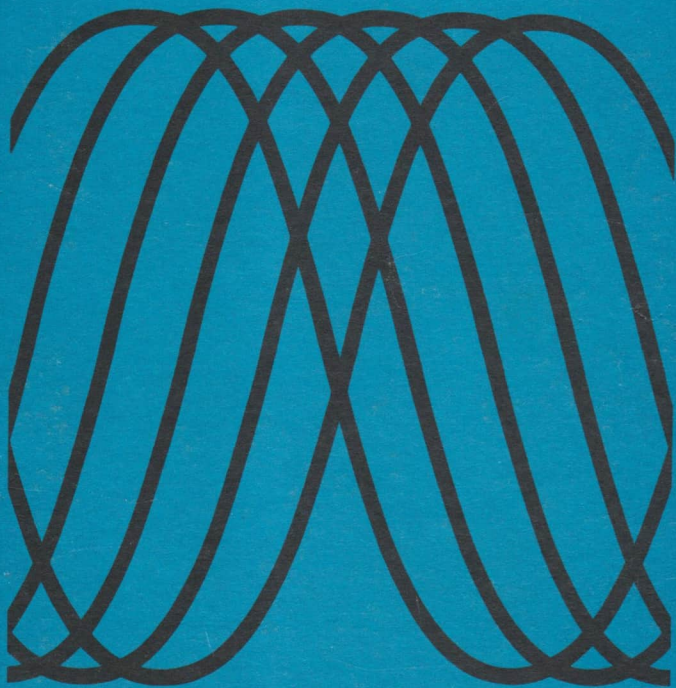


Mathematik 10



**Erläuterungen
zur Arbeit
mit diesem Buch**

Das Randregister auf den Außenrändern der Seiten dient dem bequemen und schnellen Auffinden der Kapitel. Auf dem Vorsatz finden Sie hierzu eine Übersicht über die einzelnen Kapitel. Der Lehrteil gliedert sich in die Kapitel A und B, der Aufgabenteil in die Kapitel a und b. Dabei enthält zum Beispiel das Kapitel b die Aufgaben für das Kapitel B im Lehrteil.

Jedes Kapitel ist durch Zwischenüberschriften und durch eine fortlaufende Numerierung mit schwarzen halbfetten Ziffern in Lerneinheiten untergliedert.

Innerhalb der Lerneinheiten werden die **Definitionen**, **Sätze**, **Beispiele** und **Aufträge** durch folgende Marken gekennzeichnet.

- ▶ Definitionen und Sätze
- Beispiele
- Aufträge

Durch die Ziffern in den Marken werden auch die Definitionen, Sätze, Beispiele und Aufträge numeriert. Sämtliche Numerierungen werden jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt. Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnen dann alle Numerierungen von neuem. Hinweise auf Lerneinheiten, Beispiele usw. werden im laufenden Text mit dem Buchstaben des betreffenden Kapitels angegeben.

Zum Beispiel:

Lerneinheit A 11 ist die Lerneinheit 11 des Kapitels A.

Beispiel B 5 ist das Beispiel 5 im Kapitel B.

Auftrag A 13 ist der Auftrag 13 im Kapitel A.

Die Aufgaben sind folgendermaßen untergliedert:

Nebeneinanderstehende Aufgaben, zum Beispiel die Aufgaben a 14 und a 15, behandeln jeweils das gleiche mathematische Problem und sind im allgemeinen vom gleichen Schwierigkeitsgrad. Die Aufgabenstellungen, die sich unmittelbar über den einzelnen Aufgaben über die ganze Breite der jeweiligen Seite erstrecken, beziehen sich dann auf beide Aufgabengruppen.

Mit kursiver Numerierung sind **zusätzliche Aufgaben** gekennzeichnet, die sich auf manchen Seiten des Aufgabenteils befinden. Bei diesen Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad im allgemeinen höher als bei den sonstigen, halbfett numerierten Aufgaben.

Winkelfunktionen

A

Körperdarstellung und Körperberechnung

B

Aufgaben zu Winkelfunktionen

a

**Aufgaben zu Körperdarstellung
und Körperberechnung**

b

Register

R

Mathematik

Lehrbuch für Klasse 10



Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1974



Autoren:

Studienrat Dr. Dietrich Richter — Kapitel A (1.1 bis 1.3), a (1.1 bis 1.3)

Prof. Dr. Oskar Mader — Kapitel A (1.4), a (1.4), B, b

Prof. Dr. Hans Wußing — Historische Abschnitte

**Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt**

4. Auflage

Ausgabe 1972

Lizenz-Nr. 203 · 1000/73 (UN)

ES 11 G

Redaktion: Heinz Junge

Zeichnungen: Heinz Grothmann

Umschlag und Vorsatz: Manfred Behrendt

Typografie: Atelier Volk und Wissen

Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden (III/9/1)

Printed in the German Democratic Republic

Gesetzt aus der Bodoni

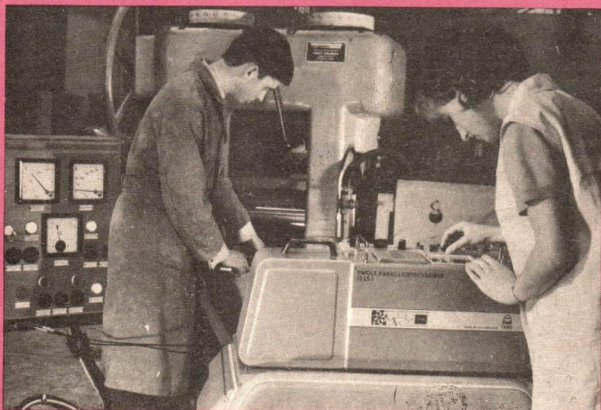
Redaktionsschluß: 19. Juli 1973

Titel-Nr. 00 10 02-4 · EVP: 2,30

A Winkelfunktionen

- 4 Die Funktion $y = \sin x$**
Wiederholung (4) · Winkel und Winkelmessung (6) · Sinusfunktion (10) · Funktion $y = a \sin bx$ ($a, b \in P$; $a, b > 0$) (14)
- 18 Die Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$**
Kosinusfunktion (18) · Tangensfunktion und Kotangensfunktion (21) · Spezielle Funktionswerte (25)
- 28 Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten**
Beziehungen zwischen Funktionswerten bei gleichem Winkel (28) · Komplementwinkelbeziehungen (30) · Quadrantenbeziehungen (31) · Tafeln der Winkelfunktionswerte (33) · Skalen der Winkelfunktionen auf dem Rechenstab (37)
- 40 Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen**
Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck (40) · Aufgaben zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke (44) · Gleichschenkliges Dreieck (45) · Regelmäßiges Vieleck (46) · Sinussatz (47) · Kosinussatz (50) · Aufgaben zur Dreiecksberechnung (57) · Spezielle Vermessungsaufgaben (58)
-

Zur Überprüfung und Fehlersuche verwendet man vielfach Meßeinrichtungen, die die Meßergebnisse charakteristischer Größen auf einer Bildröhre oder auf einem Papierstreifen als Kurven wiedergeben. Mit diesen Oszillographen kann man schnell wechselnde Vorgänge, z. B. Ströme in elektrischen Anlagen, Kräfte in Maschinen, messen. Das Bild zeigt ein solches Prüfgerät, in diesem Fall einen Lichtschreiber aus dem VEB Kombinat Meßgerätewerk Zwönitz, beim Aufzeichnen des Kräfteverlaufs an einem Walzwerk.



1 Wiederholung des Funktionsbegriffs und der wichtigsten bisher behandelten Funktionen

Bevor wir eine weitere Menge nichtrationaler Funktionen, die **Winkelfunktionen**, kennenlernen, sollen die Kenntnisse über den Funktionsbegriff und den Begriff des Winkels wiederholt und erweitert werden.

Als Funktion wurde eine Menge geordneter Paare $[x; y]$ mit $x \in X$, $y \in Y$ definiert, die eine **eindeutige Abbildung einer Menge X auf eine Menge Y** ist.

Dabei bezeichnet man die Menge X als **Definitionsbereich**, die Menge Y als **Wertebereich** und die Elemente y als **Funktionswerte** der Funktion.

① *Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen geordneter Paare Funktionen sind!*

a) $\{[2; 6], [3; 9], [5; 15], [7; 21], [11; 33]\}$

b) $\{[2; 4], [3; 9], [-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}], [5; 25], [\frac{1}{2}; \frac{1}{4}]\}$

c) $\{[1; 3], [3; 1], [2; 3], [\frac{1}{2}; -1], [1; 4]\}$

d) $\{[0; 1], [1; 2], [2; 5], [3; 10], [4; 17]\}$

② *Geben Sie für die im Auftrag A 1 aufgeführten Funktionen die Vorschrift für die Zuordnung der Elemente des Definitionsbereiches zu den Funktionswerten jeweils in Form einer Gleichung $y = f(x)$ an!*

Für viele Funktionen existiert eine Gleichung $y = f(x)$, mit deren Hilfe die eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen des Definitionsbereiches und des Wertebereiches hergestellt wird.

Es ist in diesen Fällen üblich, die Gleichung zur Bezeichnung der Funktion selbst zu benutzen, also von der „Funktion $y = f(x)$ “ zu sprechen, beispielsweise von der „Funktion $y = 4x^2 + x + 3$ “. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß y den Funktionswert bezeichnen soll.¹

Die Übersicht auf Seite 5 enthält die wichtigsten bisher behandelten Klassen von Funktionen, die sich durch eine Gleichung beschreiben lassen.

③ *Untersuchen Sie jede der folgenden Funktionen daraufhin, welche der geordneten Zahlenpaare*

$$\{[0; 1], [1; 0], [0; 0], [1; 1], [1; -1], [-1; -1]\}$$

Elemente der betreffenden Funktion sind!

a) $y = -2x + 1 \quad (x \in P; -2 \leq x \leq 2)$

b) $y = x^2 - 1 \quad (x \in P; -2 \leq x \leq 2)$

c) $y = x^3 \quad (x \in P; -2 \leq x \leq 2)$

d) $y = x^{\frac{1}{2}} \quad (x \in P; 0 \leq x \leq 4)$

e) $y = 2^x \quad (x \in P; -2 \leq x \leq 2)$

f) $y = \log_2 x \quad (x \in P; 0 < x \leq 4)$

¹ Nicht alle Funktionen lassen sich durch eine Gleichung beschreiben. Ohne Beweis sei mitgeteilt, daß man für Funktionen, die aus endlich vielen vorgegebenen geordneten Paaren reeller Zahlen bestehen, immer eine Gleichung angeben kann.

Bezeichnung der Funktionsklasse	Gleichung $y = f(x)$ ($x \in P; y \in P$)	Definitionsbereich ¹
Lineare Funktion	$y = mx + n$ ($m \in P; n \in P; m \neq 0$)	$x \in P$
Quadratische Funktion	$y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in P; a \neq 0$)	$x \in P$
Potenzfunktion	$y = x^n$ ($n \in N$)	$x \in P$
	$y = x^n$ ($n \in G$)	$x \in P$ ($x \neq 0$)
	$y = x^n$ ($n \in R$)	$x \in P$ ($0 < x$)
Exponentialfunktion	$y = a^x$ ($a \in P; a > 0; a \neq 1$)	$x \in P$
Logarithmusfunktion	$y = \log_a x$ ($a \in P; a > 0; a \neq 1$)	$x \in P$ ($x > 0$)

4 Veranschaulichen Sie die im Auftrag A 3 gewonnenen Ergebnisse mit Hilfe graphischer Darstellungen der Funktionen und der vorgegebenen geordneten Zahlenpaare!

Es ist gebräuchlich, den zu einem Element x des Definitionsbereiches gehörenden Funktionswert y auch mit $f(x)$ zu bezeichnen. Ist beispielsweise die Funktion

$$f = \{[1; 2], [2; 3], [3; 5], [4; 7], [5; 11]\}$$

gegeben, dann gilt nach dieser Vereinbarung

$$f(1) = 2; f(2) = 3; f(3) = 5; f(4) = 7; f(5) = 11.$$

5 Es sei die Funktion f durch die Gleichung $y = 4x - 1$ ($x \in P$) gegeben. Ermitteln Sie die Funktionswerte $f(0), f(1), f(-1), f(2), f(3)$!

Entsprechend dieser Vereinbarung, den Funktionswert mit $f(x)$ zu bezeichnen, schrieben wir beispielsweise die Gleichung der Funktion $y = ax^n$ in der Form $f(x) = ax^n$.

Die geordneten Paare einer Funktion lassen sich dann auch in der Form $[x; f(x)]$ schreiben.

Diese Schreibweise ermöglicht es zu erkennen, welche Variable die Elemente des Definitionsbereiches und welche die Funktionswerte bezeichnet.

So beschreibt die Gleichung $V(a) = \frac{1}{3} h a^2$ eine Funktion, deren Funktionswerte Volumina von quadratischen Pyramiden sind und deren Definitionsbereich aus den Seitenlängen der quadratischen Grundfläche besteht.

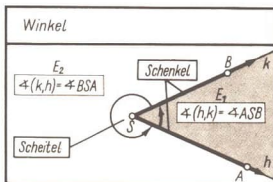
Aufgaben a 1 bis 11

¹ In dieser Tabelle ist der größtmögliche Definitionsbereich angegeben.

2 Winkel und Winkelmessung

Ein Winkel kann als **geordnetes Paar** $[h; k]$ von zwei Strahlen h und k mit gemeinsamem Anfangspunkt aufgefaßt werden. Dabei wird festgelegt, daß der Strahl h , der als erste Komponente des geordneten Paares gegenüber dem Strahl k ausgezeichnet ist, im mathematisch positiven Drehsinn bis zur Deckung mit k um den Anfangspunkt gedreht werden soll. Man spricht deshalb auch von einem **positiv orientierten Winkel**.

Hiernach gibt es zu zwei Strahlen h und k genau zwei positiv orientierte Winkel, nämlich die geordneten Paare $[h; k]$ und $[k; h]$. Denkt man sich eine Drehung, die dem Winkel $\sphericalangle(h; k)$ entspricht, praktisch ausgeführt, so wird das Gebiet E_1 vom Strahl h überstrichen. Im Falle des Winkels $\sphericalangle(k; h)$ überstreicht der Strahl k das Gebiet E_2 ; vgl. Bild A 1.



A 1

Durch den Winkelbegriff können folgende Sachverhalte erfaßt werden.

- Festlegung der gegenseitigen Lage zweier Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt (z. B. Marschrichtungszahl, Bahnneigung eines Erdsatelliten)
- Angabe der Größe und Richtung der Drehung eines Strahls um seinen Anfangspunkt (z. B. Festlegungen für den Umlauf rotierender Maschinenteile, Einstellung eines Abschußwinkels)
- Abgrenzung eines bestimmten Bereiches einer Ebene (z. B. Beobachtungsektor)

Bei b) und c) wird sichtbar, warum es nicht ausreicht, nur von einer Menge $\{h; k\}$ zu sprechen, sondern daß ein **geordnetes Paar** $[h; k]$ und die **Orientierung des Winkels** erforderlich sind.

Das Gradmaß des Winkels

Beim sogenannten **Gradmaß** wird dem Vollwinkel (ein Schenkel hat die Ebene einmal vollständig überstrichen) die Zahl 360 zugeordnet. Dem n -ten Teil eines Vollwinkels wird die Zahl $\frac{360}{n}$ ($n > 1$; $n \in P$) zugeordnet. Die **Einheit des Gradmaßes** wird mit „1°“ (**ein Grad**) bezeichnet und ist folglich der 360. Teil des Vollwinkels. Jedem Winkel läßt sich hiernach genau eine reelle Zahl zuordnen.

Als kleinere Einheiten für das Gradmaß sind die **Minute** („1′“) und die **Sekunde** („1″“) gebräuchlich.

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \quad 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$$

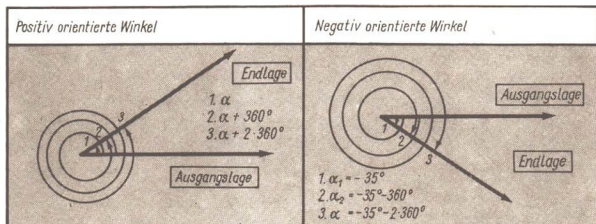
Dabei ist zu beachten, daß die Einheiten der Zeitmaße „Minute“ bzw. „Sekunde“ durch „1 min“ bzw. „1 s“ zu bezeichnen sind.

6 Führen Sie folgende Umrechnungen der Maßzahlen aus!

- $5,2^\circ = x'$
- $0,3^\circ = x'$
- $30' = x^\circ$
- $20'' = x'$
- $15^\circ 15' = x^\circ$
- $1'' = x^\circ$

Erweiterung des Winkelbegriffs

- Ein Strahl möge die Ebene teilweise oder auch ganz zum zweiten Male überstreichen und sich in einer Lage befinden, der bei der ersten Umdrehung das Maß α zugeordnet war. Dann wird dem durch diese Drehung entstandenen Winkel das Maß $\alpha + 360^\circ$ zugeordnet, bei der dritten Umdrehung $\alpha + 2 \cdot 360^\circ$ und bei der $(n + 1)$ -ten Umdrehung $\alpha + n \cdot 360^\circ$; vgl. Bild A 2.
- Legt man fest, daß sich der Strahl h im mathematisch negativen Drehsinn



A 2

A 3

bis zur Deckung mit k drehen soll, so spricht man von einem **negativ orientierten Winkel**. Solch einem Winkel werden *negative* Maßzahlen zugeordnet; vgl. Bild A 3.

Winkel, deren Gradmaße sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 360° unterscheiden, heißen **einander äquivalente Winkel** und bilden jeweils eine Klasse. In einer Menge von einander äquivalenten Winkeln gibt es genau einen Winkel, für dessen Maß α gilt: $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$. Das Maß dieses Winkels wird als **Hauptwert** der einander äquivalenten Winkel bezeichnet.

- 1
- Winkel von 2652° und 1572° sind einander äquivalent, denn es ist $2652^\circ - 1572^\circ = 1080^\circ = 3 \cdot 360^\circ$.
 - Winkel von 1370° und 5204° sind nicht einander äquivalent, denn es ist $5204^\circ - 1370^\circ = 3834^\circ$ und 3834 ist nicht durch 360 teilbar.
 - Winkel von -3280° und 320° sind einander äquivalent, denn es ist $320^\circ - (-3280^\circ) = 3600^\circ = 10 \cdot 360^\circ$.

Das Bogenmaß des Winkels

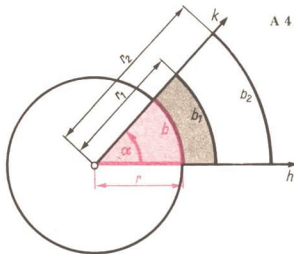
7 Zeichnen Sie drei konzentrische Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Radien $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 2,5$ cm, $r_3 = 3,5$ cm! Zeichnen Sie ferner einen Winkel $\sphericalangle (h; k)$, dessen Scheitelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kreise zusammenfällt und dessen Gradmaß 60° beträgt! Die Schnittpunkte der Strahlen h und k mit den Kreisen seien A_1, A_2, A_3 bzw. B_1, B_2, B_3 .

- Berechnen Sie die Bogen $\widehat{A_1B_1}, \widehat{A_2B_2}, \widehat{A_3B_3}$ so, wie Sie es in Klasse 7 lernten! Benutzen Sie dazu evtl. das Tafelwerk! Machen Sie sich klar, wie die betreffende Formel gewonnen wurde!
- Ermitteln Sie die Quotienten $\frac{\widehat{A_1B_1}}{r_1}, \frac{\widehat{A_2B_2}}{r_2}, \frac{\widehat{A_3B_3}}{r_3}$!

Weisen Sie nach, daß bei gegebenem Winkel das Verhältnis der Länge des Bogens b zur Länge des zugehörigen Radius r gleich einer Konstanten ist!

Ermitteln Sie diese Konstante!

Anleitung: Wählen Sie zwei beliebige Radien r_1 und r_2 mit den zugehörigen Bogen b_1 und b_2 und leiten Sie die Gleichung $\frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2}$ her; vgl. Bild A 4!



Die Konstante $\alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ ist eine charakteristische Größe eines Winkels und kann deshalb ebenfalls zur Winkelmessung benutzt werden. Sie wird **Bogenmaß** des Winkels genannt und mit „arc alpha“ (arcus alpha) bezeichnet.¹

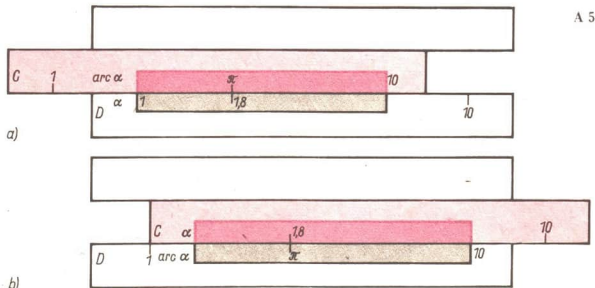
Es gilt also: $\text{arc } \alpha = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$.

Oder:

$$\frac{\text{arc } \alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

Auf Grund dieser Gleichung ist jedem beliebigen Winkel (auch Winkeln, deren Gradmaß kleiner als 0° oder größer als 360° ist) eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet.

Zur Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt läßt sich die Proportionaleinstellung des Rechenstabes benutzen. Indem die Skalen C und D so gegeneinander verschoben werden, daß „pi“ und „180“ übereinander stehen, gewinnt man eine Tabelle für die Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt; vgl. Bild A 5.



¹ Mitunter wird das Bogenmaß auch durch $\widehat{\alpha}$ (alpha Bogen) bezeichnet.

² Beim Verwenden dieser Formel ist stets darauf zu achten, daß „alpha“ eine Größe und nicht nur die Maßzahl eines Winkels ist.

9

Vervollständigen Sie unter Zuhilfenahme der Proportionaleinstellung des Rechenstabes folgende Tabelle!

α	45°	430°		17°		-250°			195°
$\text{arc } \alpha$	0,785		8,2		-5,4		-4,8	2,4	

Wählt man einen Kreis mit einem Radius von einer Längeneinheit (1 LE), den sogenannten Einheitskreis, dann ist das Verhältnis von Bogen und zugehörigem Radius $\frac{b}{r}$ gleich der Maßzahl der Länge des Bogens. Folglich ist das Bogenmaß $\text{arc } \alpha$ eines Winkels α auch gleich der Maßzahl der Länge desjenigen Bogens b , den dieser Winkel α als Zentriwinkel aus dem Einheitskreis ausschneidet.

Der Umfang des Einheitskreises beträgt $u = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 \text{ LE} = 2\pi \text{ LE}$.
Folglich gilt: $\text{arc } 360^\circ = 2\pi$.

Hiervon ausgehend erhält man $\text{arc } 90^\circ = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\text{arc } 45^\circ = \frac{\pi}{4}$.

Geben Sie das Bogenmaß in Form ganzzahliger oder gebrochener Vielfacher von π an!

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\text{arc } \alpha$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$				

α	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\text{arc } \alpha$									2π

Aus Bild A 5 ist zu erkennen, daß die mit Hilfe der Einstellungen des Rechenstabes in der Tabelle vermerkten Angaben nicht alle notwendigen Umrechnungen von Gradmaß in Bogenmaß oder umgekehrt erfassen. Beispielsweise läßt sich $\text{arc } 70^\circ$ nicht sofort ablesen.

Mit Hilfe der Proportionaleinstellung des Rechenstabes ist $\text{arc } 70^\circ$ zu ermitteln.

Überschlag: $\text{arc } 60^\circ = \frac{\pi}{3} \approx \frac{3}{3} = 1$

Einstellung:

1. Möglichkeit

- Läuferstrich über D 18
- C π unter Läuferstrich
- Läuferstrich über C 10
- C 1 unter Läuferstrich
(Zunge verschieben)
- Läuferstrich über D 7
- Ablesen C 122

2. Möglichkeit

- Läuferstrich über D π
- C 18 unter Läuferstrich
- Läuferstrich über C 1
- C 10 unter Läuferstrich
(Zunge verschieben)
- Läuferstrich über C 7
- Ablesen D 122

Ergebnis: $\text{arc } 70^\circ = 1,22$

Das Beschreiten beider Wege ermöglicht das Überprüfen des Ergebnisses.

3 Die Sinusfunktion

Der folgende Sachverhalt der Physik kann mit Hilfe der uns bisher bekannten Funktionen mathematisch nicht erfaßt werden. Die Hangabtriebskraft F_H eines sich auf einer geneigten Ebene befindenden Körpers mit dem Gewicht G genügt folgender Gleichung; vgl. Bild A 6.

$$\frac{F_H}{G} = \frac{h}{l} \quad (h - \text{Höhe der geneigten Ebene; } l - \text{Länge der geneigten Ebene})$$

Auf Grund des zweiten Teiles des Strahlensatzes ist der Quotient $\frac{h}{l}$ bei gegebenem Winkel α konstant. Es gilt nämlich für beliebige Paare $[h; l]$ und $[h^*; l^*]$:

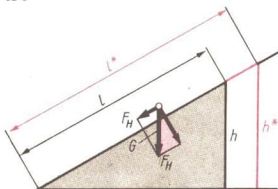
$$\frac{h}{l} = \frac{h^*}{l^*}.$$

Jedem Winkel α ist also ein bestimmter Wert des Quotienten $\frac{h}{l}$ zugeordnet. Da andererseits jedem Winkel eindeutig eine reelle Zahl x als dessen Bogenmaß zugeordnet ist, kann dieser Quotient $\frac{h}{l}$ auch als eine Funktion reeller Zahlen aufgefaßt werden.

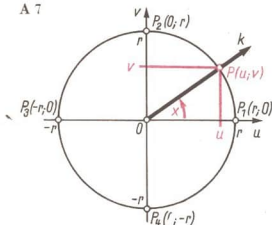
$$\frac{h}{l} = g(x) \quad \text{und folglich} \quad F_H = G \cdot g(x)$$

Diese Funktion $y = g(x)$ soll im folgenden mathematisch definiert werden.

A 6



A 7



In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit gleichgeteilten Achsen sei ein Kreis mit dem Radius der Länge r LE gegeben; vgl. Bild A 7.¹ Der Schenkel k des Winkels $\sphericalangle(u; k)$ möge den Kreis im Punkt $P(u; v)$ schneiden. Das Bogenmaß des Winkels $\sphericalangle(u; k)$ sei x . Unter Bezugnahme auf diese Erklärungen wird der Quotient aus der Ordinate v des Punktes $P(u; v)$ und der Maßzahl r der Länge des Radius mit $\sin x$ bezeichnet.

$$\sin x = \underset{\text{Def}}{\text{Def}} \frac{v}{r} \quad (x \in P; r > 0; r, v \in P; -r \leq v \leq r)$$

Diese reelle Zahl $\sin x$ wird **Sinus des Winkels x** genannt.²

Auf Grund der Definition des Sinus eines Winkels x kann eine Menge geordneter Paare reeller Zahlen $[x; \sin x]$ mit $x \in P$ gebildet werden. Diese Menge ist eine nichtrationale Funktion.

¹ Im Unterschied zur Benutzung der Variablen r in den Formeln für Kreisberechnungen wird r hier nicht als Länge des Radius, sondern als Maßzahl des Radius verwendet. Demzufolge ist r eine reelle Zahl.

² Oft bezeichnet man das Bogenmaß eines Winkels selbst als Winkel.

2 **DEFINITION:** Die *Sinusfunktion* ist die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen $[x; \sin x]$ mit $x \in P$. Sie wird mit $y = \sin x$ bezeichnet.

4 Entsprechend der Definition A 2 ist $\sin \frac{\pi}{4}$ zu ermitteln.

Wir zeichnen in einem kartesischen Koordinatensystem mit der Längeneinheit $1 \text{ LE} \triangleq 1 \text{ cm}$ einen Kreis mit beliebigem Radius, beispielsweise mit einer Länge von 5 cm, dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt.

Die reelle Zahl $\frac{\pi}{4}$ wird als Bogenmaß eines Winkels aufgefaßt. Dieser Winkel, dessen Gradmaß gleich 45° ist, wird gezeichnet. Die Ordinate des Punktes $P(u; v)$ ist $v \approx 3,6$. Also ergibt sich $\sin \frac{\pi}{4} \approx \frac{3,6}{5} = 0,72$.

11 Ermitteln Sie in gleicher Weise die folgenden Zahlen!

- a) $\sin \frac{\pi}{3}$ b) $\sin 1$ c) $\sin \left(\frac{5}{6} \pi\right)$

5 Für einige Elemente des Definitionsbereiches der Sinusfunktion lassen sich die genauen Funktionswerte einfach ermitteln; vgl. Bild A 7.

a) $x = \frac{3}{2} \pi$ $P(u; v) = P(0; -r)$ $\sin \left(\frac{3}{2} \pi\right) = \frac{v}{r} = \frac{-r}{r} = -1$

b) $x = \pi$ $P(u; v) = P(-r; 0)$ $\sin \pi = \frac{v}{r} = \frac{0}{r} = 0$

c) $x = -\frac{\pi}{2}$ $P(u; v) = P(0; -r)$ $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v}{r} = \frac{-r}{r} = -1$

12 Begründen Sie in gleicher Weise mit Hilfe der Kenntnisse über die Äquivalenz von Winkeln die Angaben in den folgenden Tabellen!

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

k	$4n$	$4n + 1$	$4n + 2$	$4n + 3$
$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot 2\pi$	$n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$	$n \cdot 2\pi + \pi$	$n \cdot 2\pi + \frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	1	0	-1

13 Untersuchen Sie, ob folgende Zahlenpaare Elemente der Funktion $y = \sin x$ sind!

- a) $\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$ b) $[15; 0]$ c) $[-3\pi; 1]$
 d) $\left[-\frac{3}{2}\pi; -1\right]$ e) $\left[-\frac{5}{2}\pi; 1\right]$ f) $[0; 0]$

Auf Grund der eindeutigen Beziehung zwischen Gradmaß und Bogenmaß ist auch eine Angabe wie „ $\sin 30^\circ$ “ erlaubt und gebräuchlich. Beispielsweise sind hiernach

$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6}, \quad \sin (-90^\circ) = \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin 400^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 400^\circ\right), \quad \sin 0^\circ = \sin 0.$$

Aufgaben a 39 bis 42

4 Eigenschaften der Sinusfunktion

Für einen Einheitskreis ($r = 1$) nimmt die Definitionsgleichung für den Sinus eines Winkels eine besonders einfache Form an.

$$\sin x = \frac{v}{r} = \frac{v}{1} = v$$

Man kann den Funktionswert demnach direkt als Ordinate des Punktes $P(u; v)$ der Zeichnung entnehmen; vgl. Bild A 7.

Eigenschaften der Sinusfunktion im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ ($x \in P$)							
Definitionsbereich	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$	π	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi$	2π
Wertebereich	0	$0 < y < 1$	$1 \geq y > 0$	0	$0 > y > -1$	$-1 \leq y < 0$	0
Vorzeichen der Funktionswerte		+	+		-	-	
Monotonieverhalten		monoton steigend	monoton fallend		monoton fallend	monoton steigend	

Wir untersuchen die genannten Eigenschaften der Sinusfunktion im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Bei Vergrößerung des Winkelmaßes x vergrößert sich kontinuierlich die Ordinate v des Schnittpunktes des Schenkels k mit dem Einheitskreis, d. h., die Funktion ist monoton steigend.

Gilt $x < \frac{\pi}{2}$, so ist $v < 1$ und folglich $\sin x < 1$.

Gilt $x = \frac{\pi}{2}$, so ist $v = r = 1$ und damit $\sin x = 1$.

Da stets $v \leq r$ gilt, ist $\sin x \leq 1$.

Alle reellen Zahlen y mit $0 \leq y \leq 1$ werden im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ von der Sinusfunktion angenommen, d. h., der Wertebereich besteht aus dem Intervall $0 \leq y \leq 1$.

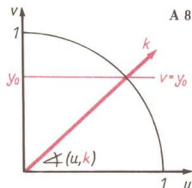
Diese Tatsache kann folgendermaßen begründet werden.

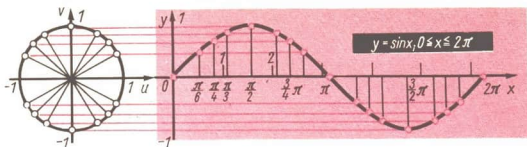
Es sei y_0 eine beliebige Zahl aus diesem Intervall. Die Gerade $v = y_0$ schneidet den Kreis bzw. berührt ihn im Falle $y_0 = 1$; vgl. Bild A 8. Durch diesen Schnittpunkt ist der Schenkel des Winkels $\sphericalangle(u; k)$ eindeutig festgelegt. Zu diesem Winkel gibt es genau eine reelle Zahl x_0 mit $0 \leq x_0 \leq \frac{\pi}{2}$ als Bogenmaß dieses Winkels. Diese Zahl x_0 hat die Eigenschaft, daß $\sin x_0 = y_0$ gilt.

Ausgehend von diesen Überlegungen, kann man den Graph der Funktion $y = \sin x$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ punktweise so konstruieren, wie es Bild A 9 zeigt.

Für einander äquivalente Winkel erhält man gleiche Funktionswerte, da solchen Winkeln der gleiche Schnittpunkt P mit dem Einheitskreis entspricht. In den Intervallen

$$k \cdot 2\pi \leq x \leq (k + 1) \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

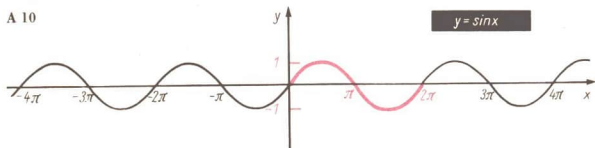




A 9

erhalten wir demnach den gleichen Kurvenverlauf wie im Grundintervall $0 \leq x \leq 2\pi$; vgl. Bild A 10. Das kann durch eine Gleichung folgendermaßen ausgedrückt werden.

A 10



3

SATZ: Für jedes $x \in P$ gilt: $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ ($k \in G$).

Man nennt eine Funktion $y = f(x)$ **periodisch**, wenn es eine Zahl $a \neq 0$ ($a \in P$) gibt, so daß für jedes $x \in P$ gilt:

$$f(x + a) = f(x).$$

Jede derartige Zahl a wird **Periode** der Funktion genannt.

Demnach ist die Sinusfunktion eine **periodische Funktion** mit den Perioden $k \cdot 2\pi$ ($k \in G$). Die kleinste positive Zahl aus dieser Zahlenmenge ist 2π . Sie wird im folgenden als **kleinste Periode** bezeichnet.

14) *Welches Monotonieverhalten weist die Sinusfunktion in folgenden Intervallen auf?*

a) $-\frac{5}{2}\pi \leq x \leq -\frac{3}{2}\pi$ b) $8\pi \leq x \leq 9\pi$

15) *Entscheiden Sie auf Grund Ihrer Kenntnisse über den Wertebereich der Funktion $y = \sin x$ ($x \in P$), welche der folgenden Gleichungen eine Lösung hat und welche nicht!*

a) $\sin x = -3$ b) $\sin x + 1 = 0$ c) $4 \sin x = 8$ d) $|\sin x| = \frac{1}{2}$

16) *Ermitteln Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen ($x \in P$)!*

a) $\sin x = 1$ b) $\sin x = -1$ c) $\sin x = 0$

Aufgaben a 43 bis 47

5 Die Funktion $y = a \cdot \sin bx$ ($a, b \in P; a, b > 0$)

Im Physikunterricht werden wir erfahren, daß mechanische Schwingungen und Wechselströme mit Hilfe von Funktionen der Form $y = a \cdot \sin bx$ beschrieben werden können. Dort werden wir die Variablen a , b , x und y physikalisch deuten.

Hier soll im folgenden untersucht werden, welchen **Einfluß** die **Faktoren a und b** auf solche Eigenschaften der Funktion wie **Nullstellen**, **Wertebereich**, **Monotonieverhalten** und **kleinste Periode** haben und wie der **Graph der Funktion $y = a \cdot \sin bx$** aus dem Graph der Sinusfunktion hervorgeht. Wir beschränken uns dabei auf positive reelle Zahlen a und b .

Wir betrachten zunächst folgende **Sonderfälle**.

Fall 1: $b = 1$ $y = a \cdot \sin x$

Fall 2: $a = 1$ $y = \sin bx$

Wir übertragen dann die hierbei gewonnenen Erkenntnisse auf den **allgemeinen**

Fall: $y = a \cdot \sin bx$.

Fall 1: $y = a \cdot \sin x$ ($a \in P; a > 0$)

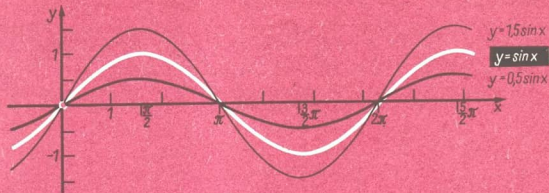
In Klasse 9 wurde dargestellt, in welcher Weise der Graph der Funktion $y = a \cdot f(x)$ aus dem Graph einer Funktion $y = f(x)$ hervorgeht.

	Der Graph von $y = a \cdot f(x)$ geht aus dem Graph von $y = f(x)$ durch folgende geometrische Abbildung der Ebene auf sich hervor.
$a > 1$	Streckung in Richtung der Ordinatenachse von der Abszissenachse weg mit dem Streckungsfaktor $k = a$
$a = 1$	Identische Abbildung (die Graphen sind identisch)
$0 < a < 1$	Stauchung in Richtung der Ordinatenachse zur Abszissenachse hin mit dem Streckungsfaktor $k = a$

Als **Streckungsfaktor k** wird der Quotient aus der Länge l' der Bildstrecke und der Länge l der Originalstrecke bezeichnet: $k = \frac{l'}{l}$; $l' = k \cdot l$.

- 17 Wenden Sie diese Zusammenhänge auf die graphische Darstellung der Funktion $y = a \cdot \sin x$ an. Benutzen Sie hierzu Bild A 11!
- 18 Skizzieren Sie die Graphen folgender Paare von Funktionen im Intervall $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ($x \in P$) jeweils in ein und dasselbe Koordinatensystem! Verwenden Sie dazu den Graph von $y = \sin x$ und die geometrische Bedeutung des Faktors a bei der Funktion $y = a \cdot f(x)$!
- a) $y = \sin x$ b) $y = \sin x$
 $y = 3 \sin x$ $y = \frac{1}{3} \sin x$
- 19 Geben Sie den Wertebereich, die Nullstellen, die Monotonieintervalle und die kleinste Periode der Funktionen $y = 3 \sin x$ und $y = \frac{1}{3} \sin x$ an!
 Erläutern Sie, in welcher Weise der Faktor a in der Funktion $y = a \cdot \sin x$ diese Eigenschaften der Funktion beeinflusst!

$$y = a \cdot \sin x \quad (a \in \mathbb{P}; a > 0)$$



Definitionsbereich: x beliebig reell, Wertebereich: $-a \leq y \leq a$ Periode: 2π

A 11

Fall 2: $y = \sin bx$ ($b \in \mathbb{P}; b > 0$)

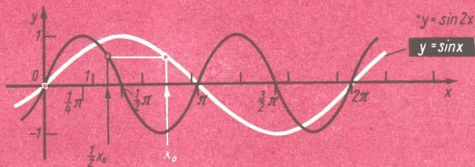
6 Die Funktion $y = \sin 2x$ soll im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ ($x \in \mathbb{P}$) graphisch dargestellt werden; vgl. Bild A 12.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Betrachtet man ein beliebiges Element x_0 des gegebenen Intervalls, so erkennt man, daß der Funktionswert, den die Funktion $y = \sin x$ bei x_0 annimmt, von $y = \sin 2x$ bei $\frac{x_0}{2}$ angenommen wird: $\sin 2\left(\frac{x_0}{2}\right) = \sin x_0$. Die kleinste Periode der Funktion $y = \sin 2x$ ist folglich π .

A 12

$$y = \sin bx \quad (b \in \mathbb{P}; b > 0)$$



Definitionsbereich: x beliebig reell, Wertebereich: $-1 \leq y \leq 1$
Periode: $\frac{2\pi}{b}$

15

Die kleinste Periode der Funktion $y = \sin bx$ ($b > 0$) ist $\frac{2\pi}{b}$. Es ist nämlich $\sin b \cdot \left(\frac{2\pi}{b}\right) = \sin 2\pi$, und bei $x = 2\pi$ ist das Grundintervall der Sinusfunktion zu Ende, folglich das Grundintervall von $y = \sin bx$ bei $\frac{2\pi}{b}$.

	Der Graph von $y = \sin bx$ geht in folgender Weise aus dem Graph von $y = \sin x$ hervor.
$b > 1$	Die Abstände zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse verringern sich von π LE auf $\frac{\pi}{b}$ LE.
$b = 1$	Identische Abbildung (die Graphen sind identisch)
$0 < b < 1$	Die Abstände zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse vergrößern sich von π LE auf $\frac{\pi}{b}$ LE.

20 Ermitteln Sie die kleinste Periode der folgenden Funktionen!

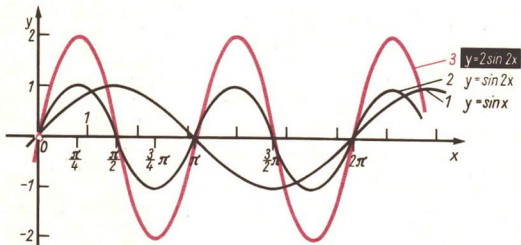
- a) $y = \sin 3x$ b) $y = \sin \pi x$ c) $y = \sin \frac{1}{10} x$ d) $y = \sin \sqrt{2} x$

21 Untersuchen Sie an Hand der gezeichneten Graphen, welche Bedeutung der Faktor b in $y = \sin bx$ für den Wertebereich, die Lage der Nullstellen und das Monotonieverhalten hat!

Allgemeiner Fall: $y = a \cdot \sin bx$ ($a, b \in \mathbb{P}; a, b > 0$)

7 Die Funktion $y = 2 \cdot \sin 2x$ soll im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ ($x \in \mathbb{P}$) graphisch dargestellt werden.

Wir gehen von der Sinuskurve aus und führen nacheinander die geometrischen Abbildungen durch, die den einzelnen Konstanten entsprechen; vgl. Bild A 13.



A 13

- a) Wir verringern die Abstände zwischen den Schnittpunkten der Sinuskurve mit der Abszissenachse auf die Hälfte, also auf $\frac{\pi}{2}$ LE, so daß sich als kleinste Periode π ergibt. Wir erhalten so den Graph der Funktion $y = \sin 2x$.
- b) Wir strecken den Graph der Funktion $y = \sin 2x$ in Richtung der Ordinatenachse von der Abszissenachse weg mit dem Streckungsfaktor $k = 2$, so daß

sich als Wertebereich $-2 \leq y \leq 2$ ergibt. Wir erhalten so den Graph der Funktion $y = 2 \cdot \sin 2x$.

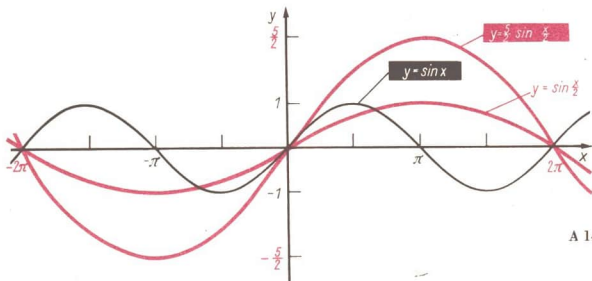
Die geometrischen Abbildungen können auch in anderer Reihenfolge ausgeführt werden.

A

8

Die Funktion $y = \frac{5}{2} \sin \frac{x}{2}$ ($-2\pi \leq x \leq 2\pi$; $x \in P$) ist graphisch darzustellen. Es sind mit Hilfe der Zeichnung Nullstellen, Wertebereich, kleinste Periode und Monotonieintervalle zu ermitteln.

Wir vergrößern die Abstände zwischen den Schnittpunkten der Sinuskurve mit der Abszissenachse auf das Doppelte und erhalten den Graph der Funktion $y = \sin \frac{x}{2}$; vgl. Bild A 14. Durch Streckung dieser Kurve von der Abszissenachse weg mit dem Streckungsfaktor $k = \frac{5}{2}$ erhalten wir den Graph der Funktion $y = \frac{5}{2} \sin \frac{x}{2}$.



A 14

Aus der Zeichnung entnehmen wir folgende Angaben.

Nullstellen: $\{-2\pi; 0; 2\pi\}$ Wertebereich: $-\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$ ($y \in P$)

Kleinste Periode: 4π

Monotonieintervalle: $\langle -2\pi; -\pi \rangle$ und $\langle \pi; 2\pi \rangle$ monoton fallend
 $\langle -\pi; \pi \rangle$ monoton steigend

Die geforderten Angaben lassen sich auch unabhängig von der Zeichnung gewinnen.

Das Vorgehen zum Ermitteln von Nullstellen soll hier dargestellt werden.

9

Das Ermitteln der Nullstellen der Funktion $y = \frac{5}{2} \sin \frac{x}{2}$ entspricht dem Lösen der Gleichung $0 = \frac{5}{2} \sin \frac{x}{2}$.

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\sin \frac{x}{2} = 0$ gilt. Es ist $\sin \frac{x}{2} = 0$ genau dann, wenn $\frac{x}{2} = k\pi$ ($k \in G$), also genau dann, wenn $x = 2k\pi$ ($k \in G$) gilt.

Die Menge der Nullstellen besteht folglich aus allen Zahlen der Form $2k\pi$ ($k \in G$), die dem Intervall $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ angehören. Das sind die Zahlen $-2\pi, 0, 2\pi$.

Der Einfluß der Faktoren a , b auf die Eigenschaften der Funktion $y = a \cdot \sin bx$ ist in der folgenden Übersicht zusammengefaßt.

A

	Nullstellen	Wertebereich	Kleinste Periode	Vorzeichen der Funktionswerte im Grundintervall	
				positiv	negativ
$y = \sin x$	$k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$-1 \leq y \leq 1$	2π	$(0; \pi)$	$(\pi; 2\pi)$
$y = a \cdot \sin x$ ($a \in \mathbb{P}; a > 0$)	$k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$-a \leq y \leq a$	2π	$(0; \pi)$	$(\pi; 2\pi)$
$y = \sin bx$ ($b \in \mathbb{P}; b > 0$)	$k \cdot \frac{\pi}{b}$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$-1 \leq y \leq 1$	$\frac{2\pi}{b}$	$(0; \frac{\pi}{b})$	$(\frac{\pi}{b}; \frac{2\pi}{b})$
$y = a \cdot \sin bx$ ($a, b \in \mathbb{P}; a, b > 0$)	$k \cdot \frac{\pi}{b}$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$-a \leq y \leq a$	$\frac{2\pi}{b}$	$(0; \frac{\pi}{b})$	$(\frac{\pi}{b}; \frac{2\pi}{b})$

Aufgaben a 48 bis 56

Die Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$

6 Die Kosinusfunktion

Bei der Einführung der Sinusfunktion gingen wir davon aus, die Beziehung zwischen dem Gewicht eines Körpers, der Hangabtriebskraft und dem Neigungswinkel bei einer geneigten Ebene mathematisch zu erfassen. Dazu sind wir jetzt in der Lage; vgl. Bild A 15.

Wenn $l = l'$ LE, $h = h'$ LE, so

$$\frac{h}{l} = \frac{h'}{l'} = \frac{v}{r} = \sin x,$$

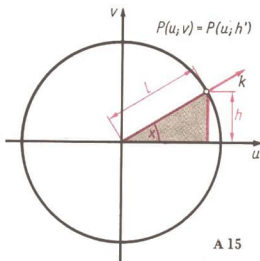
folglich $F_H = G \cdot \sin x$.

22 Weisen Sie nach, daß für die Kraft F_N (Normalkraft), mit der der Körper senkrecht auf die geneigte Ebene drückt, gilt:

$$\frac{F_N}{G} = \frac{b}{l}!$$

Analog zu den Betrachtungen über die Abhängigkeit der Hangabtriebskraft vom Gewicht des Körpers und vom Neigungswinkel der Ebene läßt sich nachweisen,

daß $\frac{b}{l}$ bei gegebenem Neigungswinkel für beliebige Paare b und l konstant ist



und hierdurch folglich jedem Winkelmaß x eine reelle Zahl zugeordnet werden kann. $\frac{b}{l}$ ist demnach eine Funktion von x .

$$\frac{b}{l} = h(x), \quad \text{folglich} \quad F_N = G \cdot h(x)$$

$h(x)$ ist ebenfalls eine nichtrationale Funktion, die zur Sinusfunktion in enger Beziehung steht. Diese Funktion wird im folgenden definiert.

Die Erklärungen, die der Definition des Sinus eines Winkels zugrunde gelegt wurden (vgl. Bild A 7), werden übernommen.

Der Quotient $\frac{u}{r}$ aus der Abszisse u des Punktes $P(u, v)$ und der Maßzahl r des Radius heißt **Kosinus des Winkels x** .

$$\cos x = \underset{\text{Def}}{\frac{u}{r}} \quad (x \in P; r > 0; r, u \in P; -r \leq u \leq r)$$

10 Entsprechend dieser Festlegung ist $\cos \frac{\pi}{4}$ zu ermitteln.

Analog zum Vorgehen im Beispiel A 4 erhalten wir die Abszisse des Punktes $P(u; v)$ mit $u \approx 3,6$. Folglich ist $\cos \frac{\pi}{2} \approx \frac{3,6}{5} = 0,72$.

4 **DEFINITION:** Die *Kosinusfunktion* ist die Menge der geordneten Paare $[x; \cos x]$ mit $x \in P$. Sie wird mit $y = \cos x$ bezeichnet.

Auf Grund der eindeutigen Zuordnung von Winkel und Bogenmaß eines Winkels ist durch die Definition A 4 auch jedem Winkel mit dem Bogenmaß x die reelle Zahl $\cos x$ eindeutig zugeordnet. Deshalb nennt man diese Zahl auch **Kosinus des Winkels x** .

23 Untersuchen Sie, welche der folgenden Zahlenpaare Elemente der Kosinusfunktion sind und welche nicht!

- a) $[\frac{\pi}{2}; 1]$ b) $[0; 4]$ c) $[0; 1]$
 d) $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ e) $[4\pi; 0]$ f) $[-5; -1]$

24 Begründen Sie in gleicher Weise wie bei der Sinusfunktion die Angaben in den folgenden Tabellen!

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

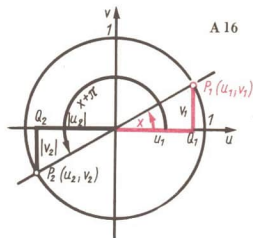
k	$4n$	$4n + 1$	$4n + 2$	$4n + 3$
$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot 2\pi$	$n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$	$n \cdot 2\pi + \pi$	$n \cdot 2\pi + \frac{3}{2}\pi$
$\cos x$	1	0	-1	0

7 Eigenschaften der Kosinusfunktion

Für den Einheitskreis gilt

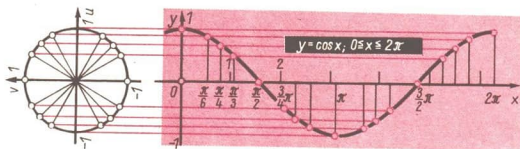
$$\cos x = \frac{u}{r} = \frac{u}{1} = u,$$

so daß man den Kosinuswert direkt als Abszisse des Punktes $P(u; v)$ der Zeichnung entnehmen kann; vgl. Bild A 16.



