: $a:b=\frac{a}{b}$.**

Da wir einen Bruch beliebig erweitern oder kürzen können, dürfen wir auch in einem Quotienten natürlicher Zahlen den Dividenden und den Divisor mit derselben (von 0 verschiedenen) Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl (außer durch 0) dividieren, ohne daß sich das Ergebnis ändert.

■ **32** **a)** $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{20}{30}$ und $2:3=4:6=6:9=20:30$

b) $\frac{24}{6}=\frac{12}{3}=\frac{4}{1}$ und $24:6=12:3=4:1=4$

c) $7:4=14:8=70:40$

Manchmal schreibt man auch Divisionsaufgaben mit gebrochenen Zahlen in Form eines Bruchs.

■ **33** **a)** $\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{2}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right):2=\left(\frac{3+4}{12}\right):2=\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{7}{24}}}$

b) $\frac{1{,}4}{0{,}7}=1{,}4:0{,}7=14:7=\underline{\underline{2}}$

c) $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{4}{8}}=\frac{7}{3}:\frac{4}{8}=\frac{7}{3}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}=\underline{\underline{\frac{14}{3}}}$ **d)** $\frac{2}{\frac{1}{3}}=2:\frac{1}{3}=2\cdot\frac{3}{1}=\underline{\underline{6}}$

▶ 16 **Für alle gebrochenen Zahlen x und y mit $y \neq 0$ gilt: $\frac{x}{y} = x : y$.**

Ist eine (oder sind beide) der gebrochenen Zahlen x und y als gemeiner Bruch gegeben, wie im Beispiel B 33, so spricht man von einem **Doppelbruch**. Bei Doppelbrüchen muß der Bruchstrich, der x von y trennt, deutlich erkennbar sein.

● 37 Berechne und vergleiche die nebenstehenden Brüche miteinander! $\dfrac{\frac{7}{2}}{4}$ und $\dfrac{7}{\frac{2}{4}}$

Man erweitert einen Bruch $\frac{x}{y}$, bei dem x oder y (oder beide) gebrochene Zahlen sind, genauso wie Brüche, bei denen x und y natürliche Zahlen sind.

■ 34 a) $\frac{7}{2} : \frac{14}{3} \overset{:7}{=} \frac{1}{2} : \frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{2} : \frac{2}{3} \overset{\cdot 2}{=} 5 : \frac{4}{3}$

c) $13{,}753 : 2{,}145 = 137{,}53 : 21{,}45 = 1375{,}3 : 214{,}5 = 13753 : 2145$

● 38 Berechne $\frac{a+b}{2}$ für

a) $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{4}$ b) $a = 5$; $b = \frac{6}{5}$ c) $a = 3$; $b = 4$

d) $a = 6$; $b = 3$ e) $a = 5$; $b = 3\frac{1}{2}$!

Markiere auf einem Zahlenstrahl jeweils den Punkt, der $\frac{a+b}{2}$ entspricht (↗ Bild B 25)!

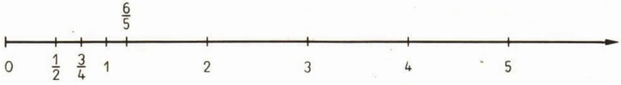


Bild B 25

Für zwei beliebige gebrochene Zahlen a und b mit $a \neq b$ gilt stets:

$\frac{a+b}{2}$ liegt zwischen a und b.

Ist $a < b$, so gilt

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Damit kennen wir eine weitere Möglichkeit, um zu gegebenen gebrochenen Zahlen a und b gebrochene Zahlen zu bestimmen, die zwischen a und b liegen. (vgl. LE 3)

Wir wissen bereits, daß $\frac{a+b}{2}$ das **arithmetische Mittel** der Zahlen a und b ist.

Aufgaben

1. Berechne!

a) $3 : \frac{4}{5}$ c) $3 : \frac{14}{15}$ e) $8 : \frac{7}{9}$ g) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ i) $\frac{1}{4} : \frac{3}{8}$ l) $\frac{2}{3} : 2$

b) $9 : \frac{2}{3}$ d) $2 : \frac{3}{8}$ f) $5 : \frac{3}{4}$ h) $\frac{3}{8} : \frac{1}{4}$ k) $\frac{1}{2} : 2$ m) $\frac{4}{5} : 2$

2. Berechne aus den folgenden Zahlenangaben nacheinander $x \cdot y$, $x \cdot z$, $x \cdot y \cdot z$, $x : y$, $x : z$, $(x + y) \cdot z$, $(x - y) \cdot z$, $(x + y) : z$, $x + y \cdot z$, $x + y : z$!

a) $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{7}{8}$, $z = \frac{1}{3}$ c) $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{5}{8}$, $z = \frac{2}{3}$

b) $x = \frac{7}{12}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{2}{15}$ d) $x = \frac{4}{9}$, $y = \frac{5}{36}$, $z = \frac{7}{18}$

3. Berechne!

a) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{\frac{15}{16}}{\frac{16}{15}}$ c) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}$ d) $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}$ e) $\dfrac{\frac{3}{4}}{2}$ f) $\dfrac{4}{\frac{7}{8}}$ g) $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$ h) $\dfrac{\frac{3}{2}}{1}$

4. Karin behauptet: „Es gibt gebrochene Zahlen a und b, für die $a : b = b : a$ ist.“ Hat Karin recht? Begründe!

5. Der Quotient zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{3}{4}$. Der Dividend sei

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{2}{3}$, d) $\frac{4}{3}$, e) $\frac{5}{8}$, f) 4, g) 9.

Wie groß ist der Divisor?

6. Der Quotient zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{7}{8}$. Der Divisor sei

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{2}{3}$, d) $\frac{7}{4}$, e) $\frac{14}{5}$, f) 14, g) 8.

Wie groß ist der Dividend?

7. Forme die Brüche durch Erweitern und Kürzen so um, daß Zähler und Nenner keine Dezimalbrüche und zueinander teilerfremd sind!

a) $\frac{2{,}4}{0{,}8}$ c) $\frac{13{,}6}{0{,}4}$ e) $\frac{0{,}4}{0{,}2}$ g) $\frac{12}{1{,}2}$ i) $\frac{0{,}7}{3{,}5}$

b) $\frac{9{,}6}{1{,}2}$ d) $\frac{0{,}25}{0{,}5}$ f) $\frac{1{,}8}{0{,}09}$ h) $\frac{36}{0{,}12}$ k) $\frac{3}{12{,}6}$

8. Gib für jede der folgenden gebrochenen Zahlen zwei Multiplikations- und zwei Divisionsaufgaben an, bei denen diese Zahl das Ergebnis ist!

a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{3}{11}$ c) $\frac{4}{21}$ d) 9 e) $\frac{1}{2}$

Berechne und kürze soweit wie möglich!

9.↑ a) $\frac{3}{4} : 6$ b) $6 : \frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{5} : 2$ d) $5 : \frac{1}{2}$ e) $20 : \frac{4}{5}$ f) $\frac{1}{3} : 4$

10.↑ a) $\frac{5}{8} \cdot 6 \cdot \frac{4}{15}$ b) $\left(\frac{5}{8} : \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{12}$ c) $\frac{5}{8} : \left(\frac{3}{4} : \frac{5}{12}\right)$ d) $\frac{5}{12} \cdot 8 \cdot \frac{9}{25}$

11.↑ a) $\left(\frac{3}{4} : 5\right) : \frac{9}{10}$ b) $\left(\frac{4}{7} : \frac{8}{3}\right) : \frac{7}{6}$ c) $\frac{4}{7} : \left(\frac{8}{3} : \frac{7}{6}\right)$ d) $24 : \left(\frac{6}{5} : \frac{4}{3}\right)$

12.↑ a) $\frac{5}{3} : \frac{4}{7} \cdot \frac{21}{20}$ b) $\left(\frac{5}{6} : 7\right) : \frac{20}{21}$ c) $35 : \left(\frac{9}{4} : \frac{8}{3}\right)$ d) $\left(36 : \frac{9}{4}\right) : \frac{8}{3}$

13.↑ a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \frac{7}{12}$ b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{6}$
c) $\left(\frac{4}{9} + \frac{5}{12}\right) : \frac{62}{81}$ d) $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right) : \frac{13}{18}$

14.↑ a) $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{19}{25}}$ b) $\dfrac{\frac{3}{5} + \frac{1}{4}}{\frac{17}{12}}$ c) $\dfrac{\frac{4}{7} + \frac{1}{14}}{\frac{9}{14}}$ d) $\dfrac{\frac{7}{5} + \frac{3}{4}}{\frac{86}{75}}$

15.↑ a) $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) : \frac{2}{15}$ b) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) : \frac{3}{25}$
c) $\left(\frac{8}{13} - \frac{2}{3}\right) : \frac{39}{26}$ d) $\left(\frac{13}{2} - 6\right) : \frac{17}{19}$

14 Division von Dezimalbrüchen

● 39 Dividiere a) $\frac{3}{2} : \frac{5}{6}$, b) $\frac{7}{8} : \frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, d) 0,5 : 0,25!

Wollen wir Dezimalbrüche dividieren, formen wir diese Dezimalbrüche in Zehnerbrüche um und wenden die Regel für die Division gemeiner Brüche an.

Wir lösen die Aufgabe 3,78 : 1,8.

$$3{,}78 : 1{,}8 = \frac{378}{100} : \frac{18}{10} = \frac{378}{100} \cdot \frac{10}{18} = \frac{378 \cdot 10}{100 \cdot 18} = \underline{\underline{\frac{21}{10} = 2{,}1}}$$

Wir lösen die Aufgabe 3,7 : 0,9.

$$3{,}7 : 0{,}9 = \frac{37}{10} : \frac{9}{10} = \frac{37}{10} \cdot \frac{10}{9} = \underline{\underline{\frac{37}{9}}}.$$

Dieses Ergebnis können wir noch nicht als Dezimalbruch schreiben.

Läßt sich der Quotient wie bei der Aufgabe 3,78 : 1,8 als Zehnerbruch und damit auch als Dezimalbruch darstellen, so ist ein bequemerer Lösungsweg möglich.

Wir lösen die Aufgabe 17,5 : 4.

Überschlag: 16 : 4 = 4

Weg über gemeine Brüche

$$17{,}5 : 4 = \frac{175}{10} : 4 = \frac{175}{10 \cdot 4}$$

Wegen der 4 erweitern wir zunächst mit 100 und kürzen dann durch 4.

$$\frac{175}{10 \cdot 4} = \frac{175 \cdot 100}{10 \cdot 4 \cdot 100} = \frac{17500}{4 \cdot 1000} = \frac{4375}{1000} = \underline{\underline{4{,}375}}$$

Bequemer Weg (schriftliche Rechnung)

ohne Komma

17500 : 4 = 4375
 15
  30
   20
    0

mit Komma

17,500 : 4 = 4,375
 1 5
  30
   20
    0

Wir können die Division 17,5 : 4 auch ausführen, ohne den Dezimalbruch zu erweitern. Es reicht, wenn wir die Nullen bei den entsprechenden Teildivisionen schreiben.

■ **35** **a)** 17,5 : 4

Überschlag: 16 : 4 = 4

17,5 : 4 = 4,375
 1 5
  30 ←
   20 ←
    0

Also: 17,5 : 4 = $\underline{\underline{4{,}375}}$

b) 13 : 8

Überschlag: 16 : 8 = 2

13 : 8 = 1,625
 50 ←
  20 ←
   40 ←
    0

Also: $\frac{13}{8} = \underline{\underline{1{,}625}}$

Ist auch der Divisor ein Dezimalbruch, so können wir genauso vorgehen. Vor dem Rechnen beseitigen wir das Komma im Divisor, indem wir den Quotienten mit 10, 100, 1000, ... erweitern.

■ **36** **a)** 5,25 : 1,5

Überschlag: 6 : 2 = 3

Wir erweitern den Quotienten mit 10:

5,25 : 1,5 = 52,5 : 15.

Jetzt können wir wie im Beispiel 35a) weiterrechnen:

52,5 : 15 = $\underline{\underline{3{,}5}}$
 7 5
   0

b) 4,97 : 12,425

Überschlag: 5 : 10 = 0,5

Wir multiplizieren den Dividenden und den Divisor mit 1000 und rechnen dann weiter wie im Beispiel 35b):

4,97 : 12,425 = 4970 : 12425

4970 : 12425 = $\underline{\underline{0{,}4}}$
49700
    0

▶ 17

> **Bei der Division von Dezimalbrüchen gehen wir folgendermaßen vor:**
> **1. Überschlag machen;**
> **2. das Komma im Divisor beseitigen (Dividenden und Divisor mit 10, 100, 1000, ... multiplizieren);**
> **3. die Division wie mit natürlichen Zahlen ausführen;**
> **4. im Quotienten ein Komma setzen, wenn die Einer des Dividenden dividiert worden sind.**

Besonders einfach ist die Division durch 10, 100, 1000 usw.

$1721{,}8 : 10 = 172{,}18$
$1721{,}8 : 100 = 17{,}218$
$1721{,}8 : 1000 = 1{,}7218$

Man dividiert einen Dezimalbruch durch 10, 100, 1000 usw., indem man das Komma in diesem Dezimalbruch um 1, 2, 3 usw. Stellen nach links versetzt.
Treten Dezimalbrüche in Sachaufgaben auf, so müssen wir gerade bei Divisionsaufgaben überlegen, was für eine Zahl das Ergebnis sein muß.

■ 37 Aus einem 3,0 cm breiten rechteckigen Materialrest aus Blech sollen Scheiben mit einem Durchmesser von 2,6 cm ausgestanzt werden. Dabei soll zwischen den Scheiben ein 2 mm breiter Steg bleiben (↗ Bild B 26).

a) Kann man aus einem 1,89 m langen Streifen 60 Scheiben ausstanzen?
Hier reicht ein grober Überschlag aus, um diese Frage zu beantworten.
$2{,}6\text{ cm} + 0{,}2\text{ cm} = 2{,}8\text{ cm} \approx 3\text{ cm}$
und $60 \cdot 3\text{ cm} = 180\text{ cm} < 189\text{ cm}$.
Es können also 60 Scheiben hergestellt werden.

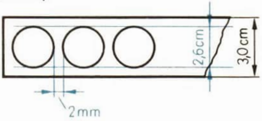


Bild B 26

b) Wieviel Scheiben kann man aus diesem Stück höchstens herstellen? Dazu müssen wir rechnen:
$x \cdot 2{,}8\text{ cm} = 189\text{ cm}$, $x = 189\text{ cm} : 2{,}8\text{ cm}$
Nebenrechnung: $1890 : 28 = 67{,}5$
Es können höchstens 67 Scheiben hergestellt werden.

● 40 Begründe, warum nicht auf 68 gerundet wurde!

Aufgaben

1. Nenne die kleinste Zehnerpotenz, die Vielfaches von 4; 5; 20; 8; 40; 9; 10; 15 ist!

Berechne!

2.↑ **a)** $0{,}4 : 0{,}2$ **b)** $0{,}7 : 0{,}35$ **c)** $13{,}2 : 3{,}3$ **d)** $11{,}4 : 0{,}4$ **e)** $7{,}5 : 0{,}5$

3.↑ **a)** $0{,}84 : 1{,}2$ **b)** $0{,}77 : 7{,}7$ **c)** $0{,}84 : 0{,}012$ **d)** $0{,}28 : 0{,}07$ **e)** $0{,}0054 : 0{,}72$

4.↑ **a)** $1{,}35 : 4{,}5$ **b)** $2{,}88 : 1{,}2$ **c)** $3{,}45 : 1{,}5$ **d)** $0{,}48 : 0{,}016$ **e)** $4{,}8 : 0{,}016$

5. Ermittle im Kopf!

a) 1,8 : 0,2 **b)** 0,36 : 0,18 **c)** 3,9 : 3 **d)** 0,25 : 2,5

6. Mache einen Überschlag!

a) 48,9 : 15,7 **b)** 36,48 : 8,25 **c)** 2,75 : 0,64 **d)** 317,4 : 0,972

Berechne!

7.↑ **a)** 2,64 : 2,4 **c)** 0,546 : 0,42 **e)** 6,96 : 1,2 **g)** 748,8 : 3,6
b) 15,3 : 0,17 **d)** 11,25 : 1,5 **f)** 8,903 : 0,29 **h)** 1,92 : 1,2

8.↑ **a)** 15,4 : 0,22 **d)** 7,2 : 0,012 **g)** 720 : 1200 **k)** 73,5 : 1,2
b) 21,06 : 2,7 **e)** 381,6 : 0,24 **h)** 0,84 : 0,084 **l)** 0,735 : 12
c) 7,48 : 34 **f)** 50,82 : 56 **i)** 7,35 : 0,12 **m)** 7350 : 0,12

9. **a)** Welche Zahl ist um 2 größer als ihre Hälfte?
b) Welche Zahl ist um 1,5 größer als ein Drittel dieser Zahl?

10.* Berechne!

a) $\dfrac{8,4 \cdot 1,2}{10,3 + 1,7}$ **b)** $\dfrac{2,5 \cdot 4,7}{9,64 + 0,36}$ **c)** $\dfrac{\frac{1,4}{58}}{\frac{1,8}{0,29}}$ **d)** $\dfrac{\frac{2,5}{12}}{\frac{7,5}{48}}$

11. Berechne jeweils das arithmetische Mittel!

a) 12; 13 **c)** 12; 13; 14; 15 **e)** 0,42; 0,24; 0,35; 0,53
b) 17; 18 **d)** 17; 18; 19; 20 **f)** 18,7; 18,8; 18,6; 18,7; 18,7

12. **a)** Auf beiden Seiten einer 930 m langen Straße sollen im Abstand von 7,5 m Bäume gepflanzt werden. Wieviel Bäume werden benötigt?
b) In welchem Abstand müssen die Bäume gepflanzt werden, wenn 126 Bäume zur Verfügung stehen?

Bild B 27

13. Masse und Volumen eines Körpers wurden mit 11,5 g bzw. 5,2 cm³ bestimmt. Berechne die Dichte dieses Körpers! Aus welchem Material könnte der Körper bestehen?

14. Aus welchem Metall kann ein 8,8 cm³ großer Würfel bestehen, der eine Masse von 74,8 g hat?

Zusammenfassung

Division gebrochener Zahlen	
I Es treten nur gemeine Brüche auf Den Dividenden mit dem Reziproken des Divisors multiplizieren	$\frac{7}{8} : \frac{5}{6} = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7 \cdot 6}{8 \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{21}{20}}}$
II Es treten nur Dezimalbrüche auf 1. Durch Erweitern des Quotienten mit 10, 100, ... das Komma im Divisor beseitigen 2. Dividieren wie natürliche Zahlen 3. Im Quotienten das Komma setzen, wenn Einer des Dividenden dividiert sind Eine weitere Möglichkeit 1. Umwandeln der Dezimalbrüche in Zehnerbrüche 2. Nach Regel I dividieren	$5{,}25 : 1{,}5 = 52{,}5 : 15$ $52{,}5 : 15 = \underline{\underline{3{,}5}}$ $\underline{75}$ 0 $5{,}25 : 1{,}5 = \underline{\underline{3{,}5}}$ $3{,}7 : 0{,}9 = \frac{37}{10} : \frac{9}{10}$ $= \frac{37}{10} \cdot \frac{10}{9} = \underline{\underline{\frac{37}{9}}}$
Die Division gebrochener Zahlen – außer durch 0 – ist stets ausführbar. Die gebrochenen Zahlen bilden einen Zahlenbereich, in dem man uneingeschränkt addieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen die Division durch Null) kann.	

Komplexe Übungen

1. **a)** Zerlege $m = 45$ und $n = 42$ in Primfaktoren!
   b) Welche Zahlen sind gemeinsame Teiler von m und n?
   c) Gib für $m + n$ und $m - n$ alle Teiler an!
   d) Gib für $m \cdot n$ alle Teiler an, die Primzahlen sind!
   e) Nenne zwei Teiler von $m \cdot n$, die weder Teiler von m noch Teiler von n sind!
   f) Gib das k. g. V. von m und n an!

2. Zwischen welchen benachbarten natürlichen Zahlen liegt:
   a) 9,97, **b)** 10,001, **c)** $\frac{12}{2}$, **d)** 37,5549, **e)** $\frac{7}{5}$, **f)** 0,8483, **g)** $\frac{7}{3}$?

3. **a)** Zeichne einen Zahlenstrahl! Trage auf ihm für folgende Brüche zugehörige Punkte ein!
   $\frac{1}{2}$; 0,75; $\frac{7}{4}$; $\frac{4}{8}$; 0,5; 1,25; $\frac{6}{8}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{6}; \frac{4}{12}; 0{,}5; \frac{6}{6}; \frac{14}{12}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; 0{,}25\right)$
   b) Wieviel verschiedene gebrochene Zahlen sind unter **a)** angegeben? Gib für jede dieser gebrochenen Zahlen einen weiteren gemeinen und einen Dezimalbruch an, der zu dieser Zahl gehört.
   c) Ordne diese Zahlen der Größe nach! Beginne mit der größten Zahl!

4. Setze für den Stern solche Ziffern ein, daß die entstehenden Zahlen durch 3 teilbar sind! Welche der Zahlen sind auch durch 9 teilbar?
a) ∗724 **b)** 5∗36 **c)** 111∗ **d)** 91∗8

5. Zerlege jede der folgenden Zahlen in ein Produkt mit drei gleichen Faktoren!
8; 27; 64; 125; 1000000

6. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrates, wenn sein Umfang **a)** 16 cm, **b)** 72 cm, **c)** 10 cm beträgt?

7.* Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks, bei dem die eine Seite um 3 cm länger ist als die andere und dessen Umfang
a) 14 cm, **b)** 26 cm, **c)** 20 cm beträgt?

8. Berechne!
a) $\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{188}{101}\right) \cdot \frac{5}{4}$ **b)** $\frac{9}{4} \cdot \left(2{,}89 \cdot \frac{4}{9}\right)$ **c)** $\left(\frac{4}{10} \cdot \frac{9}{8}\right) : \frac{9}{8}$ **d)** $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3}\right) : 0{,}5$

9.* **a)** Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist 13,05. Die eine Zahl ist um 4 größer als die andere. Um welche Zahlen handelt es sich?
b) Eine Zahl ist um 0,8 kleiner als eine andere. Das arithmetische Mittel dieser beiden Zahlen ist 2,7. Nenne die beiden Zahlen!

10. Gib jeweils alle natürlichen Zahlen an, für die gilt:
a) $1 < x < 15$ **b)** $x + 5 = 17$ **c)** $7 \leqq m \leqq 12$
d) $1095 < n \leqq 1100$ **e)** $15 - (7 - x) = 8$ **f)** $0 \leqq y < 7$
Veranschauliche die Lösungen von **a)**, **c)** und **f)** am Zahlenstrahl!

11.* Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 36 cm². Wieviel verschiedene Rechtecke mit diesem Flächeninhalt gibt es, wenn die Seitenlängen durch natürliche Zahlen angegeben werden? Welches hat den kleinsten Umfang?

12.* Wieviel verschiedene Rechtecke mit einem Umfang von 20 cm gibt es, wenn die Seitenlängen durch natürliche Zahlen angegeben werden? Welches hat den größten Flächeninhalt?

13. Ergänze folgende magische Quadrate so, daß die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale 3 beträgt!

a)

	$\frac{1}{3}$	
	1	
		$\frac{5}{21}$

b)

$\frac{74}{42}$		
$\frac{1}{7}$	1	

c)

	0,25	
	1	
0,5		

Wir suchen Zahlen, Größen und Figuren

14. Ich denke mir eine Zahl. Ihr fünfter Teil ist gleich dem Sechsfachen von $\frac{5}{3}$. Wie heißt diese Zahl?

15.* Wenn man eine Zahl durch 5, das Ergebnis dann durch 3 dividiert und dann 0,42 addiert, erhält man 1. Wie lautet diese Zahl?

16. Berechne aus den Angaben über die Innenwinkel eines Dreiecks ABC die fehlenden Winkelgrößen! Welche dieser Dreiecke sind gleichschenklig?

a) $\alpha = 38{,}5°;\ \beta = 70{,}7°$ **b)** $\alpha = 120°;\ \gamma = \frac{1}{2}\alpha$

c) $\beta = 70{,}8°;\ \gamma = \frac{1}{4}\alpha$ **d)** $\alpha = \beta = \gamma$

e) $\alpha = 20°;\ \alpha + \beta = \gamma$ **f*)** $\alpha = \beta;\ \gamma = \frac{1}{2}\alpha$

17. Schreibe mit Klammern! Berechne das Ergebnis!

a) Addiere zu 0,75 die Differenz von $\frac{4}{7}$ und $\frac{3}{8}$!

b) Subtrahiere 2,5 von der Differenz der Zahlen $\frac{7}{3}$ und $3\frac{1}{2}$!

c) Vermindere die Summe von $3\frac{1}{2}$ und $5\frac{3}{4}$ um 2,8!

d) Addiere die Summe und die Differenz von $\frac{4}{5}$ und 0,5!

18. Für welche gebrochenen Zahlen x entsteht eine wahre Aussage?

a) $\frac{3}{8} + x < 1$ **b)** $\frac{7}{4} + x = \frac{5}{5}$ **c)** $x - 0{,}7 = 0{,}9$

d) $x \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ **e)** $\frac{4}{7} : x = 1$ **f)** $\frac{5}{7} \cdot x < \frac{5}{7}$

19. Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm; Millimeterpapier) die Punkte $A\,(0{,}7;\ 1{,}2)$, $B\,(3{,}5;\ 1{,}8)$, $C\,(2{,}6;\ 3{,}9)$,
$P\,(2{,}5;\ 0{,}5)$, $Q\,(4{,}6;\ 1{,}7)$, $R\,(3{,}9;\ 6{,}4)$, $S\,(8{,}0;\ 2{,}3)$!

a) Ermittle das Bild des Dreiecks ABC bei der Abbildung, die sich ergibt, wenn nach der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ die Spiegelung an RS ausgeführt wird!
Gib die Eckpunkte des Bilddreiecks durch Zahlenpaare an! Ist das Bilddreieck zum Dreieck ABC kongruent? Begründe!

b) In dem gleichen Koordinatensystem sind die Punkte $D\,(5{,}4;\ 3{,}1)$, $E\,(7{,}0;\ 0{,}3)$, $F\,(8{,}4;\ 4{,}0)$, $G\,(8{,}5;\ 2{,}2)$, $H\,(9{,}1;\ 1{,}2)$ einzuzeichnen. Welches der Dreiecke DEF, DEG, DEH ist kongruent zum Dreieck ABC? Begründe!

Überlege und überprüfe!

20. **a)** Überprüfe, ob $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{2}$; 0,8 Lösungen der Ungleichungen $\frac{5}{2} + u - \frac{1}{3} < 2$ und $z + 1{,}7 - \frac{3}{5} < 2{,}1$ sind?

b) Gib für jede der Ungleichungen drei weitere gebrochene Zahlen an, die Lösung der Ungleichung sind!

c)* Beschreibe für jede der Ungleichungen alle gebrochenen Zahlen, die Lösung der jeweiligen Ungleichung sind! Nenne die kleinste (größte) Zahl, die die jeweilige Ungleichung erfüllt!

21. Die Länge zweier Stäbe wurde mit einem Lineal mit Millimetereinteilung gemessen. Die Länge des ersten Stabes liegt zwischen 13,2 und 13,3 cm und die Länge des zweiten Stabes zwischen 21,4 und 21,5 cm.
a) Wie lang sind beide Stäbe zusammen?
b) Wie groß ist der Längenunterschied zwischen ihnen höchstens, wie groß mindestens?

22. Gib mindestens drei gebrochene Zahlen x an, für die gilt:
a) $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ **c)** $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$ **e)** $\frac{25}{7} < x < \frac{24}{9}$
b) $\frac{7}{12} < x < \frac{8}{12}$ **d)** $\frac{15}{4} < x < \frac{9}{2}$ **f)** $2\frac{1}{2} < x < 2\frac{2}{3}$

23.* Es seien x und y gebrochene Zahlen, für die $x < y$ gilt.
a) Können $y + x$ und $y - x$ gleich groß sein?
b) Gib für x und y Zahlen an, so daß $x + y - \frac{5}{2}$ zwischen x und y (nicht zwischen x und y) liegt!

24.* Kann für gebrochene Zahlen x und y die Beziehung $x - y = y - x$ gelten?

25.* Setze für $\ast$ ein Rechenzeichen ein, so daß eine wahre Aussage entsteht!
a) $\frac{2}{3} \ast \frac{7}{8} = \frac{7}{12}$ **b)** $\frac{9}{32} \ast \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$ **c)** $3\frac{1}{5} \ast 1\frac{1}{4} = 4$

26. Welche Zahlen erhält man, wenn man zwei Brüche, die ein- und dieselbe gebrochene Zahl darstellen, dividiert?

27.* **a)** Wähle zwei Brüche aus der Menge $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots$!
Bilde aus ihnen einen neuen Bruch, indem du ihre Zähler und ihre Nenner einzeln addierst. Welche Zahl erhältst du? Prüfe zwei weitere Beispiele!
b) Versuche deine Vermutung zu beweisen (Distributivgesetz)!

28.* Es seien m und n natürliche Zahlen ($m \neq 0$, $n \neq 0$). Welche der folgenden Aussagen ist nicht wahr? Begründe!
a) Wenn m und n beide gerade sind, kann $\frac{m}{n}$ durch einen Bruch dargestellt werden, dessen Nenner kleiner ist als n.
b) Wenn m und n beide ungerade sind, kann $\frac{m}{n}$ durch einen Bruch dargestellt werden, dessen Nenner kleiner ist als n.
c) Wenn $\frac{m}{n} = \frac{3}{1}$, dann ist n ein Teiler von m.
d) Aus $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ folgt $m = 2$ und $n = 3$.
e) Wenn m und n durch ein- und dieselbe Primzahl teilbar sind, kann $\frac{m}{n}$ durch einen Bruch dargestellt werden, dessen Nenner kleiner ist als n.

Freizeit, Haus und Garten

29. Ein Buddelkasten ist 5,1 m lang, 3,3 m breit und hat 35 cm hohe Seitenwände. Er ist umgeben von einem 50 cm breiten Plattenweg.
    a) Die Seitenwände sollen innen und außen gestrichen werden. Wie groß ist die zu streichende Fläche?
    b) Wieviel Büchsen Farbe werden benötigt, wenn man mit dem Inhalt einer Büchse 5 bis 6 m^2 streichen kann?
    c) Auf den Seitenwänden werden Bretter angebracht, so daß rings um den Buddelkasten eine Sitzbank entsteht. Reichen dafür drei 5 m lange Bretter?
    d) Wieviel Kubikmeter Sand muß man anfahren lassen, um den Buddelkasten ganz (zu dreiviertel) zu füllen?
    e) Zeichne die Grundfläche des Buddelkastens im Maßstab 1 : 100!

30. Helmut sammelt an vier aufeinanderfolgenden Tagen Pilze. Am ersten Tag findet er 8 Pilze. An jedem der folgenden Tage findet er 1,5mal so viele Pilze wie am vorangegangenen Tag. Wie viele Pilze hat er an den vier Tagen insgesamt gefunden?

31. Für das Streichen eines 24,8 m^2 großen Fußbodens wurden 2,5 kg Farbe verbraucht. Wieviel Quadratmeter können mit 1 kg Farbe gestrichen werden?

32. Zwei Wanderer laufen einander von zwei Orten aus entgegen. Der erste legt die Entfernung zwischen den beiden Orten in 8, der zweite in 6 Stunden zurück. Um welchen Teil der gesamten Strecke nähern sie sich einander in einer Stunde?

33. Zwei Radfahrer starten von einem Ort aus gleichzeitig. Der erste erreicht das gemeinsame Ziel in 9, der zweite in 6 Stunden. Um welchen Teil der gesamten Strecke ist der zweite Radfahrer dem ersten nach einer Stunde voraus?

34. Wie viele Flaschen (0,75 l) werden benötigt, um 5,25 l Saft abzufüllen?

Aus der Schule

35. Zum Termin einer Betriebsbesichtigung ist ein Fünftel der Schüler der Klasse 6b krank und ein weiteres Viertel fehlt aus anderen Gründen. Die Klasse hatte sich das Ziel gestellt, daß mindestens die Hälfte der Schüler an der Besichtigung teilnimmt. Ist dieses Ziel erreicht?

36. Dieter gab auf einer Klassenfahrt erst die Hälfte von seinem Geld und dann ein Drittel vom Rest aus und behielt am Schluß 1,50 M übrig. Fritz gab von seinem Geld erst ein Fünftel und dann ein Drittel aus und behielt 2,10 M übrig. Wieviel Geld hatte jeder der Schüler zu Beginn der Klassenfahrt bei sich?

37. In einer Schule mit 600 Schülern gibt es fünf verschiedene Arten von Arbeitsgemeinschaften:
    Die Hälfte der Schüler nehmen an einer Sport-AG, je ein Zehntel der Schüler an einer Mathematik-AG bzw. einer AG Basteln und je ein Zwanzigstel der Schüler an einer Elektronik- bzw. einer Handarbeits-AG teil. (Kein Schüler nimmt an mehr als einer AG teil.)
    a) Wieviel Schüler besuchen jeweils die verschiedenen Arbeitsgemeinschaften?
    b) Wieviel Schüler (Anzahl und Anteil) besuchen keine Arbeitsgemeinschaft?

38. Die Schule A hat 580 und die Schule B 720 Schüler. Von der Schule A nimmt $\frac{1}{5}$ der Schüler und von der Schule B nehmen $\frac{3}{20}$ der Schüler an der 1. Stufe der Mathematikolympiade teil. An welcher Schule nehmen mehr Schüler an der Mathematikolympiade teil?

Aus alten Mathematikbüchern

39. Auf der Seite 43 wurde über die Darstellung der Brüche im alten Ägypten berichtet. Im erwähnten „Papyrus Rhind" aus dem 17. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung gibt es eine Tabelle, in der Brüche der Form $\frac{2}{n}$ als Summen von Stammbrüchen angegeben werden. (*Stammbrüche* heißen Brüche mit dem Zähler 1).
Beispiele:
$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$; $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$; $\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$; $\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$; $\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
a) Sind diese Beispiele wahre Aussagen?
b)* In einem Buch über die Geschichte der Mathematik findet man folgende Zerlegung:
$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}=\frac{1}{12}+\frac{1}{55}+\frac{1}{220}$.
Überprüfe diese Feststellung!
c)* Auf wieviel verschiedene Weisen kann $\frac{1}{2}$ in eine Summe von zwei Stammbrüchen zerlegt werden?

40. Ein Schullehrer fragte den anderen, wieviel Kinder er in seiner Schule hätte. Er antwortete: $\frac{1}{6}$ meiner Kinder liegt an den Masern krank, 11 raufen Flachs, 7 sind auf die Kirmes gegangen, und von den jetzt gegenwärtigen schreiben 20 und 17 rechnen. Jener erwiderte darauf: Sie haben auch eine sehr starke Schule; aber ich habe noch 4 Kinder mehr.
Wieviel hatte jeder in der Schule?

41.* Jemand wurde gefragt, wie alt er und sein Bruder sei; dieser erwiderte: $\frac{5}{12}$ meines Alters beträgt gerade so viel, als $\frac{2}{3}$ von dem Alter meines Bruders, und ich bin im ganzen 9 Jahre älter als mein Bruder. Wie alt war jeder der beiden?

42.* Ein Vater, der $51\frac{1}{2}$ Jahre alt ist, fragt seinen Sohn, der $19\frac{3}{4}$ Jahre alt ist: „Wieviel Jahre werden verfließen müssen, bis ich sagen kann, ich bin noch einmal so alt wie du?"

43. Beim Bau einer Schule wird für jeden Schüler $1\frac{3}{10}$ m² Fußbodenfläche im Klassenzimmer berücksichtigt. Wie groß muß demnach die Fußbodenfläche eines Klassenzimmers für 40 Schüler sein?

Scherz- und Knobelaufgaben

44.* Auf einer Baustelle arbeiten vier Maurer. Nach ihrem Alter befragt, antwortet einer: „Wir sind alle vier verschieden alt. Zusammen sind wir 129 Jahre alt. Drei von uns haben eine Quadratzahl von Jahren hinter sich, ebenso hatten drei von uns vor 15 Jahren als Alter eine Quadratzahl." Wie alt war jeder der Maurer, als die Frage gestellt wurde?

45. **a)** Was soll wohl „ein LLLLLLLL" für ein Bruch sein?

b) Was ist „$1\,\frac{\text{KAUFS}}{\text{BEU}}$" für ein Behältnis?

c) Grit behauptet: „Es gibt einen Vogel, wenn man von dem ein Siebentel wegnimmt, bleibt ein Achtel übrig!" Was meint sie?

Gemeine Brüche und Dezimalbrüche; Division von gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung

15 Endliche und unendliche Dezimalbrüche

● 41 **a)** Wandle in einen gemeinen Bruch um: 0,5; 0,2; 0,75; 2,75; 0,125!

b) Schreibe als Dezimalbruch: $\frac{4}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{4}{25}$; $\frac{1}{200}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{2}{9}$!

Wir wollen $\frac{3}{8}$ als Dezimalbruch schreiben. Wir erweitern $\frac{3}{8}$ mit 125:

$$\frac{3}{8} \overset{\cdot 125}{=} \frac{375}{1000} = \underline{\underline{0,375}}.$$

Man kann diese Dezimalbruchdarstellung auch erhalten, wenn man den gemeinen Bruch als Quotienten schreibt und diesen nach der Regel für die Division von Dezimalbrüchen dividiert.

$\frac{3}{8} = 3 : 8$

$$\begin{array}{l} 3 : 8 = 0,375 \\ \underline{30} \\ \ \underline{60} \\ \ \ \underline{40} \\ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$\frac{3}{8} = \underline{\underline{0,375}}$

Entsprechend erhält man für den Bruch:

$\frac{113}{40} = 113 : 40$

$$\begin{array}{l} 113 : 40 = \underline{\underline{2,825}} \\ \ \underline{330} \\ \ \ \underline{100} \\ \ \ \ \underline{200} \\ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Genauso verfahren wir im folgenden Beispiel B 38 mit dem Bruch $\frac{2}{9}$.

● **38** $\frac{2}{9} = 2 : 9$

$2 : 9 = 0{,}222\ldots$
20
20
20
2

Dieser Prozeß bricht nie ab, denn man erhält bei jeder Teildivision den Rest 2. In jeder folgenden Dezimalstelle erscheint wieder eine 2. Die drei Punkte hinter der letzten geschriebenen 2 sollen das andeuten.

Die gebrochene Zahl $\frac{2}{9}$ kann also noch nicht als Dezimalbruch geschrieben werden.

Man kann sich aber $\frac{2}{9}$ beliebig weit mit Dezimalbrüchen nähern (↗ Bild B 28).

Es gilt, wie auch am Zahlenstrahl zu sehen ist:

$0{,}2 < \frac{2}{9} < 0{,}3$

$0{,}22 < \frac{2}{9} < 0{,}23$

$0{,}222 < \frac{2}{9} < 0{,}223$

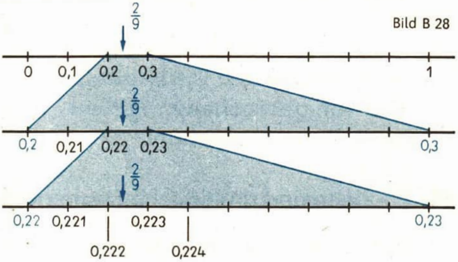


Bild B 28

● **42** Wie groß kann in jedem Fall die Differenz zwischen $\frac{2}{9}$ und den angegebenen Dezimalbrüchen höchstens sein?

Man erkennt:

Jeder der Dezimalbrüche 0,2; 0,22; 0,222 usw. ist **kleiner** als $\frac{2}{9}$.
Das ändert sich auch nicht, wenn immer mehr Dezimalstellen mit der Ziffer 2 berücksichtigt werden.

Jeder der Dezimalbrüche 0,3; 0,23; 0,223 usw. ist **größer** als $\frac{2}{9}$. Jeder Dezimalbruch, der nur eine Dezimalstelle besitzt, die größer als 2 ist, ist größer als $\frac{2}{9}$.

Jeder Dezimalbruch, der nur **endlich viele** Dezimalstellen mit der Ziffer 2 hat, ist kleiner als $\frac{2}{9}$.

Man sagt deshalb: $\frac{2}{9}$ kann erst durch **unendlich** viele Dezimalstellen mit der Ziffer 2 angegeben werden und schreibt:

$$\boxed{\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots}$$

Jeder der Dezimalbrüche 0,2; 0,22; 0,222 usw. ist ein Näherungswert für $\frac{2}{9}$.

Man bezeichnet 0,222... als **unendlichen Dezimalbruch**. Die Dezimalbrüche, mit denen wir bisher gerechnet haben, bezeichnet man als **endliche Dezimalbrüche**.

● 43 Unter welchen Gesichtspunkten kann man folgende Dezimalbrüche sortieren?
25,2; 0,75348; 151; 0,123123123...; 273,22222...; 0,3750; 8,888...; 0,00031; 0,112123123412345123456...; 5500

Wir können jetzt jeden gemeinen Bruch in einen (endlichen oder unendlichen) Dezimalbruch umwandeln.

■ 39 Es ist $\frac{17}{12}$ als Dezimalbruch zu schreiben.

17 : 12 = 1,4166...
50
20
80
80
8

Von der vierten Teildivision an tritt immer wieder der Rest 8 auf. Wir erhalten einen unendlichen Dezimalbruch, bei dem von der dritten Dezimalstelle an nur noch die Ziffer 6 auftritt.

Also: $\frac{17}{12} = \underline{\underline{1{,}4166\ldots}}$

■ 40 Es ist $\frac{75}{11}$ als Dezimalbruch zu schreiben.

75 : 11 = 6,8181...
90
20
90
20
9

Führen wir weitere Teildivisionen aus, so erhalten wir abwechselnd die Reste 9 und 2. Wir erhalten einen unendlichen Dezimalbruch, bei dem sich die Ziffern 8 und 1 wiederholen.

Aufgaben

1. Welche der folgenden gebrochenen Zahlen kann man als endlichen Dezimalbruch darstellen, welche nicht? Begründe deine Antwort!
   a) $\frac{9}{16}$ b) $\frac{2}{21}$ c) $\frac{3}{12}$ d) $\frac{18}{27}$ e) $\frac{1}{512}$ f) $\frac{6}{30}$

2. Wandle alle gemeinen Brüche aus Aufgabe 1 in Dezimalbrüche um!

3. Wandle in einen gemeinen Bruch um und kürze soweit wie möglich!
   a) 0,75 b) 2,02 c) 0,99 d) 27,5 e) 0,2 f) 1,6 g) 4,005

4. Bilde Paare (gemeiner Bruch; Dezimalbruch), so daß beide zur gleichen Zahl gehören!
   $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{8}$; 0,4; 0,666...; 0,375; 0,333...; 0,444...; 0,25

5. Schreibe als Dezimalbruch!
   a) $\frac{10}{3}$ b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{35}{6}$ d) $\frac{75}{55}$ e) $\frac{9}{7}$ f) $\frac{35}{7}$ g) $\frac{5}{12}$ h) $\frac{12}{5}$ i) $\frac{17}{11}$

16 Periodische Dezimalbrüche

Die unendlichen Dezimalbrüche aus den Beispielen B 39 und 40 haben eine gemeinsame Eigenschaft: *Von einer Stelle an wiederholt sich eine Ziffer bzw. eine Gruppe von Ziffern ständig.*
Diese Gruppe sich wiederholender Ziffern heißt **Periode**.

• 44 Gib jeweils die Periode an!

a) 0,333… **c)** 21,437 37… **e)** 7,034 803 48…
b) 0,666… **d)** 555,55… **f)** 0,112 123 1234 12345…

Ein unendlicher Dezimalbruch, in dessen Dezimalstellen Perioden auftreten, heißt **periodischer Dezimalbruch**.
Nach der Anzahl der Ziffern in einer Periode spricht man von einer 1, 2, 3, … bzw. n-stelligen Periode. So ist die Periode in den Dezimalbrüchen 0,22… und 0,4166… einstellig und in den Dezimalbrüchen 6,8181… sowie 2,127 27… zweistellig.
Für 0,22… schreibt man auch $0,\overline{2}$ (lies: Null-Komma-Zwei, Periode Zwei).
Für 2,127 27… schreibt man $2,1\overline{27}$ (lies: Zwei-Komma-eins-zwei-sieben, Periode zwei-sieben).

Wir können jeden gemeinen Bruch $\frac{a}{b}$ durch Ausrechnen des Quotienten $a : b$ in einen endlichen oder unendlichen Dezimalbruch umwandeln. Man kann auch jeden endlichen und jeden periodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch umwandeln. Endliche Dezimalbrüche können wir sofort als Zehnerbrüche schreiben und wenn möglich kürzen. Auf die Umwandlung periodischer Dezimalbrüche wird hier nicht eingegangen.
Wir können jetzt jede gebrochene Zahl in Form eines (endlichen oder periodischen) Dezimalbruchs angeben.

• 45 Wandle in einen periodischen Dezimalbruch um! Merke dir das Ergebnis gut!

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{1}{9}$ **d)** $\frac{1}{6}$

Jetzt kann auch das Ergebnis jeder Division von Dezimalbrüchen als Dezimalbruch angegeben werden, was bisher nicht möglich war.

■ 41 Es ist zu berechnen 3,7 : 0,9.

$37 : 9 = 4{,}11\ldots$ Also: $3{,}7 : 0{,}9 = \underline{\underline{4{,}\overline{1}}}$

10

1

Aufgaben

1. Suche die periodischen Dezimalbrüche heraus!
Gib jeweils die Periode an!

a) 0,616 1616… **c)** 2,252 552 555 255 552… **e)** $\frac{1}{3}$ **g)** 27,437 1437 437…

b) 555,5500 **d)** 1,121 312 131 213… **f)** $\frac{3}{4}$

2. Gib für die folgenden unendlichen Dezimalbrüche an, welche Ziffer in der 4.; 7.; 12.; 15. und 20. Dezimalstelle steht!

a) $0,\overline{123}$ **c)** $5,\overline{34217}$ **e)** 2,4040040004… **g)** 0,6

b) $0,12\overline{3}$ **d)** $0,\overline{6}$ **f)** 127,1122334411… **h)** $\frac{2}{3}$

3.* Gib einen Dezimalbruch mit zweistelliger Periode an, der in der 7. Stelle eine 7 und in der 9. Stelle eine 9 hat!

4. Vergleiche!

a) $0,\overline{6}$ mit 0,66648 **c)** 0,09009… mit $0,0\overline{09}$

b) 4,161717 mit $4,\overline{167}$ **d)** $0,\overline{234}$ mit 0,234…

Mache einen Überschlag und berechne!

5.↑ **a)** 0,28 : 0,35 **d)** 2,7 : 0,022 **g)** 8,44 : 0,22

b) 0,28 : 0,42 **e)** 0,72 : 0,14 **h)** 3,77 : 0,15

c) 7,2 : 0,45 **f)** 6,28 : 5,12 **i)** 17,24 : 0,15

6.↑ **a)** 4,581 : 2,7 **c)** 7398 : 1,8 **e)** 1,649 : 0,17

b) 6,289 : 0,33 **d)** 43,72 : 1,5 **f)** 3,4 : 6,8

7.↑ **a)** $15,2 \cdot 14,8 \cdot 5,3$ **c)** $12,8 \cdot 13,2 \cdot 4,7$ **e)** $3,217 \cdot 4,028 \cdot 5,034$

b) $4,02 \cdot 5,4 \cdot 6$ **d)** $5,03 \cdot 4,4 \cdot 8$ **f)** $8,043 \cdot 4,021 \cdot 2,010$

8.↑ **a)** (3,288 : 4,11) : 2 **c)** (2,877 : 4,11) : 3,5 **e)** 24,3 : (8,1 : 3,0)

b) 3,288 : (4,11 : 2) **d)** 2,877 : (4,11 : 3,5) **f)** 36,0 : (7,2 : 5,0)

9.↑ **a)** $\frac{17,13 + 4,55}{5,42}$ **b)** $\frac{25,98 + 5,62}{6,32}$ **c)** $\frac{5,28}{4,33} + \frac{7,08}{5,44}$ **d)** $\frac{8,44}{5,07} + \frac{11,07}{4,54}$

Übung und Anwendung des Rechnens mit gebrochenen Zahlen

17 Näherungswerte; zuverlässige Ziffern

● **46** **a)** Runde die Zahlen 741; 9245; 47,12; 9,75 auf Vielfache von 10!

b) Nenne alle natürlichen Zahlen, die beim Runden auf Vielfache von 10 zu 3260 führen! Gib diese Zahlen x folgendermaßen an: $a \leqq x < b$!

Wir wissen, daß Schätzwerte; Zahlen, die beim Runden entstehen; Meßwerte und Ergebnisse von Rechnungen, in die solche Werte eingehen, immer nur **Näherungswerte** sind. Manchmal wird auch ein unendlicher periodischer Dezimalbruch durch einen endlichen Näherungswert ersetzt.

