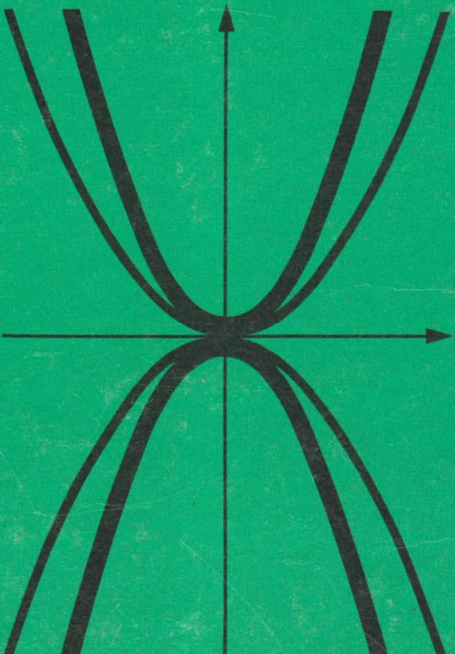
Mathematik 9



Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

Das Randregister auf den Außenrändern der Seiten dient dem bequemen und schnellen Auffinden der Kapitel. Auf dem Vorsatz finden Sie hierzu eine Übersicht über die einzelnen Kapitel. Der Lehrteil gliedert sich in die Kapitel A bis E, der Aufgabenteil in die Kapitel a bis e. Dabei enthält zum Beispiel das Kapitel b die Aufgaben für das Kapitel B im Lehrteil.
Jedes Kapitel ist durch Zwischenüberschriften und durch eine fortlaufende Numerierung mit schwarzen halbfetten Ziffern in Lerneinheiten untergliedert.
Innerhalb der Lerneinheiten werden die **Definitionen, Sätze, Beispiele** und **Aufträge** durch folgende Marken gekennzeichnet.

▶ Definitionen und Sätze

□ Beispiele

○ Aufträge

Durch die Ziffern in den Marken werden auch die Definitionen, Sätze, Beispiele und Aufträge numeriert. Sämtliche Numerierungen werden jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt. Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnen dann alle Numerierungen von neuem. Hinweise auf Lerneinheiten, Beispiele usw. werden im laufenden Text mit dem Buchstaben des betreffenden Kapitels angegeben:

Zum Beispiel:

Lerneinheit C 11 ist die Lerneinheit 11 des Kapitels C.

Beispiel D 5 ist das Beispiel 5 im Kapitel D.

Auftrag A 13 ist der Auftrag 13 im Kapitel A.

Die Aufgaben sind folgendermaßen untergliedert:
Nebeneinanderstehende Aufgaben, zum Beispiel die Aufgaben a66 und a67, behandeln jeweils das gleiche mathematische Problem und sind im allgemeinen vom gleichen Schwierigkeitsgrad. Die Aufgabenstellungen, die sich unmittelbar über den einzelnen Aufgaben über die ganze Breite der jeweiligen Seite erstrecken, beziehen sich dann auf beide Aufgabengruppen.
Mit einem * versehen sind die Nummern derjenigen Aufgaben, die den mit demselben Symbol gekennzeichneten Abschnitten (Informationen) im Lehrteil des betreffenden Kapitels zugeordnet sind. Mit kursiver Numerierung sind **zusätzliche Aufgaben** gekennzeichnet, die sich auf manchen Seiten des Aufgabenteils befinden. Bei diesen Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad im allgemeinen höher als bei den sonstigen, halbfett numerierten Aufgaben.

Mathematik

Lehrbuch für Klasse 9

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1972

„Dadurch, daß das Denken vom Konkreten zum Abstrakten aufsteigt, entfernt es sich ... nicht von der Wahrheit, sondern es kommt ihr näher. Die Abstraktion der Materie, des Naturgesetzes, die Abstraktion des Wertes usw., mit einem Wort alle wissenschaftlichen ... Abstraktionen spiegeln die Natur tiefer, getreuer, vollständiger wider."

LENIN: AUS DEM PHILOSOPHISCHEN NACHLASS

Autoren:

Dipl.-Math. Horst Lemke – Kapitel A, a (Wiederholung und Systematisierung; Reelle Zahlen); D, d; E, e
Ernst Zoll – Kapitel A, a (Arbeiten mit Variablen); B, b; C, c
Prof. Dr. Hans Wußing – Abschnitt Zur Geschichte der Algebra

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt

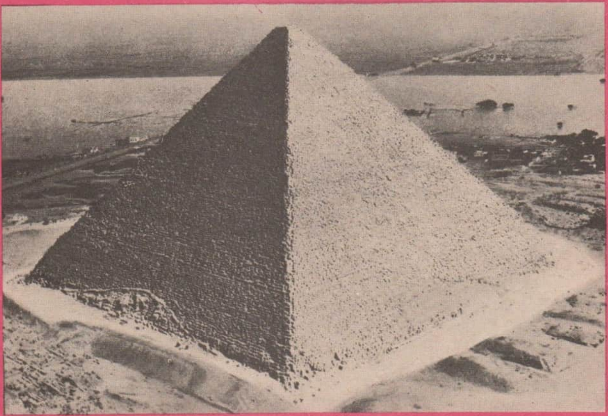
4. Auflage · Ausgabe 1970
Lizenz-Nr. 203 · 1000/72 (UN) · ES 11 G
Redaktion: Heinz Junge
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Umschlag: Manfred Behrendt
Typografie: Atelier VWV, Wolfgang Lorenz
Printed in the German Democratic Republic
Satz: Leipziger Druckhaus, Grafischer Großbetrieb
Druck und Binden: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden III/9/1
Gesetzt aus der Times
Redaktionsschluß: 14. Oktober 1971
Bestell-Nr. 00 09 02-4 · Preis: 2,70

A Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen

Die Gedanken Lenins (vgl. Zitat auf Seite 1) treffen auch auf die Mathematik zu, die in hohem Maße abstrahiert. Mit Hilfe von Gleichungen mit Variablen werden zahlreiche Erscheinungen der Realität in ihren wesentlichen Merkmalen und Eigenschaften erfaßt. Man kann z. B. mit Hilfe der Gleichung

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

die Volumen aller pyramiden- oder kegelförmigen Körper ermitteln.



Wiederholung und Systematisierung

1 Wiederholung einiger Begriffe aus der Mengenlehre

Im Laufe unseres bisherigen Mathematikunterrichts haben wir erkannt, daß es zweckmäßig ist, nicht nur *einzelne* mathematische Objekte – z. B. Zahlen, Punkte, geometrische Figuren –, sondern auch **Mengen** solcher Objekte zu untersuchen.
Den Begriff „Menge“ definieren wir nicht; wir verwenden ihn als Grundbegriff, der nicht auf andere Begriffe zurückgeführt wird. Wir haben diesen Begriff lediglich durch zahlreiche Beispiele veranschaulicht.

Beispiele für Mengen sind:

(1) Die Menge der Seiten dieses Lehrbuches;
(2) die Menge der Bezirkshauptstädte der DDR;
(3) die Menge der natürlichen Zahlen;
(4) die Menge $M = \{2; 3; 5; 7\}$;
(5) die Menge der rationalen Lösungen der Gleichung $2x - 15 = 0$.

1 *Geben Sie zehn weitere Beispiele für Mengen an!*

Ist A eine Menge und gehört das Objekt x zur Menge A, so sagt man bekanntlich: „x ist (ein) **Element** von A“ und schreibt dafür kürzer:

$$\boldsymbol{x \in A}.$$

Auch diese Elementbeziehung $x \in A$ wird nicht definiert. Ist x kein Element von A, so schreibt man: $x \notin A$.
Die Menge $M = \{2; 3; 5; 7\}$ ist eine **echte Teilmenge** der Menge P_r (P_r sei die Menge der Primzahlen). Die Menge P_r ist eine echte Teilmenge der Menge N (N sei die Menge der natürlichen Zahlen). Für diese Mengen gilt also

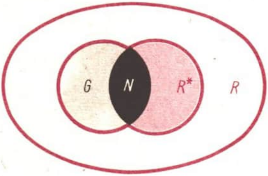
$$M \subset P_r \subset N.$$

2 *Veranschaulichen Sie diese zwischen den Mengen M, P_r und N bestehende Teilmengenbeziehung durch ein Mengendiagramm!*

Für die uns bereits bekannten Zahlenmengen N (Menge der natürlichen Zahlen), G (Menge der ganzen Zahlen), R^* (Menge der gebrochenen Zahlen) und R (Menge der rationalen Zahlen) gelten folgende Beziehungen; vgl. Bild A 1.

$$N \subset R^* \subset R \quad \text{und} \quad N \subset G \subset R$$

Um überhaupt Mengen bilden zu können, müssen zunächst einmal irgendwelche unterscheidbaren mathematischen Objekte (oder auch beliebige andere Objekte der Realität oder des Denkens) vorhanden sein. Wir wollen annehmen,



$5 \in N,\ 5 \in G,\ 5 \in R^*,\ 5 \in R$
$-2 \notin N,\ -2 \in G,\ -2 \notin R^*,\ -2 \in R$
$\frac{1}{3} \notin N,\ \frac{1}{3} \notin G\ \ \frac{1}{3} \in R^*\ \ \frac{1}{3} \in R$
$-\frac{3}{7} \notin N,\ -\frac{3}{7} \notin G,\ -\frac{3}{7} \notin R^*,\ -\frac{3}{7} \in R$

A 1

daß man jeweils *alle und nur diejenigen Objekte* zu einer Menge zusammenfassen kann, auf die eine vorgegebene *Beschreibung* zutrifft.
Die vorgegebenen Objekte seien etwa natürliche Zahlen, und die gegebene Beschreibung sei z. B. „x ist durch 7 teilbar". Da nun für jede natürliche Zahl n entweder $7|n$ oder $7 \nmid n$ gilt, trifft die gegebene Beschreibung auf eine beliebige natürliche Zahl entweder zu oder sie trifft nicht zu. Zu der genannten Beschreibung gibt es also eine Menge, die alle und nur diejenigen natürlichen Zahlen als Elemente enthält, die durch 7 teilbar sind.
Nun können aber auch sehr verschiedene Beschreibungen zu derselben Menge führen. So erhält man beispielsweise die unter (4) angegebene Menge auch durch die Beschreibung „x ist eine Primzahl und $x < 10$". Die unter (5) angegebene Menge erhält man auch durch die Beschreibung „x ist das arithmetische Mittel der Zahlen 7 und 8".
Da Mengen genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten, ist eine Menge – unabhängig von ihren Beschreibungsmöglichkeiten – durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt. Geht man also von gewissen Objekten – z. B. Zahlen, Punkten usw. – aus und gibt dann eine Beschreibung an, so gibt es zu jeder solchen Beschreibung genau eine Menge M, die so beschaffen ist, daß

> *alle Objekte, auf die die Beschreibung zutrifft, Elemente von M sind und alle Objekte, auf die die Beschreibung nicht zutrifft, nicht Elemente von M sind.*

Anmerkung: In mathematischen Sätzen gebraucht man häufig solche Redewendungen wie

> es gibt (mindestens) ein Objekt x, so daß gilt ...;
> es gibt höchstens ein Objekt x, so daß gilt ...;
> es gibt genau ein Objekt x, so daß gilt ...

Die unterschiedliche Bedeutung dieser Redewendungen wollen wir uns noch einmal an folgenden wahren Aussagen klarmachen.

(1) **Es gibt (mindestens) eine** natürliche Zahl x, die die Ungleichung $3 < x < 7$ erfüllt.

(2) **Es gibt höchstens eine** Primzahl zwischen den Zahlen 8 und 12.

(3) **Es gibt höchstens eine** Primzahl zwischen den Zahlen 8 und 10.

(4) **Es gibt genau eine** gerade Primzahl.

Der erste Satz stellt die Existenz *einer* natürlichen Zahl mit einer gewissen Eigenschaft fest. Es wird nichts darüber ausgesagt, ob es nicht eventuell noch mehr Zahlen mit der verlangten Eigenschaft gibt. Der zweite Satz bedeutet: Wenn es überhaupt Primzahlen x und y gibt, die die gestellte Bedingung erfüllen, so gilt $x = y$. Entsprechendes gilt für die dritte Aussage.
Die Aussage „es gibt genau eine gerade Primzahl" ist gleichbedeutend mit der Aussage „*es gibt eine* gerade Primzahl und *es gibt höchstens eine* gerade Primzahl".

Aufgaben a 1 bis 14

2 Bisher durchgeführte Zahlbereichserweiterungen

A

Natürliche Zahlen sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

(3) *Welche Rechenoperationen sind im Bereich der natürlichen Zahlen uneingeschränkt ausführbar?*

Sind a und b beliebige natürliche Zahlen, so hat die Gleichung

$a + x = b$ in N genau dann eine Lösung, wenn $a \leqq b$ gilt;

$a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ in N genau dann eine Lösung, wenn $a \mid b$ gilt.

Sind die genannten Gleichungen in N lösbar, so sind ihre Lösungen eindeutig bestimmt. Für diese Lösungen schreibt man

$x = b - a$ bzw. $x = b : a$.

Die Lösung der ersten Gleichung führt also auf die Subtraktion (Umkehrung der Addition), die der zweiten auf die Division (Umkehrung der Multiplikation) natürlicher Zahlen.

(4) *Definieren Sie mit Hilfe der Addition natürlicher Zahlen die Kleiner-als-Relation!*

Unter dem **Bereich der natürlichen Zahlen** versteht man die Menge N einschließlich der in N definierten Operationen Addition und Multiplikation sowie der Kleiner-als-Relation. Entsprechendes gilt für die anderen Zahlbereiche.
Um auch die Division (mit Ausnahme der Division durch Null) uneingeschränkt ausführen zu können, wurde der Bereich der natürlichen Zahlen zum **Bereich der gebrochenen Zahlen** erweitert.

(5) *Was versteht man unter der gebrochenen Zahl $\frac{1}{3}$ bzw. unter der gebrochenen Zahl $\frac{8}{7}$?*

Sind a und b beliebige gebrochene Zahlen, so hat die Gleichung

$a + x = b$ in R^* genau dann eine Lösung, wenn $a \leqq b$ gilt;

$a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ in R^* genau eine Lösung.

1 Die Gleichung

$\frac{1}{2} + x = \frac{2}{3}$ hat die Lösung $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{2} + x = \frac{1}{3}$ ist in R^* nicht lösbar, denn es gilt $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

(6) *Wie wurde im Bereich der gebrochenen Zahlen die Kleiner-als-Relation definiert?*

(7) *Ordnen Sie die Zahlen* $\frac{1}{4}$; $0{,}5$; $\frac{3}{7}$; $\frac{27}{8}$; $0{,}\overline{3}$; $5{,}17$; $\frac{131}{17}$; $\frac{33}{100}$; $3{,}7\overline{14}$ *der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!*

(8) *Erläutern Sie, inwiefern der Bereich der gebrochenen Zahlen den Bereich der natürlichen Zahlen als Teilbereich enthält!*

Da die Subtraktion im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht immer ausführbar ist, wurde der Bereich der gebrochenen Zahlen zum **Bereich der rationalen Zahlen** erweitert.

(9) *Was versteht man unter der rationalen Zahl* $+\frac{1}{3}$ *bzw. unter der rationalen Zahl* $-3{,}5$*?*

(10) *Erläutern Sie, inwiefern der Bereich der gebrochenen Zahlen ein Teilbereich des Bereiches der rationalen Zahlen ist!*

Ein weiterer Teilbereich des Bereiches der rationalen Zahlen ist der **Bereich der ganzen Zahlen**. Die Menge G (Menge der ganzen Zahlen) enthält die Zahlen

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$$

Ausführbarkeit der Rechenoperationen in den einzelnen Zahlbereichen				
Bereich	**Addition**	**Multiplikation**	**Subtraktion**	**Division (Divisor $\neq$ 0)**
Bereich der natürlichen Zahlen	uneingeschränkt ausführbar	uneingeschränkt ausführbar	nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer ist als der Minuend	nur dann ausführbar, wenn der Divisor ein Teiler des Dividenden ist
Bereich der gebrochenen Zahlen	uneingeschränkt ausführbar	uneingeschränkt ausführbar	wie im Bereich der natürlichen Zahlen	uneingeschränkt ausführbar
Bereich der ganzen Zahlen	uneingeschränkt ausführbar	uneingeschränkt ausführbar	uneingeschränkt ausführbar	wie im Bereich der natürlichen Zahlen
Bereich der rationalen Zahlen	uneingeschränkt ausführbar	uneingeschränkt ausführbar	uneingeschränkt ausführbar	uneingeschränkt ausführbar

Die Zahlbereichserweiterungen vom Bereich der natürlichen Zahlen zum Bereich der gebrochenen Zahlen bzw. vom Bereich der gebrochenen Zahlen zum Bereich der rationalen Zahlen wurden durchgeführt, weil in dem jeweils vorliegenden Bereich gewisse Rechenoperationen nicht uneingeschränkt ausführbar sind und somit gewisse Probleme der Praxis nicht erfaßt bzw. gelöst werden können. Bei beiden Erweiterungen waren die durchgeführten Einzelschritte zur Konstruktion des neuen Bereiches im wesentlichen die gleichen.

(11) *Stellen Sie die wichtigsten Schritte bei den beiden genannten Erweiterungen zusammen! Vergleichen Sie diese miteinander!*

Aufgaben a 15 bis 30

3 Der Bereich der rationalen Zahlen

Für den Bereich der rationalen Zahlen gelten eine Reihe uns bereits bekannter Aussagen, von denen hier die wichtigsten noch einmal zusammengestellt werden sollen.

A

Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:

(1) Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.

(2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$.

Kommutativgesetze:

(3a) $a + b = b + a$ (3b) $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetze:

(4a) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (4b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Distributivgesetz:

(5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(6a) $a + 0 = a$ (6b) $a \cdot 1 = a$

Monotoniegesetze:

(7a) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$

(7b) Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$

Darüber hinaus gelten:

(8a) Sind a und b beliebige rationale Zahlen, so gibt es stets genau eine rationale Zahl x mit $a + x = b$.

Diese Zahl x ist die Zahl $b - a = b + (-a)$. Die Zahl $(-a)$ heißt die zu der Zahl a *entgegengesetzte Zahl.* Zu jeder rationalen Zahl a gibt es genau eine entgegengesetzte Zahl $(-a)$ mit $a + (-a) = 0$. Die Zahl 0 ist zu sich selbst entgegengesetzt.

(8b) Sind a und b beliebige rationale Zahlen und ist $a \neq 0$, so gibt es stets genau eine rationale Zahl x mit $a \cdot x = b$.

Diese Zahl x ist die Zahl $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$. Die Zahl $\frac{1}{a}$ heißt die zu der Zahl a *reziproke Zahl.* Zu jeder rationalen Zahl a mit $a \neq 0$ gibt es genau eine reziproke Zahl $\frac{1}{a}$ mit $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

(9) Zu jeder rationalen Zahl a gibt es ganze Zahlen p und q mit $q \neq 0$ und $a = \frac{p}{q}$.

(10) Sind a und b beliebige rationale Zahlen, so gilt:
$a \cdot b = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$.

Anmerkung: In der Mathematik wird das Wort „oder" immer in der sogenannten *nichtausschließenden Bedeutung* verwendet.[1] Sind A und B beliebige Aussagen, so ist die Aussage „A oder B" auch dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind. Die Aussage „A oder B" ist also wahr, wenn *mindestens eine* der beiden Aussagen wahr ist. So sind beispielsweise folgende Aussagen wahr.

2 ist eine Primzahl **oder** $3 \cdot 4 = 12$.
2 ist eine Primzahl **oder** $3 \cdot 4 = 10$.

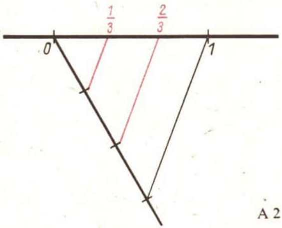
[1] In der Umgangssprache wird das Wort „oder" häufig in der ausschließenden Bedeutung, also im Sinne von „entweder–oder" gebraucht.

Die Aussage „A oder B“ ist also genau dann falsch, wenn beide Aussagen A und B falsch sind.
Will man dagegen zum Ausdruck bringen, daß von zwei gegebenen Aussagen A und B die eine wahr, die andere dagegen falsch ist, so sagt man „entweder A oder B“.

12 *Stellen Sie fest, welche der Aussagen (1) bis (10) für den Bereich der natürlichen Zahlen, den Bereich der ganzen Zahlen und den Bereich der gebrochenen Zahlen gelten!*

Zur geometrischen Veranschaulichung der rationalen Zahlen werden diese oft auf gewisse Punkte einer als **Zahlengeraden** bezeichneten Geraden abgebildet. Zeichnet man auf einer beliebigen Geraden g einen Nullpunkt (Bildpunkt der rationalen Zahl 0) und einen Einheitspunkt (Bildpunkt der rationalen Zahl 1) aus, so läßt sich jede rationale Zahl auf genau einen Punkt dieser Geraden abbilden. Verschiedene rationale Zahlen werden dabei auf verschiedene Punkte abgebildet. Ist $a < b$, so liegt der Bildpunkt von a links von dem Bildpunkt von b. Die Bildpunkte von zwei zueinander entgegengesetzten Zahlen liegen symmetrisch zum Nullpunkt.
Bild A 2 veranschaulicht die Konstruktion der Bildpunkte der Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$.

Aufgaben a 31 bis 39



A 2

4 Rationale Zahlen als Dezimalbrüche

Die rationale Zahl 1,4142 kann man auch wie folgt schreiben.

$$(*) \qquad 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} = \frac{14142}{10000} = \frac{7071}{5000}$$

Eine solche Schreibweise wie (*) ist für jeden endlichen Dezimalbruch möglich.
Umgekehrt läßt sich jede rationale Zahl der Form $\frac{a}{10^n}$ ($a \in G$; $n \in N$; $n > 0$) bzw. jede rationale Zahl, die sich durch einen Bruch darstellen läßt, dessen Nenner nur Potenzen von 2 oder 5 enthält, durch einen endlichen Dezimalbruch angeben. Man erhält den betreffenden Dezimalbruch durch Anwendung des uns bekannten sogenannten Divisionsalgorithmus.