A 16

- 25 Welche Eigenschaften hat die Kosinusfunktion im Grundintervall $0 \leq x \leq 2\pi$ ($x \in P$)? Orientieren Sie sich an der Tabelle auf Seite 19 und am Bild A 17!



A 17

- 26 Begründen Sie, weshalb die Kosinusfunktion ebenfalls die kleinste Periode 2π besitzt; $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ($x \in P$)!
- 27 Entscheiden Sie auf Grund Ihrer Kenntnisse über den Wertebereich der Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$, welche der folgenden Gleichungen eine Lösung hat und welche nicht!
- a) $\cos x = -2$ b) $3 \cos x = -3$ c) $4 \sin x + 3 \cos x = 8$
d) $\sin x \cdot \cos x = 0$ e) $\sin x \cdot \cos x = 1$ f) $-5 \cos x + 4 = 0$
- 28 Ermitteln Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen!
- a) $\cos x = 0$ b) $\cos x = 1$ c) $\cos x = -1$
- 29 Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem Gewicht G eines Körpers, der Normalkraft F_N und dem Bogenmaß x des Neigungswinkels einer geneigten Ebene unter Verwendung der Kosinusfunktion dar!

Aufgaben a 57 bis 60

8 Tangensfunktion und Kotangensfunktion

In dieser Lerneinheit werden wir zwei weitere nichtrationale Funktionen kennenlernen.

Wir wiederholen zunächst in Übungen einige wichtige Eigenschaften des Quotienten, der bei den Definitionen dieser beiden Funktionen eine Rolle spielt.

30 Für welche Werte der Variablen x ($x \in P$) sind die folgenden Terme nicht definiert?

a) $\frac{5}{x-3}$

b) $\frac{x}{(x+2) \cdot (x-5)}$

c) $\frac{x}{\cos x}$

d) $\frac{10}{x}$

e) $\frac{5}{\sin x}$

f) $\frac{\cos x}{\sin x}$

g) $\frac{x+3}{\log_4 x}$

h) $\frac{\sin x}{\cos x}$

i) $\frac{6}{5^x}$

31 Berechnen Sie zu jedem a und jedem b der folgenden Tabelle den Quotienten $\frac{a}{b}$! Tragen Sie die Ergebnisse in die Tabelle ein!

$\downarrow b \quad \rightarrow a$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	0	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1
-1							
$-\frac{1}{10}$							
$-\frac{1}{100}$							
0							
$\frac{1}{100}$							
$\frac{1}{10}$							
1							

32 Begründen Sie folgende Aussagen über den Quotienten $\frac{a}{b}$ ($a, b \in P$)!

- $\frac{a}{b} = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ und $b \neq 0$.
- Wenn $b = 0$, so ist $\frac{a}{b}$ nicht definiert.
- $\frac{a}{b} < 0$ genau dann, wenn a und b unterschiedliche Vorzeichen besitzen.
 $\frac{a}{b} > 0$ genau dann, wenn a und b gleiche Vorzeichen besitzen.
- $\left| \frac{a}{b} \right|$ wächst, wenn
 - $|a|$ konstant ist und $|b|$ sich verkleinert;
 - $|b|$ konstant ist und $|a|$ sich vergrößert;
 - $|a|$ sich vergrößert und $|b|$ sich verkleinert.
- $\left| \frac{a}{b} \right|$ wird beliebig groß, wenn
 - $|a|$ sich vergrößert und $|b|$ der Zahl 0 zustrebt;
 - $|a|$ konstant bleibt und $|b|$ der Zahl 0 zustrebt.

33

Berechnen Sie näherungsweise die Quotienten

$$\frac{\sin x}{\cos x} \text{ und } \frac{\cos x}{\sin x} \quad \left(x \in \left| \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right| \right)$$

mit Hilfe der Definitionen des Sinus bzw. Kosinus eines Winkels am Kreis mit beliebigem Radius!

Für die beiden weiteren wichtigen Funktionen wird folgendes festgesetzt.

$$\tan x = \underset{\text{Def}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \quad \left[x \in P; x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k \in G \right]$$

$$\cot x = \underset{\text{Def}}{\frac{\cos x}{\sin x}} \quad (x \in P; x \neq k\pi; k \in G)$$

5

DEFINITION: Die **Tangensfunktion** ist die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen $[x; \tan x]$ mit $x \in P; x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k \in G$. Sie wird mit $y = \tan x$ bezeichnet.

6

DEFINITION: Die **Kotangensfunktion** ist die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen $[x; \cot x]$ mit $x \in P; x \neq k\pi; k \in G$. Sie wird mit $y = \cot x$ bezeichnet.

34

Erläutern Sie, weshalb die vorgenommenen Einschränkungen des Definitionsbereiches von $y = \tan x$ und $y = \cot x$ notwendig sind!

Auf Grund der eindeutigen Zuordnung von Winkel und Bogenmaß eines Winkels ist durch die Definitionen A 5 und A 6 auch jedem Winkel mit dem Bogenmaß x ($x \in P$ mit Ausnahme der Einschränkungen) die reelle Zahl $\tan x$ bzw. $\cot x$ eindeutig zugeordnet. Deshalb nennt man diese Zahlen auch **Tangens des Winkels x** bzw. **Kotangens des Winkels x** .

Wir haben nunmehr, wie in Lerneinheit A 1 angekündigt, vier weitere Funktionen, die Sinusfunktion, die Kosinusfunktion, die Tangensfunktion und die Kotangensfunktion definiert; vgl. die Definitionen A 2, A 4, A 5 und A 6. Es ist üblich, diese vier Funktionen unter dem Namen **Winkelfunktionen** zusammenzufassen.

9 Eigenschaften der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion

35

Welche reellen Zahlen x erfüllen die folgenden Gleichungen?

a) $\tan x = 0$ b) $\cot x = 0$

36

Begründen Sie die in der folgenden Tabelle enthaltenen Aussagen über das Vorzeichen der Funktionswerte von $y = \tan x$ und $y = \cot x$!

	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
$\tan x$	+	-	+	-
$\cot x$	+	-	+	-

Beispiel:

Im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ haben $\sin x$ und $\cos x$ gleiches Vorzeichen. Das läßt sich an den Graphen von $y = \sin x$ und $y = \cos x$ (vgl. die Bilder A 9 und A 17) oder am Einheitskreis erkennen.

Folglich sind die Quotienten $\frac{\sin x}{\cos x}$ und $\frac{\cos x}{\sin x}$ positiv.

7

SATZ: Die Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$ besitzen die kleinste Periode π .

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad [x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{G}]$$

$$\cot(x + \pi) = \cot x \quad (x \neq k\pi; k \in \mathbf{G})$$

Beweis: Entsprechend Bild A 18 gilt

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{v_2}{u_2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{v_1}{u_1}$$

Die Punkte $P_1(u_1; v_1)$ und $P_2(u_2; v_2)$ liegen für jeden Winkel x zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Folglich gilt:

1. Die Ordinaten bzw. Abszissen von P_1 und P_2 haben gleiche absolute Beträge. Folglich sind die absoluten Beträge der Quotienten

$$\frac{v_2}{u_2} \quad \text{und} \quad \frac{v_1}{u_1} \quad \text{gleich.}$$

2. Die Vorzeichen von Ordinaten und Abszissen der Punkte P_1 und P_2 sind entweder für beide Punkte gleich oder für beide Punkte unterschiedlich. In jedem Fall ist das Vorzeichen des Quotienten für beide Punkte gleich.

Aus 1. und 2. folgt

$$\frac{v_2}{u_2} = \frac{v_1}{u_1}$$

und folglich

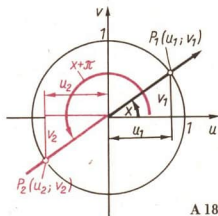
$$\tan x = \tan(x + \pi).$$

Eine kleinere Zahl a ($a > 0$; $a \in P$), für die $\tan(x + a) = \tan x$ für alle $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ gilt, gibt es nicht.

Folglich ist π die kleinste Periode der Tangensfunktion.

Bei Annäherung der Werte des Definitionsbereiches an die Zahlen $k \cdot \frac{\pi}{2}$ werden die Funktionswerte entweder von $y = \tan x$ oder von $y = \cot x$ dem Betrage nach beliebig groß.

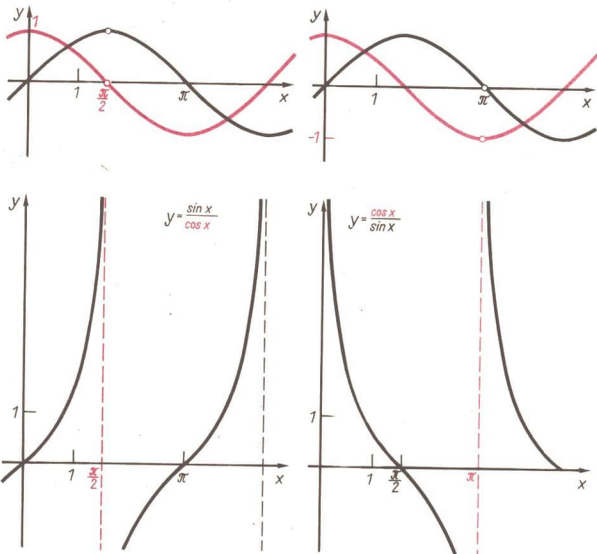
Wir untersuchen das Verhalten der Funktion $y = \tan x$ bei Annäherung an die Stelle $x = \frac{\pi}{2}$; vgl. Bild A 19.



A 18

Fall 1: Wir nähern uns **von links** der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$).
 Strebt x gegen $\frac{\pi}{2}$, so streben $\sin x$ gegen 1 und $\cos x$ gegen 0.
 Der Quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ nimmt beliebig große positive Werte an.

Fall 2: Wir nähern uns **von rechts** der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$).
 Der Unterschied zu Fall 1 besteht lediglich darin, daß in diesem Intervall $\sin x$ und $\cos x$ unterschiedliche Vorzeichen besitzen, der Quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ folglich negativ ist und bei Annäherung an die Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ negative Werte von beliebig großem absolutem Betrag annimmt.



A 19

37 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $y = \cot x$ bei Annäherung von links und von rechts an die Stelle $x = \pi$; vgl. Bild A 19!

Es läßt sich zeigen, daß jede reelle Zahl y_0 durch die Tangensfunktion im Intervall $0 \leq x < \pi$ ($x \neq \frac{\pi}{2}$) und durch die Kotangensfunktion im Intervall $0 < x < \pi$ genau einmal angenommen wird. Mit anderen Worten: Zu jeder reellen Zahl y_0

gibt es genau eine Zahl x_1 ($0 \leq x_1 < \pi$), so daß $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} = y_0$ gilt, und genau eine Zahl x_2 ($0 < x_2 < \pi$), so daß $\frac{\cos x_2}{\sin x_2} = y_0$ gilt.

Hieraus folgt, daß der Wertebereich der Tangens- und der Kotangensfunktion gleich der Menge der reellen Zahlen ist.

Aufgaben a 61 bis 64

10 Spezielle Funktionswerte

Im folgenden sollen die Funktionswerte der Winkelfunktionen für die Elemente $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ des Definitionsbereiches ermittelt werden. Die folgenden Übungen dienen dem Zweck, das Wissen und Können zu wiederholen, das beim Berechnen der Funktionswerte anzuwenden ist.

38 Begründen Sie folgende Identitäten!

a) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ b) $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$ c) $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$

39 Formen Sie folgende Terme in andere Terme um, die die gleiche Zahl bezeichnen!

a) $\frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}$

40 a) Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE \triangleq 2 cm) folgende Punkte ein!

$$A(1; 2), \quad B(0; 2), \quad C\left(2; -\frac{3}{2}\right), \quad D(-1; -1)$$

b) Wie groß sind die Abstände der Punkte A, B, C, D von den Koordinatenachsen (in Längeneinheiten ausgedrückt)?

c) Berechnen Sie die Längen der Strecken \overline{AO} , \overline{AB} , \overline{DO} in Längeneinheiten (LE)! Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Zeichnung!

41 Von drei Punkten P_1, P_2, P_3 in einem kartesischen Koordinatensystem mögen die folgenden Angaben bekannt sein.

	P_1	P_2	P_3
Abstand von der x-Achse	2 LE	$\frac{5}{3}$ LE	$\frac{4}{5}$ LE
Abstand von der y-Achse	$\frac{1}{2}$ LE	1 LE	3 LE

Geben Sie alle Möglichkeiten für die Lage dieser Punkte in der Form $P(x; y)$ an!

Spezielle Funktionswerte

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

- 11 Die Berechnung von $\sin \frac{\pi}{4}$ erfolgt entsprechend Bild A 20. In dem rechtwinkligen $\triangle ODP$ ist $\overline{OD} = \overline{DP}$.¹ Auf Grund des Satzes des PYTHAGORAS gilt

$$\overline{PD}^2 + \overline{OD}^2 = 1.$$

Wegen $\overline{OD} = \overline{PD}$ folgt

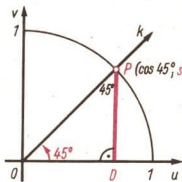
$$2 \overline{PD}^2 = 1;$$

$$\overline{PD}^2 = \frac{1}{2};$$

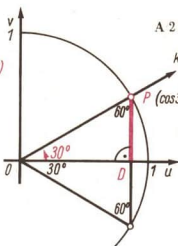
$$\overline{PD} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Die Ordinate des Punktes P ist folglich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Somit gilt

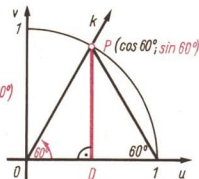
$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$



A 20



A 21



A 22

- 12 Auf Grund der Definition von $\sin x$, bezogen auf den Einheitskreis, ist $\sin \frac{\pi}{6}$ die Ordinate und $\cos \frac{\pi}{6}$ die Abszisse des Punktes P im Bild A 21. Durch Ergänzung zu einem gleichseitigen Dreieck ergeben sich $\overline{PD} = \frac{1}{2}$ und folglich $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

¹ Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen verstehen wir unter \overline{OD} bzw. \overline{PD} die Maßzahlen der Längen der entsprechenden Strecken.

13 Auf Grund des Bildes A 22 ergibt sich für $\sin \frac{\pi}{3}$ folgende Rechnung.

$$\begin{aligned} \overline{PD}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OD}^2 \\ \overline{PD}^2 &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \overline{PD} &= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Ordinate des Punktes P ist $\frac{1}{2} \sqrt{3}$. Also gilt

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

14
$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}.$$

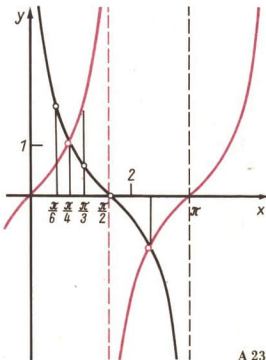
Aufgaben a 65 bis 70

11 Graphen der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$

Aus den Betrachtungen zu den Eigenschaften der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion sind uns die Graphen dieser Funktionen „im groben“ bereits bekannt; vgl. Lerneinheit A 9. Wir wollen nunmehr diese Graphen genauer zeichnen.

42 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$ unter Verwendung der speziellen Funktionswerte im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ in ein und dasselbe kartesische Koordinatensystem; vgl. Bild A 23!

Verwenden Sie für $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{3} \sqrt{3}, \sqrt{3}$ die in den folgenden Tabellen enthaltenen Näherungswerte!



A 23

x	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0,5$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,8$	$\frac{\pi}{3} \approx 1,0$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,6$
$\tan x$	0	$\frac{1}{3} \sqrt{3} \approx 0,6$	1	$\sqrt{3} \approx 1,7$	—

x	$\frac{4}{6} \pi \approx 2,1$	$\frac{3}{4} \pi \approx 2,4$	$\frac{5}{6} \pi \approx 2,6$	$\pi \approx 3,1$
$\tan x$	$-\sqrt{3} \approx -1,7$	-1	$-\frac{1}{3} \sqrt{3} \approx -0,6$	0

Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten

A

12 Beziehungen zwischen Funktionswerten bei gleichem Winkel

6

SATZ: Für alle Zahlen x ($x \in P$) gilt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Beweis: Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt im rechtwinkligen Dreieck $OD'P'$ (Bild A 24)

$$(1) \overline{P'D'}^2 + \overline{OD'}^2 = \overline{OP'}^2$$

Es gilt ferner im Einheitskreis für die Abstände des Punktes P' von den Koordinatenachsen

$$(2) \begin{aligned} \overline{P'D'} &= |\sin x| \text{ LE} \\ \overline{OD'} &= |\cos x| \text{ LE} \\ \overline{OP'} &= 1 \text{ LE} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) gelten unabhängig davon, in welchem Quadranten der Punkt P' liegt.

Da die gleiche Längeneinheit 1 LE vorliegt, können wir mit den Maßzahlen rechnen. Wir setzen die Beziehungen (2) in die Gleichung (1) ein und erhalten

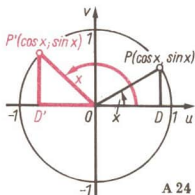
$$|\sin x|^2 + |\cos x|^2 = 1.$$

Wegen $|\sin x|^2 = (\sin x)^2$ und $|\cos x|^2 = (\cos x)^2$ geht diese Gleichung über in $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

Für $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in G$) ergibt sich kein Dreieck. Auch in diesen Fällen ist $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, da auf Grund der Definitionen von $\sin x$ und $\cos x$ jeweils genau eine der beiden Zahlen entweder 1 oder -1 und die andere 0 ist. Es wird folgende Schreibweise vereinbart.

$$\sin^2 x = \underset{\text{Def}}{(\sin x)^2} \quad \cos^2 x = \underset{\text{Def}}{(\cos x)^2}$$

Dann erhält die Gleichung die Form $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.



A 24

15

Es ist zu zeigen, daß $\sin^2 \pi$ und $\sin \pi^2$ voneinander verschiedene Zahlen sind. Nach der festgesetzten Schreibweise ist $\sin^2 \pi = (\sin \pi)^2$.

$$\begin{aligned} \sin^2 \pi &= (\sin \pi)^2 = \sin \pi \cdot \sin \pi \\ &= 0 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\sin \pi^2 = \sin(\pi \cdot \pi) \neq 0.$$

$\sin(\pi \cdot \pi)$ ist ungleich Null, denn $\sin x = 0$ gilt genau dann, wenn $x = k \cdot \pi$. $k \cdot \pi$ ist aber für $k \in G$ keine ganze Zahl.

9

SATZ: Für alle Zahlen x ($x \in P$; $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$; $k \in G$) gilt $\tan x \cdot \cot x = 1$.

$$\text{Beweis: } \tan x \cdot \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \sin x} = 1$$

Auf Grund der beiden Beziehungen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$ und der Definitionsgleichungen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ lassen sich die folgenden Beziehungen zwischen den Winkelfunktionswerten gleicher Winkel herleiten.

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$
$\sin^2 x$	$\sin^2 x$	$1 - \cos^2 x$
$\cos^2 x$	$1 - \sin^2 x$	$\cos^2 x$
$\tan^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$	$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$
$\cot^2 x$	$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$

- 43 Untersuchen Sie bei allen Beziehungen in der Tabelle, welche Einschränkungen für die Zahlen x ($x \in P$) gemacht werden müssen!

16 Wir beweisen die Beziehung

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \quad \left[x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}; k \in G \right].$$

Wir formen um:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = \tan^2 x.$$

Mit Hilfe der durch die Tabelle gegebenen Beziehungen lassen sich bei vorgegebenem Funktionswert der Sinus- bzw. Kosinusfunktion die zum gleichen Element des Definitionsbereiches gehörigen Werte der anderen Winkelfunktionen berechnen, ohne auf das Element des Definitionsbereiches zurückrechnen zu müssen.

- 17 Es sei x_0 ein Element des Intervalls $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Es existiert genau ein Wert x_0 in diesem Intervall, für den $\sin x_0 = \frac{2}{3}$ gilt. Für dieses Element x_0 sind $\cos x_0$, $\tan x_0$, $\cot x_0$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} \cos^2 x_0 &= 1 - \sin^2 x_0 \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \\ \cos x_0 &= \sqrt{\frac{5}{9}} \quad \text{oder} \quad \cos x_0 = -\sqrt{\frac{5}{9}} \end{aligned}$$

Da die Funktionswerte der Kosinusfunktion im Intervall $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ positiv sind, ist der gesuchte Wert $\cos x_0 = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{5}$.

$$\tan x_0 = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3} \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{5}$$

$$\cot x_0 = \frac{1}{\tan x_0} = \frac{1}{\frac{2}{5} \sqrt{5}} = \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

Aufgaben a 71 bis 78

13 Komplementwinkelbeziehungen zwischen einer Winkelfunktion und ihrer Kofunktion

A

44 Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen jeweils verschiedenfarbig in ein und dasselbe Koordinatensystem (1 LE \triangleq 5 cm)!

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \sin x; & y &= \cos x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ \text{b) } y &= \tan x; & y &= \cot x & (0 < x < \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Benutzen Sie dazu die speziellen Funktionswerte, für die Sie mit dem Rechenstab Näherungswerte ermitteln!

Aus den im Auftrag A 44 angefertigten Skizzen und aus der Tabelle spezieller Funktionswerte läßt sich vermuten, daß die Graphen von $y = \sin x$, $y = \cos x$ bzw. $y = \tan x$, $y = \cot x$ im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ achsensymmetrisch bezüglich der Parallelen zur Ordinatenachse durch den Punkt $P(\frac{\pi}{4}; 0)$ sind.

Dieser geometrische Zusammenhang läßt sich arithmetisch ausdrücken. Er ist als Spezialfall in dem folgenden Satz enthalten.

10 **SATZ:** Für alle Zahlen x ($x \in P$) gilt:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Für alle Zahlen x ($x \in P$; $x \neq k \frac{\pi}{2}$) gilt:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x; \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x.$$

Man bezeichnet zwei Winkel, die sich zu einem rechten Winkel ergänzen, als **Komplementwinkel**.

Die Zahlen $\frac{\pi}{2} - x$ und x können als Bogenmaße von Komplementwinkeln aufgefaßt werden, denn die Summe aus $\frac{\pi}{2} - x$ und x ist gleich $\frac{\pi}{2}$. Mit dem Begriff des Komplementwinkels erhält der Satz A 10 die folgende sprachliche Form.

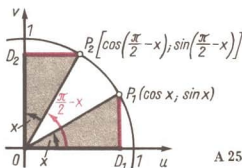
Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Kosinus seines Komplementwinkels, der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Komplementwinkels.

Der Tangens eines Winkels ist gleich dem Kotangens seines Komplementwinkels, der Kotangens eines Winkels ist gleich dem Tangens seines Komplementwinkels.

Man sagt deshalb auch, Sinusfunktion und Kosinusfunktion bzw. Tangensfunktion und Kotangensfunktion sind zueinander **komplementäre Funktionen** oder **Kofunktionen**.

Wir beweisen den Satz für x -Werte im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$; vgl. Bild A 25.

Es gilt $\triangle OD_1P_1 \cong \triangle OD_2P_2$, denn es handelt sich um rechtwinklige Dreiecke mit kongruenten Winkeln bei O . Außerdem ist die Hypotenuse in beiden Fällen gleich dem



A 25

Radius des Kreises. Folglich ist die Abszisse von P_2 gleich der Ordinate von P_1 , und die Ordinate von P_2 ist gleich der Abszisse von P_1 .

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Den Beweis für beliebige reelle Zahlen x führen wir hier nicht.

Nach der Definition von Tangens und Kotangens eines Winkels ergeben sich damit folgende Beziehungen für die Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

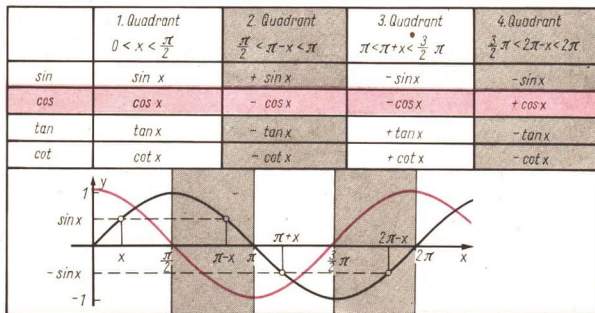
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Aufgaben a 79 bis 87

14 Quadrantenbeziehungen

Wir lernen nunmehr weitere Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten, die sogenannten **Quadrantenbeziehungen**, kennen. Mit ihrer Hilfe kann die Berechnung von Funktionswerten für Zahlen x ($\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$) auf die Berechnung von Funktionswerten im Intervall $(0; \frac{\pi}{2})$ zurückgeführt werden.

Im Bild A 26 sind die Quadrantenbeziehungen zusammengefaßt. Im Beispiel A 18 wird erläutert, wie diese Tabelle zu lesen ist.



A 26

18

Für alle x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

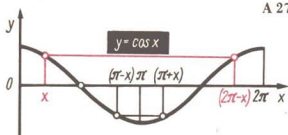
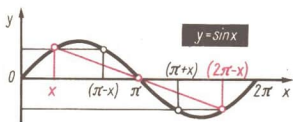
$$\sin(2\pi - x) = -\sin x$$

Die Funktionswerte der Sinusfunktion an den Stellen $\pi - x$, $\pi + x$, $2\pi - x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) unterscheiden sich also vom Funktionswert an der Stelle x höchstens durch das Vorzeichen.

- 45) a) Formulieren Sie unter Verwendung von Bild A 26 die Quadrantenbeziehungen für die Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$!
 b) Suchen Sie die Tabelle für die Quadrantenbeziehungen im Tafelwerk auf!

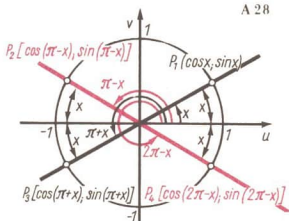
Den **Quadrantenbeziehungen** entsprechen **Symmetrieeigenschaften** der Graphen der Winkelfunktionen.

Die Kurvenstücke von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ (1. Quadrant) lassen sich durch Spiegelungen oder Drehungen in die Kurvenstücke von $\frac{\pi}{2}$ bis π (2. Quadrant) oder von π bis $\frac{3}{2}\pi$ (3. Quadrant) oder von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π (4. Quadrant) überführen. Das bedeutet beispielsweise, daß der Graph der Sinusfunktion im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ punktsymmetrisch bezüglich des Punktes $P(\pi; 0)$ und in den Intervallen $0 \leq x \leq \pi$ bzw. $\pi \leq x \leq 2\pi$ achsensymmetrisch bezüglich der Parallelen zur Ordinatenachse durch die Punkte $P_1(\frac{\pi}{2}; 0)$ bzw. $P_2(\frac{3}{2}\pi; 0)$ ist; vgl. Bild A 27.



A 27

Wir beweisen die Quadrantenbeziehungen für die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion, indem wir den Einheitskreis zu Hilfe nehmen. Wegen der Symmetrie gelten für die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 folgende Beziehungen; vgl. Bild A 28. Durch Vergleichen der Koordinaten von P_2 und P_1 ergibt sich



A 28

$$\sin(\pi - x) = \sin x; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

- 46) Beweisen Sie mit Hilfe des Bildes A 28 eine weitere Quadrantenbeziehung für $y = \sin x$ oder $y = \cos x$!

Bei Beweisen der Quadrantenbeziehungen für die Tangensfunktion und die Kotangensfunktion geht man auf die Definitionen von $y = \tan x$ und $y = \cot x$ zurück.

$$\begin{aligned} \tan(\pi - x) &= \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x \\ \cot(\pi - x) &= \frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = \frac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x \end{aligned}$$

Beweisen Sie eine weitere Quadrantenbeziehung für $y = \tan x$ und $y = \cot x$!

In der folgenden Übersicht ist dargestellt, welche Schritte zur Berechnung von Funktionswerten mit Hilfe der Quadrantenbeziehungen auszuführen sind.

$f(x)$ ist zu berechnen $\left(\frac{\pi}{2} < x < 2\pi\right)$. $y = f(x)$ ist eine Winkelfunktion.	$\sin 210^\circ$ ist zu berechnen.	$\tan \frac{5}{6}\pi$ ist zu berechnen.
1. Ermitteln des Quadranten, in dem x liegt	$180^\circ < 210^\circ < 360^\circ$ 3. Quadrant	$\frac{\pi}{2} < \frac{5}{6}\pi < \pi$ 2. Quadrant
2. Ermitteln des Vorzeichens von $f(x)$	Vorzeichen von $\sin 210^\circ$ negativ	Vorzeichen von $\tan \frac{5}{6}\pi$ negativ
3. Zerlegen des gegebenen Winkels $x = \pi - \bar{x}$ (2. Quadrant) $x = \pi + \bar{x}$ (3. Quadrant) $x = 2\pi - \bar{x}$ (4. Quadrant) mit $0 < \bar{x} < \frac{\pi}{2}$	$210^\circ = 180^\circ + \bar{x}$ $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$	$\frac{5}{6}\pi = \pi - \bar{x}$ $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{\pi}{6}$
4. Ermitteln des Funktionswertes $f(\bar{x})$	$\sin \bar{x} = \sin 30^\circ$ $= \frac{1}{2}$	$\tan \bar{x} = \tan \frac{\pi}{6}$ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$
5. Ergebnis $f(x) = a \cdot f(\bar{x})$ mit $a \in \{+1, -1\}$	$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ$ $= -\frac{1}{2}$	$\tan \frac{5}{6}\pi = -\tan \frac{\pi}{6}$ $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Erläutern Sie, wie man mit Hilfe der Graphen von $y = \sin x$ und $y = \cos x$ sowie der Gleichungen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ die Vorzeichen von $y = \tan x$ und $y = \cot x$ in den einzelnen Quadranten ermitteln kann; vgl. Bild A 26!

Aufgaben a 88 bis 101

15 Die Tabellen der Winkelfunktionswerte

Die Funktionswerte der Winkelfunktionen lassen sich mit Mitteln der Mathematik, über die wir noch nicht verfügen, durch endliche Dezimalbrüche beliebig genau annähern.

Die Funktionswerte zu den meisten in der Tafel gegebenen Gradmaßen sind irrationale Zahlen. Ausnahmen sind:

$$\begin{aligned} \sin 0^\circ; \sin 30^\circ; \sin 90^\circ; \\ \tan 0^\circ; \tan 45^\circ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 0^\circ; \cos 60^\circ; \cos 90^\circ; \\ \cot 45^\circ; \cot 90^\circ. \end{aligned}$$

Obwohl wir $\sin 35^\circ \approx 0,5736$ schreiben müßten, weil 0,5736 nur ein Näherungswert für $\sin 35^\circ$ ist, wollen wir dennoch vereinbaren, daß wir das Gleichheitszeichen setzen. Es handelt sich folglich um eine Gleichheit im Rahmen der Genauigkeit der vorliegenden Tafel.

Auf Grund der Komplementwinkelbeziehungen kann man für die Sinus- und die Kosinusfunktion bzw. für die Tangens- und die Kotangensfunktion jeweils ein und dieselbe Tafel benutzen. Z. B. gilt $\sin 42,6^\circ = \cos 47,4^\circ$; denn es ist $42,6^\circ + 47,4^\circ = 90^\circ$.

49 Untersuchen Sie, ob die in der Tafel für $\tan 60^\circ$ bzw. für $\sin 60^\circ$ angegebenen Zahlen größer oder kleiner als $\sqrt{3}$ bzw. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sind!

Hinweis: Benutzen Sie dabei die Definition von $\sqrt{3}$!

Sind die Winkel im Bogenmaß gegeben, so wird zunächst in Gradmaß umgerechnet.

Aus der Tafel können nur solche Funktionswerte direkt abgelesen werden, die zu Winkelmaßen im Intervall von 0° bis 90° gehören. Das Ermitteln von Funktionswerten zu Winkeln im Intervall von 90° bis 360° wird mit Hilfe der Quadrantenbeziehungen auf das Ermitteln der Funktionswerte im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ zurückgeführt.

Sollen die Funktionswerte für Winkelmaße über 360° ermittelt werden, so nutzt man die Periodizität der Winkelfunktionen aus und wendet anschließend die Quadrantenbeziehungen an.

$$\begin{aligned} \alpha &= 817^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 97^\circ \\ \sin 817^\circ &= \sin (2 \cdot 360^\circ + 97^\circ) = \sin 97^\circ \end{aligned}$$

Im Falle negativer Winkelmaße ermittelt man ebenfalls mit Hilfe der Periodizität der Winkelfunktionen einen äquivalenten Winkel im Grundintervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} \alpha &= -1990^\circ \\ \sin (-1990^\circ) &= \sin (6 \cdot 360^\circ - 1990^\circ) \\ &= \sin (2160^\circ - 1990^\circ) \\ &= \sin 170^\circ \end{aligned}$$

Im Beispiel A 21 sind mehrere Umformungen vorzunehmen.

21 Es ist ein Näherungswert für $\sin(-10)$ zu ermitteln.

1. Schritt: Umformen des Bogenmaßes in Gradmaß

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\arcsin \alpha} &= \frac{180^\circ}{\pi}; & \arcsin \alpha &= -10 \\ -\frac{\alpha}{10} &= \frac{180^\circ}{\pi} \\ \alpha &\approx -573^\circ \end{aligned}$$

2. Schritt: Zurückführen auf das Ermitteln des Sinus eines Winkels α mit $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ durch Nutzen der Periodizität der Sinusfunktion
 $\sin(-573^\circ) = \sin(-573^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \sin 147^\circ$

3. Schritt: Zurückführen auf das Ermitteln des Sinus eines Winkels im ersten Quadranten $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ durch Anwenden der **Quadrantenbeziehungen**

$$\sin 147^\circ = \sin (180^\circ - 33^\circ) = \sin 33^\circ$$

4. Schritt: Aufsuchen eines Näherungswertes mit Hilfe der Tafel

$$\sin 33^\circ = 0,5446$$

Ergebnis: $\sin (-10) = 0,5446$

50 Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

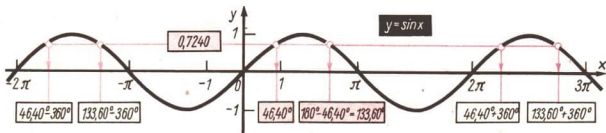
- a) $\sin 35^\circ = y$ b) $\sin 4,3^\circ = y$ c) $\cos 75^\circ = z$
 d) $\cos 3,2^\circ = w$ e) $\tan 43^\circ = x$ f) $\cos 1000^\circ = v$

Das Ermitteln der Winkelfunktionen zu gegebenen Winkelmaßen kann als Lösen von Gleichungen aufgefaßt werden. Zum Beispiel ist das Ermitteln des Sinus von 35° gleichbedeutend mit dem Lösen der Gleichung $\sin 35^\circ = y$ mit $y \in P$.

Aufgaben a 102 bis 107

16 Ermitteln der Elemente des Definitionsbereiches bei gegebenen Funktionswerten

22 Die Gleichung $\sin x = 0,7240$ ist zu lösen; vgl. Bild A 29. Die Zahl 0,7240 ist Element des Wertebereiches der Sinusfunktion. Folglich gibt es Zahlen x_0 , für die $\sin x_0 = 0,7240$ eine wahre Aussage ist. Gesucht ist die Menge dieser Zahlen.



A 29

Wir betrachten zunächst das Grundintervall $0 \leq x < 2\pi$. Lösungen der gegebenen Gleichung müssen dem Intervall $0 < x < \pi$ angehören, da die Sinusfunktion nur in diesem Teilintervall positive Werte annimmt. In diesem Intervall gibt es stets genau zwei x -Werte, für die $\sin x$ einen vorgegebenen Wert y mit $0 < y < 1$ annimmt.

Der Tafel entnehmen wir den Näherungswert $x_1 = 46,4^\circ$. Dann ist der zweite Wert $x_2 = 180^\circ - 46,4^\circ = 133,6^\circ$, da auf Grund der Quadrantenbeziehung

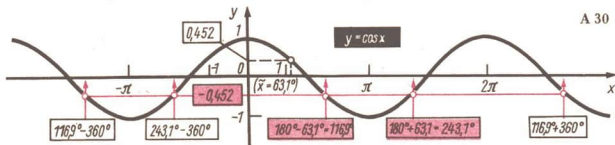
$$\sin x_1 = \sin (180^\circ - x_1) = \sin x_2$$

gilt.

Die Lösungsmenge besteht auf Grund der Periodizität der Sinusfunktion mit der kleinsten Periode 2π aus folgenden Zahlen.

$$\left. \begin{aligned} x &= 46,4^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x &= 133,6^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} k \in G$$

23

Die Gleichung $\cos x = -0,4520$ ist zu lösen; vgl. Bild A 30.

A 30

Die Zahl $-0,452$ ist Element des Wertebereiches der Kosinusfunktion. Folglich gibt es Zahlen x_0 , für die $\cos x_0 = -0,452$ eine wahre Aussage ist.

Im Grundintervall $0 \leq x \leq 2\pi$ nimmt die Kosinusfunktion nur im Teilintervall $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ negative Werte an.

In diesem Intervall gibt es stets genau zwei Elemente x , für die $\cos x$ einen vorgegebenen Wert y mit $-1 < y < 0$ annimmt.

Wir lösen zunächst die *Hilfsgleichung* $\cos \tilde{x} = +0,452$ ($0 < \tilde{x} < \frac{\pi}{2}$). Ein Näherungswert ist $\tilde{x} = 63,1^\circ$.

Auf Grund der Quadrantenbeziehungen sind dann

$$x_1 = 180^\circ - \tilde{x} = 116,9^\circ;$$

$$x_2 = 180^\circ + \tilde{x} = 243,1^\circ$$

die gesuchten Lösungen von $\cos x = -0,452$; denn es gilt

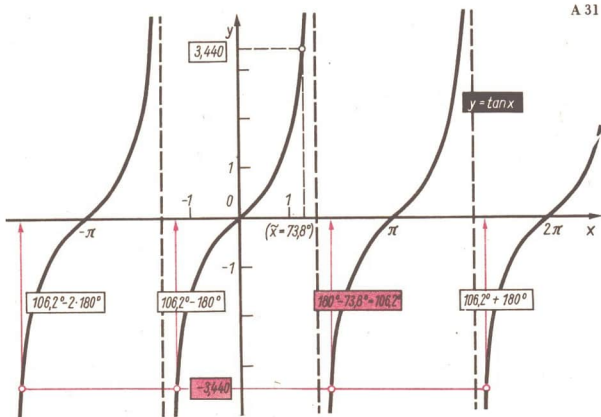
$$\cos x_1 = \cos(180^\circ - \tilde{x}) = -\cos \tilde{x} = -0,452;$$

$$\cos x_2 = \cos(180^\circ + \tilde{x}) = -\cos \tilde{x} = -0,452.$$

Die Lösungsmenge besteht aus den Zahlen

$$\begin{aligned} x &= 116,9^\circ + k \cdot 360^\circ; \\ x &= 243,1^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \quad k \in G.$$

24

Die Gleichung $\tan x = -3,440$ ist zu lösen; vgl. Bild A 31.

A 31

Da die Tangensfunktion jede reelle Zahl annimmt, gibt es Lösungen dieser Gleichung. Wir ermitteln zunächst alle Lösungen im Grundintervall der Tangensfunktion $0 \leq x \leq \pi$ mit $x + \frac{\pi}{2}$. In diesem Intervall wird jede reelle Zahl genau einmal von der Tangensfunktion angenommen. Da die Tangensfunktion nur im Teilintervall $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ negative Werte annimmt, muß die gesuchte Lösung in diesem Intervall liegen.

Wir lösen zunächst die Hilfsgleichung $\tan \tilde{x} = +3,440$ ($0 < \tilde{x} < \frac{\pi}{2}$). Ein Näherungswert ist $\tilde{x} = 73,8^\circ$.

Auf Grund der Quadrantenbeziehungen ist die gesuchte Lösung

$$x_1 = 180^\circ - 73,8^\circ = 106,2^\circ; \text{ denn es gilt} \\ \tan x_1 = \tan(180^\circ - \tilde{x}) = -\tan \tilde{x} = -3,440.$$

Auf Grund der Periodizität der Tangensfunktion mit der kleinsten Periode π besteht die Lösungsmenge aus den Zahlen

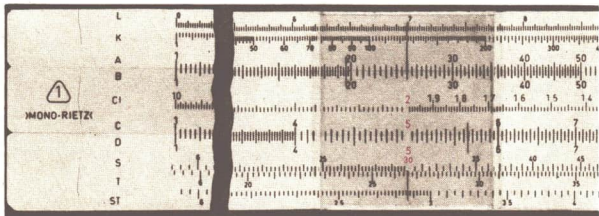
$$x = 106,2^\circ + k \cdot 180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Aufgaben a 108 bis 128

17 Die Skalen der Winkelfunktionen auf dem Rechenstab

Im folgenden wird auf den Rechenstab „Mono-Rietz“ Bezug genommen, bei dem sich sämtliche Skalen auf ein und derselben Seite des Stabes befinden. Es sei lediglich mitgeteilt, daß es Systeme gibt, bei denen sich die Skalen der Winkelfunktionen auf der Rückseite der Zunge befinden.

Zur Orientierung auf den Skalen stellen wir einige bekannte Winkelfunktionswerte ein; vgl. Bild A 32.



A 32

- 25** $\sin 30^\circ = 0,5$ *Einstellung:* (a) Läuferstrich über S 30
 (b) Ablesen D 5
 $\sin 90^\circ = 1$ *Einstellung:* (a) Läuferstrich über S 90
 (b) Ablesen D 10
 $\tan 45^\circ = 1$ *Einstellung:* (a) Läuferstrich über T 45
 (b) Ablesen D 10

Zum Ermitteln der Funktionswerte der Kosinusfunktion wird die Skale S unter Verwendung der Komplementwinkelbeziehung benutzt.

26 $\cos 30^\circ$ ist zu ermitteln.

$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ Einstellung: (a) Läuferstrich über S 60
(b) Ablesen D 866

Ergebnis: $\cos 30^\circ = 0,866$

51 Lesen Sie folgende Funktionswerte auf dem Rechenstab ab! Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Werten aus der Tafel! Beachten Sie dabei die unterschiedliche Teilung der Skalen S und D in verschiedenen Intervallen!

- | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) $\sin 6,5^\circ$ | b) $\cos 82,5^\circ$ | c) $\sin 17,5^\circ$ | d) $\cos 73,5^\circ$ |
| e) $\sin 31,5^\circ$ | f) $\cos 56,5^\circ$ | g) $\sin 45^\circ$ | h) $\cos 45^\circ$ |
| i) $\sin 57,5^\circ$ | k) $\cos 54,3^\circ$ | l) $\sin 65,2^\circ$ | m) $\cos 77,5^\circ$ |
| n) $\cos 10^\circ$ | o) $\sin 90^\circ$ | p) $\cos 0^\circ$ | q) $\sin 5,74^\circ$ |

27 Die Gleichung $\sin x = 0,214$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) ist zu lösen.

1. Schritt: Ermitteln des Gradmaßes

Einstellung: (a) Läuferstrich über D 214
(b) Ablesen S 1235

Ergebnis: $12,35^\circ$

2. Schritt: Umrechnen in Bogenmaß

Überschlag: $\arcsin 0,214 \approx \frac{1}{2} \arcsin 0,428 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} \cdot 0,5 = 0,25$

Einstellung: (a) Läuferstrich über D π
(b) C 18 unter Läuferstrich
(c) Läuferstrich über C 1235
(d) Ablesen D 216

Ergebnis: $0,216$

Lösung der Gleichung: $x = 0,216$

52 Lösen Sie folgende Gleichungen mit Hilfe des Rechenstabes ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)! Ermitteln Sie zunächst alle Lösungen in Gradmaß! Rechnen Sie anschließend in Bogenmaß um!

- | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| a) $\sin x = 0,13$ | b) $\cos x = 0,154$ | c) $\sin x = 0,1765$ |
| d) $\sin x = 0,244$ | e) $\cos x = 0,287$ | f) $\sin x = 0,432$ |
| g) $\cos x = 0,478$ | h) $\sin x = 0,1$ | i) $\cos x = 0,1$ |

Mit Hilfe der Skale S lassen sich die Funktionswerte $\sin x$ für x -Werte von etwa $5,7^\circ$ bis 90° und die Funktionswerte $\cos x$ von 0° bis etwa $84,3^\circ$ ermitteln. Für Winkel von etwa $0,58^\circ$ bis $5,7^\circ$ steht die Skale ST zur Verfügung.

28 $\sin 4,3^\circ$ ist zu ermitteln.

Überschlag: Da $\sin 5,7^\circ = 0,1$ ist und die Sinusfunktion monoton im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ wächst, ist $\sin 4,3^\circ < 0,1$.

Einstellung: (a) Läuferstrich über ST 43
(b) Ablesen D 75

Ergebnis: $\sin 4,3^\circ = 0,075$

29 $\cos 87,2^\circ$ ist zu ermitteln.

$\cos 87,2^\circ = \sin 2,8^\circ = 0,049$

Der Rechenstab liefert also eine Tabelle der Sinuswerte für Winkel von $0,58^\circ$ bis 90° und der Kosinuswerte für Winkel von 0° bis $89,2^\circ$. Im Bereich der Winkel von 70° bis 90° für die Sinusfunktion und von 0° bis 20° für die Kosinusfunktion ist diese Skale sehr grob geteilt. Für diese Winkel empfiehlt sich der Einsatz der Tafel der Winkelfunktionswerte.

Die Funktionswerte $\tan x$ für $0,58^\circ \leq x \leq 45^\circ$ und die Funktionswerte $\cot x$ für $45^\circ \leq x \leq 89,42^\circ$ lassen sich mit Hilfe der Skalen T und ST einerseits und der Skale D andererseits direkt ablesen.

30

a) $\tan 25^\circ$ ist zu ermitteln.

$$\text{Überschlag: } \tan 25^\circ \approx \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{2}{3} \approx 0,7$$

$$\tan 25^\circ = 0,466 \quad (\text{Skale T})$$

b) $\tan 5,7^\circ = 0,1$ (Skale T) c) $\tan 3,5^\circ = 0,061$ (Skale ST)

31

a) $\cot 57^\circ$ ist zu ermitteln.

$$\text{Überschlag: } \cot 57^\circ \approx \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,7$$

$$\cot 57^\circ = \tan 33^\circ = 0,65 \quad (\text{Skale T})$$

b) $\cot 84,3^\circ = \tan 5,7^\circ = 0,1$ (Skale T)

c) $\cot 87,2^\circ = \tan 2,8^\circ = 0,049$ (Skale ST)

33

Ermitteln Sie folgende Funktionswerte mit Hilfe des Rechenstabes! Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Werten aus der Tafel der Winkelfunktionswerte!

a) $\tan 19,5^\circ$ b) $\cot 64,3^\circ$ c) $\tan 23,4^\circ$ d) $\cot 73,4^\circ$
 e) $\tan 21,4^\circ$ f) $\cot 87,3^\circ$ g) $\tan 1,4^\circ$ h) $\cot 85,9^\circ$

Zum Ermitteln der Funktionswerte $\tan x$ für $x > 45^\circ$ und $\cot x$ für $x < 45^\circ$ werden die Komplementwinkelbeziehungen und die Gleichung $\tan x \cdot \cot x = 1$ angewandt.

32

$\tan 67^\circ$ ist zu ermitteln.

$$\text{Überschlag: } \tan 67^\circ \approx \tan 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,7$$

$$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = \frac{1}{\tan 23^\circ}$$

Einstellung: (a) Läuferstrich über T 23

(b) Ablesen D 425

Zwischenergebnis: $\tan 23^\circ = 0,425$

$$\text{Überschlag: } \frac{1}{\tan 23^\circ} \approx \frac{1}{0,4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

Zunge so einstellen, daß die Skalen D und C übereinstimmen

(c) Ablesen CI 236

$$\text{Ergebnis: } \frac{1}{\tan 23^\circ} = 2,36, \text{ folglich } \tan 67^\circ = 2,36$$

34

Ermitteln Sie folgende Funktionswerte mit Hilfe des Rechenstabes! Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Werten aus der Tafel der Winkelfunktionswerte!

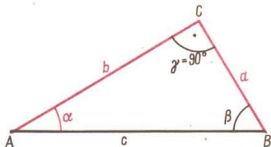
a) $\tan 73,2^\circ$ b) $\cot 44,2^\circ$ c) $\tan 52,4^\circ$ d) $\cot 37,6^\circ$
 e) $\tan 62,7^\circ$ f) $\cot 28,6^\circ$ g) $\tan 81,5^\circ$ h) $\cot 15,7^\circ$

18 Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck

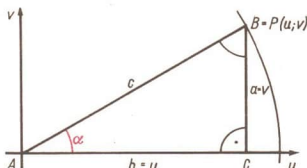
Die Sätze und Formeln, die hier und in den folgenden Lerneinheiten genannt sind, beziehen sich auf *ebene* Dreiecke und weitere *ebene* Vielecke. Da nichtebene geometrische Figuren außer Betracht bleiben, ist bei der Formulierung der Sätze das Adjektiv „eben“ weggelassen worden.

- 55 Nach welchen Gesichtspunkten können die Dreiecke eingeteilt werden? Was ist unter einem rechtwinkligen Dreieck zu verstehen?

Im rechtwinkligen Dreieck wird jeder der beiden spitzen Winkel von der Hypotenuse und von einer Kathete gebildet. Diese Kathete heißt **Ankathete**, die andere Kathete heißt **Gegenkathete** des betreffenden Winkels. Im Bild A 33 ist b die Ankathete und a die Gegenkathete des Winkels α . Für die Kathete a ist β der **anliegende Winkel** und α der **gegenüberliegende Winkel**.



A 33



A 34

Zwischen den Winkeln und den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bestehen gesetzmäßige Beziehungen. Aus dem Bild A 34 ist ersichtlich, daß nach den Definitionen der trigonometrischen Funktionen (vgl. Definitionen A 2, A 4, A 5, A 6) die folgenden Beziehungen gelten.

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$
$\tan \alpha = \frac{a}{b}$	$\cot \alpha = \frac{b}{a}$

Dabei bedeuten a und b Koordinaten (a die **Ordinate**, b die **Abszisse** des Punktes B ; $a, b \in P$) und damit die Maßzahlen der Länge der Katheten des Dreiecks ABC ; c ist die **Maßzahl der Länge der Hypotenuse** ($c \in P$).

- 56 Verändern Sie in Bild A 34 die Lage des Dreiecks ABC so, daß der Punkt B mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt! Entwickeln Sie die trigonometrischen Beziehungen für den Winkel β !

Es ist aber auch möglich, bei diesen Überlegungen a , b und c als **Längen der entsprechenden Dreiecksseiten**, d. h. als **Größen**, aufzufassen.

Eine Größe ist das Produkt aus einer Maßzahl und einer Einheit, z. B.:

$$a = \underbrace{3 \text{ cm}}_{\text{Größe}} = \underbrace{3}_{\text{Maßzahl}} \cdot \underbrace{1 \text{ cm}}_{\text{Einheit}}$$

Bei Dreiecksberechnungen ist im allgemeinen üblich, die Variablen, mit denen die Seiten und andere Strecken bezeichnet werden, mit Größen zu belegen. Auch die weiteren Ausführungen in dieser Stoffeinheit des Lehrbuches schließen sich dieser Gepflogenheit an.