● **47** Bei welchen der folgenden Angaben treten Näherungswerte auf?

a) Im Stadion waren 20000 Zuschauer.

b) In unserem Haus wohnen 43 Mieter.

c) Ich habe noch 93 Pfennig.

d) Die Entfernung zwischen Berlin und Rostock beträgt 230 km.
e) *A*-Dorf hat 361 Einwohner.
f) Im Jahre 1986 wurden in der DDR 119 Tausend Neubauwohnungen fertiggestellt und 96 Tausend Wohnungen modernisiert.
g) In einer Kreisstadt wurden 149 Wohnungen modernisiert.

Sind Näherungswerte Ergebnisse von Messungen, so sind uns die genauen Werte **nicht** bekannt. Auch bei größter Sorgfalt kann man mit jedem Meßinstrument (z. B. einem Lineal, einem Meßband, einem Meßschieber) nur mit einer bestimmten Genauigkeit messen.
Beim Einkaufen können wir auf manchen Verpackungen Angaben folgender Art erkennen: Rahmbutter 250 g $\pm$ 4 g; Florena Creme 60 g $\pm$ 2,5 g; Haarwäsche 160 ml $\pm$ 4 ml
Im ersten Falle bedeutet das, daß zwischen 246 g und 254 g Butter in einer Packung enthalten sind. Dafür schreibt man auch, wenn mit *m* die genaue Masse bezeichnet wird:

$$246\text{ g} \leqq m \leqq 254\text{ g} \quad \text{oder} \quad m = (250 \pm 4)\text{ g}.$$

Manchmal wissen wir von einer Zahlenangabe, daß es sich um einen Näherungswert handelt (z. B. bei Meßwerten), obwohl eine solche mögliche Abweichung nicht angegeben ist. Für diese Fälle treffen wir eine Vereinbarung.

Wird z. B. für *l* der Näherungswert 2,4 cm angegeben, so soll das bedeuten:
$2{,}35\text{ cm} \leqq l \leqq 2{,}45\text{ cm}$.
Man sagt auch, der Näherungswert 2,4 cm hat **zwei zuverlässige Ziffern.**

■ 42

Näherungswert	Anzahl der zuverlässigen Ziffern[1]	Bedingung für den genauen Wert x
0,8	1	$0{,}75 \leqq x \leqq 0{,}85$
3,6	2	$3{,}55 \leqq x \leqq 3{,}65$
0,108	3	$0{,}1075 \leqq x \leqq 0{,}1085$
0,002	1	$0{,}0015 \leqq x \leqq 0{,}0025$
0,350	3	$0{,}3495 \leqq x \leqq 0{,}3505$

Für die Zahl 400 kann ohne weitere Angaben nicht festgestellt werden, wieviel zuverlässige Ziffern vorliegen. So ist z. B. die Angabe 400 g, wenn zuvor von 396 g auf 400 g gerundet wurde, ein Näherungswert mit 2 zuverlässigen Ziffern. Wurde dagegen von 430 g auf 400 g gerundet, so handelt es sich um einen Näherungswert mit nur einer zuverlässigen Ziffer.

Die gebrochene Zahl $\frac{1}{3}$ kann durch den unendlichen periodischen Dezimalbruch $0,\overline{3}$ angegeben werden.

■ 43 0,3 ist der mit einer zuverlässigen Ziffer angegebene Näherungswert für $\frac{1}{3}$, denn $0{,}25 \leqq \frac{1}{3} \leqq 0{,}35$.

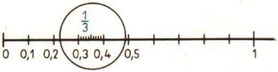
[1] Die Nullen links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer werden nicht mitgezählt.

0,33 ist der mit zwei zuverlässigen Ziffern angegebene Näherungswert für $\frac{1}{3}$,

denn $0{,}325 \leqq \frac{1}{3} \leqq 0{,}335$. (↗ Bild B 29)

0,333 ist der mit drei zuverlässigen Ziffern angegebene Näherungswert für $\frac{1}{3}$,

denn $0{,}3325 \leqq \frac{1}{3} \leqq 0{,}3335$.



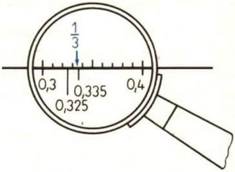


Bild B 29

● **48** Gib für $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285}$ einen Näherungswert mit einer (3, 4, 5, 6) zuverlässigen Ziffer(n) an!

Der Näherungswert 7,9 hat *zwei zuverlässige Ziffern.* Für den genauen Wert x gilt:
$7{,}85 \leqq x \leqq 7{,}95$ (↗ Bild B 30; blauer Teil).

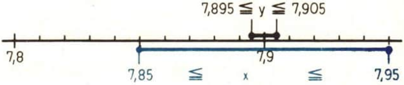


Bild B 30

Der Näherungswert 7,90 hat *drei zuverlässige Ziffern.* Für den genauen Wert y gilt:
$7{,}895 \leqq y \leqq 7{,}905$ (↗ Bild B 30).
Bei Näherungswerten dürfen nicht noch nachträglich Nullen angehängt werden, da dadurch die Anzahl der zuverlässigen Ziffern und damit die Genauigkeit geändert wird.

Aufgaben

Runde auf Vielfache von 10 (100)! Wie groß ist jeweils der Rundungsfehler?

1.↑ **a)** 8248 **b)** 7473 **c)** 1157 **d)** 1035 **e)** 4144 **f)** 4145 **g)** 7998

2.↑ **a)** 464 **b)** 10706 **c)** 999 **d)** 849 **e)** 851 **f)** 27043 **g)** 31450

3. **a)** Nenne alle natürlichen Zahlen, die beim Runden auf Vielfache von 10 zu 840 führen!
b) Gib diese Zahlen in der Form $a \leqq x < b$ an!
c) Veranschauliche diese Zahlen am Zahlenstrahl!

4. Runde auf eine (zwei) Stelle(n) nach dem Komma!
a) 0,574 **b)** 0,534 **c)** 27,2 **d)** 4,449 **e)** 7,3450 **f)** 6,799 **g)** 8,992

5. Welche der folgenden Werte täuschen eine nicht mögliche bzw. nicht sinnvolle Genauigkeit vor?
a) Der Fichtelberg ist 121435 cm hoch.
b) Die Entfernung Berlin – Dresden beträgt 180 km.
c) Ein Trabant wiegt leer 615321 g.
d) Die Nummer meines Fahrrades ist 452341.
e) Eine Unterrichtsstunde dauert 45 min.

6. Mit welcher Genauigkeit würdest du
a) die Länge und die Breite einer Straße,
b) die Höhe eines Baumes,
c) die Höhe und die Breite einer Fensterscheibe,
d) den Durchmesser einer Schraube,
e) die Körpergröße eines Schülers der 6. Klasse,
f) die Entfernung zwischen Berlin und Moskau
angeben?

7. Ergänze die richtige Einheit!
a) Die Leermasse eines PKW beträgt 650 …
b) Der Flächeninhalt des Fußbodens einer Küche beträgt 8 …
c) Der Flächeninhalt einer Briefmarke beträgt rund 8 …
d) Die Länge eines Bleistifts beträgt 18 …

8. Nenne alle natürlichen Zahlen x, für die gilt:
a) $3820 < x < 3830$, **b)** $1170 \leqq x \leqq 1180$, **c)** $2240 \leqq x \leqq 2250$!

9. Gib an, zwischen welchen Werten x jeweils liegt, wenn folgende Näherungswerte für x ermittelt wurden:
a) mit dem Meßband 0,21 m, **b)** mit dem Lineal 0,214 m, **c)** mit dem Meßschieber 0,2136 m!

10. Zwischen welchen Zahlen liegt x, wenn folgende Näherungswerte mit zuverlässigen Ziffern gegeben sind?
a) 0,34 **b)** 2,05 **c)** 0,0434 **d)** 49 **e)** 49,0 **f)** 1201

11. Runde auf zwei (drei) zuverlässige Ziffern!
a) 0,4735 **b)** 0,0243 **c)** 1,0345 **d)** 1253 **e)** 0,007349 **f)** 203,5

12. Gib für $\frac{1}{6}$ einen Näherungswert mit 2 (3, 4, 5) zuverlässigen Ziffern an!

13. Es wird die Aufgabe gestellt, für $\frac{2}{3}$ einen Näherungswert mit vier zuverlässigen Ziffern anzugeben. Klaus gibt 0,6666 und Peter gibt 0,6667 an. Wer hat recht?

14. Gib für $\frac{3}{8}$ einen Näherungswert mit einer (2, 3, 4) zuverlässigen Ziffer(n) an!

15. Gib an, zwischen welchen Zahlen x liegt, wenn folgende Näherungswerte für x gegeben sind! **a)** 5,4 **b)** 5,40 **c)** 5,400 **d)** 5
Veranschauliche den Sachverhalt jeweils am Zahlenstrahl!

18 Addition und Subtraktion von Näherungswerten

Im Beispiel B 17 auf Seite 54 wurde folgende Aufgabe gelöst:

Eine Pioniergruppe hat Altpapier gesammelt. Da verschiedene Waagen benutzt wurden, werden im einzelnen folgende Massen angegeben: 18 kg; 5,6 kg; 3,62 kg und 4,7 kg. Wie groß ist die Gesamtmasse?

Um diese Frage zu beantworten, hatten wir die einzelnen Näherungswerte addiert.

$$18\text{ kg} + 5{,}6\text{ kg} + 3{,}62\text{ kg} + 4{,}7\text{ kg} = 31{,}92\text{ kg}$$

Wir können jetzt genauer begründen, warum die Stellen nach dem Komma eine nicht mögliche Genauigkeit vortäuschen. Der Näherungswert 18 kg bedeutet entsprechend der Vereinbarung von S. 90 für die genaue Masse m_1:

$$17{,}5\text{ kg} \leqq m_1 \leqq 18{,}5\text{ kg}.$$

Für die genauen Werte der anderen Massen gilt:

$$\begin{aligned} 5{,}55\text{ kg} &\leqq m_2 \leqq 5{,}65\text{ kg},\\ 3{,}615\text{ kg} &\leqq m_3 \leqq 3{,}625\text{ kg},\\ 4{,}65\text{ kg} &\leqq m_4 \leqq 4{,}75\text{ kg}. \end{aligned}$$

Rechnen wir mit den kleinst- und den größtmöglichen Werten, so erhalten wir für die Gesamtmasse m:

$$31{,}315\text{ kg} \leqq m \leqq 32{,}525\text{ kg}.$$

Eine genauere Angabe kann über m nicht gemacht werden. Um nicht immer diesen Weg gehen zu müssen, überlegen wir uns einen einfacheren Weg, der uns zu einem **Näherungswert** für die Summe führt.

Bei dem ersten Näherungswert (18 kg) steht die **letzte zuverlässige Ziffer** in der **Einerstelle**. (Beim zweiten und vierten Näherungswert sind die Zehntel noch zuverlässig und beim dritten Näherungswert noch die Hundertstel.) Das Ergebnis wird auf **Einer** gerundet.

Die Pioniergruppe hat 32 kg Altpapier gesammelt.

Bei der Addition und Subtraktion von Näherungswerten gehen wir folgendermaßen vor:

> **Regel 1**
> - Denjenigen Näherungswert heraussuchen, bei dem die letzte zuverlässige Ziffer am weitesten links steht!
> - Das Ergebnis auf diese Stelle runden!

Von den Größenangaben in den folgenden Beispielen ist bekannt, daß sie Näherungswerte sind.

44 a)

$$\begin{array}{r} 0{,}78\text{ m} \\ +0{,}7\text{ m} \\ +2{,}45\text{ m} \\ \hline 3{,}93\text{ m} \end{array} \approx 3{,}9\text{ m}$$

b)

$$\begin{array}{r} 16{,}4\text{ cm} \\ -\ 6{,}2\text{ cm} \\ -\ 3{,}75\text{ cm} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6{,}2\text{ cm} \\ +3{,}75\text{ cm} \\ \hline 9{,}95\text{ cm} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16{,}40\text{ cm} \\ -\ 9{,}95\text{ cm} \\ \hline 6{,}45\text{ cm} \end{array} \approx 6{,}5\text{ cm}$$

Die Gesamtlänge beträgt 3,9 m.

Die Gesamtlänge beträgt 6,5 cm.

45

$$\begin{array}{rl} & 12{,}428 \text{ m} \\ + & 0{,}54321 \text{ m} \\ + & 2{,}4 \text{ m} \\ + & 13 \text{ m} \\ \hline & 28{,}37121 \text{ m} \approx \underline{\underline{28 \text{ m}}} \end{array}$$

Treten so große Unterschiede in der Genauigkeit der Eingangswerte wie in diesem Beispiel auf, so kann man die genaueren Näherungswerte schon vor der Rechnung runden.

bequemer:

$$\begin{array}{rl} & 12{,}4 \text{ m} \\ + & 0{,}5 \text{ m} \\ + & 2{,}4 \text{ m} \\ + & 13 \text{ m} \\ \hline & 28{,}3 \text{ m} \approx \underline{\underline{28 \text{ m}}} \end{array}$$

Man rundet so, daß die gerundeten Werte eine Stelle mehr haben, als das Ergebnis nach der Regel 1 hat.

Aufgaben

1. Herr Müller will einen Tisch und eine Liege kaufen. Ihm werden Tische zwischen 200 M und 350 M und Liegen zwischen 450 M und 630 M angeboten. Zwischen welchen Beträgen liegt der Gesamtkaufpreis für Tisch und Liege?

2. Berechne die Summe folgender Näherungswerte!
   a) 12,37 km + 125,2 km + 0,44 km + 1,256 km
   b) 212,21 m + 12,1 m + 103 m + 1,8 m
   c) 0,987 kg + 2,24 kg + 0,0382 kg + 32,10 kg

3. Berechne folgende Differenzen von Näherungswerten!
   a) 454,25 m − 12,2 m − 9,75 m − 121 m
   b) 91,7 kg − 10,95 kg − 0,855 kg − 9,71 kg
   c) 474 km − 38,97 km − 0,075 km − 91 km

4. Ein rechteckiger Garten mit 21,7 m Länge und 42,5 m Breite soll eingezäunt werden. An einer Ecke des Grundstücks steht ein 3,55 m breiter und 5,15 m langer Geräteschuppen. Das Gartentor von 3,25 m Breite soll wieder verwendet werden. Wieviel Meter Zaun werden benötigt?

5. Der Fahrer eines LKW überprüft vor Antritt der Fahrt, ob mit den zu transportierenden Gütern die Ladefähigkeit von 10 t überschritten wird. Auf den Verpackungen der einzelnen Güter findet er folgende Angaben: 7,9 t; 1,24 t; 0,63 t; 235 kg. Darf er diese vier Güter transportieren?

6. Jemand behauptet, beim Messen mit einem Lineal folgende Werte für die Seitenlängen eines Vierecks ermittelt zu haben: $a = 0{,}90482$ m, $b = 0{,}75643$ m, $c = 0{,}4236$ m und $d = 0{,}5234$ m. Welche Ziffern muß man weglassen, wenn die Längen mit einem Lineal mit Millimetereinteilung gemessen wurden? Wie müssen sinnvolle Längenangaben lauten? Berechne den Umfang des Vierecks!

7. Die Länge zweier Stäbe wurde mit einem Lineal gemessen. Die Länge des ersten Stabes liegt zwischen 15,6 cm und 15,7 cm und die Länge des zweiten Stabes zwischen 31,4 cm und 31,5 cm. Wie groß ist der Längenunterschied zwischen diesen Stäben mindestens? Wie groß ist er höchstens?

8. Christian, Bärbel und Anette messen jeweils einen Teil des Schulweges von Anette. Bärbel und Anette benutzen ein Meßband mit Zentimetereinteilung und Christian den „Landvermesserzirkel" seines Großvaters. Bärbel rundet den gemessenen Wert auf 147,6 m, Anette gibt den „genauen" Wert 73,48 m an. Christian ermittelt für sein Teilstück 68 m.
   a) Überlege, wer sein Teilstück mit sinnvoller Genauigkeit gemessen hat!
   b) Ermittle die Länge des Schulwegs von Anette mit sinnvoller Genauigkeit!

9. Der Kleingarten von Familie Schulz (vgl. Bild B 31) soll neu eingezäunt werden. $\left(a = b,\ d = \frac{a}{2}\right)$ Für a und c werden folgende Längen gemessen:
   $a = 22{,}7$ m, $c = 25{,}4$ m.
   Die Straßenfront (a) soll einen Holzzaun und die anderen drei Seiten einen Maschendrahtzaun erhalten.
   Wieviel Meter Zaun müssen von jeder Sorte gekauft werden?

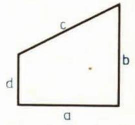


Bild B 31

19 Multiplikation und Division von Näherungswerten

Der Flächeninhalt eines rechteckigen Gartens soll ermittelt werden. Für Länge und Breite wurden 32,4 m bzw. 22,3 m gemessen. Für den Flächeninhalt erhält man mit diesen gemessenen Werten:

$$A = 32{,}4 \text{ m} \cdot 22{,}3 \text{ m} = 722{,}52 \text{ m}^2 \quad \textit{Überschlag}: 30 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} = 600 \text{ m}^2$$

Denken wir daran, daß laut Vereinbarung (S. 90) für die genauen Werte l und b gilt:

$$32{,}35 \text{ m} \leqq l \leqq 32{,}45 \text{ m} \quad \text{und} \quad 22{,}25 \text{ m} \leqq b \leqq 22{,}35 \text{ m},$$

erhalten wir für den genauen Wert des Produkts $l \cdot b$:

$$32{,}35 \text{ m} \cdot 22{,}25 \text{ m} \leqq l \cdot b \leqq 32{,}45 \text{ m} \cdot 22{,}35 \text{ m}$$
$$719{,}7875 \text{ m}^2 \leqq l \cdot b \leqq 725{,}2575 \text{ m}^2$$

Das Ergebnis 722,52 m² täuscht für den Flächeninhalt bei diesem Sachverhalt eine nicht mögliche Genauigkeit vor. Die Eingangswerte haben je **drei zuverlässige** Ziffern. Wir runden das Ergebnis auf **drei** Ziffern:
Der *Flächeninhalt des Gartens beträgt 723 m².*

Bei der **Multiplikation** und **Division** von Näherungswerten gehen wir folgendermaßen vor:

> **Regel 2:**
> – Denjenigen Näherungswert mit der *geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern* heraussuchen!
> – Das Ergebnis auf diese Anzahl von Ziffern runden!
> Die Nullen vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer werden dabei nicht mitgezählt.

● 49 Überprüfe, ob der oben ermittelte Näherungswert 723 m² drei zuverlässige Ziffern hat!

46 Es sind die Näherungswerte 1,51 m und 7,4 m miteinander zu multiplizieren.
1,51 m · 7,4 m *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} \underline{1{,}51 \cdot 7{,}4} \\ 1057 \\ 604 \\ \hline 11{,}174 \end{array}$$

Da 7,4 m nur zwei zuverlässige Ziffern hat, ist das Ergebnis auf 11 m^2 zu runden:
$A = \underline{\underline{11\ m^2}}$

47 Für die Näherungswerte 16,4 und 2,5 soll der Quotient berechnet werden.
16,4 : 2,5 *Nebenrechnung:* 164 : 25 = 6,56

$$\begin{array}{l} 164 : 25 = 6{,}56 \\ \ \ 140 \\ \ \ \ 150 \\ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Der Quotient muß auf zwei Ziffern gerundet und als Ergebnis 6,6 angegeben werden.

48 Das Volumen eines Quaders ist zu berechnen. Seine Länge beträgt 17,5 cm, die Breite ist halb so groß wie die Länge, und die Höhe ist halb so groß wie die Breite.
Lösung: $a = 17{,}5$ cm; $b = 17{,}5$ cm : 2 = 8,75 cm;
$c = 8{,}75$ cm : 2 = 4,375 cm
$V = 17{,}5$ cm · 8,75 cm · 4,375 cm
Wir wissen, daß das Ergebnis auf drei Ziffern gerundet werden muß.
Berechnen wir zunächst $a \cdot b = 17{,}5$ cm · 8,75 cm
Überschlag: 17 · 10 = 170 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} \underline{17{,}5 \cdot 8{,}75} \\ 1400 \\ 1225 \\ 875 \\ \hline 153{,}125 \end{array}$$

Dieses Zwischenergebnis runden wir auf 153,1 cm^2; also so, daß es eine Ziffer mehr hat, als die Regel 2 verlangt. Dann rechnen wir weiter:
$(a \cdot b) \cdot c = 153{,}1\ cm^2 \cdot 4{,}375$ cm
Überschlag: 150 · 4 = 600 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} \underline{153{,}1 \cdot 4{,}375} \\ 6124 \\ 4593 \\ 10717 \\ 7655 \\ \hline 669{,}8125 \end{array}$$

Für das Volumen des Quaders erhalten wir also: $V = \underline{\underline{670\ cm^3}}$.

50 Berechne das Volumen des Quaders aus Beispiel B 48! Runde nur das Endergebnis und nicht das Zwischenergebnis! Vergleiche dein Ergebnis mit dem in Beispiel B 48 berechneten!

Um ein sinnvolles Ergebnis zu erhalten und unnötigen Rechenaufwand zu vermeiden, kann man Zwischenergebnisse so wie in den Beispielen B 45 und B 48 gezeigt, runden.

Dabei behält man jeweils eine Stelle bzw. Ziffer mehr bei als die Regeln 1 bzw. 2 empfehlen.
Wenn in einer Aufgabe periodische Dezimalbrüche auftreten, so müssen wir diese runden, bevor wir rechnen können. In diesem Fall können wir die Genauigkeit der Näherungswerte immer weiter verbessern, indem wir mehr Dezimalstellen berücksichtigen. Haben wir uns für einen Näherungswert entschieden, richten wir uns nach den Regeln 1 bzw. 2.

■ **49** Das Produkt $7{,}\overline{3} \cdot 1{,}\overline{36}$ soll berechnet werden.

a) Wählen wir für beide periodische Dezimalbrüche Näherungswerte mit zwei zuverlässigen Ziffern, so erhalten wir:

$7{,}\overline{3} \cdot 1{,}\overline{36} \approx 7{,}3 \cdot 1{,}4$ *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} \underline{7{,}3 \cdot 1{,}4} \\ 73 \\ \underline{292} \\ 10{,}22 \end{array}$$

Da das Ergebnis in diesem Fall nach Regel 2 auf zwei Ziffern zu runden ist, erhalten wir:

$7{,}\overline{3} \cdot 1{,}\overline{36} \approx \underline{\underline{10}}$

b) Wählen wir Näherungswerte mit drei zuverlässigen Ziffern, so erhalten wir:

$7{,}\overline{3} \cdot 1{,}\overline{36} \approx 7{,}33 \cdot 1{,}36$ *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} \underline{7{,}33 \cdot 1{,}36} \\ 733 \\ 2199 \\ \underline{4398} \\ 9{,}9688 \end{array}$$

Also: $7{,}\overline{3} \cdot 1{,}\overline{36} \approx \underline{\underline{9{,}97}}$

● **51** Berechne das Produkt $7{,}\overline{3} \cdot 1{,}\overline{36}$ mit Hilfe von Näherungswerten mit vier zuverlässigen Ziffern!

Erkennt man zu periodischen Dezimalbrüchen gehörende gemeine Brüche, so rechnet man mit diesen gemeinen Brüchen und erhält den genauen Wert des Produktes als gemeinen Bruch.

■ **50** Für die Zahlen aus dem Beispiel B 49 gilt:

$7{,}\overline{3} = \frac{22}{3}$ und $1{,}\overline{36} = \frac{15}{11}$.

Damit gilt für das Produkt

$$7{,}\overline{3} \cdot 1{,}\overline{36} = \frac{22}{3} \cdot \frac{15}{11} = \underline{\underline{10}}.$$

Aufgaben

1. Miß Länge und Breite deines Tisches und berechne den Flächeninhalt!

2. Miß Länge und Breite der Grundfläche eines Zimmers und berechne deren Flächeninhalt!

3. Die Masse der 14 Blätter eines Rechenheftes wurde mit einer Briefwaage bestimmt. Der abgelesene Wert lag zwischen 33 g und 34 g. Welche Masse hat ein Blatt dieses Heftes? Gib das Ergebnis mit sinnvoller Genauigkeit an!

4. Familie Meier will im Wohnzimmer und im Kinderzimmer den Fußboden neu streichen. Beide Zimmer haben eine rechteckige Grundfläche. Das Wohnzimmer ist 4,5 m lang und 4,2 m breit. Das Kinderzimmer ist 4,2 m lang und 3,8 m breit. Wieviel Büchsen Farbe werden benötigt, wenn eine Büchse für 6 m^2 bis 7 m^2 reicht?

5. Ein Zimmer hat folgende Abmessungen: 8,4 m; 5,4 m; 3,7 m. Ermittle den Rauminhalt!

6. Die Kantenlänge eines Würfels wurde mit 8,3 cm gemessen. Berechne Oberflächeninhalt und Volumen dieses Würfels!

7. Ein Körper hat ein Volumen von 6,3 cm^3 und eine Masse von 14,3 g. Berechne die Dichte dieses Körpers! Aus welchem Material könnte er bestehen?

8. Bei einem erwachsenen Menschen beträgt ungefähr: die Länge des Kopfes $\frac{1}{8}$, die Länge des Oberkörpers $\frac{1}{3}$, die Brustweite $\frac{1}{6}$, die Handlänge $\frac{1}{10}$, die Länge des Unterarms $\frac{1}{4}$, die Fußlänge $\frac{1}{6}$, die Schulterbreite $\frac{1}{4}$ der Gesamtlänge.
   a) Berechne nach diesen Angaben die Länge der einzelnen Körperteile eines Menschen, der 1,80 m groß ist!
   b) Miß deine Körpergröße! Errechne damit die Länge der einzelnen Körperteile und vergleiche mit gemessenen Werten!

9. Berechne das Durchschnittsalter einer Fußballmannschaft, bei der vier Spieler 22 Jahre, drei Spieler 21 Jahre, ein Spieler 24 Jahre, ein Spieler 25 Jahre und zwei Spieler 23 Jahre alt sind!

10. Eine GPG baut auf 2,5 ha Erdbeeren an. Es wurden 206 dt Erdbeeren geerntet. Wie groß war der Hektarertrag?

11. Ein rechteckiges Weizenfeld ist rund 920 m lang und 670 m breit. Auf diesem Feld kann mit einem durchschnittlichen Hektarertrag von 48,7 dt Weizen gerechnet werden. Wie groß ist der voraussichtliche Gesamtertrag auf diesem Feld?

12. 24 l Saft sollen in 0,7-l-Flaschen abgefüllt werden. Wieviel Flaschen werden benötigt?

13. Berechne! Runde die Ergebnisse so, daß sie die gleiche Anzahl von Stellen haben wie die jeweiligen endlichen Dezimalbrüche! Überlege gut, welchen Näherungswert du jeweils für den periodischen Dezimalbruch wählst!
   a) $3{,}75 + 12{,}\overline{81}$ b) $4{,}5\overline{25} + 43{,}6$ c) $12{,}5 \cdot 6{,}\overline{8}$ d) $9{,}47 : 0{,}\overline{75}$

14. a) Arbeite mit 4ziffrigen Näherungswerten!
   $37{,}57 + 38{,}\overline{48}$; $131{,}8 - 12{,}\overline{8}$
   b) Arbeite mit 3ziffrigen Näherungswerten für die periodischen Dezimalbrüche!
   $3{,}\overline{85} \cdot 2{,}74$; $0{,}\overline{8} \cdot 33{,}2\overline{57}$; $37{,}4\overline{82} : 0{,}38$
   c) Arbeite mit 3ziffrigen Näherungswerten für die periodischen Dezimalbrüche!
   $4{,}\overline{27} + 12{,}4$; $12{,}8 \cdot 6{,}\overline{54}$; $13{,}\overline{58} : 4{,}4$

Zusammenfassung

Treten in Sach- und Anwendungsaufgaben Näherungswerte auf, ist folgendes zu beachten:

I. Mit welcher Genauigkeit ein Resultat anzugeben ist, hängt oft von der Aufgabenstellung ab.

II. Ist aus der Aufgabenstellung nicht direkt ersichtlich, wie genau das Ergebnis anzugeben ist, runden wir das Ergebnis nach folgenden Regeln:

Regel 1: Bei Addition und Subtraktion von Näherungswerten
- denjenigen Näherungswert heraussuchen, bei dem die letzte zuverlässige Ziffer am weitesten links steht!
- Ergebnis auf diese Stelle runden!

Regel 2: Bei Multiplikation und Division
- Näherungswert mit der geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern heraussuchen!
- Ergebnis auf diese Zahl von Ziffern runden!

Handelt es sich bei Größenangaben nicht um Näherungswerte, wird mit den genauen Zahlenangaben gerechnet und nicht gerundet.

Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung

1. Dividiere die Summe von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ durch das Produkt dieser Zahlen!

2. Schreibe kürzer (ohne Worte) und berechne das Ergebnis!
a) Addiere zu 0,43 das Produkt aus 2,74 und 0,3!
b) Subtrahiere 4,2 vom Produkt der Zahlen 0,73 und 22,2!
c) Multipliziere die Summe der Zahlen 2,35 und 7,2 mit der Differenz der Zahlen 21,3 und 0,7!

3. Zu welcher Zahl muß man 25,4 addieren, um das 2,5fache von 15,1 zu erhalten?

4. Übertrage in dein Heft und fülle aus!

x	y	$x+y$	$x-y$	$y+x$	$y-x$	$x \cdot y$	$x(x+y)$	$x:y$
$4\frac{1}{5}$	2,6							
5,6			$\frac{5}{2}$					
	4,2	3,9						
	$5\frac{1}{4}$		4,5					
$\frac{14}{3}$		1,6						
		1,5	0					

Berechne, wenn möglich im Kopf!

5.↑ **a)** $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ **c)** $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)$ **e)** $\frac{9}{4}-\frac{4}{9}:\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}:\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$ **f)** $\frac{9}{4}-\frac{4}{9}:\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$

6.↑ **a)*** $1{,}\overline{2} - 4{,}5$ **c)** $\frac{3}{8} \cdot 3{,}\overline{6}$ **e)** $37{,}\overline{7} : 3{,}\overline{7}$

b) $1{,}\overline{3} \cdot \frac{9}{4}$ **d)** $(27{,}\overline{6} - 6{,}\overline{6}) \cdot 2{,}\overline{3}$ **f)** $1{,}2 \cdot (4{,}\overline{1} + 3{,}\overline{5})$

7. Um wieviel ist die Summe der Zahlen $\frac{5}{2}$ und $\frac{11}{8}$ größer als ihre Differenz?

8. Um wieviel ist die Differenz der Zahlen 3,75 und $\frac{1}{2}$ kleiner als ihre Summe?

9. Für welche gebrochenen Zahlen x entsteht eine wahre Aussage?

a) $x \cdot 0{,}8 = \frac{4}{5}$ **b)** $x : \frac{1}{2} = 2$ **c)** $\frac{3}{4} \cdot x < \frac{3}{4}$

d) $x - 0{,}5 = \frac{1}{2}$ **e)** $\frac{7}{5} : x = 7$ **f)** $x + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{7}$

g) $3 : x > 4$ **h)** $x + \frac{99}{100} < 1$

10. Ein Beutel Rasensamen reicht für 15 m^2. Wieviel Beutel benötigt man für eine 11,5 m breite und 32,4 m lange rechteckige Rasenfläche?

11. Das Klassenzimmer der 6a soll renoviert werden. Es hat einen rechteckigen Grundriß, ist 5,30 m breit, 8,40 m lang und 3,10 m hoch.

a) Die Decke soll mit Latex gestrichen werden. Eine Büchse reicht bei einmaligem Anstrich für eine Fläche von 6 m^2. Wieviel Büchsen müssen gekauft werden, wenn zweimal gestrichen werden muß?

b) Für das Auslegen des Fußbodens steht 1,20 m breiter PVC-Belag zur Verfügung. Wieviel Meter werden davon benötigt?

c) Tapete ist 53 cm breit, und eine Rolle enthält 10,0 m. Wieviel Rollen werden benötigt, wenn 4,80 m Breite für Tür und Fenster berücksichtigt werden?

d) Berechne den Rauminhalt dieses Zimmers!

12. Glas hat eine Dichte von 2,6 $\frac{g}{cm^3}$. Welche Masse hat eine 3,60 m breite, 2,10 m hohe und 12 mm dicke Schaufensterscheibe?

13. Bei der Rekonstruktion eines Stadions werden auch die Sprunggruben mit neuem Sand gefüllt. Dafür werden 6,5 m^3 Sand benötigt. $\left(\text{Dichte } 1{,}6\ \frac{kg}{m^3}\right)$
Wie oft muß ein LKW mit einer Ladefähigkeit von 3 t fahren, um den benötigten Sand in das Stadion zu transportieren?

14. Ein Mauerziegel ist 24 cm lang, 11,5 cm breit und 7,1 cm hoch. Berechne die Masse! $\left(\text{Dichte } 1{,}8\ \frac{g}{cm^3}\right)$

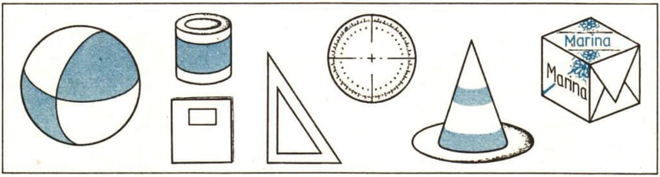
C Planimetrie

Zur Wiederholung

1 Ebene Figuren

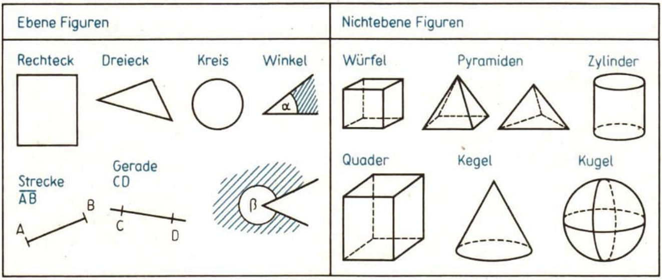
Viele Gegenstände kann man gut beschreiben, wenn man einige häufig vorkommende geometrische Figuren kennt (↗ Bild C 1).

Bild C 1



Geraden, Dreiecke, Rechtecke und Kreise sind Beispiele für **ebene Figuren**, denn alle ihre Punkte liegen in ein und derselben Ebene. Körper wie Quader und Zylinder sind **nichtebene Figuren** (↗ Bild C 2).

Bild C 2



Figuren einer Ebene werden in der ebenen Geometrie oder **Planimetrie**[1] untersucht.

Schon vor 2500 Jahren bezeichneten griechische Gelehrte die Untersuchungen der Lage von Strecken, Winkeln, ebenen Figuren und die Messung ihrer Längen bzw. Flächeninhalte mit dem Wort Geometrie. Sie selbst hatten Kenntnisse aus Ägypten wie auch Mesopotamien (dem Gebiet des heutigen Staates Irak) übernommen. In diesen Ländern traten Jahr für Jahr Überschwemmungen auf, wodurch die Grenzmarkierungen der am Ufer gelegenen Äcker regelmäßig weggespült wurden. Nach dem Rückgang des Hochwassers mußten dann Landvermesser diese Felder unter Berücksichtigung der bestehenden Besitzverhältnisse neu vermessen. So hatten Naturereignisse und die damit verbundene Notwendigkeit der Vermessung von Feldern zur Herausbildung geometrischer Erkenntnisse geführt und im weiteren die wissenschaftliche Arbeit angeregt.

● 1 Der Fußboden eines Zimmers soll vollständig mit quadratischen Teppichfliesen ausgelegt werden. Ihre Seitenlänge beträgt 30 cm (im Bild C 3 der besseren Erkennbarkeit wegen stark vergrößert). Wieviel Teppichfliesen werden benötigt?

In der Planimetrie vergleicht man Figuren miteinander. So kann man z. B. zwei solcher Teppichfliesen genau aufeinander legen (miteinander zur Deckung bringen).

● 2 Das Bild C 4 zeigt ein Kuchenblech mit Keksen.
a) Welche Kekse lassen sich genau aufeinander legen?
b) Wieviel verschiedene Formen wurden zum Ausstechen der Kekse verwendet?

In der ebenen Geometrie untersucht man auch Eigenschaften von Figuren.

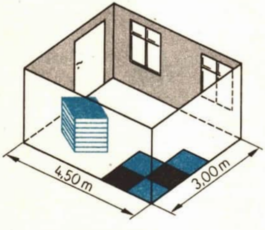


Bild C 3

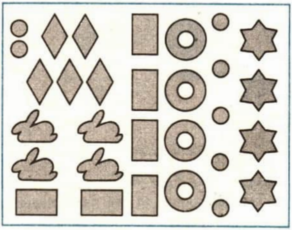


Bild C 4

● 3 **a)** Für welche Figuren im Bild C 4 braucht man nur Strecken zu zeichnen?
b) Welche Figuren im Bild C 4 sind axialsymmetrisch?

Wir wissen: Eine Figur ist axialsymmetrisch, wenn bei einer Spiegelung an einer geeigneten Geraden diese Figur sich selbst als Bild hat (↗ Bild C 5).
Strecken sind besonders einfache axialsymmetrische Figuren. Die Symmetrieachse m der Strecke $\overline{AB}$ im Bild C 6

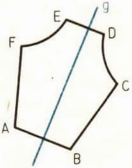


Bild C 5

1) Planimetrie (lat.-griech.)-Flächenmessung; Geometrie (griech.)-Erdmessung

schneidet $\overline{AB}$ im Punkt M, dem **Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$**. Er ist von A und B gleich weit entfernt, d. h., es ist $\overline{AM} = \overline{MB}$. m steht außerdem auf der Geraden AB senkrecht. Man nennt m die **Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$**.

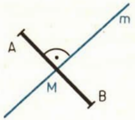


Bild C 6

● 4 Wieviel Symmetrieachsen hat ein gleichseitiges Dreieck?

Aufgaben

1. Gib fünf ebene und fünf nichtebene geometrische Figuren an!

2. **a)** Gib die Punkte O, P, Q, R im Bild C 7 durch geordnete Zahlenpaare an!
   b) Gib ebenso drei Punkte an, die zwischen O und Q liegen!
   c) Gib zwei Punkte an, die auf OQ liegen, aber nicht auf $\overline{OQ}$!
   d) Miß die Längen der Strecken $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ und $\overline{QR}$!
   e) Gib zwei Punkte an, durch die eine zu PO parallele Gerade geht!
   f) Gib zwei Punkte auf einer zu PO senkrechten Geraden an!

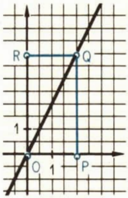


Bild C 7

3. Zeichne Strecken folgender Längen!
   a) $\overline{RS} = 5{,}8$ cm **b)** $\overline{KL} = 1{,}35$ dm **c)** $\overline{PQ} = 43$ mm

4. Zeichne Winkel $\alpha = 152°$, $\beta = 41°$, $\gamma = 90°$ und $\delta = 130°$!
   Welcher ist ein spitzer, ein stumpfer, ein rechter Winkel?

5. **a)** Zeichne ein Dreieck ABC! Zeichne durch C die Parallele zur Geraden AB!
   b) Zeichne ein Rechteck $ABCD$! Zeichne einen Punkt P so, daß $DP \parallel AC$ ist!

6. Ist M Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ (↗ Bild C 8)? Begründe!

7. Ist m Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ (↗ Bild C 9)? Begründe!

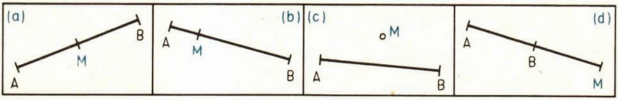


Bild C 8

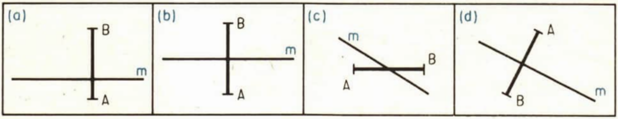


Bild C 9

8. Zeichne eine 6,2 cm lange Strecke $\overline{AB}$ und ihre Mittelsenkrechte m!

9. Zeichne einen Kreis mit dem Radius 5 cm und Punkte A, B, C, D und E auf der Kreislinie! Verbinde jeweils zwei der Punkte durch eine Gerade!
Wieviel Geraden hast du gezeichnet?

2 Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen

Muster auf Tapeten, Teppichen und Wandfliesen erhält man häufig dadurch, daß man die Bilder einer Figur bei Verschiebungen, Spiegelungen bzw. Drehungen aneinanderreiht (↗ Bild C 10).

● 5 Beschreibe, wie man im Bild C 10 aus der Teilfigur 1 die Teilfigur 2 bzw. die Teilfigur 4 erhalten kann!

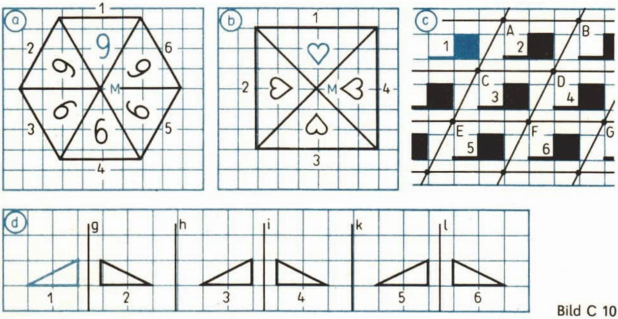


Bild C 10

Die uns bereits bekannten Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen einer Ebene sind Beispiele für **Abbildungen**. Bei diesen Abbildungen wird jedem Punkt P der Ebene (jedem **Original**punkt) ein Punkt P' (sein **Bild**punkt) zugeordnet.

● 6 Beschreibe für das Bild C 11, wie du die Bilder der Eckpunkte finden würdest
a) vom 5-Eck *ABCDE* bei der Spiegelung an der Geraden g,

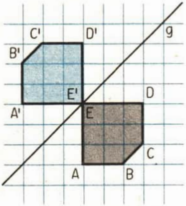


Bild C 11a

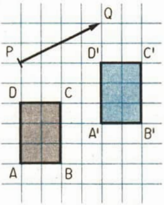


Bild C 11b

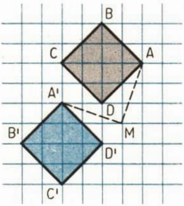


Bild C 11c

b) vom Rechteck *ABCD* bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$,
c) vom Quadrat *ABCD* bei der Drehung um *M* um 90°!

Bei der **Verschiebung** $\overrightarrow{AB}$ ist für jeden Punkt *P* der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP'}$ ebenso lang wie $\overrightarrow{AB}$ und mit $\overrightarrow{AB}$ gleichgerichtet.

Bei der **Spiegelung** an einer Geraden *g* ist *g* Mittelsenkrechte zu jeder Strecke $\overline{PP'}$ (falls *P* nicht zu *g* gehört), und für jeden Punkt *Q* von *g* ist $Q' = Q$.
Bei der **Drehung** um einen Punkt *M* mit dem Drehwinkel α
- sind jeder Punkt *P* und sein Bild *P'* vom Drehzentrum *M* gleich weit entfernt ($\overline{MP} = \overline{MP'}$),
- hat der Winkel, der vom Strahl *MP* bei Linksdrehung bis zur Lage des Strahls *MP'* überstrichen wird, die Größe α,
- und es ist $M' = M$.

● **7** Ermittle das Bild des Sechsecks *ABCDEF* (↗ Bild C 12) bei der jeweiligen Abbildung! Ergänze in der zugehörigen Tabelle die fehlenden Zahlenpaare!

Punkt	P(7; 4)	Q( )	M( )		A( )	B( )	C( )	...
Bildpunkt				S'( )				...

a) Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ **b)** Spiegelung an *g* **c)** Drehung um *M* um 90°

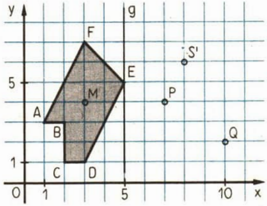


Bild C 12


Bild C 13

Außer Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen gibt es noch andere Abbildungen. So sind die Schatten im Bild C 13 die Bilder von Gegenständen (des Geländers, des Laternenpfahls) bei einer Abbildung, die man Projektion nennt. Bei dieser Projektion werden Punkte des Raumes auf eine Ebene (die Fahrbahnfläche) abgebildet.

Im Bild C 14 liegen die Bilder der Punkte *A, B, C, …* einer Ebene sämtlich auf einer Geraden *g*. Auch das nennt man eine Projektion.

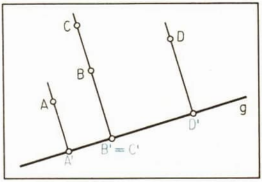


Bild C 14

Bei der folgenden Tabelle sind die Ausgangswerte (die Originale) und die zugeordneten Werte (die Bilder) keine Punkte. Dennoch kann man auch hier von einer Abbildung sprechen.

Umfang eines Rechtecks (in cm)	8	10	10	12	16
Flächeninhalt dieses Rechtecks (in cm^2)	3	4	6		

● **8** **a)** Wie lang sind die Seiten der Rechtecke, für die die Wertepaare in der Tabelle stehen?
b) Ergänze die Tabelle!

Man kann die Tabelle nicht „eindeutig" ergänzen, es gibt verschiedene Möglichkeiten. Rechtecke mit gleichem Umfang können nämlich verschiedene Flächeninhalte haben.

● **9** **a)** Karin behauptet, so etwas könne bei Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen nicht vorkommen. Bei diesen Abbildungen hat kein Punkt mehrere Bildpunkte. Hat Karin recht?
b) Gibt es bei einer Verschiebung Punkte, die mehrere Originalpunkte haben?
c) Wie steht es mit diesen Eigenschaften bei Spiegelungen und Drehungen?

▶ 1 **SATZ: Bei Spiegelungen (Verschiebungen, Drehungen) hat**
(1) jeder Punkt *X* genau einen Bildpunkt *X'* und
(2) jeder Punkt *Y'* genau einen Originalpunkt *Y*.

Wegen der Eigenschaft (1) nennt man Verschiebungen (Spiegelungen, Drehungen) auch **eindeutige Abbildungen**. Die Abbildung

„Umfang von Rechtecken → Flächeninhalt dieser Rechtecke"

hingegen ist nicht eindeutig. Hat eine eindeutige Abbildung sogar die Eigenschaft (2), so bezeichnet man sie als **umkehrbar eindeutig** oder **eineindeutig**. Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen sind eineindeutige Abbildungen.

● **10** Erläutere, daß die Projektion (↗ Bild C 14) keine eineindeutige Abbildung ist!

Aufgaben

1. Gib die Koordinaten der Bildpunkte von *A, B, C, D, E* und *F* aus dem Bild C 15 bei folgenden Abbildungen an!
a) Spiegelung an *g*
b) Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$
c) Drehung um *C* um 90°

2. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte *A* (2; 1), *B* (4; 2), *C* (5; 6), *D* (1; 7), *E* (8; 1) und *F* (8; 8)!
Ermittle das Bild des Vierecks *ABCD* bei der
a) Verschiebung $\overrightarrow{AC}$,
b) Spiegelung an *EF*,
c) Drehung um *C* um 90°!

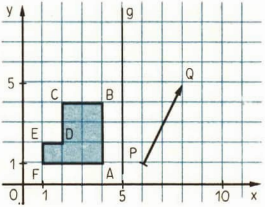


Bild C 15

3. Entscheide für die Bilder C 16a–c jeweils, ob $A'B'C'D'$ das Bild von $ABCD$ bei einer Drehung, Verschiebung oder Spiegelung ist! Begründe!

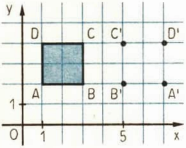


Bild C 16a

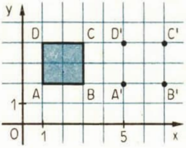


Bild C 16b

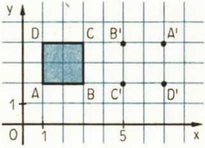


Bild C 16c

4. Zeichne ein Dreieck EFG mit einem rechten Winkel bei E! Zeichne das Bild des Dreiecks bei den folgenden Abbildungen!
a) Verschiebung $\overrightarrow{EF}$ **b)** Drehung um E um 150°
c) Spiegelung an der Geraden h, die durch E geht und parallel zu FG ist.

3 Eigenschaften von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen

Das Bild eines Vierecks bei einer Verschiebung, Drehung oder Spiegelung können wir bekanntlich zeichnen, wenn wir die Bilder der Eckpunkte des Vierecks kennen (wie z. B. im Bild C 16), denn es gilt:

▶ 2 **SATZ: Bei jeder Verschiebung, Drehung und Spiegelung ist das Bild einer Strecke $\overline{AB}$ die Strecke $\overline{A'B'}$.**

Bei der Konstruktion von Bildfiguren kann man aber auch andere Eigenschaften dieser Abbildungen ausnutzen.