Für die rationale Zahl $\frac{5}{16}$ ergibt das „schriftliche Divisionsverfahren“ mit 5 als Dividend und 16 als Divisor den Dezimalbruch 0,3125.
Für den periodischen Dezimalbruch $0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}$ gibt es keine solche Summendarstellung wie bei endlichen Dezimalbrüchen. Der Dezimalbruch $0{,}\overline{3}$ tritt rein formal auf, wenn man den Divisionsalgorithmus auf die Aufgabe 1 : 3 anzuwenden versucht. In diesem Falle bricht das Divisionsverfahren nie ab. Entsprechend erhält man beispielsweise beim Anwenden des Algorithmus auf

die Aufgabe $(-2):11$ den periodischen Dezimalbruch $-0{,}181818\ldots = -0{,}\overline{18}$. Bei genauerer Betrachtung des Divisionsverfahrens stellt man fest, daß $0{,}\overline{3}$ bzw. $-0{,}\overline{18}$ diejenige Zahl a bzw. diejenige Zahl b ist, für die gilt:

(*)
$$\begin{aligned} 0 &< a < 1 \\ 0{,}3 &< a < 0{,}4 \\ 0{,}33 &< a < 0{,}34 \\ 0{,}333 &< a < 0{,}334 \\ 0{,}3333 &< a < 0{,}3334 \end{aligned}$$
usw.

(**)
$$\begin{aligned} -1 &< b < 0 \\ -0{,}2 &< b < -0{,}1 \\ -0{,}19 &< b < -0{,}18 \\ -0{,}182 &< b < -0{,}181 \\ -0{,}1819 &< b < -0{,}1818 \end{aligned}$$
usw.

Nun wissen wir aber, daß für $a = \frac{1}{3}$ alle Doppelungleichungen der Folge (*) erfüllt sind. Folglich gilt

$$0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}.$$

Entsprechend gilt

$$-0{,}\overline{18} = -\frac{2}{11}.$$

Man kann also ein und dieselbe rationale Zahl auf verschiedene Weise bezeichnen:

1) durch die Bruchschreibweise, z. B. „$\frac{1}{3}$“ oder „$\frac{2}{6}$“ oder „$\frac{3}{9}$“ usw.;

2) durch die Dezimalbruchschreibweise, z. B. „$0{,}\overline{3}$“.

Die Dezimalbruchschreibweise ist für die Praxis besonders wichtig, weil

a) es für jede rationale Zahl genau eine solche Schreibweise gibt,

b) sie uns anschauliche Vorstellungen über die Größenordnung der betreffenden Zahl liefert,

c) sie direkt brauchbare Näherungswerte für das numerische Rechnen, auch in der maschinellen Rechentechnik, ergibt.

Zu beachten ist noch, daß der Divisionsalgorithmus stets **periodische Dezimalbrüche ohne Neunerperiode** oder aber **endliche Dezimalbrüche** liefert.

(13) *Berechnen Sie die folgenden Differenzen!*

a) $\frac{1}{3} - \frac{3}{10}$; $\frac{1}{3} - \frac{33}{100}$; $\frac{1}{3} - \frac{333}{1000}$; $\frac{1}{3} - \frac{3333}{10000}$

b) $\frac{4}{10} - \frac{1}{3}$; $\frac{34}{100} - \frac{1}{3}$; $\frac{334}{1000} - \frac{1}{3}$; $\frac{3334}{10000} - \frac{1}{3}$

Das Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen erfolgt mit Hilfe von Näherungswerten der betreffenden Dezimalbrüche. Beim Rechnen mit Näherungswerten haben wir die Regeln für die Anzahl der zuverlässigen Stellen beim Addieren und Subtrahieren bzw. für die Anzahl der zuverlässigen Ziffern beim Multiplizieren und Dividieren von Dezimalbrüchen zu beachten.

2 Die Summe und das Produkt der Zahlen $0{,}\overline{3}$ und $-0{,}\overline{18}$ sind zu berechnen!

a) Es ist $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ und $-0{,}\overline{18} = -\frac{2}{11}$. Folglich gilt:

$$0,\overline{3} + (-0,\overline{18}) = \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{11}\right) = \frac{5}{33} = 0,\overline{15};$$

$$0,\overline{3} \cdot (-0,\overline{18}) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) = -\frac{2}{33} = -0,\overline{06}.$$

b) Es ist

$0,3 - 0,2 = 0,1$	$0,3 \cdot (-0,2) = -0,06$
$0,33 - 0,19 = 0,14$	$0,33 \cdot (-0,19) \approx -0,063$
$0,333 - 0,182 = 0,151$	$0,333 \cdot (-0,182) \approx -0,0606$
$0,3333 - 0,1819 = 0,1514$	$0,3333 \cdot (-0,1819) \approx -0,06063$
$0,33333 - 0,18182 = 0,15151$	$0,33333 \cdot (-0,18182) \approx -0,060606$
usw.	usw.

Je mehr Stellen der periodischen Dezimalbrüche bei der Rechnung berücksichtigt werden, desto genauer sind die berechneten Näherungswerte.

Aufgabe a 40

5 Dichtheit des Bereiches der rationalen Zahlen

Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger und mit Ausnahme der Null auch einen Vorgänger. Jede ganze Zahl hat sowohl einen Nachfolger als auch einen Vorgänger.
Ist a eine beliebige rationale Zahl, so gibt es keinen Nachfolger und auch keinen Vorgänger von a.

(14) *Geben Sie zehn verschiedene rationale Zahlen an, die zwischen den Zahlen* 0,01 *und* 0,02 *liegen!*

Aus dem Unterricht der vorangegangenen Klassenstufen ist uns bereits bekannt, daß die rationalen Zahlen **überall dicht liegen**, d. h., daß zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen immer noch mindestens eine weitere rationale Zahl liegt. Daraus folgt dann, daß zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen noch beliebig viele weitere rationale Zahlen liegen. Diese Tatsache wollen wir jetzt in dem folgenden Satz formulieren und beweisen.

1 **SATZ: Die rationalen Zahlen liegen bezüglich der Ordnungsrelation dicht.**

Beweis: Es seien a und b beliebige rationale Zahlen mit $a < b$. Es ist zu zeigen, daß es eine rationale Zahl c mit $a < c < b$ gibt.
Aus der Ungleichung $a < b$ folgt auf Grund des Monotoniegesetzes der Addition

(*) $\quad a + a < a + b \quad$ und $\quad a + b < b + b.$

Aus (*) erhält man auf Grund des Monotoniegesetzes der Multiplikation

$$\frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2}$$

bzw. $$a < \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad \frac{a+b}{2} < b.$$

Folglich gilt: $a < \dfrac{a+b}{2} < b.$

Somit hat man eine rationale Zahl $c = \frac{a+b}{2}$ mit der verlangten Eigenschaft gefunden.

Aus Satz A 1 folgt die große Bedeutung der rationalen Zahlen für das praktische Rechnen und das experimentelle Messen. Da die rationalen Zahlen überall dicht liegen, kann man z. B. jede Längenmessung mit jeder gewünschten Genauigkeit durchführen.
Ferner folgt aus Satz A 1, daß die Bildpunkte der rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden überall dicht liegen. Um so erstaunlicher ist es, daß nicht jeder Punkt der Zahlengeraden, wie wir bereits aus dem Unterricht in Klasse 7 wissen, Bildpunkt einer rationalen Zahl ist. Die Existenz solcher Punkte werden wir in der Lerneinheit A 6 beweisen.
Man muß deshalb zwischen den Punkten der Zahlengeraden, die Bildpunkte rationaler Zahlen sind, und solchen, denen keine rationale Zahl zugeordnet ist, unterscheiden. Aus diesem Grunde nennt man die Bildpunkte der rationalen Zahlen **rationale Punkte**, während alle anderen Punkte nichtrationale oder auch **irrationale Punkte** heißen.

(15) *Begründen Sie, daß bereits die Bildpunkte der Zahlen*

a) $\frac{m}{10^n}$ $(m \in G;\ n \in N)$;   b) $\frac{m}{2^n}$ $(m \in G;\ n \in N)$

auf der Zahlengeraden dicht liegen!

Reelle Zahlen

6 Existenz irrationaler Punkte auf der Zahlengeraden

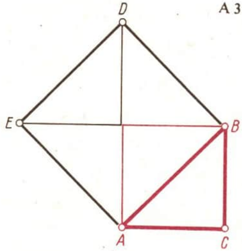
Hätte man nur die rationalen Zahlen zur Verfügung, so könnte man u. a. gewissen Strecken keine Maßzahl für ihre Länge zuordnen.

Bild A 3 zeigt ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ABC, dessen Katheten die Länge 1 haben. Über der Hypotenuse $\overline{AB}$ dieses Dreiecks ist das Quadrat $ABDE$ gezeichnet. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC hat die Maßzahl 0,5. Dann ist $4 \cdot 0{,}5 = 2$ die Maßzahl des Flächeninhaltes des Quadrates $ABDE$. Hätte nun die Quadratseite bzw. die Hypotenuse $\overline{AB}$ bei der verwendeten Längeneinheit – die Kathete ist die Einheitsstrecke – eine rationale Zahl x als Maßzahl ihrer Länge, so müßte für diese rationale Zahl x gelten:

$$x^2 = 2.$$

Wir werden demgegenüber aber den folgenden Satz indirekt beweisen.

A 3



2 **SATZ: Es gibt keine rationale Zahl x, für die $x^2 = 2$ gilt.**

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Zahl

$$x = \frac{p}{q} \quad (p, q \in G;\ q \neq 0),$$

die die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt. Für diese Zahl $\frac{p}{q}$ müßte also gelten:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \text{bzw.}$$

$$(*) \qquad p^2 = 2q^2.$$

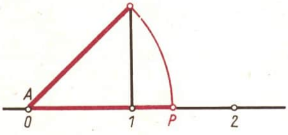
Wir denken uns nun die natürlichen Zahlen p^2 und $2q^2$ in Primfaktoren zerlegt. Der Primfaktor 2 möge m-mal ($m = 0, 1, 2, \ldots$) in der Primzahlzerlegung von p und n-mal ($n = 0, 1, 2, \ldots$) in der Primzahlzerlegung von q vorkommen. Dann würde der Primfaktor 2 auf der linken Seite der Gleichung $(*)$ $2m$-mal und auf der rechten Seite $(2n + 1)$-mal auftreten. Da $2m$ eine gerade Zahl, $2n + 1$ aber eine ungerade Zahl und somit $2m \neq 2n + 1$ ist, würde der Primfaktor 2 in den Primzahlzerlegungen von p^2 und $2q^2$ in verschiedener Anzahl auftreten. Das ist aber nicht möglich, weil sich jede natürliche Zahl eindeutig in Primfaktoren zerlegen läßt.
Damit ist die Annahme, es gäbe eine rationale Lösung der Gleichung $x^2 = 2$, widerlegt.
Folglich hat die Hypotenuse des Dreiecks ABC keine rationale Maßzahl für ihre Länge.

Es lassen sich beliebig viele andere Gleichungen angeben, die im Bereich der rationalen Zahlen nicht lösbar sind.

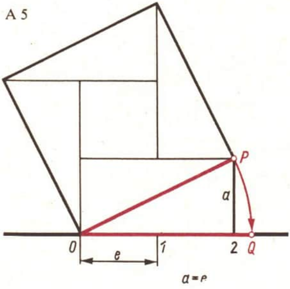
16 a) *Wiederholen Sie, was Sie über indirekte Beweise in Klasse 8 kennengelernt haben!*
b) *Beweisen Sie, daß die Gleichung $x^2 = 5$ keine rationale Lösung hat!*

Wir zeichnen über der Einheitsstrecke $\overline{01}$ der Zahlengeraden das in Bild A 3 betrachtete Dreieck ABC, und zwar so, daß die Kathete $\overline{AC}$ mit der Einheitsstrecke zusammenfällt; vgl. Bild A 4. Um den Punkt O zeichnen wir mit dem Radius $\overline{AB}$ den Kreis, der die Zahlengerade in P schneidet. Da die Länge der Strecke $\overline{AP} = \overline{AB}$ keine rationale Maßzahl hat, kann dem Punkt P keine rationale Zahl zugeordnet werden. Damit ist die Existenz eines irrationalen Punktes auf der Zahlengeraden nachgewiesen.
Auf der Zahlengeraden liegen unendlich viele irrationale Punkte. Das ist recht erstaunlich, da bekanntlich bereits die rationalen Punkte auf der Zahlengeraden überall dicht liegen.

A 4



A 5



A

(17) *Begründen Sie, daß folgende Punkte irrationale Punkte sind!*

a) *Der Punkt $\overline{P}$, den man durch Spiegelung des Punktes P des Bildes A 4 am Nullpunkt erhält*

b) *Die Punkte P'; P''; P'''; ..., die man durch wiederholtes Abtragen der Strecke $\overline{OP}$ des Bildes A 4 von P aus auf der Zahlengeraden erhält*

(18) *Zeigen Sie, daß der in Bild A 5 konstruierte Punkt Q ein irrationaler Punkt ist!*

Aufgaben a 41 bis 45

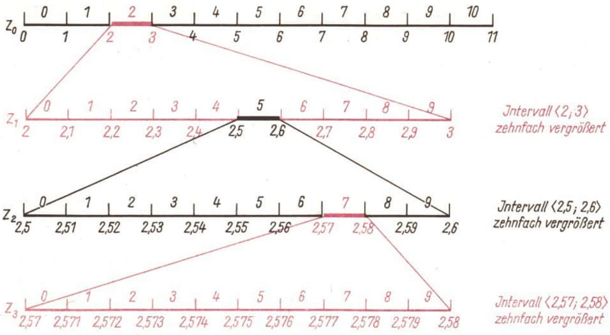
7 Arithmetische Beschreibung von Punkten auf der Zahlengeraden

Es gibt Gleichungen, z. B. $x^2 = 2$, $x^2 = 5$, $x^3 = 2$, die im Bereich der rationalen Zahlen keine Lösung haben. Die Frage nach der Lösbarkeit der Gleichung $x^2 = 2$ ergab sich aus der Frage, ob die Hypotenuse des im Bild A 3 betrachteten Dreiecks *ABC* eine Maßzahl für ihre Länge hat.
Wir stellen uns nun die Aufgabe, einen Zahlenbereich zu konstruieren, der den Bereich der rationalen Zahlen als Teilbereich enthält und in dem jede Gleichung $x^n = a$ $(n \in N;\ n > 1;\ a \geqq 0)$ lösbar ist. Die Zahlen des neuen Bereiches sollen sich eineindeutig auf die Punkte der Zahlengeraden abbilden lassen, so daß jede Strecke eine Maßzahl für ihre Länge erhält.
Wir beginnen damit, **die Lage irrationaler Punkte auf der Zahlengeraden rein arithmetisch zu beschreiben.**
Zunächst wollen wir nur solche Punkte betrachten, die rechts vom Nullpunkt liegen.
Da schon die Bildpunkte der Zahlen

$$\frac{m}{10};\ \frac{m}{10^2};\ \frac{m}{10^3};\ \frac{m}{10^4};\ \ldots;\ \frac{m}{10^n};\ \ldots \quad (m, n \in G;\ n > 0)$$

auf der Zahlengeraden dicht liegen (vgl. Auftrag A 15a), erhalten wir mit wachsendem *n*, d. h. durch die uns bereits aus dem Unterricht der Klasse 7 bekannte „fortgesetzte Zehnteilung", ein immer enger werdendes „Netz" auf der Zahlengeraden, mit dem wir jeden Punkt „einfangen" können. Wir könnten an Stelle der Zahl 10 auch eine beliebige andere natürliche Zahl wählen (vgl. Auftrag A 15b), doch wollen wir wegen der Bedeutung des Dezimalsystems der Zahl 10 den Vorzug geben.
Für unsere weiteren Betrachtungen empfiehlt es sich, folgende Vereinbarung zu treffen:
Sind *a* und *b* beliebige rationale Zahlen mit $a < b$, so nennen wir die Menge der rationalen Zahlen *x* mit $a \leqq x \leqq b$ das **abgeschlossene Intervall** $\langle a;\ b\rangle$. Der Einfachheit halber nennen wir auch die Abbildung eines Intervalls $\langle a;\ b\rangle$ auf der Zahlengeraden, also die **Strecke**, deren Endpunkte die rationalen Punkte *a* und *b* sind, ein Intervall.
Es sei nun Z_0 die Einteilung auf der Zahlengeraden, die wir durch die Bildpunkte der Zahlen 0; 1; 2; 3; ... erhalten. Jede Strecke auf der Zahlengeraden, die von zwei solchen aufeinanderfolgenden Punkten begrenzt wird, hat die Länge 1. Diese Intervalle numerieren wir folgendermaßen; vgl. Bild A 6.

Intervall	⟨0; 1⟩	⟨1; 2⟩	⟨2; 3⟩	⟨3; 4⟩	⟨4; 5⟩	...
Nummer	0	1	2	3	4	...



A 6

Bei der *ersten Zehnteilung* Z_1 wird jedes der bei Z_0 entstehenden Intervalle in zehn gleich lange Teilintervalle zerlegt. Die so entstehenden Teilintervalle mit der Länge 0,1 werden jeweils mit den Zahlen von 0 bis 9 numeriert. Betrachten wir z. B. das Intervall $\langle 2; 3\rangle$, so erhalten wir durch Z_1 aus diesem Intervall zehn Teilintervalle, deren Numerierung aus der folgenden Übersicht zu entnehmen ist; vgl. Bild A 6.

Intervall	⟨2,0; 2,1⟩	⟨2,1; 2,2⟩	⟨2,2; 2,3⟩	...	⟨2,9; 3,0⟩
Nummer	0	1	2	...	9

Bei der *zweiten Zehnteilung* Z_2 wird nun wiederum jedes der bei der Teilung Z_1 entstandenen Intervalle in zehn gleich lange Teilintervalle zerlegt. Die so entstehenden Teilintervalle mit der Länge 0,01 werden wieder jeweils mit den Zahlen von 0 bis 9 numeriert. Die bei der Teilung Z_2 z. B. aus dem Intervall $\langle 2{,}5; 2{,}6\rangle$ entstehenden Teilintervalle numerieren wir wie folgt; vgl. Bild A 6.

Intervall	⟨2,50; 2,51⟩	⟨2,51; 2,52⟩	...	⟨2,59; 2,60⟩
Nummer	0	1	...	9

Bei der *dritten Zehnteilung* Z_3 erhalten wir Teilintervalle der Länge 0,001. Bei der *n-ten Zehnteilung* Z_n entstehen Teilintervalle der Länge $\frac{1}{10^n}$. Nach jeder Teilung werden die entstandenen Teilintervalle jeweils von 0 bis 9 numeriert. Mit dieser fortgesetzten Zehnteilung können wir die Lage jedes Punktes auf der Zahlengeraden so genau, wie wir nur wollen, beschreiben, wenn wir für jede Teilung Z_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) jeweils die Nummer des betreffenden Intervalls angeben, in dem der gegebene Punkt liegt.

Aufgabe a 46

Die Lage des irrationalen Punktes P aus Bild A 4 soll nach dem eben geschilderten Verfahren arithmetisch beschrieben werden.

(19) *Begründen Sie die folgende Aussage!*
Ist r eine beliebige positive rationale Zahl mit $r^2 < 2$ bzw. $r^2 > 2$, so liegt der Bildpunkt von r auf der Zahlengeraden links bzw. rechts von dem irrationalen Punkt P aus Bild A 4.

Bild A 4 zeigt, daß der irrationale Punkt P zwischen den Bildpunkten der Zahlen 1 und 2 liegt. Wir sagen dafür kürzer: P liegt im Intervall $I_0 = \langle 1; 2 \rangle$ mit der Intervallnummer 1.
Bei der Teilung Z_1 wird das Intervall $\langle 1; 2 \rangle$ in die Teilintervalle

$$\langle 1{,}0; 1{,}1 \rangle, \langle 1{,}1; 1{,}2 \rangle, \langle 1{,}2; 1{,}3 \rangle, \ldots, \langle 1{,}9; 2{,}0 \rangle$$

zerlegt. Daraus ermitteln wir dasjenige Intervall $I_1 = \langle x_1; y_1 \rangle$, für das $x_1^2 < 2 < y_1^2$ gilt. Es ist dies das Intervall $\langle 1{,}4; 1{,}5 \rangle$, also das Intervall mit der Nummer 4, denn es ist

$$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2,$$

d. h., der Bildpunkt der Zahl 1,4 liegt links, der Bildpunkt der Zahl 1,5 liegt rechts vom irrationalen Punkt P.
Aus dem Intervall $I_1 = \langle 1{,}4; 1{,}5 \rangle$ entstehen bei der Teilung Z_2 die Intervalle

$$\langle 1{,}40; 1{,}41 \rangle, \langle 1{,}41; 1{,}42 \rangle, \langle 1{,}42; 1{,}43 \rangle, \ldots, \langle 1{,}49; 1{,}50 \rangle.$$

Daraus ermitteln wir wieder dasjenige Intervall $I_2 = \langle x_2; y_2 \rangle$, für das $x_2^2 < 2 < y_2^2$ gilt. Es ist dies $I_2 = \langle 1{,}41; 1{,}42 \rangle$, also das Intervall mit der Nummer 1, denn es gilt:

$$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 = 1{,}42^2.$$

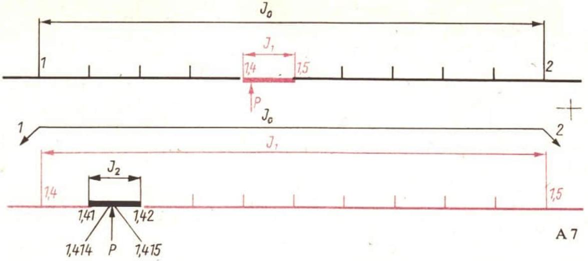
Das Verfahren läßt sich beliebig weit fortsetzen, ohne daß es jemals abbricht. Nach weiteren Schritten erhalten wir die folgende Übersicht.