Aus Bild A 33 ist ersichtlich, daß folgende Sätze gelten.

11 **SATZ:** Im rechtwinkligen Dreieck ist der *Sinus* eines spitzen Winkels der Quotient aus der Länge der Gegenkathete dieses Winkels und der Länge der Hypotenuse.

12 **SATZ:** Im rechtwinkligen Dreieck ist der *Kosinus* eines spitzen Winkels der Quotient aus der Länge der Ankathete dieses Winkels und der Länge der Hypotenuse.

13 **SATZ:** Im rechtwinkligen Dreieck ist der *Tangens* eines spitzen Winkels der Quotient aus der Länge der Gegenkathete und der Länge der Ankathete dieses Winkels.

14 **SATZ:** Im rechtwinkligen Dreieck ist der *Kotangens* eines spitzen Winkels der Quotient aus der Länge der Ankathete und der Länge der Gegenkathete dieses Winkels.

Nach den Sätzen A 11 und A 12 gilt für das rechtwinklige Dreieck ABC :

$$\begin{aligned} a &= c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta \\ b &= c \cdot \sin \beta = c \cdot \cos \alpha \\ c &= \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Nach den Sätzen A 13 und A 14 gilt für das rechtwinklige Dreieck ABC :

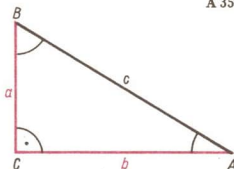
$$\begin{aligned} a &= b \cdot \tan \alpha = b \cdot \cot \beta \\ b &= a \cdot \tan \beta = a \cdot \cot \alpha \end{aligned}$$

57 Drücken Sie diese Beziehungen in Worten aus!

Der **Flächeninhalt** A eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ergibt sich als das halbe Produkt aus der Länge der beiden Katheten a und b ; vgl. Bild A 35.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

58 Entwickeln Sie die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Hypotenuse und ein Winkel gegeben sind!



19 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Zur Berechnung eines Dreiecks müssen ebenso wie zur Konstruktion *drei Bestimmungsstücke* gegeben sein. Ist das Dreieck rechtwinklig, so ist ein Stück – der rechte Winkel – bereits bekannt, und es sind nur noch *zwei Bestimmungsstücke* erforderlich.

Die gesuchten Stücke und weitere Größen eines rechtwinkligen Dreiecks lassen sich mit Hilfe der Winkelfunktionen ermitteln.

Dabei sind die folgenden **Fälle** zu unterscheiden.

Gegeben sind

- (1) die Hypotenuse und eine Kathete;
- (2) die zwei Katheten;
- (3) die Hypotenuse und ein Winkel;
- (4) eine Kathete und ein Winkel.

33 *Beispiel zu (1)*

Gegeben: $c = 18,4$ cm; $a = 11,6$ cm

Gesucht: b ; α ; β ; A

Lösung:

Winkel α

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \frac{a}{c} = \frac{11,6 \text{ cm}}{18,4 \text{ cm}} = 0,630 \quad (\text{Ausrechnung mit Hilfe des Rechenstabes})$$
$$\alpha = 39,1^\circ$$

Winkel β

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 39,1^\circ = 50,9^\circ$$

Kathete b

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{18,4^2 \text{ cm}^2 - 11,6^2 \text{ cm}^2} = \sqrt{204 \text{ cm}^2}$$
$$b = 14,3 \text{ cm}$$

Da die spitzen Winkel bereits errechnet sind, kann die Länge der Kathete b auch mit Hilfe einer trigonometrischen Beziehung ermittelt werden, z. B.:

$$b = c \cdot \cos \alpha = 18,4 \text{ cm} \cdot \cos 39,1^\circ = 18,4 \cdot 0,776 \text{ cm} = 14,3 \text{ cm}$$

Diese Berechnung hat zwar den Vorteil der Einfachheit, aber den Nachteil, daß sie sich auf ein Zwischenresultat stützt, das nur einen angenäherten Wert darstellt.

Flächeninhalt A

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 0,5 \cdot 11,6 \text{ cm} \cdot 14,3 \text{ cm} = 82,9 \text{ cm}^2$$

34 *Beispiel zu (2)*

Gegeben: $a = 8,4$ m; $b = 3,5$ m

Gesucht: c ; α ; β ; A

Lösung:

Hypotenuse c

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8,4^2 \text{ m}^2 + 3,5^2 \text{ m}^2} = \sqrt{82,81 \text{ m}^2} = 9,1 \text{ m}$$

Winkel α

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{8,4 \text{ m}}{3,5 \text{ m}} = 2,40$$

$$\alpha = 67,4^\circ$$

Winkel β

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 67,4^\circ = 22,6^\circ$$

Flächeninhalt A

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 0,5 \cdot 8,4 \text{ m} \cdot 3,5 \text{ m} = 14,7 \text{ m}^2$$

35

Beispiel zu (3)

Gegeben: $c = 51,9 \text{ m}$; $\alpha = 53,5^\circ$

Gesucht: a ; b ; β ; A

Lösung:

Kathete a

$$a = c \cdot \sin \alpha = 51,9 \text{ m} \cdot \sin 53,5^\circ = 51,9 \text{ m} \cdot 0,804 = 41,7 \text{ m}$$

Kathete b

$$b = c \cdot \cos \alpha = 51,9 \text{ m} \cdot \cos 53,5^\circ = 51,9 \text{ m} \cdot 0,595 = 30,9 \text{ m}$$

Winkel β

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 53,5^\circ = 36,5^\circ$$

Flächeninhalt A

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 0,5 \cdot 41,7 \text{ m} \cdot 30,9 \text{ m} = 644 \text{ m}^2$$

36

Beispiel zu (4)

Gegeben: $a = 5,20 \text{ cm}$; $\alpha = 30^\circ$

Gesucht: b ; c ; β ; A

Lösung:

Kathete b

$$b = a \cdot \cot \alpha = 5,20 \text{ cm} \cdot \cot 30^\circ = 5,20 \text{ cm} \cdot 1,732 = 9,00 \text{ cm}$$

Hypotenuse c

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{5,20 \text{ cm}}{\sin 30^\circ} = \frac{5,20 \text{ cm}}{0,500} = 10,4 \text{ cm}$$

Winkel β

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Flächeninhalt A

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 0,5 \cdot 5,20 \text{ cm} \cdot 9,00 \text{ cm} = 23,4 \text{ cm}^2$$

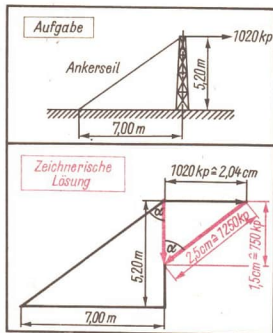
20 Aufgaben zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Beim Lösen von Aufgaben zur Dreiecksberechnung, auch von Aufgaben zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke, sollte in der Regel von einer *Skizze* ausgegangen werden. Aus dieser Skizze sollte ersichtlich sein, welche Größen gegeben und welche gesucht sind; ebenso sollte die Skizze erkennen lassen, welche Beziehungen zwischen den Größen bestehen (z. B. Kongruenz bestimmter Strecken oder Winkel, Symmetrie, Parallelität oder Orthogonalität von Geraden). Nach dieser Überlegung wird ein *Lösungsplan* entworfen, aus dem die einzelnen Rechnungen und ihre Aufeinanderfolge hervorgehen. Ist die Aufgabe umfangreicher, so ist es zweckmäßig, sie in abgegrenzte Teilaufgaben zu zerlegen.

37

Der 5,20 m hohe Mast einer elektrischen Grubenbahn wird durch eine waagerechte Seilspannkraft von 1020 kp belastet, er ist durch ein schräges Drahtseil am Boden verankert; vgl. Bild A 36. Es sollen zeichnerisch und rechnerisch ermittelt werden

- die Spannkraft am Ankerseil;
- die Belastung des Mastfundaments (Gewicht des Mastes $F = 800$ kp).



A 36

Lösung zeichnerisch:

Die gesuchten Kräfte werden mit Hilfe des Parallelogramms der Kräfte, von dem ein Teildreieck im Bild A 36 dargestellt ist, ermittelt. Die Kräfte werden maßstäblich in Längen umgerechnet ($500 \text{ kp} \triangleq 1 \text{ cm}$).

Lösung rechnerisch:

$$\tan \alpha = \frac{7,00 \text{ m}}{5,20 \text{ m}} = 1,35$$

$$\alpha = 53,5^\circ$$

Teilaufgabe a):

Der Betrag der Spannkraft wird mit x bezeichnet.

$$x \cdot \sin \alpha = 1020 \text{ kp}$$

$$x = \frac{1020 \text{ kp}}{\sin 53,5^\circ} = \frac{1020}{0,804} \text{ kp}$$

$$x = 1270 \text{ kp}$$

Die Spannkraft am Ankerseil beträgt ungefähr 1270 kp.

Teilaufgabe b):

Die Belastung des Mastfundaments wird mit y , der Betrag der Spannkraftkomponente, die in die Belastung eingeht, mit z bezeichnet.

$$y = z + F$$

$$z = 1020 \text{ kp} \cdot \cot \alpha = 1020 \text{ kp} \cdot \frac{1}{\tan \alpha}$$

Die Rechnung wird mit Hilfe des Wertes für $\tan \alpha$, der als Zwischenergebnis bereits vorliegt, weitergeführt, weil das Aufsuchen des Wertes für $\cot \alpha$ aus der Tafel die Genauigkeit des Ergebnisses möglicherweise verringern würde.

$$z = \frac{1020}{1,35} \text{ kp}$$

$$z = 756 \text{ kp}$$

$$y = z + F = 756 \text{ kp} + 800 \text{ kp} = 1556 \text{ kp} \approx 1560 \text{ kp}$$

Die Belastung des Mastfundaments beträgt ungefähr 1560 kp.

Aufgaben a 166 bis 183

21 Das gleichschenklige Dreieck

Ein gleichschenkliges Dreieck kann durch das Lot von der Spitze auf die Basis in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden. Das ermöglicht, die Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks zurückzuführen.

Für die Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks sind wie bei einem rechtwinkligen Dreieck nur zwei Bestimmungstücke erforderlich (vgl. Lerneinheit A 19), da der Symmetrieverhältnisse wegen Beziehungen bestehen, die das dritte Bestimmungstück ergeben.

59 Nennen Sie wichtige Beziehungen zwischen den Stücken eines gleichschenkligen Dreiecks!

38 Gegeben: $a = b = 15,2 \text{ cm}$; $\gamma = 76,8^\circ$

Gesucht: c ; α ; A

Lösung:

Basis c

$$\frac{c}{2} = a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$c = 2a \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 2 \cdot 15,2 \text{ cm} \cdot \sin 38,4^\circ = 2 \cdot 15,2 \text{ cm} \cdot 0,621$$

$$c = 18,9 \text{ cm}$$

Winkel α

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - 38,4^\circ = 51,6^\circ$$

Flächeninhalt A

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot a \sin \alpha = 0,5 \cdot 18,9 \text{ cm} \cdot 15,2 \text{ cm} \cdot \sin 51,6^\circ \\ &= 0,5 \cdot 18,9 \text{ cm} \cdot 15,2 \text{ cm} \cdot 0,784 = 113 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Aufgaben a 184 bis 204

22 Das regelmäßige Vieleck

Gehen in einer Ebene von einem Punkt n Strahlen aus ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$), von denen je zwei benachbarte miteinander einen Winkel $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ einschließen, werden auf diesen Strahlen von ihrem Ursprung aus gleiche Strecken abgetragen und deren Endpunkte miteinander verbunden, so entsteht ein Vieleck mit n gleichen Seiten und n gleichen Winkeln. Diese Figur ist ein **regelmäßiges Vieleck** (n -Eck).

- 60 Ermitteln Sie die Summe der Innenwinkel eines Vielecks und die Größe eines Innenwinkels eines regelmäßigen Vielecks als Funktion der Anzahl n der Ecken (Gleichung)!

Aus der beschriebenen Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks ist ersichtlich, daß jedes regelmäßige n -Eck n **Symmetrieachsen**, einen **Umkreis** und einen **Inkreis** hat; vgl. Bild A 37. Der gemeinsame Mittelpunkt von Umkreis und Inkreis ist der **Mittelpunkt** des Vielecks.

- 61 Bestätigen Sie diesen Sachverhalt am gleichseitigen Dreieck und am Quadrat!

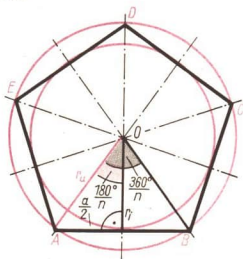
Durch die Strahlen, die den Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks mit den Eckpunkten verbinden, wird ein n -Eck in n kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt. Jedes dieser Dreiecke hat als Basis eine Seite des Vielecks und an der Spitze einen Winkel von $\frac{360^\circ}{n}$. Es wird **Bestimmungsdreieck** des regelmäßigen n -Ecks genannt; vgl. Bild A 37.

Die Bestimmungsdreiecke aller regelmäßigen Vielecke gleicher Eckenanzahl sind einander ähnlich; ebenso sind die Vielecke gleicher Eckenanzahl einander ähnliche Figuren.

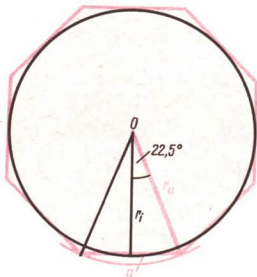
- 62 Führen Sie dazu den Beweis!

Zur Berechnung eines regelmäßigen Vielecks gegebener Eckenanzahl ist somit nur noch **ein** Bestimmungsstück erforderlich. Mit diesem Stück ist das Bestim-

A 37



A 38



mungsdreieck des regelmäßigen Vielecks eindeutig festgelegt, und die Berechnung des Vielecks kann auf die Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks – und damit auf die Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks – zurückgeführt werden.

39

Einem Kreis von 8,00 cm Durchmesser sei ein regelmäßiges Achteck umbeschrieben; vgl. Bild A 38. Wie groß sind Seitenlänge, Länge des Umkreisradius und Flächeninhalt des Vielecks?

Nach dieser Aufgabenstellung sind gegeben n ; r_i und gesucht a ; r_u ; A .

Lösung:

Seite a

$$\begin{aligned}\tan \frac{360^\circ}{2n} &= \frac{a}{2r_i} \\ a &= 2r_i \cdot \tan \frac{180^\circ}{n} \\ &= 2 \cdot 4,00 \text{ cm} \cdot \tan 22,5^\circ = 2 \cdot 4,00 \text{ cm} \cdot 0,414 \\ a &= 3,31 \text{ cm}\end{aligned}$$

Umkreisradius r_u

$$\begin{aligned}\cos \frac{360^\circ}{2n} &= \frac{r_i}{r_u} \\ r_u &= \frac{r_i}{\cos \frac{180^\circ}{n}} = \frac{4,00 \text{ cm}}{\cos 22,5^\circ} = \frac{4,00 \text{ cm}}{0,924} = 4,33 \text{ cm}\end{aligned}$$

Flächeninhalt A

$$A = n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot r_i = 8 \cdot 0,5 \cdot 3,31 \text{ cm} \cdot 4,00 \text{ cm} = 53,0 \text{ cm}^2$$

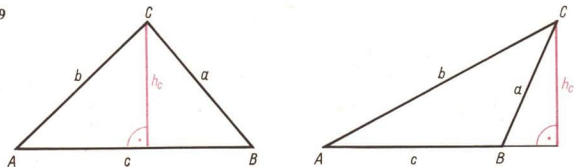
Die Seitenlänge des Achtecks beträgt 3,31 cm, die Länge seines Umkreisradius 4,33 cm und sein Flächeninhalt 53,0 cm².

Aufgaben a 205 bis 214

23 Der Sinussatz

Auch die Berechnung ungleichseitiger Dreiecke läßt sich auf die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zurückführen; denn jedes Dreieck läßt sich durch Lote von seinen Ecken auf die Gegenseiten in je zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegen oder durch ein rechtwinkliges Dreieck zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzen; vgl. Bild A 39. Allerdings sind die rechtwinkligen Teildreiecke eines ungleichseitigen Dreiecks nicht kongruent. Somit kann jedes beliebige Dreieck aus geeignet gegebenen Seiten und Winkeln berechnet werden.

A 39



Berechnen Sie auf diese Weise die fehlenden Stücke des Dreiecks, von dem

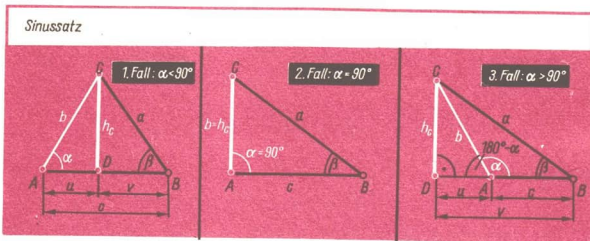
$$b = 6,5 \text{ cm}; c = 7,0 \text{ cm}; \alpha = 48,5^\circ$$

gegeben sind!

Überprüfen Sie die Berechnung durch Konstruktion des Dreiecks!

Anstatt in jedem Einzelfalle die Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke von neuem vorzunehmen, ist es zweckmäßiger, **Formeln für beliebige Dreiecke** zu entwickeln.

Um diese Formeln aus den Beziehungen, die für das rechtwinklige Dreieck gelten, zu gewinnen, werden in einem beliebigen Dreieck durch das Lot von einem Eckpunkt auf dessen gegenüberliegende Seite – im Beispiel A 40 durch das Lot von C auf c – rechtwinklige Dreiecke erzeugt. Dabei müssen *drei* mögliche Fälle betrachtet werden.



A 40

A 41

A 42

40

- a) Das Dreieck ist *spitzwinklig* ($\alpha < 90^\circ$); vgl. Bild A 40.

$$h_c = a \cdot \sin \beta; h_c = b \cdot \sin \alpha$$

Die Gleichsetzung ergibt

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \quad \text{sowie} \quad a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

- b) Das Dreieck ist *rechtwinklig* ($\alpha = 90^\circ$); vgl. Bild A 41.

$$h_c = a \cdot \sin \beta; h_c = b$$

Die Gleichsetzung ergibt

$$a \cdot \sin \beta = b.$$

Da $\sin 90^\circ = 1$ ist, folgt daraus ebenfalls

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \quad \text{sowie} \quad a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

- c) Das Dreieck ist *stumpfwinklig* ($\alpha > 90^\circ$); vgl. Bild A 42.

$$h_c = a \cdot \sin \beta; h_c = b \cdot \sin (180^\circ - \alpha)$$

Die Gleichsetzung ergibt

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin (180^\circ - \alpha).$$

Da $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ist, folgt daraus wiederum

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \quad \text{sowie} \quad a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Analog erhält man

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma ;$$

$$c : a = \sin \gamma : \sin \alpha .$$

Aus $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ und $b : c = \sin \beta : \sin \gamma$ ergibt sich

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Daraus folgt

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

15

SINUSSATZ der ebenen Trigonometrie: In einem Dreieck ist der Quotient aus der Länge einer Seite und dem Sinus des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels konstant.

In einem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Da der Wert der Sinusfunktion für Winkel sowohl im ersten als auch im zweiten Quadranten positiv ist, gehören zu einem positiven Sinuswert (mit Ausnahme von $\sin \varphi = 1$) stets ein Winkel im ersten und ein Winkel im zweiten Quadranten; vgl. Lerneinheit A 14. Ob beide Winkel als Lösungen der jeweiligen Aufgabe möglich sind, muß besonders untersucht werden. Näheres wird in Lerneinheit A 26 mitgeteilt.

Aufgaben a 215 bis 220

24 Berechnung des Flächeninhalts beliebiger Dreiecke

Die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks

$$A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h_s$$

setzt die Kenntnis der Länge einer Seite und der zugehörigen Höhe voraus. Sind andere Stücke gegeben, so ist es möglich, mit Hilfe der Trigonometrie den Flächeninhalt des Dreiecks zu berechnen.

Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, etwa $a ; b ; \gamma$ gegeben, so kann die Länge des Lotes von einem Eckpunkt auf die eine Seite aus der Länge der anderen Seite und dem eingeschlossenen Winkel errechnet werden. Es ist z. B. (vgl. Bild A 43)

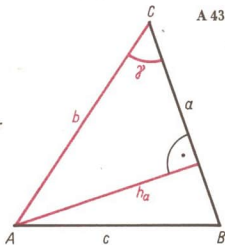
$$h_a = b \cdot \sin \gamma .$$

64 Überprüfen Sie die Richtigkeit dieser Beziehung für

- a) $\gamma = 90^\circ$; b) $\gamma > 90^\circ$!

Daraus folgt

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$



SATZ: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus den Längen zweier Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Geben Sie die Formeln für den Flächeninhalt eines Dreiecks an, wenn einmal die Seiten b und c , zum anderen die Seiten c und a und jeweils der eingeschlossene Winkel gegeben sind!

Aufgaben a 221 bis 224

25 Der Kosinussatz

Sind in einem ungleichseitigen Dreieck die **drei Seiten** oder **zwei Seiten** und der **eingeschlossene Winkel** gegeben, so kann zur Berechnung der anderen Seiten und Winkel der Sinussatz nicht angewendet werden. In diesen Fällen ist es möglich, die gesuchten Stücke auf Grund einer anderen Beziehung zu ermitteln.

Um auch in diesem Falle – wie bei der Herleitung des Sinussatzes – das Problem auf bereits gelöste Probleme zurückzuführen, werden in einem Dreieck durch das Lot von einem Eckpunkt auf dessen gegenüberliegende Seite – im Beispiel A 41 durch das Lot von C auf c – rechtwinklige Dreiecke erzeugt.

Wiederum sind **drei Fälle** zu untersuchen; vgl. Bilder A 40 bis A 42.

41

- a) Das Dreieck ist **spitzwinklig** ($\alpha < 90^\circ$); vgl. Bild A 40.

Nach dem Satz des PYTHAGORAS ist

$$h_c^2 = b^2 - u^2 \text{ und } h_c^2 = a^2 - v^2 = a^2 - (c - u)^2 = a^2 - c^2 + 2cu - u^2.$$

Gleichsetzung und Vertauschung der Seiten der Gleichung ergeben

$$a^2 - c^2 + 2cu - u^2 = b^2 - u^2,$$

nach a^2 aufgelöst:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cu.$$

Da $u = b \cos \alpha$ ist, folgt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

- b) Das Dreieck ist **rechtwinklig** ($\alpha = 90^\circ$); vgl. Bild A 41.

$$h_c = b; a^2 = b^2 + c^2$$

Da $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$ ist, läßt sich ebenfalls schreiben:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

- c) Das Dreieck ist **stumpfwinklig** ($\alpha > 90^\circ$); vgl. Bild A 42.

$$h_c^2 = b^2 - u^2 \text{ und } h_c^2 = a^2 - v^2 = a^2 - (c + u)^2 = a^2 - c^2 - 2cu - u^2$$

Gleichsetzung und Vertauschung der Seiten der Gleichung ergeben

$$a^2 - c^2 - 2cu - u^2 = b^2 - u^2, \text{ nach } a^2 \text{ aufgelöst:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cu.$$

Da $u = b \cos (180^\circ - \alpha) = b \cdot (-\cos \alpha)$ ist, folgt wiederum

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Analog erhält man

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

KOSINUSSATZ der ebenen Trigonometrie: In einem Dreieck ist das Quadrat der Länge einer Seite gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus den Längen dieser beiden Seiten und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Da der Wert der Kosinusfunktion für Winkel im ersten Quadranten positiv, im zweiten Quadranten hingegen negativ ist, führt die Berechnung mit Hilfe des Kosinussatzes zu einem eindeutigen Ergebnis.

Werden die Formeln für a^2 , b^2 und c^2 nach dem Kosinus der entsprechenden Winkel aufgelöst, so ist

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Aufgaben a 225 bis 236

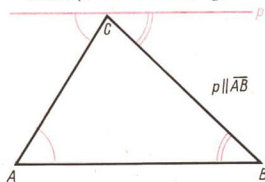
26 Berechnungen an beliebigen Dreiecken

Die Berechnung der Seiten und Winkel bei Dreiecken stützt sich auf die grundlegenden **Sätze über Dreiecke**.

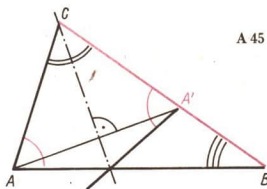
Dazu gehören die folgenden Sätze.

– In einem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180° .

Der Beweis kann mit Hilfe der Sätze über die Winkel an geschnittenen Parallelen geführt werden; vgl. Bild A 44.



A 44



A 45

– In einem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber.

Zum Beweis kann das Dreieck an der Halbierenden des Winkels, den die betrachteten Seiten einschließen, gespiegelt werden; vgl. Bild A 45. Mit Hilfe des Satzes über die Außenwinkel eines Dreiecks wird dann der Beweis geführt.

- In einem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber.

Der Beweis dieses Satzes, der die Umkehrung des vorstehenden Satzes ist, kann indirekt geführt werden. Die Annahme, daß dem größeren von zwei Winkeln eine Seite gegenüberliegt, die kleiner oder gleich der dem kleineren Winkel gegenüberliegenden Seite ist, führt zu einem Widerspruch.

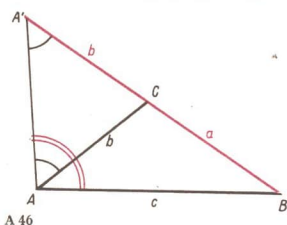
- In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Zum Beweis kann auf der Verlängerung einer Seite des Dreiecks die angrenzende Seite abgetragen und die Figur zu einem Dreieck ergänzt werden, so daß in diesem Dreieck eine Seite gleich der Summe zweier Seiten des ursprünglichen Dreiecks ist; vgl. Bild A 46. Nunmehr wird der Satz, daß dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüberliegt, angewendet.

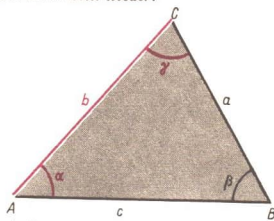
- 66 Formulieren Sie diese Sätze mit Hilfe der in der Planimetrie gebräuchlichen Symbole!

Je nach den gegebenen Stücken kann die Berechnung der gesuchten Stücke und Größen auf vier Fälle zurückgeführt werden, die auf den Kongruenzsätzen beruhen.

- 67 Geben Sie die vier Kongruenzsätze für Dreiecke in Worten wieder!



A 46



A 47

Bei jeder Aufgabe ist zu untersuchen, ob sie lösbar ist und ob eventuell mehrere Lösungen existieren.

1. Fall: Gegeben seien zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (Kongruenzsatz **sws**).

Lösungsweg:

- Kosinussatz zur Berechnung der dritten Seite
 - Sinussatz und Satz über die Seiten-Winkel-Beziehung zur Berechnung eines zweiten Winkels (nach Möglichkeit des der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkels)
 - Satz über die Summe der Innenwinkel zur Berechnung des dritten Winkels
- Kontrollmöglichkeit: Kosinussatz zur Berechnung eines zweiten Winkels oder Sinussatz (in Verbindung mit dem Satz über die Seiten-Winkel-Beziehung) zur Berechnung des dritten Winkels

- 42 Gegeben: $a = 13 \text{ m}$; $c = 17 \text{ m}$; $\beta = 60,0^\circ$; vgl. Bild A 47
Gesucht: b ; α ; γ ; A

Lösung:

Seite b

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$b = \sqrt{17^2 \text{ m}^2 + 13^2 \text{ m}^2 - 2 \cdot 17 \text{ m} \cdot 13 \text{ m} \cdot \cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{289 + 169 - 2 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 0,500} \text{ m} = \sqrt{237} \text{ m}$$

$$b = 15,4 \text{ m}$$

Winkel α

$$\sin \alpha : \sin \beta = a : b$$

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b} = \frac{13 \text{ m} \cdot \sin 60^\circ}{15,4 \text{ m}} = \frac{13 \cdot 0,866}{15,4} = 0,731$$

$$\alpha = 47,0^\circ$$

Der Wert $\alpha = 180^\circ - 47,0^\circ = 133,0^\circ$ entfällt als Lösung, da aus $a < b$ folgt $\alpha < \beta$.

Winkel γ

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (47,0^\circ + 60,0^\circ) = 180^\circ - 107,0^\circ$$

$$\gamma = 73,0^\circ$$

Flächeninhalt A

$$A = \frac{1}{2} c a \sin \beta = 0,5 \cdot 13 \text{ m} \cdot 17 \text{ m} \cdot \sin 60^\circ$$

$$= 0,5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 0,866 \text{ m}^2$$

$$A = 95,7 \text{ m}^2$$

68

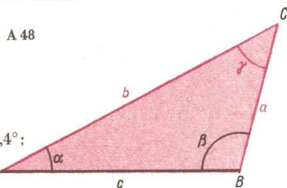
Kontrollieren Sie die Ergebnisse!

2. Fall: Gegeben seien eine Seite und die anliegenden Winkel
(Kongruenzsatz **w s w**).

Lösungsweg:

– Satz über die Summe der Innenwinkel zur Berechnung des dritten Winkels
– Sinussatz zur Berechnung der zwei anderen Seiten

Kontrollmöglichkeit: Kosinussatz zur Berechnung der dritten Seite aus der gegebenen Seite, einer zweiten errechneten Seite und dem von diesen Seiten eingeschlossenen (gegebenen) Winkel



43

Gegeben: $c = 3,70 \text{ m}$; $\alpha = 29,4^\circ$; $\beta = 104,4^\circ$;
vgl. Bild A 48
Gesucht: a ; b ; γ ; A

Lösung:

Winkel γ

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (29,4^\circ + 104,4^\circ) = 180^\circ - 133,8^\circ$$

$$\gamma = 46,2^\circ$$

Seite a

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{3,70 \text{ m} \cdot \sin 29,4^\circ}{\sin 46,2^\circ} = \frac{3,70 \cdot 0,491}{0,722} \text{ m}$$

$$a = 2,52 \text{ m}$$

A

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma$$

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{3,70 \text{ m} \cdot \sin 104,4^\circ}{\sin 46,2^\circ} = \frac{3,70 \cdot 0,969}{0,722} \text{ m}$$

$$b = 4,96 \text{ m}$$

Flächeninhalt A

$$A = \frac{1}{2} c a \sin \beta = 0,5 \cdot 3,70 \text{ m} \cdot 2,52 \text{ m} \cdot 0,969$$

$$A = 4,52 \text{ m}^2$$

69 Kontrollieren Sie die Ergebnisse!

3. Fall: Gegeben seien die drei Seiten (Kongruenzsatz $s s s$).

Lösungsweg:

- Kosinussatz zur Berechnung eines Winkels (möglichst des Winkels, der der größten Seite gegenüberliegt)
 - Sinussatz zur Berechnung eines zweiten Winkels
 - Satz über die Summe der Innenwinkel zur Berechnung des dritten Winkels
- Kontrollmöglichkeit: Kosinussatz zur Berechnung eines zweiten Winkels

44 Gegeben: $a = 24 \text{ cm}$; $b = 13 \text{ cm}$; $c = 15 \text{ cm}$; vgl. Bild A 49Gesucht: α ; β ; γ ; A

Lösung:

Winkel α

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 \text{ cm}^2 + 15^2 \text{ cm}^2 - 24^2 \text{ cm}^2}{2 \cdot 13 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm}}$$

$$= \frac{(169 + 225 - 576) \text{ cm}^2}{390 \text{ cm}^2} = -\frac{182}{390} = -\frac{7}{15} = -0,467$$

$$\alpha = 180^\circ - 62,2^\circ = 117,8^\circ$$

Winkel β

$$\sin \beta : \sin \alpha = b : a$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{13 \text{ cm} \cdot \sin 117,8^\circ}{24 \text{ cm}} = \frac{13 \cdot 0,885}{24} = 0,479$$

$$\beta = 28,6^\circ$$

Der Wert $\beta = 180^\circ - 28,6^\circ = 151,4^\circ$ entfällt als Lösung, da aus $a > b$ folgt $\alpha > \beta$.

Winkel γ

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (117,8^\circ + 28,6^\circ) = 180^\circ - 146,4^\circ$$

$$\gamma = 33,6^\circ$$

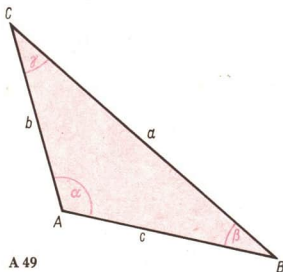
Flächeninhalt A

$$A = \frac{1}{2} c a \sin \beta = 0,5 \cdot 15,0 \text{ cm} \cdot 24,0 \text{ cm} \cdot 0,479$$

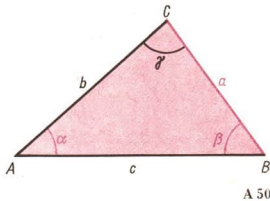
$$A = 86,2 \text{ cm}^2$$

Die Formel $A = \frac{1}{2} c a \sin \beta$ wurde gewählt, da $\sin \beta$ bereits als Zwischenergebnis der vorausgegangenen Berechnungen vorliegt.

70 Kontrollieren Sie die Ergebnisse!



A 49



A 50

4. Fall: Gegeben seien zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel (Kongruenzsatz S s W).

Lösungsweg!

- Sinussatz zur Berechnung des der kleineren gegebenen Seite gegenüberliegenden Winkels
- Satz über die Summe der Innenwinkel zur Berechnung des dritten Winkels
- Sinussatz zur Berechnung der dritten Seite

Kontrollmöglichkeit: Kosinussatz zur Berechnung der dritten Seite

45 Gegeben: $b = 8,6$ cm; $c = 10,4$ cm; $\gamma = 83,2^\circ$; vgl. Bild A 50

Gesucht: a ; α ; β ; A

Lösung:

Winkel β

$$\sin \beta : \sin \gamma = b : c$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \gamma}{c} = \frac{8,6 \text{ cm} \cdot \sin 83,2^\circ}{10,4 \text{ cm}} = \frac{8,6 \cdot 0,993}{10,4} = 0,821$$

$$\beta = 55,2^\circ$$

Der Wert $\beta = 180^\circ - 55,2^\circ = 124,8^\circ$ entfällt als Lösung, da aus $b < c$ folgt $\beta < \gamma$.

Winkel α

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (83,2^\circ + 55,2^\circ) = 180^\circ - 138,4^\circ$$

$$\alpha = 41,6^\circ$$

Seite a

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{10,4 \text{ cm} \cdot \sin 41,6^\circ}{\sin 83,2^\circ} = \frac{10,4 \cdot 0,664}{0,993} \text{ cm}$$

$$a = 6,9 \text{ cm}$$

Flächeninhalt A

$$A = \frac{1}{2} b c \sin \alpha = 0,5 \cdot 8,6 \text{ cm} \cdot 10,4 \text{ cm} \cdot \sin 41,6^\circ$$

$$= 0,5 \cdot 8,6 \cdot 10,4 \cdot 0,664 \text{ cm}^2$$

$$A = 30 \text{ cm}^2$$

71

Kontrollieren Sie die Ergebnisse!

Sind bei einem Dreieck zwei Seiten und der der *kleineren* Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, so bestehen in Abhängigkeit von den Größenbeziehungen der gegebenen Stücke drei Möglichkeiten.

- Die Aufgabe hat *zwei* (verschiedene) Lösungen.
- Die Aufgabe hat *genau eine* Lösung.
- Die Aufgabe hat *keine* Lösung.

46

Gegeben: $a = 3,00 \text{ cm}$; $b = 5,00 \text{ cm}$; $\alpha = 30,0^\circ$

Gesucht: c ; β ; γ

Lösung:

Winkel β

$$\sin \beta : \sin \alpha = b : a$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{5,00 \text{ cm} \cdot \sin 30,0^\circ}{3,00 \text{ cm}} = \frac{5,00 \cdot 0,500}{3,00} = 0,833$$

$$\beta_1 = 56,4^\circ; \beta_2 = 180^\circ - 56,4^\circ = 123,6^\circ$$

Beide Werte für den Winkel β erfüllen die Bedingung $\beta > \alpha$, die aus $b > a$ folgt.

Winkel γ

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta_1) = 180^\circ - (30,0^\circ + 56,4^\circ) = 93,6^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta_2) = 180^\circ - (30,0^\circ + 123,6^\circ) = 26,4^\circ$$

Seite c

$$c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$c_1 = \frac{3,00 \text{ cm} \cdot \sin 93,6^\circ}{\sin 30,0^\circ} = \frac{3,00 \cdot 0,998}{0,500} \text{ cm} = 5,99 \text{ cm}$$

$$c_2 = \frac{3,00 \text{ cm} \cdot \sin 26,4^\circ}{\sin 30,0^\circ} = \frac{3,00 \cdot 0,445}{0,500} \text{ cm} = 2,67 \text{ cm}$$

72

Kontrollieren Sie die Ergebnisse durch eine Konstruktion!

47

Gegeben: $b = 4,30 \text{ cm}$; $c = 7,60 \text{ cm}$; $\beta = 54,1^\circ$

Gesucht: a ; α ; γ

Lösungsansatz:

Winkel γ

$$\sin \gamma : \sin \beta = c : b$$

$$\sin \gamma = \frac{c \sin \beta}{b} = \frac{7,60 \text{ cm} \cdot \sin 54,1^\circ}{4,30 \text{ cm}} = \frac{7,60 \cdot 0,810}{4,30}$$

$$\sin \gamma = 1,43$$

Zu diesem Wert existiert kein Winkel; denn es gilt $-1 \leq \sin \varphi \leq +1$. Die Aufgabe hat keine Lösung.

73

Bestätigen Sie dies durch den Versuch, aus den gegebenen Stücken ein Dreieck zu konstruieren!

Aufgaben a 237 bis 252

27 Aufgaben zur Dreiecksberechnung

A

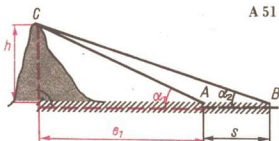
Bei Sachaufgaben, die auf Dreiecksberechnungen führen, sollte zunächst geprüft werden, ob die Lösung mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke oder mit Hilfe schiefwinkliger (allgemeiner) Dreiecke günstiger ist. Lassen sich rechtwinklige Dreiecke angeben, so besteht meist der Vorteil einfacherer Rechnungen und oft auch größerer Übersichtlichkeit.

An Hand der Skizze werden die Sätze und Beziehungen ermittelt, die zur Lösung der Aufgabe herangezogen werden können oder müssen; vgl. Lerneinheit A 20. Bei jeder Aufgabe sollte nach Möglichkeit schon vor Beginn der Berechnungen untersucht werden, ob sie lösbar ist und ob gegebenenfalls mehrere Lösungen bestehen.

Erfordert die Lösung der Aufgabe mehrere Rechenschritte und treten dabei Zwischenlösungen auf, so sollte man sich beim Weiterrechnen möglichst nur auf die gegebenen Werte (die Ausgangsgrößen) und auf solche Zwischenresultate stützen, von denen man weiß, daß sie entweder genaue Werte oder Näherungswerte mit nur geringem Fehler sind. Das ist besonders bei der Benutzung des Rechenstabes und der (vierstelligen) Tafel der trigonometrischen Funktionen zu beachten.

48

Um die Höhe eines Berges zu ermitteln, wird in der Ebene eine Standlinie $\overline{AB} = s = 113$ m abgesteckt, deren Richtung genau auf die Bergspitze C hinweist; vgl. Bild A 51. An den Enden der Standlinie werden die Erhebungswinkel α_1 und α_2 gemessen. Es ist $\alpha_1 = 24,3^\circ$ und $\alpha_2 = 19,8^\circ$. Wie hoch liegt die Bergspitze über der Ebene?



Lösung:

Ansatz (nach der Skizze):

$$e_1 = h \cdot \cot \alpha_1 \quad (\text{I})$$

$$e_1 + s = h \cdot \cot \alpha_2 \quad (\text{II})$$

Ausrechnung:

Aus den Gleichungen (I) und (II) wird e_1 eliminiert; es wird h errechnet.

$$\begin{aligned} h \cdot \cot \alpha_1 + s &= h \cdot \cot \alpha_2 \\ s &= h \cdot \cot \alpha_2 - h \cdot \cot \alpha_1 \\ h &= \frac{s}{\cot \alpha_2 - \cot \alpha_1} \\ h &= \frac{113 \text{ m}}{\cot 19,8^\circ - \cot 24,3^\circ} \\ &= \frac{113 \text{ m}}{2,778 - 2,215} = \frac{113 \text{ m}}{0,563} \\ h &= 201 \text{ m} \end{aligned}$$

Die Bergspitze liegt etwa 201 m über der Ebene.

Aufgaben a 253 bis 271

28 Spezielle Vermessungsaufgaben

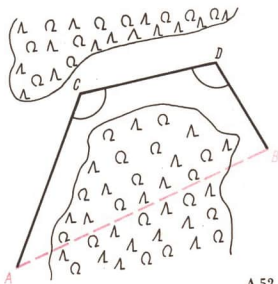
Dreiecksberechnungen werden in der Landesvermessung als Grundlage für den Entwurf von topographischen Karten und zum genauen Ermitteln von Entfernungen verwendet. Auch zur Orientierung im Gelände werden Dreiecksberechnungen gebraucht. Solche Berechnungen sind z. B. im Militärwesen zum Ermitteln des eigenen Standpunktes oder des Ortes gegnerischer Objekte, etwa von Geschützstellungen, notwendig.

49

Zwischen den Punkten A und B in einem horizontalen Gelände besteht keine Sichtverbindung, auch kann die Entfernung dieser Punkte nicht auf andere Weise direkt gemessen werden. Um die Entfernung zwischen A und B zu ermitteln, werden zwei weitere Punkte C und D angenommen, so daß von C aus A und D , von D aus C und B anvisiert und die Entfernungen zwischen benachbarten Punkten ausgemessen werden können (Strecken- oder offener Polygonzug; vgl. Bild A 52). Es werden ermittelt: $\overline{AC} = 148 \text{ m}$; $\overline{CD} = 112 \text{ m}$; $\overline{DB} = 81 \text{ m}$; $\sphericalangle ACD = 122,0^\circ$; $\sphericalangle CDB = 110,1^\circ$.

Vorüberlegung:

Zur Berechnung der Länge der Strecke \overline{AB} können vom Dreieck ADC die Seite \overline{AD} und der Winkel $\sphericalangle CDA$ errechnet werden (Fall sws). Damit sind vom Dreieck ADB , das die gesuchte Strecke als Seite enthält, zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben.



A 52

Lösung:

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD} \cdot \cos \sphericalangle ACD} \\ &= \sqrt{148^2 \text{ m}^2 + 112^2 \text{ m}^2 - 2 \cdot 148 \text{ m} \cdot 112 \text{ m} \cdot \cos 122,0^\circ} \\ &= \sqrt{52020 \text{ m}^2} \\ \overline{AD} &= 228 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\sin \sphericalangle CDA = \frac{\overline{AC} \sin \sphericalangle ACD}{\overline{AD}} = \frac{148 \text{ m} \cdot \sin 122,0^\circ}{228 \text{ m}}$$

$$\sphericalangle CDA = 33,4^\circ$$

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB - \sphericalangle CDA$$

$$= 110,1^\circ - 33,4^\circ$$

$$\sphericalangle ADB = 76,7^\circ$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DB} \cdot \cos \sphericalangle ADB} \\ &= \sqrt{228^2 \text{ m}^2 + 81^2 \text{ m}^2 - 2 \cdot 228 \text{ m} \cdot 81 \text{ m} \cdot \cos 76,7^\circ} \\ &= \sqrt{50090 \text{ m}^2} \\ \overline{AB} &= 224 \text{ m}\end{aligned}$$

Die Entfernung zwischen den Punkten A und B beträgt 224 m.

74

Gibt es noch andere Möglichkeiten, diese Aufgabe trigonometrisch zu lösen?

Aufgaben a 272 bis 283

Zur Geschichte der Trigonometrie

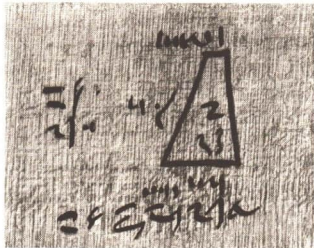
Im Laufe einer langen Zeit ist die Trigonometrie in mühevoller Gedankenarbeit aus der gesellschaftlichen Praxis heraus entwickelt worden.

Vor 4000 Jahren stand die Geometrie im alten Ägypten auf einer schon recht beachtlichen Höhe. Sie war aus der Notwendigkeit heraus entstanden, die durch jährliche Nilüberschwemmungen unkenntlich gewordenen Feldergrenzen jedesmal neu zu vermessen. Die Knotenleine mit Abschnitten von drei, vier und fünf Einheiten war ein wichtiges Hilfsmittel für die Vermessungsarbeiten. Besonders eindrucksvolle Zeugen für den hohen Stand der Ingenieurkunst jener Zeit sind die Pyramiden, die Grabstätten der ägyptischen Könige, deren Bau Hunderttausenden

von Sklaven und mit Gewalt zur Arbeit getriebenen Bauern das Leben kostete. Sämtliche Pyramiden weisen übereinstimmende Merkmale auf, woraus auf ein planvolles Arbeiten und hervorragendes meßtechnisches Können geschlossen werden kann. So sind die Seitenflächen der Pyramiden im allgemeinen mit einem Winkel von 52° zur Grundfläche geneigt. Außerdem sind die Pyramiden recht genau nach den Himmelsrichtungen orientiert, und die Seitenlängen ihrer quadratischen Grundflächen weichen nur um einige 10 Zentimeter voneinander ab, obwohl z. B. die größte Pyramide, die um 2680 v. u. Z. gebaute sogenannte Cheopspyramide, eine Seitenlänge der Grundfläche von 227,5 m bei einer Höhe von 146,6 m besaß. Unter den erhaltenen Schriftstücken des alten Ägyptens befinden sich auch einige mathematischen Inhalts. In einem in Moskau aufbewahrten mathematischen Papyrus wird z. B. die Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit quadratischen Deckflächen völlig richtig vorgenommen; vgl. Bild A 53. Dieser mathematische Körper trat als Teil der Verkleidung der Pyramiden auf. Aus den mathematischen Papyri geht auch hervor, daß feste Fachausdrücke für den Begriff „Winkel“ und für das Verhältnis der Seitenlängen an Pyramiden existierten, die ersten Vorstufen trigonometrischer Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.

Auch bei den Chinesen, einem der ältesten Kulturvölker, reichen die geometrischen Kenntnisse, darunter auch trigonometrische, weit zurück. Schon um 1100 v. u. Z. wurden rechte Winkel mit Hilfe des Zahlentripels [3; 4; 5] abgesteckt, Höhen durch Messen der Schattenlänge ermittelt sowie Tiefen und Entfernungen mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke berechnet. Leider sind unsere Kenntnisse über die frühe chinesische Mathematik recht gering, da ein chinesischer Kaiser im Jahre 213 v. u. Z. alle schriftlichen Aufzeichnungen verbrennen ließ. Nur ganz wenige Dokumente sind dieser Zerstörung entgangen.

Die babylonische Mathematik stand im Vergleich zu der ägyptischen Mathematik auf einem



A 53 Originaltext der Pyramidenstumpfaufgabe des Moskauer Papyrus



A 54 Babylonische Keilschrifttafel mit Dreiecksberechnungen

wesentlich höheren Niveau. Dies betrifft insbesondere die Algebra, aber auch die Geometrie und Trigonometrie. Tontafelchen mit Keilschrifttexten überliefern uns mathematische Probleme aus einer etwa 5000 Jahre zurückliegenden Zeit; vgl. Bild A 54. Bewässerungskanäle mußten gebaut werden; denn in Mesopotamien, dem Gebiet zwischen Euphrat und Tigris, war Ackerbau nur bei künstlicher Bewässerung möglich. So wurden für die erforderlichen Dämme die Neigung der Böschung und die Breite der Dammkronen berechnet. Daher spielte in den Rechnungen ein solches Verhältnis von Seitenlängen eine große Rolle, das auf den Kotangens hinausläuft und das als „Böschungswert“ bezeichnet wurde.

Derartige Probleme aus der Praxis führten auch zu tiefen theoretischen Einsichten. Die Proportionalität der Längen entsprechender Seiten in ähnlichen Dreiecken wurde erkannt und der Satz des PYTHAGORAS aufgestellt. Eine enge Verknüpfung der babylonischen Mathematik bestand mit der Astronomie. Von riesigen, zu Tempelanlagen gehörenden Türmen beobachtete man den Himmel und glaubte aus dem Lauf der Planeten z. B. Anzeichen kommender Dürren oder den Ausgang eines geplanten Kriegszuges ablesen zu können. Auch der berühmte Turm von Babel war eine solche „Sternwarte“. Zwar wurde die babylonische Astronomie immer stärker mit Aberglauben durchsetzt, d. h., sie wurde vielfach zur Astrologie; aber auch echte astronomische Kenntnisse wurden gewonnen. Über viele Jahrhunderte hinweg fortgesetzte Beobachtungen zeigten die Periodizität der Himmelserscheinungen sowie die regelmäßige Wiederkehr von Sonnen- und Mondfinsternissen und des Zusammentreffens von Planeten in bestimmten Tierkreiszeichen usw. Es sind sogar Zahlentabellen erhalten geblieben, die bei der Berechnung periodischer astronomischer Vorgänge verwendet wurden. Wenn man diese Zahlenwerte – was die damaligen Astronomen natürlich noch nicht taten – in ein Koordinatensystem überträgt, so erhält man ganz deutlich das Bild einer Sinuskurve.

Ungefähr 1000 Jahre vor Beginn unserer Zeitrechnung boten nicht mehr die Binnenländer wie Ägypten und Mesopotamien die günstigsten Entwicklungsbedingungen für Wirtschaft, Handel und Wissenschaft, sondern in Verbindung mit der Entwicklung des Schiffbaues die Küstenländer. Daher wurden die in Griechenland, auf den ägäischen Inseln und in Kleinasien ansässigen griechischen Stämme um die Mitte des 1. Jahrtausends v. u. Z. für den Raum des östlichen Mittelmeeres politisch, ökonomisch und auch auf dem Gebiete der Wissenschaft bestimmend.

Die griechische Mathematik verdankt ihren engen Beziehungen zu Mesopotamien und Ägypten sehr viel. Ergebnisse wissenschaftlicher Arbeit wurden übernommen und Anregungen für neue Erkenntnisse empfangen. THALES von MILET (624? – 548? v. u. Z.) soll die Höhe der Pyramiden dadurch ermittelt haben, daß er ihre Schattenlänge in dem Augenblick maß, als sein eigener Schatten genau so groß war wie er selber. In Milet berechnete er, ebenfalls mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, die Entfernung der Schiffe vom Hafen. Von Babylonien wurden auch die Sonnenuhr, die Zeiteinteilung und der Gnomon übernommen. Der Gnomon, das älteste astronomische Instrument, diente zum Ermitteln der Südrichtung. Ein senkrecht stehender Stab wirft auf eine waagerechte Ebene seinen Schatten und ermöglicht so die Messung der jeweiligen Schattenlänge, die sich bis Mittag verkürzt und dann wieder länger wird. Die Winkelhalbierende jedes Winkels, der von paarweise gleich langen Schatten gebildet wird, erstreckt sich in der Nord-Süd-Richtung. Darüber hinaus ermöglicht der Gnomon die Messung der Sonnenhöhe aus der Länge des Stabes und seines Schattens, was auf den Tangens des Höhenwinkels führt. Die griechische Mathematik erreichte später eine erstaunliche Höhe. Aber sie geriet mehr und mehr unter den Einfluß der idealistischen Philosophie, insbesondere der Schule PLATONS. Dadurch riß die Verbindung der Mathematik zur Praxis ab. Ja, man hielt es nicht einmal mehr für nötig, die Methoden der praktischen Mathematik, wozu Trigonometrie und Feldmeßkunst gehörten, schriftlich niederzulegen. In der Sklavenhaltergesellschaft galt jede praktische Tätigkeit, sogar die des bildenden Künstlers, trotz der Vorliebe der griechischen Sklavenhalter für Skulpturen, als minderwertig.