● 11 Ute hat das Bild des Dreiecks ABC bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ gezeichnet (↗ Bild C 17). Wie hat sie B' gefunden? Welche Eigenschaften der Verschiebung hat sie verwendet?

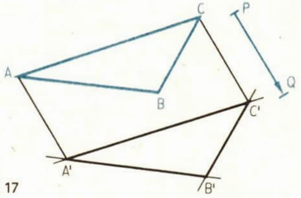


Bild C 17

Die betrachteten Abbildungen haben einige Eigenschaften gemeinsam.

● 12 Welche der folgenden Eigenschaften haben Verschiebungen, Spiegelungen bzw. Drehungen? Welche Eigenschaften haben sie gemeinsam? Betrachte dazu das Bild C 18 (↗ S. 108)!

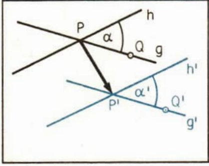
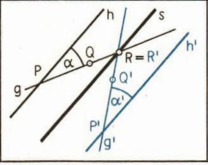
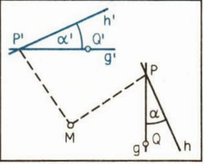
Verschiebung	Spiegelung	Drehung
		

Bild C 18

(a) Jede Strecke $\overline{PQ}$ ist ebenso lang wie ihre Bildstrecke $\overline{P'Q'}$.
(b) Das Bild jeder Geraden ist eine Gerade.
(c) Jede Gerade ist zu ihrer Bildgeraden parallel.
(d) Sind Geraden g und h zueinander parallel, so sind auch ihre Bildgeraden g' und h' zueinander parallel.
(e) Jeder Winkel α hat als Bild einen zu ihm gleich großen Winkel α'.
(f) Sind Geraden g und h zueinander senkrecht, so sind auch ihre Bildgeraden g' und h' zueinander senkrecht.
(g) Jede Gerade ist zu ihrer Bildgeraden senkrecht.

Aufgaben

1. Zeichne die Punkte $A\,(2;\,1)$, $B\,(5;\,1)$, $C\,(5;\,4)$ und $D\,(3;\,4)$ in ein Koordinatensystem!
Gibt es eine Verschiebung, Drehung oder Spiegelung, für die folgendes gilt?
a) $A'\,(6;\,2)$, $B'\,(9;\,2)$ **b)** $A'\,(2;\,3)$, $C'\,(3;\,4)$
c) $B'\,(6;\,1)$, $D'\,(8;\,4)$ **d)** $C'\,(5;\,4)$, $D'\,(5;\,6)$

2. Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{BC} = 3$ cm! Konstruiere das Bild von $ABCD$ bei den folgenden Abbildungen und begründe jeweils dein Vorgehen!
a) Spiegelung an AC **b)** Verschiebung $\overrightarrow{AC}$
c) Drehung um A mit dem Drehwinkel 90°

3. Stadtwappen sind oft axialsymmetrische Figuren. Das Bild C 19 zeigt die Hälfte des Wappens von Saßnitz.
Zeichne das vollständige Wappen in dein Heft!
Was stellt es dar? Welche Eigenschaften der Spiegelung hast du verwendet?

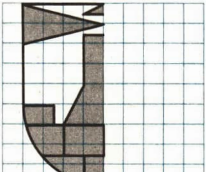


Bild C 19

4. Welche der folgenden Eigenschaften haben Verschiebungen, Spiegelungen bzw. Drehungen? Welche haben sie gemeinsam?
(1) Das Bild jedes Strahls ist ein Strahl.
(2) Das Bild jedes Kreises ist ein Kreis.
(3) Es gibt eine Gerade, die auf sich selbst abgebildet wird.
(4) Es gibt Punkte, die sich selbst als Bild haben.

5. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte A (3; 4), B (1; 3), C (4; 1), D (6; 2) und E (6; 6)! Zeichne das Dreieck ABC und die Gerade DE!
Ermittle das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei der Spiegelung an der Geraden DE!
Ermittle danach das Bild $A''B''C''$ des Dreiecks $A'B'C'$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{DE}$!
Vergleiche die Dreiecke ABC und $A''B''C''$ miteinander!

Bewegung und Kongruenz

4 Nacheinanderausführung von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen

● **13** Beschreibe, wie man im Bild C 20 die Teilfigur 1 abbilden kann auf die Teilfigur **a)** 3, **b)** 5, **c)** 6!

Im Bild C 20 findet man keine Spiegelung, Verschiebung oder Drehung, die die Teilfigur 1 auf die Teilfigur 6 abbildet. Führt man jedoch die Verschiebung $\overrightarrow{AG}$ und die Spiegelung an m nacheinander aus, dann wird die Teilfigur 1 auf die Teilfigur 6 abgebildet.

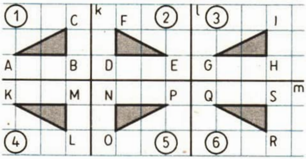


Bild C 20

Verschiebung $v = \overrightarrow{AG}$		Spiegelung s an m		Nacheinanderausführung von v und s	
Punkt	Bildpunkt	Punkt	Bildpunkt	Punkt	Bildpunkt
A	G	G	Q	A	Q
B	H	H	S	B	S
C	I	I	R	C	R

Durch Nacheinanderausführung von Spiegelungen, Verschiebungen oder Drehungen erhält man Abbildungen, die auch jedem Punkt eindeutig einen Bildpunkt zuordnen und die ebenfalls umkehrbar eindeutig sind.

● **14** Nenne das Bild von A, B, C und D (↗ Bild C 21) bei der Nacheinanderausführung
a) der Verschiebung $\overrightarrow{AE}$ und der Spiegelung an g,
b) der Spiegelung an g und der Verschiebung $\overrightarrow{AE}$!
Lege jeweils eine Tabelle (wie oben) an! Was stellst du fest?

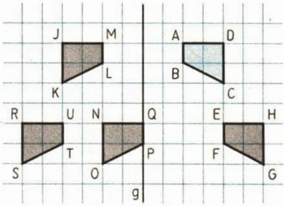


Bild C 21

Aufgaben

1. Beschreibe für die Bilder C 22a–c, wie durch Nacheinanderausführung von Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen die Figur U auf die Figur V abgebildet werden kann! Lege Tabellen an!

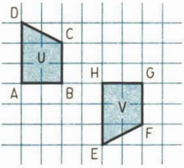


Bild C 22a

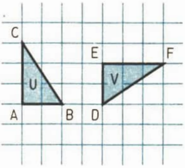


Bild C 22b

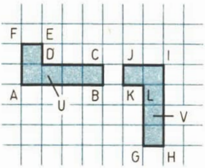


Bild C 22c

2. Zeichne die Punkte $A\,(1;\,1)$, $B\,(3;\,1)$, $C\,(1;\,4)$, $D\,(3;\,3)$, $E\,(5;\,1)$ und $F\,(5;\,6)$ in ein Koordinatensystem!
Ermittle das Bild des Dreiecks ABC bei der folgenden Abbildung! Lege Tabellen an!
a) Nacheinanderausführung der Verschiebung $\overrightarrow{AD}$ und der Spiegelung an EF
b) Nacheinanderausführung der Spiegelung an EF und der Verschiebung $\overrightarrow{AD}$

3. Zeichne unter Benutzung der Lochschablone die Punkte $P\,(4)$, $Q\,(5)$, $R\,(10)$, $S\,(14)$ und $T\,(15)$! Zeichne das Bild des Dreiecks PQR bei der Nacheinanderausführung der Spiegelung an ST und der Verschiebung $\overrightarrow{QR}$!

4.* Beschreibe, wie durch Nacheinanderausführen von Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen
a) das Fünfeck F_1 auf das Fünfeck F_3 (↗ Bild C 23),
b) das Viereck F_1 auf das Viereck F_4 (↗ Bild C 24)
abgebildet wird!
Lege jeweils eine Tabelle an!

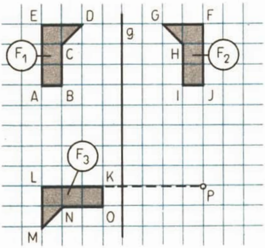


Bild C 23

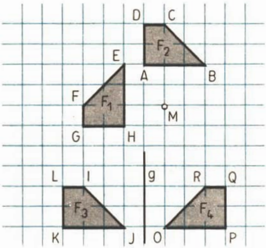


Bild C 24

5 Bewegung und Kongruenz von Figuren

● **15** **a)** Beschreibe, wie man auf die Fahrbahn einer Straße mehrere gleichartige Markierungen mit Hilfe einer Schablone aufbringen kann!

b) Warum braucht man für das Zuschneiden der Ärmel einer Bluse nur ein Schnittmuster (Bild C 25)? Wie muß man den Stoff falten, damit man das Schnittmuster nur einmal aufzulegen braucht?

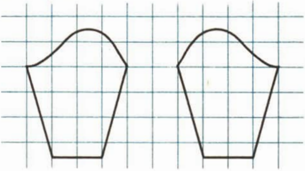


Bild C 25

Wir kennen (1) Verschiebungen, (2) Spiegelungen, (3) Drehungen und (4) Abbildungen, die man erhält, wenn man Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen nacheinander ausführt.
Wendet man eine der Abbildungen (1) bis (4) auf eine Figur F an, dann sieht die Bildfigur F' genauso aus wie die Originalfigur F. Würde man F ausschneiden, dann könnte F mit F' zur Deckung gebracht werden.
In der Mathematik nennt man die Abbildungen (1), (2), (3) und (4) **Bewegungen**.
Ferner legt man fest:

▶ 3 **DEFINITION: Eine Figur F_1 heißt kongruent (deckungsgleich) zu einer Figur F_2, wenn es eine Bewegung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.**

Man schreibt dafür kurz $F_1 \cong F_2$ (lies: F_1 ist kongruent zu F_2).
Im Bild C 26 gilt beispielsweise:
Figur 2 ≅ Figur 4, denn die Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ bildet die Figur 2 auf die Figur 4 ab (es gibt also eine Bewegung, die Figur 2 auf Figur 4 abbildet).
Im Bild C 26 gilt auch:
Figur 2 ≅ Figur 8, denn die Nacheinanderausführung der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ und der Spiegelung an m bildet die Figur 2 auf die Figur 8 ab.
Ähnlich kann begründet werden, daß Figur 4 ≅ Figur 2 und Figur 8 ≅ Figur 2 ist.
Allgemein gilt: Wenn $F_1 \cong F_2$, so auch $F_2 \cong F_1$.
Man liest deshalb $F_1 \cong F_2$ auch „F_1 und F_2 sind zueinander kongruent".

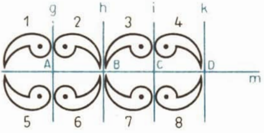


Bild C 26

● **16** **a)** Begründe, daß im Bild C 26 die Figuren 1 und 7 (1 und 8; 2 und 7) zueinander kongruent sind!

b) Welche Figuren im Bild C 27 sind zueinander kongruent? Gib zugehörige Bewegungen an!

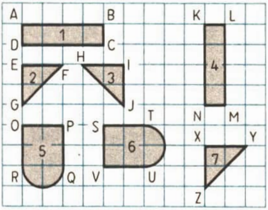


Bild C 27

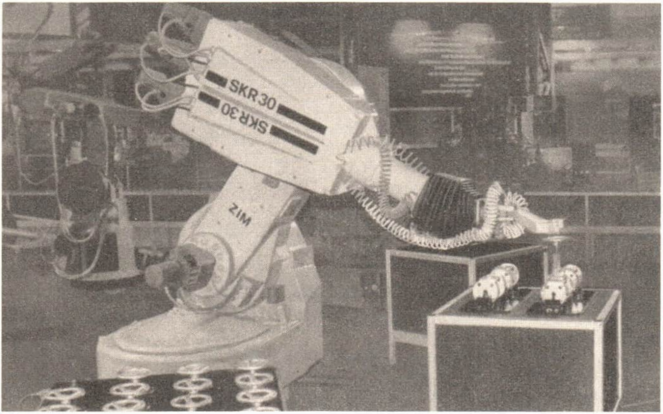


Bild C 28 Industrieroboter

Wir haben nur Bewegungen einer Ebene kennengelernt. Man kann auch räumliche Bewegungen betrachten und die Kongruenz für räumliche Figuren erklären.

Industrieroboter (↗ Bild C 28) müssen ein bestimmtes Bauteil *F* millimetergenau an die dafür vorgesehene Stelle *F′* bringen. Dazu muß dieses Bauteil beispielsweise im Raum verschoben und gedreht werden.
Gleichartige Trinkgläser, Vasen, Gehwegplatten, Autoteile usw. sind „zueinander kongruent". Zu ihrer Herstellung verwendet man in der Industrie ott vorgefertigte Formen.

Aufgaben

1. Gib Bewegungen an, bei denen die Figuren 2 bis 6 Bilder der Figur 1 sind (↗ Bild C 29)!

2. **a)** Zeichne mit der Lochschablone die Punkte *A* (8), *B* (10), *C* (15), *D* (14) und *E* (18)! Zeichne das Rechteck *ABCD*!
   b) Ermittle das Bild von *ABCD* bei der Nacheinanderausführung der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ und der Spiegelung an *DE*!
   c) Vergleiche *ABCD* mit der Bildfigur!

3. Im Bild C 31 gilt jeweils $F_1 \cong F_2$. Begründe!

4. **a)** Welche Figur im Bild C 30 ist kongruent zum Viereck 1?
   b) Welche Bewegung bildet das Viereck 1 auf diese Figur ab? Überlege vorher, welcher Punkt das Bild des Punktes *A* (*B*, *C*, *D*) sein wird!
   c) Löse die Aufgabe für Figur 3!

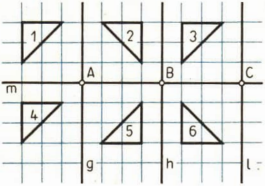


Bild C 29

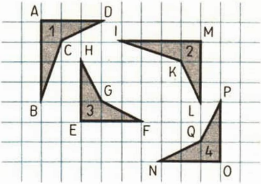


Bild C 30

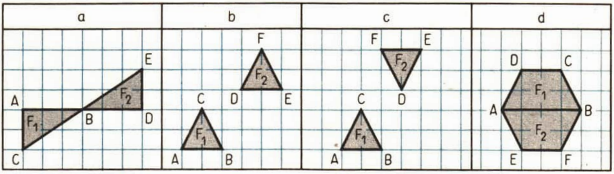


Bild C 31

6 Eigenschaften von Bewegungen

In der Lerneinheit C 3 haben wir gemeinsame Eigenschaften der Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen kennengelernt:

– Jede Strecke hat als Bild eine gleich lange Strecke.
– Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden sind parallele Geraden.

Bewegungen haben diese Eigenschaften auch.

● **17** Prüfe, ob folgende Eigenschaften für jede Bewegung gelten!

a) Die Bildgeraden zweier zueinander senkrechter Geraden sind stets zueinander senkrecht.

b) Eine Strecke und ihr Bild sind stets zueinander parallel.

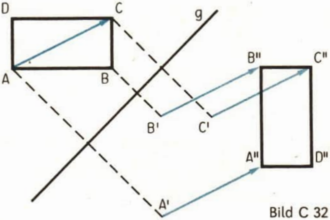


Bild C 32

Wenn wir das Bild einer Figur bei einer Bewegung konstruieren, nutzen wir Eigenschaften dieser Bewegungen aus.

■ **1** Gesucht ist das Bild des Rechtecks *ABCD* bei der Nacheinanderausführung der Spiegelung an *g* und der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ (↗ Bild C 32). Man braucht z. B. nur A'', B'' und C'' nach der Abbildungsvorschrift zu ermitteln. D'' kann man als Schnittpunkt der Parallelen zu $B''C''$ durch A'' und der Parallelen zu $A''B''$ durch C'' erhalten.

● 18 Im Beispiel C 1 würde es genügen, nur A'' und B'' nach der Abbildungsvorschrift zu konstruieren. Wie könnte man dann vorgehen?

Mit Hilfe gemeinsamer Eigenschaften aller Bewegungen kann man oft schnell feststellen, daß zwei gegebene Figuren nicht kongruent zueinander sein können. Dazu ist zu überlegen, daß es keine Bewegung gibt, die eine der Figuren auf die andere abbildet.

■ 2 Es soll begründet werden, daß die Rechtecke F_1 und F_2 im Bild C 33 einander nicht kongruent sind.
Die Strecken $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$, und $\overline{FG}$ sind gleich lang. Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ (bzw. $\overline{CD}$ und $\overline{GH}$) sind jedoch nicht gleich lang. Es kann also keine Bewegung geben, die F_1 auf F_2 abbildet.

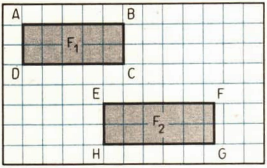


Bild C 33

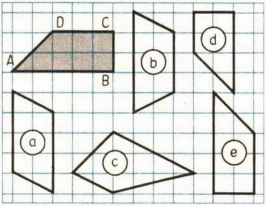


Bild C 34

● 19 Welche der Vierecke (a) bis (e) sind Bild des Trapezes $ABCD$ bei einer Bewegung (↗ Bild C 34)? Begründe!

Strecken und Winkel sind spezielle Figuren. Für Strecken haben wir festgestellt:

Bei einer Bewegung hat jede Strecke als Bild eine zu ihr gleich lange Strecke.

Umgekehrt gilt auch:

Wenn zwei Strecken gleich lang sind, dann gibt es eine Bewegung, die die eine Strecke auf die andere abbildet.

Dafür können wir nun auch sagen:

▶ 4 **SATZ: Einander kongruente Strecken sind gleich lang, und gleich lange Strecken sind einander kongruent.**

Als Lösung der Aufgabe „Zeichne eine Strecke $\overline{AB} = a = 3$ cm!" kann man viele Strecken dieser Länge zeichnen, aber alle diese Strecken sind einander kongruent.
Ebenso gilt für Winkel:

▶ 5 **SATZ: Einander kongruente Winkel sind gleich groß, und gleich große Winkel sind einander kongruent.**

Bei zwei gegebenen Strecken bzw. Winkeln kann man demnach auch durch Messen entscheiden, ob sie einander kongruent sind oder nicht.
Auch für andere Figuren kann man solche Entscheidungshilfen („Kriterien") finden.

● **20** Zwei gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $a = 3$ cm sind immer kongruent zueinander.
Gilt das auch für gleichseitige Vierecke (Fünfecke, Sechsecke, ...) (↗ Bild C 35)?

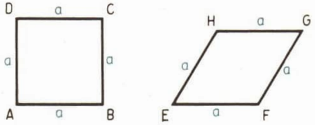
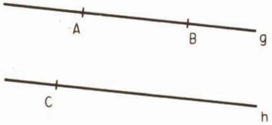


Bild C 35

Aufgaben

1. Im Bild C 36 ist $g \parallel h$. Ermittle das Bild D des Punktes B bei der Verschiebung $\overrightarrow{AC}$! Begründe dein Vorgehen! Gib mehrere Möglichkeiten an!



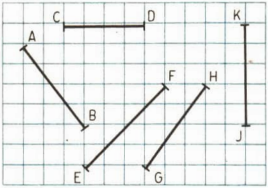


Bild C 36

Bild C 37

2. **a)** Welche Strecke im Bild C 37 ist zur Strecke $\overline{AB}$ kongruent? Begründe deine Behauptung!
b) Welche Strecken sind länger (kürzer) als $\overline{AB}$?

3. $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ seien Strecken gleicher Länge, und es gelte $AB \parallel CD$. Nenne mehrere Bewegungen, die $\overline{AB}$ auf $\overline{CD}$ abbilden!

4. Gib Eigenschaften an, die zwar für jede Verschiebung gelten, jedoch nicht für jede Bewegung!

5. Begründe mit den in der Zusammenfassung genannten Eigenschaften von Bewegungen die folgenden Aussagen!
a) Die Bilder von zueinander senkrechten Strecken sind wieder senkrecht zueinander.
b) Ist g Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$, so ist g' Mittelsenkrechte von $\overline{A'B'}$.

Zusammenfassung

Bewegung nennt man jede Verschiebung, Drehung bzw. Spiegelung sowie jede Nacheinanderausführung derartiger Abbildungen.

Zwei Figuren F_1 und F_2 heißen **kongruent zueinander** ($F_1 \cong F_2$), wenn es eine Bewegung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.

Eigenschaften der Bewegungen

Original	**Bild**
Gerade $g = AB$	Gerade $g' = A'B'$
Strecke $\overline{AB}$	Strecke $\overline{A'B'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$
Winkel α	Winkel α'; $\alpha = \alpha'$
Geraden g und h, $g \parallel h$	Geraden g' und h', $g' \parallel h'$
Geraden g und h, $g \perp h$	Geraden g' und h', $g' \perp h'$
Dreieck bzw. Viereck F	Dreieck bzw. Viereck F'
Kreis K um M mit dem Radius r	Kreis K' um M' mit dem Radius $r' = r$

Beziehungen zwischen Winkeln

7 Scheitelwinkel und Nebenwinkel

Gehen von einem Punkt zwei Strahlen aus, so gibt es zwei Winkel, die diese Strahlen als Schenkel haben (↗ Bild C 38). Von ihnen kann nur einer kleiner als 180° sein. Winkel, die kleiner als 180° sind, kann man durch Punkte auf ihren Schenkeln bezeichnen: Ist B der Scheitel des Winkels α (↗ Bild C 38a) und liegt A auf einem seiner Schenkel, C auf dem anderen, so schreibt man für α auch $\sphericalangle ABC$ oder $\sphericalangle CBA$.

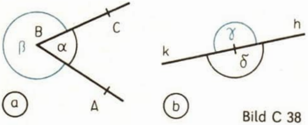


Bild C 38

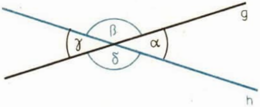


Bild C 39

● **21** Zeichne zwei einander schneidende Geraden g und h! Bezeichne wie im Bild C 39 die Winkel und ermittle ihre Größen!

α und γ im Bild C 40 heißen **Scheitelwinkel**.
Sie haben den Scheitelpunkt gemeinsam. Außerdem bildet jeder Schenkel des einen Winkels mit einem Schenkel des anderen Winkels eine Gerade.

α und β im Bild C 41 heißen **Nebenwinkel**.
Sie haben den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinsam. Die anderen Schenkel bilden eine Gerade.

Bild C 40

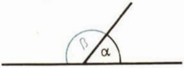


Bild C 41

α ist Scheitelwinkel von γ.
γ ist Scheitelwinkel von α.

α ist Nebenwinkel von β.
β ist Nebenwinkel von α.

● **22** Nenne für die Figur im Bild C 39 alle Paare von
a) Scheitelwinkeln,
b) Nebenwinkeln!

▶ **6** **SATZ (Scheitelwinkelsatz):**
Wenn α und γ Scheitelwinkel sind, so ist $\alpha \cong \gamma$.

● **23** Im Bild C 39 sind α und γ Scheitelwinkel, und es gilt $\alpha \cong \gamma$. Somit gibt es eine Bewegung, die α auf γ abbildet.
Gib eine solche Bewegung an!

▶ **7** **SATZ (Nebenwinkelsatz):**
Wenn α und β Nebenwinkel sind, so ist $\alpha + \beta = 180°$.

Ist ein Winkel ebenso groß wie seine Nebenwinkel, so ist es ein rechter Winkel.

● **24** **a)** Wie oft muß man im Auftrag C 21 nur messen, wenn man den Nebenwinkelsatz anwendet?
b) Prüfe, ob die folgende Aussage wahr ist:
Wenn $\alpha + \beta = 180°$, so sind α und β Nebenwinkel!

Vertauscht man in einem Satz die Voraussetzung mit der Behauptung, so spricht man von der **Umkehrung** dieses Satzes.

	Voraussetzung	**Behauptung**
SATZ:	α und β sind Nebenwinkel	$\alpha + \beta = 180°$
UMKEHRUNG:	$\alpha + \beta = 180°$	α und β sind Nebenwinkel.

Wie das Beispiel zeigt, ist die Umkehrung einer wahren Aussage nicht immer wahr. Deshalb muß stets geprüft werden, ob die Umkehrung gilt.

● **25** Bilde zu den folgenden Aussagen die Umkehrung! Entscheide, welche der erhaltenen Aussagen wahr sind!
a) Wenn $x = 3$ und $y = 2$, so $x + y = 5$.
b) Wenn $\alpha = 90°$ und $\beta = 90°$, so $\alpha + \beta = 180°$.
c) a sei eine natürliche Zahl. Wenn $4 \mid a$, so $2 \mid a$.
d) g, h, α und β liegen zueinander wie im Bild C 39. Wenn α ein rechter Winkel ist, so ist $\alpha \cong \beta$.

Aufgaben

1. Begründe, weshalb man die Winkelpaare (α, β) und (γ, δ) im Bild C 42 nicht als Nebenwinkel bezeichnen darf!

2. Ein Winkel eines Nebenwinkelpaares sei **a)** stumpf, **b)** spitz, **c)** ein Rechter. Was für ein Winkel ist jeweils der andere?

3. Ein Winkel eines Nebenwinkelpaares sei **a)** fünfmal so groß wie der andere, **b)** viermal so groß wie der andere. Gib die Größe jedes dieser Winkel an!

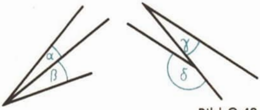


Bild C 42

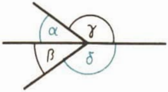


Bild C 43

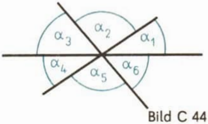


Bild C 44

4. Im Bild C 43 gelte $\alpha \cong \beta$. Was kannst du über γ und δ aussagen?

5. Stelle für das Bild C 44 alle Scheitelwinkelpaare zusammen!

6. Zeichne einen Winkel der angegebenen Größe und einen Nebenwinkel β von α! Gib die Größe von β an!

α	28°	74°	90°	115°
β				

7. Zwei Geraden schneiden einander (Winkel α, β, γ, δ wie im Bild C 39). Die Größe von α ist bekannt. Wie groß sind die anderen Winkel?

α	65°	110°	135°	160°
β				
γ				
δ				

8. **a)** Zeichne einen spitzen Winkel und sein Bild bei der Drehung um seinen Scheitelpunkt um 180°! Was stellst du fest?
   b) Zeichne einen rechten Winkel und sein Bild bei der Spiegelung an einem seiner Schenkel! Was stellst du fest?

9. Bilde die Umkehrung des Scheitelwinkelsatzes! Prüfe, ob sie wahr ist!

8 Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen

● 26 Die Größen der Winkel in den Bildern C 45a und b sollen ermittelt werden. Wie oft muß man dafür wenigstens messen?

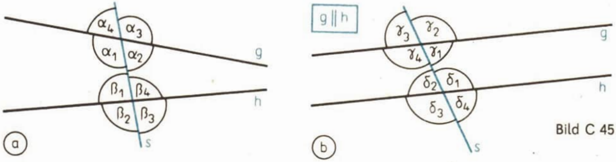


Bild C 45

Im Bild C 45 werden zwei Geraden (g und h) von einer dritten (s) geschnitten. Auch die Winkel im Bild C 46 entstehen so. Dabei heißen α und β **Stufenwinkel**.
Außer dem Paar (α; β) gibt es noch drei weitere Paare von Stufenwinkeln im Bild C 46. Sie sind gleichartig gekennzeichnet.

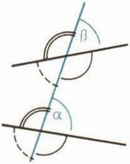


Bild C 46

● 27 **a)** Gib alle Paare von Stufenwinkeln im Bild C 45 an!

b) Bei Stufenwinkeln liegen die Schenkel auf den „geschnittenen Geraden" (g und h) auf derselben Seite der „schneidenden Geraden" (s). Dies ist auch bei den Winkeln γ und δ im Bild C 47 der Fall. γ und δ sind jedoch keine Stufenwinkel. Was ist bei ihnen anders als bei α und β im Bild C 46?

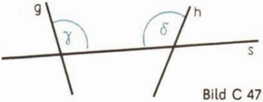


Bild C 47

Im Auftrag 26 muß man beim Bild 45a mindestens zwei Winkel messen. Bei der Figur im Bild 45b kommt man jedoch mit einer einzigen Messung aus, denn es gilt der

> **Stufenwinkelsatz:** Gegeben sind zwei Stufenwinkel α und β mit g und h als geschnittenen Geraden und s als schneidender Geraden.
> Wenn $g \parallel h$ ist, so ist $\alpha \cong \beta$.

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es, eine Bewegung anzugeben, die α auf β abbildet. Weil g parallel zu h ist, ist die Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ geeignet (↗ Bild C 48).

Voraussetzung: $g \parallel h$
Behauptung: $\alpha \cong \beta$
Beweis: Bei der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ gilt:
$\left.\begin{array}{l}A \text{ hat als Bild } B.\\ g \text{ hat als Bild } h.\end{array}\right\}$ (Eigenschaft der Verschiebung)
AB hat als Bild AB. (Gerade in Verschiebungsrichtung)
Also hat α als Bild β.
Folglich ist $\alpha \cong \beta$, *was zu beweisen war.*

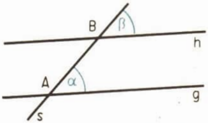
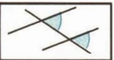


Bild C 48

Wir merken uns den Stufenwinkelsatz in einer Kurzform:

▶ 8 **SATZ: Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind stets gleich groß.**



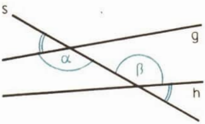


Bild C 49

Liegen zwei Winkel an geschnittenen Geraden so wie α und β im Bild C 49, so bezeichnet man sie als **Wechselwinkel**. Insgesamt gibt es auch hier vier Paare, von denen im Bild C 49 noch ein weiteres Paar gekennzeichnet ist.

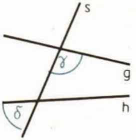


Bild C 50

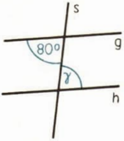


Bild C 51

● **28** **a)** Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen bei Wechselwinkeln auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden. Auch bei den Winkeln γ und δ im Bild C 50 ist dies so. Jedoch ist $(\gamma; \delta)$ kein Wechselwinkelpaar. Was ist hier anders als beim Wechselwinkelpaar $(\alpha; \beta)$ im Bild C 49?

b) Im Bild C 51 ist $g \parallel h$. Wie groß ist der Winkel γ? Begründe! (*Hinweis:* Benutze dabei den Scheitelwinkel- und den Stufenwinkelsatz!)

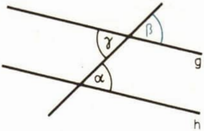
Allgemein gilt der **Wechselwinkelsatz:**

Gegeben sind zwei Wechselwinkel α und γ mit g und h als geschnittene Geraden und s als schneidende Gerade.

Wenn $g \parallel h$ ist, so ist $\alpha \cong \gamma$.

Ein Beweis dieses Satzes kann wie die Begründung im Auftrag C 28 erfolgen:

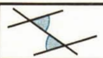
Bild C 52



Voraussetzung: $g \parallel h$
Behauptung: $\alpha \cong \gamma$
Beweis: (↗ Bild C 52)
(1) Aus $g \parallel h$ folgt $\alpha \cong \beta$. (Stufenwinkelsatz)
(2) Es gilt $\beta \cong \gamma$. (Scheitelwinkelsatz)
Aus (1) und (2) folgt $\alpha \cong \gamma$, *was zu beweisen war.*

Wir merken uns den Wechselwinkelsatz in Kurzform:

▶ 9 **SATZ: Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind stets gleich groß.**



● **29** Bilde die Umkehrung **a)** des Stufenwinkelsatzes, **b)** des Wechselwinkelsatzes! Benutze jeweils nicht die Kurzform, sondern die *Wenn-so*-Form!

Der Stufenwinkel- und der Wechselwinkelsatz haben wahre Umkehrungen.

● **30** Begründe deine Antwort!

a) Im Bild C 53 ist $\alpha = \beta = 60°$. Wie liegen die Geraden g und h zueinander?

b) Im Bild C 54 ist $\alpha = 70°$ und $\beta = 110°$. Wie liegen r und s zueinander?

Bild C 53

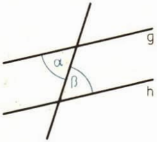


Bild C 54

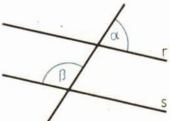
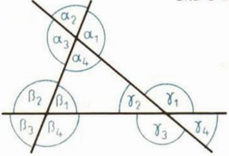


Bild C 55



Aufgaben

1. Stelle für das Bild C 55 **a)** Stufenwinkelpaare, **b)** Wechselwinkelpaare zusammen!

2. Zeichne ein Dreieck *ABC*! Zeichne die Parallele zu *AB* durch den Punkt *C*! Kennzeichne
   a) Stufenwinkel,
   b) Wechselwinkel!

3. Bezeichne und berechne alle Winkel **a)** im Bild C 56a, **b)** im Bild C 56b!

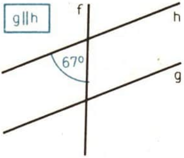


Bild C 56a

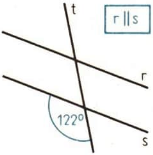


Bild C 56b

4. Überprüfe, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!
   a) Haben zwei Winkel einen Schenkel gemeinsam, so sind sie Nebenwinkel.
   b) Haben zwei Winkel einen Scheitel gemeinsam, so sind sie Scheitelwinkel.
   c) Werden zwei Geraden von einer dritten (in verschiedenen Punkten) geschnitten, so entstehen Stufen- und Wechselwinkel.
   d) Sind zwei Stufenwinkel gleich groß, so sind die geschnittenen Geraden nicht zueinander parallel.

5.* Im Bild C 57 ist $\alpha = 72°$; β ist 1,5mal so groß wie jeder seiner Nebenwinkel. Beweise, daß die Geraden *g* und *h* zueinander parallel sind!

6. Im Bild C 58 ist $\alpha = 100°$; γ ist um 20° kleiner als β. Begründe, daß $a \parallel b$ ist!

7. Begründe, daß die Geraden *c* und *d* im Bild C 59 parallel sind!

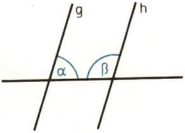


Bild C 57

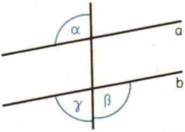


Bild C 58

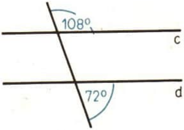


Bild C 59

8. Ermittle für die Bilder **a)** C 60, **b)** C 61, **c)** C 62 die Größe von α! Begründe!

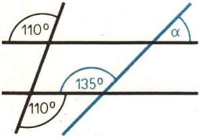


Bild C 60

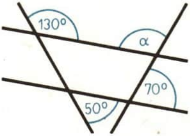


Bild C 61

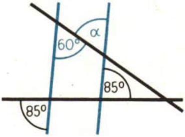
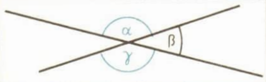
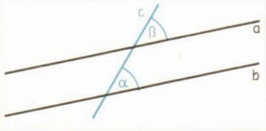
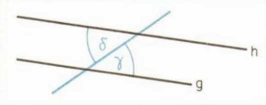


Bild C 62

Zusammenfassung

	**Scheitelwinkelsatz:** $\alpha \cong \gamma$ **Nebenwinkelsatz:** $\alpha + \beta = 180°$
	**Stufenwinkelsatz:** Wenn $a \parallel b$, so $\alpha \cong \beta$. **Umkehrung des Stufenwinkelsatzes:** Wenn $\alpha \cong \beta$, so $a \parallel b$.
	**Wechselwinkelsatz:** Wenn $g \parallel h$, so $\gamma \cong \delta$. **Umkehrung des Wechselwinkelsatzes:** Wenn $\gamma \cong \delta$, so $g \parallel h$.

Dreiecke

In alten Zeiten wurden die Häuser vielfach in Fachwerkbauweise errichtet. Starke Balken, die miteinander verbunden wurden, bildeten ein stabiles Gerüst. Die dabei entstehenden „Fächer" wurden mit Ziegeln oder auch nur mit Lehm ausgefüllt. Auf diese Weise war es möglich, stabile mehrstöckige Häuser zu errichten. Die Balken wurden so gefügt, daß vor allem an den Häuserecken, an den Giebeln und auch im Mittelteil Dreiecke entstanden; denn Dreiecke verhindern das seitliche Verrutschen der Balkenkonstruktion.

Bild C 63 Alte Fachwerkhäuser in Erfurt – Krämerbrücke

Nicht nur bei Fachwerkhäusern, auch bei Gittermasten, Brücken und anderen Bauwerken sorgen Dreiecke für Stabilität.

9 Einteilung der Dreiecke

Häufig bezeichnet man Eckpunkte, Seiten und Innenwinkel eines Dreiecks wie im Bild C 64, und man sagt zum Beispiel: „Die Seite a *liegt* dem Winkel α ***gegenüber***" oder „Der Winkel α *liegt* der Seite a ***gegenüber***" und auch „Der Seite a liegen die Winkel β und γ an".

● **31** Nenne **a)** den Scheitelwinkel und **b)** die Nebenwinkel von α im Bild C 64!

Jeder Nebenwinkel eines Innenwinkels eines Dreiecks heißt **Außenwinkel** dieses Dreiecks.

● **32** Nenne alle Außenwinkel des Dreiecks *ABC* (↗ Bild C 64)!

Wir kennen bereits eine Einteilung der Dreiecke nach den Längen der Seiten.

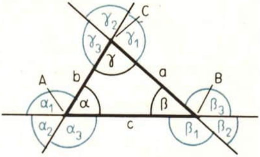


Bild C 64

Einteilung der Dreiecke nach den Seiten		
unregelmäßig	**gleichschenklig (ein Paar gleich langer Seiten)**	
(alle Seiten paarweise verschieden lang)	**nicht gleichseitig** (nicht alle Seiten gleich lang)	**gleichseitig** (alle Seiten gleich lang)
		

Die Menge aller gleichseitigen Dreiecke ist eine Teilmenge der Menge aller gleichschenkligen Dreiecke, denn jedes gleichseitige Dreieck ist auch gleichschenklig (↗ Bild C 65).

Man kann die Dreiecke auch nach ihren Winkeln einteilen. Ein Dreieck ist entweder spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig (↗ Bild C 66).

Menge aller Dreiecke

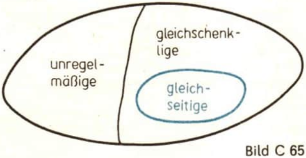


Bild C 65

Menge aller Dreiecke

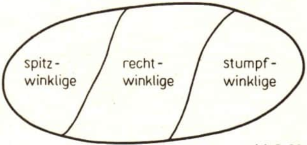
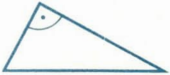


Bild C 66

Einteilung der Dreiecke nach den Innenwinkeln		
spitzwinklig	rechtwinklig	stumpfwinklig
		
alle Innenwinkel spitz	ein rechter Innenwinkel	ein stumpfer Innenwinkel

Aufgaben

1. Teile die im Bild C 67 dargestellten Dreiecke **a)** nach den Winkeln, **b)** nach den Seiten ein!
(Benutze zum Vergleich der Seitenlängen einen Zirkel!)

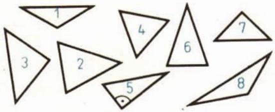


Bild C 67

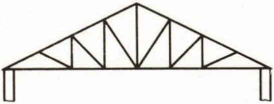


Bild C 68

2. Das Bild C 68 zeigt einen Dachbinder, wie er häufig in Lagerhäusern und Scheunen verwendet wird.
Bezeichne die auftretenden Dreiecke und teile sie **a)** nach Seiten, **b)** nach Winkeln ein!

3. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
a) Ein rechtwinkliges Dreieck hat zwei spitze Winkel.
b) Wenn ein Dreieck unregelmäßig ist, so ist es stumpfwinklig.
c) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es nicht gleichschenklig.
d) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, so ist es spitzwinklig.
e) Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist es nicht stumpfwinklig.

4.* Es gibt Dreiecke, die spitzwinklig und unregelmäßig sind. Deshalb steht im ersten Feld der Tabelle „ja". Fülle entsprechend die anderen Felder aus!

	unregelmäßig	**gleichschenklig**	**gleichseitig**
spitzwinklig	ja		
rechtwinklig			
stumpfwinklig			

5. Spiegele ein gleichseitiges Dreieck an jeder seiner drei Seiten! Von welcher Art ist das große Dreieck, das dabei entsteht? Begründe!

6. Bilde die Umkehrung des folgenden Satzes und untersuche, ob sie gilt:
   a) *Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es auch gleichschenklig.*
   b) *Wenn ein Dreieck stumpfwinklig ist, so hat es nur zwei spitze Winkel.*

7.* Aus drei Streichhölzern kann man ein gleichseitiges Dreieck legen.
   a) Wieviel Streichhölzer benötigt man mindestens für sechs gleichseitige Dreiecke, die zu diesem Dreieck kongruent sind? Lege eine solche Figur! Lege dann 4 Streichhölzer so um, daß vier gleichseitige Dreiecke entstehen, von denen je zwei zueinander kongruent sind!
   b) Sechs Streichhölzer reichen aus, um vier gleichseitige Dreiecke zu bilden, die zu diesem Dreieck kongruent sind.
   Wie ist das möglich?

8. Karlheinz sagt: „Ein Dreieck ist spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig, je nachdem, ob sein größter Winkel ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist."
   Was meinst du dazu?

9.* Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck!
   Versuche eine Gerade durch einen seiner Eckpunkte zu zeichnen, die dieses Dreieck in zwei spitzwinklige Dreiecke zerlegt!
   Ist das möglich? Begründe!

10 Sätze über die Winkel eines Dreiecks

● 33 An eine Hauswand soll eine 3 m lange Leiter gestellt werden. Aus Sicherheitsgründen soll der Anstellwinkel α (↗ Bild C 69) nicht kleiner als 50° und nicht größer als 70° sein. Wie hoch reicht die Leiter höchstens? Wie groß ist dann der Winkel β an der Hauswand?
Ist es möglich, β ebenfalls zwischen 50° und 70° zu wählen?
Untersuche diese Fragen anhand einer maßstäblichen Zeichnung!

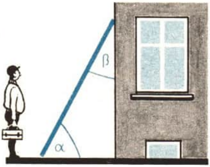
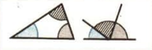


Bild C 69

So wie im rechtwinkligen Dreieck die beiden spitzen Winkel nicht unabhängig voneinander wählbar sind, so besteht in jedem Dreieck ein Zusammenhang zwischen den drei Innenwinkeln.[1]

▶ 10 **SATZ (Innenwinkelsatz): In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkelgrößen 180°.**



[1] Dieser Zusammenhang war bereits im antiken Griechenland bekannt. Er findet sich zum Beispiel bei EUKLEIDES (365–300 v. u. Z.), heute auch EUKLID genannt. Er verfaßte eine ausführliche Darstellung der Mathematik seiner Zeit, die noch im 19. Jahrhundert im Schulunterricht benutzt wurde.

Wenn man zeigt, daß α, β und γ (↗ Bild C 70) geeignet zusammengesetzt einen gestreckten Winkel ergeben, so ist der Satz bewiesen. γ und einer seiner Nebenwinkel ergeben zusammen einen gestreckten Winkel. Diesen Nebenwinkel kann man mittels der Parallelen durch C zu AB in die Winkel δ und ϵ zerlegen. Es läßt sich zeigen, daß $\alpha = \epsilon$ und $\delta = \beta$ ist. Dazu benutzen wir die Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen.

Voraussetzung: α, β und γ sind Innenwinkel des Dreiecks.
Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Beweis: Sind ϵ und δ die Winkel, die durch die Parallele entstehen, so gilt:

$\epsilon + \delta + \gamma = 180°$	(gestreckter Winkel)
$\delta = \beta$	(Wechselwinkelsatz)
$\epsilon = \alpha$	(Stufenwinkelsatz)
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$,	*was zu beweisen war.*

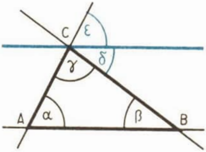
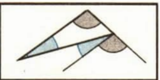


Bild C 70

● 34 Begründe, daß ein Dreieck höchstens einen rechten bzw. höchstens einen stumpfen Innenwinkel haben kann!

Anhand von Bild C 70 kann man auch den nachfolgenden Satz beweisen:

▶ 11 **SATZ (Außenwinkelsatz): Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist so groß wie die beiden nichtanliegenden Innenwinkel zusammen.**



● 35 Begründe folgende Aussage mit Hilfe von Satz C 11! Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

Aufgaben

1. Berechne für ein Dreieck ABC den dritten Innenwinkel!
   a) $\alpha = 57°$, $\beta = 75°$ **b)** $\beta = 23°$, $\gamma = 109°$ **c)** $\alpha = 90°$, $\gamma = 43°$

2. Wie groß sind jeweils die Innenwinkel, wenn folgendes bekannt ist?
   a) $\alpha = 74°$ und $\beta = \gamma$ **b)** $\alpha = 36°$ und $\beta = 2\gamma$ **c)** $\alpha + \beta = \gamma$

3. Berechne die Außenwinkel eines Dreiecks ABC mit zwei bekannten Innenwinkeln!
   a) $\alpha = 42°$, $\gamma = 83°$ **b)** $\beta = 77°$, $\gamma = 59°$ **c)** $\alpha = 21°$, $\beta = 113°$

4. In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Außenwinkel **a)** 141°, **b)** 127° groß. Wie groß sind die Innenwinkel?

5. Wie groß ist der Winkel BMD im Bild C 71, wenn $AB \parallel CD$ gilt?

6.* Im Bild C 72 ist $\gamma \cong \delta$.
   Begründe, daß $\alpha \cong \beta$ ist!

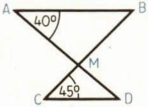


Bild C 71

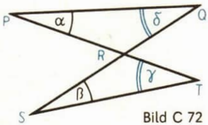


Bild C 72

7. Berechne alle Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks ABC, wenn folgendes gilt:
   a) $\gamma = 46°$; $\beta_1 = 73°$, **b)** $\beta = 38°$; $\alpha_1 = 81°$, **c)** $\alpha_1 = 110°$; $\gamma = 55°$!

8. In einem Dreieck sei ein Außenwinkel **a)** spitz, **b)** stumpf. Was für Winkel sind dann die anderen Außenwinkel? Begründe!

11 Gleichschenklige Dreiecke

● 36 **a)** Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck AMC mit $\overline{AM} = 3$ cm, $\overline{MC} = 4$ cm und $\sphericalangle AMC = 90°$!

b) Spiegle das Dreieck AMC an der Geraden MC! Bezeichne das Bild von A mit B! Was für eine Figur erhältst du?

c) Begründe, daß $\sphericalangle ACM \cong \sphericalangle MCB$ ist!

Wir wissen schon: Gleichschenklige Dreiecke sind axialsymmetrisch (↗ Bild C 73). Die Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte zur Basis. Sie zerlegt den Winkel an der Spitze in zwei kongruente Winkel; sie halbiert ihn.
Allgemein nennt man einen Strahl, der vom Scheitelpunkt eines Winkels ausgeht und diesen halbiert, **Winkelhalbierende** dieses Winkels.

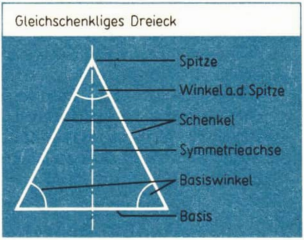


Bild C 73

● 37 Zu den Winkeln α, β und γ sind im Bild C 74 die Winkelhalbierenden l, m und n eingezeichnet. Wie groß sind die Teilwinkel?

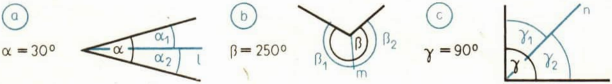


Bild C 74

Weil gleichschenklige Dreiecke axialsymmetrisch sind, sind ihre Basiswinkel kongruent.

▶ 12 **SATZ (Basiswinkelsatz): In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.**

Gleichseitige Dreiecke sind auch gleichschenklig. Bei ihnen kann jede Seite als Basis angesehen werden; sie haben sogar drei Symmetrieachsen.

● 38 Begründe, daß in jedem gleichseitigen Dreieck jeder Innenwinkel 60° groß ist!

Aufgaben

1. Kann ein Außenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks **a)** an der Spitze, **b)** an der Basis ein rechter (spitzer, stumpfer) Winkel sein?

2. Wie groß sind die Außenwinkel eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks?

3. Berechne jeweils die Innenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks!
a) Basiswinkel: 76° **b)** Basiswinkel: 29°
c) Winkel an der Spitze: 44° **d)** Winkel an der Spitze: 108°

4. Begründe, daß bei einem gleichschenkligen Dreieck die Außenwinkel an der Basis gleich groß sind!

5.* In einem gleichschenkligen Dreieck *ABC* ist ein Außenwinkel 150° groß. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Größe der Innenwinkel? Gib sie alle an!

6. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck! Zeichne eine Symmetrieachse ein! Was für Teildreiecke erhältst du? Wie groß sind die Innenwinkel der Teildreiecke?