Z_n	P liegt im Intervall	Begründung	Länge des Intervalls	Intervallnummer
Z_0	$\langle 1; 2 \rangle$	$1^2 < 2 < 2^2$	1	$a_0 = 1$
Z_1	$\langle 1{,}4; 1{,}5 \rangle$	$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$	0,1	$a_1 = 4$
Z_2	$\langle 1{,}41; 1{,}42 \rangle$	$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$	0,01	$a_2 = 1$
Z_3	$\langle 1{,}414; 1{,}415 \rangle$	$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$	0,001	$a_3 = 4$
Z_4	$\langle 1{,}4142; 1{,}4143 \rangle$	$1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2$	0,0001	$a_4 = 2$
Z_5	$\langle 1{,}41421; 1{,}41422 \rangle$	$1{,}41421^2 < 2 < 1{,}41422^2$	0,00001	$a_5 = 1$
Z_6	$\langle 1{,}414213; 1{,}414214 \rangle$	$1{,}414213^2 < 2 < 1{,}414214^2$	0,000001	$a_6 = 3$
usw.	usw.	usw.	usw.	usw.

Wir erhalten eine Folge

$(*)$ $\quad I_0; I_1; I_2; I_3; I_4; \ldots$

„ineinanderliegender“ oder wie man auch sagt „ineinandergeschachtelter“ Intervalle (Spalte 2 der Tabelle), deren Längen (Spalte 4 der Tabelle) kleiner werden als jede der Zahlen $\frac{1}{10^n}$. Alle Intervalle der Folge $(*)$ enthalten als gemeinsamen Punkt den Punkt P; vgl. Bild A 7.



A 7

(20) *Begründen Sie, daß es keinen von P verschiedenen Punkt geben kann, der allen Intervallen der Folge* (∗) *angehört!*

Durch die Folge (∗) wird *auf der Zahlengeraden* also genau ein *Punkt*, nämlich der irrationale Punkt P, bestimmt. Es gibt aber (vorerst) keine *Zahl*, die allen Intervallen der Folge angehört und dem Punkt P zugeordnet werden könnte.
Nun liefert aber die Folge (∗) noch zu viele Angaben über die Lage des Punktes P. Da die Folge (∗) bereits eineindeutig durch die bei der fortgesetzten Zehnteilung entstehende Folge der Intervallnummern (Spalte 5 der Tabelle) bestimmt ist, genügt es, wenn wir die Folge der Intervallnummern, also die Folge

(∗∗) 1; 4; 1; 4; 2; 1; 3; ...

kennen.

Die Lage des Punktes P auf der Zahlengeraden wird somit durch eine Folge von natürlichen Zahlen a_n mit $0 \leqq a_n \leqq 9$ arithmetisch beschrieben.

(21) *Geben Sie die ersten fünf Glieder einer durch fortgesetzte Zehnteilung entstehenden Folge von natürlichen Zahlen a_n, durch die der im Auftrag A 18 gegebene irrationale Punkt Q bestimmt wird!*

Eine Folge $I_0; I_1; I_2; I_3; \ldots$ von abgeschlossenen Intervallen, bei der jedes Intervall alle folgenden als Teilintervalle enthält und deren Längen mit wachsendem n kleiner werden als jede der Zahlen $\frac{1}{10^n}$, wollen wir eine **Intervallschachtelung** oder kurz eine **Schachtelung** nennen. Auch die Abbildung einer Schachtelung auf der Zahlengeraden wollen wir der Kürze wegen eine Schachtelung nennen.

(22) *Begründen Sie, daß jede Schachtelung auf der Zahlengeraden höchstens einen Punkt enthalten kann!*

Daß jede Schachtelung auf der Zahlengeraden einen Punkt enthält, ist anschaulich einleuchtend, d. h., unsere anschaulichen Vorstellungen von einer Geraden legen dies nahe. Wir werden deshalb für alle weiteren Betrachtungen die Gültigkeit des folgenden Grundsatzes voraussetzen.

3 **Jede auf der Zahlengeraden gegebene Schachtelung enthält genau einen Punkt.**

* Die Gültigkeit dieses Satzes wurde zuerst von den Mathematikern GEORG CANTOR (1845–1918) und RICHARD DEDEKIND (1831–1916) ausdrücklich festgestellt. DEDEKIND selbst schreibt dazu in seiner 1872 erschienenen Schrift „Stetigkeit und Irrationale Zahlen“:

A

„Es ist mir sehr lieb, wenn jedermann das obige Prinzip so einleuchtend findet und so übereinstimmend mit seinen Vorstellungen von einer Linie; denn ich bin außerstande, irgendeinen Beweis für seine Richtigkeit beizubringen, und niemand ist dazu imstande."

Nach diesem Grundsatz wird durch die oben angegebene Folge (∗∗) der irrationale Punkt P des Bildes A 4 eindeutig bestimmt. Entsprechend wird der im Auftrag A 18 gegebene irrationale Punkt Q durch die Folge

$$2;\ 2;\ 3;\ 6;\ 0;\ 6;\ 7;\ 9;\ 7;\ \ldots$$

eindeutig festgelegt.

(23) *Geben Sie die ersten zehn Intervalle einer Schachtelung an, in denen der durch die Folge* 19; 1; 5; 1; 1; 5; 1; 1; 1; 5; 1; ... *gekennzeichnete Punkt liegt!*

Durch das Verfahren der fortgesetzten Zehnteilung haben wir eine Möglichkeit erhalten, die Lage *irrationaler Punkte* der Zahlengeraden durch gewisse Folgen natürlicher Zahlen arithmetisch zu beschreiben. Auch *rationale Punkte* lassen sich auf diese Art beschreiben.

3 Die Lage des rationalen Bildpunktes der Zahl $\frac{1}{3}$ läßt sich wie folgt beschreiben.

Z_n	Der Bildpunkt von $\frac{1}{3}$ liegt im Intervall	Begründung	Länge des Intervalls	Intervall-nummer
Z_0	$\langle 0;\ 1 \rangle$	$0 < \frac{1}{3} < 1$	1	$a_0 = 0$
Z_1	$\langle 0{,}3;\ 0{,}4 \rangle$	$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4$	0,1	$a_1 = 3$
Z_2	$\langle 0{,}33;\ 0{,}34 \rangle$	$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34$	0,01	$a_2 = 3$
Z_3	$\langle 0{,}333;\ 0{,}334 \rangle$	$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334$	0,001	$a_3 = 3$
Z_4	$\langle 0{,}3333;\ 0{,}3334 \rangle$	$0{,}3333 < \frac{1}{3} < 0{,}3334$	0,0001	$a_4 = 3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Wir erhalten die periodische Folge 0; 3; 3; 3; 3; 3; ..., die die Lage des Bildpunktes der Zahl $\frac{1}{3}$ eindeutig festlegt.

(24) *Geben Sie eine Folge an, durch die der Bildpunkt der Zahl* $\frac{3}{22}$ *bestimmt wird!*

Aufgaben a 47 bis 49

9 Unendliche Dezimalbrüche

Durch fortgesetzte Zehnteilung können alle Punkte der Zahlengeraden eingeschachtelt werden. Jedem Punkt wird dabei eine Zahlenfolge zugeordnet, die ihn eindeutig festlegt. Bei dieser arithmetischen Beschreibung von Punkten, die rechts vom Nullpunkt liegen, treten nur solche Folgen

$$a_0;\ a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ \ldots$$

auf, für die gilt:

(1) Das Anfangsglied a_0 ist eine beliebige natürliche Zahl;

(2) Für alle n mit $n \geqq 1$ gilt $0 \leqq a_n \leqq 9$.

Eine solche Folge schreiben wir kürzer in der Form

$$a_0,\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, \ldots$$

und nennen sie einen **positiven unendlichen Dezimalbruch.** Die abgekürzte Schreibweise führt nicht zu Mißverständnissen, weil nur das Anfangsglied eine *beliebige* natürliche Zahl sein kann, während alle anderen Folgenglieder *einstellige* natürliche Zahlen sind. Dezimalbrüche, in denen Perioden auftreten, heißen **periodische Dezimalbrüche.**
Nach dem Grundsatz A 3 legt jede Folge, die den obengenannten Bedingungen (1) und (2) genügt, genau einen Punkt der Zahlengeraden fest. Die Zuordnung

$$\text{Folge} \longrightarrow \text{Punkt}$$

ist also eindeutig. Wir fragen nun, ob auch die Zuordnung

$$\text{Punkt} \longrightarrow \text{Folge}$$

eindeutig ist, ob also zu jedem Punkt der Zahlengeraden *nur eine* Folge gehört, die den obengenannten Bedingungen (1) und (2) genügt. Das ist bei gewissen rationalen Punkten nicht der Fall, wie Beispiel A 4 zeigt.

4 Gegeben seien die Folgen

(1) 5; 3; 9; 9; 9; … und (2) 5; 4; 0; 0; 0; …

bzw. in der Kurzschreibweise

5, 3 9 9 9 … und 5, 4 0 0 0 …

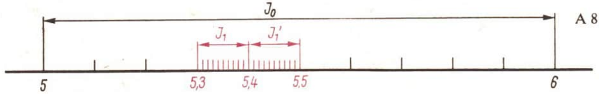
Für alle n mit $n \geqq 2$ soll gelten bei der Folge (1): $a_n = 9$ und
bei der Folge (2): $a_n = 0$.

Die Folge (1)		Die Folge (2)

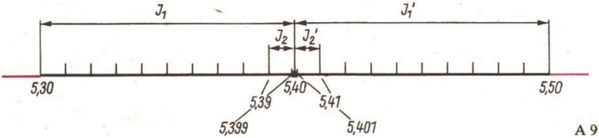
legt denjenigen Punkt fest, der in allen Intervallen der Intervallfolge

$\langle 5;\, 6\rangle$		$\langle 5;\, 6\rangle$
$\langle 5{,}3;\, \mathbf{5{,}4}\rangle$		$\langle \mathbf{5{,}4};\, 5{,}5\rangle$
$\langle 5{,}39;\, \mathbf{5{,}40}\rangle$		$\langle \mathbf{5{,}40};\, 5{,}41\rangle$
$\langle 5{,}399;\, \mathbf{5{,}400}\rangle$		$\langle \mathbf{5{,}400};\, 5{,}401\rangle$
$\langle 5{,}3999;\, \mathbf{5{,}4000}\rangle$	usw.	$\langle \mathbf{5{,}4000};\, 5{,}4001\rangle$

liegt; vgl. Bilder A 8 und A 9.



A 8



A 9

A

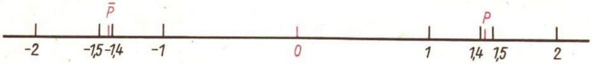
Beide Intervallfolgen enthalten als gemeinsamen Punkt den rationalen Punkt 5,4. Damit ist gezeigt, daß die gegebenen Folgen (1) und (2) den gleichen Punkt bestimmen. Da nun aber zur eindeutigen Festlegung des Punktes 5,4 eine der beiden Folgen ausreicht, wollen wir *vereinbaren*, dem Punkt 5,4 nur die Folge (2) zuzuordnen, d. h., wir schließen die Folge (1) aus unseren Betrachtungen aus.[1]
Analog verfahren wir immer dann, wenn ein Punkt bei der fortgesetzten Zehnteilung gemeinsamer Endpunkt zweier benachbarter Intervalle ist. Dieser Fall kann nur bei gewissen rationalen Punkten eintreten.
Mit dieser Festlegung schließen wir also alle Folgen, bei denen von einer gewissen Stelle an alle Glieder gleich Neun sind, d. h. alle Dezimalbrüche mit „Neunerperiode", aus.

Somit erhalten wir eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Zahlengeraden, die rechts vom Nullpunkt liegen, und den positiven unendlichen Dezimalbrüchen ohne Neunerperiode.

Aufgaben a 50 und 51

10

25 *Geben Sie die ersten sechs Glieder der durch fortgesetzte Zehnteilung entstehenden Intervallfolge an, durch die der im Auftrag A 17 a) gegebene irrationale Punkt $\overline{P}$ bestimmt wird; vgl. Bild A 10.*



A 10

Auch Punkte der Zahlengeraden, die links vom Nullpunkt liegen, lassen sich arithmetisch durch Folgen beschreiben.

5 Der irrationale Punkt P des Bildes A 4 wird durch die Folge 1,414213... eineindeutig festgelegt. Spiegeln wir den Punkt P am Nullpunkt, so erhalten wir den irrationalen Punkt $\overline{P}$. Dem Punkt $\overline{P}$ ordnen wir die Folge

$$-(1{,}414213\ldots)$$

zu, für die wir kürzer

$$-1{,}414213\ldots$$

schreiben. Diese Folge enthält in Form des Minuszeichens eine zusätzliche Angabe, die zum Ausdruck bringen soll, daß der durch diese Folge eineindeutig festgelegte Punkt links vom Nullpunkt liegt. Die natürlichen Zahlen 1; 4; 1; 4; 2; 1; 3; ..., die als Glieder in dieser Folge auftreten, bedeuten auch hier die Intervallnummern der bei der fortgesetzten Zehnteilung entstehenden Teilintervalle, in denen $\overline{P}$ liegt, wenn man nach jeder Teilung Z_n ($n \in N$) die entstehenden Teilintervalle jeweils *von rechts nach links* numeriert.
Entsprechend kann jeder Punkt der Zahlengeraden, der links vom Nullpunkt liegt, durch eine Folge eineindeutig festgelegt werden.
Es sei Q ein beliebiger Punkt der Zahlengeraden, der links vom Nullpunkt liegt und $\overline{Q}$ sein Spiegelbild am Nullpunkt. Dem Punkt $\overline{Q}$ ist eineindeutig eine

[1] Einen sachlichen Grund für diese Festlegung gibt es nicht. Man könnte genauso auch die Folge (2) ausschließen oder aber auch die Folgen (1) und (2) miteinander identifizieren.

Folge (ein positiver unendlicher Dezimalbruch ohne Neunerperiode)

$$a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

zugeordnet. Dem Punkt Q wird dann die Folge

$$-a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

eineindeutig zugeordnet. Solche Folgen $-a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ mit $a_0 \in N$ und $0 \leqq a_n \leqq 9$ für alle $n \geqq 1$ nennen wir **negative unendliche Dezimalbrüche.** Positive und negative unendliche Dezimalbrüche sowie den unendlichen Dezimalbruch $0{,}0000\ldots = 0$ nennen wir kurz **unendliche Dezimalbrüche.**

(26) *Durch welche Folgen werden die folgenden rationalen Punkte beschrieben?*

a) $\frac{7}{3}$ und $-\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{22}$ und $-\frac{3}{22}$ c) 2,358 und $-2{,}358$

Aufgaben a 52 und 53

11 Definition der reellen Zahlen

Durch die bisher getroffenen Festlegungen erhalten wir eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Zahlengeraden und den unendlichen Dezimalbrüchen ohne Neunerperiode. Es liegt also nahe, diese unendlichen Dezimalbrüche ohne Neunerperiode als „neue" Zahlen aufzufassen.

4 **DEFINITION: Eine reelle Zahl ist ein *unendlicher Dezimalbruch* ohne Neunerperiode.**

Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit „P".
Die periodischen unendlichen Dezimalbrüche (z. B. 0,3333...; 0,454545...; 2,0000...; $-1{,}360000\ldots$) beschreiben rationale Punkte. Diese reellen Zahlen heißen **rationale reelle Zahlen.**
Die nichtperiodischen unendlichen Dezimalbrüche beschreiben irrationale Punkte. Diese reellen Zahlen heißen **irrationale reelle Zahlen.**
Zur Bezeichnung einer gegebenen reellen Zahl verwendet man entweder ein genügend langes Anfangsstück des betreffenden Dezimalbruches mit drei Pünktchen, z. B. 1,414213..., oder auch andere Symbole, z. B. „π" oder „$\sqrt{2}$".[1]
Ein periodischer Dezimalbruch der Form $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 0 0 0 \ldots$ heißt ein **endlicher Dezimalbruch** und wird zur Vereinfachung $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ geschrieben, z. B.: $2{,}0000\ldots = 2$; $-1{,}360000\ldots = -1{,}36$. Auch für die anderen periodischen Dezimalbrüche verwenden wir abgekürzte Schreibweisen, z. B.:

$$0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}; \quad 0{,}454545\ldots = 0{,}\overline{45}.$$

Beachten Sie! Die reelle Zahl $0{,}\overline{3}$ ist begrifflich etwas ganz anderes als die rationale bzw. gebrochene Zahl $0\overline{3}$,. Die *reelle* Zahl $0{,}\overline{3}$ ist eine Folge von natürlichen Zahlen, nämlich diejenige, die die Lage des rationalen Punktes $\frac{1}{3}$ beschreibt. Die *gebrochene* Zahl $0{,}\overline{3}$ war eingeführt worden als eine Klasse von Brüchen, nämlich als diejenige Klasse, in der alle Brüche liegen, die man durch Erweitern von $\frac{1}{3}$ erhält. Bei der geometrischen Deutung (Veranschaulichung auf der Zahlengeraden) erhält man in beiden Fällen den gleichen Punkt.

[1] Nachdem in der Menge P eine Multiplikation definiert ist, kann man zeigen, daß für die reelle Zahl $a = 1{,}414213\ldots$ gilt: $a^2 = 2$. Deshalb bezeichnet man diese Zahl mit „$\sqrt{2}$".

12 Ordnung der reellen Zahlen

A

Unsere Aufgabe besteht nun darin, in der Menge P eine Ordnungsrelation sowie Operationen der Addition und Multiplikation so zu erklären, daß der Bereich der rationalen Zahlen als Teilbereich des neuen Zahlenbereichs auftritt.
Wir wollen zunächst erklären, wie man in der Menge P eine Ordnungsrelation festlegt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf positive reelle Zahlen.

Die reellen Zahlen

$$a = a_0, a_1a_2a_3\ldots \quad \text{und} \quad b = b_0, b_1b_2b_3\ldots$$

sind genau dann gleich, wenn gilt:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3,\ \ldots$$

Für die reellen Zahlen

$$a = 1{,}0123456789101 11213\ \ldots \quad \text{und}$$

$$b = 1{,}0123456789102 11213\ \ldots$$

gilt $a \neq b$, denn die Glieder a_{13} und b_{13} sind voneinander verschieden. Sind also $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ und $b = b_0, b_1b_2b_3\ldots$ beliebige reelle Zahlen mit $a \neq b$, so müssen sie sich an irgendeiner Stelle unterscheiden, d. h., es muß eine natürliche Zahl k mit $a_k \neq b_k$ existieren.

Sind a und b verschiedene positive reelle Zahlen und ist k diejenige natürliche Zahl, für die erstmalig $a_k \neq b_k$ gilt, so soll $a < b$ ($b > a$) genau dann gelten, wenn $a_k < b_k$ ist.

$a < b$ bedeutet geometrisch, daß der durch a bestimmte Punkt der Zahlengeraden links von dem durch b bestimmten Punkt liegt.
Diese Festlegung verträgt sich also mit der bereits für rationale Zahlen definierten Ordnungsrelation, denn von zwei verschiedenen rationalen Zahlen wurde diejenige kleiner genannt, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.
Für die oben angegebenen Zahlen a und b gilt $a < b$, denn für die 13. Stelle, an der sich die Dezimalbrüche erstmalig voneinander unterscheiden, gilt $a_{13} < b_{13}$.

6

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots < 2{,}2360679\ldots = \sqrt{5}$$

$$1{,}4142 = 1{,}4142000\ldots < 1{,}4142135\ldots = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots < 1{,}4143000\ldots = 1{,}4143$$

Für jede positive reelle Zahl a gilt $0 < a$.

Wie die für die positiven reellen Zahlen erklärte Ordnungsrelation auf alle reellen Zahlen ausgedehnt wird, zeigen folgende Beispiele. Auch für die negativen reellen Zahlen soll gelten, daß der kleineren der weiter links liegende Punkt der Zahlengeraden zugeordnet ist.

7

$$-2{,}715354555657\ldots < 0$$

$$-3{,}17117111711117\ldots < -3{,}17117011711117\ldots$$

$$-0{,}33333\ldots < 0{,}10000\ldots$$

Aus der Definition der Ordnungsrelation für reelle Zahlen folgt:

(1) Für alle a und b gilt: Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$;

(2) für alle a, b und c gilt: Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$.

Jeder rationalen reellen Zahl a läßt sich eineindeutig eine rationale Zahl $\bar{a} = \frac{p}{q}\,(p, q \in G;\ q \neq 0)$ zuordnen. Dabei ist $\bar{a}$ diejenige rationale Zahl, deren Dezimalbruchdarstellung, die man durch Anwenden des Divisionsalgorithmus auf die Aufgabe $p : q$ erhält, formal mit dem Dezimalbruch a übereinstimmt.
Sind a und b verschiedene rationale reelle Zahlen und $\bar{a}$ und $\bar{b}$ die ihnen eineindeutig zugeordneten rationalen Zahlen, so gilt:
Es ist $a < b$ genau dann, wenn $\bar{a} < \bar{b}$.