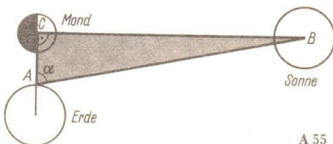
Andererseits kann man aus erhalten gebliebenen Bauwerken der griechischen und römischen Antike ersehen, daß die damaligen Ingenieure ein bedeutendes Wissen, auch auf dem Gebiet der praktischen Geometrie, besessen haben. So wurde z. B. um 530 v. u. Z. zur Wasserversorgung der Stadt Samos unter dem Baumeister EUPALINOS ein 1 km langer geneigter Tunnel durch einen Berg bohrt. Der Stollen wurde von den beiden Eingängen aus vorgetrieben, und die beiden Seiten verfehlten einander nur um 3 m: eine Glanzleistung. Später hat HERON von ALEXANDRIA (um 100 u. Z.) auch die feldmессerischen Geräte beschrieben, insbesondere den sogenannten Diopter (Sehrohr). Mit Zahnrädern und Schrauben war er in zwei zueinander senk-

rechten Ebenen verstellbar. Um Höhenunterschiede zu messen, wurde das Gelände genau wie heute mit Meßblättern abgesteckt. Außerordentlich wichtig für den späteren Aufbau einer systematischen Trigonometrie waren Beiträge von ARCHIMEDES (287?—212 v. u. Z.), dem bedeutendsten Mathematiker des Altertums.

Als in den letzten Jahrhunderten vor unserer Zeitrechnung Großreiche und später das römische Weltreich entstanden, stiegen die Anforderungen an die Landvermesser. Diese Vermessungen erforderten verbesserte astronomische Kenntnisse. Die astronomische Forschung erhielt so neue Impulse. In Verbindung damit machte auch die Trigonometrie, das wichtigste mathematische Hilfsmittel der Astronomie, Fortschritte.

ARISTARCHOS (um 270 v. u. Z.) versuchte auf trigonometrischem Wege, das Verhältnis der Entfernungen Erde—Mond und Erde—Sonne zu ermitteln, indem er den Winkel α zwischen Mond, Erde und Sonne bei Halbmond maß, wenn also bei C ein rechter Winkel auftritt; vgl. Bild A 55.

Da er aber α wegen der mangelhaften Instrumente nicht genau bestimmen konnte, erhielt er für dieses Verhältnis nur 1:19 und nicht den richtigen Wert 1:370. HIPPARCHOS (180?—125? v. u. Z.) berechnete eine Sehnentafel, d. h. eine Tafel der Sehnenlängen bei wachsendem Bogen. Schließlich faßte PTOLEMAIOS VON ALEXANDRIA (85?—165? v. u. Z.) alle früheren Ansätze und Methoden der Astronomie in einer Darstellung des geozentrischen Weltbildes zusammen, einem Buch mit dem Titel „Die Große Zusammenstellung“.



A 55

Die Araber verstümmelten später den griechischen Titel zu *Almagest*. Da PTOLEMAIOS weder den Sinussatz noch den Kosinussatz kannte, zerlegte er beliebige Dreiecke in zwei rechtwinklige Dreiecke.

Die Umwandlung der Trigonometrie unter Verwendung der Seitenverhältnisse Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens am rechtwinkligen Dreieck wurde von den arabischen Gelehrten im 9. Jahrhundert vollzogen. Der *Almagest* war schon 833 ins Arabische übersetzt worden. Während in Europa durch den kulturfeindlichen Einfluß der christlichen Kirche auch die Wissenschaften darniederlagen, blühte die arabische Kultur auf. Noch heute spiegeln die Märchen aus 1001 Nacht jene glanzvolle Zeit wider.

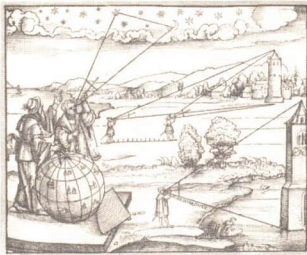
Auch die Mathematik, insbesondere Algebra und Trigonometrie, erfuhren eine bedeutende Förderung. ABU NASR (um 1000) fand den Sinussatz der ebenen Trigonometrie. Das ganze nun geschlossene Lehrgebäude der Trigonometrie wurde schließlich von AT-TUSI (1201—1274) erstmals zusammengefaßt. Auch umfangreiche astronomische und trigonometrische Tafeln wurden berechnet; z. B. tabulierte ULUG BEG (1392—1449) die Winkelfunktionen mit einer Genauigkeit von 17 Dezimalen.

Die indische Trigonometrie und Astronomie standen auf einem ähnlich hohen Niveau.

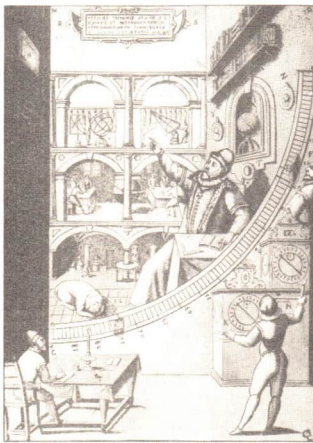
Die großartigen trigonometrischen Kenntnisse gelangten aber nur zu einem ganz geringen Teil nach Europa, so daß man hier noch einmal von vorn anfangen mußte. Erst im 15. Jahrhundert konnte die europäische Mathematik wenigstens in Teilen die antike Mathematik erreichen und übertreffen. Die neuen Ergebnisse wurden erzielt, weil das gesellschaftliche Leben Probleme aufwarf, deren Lösung auch den Einsatz neuer mathematischer Methoden erforderte. Dies betraf auch die Trigonometrie.

Im Schoße der Feudalgesellschaft wuchs eine neue Klasse, die Bourgeoisie, heran. Sie war an der Förderung des Handels interessiert, sie betrieb in ihrem eigenen politischen und ökonomischen Interesse die Kolonisierung, die Erschließung neuer, in Übersee gelegener Märkte. Man fand den Seeweg nach Indien, und man entdeckte einen neuen Erdteil. Der Handel nach Übersee warf ungeheure Profite ab. Die Navigation auf hoher See erfordert aber ein bedeutendes Maß astronomischer und trigonometrischer Kenntnisse.

Auch die Astronomie stellte an die Trigonometrie hohe Anforderungen. Indem man mit verbesserten astronomischen Instrumenten, dem Jakobsstab und dem Mauerquadranten, genaue Messungen am Himmel anstellte, bemerkte man, daß das ptolemäische geozentrische Weltbild nicht richtig sein konnte; vgl. die Bilder A 56 und A 57. Den entscheidenden Schritt, der eine wissenschaftliche Großtat ersten Ranges darstellt, vollzog der polnische Gelehrte NIKOLAUS KOPERNIKUS (1473—1543). In seinem Todesjahr erschien sein wissenschaftliches Hauptwerk „*De revolutionibus orbium coelestium*“ (d. i. Über die Umdrehungen der Himmelskörper), in



A 56 Verwendung des von dem jüdischen Gelehrten LEVI BEN GURSON (1288–1344) erfundenen sogenannten Jakobsstabes zur Winkelmessung. – Aus dem Titelblatt einer Abhandlung (1533) von P. APIAN



A 57 Mauerquadrant (gemauerter Viertelkreis mit Winkelteilung). Die Sternhöhe kann gemessen werden, indem der Beobachter durch einen Spalt (links oben) den Stern anvisiert. – Die Darstellung zeigt den dänischen Astronomen TYCHO BRAHE bei Messungen auf seiner Sternwarte in Uraniborg.

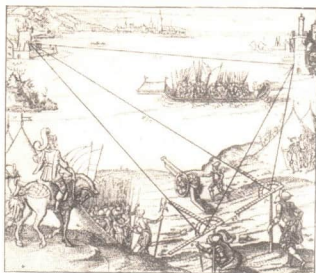
dem das heliozentrische Weltbild begründet wurde. Freilich, erst in einem erbitterten opferreichen Kampf gegen die Kirche – G. BRUNO wurde verbrannt, G. GALILEI wurde bis zu seinem Tode von der Inquisition gefangengehalten – konnte der Wahrheit zum Siege verholfen werden.

Auch die Ausrüstung der Heere mit Kanonen machte die Entwicklung des Vermessungswesens und damit der Trigonometrie dringend notwendig. Um die Geschütze sorgfältig zu richten, bedurfte es genauer Verfahren, Entfernungen im Gelände ermitteln zu können; vgl. Bild A 58. Hierzu wurde das Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten entwickelt.

Auf Grund dieser und noch anderer praktischer Anforderungen entwickelte sich die Trigonometrie im 15., 16. und 17. Jahrhundert rasch. Schon JOHANNES VON GMUNDEN (1380?–1442), Magister an der Universität Wien, und sein Nachfolger GEORG VON PEURBACH (1423–1461) beschäftigten sich mit der Neuberechnung erweiterter trigonometrischer Tafeln. Dieses umfangreiche Werk vollbrachte schließlich REGIOMONTAN (1436–1476); vgl. Bild A 59. Von ihm stammen Sinustafeln, die von Minute zu Minute fortschreiten, sowie eine gradweise fortschreitende Tangententafel.

REGIOMONTAN war ohne Zweifel der führende europäische Mathematiker seiner Zeit. In seinem allerdings erst im Jahre 1533 gedruckten Werk „De triangulis omnimodis libri quinque“ (Fünf Bücher über alle Dreiecke) faßte REGIOMONTAN alle vorhandenen trigonometrischen Verfahren, Sätze und Hilfstabellen zur Trigonometrie zusammen. Dort wird der Sinussatz ausführlich verwendet und zum erstenmal der Kosinussatz ausgesprochen. Durch REGIOMONTAN war nun auch in Europa die Trigonometrie zu einer einheitlichen Wissenschaft geworden. Dem mathematischen Inhalt nach hatte sie schon damals das heutige Niveau erreicht.

In der Folgezeit wurden die Tafeln noch wesentlich verbessert, so durch den Wittenberger Mathematiker RHAETICUS (1514–1576), den Franzosen VIETA (1540–1603) und den großen Astronomen JOHANNES KEPLER (1571–1630). Die heute verwendeten Bezeichnungen in der Trigonometrie sind freilich erst in späterer Zeit eingeführt worden. Im wesentlichen haben sich die von dem genialen schweizerischen Mathematiker LEONHARD EULER (1707–1783) (Bild A 61) verwendeten Bezeichnungen durchgesetzt: π als Maßzahl des Einheitshalbkreises, a , b , c für die Dreiecksseiten, die Symbole \sin , \cos , \tan für die trigonometrischen Funktionen.

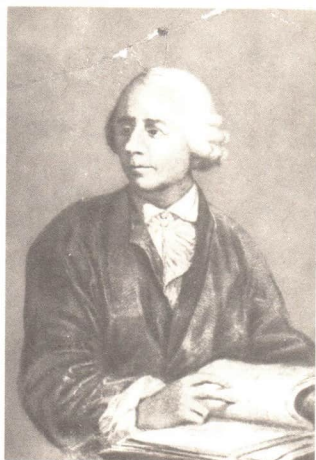


A 58 Militärisches Vermessungswesen. — Abbildung aus L. ZUBLERs Kurzem Bericht von den neuen geometrischen Instrumenten, 1602



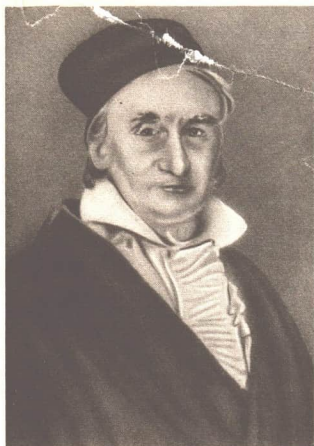
A 59 REGIOMONTAN (1436–1476)

A 60 Tuschzeichnung aus dem 17. Jahrhundert in einer japanischen Darstellung trigonometrischer Verfahren. Ein Beispiel für die als Ergebnis praktischer Anforderungen entwickelte Trigonometrie anderer Länder



A 61 LEONHARD EULER (1707–1783)





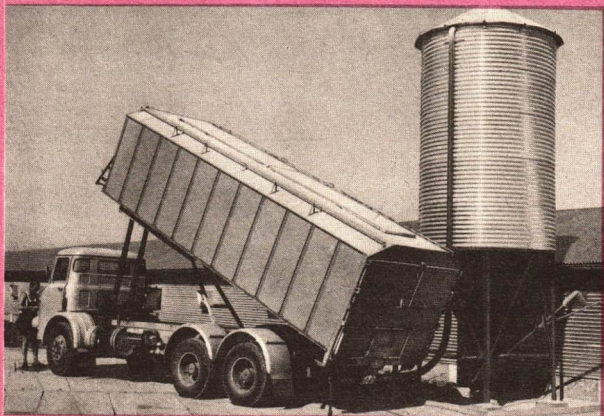
A 62
CARL FRIEDRICH GAUSS
(1777–1855)

Von den großen Mathematikern und Geodäten des 18. und 19. Jahrhunderts wurde die Trigonometrie als Hilfsmittel der Erdvermessung weiter ausgebaut. So konnte z. B. der Franzose P. L. M. DE MAUPERTIUS (1698–1759) durch Messung eines Längenkreises die Abplattung der Erde an den Polen nachweisen. Neu entdeckte Länder wurden in allen Einzelheiten kartographisch aufgenommen. Der größte deutsche Mathematiker C. F. GAUSS (1777–1855) (Bild A 62) entwickelte schließlich noch die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate, mit der es möglich ist, sich in den Schlußberechnungen weitgehend von den unweigerlich auftretenden Beobachtungsfehlern frei zu machen.

B Körperdarstellung und Körperberechnung

- 66 **Wiederholung und Ergänzung**
Allgemeines (66) · Prismen und Zylinder (67) · Pyramiden, Kegel und Kugeln (70) · Darstellung von Prismen und Pyramiden (72) · Aufgaben zur Körperberechnung und Körperdarstellung (77) · Konstruktion der wahren Länge einer Strecke (78) · Konstruktion der wahren Größe einer ebenen Figur (80) · Ebene Schnitte durch gerade Prismen (81) · Darstellung von Kreiszyllindern und Kreiskegeln (83) · Ebene Schnitte durch gerade Kreiszyllinder (86)
- 87 **Pyramiden- und Kreiskegelstümpfe**
Pyramidenstümpfe; Volumen und Oberfläche (87) · Darstellung von Pyramidenstümpfen (89) · Kreiskegelstümpfe; Volumen und Oberfläche (90) · Darstellung von Kreiskegelstümpfen (93) · Zusammengesetzte Körper (94)
-

Für die kurzfristige Lagerung von Zement, Futter, Zuschlagstoffen in Industriebetrieben, in der Landwirtschaft und an Baustellen setzen sich Silos durch, die ein schnelles Füllen und Entleeren ermöglichen. Auch für den Transport zahlreicher Güter werden in immer größerem Umfang Behälter eingesetzt, die ein schnelles wechselseitiges Umsetzen zwischen Lastkraftwagen, Eisenbahn und Schiff ermöglichen. Dabei kommt es auf eine optimale Konstruktion, d. h. auf ein günstiges Verhältnis von Volumen und Materialaufwand, und auf günstige Transportfähigkeit an.



1 Allgemeines

Die Ausführungen in diesem Kapitel beschäftigen sich mit **geometrischen Körpern**. Es werden wesentliche Eigenschaften verschiedener Teilmengen von Mengen geometrischer Körper untersucht, Berechnungen an Körpern durchgeführt und Körper mit Hilfe von Methoden der darstellenden Geometrie auf eine Ebene abgebildet.

Als **geometrischer Körper** wird eine Menge von Punkten bezeichnet, die **allseitig** von einer Fläche (von einer einzigen Fläche, z. B. bei der Kugel, oder von mehreren zusammenhängenden Flächenstücken, z. B. beim Würfel oder beim Zylinder) begrenzt ist.

Ein geometrischer Körper ist ein abstraktes Gebilde, eine Idealisierung der objektiven Realität. Es wird von bestimmten Eigenschaften der realen Körper, z. B. der stofflichen Zusammensetzung, der Masse, der Farbe, der Oberflächenbeschaffenheit, aber auch von unwesentlichen Einzelheiten der Form abgesehen. Diese Abstraktion gestattet, verschiedenartige reale Körper miteinander in Beziehung zu setzen und das Wesentliche ihrer Form mathematisch zu erfassen.

Je nachdem, wie weit Einzelheiten der Form eines realen Körpers als wesentlich erachtet werden, kann dieser Körper durch verschiedene geometrische Körper angenähert werden. So kann z. B. der Erdkörper in erster grober Annäherung als Kugel aufgefaßt werden; für astronomische Zwecke, z. B. für die Berechnung von Gravitationswirkungen auf den Mond und die Nachbarplaneten, reicht diese Annäherung meist aus. Da der Erdkörper jedoch an den Polen abgeplattet ist, kann als zweite, genauere Annäherung ein Rotationskörper angesehen werden, dessen Achsenschnitt eine Ellipse ist. Diese Annäherung liegt vielen geographischen (topographischen) Untersuchungen zugrunde. Noch genauere Annäherungen des Erdkörpers werden z. B. bei der Bahnbestimmung künstlicher Erdsatelliten benötigt.

Wie bei ebenen Figuren zwischen der begrenzenden Linie und der Fläche unterschieden wird (z. B. Viereck — Vierecksfläche), ist bei geometrischen Körpern zwischen der begrenzenden Fläche und dem Körper zu unterscheiden, z. B.:

Kugelfläche — Kugelkörper.

In der Umgangssprache wird, wenn Verwechslungen ausgeschlossen erscheinen, oftmals die gleiche Kurzbezeichnung für die begrenzen- de Fläche und für den Körper verwendet. Zum Beispiel kann, wenn von „Kugel“ gesprochen wird, sowohl die Kugelfläche als auch der Kugelkörper gemeint sein. In der Mathematik wird „Kugel“ hauptsächlich im Sinne von „Kugelfläche“ verwendet, ähnlich wie „Kreis“ im Sinne von „Kreislinie“.

Bei der Berechnung des **Volumens** und des **Oberflächeninhaltes** geometrischer Körper bedeuten die Variablen in der Regel Größen. Die Formeln zur Körperberechnung können ebenso wie die Formeln zur Flächenberechnung als Gleichungen von Funktionen aufgefaßt werden.

1

Aus der Formel für die Berechnung des Volumens eines quadratischen Prismas mit der Grundkante a und der Höhe h , der Gleichung

$$V = a^2 \cdot h,$$

geht hervor, daß V von zwei Variablen – a und h – abhängig ist. Das bedeutet, daß jedem Größenpaar $[a; h]$ ein Wert der Größe V eindeutig zugeordnet ist. Wird in der Gleichung $V = a^2 \cdot h$ für die Variable a ein konstanter Wert angenommen, so stellt sich V als Funktion von h dar.

$$V(h) = a^2 \cdot h$$

Diese Funktion ist eine lineare Funktion.

Wird demgegenüber in der Gleichung $V = a^2 \cdot h$ für die Variable h ein konstanter Wert gewählt, so ergibt sich

$$V(a) = a^2 \cdot h,$$

d. h. eine quadratische Funktion.

①

Was für eine Funktion ergibt sich für das Volumen eines Prismas, wenn die Grundfläche als unabhängige Variable angenommen wird?

In der Übersicht sind die Bedeutungen der in diesem Kapitel verwendeten Variablen genannt.

a, b, c, \dots	} Kanten (allgemein)	h	Körperhöhe
a_1, a_2, \dots		h_s	Höhe einer Seitenfläche (Prisma und Pyramide)
r	Kreis- (Kugel-) Radius	A_G	Inhalt der Grundfläche
d	Kreis- (Kugel-) Durchmesser	A_D	Inhalt der Deckfläche
$r_1 (d_1)$	Radius (bzw. Durchmesser) der Grundfläche (Zylinder und Kegel)	A_S	Inhalt einer Seitenfläche (Prisma und Pyramide)
$r_2 (d_2)$	Radius (bzw. Durchmesser) der Deckfläche (Zylinder)	A_M	Inhalt der Mantelfläche
s	Mantellinie (Zylinder und Kegel); Seitenkante (Prisma und Pyramide)	A_O	Inhalt der (gesamten) Oberfläche
		V	Volumen (Rauminhalt)

2 Prismen und Zylinder

①

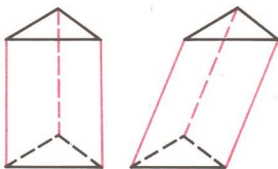
DEFINITION: Ein geometrischer Körper heißt *Prisma*, wenn er von folgenden Flächen begrenzt wird:

- (1) von zwei kongruenten n -Ecken, die in parallelen Ebenen liegen, und
- (2) von n Parallelogrammen.

Die kongruenten Vielecke, die in zueinander parallelen Ebenen liegen, werden **Grundfläche** und **Deckfläche**, die Parallelogramme werden **Seitenflächen** des Prismas genannt. Die Gesamtheit der Seitenflächen bildet die **Mantelfläche** (den **Mantel**) des Prismas.

Die Prismen können nach der Lage der Seitenkanten zur Grundfläche eingeteilt werden.

Ein Prisma heißt *gerade*, wenn alle Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche stehen, anderenfalls heißt es *schief*; vgl. Bild B 1.



B 1

- 2 a) Weisen Sie nach, daß alle Seitenflächen eines geraden Prismas Rechtecke sind!
 b) Kann ein schiefes Prisma auch Rechtecke als Seitenflächen haben?

Ein Prisma heißt *regelmäßig*, wenn

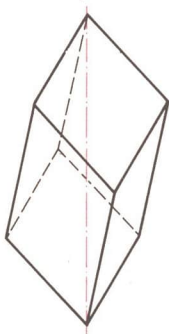
- (1) es gerade ist und
 (2) seine Grundfläche ein regelmäßiges n -Eck ist.

- 3 Veranschaulichen Sie den Zusammenhang zwischen der Menge aller Prismen, der Menge aller geraden Prismen, der Menge aller schiefen Prismen und der Menge aller *regelmäßigen* Prismen durch ein Mengendiagramm!

- 4 Sind a) Quader, b) Würfel, c) der im Bild B 2 in Kavalierperspektive dargestellte Körper (eine Kristallform) Prismen? Gehören sie zu einer der genannten besonderen Arten der Prismen? Begründen Sie Ihre Aussagen!

Ein **Kreiszylinder** wird begrenzt

von zwei kongruenten Kreisflächen, die in zueinander parallelen Ebenen liegen, und von einer gekrümmten, in die Ebene abwickelbaren Fläche.

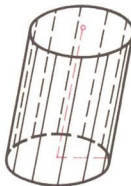


B 2

Die kongruenten Kreisflächen, die in zueinander parallelen Ebenen liegen, werden **Grundfläche** und **Deckfläche**, die gekrümmte Fläche wird **Mantelfläche** (Mantel) des **Kreiszylinders** genannt. Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Grund- und der Deckfläche heißt **Achse** des **Kreiszylinders**.



B 3



Der Mantel eines Kreiszylinders enthält gerade Linien, die einen Punkt der Begrenzungslinie der Grundfläche mit einem Punkt der Begrenzungslinie der Deckfläche verbinden. Sie sind zueinander und zur Achse des Kreiszylinders parallel. Diese Linien heißen **Mantellinien** des **Kreiszylinders**; vgl. Bild B 3.

Die Kreiszylinder können nach der Lage der Achse zur Grundfläche eingeteilt werden.

Ein Kreiszylinder heißt *gerade*, wenn seine Achse senkrecht auf der Grundfläche steht, anderenfalls heißt er *schief*.

- 5 a) Welche Lage haben die Mantellinien eines geraden Kreiszylinders zur Grundfläche?
 b) Ein gerader Kreiszylinder ist ein Rotationskörper. Von welchen ebenen Figuren kann er erzeugt werden? Wie liegt die Rotationsachse zu diesen Figuren?

Als Zylinder werden allgemein geometrische Körper bezeichnet, die als Grund- und Deckfläche kongruente krummlinig begrenzte, in parallelen Ebenen liegende Figuren haben und von einem in die Ebene abwickelbaren Mantel begrenzt sind. Die Kreiszylinder bilden eine echte Teilmenge der Menge aller Zylinder.

Für Prismen und Zylinder gemeinsam gilt die Formel für die Berechnung des Volumens

$$V = A_G \cdot h$$

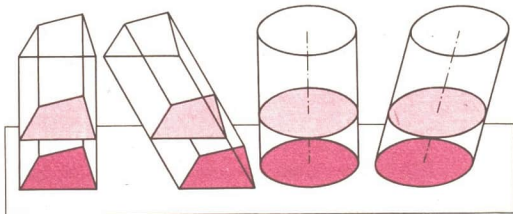
und die Formel zur Berechnung des **Oberflächeninhaltes**

$$A_O = 2A_G + A_M$$

Der Mantel eines geraden Kreiszylinders ist ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Länge der Mantellinie (und damit gleich der Körperhöhe) und dessen andere Seite gleich dem Umfang der Grundfläche ist.

- 6 Entwickeln Sie aus den Formeln zur Berechnung des Volumens und des Oberflächeninhaltes eines Prismas die Formeln für die Berechnung eines Quaders mit den Kanten a , b , c !

Wird ein Prisma oder ein Zylinder parallel zur Grundfläche geschnitten, so sind die Schnittflächen zur Grundfläche kongruent; vgl. Bild B 4.



B 4

Aufgaben b 1 bis 23

3 Pyramiden, Kegel und Kugeln

2

DEFINITION: Ein geometrischer Körper heißt *Pyramide*, wenn er von folgenden Flächen begrenzt wird:

- (1) von einem n -Eck und
- (2) von n Dreiecken.

Das Vieleck wird **Grundfläche**, die Dreiecke werden **Seitenflächen** der Pyramide genannt. Die Dreiecke haben einen gemeinsamen Eckpunkt, die **Spitze** der Pyramide. Die Gesamtheit der Seitenflächen bildet die **Mantelfläche** (den **Mantel**) der Pyramide; vgl. Bild B 5.

Die Pyramiden können in gerade und schiefe Pyramiden eingeteilt werden.

Eine Pyramide heißt *gerade*, wenn

ihre Grundfläche einen Mittelpunkt hat und

ihre Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt.

Pyramiden, die nicht gerade sind, heißen *schief*.

Eine Pyramide heißt *regelmäßig*, wenn

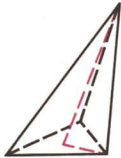
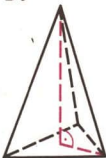
sie gerade ist und

ihre Grundfläche ein regelmäßiges n -Eck ist.

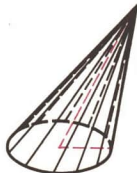
7

- Beweisen Sie, daß bei einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt, die Seitenkanten gleich lang sind!*
- Welchen Durchschnitt haben die Menge aller schiefen Pyramiden und die Menge aller regelmäßigen Pyramiden?*

B 5



B 6



Ein *Kreiskegel* wird begrenzt

von einer Kreisfläche und

von einer gekrümmten, in die Ebene abwickelbaren Fläche, die in eine Spitze ausläuft.

Die Kreisfläche wird **Grundfläche**, die gekrümmte Fläche **Mantelfläche** (**Mantel**) des Kreiskegels genannt. Die Verbindungsgerade des Mittelpunktes der Grundfläche und der Spitze des Körpers heißt **Achse** des Kreiskegels.

Der Mantel eines Kreiskegels enthält gerade Linien, die die Spitze des Körpers mit den Punkten der Begrenzungslinie der Grundfläche verbinden. Diese Linien heißen **Mantellinien** des Kreiskegels; vgl. Bild B 6.

Wie die Kreiszyylinder können auch die Kreiskegel nach der Lage der Achse zur Grundfläche eingeteilt werden.

Ein Kreiskegel heißt *gerade*, wenn seine Achse senkrecht auf der Grundfläche steht, anderenfalls heißt er *schief*.

- 8 Ein gerader Kreiskegel ist ein Rotationskörper. Von welchen ebenen Figuren kann er erzeugt werden? Wie liegt die Rotationsachse zu diesen Figuren?

Als Kegel werden allgemein geometrische Körper bezeichnet, die als Grundfläche eine krummlinig begrenzte ebene Figur, eine Spitze und einen in die Ebene abwickelbaren Mantel haben. Die Kreiskegel bilden eine echte Teilmenge der Menge aller Kegel.

Für Pyramiden und Kegel gemeinsam gilt die Formel für die Berechnung des Volumens

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$$

- 9 Entwickeln Sie aus dieser Formel die Formel für die Berechnung des Volumens eines Kreiskegels mit dem Grundflächendurchmesser d !

Ebenso gilt für Pyramiden und Kegel gemeinsam die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhaltes

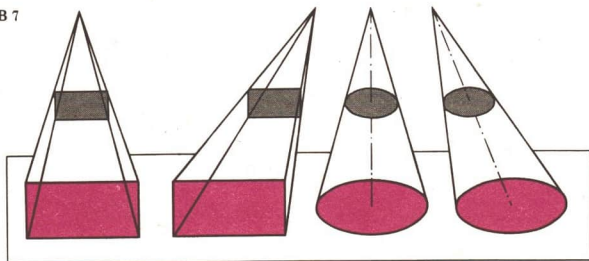
$$A_O = A_G + A_M$$

Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist ein Kreissektor, dessen Radius gleich der Länge der Mantellinie des Körpers und dessen Bogenlänge gleich dem Umfang der Grundfläche ist. Daraus folgt

$$A_M = \pi \cdot r \cdot s$$

Wird eine Pyramide oder ein Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten, so sind die Schnittfiguren zur Grundfläche ähnlich; vgl. Bild B 7.

B 7



- 10 Beim Schnitt eines geraden Kreiskegels parallel zu seiner Grundfläche erhält man Kreise. Geben Sie den Radius der Schnittkreise als Funktion des Abstandes zwischen Grundfläche und Schnittfläche durch eine Gleichung an!

Eine Kugel wird von einer Fläche begrenzt, deren Punkte von einem festen Punkt, dem Kugelmittelpunkt, gleichen Abstand haben. Dieser Abstand ist der Kugelradius.

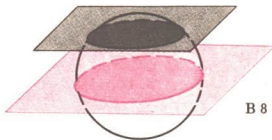
Für die Berechnung des **Volumens** einer Kugel gilt die Formel

$$V = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot r^3$$

und für die Berechnung des **Oberflächeninhaltes**

$$A_0 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Wird eine Kugelfläche von einer Ebene geschnitten, so ist die Schnittfigur ein Kreis. Enthält die Schnittebene den Mittelpunkt der Kugel, so ist der Durchmesser des Schnittkreises gleich dem Kugeldurchmesser; vgl. Bild B 8.



B 8

- 11 Stellen Sie den Radius des Schnittkreises (bei gegebenem Kugelradius) als Funktion des Abstandes des Kugelmittelpunktes von der Schnittebene durch eine Gleichung dar!

Aufgaben b 24 bis 50

4 Darstellung von Prismen und Pyramiden in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion

Zur bildlichen Darstellung geometrischer Körper wendet man in der Praxis hauptsächlich die **Zweitafelprojektion (Grundriß-Aufriß-Verfahren)** und die **schräge Parallelprojektion**, zu der die **Kavalierperspektive** gehört, an.

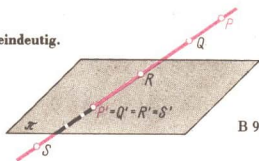
Beide Darstellungsverfahren beruhen auf **Parallelprojektion**. Bei dieser Projektion werden die Punkte des Raumes durch **parallele Projektionsgeraden** auf die Ebene abgebildet. Jedem Punkt P des Raumes (*Originalpunkt*) entspricht genau ein Punkt P' der Bildebene (*Bildpunkt*, *Projektion von P*).

3

Es gilt somit der folgende Satz.

SATZ: Die Abbildung durch Parallelprojektion ist **eindeutig**.

Umgekehrt ist aber der Bildpunkt P' nicht nur die Projektion des Raumpunktes P , sondern auch die Projektion aller anderen Punkte der Projektionsgeraden durch P ; vgl. Bild B 9.



B 9

Die Abbildung durch Parallelprojektion ist nicht umkehrbar eindeutig (nicht eineindeutig).

Weiterhin gilt für die **Parallelprojektion**:

– **Geraden werden im allgemeinen als Geraden abgebildet.**

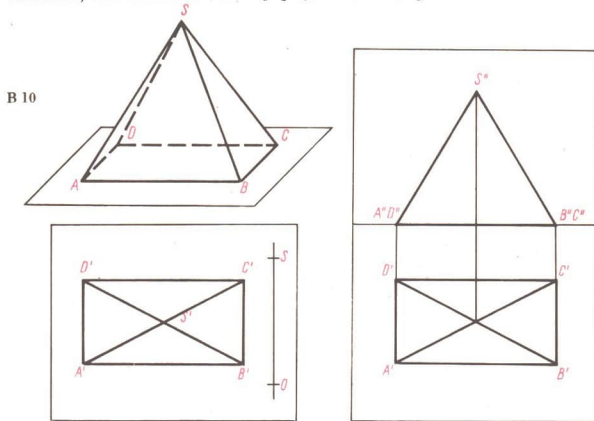
Sonderfall: Geraden, die parallel zu den Projektionsgeraden sind, werden als Punkte abgebildet (diese Geraden heißen deshalb auch *projizierende Geraden*).

- Parallele Geraden werden im allgemeinen als parallele Geraden abgebildet.
- Ebenen werden im allgemeinen auf die gesamte Bildebene abgebildet.
Sonderfall: Ebenen, die parallel zu den Projektionsgeraden sind, werden als Geraden abgebildet (diese Ebenen heißen deshalb auch *projizierende Ebenen*).
- Strecken und Winkel, die in Parallelebenen zur Bildebene liegen, werden kongruent abgebildet.
Diese Eigenschaft bedingt die kongruente Abbildung geschlossener ebener Figuren.

Ist bei der Parallelprojektion der Winkel, den die Projektionsgeraden mit der Bildebene einschließen, ein Rechter, so heißt die Projektion **senkrechte Projektion**, anderenfalls spricht man von **schräger (schiefer) Parallelprojektion**.

Bei der Abbildung durch *senkrechte Projektion* ist es sinnvoll, die Bildebene entweder horizontal oder vertikal anzunehmen. Das Bild durch senkrechte Projektion auf eine horizontale Bildebene heißt **Grundriß**, auf eine vertikale Bildebene **Aufriß**.

Da die Abbildung durch Parallelprojektion nicht umkehrbar eindeutig ist, muß die Lage eines Punktes, von dem ein Bild, z. B. der Grundriß, gegeben ist, noch durch ein weiteres Bestimmungsstück gekennzeichnet werden. Dieses Bestimmungsstück kann eine Höhenangabe (*Eintafelprojektion mit Höhenmaßstab oder Höhenzahl*) oder ein Aufriß (*Zweitafelprojektion*) sein; vgl. Bild B 10.

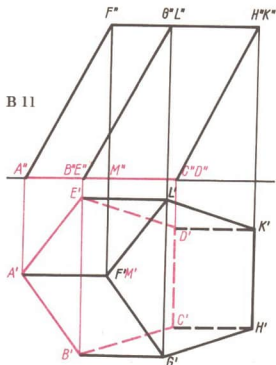


Bei der Zweitafelprojektion ist es üblich, den Grundriß eines geometrischen Gebildes (z. B. Punkt, Gerade, Ebene) mit einem hochgestellten Strich, den Aufriß mit zwei Strichen zu kennzeichnen (z. B. erhält der Grundriß des Punktes A die Bezeichnung A' , der Aufriß die Bezeichnung A''). Damit werden die zusammengehörenden Risse sichtbar gemacht; es besteht zwischen einem abzubildenden Punkt des Raumes (A) und dem Paar seiner Risse (A' ; A'') eine umkehrbar eindeutige Zuordnung.

2

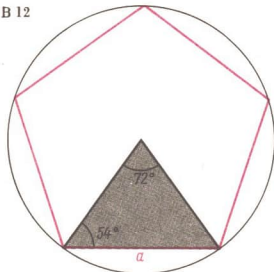
Die Grundfläche eines schiefen Prismas sei ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ mit einer Seite von 3,5 cm Länge. Ein Eckpunkt (F) der Deckfläche $FGHKL$ liege senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche; die Höhe des Körpers betrage 6 cm.

Stellen Sie den Körper in Zweitafelprojektion so dar, daß seine Grundfläche in der Grundrißebene liegt und sich die Seitenkanten in wahrer Länge abbilden; vgl. Bild B 11!



B 11

B 12



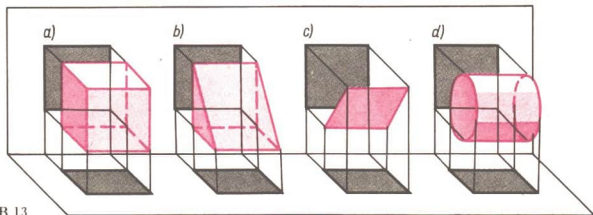
Vorüberlegung:

Die Lage des Körpers gegenüber der Grundrißebene bedingt, daß Grund- und Deckfläche im Grundriß in wahrer Größe abgebildet werden. Beim Zeichnen eines regelmäßigen Fünfecks geht man zweckmäßigerweise von einem Bestimmungsdreieck dieser Figur (vgl. Lerneinheit A 22) aus, das entsteht, wenn zwei benachbarte Eckpunkte mit dem Mittelpunkt verbunden werden; vgl. Bild B 12. Wenn die Seitenkanten des Körpers in wahrer Länge abgebildet werden sollen, dann müssen sie parallel zur Aufrißebene angenommen werden.

Ausführung:

Der Grundriß der Grundfläche, ein regelmäßiges Fünfeck, wird so gezeichnet, daß die Verbindungsstrecke eines Eckpunktes (im Beispiel A) mit dem Mittelpunkt M der Figur parallel zur Rißachse ist; diese Verbindungsstrecke ist nämlich der Grundriß einer Seitenkante (AF) des Prismas. Anschließend werden der Grundriß der Deckfläche, der Grundriß der weiteren Seitenkanten und der Aufriß des Körpers konstruiert. Zeichenkontrollen ergeben auf Grund der Eigenschaft eines Prismas, daß die Kanten an der Deckfläche zu den entsprechenden Kanten an der Grundfläche und die Seitenkanten untereinander parallel sind.

Werden bei der Darstellung eines räumlichen Gegenstandes in Zweitafelprojektion jedoch die Bezeichnungen der Risse markanter Punkte teilweise oder vollständig weggelassen, so kann es vorkommen, daß das Original aus seinem Grundriß und Aufriß nicht mehr eindeutig erkennbar ist. Das Bild B 13 zeigt als Beispiel vier verschiedene geometrische Gebilde, deren Grund- und Aufrisse Quadrate sind.



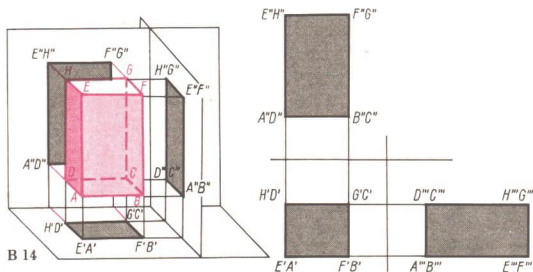
B 13

12

Fertigen Sie eine Skizze der Risse für die Fälle a) bis c) in Bild B 13 an! Bezeichnen Sie jeweils die zugeordneten Risse markanter Punkte, so daß die Darstellung unmißverständlich wird!

In solchen Fällen kann der darzustellende Gegenstand auch durch einen zweiten Aufriß näher bestimmt werden. Der zweite Aufriß wird meist mit drei hochgestellten Strichen bezeichnet.

In der Praxis wird die zweite Aufrißebene oftmals senkrecht zur ursprünglichen Aufrißebene gewählt; in diesem Falle bildet die zweite Rißachse mit der ursprünglichen Rißachse einen rechten Winkel; vgl. Bild B 14.



B 14

13

Ergänzen Sie die Risse im Bild B 13 jeweils durch einen zweiten Aufriß dieser Art!

Von diesem Abbildungsprinzip wird auch beim technischen Zeichnen Gebrauch gemacht; dabei wird im allgemeinen die Ansicht des Werkstückes, die dem zweiten Aufriß entspricht (Seitenansicht), neben der Vorderansicht (d. h. der Ansicht, die dem ursprünglichen Aufriß entspricht) angeordnet.

Als Bildebene für die *schräge Parallelprojektion* wird meist eine vertikale Ebene angenommen. Die Richtung der Projektionsgeraden wird so gewählt, daß möglichst anschauliche Bilder entstehen.

Eine gebräuchliche Darstellungsart für Zeichnungen und Skizzen in schräger Parallelprojektion ist die **Kavalierperspektive**.

Für die **Kavalierperspektive** gelten die folgenden Zeichenregeln.

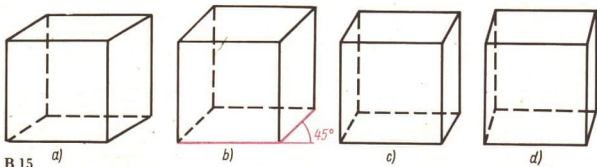
1. Strecken, die **parallel zur Bildebene** liegen, werden in **wahrer Länge** gezeichnet.

B

- Winkel und ebene Figuren, die parallel zur Bildebene liegen, werden in wahrer Größe gezeichnet.
- Strecken, die senkrecht auf der Bildebene stehen, werden auf die Hälfte verkürzt (Verkürzungsverhältnis $q = \frac{1}{2}$) und unter einem Winkel von 45° zur Richtung, die eine horizontale Gerade auf der Bildebene hat (Verzerrungswinkel $\alpha = 45^\circ$), gezeichnet.

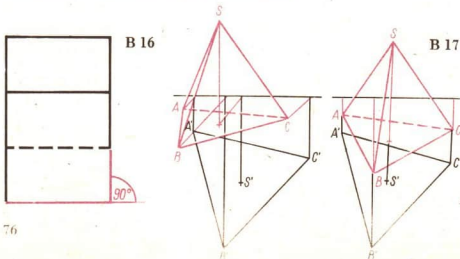
14) Veranschaulichen Sie mit Hilfe eines Würfelmodells und einer Tafel, wie die Projektionsgeraden bei einer Abbildung durch *Kavalierperspektive* liegen!

Neben der *Kavalierperspektive* sind noch andere Darstellungsarten in schräger Parallelprojektion üblich, bei denen Strecken und Winkel, die in vertikalen Ebenen liegen, kongruent abgebildet werden. Das Bild B 15 zeigt außer der Darstellung eines Würfels in *Kavalierperspektive* [$\alpha = 45^\circ$; $q = \frac{1}{2}$ (Teilbild b)] die Darstellung des gleichen Würfels in schräger Parallelprojektion mit den Daten $\alpha = 30^\circ$; $q = \frac{1}{2}$ (Teilbild a); $\alpha = 60^\circ$; $q = \frac{1}{3}$ (Teilbild c); $\alpha = 75^\circ$; $q = \frac{1}{3}$ (Teilbild d). Man erkennt durch den Vergleich dieser Darstellungen, daß mit zunehmendem Verzerrungswinkel ($\alpha < 90^\circ$) die Seitenansicht der darzustellenden Gegenstände immer mehr zurücktritt und die Darstellung an Anschaulichkeit verliert.



Bei der Darstellung von Körpern, bei denen die Seitenansicht gegenüber der Vorderansicht zurücktreten kann, z. B. bei regelmäßigen Prismen und Pyramiden, Kreiszyklindern, Kegeln und Kugeln, wird oftmals eine Darstellung mit einem Verzerrungswinkel $\alpha = 90^\circ$ und einem Verkürzungsverhältnis $q = \frac{1}{2}$ verwendet. Bild B 16 zeigt einen Würfel in dieser Darstellungsart.

Für einen Verzerrungswinkel $\alpha = 90^\circ$ vereinfacht sich das Zeichnen von Figuren, die in einer zur Grundrißebene parallelen Ebene liegen, gegenüber den Darstellungen mit anderen Verzerrungswinkeln erheblich. Dies ist unmittelbar aus dem Vergleich einer Konstruktion in *Kavalierperspektive* ($\alpha = 45^\circ$) und der Darstellung mit einem Verzerrungswinkel $\alpha = 90^\circ$ – bei gleichem Verkürzungsverhältnis – am Bild B 17 zu erkennen.



Aufgaben b 51 bis 66

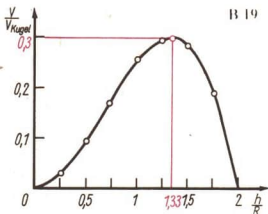
gesagt werden, daß die Funktionswerte positiv sind und für sie als eine obere Schranke $\frac{4\pi}{3} R^3$ – das Kugelvolumen – gilt.

Es ist zu vermuten, daß innerhalb des Definitionsbereiches ein größter Funktionswert – ein Maximum – existiert (der Beweis kann mit den verfügbaren Mitteln nicht geführt werden).

5. Dritter synthetischer Lösungsschritt:

Mit Hilfe der Gleichung $V = \frac{\pi}{3} (2Rh^2 - h^3)$ werden eine Wertetafel für die Funktion aufgestellt und der Graph der Funktion gezeichnet (bei der Einteilung der Achsen des Koordinatensystems werden Definitionsbereich und Wertebereich berücksichtigt; es ist zweckmäßig, die Höhe des Kegels in Bruchteilen des Kugelradius und das Kegelvolumen in Bruchteilen des Kugelvolumens anzugeben, wie die folgende Tabelle zeigt).

$\frac{h}{R_{\text{Kugel}}}$	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2
$\frac{V}{V_{\text{Kugel}}}$	0	0,03	0,09	0,16	0,25	0,29	0,28	0,19	0



B 19

Die Tabelle bekräftigt die Vermutung, daß ein größter Funktionswert existiert (er liegt, wie hier nicht bewiesen werden kann, bei $\frac{h}{R} = \frac{4}{3}$). Der Graph der Funktion ist in Bild B 19 dargestellt.

Aufgaben b 67 bis 82

6 Konstruktion der wahren Länge einer Strecke

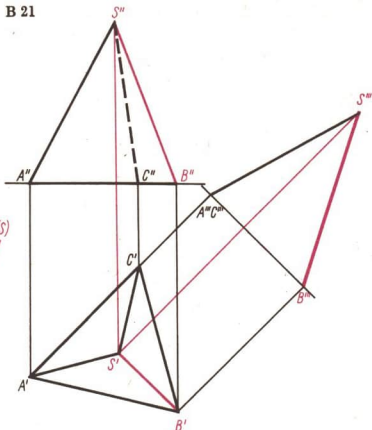
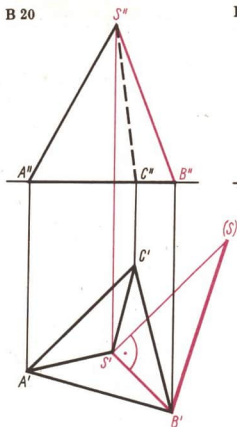
Die darstellend-geometrische Konstruktion der **wahren Länge einer Strecke** gründet sich auf den Satz, daß eine Strecke dann durch Parallelprojektion kongruent abgebildet wird, wenn sie in der Bildebene oder in einer zu dieser parallelen Ebene liegt; vgl. Seite 73.

Demgemäß kann die wahre Länge einer Strecke durch **Umklappung in eine Bildebene** oder in eine zu dieser parallele Ebene konstruiert werden.

- 4 Es ist die wahre Länge der Seitenkanten einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide $ABCS$, deren Grundfläche in der Grundrißebene liegt, zu ermitteln; vgl. Bild B 20.

Vorüberlegung:

Da die Seitenkanten einer regelmäßigen Pyramide gleich lang sind, genügt das Ermitteln der wahren Länge einer einzigen Seitenkante. Wird die Ebene, die senkrecht auf der Grundrißebene steht und die Kante enthält, deren Länge er-



mittelt werden soll, in die Grundrißebene geklappt, so läßt sich aus der Umklappung die wahre Länge der Kante entnehmen. Bei der Klappung bewegt sich das Bild der Pyramidenspitze auf einer Senkrechten zum Grundriß der betreffenden Kante. Die Höhe der Spitze über der Grundrißebene entnimmt man bei der Eintafelprojektion dem Höhenmaßstab, bei der Zweitafelprojektion dem Aufriß.

Ausführung (Zweitafelprojektion):

Im Grundriß der Pyramidenspitze wird eine Gerade senkrecht zum Grundriß der gewählten Kante – im Beispiel $B'S'$ – gezeichnet und auf dieser die Höhe $O'S''$ aufgetragen. Der erhaltene Punkt (S) wird mit B' verbunden. Die Strecke $\overline{B'(S)}$ gibt die wahre Länge einer Seitenkante der Pyramide wieder.

5

Nun soll die wahre Länge einer Seitenkante der im Beispiel B 4 betrachteten Pyramide mit Hilfe eines zweiten Aufrisses ermittelt werden; vgl. Bild B 21.

Vorüberlegung:

Die Kante, deren wahre Länge ermittelt werden soll, wird in wahrer Länge in einer zweiten Aufrißebene abgebildet, die parallel zu dieser Kante ist. Die zweite Rißachse ist in diesem Falle eine Parallele zum Grundriß der betreffenden Kante.

Ausführung:

Parallel zum Grundriß der gewählten Kante – im Beispiel $B'S'$ – wird an einer für die Konstruktion günstigen Stelle die zweite Rißachse gezeichnet; danach wird der zweite Aufriß $B''S''$ der Kante konstruiert. Die Strecke $\overline{B''S''}$ gibt die gesuchte wahre Länge der Kante wieder.

15

Vergleichen Sie dieses Verfahren mit dem Verfahren der Klappung! Nehmen Sie dabei – als Sonderfall – auch jene zweite Aufrißebene an, die die Kante enthält, deren wahre Länge zu ermitteln ist!

Aufgaben b 83 bis 86

7 Konstruktion der wahren Größe einer ebenen Figur

Die Konstruktion der wahren Größe einer ebenen Figur gründet sich auf den Satz, daß eine ebene Figur dann durch Parallelprojektion kongruent abgebildet wird, wenn ihre Ebene mit der Bildebene zusammenfällt oder zu dieser parallel ist; vgl. Lerneinheit B 4.

Demgemäß kann die wahre Größe einer ebenen Figur durch **Umklappung** der Ebene, in der die Figur liegt, in eine Bildebene oder in eine zu dieser parallelen Ebene konstruiert werden.

6

Es ist die wahre Größe der Seitenflächen einer geraden Pyramide $ABCD$ mit rechteckiger Grundfläche zu ermitteln; vgl. Bild B 22.