7. Ronald will aus Papier einen Turm mit quadratischer Grundfläche und pyramidenförmigem Dach bauen. Das Dach wird aus kongruenten gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt (↗ Bild C 75). Berechne für die folgenden Größen der Basiswinkel die Winkel an der Spitze! Welche sind für Ronalds Vorhaben nicht geeignet?
a) 50° **b)** 30° **c)** 70° **d)** 45°

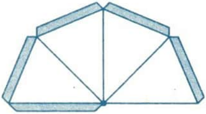


Bild C 75

12 Seiten-Winkel-Beziehungen

Der Basiswinkelsatz besagt: Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, so sind die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich groß. Es gelten auch die folgenden Sätze:

▶ 13 **SATZ: In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten auch der größere Winkel gegenüber.**

▶ 14 **SATZ: In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln auch die größere Seite gegenüber.**

● 39 **a)** Begründe die folgende Aussage! In jedem rechtwinkligen Dreieck ist diejenige Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, länger als jede der beiden anderen Seiten.
b) Welcher Punkt auf der Geraden *g* im Bild C 76 hat von *P* den kleinsten Abstand? Begründe!

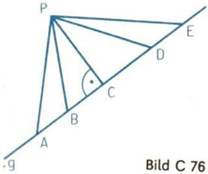


Bild C 76

Die Strecke $\overline{PC}$ im Bild C 76 bezeichnet man als Lot von *P* auf *g*, die Länge dieses Lotes ist der **Abstand des Punktes *P* von der Geraden *g*.**

Aufgaben

1. In einem gleichschenkligen Dreieck *ABC* ist ein Basiswinkel 50° groß.
a) Berechne die anderen Winkel!
b) Formuliere Aussagen über die Seiten!

2. In einem Dreieck ABC gilt: $\alpha = 30°$, $c = 4$ cm, $b = 5$ cm. Formuliere eine Aussage über γ und β!

3. **a)** In einem Dreieck ABC ist $\alpha = 35°$ und $\beta = 105°$. Ermittle γ! Formuliere Aussagen über die Seiten!
   b) In einem Dreieck ABC gilt $a = b = 5$ cm und $c = 6$ cm. Vergleiche die Innenwinkel miteinander!
   Welche Sätze hast du zur Lösung benutzt?

4. **a)** In einem gleichschenkligen Dreieck ABC ist $\alpha = 45°$. Formuliere Aussagen über die Winkel und Seiten!
   b) In jedem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ist jeder der beiden Basiswinkel 45° groß. Begründe diese Aussage!

5. Alle Außenwinkel eines Dreiecks ABC sind gleich groß. Was für ein Dreieck ist das? Begründe!

6. Bilde die Umkehrung des Basiswinkelsatzes! (Benutze die *Wenn-so*-Form auf Seite 128!) Ist sie wahr?

7. In einem Dreieck ABC sei $a > b > c$ und $\beta = 50°$. Sind folgende Größen für die Winkel α und γ möglich? Begründe!
   a) $\alpha = 100°$, $\gamma = 40°$ **b)** $\alpha = 40°$, $\gamma = 90°$ **c)** $\alpha = 110°$, $\gamma = 20°$
   d) $\alpha = 65°$, $\gamma = 35°$ **e)** $\alpha = 85°$, $\gamma = 45°$ **f)** $\alpha = 90°$, $\gamma = 30°$

8. Zeichne mit der Lochschablone die Punkte
   a) A (1), B (7) und C (12), **b)** A (10), B (8) und C (16)!
   Ermittle den Abstand des Punktes B von der Geraden AC!

9. Untersuche, ob folgende Aussagen gelten!
   a) Wenn in einem Dreieck der Winkel α größer ist als der Winkel β, dann ist auch a größer als b.
   b) Wenn in einem Dreieck der Winkel α doppelt so groß ist wie β, dann ist auch a doppelt so groß wie b.

13 Dreiecksungleichung

● 40 Eine Warenlieferung von Arlsheim nach Carlsburg kann über Biendorf oder Duserow erfolgen (↗ Bild C 77).
   a) Welche Möglichkeit wird der Kraftfahrer wohl wählen? Begründe!
   b) Wie müßte eine Straße gebaut werden, damit der Weg möglichst kurz ist?

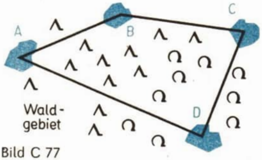


Bild C 77

Sind a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks, so gelten folgende Ungleichungen: $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

▶ 15 **SATZ (Dreiecksungleichung): In jedem Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite.**

● **41** Zeichne ein Dreieck! Vergleiche die Differenz der Längen zweier Seiten mit der Länge der dritten Seite!
Was stellst du fest?

Aufgaben

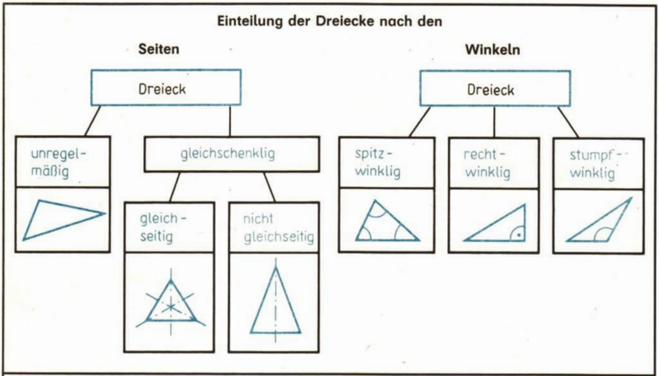
1. Gibt es Dreiecke mit folgenden Seitenlängen?
   a) $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm **c)** $a = 6$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6$ cm
   b) $a = 5$ cm, $b = 9$ cm, $c = 4$ cm **d)** $a = 4$ cm, $b = 9$ cm, $c = 3$ cm

2. Gib die Länge der dritten Seite so an, daß die Dreiecksungleichungen erfüllt sind!
   a) $a = 3{,}2$ cm; $b = 7{,}5$ cm **b)** $a = 3{,}8$ cm; $c = 3{,}8$ cm **c)** $c = 2{,}5$ cm; $a = 6{,}5$ cm

3. In einem Dreieck ABC ist $a = 7$ cm und $b = 2$ cm. Ferner ist bekannt, daß der Zahlenwert für c (bei der Einheit cm) auch eine natürliche Zahl ist.
   Gib alle Zahlenwerte für c an, die in Betracht kommen!

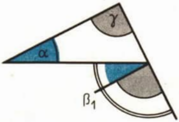
4.* In einem Dreieck ABC ist b doppelt so lang wie a. Was kann man über die Länge der Seite c sagen?

Zusammenfassung

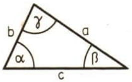


Innenwinkelsatz: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Außenwinkelsatz: $\beta_1 = \alpha + \gamma$

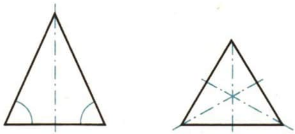


Dreiecksungleichung:
$a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.



Basiswinkelsatz:
Wenn $a = b$, so $\alpha = \beta$.
Umkehrung des Basiswinkelsatzes:
Wenn $\alpha = \beta$, so $a = b$.

Seiten-Winkel-Beziehung:
Wenn $a > b$, so $\alpha > \beta$,
wenn $\alpha > \beta$, so $a > b$.



Kongruenz von Dreiecken

14 Ausführbarkeit von Konstruktionen

Bei jeder Konstruktion soll die konstruierte Figur vorgegebene Eigenschaften haben. Zum Konstruieren verwenden wir Zirkel, Lineal, Zeichendreiecke und Winkelmesser.

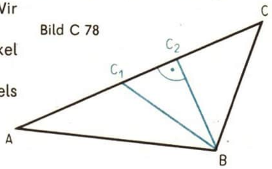
● 42 Konstruiere Rechtecke *ABCD* mit folgenden Eigenschaften:
- a) $\overline{AB} = a = 4{,}0$ cm,
- b) $\overline{AB} = a = 4{,}0$ cm; $\overline{BC} = b = 3{,}0$ cm,
- c) $\overline{AB} = a = 4{,}0$ cm; $\overline{BC} = b = 3{,}0$ cm; $\overline{AC} = e = 4{,}5$ cm!

Ist eine Konstruktion überhaupt ausführbar, so kann man zwei Fälle unterscheiden:
- Zwei konstruierte Figuren sind stets kongruent zueinander.
  Man nennt dann die Konstruktion eindeutig ausführbar.
- Es lassen sich Figuren konstruieren, die nicht zueinander kongruent sind.
  In diesem Fall ist die Konstruktion zwar ausführbar, sie ist aber nicht eindeutig ausführbar.

■ 3 Es ist ein Dreieck *ABC* zu konstruieren, dessen Seite $\overline{AB}$ eine Länge von 4 cm und dessen Winkel α eine Größe von 30° haben soll.
Ein solches Dreieck können wir folgendermaßen konstruieren (↗ Bild C 78):
1. Wir zeichnen eine 4 cm lange Strecke. Wir bezeichnen die Endpunkte mit *A* und *B*.
2. Wir tragen an den Strahl *AB* einen Winkel von 30° an.
3. Auf dem zweiten Schenkel dieses Winkels wählen wir einen Punkt *C*.

Das Dreieck *ABC* hat die verlangten Eigenschaften.

Bild C 78



Die im Beispiel C 3 geforderte Konstruktion ist nicht eindeutig ausführbar. Es lassen sich nämlich Dreiecke ABC, ABC_1, ABC_2, … zeichnen, die nicht zueinander kongruent sind.

Wenn nur eine Seite und ein dieser Seite anliegender Winkel gegeben sind, läßt sich ein Dreieck nicht eindeutig konstruieren.

● 43 Begründe mit Hilfe des Bildes C 79, daß sich ein Dreieck auch dann nicht eindeutig konstruieren läßt, wenn folgendes gegeben ist:
a) zwei Seiten,
b) zwei Winkel,
c) eine Seite und der gegenüberliegende Winkel!

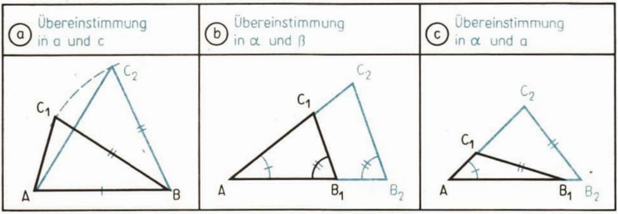


Bild C 79

Ein Dreieck ist mit zwei gegebenen Stücken nicht eindeutig konstruierbar.

Aufgaben

1. Zeichne mit Hilfe von Lineal und Winkelmesser folgende Figuren:
a) ein Dreieck ABC mit $\alpha = 30°$ und $\beta = 60°$,
b) ein Dreieck ABC mit $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$,
c) ein gleichseitiges Dreieck,
d) ein Rechteck $ABCD$, bei dem $\overline{AB}$ doppelt so lang ist wie $\overline{BC}$,
e) eine Strecke $\overline{PQ} = 4$ cm und ihre Mittelsenkrechte!
Überlege bei jeder Aufgabe, ob die Konstruktion ausführbar und ob sie sogar eindeutig ausführbar ist!

2. Belege durch je zwei Beispiele, daß die Konstruktion eines Dreiecks mit den angegebenen Stücken zwar ausführbar, aber nicht eindeutig ausführbar ist!
a) $\overline{BC} = 5$ cm, $\beta = 40°$ **b)** $\overline{BC} = 6$ cm, $\alpha = 30°$
b) $\beta = 100°$, $\gamma = 30°$ **d)** $a = b = 6$ cm

3. Es soll ein Quadrat konstruiert werden. Gib dafür Stücke vor, so daß die Konstruktion
a) ausführbar, aber nicht eindeutig ausführbar,
b) eindeutig ausführbar,
c) nicht ausführbar ist!

15 Eigenschaften zueinander kongruenter Dreiecke

Bauzeichner und Konstrukteure zeichnen häufig Dreiecke in die Baupläne ein. Dabei müssen Seiten und Winkel so vorgegeben werden, daß die Dreiecke eindeutig konstru-

ierbar sind. Zwei gegebene Stücke reichen dafür bekanntlich nicht aus. Reichen drei gegebene Stücke aus? Bei der Untersuchung dieser Frage stützen wir uns auf die Eigenschaften einander kongruenter Dreiecke. Für zwei kongruente Dreiecke (↗ Bild C 80) gibt es eine Bewegung, die das Dreieck *ABC* auf das Dreieck *DEF* abbildet.
Die Tabelle gibt die Bilder der Eckpunkte des Dreiecks *ABC* bei dieser Bewegung an.

Bewegung, die △ *ABC* auf △ *DEF* abbildet			
Punkt	*A*	*B*	*C*
Bildpunkt	*F*	*D*	*E*

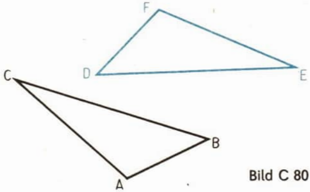


Bild C 80

● 44 Begründe, warum nur diese Zuordnung in Frage kommt! Gib in einer weiteren Tabelle die Bilder der Seiten (Winkel) des Dreiecks *ABC* an!
Wie läßt sich diese Bewegung aus Verschiebungen, Spiegelungen oder Drehungen zusammensetzen?

● 45 Es gibt auch eine Bewegung, die umgekehrt das Dreieck *DEF* auf das Dreieck *ABC* abbildet.
Stelle für diese Bewegung entsprechende Tabellen auf!

Man spricht bei zueinander kongruenten Dreiecken (und auch anderen einander kongruenten Figuren) von **einander zugeordneten** oder **einander entsprechenden** Punkten, Seiten und Winkeln. Zu jeder Seite des Dreiecks *ABC* gibt es also eine kongruente und damit gleich lange Seite des Dreiecks *DEF* und umgekehrt. Entsprechendes gilt für die Winkel.
Winkel und Seiten des Dreiecks werden auch als **Stücke des Dreiecks** bezeichnet. So kann man sagen, daß die *Dreiecke ABC und DEF in allen Stücken übereinstimmen.*
Allgemein gilt:

▶ 16 **SATZ: Wenn zwei Dreiecke einander kongruent sind, so stimmen sie in allen Stücken überein.**

■ 4 Es ist zu prüfen, ob zwei Dreiecke *KLM* und *PQR* mit den im Bild C 81 angegebenen Stücken einander kongruent sind.
Wegen der Seiten-Winkel-Beziehung ist im Dreieck *KLM* die Seite $\overline{ML} = 2{,}2$ cm am längsten, im Dreieck *PQR* die Seite $\overline{PR}$.
Also ist $\overline{PR} > 2{,}2$ cm.
Die Dreiecke *KLM* und *PQR* stimmen also nicht in allen Stücken überein. Deshalb können sie nicht zueinander kongruent sein.

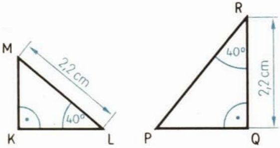


Bild C 81

Aufgaben

1. Die gleichschenkligen Dreiecke im Bild C 82 sind einander kongruent. Es gibt zwei Bewegungen, die das Dreieck *ABC* auf das Dreieck *DEF* abbilden.
   a) Gib für jede dieser Abbildungen die Bilder von *A*, *B* und *C* in Form einer Tabelle an!
   b) Gib an, wie sich diese Bewegungen aus Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen zusammensetzen lassen!

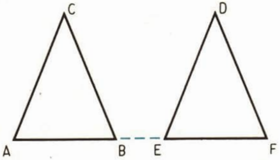


Bild C 82

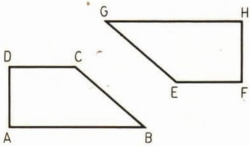


Bild C 83

2. Die Trapeze im Bild C 83 sind einander kongruent. Gib alle Paare einander entsprechender Eckpunkte, Seiten und Innenwinkel an!

3. Ein Dreieck *ABC* ist zum Dreieck *PQR* (↗ Bild C 84) kongruent. Ferner ist $\beta = 90°$ und $c > a$. Gib die Größe aller Seiten und Innenwinkel des Dreiecks *ABC* an!

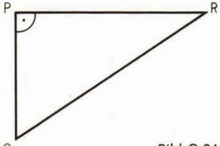


Bild C 84

4. Begründe, daß die Dreiecke im Bild C 85 nicht kongruent sind!

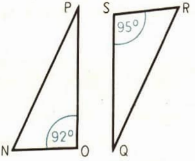


Bild C 85

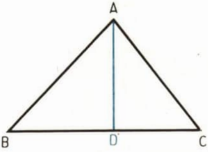


Bild C 86

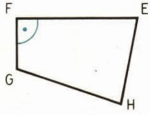


Bild C 87

5.* Das Dreieck *ABC* im Bild C 86 ist unregelmäßig, und es ist $AD \perp BC$. Sind die rechtwinkligen Teildreiecke einander kongruent? Begründe!

6. Ein Viereck *ABCD* ist kongruent zum Viereck *EFGH* (↗ Bild C 87). Der Innenwinkel bei *A* ist stumpf, und der Innenwinkel bei *D* ist ein rechter Winkel. Gib die Größe aller Seiten und Innenwinkel des Vierecks *ABCD* an!

16 Der Kongruenzsatz (sws)

Bei Dreiecken, von denen drei Stücke bekannt sind, gibt es folgende Möglichkeiten:

a	b	c	d	e	f
Drei Winkel und keine Seite	**Eine Seite und zwei Winkel**		**Zwei Seiten und ein Winkel**		**Drei Seiten und kein Winkel**
(www)	(wsw)	(sww)	(sws)	(SsW)	(sss)

Bild C 88

Betrachten wir zunächst den Fall a: Sind von einem Dreieck nur die drei Innenwinkel bekannt, so kann es nicht eindeutig konstruiert werden.

● **46** Begründe diesen Sachverhalt mit Hilfe des Bildes C 79!

Wir wenden uns nun dem Fall d zu (↗ Bild C 88).

■ **5** Es soll ein Dreieck *ABC* konstruiert werden, von dem die Seiten *a*, *b* und der Winkel γ gegeben sind.

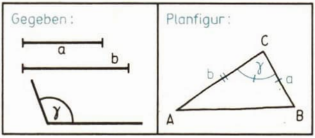


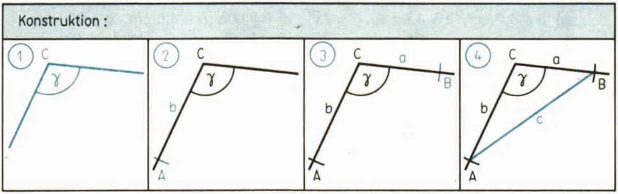
Bild C 89a

Konstruktionsbeschreibung (↗ Bild C 89b):

1. Wir zeichnen den Winkel γ mit dem Scheitel *C*.
2. Wir tragen auf einem Schenkel von γ von *C* aus *b* ab und erhalten *A*.
3. Wir tragen auf dem anderen Schenkel von *C* aus *a* ab und erhalten *B*.
4. Wir verbinden *A* und *B* miteinander.

Das Dreieck *ABC* hat die verlangten Eigenschaften.

Bild C 89b



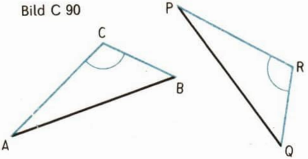
Im Beispiel C 5 sind die Stücke *a*, *b* und γ durch Strecken entsprechender Länge und durch einen Winkel entsprechender Größe gegeben. Man kann die Stücke aber auch durch Größenangaben mit Zahlenwert und Einheit geben.

● 47 **a)** Konstruiere ein Dreieck *ABC* mit $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm und $\alpha = 50°$!
b) Was vermutest du über die eindeutige Konstruierbarkeit des Dreiecks *ABC*?

▶ 17 **KONGRUENZSATZ (sws): Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie einander kongruent.**

Bei Strecken und Winkeln können wir bereits die Kongruenz durch Messen feststellen, also ohne auf Bewegungen zurückzugreifen. Mit dem Kongruenzsatz (sws) hat man eine solche Möglichkeit nun auch bei Dreiecken. Für den Nachweis der Kongruenz genügt es, bestimmte Stücke zu vergleichen.
Zum Beweis des Kongruenzsatzes (sws) ist zu zeigen, daß es unter den genannten Voraussetzungen stets eine Bewegung gibt, die ein Dreieck auf das andere abbildet.

Bild C 90



Voraussetzung:
Für Dreiecke *ABC* und *PQR* (↗ Bild C 90) gilt:
$\overline{AC} \cong \overline{PR}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ und $\sphericalangle\, ACB \cong \sphericalangle\, PRQ$.

Behauptung:
$\triangle\, ABC \cong \triangle\, PQR$

Beweis:
(1) Es gibt eine Bewegung, für die gilt:
  a) *C* wird abgebildet auf *R*,
  b) Strahl *CA* wird abgebildet auf Strahl *RP*,
  c) Strahl *CB* wird abgebildet auf Strahl *RQ*.
  } ($\sphericalangle\, ACB \cong \sphericalangle\, PRQ$)
(2) Bei dieser Bewegung gilt:
  a) *A* wird abgebildet auf *P* ($\overline{AC} \cong \overline{PR}$)
  b) *B* wird abgebildet auf *Q*. ($\overline{BC} \cong \overline{QR}$)
(3) Also gilt $\triangle\, ABC \cong \triangle\, PQR$, *was zu beweisen war.*
Wegen des Kongruenzsatzes (sws) ist die im Beispiel C 5 (bzw. im Auftrag C 47) geforderte Konstruktion eindeutig ausführbar.

Aufgaben

1. Konstruiere ein Dreieck *ABC* mit den folgenden Stücken! Begründe die eindeutige Konstruierbarkeit! Miß die Winkel und gib die Dreiecksart an!
a) $a = 5{,}7$ cm, $c = 4{,}9$ cm, $\beta = 73°$ **c)** $\gamma = 90°$, $a = 4{,}5$ cm, $b = 60$ mm
b) $b = 7{,}2$ cm, $c = 6{,}8$ cm, $\alpha = 85°$ **d)** $a = 77$ mm, $\beta = 90°$, $c = 5{,}3$ cm

2. Es soll die Entfernung zwischen zwei Punkten gemessen werden, zwischen denen sich ein Gebäude befindet. Von einem dritten Punkt werden die Entfernung zu den beiden Punkten und der Winkel gemessen, unter dem die beiden Punkte angepeilt werden.
Entnimm die Maße der Planfigur im Bild C 91! Zeichne das Dreieck im Maßstab 1:100! Begründe die eindeutige Konstruierbarkeit! Wie lang ist $\overline{AB}$ in Wirklichkeit?

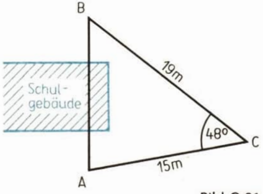


Bild C 91

3. Zeichne mit der Lochschablone die Punkte P (1), Q (2), R (5) und S (4)! Konstruiere ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = \overline{PQ}$, $\overline{BC} = \overline{QS}$ und $\beta = \sphericalangle\, PRQ$!
Begründe die eindeutige Ausführbarkeit der Konstruktion!
Miß alle Seiten und Winkel des Dreiecks ABC!

4. Konstruiere das Dreieck ABC aus Beispiel C 5, indem du mit der Seite $\overline{AC}$ beginnst! Beschreibe dein Vorgehen!

17 Weitere Kongruenzsätze

Wir beschäftigen uns nun mit der Konstruktion eines Dreiecks, von dem eine Seite und die beiden dieser Seite anliegenden Winkel gegeben sind (Fall b, ↗ Bild C 88).

6 Es soll ein Dreieck ABC konstruiert werden, von dem die Stücke c, α und β gegeben sind.

Gegeben:

$c = 2{,}8$ cm
$\alpha = 105°$
$\beta = 32°$

Planfigur:

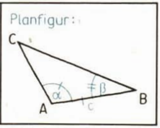


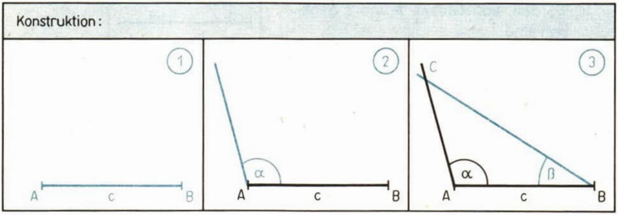
Bild C 92a

Konstruktionsbeschreibung
(↗ Bild C 92b):

1. Wir zeichnen $\overline{AB}$ mit der Länge c.
2. An den Strahl AB tragen wir den Winkel α an.[1)]
3. An den Strahl BA tragen wir den Winkel β an.
   (Das Antragen von α und β geschieht nach der gleichen Seite der Geraden AB.) Den Schnittpunkt der freien Schenkel von α und β bezeichnen wir mit C.

Das Dreieck ABC hat die verlangten Eigenschaften.

Bild C 92b



48 a) Wie müßte man vorgehen, wenn man die Konstruktion mit einem der beiden Winkel beginnt?
b) Kann man auch ein Dreieck ABC mit $c = 5{,}3$ cm, $\alpha = 105°$ und $\beta = 82°$ konstruieren? Begründe!
(Welche Bedingungen müssen die gegebenen Stücke erfüllen, damit die Konstruktion ausführbar ist?)
c) Was vermutest du über die eindeutige Konstruierbarkeit des Dreiecks im Beispiel C 6?

[1)] In Klasse 5 wurde vereinbart: Antragen eines Winkels an einen Strahl erfolgt stets so, daß der Anfangspunkt des Strahls Scheitelpunkt des Winkels ist.

Ein Dreieck ist aus einer gegebenen Seite und den beiden dieser Seite anliegenden Winkeln stets eindeutig konstruierbar, wenn die gegebenen Winkel zusammen kleiner als 180° sind.

▸ 18 **KONGRUENZSATZ (wsw): Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie einander kongruent.**

Dieser Kongruenzsatz läßt sich ähnlich beweisen wie der Kongruenzsatz (sws), worauf wir verzichten.

● 49 Die Dreiecke *ABC* und *PQR* im Bild C 93 stimmen in einer Seite und zwei Winkeln überein. Gilt $\triangle ABC \cong \triangle PQR$? Begründe!
Welcher Fall aus der Übersicht im Bild C 88 ist damit entschieden? Wie müßte ein Kongruenzsatz (sww) formuliert werden?

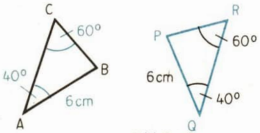


Bild C 93

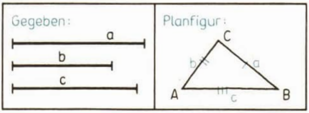
Der folgende Kongruenzsatz läßt sich auch mit Eigenschaften von Bewegungen beweisen, worauf wir verzichten.

▸ 19 **KONGRUENZSATZ (sss): Wenn zwei Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen, so sind sie einander kongruent.**

Aus diesem Kongruenzsatz folgt die Eindeutigkeit der Konstruktion eines Dreiecks mit drei gegebenen Seiten; damit ist der Fall f (↗ Bild C 88) untersucht.

■ 7 Es soll ein Dreieck *ABC* konstruiert werden, von dem *a*, *b* und *c* gegeben sind.

Bild C 94a



Lösungsüberlegung (↗ Bild C 94a):
Wenn man die Seite *c* zeichnet, so erhält man die Eckpunkte *A* und *B*. Der Punkt *C* soll von *A* die Entfernung *b* haben; also muß *C* auf dem Kreis um *A* mit dem Radius *b* liegen.
Der Punkt *C* soll von *B* die Entfernung *a* haben; also muß *C* auf dem Kreis um *B* mit dem Radius *a* liegen. Folglich muß *C* Schnittpunkt dieser beiden Kreise sein.

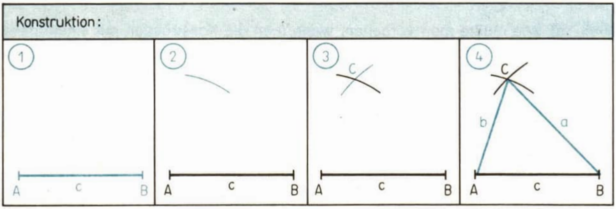


Bild C 94b

● **50** **a)** Beschreibe die Konstruktion anhand des Bildes C 94b!
b) Konstruiere ein Dreieck PQR mit $\overline{PQ} = 7{,}4$ cm, $\overline{PR} = 5{,}2$ cm und $\overline{QR} = 4{,}0$ cm und beschreibe die Konstruktion!
c) Welche Bedingungen müssen die gegebenen Seiten erfüllen, damit die Konstruktion ausführbar ist?

Von den im Bild C 88 aufgeführten Möglichkeiten bleibt nur noch der Fall e zu untersuchen.

■ **8** Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, von dem a, b und β gegeben sind.

Gegeben:
$a = 2{,}1$ cm
$b = 2{,}5$ cm
$\beta = 49°$

Planfigur:

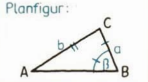


Bild C 95a

Lösungsüberlegung (↗ Planfigur im Bild C 95a):
Wenn man die Seite a zeichnet, so erhält man die Punkte B und C. A muß erstens auf dem freien Schenkel von β liegen. Zweitens muß A auf dem Kreis um C mit dem Radius b liegen. Also muß A Schnittpunkt des freien Schenkels von β und dieses Kreises sein.

● **51** Beschreibe die Konstruktion anhand des Bildes C 95b!

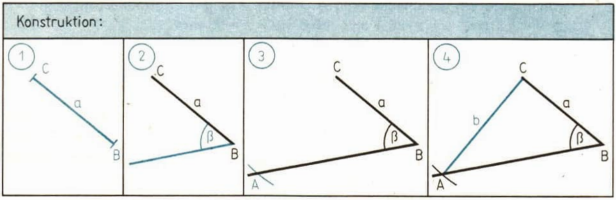


Bild C 95b

Das Bild C 96 enthält noch einmal das Ergebnis der Konstruktion mit eingetragenen Maßen für die gegebenen Stücke. Es zeigt:
A ergibt sich eindeutig als Schnittpunkt von Kreisbogen und Winkelschenkel, weil $\overline{AC} = b$ länger ist als $\overline{BC} = a$.
Ist die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite jedoch kürzer als die andere gegebene Seite, so kann es zwei nicht kongruente Lösungen der Aufgabe geben, aber auch gar keine.

● **52** Bei einer bestimmen Länge von b erhält man trotz $b < a$ eine einzige Lösung. Ermittle aus dem Bild C 96, bei welcher Länge von b das der Fall ist!

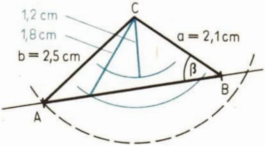


Bild C 96

Gesichert ist die Eindeutigkeit der Konstruktion, wenn der gegebene Winkel der größeren der beiden Seiten gegenüberliegt.
Dies kommt in folgendem Kongruenzsatz zum Ausdruck:

▶ 20 **KONGRUENZSATZ (SsW): Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie einander kongruent.**

Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir hier.

Aufgaben

1. Konstruiere ein Dreieck *ABC* mit folgenden Stücken! Begründe die eindeutige Konstruierbarkeit! Gib die Arten der konstruierten Dreiecke an! Ermittle die Größe der restlichen Seiten und Winkel!
   a) $a = 5{,}2$ cm; $\beta = 64°$; $\gamma = 56°$ **c)** $a = 4{,}5$ cm; $b = 6{,}1$ cm; $c = 5{,}3$ cm
   b) $c = 3{,}6$ cm; $\alpha = 92°$; $\beta = 48°$ **d)** $a = 6{,}3$ cm; $b = 5{,}1$ cm; $c = 7{,}2$ cm

2. Zeichne mit der Lochschablone die Punkte *A* (5), *B* (6), *C* (15) und *D* (12)!
   Konstruiere ein Dreieck *PQR* mit folgenden Stücken!
   a) $\overline{PQ} = \overline{AC}$, $\overline{QR} = \overline{BD}$, $\sphericalangle\, PQR = \sphericalangle\, ABC$ **b)** $\overline{PQ} = \overline{AC}$, $\overline{QR} = \overline{BC}$, $\overline{PR} = \overline{AD}$

3. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck *XYZ* mit folgenden Stücken!
   a) $x = 3{,}6$ cm, $y = z = 5{,}1$ cm **c)** $x = y = z = 55$ mm
   b) $y = 2{,}8$ cm, $x = z = 4{,}3$ cm **d)** $x = y = z = 1{,}00$ dm

4. Entscheide, ob sich ein Dreieck *ABC* mit folgenden Stücken konstruieren läßt! Begründe!
   a) $a = 7{,}0$ cm; $\alpha = 73°$; $\beta = 115°$ **e)** $a = 4{,}3$ cm; $b = 2{,}4$ cm; $c = 6{,}9$ cm
   b) $a = 8{,}4$ cm; $\beta = 115°$; $\gamma = 15°$ **f)** $a = 4{,}7$ cm; $b = 5{,}8$ cm; $c = 11{,}0$ cm
   c) $a = 5{,}1$ cm; $b = 4{,}3$ cm; $c = 6{,}2$ cm **g)** $a = 4{,}3$ cm; $b = 6{,}2$ cm; $\alpha = 95°$
   d) $b = 6{,}8$ cm; $\beta = 86°$; $\gamma = 98°$ **h)** $b = 5{,}2$ cm; $\beta = 92°$; $\gamma = 96°$

5. Konstruiere ein Dreieck *ABC* mit folgenden Stücken! Untersuche, ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist! Begründe!
   a) $b = 6{,}0$ cm; $c = 4{,}5$ cm; $\gamma = 40°$ **c)** $a = 65$ mm; $b = 75$ mm; $\beta = 48°$
   b) $a = 70$ mm; $c = 55$ mm; $\alpha = 90°$ **d)** $a = 3{,}0$ cm; $b = 6{,}0$ cm; $\alpha = 30°$

6.* Von sechs Dreiecken sind die in den Skizzen (↗ Bild C 97) angegebenen Stücke bekannt. Welche Dreiecke sind gewiß einander kongruent?

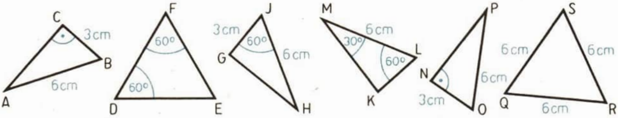


Bild C 97

18 Erste Anwendungen der Kongruenzsätze

● 53 Schon in Klasse 5 haben wir gelernt, wie man einen Winkel α mit dem Zirkel an einen Strahl s anträgt (↗ Bild C 98). Welchen Kongruenzsatz wendet man dabei an?

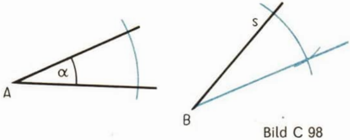


Bild C 98

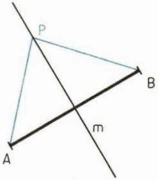


Bild C 99

Wir wissen, daß die Mittelsenkrechte m einer Strecke $\overline{AB}$ eine Symmetrieachse von $\overline{AB}$ ist. Deshalb hat jeder Punkt P auf m von A und B den gleichen Abstand (↗ Bild C 99).

► 21 **SATZ: Wenn ein Punkt P auf der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$ liegt, so sind $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ einander kongruent.**

● 54 Begründe diesen Satz!

Alle Punkte der Zeichenebene, die nicht auf m liegen, haben von A und B verschiedene Entfernungen. Deshalb gilt sogar der folgende Satz:

► 22 **SATZ: Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte (der Zeichenebene), die von A und B gleich weit entfernt sind.**

● 55 **a)** Begründe folgenden Sachverhalt mit Hilfe eines Kongruenzsatzes:
Liegen zwei Punkte A und B auf einer Parallelen zu einer Geraden g, so haben A und B den gleichen Abstand von g! (Benutze das Bild C 100!)

b) Welches ist die Menge aller Punkte, die von einer Geraden g den gleichen Abstand d haben?

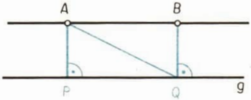


Bild C 100

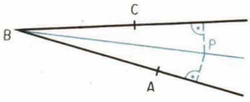


Bild C 101

Analog zum Satz C 21 gilt (↗ Bild C 101):

► 23 **SATZ: Wenn ein Punkt auf der Winkelhalbierenden eines Winkels ABC liegt, so hat er von den Schenkeln des Winkels den gleichen Abstand.**

● 56 Mit welchem Kongruenzsatz kann man den Satz C 23 begründen?

Dem Satz C 22 entsprechend gilt auch:

▶ 24 **SATZ: Die Winkelhalbierende eines Winkels *ABC* ist die Menge aller Punkte dieses Winkels, die von den Strahlen *BA* und *BC* gleichen Abstand haben.**

Aufgaben

1. **a)** Wir erkennen, ohne zu messen, daß die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$ im Quadratraster (↗ Bild C 102) gleich lang sind. Begründe!
   b)*Welchen Satz wenden wir außerdem noch an, wenn wir bemerken, daß $AB \parallel PQ$ ist?

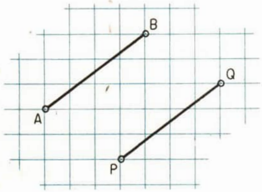


Bild C 102

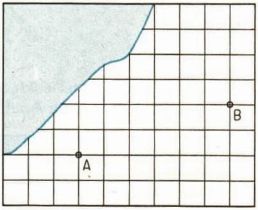


Bild C 103

2. Kinder aus zwei Ferienlagern (*A* und *B* im Bild C 103, Maßstab 1:100000) wollen eine Wanderung zum Seeufer machen und sich dort treffen. Der Treffpunkt soll von beiden Orten gleich weit entfernt sein.
   Wie findet man auf der Karte diese Stelle?
   Wie weit ist der Treffpunkt von den Orten entfernt?

3. Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Punkte *A* (12), *B* (17) und *C* (15)! *A*, *B* und *C* geben die Lage dreier einzeln liegender Häuser auf einer Karte im Maßstab 1:10000 an! Für die drei Häuser soll eine gemeinsame Postabholestelle eingerichtet werden, die von den drei Häusern gleich weit entfernt ist.
   Wo muß die Abholestelle angelegt werden? Wie weit ist sie von jedem der Häuser entfernt?

19 Geometrische Grundkonstruktionen

Als Bestandteile komplizierterer Konstruktionen sind oft auszuführen
(1) Halbieren einer Strecke,
(2) Halbieren eines Winkels,
(3) Fällen des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade,
(4) Errichten der Senkrechten zu einer Geraden *g* durch einen Punkt von *g*.

Wie man diese Grundkonstruktionen mit Hilfe von Lineal, Winkelmesser und Zeichendreiecken bewältigt, *wissen wir bereits*. Sie lassen sich aber auch allein mit Zirkel und

Lineal (ohne Benutzung der Meßskale) ausführen. Die dabei benutzten Verfahren, die bereits im antiken Griechenland vor über 2000 Jahren bekannt waren, lassen sich mit Hilfe der Dreieckskongruenzsätze begründen.
Die Konstruktion (1) steht in engem Zusammenhang mit Satz C 22. Man konstruiert eigentlich die Mittelsenkrechte der gegebenen Strecke und erhält damit gleichzeitig deren Mittelpunkt. Wir kennen das Verfahren schon als Konstruktion der Symmetrieachse zweier Punkte A und B.

■ 9 Die Strecke $\overline{AB}$ soll halbiert werden.

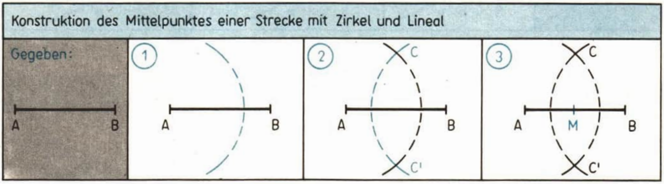


Bild C 104

Konstruktionsbeschreibung (↗ Bild C 104):

(1) Wir zeichnen um A einen Kreisbogen mit einem Radius r, wobei $r > \overline{AB} : 2$ sein muß.

(2) Mit dem gleichen Radius zeichnen wir um B einen Kreis. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind C und C'.

(3) Wir ermitteln den Schnittpunkt M der Geraden CC' mit $\overline{AB}$.

M ist der gesuchte Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

Begründung:

$\triangle ACC' \cong \triangle BCC'$	($\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC'} \cong \overline{BC'}$, $\overline{CC'} \cong \overline{CC'}$; (sss))
$\sphericalangle ACC' \cong \sphericalangle BCC'$	(entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken)
$\triangle ACM \cong \triangle BCM$	($\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\sphericalangle ACC' \cong \sphericalangle BCC'$, $\overline{CM} \cong \overline{CM}$; (sws))
$\overline{AM} \cong \overline{MB}$	(entsprechende Seiten in einander kongruenten Dreiecken)

M ist also Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

● 57 Erläutere mit Hilfe des Bildes C 105, wie man die besprochene Konstruktion zur Streckenhalbierung verändern kann!
Wenn die Strecke $\overline{AB}$ dicht am Rande des Zeichenblattes liegt, kann man so vorgehen.

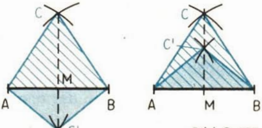


Bild C 105

Beim Halbieren einer Strecke haben wir es gewissermaßen mit zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis zu tun (↗ Bild C 105). Die Gerade CC' ist dabei Symmetrieachse beider Dreiecke.
Dieser Figur begegnen wir auch bei den anderen Grundkonstruktionen, wenn wir diese allein mit Zirkel und Lineal ausführen.

● **58** Beschreibe, wie mit Zirkel und Lineal die Grundkonstruktionen ausgeführt werden (↗ Bilder C 106 bis 108)!

Halbieren eines Winkels α mit Zirkel und Lineal

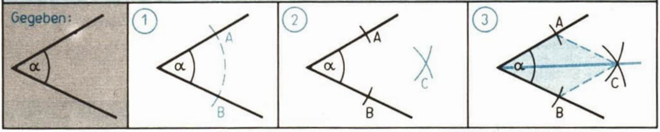


Bild C 106

Fällen des Lotes von P auf g mit Zirkel und Lineal

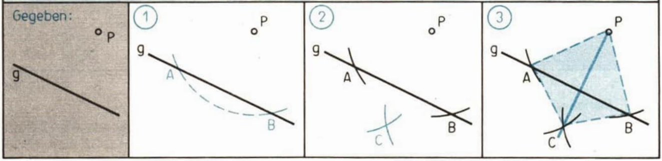


Bild C 107

Errichten der Senkrechten zu g durch P mit Zirkel und Lineal

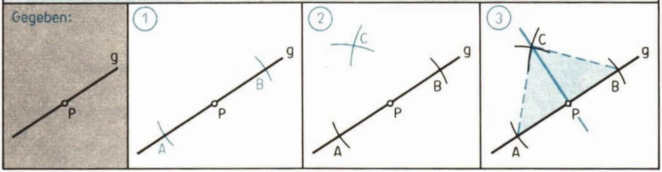


Bild C 108

Aufgaben

1. Zeichne Strecken der angegebenen Länge! Ermittle den Mittelpunkt der Strecke durch Schätzen! Konstruiere den Mittelpunkt mit Zirkel und Lineal! Vergleiche!
   a) $\overline{AB} = 4{,}3$ cm **b)** $\overline{CD} = 66$ mm **c)** $\overline{EF} = 5{,}6$ cm

2. Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Punkte A (9), B (15) und C (6)!
   Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$!

3. Zeichne die Strecke **a)** $\overline{AB} = 7{,}5$ cm, **b)** $\overline{CD} = 8{,}1$ cm!
   Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechten!

4. Zeichne die Winkel **a)** $\alpha = 58°$, **b)** $\beta = 64°$, **c)** $\gamma = 150°$, **d)** $\delta = 160°$!
   Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Winkelhalbierenden!

5. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P auf g!
   a) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Senkrechte zu g durch P!
   b) Konstruiere mit Lineal und Zeichendreieck die Senkrechte zu g durch P!

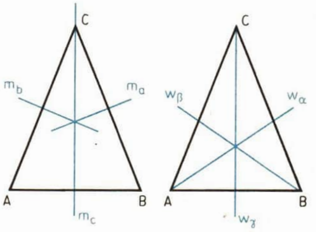
6. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P, der nicht auf g liegt! Zeichne die Senkrechte durch P zu g **a)** mit Zirkel und Lineal, **b)** mit Lineal und Zeichendreieck!

7. Zeichne ein Paar Nebenwinkel (Scheitelwinkel)! Halbiere beide Winkel! Wie liegen die erhaltenen Winkelhalbierenden zueinander? Begründe deine Aussage!

8. Konstruiere ein Rechteck $ABCD$ mit folgenden Stücken!
   a) $\overline{AB} = 2{,}7$ cm; $\overline{BC} = 4{,}5$ cm **b)** $\overline{AB} = 5{,}0$ cm; $\overline{AC} = 6{,}5$ cm

20 Besondere Linien in Dreiecken

Wir wissen: In gleichschenkligen Dreiecken ist die Symmetrieachse gleichzeitig **Mittelsenkrechte** zur Basis (↗ Bild C 109). Die **Winkelhalbierende** des Winkels an der Spitze liegt auf der Symmetrieachse. Für die anderen Seiten kann man auch die Mittelsenkrechten und für die Basiswinkel ebenfalls die Winkelhalbierenden einzeichnen. Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende bezeichnet man häufig so wie im Bild C 109. Derartige besondere Linien gibt es für alle Dreiecke.



● 59 **a)** Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und konstruiere seine Mittelsenkrechten m_a, m_b und m_c!
b) Verfahre ebenso mit einem stumpfwinkligen (rechtwinkligen) Dreieck! Was stellst du fest?

▶ 25 **SATZ: Die Mittelsenkrechten jedes Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

Wir beweisen diesen Satz mit Hilfe der Sätze C 21 und C 22.
Voraussetzung: m_a, m_b und m_c sind die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC.
Behauptung: m_a, m_b und m_c schneiden einander in einem Punkt (↗ Bild C 110).
Beweis: m_a und m_b schneiden einander im Punkt M.

$\overline{MB} \cong \overline{MC}$ (Satz C 21 für m_a)
$\overline{MC} \cong \overline{MA}$ (Satz C 21 für m_b)

$\overline{MB} \cong \overline{MA}$
Deshalb gehört
M zu m_c. (Satz C 22 für m_c)
Also schneiden m_a, m_b und m_c einander in einem Punkt M, *was zu beweisen war.*

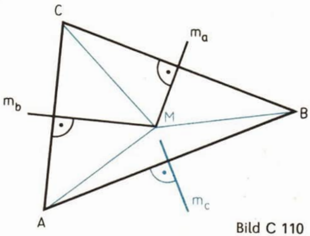


Bild C 110

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind Geraden. Winkelhalbierende haben wir bisher immer als Strahlen aufgefaßt; so ist im Bild C 111 w_α der Strahl AD. Häufig versteht man unter w_α auch die Strecke $\overline{AD}$. Dies ist z. B. der Fall, wenn man sagt, daß w_α 5,3 cm lang ist.

▸ 26 **SATZ: Die Winkelhalbierenden jedes Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

● 60 Begründe den Satz C 26 mit Hilfe der Sätze C 23 und C 24!

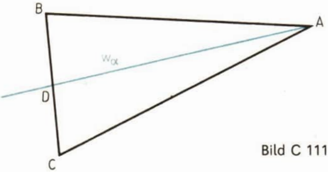


Bild C 111

Auch bei zwei anderen Arten besonderer Linien in Dreiecken handelt es sich um Strecken.

Verbindet man einen Eckpunkt eines Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite, so erhält man eine **Seitenhalbierende** dieses Dreiecks. Zum Beispiel ist s_c Seitenhalbierende des Dreiecks ABC (↗ Bild C 112).

Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks das Lot auf die durch die gegenüberliegende Seite bestimmte Gerade, so erhält man eine **Höhe**. Für das Dreieck im Bild C 112 sind beispielsweise h_b und h_c Höhen. Die Punkte D und E nennt man ihre Fußpunkte.

Auf den Beweis der folgenden zwei Sätze verzichten wir.

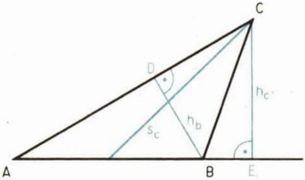


Bild C 112

▸ 27 **SATZ: Die Seitenhalbierenden jedes Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

▸ 28 **SATZ: Die Geraden, auf denen die Höhen eines Dreiecks liegen, schneiden einander stets in einem Punkt.**

Aufgaben

1. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges, **b)** ein stumpfwinkliges und **c)** ein rechtwinkliges Dreieck ABC!
   Konstruiere dann jeweils einen Punkt P mit
   $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$!
   Wie kannst du die Genauigkeit deiner Konstruktion mit dem Zirkel überprüfen?

2. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges, **b)** ein stumpfwinkliges und **c)** ein rechtwinkliges Dreieck ABC!
   Konstruiere dann jeweils die drei Winkelhalbierenden!
   Was läßt sich über den Abstand des Schnittpunktes der Winkelhalbierenden zu den Seiten sagen? Begründe!