8

$$\begin{array}{ccc} 0{,}50000\ldots & < & 0{,}51000\ldots \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{1}{2} & < & \frac{51}{100} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0{,}33333\ldots & < & 0{,}33444\ldots \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{1}{3} & < & \frac{301}{900} \end{array}$$

Beim Vergleichen können wir demnach die rationalen reellen Zahlen durch die rationalen Zahlen ersetzen. Das macht es auch möglich, irrationale Zahlen durch rationale Zahlen anzunähern. So gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} 1{,}4 &< \sqrt{2} < 1{,}5 \\ 1{,}41 &< \sqrt{2} < 1{,}42 \\ 1{,}414 &< \sqrt{2} < 1{,}415 \\ 1{,}4142 &< \sqrt{2} < 1{,}4143 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Wir können also jede irrationale *Zahl* in immer kleiner werdende Intervalle mit rationalen Endpunkten einschachteln.
Wenn wir einen unendlichen Dezimalbruch an irgendeiner Stelle abbrechen, so erhalten wir für die betreffende Zahl einen rationalen Näherungswert. Setzen wir z. B. $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, so ist der Fehler dieses Näherungswertes kleiner als 0,0001, denn die beiden Näherungswerte 1,4142 und 1,4143 unterscheiden sich um 0,0001.

Aufgaben a 54 bis 57

13 Rechnen mit reellen Zahlen

Auf die Definition der Rechenoperationen und den Nachweis der aus engeren Zahlbereichen bekannten Rechengesetze müssen wir hier verzichten. Wir wollen nur an einem Zahlenbeispiel erläutern, wie man die Summe zweier gegebener reeller Zahlen erhält.

9 Die Summe der reellen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ ist zu berechnen. Es ist

$$\begin{array}{lcl} 1 < \sqrt{2} < 2 & & 2 < \sqrt{5} < 3 \\ 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 & & 2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3 \\ 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 & & 2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 \\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 & & 2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237 \\ 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 & & 2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361 \\ 1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}42422 & \text{usw.} & 2{,}23606 < \sqrt{5} < 2{,}23607 \end{array}$$

Unter der Summe $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ versteht man diejenige reelle Zahl x, für die gilt:

$$1 + 2 = 3 < x < 5 = 2 + 3$$
$$1{,}4 + 2{,}2 = 3{,}6 < x < 3{,}8 = 1{,}5 + 2{,}3$$
$$1{,}41 + 2{,}23 = 3{,}64 < x < 3{,}66 = 1{,}42 + 2{,}24$$
$$1{,}414 + 2{,}236 = 3{,}650 < x < 3{,}652 = 1{,}415 + 2{,}237$$
$$1{,}4142 + 2{,}2360 = 3{,}6502 < x < 3{,}6504 = 1{,}4143 + 2{,}2361$$
$$1{,}41421 + 2{,}23606 = 3{,}65027 < x < 3{,}65029 = 1{,}41422 + 2{,}23607$$

usw.

Daß es genau eine reelle Zahl x gibt, die alle diese Doppelungleichungen erfüllt, kann man sich etwa wie folgt klarmachen. Die Folge der Intervalle $\langle 3; 5\rangle$, $\langle 3{,}6; 3{,}8\rangle$, $\langle 3{,}64; 3{,}66\rangle$, $\langle 3{,}650; 3{,}652\rangle$, ... ist eine Intervallschachtelung, die auf der Zahlengeraden genau einen Punkt bestimmt. Jedem Punkt der Zahlengeraden ist genau eine reelle Zahl zugeordnet. Folglich gibt es genau eine reelle Zahl x, die alle Doppelungleichungen erfüllt.

Diese Zahl $x = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ kann mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnet werden. Bei der im Beispiel A 9 durchgeführten Rechnung erhalten wir

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = 3{,}6502\ldots,$$

d. h., die ersten vier Dezimalstellen der Zahl $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ sind damit eindeutig bestimmt.

Das Beispiel A 9 zeigt uns, wie man bei der Definition der Rechenoperationen, die sich nach den Bedürfnissen der Rechenpraxis richten, vorgeht. Wir können nur mitteilen, daß allgemein die Summe $a + b$ gegebener reeller Zahlen a und b so festgelegt wird, daß hinlänglich gute Näherungswerte der Summanden a und b auch beliebig gute Näherungswerte der Summe $a + b$ ergeben. Entsprechendes gilt für die Operationen Subtraktion, Multiplikation und Division.

Beim Rechnen können wir also statt mit irrationalen Zahlen mit rationalen Näherungswerten für die betreffenden Zahlen arbeiten.

Ersetzt man die durch Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division zu verknüpfenden reellen Zahlen durch hinlänglich gute rationale Näherungswerte, so kann man das Resultat der Verknüpfung mit jeder gewünschten Genauigkeit erhalten.

10 Die Differenz $\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{5} + (-\sqrt{2})$ ist auf vier Dezimalstellen genau zu berechnen.

Es ist

$$\begin{array}{rcl} 1{,}41421 < & \sqrt{2} & < 1{,}41422 \\ 2{,}23606 < & \sqrt{5} & < 2{,}23607 \\ -1{,}41422 < & -\sqrt{2} & < -1{,}41421 \\ \hline 0{,}82184 < & \sqrt{5} - \sqrt{2} & < 0{,}82186 \end{array}$$

Ergebnis: $\sqrt{5} - \sqrt{2} = 0{,}8218\ldots$

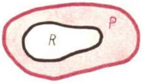
11 Der Umfang des Kreises mit dem Durchmesser $d = 4{,}000$ m soll in Meter auf drei Dezimalstellen genau berechnet werden.

Näherungswert für π	Näherungswert für $u = \pi d$
3,141	12,564 m
3,1415	12,5660 m
3,14159	12,56636 m

Es genügt also, wenn für π der Näherungswert 3,1415 genommen wird. Die weiteren Stellen von π haben keinen Einfluß auf die dritte Dezimalstelle von u, denn π ist auf jeden Fall kleiner als 3,1416, und selbst bei Multiplikation von d mit 3,1416 wird die dritte Dezimalstelle von u nicht geändert.

Ergebnis: $u = 12{,}566$ m

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten alle Rechengesetze, die wir bereits vom Rechnen mit rationalen Zahlen kennen. Der Bereich der reellen Zahlen enthält einen Teilbereich, nämlich den Bereich der rationalen reellen Zahlen, in dem man so rechnen kann wie im Bereich der rationalen Zahlen. Demnach können wir die rationalen reellen Zahlen durch die rationalen Zahlen ersetzen. In diesem Sinne ist **der Bereich der rationalen Zahlen ein Teilbereich des Bereiches der reellen Zahlen.** Die Menge P der reellen Zahlen besteht nach der Ersetzung der rationalen reellen Zahlen durch die rationalen Zahlen aus der Teilmenge der rationalen Zahlen (bzw. der periodischen Dezimalbrüche) und der Teilmenge der irrationalen Zahlen (bzw. der nichtperiodischen Dezimalbrüche); vgl. Bild A 11.



Aufgaben a 58 bis 61

A 11

14 Definition der Wurzel

Im Bereich der reellen Zahlen ist die Gleichung $x^2 = 2$ lösbar. Eine Lösung ist die in der Lerneinheit A 8 ermittelte reelle Zahl $x = 1{,}414213\ldots$. Man kann zeigen, daß man die Zahl 2 mit jeder gewünschten Genauigkeit erhält, wenn man diese reelle Zahl x durch hinlänglich gute rationale Näherungswerte ersetzt. Für den Näherungswert 1,414213 erhält man $1{,}414213^2 \approx 1{,}999998$. Diese Zahl unterscheidet sich von der Zahl 2 nur um 0,000002.
Entsprechend findet man, daß z. B. die Gleichung $x^3 = 2$ die reelle Zahl x als Lösung hat, deren erste Dezimalstellen sind: $x = 1{,}25992104\ldots$. Für den Näherungswert 1,25992104 findet man $1{,}25992104^3 \approx 1{,}99999995$. Diese Zahl unterscheidet sich von der Zahl 2 nur um 0,00000005.
Im Bereich der reellen Zahlen hat jede Gleichung $x^n = a$ mit $a \geqq 0$ eine Lösung, wie aus dem folgenden Satz, den wir ohne Beweis mitteilen müssen, folgt.

5 **SATZ: Ist a eine nichtnegative reelle Zahl und n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 1$, so existiert stets genau eine nichtnegative reelle Zahl b mit $b^n = a$.**

Die nach Satz A 5 eindeutig bestimmte Zahl b nennt man die **n-te Wurzel aus a** und bezeichnet sie mit „$\sqrt[n]{a}$“.

6 **DEFINITION: $\sqrt[n]{a}$ ($a \geqq 0$, $n \in N$; $n \geqq 1$) ist diejenige nichtnegative reelle Zahl b, für die $b^n = a$ gilt.**

A

Man nennt die nichtnegative reelle Zahl a den **Radikanden** und die natürliche Zahl n ($n \geqq 1$) den **Wurzelexponenten**. Die Operation, die den Zahlen n und a die Zahl $b = \sqrt[n]{a}$ zuordnet, heißt **Radizieren** oder **Wurzelziehen**. Aus der Definition A 6 erhält man für $n = 2$ die uns bereits bekannte Definition der Quadratwurzel. Statt „$\sqrt[2]{a}$" schreibt man „$\sqrt{a}$". Nach Definition A 6 ist

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a} \qquad (a \geqq 0;\ n \in N;\ n \geqq 1).$$

27 *Begründen Sie, warum das Radizieren eine Umkehrung des Potenzierens ist! Für welche Exponenten n und für welche Basen a ist diese Formulierung nur sinnvoll?*

12 Es ist

a) $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5;$ denn $0{,}5^3 = 0{,}125$

b) $\sqrt[4]{81} = 3;$ denn $3^4 = 81$

c) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2};$ denn $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

d) $\sqrt[n]{1} = 1;$ denn $1^n = 1$ $(n \in N;\ n \geqq 1)$

e) $\sqrt[n]{0} = 0;$ denn $0^n = 0$ $(n \in N;\ n \geqq 1)$

f) $\sqrt[1]{a} = a;$ denn $a^1 = a$

g) $\sqrt{3} = 1{,}7320508076\ldots$ h) $\sqrt{7} = 2{,}6457513111\ldots$

i) $\sqrt[3]{3} = 1{,}4422495703\ldots$ k) $\sqrt[5]{2} = 1{,}1486983550\ldots$

13 Es ist

a) $\sqrt{3^2} = 3$ und $\sqrt{(-3)^2} = 3$

b) $\sqrt[4]{2^4} = 2$ und $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$

c) $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = |a|$

d) $\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{(-x)^4} = |x|$

Allgemein gilt:

Ist a eine beliebige reelle Zahl und n eine gerade natürliche Zahl mit $n \geqq 2$, so ist

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

* Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat auch im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung, denn für jede reelle Zahl x gilt $x^2 \geqq 0$.
Es gibt noch einen Zahlbereich, der den Bereich der reellen Zahlen als Teilbereich enthält, in dem jede Gleichung $x^n + a = 0$ lösbar ist. Diesen **Bereich der komplexen Zahlen** lernen wir in der Schule nicht kennen.

Aufgaben a 62 bis 65

Zusammenfassung:
Eine **reelle Zahl** ist ein **unendlicher Dezimalbruch ohne Neunerperiode**. Die periodischen unendlichen Dezimalbrüche (ohne Neunerperiode) heißen **rationale reelle Zahlen**; die nichtperiodischen unendlichen Dezimalbrüche heißen **irrationale reelle Zahlen.** Die Abbildung der reellen Zahlen auf die Punkte der Zahlengeraden ist eineindeutig.
Der Bereich der rationalen Zahlen ist ein **Teilbereich** des Bereichs der reellen Zahlen.
Beim **Vergleichen** reeller Zahlen und beim Rechnen mit reellen Zahlen gelten alle Gesetze, die auch für das Vergleichen rationaler Zahlen bzw. für das Rechnen mit rationalen Zahlen gelten.
Beim **Rechnen** mit irrationalen Zahlen kann man diese mit jeder gewünschten Genauigkeit durch rationale Zahlen annähern.
Im Bereich der reellen Zahlen hat jede Gleichung $x^n = a$ $(a \geqq 0;\ n \in N;\ n \geqq 1)$ genau eine nichtnegative Lösung, nämlich die Zahl $\sqrt[n]{a}$.

A

Arbeiten mit Variablen

15 Wiederholung der Begriffe „Variable“, „Grundbereich“, „Term“

7 **DEFINITION: Eine *Variable* ist ein Zeichen für ein beliebiges Element einer vorgegebenen Menge. Diese Menge wird als *Grundbereich* dieser Variablen bezeichnet.**

Die Zahlbereiche oder Teilmengen von Zahlbereichen und Größenbereiche sind Grundbereiche der Variablen.
Als Variable verwendet man häufig die kleinen oder die großen lateinischen sowie die kleinen griechischen Buchstaben.
Mit Hilfe von Variablen läßt sich die Bildung von Mengen kurz und übersichtlich beschreiben.

14 a) Die natürlichen Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 3 lassen, haben die Form $4n + 3$, $n \in N$.
b) Durch $-2 < x < 3$ mit $x \in P$ ist die Menge der reellen Zahlen zwischen -2 und 3 bestimmt.

28 *Geben Sie eine Darstellung an für alle*
a) *geraden natürlichen Zahlen,* b) *ungeraden natürlichen Zahlen!*

Mit Hilfe von Variablen lassen sich Gesetzmäßigkeiten für Zahlen und Größen übersichtlich darstellen.

15 a) Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ (Distributivität).}$$
b) Für je zwei beliebige rationale Zahlen a und b gibt es genau eine rationale Zahl c, so daß gilt: $a - b = c$.
c) Für den elektrischen Widerstand R eines Leiters aus Kupfer (Länge l; Querschnitt A; spezifische Leitfähigkeit ϱ) gilt $R = \varrho \frac{l}{A}$.
d) Die Längenzunahme Δl bei einem festen Körper ist der Temperaturerhöhung Δt proportional: $\Delta l \sim \Delta t$.

A

e) Bedeuten A_G den Inhalt der Grundfläche und h die Höhe eines beliebigen Prismas, so berechnet man das Volumen V wie folgt: $V = A_G \cdot h$.

Mit Hilfe von Variablen lassen sich Problemstellungen, bei denen Beziehungen zwischen Zahlen oder Größen die entscheidende Rolle spielen, übersichtlich fixieren und rationell lösen.

16 Durch $a \cdot b$ kann man sehr verschiedene Sachverhalte erfassen.

a	b	$a \cdot b$
Länge einer Seite eines Rechtecks	Länge der anderen Seite des Rechtecks	Flächeninhalt des Rechtecks
Durchschnittlicher Lohn für einen Arbeitstag	Anzahl der Arbeitstage	Gesamtlohn
Durchschnittliche Geschwindigkeit eines Autos	Fahrzeit	In der Fahrzeit zurückgelegter Weg
Elektrische Stromstärke in einem Gleichstromkreis	Elektrischer Widerstand in diesem Kreis	Anliegende Spannung
Druck	Gedrückte Fläche	Druckkraft

An dem Beispiel A 16 wird eine wesentliche Seite der Mathematik deutlich. Durch Abstraktion vom Konkret-Gegenständlichen der Realität gelangt man zum mathematisch Wesentlichen, das den verschiedensten praktischen Sachverhalten gemeinsam ist. Dieses mathematisch Wesentliche wird mit Hilfe der mathematischen Zeichen schriftlich fixiert.
Variable sind ein wichtiger Bestandteil der mathematischen Fachsprache. Daher gibt es keine besonderen Regeln für das Arbeiten mit Variablen, sondern es gelten die Regeln des jeweiligen Grundbereiches.
Fragt man zum Beispiel nach der Menge der Zahlen mit der Eigenschaft $2 < x < 3$, so läßt sich darauf keine Antwort geben. Denn bedeutet x eine natürliche Zahl, so ist die Menge leer. Wird x aus dem Bereich der gebrochenen Zahlen gewählt, erhält man eine andere Menge.

Wir vereinbaren: In den folgenden Lerneinheiten soll, wenn kein Bereich angegeben ist, stets die **Menge der reellen Zahlen als Grundbereich für Variable** gelten.

Zum Bezeichnen von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten reiht man Variable, Ziffern, Zeichen für Rechenoperationen und verschiedene Arten von Klammern aneinander. Dies geschieht in analoger Form wie bei der Schriftsprache, bei der aus Buchstaben und Satzzeichen unter Beachtung bestimmter Vorschriften Wörter und Sätze gebildet werden.

17 $$3;\quad 5 + 7;\quad \frac{5}{6}(3 - a) \cdot b;\quad a + b;\quad b : c;\quad (x + y) \cdot z;\quad a(b - c) \cdot 2d$$

Die Ziffern, die Variablen und solche Aneinanderreihungen von Ziffern, Variablen, Zeichen und Klammern wie im Beispiel A 17 heißen **Terme**.
Wenn man für die Variablen in einem Term Zahlen bzw. Größen des jeweiligen Grundbereiches einsetzt, kann man den Wert des Terms berechnen.

18 a)

a	b	$(a-3)\,b$
9	0	$(9-3)\cdot 0 = 6\cdot 0 = 0$
5	10	$(5-3)\cdot 10 = 2\cdot 10 = 20$
18	3	$(18-3)\cdot 3 = 15\cdot 3 = 45$

b)

a	b	$a:b$
72 km	1,5 h	$72\text{ km} : 1{,}5\text{ h} = 48\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
84 kp	140 cm²	$84\text{ kp} : 140\text{ cm}^2 = 0{,}6\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$
400 g	51 cm³	$400\text{ g} : 51\text{ cm}^3 = 7{,}85\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

(29) a) *Für welche Paare $[a, b]$ natürlicher Zahlen ist der Wert des Terms $(a-3)\cdot b$ keine natürliche Zahl?*

b) *Welche physikalischen Größen werden durch die Quotienten $a : b$ im Beispiel A 18b) berechnet?*

Aufgaben a 66 bis 75

16 Wiederholung einiger Arten des Umformens von Termen

Auflösen und Setzen von Klammern

Auflösen der Klammer →

$a + (b + c) = a + b + c$	$a - (b + c) = a - b - c$
$a + (b - c) = a + b - c$	$a - (b - c) = a - b + c$
$a + (-b + c) = a - b + c$	$a - (-b + c) = a + b - c$
$a + (-b - c) = a - b - c$	$a - (-b - c) = a + b + c$

← Setzen der Klammer

(30) *Formulieren Sie die Regeln für das Auflösen von Klammern in Worten!*

Soll ein Pluszeichen vor der Klammer stehen, so kann man die Klammer ohne weiteres setzen. Alle Zeichen bleiben unverändert.
Soll ein Minuszeichen vor der Klammer stehen, so vertauscht man alle Plus- in Minuszeichen und alle Minus- in Pluszeichen vor den Gliedern, die in der Klammer stehen sollen.

19 a) Lösen Sie die Klammern auf!

$$\begin{aligned} & 1{,}5a + (6{,}7a - 3{,}4b) - (8{,}1 - 4{,}3b) \\ = {} & 1{,}5a + 6{,}7a - 3{,}4b - 8{,}1 + 4{,}3b \\ = {} & 8{,}2a + 0{,}9b - 8{,}1 \end{aligned}$$

A

b) Setzen Sie auf verschiedene Weise Klammern, so daß beim Einsetzen reeller Zahlen für die auftretenden Variablen jeweils dieselbe Zahl bestimmt wird!

Es werden hier nur drei Möglichkeiten angegeben.

$$2a - 3{,}5 + 6{,}3b - c = 2a - (3{,}5 - 6{,}3b + c) \quad \text{oder}$$
$$2a - 3{,}5 + 6{,}3b - c = (2a - 3{,}5) + (6{,}3b - c) \quad \text{oder}$$
$$2a - 3{,}5 + 6{,}3b - c = 2a - 3{,}5 - (-6{,}3b + c)$$

Ausklammern und Ausmultiplizieren

Man multipliziert eine Summe mit einer Zahl, indem man jeden Summanden mit dieser Zahl multipliziert und die Summe aus den Produkten bildet. Dies folgt aus der Distributivität von Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.}$$

Ausmultiplizieren $\longrightarrow$

$$\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

$\longleftarrow$ Ausklammern

Kann man alle Summanden einer Summe als Produkt mit einem gemeinsamen Faktor schreiben, so gewinnt man aus dieser Summe ein Produkt, indem man den gemeinsamen Faktor mit der Summe der übrigen Faktoren multipliziert.
Man klammert im allgemeinen denjenigen gemeinsamen Faktor aus, in dem die Variablen möglichst große Exponenten und dem Betrage nach möglichst große Koeffizienten haben.

20 Multiplizieren Sie!

a) $$-2a(3b - 5c) = (-2a) \cdot 3b - (-2a) \cdot 5c$$
$$= -6ab - (-10ac)$$
$$= -6ab + 10ac$$

b) $$a \cdot [b + c \cdot (d + e)] = a \cdot [b + c \cdot d + c \cdot e] = ab + acd + ace$$

21 Klammern Sie aus!

a) $3 \cdot a + x \cdot a = (3 + x) \cdot a$

b) $-3x - 3 = (-3) \cdot x + (-3) \cdot 1 = -3(x + 1)$

c) $25a^2b - 40a^2b^2 = 5a^2b \cdot 5 - 5a^2b \cdot 8b = 5a^2b(5 - 8b)$

d) $18x^2yz^2 + 21xy^2z^2 - 153x^2y^2z = 3xyz(6xz + 7yz - 51xy)$

Multiplizieren von Summen

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$\boldsymbol{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.}$$

Ausmultiplizieren $\longrightarrow$

$$\boxed{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

$\longleftarrow$ Ausklammern

Für reelle Zahlen gilt allgemein: Man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert und die Produkte addiert.

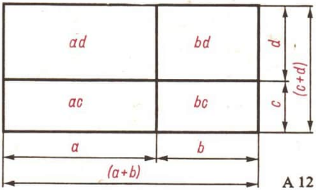
A

(31) *Erläutern Sie die folgenden Umformungen!*

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= (a+b)c + (a+b)d \\ &= ac + bc + ad + bd \\ &= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

Das Ergebnis wurde lexikographisch geordnet. [1]

Man kann die Gleichung
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
veranschaulichen; vgl. Bild A 12.