Vorüberlegung:

Die gegebene Pyramide hat zwei Paare zueinander kongruenter Seitenflächen, man muß somit die wahre Größe zweier verschiedener Seitenflächen ermitteln. Wird die Ebene, in der die gewählte Seitenfläche liegt, um ihre Höhenlinie der Höhe 0 in die Grundrißebene geklappt, so bildet sich die Seitenfläche in wahrer Größe ab. Bei dieser Klappung bewegt sich jeder Punkt der Ebene auf einem Kreisbogen. Der Mittelpunkt des Kreises ist der Punkt, in dem die Falllinie des umzuklappenden Punktes die Grundrißebene schneidet, sein Radius ist der Abstand zwischen dem umzuklappenden Punkt und dem Schnittpunkt seiner Falllinie mit der Grundrißebene.

Ausführung:

Die Ebene, in der die gewählte Seitenfläche ABS liegt, ist durch die Gerade $A'B'$, um die die Klappung ausgeführt werden soll, und den Punkt S bestimmt. Das Lot von S' auf $A'B'$ mit dem Fußpunkt F ist der Grundriß der Falllinie durch S . In S' wird zu diesem Lot eine Senkrechte (d. h. eine Parallele zu $A'B'$) gezeichnet und auf dieser die Höhe $O'S''$ der Spitze über der Grundrißebene aufgetragen. Der auf diese Weise ermittelte Punkt (S) ist ein Eckpunkt des umgeklappten Stützdreiecks $S'F(S)$ der Ebene ABS . Nun wird ein Kreisbogen mit F als Mittelpunkt durch den Punkt (S) gezeichnet und mit dem Lot von S' auf $A'B'$ zum Schnitt gebracht (dabei sind zwei Fälle möglich; es ist günstig, der Übersichtlichkeit halber den Schnittpunkt auf der von S' abgewandten Seite von $A'B'$ zu wählen). Dieser mit $[S]$ bezeichnete Punkt ist die Umklappung von S ; $A'[S]B'$ ist die Umklappung der Figur ABS , die deren wahre Größe wiedergibt. Auf gleiche Weise wird die Umklappung einer der anderen Seitenflächen, z. B. BCS , konstruiert.

16

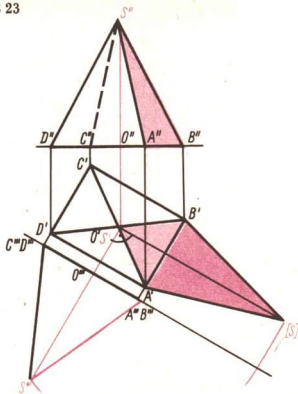
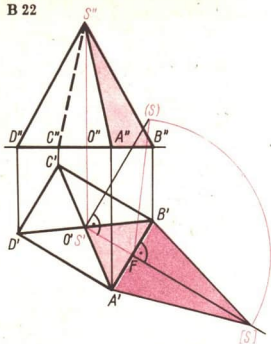
Wie bildet sich der Weg, den der Punkt S bei der Klappung zurücklegt, im Aufriß ab?

7

Nun soll die wahre Größe einer Seitenfläche der im Beispiel B 6 betrachteten Pyramide mit Hilfe eines zweiten Aufrisses ermittelt werden; vgl. Bild B 23.

Vorüberlegung:

Wird die zweite Aufrißebene so angenommen, daß die Ebene, die die in wahrer Größe darzustellende Seitenfläche enthält, zur zweiten Aufrißebene senkrecht steht, so sind bei der Umklappung keine besonderen Hilfskonstruktionen notwendig. Die Konstruktion kann unmittelbar in der (zweiten) Aufrißebene ausgeführt werden.

**Ausführung:**

Senkrecht zur Schnittgeraden der gewählten Seitenfläche mit der Grundrißebene – im Beispiel $A'B'$ – wird an einer für die Konstruktion günstigen Stelle die zweite Rißachse gezeichnet; es werden jene Teile des zweiten Aufnisses konstruiert, die für das Ermitteln der wahren Größe der Seitenfläche wesentlich sind. Die weitere Konstruktion der Umklappung geht aus dem Bild B 23 unmittelbar hervor. Auf gleiche Weise wird die wahre Größe der anderen Seitenfläche ermittelt.

17

Vergleichen Sie dieses Verfahren mit dem erstgenannten Verfahren! Nehmen Sie dabei – als Sonderfall – auch jene zweite Aufrißebene an, die die Spitze der Pyramide enthält!

Aufgaben b 87 und 88

8 Ebene Schnitte durch gerade Prismen

Der Schnitt eines ebenflächig begrenzten Körpers mit einer Ebene kann auf den Schnitt von Geraden mit der schneidenden Ebene zurückgeführt werden. Als geeignete Geraden erweisen sich die Körperkanten; ihre Schnittpunkte mit der schneidenden Ebene bilden die Eckpunkte der Schnittfigur.

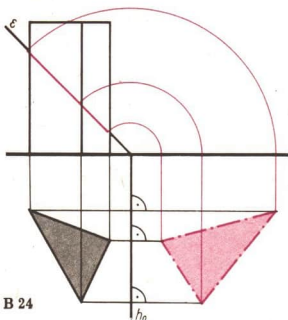
Die Aufgaben über ebene Schnitte durch gerade Prismen sollen hier auf Fälle beschränkt werden, in denen die Schnittebene senkrecht auf der Aufrißebene steht. Die anderen Fälle lassen sich durch die Annahme einer zweiten Aufrißebene auf jene zurückführen; vgl. Lerneinheit B 7.

8

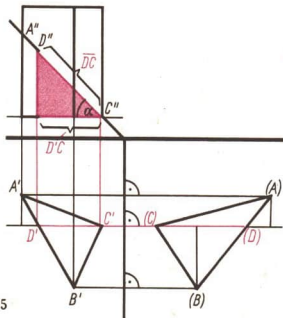
Gegeben sei ein dreiseitiges gerades Prisma durch seine Risse sowie eine senkrecht zur Aufrißebene stehende Ebene durch ihre Schnittgeraden mit den Rißebenen. Diese Ebene schneide das Prisma. Es ist die wahre Größe der Schnittfigur zu ermitteln; vgl. Bild B 24.

Vorüberlegung:

Die Ebene schneidet Körperkanten; ihre Schnittpunkte mit diesen sind die Eckpunkte der Schnittfigur. Die Klappung der Schnittebene in die Grundrißebene ergibt die wahre Größe der Schnittfigur.



B 24



B 25

Ausführung:

Man ermittelt die Aufrisse der Schnittpunkte der Körperkanten mit der Ebene und aus den Aufrissen die zugeordneten Grundrisse. Die Konstruktion der Klappung erfolgt wie in Beispiel B 6.

Der Inhalt der Schnittfläche ergibt sich aus dem Inhalt der Grundfläche des Prismas im angegebenen Beispiel durch folgende Überlegung; vgl. Bild B 25.

Werden die einander entsprechenden Ecken C' des Grundrisses und (C) der Umklappung durch eine Gerade verbunden und wird diese Gerade mit den gegenüberliegenden Seiten $\overline{A'B'}$ bzw. $\overline{(A)(B)}$ der Dreiecke zum Schnitt gebracht, wobei die Schnittpunkte die Bezeichnungen D' bzw. (D) erhalten, so entstehen aus jedem Dreieck zwei Teildreiecke. Die Teildreiecke $A'D'C'$ und $B'C'D'$ haben die Seite $\overline{D'C'}$, die Teildreiecke $(A)(C)(D)$ und $(C)(B)(D)$ die Seite $\overline{(C)(D)}$ gemeinsam; die Teildreiecke $D'C'A'$ und $(C)(D)(A)$ haben gleiche Höhe, ebenso die Teildreiecke $B'C'D'$ und $(C)(B)(D)$. Daraus folgt, daß sich die Flächeninhalte von $(A)(C)(D)$ und $A'D'C'$ wie $\overline{(C)(D)}$ zu $\overline{D'C'}$ verhalten; ebenso verhalten sich die Flächeninhalte von $(C)(B)(D)$ und $B'C'D'$ und damit auch die Flächeninhalte von $(A)(C)(B)$ und $A'B'C'$ wie $\overline{(C)(D)}$ zu $\overline{D'C'}$. Das Verhältnis $\overline{(C)(D)}$ zu $\overline{D'C'}$ läßt sich mit Hilfe des Aufrisses ermitteln; bedeutet α den Winkel, den die Schnittebene mit der Grundrißebene einschließt, so gilt

$$\frac{\overline{(C)(D)}}{\cos \alpha} = \frac{\overline{D'C'}}{\cos \alpha};$$

denn die Strecke $\overline{D'C'}$ wird im Aufriß in wahrer Länge abgebildet, und es ist

$$\overline{D''C''} = \overline{(C)(D)}.$$

Da das Prisma auf der Grundrißebene steht und somit $A'B'C'$ kongruent ABC ist, sind die Flächeninhalte von $A'B'C'$ und ABC gleich.

$$A(A'B'C') = A_G$$

Der Winkel α , den die Schnittebene mit der Grundrißebene einschließt, ist bei der angenommenen Stellung des Prismas gleich dem Winkel β zwischen der Schnittebene und der Ebene, in der die Grundfläche des Körpers liegt:

$$\alpha = \beta.$$

Es ergibt sich somit, wenn A_S den Inhalt der Schnittfläche bedeutet,

$$A_S = \frac{A_G}{\cos \beta}.$$

Aufgaben b 89 und 90

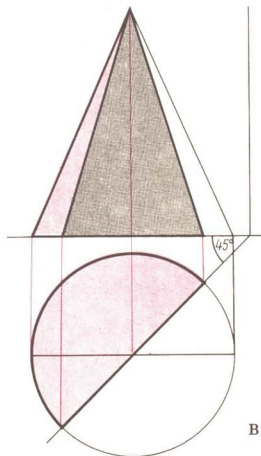
9 Darstellung von Kreiszyklindern und Kreiskegeln in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion

Die Abbildung eines Kreiszyklinders oder Kreiskegels in *Zweitafelprojektion* ist besonders einfach, wenn die Grundfläche des Körpers in einer der Rißebenen oder in einer zu dieser Ebene parallelen Ebene liegt. In diesem Falle bildet sich die Grundfläche im betreffenden Riß als Kreis, im anderen Riß als Strecke ab.

9 Stellen Sie in Zweitafelprojektion einen geraden Kreiskegel ($r = 3 \text{ cm}$; $h = 7 \text{ cm}$) dar, der auf der Grundrißebene steht und von dem durch einen Achsenschnitt eine Hälfte abgetrennt ist! Die Schnittebene soll mit der Aufrißebene einen Winkel von 45° einschließen, die Schnittfläche soll im Aufriß sichtbar, d. h. nicht vom Restkörper verdeckt sein; vgl. Bild B 26.

Vorüberlegung:

Entsprechend der Aufgabenstellung sind zwei verschiedene Lagen der Schnittebene möglich, keine von ihnen ist ausgezeichnet. Die Schnittebene enthält jene Mantellinien des Kegels, von denen die Schnittfläche begrenzt wird. Sie steht auf der Grundrißebene senkrecht und bildet sich somit auf dieser Ebene als Gerade ab (projizierende Ebene; vgl. Lerneinheit B 4).



B 26

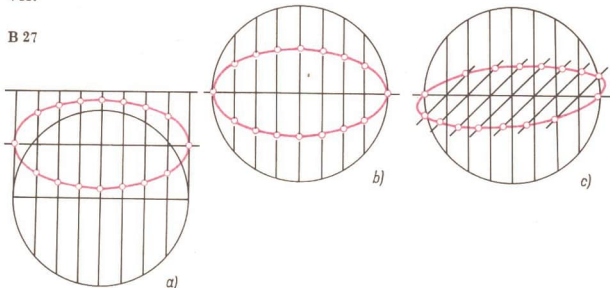
Ausführung:

Man zeichnet den Grundriß des Kegels und der Schnittebene und konstruiert den Aufriß der Mantellinien, die die Schnittfigur begrenzen.

Bei der Darstellung eines Kreiszyklinders oder Kreiskegels in *schräger Parallelprojektion* muß im allgemeinen das Bild der Grundfläche (bzw. der Grund- und der Deckfläche) mit Hilfe einer speziellen Konstruktion entworfen werden. Es ist z. B. möglich, von der Abbildung einzelner Punkte des Umfangs der Grund- bzw. Deckfläche auszugehen. Ähnlich wie bei der Abbildung geradlinig begrenzter Figuren in schräger Parallelprojektion werden als Hilfslinien Lote von

den abzubildenden Punkten auf die Bildebene angenommen; diese Lote werden nach den Zeichenregeln der gewählten Darstellungsart konstruiert; vgl. Bild B 27. Die Bilder B 27 a) und b) zeigen die Darstellung eines in einer Horizontalebene liegenden Kreises in schräger Parallelprojektion mit den Daten $\alpha = 90^\circ$ und $q = \frac{1}{2}$; im Bild B 27 b) liegt der Mittelpunkt des Kreises in der Bildebene. Aus dem Bild geht auch das Zeichenverfahren bei dieser Darstellungsart hervor.

B 27



Zum Vergleich ist in Bild B 27 c) der in Bild B 27 b) dargestellte Kreis in Kavalierperspektive gezeichnet.

Die Abbildung eines Kreises in schräger Parallelprojektion ist im allgemeinen eine Ellipse.

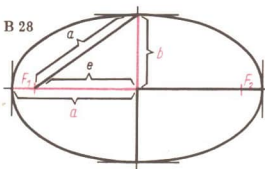
18

Als Sonderfälle der Abbildung sind kongruente Kreise oder Strecken möglich. Unter welchen Bedingungen (Lage des Kreises und der Projektionsgeraden zur Bildebene) treten diese Sonderfälle ein?

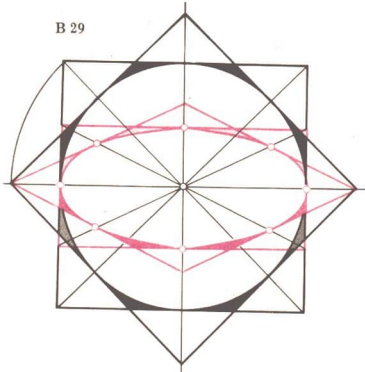
Eine Ellipse ist eine zweiachsig symmetrische Figur; die längere Achse heißt Hauptachse $2a$, die kürzere Nebenachse $2b$; vgl. Bild B 28.

Wenn beim Zeichnen so viele Bildpunkte ermittelt sind, daß die Form der

B 28



B 29

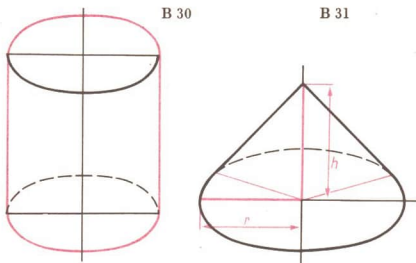


Ellipse gut erkennbar ist, wird die Kurve mit Hilfe eines Kurvenlineals gezeichnet oder freihändig skizziert. Die Genauigkeit der Zeichnung kann durch Hinzunahme weiterer Punkte erhöht werden, besonders an Stellen stärkerer Krümmung der Kurve.

Eine andere Möglichkeit, den Kurvenverlauf zu ermitteln, besteht in der Abbildung von Tangenten an die Kurve. Bei diesem Verfahren reichen oft wenige Punkte mit den zugehörigen Tangenten aus. Wird z. B. einem Kreis ein Vieleck umbeschrieben und dieses Vieleck dann abgebildet, so ergeben sich Tangenten an die Bildellipse. Dieses Verfahren ist in Bild B 29 gezeigt (die umbeschriebene Figur ist ein regelmäßiges Achteck).

Der Umriß des Bildes eines Kreiszylinders in schräger Parallelprojektion setzt sich im allgemeinen aus Teilstücken der Umrissse der Grund- und der Deckfläche sowie aus den Bildern zweier Mantellinien zusammen; vgl. Bild B 30.

Der Umriß des Bildes eines Kreiskegels in schräger Parallelprojektion setzt sich entweder aus einem Teilstück des Umrisses der Grundfläche und den Bildern zweier Mantellinien zusammen, oder er besteht nur aus dem Umriß der Grundfläche. Dieser Fall tritt ein, wenn der Bildpunkt der Spitze auf der Umrißlinie oder innerhalb der Umrißlinie der Grundfläche liegt.



Beim Zeichnen oder Skizzieren krummflächig begrenzter Körper in schräger Parallelprojektion reicht es meist aus, auftretende Tangenten an Kurven nach Augenmaß zu zeichnen; vgl. Bild B 31.

10

Es ist ein aufrecht stehender gerader Kreiskegel ($r = 4 \text{ cm}$; $h = 4,5 \text{ cm}$) in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$) skizzenmäßig darzustellen; vgl. Bild B 31.

Vorüberlegung:

Nach dem vorgeschriebenen Darstellungsverfahren ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$) ist das Bild der Grundfläche eine Ellipse mit einem Achsenverhältnis $2a : 2b = 2 : 1$, deren Hauptachse senkrecht auf dem Bild der Kegelachse steht. Daraus folgt, daß die zwei Tangenten, die den Umriß des Kegelbildes ergeben, und ihre Berührungspunkte symmetrisch zum Bild der Kegelachse sind.

Ausführung:

Zunächst werden das Bild der Grundfläche und das Bild der Kegelachse skizziert; der Bildpunkt der Kegelspitze wird markiert. Von diesem Punkt aus werden die Tangenten an das Bild der Grundfläche gezeichnet.

10 Ebene Schnitte durch gerade Kreiszyylinder

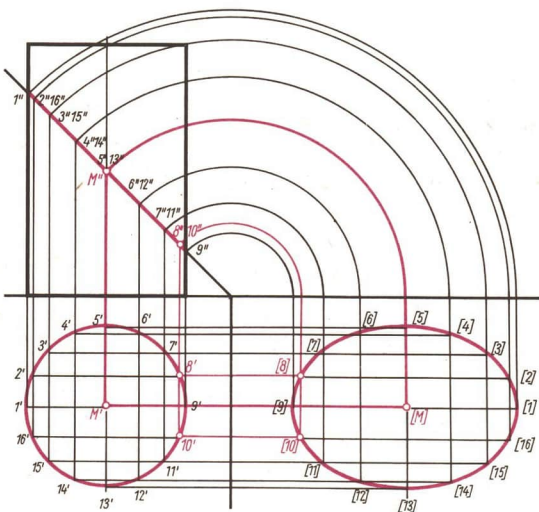
Der Schnitt eines Zylinders mit einer Ebene kann ähnlich wie der Schnitt ebenflächig begrenzter Körper auf den Schnitt von Geraden mit der schneidenden Ebene zurückgeführt werden. An Stelle der Körperkanten bei ebenflächig begrenzten Körpern können als Hilfsgeraden Mantellinien bei Zylindern angenommen werden. Ihre Schnittpunkte mit der schneidenden Ebene ergeben einzelne, in der Regel nicht besonders ausgezeichnete Punkte der im allgemeinen krummlinig begrenzten Schnittfigur.

Die Aufgaben über ebene Schnitte durch gerade Kreiszyylinder werden auf Fälle beschränkt, in denen die Schnittebene senkrecht auf der Aufrißebene steht.

B

11

Ein gerader Kreiszyylinder ($r = 3 \text{ cm}$; $h = 10 \text{ cm}$) werde von einer Ebene geschnitten, die mit der Zylinderachse einen Winkel von 45° einschließt. Es ist die wahre Größe der Schnittfigur zu ermitteln; vgl. Bild B 32.



B 32

Vorüberlegung:

Die Ebene schneidet die Mantellinien des Zylinders. Die Schnittpunkte der Ebene mit Mantellinien sind Punkte, die bei einer Klappung der Schnittebene in die Grundrißebene Punkte der in wahrer Größe abgebildeten Schnittfigur ergeben.

Ausführung:

Die Schnittebene wird senkrecht zur Aufrißebene angenommen. Es werden so viele Mantellinien für den Schnitt mit der Ebene ausgewählt, daß die Umklappung der Schnittfigur hinreichend sicher skizziert werden kann (im Beispiel die Punkte 1 bis 16). Aus den Aufrissen der Schnittpunkte der Mantellinien mit der Schnittebene werden die zugeordneten Grundrisse ermittelt. Die Konstruktion der Klappung erfolgt wie in Beispiel B 6.

Bemerkung: Ein ebener, zur Achse des Körpers nicht paralleler Schnitt eines Kreiszyinders ist entweder ein zur Grundfläche des Zylinders kongruenter Kreis oder eine Ellipse, deren eine Achse gleich dem Durchmesser der Grundfläche ist.

Zur Berechnung des Flächeninhalts der Schnittfiguren vgl. Lerneinheit B 8.

Aufgaben b 101 bis 104



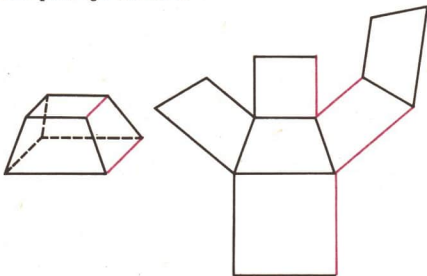
Pyramiden- und Kreiskegelstümpfe

11 Pyramidenstümpfe; Volumen und Oberfläche

Wird eine Pyramide durch eine zu ihrer Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so entstehen ein Pyramidenstumpf und die zum Stumpf gehörende Ergänzungs- oder Restpyramide.

Ein *Pyramidenstumpf* wird begrenzt von zwei ähnlichen, aber nicht kongruenten n Ecken, die in parallelen Ebenen liegen, und von n Trapezen.

Die ähnlichen Vielecke, die in parallelen Ebenen liegen, werden *Grundfläche* und *Deckfläche*, die Trapeze *Seitenflächen des Pyramidenstumpfes* genannt. Die Gesamtheit der Seitenflächen bildet die *Mantelfläche* (den *Mantel*) des Pyramidenstumpfes; vgl. Bild B 33.



B 33

Die Pyramidenstümpfe können in gleicher Weise wie die Pyramiden eingeteilt werden.

19

- a) Was ist unter einem geraden, was unter einem regelmäßigen Pyramidenstumpf zu verstehen? Welche Form haben die Seitenflächen eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes?
- b) In welcher Beziehung stehen die Menge aller geraden quadratischen Pyramidenstümpfe und die Menge aller regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstümpfe?

Das Volumen eines Pyramidenstumpfes ergibt sich als Differenz des Volumens der Vollpyramide (Stumpf und Ergänzungspyramide) und des Volumens der Ergänzungspyramide. Es ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D)$$

Auf die Herleitung dieser Gleichung soll hier verzichtet werden.

B

20

Welche Gleichung ergibt sich, wenn Grundfläche und Deckfläche des Körpers gleich groß angenommen werden?

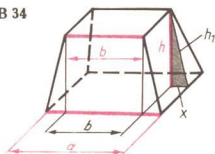
Der Oberflächeninhalt eines Pyramidenstumpfes setzt sich aus den Inhalten der Grundfläche, der Deckfläche und der Mantelfläche zusammen.

$$A_O = A_G + A_D + A_M$$

12

Der Stumpf einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide habe Grundkanten $a = 4,00$ m; Deckkanten $b = 2,00$ m und eine Höhe $h = 1,50$ m. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Körpers; vgl. Bild B 34!

B 34



Lösung:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D) \\ &= 0,50 \text{ m} \cdot (16,0 \text{ m}^2 + \sqrt{16,0 \text{ m}^2 \cdot 4,0 \text{ m}^2} + 4,0 \text{ m}^2) \\ V &= 0,50 \text{ m} \cdot 28 \text{ m}^2 = 14,0 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$A_O = A_G + A_D + A_M$$

Zur Berechnung des Flächeninhalts des Mantels, der aus vier gleichschenkligen Trapezen gebildet wird, ist die Länge der Flächenhöhe h_S der Seitenflächen erforderlich. Sie kann mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS ermittelt werden.

$$\begin{aligned} h_S &= \sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{2,25 \text{ m}^2 + 1 \text{ m}^2} \\ h_S &= \sqrt{3,25 \text{ m}^2} \approx 1,80 \text{ m} \\ A_M &= 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h_S = 4 \cdot 3,00 \text{ m} \cdot 1,80 \text{ m} = 21,6 \text{ m}^2 \\ A_O &= 16,0 \text{ m}^2 + 4,0 \text{ m}^2 + 21,6 \text{ m}^2 \\ A_O &= 41,6 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Das Volumen des Pyramidenstumpfes beträgt $14,0 \text{ m}^3$, der Inhalt seiner Oberfläche $41,6 \text{ m}^2$.

Aufgaben b 105 bis 120

12 Darstellung von geraden Pyramidenstümpfen in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion

Bei der Darstellung eines Pyramidenstumpfes in schräger Parallelprojektion sind das Bild der Grundfläche und das Bild der Deckfläche im allgemeinen *ähnliche Figuren in Ähnlichkeitslage*. Ähnlichkeitspunkt ist dabei das Bild der Spitze der Vollpyramide.

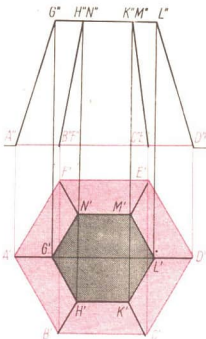
13

Gegeben sei ein regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf, dessen Grundfläche eine Seite von 3,5 cm und dessen Deckfläche eine Seite von 2 cm Länge habe, seine Höhe betrage 5 cm. Stellen Sie diesen Körper dar

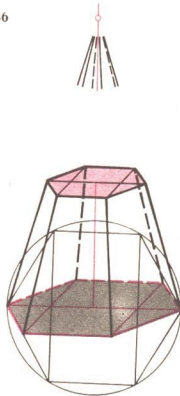
a) in Zweitafelprojektion; vgl. Bild B 35;

b) in schräger Parallelprojektion (Kavalierperspektive); vgl. Bild B 36!

B 35



B 36



Vorüberlegung:

Eine besondere Lage des Körpers ist nicht vorgeschrieben. Der Einfachheit halber wird die Grundfläche des Stumpfes so angenommen, daß sie in der Grundrißebene liegt und eine der durch den Mittelpunkt gehenden Diagonalen der Grundfläche parallel zur Aufrißebene ist. Diese Lage des Körpers ermöglicht eine einfache Konstruktion, da bei einem regelmäßigen Sechseck der Abstand eines Eckpunktes vom Mittelpunkt gleich der Seitenlänge ist.

Ausführung der Konstruktion (Zweitafelprojektion):

Zunächst wird der Grundriß des Körpers konstruiert, anschließend der Aufriß. Die Verlängerung der Aufrisse der Seitenkanten kann zur Zeichenkontrolle dienen (die Geraden müssen einander in einem Punkt, dem Aufriß der Spitze der Vollpyramide, schneiden).

Ausführung der Konstruktion (schräge Parallelprojektion):

Begonnen wird mit dem Bild der Grundfläche und der Körperachse; danach wird das Bild der Deckfläche konstruiert.

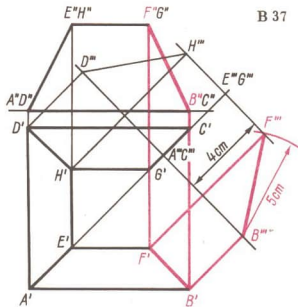
B

- 21 Welche Zeichenkontrollen sind bei der Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion möglich?

- 14 Bei einem geraden quadratischen Pyramidenstumpf betrage die Länge der Grundkante 7,5 cm, die Länge der Seitenkante 5 cm und die Länge der Höhe 4 cm. Stellen Sie den Körper in Zweitafelprojektion so dar, daß die Grundfläche in der Grundrißebene liegt und eine Grundkante parallel zur Aufrißebene ist; vgl. Bild B 37!

Vorüberlegung:

Da sich bei der geforderten Lage des Körpers keine Seitenkante im Grundriß oder im Aufriß in wahrer Länge abbildet, diese Länge aber zum konstruktiven Ermitteln der Deckkanten benötigt wird, ist eine Hilfskonstruktion in einer Ebene erforderlich, in der eine Seitenkante des Stumpfes kongruent abgebildet wird. Solche Ebenen sind parallel zu einer Ebene, die zwei gegenüberliegende Seitenkanten und je eine Diagonale der Grund- und der Deckfläche enthält. Von den Möglichkeiten für die Konstruktion (vgl. Lerneinheit B 6) erweist sich die Hinzunahme eines zweiten Aufrisses als zweckmäßig.



Ausführung:

Es wird der Grundriß der quadratischen Grundfläche $ABCD$ des Stumpfes gezeichnet, eine zweite Ribachse parallel zu einer Diagonale des Quadrates angenommen und der zweite Aufriß der Eckpunkte der Deckfläche $EFGH$ des Körpers ermittelt. Aus dem zweiten Aufriß werden Grundriß und (erster) Aufriß dieser Punkte konstruiert.

Aufgaben b 121 bis 124

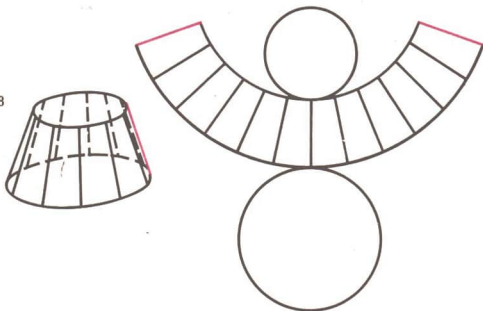
13 Kreiskegelstümpfe; Volumen und Oberfläche

Wird ein Kegel durch eine zu seiner Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so entstehen ein **Kegelstumpf** und der zum Stumpf gehörende **Ergänzungs- oder Restkegel**.

Ein **Kreiskegelstumpf** wird begrenzt von zwei Kreisflächen verschiedenen Durchmessers, die in parallelen Ebenen liegen, und von einer in die Ebene abwickelbaren Fläche.

Die Kreisflächen, die in parallelen Ebenen liegen, werden **Grundfläche** und **Deckfläche**, die gekrümmte Fläche wird **Mantelfläche (Mantel)** des **Kreiskegelstumpfes** genannt. Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Grundfläche und der Deckfläche heißt **Achse des Kreiskegelstumpfes**.

B 38



Der Mantel eines Kreiskegelstumpfes enthält gerade Linien, die einen Punkt der Begrenzungslinie der Grundfläche mit einem Punkt der Begrenzungslinie der Deckfläche verbinden, ihre Verlängerungen schneiden einander in einem Punkt, der Spitze des zum Stumpf gehörenden Ergänzungskegels; vgl. Bild B 38. Diese geraden Linien heißen **Mantellinien des Kegelstumpfes**.

Wie die Kreiskegel können auch die Kreiskegelstümpfe in *gerade* und *schiefe* Kreiskegelstümpfe eingeteilt werden.

- 22 Welche Lage nimmt die Achse eines geraden Kreiskegelstumpfes zu dessen Deckfläche ein?

Das **Volumen** eines Kreiskegelstumpfes ergibt sich als Differenz zwischen dem Volumen des Vollkegels (Stumpf und Ergänzungskegel) und dem Volumen des Ergänzungskegels.

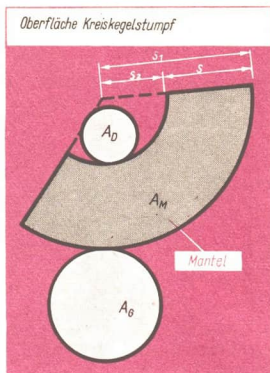
$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

- 23
- Vergleichen Sie diese Formel mit der entsprechenden Formel für den Pyramidenstumpf!
 - Die Höhe des Vollkegels (Stumpf und Ergänzungskegel) ist vom Radius der Grundfläche, vom Radius der Deckfläche und von der Höhe des Stumpfes abhängig. Drücken Sie diese Höhe als Funktion dieser Variablen aus!
 - Zeigen Sie, daß sich aus der Gleichung für das Volumen eines Kreiskegelstumpfes die Gleichung für das Volumen eines Kreiszyinders ergibt, wenn $r_1 = r_2$ gesetzt wird!

Der **Oberflächeninhalt** eines Kegelstumpfes setzt sich aus dem Inhalt der Grundfläche, der Deckfläche und dem Mantel zusammen.

$$A_O = A_G + A_D + A_M$$

Der Inhalt des Mantels eines geraden Kegelstumpfes ist die Differenz der Flächeninhalte zweier Kreissektoren gleichen Zentriwinkels, vgl. Bild B 39; und zwar ist der Radius des größeren gleich der Mantellinie s_1 des Vollkegels (Stumpf- und Ergänzungskegel), der Radius des kleineren gleich der Mantellinie s_2 des Ergänzungskegels.



B 39

$$A_M = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2) \text{ mit } s \text{ für die Mantellinie des Kegelstumpfes}$$

15

Der Stumpf eines geraden Kreiskegels habe einen Grundflächenradius $r_1 = 90 \text{ mm}$, einen Deckflächenradius $r_2 = 54 \text{ mm}$ und eine Höhe $h = 48 \text{ mm}$. Berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt des Körpers!

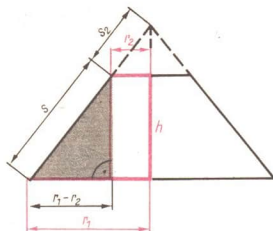
Lösung:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot 48 \text{ mm} \cdot (8100 \text{ mm}^2 + 4860 \text{ mm}^2 + 2916 \text{ mm}^2) \\ V &= \frac{\pi}{3} \cdot 48 \text{ mm} \cdot 15876 \text{ mm}^2 \approx 798000 \text{ mm}^3 = 798 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$A_O = \pi \cdot [r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)]$$

Die Länge der Mantellinie, die nicht gegeben ist, kann mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS ermittelt werden; vgl. Bild B 40.

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} \\ &= \sqrt{(36 \text{ mm})^2 + (48 \text{ mm})^2} \\ &= \sqrt{1296 \text{ mm}^2 + 2304 \text{ mm}^2} \\ &= \sqrt{3600 \text{ mm}^2} \\ s &= 60 \text{ mm} \end{aligned}$$



B 40

$$A_O = \pi \cdot (8100 \text{ mm}^2 + 2916 \text{ mm}^2 + 60 \text{ mm} \cdot 144 \text{ mm})$$

$$= \pi \cdot 19656 \text{ mm}^2$$

$$A_O \approx 61750 \text{ mm}^2 = 617,5 \text{ cm}^2$$

Das Volumen des Kegelstumpfes beträgt 798 cm^3 , der Inhalt seiner Oberfläche $617,5 \text{ cm}^2$.

Aufgaben b 125 bis 130

14 Darstellung von geraden Kreiskegelstümpfen in Zweitafelprojektion und in schräger Parallelprojektion

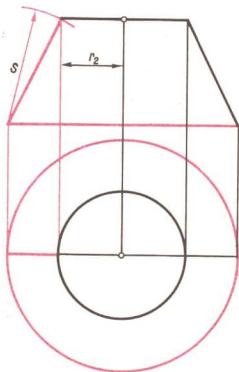
B

Wie bei der Darstellung eines Pyramidenstumpfes sind bei der Darstellung eines Kegelstumpfes in schräger Parallelprojektion das Bild der Grundfläche und das Bild der Deckfläche im allgemeinen *ähnliche Figuren in Ähnlichkeitslage* mit dem Bild der Spitze des Vollkegels als Ähnlichkeitspunkt.

Bei der Darstellung eines Kreiskegelstumpfes in schräger Parallelprojektion werden die geraden Teile der Umrisslinie des Körpers von den gemeinsamen Tangenten an die elliptischen Bilder der Grund- und der Deckfläche gebildet. Diese Tangenten gehen vom Bildpunkt der Spitze des Ergänzungskegels aus.

16

Gegeben sei ein gerader Kreiskegelstumpf, dessen Grundfläche einen Radius von $4,5 \text{ cm}$ und dessen Deckfläche einen Radius von $2,5 \text{ cm}$ habe, die Länge der Mantellinie sei $4,5 \text{ cm}$. Stellen Sie den Körper in Zweitafelprojektion dar! Die Grundfläche des Körpers soll in der Grundrißebene liegen; vgl. Bild B 41.



Vorüberlegung:

Die Höhe des Stumpfes ist nicht gegeben. Da aber im Aufriß zwei Mantellinien des Körpers sowie die zugehörigen Radien der Grund- und der Deckfläche in wahrer Länge abgebildet werden, ist eine Konstruktion der Höhe im Aufriß möglich.

Ausführung:

Zunächst wird der Grundriß des Körpers gezeichnet. Mit Hilfe der entsprechenden Ordnungslinien werden die Aufrisse der Mantellinien, die in wahrer Länge abgebildet werden, konstruiert. Damit ist die Höhe des Körpers ermittelt. Der Aufriß des Körpers wird ergänzt.

B 41

24

Welche Zeichenkontrollen sind bei diesem Beispiel möglich?

17

Gegeben sei ein gerader Kreiskegelstumpf ($r_1 = 4 \text{ cm}$; $r_2 = 2 \text{ cm}$; $h = 4,5 \text{ cm}$). Ermitteln Sie durch Konstruktion die Länge der Mantellinien! Skizzieren Sie den aufrecht stehenden Körper in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$); vgl. Bild B 42.

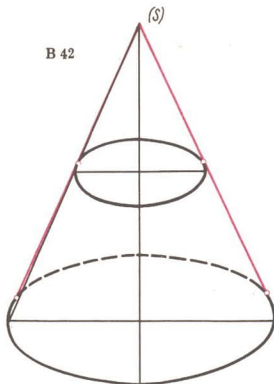
Vorüberlegung:

Durch die schräge Parallelprojektion werden bei der geforderten Lage des Körpers jene zwei Mantellinien des Stumpfes in wahrer Länge abgebildet, die parallel zur Bildebene sind. Diese Mantellinien liegen in der die Körperachse enthaltenden Parallelebene zur Bildebene.

Ausführung:

Zunächst werden die Mantellinien, die in der die Körperachse enthaltenden Parallelebene zur Bildebene liegen, konstruiert (evtl. gesondert von der Körper-skizze). Bevor mit dem Skizzieren der Umrißlinie des Körpers begonnen wird, werden die Mittelpunkte und die Scheitelpunkte der elliptischen Bilder der Grund- und der Deckfläche sowie das Bild der Spitze des Ergänzungskegels konstruiert. Vom Bild der Spitze des Ergänzungskegels gehen die umrißbildenden Tangenten an die Ellipsen aus.

B 42



Aufgaben b 131 und 132

15 Zusammengesetzte Körper

In der Praxis haben die Gegenstände, deren Volumen oder deren Oberflächeninhalt berechnet werden soll, vielfach nicht die Form einfacher geometrischer Körper. Oftmals können sie aber **in Teile zerlegt** werden, die einfache geometrische Körper sind.

18

Eine Blechkanne habe den im Bild B 43 dargestellten Achsenschnitt. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Kanne!

Vorüberlegung:

Die Kanne setzt sich aus **drei Teilkörpern**, einem geraden Kreiszyylinder und zwei geraden Kreiskegelstümpfen, zusammen. Ihr Rauminhalt ist gleich der Summe der Rauminhalte der drei Teilkörper; ihr Oberflächeninhalt ist gleich der Summe der Mantelflächen der drei Teilkörper und der Bodenfläche, einer Kreisfläche.

Einführung von Variablen:

Die Bedeutung der Variablen r_1 , r_2 , h_1 , h_2 , s_1 , s_2 ist aus Bild B 43 ersichtlich. Beim Volumen (V) und Flächeninhalt (A) werden die Teilkörper durch einen Index kenntlich gemacht.

Ohne Index – Gesamtkörper

Index 1 – oberer Teilkörper (Zylinder)

Index 2 – mittlerer Teilkörper (Kegelstumpf)

Index 3 – unterer Teilkörper (Kegelstumpf)

Der Inhalt der Bodenfläche wird mit A_4 bezeichnet.

Anwendung der Formeln, Ausrechnung:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_1 = \pi \cdot h_1 r_1^2$$

$$V_2 = \frac{\pi h_1}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V_3 = \frac{\pi h_2}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V = \pi \left[h_1 r_1^2 + \frac{h_1 + h_2}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \right]$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

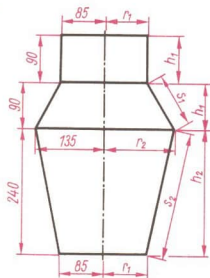
$$A_1 = 2\pi \cdot r_1 h_1$$

$$A_2 = \pi \cdot s_1 (r_1 + r_2)$$

$$A_3 = \pi \cdot s_2 (r_1 + r_2)$$

$$A_4 = \pi \cdot r_1^2$$

$$A = \pi [2r_1 h_1 + (s_1 + s_2) (r_1 + r_2) + r_1^2]$$



B 43

Es ist zweckmäßig, die gegebenen Werte und die Resultate der erforderlichen Nebenrechnungen tabellarisch zusammenzufassen. Da die Abmessungen des Körpers die Angabe des Volumens in Kubikdezimetern (Litern) und der Oberfläche in Quadratdezimetern nahelegen, werden die Maßzahlen für Längen auf die Einheit 1 Dezimeter bezogen. Die Tabelle enthält nur Maßzahlen.

Term	r_1	r_2	h_1	h_2	$r_1 + r_2$	$\frac{h_1 + h_2}{3}$	r_1^2	$r_1 r_2$	r_2^2
Wert	0,85	1,35	0,90	2,40	2,20	1,10	0,72	1,15	1,82

Term	$r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2$	$2 r_1 h_1$	s_1	s_2	$s_1 + s_2$
Wert	3,69	1,53	1,03	2,45	3,48

$$V = \pi (0,90 \cdot 0,72 + 1,10 \cdot 3,69) \text{ dm}^3$$

$$V = 14,8 \text{ dm}^3$$

$$A = \pi (1,53 + 3,48 \cdot 2,20 + 0,72) \text{ dm}^2$$

$$A = 31,1 \text{ dm}^2$$

Die Blechkanne hat ein Volumen von $14,8 \text{ dm}^3$ und einen Flächeninhalt von $31,1 \text{ dm}^2$.

Lassen sich die Gegenstände nicht aus einfachen geometrischen Körpern zusammensetzen, so können sie dennoch in vielen Fällen durch einfache geometrische Körper – oder durch eine Kombination solcher Körper – angenähert werden.

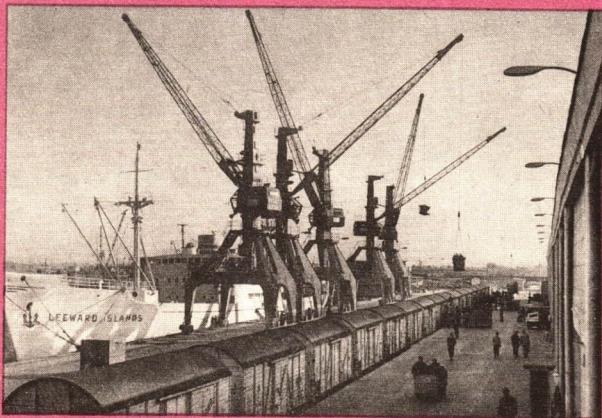
Auch in Formelsammlungen werden für die Berechnung bestimmter Klassen von Körpern oftmals Näherungsformeln angegeben, da die genauen Formeln kompliziert sind und ihre Anwendung ein Übermaß an Rechenarbeit fordern würde.

Aufgaben

- 98 a) Winkelfunktionen
126 b) Körperberechnung und Körperdarstellung
-

Der Überseehafen Rostock ist mit modernen Drehbockkränen aus dem VEB Kranbau Eberswalde ausgerüstet. Diese Kräne ermöglichen wegen ihrer großen Beweglichkeit einen schnellen Warenumschlag.

Die Tragfähigkeit eines Kranes hängt von der Stellung des Auslegers ab. Die Druck- bzw. Zugkräfte in Ausleger und Abspannseilen ändern ihre Größe bei Veränderung dieser Stellung auch dann, wenn die Belastung des Kranes konstant bleibt. Berechnungen hierzu können wir mit den Mitteln der Trigonometrie durchführen.



a) Winkelfunktionen

1. Geben Sie zu jeder der folgenden Funktionen jeweils ein geordnetes Paar an, das dazu gehört, und eines, das nicht dazu gehört!

a) $y = 5x^2 + 2$ ($x \in P$)

b) $f(z) = 8z^3$ ($z \in P$)

c) Die Funktion sei die Menge der geordneten Paare $[n; p]$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl und p die kleinste Primzahl, für die $n < p$ gilt, seien.

d) $s(t) = \frac{g}{2} t^2$ (t sei eine beliebige Zeit; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$)

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 1$.

Ermitteln Sie alle geordneten Paare $[x; f(x)]$, für die $f(x) = 0$ gilt! Wie werden die Elemente des Definitionsbereiches genannt, für die $f(x) = 0$ gilt?

3. Ermitteln Sie den Wertebereich und, falls vorhanden, die Nullstellen folgender Funktionen!

a) $y = x^2 - 9$ ($-3 \leq x \leq 3; x \in P$)

b) $y = \log_{10} x$ ($0 < x \leq 10; x \in P$)

c) $y = \frac{3}{2}x + 1$ ($0 \leq x \leq 2; x \in P$)

d) $y = 10^x$ ($x \in P$)

Bringen Sie die folgenden Gleichungen in die Form $y = f(x)$!

Es gelte jeweils $x \in P; y \in P$.

4. a) $3x + 7y - 2 = 0$

b) $8x^2 + y - 6 = 0$

c) $2y - 4^x = 0$

d) $3 \cdot \log_2 x - 6y = 0$

5. a) $17x - 3y + 9 = 0$

b) $2y - 12x^2 + 9 = 0$

c) $-5y + 10^x = 0$

d) $10y + 5 \cdot \log_{10} x = 0$

Die in der Aufgabe a 4(a5) gebildeten Gleichungen $y=f(x)$ werden als Zuordnungsvorschrift von Funktionen aufgefaßt. Als Definitionsbereich gelte die Menge aller Zahlen x , für die der Term $f(x)$ definiert ist.

Untersuchen Sie, ob die unter a 6 (a 7) aufgeführten geordneten Paare Elemente der aus den Gleichungen a 4 (a 5) hervorgegangenen Funktionen sind!

6. a) $[-4; 2], [3; -1]$

b) $[0; 6], [-2; -26]$

c) $\left[0; -\frac{1}{2}\right], [1; -2]$

d) $[4; 1], \left[-8; -\frac{3}{2}\right]$

7. a) $[-1; 5], [-3; 0]$

b) $\left[\frac{1}{2}; -3\right], \left[-\frac{1}{4}; 3\right]$

c) $[1; 2], [-1; -2]$

d) $[1; 0], \left[0; -\frac{1}{2}\right]$

Zu folgenden Funktionen sind zu ermitteln: Wertebereich, Nullstellen, Monotonieintervalle mit Angabe der Art des Monotonieverhaltens!

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen!

8. a) $y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{5}$ ($-2 \leq x \leq 3; x \in P$)

b) $y = \frac{3}{4}x + 3$ ($-3 \leq x \leq 3; x \in P$)

c) $y = (x-2)^2 - 3$ ($-2 \leq x \leq 4; x \in G$)

d) $y = x^3 - 8$ ($x \in P$)

9. a) $y = 3|x| + 2$ ($-1 \leq x \leq 1; x \in R$)

b) $y = 2^x$ ($x \in P$)

c) $y = \log_2 x$ ($\frac{1}{4} \leq x \leq 8; x \in P$)

10. Formulieren Sie eine Gleichung $y = f(x)$ für eine lineare Funktion, die folgende Zahlenpaare als Elemente besitzt! Überprüfen Sie Ihre Lösung mit Hilfe des Graphen der Funktion!

a) $\left[\frac{1}{2}; 3\right], [-3; 1]$

b) $\left[0; -\frac{3}{22}\right], [-2; 0]$

11. Weisen Sie nach, daß es keine lineare Funktion gibt, die die folgenden drei Zahlenpaare als Elemente besitzt!

$[1; 0], [0; 2], [-2; 0]$

Veranschaulichen Sie diesen Sachverhalt mit Hilfe einer graphischen Darstellung!

12. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel $\sphericalangle ACB$. \overline{CD} sei das Lot von C auf \overline{AB} . Das Maß des Winkels $\sphericalangle CBA$ sei 36° .

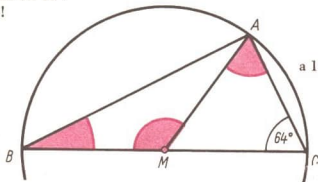
Ermitteln Sie die Maße der folgenden Winkel!

a) $\sphericalangle BAC$ b) $\sphericalangle ACD$ c) $\sphericalangle DCB$

13. Der Mittelpunkt eines Kreises sei M ; vgl. Bild a 1. A, B, C seien Punkte auf dem Kreis, M liege auf BC . Das Maß des Winkels $\sphericalangle ACB$ sei 64° .

Ermitteln Sie die Maße der folgenden Winkel!

a) $\sphericalangle CBA$ b) $\sphericalangle MAC$ c) $\sphericalangle AMB$



14. Der Mittelpunkt eines Kreises sei M ; vgl. Bild a 2.

A, B, C seien Punkte auf dem Kreis, M liege innerhalb des Dreiecks ABC . Das Maß des Winkels $\sphericalangle BAM$ sei 43° .

Ermitteln Sie die Maße der folgenden Winkel!

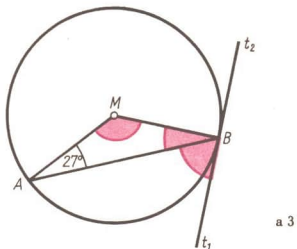
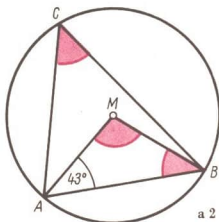
a) $\sphericalangle MBA$ b) $\sphericalangle AMB$ c) $\sphericalangle ACB$

15. Der Mittelpunkt eines Kreises sei M ; vgl. Bild a 3.

A, B seien Punkte auf dem Kreis, M liege nicht auf AB . t_1 und t_2 seien die beiden Strahlen, in die die Tangente durch B an den Kreis durch den Punkt B geteilt wird. Das Maß des Winkels $\sphericalangle BAM$ sei 27° .

Ermitteln Sie die Maße der folgenden Winkel!

a) $\sphericalangle MBA$ b) $\sphericalangle AMB$
c) $\sphericalangle (AB; t_1)$ d) $\sphericalangle (t_2; BA)$



16. Gegeben seien zwei zueinander parallele Geraden g_1 und g_2 , die durch eine Gerade h geschnitten werden. Das Maß des Winkels $\sphericalangle (g_2; h)$ sei 41° .

Ermitteln Sie die Maße der folgenden Winkel!

a) $\sphericalangle (g_1; h)$ b) $\sphericalangle (h; g_2)$

17. Gegeben seien drei Geraden h, k, l , die nicht paarweise zueinander parallel sind. Das Maß des Winkels $\sphericalangle (h; l)$ sei 117° , das Maß des Winkels $\sphericalangle (k, l)$ sei 24° .

Ermitteln Sie die Maße der folgenden Winkel!

a) $\sphericalangle (h; k)$ b) $\sphericalangle (l; k)$

Konstruieren Sie Winkel \hat{m} mit folgenden Maßen! Beschreiben Sie die Konstruktion!