3. Ein prismenförmiges Bauteil (↗ Bild C 113) soll transportiert werden. Es darf auf jeder Fläche gelagert werden. Kann dieses Teil auf einem Wagen durch eine Einfahrt transportiert werden, wenn die Ladefläche des Wagens 1,0 m über der Straßendecke liegt und die maximale Durchfahrtshöhe der Einfahrt 2,80 m beträgt? Untersuche die Frage mit Hilfe einer maßstäblichen Zeichnung!

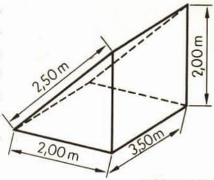


Bild C 113

4. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges, **b)** ein stumpfwinkliges und **c)** ein rechtwinkliges Dreieck und konstruiere die drei Höhen!

5.* Zeichne ein Dreieck *ABC* und durch die Eckpunkte jeweils die Parallelen zur gegenüberliegenden Seite!
Bezeichne die Schnittpunkte der Parallelen mit *P*, *Q* und *R*! Konstruiere für das Dreieck *ABC* die Höhen!
Was sind die durch die Höhen bestimmten Geraden im Dreieck *PQR*? Begründe!

6. Zeichne auf dicke Pappe ein Dreieck!
Konstruiere den Schnittpunkt *S* der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks! Schneide das Dreieck aus und setze das Dreieck im Punkt *S* (dem „Schwerpunkt") auf eine Stecknadelspitze! Was stellst du fest?

7. Zeichne mit der Lochschablone ein Dreieck *ABC* mit *A* (2), *B* (8) und *C* (23)!
Konstruiere die Winkelhalbierende w_α, die Seitenhalbierende s_b und die Höhe h_c dieses Dreiecks!
Bezeichne den Schnittpunkt von s_b und w_α mit *P*!
Kann *P* Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks *ABC* sein? Begründe!

21 Konstruktionen von Dreiecken, bei denen eine Höhe gegeben ist

■ 10 Es soll ein Dreieck *ABC* konstruiert werden, von dem die Seite *c*, die Höhe h_c und der Winkel α gegeben sind.

Lösungsüberlegung (↗ Planfigur im Bild C 114a): Beginnt man die Konstruktion mit der Seite *c*, so erhält man die Punkte *A* und *B*. *C* muß erstens auf dem freien Schenkel des an den Strahl *AB* angetragenen Winkels α liegen. Zweitens muß *C* auf einer Parallelen zu *AB* im Abstand h_c liegen.

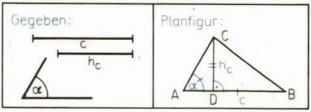


Bild C 114a

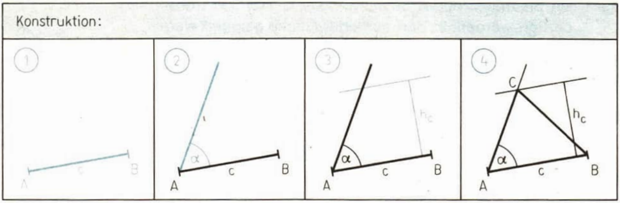


Bild C 114b

● 61 **a)** Beschreibe die Konstruktion anhand des Bildes C 114b!
b) Ist das Dreieck eindeutig konstruierbar? Begründe!

Die Aufgabe im Beispiel C 10 kann man auch lösen, indem man zuerst das „Teildreieck" *ADC* konstruiert.

● 62 Nach welchem Kongruenzsatz ist das Teildreieck *ADC* im Beispiel C 10 eindeutig konstruierbar? Wie erhält man dann den Punkt *B*?

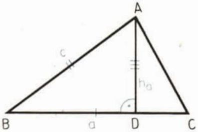


Bild C 115a

Falls eine Aufgabe mehrere Lösungen hat, wird dies beim Vorgehen über ein Teildreieck allerdings häufig übersehen.

● 63 **a)** Konstruiere ein Dreieck *ABC* mit $a = 4{,}8$ cm; $c = 3{,}5$ cm; $h_a = 2{,}6$ cm!
Beschreibe die Konstruktion (↗ Planfigur im Bild C 115a)
b) Begründe, daß es zwei Lösungen gibt (↗ Bild C 115b)!
c) Ändere den Wert für *c* so ab, daß das Dreieck nicht konstruierbar (eindeutig konstruierbar) wird!

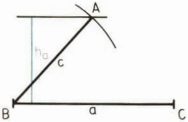


Bild C 115b

Aufgaben

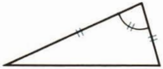
1. Konstruiere ein Dreieck *ABC* mit den angegebenen Stücken! Überlege, ob die Konstruktion ausführbar ist und ob sie sogar eindeutig ausführbar ist!
a) $b = 6{,}4$ cm; $\alpha = 54°$; $h_b = 5{,}2$ cm
b) $a = 3{,}3$ cm; $b = 4{,}4$ cm; $h_c = 2{,}9$ cm
c) $c = 4{,}7$ cm; $b = 5{,}3$ cm; $h_a = 4{,}4$ cm
d) $b = 8{,}1$ cm; $\alpha = 45°$; $h_a = 5{,}0$ cm

2.* Konstruiere ein Dreieck mit $a = 6{,}0$ cm, $\beta = 80°$ und $s_a = 5{,}2$ cm! Überlege, ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

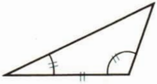
Zusammenfassung

Zwei Dreiecke sind einander kongruent,

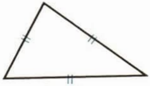
(a) wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (sws),



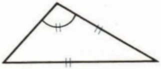
(b) wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen (wsw),



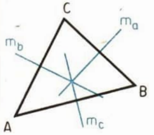
(c) wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (sss),

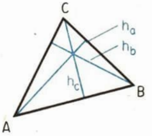


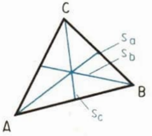
(d) wenn sie in zwei Seiten und dem Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen (SsW).

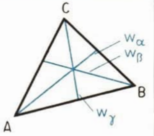


Für alle Dreiecke gilt: Es schneiden einander in jeweils einem gemeinsamen Punkt: (a) die Mittelsenkrechten, (b) die durch die Höhen bestimmten Geraden, (c) die Seitenhalbierenden und (d) die Winkelhalbierenden.









Vierecke und Vielecke

22 Vielecke

Dreiecke, Vierecke, Fünfecke usw. sind spezielle Vielecke. Ein **Vieleck** entsteht, wenn man einen „geschlossenen" Streckenzug zeichnet. Ein solcher Streckenzug geht von einem Punkt aus und führt zu ihm wieder zurück. Die Strecken heißen **Seiten**, ihre Endpunkte **Eckpunkte**. Vielecke nennt man auch ***n*-Ecke**; n ist die Anzahl der Eckpunkte.

● 64 **a)** Welche Zahlen kommen für n bei einem n-Eck in Betracht?

b) Bei dem Vieleck im Bild C 116 sind 6 Punkte A bis F als Endpunkte von Strecken gekennzeichnet. Dennoch ist es kein Sechseck, sondern ein Fünfeck. Erläutere!

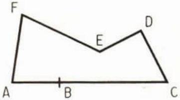
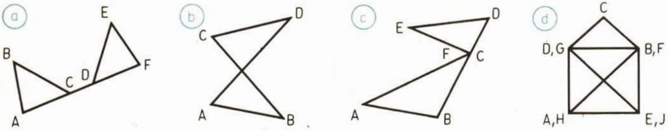


Bild C 116

Auch die Figuren im Bild C 117 sind geschlossene Streckenzüge. Man kann sie zum Beispiel von A aus über B, C, ... so durchlaufen, daß man zu A zurückgelangt. Trotzdem bezeichnen wir sie nicht als Vielecke. Bei Vielecken dürfen nur aufeinanderfolgende Strecken Punkte gemeinsam haben, und zwar gemeinsame Endpunkte.

Bild C 117



Fügt man zur Menge der Punkte eines Vielecks noch die von dieser „Vieleckslinie" umschlossenen „inneren" Punkte hinzu, so erhält man eine Vielecksfläche (↗ Bild C 118).

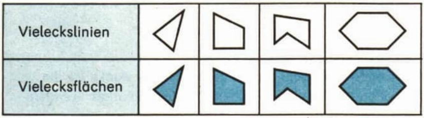


Bild C 118

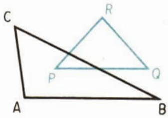


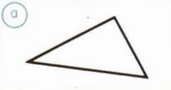
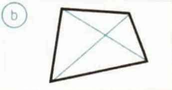
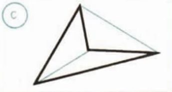
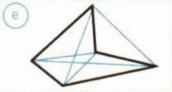
Bild C 119

Häufig bezeichnet man sowohl Vieleckslinien als auch Vielecksflächen als Vielecke. Dann muß aus dem Zusammenhang hervorgehen, was gemeint ist. Spricht man beispielsweise vom Flächeninhalt eines Rechtecks, so ist mit „Rechteck" eine Rechtecksfläche gemeint. Manchmal muß man jedoch die ausführliche Bezeichnung verwenden. So haben zum Beispiel im Bild C 119 die Dreieckslinien ABC und PQR genau zwei Punkte gemeinsam, die Dreiecksflächen hingegen unendlich viele.

Alle Vielecke lassen sich in Dreiecke zerlegen. Das kann durch **Diagonalen** geschehen. So heißen alle Verbindungsstrecken zweier Eckpunkte, sofern sie nicht Seiten sind.

Liegen alle Diagonalen eines Vielecks innerhalb des Vielecks, so nennt man das Vieleck *konvex*. Dreiecke heißen ebenfalls konvex. Bei allen anderen Vielecken gibt es sowohl konvexe als auch nicht konvexe (↗ Bild C 120).

Bild C 120

	Dreiecke	Vierecke	Fünfecke
	keine Diagonalen	zwei Diagonalen	fünf Diagonalen
konvex	a 	b 	d 
nicht konvex		c 	e 

● 65 a) Zeichne ein konvexes 6-Eck mit allen Diagonalen!
b) Zeichne ein nicht konvexes 6-Eck mit allen Diagonalen!

Jeder Eckpunkt eines Vielecks ist Scheitelpunkt eines Innenwinkels dieses Vielecks (↗ Bild C 121). Bei konvexen Vielecken ist jeder Innenwinkel kleiner als 180°. Bei nicht konvexen Vielecken ist wenigstens ein Innenwinkel größer als 180°.

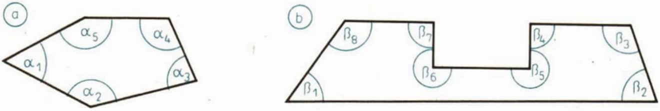


Bild C 121

Aufgaben

1. Das Bild C 122 zeigt Kristalle. Was für Vielecke treten als Begrenzungsflächen auf?

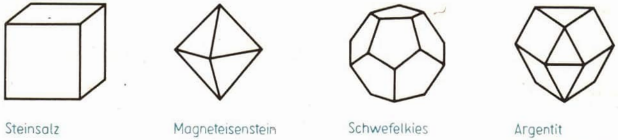


Bild C 122

2. Wieviel Punkte haben die Vielecklinie und die Gerade g im Bild C 123 gemeinsam?

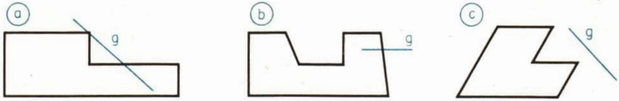


Bild C 123

3. Zeichne ein n-Eck und eine Gerade mit k gemeinsamen Punkten!
a) $n = 3,\ k = 0$ **c)** $n = 3,\ k = 2$ **e)** $n = 4,\ k = 2$ **g)** $n = 4,\ k = 4$
b) $n = 3,\ k = 1$ **d)** $n = 3,\ k = 3$ **f)** $n = 4,\ k = 3$ **h)** $n = 5,\ k = 3$

4. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A\,(0;\ 0)$, $B\,(6;\ 0)$, $C\,(4;\ 4)$, $D\,(8;\ 10)$ und $E\,(0;\ 10)$! Zeichne das Fünfeck $ABCDE$! Welche Innenwinkel sind spitze, rechte bzw. stumpfe Winkel? Miß alle Innenwinkel des Fünfecks! Ist das Fünfeck konvex?

5. Zeichne ein axialsymmetrisches Sechseck!
(*Hinweis:* Zeichne zunächst die Symmetrieachse!)

6. Zeichne **a)** ein konvexes, **b)** ein nicht konvexes Viereck mit zwei rechten Innenwinkeln!

7.* **a)** Wieviel Diagonalen gehen von jeder Ecke eines 5-Ecks (6-Ecks, 7-Ecks) aus?
b) Wieviel Diagonalen hat ein 5-Eck (6-Eck, 7-Eck) insgesamt?
c) Wieviel Diagonalen hat ein 10-Eck?

23 Vierecke – ihre Diagonalen und Innenwinkel

Die Eckpunkte, Winkel, Seiten und Diagonalen eines Vierecks werden meist wie im Bild C 124 bezeichnet. Man sagt, daß im Viereck *ABCD* die Seiten *a* und *b* **einander benachbart** sind, ebenso die Winkel α und β.
Die Seiten *a* und *c* liegen **einander gegenüber**, desgleichen die Winkel α und γ.
Man spricht auch kurz von Nachbarseiten und Nachbarwinkeln sowie von Gegenseiten und Gegenwinkeln.

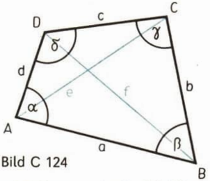
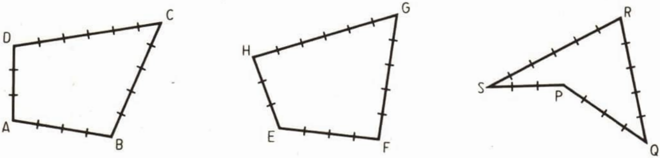


Bild C 124

Wir wissen, bei Dreiecken werden durch die (Längen der) drei Seiten auch die (Größen der) Innenwinkel festgelegt (Kongruenzsatz (sss)). Bei Vierecken ist das nicht so. Die Vierecke im Bild C 125 stimmen in den Seiten überein, sind aber nicht einander kongruent.



d C 125

Aus vier Stäben eines Metallbaukastens kann ein „Gelenkviereck" montiert werden. Ein solches Viereck ist nicht stabil. Stabilität erreicht man durch einen fünften Stab als Diagonale. Daraus wird die Bedeutung des Dreiecks als „starre Figur" für viele technische Belange, etwa für das Bauwesen (↗ S. 122), ersichtlich. Andererseits sind beispielsweise bei einem Wippkran (↗ Bild auf dem Titelblatt) auch bewegliche Vierecke wichtig.

● 66 Auch durch Festhalten eines Winkels kann man aus einem Gelenkviereck eine starre Figur gewinnen (↗ Bild C 126). Begründe die Starrheit dieser Figur mit Kongruenzsätzen für Dreiecke!

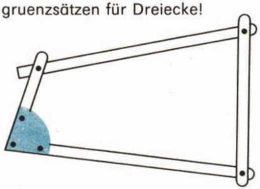


Bild C 126

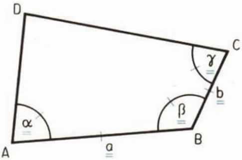


Bild C 127

■ 11 Es ist ein Viereck *ABCD* mit folgenden Stücken zu konstruieren:
$a = 6{,}0$ cm; $b = 5{,}5$ cm; $\alpha = 85°$; $\beta = 134°$; $\gamma = 78°$.

Lösungsüberlegung (↗ *Planfigur, Bild C 127*):
Das Dreieck *ABC* läßt sich nach dem Kongruenzsatz (sws) eindeutig konstruieren. (Dabei braucht die Dreieckseite $\overline{AC}$ als Diagonale des Vierecks nicht eingezeichnet zu werden.)
Den Eckpunkt *D* erhält man durch geeignetes Antragen der Winkel α und γ.

● 67 Führe die Konstruktion zum Beispiel C 11 aus und beschreibe sie! Ist die Konstruktion eindeutig ausführbar?

Für die eindeutige Konstruktion eines Vierecks sind wenigstens fünf Stücke nötig.

● 68 Läßt sich ein Viereck *ABCD* mit folgenden Stücken (eindeutig) konstruieren?

a) $a = 7$ cm; $\alpha = 90°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 90°$; $\delta = 90°$

b) $a = 7$ cm; $\alpha = 90°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 90°$; $\delta = 50°$

Wie bei Dreiecken haben die (Größen der) Innenwinkel bei Vierecken immer die gleiche Summe. Wie groß diese Summe ist, erkennt man am Rechteck.

▶ 29 **SATZ: In jedem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkelgrößen 360°.**

● 69 Beweise den Satz C 29!

Beachte: Jedes Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen, und es gibt nicht nur konvexe Vierecke!

Aufgaben

1. Eine Strecke $\overline{PQ}$ kann im Gelände nicht direkt vermessen werden. Ermittle die gesuchte Streckenlänge durch eine maßstäbliche Zeichnung
a) im Bild C 128, **b)** im Bild C 129!

Skizzen nicht maßstabgerecht

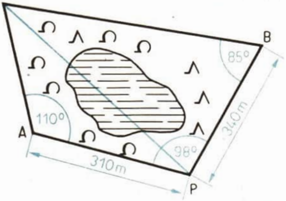


Bild C 128

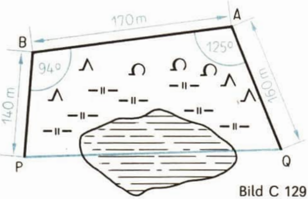


Bild C 129

2. Konstruiere ein Viereck *ABCD* mit folgenden Stücken!
a) $a = 4{,}5$ cm; $d = 3{,}8$ cm; $\alpha = 85°$; $\beta = 78°$; $\delta = 115°$
b) $b = 5{,}2$ cm; $c = 4{,}2$ cm; $\beta = 135°$; $\gamma = 120°$; $\delta = 32°$
Erläutere, warum die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

3. Konstruiere ein konvexes Viereck *ABCD* mit $a = 4{,}5$ cm; $b = 6{,}0$ cm; $c = 3{,}5$ cm; $\beta = 50°$!
Konstruiere ein nicht konvexes Viereck *ABCD* mit den gleichen Stücken!
Zeichne die Diagonalen in beide Vierecke ein!

4. Konstruiere Vierecke *ABCD*, von denen jeweils die folgenden Stücke gegeben sind! Überdenke jedesmal, ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!
a) $b = 5{,}5$ cm; $c = 3{,}4$ cm; $d = 4{,}6$ cm; $\gamma = 105°$; $\delta = 98°$
b) $a = 3{,}2$ cm; $b = 2{,}8$ cm; $d = 3{,}5$ cm; $\alpha = 90°$; $\delta = 65°$
c) $a = 3{,}6$ cm; $b = 4{,}3$ cm; $c = 3{,}5$ cm; $d = 2{,}4$ cm; $\gamma = 90°$

5. Konstruiere Vierecke $ABCD$, von denen jeweils die folgenden Stücke gegeben sind! Überdenke jedesmal, ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!
   a) $b = 4{,}2$ cm; $e = 5{,}5$ cm; $\beta = 82°$; $\gamma = 105°$; $\delta = 30°$
   b) $a = 4{,}2$ cm; $d = 2{,}3$ cm; $e = 2{,}9$ cm; $\alpha = 102°$; $\beta = 51°$
   c) $c = 3{,}5$ cm; $e = 5{,}0$ cm; $f = 5{,}8$ cm; $\gamma = 95°$; $\delta = 112°$
   d)* $d = 5{,}6$ cm; $e = 4{,}6$ cm; $f = 5{,}4$ cm; $\alpha = 66°$; $\delta = 51°$

6. Ermittle jeweils die fehlenden (Größen der) Innenwinkel im Viereck $ABCD$! Ist das Viereck konvex? Begründe!
   a) $\alpha = 73°$; $\beta = 128°$; $\gamma = 125°$ **d)** $\alpha = 14°$; $\gamma = 52°$; $\beta = \delta$
   b) $\alpha = 43°$; $\gamma = 24°$; $\delta = 67°$ **e)** $\delta = 90°$; $\alpha = \beta = \gamma$
   c) $\beta = 85°$; $\gamma = 205°$; $\alpha = \delta$ **f)** $\gamma = 51°$; $\alpha = \beta = \delta$

24 Parallelogramme

Wir wissen bereits: Parallelogramme sind spezielle Vierecke. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß jede Seite zu ihrer Gegenseite parallel ist.

▶ 30 **DEFINITION: *Parallelogramm* heißt jedes Viereck mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten.**

Parallelogramme werden durch jede Diagonale in zwei zueinander kongruente Dreiecke zerlegt (↗ Bild C 130).

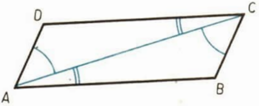


Bild C 130

● 70 **a)** Begründe anhand des Bildes C 130, daß im Parallelogramm $ABCD$ gilt: $\triangle ABC \cong \triangle ACD$!
b) Untersuche auch die Dreiecke ABD und BCD auf Kongruenz!

Aus der Kongruenz der Teildreiecke ergeben sich Eigenschaften aller Parallelogramme.

▶ 31 **SATZ *(Eigenschaften der Parallelogramme):* Für alle Parallelogramme gilt**
a) Je zwei Gegenseiten sind gleich lang.
b) Je zwei Gegenwinkel sind gleich groß.
c) Je zwei Nachbarwinkel haben die Summe 180°.

Eigentlich sind das drei verschiedene Sätze. Sie konnten zusammengefaßt werden, weil sie die gleiche Voraussetzung haben. Gesondert und außerdem in *Wenn-so*-Form ausgesprochen, lautet der erste Satz:

V sei ein Viereck.
Wenn V ein Parallelogramm ist,
so hat V zwei Paare gleich langer Gegenseiten.

● 71 Sprich auch die anderen beiden Sätze von ▶ C 31 gesondert und in *Wenn-so*-Form aus!

Vom ersten dieser Sätze gilt auch die Umkehrung:

▸ 32 **SATZ: *V* sei ein Viereck.**
Wenn *V* zwei Paare gleich langer Gegenseiten hat, so ist *V* ein Parallelogramm.

Man kann den Satz C 32 auch so aussprechen:
Jedes Viereck mit zwei Paaren gleich langer Gegenseiten ist ein Parallelogramm.

Beweis von Satz C 32:
Voraussetzung: Im Viereck *ABCD* gilt
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (↗ Bild C 131).

Behauptung: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

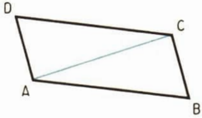


Bild C 131

Beweis: Wir zeichnen die Diagonale $\overline{AC}$.
Dann gilt:

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, $\overline{AC} \cong \overline{AC}$; (sss))
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ACD$ (entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken)
$AB \parallel CD$ (Umkehrung des Wechselwinkelsatzes)

Nun fehlt noch der Nachweis der Parallelität von *AD* und *BC*.

● 72 **a)** Welche Winkel sind dafür zu betrachten? Vervollständige den Beweis!
b) Formuliere auch Umkehrungen zu den Sätzen C 31b) und c)! Überdenke, ob auch sie wahr sind!

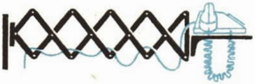


Bild C 132

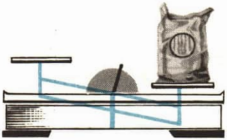


Bild C 133

Der Satz C 32 liegt den sogenannten Gelenkparallelogrammen zugrunde. Sie finden in der Praxis Anwendung (Bild C 132 und 133). Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms *ABCD* zerlegen dieses in zwei Paare kongruenter Dreiecke (↗ Bild C 134). Daraus ergibt sich der folgende Satz:

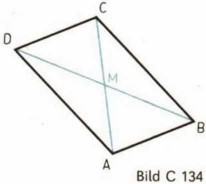


Bild C 134

▸ 33 **SATZ: In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.**

● 73 **a)** Begründe den Satz C 33!
b) Sprich den Satz C 33 in *Wenn-so*-Form aus!
Bilde die Umkehrung und überlege, ob sie wahr ist!

Die Sätze C 31 bis C 33 kann man bei der Konstruktion von Parallelogrammen nutzen.

■ 12 Es ist ein Parallelogramm zu konstruieren, in dem $a = 5{,}0$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $\alpha = 75°$ ist.

Lösungsüberlegung (↗ Planfigur, Bild C 135):

Das Dreieck *ABD* läßt sich gemäß dem Kongruenzsatz (sws) eindeutig konstruieren, wenn die Seite *d* bekannt ist. Nach Satz C 31a) ist $b = d$. Also ist mit *b* auch *d* gegeben und kann zur Konstruktion benutzt werden. Damit sind die drei Eckpunkte *A, B, D* des Parallelogramms festgelegt. Den vierten Eckpunkt *C* kann man durch Parallelenkonstruktion erhalten.

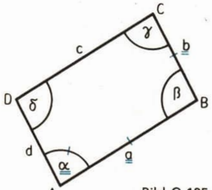


Bild C 135

● 74 **a)** Führe die Konstruktion zum Beispiel C 12 aus und beschreibe sie! Ist sie eindeutig ausführbar?

b) Wie kann man *C* anders als durch Zeichnen von Parallelen erhalten?

c) Man kann auch zuerst die drei Eckpunkte *A, B, C* festlegen. Welchen Teil des Satzes C 31 muß man dann anwenden? Durchdenke noch andere Möglichkeiten!

Aufgaben

1. Im Parallelogramm *ABCD* sei jeweils der folgende Winkel bekannt. Berechne die übrigen Winkel!
a) $\alpha = 68°$ **b)** $\beta = 74°$ **c)** $\beta = 124°$ **d)** $\gamma = 95°$
e) $\gamma = 118°$ **f)** $\delta = 60°$ **g)** $\alpha = 75°$ **h)** $\delta = 45°$

2. Es sei *ABCD* ein Parallelogramm. Dann gibt es eine Bewegung, die *ABCD* auf sich selbst abbildet und bei der *C* das Bild von *A* ist. Gib die Bilder der Eckpunkte *B, C* und *D* an! Welches Bild haben die Seite *a* und der Winkel β? Was ist das für eine Bewegung?

3. Zeichne ein Parallelogramm *ABCD*! Verlängere die Seite $\overline{AB}$ über *B* hinaus und die Seite $\overline{AD}$ über *D* hinaus jeweils um sich selbst! Bezeichne die Endpunkte der Verlängerungen mit *E* und *F*! Ist *C* der Mittelpunkt von $\overline{EF}$?
Ist das bei jedem Parallelogramm so? Begründe!

4.* Beweise den folgenden Satz:
Wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten einander parallel und gleich lang sind, so ist es ein Parallelogramm!

5. Konstruiere Parallelogramme *ABCD* mit folgenden Stücken!
a) $a = 2{,}4$ cm; $b = 4{,}8$ cm; $\beta = 74°$ **c)** $a = 5{,}8$ cm; $b = 3{,}6$ cm; $e = 4{,}5$ cm
b) $c = 3{,}6$ cm; $d = 2{,}6$ cm; $\delta = 110°$ **d)** $b = 2{,}5$ cm; $e = 4{,}7$ cm; $\beta = 98°$
Gib die restlichen Stücke an! Erläutere, warum die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

25 Besondere Parallelogramme

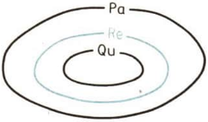


Bild C 136

Wir wissen bereits, daß Rechtecke besondere Parallelogramme und Quadrate spezielle Rechtecke sind (↗ Bild C 136).
Entsprechend kann man für eine Definition des Rechtecks den Begriff *Parallelogramm* benutzen, für eine Definition des Quadrats den Begriff *Rechteck*:

Rechtecke sind Parallelogramme, deren Innenwinkel sämtlich rechte Winkel sind.
Quadrate sind Rechtecke, deren vier Seiten gleich lang sind.

● 75 Warum genügt es, bei der Definition des Rechtecks das Vorhandensein (mindestens) eines rechten Winkels als Innenwinkel zu fordern?

▶ 34 **DEFINITIONEN:**
a) *Rechteck* heißt jedes Parallelogramm mit einem rechten Winkel als Innenwinkel.
b) *Quadrat* heißt jedes Rechteck mit gleich langen Nachbarseiten.

Da Rechtecke besondere Parallelogramme sind, haben sie alle Eigenschaften, die in Lerneinheit C 24 herausgestellt wurden. Darüber hinaus läßt sich bei ihnen noch eine Aussage über die Länge der Diagonalen machen.

▶ 35 **SATZ: In jedem Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.**

● 76 **a)** Beweise den Satz C 35 über den Nachweis der Kongruenz zweier Dreiecke im Rechteck *ABCD* (↗ Bild C 137)!
b) Welche besondere Eigenschaft haben die Diagonalen von Quadraten noch zusätzlich?

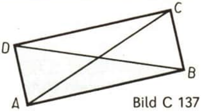


Bild C 137

Über die Eigenschaften hinaus, die alle Parallelogramme haben, gilt für Quadrate:
Nachbarseiten sind gleich lang.
Innenwinkel sind rechte Winkel.
Für Rechtecke als besondere Parallelogramme ist nur eine dieser Eigenschaften charakteristisch. Parallelogramme, bei denen lediglich die erste besondere Eigenschaft der Quadrate gefordert wird, heißen **Rhomben** (Singular: *der Rhombus*).

▶ 36 **DEFINITION: Rhombus heißt jedes Parallelogramm mit gleich langen Nachbarseiten.**

● 77 Konstruiere ein Viereck *ABCD*, in dem $a = b = c = d = 4$ cm ist! Was für ein Viereck erhältst du?

Statt Rhomben als Parallelogramme mit gleich langen Nachbarseiten zu definieren, kann man sie auch als Vierecke mit vier gleich langen Seiten charakterisieren. (Warum?)

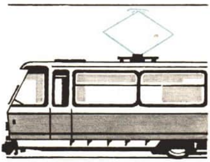


Bild C 138

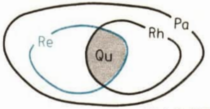


Bild C 139

● 78 Erläutere das Bild C 139, in dem *Rh* die Menge aller Rhomben bedeutet!

Bei Quadraten stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Diese Eigenschaft haben sogar alle Rhomben.

▶ 37 **SATZ: In jedem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.**

Für den Beweis dieses Satzes genügt es zu zeigen, daß im Rhombus *ABCD* mit dem Diagonalenschnittpunkt *M* (↗ Bild C 140) die Winkel *AMB* und *BMC* kongruent, also gleich groß sind. (Warum?)

Voraussetzung: Viereck *ABCD* ist Rhombus, *M* Schnittpunkt von *AC* und *BD* (↗ Bild C 140)

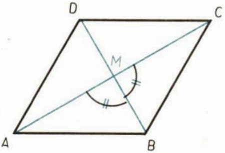


Bild C 140

Behauptung: $\sphericalangle\, AMB \cong \sphericalangle\, BMC$

Beweis:

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (Rhombuseigenschaft nach Definition)
$\overline{AM} \cong \overline{MC}$ (Diagonalen im Parallelogramm halbieren einander, Satz C 33)
$\overline{BM} \cong \overline{BM}$

$\triangle\, ABM \cong \triangle\, BCM$ (Kongruenzsatz (sss))

$\sphericalangle\, AMB \cong \sphericalangle\, BMC$ (Entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken), *was zu beweisen war.*

Aufgaben

1. a) Falte ein Blatt Papier und schneide zwei kongruente Dreiecke aus! Lege aus ihnen ein Parallelogramm!
   b) Wieviel verschiedene (d. h. einander nicht kongruente) Parallelogramme kann man aus zwei unregelmäßigen (aus zwei gleichschenkligen, aber nicht gleichseitigen, aus zwei gleichseitigen) Dreiecken legen? Begründe!
   c) Wie müssen die Dreiecke beschaffen sein, damit man ein Rechteck (einen Rhombus, ein Quadrat) erhält?

2. Wenn man auf dem „Polylux" zwei farbige Folienstreifen so übereinanderlegt, daß sie einander kreuzen, sieht man ein Parallelogramm.
   a) Wie müssen die Streifen beschaffen sein, damit ein Rhombus entsteht?
   b) Jeder der beiden Folienstreifen sei 5 cm breit. Wie lang sind die Seiten des erzeugten Parallelogramms dann mindestens (höchstens)?

3.* Das Bild C 141 zeigt eine Figur aus 24 Streichhölzern. Es sollen 6 Streichhölzer entfernt werden, so daß drei Quadrate übrigbleiben.

4.* Schneide aus einem zweimal gefalteten Stück Papier mit einem einzigen Schnitt einen Rhombus! Wie muß der Schnitt geführt werden, damit ein Quadrat entsteht?

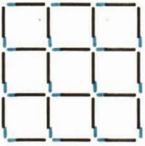


Bild C 141

5. Konstruiere Rhomben $ABCD$ mit folgenden Stücken!
a) $a = 4{,}6$ cm; $\alpha = 64°$ **b)** $b = 5{,}4$ cm; $\gamma = 120°$
c) $b = 3{,}7$ cm; $e = 6{,}0$ cm **d)** $e = 5{,}2$ cm; $f = 3{,}6$ cm

26 Trapeze

▶ 38 **DEFINITION: *Trapez* heißt jedes Viereck mit zwei parallelen Seiten.**

● 79 Zeichne eine Darstellung der Beziehungen zwischen Vierecksarten wie im Bild C 139 (↗ Lerneinheit C 25), die außerdem noch die Menge *Tr* der Trapeze erfaßt!

Ist ein Trapez kein Parallelogramm, so bezeichnet man die nicht zueinander parallelen Gegenseiten als **Schenkel** des Trapezes (↗ Bild C 142). Jedes Lot von einem Punkt einer der parallelen Seiten auf die andere (bzw. die durch sie bestimmte Gerade) bezeichnet man als **Höhe** des Trapezes. Meist zeichnet man sie wie im Bild C 142 von einem Eckpunkt aus.

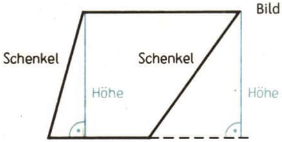
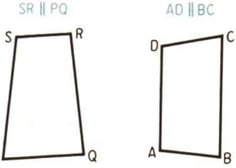


Bild C 142

Bild C 143


● 80 Das Bild C 143 zeigt zwei Trapeze, die keine Parallelogramme sind.
a) Gib die Schenkel dieser Trapeze an!
b) Sabine behauptet: „In jedem Trapez haben Innenwinkel, die ein und demselben Schenkel anliegen, die Summe 180°." Stimmt das? Begründe! Untersuche die entsprechende Aussage für Parallelogramme!

Für die Konstruktion von Trapezen können wie bei Dreiecken unterschiedliche Stücke vorgegeben sein.

● 81 **a)** Konstruiere ein Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) mit
$a = 6{,}5$ cm; $b = 3{,}8$ cm; $d = 3{,}5$ cm; $\alpha = 65°$!
b) Erläutere, warum die Konstruktion nicht eindeutig ausführbar ist!
c) Was erhält man, wenn man $b = d = 3{,}5$ cm statt $b = 3{,}8$ cm in **a)** wählt?

Das Bild C 144 zeigt ein Trapez, das zwei gleich lange, aber einander nicht parallele Gegenseiten hat. Es ist ein **gleichschenkliges Trapez.**

● 82 **a)** Wie kann man das gleichschenklige Trapez im Bild C 144 zu einem gleichschenkligen Dreieck ergänzen?
b) Untersuche die gleichschenkligen Trapeze auf Axialsymmetrie! Was gilt für ihre Innenwinkel?

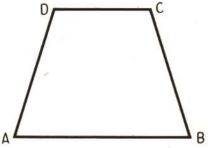


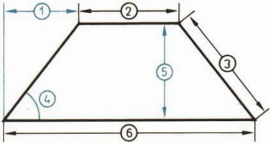
Bild C 144

Aufgaben

1. Von einem Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) sind zwei Winkel bekannt. Ermittle die anderen beiden!
   a) $\alpha = 75°$; $\beta = 81°$ **b)** $\alpha = 64°$; $\gamma = 88°$ **c)** $\beta = 90°$; $\delta = 112°$

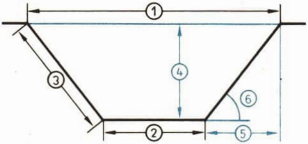
2. Konstruiere Trapeze $ABCD$ ($AB \parallel CD$) mit folgenden Stücken!
   a) $a = 6{,}1$ cm; $b = 4{,}2$ cm; $\alpha = 90°$; $\beta = 63°$
   b) $a = 7{,}3$ cm; $d = 4{,}0$ cm; $\alpha = 61°$; $\beta = 105°$
   c) $a = 8{,}8$ cm; $h = 3{,}2$ cm; $\gamma = 65°$; $\delta = 95°$
   d) $b = 3{,}5$ cm; $c = 3{,}2$ cm; $\beta = 28°$; $e = 1{,}7$ cm

3. Dämme haben im allgemeinen als Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez (↗ Bild C 145). Fertige für folgende Abmessungen maßstäbliche Zeichnungen an!
   a) Dammsohle 13,0 m; Dammkrone 4,0 m; Dammhöhe 3,4 m
   b) Dammsohle 14,0 m; Dammhöhe 3,2 m; Böschungswinkel 35°
   c) Böschungslänge 7,0 m; Dammkrone 4,3 m; Böschungswinkel 38°



(1) Böschungsbreite (2) Dammkrone (3) Böschungslänge (4) Böschungswinkel (5) Dammhöhe (6) Dammsohle

Bild C 145



(1) Grabenbreite (2) Grabensohle (3) Böschungslänge (4) Grabentiefe (5) Böschungsbreite (6) Böschungswinkel

Bild C 146

4. Gräben und Kanäle haben im allgemeinen als Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez (↗ Bild C 146).
   Fertige für folgende Kanalbauten maßstäbliche Zeichnungen an!
   a) Grabenbreite 5,4 m; Grabentiefe 2,6 m; Böschungslänge 3,2 m
   b) Grabensohle 3,2 m; Grabentiefe 2,2 m; Böschungswinkel 28°
   c) Grabenbreite 20,0 m; Grabensohle 8,5 m; Böschungslänge 7,2 m

5. In einem Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) seien E und F die Mittelpunkte der Schenkel. Die Strecke $\overline{EF}$ bezeichnet man als **Mittellinie** des Trapezes.
   Von E und F seien die Lote auf AB und CD gefällt. Fußpunkte seien U, V, W, X (↗ Bild C 147).
   a) Begründe die Kongruenzbeziehungen $\triangle AUE \cong \triangle DVE$; $\triangle BWF \cong \triangle CXF$!
   b) Erläutere, wieso aus diesen Beziehungen folgt, daß die Mittellinie $\overline{EF}$ parallel zu $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist!

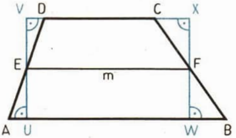


Bild C 147

6. In einem Trapez *ABCD* (*AB* ∥ *CD*) sei die (Länge der) Mittellinie mit *m* bezeichnet. Begründe anhand des Bildes C 148, daß zwischen *m* und den (Längen der) Seiten *a* und *c* die Beziehung $m = \frac{a+c}{2}$ besteht!

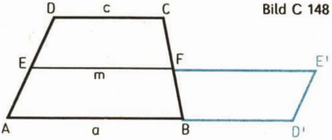


Bild C 148

7.* Zeichne einen Kreis mit beliebigem Radius und in ihm zwei zueinander parallele Sehnen! Verbinde die Endpunkte der Sehnen so miteinander, daß du ein Viereck erhältst! Was für ein Viereck ist das? Ist das stets so?
Begründe!

27 Drachenvierecke

Eine weitere Art von Vierecken hat ihren Namen nach einem beliebten Kinderspielzeug, das schon mindestens seit dem 15. Jahrhundert bekannt ist und vermutlich aus China stammt (↗ Bild C 149).

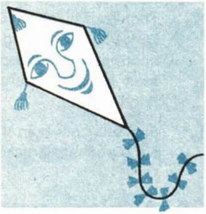


Bild C 149

● 83 Erläutere, warum die folgenden Erklärungsversuche nicht nur Figuren erfassen, die wie Drachen aussehen!(Benutze Bild C 150!)

a) Drachenviereck heißt jedes Viereck, das zwei gleich große Gegenwinkel hat.

b) Drachenviereck heißt jedes Viereck, das zwei Paare gleich langer Nachbarseiten hat.

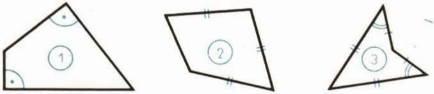


Bild C 150

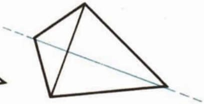


Bild C 151

▸ 39 **DEFINITION: *Drachenviereck* heißt jedes konvexe Viereck, das eine Symmetrieachse hat, die durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte geht.**

● 84 **a)** Gib alle dir bekannten Vierecksarten an, die Drachenvierecke sind!

b) Konstruiere ein Drachenviereck *ABCD* mit
$a = b = 4{,}2$ cm; $\alpha = 115°$; $\beta = 50°$!

c) Zeichne ein nichtkonvexes Viereck, das die gleiche Symmetrieeigenschaft wie ein Drachenviereck hat!

Aus der Achsensymmetrie der Drachenvierecke (↗ Bild C 151) lassen sich Eigenschaften folgern, die im Satz C 40 ausgesprochen sind.

▸ 40 **SATZ: Jedes Drachenviereck hat zwei Paare gleich langer Nachbarseiten. Zwei seiner Gegenwinkel sind gleich groß, und die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht. Die Diagonale, die die Scheitelpunkte gleich großer Gegenwinkel verbindet, wird von der anderen Diagonalen halbiert.**

Aufgaben

1. Konstruiere Drachenvierecke $ABCD$ **a)** $a = 2{,}2$ cm; $b = 3{,}6$ cm; $\beta = 145°$, **b)** $b = 6{,}1$ cm; $c = 2{,}8$ cm; $f = 7{,}0$ cm, **c)** $e = 10{,}2$ cm; $\alpha = 124°$; $\gamma = 42°$! Durchdenke jedesmal, ob die Konstruktion ausführbar ist!

2. Zeichne drei verschiedene (d. h. nicht einander kongruente) Drachenvierecke, deren Diagonalen 4 cm und 6 cm lang sind!

3. Zeichne ein Viereck, das kein Drachenviereck ist und für dessen Diagonalen e und f gilt
a) e und f stehen aufeinander senkrecht, **b)** e wird von f halbiert!

4. Thomas will einen Drachen bauen. Er hat zwei Leisten von 80 cm und 54 cm Länge zur Verfügung. Die kürzere Querleiste will er 20 cm von der Spitze entfernt anbringen. Zum Bespannen hat er einen Bogen Papier, der 90 cm lang und 52 cm breit ist. Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung fest, ob das Papier ausreicht!

5.* Sind alle konvexen Vierecke, bei denen jede Seite eine gleich lange Nachbarseite hat, Drachenvierecke?

28 Axialsymmetrie bei Vierecken

Nicht nur Drachenvierecke sind axialsymmetrisch, sondern beispielsweise auch gleichschenklige Trapeze (↗ Auftrag C 82).

● 85 **a)** Christina behauptet:
„Jedes Trapez, das achsensymmetrisch ist, ist ein gleichschenkliges Trapez." Welche besonderen Parallelogramme müßte man auch als gleichschenklige Trapeze ansehen, wenn sie recht hätte?
b) Erläutere die Übersicht im Bild C 152!

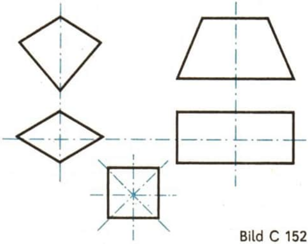


Bild C 152

In der Zusammenstellung im Bild C 152 fehlen gegenüber der Übersicht über die Vierecksarten auf der dritten Umschlagseite des Buches nicht nur die nicht gleichschenkligen Trapeze, sondern auch die Parallelogramme. Ein Parallelogramm (sofern es nicht ein Rechteck oder ein Rhombus ist) läßt sich nicht durch eine Spiegelung auf sich selbst abbilden.

Aufgaben

1. Untersuche, ob die folgenden Aussagen wahr sind!
   a) Halbiert in einem Trapez eine Diagonale die andere, so ist es ein Parallelogramm.
   b) Wird ein Viereck durch eine seiner Diagonalen in kongruente Dreiecke zerlegt, so ist es ein Parallelogramm.
   c) Hat ein Viereck eine Symmetrieachse, die durch gegenüberliegende Eckpunkte geht, so ist es ein Drachenviereck.
   d) Hat ein Viereck zwei Symmetrieachsen, die durch Eckpunkte gehen, so ist es ein Rhombus.

2. Ergänze so, daß wahre Aussagen entstehen!
   a) Hat ein Parallelogramm eine Symmetrieachse, die durch die Mittelpunkte zweier Gegenseiten geht, so ist es ein ...
   b) Hat ein Rechteck eine Symmetrieachse, die durch einen Eckpunkt geht, so ist es ein ...
   c) Hat ein Viereck drei gleich lange Seiten und eine Symmetrieachse, die durch einen Eckpunkt geht, so ist es ein ...

3. Welche Parallelogramme sind zugleich axialsymmetrische Trapeze und Drachenvierecke?

4.* Axialsymmetrie bei einem Viereck bedeutet, daß es eine Spiegelung gibt, bei der das Viereck sich selbst als Bild hat. Untersuche, welche Vierecke durch eine Drehung mit dem Drehwinkel 180° auf sich selbst abgebildet werden (welche Vierecke „zentralsymmetrisch" sind)! Ermittle auch das Drehzentrum (das „Symmetriezentrum")!

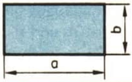
Flächeninhalt und Umfang von Vielecken

29 Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

● 86 Ein Zimmer von 6,00 m Länge und 4,00 m Breite soll vollständig mit Auslegware ausgestattet werden. Die gewählte Auslegware wird in Rollen von 2,00 m Breite geliefert. Ein Meter von einer solchen Rolle kostet 100 Mark.
   a) Wieviel Mark kostet die Auslegware für das Zimmer?
   b) Wie hoch sind die Materialkosten für das Auslegen eines Quadratmeters?
   c) Wieviel Meter Scheuerleisten benötigt man?

Für viele praktische Fragen muß man den Flächeninhalt von Rechtecken ermitteln.

▶ 41 **SATZ: Für den Flächeninhalt A jedes Rechtecks gilt**
$$A = a \cdot b.$$
Dabei sind a und b die Längen benachbarter Seiten.



● 87 Wie kann man den Umfang eines Rechtecks ermitteln?

■ 13 Hat ein Rechteck Seiten mit den Längen 4,30 m und 3,70 m, so ist sein Flächeninhalt

$A = 4{,}30\ \text{m} \cdot 3{,}70\ \text{m} = \underline{\underline{15{,}91\ \text{m}^2}}.$

Bei der Angabe des Flächeninhalts unterscheiden wir den Zahlenwert (hier 15,91) und die Einheit (hier m^2).

● 88 **a)** In welchen Einheiten können wir den Flächeninhalt auch angeben?
b) Wie genau wäre der Flächeninhalt des Rechtecks im Beispiel C 13 sinnvollerweise anzugeben, wenn die Seitenlängen lediglich Näherungswerte – etwa durch Messen ermittelt – wären?

Sind die Seitenlängen eines Rechtecks $a = 4$ cm und $b = 3$ cm, so gibt sein Flächeninhalt 12 cm^2 die Anzahl der Einheitsquadrate mit der Seitenlänge 1 cm an, die das Rechteck ausfüllen (↗ Bild C 154).

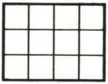


Bild C 154

Die Zahlenwerte der Seitenlängen eines Rechtecks können jedoch auch gebrochene Zahlen (z. B. $a = \frac{5}{6}$ m und $b = 0{,}54$ m) sein. In solchen Fällen berechnen wir den Flächeninhalt ebenfalls nach der Formel $A = a \cdot b$.

Aufgaben

1. Eine quaderförmige Transportkiste ist 1,20 m lang, 75 cm breit und 60 cm hoch. Boden und Seitenwände werden, um Beschädigungen des Transportgutes zu vermeiden, vollständig mit starkem Papier ausgekleidet. Wieviel Quadratmeter Papier werden insgesamt für 20 solcher Kisten benötigt?

2. Die Verpackung eines Fernsehgerätes ist aus 5 mm starker Wellpappe und hat folgende Maße: Länge 63 cm, Breite 35 cm, Höhe 50 cm. Wieviel Quadratmeter Pappe werden insgesamt für die Verpackung von 30 Fernsehgeräten benötigt?