A 12

(32) *Veranschaulichen Sie!*

a) $(a+b)(c-d)$
$= ac - ad + bc - bd$

b) $(a-b)(c-d)$
$= ac - ad - bc + bd$

22 Verwandeln Sie in eine Summe!

a) $(r-s)(c+d) = rc + rd - sc - sd = cr - cs + dr - ds$

Das Ergebnis wurde lexikographisch geordnet.

b) $$\begin{aligned}&(-4 + 3y - a)(2a + 4 - 2y) \\ &= -8a - 16 + 8y + 6ay + 12y - 6y^2 - 2a^2 - 4a + 2ay \\ &= -12a - 16 + 20y + 8ay - 6y^2 - 2a^2 \\ &= -2a^2 - 12a + 8ay - 6y^2 + 20y - 16\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(1 - x + x^2)(x - 1) &= x - 1 - x^2 + x + x^3 - x^2 \\ &= 2x - 1 - 2x^2 + x^3 \\ &= x^3 - 2x^2 + 2x - 1\end{aligned}$$

23 Die folgende Summe ist in ein Produkt umzuformen.

$$\begin{aligned}3a - 6am + 8bmn - 4bn &= 3a(1 - 2m) - 4bn(1 - 2m) \\ &= (1 - 2m)(3a - 4bn)\end{aligned}$$

Probe: $(1 - 2m)(3a - 4bn) = 3a - 4bn - 6am + 8bmn$

Man führt die Multiplikation von mehr als zwei Summen auf die Multiplikation von zwei Summen zurück.

24 $$\begin{aligned}(a+b)(c+d)(e+f) &= (ac + ad + bc + bd)(e+f) \\ &= ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf\end{aligned}$$

Aufgaben a 76 bis 102

[1] Die lexikographische Anordnung wird folgendermaßen vorgenommen:
a) In jedem Glied werden die vorkommenden Variablen in der Reihenfolge des Alphabets geschrieben.
b) Die Glieder werden nach den vorkommenden Variablen in der Reihenfolge des Alphabets geschrieben.
c) Alle Glieder mit der gleichen Variablen werden nach fallenden Potenzen dieser Variablen geordnet.

17 Die Struktur von Termen

Bevor man einen Term umformt, muß man sich über die Struktur dieses Terms im klaren sein.
Es wird vereinbart, daß die *Rechenoperationen zweiter Stufe* (Multiplikation, Division) *stärker binden als die Rechenoperationen erster Stufe* (Addition, Subtraktion).
In $a + b \cdot c$ beispielsweise ist die Multiplikation zuerst auszuführen. Dagegen ist in $(a + b) \cdot c$ die Addition zuerst auszuführen. $a + b \cdot c$ ist eine Summe, $(a + b) \cdot c$ jedoch ein Produkt.

(33) *Beschreiben Sie die folgenden Strukturen!*

a) $a \cdot b + c$ b) $a \cdot (b + c)$ c) $a \cdot b - c$

d) $a \cdot (b - c)$ e) $a \cdot b + c \cdot d$ f) $a - (b + c)$

Hat man die Struktur eines Terms erkannt, entscheidet man leicht, welche Reihenfolge der Operationen beim Umformen einzuhalten ist.

25 a) Formen Sie $ab + a(a - c) + a(a - b)$ in eine möglichst einfach strukturierte Summe um!
Man erkennt, daß die vorgegebene Summe drei Summanden hat. Jeder der drei Summanden ist ein Produkt, wobei der zweite und der dritte Summand jeweils eine Differenz enthalten. Man formt also zuerst diese beiden Summanden durch Ausmultiplizieren um und faßt dann zusammen.

$$ab + a(a - c) + a(a - b) = ab + a^2 - ac + a^2 - ab = 2a^2 - ac$$

b) Drücken Sie folgenden mathematischen Sachverhalt unter Verwendung von Variablen aus!
Von der Differenz zweier rationaler Zahlen wird die Summe zweier rationaler Zahlen subtrahiert.
Die rationalen Zahlen seien a, b, c, d. Wir bilden zunächst die Differenz $(a - b)$, dann die Summe $(c + d)$ und schließlich die Differenz dieser beiden: $(a - b) - (c + d)$.

(34) *Setzen Sie in den Termen $\frac{n^2}{2}$ und $\frac{n^3}{8}$ für n natürliche Zahlen ein! Vergleichen Sie die Ergebnisse! Formulieren Sie dann eine Aussage!*

Die Division durch Null ist auch im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert. Deshalb muß bei der Bildung von Quotienten unter Verwendung von Variablen der Grundbereich besonders beachtet werden.

Zum Beispiel ist der Term $\frac{7}{3 - x}$ mit $x \in P$ für $x = 3$ nicht definiert.

(35) *Für welche reellen Zahlen sind die folgenden Terme nicht definiert?*

a) $\frac{a}{a - 2{,}5}$ b) $\frac{2 - 3x}{6 + y}$ c) $a + \frac{b}{a}$ d) $\sqrt{9 - x^2}$

Aufgaben a 103 bis 111

A

Es gilt: $(a+b)(c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$; vgl. Seite 30.

Für $c = a$ und $d = b$ erhält man:

$$(a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Für $c = a$ und $d = -b$ erhält man:

$$(a+b)(a-b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b)$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Für alle reellen Zahlen a, b gelten die folgenden **binomischen Formeln.**[1]

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}}$$

Die binomischen Formeln sind also nur Spezialfälle eines bekannten Satzes. Es ist zweckmäßig, diese Spezialfälle hervorzuheben.

36 a) *Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, daß die folgende Aussage nicht gilt:*
Für alle reellen Zahlen a, b ist $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

b) *Formulieren Sie diese Aussage um, indem Sie „Es gibt ein …" verwenden! Untersuchen Sie, welche Zahlen a, b diese Gleichung erfüllen!*

Mit Hilfe der binomischen Formeln berechnet man Potenzen und spezielle Produkte von zweigliedrigen Summen, indem man in die Summenform der Formeln für a und b die entsprechenden Zahlen einsetzt.

26 a)
$$\begin{aligned}(3x+0{,}8)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 0{,}8 + 0{,}8^2 = 9x^2 + 4{,}8x + 0{,}64\\ (a+b)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2\end{aligned}$$

b)
$$\left(\frac{1}{2}r - 4s\right)^2$$
$$= \left[\frac{1}{2}r + (-4s)\right]^2 = \left(\frac{1}{2}r\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}r \cdot (-4s) + (-4s)^2 = \frac{1}{4}r^2 - 4rs + 16s^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

c)
$$\begin{aligned}(1{,}1a + 5x^2)(1{,}1a - 5x^2) &= (1{,}1a)^2 - (5x^2)^2 = 1{,}21a^2 - 25x^4\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Mit Hilfe der binomischen Formeln lassen sich in besonderen Fällen *Summen in Produkte umformen.*

27 a) $x^2 + 6x + 9$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x+3)^2$$

b) $\frac{9}{25} - \frac{6}{5}x + x^2$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot (-x) + (-x)^2$$
$$= \left(\frac{3}{5} - x\right)^2$$

[1] Unter einem Binom versteht man einen zweigliedrigen Term der Form $a + b$ bzw. $a - b$.

Summen, die sich in die Form $(a + b)^2$ bringen lassen, bezeichnet man als **vollständige Quadrate.**

(37) *Welche der folgenden Summen ist ein vollständiges Quadrat?*

a) $9x^2 + 6ax + a^2$ b) $64x^2 + 8bx + b^2$ c) $16 - 16a + a^2$

d) $x^2 + 6x$ e) $x^2 + 8x + 8$ f) $p^2 + 2pq + q^2$

Mit Hilfe der binomischen Formeln lassen sich *Differenzen zweier Quadrate in Produkte umformen.*

28 a) $d_1^2 - d_2^2 = (d_1 + d_2) \cdot (d_1 - d_2)$ b) $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Aufgaben a 112 bis 129

19 Die quadratische Ergänzung

Wie wir später in Kapitel D. „Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen" sehen werden, ist es manchmal notwendig, *Summen zu vollständigen Quadraten* zu ergänzen. Ergänzt man eine gegebene zweigliedrige Summe durch Hinzufügen des Quadrates eines Summanden zu einem vollständigen Quadrat, so spricht man von der **quadratischen Ergänzung**.

29 a) Es ist die quadratische Ergänzung für $x^2 + 8x$ zu ermitteln.
Wir vergleichen $x^2 + 8x$ mit der Struktur eines vollständigen Quadrates.

$$\begin{array}{llllll}
x^2 + & 8x & & & \\
\updownarrow & \updownarrow & & & \\
a^2 + & \overbrace{2 \cdot a \cdot b} & + b^2 & = (a + b)^2 \\
\updownarrow & \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow & \updownarrow & \\
x^2 + & 2 \cdot x \cdot 4 & + 4^2 & = (x + 4)^2
\end{array}$$

Die quadratische Ergänzung ist also

$4^2 = 16.$

b) Es ist die quadratische Ergänzung zu $\frac{4}{25} - \frac{4}{5}c$ zu ermitteln.
Wir verfahren wie unter a).

$$\begin{array}{lllll}
\frac{4}{25} & \underbrace{-\frac{4}{5}c} & & & \\
\updownarrow & \updownarrow & & & \\
a^2 & + \overbrace{2 \cdot a \quad \cdot b} & + \ b^2 & = (a + b)^2 \\
\updownarrow & \updownarrow\ \updownarrow \quad \updownarrow & \updownarrow & \\
\left(\frac{2}{5}\right)^2 & + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot (-c) & + (-c)^2 & = \left(\frac{2}{5} - c\right)^2
\end{array}$$

Die quadratische Ergänzung heißt hier

$(-c)^2 = c^2.$

(38) *Beschreiben Sie, wie man allgemein die quadratische Ergänzung ermittelt!*

Soll eine Summe so umgeformt werden, daß sie ein vollständiges Quadrat enthält, so fügt man die quadratische Ergänzung hinzu und subtrahiert sie wieder.

30 Es sind die folgenden Summen so umzuformen, daß sie ein vollständiges Quadrat enthalten.

a)
$$r^2 \qquad \underbrace{-\;10r}$$
$$a^2 + \overbrace{2 \cdot a \cdot b} + b^2$$
$$r^2 + 2 \cdot r \cdot (-5) + 25 - 25 = (r-5)^2 - 25$$
$$r^2 - 10r = (r-5)^2 - 25$$

b)
$$x^2 + \underbrace{7x} - \frac{3}{4}$$
$$a^2 + \overbrace{2 \cdot a \cdot b} + b^2$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - 13$$
$$x^2 + 7x - \frac{3}{4} = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - 13$$

c)
$$x^2 + \underbrace{px} + q$$
$$a^2 + \overbrace{2 \cdot a \cdot b} + b^2$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$$
$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$$

Auf diese Weise ist es möglich, Summen wie in den Beispielen A 30b) und A 30c) in Produkte umzuformen. Für 13 kann man $(\sqrt{13})^2$ schreiben, und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist gleich $\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2$, falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geqq q$.

Im Beispiel A 30b) kann man demnach mit Hilfe der binomischen Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ wie folgt umformen.

$$x^2 + 7x - \frac{3}{4} = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - 13 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - (\sqrt{13})^2$$
$$= \left(x + \frac{7}{2} + \sqrt{13}\right)\left(x + \frac{7}{2} - \sqrt{13}\right)$$

Aufgaben a 130 bis 140

20 Erweitern und Kürzen von Quotienten

Ist die Summe von Quotienten mit Variablen zu bilden, so verfährt man wie bei der Addition gebrochener Zahlen, indem man zu Quotienten mit gleichen Nennern übergeht. Das erfolgt durch Erweitern oder Kürzen.

Für alle reellen Zahlen a, b, c ($b \neq 0$, $c \neq 0$) gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}.$$

Der Erweiterungs- bzw. Kürzungsfaktor c kann eingliedrig, aber auch mehrgliedrig sein.

$$\xrightarrow{\text{Erweitern}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}}$$

$$\xleftarrow[\text{Kürzen}]{}$$

Die Nenner der vorgegebenen Quotienten bzw. die Erweiterungs- und Kürzungsfaktoren dürfen für keine Einsetzung aus dem Grundbereich der auftretenden Variablen Null werden.

31 a) $\dfrac{20x}{40bx} = \dfrac{20x \cdot 1}{20x \cdot 2b} = \dfrac{1}{2b} \qquad (x, b \neq 0)$

b) $\dfrac{25ab - 15a^2}{-5a} = \dfrac{5a(5b - 3a)}{5a \cdot (-1)} = \dfrac{5b - 3a}{-1} = 3a - 5b \qquad (a \neq 0)$

c) Es ist $\dfrac{3{,}2\,xy}{3x - 2y}$ mit $3x - 2y$ zu erweitern ($3x \neq 2y$).

$$\frac{3{,}2\,xy}{3x - 2y} = \frac{3{,}2\,xy(3x - 2y)}{(3x - 2y)(3x - 2y)} = \frac{9{,}6\,x^2y - 6{,}4\,xy^2}{9x^2 - 12xy + 4y^2}$$

d) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + ab} = \dfrac{(a + b)(a - b)}{(a + b)\,a} = \dfrac{a - b}{a} \qquad (a \neq -b;\ a \neq 0)$

Aufgaben a 141 bis 153

21 Dividieren einer Summe durch einen eingliedrigen Ausdruck

Die Division einer Summe durch eine von Null verschiedene Zahl ist gleich der Multiplikation der vorgegebenen Summe mit dem Reziproken dieser Zahl. Deshalb gilt nach Lerneinheit A 16 der folgende Satz.

Für alle reellen Zahlen a, b, x ($x \neq 0$) gilt:

$$(a + b) : x = a : x + b : x$$

oder in anderer Schreibweise

$$\frac{a + b}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x}.$$

Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem jeder Summand durch diese Zahl dividiert wird.

32 a) $(3ab + 12a + 15a^2) : 3a = \frac{3ab}{3a} + \frac{12a}{3a} + \frac{15a^2}{3a}$

$$= \frac{3a \cdot b}{3a \cdot 1} + \frac{3a \cdot 4}{3a \cdot 1} + \frac{3a \cdot 5a}{3a \cdot 1}$$

$$= b + 4 + 5a$$

Probe: $(b + 4 + 5a) \cdot 3a = b \cdot 3a + 4 \cdot 3a + 5a \cdot 3a$

$$= 3ab + 12a + 15a^2$$

b) $(24xy - 21y^2) : (-3y) = \frac{24xy}{-3y} - \frac{21y^2}{-3y}$

$$= \frac{8x}{-1} - \frac{7y}{-1}$$

$$= -8x + 7y$$

c) $(63x^2 - 81xy + 27xy^2) : 9xy = \frac{63x^2}{9xy} - \frac{81xy}{9xy} + \frac{27xy^2}{9xy}$

$$= \frac{7x}{y} - \frac{9}{1} + \frac{3y}{1}$$

$$= \frac{7x}{y} - 9 + 3y$$

Aufgaben a 154 bis 160

22* Division einer Summe durch eine Summe

33 $(6x^2 + 7x + 2) : (3x + 2) = 2x + 1$

$$\begin{array}{l} (6x^2 + 7x + 2) : (3x + 2) = 2x + 1 \\ \underline{-(6x^2 + 4x)} \\ \quad\quad 3x + 2 \\ \quad\quad \underline{-(3x + 2)} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Probe: $(2x + 1)(3x + 2)$
$= 6x^2 + 4x + 3x + 2$
$= 6x^2 + 7x + 2$

Die *Rechenvorschrift* (der *Algorithmus*) für die Division einer Summe durch eine Summe wird hier nur mitgeteilt. Begründen kann man diesen Algorithmus mit Hilfe der Multiplikation von Summen.

Algorithmus:

a) Man sucht einen Summanden des Dividenden, der durch einen Summanden des Divisors dividiert werden kann. $(6x^2 + \ldots) : (3x + \ldots)$

b) Man bildet das Produkt aus dem erhaltenen Quotienten und dem vorgegebenen Divisor. $2x \cdot (3x + 2)$

c) Man subtrahiert dieses Produkt vom vorgegebenen Dividenden.

Es sind *zwei Fälle* möglich:

Fall 1: Die unter c) ermittelte Differenz ist Null.
Die **Division** ist damit **ohne Rest** durchgeführt.

Fall 2: Die unter c) ermittelte Differenz ist nicht Null.
Dann setzt man das Verfahren fort, indem man die Schritte a) bis c) erneut anwendet. Dabei sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden.

2.1.: Nach endlich vielen Schritten ist die unter c) ermittelte Differenz Null; vgl. Beispiel A 33.

2.2.: Es erweist sich, daß auch ein beliebig häufiges Anwenden des Algorithmus nicht dazu führen würde, daß die jeweils unter c) zu ermittelnde Differenz Null wird. Dann bricht man das Verfahren ab; vgl. Beispiel A 34.
In diesem Falle spricht man von einer **Division mit Rest.**

34 $(3x^2 - 8x - 3) : (3x - 2) = x - 2 + \frac{-7}{3x - 2}$

$$\begin{array}{l} -(3x^2 - 2x) \\ \hline \quad - 6x - 3 \\ \quad -(- 6x + 4) \\ \hline \qquad - 7 \end{array}$$

Probe: $(x - 2)(3x - 2) - 7$
$= 3x^2 - 6x - 2x + 4 - 7$
$= 3x^2 - 8x - 3$

Aufgaben a 161* und 162*

23 Ermitteln des kleinsten gemeinsamen Vielfachen

Gemeinsame Vielfache der Zahlen 8, 12 und 18 sind 72; 144; 216; ..., das heißt alle Zahlen der Form $72n$ mit $n \in N$.
Unter allen gemeinsamen Vielfachen von 8, 12 und 18 ist die Zahl 72 das **kleinste gemeinsame Vielfache, das k. g. V.**
Es sei an das folgende Verfahren zum schnellen Ermitteln des k. g. V. natürlicher Zahlen erinnert.

$$\begin{array}{l} 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \\ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 \\ \hline \text{k.g.V.: } 2^3 \cdot 3^2 = 72 \end{array}$$

Man sucht von den Potenzen mit gleicher Basis jeweils die mit dem größten Exponenten heraus. Das Produkt dieser ausgewählten Potenzen ist das k.g.V.

Man überträgt dieses Verfahren sinngemäß auf beliebige Zahlen. Man spricht dann nur von **einem gemeinsamen Vielfachen.**

35 a) Es ist ein gemeinsames Vielfaches von $3a^2b$, $12ab^2$, $8abc$ zu ermitteln.

$$\begin{array}{r} 3a^2b = 3 \cdot a^2 \cdot b \\ 12ab^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 \\ 8abc = 2^3 \cdot a \cdot b \cdot c \\ \hline \text{g.V.: } 2^3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c = 24a^2b^2c \end{array}$$

b) Es ist ein gemeinsames Vielfaches von $5a$, $6ab$, $3a - 3b$ zu ermitteln.

$$\begin{array}{r} 5a = 5 \cdot a \\ 6ab = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b \\ 3a - 3b = 3(a - b) \\ \hline \text{g.V.: } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot (a - b) = 30ab(a - b) \end{array}$$

c) Es ist ein gemeinsames Vielfaches von $a^2 - b^2$ und $a^2 + 2ab + b^2$ zu ermitteln.

$$\begin{array}{r} a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ \hline \text{g.V.: } (a + b)^2 (a - b) \end{array}$$

39 *Zeigen Sie im Beispiel A 35a), daß $24a^2b^2c$ z. B. für $a = 1$, $b = 1$, $c = 3$ nicht das k. g. V. der dort vorgegebenen Zahlen ist!*

36 Es sind die Brüche $\frac{5a}{3b}$ und $\frac{3}{7ab^2}$ miteinander zu vergleichen ($a, b \in N$; $a, b \neq 0$).
Man macht die Brüche gleichnamig und vergleicht die Zähler.

$$\frac{5a \cdot 7ab}{3b \cdot 7ab} \qquad \frac{3 \cdot 3}{7ab^2 \cdot 3}$$

$$\frac{35a^2b}{21ab^2} > \frac{9}{21ab^2}$$

Also gilt: $\frac{5a}{3b} > \frac{3}{7ab^2}$ für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen a und b.

Aufgaben a 163 bis 172

24 Addieren und Subtrahieren von Quotienten

Für die reellen Zahlen gelten dieselben Rechengesetze wie für die rationalen Zahlen.

Für alle reellen Zahlen a, b, c ($c \neq 0$) gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Quotienten werden addiert (subtrahiert), indem man sie gleichnamig macht, die Zähler addiert (subtrahiert) und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Ein gemeinsames Vielfaches der Nenner von Quotienten ist **gemeinsamer Nenner** dieser Quotienten.