18. a) 60° b) 90°

19. a) 30° b) 45°

Gegeben seien folgende Mengen von Winkelmaßen. Überprüfen Sie, in welchen Fällen es sich um einander äquivalente Winkel handelt! Ermitteln Sie für diese Fälle den Hauptwert der zugehörigen Klasse einander äquivalenter Winkel!

20. a) $\{2015^\circ, 1295^\circ, 575^\circ\}$
 b) $\{473^\circ, -247^\circ, 1193^\circ\}$
 c) $\{395^\circ, 1115^\circ, 1315^\circ\}$

21. a) $\{445^\circ, 1165^\circ, 1885^\circ\}$
 b) $\{444^\circ, 1164^\circ, 1514^\circ\}$
 c) $\{893^\circ, -547^\circ, 1253^\circ\}$

Ermitteln Sie die Hauptwerte der Klassen einander äquivalenter Winkel, in denen Winkel mit folgenden Maßen liegen!

22. a) 4380° b) $367,5^\circ$ c) $2713,4^\circ$
 d) -1573° e) $-15,7^\circ$ f) $-479,7^\circ$

23. a) $515,6^\circ$ b) $758,4^\circ$ c) $438,5^\circ$
 d) $-47,6^\circ$ e) $3205,6^\circ$ f) $-3721,3^\circ$

Berechnen Sie die Bogenlänge b für einen Kreisbogen mit einem Radius r und dem Zentriwinkel α !

24. a) $r = 5 \text{ cm}; \alpha = 40^\circ$
 b) $r = 4,7 \text{ cm}; \alpha = 15^\circ$

25. a) $r = 12,8 \text{ cm}; \alpha = 42,3^\circ$
 b) $r = 2,7 \text{ cm}; \alpha = 82,7^\circ$

Berechnen Sie den Radius r für einen Kreisbogen b mit dem Zentriwinkel α !

26. a) $b = 14,8 \text{ cm}; \alpha = 9,4^\circ$
 b) $b = 24,7 \text{ cm}; \alpha = 34^\circ$

27. a) $b = 19,5 \text{ cm}; \alpha = 183,4^\circ$
 b) $b = 22 \text{ cm}; \alpha = 90^\circ$

28. Durch die Gleichung $y = \arccos \alpha$ ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) ist eine Funktion festgelegt, deren Definitionsbereich Gradmaße und deren Wertebereich reelle Zahlen sind.

- a) Stellen Sie diese Funktion auf Millimeterpapier graphisch dar!
 b) Welche Beziehung zwischen α und $\arccos \alpha$ wird durch die graphische Darstellung zum Ausdruck gebracht?
 c) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle mit Hilfe des Graphen der Funktion $y = \arccos \alpha$!

α	110°	320°		70°			250°	180°		210°
$\arccos \alpha$			5,5		4,3	2,7			6,1	5,0

Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes das Bogenmaß für Winkel, die folgende Gradmaße besitzen!

29. a) 15° b) 72° c) 42° d) 75°

30. a) 84° b) 200° c) 102° d) 144°

Rechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes vom Gradmaß ins Bogenmaß um!

31. a) $43,8^\circ$ b) $72,5^\circ$ c) 221° d) $-60,5^\circ$ 32. a) 138° b) $-47,6^\circ$ c) 816° d) -318°

Ermitteln Sie mit Hilfe von Tafel oder Rechenstab das Gradmaß für Winkel mit folgendem Bogenmaß!

33. a) $\arccos \alpha = 3,764$
 b) $\arccos \alpha = 1,476$
 c) $\arccos \alpha = 0,937$
 d) $\arccos \alpha = 4,843$
 e) $\arccos \alpha = 0,84$
 f) $\arccos \alpha = -0,95$

34. a) $\arccos \alpha = 2,734$
 b) $\arccos \alpha = -5,638$
 c) $\arccos \alpha = -2,348$
 d) $\arccos \alpha = -0,375$
 e) $\arccos \alpha = 0,36$
 f) $\arccos \alpha = 1,16$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen ohne Rechenstab oder Tafel (α Gradmaß, $x \in P$)!

35. a) $\arcsin \alpha = \frac{\pi}{3}$ b) $\arcsin \alpha = \frac{\pi}{4}$ 36. a) $\arcsin 210^\circ = x$ b) $\arcsin \alpha = \frac{7}{6}\pi$
 c) $\arcsin 150^\circ = x$ d) $\arcsin 390^\circ = x$ e) $\arcsin \alpha = \frac{3}{2}\pi$ d) $\arcsin 225^\circ = x$
 e) $\arcsin \alpha = -\frac{\pi}{6}$ f) $\arcsin \alpha = \frac{7}{3}\pi$ e) $\arcsin(-300^\circ) = x$ f) $\arcsin \alpha = -\frac{2}{3}\pi$

37. Die folgenden reellen Zahlen sollen als Bogenmaß von Winkeln aufgefaßt werden. Bilden Sie Teilmengen einander äquivalenter Winkel!

- a) $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{17}{6}\pi, \frac{15}{4}\pi, -\frac{31}{4}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \right\}$
 b) $\left\{ \frac{7}{2}\pi, \frac{14}{3}\pi, \frac{20}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{19}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\pi \right\}$

38. Die 122-mm-Haubitze 38 der NVA hat einen horizontalen Schußwinkelbereich von 49° . Die maximale Schußentfernung beträgt 11,8 km.

Wie groß ist der Bogen an der Peripherie, der maximal beschossen werden kann?

Ermitteln Sie näherungsweise durch Konstruktion (Kreis mit einem Radius $r = 5$ cm) Lösungen folgender Gleichungen!
 ($x, y \in P$; $0 \leq x \leq 2\pi$)

39. a) $\sin \frac{\pi}{6} = y$ b) $\sin 50^\circ = y$ 40. a) $\sin 2 = y$ b) $\sin 130^\circ = y$
 c) $\sin x = 0,3$ d) $\sin x = -0,25$ e) $\sin x = 0,8$ d) $\sin x = -0,35$

Untersuchen Sie, ob folgende geordnete Paare Elemente der Funktion $y = \sin x$ sind!

41. a) $[-\pi; 1]$ b) $\left[\frac{3}{2}\pi; 0 \right]$ 42. a) $[-32\pi; 0]$ b) $\left[\frac{19\pi}{2}; 0 \right]$
 c) $\left[-\frac{7}{2}\pi; 1 \right]$ d) $[18; 0]$ e) $\left[\frac{5}{2}\pi; -1 \right]$ d) $\left[\frac{7}{2}\pi; -1 \right]$

1. Beweisen Sie, daß folgende Aussagen einander äquivalent sind!

A: Für alle x ($x \in P$) gilt: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

B: Für alle x ($x \in P$; $0 \leq x \leq 2\pi$) gilt: $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ ($k \in G$).

Welche der folgenden Gleichungen hat eine Lösung und welche nicht?

43. a) $\sin x = 1,3$ 44. a) $\sin x = -0,83$
 b) $3 \sin x = 2$ b) $-2 \sin x = 4$
 c) $|\sin x| = 4$ c) $|\sin x| = \frac{1}{2}$
 d) $4 \sin x + 2 = 0$ d) $3 \sin x - 6 = -4$

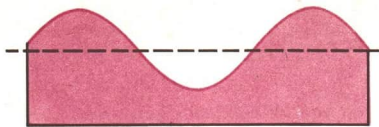
Besitzt die Sinusfunktion in folgenden Intervallen Nullstellen oder nicht?

Geben Sie die Nullstellen an!

45. a) $-1 \leq x \leq 0$ b) $-7 \leq x \leq -3$ 46. a) $-2 \leq x \leq 1$ b) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\pi$
 c) $14 \leq x \leq 15$ d) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ e) $8 \leq x \leq 9$ d) $-4 \leq x \leq -3$



a



47. Wickeln Sie ein Stück Papier mehrmals um eine Kerze! Führen Sie einen ebenen Schnitt in einem spitzen Winkel zur Achse der Kerze! Wickeln Sie das Blatt ab! Die Schnittlinie ist eine Sinuskurve; vgl. Bild a 4.

48. Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen jeweils in ein gesondertes Koordinatensystem, indem Sie vom Graph der Funktion $y = \sin x$ ausgehen!

- Ermitteln Sie Wertebereich, Nullstellen und Monotonieintervalle der Funktionen!
a) $y = 4 \sin x$ ($-\pi \leq x \leq 2\pi$) **b)** $y = 2,5 \sin x$ ($-2\pi \leq x \leq 0$)

49. Überprüfen Sie, ob die folgenden geordneten Zahlenpaare der Funktion $y = 2 \sin x$ ($-10\pi \leq x \leq 10\pi$) angehören oder nicht!

- a)** $[0; 0]$ **b)** $[\frac{\pi}{2}; -2]$ **c)** $[-\frac{5}{2}\pi; -2]$ **d)** $[-\frac{21}{2}\pi; 2]$
e) $[-9\pi; 0]$ **f)** $[\frac{3}{2}\pi; -2]$ **g)** $[\frac{11}{2}\pi; 2]$ **h)** $[10\pi; 0]$

50. Ermitteln Sie die kleinsten Perioden der folgenden Funktionen ($x \in P$)!

- a)** $y = \sin 5x$ **b)** $y = \sin 2\pi x$ **c)** $y = \sin 8x$
d) $y = \sin \frac{x}{3}$ **e)** $y = \sin \frac{3}{2}x$ **f)** $y = \sin \frac{x}{\sqrt{3}}$

51. Stellen Sie folgende Funktionen jeweils in einem gesonderten Koordinatensystem graphisch dar, indem Sie von der Ermittlung der kleinsten Periode ausgehen! Ermitteln Sie dann Wertebereich, Nullstellen und Monotonieintervalle! Verwenden Sie die gleiche Einteilung auf den Koordinatenachsen!

- a)** $y = \sin \frac{x}{4}$ ($-4\pi \leq x \leq 4\pi$) **b)** $y = \sin 4x$ ($-4\pi \leq x \leq 4\pi$)

52. Durch die folgenden graphischen Darstellungen sollen Sie Ihre Kenntnisse über die geometrische Bedeutung der Faktoren a und b in der Funktion $y = a \cdot \sin bx$ festigen; vgl. die Tabelle auf Seite 18. Es kommt deshalb auf ein möglichst schnelles Skizzieren der Graphen an.

Hinweise:

Entsprechend dem gegebenen Definitionsbereich legen Sie ein Koordinatensystem an, indem Sie – auf der Abszissenachse für die Darstellung von π drei Längeneinheiten und

– auf der Ordinatenachse für die Darstellung der Zahl 1 eine Längeneinheit verwenden.

Sie markieren den Streifen, in dem sich der Graph befindet, durch Parallelen zur Abszissenachse (Wertebereich).

Sie ermitteln das Grundintervall auf Grund Ihrer Kenntnis über die kleinste Periode.

Sie zeichnen die höchsten und tiefsten Punkte der Kurve und ihre Schnittpunkte mit der Abszissenachse ein.

- a)** $y = 4,5 \sin x$ ($-2\pi \leq x \leq 2\pi$) **b)** $y = 0,75 \sin x$ ($-3\pi \leq x \leq 3\pi$)
c) $y = 3,5 \sin x$ ($-2\pi \leq x \leq \pi$) **d)** $y = \sin 3x$ ($-2\pi \leq x \leq 2\pi$)
e) $y = \sin 4x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) **f)** $y = \sin \frac{x}{3}$ ($-4,5\pi \leq x \leq 7,5\pi$)
g) $y = 2,5 \sin 2x$ ($-\pi \leq x \leq 2\pi$) **h)** $y = 0,5 \sin 3x$ ($-\pi \leq x \leq 2\pi$)
i) $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ ($0 \leq x \leq 5\pi$) **k)** $y = 0,5 \sin \frac{2}{3}x$ ($0 \leq x \leq 5,5\pi$)

53. Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen entsprechend Beispiel A 10 auf Seite 19!

a) $y = \sqrt{3} \sin \frac{5}{7} x$ ($-4\pi \leq x \leq 3\pi$)

b) $y = \frac{1}{7} \sin \sqrt{2} x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$)

c) $y = \pi \sin \frac{2}{3} x$ ($\pi \leq x \leq \frac{13}{2}\pi$)

d) $y = 4,5 \sin 8x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$)

e) $y = \sin x$ ($-3 \leq x \leq 2,5\pi$)

f) $y = 8 \sin \frac{3}{2} x$ ($-\frac{2}{3} \leq x \leq 5$)

g) $y = 3,5 \sin \frac{\pi}{3}$ ($-9 \leq x \leq 18$)

h) $y = \sqrt{3} \sin 2\pi x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$)

54. Der Graph der Sinusfunktion werde in der im folgenden angegebenen Weise geometrischen Abbildungen unterworfen.

Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion, die durch den jeweils entstehenden Graph dargestellt wird! Lösen Sie diese Aufgabe für jede einzelne Abbildung und danach für die Zusammensetzungen der einzelnen Abbildungen!

a) – Streckung in Richtung der Ordinatenachse von der Abszissenachse weg mit dem Streckungsfaktor $k = 3$

– Verringerung des Abstandes l zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse auf $\frac{1}{4} l$

b) – Stauchung in Richtung der Ordinatenachse zur Abszissenachse hin mit dem Streckungsfaktor $k = \frac{2}{5}$

– Vergrößerung des Abstandes l zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse auf $10 l$

c) – Streckung in Richtung der Ordinatenachse von der Abszissenachse weg mit dem Streckungsfaktor $k = \frac{4}{3}$

– Verringerung des Abstandes l zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse auf $\frac{3}{5} l$

55. Von einer Funktion $y = a \cdot \sin bx$ sei bekannt:

a) Wertebereich: $-2,3 \leq y \leq 2,3$; kleinste Periode: 3π

b) Wertebereich: $-4 \leq y \leq 4$; kleinste Periode: $\frac{\pi}{2}$

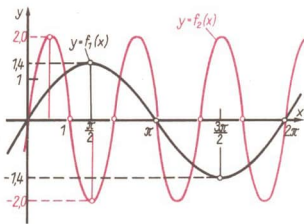
c) Wertebereich: $-1 \leq y \leq 1$; kleinste Periode: $\frac{\pi}{10}$

d) Wertebereich: $-0,7 \leq y \leq 0,7$; kleinste Periode: $\frac{5}{3}\pi$

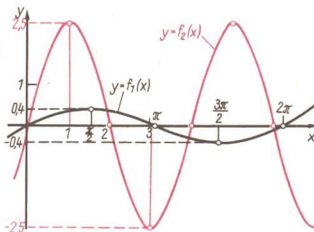
Ermitteln Sie die Gleichungen für alle Funktionen $y = a \cdot \sin bx$, die die vorgegebenen Eigenschaften besitzen!

56. Geben Sie die Gleichungen und den Definitionsbereich der Funktionen an, die durch die Graphen in den Bildern a 5 und a 6 dargestellt sind!

a 5



a 6



2. Ermitteln Sie alle Funktionen der Form $y = a \cdot \sin bx$ ($a, b, x \in P; a, b \neq 0$), die π als Nullstelle und das geordnete Paar $\left[\frac{\pi}{2}; 3\right]$ als eines ihrer Elemente besitzen!
Skizzieren Sie zwei dieser Funktionen im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$!

Welche der folgenden Gleichungen hat eine Lösung und welche nicht ($x \in P$)?

57. a) $\cos x = \pi$ b) $5 \sin x = \frac{1}{2}$ 58. a) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{3}$
 c) $|\cos x| = \sqrt{3}$ c) $|\sin x \cdot \cos x| = 2$
 d) $\frac{1}{2} \sin \frac{x}{3} = \frac{2}{3}$ d) $2,5 \sin 4x = 1$
 e) $-2 \cos x + 10 \sin x = -15$ e) $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{3} \cos x = 1$

Besitzt die Kosinusfunktion in folgenden Intervallen Nullstellen oder nicht? Geben Sie die Nullstellen an!

59. a) $-\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 60. a) $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$
 b) $-4 \leq x \leq -3$ b) $-3\pi \leq x \leq -\pi$
 c) $2 \leq x \leq 5$ c) $\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{3}\pi$
 d) $\frac{17}{5}\pi \leq x \leq \frac{18}{5}\pi$ d) $-14\pi \leq x \leq -10\pi$

3. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Werte von a bzw. b ($a, b \in P$), unter denen die folgenden Gleichungen lösbar sind, an!

a) $\sin x = \frac{2a-3}{4-a}$ b) $\cos x = \frac{5b-2}{2-3b}$

4. Weisen Sie nach, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

gilt!

Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für den Fall an, in dem das Gleichheitszeichen gilt!

Untersuchen Sie, ob die durch die angegebenen Terme bezeichneten Zahlen positiv, negativ oder gleich Null sind! Benutzen Sie dazu nur die Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion!

- ~~a) $\sin 138^\circ$~~ ~~b) $\cos 138^\circ$~~ 62. a) $\sin 237^\circ$ b) $\cos \frac{5}{3}\pi$
~~c) $\frac{\sin 145^\circ}{\cos 145^\circ}$~~ ~~d) $\frac{\cos 234^\circ}{\sin 234^\circ}$~~ c) $\frac{\sin \frac{2}{3}\pi}{\cos \frac{2}{3}\pi}$ d) $\frac{\cos 280^\circ}{\sin 280^\circ}$
~~e) $\tan 138^\circ$~~ ~~f) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{2}{3}\pi$~~ e) $\cot 216^\circ$ f) $\sin 112^\circ \cdot \cos 237^\circ$
~~g) $\tan \frac{5}{3}\pi \cdot \sin \frac{4}{3}\pi$~~ g) $\cot \frac{11}{6}\pi \cdot \cos \frac{5}{6}\pi$
~~h) $\sin 310^\circ \cdot \cot 310^\circ$~~ h) $\cot 223^\circ \cdot \cot 115^\circ$

Untersuchen Sie, welche der folgenden Terme definiert sind! Vereinfachen Sie diese!

- ~~65. a) $\tan 38^\circ \cdot \cos 38^\circ$~~ ~~b) $\frac{\cot 130^\circ}{\cos 130^\circ}$~~ ~~c) $\sin 45^\circ \cdot \cot 45^\circ$~~ ~~d) $\frac{\tan 237^\circ}{\sin 237^\circ}$~~
 a) $\frac{\cos \pi}{\sin \pi}$ d) $\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\tan \frac{\pi}{2}}$ c) $\frac{\sin \pi}{\cos \pi}$ d) $\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\cot \frac{\pi}{2}}$

e) $\frac{\sin 170^\circ}{\cos 170^\circ}$

f) $\frac{\tan 314^\circ}{\cot 314^\circ}$

~~g) $\frac{\cos 212^\circ}{\sin 212^\circ}$~~

f) $\frac{\cot \frac{\pi}{6}}{\tan \frac{\pi}{6}}$

g) $\tan \pi \cdot \cot \pi$

h) $\tan 75^\circ \cdot \cot 75^\circ$

g) $\tan \frac{\pi}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{2}$

h) $\tan \frac{\pi}{3} \cdot \cot \frac{4}{3} \pi$

Ermitteln Sie mit Hilfe der Tabelle spezieller Funktionswerte auf Seite 26 und des Rechenstabes Näherungswerte für folgende Funktionswerte!

65. a) $3 \cdot \sin \frac{\pi}{6}$

b) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$

~~66. a) $\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ$~~

b) $\sin 0 \cdot \cos 0$

c) $\frac{\tan \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}}$

d) $\frac{\cot 30^\circ}{\cos 30^\circ}$

c) $\frac{\cot \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{4}}$

d) $\frac{\tan \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{2}}$

e) $\frac{\tan \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}}$

e) $\cot \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{6}$

Für welche Werte der Variablen x ($x \in P$) sind folgende Terme nicht definiert?

67. a) $\frac{1}{1 + \cos x}$

b) $\frac{1}{\sin 2x}$

68. a) $\frac{1}{1 - \sin x}$

b) $\frac{1}{1 - \sin 2x}$

c) $\frac{\sin x}{1 - \sin x}$

d) $\tan x \cdot \cot x$

c) $\frac{\cot x}{1 - \cot x}$

d) $\sin x \cdot \cot x$

e) $\frac{8}{1 - \sin^2 x}$

f) $\frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$

e) $\frac{10}{\cos^2 x - 1}$

f) $\frac{\cos x}{\cos^2 x - 1}$

g) $\frac{1}{\cot x}$

g) $\frac{1}{\tan x}$

69. Beweisen Sie, daß zwischen der Höhe h und der Seite a eines gleichseitigen Dreiecks folgende Beziehung besteht!

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot a$$

70. a) Konstruieren Sie ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 5$ cm!

b) Berechnen Sie die Länge der Katheten und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit Hilfe der Zeichnung!

5. Weisen Sie nach, daß die folgende Gleichung nicht für alle x ($x \in P$) gilt!

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \quad \left(x \neq k \frac{\pi}{2}; k \in G\right)$$

6. Ermitteln Sie, für welche Werte der Variablen x ($x \in P$) die folgende Gleichung nicht definiert ist! Weisen Sie nach, daß die Gleichung für alle x in dem entsprechenden Definitionsbereich der Gleichung gilt!

$$\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x} = 1$$

Untersuchen Sie jede der folgenden Gleichungen daraufhin, ob sie für alle x ($x \in P$) gilt!

71. a) $\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \sin^2 x \quad \left(x \neq k \frac{\pi}{2}; k \in G\right)$

b) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$

c) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$

a

72. a) $\frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = \cos^2 x \quad (x \neq k\pi; k \in G)$
 b) $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - 2 \sin^2 x \quad (x \neq k \frac{\pi}{2}; k \in G)$
 c) $\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x \quad (x \neq k \frac{\pi}{2}; k \in G)$

Es sind möglichst große Zahlen a und möglichst kleine Zahlen b ($a, b \in P$) zu bestimmen, so daß alle Zahlen x ($x \in P$) die folgenden Ungleichungen erfüllen! Geben Sie jeweils an, für welche Zahlen x das Gleichheitszeichen gilt!

73. a) $1 - \sin 3x \leq b$
 b) $a \leq 2 - \cos 2x$
 c) $a \leq 3 + \frac{1}{2} \sin^2 x$

74. a) $a \leq 1 - \sin 3x$
 b) $2 - \cos 2x \leq b$
 c) $3 + \frac{1}{2} \sin^2 x \leq b$

Ermitteln Sie die größten und kleinsten Werte, die folgende Terme in den gegebenen Intervallen annehmen können! Orientieren Sie sich an den Graphen der Sinus- bzw. Kosinusfunktion!

75. a) $3 \sin x \quad (\pi \leq x \leq 2\pi)$
 b) $5 \cos x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{3})$
 c) $2 \sin \frac{x}{2} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

76. a) $\frac{1}{2} \cos x \quad (\frac{\pi}{6} \leq x \leq \pi)$
 b) $\frac{2}{3} \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4})$
 c) $\frac{1}{3} \sin 3x \quad (\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi)$

In den folgenden Tabellen sind Winkelfunktionswerte für Zahlen x_0 ($x_0 \in P$) aus bestimmten Intervallen gegeben. Gesucht sind Funktionswerte anderer Winkelfunktionen zu den gleichen Zahlen x_0 . Die Zahlen x_0 selbst sollen nicht berechnet werden.

Orientieren Sie sich jeweils an den Graphen der entsprechenden beiden Funktionen, die Sie in ein und dasselbe Koordinatensystem skizzieren!

77.

	a)	b)	c)	d)
	$\pi \leq x_0 \leq 2\pi$	$\frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq \pi$	$\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{3}{2}\pi$	$\pi < x_0 < 2\pi$
Gegeben	$\cos x_0 = \frac{3}{4}$	$\sin x_0 = 0,6$	$\sin x_0 = 0,1$	$\cos x_0 = 0$
Gesucht	$\sin x_0$	$\cos x_0$	$\tan x_0$	$\cot x_0$

78.

	a)	b)	c)	d)
	$0 \leq x_0 \leq \pi$	$\frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x_0 \leq 2\pi$	$\frac{\pi}{2} \leq x_0 < \pi$
Gegeben	$\cos x_0 = -\frac{1}{4}$	$\sin x_0 = -\frac{1}{5}$	$\cos x_0 = \frac{2}{5}$	$\sin x_0 = \frac{3}{10}$
Gesucht	$\sin x_0$	$\cos x_0$	$\tan x_0$	$\cot x_0$

7. Für welche Zahlen x ($x \in P$) sind folgende Terme nicht definiert?

a) $\sqrt{\sin x}$ b) $\sqrt{|\cos x|}$ c) $\lg |\sin x|$ d) $\lg (\cos x)$

Untersuchen Sie, welche der folgenden Paare von Gradmaßen oder Bogenmaßen zu Komplementwinkeln gehören!

79. a) $\{14^\circ; 76^\circ\}$ b) $\{28,5^\circ; 51,5^\circ\}$ 80. a) $\{26,3^\circ; 64,7^\circ\}$ b) $\{58,5^\circ; 31,5^\circ\}$
 c) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right\}$ d) $\{0,4\pi; 0,1\pi\}$ c) $\left\{0,73\frac{\pi}{2}; 0,27\frac{\pi}{2}\right\}$ d) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right\}$
 e) $\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right\}$ e) $\left\{-\frac{5}{7}\pi; \frac{19}{14}\pi\right\}$

Ermitteln Sie zu folgenden Winkeln die Komplementwinkel!

81. a) $38,7^\circ$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3}{8}\pi$ 82. a) $14,9^\circ$ b) $\frac{3}{10}\pi$ c) $\frac{1}{6}\pi$
 d) $54,8^\circ$ e) -54° f) $\frac{3}{2}\pi$ d) 45° e) 130° f) $-\frac{\pi}{3}$

Welche der folgenden Winkelfunktionswerte sind einander gleich? Bilden Sie Gleichungen!

83. $\sin 35^\circ; \sin \frac{\pi}{3}; \sin 42,3^\circ;$
 $\cos 55^\circ; \cos 47,7^\circ; \cos \frac{\pi}{6}$ 84. $\tan 16,7^\circ; \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right); \cot 73,3^\circ;$
 $\cos \frac{5}{4}\pi; \cos 75^\circ; \sin 15^\circ$

Ermitteln Sie durch Anwenden der Komplementwinkelbeziehungen jeweils eine Lösung der folgenden Gleichungen ($x \in P$)!

85. a) $\sin \frac{\pi}{5} = \cos x$ 86. a) $\sin \frac{\pi}{10} = \cos x$
 b) $\cos 1,2 = \sin x$ b) $\cos 0,8 = \sin x$
 c) $\tan \frac{2}{3} = \cot x$ c) $\tan \frac{5}{12} = \cot x$
 d) $\cot \frac{3}{7}\pi = \tan x$ d) $\cot \frac{\pi}{8} = \tan x$
 e) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos x$ e) $\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \sin x$
 f) $\tan \frac{3}{2}\pi = \cot x$ f) $\cot\left(\frac{8}{3}\pi\right) = \tan x$

87. Zeichnen Sie jeweils in ein besonderes kartesisches Koordinatensystem ein Dreieck mit den folgenden Eckpunkten!

- a) $A(1; 2), B(4; 4), C(2; 6)$ b) $A(2; 4), B(-3; 1), C(-1; 6)$

Spiegeln Sie die Eckpunkte an den Parallelen zur Ordinatenachse durch die folgenden Punkte!

- a) $P(3; 0)$ b) $P(5; 0)$

Geben Sie die Bildpunkte A', B', C' mit ihren Koordinaten an! Geben Sie die Beziehung zwischen den Koordinaten $[x; y]$ eines beliebigen Punktes $P(x; y)$ und den Koordinaten $[x'; y']$ des Bildpunktes $P'(x'; y')$ bei der jeweiligen Spiegelung in allgemeiner Form an!

8. Geben Sie Paare von Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ ($x \in P$) an, für die folgende Gleichung gilt!

$$f(x) = g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

In welcher Weise wird diese Beziehung im Graph der Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sichtbar?

Entscheiden Sie jeweils, ob die Winkelfunktionswerte einander gleich sind!

88. a) $\sin 43^\circ; \sin 317^\circ$ 89. a) $\sin 150^\circ; \sin 30^\circ$
 b) $\cos 191^\circ; -\cos 11^\circ$ b) $\cos 275^\circ; -\cos 85^\circ$
 c) $\tan 173^\circ; \tan 7^\circ$ c) $\tan 164^\circ; -\tan 26^\circ$
 d) $\cot 225^\circ; \cot 45^\circ$ d) $\cot 280^\circ; -\cot 80^\circ$

90. a) $\sin 280^\circ$; $\sin 80^\circ$
 b) $\cos 317^\circ$; $\cos 43^\circ$
 c) $\sin 165^\circ$; $\sin 25^\circ$
 d) $\tan 240^\circ$; $\tan 50^\circ$
 e) $\cot 25^\circ$; $\tan 65^\circ$

91. a) $\sin 145^\circ$; $\sin 35^\circ$
 b) $\cos 238^\circ$; $-\cos 58^\circ$
 c) $\sin 243^\circ$; $\sin 53^\circ$
 d) $-\tan 38^\circ$; $\tan 312^\circ$
 e) $\sin 63^\circ$; $\cos 27^\circ$

Lösen Sie folgende Gleichungen!

92. a) $180^\circ = 143^\circ + x$
 b) $360^\circ = 283^\circ + x$
 c) $180^\circ = 243^\circ - x$
 d) $360^\circ - x = 293^\circ$
 e) $180^\circ + x = 245^\circ$
 f) $180^\circ - x = 127^\circ$

93. a) $152^\circ + x = 180^\circ$
 b) $314^\circ + x = 360^\circ$
 c) $238^\circ - x = 180^\circ$
 d) $284^\circ = 360^\circ - x$
 e) $216^\circ = 180^\circ + x$
 f) $173^\circ = 180^\circ - x$

Zerlegen Sie folgende Winkelmaße in die Summe $180^\circ + x$ oder in die Differenzen $180^\circ - x$ bzw. $360^\circ - x$ derart, daß $0 < x < 90^\circ$ gilt! Beachten Sie, daß die Grenze zwischen dem dritten und dem vierten Quadranten bei 270° liegt!

94. a) 125° b) 217° c) 314°
 d) 162° e) 265° f) 285°
 g) 174° h) 98° i) 269°

95. a) 216° b) 263° c) 294°
 d) 119° e) 214° f) 274°
 g) 223° h) 255° i) 342°

Ermitteln Sie folgende Funktionswerte!

96. a) $\sin 135^\circ$ b) $\cos 120^\circ$
 c) $\tan \frac{7}{6}\pi$ d) $\cot 330^\circ$
 e) $\cos 225^\circ$ f) $\sin 315^\circ$
 g) $\tan \frac{4}{3}\pi$ h) $\cot \frac{7}{4}\pi$
 i) $\sin 330^\circ$ k) $\cos 240^\circ$

97. a) $\sin 225^\circ$ b) $\cos \frac{11}{6}\pi$
 c) $\cot \frac{4}{3}\pi$ d) $\tan 120^\circ$
 e) $\sin \frac{5}{4}\pi$ f) $\tan 330^\circ$
 g) $\cot 150^\circ$ h) $\sin 300^\circ$
 i) $\tan \frac{5}{3}\pi$ k) $\cos 135^\circ$

9. Weisen Sie nach, daß folgende Aussage wahr ist!

$$\tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ = 1$$

Ermitteln Sie mit Hilfe der Quadrantenbeziehungen jeweils eine Lösung $\{a; x\}$ folgender Gleichungen ($a \in \{+1; -1\}$; $0^\circ < x < 90^\circ$)!

98. a) $\sin 136^\circ = a \cdot \sin x$
 b) $\sin 227^\circ = a \cdot \sin x$
 c) $\sin 186^\circ = a \cdot \sin x$
 d) $\sin 312^\circ = a \cdot \sin x$

99. a) $\cos 216^\circ = a \cdot \cos x$
 b) $\cos 164^\circ = a \cdot \cos x$
 c) $\cos 163^\circ = a \cdot \cos x$
 d) $\cos 294^\circ = a \cdot \cos x$

100. a) $\tan 138^\circ = a \cdot \tan x$
 b) $\tan 217^\circ = a \cdot \tan x$
 c) $\tan 178^\circ = a \cdot \tan x$
 d) $\tan 315^\circ = a \cdot \tan x$

101. a) $\cot 143^\circ = a \cdot \cot x$
 b) $\cot 307^\circ = a \cdot \cot x$
 c) $\cot 216^\circ = a \cdot \cot x$
 d) $\cot 153^\circ = a \cdot \cot x$

Ermitteln Sie näherungsweise mit Hilfe der Tafel folgende Funktionswerte!

102. a) $\sin 14^\circ$ b) $\sin 15^\circ$ c) $\sin 3^\circ$ d) $\sin 30^\circ$
 e) $\cos 76^\circ$ f) $\cos 75^\circ$ g) $\cos 87^\circ$ h) $\cos 60^\circ$
 i) $\cos 14^\circ$ k) $\cos 15^\circ$ l) $\cos 3^\circ$ m) $\cos 30^\circ$

103. a) $\sin 13,4^\circ$ b) $\sin 17,8^\circ$ c) $\sin 34,8^\circ$ d) $\sin 73,6^\circ$
 e) $\cos 76,6^\circ$ f) $\cos 72,2^\circ$ g) $\cos 55,2^\circ$ h) $\cos 16,4^\circ$
 i) $\cos 13,4^\circ$ k) $\cos 17,8^\circ$ l) $\cos 34,8^\circ$ m) $\cos 73,6^\circ$

104. a) $\sin 12,7^\circ$ b) $\cos 0,9^\circ$ c) $\sin 0,7^\circ$ d) $\cos 27,3^\circ$
 e) $\cos 37^\circ$ f) $\cos 48,9^\circ$ g) $\cos 8,2^\circ$ h) $\cos 63,5^\circ$
 i) $\tan 34^\circ$ k) $\tan 35^\circ$ l) $\tan 35,4^\circ$ m) $\tan 86^\circ$
105. a) $\cot 56^\circ$ b) $\cot 55^\circ$ c) $\cot 54,6^\circ$ d) $\cot 4^\circ$
 e) $\cot 34^\circ$ f) $\cot 35^\circ$ g) $\cot 35,4^\circ$ h) $\cot 86^\circ$
 i) $\tan 84,3^\circ$ k) $\tan 89,5^\circ$ l) $\tan 71,6^\circ$ m) $\tan 63,5^\circ$
106. a) $\cot 11,3^\circ$ b) $\cot 14^\circ$ c) $\cot 45^\circ$ d) $\cot 89,2^\circ$
 e) $\cot 37,4^\circ$ f) $\cot 62,6^\circ$ g) $\cot 28,3^\circ$ h) $\cos 14,7^\circ$
 i) $\tan 63,7^\circ$ k) $\sin 74,3^\circ$ l) $\cot 39,5^\circ$ m) $\cot 11^\circ$
107. a) $\tan 1^\circ$ b) $\cot 1^\circ$ c) $\sin 1^\circ$ d) $\cos 1^\circ$

Ermitteln Sie mit Hilfe der Tabellen der Winkelfunktionswerte Näherungslösungen der folgenden Gleichungen ($0^\circ < x < 90^\circ$)!

108. a) $\sin x = 0,2470$ 109. a) $\sin x = 0,9816$
 b) $\cos x = 0,9026$ b) $\cos x = 0,6921$
 c) $\tan x = 2,050$ c) $\tan x = 0,1871$
 d) $\cot x = 2,145$ d) $\cot x = 3,060$
110. a) $\sin x = 0,8965$ 111. a) $\sin x = 0,5140$
 b) $\cos x = 0,8453$ b) $\cos x = 0,9648$
 c) $\tan x = 5,005$ c) $\tan x = 0,5300$
 d) $\cot x = 0,9930$ d) $\cot x = 0,1340$
112. a) $\sin x = 0,9580$ 113. a) $\sin x = 0,7925$
 b) $\cos x = 0,2510$ b) $\cos x = 0,5123$
 c) $\tan x = 0,3614$ c) $\tan x = 3,235$
 d) $\cot x = 0,3435$ d) $\cot x = 1,349$
114. a) $\sin x = 0,3582$ 115. a) $\sin x = 0,4825$
 b) $\cos x = 0,4343$ b) $\cos x = 0,4050$
 c) $\tan x = 1,205$ c) $\tan x = 2,150$
 d) $\cot x = 0,4324$ d) $\cot x = 0,4383$
116. a) $\sin x = 0,2831$ b) $\cot x = 0,4323$
 c) $\cos x = 0,4777$ d) $\tan x = 1,053$

Lösen Sie näherungsweise folgende Gleichungen, indem Sie zunächst die Tabellen der Funktionswerte der Winkelfunktionen benutzen und anschließend mit Hilfe des Rechenstabes die erhaltenen Winkelmaße in Bogenmaß umrechnen ($x \in P$; $0 < x < \frac{\pi}{2}$)!

117. a) $\sin x = 0,8764$ 118. a) $\sin x = 0,1236$
 b) $\cos x = 0,9397$ b) $\tan x = 2,778$
 c) $\tan x = 0,3057$ c) $\cot x = 2,024$
 d) $\cot x = 2,904$ d) $\cos x = 0,4509$
119. a) $\cos x = 0,8788$ 120. a) $\sin x = 0,3390$
 b) $\sin x = 0,5990$ b) $\cos x = 0,5680$
 c) $\tan x = 1,006$ c) $\tan x = 0,4780$
 d) $\cot x = 18,46$ d) $\cos x = -0,9375$
121. a) $\cot x = 10,62$ 122. a) $\cos x = 0,9375$
 b) $\cos x = 0,5552$ b) $\tan x = 6,9537$
 c) $\sin x = 0,8225$ c) $\sin x = 0,3410$
 d) $\cot x = 43,13$ d) $\cot x = 4,345$

Ermitteln Sie näherungsweise mit Hilfe der Tafel alle Lösungen folgender Gleichungen mit x aus dem Intervall $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$!

123. a) $\sin x = 0,3716$
 b) $\cos x = 0,8415$
 c) $\tan x = 0,9416$
 d) $\cot x = 0,6899$

124. a) $\sin x = 0,4328$
 b) $\cos x = 0,3928$
 c) $\tan x = 1,243$
 d) $\cot x = 0,4517$

125. a) $\sin x = -0,2837$
 b) $\cos x = -0,6837$
 c) $\tan x = -1,346$
 d) $\cot x = -0,3716$

126. a) $\sin x = 0,9117$
 b) $\cos x = -0,6713$
 c) $\tan x = -0,2364$
 d) $\cot x = 0,6713$

127. a) $\sin x = -0,4521$
 b) $\cos x = 0,4823$
 c) $\tan x = -0,4388$
 d) $\cot x = 0,9494$

128. a) $\sin x = -0,8493$
 b) $\cos x = -0,5714$
 c) $\tan x = -1,531$
 d) $\cot x = -2,138$

Lösen Sie folgende Gleichungen mit Hilfe des Rechenstabes! Der Grundbereich der Variablen ist gleich der Menge der reellen Zahlen.

129. a) $\sin 25,4^\circ = x$
 b) $\cos 48,7^\circ = a$
 c) $\sin 53,6^\circ = u$
 d) $\cos 83,3^\circ = z$

130. a) $\cot 77,4^\circ = y$
 b) $\tan 43,2^\circ = x$
 c) $\tan 33,4^\circ = z$
 d) $\cot 62,5^\circ = b$

131. a) $\tan 62,5^\circ = a$
 c) $\tan 65,6^\circ = v$

- b) $\cot 36,6^\circ = w$
 d) $\cot 27,8^\circ = z$

Lösen Sie folgende Gleichungen näherungsweise mit Hilfe des Rechenstabes ($x \in P; 0 < x < \frac{\pi}{2}$)!

132. a) $\sin x = 0,42$
 b) $\cos x = 0,83$
 c) $\cos x = 0,431$
 d) $\sin x = 0,319$

133. a) $\tan x = 0,934$
 b) $\tan x = 0,431$
 c) $\cot x = 0,62$
 d) $\cot x = 0,521$

134. a) $\tan x = 3,42$
 c) $\cot x = 8,46$

- b) $\tan x = 4,83$
 d) $\cot x = 5,29$

Lösen Sie folgende Gleichungen näherungsweise mit Hilfe der Tafel oder des Rechenstabes! Der Grundbereich der Variablen sei die Menge der reellen Zahlen.

135. a) $\sin 36^\circ = x$ b) $\cot 117^\circ = a$ c) $\tan 126^\circ = v$
 d) $\cot 127^\circ = y$ e) $\tan 97^\circ = b$ f) $\cos 198^\circ = x$

136. a) $\tan 312^\circ = z$ b) $\sin 128^\circ = z$ c) $\cot 145^\circ = w$
 d) $\cot 116^\circ = x$ e) $\tan 163^\circ = u$ f) $\sin 191^\circ = y$

Vervollständigen Sie folgende Tabellen, indem Sie mit Hilfe der Tafel oder des Rechenstabes Näherungswerte ermitteln!

137.	x	$101,7^\circ$	$94,3^\circ$	$115,6^\circ$	$159,9^\circ$
	$\sin x$				

138.	x	$178,4^\circ$	$210,4^\circ$	$119,6^\circ$	$128,7^\circ$
	$\cos x$				

139.	x	$154,7^\circ$	$124,9^\circ$	$215,8^\circ$	$91,4^\circ$
	$\tan x$				

140.	x	$104,6^\circ$	$293,5^\circ$	$156,5^\circ$	$129,7^\circ$
	$\cot x$				

141. Ermitteln Sie jeweils eine Lösung $(n; x)$ ($n \in G; 0^\circ \leq x < 360^\circ$) folgender Gleichungen!

- a) $738^\circ = n \cdot 360^\circ + x$ b) $1872^\circ = n \cdot 360^\circ + x$
 c) $5891^\circ = n \cdot 360^\circ + x$ d) $428^\circ = n \cdot 360^\circ + x$

Ermitteln Sie die folgenden Funktionswerte näherungsweise mit Hilfe des Rechenstabes!

142. a) $\sin 398^\circ$ b) $\cos 416^\circ$ 143. a) $\sin 5073^\circ$ b) $\cos 3428^\circ$
 c) $\tan 518^\circ$ d) $\cot 728^\circ$ c) $\tan 4891^\circ$ d) $\cot 6328^\circ$

Bilden Sie geordnete Paare $[x; f(x)]$ der angegebenen Funktionen zu folgenden Elementen des Definitionsbereiches, indem Sie mit Hilfe des Rechenstabes Näherungswerte ermitteln!

144. a) $x = 0,7; f(x) = \sin x$ 145. a) $x = 1,6\pi; f(x) = \sin x$
 b) $x = 1,4; f(x) = \cos x$ b) $x = 3,8; f(x) = \cos x$
 c) $x = 0,3\pi; f(x) = \tan x$ c) $x = 1,7; f(x) = \tan x$
 d) $x = 0,2\pi; f(x) = \cot x$ d) $x = 5,2; f(x) = \cot x$

Lösen Sie folgende Gleichungen ($x \in P; x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in G$)!

146. a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\sin x = -\frac{1}{2}$
 d) $\cos x = \frac{1}{2}$ e) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ f) $\cos x = -1$

147. a) $\tan x = 1$ b) $\tan x = -\sqrt{3}$ c) $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
 d) $\cot x = 1$ e) $\cot x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ f) $\cot x = -1$

Für welche Zahlen x ($x \in P$) sind folgende Ungleichungen erfüllt? Orientieren Sie sich an den Graphen der entsprechenden Funktionen!

148. a) $\sin x > \frac{1}{2}$ b) $\tan x < \sqrt{3}$ c) $\sin x > \cos x$
 d) $\cos x < 0$ e) $\cot x > 0$ f) $\tan x > \cot x$

149. a) $\sin x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\tan x > 1$ c) $|\sin x| < \frac{1}{2}$
 d) $\cos x > -\frac{1}{2}$ e) $\cot x < \frac{1}{3}\sqrt{3}$ f) $|\tan x| < 1$

150. a) Ermitteln Sie alle geordneten Paare $[x; \frac{1}{2}]$ ($x \in P$), die der Sinusfunktion angehören!
 b) Ermitteln Sie alle geordneten Paare $[x; \sqrt{3}]$ ($x \in P$), die der Tangensfunktion angehören!

151. a) Ermitteln Sie alle geordneten Paare

$\left[x; -\frac{1}{2}\right] (x \in P)$, die der Kosinusfunktion angehören!

- b) Ermitteln Sie alle geordneten Paare

$\left[x; -\sqrt{3}\right] (x \in P)$, die der Kotangensfunktion angehören!

152. Für eine harmonische Schwingung gilt folgender gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen der Zeit t und dem Ausschlag x (der Elongation) des schwingenden Körpers zum Zeitpunkt t .

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t)$$

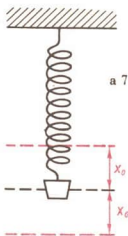
$\left[x_0; \text{Amplitude (größter Ausschlag)}; \omega = \frac{2\pi}{T} (T: \text{Dauer einer vollen Schwingung})\right]$

Für einen vertikalen Federschwinger seien folgende Werte gemessen worden; vgl. Bild a 7.

$$\alpha) x_0 = 3,5 \text{ cm}; \quad T = 0,8 \text{ s} \qquad \beta) x_0 = 5,4 \text{ cm}; \quad T = 1,2 \text{ s}$$

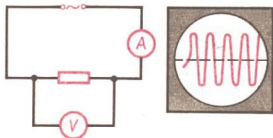
(In beiden Fällen wurde die gleiche Feder benutzt.)

- a) Geben Sie die Gleichung der Bewegung des schwingenden Körpers an! Stellen Sie den Schwingungsverlauf für fünf volle Schwingungen graphisch dar!
 b) Welchen Ausschlag besitzt das Massestück zum Zeitpunkt $t = 5 \text{ s}$? (Die Dämpfung werde in dem zugrunde gelegten Bereich vernachlässigt.)
 c) Wodurch entsteht bei gleicher Feder der Unterschied des Bewegungsvorganges?



a 7

a 8



153. Die Momentanwerte für Stromstärke i und Spannung u eines Wechselstromkreises genügen folgenden Gleichungen; vgl. Bild a 8.

$$i = i_{\max} \cdot \sin(\omega t); \quad \omega = 2\pi f$$

$$u = u_{\max} \cdot \sin(\omega t); \quad f: \text{Frequenz}$$

Zu den auf Meßgeräten abzulesenden Werten für die effektive Stromstärke I und die effektive Spannung U bestehen folgende Beziehungen.

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} i_{\max}; \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{\max}$$

In einem an das Wohnungsnetz ($U = 220 \text{ V}; f = 50 \text{ Hz}$) angeschlossenen Stromkreis möge eine Stromstärke $I = 4,5 \text{ A}$ bestehen.

- a) Geben Sie die Gleichungen für die Momentanwerte von Spannung und Stromstärke an!
 b) Zeichnen Sie in getrennte Koordinatensysteme die Stromstärke- und Spannungskurven für fünf Perioden!
 c) Es sei angenommen, daß beim Schließen des Stromkreises gerade eine Periode beginnt.
 d) Berechnen Sie die Momentanwerte i und u für $0,004 \text{ s}$ nach Schließen des Stromkreises!
154. Suchen Sie im Tafelwerk die Formeln für den schrägen Wurf auf!
- a) Berechnen Sie die Steigzeit, die Steighöhe und die Wurfweite für eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ für die Abwurfwinkel $\alpha = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 90^\circ$!
- b) Stellen Sie die zu Steigzeit, Steighöhe, Wurfweite erhaltenen geordneten Paare graphisch dar! Deuten Sie Ihr Ergebnis!

155. Berechnen Sie den Abschlußwinkel für ein Geschöß, das eine Anfangsgeschwindigkeit von $765 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ besitzt und eine Schußweite von 1500 m erreichen soll (der Luftwiderstand werde vernachlässigt)!

156. Die Fallbeschleunigung ist von der geographischen Breite abhängig. Es gilt $g_{\varphi} = g_{90} \left(1 - \frac{1}{191} \cos^2 \varphi\right)$; $g_{90} = 983,09 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. Berechnen Sie die Werte der Fallbeschleunigung für die geographischen Breiten $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 90^\circ$!

Lösen Sie folgende Gleichungen ($0 \leq x \leq 2\pi$; $x \in P$)!

Untersuchen Sie zunächst stets, ob es Zahlen gibt, für die die Gleichung nicht definiert ist!

157. a) $2 \cdot \cos x = \sqrt{3}$

b) $\frac{4}{3} \sin x = -1$

c) $\sqrt{3} \tan x = 1$

d) $4 \cdot \cot x = 5$

158. a) $\sin^2 x = \frac{16}{9}$

b) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

c) $\tan^2 x = 3$

d) $\cot^2 x = \frac{1}{3}$

159. a) $1 - \sin^2 x = \frac{1}{4}$

c) $\tan x \cdot \cot x = 4$

b) $1 - \cos^2 x = \frac{3}{4}$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{2}$

10. Prüfen Sie nach, ob die angegebenen Zahlen Lösung der entsprechenden Gleichung sind!

a) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$; $x = \frac{7}{3}$

b) $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$; $x = -\frac{13}{6}$

Lösen Sie folgende Gleichungen möglichst mit Hilfe des Rechenstabes ($x \in P$; $0 < x < \pi$)!

11. a) $\frac{\sin x}{\sin 35,4^\circ} = 0,627$

b) $54,7 = 36,1 - 32,6 \cdot \cos x$

c) $\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} = 0$

12. a) $\frac{\sin 48,2^\circ}{\sin x} = \frac{4,8}{5,7}$

b) $37,2 = 55,5 - 54,7 \cdot \cos x$

c) $\tan^2 x + 2 \cdot \tan x + 1 = 0$

13. Stellen Sie die folgenden Funktionen in gesonderten Koordinatensystemen, aber mit gleichen Achsenteilungen, graphisch dar!

a) $y = \sin x^2$ ($x \in P$; $-\sqrt{8\pi} \leq x \leq \sqrt{8\pi}$)

b) $y = \sin^2 x$ ($x \in P$; $-2\pi \leq x \leq 2\pi$)

Wenden Sie dazu Ihre Kenntnisse über die Eigenschaften der Sinusfunktion (Wertebereich, Nullstellen, Periodizität) an! Nutzen Sie für Berechnungen den Rechenstab!

Von rechtwinkligen Dreiecken ABC ($\gamma = 90^\circ$) seien die folgenden Stücke gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt der Dreiecke!

160. a) $a = 12,7 \text{ cm}$; $b = 4,9 \text{ cm}$

b) $a = 420 \text{ m}$; $c = 645 \text{ m}$

c) $c = 125 \text{ m}$; $\alpha = 35,5^\circ$

d) $a = 63 \text{ mm}$; $\alpha = 42,2^\circ$

161. a) $a = 15,8 \text{ m}$; $b = 34,5 \text{ m}$

b) $a = 14,5 \text{ cm}$; $c = 29,0 \text{ cm}$

c) $c = 10,5 \text{ cm}$; $\beta = 40,3^\circ$

d) $b = 80,7 \text{ m}$; $\beta = 62,4^\circ$

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ($\gamma = 90^\circ$) seien zwei Stücke gegeben. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt! Konstruieren Sie die Dreiecke in einem geeigneten Maßstab!