3. Ergänze die folgenden Tabellen! Dabei ist A der Flächeninhalt und u der Umfang eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b.

a)

a	b	u	A
56 cm	0,20 m		
	21,0 m		420 m^2
0,410 km			360 ha
72 mm		200 mm	

b)

a	b	u	A
42 cm	2,1 dm		
25 m			900 m^2
	0,350 km		153 ha
	640 mm	5,00 m	

4. Fußballfelder sind 45 m bis 90 m breit und 90 m bis 120 m lang. Welchen Flächeninhalt hat ein Fußballfeld **a)** mindestens, **b)** höchstens?

5. a_1 und b_1 sind die Seitenlängen eines Rechtecks, a_2 und b_2 die eines zweiten Rechtecks. Welche Beziehung besteht zwischen den Flächeninhalten A_1 und A_2, wenn folgendes gilt:
a) a_1 und a_2 sind gleich, b_2 ist doppelt so groß wie b_1,
b) a_1 ist doppelt so groß wie a_2, b_1 und b_2 sind gleich,
c) a_1 ist doppelt so groß wie a_2, b_1 ist dreimal so groß wie b_2,
d) a_1 ist doppelt so groß wie a_2, b_2 ist doppelt so groß wie b_1?

30 Flächeninhalt und Umfang von Vielecken

■ 14 Der Flächeninhalt A des Vielecks im Bild C 155 ist zu berechnen.

a) Das Vieleck kann in zwei Rechtecke zerlegt werden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten (↗ Bild C 156).

b) Man kann das Vieleck aber auch zu einem Rechteck ergänzen und den Flächeninhalt A so ermitteln (↗ Bild C 157).

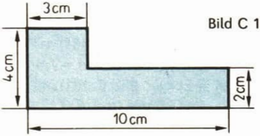


Bild C 155

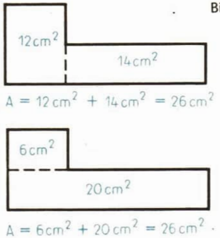


Bild C 156

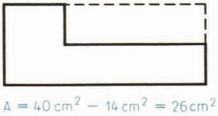


Bild C 157

● 89 Ein Garten hat die dem Bild C 158 zu entnehmende Gestalt.

a) Wie groß ist sein Flächeninhalt?

b) Wie lang ist die Umzäunung?

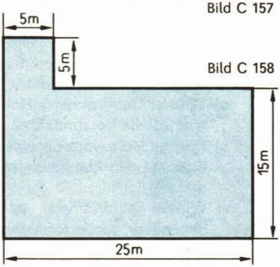


Bild C 158

Der Umfang eines Vielecks ergibt sich als Summe der Längen aller Seiten. Beliebigen Vielecken ist ebenfalls eindeutig ein Flächeninhalt zugeordnet. Dabei gilt:

▶ 42 **SATZ: Kongruente Vielecke haben denselben Flächeninhalt (↗ Bild C 159).**

▶ 43 **SATZ: Ist ein Vieleck *V* in zwei oder mehr Vielecke zerlegt, so ist der Inhalt von *V* gleich der Summe der Inhalte der Teilvielecke (↗ Bild C 160).**

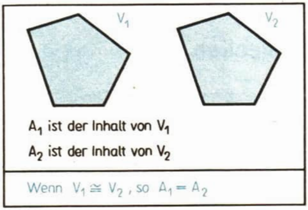


Bild C 159

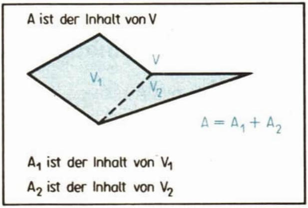


Bild C 160

Aufgaben

1. Ermittle jeweils den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figuren!
   a) 6-Eck (↗ Bild C 161) mit $a = 10{,}5$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 4{,}5$ cm und $d = 7{,}0$ cm
   b) 6-Eck (↗ Bild C 161) mit $a = 12{,}2$ dm, $b = 5{,}5$ dm, $c = 4{,}0$ dm und $d = 15{,}5$ dm
   c) 8-Eck (↗ Bild C 162) mit $a = 3{,}5$ cm, $b = 5{,}0$ cm, $c = 12{,}0$ cm, $d = 3{,}0$ cm und $e = 6{,}5$ cm
   d) 8-Eck (↗ Bild C 162) mit $a = 6{,}2$ dm, $b = 5{,}0$ dm, $c = 18{,}2$ dm, $d = 4{,}5$ dm und $e = 9{,}5$ dm.

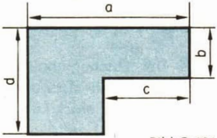


Bild C 161

2. Der Flächeninhalt des Vielecks im Bild C 161 soll 50 m² groß sein, $a = 10$ m, $d = 8$ m und $b = 3$ m. Wie groß muß c sein?

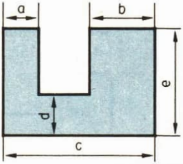


Bild C 162

3. Für den Versand von Maschinen werden Holzkisten angefertigt (↗ Bild C 163).
   Dabei ist $a = 5{,}00$ m, $b = 2{,}00$ m, $c = 2{,}10$ m, $d = 1{,}10$ m und $e = 2{,}00$ m.
   a) Wieviel Quadratmeter Holz braucht man für eine solche Versandkiste?
   b) Wieviel Holz wäre für eine quaderförmige Kiste mit den Abmessungen a, b und c erforderlich?
   c) Wieviel Quadratmeter Holz spart man gegenüber quaderförmigen Kisten bei der Herstellung von 50 Versandkisten?

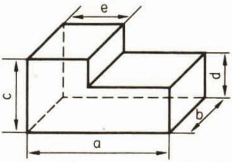


Bild C 163

4. Zeichne die angegebenen Vielecke in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm! Ermittle Umfang und Flächeninhalt
   a) des Vielecks $ABCDEF$ mit
      $A\,(1;\,1)$, $B\,(6;\,1)$, $C\,(6;\,5)$, $D\,(3;\,5)$, $E\,(3;\,3)$, $F\,(1;\,3)$,
   b) des Vierecks $ABCD$ mit
      $A\,(0;\,0)$, $B\,(4;\,0)$, $C\,(4;\,6)$, $D\,(0;\,6)$!

5. Wir wissen: Wenn Vielecke V_1 und V_2 kongruent sind, so haben die Vielecke V_1 und V_2 denselben Flächeninhalt.
   Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

31 Der Flächeninhalt von Dreiecken

Die Vielecke im Bild C 164 kann man nicht in Rechtecke zerlegen. Um auch für solche Vielecke den Flächeninhalt berechnen zu können, beschäftigen wir uns zunächst mit der Ermittlung des Flächeninhalts von Dreiecken.

● **90** Wie würdest du dann den Flächeninhalt der Vielecke im Bild C 164 ermitteln?

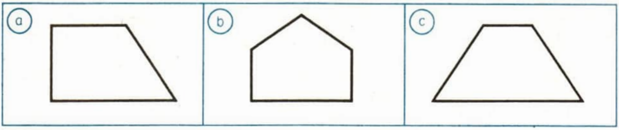
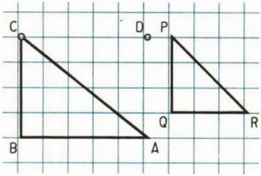


Bild C 164

Bild C 165

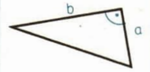


● **91** Ermittle den Flächeninhalt der rechtwinkligen Dreiecke im Bild C 165!
Jedes Kästchen soll eine Seitenlänge von 1 cm haben.

▸ **44** **SATZ: Für den Flächeninhalt *A* jedes rechtwinkligen Dreiecks gilt**

$$A = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Dabei sind *a* und *b* die Längen der dem rechten Winkel anliegenden Seiten.



Eine Beweisidee können wir dem Bild C 166 entnehmen.

Voraussetzung: Dreieck *ABC* ist rechtwinklig. Die Seiten, die dem rechten Winkel anliegen, haben die Längen *a* und *b*.

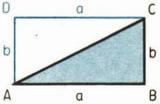


Bild C 166

Behauptung: $A = \frac{a \cdot b}{2}$, wobei *A* der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* ist.

Beweis: Wir können das Dreieck *ABC* wie im Bild C 166 zu einem Rechteck ergänzen.

$\triangle ABC \cong \triangle ACD$	($\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (sss))
$\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ haben denselben Flächeninhalt *A*.	(Eigenschaft des Flächeninhalts, Satz C 42)
ABCD hat den Flächeninhalt $a \cdot b$.	(Flächeninhalt des Rechtecks, Satz C 41)
$A + A = a \cdot b$	(Eigenschaft des Flächeninhalts, Satz C 43)
Also gilt: $A = \frac{a \cdot b}{2}$,	*was zu beweisen war.*

● **92** Ermittle den Flächeninhalt der Dreiecke *ABC* und *PQR* im Bild C 167!
Jedes Kästchen soll eine Seitenlänge von 1 cm haben.

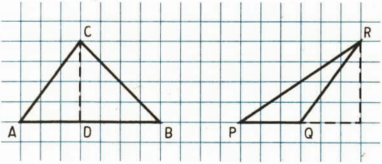
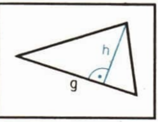


Bild C 167

▸ 45 **SATZ: Für den Flächeninhalt A jedes Dreiecks gilt**

$$A = \frac{g \cdot h}{2}.$$

Dabei ist g die Länge einer beliebigen Seite und h die Länge der zugehörigen Höhe.



Voraussetzung: g ist die Länge einer Seite, h die Länge der zugehörigen Höhe eines Dreiecks ABC.

Behauptung: $A = \frac{g \cdot h}{2}$, wobei A der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.

Beweis: Für die Lage der Höhe h zur Seite g des Dreiecks ABC sind drei Fälle möglich.

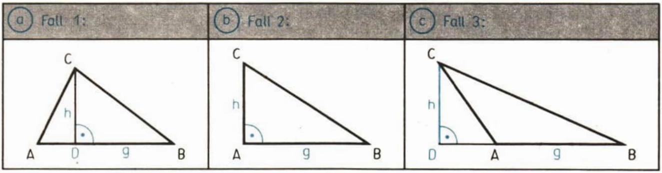
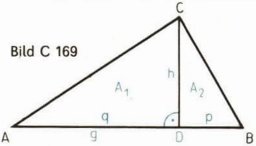


Bild C 168

Wir betrachten hier nur den Fall 1:
Wir setzen $\overline{AD} = q$ und $\overline{DB} = p$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC sei A_1, der des Dreiecks BCD sei A_2 (↗ Bild C 169).

Bild C 169



Dann gilt

(1) $A = A_1 + A_2$ (Eigenschaft des Flächeninhalts, Satz C 43)

(2) $A_1 = \frac{q \cdot h}{2}$ und $A_2 = \frac{p \cdot h}{2}$ (Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, Satz C 44)

(3) $A = \frac{q \cdot h}{2} + \frac{p \cdot h}{2}$ ((1) und (2))

$= \frac{q \cdot h + p \cdot h}{2}$

$= \frac{(q + p) \cdot h}{2}$ (Distributivgesetz)

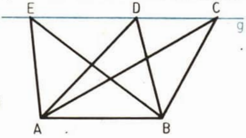
$= \frac{g \cdot h}{2}$, *was zu beweisen war.*

● 93 Begründe den Satz C 45 **a)** für den Fall 2, **b)** für den Fall 3!

In einem stumpfwinkligen Dreieck kann man also auch jede der beiden kürzeren Seiten als „Grundseite" g wählen.

● 94 Im Bild C 170 ist g parallel zur Geraden AB. Vergleiche die Flächeninhalte der Dreiecke ABC, ABD und ABE! Begründe deine Aussage!

Bild C 170



Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck ABC in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm)! Ermittle den Flächeninhalt und den Umfang des Dreiecks!
a) $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$, $C(1;\ 3)$ **b)** $A(1;\ 3{,}5)$, $B(3;\ 3{,}5)$, $C(3;\ 0)$

2. Zeichne folgende Dreiecke ABC und ermittle jeweils den Flächeninhalt und den Umfang!
a) $\gamma = 90°$, $b = 6$ cm, $a = 3$ cm **b)** $\beta = 90°$, $b = 7{,}5$ cm, $a = 3{,}4$ cm

3. Ermittle den Flächeninhalt des Vielecks im Bild C 171!
a) $a = 4{,}5$ cm, $b = 3{,}0$ cm, $c = 6{,}0$ cm **c)** $a = 5{,}3$ m, $b = 2{,}0$ m, $c = 3{,}3$ m
b) $a = 5{,}5$ dm, $b = 2{,}0$ dm, $c = 7{,}5$ dm **d)** $a = 2{,}0$ km, $b = 2{,}5$ km, $c = 3{,}0$ km

4. Ermittle den Flächeninhalt des Vielecks im Bild C 172! Runde das Ergebnis auf Quadratzentimeter!
a) $a = 2{,}5$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $c = 4{,}5$ cm, $d = 2{,}5$ cm
b) $a = 1{,}5$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $c = 3{,}3$ cm, $d = 4{,}2$ cm

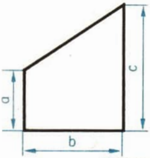


Bild C 171

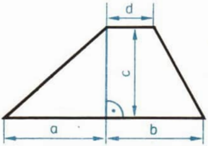


Bild C 172

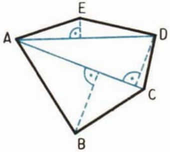


Bild C 173

5. **a)** Der Flächeninhalt des Vielecks im Bild C 171 soll 22 cm², $b = 5{,}5$ cm und $c = 6{,}0$ cm sein. Wie groß muß a sein?
b) Der Flächeninhalt des Vielecks im Bild C 172 soll 25 cm², $a = 2{,}5$ cm, $b = 7{,}5$ cm und $c = 4{,}0$ cm sein. Wie groß muß d sein?

6. Zeichne Dreiecke ABC mit folgenden Stücken! Ermittle Umfang und Flächeninhalt!
a) $a = 3{,}0$ cm, $c = 6{,}0$ cm, $\alpha = 30°$ **b)** $c = 8{,}0$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 40°$
c) $c = 9{,}0$ cm, $\alpha = 50°$, $\beta = 40°$ **d)** $c = 5{,}5$ cm, $\alpha = 50°$, $\beta = 50°$

7. Deute die Dreiecke aus Aufgabe 6 als Zeichnungen im Maßstab 1:500! Ermittle Umfang und Flächeninhalt der Originaldreiecke!

8. Ergänze die Tabelle! g ist die Länge einer Seite, h die Länge der zugehörigen Höhe und A der Flächeninhalt des Dreiecks.

A	g	h
	1,7 m	0,8 m
	31,6 cm	60,4 cm
46 cm²	20 cm	
10,2 ha		0,35 km
	2 dm	0,8 m
	2 m	1 m

9. Wann gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC die Formel $A = \frac{a \cdot c}{2}$?

10. Ermittle den Flächeninhalt des Vielecks im Bild C 173!
Miß die dafür benötigten Größen!

11. Das Bild C 174 zeigt den Grundriß eines Gartens im Maßstab 1:1000.
   a) Berechne den Flächeninhalt in Quadratmetern!
   b) Der Garten soll einen Zaun aus Maschendraht erhalten. Wieviel Meter Maschendraht sind zu bestellen?

12. Begründe, daß die Vielecke **a)** im Bild C 175, **b)** im Bild C 176 denselben Flächeninhalt haben!

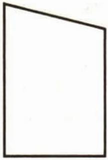


Bild C 174

Bild C 175

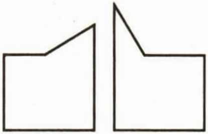


Bild C 176

32 Der Flächeninhalt von Trapezen und Parallelogrammen

● **95** Zeichne mit Hilfe der Lochschablone das Trapez *ABCD* mit *A* (22), *B* (24), *C* (18) und *D* (17)! Ermittle seinen Flächeninhalt!

Den Flächeninhalt eines Vierecks (↗ Bild C 177) kann man folgendermaßen ermitteln:
1. Man zerlegt das Viereck in Dreiecke und ermittelt deren Flächeninhalte.
2. Man berechnet die Summe dieser Inhalte und erhält den gesuchten Flächeninhalt.

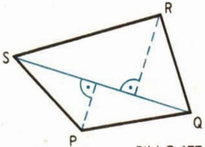


Bild C 177

Für ein Trapez *ABCD* (↗ Bild C 178) ergibt sich dabei:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle\, ABD \text{ hat den Flächeninhalt } A_1 = \dfrac{a \cdot h}{2} \\[2ex] \triangle\, BCD \text{ hat den Flächeninhalt } A_2 = \dfrac{c \cdot h}{2}\end{array}\right\} \text{(Satz C 45)}$$

ABCD hat den Flächeninhalt

$$A = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{c \cdot h}{2} \qquad \text{(Eigenschaft des Flächeninhalts, Satz C 43)}$$

$$A = \frac{a \cdot h + c \cdot h}{2} = \frac{(a+c)h}{2} \qquad \text{(Distributivgesetz)}$$

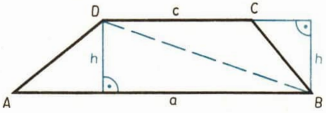
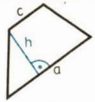


Bild C 178

▶ 46 **SATZ: Für den Flächeninhalt A jedes Trapezes gilt**

$$A = \frac{(a+c)\,h}{2}.$$

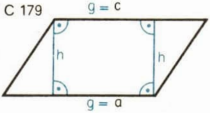
Dabei sind a und c die Längen paralleler Seiten, h die Länge einer zugehörigen Höhe.



Ist ein Trapez sogar Parallelogramm (↗ Bild C 179), so können wir $g = a = c$ setzen und erhalten für den Flächeninhalt A des Parallelogramms:

$$A = \frac{(g+g)\cdot h}{2} = \frac{2\cdot g\cdot h}{2} = g\cdot h.$$

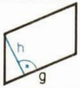
Bild C 179



▶ 47 **SATZ: Für den Flächeninhalt A jedes Parallelogramms gilt**

$$A = g\cdot h.$$

Dabei ist g die Länge einer beliebigen Seite, h die Länge einer zugehörigen Höhe.



Aufgaben

1. Zeichne die folgenden Vierecke $ABCD$ in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm)! Ermittle ihren Umfang und Flächeninhalt!
   a) $A\,(4;\,1)$, $B\,(10;\,1)$, $C\,(5;\,4)$, $D\,(1;\,4)$ **b)** $A\,(1;\,1)$, $B\,(4;\,0)$, $C\,(4;\,4)$, $D\,(1;\,4)$
   c) $A\,(3;\,0)$, $B\,(7;\,4)$, $C\,(3;\,4)$, $D\,(1;\,2)$ **d)** $A\,(1;\,1)$, $B\,(5;\,1)$, $C\,(8;\,4)$, $D\,(4;\,4)$

2. Zeichne Vierecke $ABCD$ mit folgenden Stücken! Ermittle Flächeninhalt und Umfang dieser Vierecke!
   a) $a = 5{,}0$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 6{,}4$ cm, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$
   b) $a = 4{,}0$ cm, $b = 2{,}0$ cm, $d = 3{,}0$ cm, $\alpha = 80°$ $\beta = 70°$
   c) $a = 7{,}0$ cm, $b = 4{,}0$ cm, $\alpha = 130°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 130°$

3. Ermittle den Flächeninhalt des Originalvielecks im Bild C 180 (Maßstab 1 : 100)!

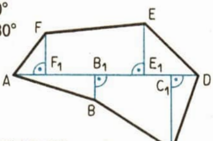


Bild C 180

4. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Deiches, dessen Sohle 44 m, dessen Krone 16 m und dessen Höhe 11 m beträgt?

5. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Kanals, der oben 13,80 m, unten 10,40 m breit und der 3,80 m tief ist?

6. Ermittle den Flächeninhalt der im Bild C 181 dargestellten Wandfläche eines Treppenflurs!

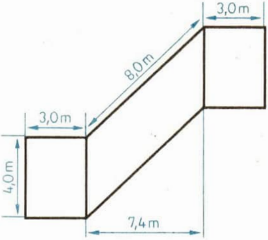


Bild C 181

7. Eine dreieckige Weidefläche (eine Seite 310 m; zugehörige Höhe 185 m) wird mit 8,7 dt Mineraldünger bestreut.
   a) Entwirf eine Skizze!
   b) Berechne den Flächeninhalt in Hektar!
   c) Wieviel Dezitonnen Dünger wurden je Hektar gestreut?

8. Vergleiche für die Drachenvierecke im Bild C 182 die Flächeninhalte und die Längen der Diagonalen!

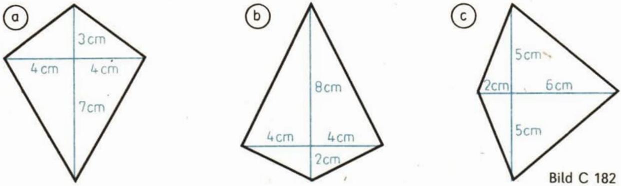


Bild C 182

Komplexe Übungen

1. Es gibt zwei verschiedene Bewegungen, die einen Rhombus $ABCD$ so auf sich abbilden, daß A als Bildpunkt C hat. Vervollständige für diese Bewegungen die Tabellen!

Punkt	A	B	C	D
Bildpunkt	C			

Punkt	A	B	C	D
Bildpunkt	C			

2. Zeichne ein rechtwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck! Ergänze die Figur durch ihr Bild bei der angegebenen Bewegung!
   a) Spiegelung an der längsten Seite
   b) Spiegelung an einer der kürzeren Seiten
   c) Drehung um den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten, Drehwinkel 180°
   Was für eine Gesamtfigur entsteht jeweils? Was würde man bei einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck erhalten?

3. **a)** Sabine behauptet, sie könne für eine Verschiebung v drei Zahlenpaare nennen und damit zwei Originalpunkte und zwei zugehörige Bildpunkte angeben. Wie ist das möglich? Was kannst du über die Lage der drei Punkte sagen?
   b) Läßt sich dasselbe auch für eine Drehung (Spiegelung) machen?

4. Zeichne nach der Lochschablone die Punkte A (7), B (4), C (14), P (8), Q (5), R (10)!

a) Konstruiere das Bild des Dreiecks ABC bei der Bewegung b, die sich durch Nacheinanderausführen der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ und der Drehung um R mit dem Drehwinkel 180° ergibt!

b)* Ist b selbst eine Verschiebung, Spiegelung oder Drehung? Begründe!

5. α und β seien Nebenwinkel und $10° \leqq \alpha \leqq 20°$. Was läßt sich über die Größe von β aussagen?

6. Wie groß sind die Winkel

a) α und β im Bild C 183a, **b)** α und γ im Bild C 183b?

Gib jedesmal die Sätze an, die du beim Berechnen der Winkel benutzt hast!

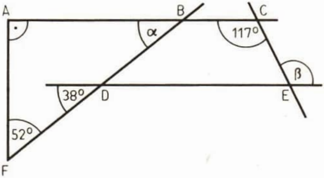


Bild C 183a

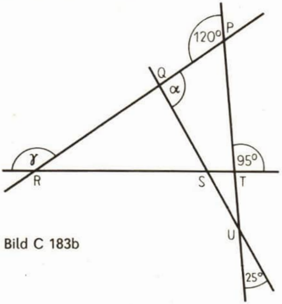


Bild C 183b

7. Ergänze die folgende Tabelle!

	Dreieckswinkel		Seitenbeziehung			Dreiecksarten nach	
α	β	γ	$a \gtreqqless b$	$a \gtreqqless c$	$b \gtreqqless c$	Winkeln	Seiten
72°	65°						
	75°	30°					
31°		59°					
	100°						gleichschenklig
							gleichseitig
56°				$a = c$			

8. Gib mehrere **a)** Dreiecke,

b) konvexe Vierecke,

c) konvexe Fünfecke an, deren Eckpunkte zu den Punkten A bis N im Bild C 184 gehören und deren Seiten auf den in diesem Bild gezeichneten Geraden liegen!

d) Gibt es auch derartige n-Ecke mit $n = 6$ (7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)?
(Die n-Ecke können auch nicht konvex sein!)

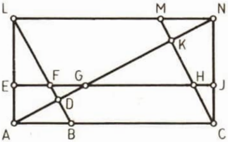


Bild C 184

9. Die Vierecke im Bild C 185a haben eine Dreiecksfläche gemeinsam, die Vierecke im Bild C 185b zwei Dreiecksflächen. Zeichne zwei Vierecke so, daß sie
a) eine Vierecksfläche,
b) zwei Vierecksflächen,
c) eine Fünfecksfläche,
d) eine Sechsecksfläche
gemeinsam haben!

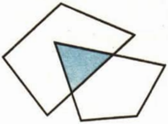


Bild C 185a

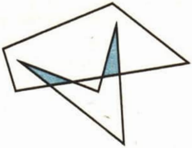


Bild C 185b

10. Wieviel verschiedene Vierecke zählst du in den Figuren im Bild C 186? Wie viele dieser Vierecke sind konvex?

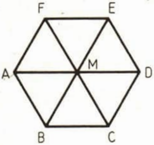


Bild C 186a

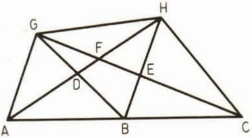


Bild C 186b

11. **a)** Die Figur im Bild C 187 besteht aus zwölf Streichhölzern. Man soll zwei Streichhölzer so wegnehmen, daß zwei Quadrate entstehen.
b) Bei der Figur im Bild C 187 sind drei Streichhölzer so umzulegen, daß drei kongruente Quadrate entstehen.
c) Es ist eine Figur wie im Bild C 187, aber aus 40 Hölzern zu legen. Wieviel Quadrate enthält diese Figur insgesamt?


Bild C 187

12. Die Rechtecke im Bild C 188 sind aus insgesamt 20 Streichhölzern gelegt. Für ihre Umfänge u_1, u_2 und ihre Flächeninhalte A_1, A_2 gelten die Verhältnisgleichungen $u_1 : u_2 = 2 : 3$ und $A_1 : A_2 = 3 : 8$. Aus diesen 20 Streichhölzern sind nun andere Figuren zu legen, so daß die folgenden Verhältnisgleichungen gelten:
a) $u_1 : u_2 = 2 : 3$, $A_1 : A_2 = 1 : 2$
b) $u_1 : u_2 = 2 : 3$, $A_1 : A_2 = 3 : 5$
c) $u_1 : u_2 = 3 : 7$, $A_1 : A_2 = 1 : 3$
d)* $u_1 : u_2 = 1 : 3$, $A_1 : A_2 = 1 : 7$

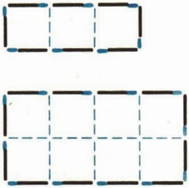


Bild C 188

13. 23 Streichhölzer sind – geradlinig aneinandergelegt – zusammen 1 m lang.
a) Wieviel Streichhölzer benötigt man, um 1 m^2 vollkommen mit kleinen Quadraten – entsprechend der Figur im Bild C 187 – auszulegen?
b)* Matthias behauptet, er könne – ohne ein Streichholz zu zerkleinern – aus nur 19 Streichhölzern „ein Meter" legen. Als er seinem Bruder den „faulen" Trick gezeigt hat, meint der, das könne er sogar mit nur 7 Streichhölzern. Wie geht das wohl?

14. Wie kann man ein Rechteck zerlegen in
a) vier kongruente Dreiecke, **b)** sechs kongruente Dreiecke,
c) fünf kongruente Rechtecke,
d) zwei Teile, aus denen sich ein gleichschenkliges Dreieck zusammensetzen läßt?

15. Unter welcher Bedingung sind die angegebenen Figuren einander kongruent?
a) zwei Kreise **c)** zwei Rhomben **e)** zwei Geraden
b) zwei Quadrate **d)** zwei Strecken **f)** zwei Winkel
g) ein rechtwinkliges und ein gleichschenkliges Dreieck
h) ein stumpfwinkliges und ein gleichseitiges Dreieck

16. Von einem Dreieck *ABC* ist bekannt, daß es zum Dreieck *PQR* (↗ Bild C 189) kongruent ist. Außerdem weiß man
a) $\alpha = 35°$, $\beta = 71°$,
b) $\alpha = 74°$,
c)* $a = 6{,}1$ cm, $b = 6{,}0$ cm.
Gib jedesmal die Zuordnung der Seiten in einer Tabelle an!

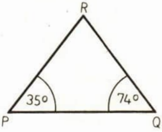


Bild C 189

17. Für ein Dreieck *ABC* ist $a = 4{,}2$ cm und $b = 2{,}6$ cm. Was kann man über die Länge der dritten Seite sagen?

18.* Zeichne ein konvexes Viereck *ABCD* und seine Diagonalen! Bezeichne den Schnittpunkt der Diagonalen mit *S*!
a) Miß die Abstände $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$ und bilde ihre Summe *s*! Miß den Umfang *u* des Vierecks!
b) Vergleiche *u* mit *s*! Gilt die dabei ermittelte Beziehung für jedes konvexe Viereck *ABCD*? Begründe!
c) Andreas behauptet, daß für jeden Punkt *P* der Vierecksfläche mit $P \neq S$ gilt: $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} > s$. Stimmt das? Begründe!

19. Von dem Dreieck *ABC* im Bild C 190 sind bekannt:
$\overline{AD} \cong \overline{EB}$, $\sphericalangle\, CDE \cong \sphericalangle\, DEC$.
Was für ein Dreieck ist *ABC*? Begründe!

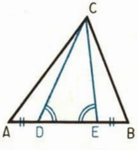


Bild C 190

20. Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, so hat es zwei gleich lange Höhen. (Warum?) Bilde die Umkehrung dieses Satzes! Ist sie wahr? Begründe!

21. Gegeben sind die Punkte *A* (3; 2), *B* (7; 5) und *D* (3; 10) im Koordinatensystem. Gib einen vierten Punkt *C* so an, daß *ABCD* ein **a)** Parallelogramm, **b)** ein gleichschenkliges Trapez ist!

22. Gegeben sind die Punkte *A* (1; 4), *B* (9; 0), *C* (13; 4) im Koordinatensystem. Gib einen Punkt *D* so an, daß das Viereck *ABCD*
a) ein Parallelogramm, **b)** ein Drachenviereck,
c) ein Trapez, aber kein Parallelogramm ist!

23. **a)** Zeichne eine Strecke $\overline{AB} = 7{,}5$ cm!
Trage an den Strahl AB nach links den Winkel $\alpha = 56°$ an! Zeichne um A einen Kreisbogen mit dem Radius 3,9 cm, der den freien Schenkel von α schneidet!
Bezeichne den Schnittpunkt mit D!
Trage an den Strahl BA nach rechts den Winkel $\beta = 124°$ an!
Zeichne um B einen Kreisbogen mit dem Radius 3,9 cm, der den freien Schenkel von β schneidet!
Bezeichne den Schnittpunkt mit C!
Verbinde C mit D!
b) Was für ein Viereck ist $ABCD$? Begründe!

24. Konstruiere ein Dreieck ABC mit folgenden Stücken! Beschreibe die Konstruktion!
a) $a = 6{,}2$ cm; $b = 3{,}4$ cm; $h_a = 2{,}5$ cm
b) $b = 6{,}2$ cm; $c = 4{,}1$ cm; $h_b = 2{,}5$ cm
c) $c = 6{,}2$ cm; $h_c = 2{,}5$ cm; $\beta = 73°$
d) $a = 6{,}2$ cm; $h_a = 2{,}5$ cm; $\beta = 115°$
Welches von diesen vier Dreiecken hat den größten Flächeninhalt? Wie groß ist dieser?

25. Konstruiere Vierecke mit den bei **a)** bis **d)** angegebenen Stücken und beschreibe die Konstruktion! Ermittle Umfang und Flächeninhalt! Beachte, ob die Konstruktionen (eindeutig) ausführbar sind!
a) $a = 4{,}4$ cm; $c = 1{,}5$ cm; $d = 2{,}5$ cm; $\alpha = 65°$; $\delta = 73°$
b) $a = 2{,}5$ cm; $b = 4{,}2$ cm; $d = 3{,}8$ cm; $\beta = 128°$; $\gamma = 93°$
c) $a = 3{,}4$ cm; $d = 3{,}8$ cm; $e = 4{,}9$ cm; $\beta = 105°$; $\gamma = 87°$
d) $b = 3{,}9$ cm; $c = 2{,}4$ cm; $e = 6{,}3$ cm; $f = 4{,}7$ cm; $\delta = 74°$
e)* Ändere bei den eindeutig ausführbaren und den nicht ausführbaren Konstruktionsaufgaben unter **a)** bis **d)** nach Möglichkeit jeweils ein Stück so ab, daß sich mehrere Lösungen ergeben!

26. Berechne die Länge einer Seite bzw. Höhe im Dreieck ABC!
a) $A = 15{,}6\ \text{cm}^2$, $a = 4{,}8$ cm **b)** $A = 73{,}6\ \text{cm}^2$, $h_b = 115$ mm
c) $a = 13{,}5$ cm, $h_a = 6{,}8$ cm, $h_c = 5{,}1$ cm
d) $b = 256$ mm, $c = 192$ mm, $h_b = 18$ cm

27. Ein Tunnel soll geradlinig durch einen Berg gebaut werden (↗ Bild C 191). Die Tunneleingänge A und B sieht man von einem Punkt C aus unter dem Winkel $\gamma = 43°$. Außerdem sind die Entfernungen $\overline{AC} = 4{,}8$ km und $\overline{BC} = 7{,}2$ km bekannt.
Ermittle durch eine maßstäbliche Zeichnung, wie lang der Tunnel wird!

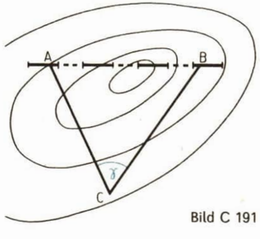


Bild C 191

28. Die Breite eines Flusses ist zu bestimmen. Dazu wird parallel zum diesseitigen Ufer und in 4,0 m Entfernung von ihm eine Standlinie $\overline{PQ}$ der Länge 50,0 m abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wird ein Punkt *B* am jenseitigen Ufer angepeilt (↗ Bild C 192). Man mißt $\sphericalangle\, BPQ = 47°$ und $\sphericalangle\, BQP = 51°$.

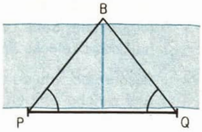


Bild C 192

29. Von einem 24 m hoch gelegenen Punkt eines Turms aus erscheint das jenseitige Ufer unter dem „Tiefenwinkel" von 18°. Der Turm steht 13 m vom diesseitigen Ufer des Flusses entfernt. (↗ Bild C 193)
Wie breit ist der Fluß?

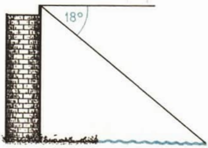


Bild C 193

30.* Auf einem Turm steht eine Fahnenstange. Man steht in 32 m horizontaler Entfernung vom Fuß des Turmes und mißt die „Höhenwinkel" zum Fuß der Fahnenstange mit 46° und zur Spitze der Fahnenstange mit 49°. Wie lang ist die Fahnenstange?

31. Aus einem Schulbuch der zwanziger Jahre:
Eine dreieckige Wiese wird von 2 Straßen und einer Eisenbahnlinie begrenzt. Ihr Flächeninhalt ist 1,34945 ha. Das begrenzte Stück Eisenbahnlinie ist 137 m lang. Wie weit ist die Ecke der Wiese am Kreuzungspunkt der Landstraßen von der Eisenbahnlinie entfernt?
Was meinst du zu dieser Aufgabenstellung?

32. Ermittle die Länge der im Gelände nicht zugänglichen Strecke $\overline{PQ}$ durch eine maßstäbliche Zeichnung (↗ Bild C 194).

33. Von dem im Bild C 195 skizzierten Viereck *ABCD* sind durch Messung die angegebenen Winkelgrößen und $\overline{BD} = 250$ m ermittelt worden.
a) Ordne die gezeichneten Strecken der Größe nach!
b) Ist das Viereck *ABCD* ein Trapez, ein Parallelogramm, ein Drachenviereck?
c) Ermittle mit Hilfe einer maßstäblichen Zeichnung die Längen von $\overline{AC}$ und den gezeichneten Strecken, den Umfang und den Flächeninhalt des Vierecks *ABCD*!

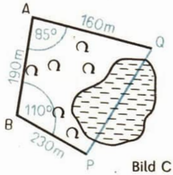


Bild C 194

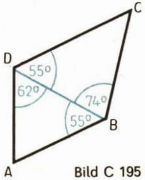


Bild C 195

34. Ein Rechteck $ABCD$ hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{BC} = 4$ cm. E ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$, F der Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks BEF?

35. Beschreibe, wie du den Flächeninhalt der Figuren im Bild C 196 ermitteln würdest und welche Längen du dafür messen würdest!

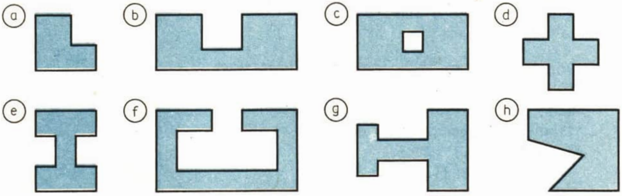


Bild C 196

36. Bild C 197 zeigt einen Würfel im „Schrägbild". In ihn sind zwei „Raumdiagonalen" eingezeichnet.

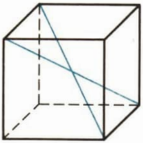


Bild C 197

a) Wieviel verschiedene Raumdiagonalen hat ein Würfel?

b) Wieviel verschiedene Diagonalen auf den Würfelflächen gibt es?
Begründe, daß alle diese (Flächen-) Diagonalen gleich lang sind!

c) Begründe, daß auch alle Raumdiagonalen eines Würfels die gleiche Länge haben!

Untersuche derartige Fragen auch für

d)* einen Quader, der genau zwei quadratische Begrenzungsflächen hat,

e)* einen Quader, der keine quadratische Begrenzungsfläche hat!

37. Bild C 198 zeigt einen Körper, der von vier Dreiecken begrenzt wird, eine „dreiseitige Pyramide". Jedes der drei Dreiecke mit D als Eckpunkt hat bei D einen rechten Innenwinkel. Die Kanten $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ sind gleich lang.

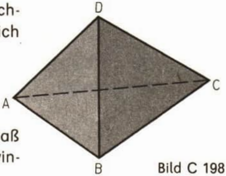


Bild C 198

a) Welches der Dreiecke ABC, ABD, BCD und ACD hat den größten Flächeninhalt? Begründe!

b) Untersuche die gleiche Frage für den Fall, daß $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ und $\triangle ACD$ bei D einen Innenwinkel von 40° haben!

c) Versuche, solche Körper aus Papier zu basteln! (Vgl. Aufgabe 7 aus LE C 11, S. 128!)

38. Der Körper im Bild C 198 hat vier Dreiecke als Begrenzungsflächen. Gibt es auch Körper, die **a)** fünf, **b)** sechs, **c)** acht Dreiecke als Begrenzungsflächen haben?

39. Aus einem rechteckigen Blech (12 cm × 30 cm) sind die Begrenzungsflächen eines Quaders mit quadratischer Grundfläche zu schneiden, der doppelt so hoch wie breit ist.

a) Ermittle die Kantenlängen des größten Quaders, der daraus gefertigt werden kann (wenn man annimmt, daß kein Abfall entsteht)! Welches Volumen hat dieser Quader?

b) Skizziere, wie dafür das Blech zertrennt werden kann!

c)* Löse die gleiche Aufgabe für die Maße 25 cm × 40 cm! Was stellst du fest?

40. Aus einem rechteckigen Blech (250 mm × 180 mm) wird an jeder Ecke ein kleines Quadrat mit der Seitenlänge c herausgeschnitten und der Rest zu einem (oben offenen) Kästchen gebogen.
Berechne das Volumen des Kästchens für

a) $c = 20$ mm, **b)** $c = 25$ mm, **c)** $c = 30$ mm!

d) Vergleiche die bei **a)** bis **c)** erhaltenen Werte! Schätze danach das Volumen des Kästchens für $c = 40$ mm! Berechne dann den Wert und vergleiche mit deiner Schätzung!

41. Ein Kleingärtner will aus Beton quaderförmige Begrenzungssteine gießen. Er hat sich dafür eine Gußform aus vier Brettern zusammengenagelt (↗ Bild C 199). Wie kann er möglichst einfach kontrollieren, ob die Form rechtwinklig ist?

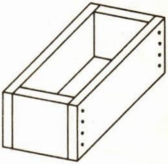


Bild C 199

42. **a)** Herr Groß hat in seinem Kleingarten auf einer rechteckigen Fläche (6,5 m × 2,5 m) vier 2,5 m lange Beete gleicher Breite mit 3 dm breiten Wegen dazwischen angelegt. Wie breit sind diese Beete?

b) Bei Trockenheit gießt Herr Groß auf jedes dieser Beete den Inhalt einer 10-l-Kanne. Nach einem Regentag meldet der Wetterbericht 18 mm Niederschlagshöhe. Vergleiche!

43. Berechne den Flächeninhalt der im Bild C 200 angegebenen Bleche (Maße in Millimeter)!

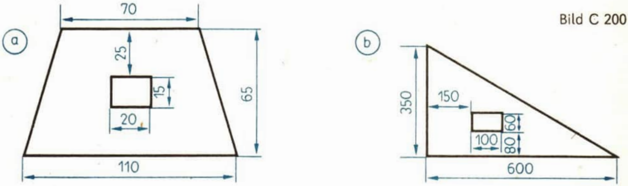


Bild C 200

44. Das Bild C 201 zeigt den Grundriß eines neu anzulegenden Parks im Maßstab 1:10000.

a) Berechne den Flächeninhalt in Hektar!

b) Am äußeren Rand entlang soll eine Hecke gepflanzt werden. Wieviel Meter Hecke ergibt das?

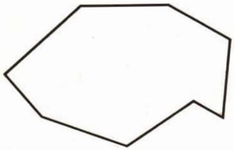


Bild C 201

45. Das Bild C 202 zeigt die Giebelseite eines Hauses. Die Wand muß neu mit Farbe gestrichen werden. Wieviel Mark kostet der Anstrich, wenn man einschließlich aller Nebenarbeiten für das Quadratmeter 2,45 M berechnen muß?

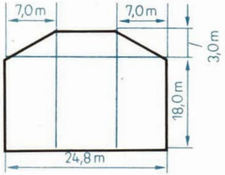


Bild C 202

46. Eine Gartenterrasse hat die Form eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks. Ihr Flächeninhalt beträgt 8,0 m^2.

a) Wie lang sind die Seiten, die den rechten Winkel einschließen?

b) Ermittle die Länge der dritten Seite anhand einer maßstäblichen Zeichnung!

D Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität

Einführung in die Gleichungslehre

1 Terme, Gleichungen, Ungleichungen

Mit Hilfe von Gleichungen haben wir schon oft praktische Probleme lösen können. Betrachten wir zur Erinnerung die folgende Aufgabe aus Klasse 5:

> Lutz kauft drei gleiche Tafeln Schokolade. Er zahlt mit einem Fünfzigmarkschein und erhält 38 M zurück. Wieviel kostet eine Tafel?
> Wenn wir den Preis für eine Tafel mit x bezeichnen, beschreibt z. B. die Gleichung $3 \cdot x + 38\ \text{M} = 50\ \text{M}$ den Sachverhalt.

Wir wollen uns nun etwas näher mit Gleichungen beschäftigen und hören zunächst, wie sich Hans und Marion über die Beispiele D 1a bis f unterhalten:

■ 1 **a)** $1212 + 387 = 1599$ **b)** $17 - 3 = 13{,}5$ **c)** $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = y$

d) Für alle gebrochenen Zahlen a, b, c gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

e) Wenn α, β und γ die Größen der Innenwinkel in einem Dreieck sind, dann ist $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

f) $A = 3{,}5\ \text{cm} \cdot 4{,}0\ \text{cm}$

Hans: „Die Beispiele sind sehr verschieden. Es handelt sich aber in jedem Falle um Gleichungen."

Marion: „Das stimmt nicht, denn **b)** ist doch keine Gleichung. Auf der linken Seite steht ja nicht das gleiche wie auf der rechten Seite."

Hans: „Das ist für mich keine Begründung, denn in **c)** steht auch nicht auf beiden Seiten das gleiche. Trotzdem ist **c)** eine Gleichung."

Wir wollen nun genau festlegen, was eine Gleichung ist, damit kein Streit entstehen kann.
So verschieden die Beispiele D 1a bis f auch sind, immer tritt ein Gleichheitszeichen auf, das die linke Seite und die rechte Seite der jeweiligen Gleichung verbindet.
Wir sehen uns nun die beiden Seiten genauer an. In den Beispielen D 1a, b, c und d sind **Zahlen** mit Hilfe von **Ziffern** oder Buchstaben, den **Variablen**, beschrieben. Ziffern, Va-

riablen und „sinnvolle" Zusammensetzungen von ihnen mit Hilfe der Rechenzeichen + −, ·, :, des Bruchstrichs, des Kommas oder der Potenzschreibweise nennen wir **Terme**. Manchmal benutzen wir auch Klammern zum Aufschreiben von Termen.

Terme sind zum Beispiel 3; x; 2^4; $\frac{2}{3}$; $\frac{a-b}{2}$; $3+4{,}5$; $a\cdot(2+x)$; $\frac{s}{t}$.

Dagegen sind z. B. $x -$; $4 \cdot =$; $6 \mid 12$; $(3 -$; $: 4{,}2 -$; $3 = 9$; $P(2;\,5)$ keine Terme.

Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so entsteht eine *Gleichung*.

■ 2 **a)** $3 \cdot x = \frac{7}{2}$ ist eine Gleichung.

Begründung: $\frac{7}{2}$ ist als sinnvolle Zusammensetzung von zwei Ziffern und einem Bruchstrich ein Term. $3 \cdot x$ ist auch ein Term, da eine Ziffer und eine Variable durch das Rechenzeichen · verbunden sind. Beide Terme sind durch ein Gleichheitszeichen verbunden.

b) $17 - 3 = 13{,}5$ ist eine Gleichung, denn links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen Terme.

c) $1 \mid a$ ist keine Gleichung, denn es tritt kein Gleichheitszeichen auf.

In den Beispielen D 1e und f stehen die Variablen nicht für Zahlen, sondern für Größen. Unsere Erklärung erfaßt diese Gleichungen nicht. Trotzdem werden wir unser Wissen über Gleichungen auch auf solche Beispiele anwenden.
Manchmal sind zwei Terme durch eines der Zeichen <, > oder ≠ verbunden.

■ 3 **a)** $3 + 8 < 12$ **b)** $\frac{1}{2} \neq \frac{4}{3}$ **c)** $x - 5{,}2 > 13$ **d)** $\frac{6}{7} > \frac{8}{5}$ **e)** $5 \cdot a < 37$

Werden zwei Terme durch eines der Zeichen <, > oder ≠ verbunden, so entsteht eine *Ungleichung*.

Aufgaben

1. Beschreibe die Zusammenhänge durch eine Gleichung oder eine Ungleichung!
   a) Das Fünffache einer Zahl a beträgt 35.
   b) Wenn man zu einer Zahl 4 addiert, so erhält man 10,3.
   c) Der fünfte Teil einer Zahl b beträgt $\frac{1}{2}$.
   d) Die Hälfte einer Zahl ist 0,3.
   e) Das Doppelte einer Zahl x ist kleiner als 13.
   f) Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b beträgt 24 cm.
   g) Ein Traktor legt (bei geradliniger gleichförmiger Bewegung) in 15 s einen Weg von 75 m zurück.
   h) Der Pollen der Kiefer ist bei 600facher Vergrößerung fast 1,8 cm lang.

2. Entscheide, ob ein Term vorliegt oder nicht!
   a) $3 + 4$ **b)** $1{,}7 \cdot x$ **c)** $\frac{a}{b}$ **d)** $-\left(-\frac{1}{2}\right.$ **e)** $2 =$ **f)** $4 : 0{,}2$ **g)** $a \mid b$

3. Entscheide, ob eine Gleichung bzw. Ungleichung vorliegt!

a) $3 + a = 21$ **d)** $\frac{17}{14} = \frac{21}{5}$ **g)** $12 < t < 21{,}5$ **k)** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

b) $\frac{a + 3{,}4}{2} = \frac{3}{2}$ **e)** $12 \cdot a \neq 3{,}5 \cdot b$ **h)** $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9}$ **l)** $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

c) $4 \mid 8$ **f)** $\left(2^3 + \frac{1}{3}\right) \cdot x = \frac{1}{2}$ **i)** $12{,}4 < \frac{1}{2}$ **m)** $a \leqq 10$

2 Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen

● **1** Welche der Gleichungen bzw. Ungleichungen sind Aussagen? Welche Aussagen sind wahr?
a) $5 + 7 = 12$ **b)** $3 = 7$ **c)** $4 \neq 3 + 2$ **d)** $4 + x = 5{,}5$ **e)** $0{,}9 \cdot x > 2$

Treten in einer Gleichung oder Ungleichung keine Variablen auf, so handelt es sich entweder um eine wahre oder um eine falsche Aussage.
Treten in einer Gleichung oder Ungleichung Variablen auf, so entsteht eine Aussage, wenn man anstelle der Variablen Ziffern schreibt. In diesem Fall sagt man:
Für die Variablen werden Zahlen eingesetzt.
Im folgenden werden hauptsächlich Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen betrachtet.