37 a) $$\frac{b}{2a} + \frac{3}{2a} = \frac{b+3}{2a}$$

b) $$\frac{-3}{a} + \frac{5b}{ac} - \frac{6}{c} = \frac{-3 \cdot c}{a \cdot c} + \frac{5b \cdot 1}{ac \cdot 1} - \frac{6 \cdot a}{c \cdot a} = \frac{-3c + 5b - 6a}{ac}$$

$$= \frac{-6a + 5b - 3c}{ac}$$

c) $$\frac{8a}{15bc} - \frac{3+a}{20b^2} + \frac{7a}{24bc^2}$$

Ermitteln eines gemeinsamen Nenners und der Erweiterungsfaktoren:

$15bc = 3 \cdot 5 \cdot b \cdot c$	$2^3 \cdot b \cdot c$
$20b^2 = 2^2 \cdot 5 \cdot b^2$	$2 \cdot 3 \cdot c^2$
$24bc^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot b \cdot c^2$	$5 \cdot b$

g.N.: $2^3 \cdot 3 \cdot 5\, b^2 \cdot c^2 = 120b^2c^2$

$$\frac{8a}{15bc} - \frac{3+a}{20b^2} + \frac{7a}{24bc^2} = \frac{8a \cdot 8bc - (3+a) \cdot 6c^2 + 7a \cdot 5b}{120b^2c^2}$$

$$= \frac{64abc - 18c^2 - 6ac^2 + 35ab}{120b^2c^2}$$

$$= \frac{35ab + 64abc - 6ac^2 - 18c^2}{120b^2c^2}$$

d) $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}=\frac{b(a+b)+a(a+b)+a\cdot b}{a\cdot b\cdot(a+b)}$$
$$=\frac{ab+b^2+a^2+ab+ab}{a^2b+ab^2}$$
$$=\frac{a^2+3ab+b^2}{a^2b+ab^2}$$

Aufgaben a 173 bis 182

25 Multiplizieren von Quotienten

Für alle reellen Zahlen *a, b, c, d* (*b* ≠ 0, *d* ≠ 0) gilt:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Quotienten werden multipliziert, indem man den Quotienten aus dem Produkt der Zähler und dem Produkt der Nenner bildet.

Vor dem Ausmultiplizieren der Produkte kürzt man nach Möglichkeit den Quotienten.

38 a) $$\frac{2x}{3y}\cdot\frac{6xy}{z}=\frac{2x\cdot 6xy}{3y\cdot z}=\frac{2x\cdot 2x}{1\cdot z}=\frac{4x^2}{z}$$

b) $$\frac{n^3}{5m}\cdot 15mn=\frac{n^3}{5m}\cdot\frac{15mn}{1}=\frac{n^3\cdot 15mn}{5m\cdot 1}=\frac{n^3\cdot 3n}{1}=3n^4$$

c) $$\frac{-36m^2p}{-13d}\cdot\frac{-52df}{18m}=\frac{(-36m^2p)\cdot(-52df)}{(-13d)\cdot 18m}=\frac{(-2mp)\cdot(-4f)}{(-1)\cdot 1}$$
$$=\frac{8fmp}{-1}=-8fmp$$

oder:

$$\frac{-36m^2p}{-13d}\cdot\frac{-52df}{18m}=\frac{36m^2p}{13d}\cdot\left(-\frac{52df}{18m}\right)=-\frac{36m^2p\cdot 52df}{13d\cdot 18m}$$
$$=-\frac{2mp\cdot 4f}{1}=-8fmp$$

d) $$\frac{x+y}{a-b}\cdot\frac{x}{a+b}=\frac{(x+y)\cdot x}{(a-b)(a+b)}=\frac{x^2+xy}{a^2-b^2}$$

Aufgaben a 183 bis 188

26 Dividieren von Quotienten

Für alle reellen Zahlen *a, b, c, d* (*b* ≠ 0, *c* ≠ 0, *d* ≠ 0) gilt:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Man dividiert durch einen Quotienten, indem man mit dem Reziproken dieses Quotienten multipliziert.

39 a) $\frac{a}{5} : \frac{a^2x}{20} = \frac{a}{5} \cdot \frac{20}{a^2x} = \frac{a \cdot 20}{5 \cdot a^2x} = \frac{4}{ax}$

b) $x : \frac{p}{q} = \frac{x}{1} : \frac{p}{q} = \frac{x}{1} \cdot \frac{q}{p} = \frac{qx}{p}$

c) $\frac{x}{y} : a = \frac{x}{y} : \frac{a}{1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{a} = \frac{x \cdot 1}{y \cdot a} = \frac{x}{ay}$

d) $\left(-2\frac{3}{8}a\right) : \left(-\frac{19}{32}ab\right) = \left(-\frac{19a}{8}\right) : \left(-\frac{19ab}{32}\right) = \left(-\frac{19a}{8}\right) \cdot \left(-\frac{32}{19ab}\right)$

$= \frac{19a \cdot 32}{8 \cdot 19ab} = \frac{4}{b}$

Es entstehen **Doppelbrüche**, wenn man als Divisionszeichen einen Bruchstrich verwendet, der dann in Höhe der Gleichheitszeichen steht und etwas länger gezeichnet wird als die anderen.

40 a) $\frac{a}{2} : \frac{b}{c} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{c}}$ b) $x : \frac{y}{z} = \dfrac{x}{\frac{y}{z}}$ c) $\frac{x}{y} : z = \dfrac{\frac{x}{y}}{z}$

d) $\dfrac{\frac{a^2b}{20x}}{\frac{3{,}5ab}{75x}} = \frac{a^2b}{20x} : \frac{3{,}5ab}{75x} = \frac{a^2b}{20x} \cdot \frac{75x}{3{,}5ab} = \frac{a^2b \cdot 75x}{20x \cdot 3{,}5ab}$

$= \frac{a \cdot 3}{4 \cdot 0{,}7} = \frac{3a}{2{,}8} = \frac{30a}{28} = \frac{15}{14}a$

e) $\dfrac{a}{1 + \frac{a}{2}} = \dfrac{a}{\frac{a+2}{2}} = \frac{a}{1} : \frac{a+2}{2} = \frac{a}{1} \cdot \frac{2}{a+2} = \frac{a \cdot 2}{1 \cdot (a+2)} = \frac{2a}{a+2}$

Ist das Ergebnis ein Quotient, erweitert man wenn nötig so, daß die Koeffizienten im Zähler und Nenner natürliche Zahlen sind; vgl. Beispiel A 40d).

Aufgaben a 189 bis 197

27 Anwendungen des Umformens von Termen

Die für das Umformen von Termen mit Variablen behandelten Regeln wendet man beim Auflösen von Gleichungen nach einer der darin auftretenden Variablen an.
Solche Aufgabenstellungen kennen wir auch aus anderen Unterrichtsfächern, z. B. aus dem Physikunterricht.

41 Formen Sie die folgenden Gleichungen nach den angegebenen Variablen um!

a) $A = \frac{1}{2}g \cdot h_g$; h_g

h_g kommt in der Gleichung nur einmal vor. Da das Glied mit h_g ein Produkt ist, wird h_g isoliert, indem man durch den Faktor von h_g, also durch $\frac{1}{2}g$ dividiert. Es ist ratsam, für den Faktor $\frac{g}{2}$ zu schreiben.

$$A = \frac{g}{2} \cdot h_g \qquad \Big| : \frac{g}{2}$$

$$A : \frac{g}{2} = h_g \qquad A \cdot \frac{2}{g} = h_g \qquad \frac{2A}{g} = h_g$$

b) $A = 2ab + 2ac + 2bc \quad (a \neq -b;\ b \neq 0);\quad c$

Zunächst wollen wir erreichen, daß auf einer Seite nur Summanden stehen, die die Variable c enthalten.

$$A = 2ab + 2ac + bc \qquad | - 2ab$$
$$A - 2ab = 2ac + 2bc$$

Wir klammern auf der rechten Seite c aus und dividieren beide Seiten der Gleichung durch den Faktor von c.

$$A - 2ab = c(2a + 2b) \qquad |: (2a + 2b)$$
$$\frac{A - 2ab}{2a + 2b} = c$$

Beim Beweisen von Aussagen bildet man vielfach Terme, in denen Variable vorkommen, und formt diese auf geeignete Weise um.

42 Beweisen Sie die folgenden Aussagen!

a) *Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist eine ungerade Zahl.*
Eine beliebige ungerade natürliche Zahl a kann man als Summe aus einer geraden natürlichen Zahl $2x$ ($x \in N$) und der Zahl 1 darstellen.

$$a = 2x + 1 \quad (x \in N)$$

Man bildet das Quadrat von a.

$$a^2 = (2x + 1)^2$$

Man wendet die binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ an.

$$a^2 = 4x^2 + 4x + 1$$
$$a^2 = 2(2x^2 + 2x) + 1$$

a^2 ist damit als Summe aus einer geraden natürlichen Zahl und der Zahl 1 dargestellt. a^2 ist also eine ungerade natürliche Zahl.

b) *Die Differenz aus einer dreistelligen Zahl und der aus ihr durch Umkehren der Reihenfolge ihrer Grundziffern entstehenden Zahl ist durch 99 teilbar.*

Die dreistelligen Zahlen lassen sich wie folgt darstellen.

$$100a + 10b + c$$

Dabei bedeuten die Variablen a, b, c jeweils eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ($a \neq 0$).

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$$
$$= 100a + 10b + c - 100c - 10b + a = 99a - 99c = 99(a - c)$$

$a - c$ ist eine ganze Zahl. Also ist die beschriebene Differenz durch 99 teilbar.

* Der Franzose FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) gilt als der Begründer des konsequenten Arbeitens mit Buchstaben als allgemeine Zahlensymbole. Er unterschied die Bezeichnung von Variablen und Konstanten durch Verwendung von Vokalen bzw. von Konsonanten; vgl. auch Seite 135.

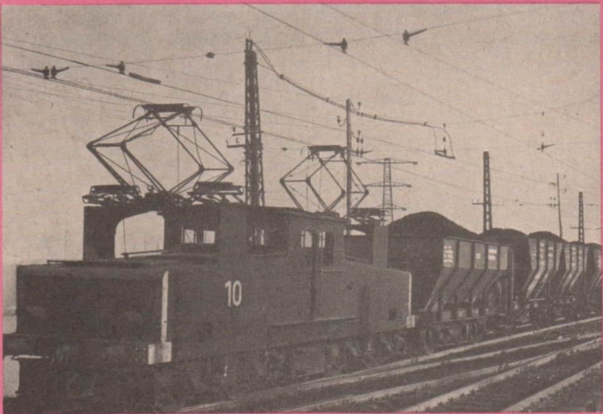
Aufgaben a 198 bis 210

B Ungleichungen und Gleichungssysteme

Auf Systeme linearer Gleichungen stößt man beim Untersuchen zahlreicher Probleme in Natur und Technik.
Hierzu gehören Transportprobleme, wie sie bei der Deutschen Reichsbahn auftauchen.
Mit Hilfe des Systems

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

kann man z. B. die Anzahlen (x und y) der Güterwagen unterschiedlicher Ladekapazitäten (a_1 und b_1) ermitteln, die man benötigt, um eine vorgegebene Ladungsmenge (c_1) in der vorgegebenen Anzahl von Güterwagen (c_2) zu transportieren. (In diesem Falle gilt $a_2 = b_2 = 1$.)



Lineare Ungleichungen

1 Wiederholung von Begriffen und von Regeln über Gleichungen

B

Die Zeichen „$<$", „$=$", „$>$" heißen **Relationszeichen.**
Verbindet man zwei Terme durch das Relationszeichen „$=$", so erhält man eine **Gleichung.** Verbindet man zwei Terme durch eines der Relationszeichen „$<$" oder „$>$", so erhält man eine **Ungleichung.**
Enthalten Gleichungen bzw. Ungleichungen keine Variablen, so sind dies **Aussagen.** Eine Aussage ist entweder *wahr* oder *falsch.*
Enthält eine Gleichung eine Variable bzw. zwei Variable und erhält man durch das Einsetzen einer Zahl bzw. zweier Zahlen eines bestimmten Grundbereichs eine wahre Aussage, dann **erfüllt** die betreffende Zahl bzw. das betreffende Zahlenpaar die Gleichung. Eine solche Zahl bzw. ein solches Zahlenpaar heißt **Lösung** der Gleichung. Die Menge sämtlicher Lösungen einer Gleichung heißt **Lösungsmenge** dieser Gleichung. Ist der Grundbereich nicht besonders angegeben, handelt es sich vereinbarungsgemäß um den Bereich der reellen Zahlen.

1 a) Es soll die Gleichung $2a - 3 = 9$ gelöst werden.
Der Grundbereich sei N (Menge der natürlichen Zahlen). $a = 6$ ist eine Lösung, denn $2 \cdot 6 - 3 = 9$ ist eine wahre Aussage.
Da die Gleichung $2a - 3 = 9$ von keiner weiteren natürlichen Zahl erfüllt wird, heißt die Lösungsmenge: $L = \{6\}$.

b) Es soll die Gleichung $2a - 3 = 8$ mit $a \in N$ gelöst werden.
Keine natürliche Zahl erfüllt diese Gleichung.
Es ist also $L = \emptyset$.

c) Es soll die Gleichung $3x = y$ gelöst werden.
Der Grundbereich sei P (Menge der reellen Zahlen).
Das Zahlenpaar $\left[x = \frac{1}{6}; y = \frac{1}{2}\right]$ ist eine Lösung, denn $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ist eine wahre Aussage.
Die Lösungsmenge besteht aus allen geordneten Paaren reeller Zahlen $[x; y]$, bei denen die erste Zahl der dritte Teil der zweiten Zahl ist.

Sind die Lösungsmengen zweier Gleichungen gleich, so sind diese Gleichungen **einander äquivalent.**
Durch Anwenden der folgenden **Umformungsregeln** erhält man zu einer Gleichung eine äquivalente Gleichung.

1. Addition bzw. Subtraktion ein und derselben Zahl oder ein und desselben Terms, der im Grundbereich der Variablen der gegebenen Gleichung definiert ist, auf beiden Seiten der Gleichung
2. Multiplikation beider Seiten mit ein und derselben von Null verschiedenen Zahl oder mit einem Term, der für keine Belegung aus dem Grundbereich der Variablen die Zahl Null ergibt
3. Division beider Seiten durch ein und dieselbe von Null verschiedene Zahl oder durch einen Term, der für keine Belegung aus dem Grundbereich der Variablen die Zahl Null ergibt

2 a) (I) $x^2 = 4$ $\qquad L_{\text{I}} = \{2; -2\}$

(II) $x^2(x + 3) = 4(x + 3)$ $\qquad L_{\text{II}} = \{2; -2; -3\}$

Die Gleichungen (I) und (II) sind nicht einander äquivalent, da die Lösungsmengen verschieden sind. Gleichung (I) kann man nicht durch Multiplizieren zu Gleichung (II) umformen, da sich durch Belegen der Variablen x des Terms $(x + 3)$ mit -3 die Zahl 0 ergibt. Das aber widerspricht Umformungsregel 2.

b) (I) $(2x + 2)(x + 1) = (8 - x)(x + 1)$ $\qquad L_{\text{I}} = \{-1; 2\}$

(II) $2x + 2 = 8 - x$ $\qquad L_{\text{II}} = \{2\}$

Die Gleichungen (I) und (II) sind nicht einander äquivalent, da die Lösungsmengen verschieden sind. Gleichung (I) kann man nicht durch Dividieren zu Gleichung (II) umformen, da sich durch Belegen der Variablen x des Terms $(x + 1)$ mit -1 die Zahl 0 ergibt. Das aber widerspricht Umformungsregel 3.

Aufgaben b 1 bis 4

B

2 Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Beim systematischen Lösen einer Gleichung wendet man die Umformungsregeln so oft an, bis die Variable nur noch allein auf einer Seite der Gleichung steht. Bevor man die gegebene Gleichung umformt, sollte man die Verknüpfung der Variablen mit den übrigen Zeichen analysieren.

3 In der Gleichung

$5(x + 3) = 4$	$c(x + b) = a$ (a, b, c reelle Zahlen; $c \neq 0$)
ist x durch *Addition*	
mit 3	mit b
verknüpft. Das Ergebnis	
$(x + 3)$	$(x + b)$
ist durch *Multiplikation*	
mit 5	mit c
verknüpft.	

Geht man diese Schritte in umgekehrter Reihenfolge und wendet dabei die Umformungsregeln an, so gelangt man schließlich zu einer Gleichung, die zur Ausgangsgleichung äquivalent ist und deren Lösung unmittelbar abgelesen werden kann.

$$\begin{aligned} 5(x + 3) &= 4 && \mid :5 \\ x + 3 &= \frac{4}{5} && \mid -3 \\ x &= \frac{4}{5} - 3 \\ x &= -\frac{11}{5} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} c(x + b) &= a && \mid :c \\ x + b &= \frac{a}{c} && \mid -b \\ x &= \frac{a}{c} - b \\ x &= \frac{a - b \cdot c}{c} \end{aligned}$$

Probe:

Linke Seite: $5 \cdot \left(-\frac{11}{5} + 3\right)$

$= 5 \cdot \frac{4}{5}$

$= 4$

Rechte Seite: 4

Vergleich: $4 = 4$

Also $L = \left\{-\frac{11}{5}\right\}$

Probe:

Linke Seite: $c \cdot \left(\frac{a - b \cdot c}{c} + b\right)$

$= c \cdot \frac{a - b \cdot c + b \cdot c}{c}$

$= c \cdot \frac{a}{c} = a$

Rechte Seite: a

Vergleich: $a = a$

Jede reelle Zahl erfüllt diese Gleichung,

also $L = \left\{\frac{a - b \cdot c}{c}\right\}$

B

Wenn man beim Lösen einer Gleichung nur solche Umformungen vornimmt, die auf einander äquivalente Gleichungen führen, ist die Probe mathematisch nicht erforderlich. Man führt sie aber stets durch, um mögliche Rechenfehler aufzudecken.
Da im allgemeinen nicht sofort zu erkennen ist, ob man bei der Probe eine wahre Aussage erhält, wird auf beiden Seiten so lange getrennt gerechnet, bis man die Gleichheit der linken und der rechten Seite bestätigt findet oder zu einer offenkundig falschen Aussage gelangt. Der zuletzt genannte Fall weist häufig auf Fehler bei den Umformungen hin.

4 Die Gleichung $\frac{7x - 14}{8} = \frac{x}{2} + 2$ wurde in $x = 10$ umgeformt.

Probe: Linke Seite: $\frac{7 \cdot 10 - 14}{8} = \frac{70 - 14}{8} = \frac{56}{8} = 7$

Rechte Seite: $\frac{10}{2} + 2 = 5 + 2 = 7$

Vergleich: $7 = 7$, also $L = \{10\}$

Eine lineare Gleichung der Form $ax + b = 0$ mit $a \neq 0$ kann man als Gleichung zum Ermitteln der **Nullstelle einer linearen Funktion** $y = ax + b$ mit $a \neq 0$ betrachten.

Wir kennen bereits die folgende Definition.

x_1 ist eine Nullstelle der Funktion f genau dann, wenn $f(x_1) = 0$ gilt.

5 Es soll die Nullstelle x_1 der linearen Funktion $y = \frac{8}{5}x - 4$ ermittelt werden.

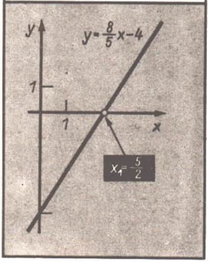
Durch Einsetzen von x_1 für x und der Zahl 0 für y in $y = \frac{8}{5}x - 4$ entsteht die Gleichung

$$0 = \frac{8}{5}x_1 - 4.$$

Diese Gleichung lösen wir nach x_1 auf.

B 1

Nullstelle einer Funktion



$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{8}{5}x_1 - 4 && \Big|\ + 4\\
4 &= \frac{8}{5}x_1 && \Big|\ : \frac{8}{5}\\
x_1 &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

$x_1 = \frac{5}{2}$ ist die Nullstelle der vorgegebenen linearen Funktion; vgl. Bild B 1.

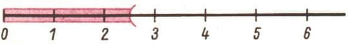
Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung der Form $ax + b = 0$ mit $a \neq 0$ ist eine Menge, die genau ein Element enthält. Sie ist in jedem Falle nur *einem* Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet. Es ist jeweils derjenige Punkt, dem die Nullstelle der entsprechenden linearen Funktion zugeordnet ist.

Aufgaben b 5 bis 36

3 Einander äquivalente Ungleichungen

Enthält eine Ungleichung eine Variable bzw. zwei Variable und erhält man durch das Einsetzen von Zahlen bzw. von Zahlenpaaren eines bestimmten Grundbereiches wahre Aussagen, dann **erfüllen** die betreffenden Zahlen bzw. die betreffenden Zahlenpaare die Ungleichung. Jede dieser Zahlen bzw. jedes dieser Zahlenpaare heißt **Lösung** der Ungleichung. Die Menge aller Lösungen einer Ungleichung heißt **Lösungsmenge** der Ungleichung.
Sind die Lösungsmengen zweier Ungleichungen über einem gegebenen Grundbereich gleich, so heißen diese Ungleichungen **einander äquivalente Ungleichungen** über diesem Grundbereich.

6 Es soll die Lösungsmenge für die lineare Ungleichung mit einer Variablen $2x < 5$ ermittelt werden.
Der Grundbereich sei R^* (Menge der gebrochenen Zahlen).
Man findet durch Probieren Lösungen, z. B. die Zahlen 0; $\frac{1}{10}$; 1,1; 2.
Man findet durch Überlegen die Lösungsmenge. Sie enthält alle gebrochenen Zahlen, die kleiner als $\frac{5}{2}$ sind; vgl. Bild B 2. Die Ungleichung $2x < 5$ ist also äquivalent mit der Ungleichung $x < \frac{5}{2}$.



B 2

Daß es sich bei $3(x - 2) > x - 10$ und $x > -2$ um einander äquivalente Ungleichungen handelt, ist nicht unmittelbar zu erkennen.
Mit Hilfe der übersichtlicheren Ungleichung $x > -2$ ist die Lösungsmenge leicht anzugeben.
Um die Lösungsmenge einer Ungleichung zu ermitteln, formt man diese Ungleichung in einfachere übersichtlichere äquivalente Ungleichungen um. In Lerneinheit B 4 lernen wir Regeln für das Umformen von Ungleichungen kennen.

1 a) *Geben Sie einige reelle Zahlen x an, die die Ungleichung $3x + 5 < x$ erfüllen!*

b) *Ermitteln Sie alle ganzen Zahlen g, für die gilt: $g - 2 < 4$!*

c) *Ist $2\left(\frac{7}{2} - \frac{7}{6}\right) > 3 \cdot \frac{5}{3}$ eine wahre Aussage?*

Aufgaben b 37 bis 44

4 Regeln für das Umformen von Ungleichungen

B

Wir wollen im folgenden Regeln auch für das Umformen von Ungleichungen aufstellen und sie mit den Regeln für das Umformen von Gleichungen vergleichen.