162. a) $c = 18,5 \text{ m}$; $p = 4,2 \text{ m}$

b) $h_c = q = 3,5 \text{ cm}$

c) $h_c = 22,4 \text{ m}$; $b = 25,3 \text{ m}$

d) $p = 18,1 \text{ cm}$; $q = 3,8 \text{ cm}$

163. a) $p = 10,2 \text{ cm}$; $\alpha = 37,5^\circ$

b) $a = 16,6 \text{ m}$; $h_c = 4,1 \text{ m}$

c) $c = 25,2 \text{ m}$; $p = 8,2 \text{ m}$

d) $h_c = 8,8 \text{ cm}$; $\beta = 35,5^\circ$

Von rechtwinkligen Dreiecken ABC ($\gamma = 90^\circ$) seien der Flächeninhalt und ein weiteres Stück gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel der Dreiecke!

164. a) $A = 54 \text{ cm}^2$; $a = 10,5 \text{ m}$
 b) $A = 1,2 \text{ m}^2$; $b = 2,05 \text{ m}$
 c) $A = 0,6 \text{ dm}^2$; $\beta = 38,5^\circ$

165. a) $A = 66,4 \text{ m}^2$; $b = 11,5 \text{ m}$
 b) $A = 0,80 \text{ dm}^2$; $a = 14,5 \text{ cm}$
 c) $A = 368 \text{ cm}^2$; $\alpha = \beta$

166. Eine Leiter von 3,2 m Länge lehne so an einer Mauer, daß ihr Fuß 0,7 m von dieser entfernt ist.

In welcher Höhe berührt sie die Mauer? Welchen Winkel schließt sie mit dieser ein?

167. Ein gerader Weg verbinde zwei Orte, deren Entfernung auf der Karte mit 618 m angegeben sei. Die Orte liegen in einer Höhe von 88 m und 134 m über Normal-Null. Wie lang ist der Weg? Unter welchem Winkel steigt er an?

168. Eine senkrecht stehende Stange von 15,5 m Länge werfe auf eine horizontale Ebene einen Schatten von 30,8 m Länge. In welcher Höhe steht die Sonne?

169. Ein Baum werfe bei einem Sonnenstand von $43,8^\circ$ Höhe einen Schatten von 32,3 m Länge. Wie hoch ist der Baum?

170. Durch das Flakfernrohr einer Flakbatterie wird ein Flugzeug in einer Luftentfernung von 6,3 km bei einem Erhebungswinkel von $8,6^\circ$ festgestellt.

Wie hoch fliegt das Flugzeug im Augenblick der Beobachtung?

171. Wie lang muß das Haltetau eines 30 m hohen Antennenmastes einer Funkmeßstation sein, wenn es, an der Spitze des Mastes befestigt, mit dem Erdboden einen Winkel von 65° bilden soll?

172. Die Stufen einer Treppe seien 25 cm breit und 16 cm hoch. Welche Neigung muß man dem Treppengeländer geben?

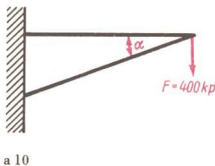
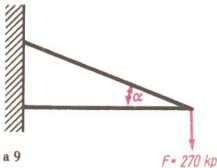
173. Eine Treppe habe eine Neigung von 36° ; ihre Stufen seien 24 cm breit. Wie hoch ist eine Stufe?

174. Von einem modernen sowjetischen Hubschrauber aus, der in 600 m Höhe fliegt, wird ein eben überflogener Geländepunkt nach 16 s unter einem Tiefenwinkel von 32° beobachtet. Welche Geschwindigkeit über Grund hat der Hubschrauber?

175. Die Landestrecke eines Flugzeuges beträgt aus 20 m Höhe bei Benutzung der Landeklappen 400 m, ohne dieselben 860 m. Um welchen Winkel ändert sich die Flugrichtung gegen die Horizontale bei Benutzung der Landeklappen?

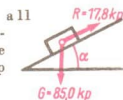
176. Am äußeren Ende eines Tragarms mit Zugstange hänge eine Last $F = 270 \text{ kp}$; vgl. Bild a 9. Ermitteln Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung den Betrag und die Richtung der auf den Tragarm und die Zugstange wirkenden Teilkräfte für die Winkel $\alpha = 30^\circ$ und 45° ! Überprüfen Sie das Ergebnis durch Rechnung!

177. Am Ende eines Tragarms mit Stütze hänge eine Last $F = 400 \text{ kp}$; vgl. Bild a 10. Ermitteln Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung den Betrag und die Richtung der auf den Tragarm und die Stütze wirkenden Teilkräfte für die Winkel $\alpha = 30^\circ$, 45° und 60° ! Überprüfen Sie das Ergebnis durch Rechnung!



178. Auf einer Ebene von $23,5^\circ$ Neigung gleite ein Körper von $50,0 \text{ kp}$ Gewicht mit gleichbleibender Geschwindigkeit abwärts. Wie groß sind die Druckkraft, die auf die Unterlage ausgeübt wird, und die Reibungskraft?

179. Eine Kiste mit einem Gewicht von $85,0 \text{ kp}$ werde mit Hilfe einer Schrottleiter abgeladen; vgl. Bild a 11. Bei welchem Winkel beginnt die Kiste zu gleiten, wenn zur Überwindung der Reibung eine Kraft von $17,8 \text{ kp}$ erforderlich ist?



180. Ein Wetterflugzeug steige mit 8 ms^{-1} bei einer Fahrtmesseranzeige von 420 kmh^{-1} .

- Welche Höhe erreicht das Flugzeug in 10 min?
- Welchen Winkel schließt die Flugbahn mit der Horizontalen ein?

182. Das Fla-Turm-MG eines mittleren Panzers ist auf dem oberen Rand des Turmes $2,7 \text{ m}$ über dem Erdboden angebracht. Der Aufsatzwinkel (Winkel mit der Horizontalen) kann von -5° bis $+30^\circ$ eingestellt werden. Berechnen Sie den Radius des „toten Raumes“ um den Panzer in bezug auf das Fla-Turm-MG (Radius des Turmes 1 m)!

181. Auf dem 46 m hohen Kap Arkona (Rügen) steht ein 26 m hoher Leuchtturm. Seine Spitze wird von einem vorbeifahrenden Küstenschutzschiff der Volksmarine bei einer Bordhöhe von $3,5 \text{ m}$ unter einem Erhebungswinkel von $2,5^\circ$ gesichtet.

Wie weit ist das Küstenschutzschiff vom Leuchtturm entfernt?

183. Bei einem in der NVA verwendeten Fla-Geschütz werden die Seitenwinkel in Teilstriichen gemessen. Der Vollkreis ist in 6000 Teilstriche unterteilt. Begründen Sie die Regel, daß bei Drehung des Geschützes um 1 Teilstrich der Treffpunkt um ein Tausendstel der eingestellten Entfernung nach der Seite verlegt wird!



Von gleichschenkligen Dreiecken ABC mit $a = b$ und der Basis c seien zwei Stücke gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt! Konstruieren Sie die Dreiecke!

184. a) $a = 25,1 \text{ m}$; $c = 14,3 \text{ m}$
b) $c = 125 \text{ m}$; $h_c = 85 \text{ m}$

185. a) $a = 3,75 \text{ m}$; $c = 2,35 \text{ m}$
b) $h_c = 4,76 \text{ m}$; $\gamma = 32,1^\circ$

186. a) $c = 19,6 \text{ m}$; $\gamma = 55,5^\circ$
b) $a = 5,6 \text{ cm}$; $h_c = 4,8 \text{ cm}$

187. a) $c = 75,6 \text{ m}$; $\alpha = 53,2^\circ$
b) $a = 18,8 \text{ cm}$; $\gamma = 146,4^\circ$

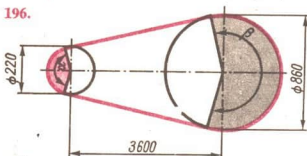
188. Berechnen Sie im Rechteck mit den Seitenlängen $a = 5,5 \text{ m}$ und $b = 4,2 \text{ m}$ die Winkel, die die Diagonalen mit den Rechteckseiten bilden, sowie den von den Diagonalen eingeschlossenen kleineren Winkel!

189. Von einem Rechteck seien die Diagonale (Länge $6,50 \text{ m}$) und der von den Diagonalen eingeschlossene Winkel (55°) gegeben. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

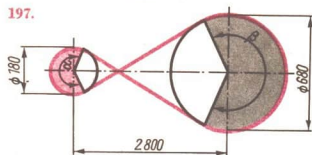
190. Von einem Rhombus seien die Seite (Länge 6,5 cm) und ein Winkel (45°) gegeben. Berechnen Sie die Längen der Diagonalen und den Flächeninhalt des Rhombus!
191. Von einem Rhombus seien der Flächeninhalt ($A = 1,00 \text{ dm}^2$) und ein Winkel ($56,6^\circ$) gegeben. Berechnen Sie die Längen der Seite und der Diagonalen des Rhombus!
192. Von einem Drachenviereck $ABCD$ seien gegeben:
 $\overline{AB} = \overline{AD} = 6,3 \text{ cm}$;
 $\overline{BC} = \overline{CD} = 2,8 \text{ cm}$;
 $\overline{BD} = 4,2 \text{ cm}$.
 Berechnen Sie die Innenwinkel des Vierecks, die Länge der Diagonalen \overline{AC} sowie den Flächeninhalt der Figur!
193. Von einem gleichschenkligen Trapez seien die parallelen Seiten $a = 5,25 \text{ cm}$ und $c = 3,75 \text{ cm}$ sowie der Winkel $\alpha = 64,8^\circ$ an der längeren der parallelen Seiten gegeben. Berechnen Sie die Innenwinkel des Trapezes, den kleineren Winkel zwischen den Diagonalen sowie Höhe und Flächeninhalt der Figur!
194. Bei einem Rhombus verhalten sich die Längen der Diagonalen wie $1 : \sqrt{2}$. Welche Winkel werden von den Seiten eingeschlossen?
195. Der kleinere Winkel zwischen den Diagonalen eines Rechtecks betrage $58,5^\circ$. Um wieviel Prozent der größeren Seite ist die kleinere Seite kürzer als jene?

Berechnen Sie für die im folgenden dargestellten Riementreibe (offener Riemetrieb vgl. Bild a 12; gekreuzter Riemetrieb vgl. Bild a 13)

- a) die Umschlingungswinkel α und β ;
 b) die erforderlichen Riemenlängen (102% des errechneten Wertes)!



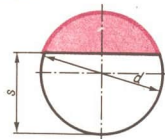
a 12



a 13

Von einer Welle werde das im Bild a 14 rot dargestellte Stück abgehobelt. Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

198. a) $d = 100 \text{ mm}$; $s = 75 \text{ mm}$
 b) $d = 160 \text{ mm}$; $d - s = 35 \text{ mm}$
199. a) $d = 130 \text{ mm}$; $s = 0,85 d$
 b) $d = 160 \text{ mm}$; $d - s = 20 \text{ mm}$
200. Unter welchem Gesichtswinkel erscheint ein Mensch von 1,80 m Größe bei
 a) 20 m; b) 200 m; c) 2 km
 Entfernung?
201. Ein nicht selbstleuchtender Gegenstand ist im allgemeinen noch erkennbar, wenn der Gesichtswinkel größer als $0,6'$ ist. Untersuchen Sie, welche Größe ein Gegenstand mindestens haben muß, daß er aus einer Entfernung von
 a) 1 km; b) $3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$ (Mondentfernung);
 c) $1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$ (Sonnenentfernung)
 noch gesehen werden kann!



a 14

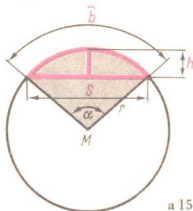
202. Der scheinbare Durchmesser der Sonne wie des Mondes beträgt annähernd $32'$. Berechnen Sie daraus den wirklichen Durchmesser der Gestirne (Entfernung der Gestirne nach den Daten von Aufgabe a 201.)!
203. Unter welchem scheinbaren Durchmesser würde die Erde ($r = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$)
 a) von der Sonne (Entfernung nach den Daten für Aufgabe a 201.);

- b) vom Monde (Entfernung nach den Daten für Aufgabe 201.);
 c) von einem in 5640 km über der Erdoberfläche fliegenden künstlichen Erdsatelliten aus gesehen werden?

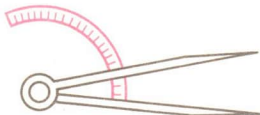
204. Ein Flugzeug fliege mit Hilfe seiner Zielflugeinrichtung einen 300 km entfernten Leitstrahlensender an. Solange der Pilot den Kurs genau einhält, hört er Dauerton. Weicht er jedoch um mehr als 3° nach links oder rechts ab, so hört er entweder „Punkte“ oder „Striche“. Um wieviel Kilometer kann das Flugzeug in dieser Entfernung senkrecht zum Kurs abweichen, bis „Punkte“ oder „Striche“ gehört werden?



14. Berechnen Sie die zu einem beliebigen Zentriwinkel gehörige Sehne s , den zugehörigen Kreisbogen b und die Bogenhöhe h (Abstand der Bogenmitte von der Sehne) eines Kreises mit dem Radius r als Funktionen des Zentriwinkels (Gleichung und Graph); vgl. Bild a 15!



a 15



a 16

15. Bei einem Zirkel sei ein Bogenstück mit einem Schenkel fest verbunden, der andere Schenkel gleite auf diesem Bogenstück; vgl. Bild a 16. Auf dem Bogenstück soll eine Skale angebracht werden, die den Abstand zwischen den Zirkelspitzen angibt. Geben Sie für eine Schenkellänge von 10 cm die Winkelabstände dieser Skale von Zentimeter zu Zentimeter im Bereich zwischen 0 cm und 16 cm Zirkelöffnung an!

205. Einem Kreis mit gegebenem Radius r werde ein regelmäßiges n -Eck

- a) einbeschrieben,
 b) umbeschrieben.

Stellen Sie den Flächeninhalt des ein- und des umbeschriebenen n -Ecks fest! Vergleichen Sie ihn mit dem Flächeninhalt des Kreises, und zwar für $3 \leq n \leq 6$ ($n \in \mathbb{N}$)!

206. Von den fünf Größen eines regelmäßigen Vielecks n ; a ; r_u ; r_i ; A sei außer n jeweils eine Größe gegeben. Berechnen Sie die anderen Größen!

a) $n = 7$; $a = 13,2$ cm

c) $n = 5$; $r_i = 17,4$ dm

b) $n = 10$; $r_u = 23,5$ cm

d) $n = 8$; $A = 23,4$ m²

207. Einem Kreis mit dem Radius $r = 1,00$ dm sei ein regelmäßiges n -Eck eingeschrieben. Wie groß sind Seite und Umfang des Vielecks für $3 \leq n \leq 6$ ($n \in \mathbb{N}$)?

208. Einem Kreis mit dem Radius $r = 1,00$ dm sei ein regelmäßiges n -Eck umschrieben. Wie groß sind Seite und Umfang des Vielecks für $3 \leq n \leq 6$ ($n \in \mathbb{N}$)?

Stellen Sie fest, wie viele Diagonalen gleicher Länge und wie viele Diagonalen insgesamt die im folgenden genannten Vielecke haben!

Berechnen Sie die Länge aller Diagonalen!

209. Regelmäßiges Sechseck;

$a = 2,50$ cm

210. Regelmäßiges Siebeneck;

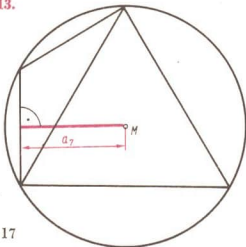
$a = 2,00$ cm

211. Aus einem Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60$ mm soll ein regelmäßiges fünfseitiges Prisma mit möglichst großer Seitenlänge gehobelt werden. Berechnen Sie den absoluten und den prozentualen Verlust an Querschnittsfläche!

212. Welchen Durchmesser muß ein Rundstahl mindestens haben, damit aus ihm ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma mit 80 cm² Querschnitt gehobelt werden kann? Ermitteln Sie den prozentualen Verlust an Querschnittsfläche für diesen Fall!

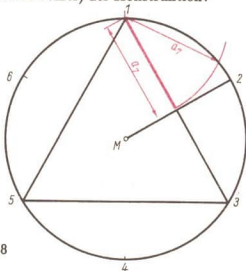
Die Bilder a 17 (Konstruktion nach LAUTENSACK) und a 18 (Konstruktion nach DÜRER) stellen Näherungskonstruktionen für die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Siebenecks dar. Ermitteln Sie die Genauigkeit (den relativen Fehler) der Konstruktion!

213.



a 17

214.



a 18

16. Von welcher Eckenzahl n eines regelmäßigen Vielecks an ist die Differenz zwischen den Längen des Inkreis- und des Umkreisradius kleiner als a) 5%, b) 0,5% der Länge des Umkreisradius?

17. Einem Kreis vom Radius r sei ein regelmäßiges Vieleck umschrieben. Von welcher Eckenzahl n des Vielecks an ist die Differenz zwischen den Längen des Vieleckumfangs und des Kreisumfangs kleiner als a) 5%, b) 0,5% der Länge des Kreisumfangs?

Berechnen Sie die gesuchten Stücke der Dreiecke ABC , von denen die folgenden Stücke gegeben sind!

215. a) $a = 8,4$ cm; $\alpha = 72^\circ$;

$\beta = 56^\circ$; gesucht b ;

b) $b = 17,3$ m; $\alpha = 43,4^\circ$;

$\gamma = 66,8^\circ$; gesucht a

~~216. a) $c = 1,45$ km; $\alpha = 20,2^\circ$;~~

$\beta = 74,5^\circ$; gesucht b

b) $c = 14,2$ m; $\alpha = 45^\circ$;

$\gamma = 112,4^\circ$; gesucht a

217. a) $b = 55,6 \text{ m}$; $a = 24,3 \text{ m}$;
 $\beta = 108,6^\circ$; gesucht α
 b) $a = 133 \text{ m}$; $b = 125 \text{ m}$;
 $\alpha = 43,2^\circ$; gesucht β

218. a) $a = 24,5 \text{ cm}$; $b = 25,9 \text{ cm}$;
 $\beta = 72,40^\circ$; gesucht α
 b) $c = 4,34 \text{ km}$; $b = 4,56 \text{ km}$;
 $\beta = 20,5^\circ$; gesucht γ

219. a) $b = 3,8 \text{ cm}$; $c = 4,5 \text{ cm}$;
 $\gamma = 53,6^\circ$; gesucht β
 b) $a = 7,0 \text{ cm}$; $b = 5,8 \text{ cm}$;
 $\alpha = 43,7^\circ$; gesucht γ

220. a) $a = 35,7 \text{ m}$; $c = 26,4 \text{ m}$;
 $\alpha = 93,6^\circ$; gesucht γ
 b) $a = 32,3 \text{ cm}$; $c = 36,6 \text{ cm}$;
 $\gamma = 55,7^\circ$; gesucht β

18. Beweisen Sie den folgenden Satz!

In jedem Dreieck ist der Quotient aus der Länge einer Seite und dem Sinus des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels gleich der Länge des Durchmessers des Umkreises.

19. Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck ABC gilt:

$$A = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha} !$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke ABC , von denen folgende Stücke gegeben sind!

221. a) $a = 8,7 \text{ cm}$; $b = 7,1 \text{ cm}$; $\gamma = 44,6^\circ$
 b) $a = 34,7 \text{ m}$; $\beta = 59,2^\circ$; $\gamma = 79,5^\circ$

222. a) $a = 52,8 \text{ m}$; $c = 75,3 \text{ m}$; $\beta = 56,9^\circ$
 b) $b = 4,475 \text{ km}$; $\beta = 59,2^\circ$; $\gamma = 41,3^\circ$

223. a) $a = 44,3 \text{ m}$; $c = 56,8 \text{ m}$; $\beta = 135^\circ$
 b) $b = 62,5 \text{ mm}$; $\beta = 64,3^\circ$; $\gamma = 98,1^\circ$

224. a) $a = 30,0 \text{ m}$; $\gamma = 45^\circ$; $\alpha = 2\beta$
 b) $c = 6,8 \text{ cm}$; $a = \frac{3}{2}c$; $\beta = 112,5^\circ$

20. Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite $a = 6 \text{ cm}$ werde in Kavalierperspektive abgebildet (die Figur liege in der Grundrißebene, eine Seite parallel zur Bildtafel). Ermitteln Sie die Winkel und den Flächeninhalt der Bildfigur!

Berechnen Sie die gesuchten Stücke der Dreiecke ABC , von denen folgende Stücke gegeben sind!

- ~~225.~~ a) $a = 14 \text{ m}$; $b = 12 \text{ m}$; $\gamma = 60^\circ$;
 gesucht c
 b) $b = 17,2 \text{ cm}$; $c = 14,3 \text{ cm}$; $\alpha = 74,2^\circ$;
 gesucht a

- ~~226.~~ a) $a = 24,5 \text{ cm}$; $c = 33,5 \text{ cm}$; $\beta = 57,8^\circ$;
 gesucht b
 b) $a = 124 \text{ m}$; $b = 133 \text{ m}$; $\gamma = 102,1^\circ$;
 gesucht c

- ~~227.~~ a) $a = 14,5 \text{ m}$; $b = 16,4 \text{ m}$; $c = 13,2 \text{ m}$;
 gesucht α
 b) $a = 132,7 \text{ km}$; $b = 128,6 \text{ km}$;
 $c = 145,5 \text{ km}$; gesucht γ

- ~~228.~~ a) $a = 13,2 \text{ cm}$; $b = 16,4 \text{ cm}$; $c = 8,6 \text{ cm}$;
 gesucht β
 b) $a = 24,8 \text{ m}$; $b = 38,2 \text{ m}$; $c = 13,9 \text{ m}$;
 gesucht β

Berechnen Sie den Flächeninhalt folgender Dreiecke ABC !

229. $a = 13 \text{ cm}$; $b = 14 \text{ cm}$; $c = 15 \text{ cm}$

230. $a = 31,5 \text{ m}$; $b = 27,3 \text{ m}$; $c = 29,4 \text{ m}$

Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel der Dreiecke ABC , von denen folgende Größen gegeben sind! Untersuchen Sie, ob die Aufgaben nur eine Lösung haben!

231. $a = 14 \text{ cm}$; $b = 17 \text{ cm}$; $A = 115 \text{ cm}^2$

232. $b = 6,62 \text{ m}$; $c = 8,12 \text{ m}$; $A = 43,4 \text{ m}^2$

233. $c = 4,5 \text{ cm}$; $\beta = 60^\circ$; $A = 10,5 \text{ cm}^2$

234. $b = 14,4 \text{ m}$; $\alpha = 36^\circ$; $A = 124,5 \text{ m}^2$

235. Während eines Manövers der befreundeten sozialistischen Armeen werden zwei Aufklärungsgruppen von einer Befehlsstelle aus in je eine der durch die Marschkompaßzahlen 8 und 59

gekennzeichneten Richtungen in Marsch gesetzt. Beide Aufklärungstrupps erreichen ein und dieselbe Straße, und zwar der eine Trupp in 750 m, der andere in 550 m Entfernung von der Befehlsstelle.

Wie weit stehen die Aufklärungstrupps an der Straße voneinander entfernt?

(Bemerkung: Der verwendete Kompaß hat 60er-Teilung, wobei N die Marschrichtungszahl 0 hat. Die Skale läuft in mathematisch positivem Drehsinn. Westen hat zum Beispiel die Marschrichtungszahl 15.)



- 236.** Bei einer Übung der NVA sieht ein Beobachter zwei feindliche MG-Nester A und B unter einem Winkel von etwa 130° . Einen in A abgegebenen Feuerstoß hört er 7 s, einen in B abgegebenen 8 s nach dem Aufleuchten des Mündungsfeuers. Wie weit sind die beiden MG-Nester voneinander entfernt?

21. Von einem Dreieck seien zwei Seiten (a, b mit $a < b$) und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel (α) gegeben. Untersuchen Sie, in welcher Beziehung a zu b und α stehen muß, wenn die Aufgabe

- a) genau zwei Lösungen, b) genau eine Lösung, c) keine Lösung haben soll!

Stellen Sie – ohne Versuch einer Konstruktion – fest, welche der Aufgaben zur Bestimmung von Dreiecken ABC keine Lösung haben!

- 237. a)** $a = 3$ cm; $b = 8$ cm; $c = 4$ cm
b) $a = 5$ cm; $b = 7$ cm; $c = 6$ cm
- 238. a)** $a = 4,74$ cm; $b = 3,63$ cm; $c = 6,05$ cm
b) $a = 17,2$ cm; $b = 8,4$ cm; $c = 25,6$ cm
- 239. a)** $a = 25$ mm; $b = 35$ mm; $\beta = 120^\circ$
b) $c = 1,8$ m; $a = 3,3$ m; $\gamma = 135^\circ$
- 240. a)** $a = 13,8$ cm; $c = 14,4$ cm; $\alpha = 90^\circ$
b) $b = 5,2$ km; $c = 8,4$ km; $\beta = 117,6^\circ$
- 241. a)** $\alpha = 38^\circ$; $\beta = 114^\circ$; $\gamma = 28^\circ$
b) $\alpha = 27^\circ$; $\beta = 48^\circ$; $\gamma = 75^\circ$
- 242. a)** $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 105^\circ$; $\gamma = 55^\circ$
b) $\alpha = 33^\circ$; $\beta = 66^\circ$; $\gamma = 81^\circ$

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben an, welche Werte das dritte Bestimmungsstück eines Dreiecks ABC annehmen kann, wenn die Aufgabe genau eine Lösung haben soll!

- 243. a)** $a = 3$ cm; $b = 4$ cm; c
b) $c = 5$ cm; $\alpha = 65^\circ$; β
- 244. a)** $b = 113$ mm; $c = 124$ mm; a
b) $b = 2,25$ m; $\beta = 112^\circ$; α
- 245. a)** $a = 5,3$ m; $b = 7,2$ m; β
b) $c = 8,8$ cm; $a = 4,7$ cm; α
- 246. a)** $c = 7$ cm; $\beta = 60^\circ$; b
b) $a = 14,3$ cm; $b = 5,8$ cm; β

Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt der folgenden Dreiecke ABC !

247. a) $a = 6,1$ cm; $c = 4,7$ cm; $\beta = 63,2^\circ$
 b) $b = 17,18$ m; $c = 13,85$ m; $\alpha = 74,3^\circ$

248. a) $a = 123$ m; $b = 134$ m; $\gamma = 102,3^\circ$
 b) $a = 245$ cm; $b = 392$ cm; $\gamma = 47,7^\circ$

~~249. a) $a = 5,38$ m; $b = 1,97$ m;
 $c = 4,75$ m
 b) $a = 27,1$ m; $b = 33,8$ m;
 $c = 35,0$ m~~

250. a) $a = 2,45$ km; $b = 3,02$ km;
 $c = 1,39$ km
 b) $a = 8,75$ km; $b = 6,67$ km;
 $c = 8,38$ km

Fertigen Sie zu folgenden Dreiecken ABC maßstäbliche Konstruktionen an! Berechnen Sie zur Überprüfung die nicht gegebenen Seiten und Winkel!

251. a) $c = 345$ m; $\alpha = 57,2^\circ$; $\beta = 86,1^\circ$
 b) $b = 2,84$ m; $c = 3,96$ m; $\alpha = 87,2^\circ$
 c) $a = 56,6$ m; $b = 46,4$ m; $\beta = 37,3^\circ$

~~252. a) $b = 7,14$ km; $\alpha = 112,4^\circ$; $\gamma = 43,3^\circ$
 b) $a = 13,4$ cm; $b = 15,7$ cm; $\gamma = 127,3^\circ$
 c) $a = 29,2$ cm; $b = 30,2$ cm; $\alpha = 54^\circ$~~

22. Beweisen Sie trigonometrisch, daß in jedem Dreieck eine Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt!

Berechnen Sie bei den im folgenden gegebenen Dreiecken ABC die Länge der drei Höhen (Überprüfung durch Konstruktion)!

253. a) $a = 7,5$ cm; $b = 5,8$ cm; $\alpha = 60^\circ$
 b) $a = 3,6$ cm; $b = 4,8$ cm; $c = 6,0$ cm

254. a) $b = 6,7$ cm; $c = 8,8$ cm; $\gamma = 102^\circ$
 b) $b = 8,5$ cm; $c = 4,5$ cm; $\alpha = 22,5^\circ$

Berechnen Sie bei den im folgenden gegebenen Dreiecken ABC den Radius des Inkreises (Überprüfung durch Konstruktion)!

255. $a = 7,0$ cm; $\beta = 64,5^\circ$; $\gamma = 52,3^\circ$

256. $a = 92$ mm; $b = 85$ mm; $c = 39$ mm

~~257. In einem Dreieck verhalten sich die Seiten wie 2:3:4. Berechnen Sie die Winkel dieses Dreiecks!~~

~~258. In einem Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie 1:2, der eingeschlossene Winkel betrage 60° . Wie groß sind die anderen Winkel? Wie verhält sich die dritte Seite zur kleineren der beiden anderen?~~

259. Berechnen Sie die Länge der Diagonalen und den Flächeninhalt eines Parallelogramms $ABCD$ mit den Seiten $a = 38$ mm, $b = 56$ mm und dem eingeschlossenen Winkel $\alpha = 75^\circ$!

260. Ein Parallelogramm $ABCD$ habe die Seiten $a = 6,5$ cm und $b = 8,7$ cm. Eine Diagonale messe $9,4$ cm. Wie groß sind die andere Diagonale und der Flächeninhalt des Parallelogramms?

Von einem Parallelogramm $ABCD$ seien die Diagonalen e , f und der eingeschlossene Winkel ε gegeben. Berechnen Sie die Länge der Seiten, die Innenwinkel und den Flächeninhalt der Figur!

~~261. $e = 11,5$ cm; $f = 17,2$ cm; $\varepsilon = 57^\circ$~~

~~262. $e = 8,7$ m; $f = 11,2$ m; $\varepsilon = 76,8^\circ$~~

Von einem Trapez $ABCD$ seien die vier Seiten a , b , c , d ($a \parallel c$) gegeben. Berechnen Sie die Innenwinkel und den Flächeninhalt der Figur!

~~263. $a = 8,6$ cm; $b = 5,3$ cm;
 $c = 6,1$ cm; $d = 4,9$ cm~~

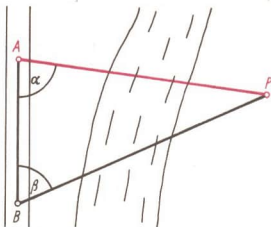
264. $a = 7,5$ cm; $b = 4,0$ cm;
 $c = 4,5$ cm; $d = 5,4$ cm

Drei Kreise mit den Radien r_1 , r_2 , r_3 berühren einander gegenseitig von außen. Welche Winkel schließen je zwei Zentralen miteinander ein?

~~265. $r_1 = 6,5$ cm; $r_2 = 5,2$ cm; $r_3 = 3,8$ cm~~

266. $r_1 = 9,5$ cm; $r_2 = 7,6$ cm; $r_3 = 5,1$ cm

267. Von einer Küstenstation aus wird ein Schiff in 28 km Entfernung in Richtung N 35,2° O gesichtet. 30 min später erscheint das Schiff in Richtung N 12,3° W in der Entfernung 19,4 km.
Welchen Kurs nimmt das Schiff? Wie groß ist seine Geschwindigkeit?



268. Eine Pionierkompanie der NVA erhielt den Auftrag, einen Übergang über ein Wasserhindernis zu schaffen; vgl. Bild a 19. Die Messungen ergaben:
 $\overline{AB} = 132 \text{ m}$; $\alpha = 82^\circ 30'$; $\beta = 39^\circ 30'$.
Welche Länge hatte der Übergang \overline{AP} ?

a 19

269. Zwei Radarstationen R_1 und R_2 sind 12,6 km voneinander entfernt, der Winkel von R_1 nach R_2 beträgt 84° (1400 Strich). Die Station R_1 peilt ein feindliches Ziel unter einem Winkel von 138° , die Station R_2 peilt dieses Ziel zur selben Zeit unter einem Winkel von 240° (4000 Strich).

Berechnen Sie die Entfernungen des Zieles von den beiden Stationen!

(Bemerkung: Die Stationen sind nach Norden eingerichtet. Um möglichst genau messen zu können, verwendet man in der Radartechnik eine Strichteilung, bei der 6000 Strich dem Vollwinkel 360° entsprechen. Die Skale läuft von Nord in mathematisch negativem Drehsinn.)

270. Zwei Funkpeilstationen F_1 und F_2 liegen 12,8 km voneinander entfernt. F_1 befindet sich genau nördlich von F_2 . Ein feindlicher Sender wird von F_1 unter $284,4^\circ$ (4740 Strich) und von F_2 unter $313,2^\circ$ (5220 Strich) angepeilt. In welchen Entfernungen von F_1 und F_2 liegt der Sender?

271. Zum Einmessen der Feuerstellung F eines Geschützes werden von zwei in der Karte genau eingezeichneten Punkten A und B aus die Strecken $\overline{AF} = 351 \text{ m}$ und $\overline{BF} = 532 \text{ m}$ gemessen, die Länge der Strecke \overline{AB} betrage 428 m.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes F in bezug auf AB als Abszissenachse und A als Koordinatenursprung!

23. Berechnen Sie bei den im folgenden gegebenen Dreiecken ABC die Länge der drei Winkelhalbierenden und die Winkel, die je zwei Winkelhalbierende miteinander einschließen (Überprüfung durch Konstruktion)!

a) $a = 60 \text{ mm}$; $b = 75 \text{ mm}$; $c = 82 \text{ mm}$ b) $a = 5,5 \text{ cm}$; $b = 7,5 \text{ cm}$; $\gamma = 120^\circ$

24. Von einem Trapez $ABCD$ seien die vier Seiten $a = 4 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$, $d = 9 \text{ cm}$ gegeben. Berechnen Sie die Innenwinkel, die Länge der Diagonalen und den Flächeninhalt der Figur, wenn die Seiten a und c als parallel angenommen werden!

25. Von einem U-Boot wird ein feindliches Schiff in Richtung S 28° O und in 18,4 sm Entfernung gesichtet. Das Schiff hat Kurs N $16,4^\circ$ O und fährt mit einer Geschwindigkeit von $9,5 \text{ kn}$ ($1 \text{ kn} = 1 \text{ sm} \cdot \text{h}^{-1}$).

a) Welchen Kurs und welche Geschwindigkeit muß das U-Boot nehmen, um das Schiff in 1,5 h zu erreichen?

b) Das U-Boot möchte das Schiff in möglichst kurzer Zeit bei einer Eigengeschwindigkeit unter Wasser von 12 kn erreichen.

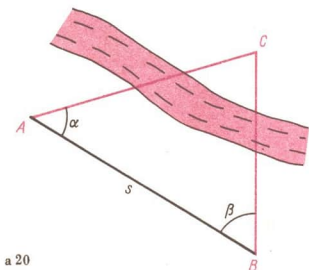
Welchen Kurs muß es steuern, und in welcher Zeit erreicht es das Schiff?

Im Gelände sei eine Basis $\overline{AB} = s$ vermessen worden. Ein dritter Punkt C sei von A und B aus nicht zugänglich. Um die Entfernungen \overline{AC} und \overline{BC} zu ermitteln, werden die Winkel $BAC = \alpha$ und $CBA = \beta$ gemessen (Vorwärtseinschneiden, Bild a 20).

272. a) $s = 220$ m; $\alpha = 75,3^\circ$; $\beta = 42,4^\circ$
 b) $s = 220$ m; $\alpha = 117,4^\circ$; $\beta = 28,6^\circ$

273. a) $s = 148$ m; $\alpha = 34,5^\circ$; $\beta = 67,7^\circ$
 b) $s = 88,6$ m; $\alpha = 24,3^\circ$; $\beta = 133,8^\circ$

274. An der Küste sei eine horizontale Standlinie $\overline{AB} = 830$ m abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wird ein vorüberfahrendes Schiff S zum gleichen Zeitpunkt angepeilt. Die Peilrichtungen bilden mit der Standlinie die Winkel $SAB = 86,4^\circ$ und $ABS = 78,5^\circ$. In welcher Entfernung von den Punkten A und B und in welchem Abstand von der Standlinie befindet sich das Schiff (Rechnung und Konstruktion)?



a 20

276. Zwischen zwei durch einen Wald getrennten Orten A und B soll für eine Hochspannungsleitung eine Schneise geschlagen werden. Die Orte A und B liegen auf gleicher Höhe, sie seien von dem auf gleicher Höhe befindlichen Geländepunkt C aus sichtbar. Die Entfernungen \overline{CA} und \overline{CB} betragen 2,380 km und 3,450 km, der Winkel ACB betrage $38,7^\circ$.

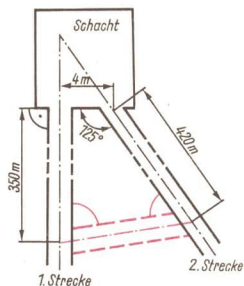
Wie groß ist die Entfernung \overline{AB} ? In welchen Richtungen ist von A und von B aus die Schneise zu schlagen (Rechnung und Konstruktion)?

Ein viereckiges Geländestück $ABCD$ werde vermessen. Es ist sein Flächeninhalt zu berechnen.

278. $\overline{AB} = 125$ m; $\sphericalangle BAC = 46,3^\circ$;
 $\sphericalangle CBA = 88,4^\circ$; $\sphericalangle DCB = 75,7^\circ$;
 $\sphericalangle BAD = 94,8^\circ$

279. $\overline{AB} = 281$ m; $\sphericalangle BAD = 72,2^\circ$;
 $\sphericalangle CAD = 38,4^\circ$; $\sphericalangle DBA = 35,7^\circ$;
 $\sphericalangle CBA = 79,8^\circ$

275. Ein nach Wismar auf geradem Kurs fahrendes Schiff habe eine Geschwindigkeit von 8,5 Knoten ($1 \text{ kn} = 1 \text{ sm} \cdot \text{h}^{-1}$). Vom Schiff aus werde das Leuchtfeuer von Timmendorfer (Poel) unter $32,8^\circ$ und das Leuchtfeuer bei Hohen Wischendorf unter $184,0^\circ$ angepeilt (Winkelangaben von N über O). Aus der Seekarte werde die Entfernung Schiff–Timmendorfer mit 1,85 sm festgestellt. In welcher Richtung verläuft die Fahrinne, wenn 12 min später Timmendorfer unter $337,2^\circ$ und Hohen Wischendorf unter $268,5^\circ$ gesehen werden?



a 21

277. In einem Bergwerk seien von derselben Wand eines Schachtes aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Strecken vorgetrieben worden; vgl. Bild a 21. Die Enden beider Strecken sollen durch eine dritte Strecke miteinander verbunden werden. Berechnen Sie die Länge der Verbindungsstrecke und die Winkel, unter denen von den Endpunkten der Strecke die Verbindungsstrecke vorzutreiben ist!

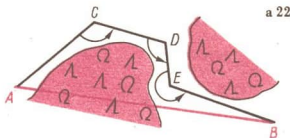


Ein fünfeckiges Geländestück $ABCDE$ werde vermessen. Es ist sein Flächeninhalt zu berechnen.

280. $\overline{AB} = 334$ m; $\sphericalangle BAC = 42,2^\circ$;
 $\sphericalangle BAD = 74,7^\circ$; $\sphericalangle BAE = 90^\circ$;
 $\sphericalangle CBA = 90^\circ$; $\sphericalangle DBA = 71,8^\circ$;
 $\sphericalangle EBA = 44,3^\circ$

281. $\overline{AB} = 117,4$ m; $\sphericalangle BAC = 35,1^\circ$;
 $\sphericalangle BAD = 58,1^\circ$; $\sphericalangle BAE = 112,0^\circ$;
 $\sphericalangle CBA = 90^\circ$; $\sphericalangle DBA = 71,1^\circ$;
 $\sphericalangle EBA = 25,8^\circ$

In einem unübersichtlichen Gelände ist die horizontale Entfernung zwischen den Punkten A und B zu ermitteln. Zu diesem Zwecke werden zwischen A und B weitere Punkte so gewählt, daß von jedem Punkt aus die beiden Nachbarpunkte anvisiert werden können und die gegenseitige Entfernung je zweier benachbarter Punkte gemessen werden kann (Streckenzug; vgl. Bild a 22).



282. $\overline{AC} = 183,6$ m; $\overline{CD} = 168,8$ m;
 $\overline{DE} = 94,5$ m; $\overline{EB} = 217,0$ m;
 $\sphericalangle ACD = 129,4^\circ$; $\sphericalangle CDE = 114,1^\circ$;
 $\sphericalangle DEB = 246,8^\circ$

283. $\overline{AC} = 208,8$ m; $\overline{CD} = 146,4$ m;
 $\overline{DE} = 175,6$ m; $\overline{EF} = 111,2$ m;
 $\overline{FB} = 132,5$ m; $\sphericalangle ACD = 143,2^\circ$;
 $\sphericalangle CDE = 127,3^\circ$; $\sphericalangle DEF = 234,4^\circ$;
 $\sphericalangle EFB = 276,1^\circ$

Alle Winkel sind entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen.

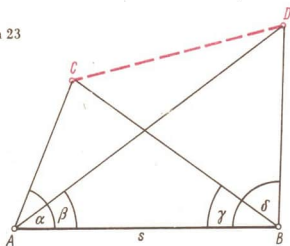
Alle Winkel sind entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen.

26. Im Gelände sei eine Basis $\overline{AB} = s$ vermessen. Zwei weitere Punkte C und D seien weder von A noch von B zugänglich. Es ist die Entfernung \overline{CD} zu ermitteln. Zu diesem Zwecke werden die Winkel $BAC = \alpha$, BAD bzw. $DAB = \beta$, $CBA = \gamma$ und DBA bzw. $ABD = \delta$ gemessen (Vorwärtseinschneiden).

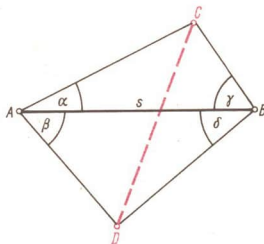
a) $s = 172$ m; $\alpha = 67,3^\circ$; $\beta = 42,2^\circ$;
 $\gamma = 58,5^\circ$; $\delta = 102,1^\circ$; vgl. Bild a 23

b) $s = 127$ m; $\alpha = 31,6^\circ$; $\beta = 50,7^\circ$;
 $\gamma = 42,5^\circ$; $\delta = 51,9^\circ$; vgl. Bild a 24

a 23



a 24

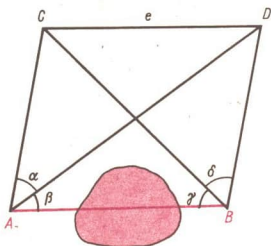


27. Von zwei Punkten A und B , deren gegenseitige Entfernung nicht unmittelbar gemessen werden kann, werden zwei Punkte C und D , deren Entfernung e aus der Karte entnommen sei, anvisiert. Dabei werden die Winkel $DAC = \alpha$, $BAD = \beta$, $CBA = \gamma$ und $DBC = \delta$ gemessen. Wie groß ist die Strecke \overline{AB} (Rückwärtseinschneiden, HANSENSche Aufgabe; vgl. Bild a 25)?

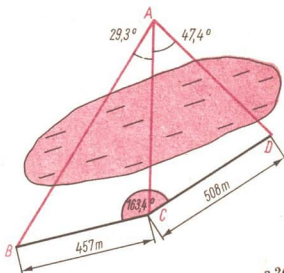
Hinweis: Vgl. Aufgabe a 26; Lösung durch maßstäbliches Modell mit beliebig angenommener Strecke \overline{AB} .

a) $e = 857$ m; $\alpha = 44,6^\circ$; $\beta = 37,7^\circ$;
 $\gamma = 55,4^\circ$; $\delta = 48,1^\circ$

b) $e = 324$ m; $\alpha = 28,8^\circ$; $\beta = 33,1^\circ$;
 $\gamma = 45,2^\circ$; $\delta = 67,6^\circ$



a 25

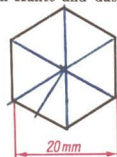


a 26

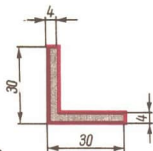
28. Von einem Punkt A im Gelände aus werden drei Punkte B , C und D , deren gegenseitige Lage aus der Karte bekannt sei, anvisiert. Wie groß ist die Entfernung des Punktes A von den Punkten B , C und D (Rückwärtseinschneiden, POthenotsche Aufgabe; vgl. Bild a 26)? Lösen Sie die Aufgabe **a)** konstruktiv, **b)** trigonometrisch! Unter welchen Bedingungen für die gegenseitige Lage der Punkte A , B , C , D ist die Aufgabe nicht eindeutig lösbar? $\sphericalangle BAC = 29,3^\circ$; $\sphericalangle CAD = 47,4^\circ$; $\overline{BC} = 457$ m; $\overline{CD} = 508$ m; $\sphericalangle BCD = 163,4^\circ$
Hinweis: Die Konstruktion gründet sich auf die Sätze über die Peripheriewinkel eines Kreises, die dem gleichen Bogen angehören. Die Berechnung kann von dieser Konstruktion ausgehen; vgl. dazu Aufgabe a 19!

b) Körperberechnung und Körperdarstellung

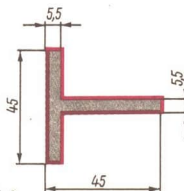
- Stellen Sie den Oberflächeninhalt eines Würfels als Funktion seines Volumens dar (Gleichung und Graph)!
- Stellen Sie das Volumen eines Würfels als Funktion seines Oberflächeninhalts dar (Gleichung und Graph)!
- Ein Würfel habe einen Oberflächeninhalt von
a) 2400 cm^2 , b) $5,16 \text{ cm}^2$.
Berechnen Sie Kantenlänge und Volumen!
- Ein sechskantiger Bleistift habe die Maße $w = 8 \text{ mm}$, $l = 177 \text{ mm}$. Berechnen Sie den Inhalt der Mantelfläche und das Volumen!
- Welches Volumen hat ein Sechskantstahl mit dem im Bild b 1 angegebenen Querschnitt und der Länge 900 mm ?
- Welche Masse haben 13500 mm L-Stahl ($30 \text{ mm} \times 30 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$), wenn die Dichte des Materials $7,85 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt; vgl. Bild b 2?
- Welche Masse haben 12000 mm T-Stahl ($45 \text{ mm} \times 45 \text{ mm} \times 5,5 \text{ mm}$), wenn die Dichte des Materials $7,86 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt; vgl. Bild b 3?



b 1

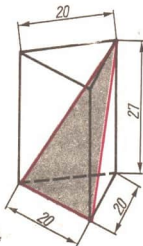


b 2

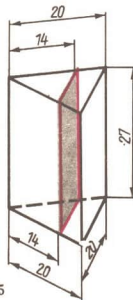


b 3

- Berechnen Sie den Inhalt der grau dargestellten Schnittfläche in Bild b 4!
- Berechnen Sie den Inhalt der grau dargestellten Schnittfläche in Bild b 5!

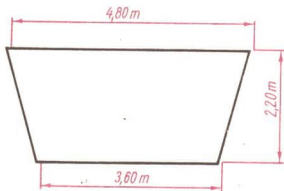


b 4

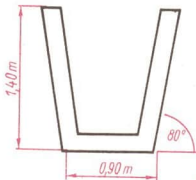


b 5

11. Ein schiefes Prisma habe als Grundfläche ein Dreieck mit den Seitenlängen 3,0 cm, 4,0 cm und 5,0 cm. Seine Seitenkanten seien 8,5 cm lang und gegen die Grundfläche um 45° geneigt. Wie groß ist das Volumen des Körpers?
12. Ein dreiseitiges Prisma habe Grundkanten von der Länge 13,0 cm, 14,0 cm und 15,0 cm. Die Seitenkanten seien 32,0 cm lang, die Körperhöhe betrage 30,0 cm. Wie groß ist das Volumen des Körpers? Welchen Winkel schließen die Seitenkanten mit der Grundfläche ein?
13. Eine Granate trifft ein Kriegsschiff unter der Wasserlinie. Der angrenzende Raum des Schiffes hat einen trapezförmigen Querschnitt und eine Länge von 4 m; vgl. Bild b 6. Um die Funktionsfähigkeit der in diesem Raum eingebauten Geräte zu erhalten, darf das eindringende Wasser maximal 1 m steigen. In welcher Zeit muß das Leck abgedichtet sein, wenn die Einstromgeschwindigkeit 15 l s^{-1} beträgt?



b 6



b 7

15. Ein Quadrat rotiere um eine Mittellinie. Stellen Sie Volumen und Oberflächeninhalt des entstehenden Rotationskörpers als Funktion der Seitenlänge a des Quadrates dar (Gleichung)!
16. Ein Quadrat rotiere um eine Seite. Stellen Sie Volumen und Oberflächeninhalt des entstehenden Rotationskörpers als Funktion der Seitenlänge a des Quadrates dar (Gleichung)!

Zur Berechnung eines geraden Kreiszyinders seien von den fünf Größen r , h , A_M , A_O , V jeweils zwei gegeben. Berechnen Sie die fehlenden drei Größen!

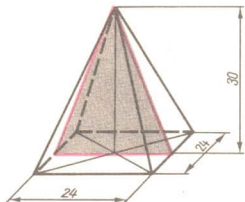
17. a) $r = 4,0 \text{ cm}$; $h = 6,5 \text{ cm}$
 b) $h = 8,0 \text{ m}$; $A_M = 25 \text{ m}^2$
18. a) $r = 3 \text{ cm}$; $V = 75 \text{ cm}^3$
 b) $V = 25 \text{ dm}^3$; $h = 0,45 \text{ m}$
19. Ein Zylinder habe das Volumen $V = 1,00 \text{ dm}^3$. Berechnen Sie für die Radien 4 cm, 6 cm, 8 cm, ..., 16 cm die Höhe des Körpers!
20. Ein Zylinder habe den Mantelflächeninhalt $A_M = 2,00 \text{ dm}^2$. Berechnen Sie für die Radien 4 cm, 8 cm, 12 cm, ..., 24 cm die Höhe des Körpers!
21. Bei einem geraden Zylinder mit einem Volumen $V = 15,7 \text{ dm}^3$ verhalte sich die Höhe h zum Radius r der Grundfläche wie 5:2. Wie groß ist der Inhalt der Oberfläche dieses Körpers?
22. Bei einem geraden Zylinder, dessen Oberflächeninhalt $A_O = 356 \text{ cm}^2$ betrage, verhalte sich die Höhe h zum Radius r der Grundfläche wie 5:3. Wie groß ist das Volumen dieses Körpers?
23. Auf Militärflugplätzen wird der Kraftstoff in zylindrischen Erdtanks gespeichert. Ein solcher Tank hat einen Durchmesser von 2,20 m und faßt 20000 l Kraftstoff. Wie viele solcher Tanks kann man auf einer quadratischen Fläche von 900 m^2 in zwei Etagen maximal unterbringen?

b

1. Aus einem rechteckigen Stück Blech von 50 cm und 60 cm Seitenlänge werden aus den Ecken Quadrate mit 10 cm Seitenlänge ausgeschnitten. Durch Hochbiegen der überstehenden Teile entsteht ein Kasten von Quaderform.
- Wie groß ist das Volumen des Kastens?
 - Wie ändert sich das Volumen des Kastens, wenn sich die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate ändert? Stellen Sie diese Änderung als Funktion durch eine Gleichung und einen Graphen dar!
2. Ein Fernaufklärer hat zwei Flächentanks und einen Rumpftank für Kraftstoff. Der Rumpftank ist ein Prisma mit rechteckiger Grundfläche und den Kantenlängen 1700 mm, 1000 mm, 500 mm. Beide Flächentanks sind Prismen mit trapezförmigen Grundflächen (Abmessungen des Trapezes: Abstand der Parallelen 1500 mm; Länge der Parallelen 480 mm und 430 mm; Höhe 1000 mm).
- Wieviel Liter Kraftstoff kann das Flugzeug tanken?
 - Ermitteln Sie das Gewicht der Füllung (Wichte des Kraftstoffs $0,76 \text{ pcm}^{-3}$)!
 - Welchen Aktionsradius hat der Fernaufklärer, wenn jedes Triebwerk der zweistrahligen Maschine im Durchschnitt $2,2 \text{ l km}^{-1}$ verbraucht?
- (Bemerkung: Der Aktionsradius ist der Radius des Kreises, bis zu dessen Peripherie ein Flugzeug vorstoßen kann, um mit seinem Kraftstoffvorrat den Abflughafen wieder zu erreichen.)
3. Gegeben sei ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma mit der Grundkante $a = 6,4 \text{ cm}$. Durch eine Grundkante werde eine Ebene gelegt, die gegen die Grundfläche geneigt ist. Diese Ebene schneide den Körper so, daß eine (schiefe) Pyramide entsteht. Stellen Sie das Volumen und die Mantelfläche der entstehenden Pyramide als Funktion des Neigungswinkels der Schnittebene dar! Welchen Wert haben diese Größen für einen Neigungswinkel von $51,6^\circ$?