■ **4** Wir setzen in die Gleichung $4 + x = 5{,}5$ und in die Ungleichung $0{,}9 \cdot x > 2$ für die Variable x Zahlen ein.

x	$4 + x = 5{,}5$	$0{,}9 \cdot x > 2$
0	$4 + 0 = 5{,}5$ falsch	$0{,}9 \cdot 0 > 2$ falsch
1,5	$4 + 1{,}5 = 5{,}5$ wahr	$0{,}9 \cdot 1{,}5 > 2$ falsch
3	$4 + 3 = 5{,}5$ falsch	$0{,}9 \cdot 3 > 2$ wahr
4,5	$4 + 4{,}5 = 5{,}5$ falsch	$0{,}9 \cdot 4{,}5 > 2$ wahr

Wir sagen:
Die Zahl 1,5 erfüllt die Gleichung $4 + x = 5{,}5$.
Die Zahlen 3 und 4,5 erfüllen die Ungleichung $0{,}9 \cdot x > 2$.
Dagegen erfüllt zum Beispiel die Zahl 3 die Gleichung $4 + x = 5{,}5$ nicht, und die Zahlen 0 und 1,5 erfüllen die Ungleichung $0{,}9 \cdot x > 2$ nicht.

Wir sagen: Eine Zahl **erfüllt** eine Gleichung bzw. Ungleichung, wenn die betreffende Gleichung oder Ungleichung durch das Einsetzen dieser Zahl zu einer wahren Aussage wird.

● **2** Gib für jede der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen Zahlen an, die diese erfüllen!

a) $2 \cdot x = 6$ **c)** $\frac{1}{2} \cdot t = 5$ **e)** $2{,}5 \cdot b \neq \frac{1}{2}$ **g)** $u + 2 = 2 \cdot u$

b) $a = a + 1$ **d)** $2 \cdot x < 0$ **f)** $2 \cdot a + 2 = 2 \cdot (a + 1)$ **h)** $2 \cdot c = c^2$

Manche Gleichungen bzw. Ungleichungen werden von *keiner* Zahl erfüllt (↗ Auftrag D 2b und d), andere von *nur einer* Zahl (↗ Auftrag D 2a, c und g) und wieder andere von *mehreren* Zahlen (↗ Auftrag D 2e, f und h).

Wir formulieren: Eine Gleichung bzw. Ungleichung mit einer Variablen **lösen** bedeutet, *alle* Zahlen zu finden, die die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung *erfüllen*. Jede solche Zahl heißt eine **Lösung** der gegebenen Gleichung oder Ungleichung. Die Menge aller Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung heißt deren **Lösungsmenge**.

● 3 **a)** Welche natürlichen Zahlen erfüllen die Gleichung $2 \cdot x = 5$?
b) Welche gebrochenen Zahlen erfüllen die Gleichung $2 \cdot x = 5$?

Die Lösungsmenge einer Gleichung kann sich ändern, wenn man den Zahlenbereich ändert, aus dem für die Variable eingesetzt werden kann. Deshalb legen wir für eine Gleichung oder Ungleichung einen **Grundbereich der Variablen** fest.
Wir verabreden: Wenn kein Grundbereich der Variablen angegeben ist, ist immer der Bereich Q_+ der gebrochenen Zahlen gemeint.
Wenn, wie im Auftrag D 3a), eine Gleichung von keiner Zahl erfüllt wird, dann enthält die Lösungsmenge dieser Gleichung kein Element. Sie ist die **leere Menge** und wird mit $\varnothing$ bezeichnet.
Zur Angabe der Lösungsmenge einer Gleichung benutzen wir auch die Mengenschreibweise. Zum Beispiel gilt für den Auftrag D 3a) $L = \varnothing$ und für den Auftrag D 3b) $L = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
Wenn eine Gleichung nicht lösbar ist, das heißt keine Lösung besitzt, können wir jetzt also auch schreiben: $L = \varnothing$.

Aufgaben

1. Setze zwischen die folgenden Terme T_1 und T_2 eines der Zeichen <, > oder =, so daß eine wahre Aussage entsteht!

a)

T_1	T_2
$5 + 4$	11
$\frac{34}{12}$	$\frac{3}{2} + \frac{4}{3}$
$2\frac{7}{5} - 1\frac{3}{8}$	$\frac{36}{7} - \frac{16}{5}$

b)

T_1	T_2
$4 + 3$	13
$\frac{5}{2} + \frac{2}{3}$	$\frac{38}{12}$
$1{,}83 + 0{,}5$	$1{,}14 + 1{,}07$

2. Setze in die folgenden Gleichungen für x nacheinander die Zahlen $2;\ \frac{1}{2};\ 4;\ 7;\ 0;\ 1{,}2$ und $0{,}4$ ein! Stelle fest, ob dadurch eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

a) $3 \cdot x = 12$ **c)** $\frac{1}{2} \cdot x = 2$ **e)** $6{,}1 + x = 4{,}9$ **g)** $\frac{3}{2} \cdot x = 0{,}6$

b) $4 \cdot x = 8$ **d)** $\frac{1}{4} \cdot x = 1$ **f)** $5{,}1 + x = 6{,}3$ **h)** $\frac{3}{4} \cdot x = 0{,}3$

3. Setze in die folgenden Ungleichungen für a nacheinander die Zahlen $\frac{3}{4}$; 1; 0; $\frac{1}{5}$; 1,5; $\frac{7}{3}$; 3; 2,5 ein! Stelle fest, ob dadurch eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

a) $1 < a$ **c)** $a + 3{,}5 < 1$ **e)** $\frac{2}{3} \cdot a < 1$ **g)** $3 \cdot a > 2{,}25$

b) $2 < a$ **d)** $a + 3{,}0 < 10$ **f)** $\frac{4}{3} \cdot a > 1{,}5$ **h)** $2 \cdot a > 1{,}5$

4. Löse die folgenden Gleichungen!

a) $15 + 7 = 2 \cdot t$ **c)** $\frac{1}{2} + x = \frac{2}{3}$ **e)** $0 \cdot a = 7$ **g)** $3 \cdot t + 5 = 23$

b) $1 \cdot x = x$ **d)** $\frac{3}{4} : v = \frac{3}{8}$ **f)** $c \cdot 3{,}4 = 0$ **h)** $(d - 3) \cdot 4 = 28$

Haben die folgenden Gleichungen und Ungleichungen Lösungen im angegebenen Grundbereich? Gib die Lösungsmengen an! Dabei wird mit N_g die Menge der geraden natürlichen Zahlen, mit N_u die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen und mit N_p die Menge der Primzahlen bezeichnet.

5. ↑ **a)** $3 \cdot x = 7;\ x \in N$ **d)** $4 \cdot x = 16;\ x \in N_p$ **g)** $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{27}{12};\ x \in N$

b) $3 \cdot x = 7;\ x \in Q_+$ **e)** $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{12}{9};\ x \in Q_+$ **h)** $4 \cdot x = \frac{3}{7};\ x \in Q_+$

c) $4 \cdot x = 16;\ x \in N$ **f)** $3 \cdot x = \frac{4}{7};\ x \in Q_+$ **i)** $1 \cdot x = 12;\ x \in N$

6. ↑ **a)** $x - 3 = 1;\ x \in N_g$ **c)** $12 > 4 \cdot x;\ x \in N_u$ **e)** $2 \cdot x < 20;\ x \in N_p$

b) $x + 3 = 1;\ x \in N_u$ **d)** $4 \cdot x < 3;\ x \in N_g$ **f)** $7 \cdot x = 7;\ x \in N_p$

7. Gib je zwei Gleichungen an, die folgende Lösungsmengen haben!

a) $L = \{2\}$ **b)** $L = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ **c)** $L = \left\{\frac{4}{3}\right\}$ **d)** $L = \{0{,}8\}$ **e)** $L = \{0\}$ **f)** $L = \varnothing$

8. Vergleiche die Lösungsmengen der Gleichungen $2 \cdot x = 12$; $x \cdot 2 = 12$; $12 = 2 \cdot x$ und $12 = x \cdot 2$!

3 Lösen von Gleichungen der Form $a \cdot x = b$

Wir werden jetzt unsere Erfahrungen im Lösen von Gleichungen zusammenfassen und den Lösungsweg für bestimmte Gleichungen vereinheitlichen.

Aufgabe: Die Zahl 221 ist in ein Produkt zu zerlegen, wobei ein Faktor 17 ist. Wie lautet der andere Faktor?

Es ist also die Gleichung $17 \cdot x = 221$ zu lösen. Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, ergibt sich $x = 221 : 17$, also $x = 13$.

Da $17 \cdot 13 = 221$ eine wahre Aussage und $13 \in Q_+$ ist, haben wir die Lösung der Gleichung gefunden. Damit ist 13 der andere Faktor.

● **4** Löse die Gleichungen **a)** $19 \cdot x = 247$, **b)** $3 \cdot x = 7{,}5$ und **c)** $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{4}{5}$ durch entsprechende Überlegungen!

Wir vergleichen die Gleichungen
(1) $17 \cdot x = 221$ und (2) $x = 221 : 17$
und stellen fest: Die Gleichung (2) geht aus der Gleichung (1) dadurch hervor, daß man beide Seiten der Gleichung (1) durch 17 dividiert. Wir sagen: Die Gleichung (1) wurde zur Gleichung (2) **umgeformt**.
Dieses Umformen erfolgte mit dem Ziel, die Lösung der Gleichung (1) zu finden. Die Lösung ist aus der Gleichung (2) leichter abzulesen, denn die Variable steht allein auf einer Seite. Man sagt: Die Gleichung wurde nach der Variablen **aufgelöst** oder die Variable wurde **isoliert**.

● **5** Dividiere beide Seiten der Gleichung $17 \cdot x = 221$ der Reihe nach durch 13, durch 221, durch 1 sowie durch 17 und stelle fest, ob dadurch die Variable isoliert wird!

■ **5** Die Gleichung $0{,}6 \cdot t = 0{,}75$ $(t \in Q_+)$ soll gelöst werden. Die Variable ist isoliert, wenn beide Seiten der Gleichung durch 0,6 dividiert werden. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} 0{,}6 \cdot t &= 0{,}75 \qquad | : 0{,}6 \\ (0{,}6 \cdot t) : 0{,}6 &= 0{,}75 : 0{,}6 \\ t &= 1{,}25 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:
$0{,}75 : 0{,}6 =$
$7{,}5 : 6 = 1{,}25$
$\underline{15}$
$\quad 30$
$\quad \underline{30}$
$\quad\; 0$

Um festzustellen, ob die gebrochene Zahl 1,25 auch die Ausgangsgleichung erfüllt, setzen wir für die Variable t die Zahl 1,25 ein und erhalten:
$0{,}6 \cdot 1{,}25 = 0{,}75$.
Das ist eine wahre Aussage. Also ist die Zahl 1,25 tatsächlich die Lösung der Gleichung $0{,}6 \cdot t = 0{,}75$.
Es gilt $\underline{\underline{L = \{1{,}25\}}}$.

Probe: Einsetzen der errechneten Zahl in die Ausgangsgleichung.
Kontrollieren, ob eine wahre Aussage entsteht.

■ **6** Die Gleichung $y \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{23}$ soll gelöst werden.

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{3}{4} &= \frac{15}{23} \qquad \left| : \frac{3}{4} \right. \\ \left(y \cdot \frac{3}{4}\right) : \frac{3}{4} &= \frac{15}{23} : \frac{3}{4} \\ y &= \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{23} \cdot \frac{4}{\underset{1}{\cancel{3}}} \\ y &= \frac{20}{23} \end{aligned}$$

$$\textit{Probe: } \frac{20}{23} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{23}$$

$$\frac{\overset{5}{\cancel{20}} \cdot 3}{23 \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{15}{23}$$

$$\frac{15}{23} = \frac{15}{23}$$ (wahr). Wir können schreiben $\underline{\underline{L = \left\{\frac{20}{23}\right\}}}$.

Statt durch $\underline{\underline{L = \left\{\frac{20}{23}\right\}}}$ können wir die Lösung im Beispiel D 6 nach der Bestätigung durch die Probe auch dadurch kennzeichnen, daß wir die Gleichung $y = \frac{20}{23}$ zweimal unterstreichen.

Also $\underline{\underline{L = \left\{\frac{20}{23}\right\}}}$ oder $\underline{\underline{y = \frac{20}{23}}}$.

■ 7 Die Gleichung $0 \cdot a = 2{,}5$ $(a \in Q_+)$ soll gelöst werden. Da die Division durch Null nicht ausführbar ist, versagt unsere Methode. Wir können die Gleichung dennoch lösen. Es ist $L = \emptyset$, denn multipliziert man irgendeine Zahl mit 0, so ergibt sich immer 0 und nie 2,5.

■ 8 Die Gleichung $\frac{x}{7} = 2{,}4$ soll gelöst werden. Auch diese Gleichung ist von der Form $a \cdot x = b$, denn $\frac{x}{7} = \frac{1}{7} \cdot x$.

$$\frac{x}{7} = 2{,}4 \qquad \Big| : \frac{1}{7}$$

$$\left(\frac{1}{7} \cdot x\right) : \frac{1}{7} = 2{,}4 : \frac{1}{7}$$

$$x = 2{,}4 \cdot 7$$

$$\underline{\underline{x = 16{,}8}}$$

Division durch $\frac{1}{7}$ bedeutet Multiplikation mit 7. Damit ergibt sich kurz:

$$\frac{x}{7} = 2{,}4 \qquad | \cdot 7$$

$$x = 2{,}4 \cdot 7$$

$$\underline{\underline{x = 16{,}8}}$$

$$\textit{Probe: } \frac{16{,}8}{7} = 2{,}4$$

$$\frac{\overset{24}{\cancel{168}}}{\underset{10}{\cancel{70}}} = 2{,}4$$

$$\frac{24}{10} = 2{,}4$$ (wahr)

▶ 1

Wir lösen eine Gleichung $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ folgendermaßen:
(1) Wir dividieren beide Seiten dieser Gleichung durch a.
***Ergebnis:* $x = \frac{b}{a}$ bzw. $x = b : a$ ist die einzige Lösung.**
(2) Wir kontrollieren das Ergebnis durch die Probe.

Gleichungen, in denen Größen vorkommen, lösen wir entsprechend.

9 Von einem Rechteck sind der Flächeninhalt $A = 14{,}7\ \text{cm}^2$ und die Seite $a = 4{,}2$ cm bekannt. Wie lang ist die Seite b?

Gegeben: $A = 14{,}7\ \text{cm}^2$; $a = 4{,}2$ cm *Gesucht*: b (in cm)

Lösung:

$$A = a \cdot b$$

$$14{,}7\ \text{cm}^2 = 4{,}2\ \text{cm} \cdot b \qquad |\ :4{,}2\ \text{cm}$$

$$\frac{14{,}7}{4{,}2}\ \text{cm} = b$$

$$\underline{\underline{b = 3{,}5\ \text{cm}}}$$

Probe:

$14{,}7\ \text{cm}^2 = 4{,}2\ \text{cm} \cdot 3{,}5\ \text{cm}$ (wahr)

Antwortsatz: Die Seite b hat die Länge 3,5 cm.

Nebenrechnung:

14,7 : 4,2 =
147 : 42 = 3,5
210
0

4,2 · 3,5
126
210
14,70

Aufgaben

Löse die folgenden Gleichungen!

1. ↑ **a)** $4 \cdot x = 128$ **b)** $7 \cdot a = \frac{49}{2}$ **c)** $0{,}25 \cdot z = 24$ **d)** $2{,}7 \cdot x = 21{,}6$
e) $\frac{2}{3} \cdot x = 24$ **f)** $\frac{8}{5} \cdot u = 64$ **g)** $3 \cdot x = 0$ **h)** $0 \cdot x = 7{,}2$

2. ↑ **a)** $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{7}{8}$ **b)** $u \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{8} = 4 \cdot x$ **d)** $1{,}2 = 3 \cdot t$
e) $\frac{1}{2} \cdot x = 38$ **f)** $\frac{x}{2{,}1} = 0{,}15$ **g)** $\frac{1}{9} \cdot u = 3{,}2$ **h)** $\frac{a}{5} = 1{,}5$

3.* ↑ **a)** $1{,}2 \cdot x = 2{,}4 \cdot 3{,}5$ **b)** $0 \cdot t = 7{,}6 \cdot 0$
c) $1{,}2 \cdot 2{,}4 = 0{,}6 \cdot u$ **d)** $3 \cdot t = 12{,}5 - 3{,}5$

4. Stelle Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ auf, die folgende Lösungsmengen haben!
a) $L = \{2\}$ **b)** $L = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ **c)** $L = \left\{\frac{13}{5}\right\}$ **d)** $L = \{0\}$ **e)** $L = \{0{,}33\}$ **f)** $L = \varnothing$

5.* Wie groß muß a in $a \cdot x = 12{,}6$ sein, damit die Gleichung die Lösung 2 hat?

6.* Wie groß muß b in $3{,}5 \cdot x = b$ sein, damit die Gleichung die Lösung 4 hat?

7. Ein Rechteck mit der Seite $a = 40$ m hat den Flächeninhalt $A = 2000\ \text{m}^2$. Wie lang ist die Seite b?

8. Forme die Gleichungen nach der angegebenen Variablen um!
a) $n \cdot x = p$ (x) **b)** $s = v \cdot t$ (t) **c)** $s = v \cdot t$ (v) **d)** $\varrho = \frac{m}{V}$ (m)

4 Lösen von Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$

■ 10 Ein Auto legt eine Strecke von $s = 60$ km mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit $v = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Wie lange ist das Auto unterwegs? (In diesem Beispiel berücksichtigen wir beim Rechnen nicht, daß Näherungswerte auftreten.)

Gegeben: $v = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $s = 60$ km *Gesucht:* Zeit t (in h)

Lösung: $v = \frac{s}{t}$ *Überschlag:* $t > 30$ min, $t < 1$ h.

$$80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{60\text{ km}}{t}$$

Die Variable t steht im Nenner. Wenn wir diese Gleichung mit t multiplizieren, erhalten wir eine Gleichung der Form $a \cdot t = b$.

$$80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = 60\text{ km} \qquad \Big| : 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$t = \frac{60}{80}\text{ h}$$

$$t = \frac{3}{4}\text{ h} \qquad t = 45\text{ min}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{3}{4}\text{ h} = \frac{3}{4} \cdot 60\text{ min}$$

$$\frac{3}{4}\text{ h} = 45\text{ min}$$

$$\frac{60}{\frac{3}{4}} = 60 \cdot \frac{4}{3} = 80$$

Probe: $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{60\text{ km}}{\frac{3}{4}\text{h}}$ (wahr)

Antwortsatz: Das Auto ist eine $\frac{3}{4}$ h, das heißt 45 min unterwegs.

Im Beispiel D 10 trat eine Gleichung vom Typ $\frac{a}{x} = b$ auf. Bei solchen Gleichungen kann 0 keine Lösung sein, denn $\frac{a}{0}$ ist nicht definiert. Daher können wir $x \neq 0$ voraussetzen.

Wir lösen nun die Gleichung $\frac{3}{x} = 9$. Sie ist von diesem Typ.

Multiplikation mit x auf beiden Seiten der Gleichung ergibt $3 = 9 \cdot x$. Diese Gleichung der Form $a = b \cdot x$ können wir bereits lösen. Es ist $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

■ 11 a)

$$\frac{5}{x} = 0{,}2 \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{5}{x} = 0{,}2 \qquad | \cdot x$$

$$\frac{5}{x} \cdot x = 0{,}2 \cdot x$$

$$5 = 0{,}2 \cdot x \qquad | : 0{,}2$$

$$\frac{5}{0{,}2} = x$$

$$\underline{\underline{x = 25}}$$

b)

$$\frac{5}{4} = \frac{4}{5} : x \qquad (x \neq 0)$$

$$\frac{5}{4} = \frac{4}{5} : x \qquad | \cdot x$$

$$\frac{5}{4} \cdot x = \frac{4}{5} \qquad \Big| : \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{4}{5} : \frac{5}{4}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{16}{25}}}$$

Probe: $\frac{5}{25} = 0{,}2$

$\frac{1}{5} = 0{,}2$ (wahr)

Probe: $\frac{5}{4} = \frac{4}{5} : \frac{16}{25}$

$\frac{5}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}$

$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$ (wahr)

■ 12 a) $\frac{0{,}4}{x} = 0 \qquad (x \neq 0)$

$\frac{0{,}4}{x} = 0 \qquad | \cdot x$

$0{,}4 = 0 \cdot x$

Diese Gleichung hat keine Lösung, denn für jede Zahl x ist $0 \cdot x = 0$.

$\underline{\underline{L = \emptyset}}$

b) $\frac{0}{x} = \frac{1}{2} \qquad (x \neq 0)$

$\frac{0}{x} = \frac{1}{2} \qquad | \cdot x$

$0 = \frac{1}{2} \cdot x \qquad | : \frac{1}{2}$

$x = 0$

Das kann nicht sein, denn es muß ja $x \neq 0$ gelten.

Also ist $\underline{\underline{L = \emptyset}}$

● 6 Löse die Gleichung $\frac{0}{x} = 0$!

▶ 2

Wir lösen eine Gleichung $\frac{a}{x} = b$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ folgendermaßen:

(1) Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit x $(x \neq 0)$.
Ergebnis: $a = b \cdot x$

(2) Wir dividieren beide Seiten dieser Gleichung durch b.
Ergebnis: $x = \frac{a}{b}$ **bzw.** $x = a : b$ **ist die einzige Lösung.**

(3) Wir kontrollieren das Ergebnis durch die Probe.

Aufgaben

Löse die folgenden Gleichungen!

1.↑ a) $\frac{4}{x} = 12$ c) $\frac{0{,}4}{x} = 1{,}2$ e) $\frac{4}{3} : x = \frac{3}{2}$ g) $0{,}72 = 0{,}24 : x$

b) $\frac{0}{x} = 1{,}4$ d) $\frac{3}{x} = 0$ f) $\frac{\frac{3}{2}}{x} = \frac{9}{2}$ h) $\frac{1{,}2}{x} = \frac{4}{3}$

2.*↑ a) $\frac{2}{x} = \frac{3}{4} \cdot 1{,}2$ b) $9{,}5 - 3{,}5 = \frac{5}{x}$ c) $12 \cdot \frac{1}{t} = 24$ d) $3{,}6 \cdot \frac{2}{t} = 18$

3. Stelle Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$ auf, die folgende Lösungsmengen haben!

a) $L = \{3\}$ b) $L = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ c) $L = \{0\}$ d) $L = \{1{,}75\}$ e) $L = \emptyset$

4.* Wie groß muß a in $\frac{a}{x} = 4{,}8$ sein, damit die Gleichung die Lösung 3 hat?

5.* Wie groß muß b in $\frac{2{,}5}{x} = b$ sein, damit die Gleichung die Lösung 5 hat?

6. Welche Strecke fährt ein Radfahrer mit der Geschwindigkeit $v = 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $2\frac{1}{2}$ h?

7. Welche der Gleichungen ist vom Typ $a \cdot x = b$ oder $\frac{a}{x} = b$?

a) $7{,}6 \cdot x = 11{,}4$	**e)** $\frac{1{,}2}{u} = \frac{3}{4}$	**i)** $3 \cdot 35 = s \cdot \frac{5}{12}$	**n)** $\frac{12}{35} = \frac{4}{7} \cdot x$
b) $12 = 0 \cdot a$	**f)** $\frac{2 \cdot v}{3} = \frac{4}{6}$	**k)** $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{3}{x}$	**o)** $\frac{4}{9} \cdot x = 7{,}6$
c) $0{,}9 + t = 1{,}7$	**g)** $3 \cdot x = x + 2$	**l)** $0 = x \cdot 0$	**p)** $\frac{1}{x} = 10$
d) $2 - x = 17{,}8$	**h)** $x^2 + 1 = 5$	**m)** $z \cdot 3{,}5 = 31{,}5$	**q)** $a \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$

8. Löse die Gleichungen in Aufgabe 7!

Proportionalität und Verhältnisgleichungen

5 Darstellen von Zuordnungen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

Wir wissen bereits: Geordnete Zahlenpaare kann man als Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen. So stellt im Bild D 1 der Punkt P das Zahlenpaar (3; 4) dar. Die Zahlen 3 und 4 heißen **Koordinaten** des Punktes P (3; 4). 3 heißt **Abszisse** von P, 4 heißt **Ordinate** von P. Der Punkt mit den Koordinaten (0; 0) wird **Koordinatenursprung** genannt. Dieser Punkt wird mit O (0; 0) bezeichnet.[1] Von O gehen die beiden **Koordinatenachsen**, der x-Strahl und der y-Strahl, aus.

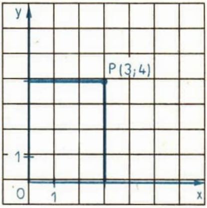


Bild D 1

● 7 **a)** Wo liegen alle Punkte, deren Abszisse 1 ist? Wo liegen alle Punkte mit der Ordinate 3? Wo liegen alle Punkte mit der Abszisse 0?

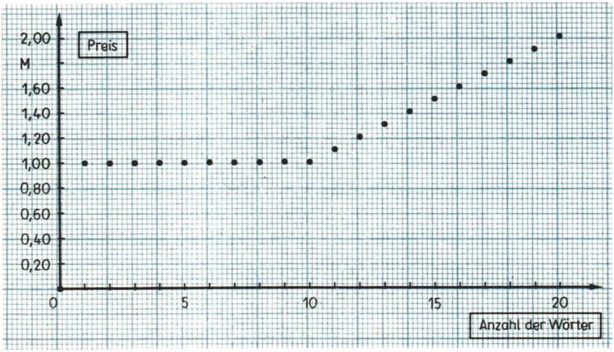
b) Zeichne die Punkte P_1 (3; 5), P_2 (1; 7) und P_3 (5; 3) in ein Koordinatensystem! Zeichne Linien (auch gekrümmte), die durch diese drei Punkte gehen! Markiere auf jeder Linie einen weiteren Punkt und gib seine Koordinaten an!

[1] Das O ergibt sich aus dem lateinischen Wort origo (Ursprung).

Die Darstellung von geordneten Zahlenpaaren durch Punkte in einem Koordinatensystem ist zweckmäßig, um bestimmte Zusammenhänge zu veranschaulichen.

■ 13 Für ein Telegramm im Ortsverkehr ist bis zu 10 Wörtern 1 Mark zu bezahlen, für jedes weitere Wort 0,10 M. Jeder Wortanzahl ist ein Preis zugeordnet. Im Bild D 2 sind dadurch entstehende Paare (Wortanzahl; Preis) veranschaulicht.
Die Punkte liegen bis zur Wortanzahl 10 auf einer Parallelen zum x-Strahl. Von der Wortanzahl 10 an liegen die Punkte auf einer Geraden, die durch den Punkt O (0; 0) geht.

Bild D 2



Im Beispiel D 13 ist es nicht sinnvoll, die Punkte in der graphischen Darstellung miteinander durch eine Linie zu verbinden, denn es gibt zum Beispiel kein Telegramm mit 5,5 Wörtern. Im folgenden Beispiel ist das anders.

■ 14 Jeder Zahl x wird die Zahl x^2 zugeordnet. Diese Zuordnung soll in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt werden.

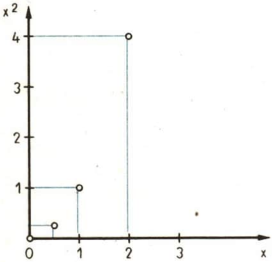


Bild D 3

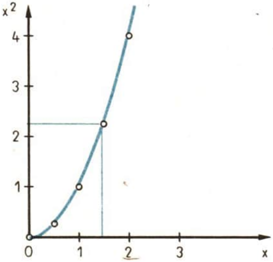


Bild D 4

Einige Paare dieser Zuordnung sind: (1; 1), (2; 4), (0; 0), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Die Punkte, die diesen Zahlenpaaren entsprechen, wurden im Bild D 3 in ein Koordinatensystem eingezeichnet.

Man kann diese Punkte durch eine gekrümmte Linie so verbinden, daß auch für weitere Zahlen die Quadrate näherungsweise abgelesen werden können (↗ Bild D 4).

Aufgaben

1. $M = \{0{,}5;\ 1;\ 2{,}5\}$; $N = \left\{0;\ \frac{1}{2};\ 2\frac{1}{4}\right\}$
   - **a)** Zeichne ein Koordinatensystem! Stelle die Elemente von *M* auf dem *x*-Strahl und die Elemente von *N* auf dem *y*-Strahl dar!
   - **b)** Bilde alle möglichen geordneten Zahlenpaare (*x*; *y*), wenn *x* Element der Menge *M* und *y* Element der Menge *N* ist!
   - **c)** Stelle die Zahlenpaare (*x*; *y*) in einem Koordinatensystem dar!

2. Gib für die im Bild D 5 dargestellten Punkte jeweils Abszisse und Ordinate an!

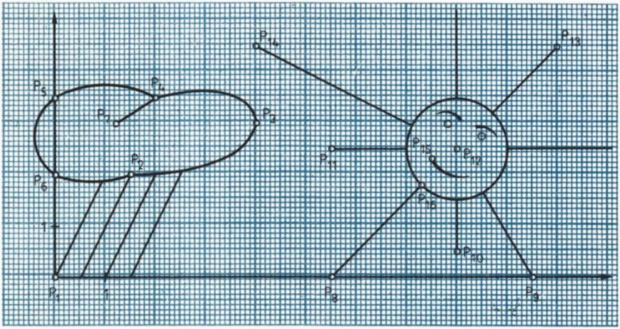


Bild D 5

3. Stelle die folgenden Zuordnungen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar! Beschreibe dein Ergebnis!
   - **a)** Wir betrachten Quadrate. Der Seitenlänge *a* eines Quadrates wird der Umfang $4 \cdot a$ dieses Quadrates zugeordnet.
   - **b)** Wir betrachten Quadrate. Der Seitenlänge eines Quadrates wird der Flächeninhalt dieses Quadrates zugeordnet.
   - **c)** Der nebenstehenden Tabelle kann man die Gebühren für einen Brief im Ortsverkehr in Abhängigkeit von der Masse entnehmen.

Briefe	**Gebühr**
bis 20 g	0,10 M
über 20 g bis 250 g	0,20 M
über 250 g bis 500 g	0,30 M

   - **d)** Jeder Zahl wird das um 1 vergrößerte Doppelte dieser Zahl zugeordnet.

4. Im Bild **a)** D 6, **b)** D 7 sind Zuordnungen dargestellt. Lies Paare zusammengehöriger Zahlen ab! Beschreibe den Verlauf der Linien und vergleiche!

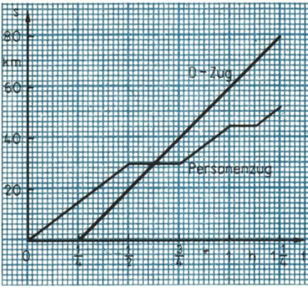


Bild D 6

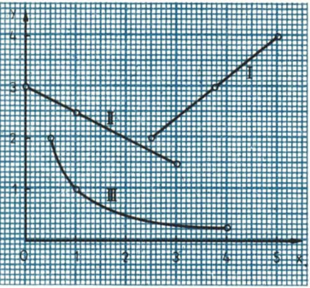


Bild D 7

6 Beispiele für Proportionalität

Frau Meier ist Kassiererin in einem Getränkeladen. Um die Kunden schneller bedienen zu können, hat sie sich die folgende Preistabelle angefertigt. Dabei hat sie das Flaschenpfand mitgerechnet.

Anzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Brause	0,62	1,24	1,86	2,48	3,10	3,72	4,34	4,96	5,58	6,20
Bier	0,78	1,56	2,34	3,12	3,90	4,68	5,46	6,24	7,02	7,80

● 8 **a)** Erkläre die Tabelle!
b) Peter kauft 7 Flaschen Brause. Herr Lehmann kauft 6 Flaschen Bier. Wieviel muß jeder bezahlen?
c) Wieviel muß jeder beim Kauf von 11 Flaschen bezahlen?

In Frau Meiers Übersicht wird der Flaschenanzahl der darunterstehende Preis für Brause bzw. Bier zugeordnet.
Die Tabelle von Frau Meier zeigt: Je mehr Flaschen Brause man kauft, desto mehr muß man bezahlen. Verdoppelt man die Anzahl der gekauften Flaschen Brause, verdoppelt sich der Preis (P). Wenn man n Flaschen Brause kauft, muß man $n \cdot 0{,}62$ M bezahlen ($P = n \cdot 0{,}62$).
Entsprechend gilt: Wenn man m Flaschen Bier kauft, muß man $m \cdot 0{,}78$ M bezahlen ($P = m \cdot 0{,}78$). Man sagt:
Der Preis für Brause (oder Bier) in Flaschen ist **proportional** zur Anzahl der Flaschen.
Die betrachtete Zuordnung ist eine **Proportionalität.**[1]

[1] Das Wort „Proportionalität" kommt aus dem Lateinischen und bedeutet soviel wie Verhältnismäßigkeit, Gleichmäßigkeit.

Verschiedene Gegenstände aus Kupfer werden untersucht. In einer Tabelle sind zusammengehörige Werte für das Volumen V und für die Masse m erfaßt.

V in cm³	2,5	1,6	4,0	22
m in g	22,5	14,1	35,6	196

Für Körper aus Kupfer ist der Quotient $\frac{m}{V}$ konstant.[2)]

Man sagt: Bei Körpern aus Kupfer ist die Masse **proportional** zum Volumen. Es liegt **Proportionalität** vor.

● 9 Ermittle aus der Tabelle die Quotienten $\frac{m}{V}$! Wie erklärst du dir die Ergebnisse?

Peter kann sich die Malfolge mit der Sieben nicht merken. Sein großer Bruder gibt ihm die folgende Tabelle zum Ausfüllen:

a	3	5	6	2	7	12				
b							56	28	77	63

Peter ergänzt die Tabelle mit Hilfe der Gleichung $b = 7 \cdot a$. Man sagt auch hier: b ist **proportional** zu a.

● 10 Ermittle die fehlenden Zahlen in der vorstehenden Tabelle! Trage dann die Punkte, die den geordneten Paaren $(a; b)$ zugeordnet sind, in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein!

Die Zuordnungen in den betrachteten Beispielen haben eine gemeinsame Eigenschaft.

Brause:	$P = 0{,}62 \cdot n$	0,62 unverändert	n, P ändern sich
Bier:	$P = 0{,}78 \cdot m$	0,78 unverändert	m, P ändern sich
Körper aus Kupfer:	$m = 8{,}9 \cdot V$	8,9 unverändert	V, m ändern sich
Malfolge der 7:	$b = 7 \cdot a$	7 unverändert	a, b ändern sich

▶ 3 **DEFINITION: Jede Zuordnung mit der Eigenschaft $y = k \cdot x$, wobei $k \neq 0$ eine feste Zahl ist, heißt *Proportionalität*. k heißt *Proportionalitätsfaktor*.**

Man schreibt dafür kurz $y \sim x$ (lies: y ist proportional zu x).

■ 15 **a)** Durch die Tabelle

x	1	3	5	7	9
y	2	6	10	14	18

ist eine Zuordnung gegeben. Jeder Zahl x ist die darunterstehende Zahl y zugeordnet. Es entstehen die Paare (1; 2); (3; 6); (5; 10); (7; 14); (9; 18).
Da $2 = 2 \cdot 1$, $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$ und $18 = 2 \cdot 9$ ist, ist $y = 2 \cdot x$, und die Zuordnung ist eine Proportionalität.

b) Die Zuordnung aus Beispiel D 14 ist keine Proportionalität.
Zu ihr gehören zum Beispiel die Paare (1; 1) und (2; 4). Nun ist $1 = 1 \cdot 1$ und $4 = 2 \cdot 2$. Also gibt es *kein* gemeinsames k für alle Paare.

2) Das Wort „konstant" kommt aus dem Lateinischen und bedeutet soviel wie gleichbleibend.

Wenn eine Zuordnung eine Proportionalität ist, gilt $y = k \cdot x$ für alle Paare $(x;\ y)$. Umformen der Gleichung ergibt $\frac{y}{x} = k\ (x \neq 0)$.

Um festzustellen, ob eine Zuordnung eine Proportionalität ist, können wir auch Quotienten zusammengehöriger Zahlen untersuchen.
Dabei benutzen wir folgendes Schema:

x			
y			
$\frac{y}{x}$			

Sind alle Quotienten gleich, so ist die Zuordnung eine Proportionalität, und der Proportionalitätsfaktor ist durch die Quotienten gegeben.
Sind auch nur zwei dieser Quotienten voneinander verschieden, so ist die Zuordnung keine Proportionalität. Es gibt dann keinen Proportionalitätsfaktor.
Bei Beispielen aus der Praxis sind wir wegen auftretender Meßfehler großzügiger und sprechen noch von Proportionalität, wenn sich die Quotienten nur geringfügig unterscheiden (↗ Auftrag D 9).
Anstelle von „eine Zuordnung ist eine Proportionalität" sagt man oft kurz „es besteht Proportionalität" oder „es liegt Proportionalität vor".

● **11** Ordne in der Tabelle im Beispiel 15a jeder Zahl y die darüberstehende Zahl x zu und gib alle Paare $(y;\ x)$ an! **a)** Begründe, daß $x \sim y$ gilt! **b)** Wie groß ist k?

Allgemein gilt: Wenn $y \sim x$, so auch $x \sim y$. Man sagt deshalb: x und y sind zueinander proportional oder auch: Zwischen x und y besteht Proportionalität.

Aufgaben

Stelle fest, ob die Zuordnungen Proportionalitäten sind! Begründe deine Feststellung! Gib, wenn möglich, den Proportionalitätsfaktor an!

1.↑

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

b)

x	5	3,5	6,5	2	8
y	7,5	5,25	9,75	3	12

c)

a	2	4	6	8	10
b	18	9	6	4,5	3,6

d)

x	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{13}{11}$
y	$\frac{10}{3}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{34}{9}$	$\frac{42}{11}$

e)

a	3	5	11	9	7
b	2	$\frac{10}{3}$	$\frac{22}{3}$	6	$\frac{14}{3}$

2.↑

a)

x	6	5	4	3	2	1
y	24	20	16	12	8	4

b)

x	7	4,5	9,5	2	12
y	10,5	8	13	5,5	15,5

c)

a	2	4	6	8	10
b	12	6	4	3	2,4

d)

x	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{11}{10}$
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{10}{11}$

e)

a	2	5	14	11	8
b	3	$\frac{15}{2}$	21	$\frac{33}{2}$	12

Ergänze die folgenden Tabellen so, daß Proportionalität mit dem Proportionalitätsfaktor

a) 5, **b)** 2,5, **c)** $\frac{3}{4}$, **d)** 0,6 entsteht!

3.↑

x	3	5	7	9	11
y					

4.↑

a					
b	150	300	450	600	750

5. Ergänze die folgenden Tabellen so, daß Proportionalität entsteht! Gib eine Gleichung für die Zuordnung an!

a)

m	4	5	7			6,5
n	8			18	15	

b)

r	1,2	2,5	$\frac{1}{2}$		
s			2	8	$\frac{3}{4}$

7 Darstellen von Proportionalität in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

● **12** Stelle fest, ob Proportionalität besteht!

a)

x	2	3	4	5	6	7
y	10	15	20	25	30	35

b)

a	1	3	4	5	6
b	6	8	9	10	11

Die Zahlenpaare (x; y) aus Auftrag D 12 a) sind im Bild D 8 und die Zahlenpaare (a; b) aus Auftrag D 12 b) sind im Bild D 9 in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt.

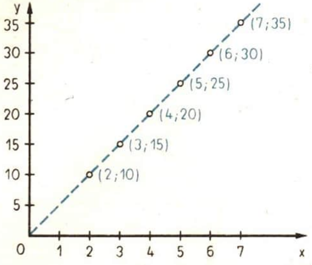


Bild D 8

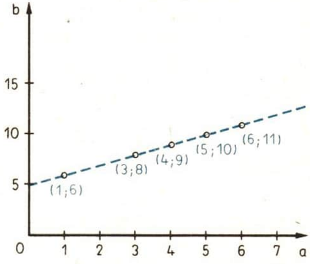


Bild D 9

Im Fall a) besteht Proportionalität (Proportionalitätsfaktor $k = 5$). Die Punkte liegen auf einer Geraden, die durch den Koordinatenursprung geht.

Im Fall b) liegt keine Proportionalität vor $\left(\text{z. B. } \frac{6}{1} \neq \frac{8}{3}\right)$. Die Punkte liegen zwar auf einer Geraden, diese Gerade geht aber nicht durch den Koordinatenursprung.

▶ 4 **Für die Darstellung von Zuordnungen in einem Koordinatensystem gilt: Wenn Proportionalität besteht, so liegen alle Punkte auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung, sonst nicht.**[1)]

Aufgaben

1. In den Aufgaben 1 a) bis c) in Lerneinheit D 6 auf Seite 196 sind Zuordnungen gegeben. Stelle diese in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar! Entnimm der Darstellung, ob Proportionalität vorliegt!

2. In den Bildern **a)** D 6, **b)** D 7 (↗ Seite 194) sind Zuordnungen dargestellt. Welche Zuordnungen sind Proportionalitäten?

8 Proportionalität in der Praxis

In Lerneinheit D 6 (↗ Seite 195) wurde für Gegenstände aus Kupfer folgende Tabelle aufgestellt:

V in cm^3	2,5	1,6	4,0	22
m in g	22,5	14,1	35,6	196

Wir bilden Quotienten und berücksichtigen zunächst nur die Zahlenwerte:

$$\frac{22{,}5}{2{,}5} = 9{,}0; \quad \frac{14{,}1}{1{,}6} = 8{,}8; \quad \frac{35{,}6}{4{,}0} = 8{,}9; \quad \frac{196}{22} = 8{,}9.$$

Die Ergebnisse sind als Näherungswerte mit zwei Ziffern angegeben. Sie unterscheiden sich, da stets Meßfehler auftreten. Allerdings sind die Unterschiede gering. Wir stellen deshalb für die gemessenen Werte Proportionalität fest. Dieses Ergebnis übertragen wir auf das Volumen V und die Masse m von Körpern aus Kupfer.
Wir sagen: Für Körper aus Kupfer ist die Masse m proportional zum Volumen V ($m \sim V$).

Zwei Besonderheiten sind zu beachten:

(1) Der Proportionalitätsfaktor ϱ ist jetzt keine Zahl, sondern eine Größe mit der Einheit $1\,\frac{g}{cm^3}$. Also gilt:

$$m = \varrho \cdot V \quad \text{oder} \quad m = 8{,}9\,\frac{g}{cm^3} \cdot V, \text{ und } \varrho \text{ ist die Dichte.}$$

(2) Wir haben unsere Erfahrungen mit vier Körpern aus Kupfer auf alle möglichen Körper aus Kupfer übertragen. Eine solche Verallgemeinerung ist im allgemeinen unzulässig. Hier allerdings machen wir keinen Fehler, denn durch viele Experimente ist in der Physik bestätigt, daß zwischen der Masse und dem Volumen Proportionalität besteht. Das gilt nicht nur für Körper aus Kupfer.

[1)] Beachte! Die Gerade, auf der der x-Strahl liegt, ist dabei auszuschließen.

Aufgaben

1. Überlege, ob bei folgenden Sachverhalten Proportionalität vorliegt!
   a) Menge einer Ware und der zu bezahlende Preis
   b) Sprungweite eines Schülers und seine Anlauflänge
   c) Energieverbrauch und Kosten für die Energie
   d) Anzahl der Würfe mit einem Würfel und der dabei erreichten Augenzahl
   e) Anzahl der mit der Straßenbahn gefahrenen Stationen und der Fahrpreis

2. In der folgenden Tabelle ist angegeben, wieviel Zucker aus verschiedenen Mengen Zuckerrüben gewonnen wurde.

Zuckerrüben in dt	24	72	108	150
Zucker in dt	4	12	18	25

   a) Zeige, daß Proportionalität vorliegt!
   b) Hat der Proportionalitätsfaktor eine Einheit?
   c) Läßt sich die Proportionalität auf weitere Mengen Zuckerrüben übertragen?

3. In der folgenden Tabelle sind für verschiedene Mengen Beton Volumen und Masse angegeben. Es besteht Proportionalität.

V in m^3	2,0	3,0	5,0
m in t	4,6	6,9	11,5

   a) Gib den Proportionalitätsfaktor an!
   b) Welche physikalische Bedeutung hat der Proportionalitätsfaktor?
   c) Gib eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen m und V beschreibt!

9 Umgekehrte Proportionalität

Zwei Städte liegen 60 km voneinander entfernt. Legt man diese Entfernung mit einem Omnibus zurück, der mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von $60 \frac{km}{h}$ fährt, so benötigt man 1 h für diese Strecke. Fährt man auf einem Moped und hält die Geschwindigkeit $30 \frac{km}{h}$ ein, so benötigt man 2 h. Ein Radfahrer würde bei der Geschwindigkeit $15 \frac{km}{h}$ sogar 4 h benötigen.

Die folgende Tabelle gibt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit an, die man benötigt, um die Strecke von 60 km zurückzulegen.

Geschwindigkeit v in $\frac{km}{h}$	10	15	20	30	40	50	60
Zeit t in h	6	4	3	2	1,5	1,2	1
$\frac{t}{v}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{15}$	keine Proportionalität				
$v \cdot t$ in km	60	60	60	60	60	60	60

In unserem Beispiel ist immer $v \cdot t = 60$ km.
Eine Zuordnung mit dieser Eigenschaft nennt man **umgekehrte Proportionalität** oder auch indirekte Proportionalität.

▶ 5

> **DEFINITION: Jede Zuordnung mit der Eigenschaft $x \cdot y = k$, wobei $k \neq 0$ eine feste Zahl ist, heißt *umgekehrte Proportionalität*.**
> **k heißt *Proportionalitätsfaktor*.**

Im Unterschied zur umgekehrten Proportionalität nennt man die von uns zuerst untersuchte Proportionalität auch **direkte Proportionalität**.
Auch umgekehrte Proportionalität kann man in einem Koordinatensystem darstellen. Das Bild D 10 zeigt das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm für unser Beispiel. Die Punkte liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden, sondern auf einer gekrümmten Linie.

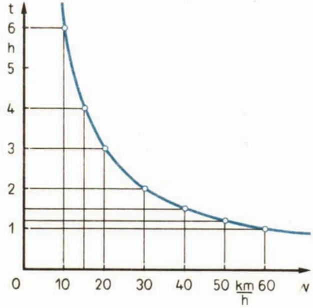


Bild D 10

Wir untersuchen, ob die folgende Zuordnung eine umgekehrte Proportionalität ist.

x	5	10	15	20	25	30
y	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$
$x \cdot y$	10	10	10	10	10	10

Es liegt umgekehrte Proportionalität vor, denn es gilt stets $x \cdot y = 10$. Nach Division beider Seiten der Gleichung durch x (x ist nie Null!) ergibt sich $y = 10 \cdot \frac{1}{x}$. Man schreibt auch $y \sim \frac{1}{x}$.

● 13 Erkläre mit Hilfe der Gleichungen $x \cdot y = 10$ und $y = 10 \cdot \frac{1}{x}$ den Namen *umgekehrte Proportionalität*!

Aufgaben

Stelle fest, ob umgekehrte Proportionalität besteht! Gib möglichst eine Gleichung für die Zuordnung an!

1.↑ a)

x	5	4	2	1	0,5	0,1
y	0,2	0,25	0,5	1	2	10

b)

x	2	4	5	10	20
y	0,25	0,125	0,1	0,05	0,025

c)

u	4	7	3	18	6
v	$\frac{8}{3}$	$\frac{14}{3}$	2	12	4

2.↑ a)

x	5	4	2	1	0,4	0,2
y	0,4	0,5	1	2	5	10

b)

r	2	6	10	20	40	60
s	0,25	$\frac{1}{12}$	0,05	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{120}$

c)

a	5	9	3	24	$\frac{24}{3}$
b	1	$\frac{9}{5}$	15	$\frac{24}{5}$	24

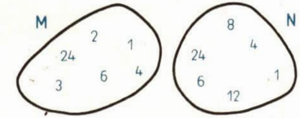


Bild D 11

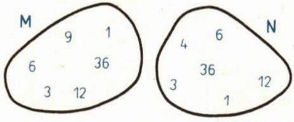


Bild D 12

3. Ordne die Elemente der Mengen M und N im Bild **a)** D 11, **b)** D 12 einander so zu, daß umgekehrte Proportionalität entsteht!

4. Entscheide, ob bei den Sachverhalten umgekehrte Proportionalität vorliegt!

a) Futterrübenmenge und Anzahl der Tiere, für die in einer bestimmten Zeit dieser Futtervorrat reicht

b) Anzahl der Teilnehmer an einem Wettkampf und Anzahl der ausgegebenen Medaillen

c) Anzahl der Schüler, die den Schulgarten umgraben, und dafür benötigte Zeit

d) Anzahl der Verkehrsampeln und Anzahl der Verkehrsunfälle in einer Stadt

10 Weitere Eigenschaften der direkten bzw. umgekehrten Proportionalität

Peter, Carola und Klaus unterhalten sich.