7 a) Die Lösungsmengen der Ungleichungen $x - 3 > 2$ und $x > 5$ sind gleich: $L = \{x > 5;\, x \in P\}$.

Diese beiden Ungleichungen sind also einander äquivalent.

$$x - 3 > 2 \quad | + 3 \qquad\qquad x > 5 \quad | - 3$$
$$x > 5 \qquad\qquad\qquad x - 3 > 2$$

$L = \{x > 5;\, x \in P\}$ wollen wir lesen: Die Lösungsmenge L ist gleich der Menge aller reellen Zahlen x, die größer als 5 sind.

Hinweis:

Beim Umformen einer Gleichung geben wir hinter einem senkrechten Strich neben der Gleichung die Zahl und die Rechenoperation an, die auf beiden Seiten der Gleichung mit dieser Zahl auszuführen ist; vgl. Lerneinheit B 2.
Wir wenden diese Kennzeichnung auch im folgenden beim Umformen von Ungleichungen an.

b) Die Ungleichungen $4 + x < -5$ und $x < -9$ sind einander äquivalent.

Die Lösungsmengen dieser Ungleichungen sind nämlich gleich:

$L = \{x < -9;\, x \in P\}$.

$$4 + x < -5 \quad | -4 \qquad\qquad x < -9 \quad | +4$$
$$x < -9 \qquad\qquad\qquad 4 + x < -5$$

c) $L = \{x > 1;\ x \in P\}$ ist die Lösungsmenge sowohl der Ungleichung $3x > 2x + 1$ als auch der Ungleichung $x > 1$.

Diese beiden Ungleichungen sind also einander äquivalent.

$$3x > 2x + 1 \quad | - 2x \qquad\qquad x > 1 \quad | + 2x$$
$$x > 1 \qquad\qquad\qquad 3x > 2x + 1$$

Wir stellen fest: Addieren bzw. Subtrahieren ein und derselben Zahl auf beiden Seiten einer Ungleichung führt auf eine zu dieser äquivalenten Ungleichung. Das Relationszeichen bleibt dabei unverändert.
Diese Feststellung folgt aus dem **Monotoniegesetz der Addition reeller Zahlen.**

1 **SATZ: Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:**
Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$ und $a - c < b - c$.

8 a) Die Ungleichungen $5x > 10$ und $x > 2$ sind einander äquivalent, denn für beide gilt:

$L = \{x > 2;\ x \in P\}$.

$$5x > 10 \quad |:5 \qquad x > 2 \quad |\cdot 5$$
$$x > 2 \qquad\qquad 5x > 10$$

b) $L = \{x > -3;\ x \in P\}$ ist die Lösungsmenge sowohl der Ungleichung $-4x < 12$ als auch der Ungleichung $x > -3$.

Diese beiden Ungleichungen sind also einander äquivalent.

$$-4x < 12 \quad |:(-4) \qquad x > -3 \quad |\cdot(-4)$$
$$x > -3 \qquad\qquad -4x < -12$$

Wir stellen fest: Multiplizieren beider Seiten einer Ungleichung mit ein und derselben von Null verschiedenen Zahl bzw. Dividieren durch ein und dieselbe von Null verschiedenen Zahl führt auf eine zu dieser äquivalenten Ungleichung. Ist eine Ungleichung mit einer *negativen* Zahl zu multiplizieren bzw. durch eine *negative* Zahl zu dividieren, so kehrt sich das Relationszeichen dabei um.
Diese Feststellung folgt aus dem **Monotoniegesetz der Multiplikation reeller Zahlen.**

2 **SATZ: Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:**

Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$ und $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$ und $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

2 *Geben Sie das Monotoniegesetz der Multiplikation reeller Zahlen in Worten wieder!*

3 *Vergleichen Sie die Umformungsregeln für Ungleichungen mit denen für Gleichungen; vgl. Seite 44! Stellen Sie dabei die Gemeinsamkeiten und Unterschiede fest!*

Zusammenfassung:

Durch Anwenden der folgenden **Umformungsregeln** erhält man zu einer Ungleichung eine äquivalente Ungleichung.

1. Addition bzw. Subtraktion ein und derselben Zahl oder ein und desselben Terms, der im Grundbereich der Variablen der gegebenen Ungleichung definiert ist, auf beiden Seiten der Ungleichung
2. Multiplikation beider Seiten mit ein und derselben positiven Zahl
3. Division beider Seiten durch ein und dieselbe positive Zahl
4. Bei der Multiplikation beider Seiten mit ein und derselben negativen Zahl kehrt sich das Relationszeichen um.
5. Bei der Division beider Seiten durch ein und dieselbe negative Zahl kehrt sich das Relationszeichen um.

5 Ungleichungen zum Kennzeichnen von Intervallen

Die Menge der reellen Zahlen x, die zwischen zwei gegebenen reellen Zahlen a und b $(a < b)$ liegen, heißt **Intervall**; vgl. Seite 14.
Intervalle werden häufig mit Hilfe von Ungleichungen gekennzeichnet. Für

die Zugehörigkeit der Zahlen a und b zur betrachteten Menge der reellen Zahlen x bestehen dabei die folgenden Möglichkeiten.

$a < x < b$	Weder a noch b gehören zur Menge.
$a \leqq x < b$	a gehört zur Menge.
$a < x \leqq b$	b gehört zur Menge.
$a \leqq x \leqq b$	a und b gehören zur Menge.

B

4 *Kennzeichnen Sie die folgenden Intervalle auf je einer Zahlengeraden mit Hilfe eines Farbstiftes!*

a) $-1 < x < 0$ b) $0 < x < 2$

c) $1 < x < 2$ d) $|x| < 1$

Intervalle im weiteren Sinne sind die folgenden Zahlenmengen.

Die Menge aller Zahlen x mit $x \in P$	kann man beschreiben mit Hilfe der Ungleichung
–, die kleiner als b sind,	$x < b$.
–, die kleiner oder gleich b sind,	$x \leqq b$.
–, die größer als a sind,	$x > a$.
–, die größer oder gleich a sind,	$x \geqq a$.

6 Lineare Ungleichungen mit einer Variablen

Die zu $ax + b > 0$ bzw. $ax + b < 0$ $(a \neq 0)$ äquivalenten Ungleichungen mit einer Variablen (x) sind **lineare Ungleichungen mit einer Variablen**; vgl. Beispiele B 7 und B 8 auf Seite 48.
Die Ungleichung $7x^2 \cdot 3 < 9$ beispielsweise ist jedoch keine lineare Ungleichung, weil in ihr die Variable x nicht nur in der ersten Potenz enthalten ist.

9 a) Es sollen alle ganzen Zahlen x, die die Ungleichung $2x - 3 < x + 1$ erfüllen, ermittelt werden.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< x + 1 \quad &| + 3 \\ 2x &< x + 4 \quad &| - x \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Nach Umformungsregel 1. (vgl. Seite 49) sind die Ungleichungen $2x - 3 < x + 1$ und $x < 4$ einander äquivalent.
Die Lösungsmenge $L = \{x < 4;\ x \in G\}$ kann man auf Punkte einer Zahlengeraden abbilden; vgl. Bild B 3.

B 3

b) Es sollen alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $\frac{3}{2}x - 1 > 4$ erfüllen, ermittelt werden.

$$\begin{array}{rl|l} \frac{3}{2}x - 1 &> 4 & +1 \\ \frac{3}{2}x &> 5 & :\frac{3}{2} \\ x &> 5 : \frac{3}{2} & \\ x &> \frac{10}{3} & \end{array}$$

Die Lösungsmenge $L = \left\{x > \frac{10}{3};\ x \in P\right\}$ ist im Bild B 4 dargestellt.

B 4

(5) a) *Nennen Sie die Regeln, die bei den Umformungen im Beispiel B 9b) benutzt wurden!*

b) *Wodurch unterscheidet sich die Menge aller positiven ganzen Zahlen von der Menge aller nicht negativen ganzen Zahlen?*

[10] Es ist die Lösungsmenge der Ungleichung $2 - 3x > -10$ im Bereich der nicht negativen ganzen Zahlen zu ermitteln.

$$\begin{array}{rl|l} 2 - 3x &> -10 & -2 \\ -3x &> -12 & :(-3) \\ x &< 4 & \end{array}$$

$L = \{0; 1; 2; 3\}$ ist eine endliche Menge; vgl. Bild B 5.

B 5

(6) *Zeigen Sie, daß die Ungleichungen $3(x - 2) > x - 10$ und $x > -2$ einander äquivalent sind!*

[11] Es sollen alle natürlichen Zahlen n ermittelt werden, die die Ungleichung $2(1 - n) - n > n - 2$ erfüllen!

$$\begin{array}{rl|l} 2(1 - n) - n &> n - 2 & \\ 2 - 2n - n &> n - 2 & \\ 2 - 3n &> n - 2 & -2 \\ -3n &> n - 4 & -n \\ -4n &> -4 & :(-4) \\ n &< 1 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge enthält nur die natürliche Zahl Null: $L = \{0\}$.

(7) *Wodurch unterscheiden sich die Mengen $M_1 = \emptyset$ und $M_2 = \{0\}$?*

Aufgaben b 45 bis 54

Was auf Seite 46 über die Notwendigkeit der Probe bei Gleichungen gesagt wurde, gilt auch für Ungleichungen.
Wir stellten fest, daß die Lösungsmengen von Ungleichungen häufig aus unendlich vielen Zahlen bestehen. Es ist also nicht möglich, mit jeder Lösung einer Ungleichung die Probe durchzuführen. Wir wollen eine Möglichkeit der Probe für die Gesamtheit der Lösungen einer Ungleichung kennenlernen.

Wir kennen bereits Darstellungen für bestimmte Zahlenmengen,

z. B. für alle geraden Zahlen a — $a = 2 \cdot n, \quad n \in G$;
für alle natürlichen Zahlen b, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen — $b = 3 \cdot n + 2, \quad n \in N$;
für alle nicht positiven ganzen Zahlen c — $c = -n, \quad n \in N$;
für alle rationalen Zahlen d — $d = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in G$ und $q \neq 0$.

B

12 Man kann darstellen

a) alle natürlichen Zahlen x mit $x > 10$ als: $x = 10 + n;\ n \in N,\ n \neq 0$;

b) alle rationalen Zahlen x mit $x < 3{,}5$ als: $x = 3{,}5 - r;\ r \in R,\ r > 0$;

c) alle reellen Zahlen x mit $x > -\frac{17}{7}$ als: $x = -\frac{17}{7} + p;\ p \in P,\ p > 0$.

8 *Geben Sie Darstellungen für die Lösungsmengen folgender Ungleichungen an!*

a) $x < -2;\ x \in R$ b) $x > 21;\ x \in N$ c) $x < \sqrt{2};\ x \in P$ d) $x > \frac{27}{4};\ x \in P$

Man formt bei der Probe nach dem Einsetzen der Lösungsmenge in die Ausgangsgleichung jede Seite für sich geeignet um und vergleicht beide Seiten miteinander.

13 *Probe* zur Lösungsmenge der Ungleichung

$$3 + x > -5;\ x \in P:\quad L = \{x > -8;\ x \in P\}$$

Die Zahlen x der Lösungsmenge schreibt man als Summe:

$$x = -8 + p;\quad p \in P;\quad p > 0.$$

Man schreibt für x in der Ausgangsgleichung $-8 + p$.

Linke Seite: $3 + (-8 + p) = 3 - 8 + p = -5 + p$

Rechte Seite: -5

Vergleich: $-5 + p > -5$ für $p > 0$, also $L = \{x > -8;\ x \in P\}$

14 *Probe* zu Beispiel B 9a) auf Seite 50: $(2x - 3 < x + 1;\ x \in G)$:

Für $L = \{3; 2; 1; 0; -1; \ldots\}$ können wir auch schreiben:

$$L = \{4 - g \text{ mit } g \in G \text{ und } g > 0\}.$$

Wir ersetzen in der Ausgangsgleichung x durch $4 - g$.

Linke Seite: $2(4 - g) - 3 = 8 - 2g - 3 = 5 - 2g$

Rechte Seite: $4 - g + 1 = 5 - g - g + g = 5 - 2g + g$

Vergleich: $(5 - 2g) < (5 - 2g) + g$ für $g > 0$,

also $L = \{x < 4; x \in G\}$

Ist die Lösungsmenge endlich, wie in den Beispielen B 10 und B 11, so kann man durch Einsetzen jeder einzelnen Lösung die Probe durchführen. Dabei wird es allerdings recht zeitraubend, wenn die Anzahl der Lösungen groß ist. Man kann aber auch hier wie im Beispiel B 13 verfahren, indem man die Lösungsmenge mit Hilfe einer Gleichung darstellt.

B

9 *Führen Sie die Probe zum Beispiel B 9b) auf Seite 51 durch!*

8 Lösen von Sachaufgaben

Das Lösen von **Sachaufgaben** führt oft auf das Lösen linearer Gleichungen bzw. Ungleichungen mit einer Variablen. Zusätzlich zu den in den Lerneinheiten B 2, B 6 und B 7 behandelten Verfahrensweisen hat man noch solche Überlegungen anzustellen, wie sie als Schritte 1. bis 5. in der Tabelle des Beispiels B 15 ausgewiesen sind.

15 Eine Stadt liegt an einem Fluß. Oberhalb der Stadt entsteht am Fluß ein Naherholungszentrum. In welcher Entfernung von der Stadt sollte die Dampferanlegestelle des Erholungsgebietes gebaut werden, damit die reine Fahrzeit des Dampfers von der Stadt zu dieser Stelle und zurück nicht länger als $1\frac{1}{2}$ h dauert? Die Geschwindigkeit des Dampfers sei $12\,\text{kmh}^{-1}$, die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses sei $4\,\text{kmh}^{-1}$.

1. Erfassen des Sachverhaltes (Text) Dabei stellt man die gegebenen und die gesuchten Größen fest und führt geeignete Bezeichnungen (Variable) für sie ein.	Entfernung von der Stadt s in km Fahrzeit für Hin- und Rückfahrt t in h Geschwindigkeit des Dampfers v_1 in km h^{-1} Strömungsgeschwindigkeit des Flusses v_2 in km h^{-1} Alle Größen außer s sind vorgegeben $\left(t = 1\frac{1}{2}\,h;\ v_1 = 12\,\text{km h}^{-1};\ v_2 = 4\,\text{km h}^{-1}\right)$.
2. Aufstellen einer Gleichung bzw. Ungleichung Dabei bringt man ausgehend vom Sachverhalt die Größen in richtige Beziehungen zueinander.	Die Bewegungen des Dampfers und des Wassers in der Fahrrinne werden als gleichförmig angenommen, d. h., es steht die *Gleichung* $v = \frac{s}{t}$ zur Verfügung. Geschwindigkeit des Dampfers bei der Hinfahrt $v_1 - v_2$ bei der Rückfahrt $v_1 + v_2$ Zeit für Hinfahrt $\frac{s}{v_1 - v_2}$ Zeit für Rückfahrt $\frac{s}{v_1 + v_2}$ *Ungleichung:* $\frac{s}{v_1 - v_2} + \frac{s}{v_1 + v_2} \leq t$

3. Lösen der Gleichung bzw. der Ungleichung Dabei sind die Umformungsregeln zu beachten.	$\frac{s}{v_1 - v_2} + \frac{s}{v_1 + v_2} \leqq t \quad \Big\vert \cdot (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)$ $(v_1 + v_2 > 0;\ v_1 - v_2 > 0)$ $s(v_1 + v_2) + s(v_1 - v_2) \leqq t(v_1 + v_2)(v_1 - v_2)$ $2v_1 s \leqq t(v_1^2 - v_2^2) \quad \vert : 2v_1$ $s \leqq \frac{t(v_1^2 - v_2^2)}{2v_1}$ $s \leqq \frac{\frac{3}{2}h[(12\text{ km h}^{-1})^2 - (4\text{ km h}^{-1})^2]}{24\text{ km h}^{-1}}$ $s \leqq 8\text{ km}$
4. Probe am Sachverhalt (nicht mit der aufgestellten Gleichung bzw. Ungleichung)	Die Entfernung s läßt sich schreiben: $s = (8 - p)$ km mit $p \in P$ und $0 \leqq p \leqq 8$. Fahrzeit für Hinfahrt $\frac{(8 - p)\text{ km}}{8\text{ km h}^{-1}} = \left(1 - \frac{p}{8}\right)$ h Fahrzeit für Rückfahrt $\frac{(8 - p)\text{ km}}{16\text{ km h}^{-1}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{16}\right)$ h Summe der Fahrzeiten $\left(\frac{3}{2} - \frac{3p}{16}\right)$ h Diese Zeit ist stets kleiner als oder gleich $\frac{3}{2}$ h.
5. Antwortsatz Dabei fixiert man das Ergebnis (die Lösungsmenge) vom Sachverhalt her sprachlich.	Die Dampferanlegestelle darf nicht mehr als 8 km von der Stadt entfernt sein.

Aufgaben b 55 bis 63

9* Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

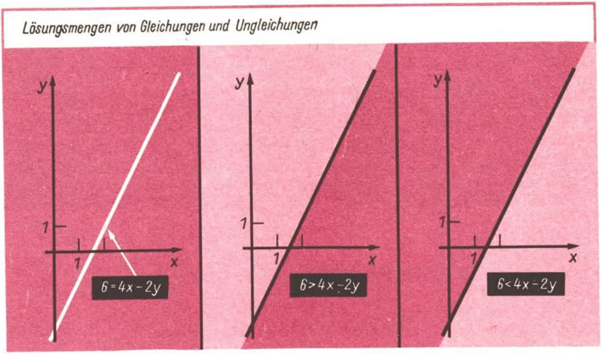
Lösungen von Gleichungen mit zwei Variablen haben wir gelegentlich bereits ermittelt.

16 Es soll die Lösungsmenge der Gleichung $6 = 4x - 2y$ ermittelt werden.
Durch Umformen gelangt man zur äquivalenten Gleichung $y = 2x - 3$. Man erkennt als Lösungsmenge alle Zahlenpaare $[x; 2x - 3]$. Die gesamte Lösungsmenge wird dargestellt durch den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = 2x - 3$; vgl. Bild B 6.

Die zu $ax + by + c < 0$ bzw. $ax + by + c > 0$ äquivalenten Ungleichungen mit zwei Variablen (x, y) sind **lineare Ungleichungen mit zwei Variablen.** Die Lösungen sind Zahlenpaare $[x; y]$.
Solche Ungleichungen mit zwei (und vor allem mit mehr als zwei) Variablen spielen beim Lösen von Optimierungsproblemen eine Rolle.

17 a) Es soll die Lösungsmenge der Ungleichung $6 > 4x - 2y$ ermittelt werden.
Durch Umformen erhält man die äquivalente Ungleichung $y > 2x - 3$.
Die Lösungsmenge enthält alle Zahlenpaare $[x; y]$ mit $y > 2x - 3$. Sie wird durch die Punkte der Halbebene oberhalb der Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 3$ dargestellt; vgl. Bild B 7.

b) Es soll die Lösungsmenge der Ungleichung $6 < 4x - 2y$ ermittelt werden.
Durch analoge Überlegungen zu a) erhält man:
Die Lösungsmenge enthält alle Zahlenpaare $[x; y]$ mit $y < 2x - 3$. Sie wird durch die Punkte der Halbebene unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 3$ dargestellt; vgl. Bild B 8.



B 6 B 7 B 8

Systeme aus zwei linearen Gleichungen

10 Wiederholung linearer Funktionen mit Gleichungen der Form $y = mx + n$

Wir erinnern uns an die Definition der linearen Funktion.

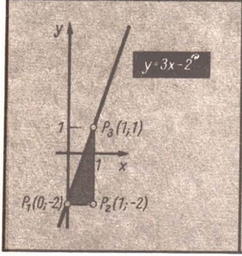
3 **DEFINITION: Eine lineare Funktion ist die Menge aller geordneten Paare $[x; y]$, die eine lineare Gleichung der Form $y = mx + n$ erfüllen.**

Der Graph einer Funktion mit der Gleichung $y = mx + n$ ist eine Gerade. Die Punkte $P_1(0; n)$, $P_2(1; n)$ und $P_3(1; m + n)$ bestimmen ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse ein Teil der Geraden ist. Es heißt **Anstiegsdreieck** der Geraden.
Durch n wird bestimmt, in welchem Punkt $P_1(0; n)$ die Gerade die y-Achse schneidet.
Durch m ist die Richtung der Geraden festgelegt, deshalb heißt m **Anstieg** der Geraden.

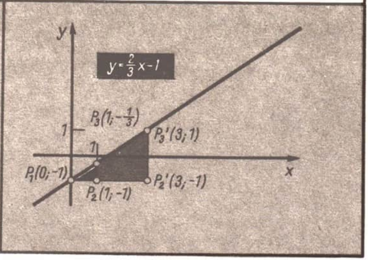
18 a) Es soll die lineare Funktion mit der Gleichung $y = 3x - 2$ mit Hilfe des Anstiegsdreiecks graphisch dargestellt werden. Die Gerade wird durch die Punkte $P_1(0; -2)$ und $P_3(1; 1)$ gelegt; vgl. Bild B 9.

b) Es soll der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x - 1$ mit Hilfe des Anstiegsdreiecks gezeichnet werden.
Für das Anstiegsdreieck $P_1P_2P_3$ bereitet das sichere Zeichnen von $P_3\left(1; -\frac{1}{3}\right)$ Mühe. Darum verwendet man häufig ein dazu ähnliches Anstiegsdreieck, z. B.: $P_1(0; -1)$ $P_2(3; -1)$ $P_3(3; 1)$; vgl. Bild B 10.