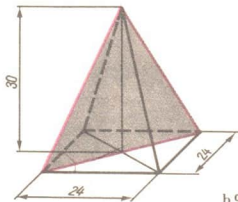
24. Eine gerade quadratische Pyramide mit einer Grundkante $a = 8,0 \text{ cm}$ habe ein Volumen $V = 256 \text{ cm}^3$. Wie lang ist die Höhe der Pyramide?
25. Eine regelmäßige sechsseitige Pyramide mit einer Grundkante $a = 6,0 \text{ cm}$ habe ein Volumen $V = 795 \text{ cm}^3$. Wie lang ist eine Seitenkante?
26. Eine Pyramide habe als Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $a = 4,0 \text{ cm}$, $b = 3,0 \text{ cm}$ und Seitenkanten $s = 6,5 \text{ cm}$. Wie groß ist das Volumen des Körpers?
27. Eine regelmäßige sechsseitige Pyramide habe eine Grundkante $a = 3,0 \text{ cm}$ und eine Höhe $h = 8,0 \text{ cm}$. Wieviel Prozent ihrer Gesamtoberfläche macht ihre Mantelfläche aus?
28. Bei einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide seien die Seitenflächen gegen die Grundfläche unter einem Winkel von 45° geneigt. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der Grundfläche und der Mantelfläche einer solchen Pyramide zueinander?
29. Von einer geraden quadratischen Pyramide seien das Volumen $V = 138 \text{ cm}^3$ und der Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche $\alpha = 72,5^\circ$ gegeben. Wie lang sind Grundkanten und Seitenkanten der Pyramide?
30. Das Dach eines Schuppens habe die Form einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche. Wieviel Quadratmeter Dachpappe werden zum Decken benötigt, wenn mit 4% Abfall gerechnet wird?
- $a = 8,00 \text{ m}$; $b = 6,00 \text{ m}$; $h = 1,40 \text{ m}$
 - $a = 10,50 \text{ m}$; $b = 4,50 \text{ m}$; $h = 0,85 \text{ m}$
31. Begründen Sie, weshalb der Inhalt der Schnittfläche nur ein Viertel des Inhalts der Grundfläche beträgt, wenn eine Pyramide in halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten wird!
32. Eine Pyramide werde in halber Höhe parallel zu ihrer Grundfläche geschnitten. In welchem Verhältnis steht das Volumen der Teilkörper zum Volumen der Vollpyramide?

33. Berechnen Sie den Inhalt der grau dargestellten Schnittfläche in Bild b 8!



b 8

34. Berechnen Sie den Inhalt der grau dargestellten Schnittfläche in Bild b 9!



b 9

35. Stellen Sie den Inhalt der Oberfläche eines geraden Kreiskegels mit konstantem Radius r als Funktion der Höhe h dar (Gleichung und Graph)!

Zur Berechnung eines geraden Kreiskegels seien von den sechs Größen r, h, s, A_M, A_O, V jeweils zwei gegeben. Berechnen Sie die fehlenden vier Größen!

37. a) $r = 5,3 \text{ cm}; h = 17,8 \text{ cm}$
 b) $V = 18,4 \text{ cm}^3; h = 3,8 \text{ cm}$

36. Stellen Sie den Inhalt der Oberfläche eines geraden Kreiskegels mit konstanter Höhe h als Funktion des Radius r dar (Gleichung und Graph)!

38. a) $h = 12,3 \text{ cm}; s = 17,7 \text{ cm}$
 b) $A_O = 300 \text{ cm}^2; s = 10 \text{ cm}$

39. Ein gerader Kreiskegel habe einen Öffnungswinkel von 64° und einen Grundkreisumfang von 126 mm. Wie groß sind Oberflächeninhalt und Volumen des Körpers?

40. Ein gerader Kreiskegel habe einen Öffnungswinkel von 112° und eine Mantellinie von 8,00 cm Länge. Wie groß sind Grundkreisradius, Oberflächeninhalt und Volumen des Körpers?

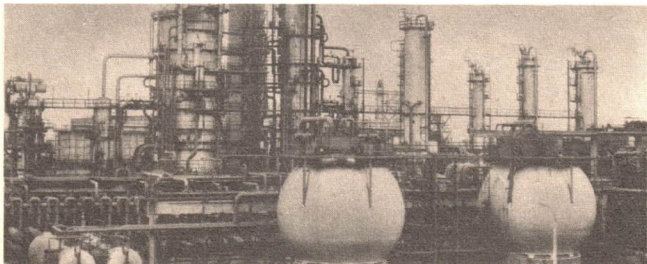
41. Aus einem kreisförmigen Stück Blech von 1,00 m Radius werde ein Stück mit einem Zentriwinkel von 135° ausgeschnitten und zu einem Kegelmantel zusammengerollt. Wie groß sind Radius und Volumen des entstehenden Kegels?

42. Eine Viertelkreisfläche vom Radius 40 cm werde zu einem Kegelmantel gebogen. Wie groß sind Grundkreisradius, Höhe und Volumen des entstehenden Kegels?

Zur Berechnung einer Kugel sei eine von den drei Größen r, A_O, V gegeben. Berechnen Sie die fehlenden zwei Größen!

43. a) $r = 4,0 \text{ cm}$ b) $A_O = 1,0 \text{ m}^2$

44. a) $r = 8,0 \text{ cm}$ b) $V = 1,0 \text{ dm}^3$



45. Welchen Oberflächeninhalt hat eine Kugel von $113 \frac{1}{7} \text{ cm}^3$ Volumen ($\pi = \frac{22}{7}$)? 46. Welches Volumen hat eine Kugel von $113 \frac{1}{7} \text{ cm}^2$ Oberflächeninhalt ($\pi = \frac{22}{7}$)?

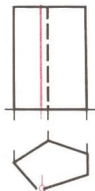
Hinweis: Bei den Aufgaben b 47 bis b 50 sind die Daten dem Tafelwerk bzw. dem Lehrbuch zu entnehmen.

47. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen der Erdkugel! 48. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen des Erdmondes (Kugelform vorausgesetzt)!
49. Ein Globus habe einen Durchmesser von 40 cm. Welche Fläche nimmt auf diesem Globus der Kontinent Afrika ein? 50. Welchen Durchmesser hat ein Globus, auf dem der Kontinent Asien eine Fläche von 224 cm^2 einnimmt?

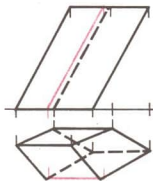
4. Eine Hohlkugel von 1 cm Wandstärke habe ein Volumen von 120 cm^3 . Wie lang ist ihr äußerer Radius?
5. Bei einer Hohlkugel von 1 cm Wandstärke betrage die Inhaltsdifferenz zwischen der äußeren und der inneren Oberfläche 60 cm^2 . Wie lang ist der äußere Radius der Hohlkugel?
6. Ein Kreiskegel mit gleichseitigem Achsenschnitt habe das gleiche Volumen wie ein Kreiszyylinder mit quadratischem Achsenschnitt. Wie verhalten sich
a) die Längen der Höhen, b) die Inhalte der Mantelflächen, c) die Oberflächeninhalte der beiden Körper?
7. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von CAVALIERI, daß das Volumen einer Halbkugel gleich der Differenz zwischen dem Volumen eines Kreiszyinders und dem Volumen eines Kreiskegels ist, wenn diese Körper die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe wie die Halbkugel haben (Satz von ARCHIMEDES)!

51. Stellen Sie ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma ($a = 4,5 \text{ cm}$; $h = 8,0 \text{ cm}$) in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!
52. Stellen Sie ein gerades Prisma mit rechteckiger Grundfläche ($a = 5,5 \text{ cm}$; $b = 4,0 \text{ cm}$; $h = 7,5 \text{ cm}$) in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!
53. Stellen Sie ein schiefes Prisma mit regelmäßig-sechseckiger Grundfläche ($a = 3 \text{ cm}$) in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar! Die Körperhöhe betrage $8,5 \text{ cm}$, ein Eckpunkt der Deckfläche liege senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.
54. Stellen Sie ein schiefes Prisma mit quadratischer Grundfläche ($a = 4,2 \text{ cm}$) in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar! Ein Eckpunkt der Deckfläche liege senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche, die Seitenkanten schließen mit der Grundfläche einen Winkel von 75° ein.

55. Stellen Sie das in Bild b 10 im Grund- und Aufriß gegebene gerade Prisma in Kavalierperspektive dar!
56. Stellen Sie das in Bild b 11 im Grund- und Aufriß gegebene schiefe Prisma in Kavalierperspektive dar!

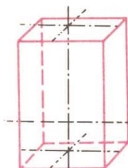


b 10

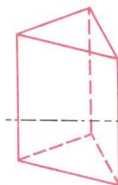


b 11

57. Stellen Sie das in Bild b 12 in Kavalierperspektive gegebene Prisma in Grund- und Aufriß dar, und zwar so, daß es auf der Grundrißebene steht!



b 12



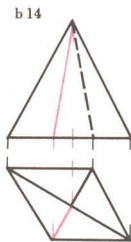
b 13

58. Stellen Sie das in Bild b 13 in Kavalierperspektive gegebene Prisma in Grund- und Aufriß dar, und zwar so, daß es auf der Grundrißebene steht und eine der drei Grundkanten parallel zur Aufrißebene ist!

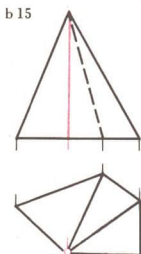
59. Stellen Sie eine gerade quadratische Pyramide ($a = 5 \text{ cm}$), deren Seitenkanten mit der Grundfläche einen Winkel von 55° einschließen, in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!

61. Stellen Sie eine regelmäßige sechsseitige Pyramide ($a = 3,5 \text{ cm}$), deren Seitenflächen mit der Grundfläche einen Winkel von 60° einschließen, in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!

63. Stellen Sie die in Bild b 14 im Grund- und Aufriß gegebene gerade Pyramide in Kavalierperspektive dar!



b 14



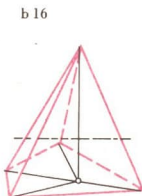
b 15

65. Stellen Sie die in Bild b 16 in Kavalierperspektive gegebene Pyramide in Zweitafelprojektion dar!

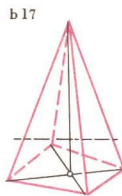
60. Stellen Sie eine regelmäßige sechsseitige Pyramide ($a = 3 \text{ cm}$), deren Seitenkanten mit der Grundfläche einen Winkel von 65° einschließen, in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!

62. Stellen Sie eine regelmäßige achtseitige Pyramide ($a = 2,4 \text{ cm}$), deren Seitenkanten mit der Grundfläche einen Winkel von 55° einschließen, in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!

64. Stellen Sie die in Bild b 15 im Grund- und Aufriß gegebene schiefe Pyramide in Kavalierperspektive dar!



b 16



b 17

66. Stellen Sie die in Bild b 17 in Kavalierperspektive gegebene Pyramide in Zweitafelprojektion dar!

8. Ein gerades quadratisches Prisma ($a = 5 \text{ cm}$; $h = 8 \text{ cm}$) werde durch einen ebenen Schnitt, der durch eine Diagonale der Deckfläche und einen Eckpunkt der Grundfläche geht, abgesägt. Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche und das Volumen des Restkörpers! Stellen Sie den Körper (in freigewählter Lage) in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!

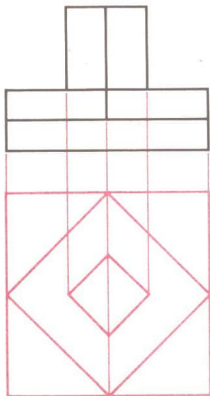
9. Ein gerades quadratisches Prisma ($a = 4,5 \text{ cm}$; $h = 7 \text{ cm}$) werde durch einen ebenen Schnitt, der durch eine Deckkante geht und die gegenüberliegende Seitenfläche halbiert, abgeschrägt. Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche und das Volumen des Restkörpers! Stellen Sie den Körper (in frei gewählter Lage) in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!

67. Von einem Würfel werden die Ecken so abgeschnitten, daß aus den Seitenflächen des Würfels Quadrate entstehen, deren Diagonalen so lang wie die Würfelkante sind. Stellen Sie den Restkörper in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar! Berechnen Sie das Volumen des Körpers!
68. Von einem Würfel werden die Ecken so abgeschnitten, daß aus den Seitenflächen regelmäßige Achtecke entstehen. Stellen Sie den Restkörper in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar! Welchen Prozentsatz hat das Volumen des Restkörpers im Vergleich mit dem Volumen des Würfels?

Hinweis zu den Aufgaben b 67 und b 68: Die abgetrennten Eckkörper der Würfel sind als schiefe Pyramiden (mit einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck als Grundfläche und einer zur Grundfläche senkrechten Seitenkante) aufzufassen.

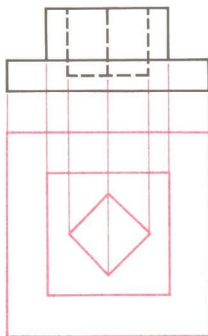
Stellen Sie die in den Bildern b 18 und b 19 gegebenen Körper in Kavalierperspektive dar! Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen der Körper!

69.



b 18

70.

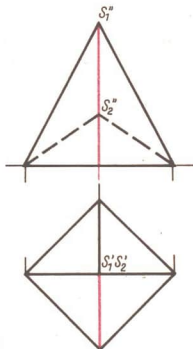


b 19

71. Die handelsüblichen Einfülltrichter sind so geformt, daß sich ein kreisrundes Filterpapier nach zweimaligem Falten und anschließendem Öffnen zu einem Kegel einlegen läßt. Die eine Hälfte des Kegelmantels besteht dabei aus dreifach gefaltetem Papier. Wie groß ist der Öffnungswinkel des Trichters?
72. Unter welcher Bedingung sind der Mantel eines geraden Kreiszylinders und der Mantel eines geraden Kreiskegels flächengleich, wenn beide Körper gleiche Grundkreisradien und gleiche Höhen haben?

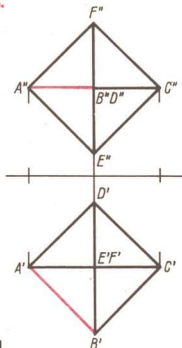
Konstruieren Sie zu den in den Bildern b 20 und b 21 gegebenen Darstellungen im Grund- und Aufriß einen zweiten Aufriß, dessen Rißachse senkrecht zur ursprünglichen Rißachse ist! Berechnen Sie aus den gegebenen Daten den Oberflächeninhalt und das Volumen der dargestellten Körper!

73.



b 20

74.



b 21

75. Sand hat einen Böschungswinkel von etwa 34° . Wieviel Tonnen Sand ungefähr lassen sich auf einer kreisförmigen Fläche von 8 m Durchmesser aufschütten ($\rho = 2,3 \text{ t} \cdot \text{m}^{-3}$)?

77. Wie groß muß eine kreisförmige Fläche mindestens sein, damit auf ihr 50 t Sand aufgeschüttet werden können?

79. Einem Würfel sei eine Kugel umbeschrieben. In welchem Verhältnis stehen
a) die Volumen,
b) die Oberflächeninhalte
der Körper?

81. Ein Quadrat und der dem Quadrat umschriebene Kreis rotieren um eine Mittellinie des Quadrates. In welchem Verhältnis stehen
a) die Volumen,
b) die Oberflächeninhalte
der entstehenden zwei Rotationskörper?

76. Wieviel Tonnen Kies ungefähr faßt eine kegelige Aufschüttung von 4 m Höhe (Böschungswinkel 31° ; $\rho = 2,2 \text{ t} \cdot \text{m}^{-3}$)?

78. Wie groß muß eine kreisförmige Fläche mindestens sein, damit auf ihr 90 t Kies aufgeschüttet werden können?

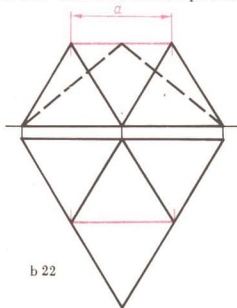
80. Einer Kugel sei ein Würfel umbeschrieben. In welchem Verhältnis stehen
a) die Volumen,
b) die Oberflächeninhalte
der Körper?

82. Ein Quadrat und der dem Quadrat eingeschriebene Kreis rotieren um eine Quadratdiagonale. In welchem Verhältnis stehen
a) die Volumen,
b) die Oberflächeninhalte
der entstehenden zwei Rotationskörper?

b

10. Unter welchen Bedingungen sind die Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide gleich lang? Stellen Sie ein Beispiel für eine Pyramide dieser Art in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar! (Als Beispiel soll keine regelmäßige Pyramide gewählt werden.)
11. Unter welchen Bedingungen sind die Höhen der Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide gleich lang? Stellen Sie ein Beispiel für eine Pyramide dieser Art in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar! (Als Beispiel soll keine regelmäßige Pyramide gewählt werden.)
12. Eine Pyramide soll durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche in zwei volumengleiche Teile zerlegt werden. In welchem Verhältnis muß dabei die Höhe des Körpers geteilt werden?
13. Bei einem Würfel werden die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen geradlinig miteinander verbunden. Stellen Sie den entstehenden Körper in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar! Wie verhalten sich Oberflächeninhalt und Volumen dieses Körpers zu den entsprechenden Größen des Würfels?

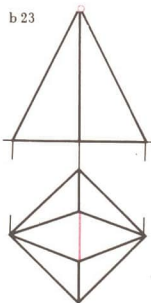
14. Stellen Sie den im Bild b 22 in Zweitafelprojektion abgebildeten geometrischen Körper in Kavalierperspektive dar! Berechnen Sie Oberflächeninhalt und Volumen des Körpers!
15. Konstruieren Sie zu dem im Bild b 22 in Zweitafelprojektion abgebildeten geometrischen Körpern zwei weitere Aufrisse! In einem Falle soll die neue Rißachse senkrecht zur ursprünglichen stehen. Fertigen Sie ein Modell oder ein Flächennetz des Körpers an!



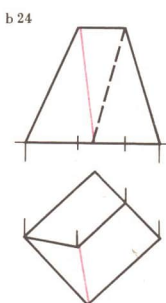
b 22

Ermitteln Sie die wahre Länge der Seitenkanten der folgenden Körper durch eine darstellend-geometrische Konstruktion!

- 83.** Unregelmäßige dreiseitige Pyramide (freie Wahl der Maße)
- 84.** Unregelmäßige vierseitige Pyramide (freie Wahl der Maße)
- 85.** Körper nach Bild b 23.
- 86.** Körper nach Bild b 24.
- 87.** Ermitteln Sie durch Konstruktion den Schnittwinkel zweier Raumdiagonalen eines Würfels!
- 88.** Ermitteln Sie durch Konstruktion den Winkel, den eine Raumdiagonale eines Würfels mit einer vom gleichen Eckpunkt ausgehenden Flächendiagonalen einschließt!



b 23



b 24

Die folgenden Körper werden von einer Ebene senkrecht zur Aufrißebene geschnitten. Konstruieren Sie die wahre Größe der Schnittfiguren!

89. Regelmäßiges dreiseitiges Prisma; Winkel zwischen Grundrißebene und Schnittebene 45° .
90. Regelmäßiges fünfseitiges Prisma; Winkel zwischen Grundrißebene und Schnittebene 60° .

16. Stellen Sie eine regelmäßige dreiseitige Pyramide, deren Seitenflächen zur Grundfläche kongruent sind, in Zweitafelprojektion dar, und zwar so, daß eine Kante des Körpers in der Grundrißebene parallel zur Rißachse und eine weitere Kante parallel zur Grundrißebene liegt! Schneiden Sie den Körper durch eine Parallelebene zur Grundrißebene in halbem Abstand zwischen den genannten (windschiefen) Kanten und ermitteln Sie die Schnittfigur! Stellen Sie den Körper mit dem Schnitt in Kavalierperspektive dar!

17. Stellen Sie einen Würfel in Zweitafelprojektion dar; und zwar in einer Lage, bei der ein Eckpunkt in der Grundrißebene, der in der Raumdiagonale gegenüberliegende Eckpunkt senkrecht über diesen und eine Kante parallel zur Aufrißebene liegt! Nehmen Sie drei Schnitte parallel zur Grundrißebene durch den Körper an, davon einen durch den Mittelpunkt des Würfels, und ermitteln Sie die Schnittfiguren! Stellen Sie Körper und Schnitte in Kavalierperspektive dar!

Stellen Sie folgende Kreiszyylinder in Zweitafelprojektion dar! Fertigen Sie Skizzen der Körper in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$) an!

91. Gerader Zylinder; $r = 2,5$ cm; $h = 6,5$ cm
92. Gerader Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt; $h = 6$ cm

Skizzieren Sie einen geraden Kreiszyylinder in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$)! Zeichnen Sie einen Achsenschnitt ein, dessen Ebene nicht parallel oder senkrecht zur Bildebene ist!

93. $r = 4,0$ cm; $h = 7,5$ cm
94. $r = 3,5$ cm; $h = 11,0$ cm
95. Skizzieren Sie einen geraden Kreiszyylinder ($r = 3$ cm; $h = 8$ cm) in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$) in folgenden Lagen!
a) Auf einer horizontalen Ebene stehend
b) Auf einer horizontalen Ebene liegend, Achse senkrecht zur Bildebene
96. Skizzieren Sie einen liegenden geraden Kreiszyylinder ($r = 2,8$ cm; $h = 9,4$ cm), dessen Achse auf der Bildtafel senkrecht steht!
a) In schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$)
b) In Kavalierperspektive

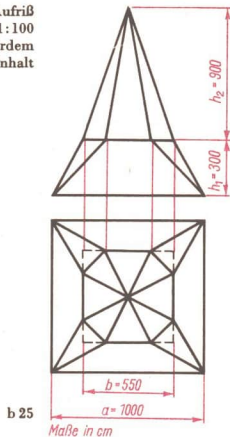
Stellen Sie folgenden geraden Kreiskegel in Zweitafelprojektion dar! Fertigen Sie Skizzen in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$) an! Ermitteln Sie die gesuchten Stücke durch Konstruktion!

97. $r = 3$ cm; $h = 5$ cm; gesucht s
98. $r = 3,5$ cm; $s = 5,5$ cm; gesucht h
99. $r = 3,5$ cm; Winkel zwischen Mantellinie und Grundfläche 52° ; gesucht h ; s
100. $r = 2,6$ cm; Öffnungswinkel 45° ; gesucht h ; s

Die folgenden geraden Kreiszyylinder werden von einer Ebene senkrecht zur Aufrißebene geschnitten. Konstruieren Sie die wahre Größe der Schnittfiguren!

101. $r = 4$ cm; $h = 12$ cm; Winkel zwischen Schnittebene und Grundrißebene 45°
102. $r = 3$ cm; $h = 12$ cm; Winkel zwischen Schnittebene und Grundrißebene 60°
103. $r = 2,5$ cm; $h = 18$ cm; Winkel zwischen Schnittebene und Grundrißebene 72°
104. $r = 4$ cm; $h = 8$ cm; Winkel zwischen Schnittebene und Grundrißebene 30°

18. Das Dach eines Turmes, dessen Grund- und Aufriß in Bild b 25 zu ersehen sind, soll im Maßstab 1:100 in Kavalierperspektive dargestellt werden. Außerdem sind das Volumen des Dachraumes und der Inhalt der Dachfläche zu ermitteln.



Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt von regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstümpfen, wenn folgende Größen gegeben sind!

105. $a_1 = 8 \text{ cm}$; $a_2 = 5 \text{ cm}$; $h = 7 \text{ cm}$ 106. $a_1 = 7,8 \text{ cm}$; $a_2 = 5,9 \text{ cm}$; $h = 10,4 \text{ cm}$
 107. $a_1 = 8,5 \text{ cm}$; $h = 4 \text{ cm}$; $s = 5 \text{ cm}$ 108. $a_2 = 3 \text{ cm}$; $h = 3 \text{ cm}$; $s = 5 \text{ cm}$

Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt von geraden quadratischen Pyramidenstümpfen, wenn folgende Größen gegeben sind!

109. $a_1 = 5,5 \text{ cm}$; $h = 3,2 \text{ cm}$; $s = 4,0 \text{ cm}$ 110. $a_1 : a_2 = 3 : 2$; $a_1 - a_2 = 2,5 \text{ cm}$; $h = 2a_2$

111. Eine gerade quadratische Pyramide ($a = 6,0 \text{ cm}$; $s = 5,0 \text{ cm}$) werde in halber Höhe von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der entstehenden Teilkörper!

112. Eine gerade quadratische Pyramide ($a = 5,8 \text{ cm}$; $h = 7,4 \text{ cm}$) werde in 2 cm Höhe von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten. In welchem Verhältnis steht

- a) das Volumen des Stumpfes zum Volumen der Vollpyramide,
 b) der Oberflächeninhalt des Stumpfes zum Oberflächeninhalt der Vollpyramide?

113. Ein gerader Pyramidenstumpf habe als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit einer Seite $a = 4 \text{ cm}$. Die Seitenkanten seien gegen die Grundfläche unter einem Winkel von $67,2^\circ$ geneigt, die Höhe des Stumpfes betrage 5 cm . Wie groß sind Oberflächeninhalt und Volumen des Stumpfes?

114. Ein gerader Pyramidenstumpf habe als Grundfläche ein regelmäßiges Achteck mit einer Seite $a = 2,5 \text{ cm}$. Die Seitenkanten haben eine Länge $s = 4 \text{ cm}$ und eine Neigung gegen die Grundfläche von $75,5^\circ$. Wie groß sind Volumen und Oberflächeninhalt des Stumpfes?

115. Bei einem geraden quadratischen Pyramidenstumpf messen die Deckkanten 3 cm, die Höhe des Körpers betrage 6 cm, die Seitenflächen schließen mit der Grundfläche einen Winkel von 52° ein. Wie groß sind Oberflächeninhalt und Volumen des Körpers?
116. Ein gerader Pyramidenstumpf mit rechteckiger Grundfläche ($a : b = 3 : 2$), dessen Höhe 6 cm betrage, habe eine Deckfläche von $13,5 \text{ cm}^2$ und eine Grundfläche von vierfachem Inhalt. Wie groß ist das Volumen des Körpers? Unter welchem Winkel sind
 a) die Seitenkanten,
 b) die Seitenflächen gegen die Grundfläche geneigt?

Berechnen Sie die Länge der Grundkante und die Länge der Deckkante gerader quadratischer Pyramidenstümpfe, wenn folgende Größen gegeben sind!

117. $V = 800 \text{ cm}^3$; $h = 9 \text{ cm}$; $a_2 = \frac{1}{2} a_1$
118. $V = 1 \text{ dm}^3$; $h = 1,2 \text{ dm}$; $A_G : A_D = 3 : 1$

Berechnen Sie den Neigungswinkel der Seitenkanten und den Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber der Grundfläche bei geraden Pyramidenstümpfen mit folgenden Daten!

119. Quadratischer Pyramidenstumpf;
 $a_1 = 5 \text{ cm}$; $a_2 = 3 \text{ cm}$; $s = 6 \text{ cm}$
120. Fünfseitiger regelmäßiger Pyramidenstumpf; $a_1 = 4 \text{ cm}$; $a_2 = \frac{1}{2} a_1$; $h = 8 \text{ cm}$
121. Stellen Sie einen regelmäßigen sechseitigen Pyramidenstumpf ($a_1 = 3,5 \text{ cm}$; $a_2 = 2 \text{ cm}$; $h = 4 \text{ cm}$) in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!
122. Stellen Sie einen geraden Pyramidenstumpf mit rechteckiger Grundfläche ($a_1 = 5,5 \text{ cm}$; $b_1 = 4 \text{ cm}$; $a_2 = 3,5 \text{ cm}$; $h = 3 \text{ cm}$) in Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar!

123. Stellen Sie einen regelmäßigen fünfseitigen Pyramidenstumpf ($a = 4 \text{ cm}$; $h = 4,5 \text{ cm}$), dessen Seitenkanten mit der Grundfläche einen Winkel von 65° einschließen, in Zweitafelprojektion dar!
124. Stellen Sie einen regelmäßigen fünfseitigen Pyramidenstumpf ($a = 3,5 \text{ cm}$; $h = 5,0 \text{ cm}$), dessen Seitenflächen mit der Grundfläche einen Winkel von 68° einschließen, in Zweitafelprojektion dar!

Zur Berechnung eines geraden Kreiskegelstumpfes seien von den sieben Größen r_1 , r_2 , h , s , A_M , A_O , V jeweils drei gegeben. Berechnen Sie die fehlenden vier Größen!

125. a) $r_1 = 5,2 \text{ cm}$; $r_2 = 4,1 \text{ cm}$;
 $h = 6,8 \text{ cm}$
 b) $r_1 = 14 \text{ cm}$; $h = 8 \text{ cm}$;
 $s = 10 \text{ cm}$ ($r_1 > r_2$)
 c) $r_1 = 10 \text{ cm}$; $r_2 = 8 \text{ cm}$;
 $A_M = 560 \text{ cm}^2$
126. a) $r_1 = 13,4 \text{ cm}$; $r_2 = 11,0 \text{ cm}$;
 $s = 14,3 \text{ cm}$
 b) $r_2 = 4,2 \text{ cm}$; $h = 7,2 \text{ cm}$;
 $s = 8,4 \text{ cm}$ ($r_1 > r_2$)
 c) $r_1 = 5 \text{ cm}$; $r_2 = 4 \text{ cm}$;
 $V = 210 \text{ cm}^3$

127. Ein Baumstamm von 6,00 m Länge habe einen oberen Umfang von 2,50 m und einen unteren Umfang von 3,20 m (ohne Rinde). Wieviel Festmeter (Kubikmeter) Holz liefert er?
128. Ein Forstarbeiter mißt mit der Kluppe die Durchmesser eines 10 m langen Baumstammes am unteren Ende mit 48 cm und am oberen Ende mit 38 cm. Wieviel Festmeter (Kubikmeter) Holz hat der Baumstamm?

129. Ein Eimer von 27 cm Höhe habe einen Grundkreisdurchmesser von 20 cm. Wie weit muß der obere Radius sein, wenn der Eimer randvoll 14 l fassen soll?
130. Ein Eimer habe die Durchmesser $d_1 = 20 \text{ cm}$ und $d_2 = 28 \text{ cm}$, die Mantellinie betrage 35 cm. Berechnen Sie das Fassungsvermögen des Eimers, wenn er bis 5 cm unter den oberen Rand gefüllt werden soll und der Boden 3 cm über dem unteren Rand angebracht ist!

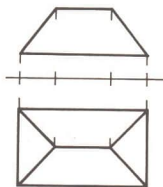
19. Ein gerader Kreiskegelstumpf, dessen Grund- und Deckfläche Durchmesser von 33,4 cm und 18,2 cm haben und dessen Höhe 15,2 cm betrage, soll durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche in zwei volumengleiche Teile zerlegt werden. Wie groß sind die Höhen der Teilkörper? Welcher Teilkörper hat die größere Mantelfläche?

Stellen Sie folgende gerade Kreiskegelstümpfe in Zweitafelprojektion dar! Fertigen Sie Skizzen in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$) an!

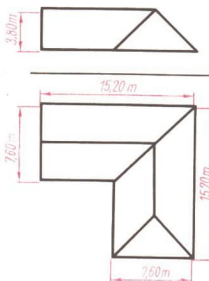
131. a) $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 2$ cm; $h = 4,5$ cm; gesucht s
 b) $r_1 = 4,5$ cm; $r_2 = 2,5$ cm; $s = 4$ cm; gesucht h
132. a) $r_1 = 4$ cm; $s = 5$ cm; $h = 4,5$ cm; gesucht r_2
 b) $r_1 = 4$ cm; $h = 4$ cm; Winkel zwischen den Mantellinien und der Grundfläche 60° ; gesucht r_2 ; s

133. Ein Walmdach (Bild b 26) überdecke eine rechteckige Fläche von 13,20 m Länge und 5,40 m Breite. Der Dachfirst sei 7,80 m lang und liege 2,60 m höher als die Traufkanten. Wie groß sind Dachoberfläche und Dachraum?

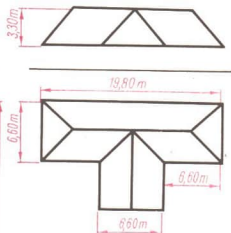
134. Ein Walmdach (Bild b 26) überdecke eine rechteckige Fläche von 15,80 m Länge und 6,60 m Breite. Alle Dachflächen sind gegen die Ebene der Traufkanten um 45° geneigt. Welche Länge hat der Dachfirst? Wie groß sind Dachoberfläche und Dachraum?



b 26



b 27

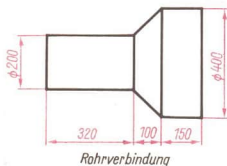


b 28

135. Berechnen Sie für das im Bild b 27 in Grund- und Aufriß dargestellte Dach den Inhalt der einzelnen Dachflächen und den gesamten Dachraum!
136. Berechnen Sie für das im Bild b 28 in Grund- und Aufriß dargestellte Dach den Inhalt der einzelnen Dachflächen und den gesamten Dachraum!
137. An einem kegelstumpfförmigen Schornstein (unterer Durchmesser 4,8 m; oberer Durchmesser 1,6 m; Höhe 32 m) soll in 18 m Höhe ein dicht anliegender ringförmiger Wasserbehälter mit einem zylindrischen Unterteil und einem kegelförmigen Oberteil angebracht werden. Seine Abmessungen seien: Äußerer Durchmesser des zylindrischen Teils und Durchmesser der Grundfläche des kegelförmigen Teils 4,8 m; Höhe des zylindrischen Teils 2,4 m; Neigungswinkel der Mantellinie des kegelförmigen Teils gegen die Grundfläche 30° . Welches Fassungsvermögen hat der Behälter?

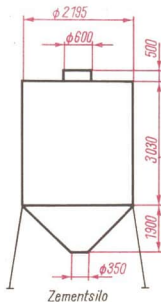
Von Rotationskörpern seien Darstellungen gegeben. Skizzieren Sie die Körper in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90^\circ$; $q = \frac{1}{2}$)! Berechnen Sie Mantelflächeninhalt und Volumen der Körper!

138. a) (technische Zeichnung)



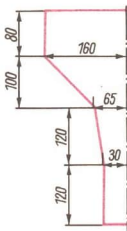
b 29

139. a) (technische Zeichnung)



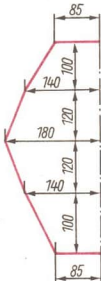
b 30

b) (halber Achsenschnitt)



b 31

b) (halber Achsenschnitt)



b 32

140. An einem kegelstumpfförmigen Schornstein (unterer Durchmesser 4,5 m; oberer Durchmesser 1,8 m; Höhe 28 m) soll in 15 m Höhe ein dicht anliegender ringförmiger zylindrischer Wasserbehälter mit 40 m^3 Fassungsvermögen angebracht werden. Wie hoch muß dieser Behälter sein, wenn sein äußerer Durchmesser 5 m betragen soll?

141. Ein Torpedo unserer Volksmarine ist 7 m lang. Der Torpedokopf ist eine Halbkugel (Radius 25 cm). Daran schließen sich ein Zylinder (Länge 5,75 m) und ein Kegel (Höhe 1 m) an.

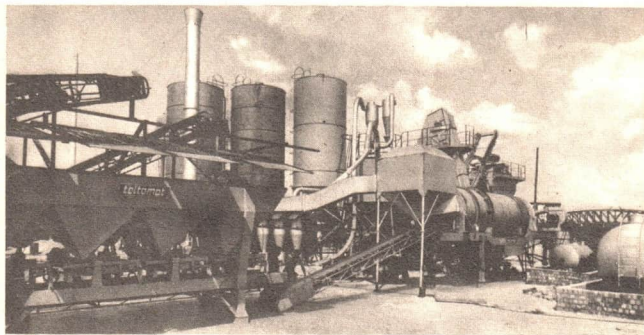
Wieviel Prozent des Gesamtvolumens eines solchen Torpedos sind mit Sprengstoff gefüllt, wenn die Halbkugel vollständig und der Zylinder zu 20% mit Sprengstoff gefüllt sind?

Ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 4 cm rotiere um eine Achse, die vom Mittelpunkt des Quadrats einen Abstand von 8 cm habe und mit dem Quadrat in der gleichen Ebene liege. Es entsteht ein ringförmiger Körper.

- 142.** Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, wenn
- eine Quadratseite,
 - eine Quadratdiagonale parallel zur Achse ist!
- Vergleichen Sie die Ergebnisse!
- 143.** Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers, wenn
- eine Quadratseite,
 - eine Quadratdiagonale parallel zur Achse ist!
- Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Prüfen Sie nach, ob die sogenannte SIMPSONSche Formel für die Berechnung des Volumens bestimmter geometrischer Körper $V = \frac{h}{6} \cdot (A_G + A_D + 4A_Q)$ für die folgenden Körper gilt! Dabei bedeutet A_Q den Inhalt der Querschnittsfläche, die entsteht, wenn der Körper in halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten wird.

- 144.** Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel
- 145.** Pyramidenstumpf, Kegelstumpf und Halbkugel



Als Näherungsformel für die Berechnung des Volumens eines Pyramiden- und eines Kegelstumpfes geben Formelsammlungen an:

$$V \approx \frac{A_G + A_D}{2} \cdot h.$$

Berechnen Sie für die folgenden Fälle den absoluten und den relativen (prozentualen) Fehler gegenüber dem genauen Wert des Volumens, wenn diese Näherungsformel benutzt wird!

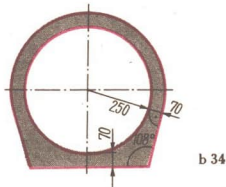
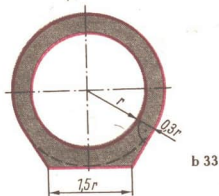
- 146.** Quadratischer Pyramidenstumpf; $a_1 = 5$ cm; $a_2 = 2$ cm; $h = 4$ cm
- 147.** Regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf; $a_1 = 2,8$ cm; $a_2 = 1,8$ cm; $h = 2,6$ cm

- 148.** Die US-Aggressoren schreckten vor keinem Verbrechen in Vietnam zurück. Viele Frauen und Kinder töteten sie mit ihren furchtbaren Kugelbomben. Diese verstreut die zerberstende „Mutterbombe“ (ein Zylinder von 1,5 m Länge, abgeschlossen durch eine Halbkugel von 40 cm Durchmesser). Wie viele Kugelbomben (Durchmesser 7 cm) sind in einer Mutterbombe (20 % des Gesamtvolumens bleiben durch die Kugelformen leer)?

Betonröhren haben den in den Bildern b 33 und b 34 angegebenen Querschnitt. Welche Masse je Meter haben diese Röhren (Dichte des Betons $2,35 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$)?

149.

150.



20. Ein Kreis rotiere um eine Achse, die mit dem Kreis in einer Ebene liegt, aber den Kreis nicht schneidet. Der Durchmesser des Kreises sei r , der Abstand des Kreismittelpunkts von der Achse sei a . Geben Sie möglichst enge Schranken an, zwischen denen das Volumen des Rotationskörpers liegt!

21. Als Näherungsformel für die Berechnung des Volumens eines Pyramiden- oder Kegelstumpfes geben Formelsammlungen an:

$$V \approx \frac{A_G + A_D}{2} \cdot h.$$

Deuten Sie diese Formel geometrisch! Stellen Sie den absoluten Fehler, der sich bei der Anwendung dieser Formel zur Berechnung des Volumens eines geraden Kreiskegelstumpfes ergibt, als Funktion des Deckkreisradius r_2 (Grundkreisradius r_1 und Höhe h des Stumpfes werden als konstant angenommen) dar!

Register


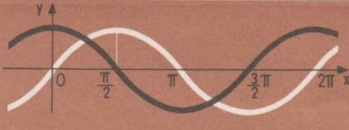

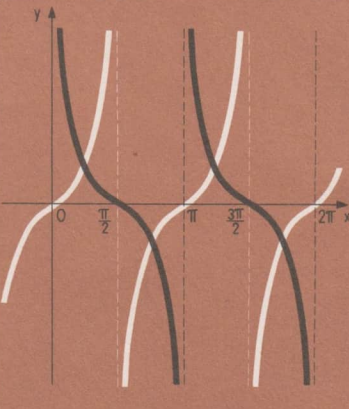


Abbildung	A 4, B 72 (\triangleright 3)	Gleichungen	A 5
–svorschrift	A 4	– von Funktionen	A 5
eindeutige –	A 4	Hilfs–	A 36
geometrische –	A 14	Grad	
identische –	A 14, 16	Einheit des –maßes	A 6
Annäherung	A 23	–maß	A 6
		Größe	A 41
Bestimmungsstücke	A 42, 45, 46	wahre –	B 80
Bild	B 72	Grundriß–Aufriß–Verfahren	B 72
Bogenmaß	A 7, 8 (\triangleright 1)		
		Hauptwert	A 7
Definitionsbereich	A 4, 12	Hypotenuse	A 41
Dreieck	A 40		
beliebiges –	A 51	Identität	A 25
Bestimmungs–	A 46	Inkreis	A 46
–berechnungen	A 40, 42, 57	Intervall	A 12
gleichschenkliges –	A 45		
rechtwinkliges –	A 41 (\triangleright 11, 12, 13, 14)		
		Kathete	A 40
Ebene		An–	A 40
projizierende –	B 73	Gegen–	A 40
Einheitskreis	A 9	Kavalierperspektive	B 68, 72
Element	A 4	Kegel	
Ellipse	B 84	Achse des Kreis–s	B 70
Hauptachse der –	B 84	Achse des Kreis–stumpfes	B 90
Nebenachse der –	B 84	gerader Kreis–	B 70
		gerader Kreis–stumpf	B 91, 93
Figur		Kreis–	B 70, 83
wahre Größe einer ebenen –	B 80	Kreis–stumpf	B 90
Fläche		schiefer Kreis–	B 70
Deck–	B 67, 68, 87, 90	schiefer Kreis–stumpf	B 91
–ninhalt	A 41, 50 (\triangleright 16)	Kongruenzsätze	A 52
–ninhaltformel	A 41, 50	Körper	
Grund–	B 67, 68, 70, 87, 90	geometrischer –	B 66
Mantel–	B 67, 68, 70, 87, 90	–stümpfe	B 87, 89, 90, 93
Schnitt–	B 69, 83	zusammengesetzte –	B 94
Seiten–	B 67, 70, 87	Kosinus	A 41 (\triangleright 12)
Funktion	A 4	– eines Winkels	A 19
Exponential–	A 5	–satz	A 51 (\triangleright 17)
–swert	A 4	Kotangens	A 41 (\triangleright 14)
Ko–	A 30	– eines Winkels	A 22
Kosinus–	A 19 (\triangleright 4)	Kugel	B 66, 71
Kotangens–	A 22 (\triangleright 6)	–durchmesser	B 72
lineare –	A 5	–mittelpunkt	B 71
Logarithmus–	A 5	–radius	B 71
periodische –	A 13		
Potenz–	A 5	Lösungsplan	A 44, B 77
quadratische –	A 5		
Sinus–	A 10, 11 (\triangleright 2), 13 (\triangleright 3)	Mantel	B 67, 68, 70, 90
spezielle –swerte	A 25	–flächeninhalt	B 71, 92
Tangens–	A 22 (\triangleright 5)	–linien	B 68, 70, 91
Winkel–en	A 22 (\triangleright 2, 4, 5, 6)	Menge	A 4
		Minute	A 6
Geraden		Monotonie	A 12
projizierende –	B 72		

N-Eck	A 46	Sekunde	A 6
regelmäßiges –	A 46	Sinus	A 41 (▷ 11)
Nullstellen	A 12	– eines Winkels	A 10
		–satz	A 49 (▷ 15)
Oberfläche		Stauchung	A 14
–ninhalt	B 66, 69, 71, 72, 88	Strecke	
Orientierung	A 6	Bild–	A 14
Original	B 72	Original–	A 14
		wahre Länge einer –	B 77
Paar	A 4	Streckung	A 14
geordnetes –	A 4	–sfaktor	A 14
Zahlen–	A 4	Symmetrieachsen	A 46
Periode	A 13		
kleinste –	A 13	Tangens	A 41 (▷ 13)
Periodizität	A 13, 34	– eines Winkels	A 22
Prisma	B 67 (▷ 1)		
gerades –	B 68, 81	Umklappung	B 77, 80
regelmäßiges –	B 68	Umkreis	A 46
schiefes –	B 68		
Projektion	B 72, 73	Vieleck	A 46
Eintafel–	B 73	regelmäßiges –	A 46
Parallel–	B 72 (▷ 3), 73	Volumen	B 66, 69, 71, 72, 88, 91
–sgerade	B 72	Vorzeichen	A 12
schräge Parallel–	B 73		
senkrechte–	B 73	Wertebereich	A 4, 12
Zweitafel–	B 72, 73	Winkel	A 6
Proportionaleinstellung	A 8	anliegende –	A 40
Pyramide	B 70 (▷ 2)	einander äquivalente –	A 7
gerade –	B 70	gegenüberliegende –	A 40
gerader –nstumpf	B 88, 89	Komplement–	A 30
–nstumpf	B 87	negativ orientierte –	A 7
regelmäßige –	B 70	positiv orientierte –	A 6
schiefe –	B 70	Voll–	A 6
schiefes –nstumpf	B 87	–funktionen	A 22
Spitze der –	B 70	–funktionsskale	A 37
		–funktionswerte	A 33
Quadrant	A 28	Zuordnung	A 4
–enbeziehungen	A 31	eindeutige –	A 4
		–svorschrift	A 4
Rechenstab	A 8	Zylinder	B 68
Riß		Achse des Kreis–s	B 68
Auf–	B 73	gerader Kreis–	B 69
Grund–	B 73	Kreis–	B 68, 83
		schiefer Kreis–	B 69
Schnitt	B 81, 86		
–figur	B 81		

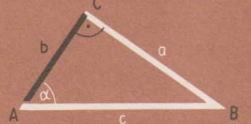

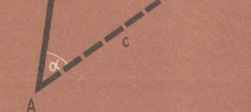
Bildnachweis

- Innentitel: Zentralbild
Bild S. 3: VEB Kombinat Meßgerätewerk Zwönitz
Bild S. 37: Werner Wunderlich, Berlin-Friedrichshain
Bild S. 59: Reproduktion aus O. NEUGEBAUER: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, 1. Band: Vorgriechische Mathematik, Berlin 1934
Bild S. 59: Reproduktion aus O. NEUGEBAUER: *Mathematische Keilschrifttexte*, zweiter Teil: Register, Glossar, Nachträge, Tafeln; Berlin 1935
Bild S. 62: Reproduktion des Titelblattes einer Abhandlung von PETER APIAN (1533)
Bild S. 62: Reproduktion aus C. KING: *The history of the telescope*
Bild S. 63: Reproduktion aus D. E. SMITH: *History of mathematics*, Vol. 1, 1922
Bild S. 63: Reproduktion aus PRESTAGE: *Die portugiesischen Entdecker*, Bern—Leipzig—Wien 1936
Bild S. 63: Reproduktion aus SMITH and MIKAMI: *A history of Japanese mathematics*
Bild S. 63: Reproduktion aus A. WOLF: *A history of science*, 18. Jh., London, sec. edition
Bild S. 64: Museum für deutsche Geschichte, Berlin
Bild S. 65: Zentralbild
Bild S. 97: H. Dreyer, Berlin-Köpenick
Bild S. 101: Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik
Bild S. 115: Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik
Bild S. 117: Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik
Bild S. 120: Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik
Bild S. 129: Zentralbild
Bild S. 140: Zentralbild
Rückentitel: Zentralbild

Winkelfunktionen

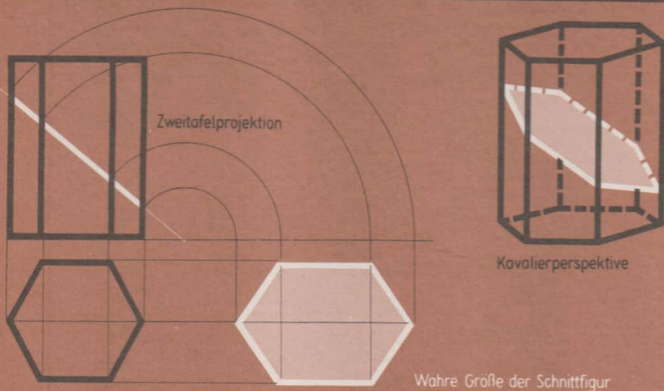
Sinus - funktion $y = \sin x$		$\sin x = \frac{v}{r}$ Def $\frac{v}{r}$	
Kosinus - funktion $y = \cos x$		$\cos x = \frac{u}{r}$ Def $\frac{u}{r}$	
Tangens - funktion $y = \tan x$		$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{v}{u}$ Def $\frac{v}{u}$	
Kotangens - funktion $y = \cot x$		$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u}{v}$ Def $\frac{u}{v}$	

Dreiecksberechnungen

Recht - winkliges Dreieck		$\sin \alpha = \frac{a}{c} ; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\tan \alpha = \frac{a}{b} ; \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}$
Sinus - satz		$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
Kosinus - satz		$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

Körperdarstellung

Ebener Schnitt durch ein regelmäßiges sechseites Prisma



Körperberechnung

Körperstümpfe

Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_G + \sqrt{A_G \cdot A_D} + A_D)$$

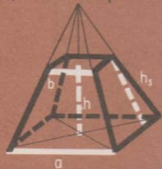
Oberflächeninhalt

$$A_0 = A_G + A_D + A_M$$

Regelmäßiger vierseitiger
Pyramidenstumpf

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$A_0 = a^2 + b^2 + 2h_s(a+b)$$



Gerader Kreiskegelstumpf

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$A_0 = \pi [r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)]$$





Kurzwort: 00 10 02 Lehrb. Mathe Kl 10
Schulpreis DDR 2,30