Peter: „Mir ist aufgefallen: Bei direkter Proportionalität wird mit größer werdendem x auch y größer."

Carola: „Mir ist aufgefallen: Bei umgekehrter Proportionalität wird bei größer werdendem x das entsprechende y kleiner."

Klaus: „Na, prima, dann ist Proportionalität ganz einfach festzustellen. Wenn bei einer Zuordnung x und y wachsen, dann liegt direkte Proportionalität vor; wenn dagegen x wächst und y fällt, dann liegt umgekehrte Proportionalität vor."

Peter: „Das stimmt nicht. In der Tabelle

a	1	3	5	7	9
b	2	4	6	8	10

wachsen beide, aber direkte Proportionalität liegt nicht vor, denn $\frac{2}{1} \neq \frac{4}{3}$."

Carola: „Auch für die umgekehrte Proportionalität stimmt nicht, was Klaus sagt, denn in

a	1	3	5	7	9
b	10	8	6	4	2

wächst x und y fällt, aber z. B. ist $1 \cdot 10 \neq 3 \cdot 8$."

Klaus: „Dann nützen eure Beobachtungen nichts."

Peter: „Doch, wenn bei einer Zuordnung mit x nicht auch y wächst, dann ist sie keine direkte Proportionalität."

Carola: „Wenn bei einer Zuordnung x wächst und y nicht fällt, dann ist sie keine umgekehrte Proportionalität."

● **14** Warum hat Klaus nicht recht?

● **15** Gib eine Begründung für die Aussagen

a) Wenn $a \sim b$, so $b \sim a$. **b)** Wenn $a \sim \frac{1}{b}$, so $b \sim \frac{1}{a}$!

Klaus: „Ist das nicht merkwürdig? Wenn man das Volumen eines Körpers verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ..., so verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ... sich die Masse des Körpers."

Peter: „Das ist doch bei direkter Proportionalität immer so."

Carola: „Dann gilt auch: Wenn das Volumen halbiert, gedrittelt, geviertelt, ... wird, so wird auch die Masse halbiert, gedrittelt, geviertelt, ..."

Klaus: „Gibt es für die umgekehrte Proportionalität etwas Entsprechendes?"

Carola: „Ja, wenn in einem Rechteck die eine Seite verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ... wird, muß die andere Seite halbiert, gedrittelt, geviertelt, ... werden, damit der Flächeninhalt gleich bleibt."

Aufgaben

In den Aufgaben 1 bis 4 ist jeweils eine Tabelle gegeben. Es wird eine Behauptung aufgestellt. Äußere dich zu der Behauptung und zu ihrer Begründung!

1.↑

x	0	1	2	3	4
y	2	3	4	5	6

$y \sim x$; denn je größer x ist, desto größer ist auch y.

2.↑

s	1	2	3	4	6
t	24	12	8	6	4

$t \sim \frac{1}{s}$; denn je größer s ist, desto kleiner ist t.

3.↑

m	6	12	18	24	30
n	30	24	18	12	6

$n \sim \frac{1}{m}$; denn je kleiner m ist, desto größer ist n.

4.↑

u	8	7	6	4	2
v	20	17,5	15	10	5

$v \sim u$; denn je kleiner u ist, desto kleiner ist auch v.

5.* Stelle fest, ob direkte oder umgekehrte Proportionalität besteht!

a)

x	10	30	60	70	80
y	15	45	90	100	120

b)

a	1	2	3	4	5
b	0	0	0	0	0

6. Ordne den Elementen der Menge $M = \{1; 2; 3; 4; 6\}$ jeweils ein Element der Menge $N = \{24; 36; 18; 48; 12; 72\}$ so zu, daß **a)** direkte Proportionalität **b)** umgekehrte Proportionalität entsteht!

7. **a)** Es gilt $s = 5 \cdot t$, also $s \sim t$. Gib die Gleichung für $t \sim s$ an!

b) Es gilt $v = 20 \cdot \frac{1}{t}$, also $v \sim \frac{1}{t}$. Gib die Gleichung für $t \sim \frac{1}{v}$ an!

c) Es gilt $a = 0{,}2 \cdot b$, also $a \sim b$. Gib die Gleichung für $b \sim a$ an!

Zusammenfassung

Vergleich der direkten und der umgekehrten Proportionalität

Direkte Proportionalität

Beispiel:

a	1	2	3	3,5	10	$\frac{25}{2}$
b	6	12	18	21	60	75

b ergibt sich aus a durch Multiplikation mit k ($k \neq 0$)

$b = k \cdot a$.

a ergibt sich aus b durch Multiplikation mit $\frac{1}{k}$

$a = \frac{1}{k} \cdot b$.

Die *Quotienten* einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor k bzw. $\frac{1}{k}$.

$\frac{b}{a} = k \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{k} \qquad b \sim a$ und $a \sim b$

Je größer a ist, desto größer ist b.
Wird a verdoppelt, verdreifacht usw., so wird auch b verdoppelt, verdreifacht usw.
Wird a halbiert, gedrittelt usw., so wird auch b halbiert, gedrittelt usw.

Umgekehrte Proportionalität

Beispiel:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	5	7,5	10
y	18	9	4,5	$\frac{9}{5}$	1,2	0,9

y ergibt sich aus dem Reziproken von x durch Multiplikation mit k ($k \neq 0$)

$y = k \cdot \frac{1}{x}$.

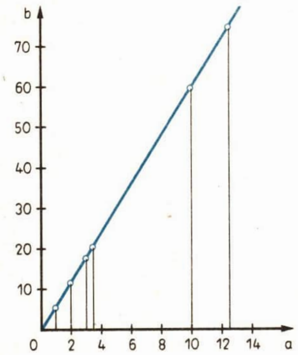
x ergibt sich aus dem Reziproken von y durch Multiplikation mit k

$x = k \cdot \frac{1}{y}$.

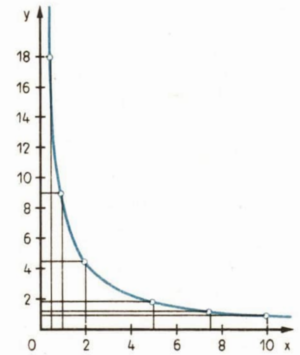
Die *Produkte* einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor k.

$x \cdot y = k \qquad y \sim \frac{1}{x}$ und $x \sim \frac{1}{y}$

Je größer x ist, desto kleiner ist y.
Wird x verdoppelt, verdreifacht usw., so wird y halbiert, gedrittelt usw.
Wird x halbiert, gedrittelt usw., so wird y verdoppelt, verdreifacht usw.



Alle Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden, die durch den Koordinatenursprung geht.



Alle Punkte liegen auf einer gekrümmten Linie.

11 Verhältnisse

Der Pik Kommunismus ist 7495 m hoch und der Fichtelberg 1214 m hoch (↗ Bild D 13).
Wir vergleichen die Höhen der beiden Berge auf zwei verschiedene Arten:
Da $7495 - 1214 = 6281$ ist, ist der Pik Kommunismus 6281 m höher als der Fichtelberg. Da $\frac{7495}{1214} = 6{,}1 \ldots \approx 6$ ist, ist der Pik Kommunismus etwa sechsmal so hoch wie der Fichtelberg.

Den Quotienten $\frac{7495}{1214}$ bzw. $7495 : 1214$ (lies: 7495 zu 1214) nennen wir das **Verhältnis** der Zahlen 7495 und 1214. Man sagt auch: Die Höhe des Pik Kommunismus verhält sich zur Höhe des Fichtelberges etwa wie 6 : 1.
Es ist üblich, Verhältnisse mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen anzugeben. Das erreichen wir durch zweckmäßiges Kürzen bzw. Erweitern.

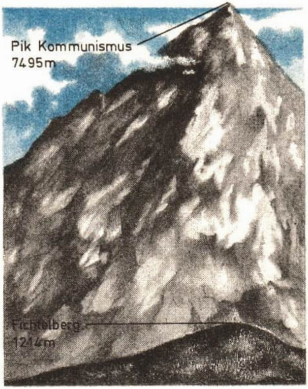


Bild D 13

■ 16 a) Wir bilden das Verhältnis der Zahlen 5,6 und 8,4.

$$5{,}6 : 8{,}4 = \frac{5{,}6}{8{,}4} = \frac{56}{84} = \frac{2}{3} = 2 : 3$$

b) Wir bilden das Verhältnis der Zahlen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$.

$$\frac{4}{3} : \frac{5}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} \overset{\cdot 3}{=} \frac{4}{5} = 4 : 5$$

■ 17 Der Schall legt in der Luft in 1 s etwa 300 m zurück, das Licht hingegen etwa 300000 km. In welchem Verhältnis stehen die Geschwindigkeiten?
Wir rechnen in gleiche Einheiten um
(z. B. 300 m = 0,3 km) und bilden das Verhältnis

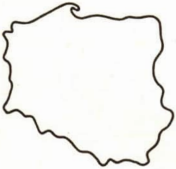
$$\frac{0{,}3}{300\,000} = \frac{3}{3\,000\,000} = \frac{1}{1\,000\,000} = 1 : 1\,000\,000$$

Die beiden Geschwindigkeiten verhalten sich etwa wie 1 zu 1000000.

▶ 6 **Größen mit gleicher Einheit können miteinander verglichen werden, indem das Verhältnis der Zahlenwerte gebildet wird.**

Manchmal werden auch Größen mit unterschiedlichen Einheiten zueinander ins Verhältnis gesetzt.

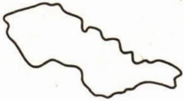
VR Polen



36900000
Einwohner

313000 km²
Fläche

ČSSR



15500000
Einwohner

128000 km²
Fläche

Bild D 14

■ 18 Welches Land ist dichter bewohnt, die VR Polen oder die ČSSR (↗ Bild D 14)?
Wir vergleichen die Einwohnerzahl und die Fläche für jedes Land, indem wir sie ins Verhältnis setzen.

VR Polen

$$\frac{36\,900\,000}{313\,000} \approx 118 : 1$$

ČSSR

$$\frac{15\,500\,000}{128\,000} \approx 121 : 1$$

Das so gebildete Verhältnis gibt die Bevölkerungsdichte an. Die Bevölkerungsdichte ist eine Größe mit der Einheit Einwohner je Quadratkilometer.
Man sagt auch: Auf jeden Quadratkilometer kommen im Durchschnitt in der VR Polen 118 Einwohner und in der ČSSR 121 Einwohner. Also ist die ČSSR etwas dichter bewohnt.

Verschiedene Bedeutungen von $\frac{3}{4}$
die gebrochene Zahl $\frac{3}{4}$ (↗ S. 31), der Quotient der Zahlen 3 und 4 (3 : 4; 3 dividiert durch 4; ↗ S. 72), das Verhältnis der Zahlen 3 und 4 (3 : 4; 3 zu 4, ↗ S. 204).

Aufgaben

1. Bilde das Verhältnis der folgenden Zahlen!
   a) 6 und 4 **b)** $\frac{4}{7}$ und $\frac{5}{7}$ **c)** $\frac{34}{12}$ und $\frac{17}{3}$ **d)** 0,72 und 0,48

2. Gib folgende Verhältnisse mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen an!
   a) 4 : 6 **b)** $\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$ **c)** $\frac{39}{16} : \frac{13}{4}$ **d)** 0,84 : 0,36

3. In welchem Maßstab ist eine Landkarte angefertigt, wenn für Streckenlängen das Folgende gilt:

	a)	b)	c)	d)
auf der Karte	3 cm	4 cm	2,5 cm	12 mm
in Wirklichkeit	6 km	100 m	500 m	12 km

4. Eine Karte ist im Maßstab 1 : 10000 angefertigt.
   a) Wie lang sind in Wirklichkeit Strecken, die auf der Karte 15 mm (2,3 cm; 15 cm) lang sind?
   b) Wie lang sind Strecken auf der Karte, die in Wirklichkeit 300 m (4 km; 1,9 km; 10 m) lang sind?

5. Nach einer Altstoffsammlung wird abgerechnet.

Klasse	**6a**	**6b**	**7a**	**7b**
Betrag in M	112,50	100,80	100	108
Anzahl der Schüler	25	24	20	27

   Welche Klasse hat das beste Ergebnis?

6. Die DDR hat eine Fläche von 108000 km². Hier leben 16600000 Menschen. Vergleiche für die DDR, die ČSSR und die VR Polen die Bevölkerungsdichte (↗ Beispiel D 18, S. 205)!

12 Verhältnisgleichungen

Durch die folgende Tabelle ist eine direkte Proportionalität gegeben. Es gilt $b \sim a$.

a	1,5	3,75	7,2
b	•	5	9,6

Wir wollen die unleserliche Zahl • ermitteln, indem wir Verhältnisse bilden.

Da direkte Proportionalität vorliegt, müssen alle Verhältnisse $\frac{b}{a}$ gleich sein.

So muß zum Beispiel

$$\frac{x}{1,5} = \frac{5}{3,75} \quad \text{oder in anderer Schreibweise} \quad x : 1,5 = 5 : 3,75$$

gelten. Wir lesen: x (verhält sich) zu 1,5 wie 5 zu 3,75.

Eine solche Gleichung wird **Verhältnisgleichung** (oder *Proportion*) genannt.

$\frac{5}{3,75} = \frac{9,6}{7,2}$ ist eine Verhältnisgleichung ohne Variable.

Um die Gleichung

$$\frac{x}{1,5} = \frac{5}{3,75} \quad \text{bzw.} \quad x : 1,5 = 5 : 3,75$$

zu lösen, brauchen wir keine neuen Regeln zu lernen, sondern nur unser Wissen über Gleichungen anzuwenden. (↗ Beispiel D 8, S. 187). Daher rechnen wir

$$\frac{x}{1,5} = \frac{5}{3,75} \qquad | \cdot 1,5$$

$$x = \frac{5 \cdot 1,5}{3,75}$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Probe:

$$\frac{2}{1,5} = \frac{5}{3,75}$$

$$\frac{2 \cdot 5}{1,5 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 2}{3,75 \cdot 2}$$

$$\frac{10}{7,5} = \frac{10}{7,5} \quad \text{(wahr)}$$

Durch Erweitern kann man immer erreichen, daß gleiche Zähler oder gleiche Nenner entstehen.

● **16** Begründe, warum die Gleichung $6 : x = 18 : 3$ von der Form $\frac{a}{x} = b$ ist! Gib a und b an! Welche Lösung hat die Gleichung?

■ **19** Wir lösen die Verhältnisgleichung $\frac{20}{3} : \frac{4}{3} = \frac{5}{7} : x$.

Es handelt sich um eine Gleichung der Form $\frac{a}{x} = b$, wobei $a = \frac{5}{7}$ und $b = \frac{20}{3} : \frac{4}{3} = 5$ ist. Es ergibt sich:

$$5 = \frac{5}{7} : x \qquad | \cdot x \ (x \neq 0)$$

$$5 \cdot x = \frac{5}{7} \qquad | : 5$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{7}}}$$

Probe:

$$\frac{20}{3} : \frac{4}{3} = \frac{5}{7} : \frac{1}{7} \quad \text{(wahr)}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{20}{3} : \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{4} = 5 \qquad \frac{5}{7} : \frac{1}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{1} = 5$$

Aufgaben

1. Prüfe, ob die folgenden Verhältnisgleichungen wahre Aussagen sind!

a) $\frac{2,4}{1,6} = \frac{2,1}{1,4}$ **b)** $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{1}{5} : \frac{3}{10}$ **c)** $\frac{3,3}{0,11} = \frac{3}{0,1}$ **d)** $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} = \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$

Entscheide, ob die folgenden Verhältnisgleichungen von der Form $a \cdot x = b$ oder von der Form $\frac{a}{x} = b$ sind! Löse die Verhältnisgleichungen!

2.↑ **a)** $x : 15 = 4 : 12$ **b)** $\frac{8}{x} = \frac{24}{3}$ **c)** $\frac{x}{12} = \frac{5}{15}$ **d)** $6 : x = 18 : 6$

3.↑ **a)** $8 : 1 = 2 : x$ **b)** $\frac{5}{8} : x = \frac{5}{28} : \frac{8}{63}$ **c)** $4 : 9 = x : 36$ **d)** $x : 1,2 = 4,6 : 2,3$

4.↑ **a)** $x : 3,4 = 15 : 10,2$ **b)** $6,6 : 4,4 = x : 6$ **c)** $0,4 : x = 9,6 : 12$
d) $\frac{x}{0,001} = \frac{12}{0,12}$ **e)** $\frac{0,3}{x} = \frac{30}{17}$ **f)** $1,7 : 4 = x : 8$

13 Verhältnisgleichungen bei direkter und bei umgekehrter Proportionalität

● **17** Die Zuordnung

a	1	2	3	4	5	6	7	8
b	30	60	90	120	150	180	210	240

ist eine Proportionalität. Es gilt $b = 30 \cdot a$ bzw. $\frac{b}{a} = 30$. Bilde Verhältnisgleichungen, die wahre Aussagen sind!

Das Verdoppeln bzw. Halbieren von a im Auftrag D 17 hat das Verdoppeln bzw. Halbieren von b zur Folge. Daher sind auch die Verhältnisgleichungen $1 : 2 = 30 : 60$ bzw. $8 : 4 = 240 : 120$ wahre Aussagen.

a	1	2	3	4	5	6	7	8
b	30	60	90	120	150	180	210	240

● **18** Bilde auf die gleiche Weise weitere Verhältnisgleichungen, die wahre Aussagen sind!

● **19** Die Zuordnung

x	1	2	3	4	6	9	12	24
y	36	18	12	9	6	4	3	1,5

ist eine umgekehrte Proportionalität. Es gilt $x \cdot y = 36$.

Vergleiche die Verhältnisse $\frac{y}{x}$!

Das Verdoppeln bzw. Halbieren von x im Auftrag D 19 hat das Halbieren bzw. Verdoppeln von y zur Folge. Daher sind auch die Verhältnisgleichungen $2 : 4 = 9 : 18$ bzw. $12 : 6 = 6 : 3$ wahre Aussagen.

x	1	2	3	4	6	9	12	24
y	36	18	12	9	6	4	3	1,5

● 20 Bilde auf die gleiche Weise weitere Verhältnisgleichungen, die wahre Aussagen sind!

Aufgaben

1. Berechne für die Zuordnung den Proportionalitätsfaktor! Bilde drei Verhältnisgleichungen, die wahre Aussagen sind!

a)

x	6	39	12	3
y	8	52	16	4

b)

a	2	1,5	6	3
b	30	40	10	20

c)

r	2	3,5	$\frac{11}{2}$	8
s	7	$\frac{49}{4}$	19,25	28

d)

u	2	4	5	$\frac{25}{2}$
v	25	12,5	10	4

2. **a)** Gilt $y \sim x$ oder $y \sim \frac{1}{x}$?

x	0,9	1,8	2,7	3,6
y	1,6	3,2	4,8	6,4

b) Bilde gleiche Verhältnisse!

14 Anwendungen zur direkten und zur umgekehrten Proportionalität

Bei Anwendungen werden wir künftig zwei Fälle unterscheiden.
(1) Wir müssen einen Sachverhalt daraufhin überprüfen, ob direkte oder umgekehrte Proportionalität vorliegt (↗ Beispiele D 20 und D 21).
(2) *Wir wissen bereits,* daß bei dem betreffenden Sachverhalt direkte oder umgekehrte Proportionalität vorliegt (↗ Beispiele D 23 und D 24), oder wir nehmen es zur Vereinfachung an (↗ Beispiel D 22).

■ 20 Bei einem Versuch wurde eine Schraubenfeder aus Stahl unterschiedlich belastet. Es ergab sich folgende Tabelle:

Belastung F in N	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
Verlängerung s in cm	1,5	3,0	4,6	6,1	9,0	13,1

Wir prüfen, ob Proportionalität vorliegt. Dazu werden die Verhältnisse $\frac{s}{F}$ für zusammengehörige Meßwerte gebildet:

$\frac{1{,}5}{0{,}5} = \frac{15}{5} = 3{,}0$ $\quad$ $\frac{3{,}0}{1{,}0} = 3{,}0$ $\quad$ $\frac{4{,}6}{1{,}5} = \frac{46}{15} = 3{,}1$

$\frac{6{,}1}{2{,}0} = \frac{61}{20} = 3{,}1$ $\quad$ $\frac{9{,}0}{3{,}0} = 3{,}0$ $\quad$ $\frac{13{,}1}{4{,}0} = \frac{131}{40} = 3{,}3$

(Die Verhältnisse sind als Näherungswerte mit zwei Ziffern angegeben.)
Für die Meßwerte bis 3,0 N ergibt sich Proportionalität. Der Proportionalitätsfaktor ist etwa $3\,\frac{\text{cm}}{\text{N}}$. Mit 4,0 N wurde die Feder offensichtlich überlastet, die Feder dehnte sich viel stärker aus.
Nun gehört im Bereich von 0,5 N bis 3,0 N zu jeder Belastung F eine Verlängerung s, und wir erhalten $s \sim F$ oder auch $s = 3\,\frac{\text{cm}}{\text{N}} \cdot F$.
Dieses Ergebnis ist natürlich nicht durch die wenigen Messungen bewiesen, sondern die Messungen bestätigen eine durch viele Experimente gefundene Gesetzmäßigkeit.

■ 21 Wir untersuchen Rechtecke mit dem Flächeninhalt $A = 144\ \text{cm}^2$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Seitenlängen a und b?
Wir wissen: $a \cdot b = \text{A}$, also $a \cdot b = 144\ \text{cm}^2$.
Das Produkt der Seitenlängen aller Rechtecke mit dem Flächeninhalt $A = 144\ \text{cm}^2$ ist immer gleich. Es liegt also umgekehrte Proportionalität vor: $b \sim \frac{1}{a}$ und $a \sim \frac{1}{b}$.

■ 22 Ein PKW fährt eine längere Strecke auf der Autobahn. Seine Geschwindigkeit ist nahezu konstant und beträgt $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Welche Strecke fährt der PKW in 20 Minuten? (Es ist hier sinnvoll, die Zahlen als Näherungswerte mit zwei zuverlässigen Ziffern aufzufassen.)
Zu jedem Zeitpunkt t der Fahrzeit hat der PKW eine ganz bestimmte Strecke s zurückgelegt.
Wir sagen: Der Fahrzeit t ist die Fahrstrecke s zugeordnet.
Da wir gleichbleibende Geschwindigkeit voraussetzen, besteht Proportionalität zwischen s und t, also $s \sim t$.
Der Proportionalitätsfaktor ist $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Damit gilt $s = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$.
Für $t = 20\ \text{min} = \frac{1}{3}\ \text{h}$ ergibt sich wegen $90 \cdot \frac{1}{3} = 30$ für den Weg $s = 30\ \text{km}$.
In 20 Minuten fährt der PKW ungefähr 30 km.

● 21 Überlege dir, warum die Umrechnung (von min in h) im Beispiel D 22 wichtig ist!

■ 23 Eine Schraubenfeder aus Stahl wurde mit 2,0 N belastet. Die Verlängerung betrug 8,0 cm. Welche Verlängerung bewirkt eine Kraft von 1,3 N?

Ansatz:

Belastung F in N	2,0	1,3
Verlängerung s in cm	8,0	x

Es liegt Proportionalität zwischen der Belastung F und der Verlängerung s vor (↗ Beispiel D 20). Also sind **alle Quotienten** $\frac{s}{F}$ gleich. Daher gilt:

Lösung: $\frac{8,0}{2,0} = \frac{x}{1,3} \quad | \cdot 1,3$ *Überschlag*: $\frac{3}{4}$ der Belastung ergibt $\frac{3}{4}$ der Verlängerung.

$\frac{8,0}{2,0} \cdot 1,3 = x$

$x = 5,2 \qquad 5,2 \approx 6 \qquad x \approx 6$ cm.

Antwortsatz: Die Belastung von 1,3 N bewirkt bei dieser Schraubenfeder eine Verlängerung von 5,2 cm.

Wir hätten aus der Tabelle auch andere Verhältnisgleichungen aufstellen können, die zum Ergebnis führen. Zum Beispiel:

$\frac{1,3}{2,0} = \frac{x}{8,0}$ oder $\frac{8,0}{x} = \frac{2,0}{1,3}$ oder $\frac{x}{1,3} = \frac{8,0}{2,0}$.

● 22 **a)** Überlege, welche Verhältnisgleichung sich besonders einfach umformen läßt!

b) Begründe, warum die Verhältnisgleichung $\frac{1,3}{2,0} = \frac{8,0}{x}$ nicht zum Ergebnis führt!

■ 24 Ein Radfahrer legt bei der Durchschnittsgeschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ die Entfernung zwischen zwei Städten in 5 h zurück. Wieviel Stunden benötigt ein anderer Radfahrer für diese Strecke, wenn er mit der Durchschnittsgeschwindigkeit $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt?

Hier besteht zwischen der Geschwindigkeit v und der benötigten Zeit t umgekehrte Proportionalität (↗ LE 9, S. 199).

Ansatz:

Geschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	15	20
Zeit t in h	5	x

Überschlag: Die Geschwindigkeit wird auf das $\frac{4}{3}$-fache erhöht. Also wird nur etwa das $\frac{3}{4}$-fache der Zeit benötigt.

$\frac{3}{4} \cdot 5 \approx 4$

Wegen der umgekehrten Proportionalität sind **alle Produkte** $v \cdot t$ gleich.

Lösung: $15 \cdot 5 = 20 \cdot x \quad | : 20$

$\frac{15 \cdot 5}{20} = x$

$x = \frac{15}{4} \qquad \frac{15}{4} \approx 4$

Antwortsatz: Der schnellere Radfahrer benötigt für diese Strecke nur $3\,\frac{3}{4}$ h.

Die Aufgabe kann auch mit einer Verhältnisgleichung gelöst werden.

$15 : 20 = x : 5 \qquad | \cdot 5$

$\frac{15 \cdot 5}{20} = x$

$x = \frac{15}{4}$

Auch die Verhältnisgleichungen $5 : x = 20 : 15$, $x : 5 = 15 : 20$ und $20 : 15 = 5 : x$ führen zum Ergebnis.

● 23 Warum führt die Verhältnisgleichung $x : 5 = 20 : 15$ im Beispiel D 24 *nicht* zum Ergebnis?

Das Rechnen mit Verhältnisgleichungen hat eine lange Geschichte. So lösten Kaufleute im Mittelalter die Aufgabe

ich hon kaufft .xv. ayer vmb .xij. pfenning was kosten .x. ayer (Ich habe 15 Eier für 12 Pfennig gekauft. Was kosten 10 Eier?)

nach der Regel:

„Setz hinden das du wissen wilt, das ihm am Namen gleich setz forn vnd das ein ander Ding bedeut, setz mitten. Darnach multiplicir das hinden steht mit dem mittlern, was kompt, teile in das förder, so hastu berichtung der frag vnd am namen gleich dem mittlern wie hie." (Aus einem Rechenbuch von Adam Ries [1492–1559])

● 24 **a)** Löse die Aufgabe mit einer Verhältnisgleichung!

b) Versuche die Aufgabe mit der angegebenen Regel zu lösen!

Aufgaben

1. Ein Automat stellt Werkstücke her. Zwischen der Arbeitszeit und der Anzahl der produzierten Werkstücke besteht direkte Proportionalität. Der Proportionalitätsfaktor ist **a)** 43 Stück pro Stunde, **b)** 47 Stück pro Stunde.
   Wieviel Werkstücke werden in 3; 8; 7,5; 15; 24 Stunden produziert?

2. Ein PKW fährt von einem Ort zu einem anderen Ort mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Er benötigt für die Fahrt 3 h. Ein LKW, der im Durchschnitt nur $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, benötigt für die gleiche Strecke 4,5 h.
   a) Sind Fahrzeit und Geschwindigkeit (direkt oder umgekehrt) proportional zueinander?
   b) Wie groß ist die Entfernung zwischen diesen beiden Orten?

3.* Gegeben seien gleichschenklige Dreiecke ABC mit $a = b$. Der Winkel γ betrage 30° bzw. 40° bzw. 50°.
   a) Berechne für jedes Dreieck den Winkel α!
   b) Untersuche, ob die Größe des Winkels α direkt oder umgekehrt proportional ist zur Größe des Winkels γ!

4. Peter hat drei Glaswürfel mit den Kantenlängen 2 cm, 3 cm und 4 cm. Er will untersuchen, ob zwischen der Masse dieser Würfel und ihren Kantenlängen Proportionalität besteht. Als Massen ermittelt er 20 g, 67,5 g und 160 g. Zu welchem Ergebnis wird Peter kommen?

5. 55 kWh Elektroenergie kosten 4,40 M. Wieviel Mark kosten 85 kWh?

6. Für 800 Hefte benötigt man 68,8 kg Papier.
a) Wieviel Kilogramm Papier werden für 1200 Hefte verbraucht?
b) Wieviel Kilogramm Papier werden gespart, wenn eine Schule 300 Hefte weniger verbraucht?

7. Ein Demonstrationszug zum 1. Mai habe eine Länge von 120 m, wenn die Teilnehmer in Zwölferreihen marschieren. Wie lang wäre der Zug, wenn die Teilnehmer **a)** in Sechserreihen, **b)** in Zehnerreihen, **c)** in Reihen zu 18 und **d)** in Dreierreihen marschieren würden?

8. Peter ist 12 Jahre alt, seine Schwester Ute schon 24 Jahre, also doppelt so alt.
a) Wie alt waren beide vor 6 Jahren? Wievielmal so alt wie Peter war Ute damals?
b) Ist das Alter von Ute proportional zu Peters Alter?

9. Im Klassenschrank lag ursprünglich ein Vorrat von 50 Heften. Je nach Bedarf wurden davon Hefte an Schüler ausgegeben.

Anzahl der Hefte im Schrank	45	40	30	26	21	15	10
Anzahl der ausgegebenen Hefte	5	10	20	24	29	35	40

Liegt hier direkte oder umgekehrte Proportionalität vor?

10. Viele Zweitaktmotoren benötigen ein Gemisch aus Benzin und Öl im Verhältnis 50:1.
a) Wieviel Liter Benzin müssen mit 1,5 l Öl gemischt werden?
b) Wieviel Liter Öl müssen mit 120 l Benzin gemischt werden?
c) Beantworte die Fragen **a)** und **b)** für den Fall, daß ein Zweitaktmotor ein Gemisch aus Benzin und Öl im Verhältnis 33:1 erfordert!

11. 5 Schüler graben im Schulgarten ein Versuchsfeld in 12 Stunden um. In welcher Zeit schaffen diese Arbeit bei gleicher Durchschnittsleistung
a) 6 Schüler, **b)** 10 Schüler,
c) 4 Schüler, **d)** 8 Schüler,
e) 50 Schüler?

12. 4 Schüler graben die Hälfte des Schulgartens in insgesamt 18 Stunden um. Die andere Hälfte des Gartens soll in
a) 8 h, **b)** 9 h,
c) 6 h, **d)** 10 h
umgegraben sein. Wieviel Schüler müssen bei gleicher Durchschnittsleistung graben?

13. In welcher Zeit durchfährt ein Radfahrer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von
a) $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **b)** $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **c)** $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Strecke von 11 km?

14. Welche Strecke legt ein Fußgänger bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von
a) $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **b)** $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **c)** $2{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $3\,\frac{1}{2}$ h zurück?

15. Die Kassiererin sagt zu Peter: „Wenn du mir 20 Pfennig gibst, erhältst du 1 Mark zurück!". Wieviel erhält Peter von der Kassiererin, wenn er ihr 40 Pfennig gibt?

Komplexe Übungen

Löse die folgenden Gleichungen!

1.↑ **a)** $3 \cdot x = 69$ **d)** $9 \cdot b = \frac{63}{2}$ **g)** $5 \cdot \frac{1}{k} = 10$ **k)** $\frac{0{,}6}{x} = 0{,}25$

b) $\frac{x}{7} = 4{,}5$ **e)** $3{,}57 \cdot x = 0$ **h)** $0{,}5 \cdot w = 48$ **l)** $\frac{y}{7{,}82} = 10{,}5$

c) $\frac{6}{x} = 36$ **f)** $\frac{3{,}6}{x} = \frac{5}{3}$ **i)** $2{,}3 \cdot x = 18{,}4$ **m)** $\frac{5}{3} \cdot z = \frac{17}{11}$

2.↑ **a)** $\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}5}{t} = 1{,}8$ **d)** $\frac{4{,}7}{a} = 1{,}25$ **g)** $2{,}4 = 3 \cdot t$ **k)** $c \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$

b) $0 \cdot x = 13{,}4$ **e)** $\frac{11}{9} : x = \frac{5}{9}$ **h)** $\frac{5}{6} \cdot b = 0{,}5$ **l)** $0 \cdot 5{,}6 = 2 \cdot t$

c) $\frac{7}{9} = 3 \cdot x$ **f)** $\frac{\frac{8}{3}}{x} = 0{,}16$ **i)** $\frac{\frac{4}{7}}{t} = \frac{13}{18}$ **m)** $4{,}5 \cdot a = 5{,}4$

3.*↑ **a)** $5{,}99 \cdot 0 = 0 \cdot x$ **d)** $0{,}54 = 0{,}21 : t$ **g)** $\frac{0}{x} = \frac{1}{2}$

b) $4 \cdot t = 21{,}5 - 1{,}5$ **e)** $\frac{4}{a} = 0$ **h)** $\frac{3}{x} = \frac{5}{8} \cdot 4{,}2$

c) $13{,}5 + 2{,}5 = \frac{4}{x}$ **f)** $2{,}4 \cdot x = 1{,}2 \cdot 3{,}5$ **i)** $18 + 2 \cdot x = 16$

4. Prüfe, ob die folgenden Gleichungen natürliche Zahlen als Lösungen haben! Begründe deine Entscheidungen, ohne die Gleichungen zu lösen!

a) $2 \cdot a = 4577$ **d)** $\frac{36243}{b} = 3$ **g)** $\frac{82584}{y} = 9$ **k)** $12 \cdot z = 53436$

b) $2 \cdot a = 4576$ **e)** $4 \cdot x = 6728$ **h)** $\frac{462354}{z} = 6$ **l)** $\frac{621456}{x} = 8$

c) $\frac{5238}{a} = 4$ **f)** $3 \cdot x = 4524$ **i)** $10 \cdot x = 2358$ **m)** $\frac{56274}{c} = 12$

5. Herrn Meiers PKW verbraucht auf einer Fahrt von 100 km im Durchschnitt 8,5 l Benzin. Wieviel Benzin benötigt der PKW bei diesem durchschnittlichen Verbrauch auf einer Fahrt von **a)** 140 km, **b)** 370 km, **c)** 200 km?

6. Ein Mähdrescher vom Typ E 512 mäht eine Fläche von 3 ha in $2\frac{1}{2}$ h.

a) Welche Fläche mäht er im Durchschnitt in 1 h?
b) Wie lange braucht er, um eine Fläche von 1 ha zu mähen?

7. Ein Hektar Zuckerrüben braucht in der Wachstumszeit mindestens 4000000 l Wasser. Wieviel Liter Wasser je Quadratmeter sind das?

8. Ein Gestüt ist mit 63 Pferden besetzt, sein Futtervorrat reicht für 72 Tage. 9 Pferde werden verkauft. Wie lange reicht jetzt das Futter?

9. Aus 20 l Milch läßt sich 1,1 kg Butter erzeugen.
   a) Wieviel Kilogramm Butter kann man aus 7,8 hl Milch erzeugen?
   b) Wieviel Liter Milch benötigt man, um 3 kg Butter zu erzeugen?

10. Eine Brigade von 9 Monteuren hatte Maschinen aufzustellen. Sie erfüllte diesen Auftrag in 45 h.
   a) In welcher Zeit kann der Auftrag bei gleicher Durchschnittsleistung von 15 Monteuren erledigt werden?
   b) Welche Zeit würden bei gleicher Durchschnittsleistung 7 Monteure dafür benötigen?

11. Mit 12 gleichartigen Drehmaschinen kann eine Serie von Kleinmaschinenteilen in 22 h gefertigt werden.
   a) Wieviel Stunden dauert die Fertigung, wenn 2 Drehmaschinen wegen notwendiger Reparaturen für diesen Auftrag ausfallen?
   b) Um wieviel Stunden verschiebt sich der Abschluß der Fertigung?

12. Ein Rechteck mit der Seite $b = 1{,}2$ cm hat den Flächeninhalt $A = 540\ \text{mm}^2$. Wie lang ist die Seite a?

13. Zwischen der Länge von senkrecht in der Erde stehenden Stäben und der jeweiligen Länge ihres Schattens besteht bei gleichem Sonnenstand direkte Proportionalität. Eine 3 m hohe Stange wirft um 10 Uhr einen 4 m langen Schatten. Wie hoch ist ein Baum, dessen Schatten zur gleichen Zeit
   a) 16 m, **b)** 21 m lang ist?

14. Eine Douglasie kann bis 800 Jahre alt, bis 100 m hoch und bis 4 m dick werden. Sie ist schlagreif mit etwa 80 Jahren bei 30 m Höhe. Besteht Proportionalität zwischen dem Alter und der Höhe von Douglasien?

15. Das Bild D 15 stellt das von einem Lieferwagen zu befahrende Gebiet dar; der Anfangspunkt ist A.
   Der Lieferwagen fährt an den einzelnen Wochentagen folgende Routen:

Montag:	A – G – B – A
Dienstag:	A – G – E – D – B – A
Mittwoch:	A – G – F – C – B – A
Donnerstag:	A – B – C – B – A
Freitag:	A – G – E – D – B – G – A

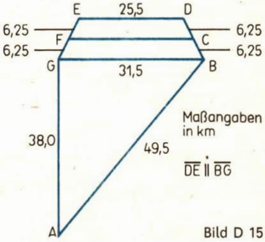


Bild D 15

   a) Berechne die Längen der Lieferwege an den einzelnen Wochentagen und für die gesamte Woche!
   b) Der Lieferwagen verbraucht auf einer Strecke von 100 km durchschnittlich 20 l Kraftstoff. Berechne den Kraftstoffverbrauch für die einzelnen Wochentage und für die gesamte Woche!
   c) Die Strecke $\overline{DB}$ kann in annähernd gleichförmiger Bewegung zurückgelegt werden. Die Fahrzeit beträgt 15 min. Wie groß ist die Geschwindigkeit?

16. Scherzaufgabe aus einem alten Rechenbuch: $\frac{3}{2}$ Hühner legen in $\frac{3}{2}$ Tagen $\frac{3}{2}$ Eier. Wieviel Eier legen 3 Hühner in 3 Tagen?

17. Stelle die Zuordnung (Volumen; Masse) für Körper aus Aluminium $\left(\varrho = 2{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ in einem Koordinatensystem dar!
a) Lies für $V = 3\ \text{cm}^3$ und $V = 5{,}5\ \text{cm}^3$ die jeweilige Masse m ab!
b) Lies für $m = 10$ g und $m = 50$ g das jeweilige Volumen V ab!

18. In einen Teich werden Seerosen eingepflanzt, die sich so schnell vermehren, daß die von ihnen bedeckte Fläche sich jedes Jahr verdoppelt. Nach 5 Jahren ist nur noch die Hälfte des Teichs frei. Nach wieviel Jahren ist der Teich ganz mit Seerosen bedeckt?

19. In einen mit siedendem Wasser gefüllten Topf werden 8 Eier gelegt. Sie sind nach 6 min hart gekocht. Wie lange würde es dauern, bis 2 Eier hart gekocht sind?

20. Macht mein Vater 20 Schritte, ist er eine Strecke von 16 m gegangen. Mache ich 10 Schritte, lege ich einen Weg von 6 m zurück. Um wieviel ist ein Schritt von mir kürzer als einer meines Vaters?

21. Wasser von 20°C wird in einem offenen Topf erhitzt. Nach 4 min ist die Temperatur auf 60°C gestiegen. Welche Temperatur hat das Wasser (bei gleichmäßigem Erhitzen) nach insgesamt 6 min und nach 12 min?

22. Aus 5 dt Leinsamen können 165 kg Öl gewonnen werden.
a) Ermittle die erforderliche Leinsamenmenge für 3 dt Öl!
b) Wieviel Kilogramm Öl können aus 2 dt Leinsamen gewonnen werden?

23. Ein Arbeiter erhält einen Zeitlohn von 5,70 M je Stunde. Wie hoch ist sein Lohn für eine 40stündige Arbeit? Wie lange hat er für 23,00 M gearbeitet?

24. Ein Autorennfahrer fährt eine Strecke von 400 km in $2\frac{1}{2}$ h. Wieviel Kilometer hat er nach 2 h etwa zurückgelegt? Ermittle die durchschnittliche Fahrzeit für 450 m!

25. Ein Verkehrsflugzeug mit Kolbenmotoren legt 500 km in $1\frac{1}{2}$ h zurück. Das sowjetische Düsenverkehrsflugzeug TU 134 benötigt für die gleiche Strecke 40 min. Ermittle für jedes der beiden Flugzeuge die Flugzeit für folgende Strecken!
a) 300 km **b)** 600 km **c)** 1000 km **d)** 500 km **e)** 800 km **f)** 900 km

26. Für den 3 km langen Weg zur Stadt benötigen zwei Schüler $\frac{1}{2}$ h. Wie lange benötigen 3 Schüler für denselben Weg?

27.* Von fünf Pflaumenbäumen wurden rund 250 kg Pflaumen geerntet. Aus $\frac{3}{5}$ dieser Menge wurde Pflaumenmus gekocht. Das Gewicht des Pflaumenmuses beträgt $\frac{3}{10}$ des Gewichts der frischen Pflaumen. Wieviel Kilogramm Pflaumenmus wurden eingekocht?

28. Im Bild D 16 ist dargestellt, wie sich heißes Wasser abkühlt.

a) Welche Temperatur ϑ hat das Wasser nach 1 min $\left(2\frac{1}{2}\text{ min; 5 min}\right)$?

b) Nach welcher Zeit t hat das Wasser eine Temperatur von 75 °C (60 °C; 45 °C)?

c) Besteht bei der Abkühlung von Wasser indirekte Proportionalität zwischen Temperatur und Zeit? Begründe!

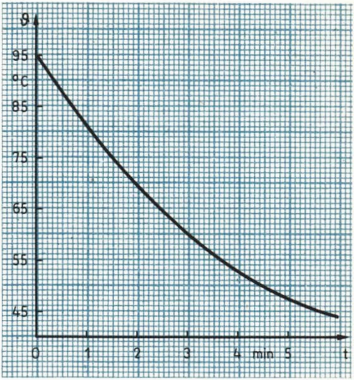


Bild D 16

29. Ein Schüler geht 10 Jahre zur Schule, bis er seine Abschlußprüfung machen kann. In dieser Zeit wird er von insgesamt 20 Lehrern unterrichtet. Wie lange müßte er zur Schule gehen, um von 100 Lehrern unterrichtet zu werden?

30. Welchen Höhenunterschied überwindet eine Treppe, deren Stufen eine Höhe von 15 cm und eine Breite von 35 cm haben, bei einer waagerechten Entfernung von 2,45 m?

31. Für das Weg-Zeit-Diagramm eines Verkehrsflugzeuges $\left(v = 750\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ steht eine halbe Heftseite A 5 zur Verfügung. Es sollen Flugzeiten bis zu 8 h und Flugstrecken bis zu 6000 km berücksichtigt werden.

a) Berechne eine sinnvolle Einteilung auf den Koordinatenachsen!

b) Stelle die Paare (1 h; 750 km), (2 h; 1500 km), (4 h; 3000 km), (5 h; 3750 km) und (8 h; 6000 km) in einem Koordinatensystem dar!

32. Fülle die Tabelle aus! Dabei gilt **a)** $y = 7{,}5 \cdot x$, **b)** $y = 200 \cdot \frac{1}{x}$.

x	1	10	15			
y				0	100	300

33. Ein Bäcker würde bei einem täglichen Verbrauch von 170 kg Mehl mit seinem Vorrat 17 Tage auskommen. Wie lange kommt er mit demselben Vorrat aus, wenn er 190 kg täglich verbraucht?

34. Lege die Angaben aus Aufgabe 25 zugrunde und berechne, welche Strecke jedes Flugzeug in folgenden Flugstunden zurücklegt!

a) 3 h **b)** 5 h **c)** 8 h **d)** 2 h **e)** 4 h **f)** 6 h

35. Ein Radfahrer legt in einer Stunde 18 km zurück, ein PKW viermal soviel und ein Schnellzug in einer Minute 1,5 km. Welche Strecke wird jeweils in vier Stunden zurückgelegt?

36. Gib sechs Rechtecke mit den Seiten a und b an, die den Flächeninhalt $A = 18\ \text{m}^2$ haben! Welche Beziehung besteht zwischen a und b?
Formuliere diese Beziehung in Form einer Gleichung!

37. Ein LKW mit einer Ladefähigkeit von 10 t soll beladen werden. Auf den bereitstehenden Kisten sind folgende Angaben zu lesen: 2,6 dt auf vier Kisten; 75 kg auf fünf Kisten; 1,2 t auf zwei Kisten; 190 kg auf 30 Kisten. Können alle diese Kisten auf einmal transportiert werden?

38. Ein Wanderer macht 4500 Schritte. Wie lang ist der zurückgelegte Weg, wenn seine Schrittlänge rund 75 cm beträgt?
Wie viele Schritte muß ein Schüler der 6. Klasse machen, um die gleiche Strecke zurückzulegen, wenn seine Schrittlänge rund 50 cm beträgt?

39. 1 kg Mehl ergibt $1\frac{1}{3}$ kg Brot.

a) Wieviel Kilogramm Brot kann man aus 63 kg Mehl backen?
b) Wie viele Brote sind das, wenn ein Brot 1,5 kg wiegt?

40. Auf einer Baustelle arbeiten vier Maurer. Nach ihrem Alter befragt, antwortet einer: „Wir sind alle vier verschieden alt. Zusammen sind wir 129 Jahre alt. Drei von uns haben eine Quadratzahl von Jahren hinter sich, ebenso hatten drei von uns vor 15 Jahren als Alter eine Quadratzahl." Wie alt war jeder der Maurer, als die Frage gestellt wurde?

41. Zu einem Gericht Rotkohl werden für drei Personen benötigt:
$\frac{3}{4}$ kg Rotkohl, $\frac{1}{4}$ l Wasser, $\frac{1}{8}$ l Weinessig, 20 g Zucker, 100 g Schmalz, 5 g Salz, 3 Nelken, eine Zwiebel und zwei Äpfel.
Es soll **a)** für eine Person, **b)** für sechs Personen, **c)** für zehn Personen gekocht werden.
Wieviel benötigt man in jedem Fall von den einzelnen Zutaten?

R Register

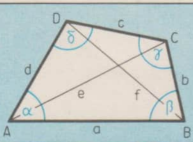
Im folgenden Register findest du alphabetisch geordnet Stichwörter mit Seitenangaben, die dir das Aufsuchen von Begriffen und wichtigen Merksätzen erleichtern. Steht hinter der Seitenziffer noch ein „f.", so bedeutet das, daß sich die Erklärungen zu diesem Stichwort bis zur folgenden Seite erstrecken. Folgt der Seitenziffer das Zeichen „ff.", so erstrecken sich die Erklärungen sogar über mehrere der folgenden Seiten.

Quellenverzeichnis

Bild Seite 7: Bildarchiv Volk und Wissen
Bild B1: Foto Seifert, Berlin
Bild B2: Foto Dargel, Berlin
Bild B14: Foto Seifert, Berlin
Bild C28: Foto BZ-Olm
Bild C63: Bauinformation/Steuerlein

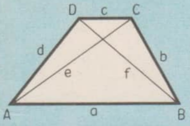
Vierecke

Viereck *(konvex)*



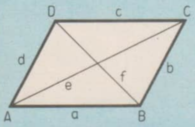
$\alpha + \beta + \gamma + \delta$
$= 360°$

Trapez



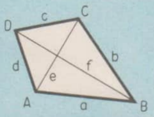
$a \parallel c$
$\alpha + \delta = \beta + \gamma$
$(= 180°)$

Parallelogramm



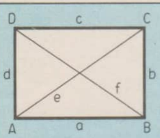
$a \parallel c, b \parallel d$
$a = c, b = d$
$\alpha = \gamma, \beta = \delta$
e,f halbieren einander

Drachenviereck



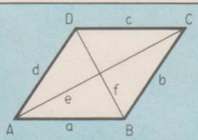
$a = b\ , \ c = d$
$\alpha = \gamma$
$e \perp f$
f halbiert e

Rechteck



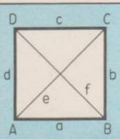
$\alpha = \beta = \gamma = \delta$
$= 90°$
$e = f$

Rhombus



$a = b = c = d$

Quadrat



Kurzwort: 00 06 08 Lehrb. Mathe Kl6
Schulpreis DDR: 2,30
ISBN 3-06-000608-3