Graphen linearer Funktionen mit Anstiegsdreiecken



B 9



B 10

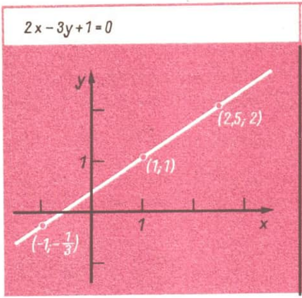
11 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Gelangt man von einer Gleichung mit einer Variablen x durch Umformungen zu einer äquivalenten Gleichung der Form $ax + b = 0$, wobei a $(a \neq 0)$ und b Zahlen bzw. Größen eines Zahlbereichs bzw. Größenbereichs sind, so handelt es sich um eine **lineare Gleichung mit einer Variablen.**
Kommen in einer Gleichung zwei Variablen x, y vor und gelangt man durch Umformung zu einer äquivalenten Gleichung der Form $ax + by + c = 0$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$, so liegt eine **lineare Gleichung mit zwei Variablen** vor.
Eine Lösung einer linearen Gleichung mit *einer* Variablen ist eine Zahl bzw. eine *Größe*. Eine Lösung einer linearen Gleichung mit *zwei* Variablen ist ein *geordnetes Zahlenpaar* bzw. ein *geordnetes Paar von Größen.*
Wie man beliebig viele solcher geordneten Paare bei gegebener Gleichung ermittelt, lernten wir bereits beim Aufstellen einer Wertetabelle von Funktionen, bei denen die Zuordnung der Elemente von Definitionsbereich und Wertebereich durch eine Gleichung gegeben ist. Nach der Wahl einer Zahl für eine Variable (z. B. für x) berechnet man die dazugehörige zweite Zahl. Zum Erleichtern des Rechnens ist es ratsam, die Gleichung vorher nach einer Variablen aufzulösen (z. B. nach y).

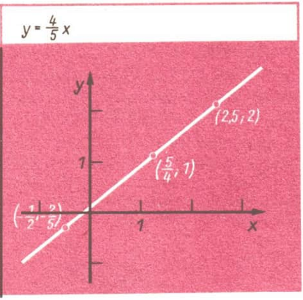
19 Es sollen einige Lösungen der Gleichung $2x - 3y + 1 = 0$ ermittelt werden. Eine Lösung ist das geordnete Zahlenpaar $[x = 1; y = 1]$. Weitere Lösungen wollen wir in einer Tabelle aufführen. Dabei benutzen wir die zur vorgegebenen Gleichung äquivalente Gleichung $y = \dfrac{2x + 1}{3}$.

x	-5	$-\frac{18}{5}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{2}$	8	...
y	-3	$-\frac{31}{15}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2 \cdot \sqrt{2} + 1}{3}$	2	$\frac{17}{3}$	...

Wir können die Lösungsmenge der Gleichung $2x - 3y + 1 = 0$ graphisch darstellen, vgl. Bild B 11. Auf ihre (arithmetische) Angabe (mit Hilfe von Variablen) verzichten wir hier.



B 11



B 12

20 Es sollen Paare reeller Zahlen, die die Gleichung $y = \frac{4}{5}x$ erfüllen, ermittelt werden.
Einige Lösungen der Aufgabe sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

x	-5	-4	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{5}{2}$	6	…
y	-4	$-\frac{16}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{4}{5}\sqrt{3}$	2	$\frac{24}{5}$	…

Die Zahlenpaare $\left[x; \frac{4}{5}x\right]$ der Lösungsmenge als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt, ergeben eine Gerade; vgl. Bild B 12.

10 *Geben Sie für jede der folgenden Gleichungen fünf Lösungen an! Stellen Sie jeweils die Lösungsmenge graphisch dar!*
a) $a : b = 2 : 3$ b) $25t = s$ c) $2x + 4y - 3 = 0$ d) $x - y = 0$
Beachten Sie bei der Darstellung von a), *daß das Zahlenpaar* [0; 0] *keine Lösung ist!*

Aufgaben b 64 bis 67

12 Durchschnitt zweier Mengen

21 Die Schüler einer Klasse 9 führen zwei NAW-Einsätze durch. Jeder der 30 Schüler dieser Klasse beteiligt sich an mindestens einem Einsatz. Am ersten Einsatz nehmen 26 Schüler, am zweiten Einsatz nehmen 23 Schüler teil.

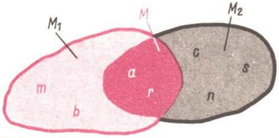
Man kann die verschiedenen Mengen wie folgt bezeichnen:
M_1 sei die Menge der am ersten Einsatz beteiligten Schüler,
M_2 sei die Menge der am zweiten Einsatz beteiligten Schüler,
M sei die Menge der an beiden Einsätzen beteiligten Schüler.

Zur Menge M gehören also alle Schüler, die **sowohl** am ersten **als auch** am zweiten Einsatz beteiligt waren.
Es sind dies 19 Schüler dieser Klasse.

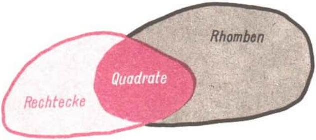
22 Gegeben seien die Mengen $M_1 = \{a, b, m, r\}$, $M_2 = \{a, c, n, r, s\}$. Die Menge $M = \{a, r\}$ enthält dann alle Buchstaben, die Element von M_1 **und** Element von M_2 sind; vgl. Bild B 13.

Im Beispiel B 22 wird zum Beschreiben der Auswahl der Elemente für die Menge M das Wort „und" nicht im Sinne einer Aufzählung, sondern im Sinne von „sowohl ... als auch" benutzt.

23 Es sei die Menge aller Vierecke zu bilden, die zur Menge M_1 der Rechtecke *und* zur Menge M_2 der Rhomben gehören.
Die Menge M enthält also alle Vierecke, die die Eigenschaften *sowohl* der Rechtecke *als auch* der Rhomben haben. M ist demnach die Menge der Quadrate; vgl. Bild B 14.



B 13



B 14

Die Menge M heißt *Durchschnitt* der Mengen M_1, M_2 genau dann, wenn für alle Elemente x von M gilt:

$$x \in M_1 \quad \textit{und} \quad x \in M_2.$$

Wir schreiben: „$M = M_1 \cap M_2$" oder

$$„M = \{x;\ x \in M_1 \quad \textit{und} \quad x \in M_2\}“.$$

24 Es sei M_1 die Menge der geraden Zahlen, M_2 die Menge der Primzahlen. Es ist der Durchschnitt der Mengen M_1, M_2 zu bilden.
Die Menge M enthält genau ein Element, nämlich die Zahl 2. Die Zahl 2 ist sowohl gerade Zahl als auch Primzahl.

$$M_1 = \{0; 2; 4; 6; 8; \ldots\} \qquad M_2 = \{2; 3; 5; 7; 11; \ldots\}$$

$$M = M_1 \cap M_2 = \{2\}$$

11 a) *Unter welcher Bedingung ist der Durchschnitt zweier Mengen gleich der leeren Menge?*
b) *Bilden Sie den Durchschnitt der Mengen* $M_1 = \{0; 2; 4; 6; 8; \ldots; 2n; \ldots\}$ *und* $M_2 = \{0; 4; 8; 12; \ldots; 4n; \ldots\}$ $(n \in N)$!
c) *Nennen Sie Beispiele für die Verwendung des Begriffes „Durchschnitt zweier Mengen" in außermathematischen Sachbereichen!*

Aufgaben b 68 bis 75

13 Systeme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen

25 Es sollen die Längen der Durchmesser einer zweistufigen Riemenscheibe ermittelt werden. Der Durchmesser der größeren Scheibe soll 6 cm länger als der der kleineren sein. Die Längen der Durchmesser sollen sich wie 4 : 5 verhalten; vgl. Bild B 15. Die beiden Bedingungen für die Längen der Durchmesser werden durch folgende Gleichungen erfaßt.

(I) $d_2 - d_1 = 6$ cm

(II) $d_1 : d_2 = 4$ cm : 5 cm

Es ist ein Paar von Durchmessern $[d_1; d_2]$ zu ermitteln, das beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt.
Man kann durch systematisches Probieren solch ein Paar $[d_1; d_2]$ finden.

(I) $d_2 - d_1 = 6$ cm

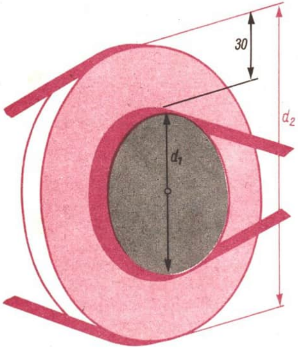
d_1 in cm	1	...	2,5	...	12	...	24	...	43,2	...
d_2 in cm	7	...	8,5	...	18	...	30	...	49,2	...

(II) $d_1 : d_2 = 4$ cm : 5 cm

d_1 in cm	4	...	8	...	12	...	24	...	60	...
d_2 in cm	5	...	10	...	15	...	30	...	75	...

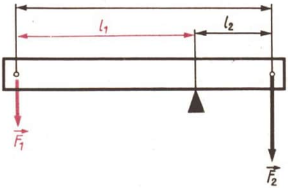
Ein Paar von Durchmessern, das sowohl die erste als auch die zweite Gleichung erfüllt, ist [24 cm; 30 cm]. Es gibt kein weiteres Paar, das beide Gleichungen erfüllt.
Wir führen die Probe am Sachverhalt durch.
Die Differenz der Durchmesser beträgt 30 cm − 24 cm = 6 cm, das Verhältnis der Durchmesser ist $\frac{24 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$.
Die Stufenscheibe muß die Durchmesser 24 cm und 30 cm besitzen.

26 In welcher Entfernung von den Angriffspunkten der Kräfte $F_1 = 200$ p und $F_2 = 300$ p muß ein Hebel unterstützt werden, damit er im Gleichgewicht ist? Der Abstand der Wirkungslinien der beiden Kräfte sei $l = 60$ cm; vgl. Bild B 16.



B 15

B 16



B

Es ist ein Paar von Strecken $[l_1; l_2]$ zu ermitteln, das die beiden Gleichungen

(I) $l_1 + l_2 = l$

(II) $\underline{F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2}$

gleichzeitig erfüllt.

12 *Ermitteln Sie durch systematisches Probieren ein Paar von Strecken $[l_1; l_2]$, indem Sie analog zu Beispiel B 25 verfahren!*

Systeme von Gleichungen wie in den Beispielen B 25 und B 26 werden als **Systeme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen** bezeichnet. Es ist üblich, die beiden Gleichungen eines solchen Systems untereinander zu schreiben und mit Hilfe eines waagerechten Striches unter der zweiten Gleichung ihre Zusammengehörigkeit zu kennzeichnen. Eine Lösung eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen ist ein Paar von Größen bzw. ein Zahlenpaar.

B

27 Es ist eine Lösung des folgenden Systems zu ermitteln.

(I) $2x - 3y + 1 = 0$

(II) $\underline{\qquad y = \frac{4}{5}x}$

Eine Lösung des gegebenen Systems ist ein Zahlenpaar, das sowohl Element der Lösungsmenge der Gleichung (I) als auch Element der Lösungsmenge der Gleichung (II) ist. Man erkennt mit Hilfe der Tabellen in den Beispielen B 19 und B 20 das Zahlenpaar $\left[\frac{5}{2}; 2\right]$ als eine Lösung des gegebenen Systems. Dieses Zahlenpaar ist Element des Durchschnitts der Lösungsmenge der Gleichung (I) und der Lösungsmenge der Gleichung (II).

Es liegt nun die folgende Definition nahe.

4 **DEFINITION: Die Lösungsmenge eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen ist gleich dem Durchschnitt der Lösungsmengen der beiden Einzelgleichungen.**

14 Lösungsmengen von Systemen aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen

Wenn im folgenden von einem Gleichungssystem gesprochen wird, ohne daß ein ganz bestimmtes gemeint ist, wollen wir uns die **allgemeine Form** eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen x, y vorstellen.

(I) $a_1x + b_1y = c_1$ (a_1 und b_1 nicht beide 0)

(II) $\underline{a_2x + b_2y = c_2}$ (a_2 und b_2 nicht beide 0)

Hierbei sind a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 Variable für beliebige, aber für ein bestimmtes Gleichungssystem fest gewählte Zahlen. Die Lösungsmenge der Gleichung (I) bezeichnen wir mit L_{I}, die der Gleichung (II) mit L_{II}.
Die Lösungsmengen L_{I} und L_{II} der beiden Gleichungen eines Systems lassen sich in einem Koordinatensystem durch je eine Gerade darstellen. Die Lösungsmenge dieses Systems ist dann gleichbedeutend mit der Menge der gemeinsamen Punkte der beiden Geraden bzw. mit der Menge der Koordinatenpaare dieser gemeinsamen Punkte.

Um Aussagen über die Lösungsmengen von Gleichungssystemen zu machen, kann man also die Lage zweier Geraden zueinander in der Ebene betrachten.
Man nimmt dazu eine Einteilung aller Möglichkeiten mit dem Ziel vor, die Lagen zweier Geraden zueinander in endlich vielen verschiedenen Fällen zu erfassen.
Es sei g_1 eine beliebige Gerade einer Ebene. Für die Lage einer zweiten Geraden g_2 dieser Ebene bezüglich g_1 ist es sinnvoll, die folgenden drei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: g_1 und g_2 schneiden einander in einem Punkt.
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems enthält genau ein Element, d. h. ein Zahlenpaar $[x; y]$.

Fall 2: g_1 und g_2 fallen zusammen, d. h., sie haben unendlich viele Punkte gemeinsam.
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems enthält unendlich viele Elemente. Das Gleichungssystem besteht aus zwei einander äquivalenten Gleichungen.

Fall 3: g_1 und g_2 sind parallel zueinander, fallen aber nicht zusammen, d. h., sie haben keinen Punkt gemeinsam.
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems enthält kein Element, sie ist die leere Menge.

28 Es soll festgestellt werden, zu welchem der drei Fälle die folgenden Gleichungssysteme gehören.

a) Um die Geraden leichter zeichnen zu können, lösen wir beide Gleichungen nach y auf.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3x + y = 3 \\ \text{(II)} & -x + 2y = -8 \\ \hline \text{(I')} & y = -3x + 3 \\ \text{(II')} & y = \frac{1}{2}x - 4 \end{array}$$

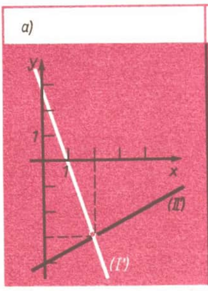
Dieses Gleichungssystem gehört zum Fall 1; vgl. Bild B 17.

b) Wir lösen beide Gleichungen nach y auf.

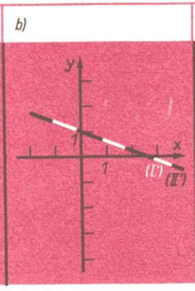
$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 2x + 5y = 5 \\ \text{(II)} & 6x + 15y = 15 \\ \hline \text{(I')} & y = -\frac{2}{5}x + 1 \\ \text{(II')} & y = -\frac{2}{5}x + 1 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem gehört zum Fall 2; vgl. Bild B 18.

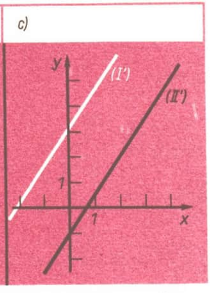
B 17



B 18



B 19



c) (I) $-6x + 4y = 8$
(II) $-3x + 2y = -2$

Wir lösen wieder beide Gleichungen nach y auf.

(I′) $y = \frac{3}{2}x + 2$

(II′) $y = \frac{3}{2}x - 1$

Dieses Gleichungssystem gehört zum Fall 3; vgl. Bild B 19.

Aufgaben b 76 bis 78

B

15 Näherungslösungen von Gleichungssystemen

Man kann aus den bisherigen Feststellungen eine Methode zum Ermitteln von **Näherungslösungen** von Gleichungssystemen ableiten.
Man stellt die Lösungsmengen zweier vorgegebener Gleichungen in einem Koordinatensystem graphisch dar und liest die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden ab. Auf diese Weise erhält man, durch die Zeichenungenauigkeiten bedingt, im allgemeinen Näherungslösungen.
Sind die Koordinaten der Schnittpunkte sehr große, sehr kleine oder keine ganzen Zahlen, so können die „graphischen Lösungen" beträchtlich von den „tatsächlichen" Lösungen abweichen. Das kann auch dann der Fall sein, wenn sich die beiden Geraden unter einem sehr spitzen Winkel schneiden.

29 Es soll das Gleichungssystem

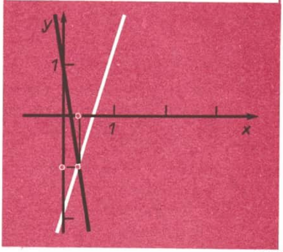
(I) $9x - 3y = 6$
(II) $6x + y = 1$

graphisch gelöst werden.
Wir lösen beide Gleichungen nach y auf und zeichnen die Geraden in ein und dasselbe Koordinatensystem; vgl. Bild B 20.

(I′) $y = 3x - 2$
(II′) $y = -6x + 1$

Als einzige Lösung stellen wir das Zahlenpaar $[0{,}3;\ -1]$ fest.
Wir führen eineProbe durch. Dazu müssen wir die Lösung in beide Gleichungen einsetzen.

Graphische Lösung



B 20

	(I)	(II)
Probe:		
Linke Seite:	$9 \cdot 0{,}3 - 3 \cdot (-1) = 2{,}7 + 3 = 5{,}7$	$6 \cdot 0{,}3 + (-1) = 1{,}8 - 1 = 0{,}8$
Rechte Seite:	6	1
Vergleich:	$5{,}7 \approx 6$	$0{,}8 \approx 1$

Das Zahlenpaar $[0{,}3;\ -1]$ ist also eine Näherungslösung.

Aufgaben b 79 und 80

16 Lösungsverfahren für Gleichungssysteme

Das Problem, ein System von *zwei Gleichungen* mit *zwei Variablen* zu lösen, wird auf das Problem, *eine Gleichung* mit nur *einer Variablen* zu lösen, zurückgeführt.
Von den verschiedenen dafür möglichen Verfahren wollen wir uns im folgenden das **Einsetzungsverfahren** erarbeiten.

30 Es soll das folgende Gleichungssystem gelöst werden.

(I) $2x - 3y + 1 = 0$
(II) $x = 1{,}25y$

Wir nehmen an, wir hätten bereits eine Lösung $[x_1; y_1]$ gefunden. Dann sind die Gleichungen

(I′) $2x_1 - 3y_1 + 1 = 0$ und (II′) $x_1 = 1{,}25y_1$

wahre Aussagen.
In (I′) dürfen wir daher x_1 durch $1{,}25y_1$ ersetzen.

Wir erhalten: $2 \cdot 1{,}25y_1 - 3y_1 + 1 = 0 \quad | -1$

$$-0{,}5y_1 = -1 \quad |:(-0{,}5)$$

$$y_1 = 2$$

Durch Einsetzen von 2 für y_1 in Gleichung (II′) erhalten wir: $x_1 = 2{,}5$.
Daß das Zahlenpaar [2,5; 2] tatsächlich Lösung des Gleichungssystems ist, bestätigt die Probe.

Probe:	(I)	(II)
Linke Seite:	$2 \cdot 2{,}5 - 3 \cdot 2 + 1 = 5 - 6 + 1 = 0$	$2{,}5$
Rechte Seite:	0	$1{,}25 \cdot 2 = 2{,}5$
Vergleich:	$0 = 0$	$2{,}5 = 2{,}5$, also $L = \{[2{,}5; 2]\}$

Wir wollen nun (indirekt) beweisen, daß es außer dem Zahlenpaar [2,5; 2] keine weiteren Lösungen dieses Gleichungssystems gibt.
Angenommen, es gäbe noch eine weitere Lösung $[x_2; y_2]$ mit $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$, so folgt aus den analog zu (I′) und (II′) entstehenden Gleichungen die Gleichung $2 \cdot 1{,}25y_2 - 3y_2 + 1 = 0$.
Daraus folgt $y_2 = 2$ und $x_2 = 2{,}5$ im Widerspruch zu der Annahme $x_2 \neq x_1$ und $y_2 \neq y_1$. Damit ist bewiesen, daß es keine weiteren Lösungen dieses Gleichungssystems gibt.

Wir werden im folgenden die Indizes von x und y nicht mehr mitschreiben.
Man darf einen anderen Term für eine Variable (für x oder y) nur unter der Annahme einsetzen, daß die Variablen die Zahlen einer Lösung des Systems bedeuten.
Hat man eine Zahl des Zahlenpaares, das Lösung des Systems ist, gefunden, so setzt man diese in eine Gleichung ein, in der noch beide Variablen vorkommen, und ermittelt die zweite Zahl des Zahlenpaares.

31 Es sollen die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme ermittelt werden.

a) (I) $4x + 6y = -1$
(II) $10x + 2y = -9$

b) (I) $4x + 2y = 6a$
(II) $y - 2x = b - a$

a und b seien beliebige, aber feste Zahlen eines Grundbereiches.

Durch Umformung der Gleichung (II) erhalten wir eine dazu äquivalente Gleichung (II′), in der y allein auf einer Seite steht.

(II) $10x + 2y = -9 \quad \mid -10x$	(II) $y - 2x = b - a \quad \mid +2x$
$2y = -9 - 10x \quad \mid :2$	(II′) $y = b - a + 2x$
(II′) $y = -4{,}5 - 5x$	

Für y wird in Gleichung (I) der entsprechende Term aus (II′) eingesetzt. Diese Einsetzung dürfen wir vornehmen, wenn x und y die Zahlen einer Lösung des Systems bedeuten. Wir erhalten eine Gleichung, aus der wir die erste Zahl des gesuchten Zahlenpaares ermitteln.

$$\begin{aligned} 4x + 6(-4{,}5 - 5x) &= -1 \\ 4x - 27 - 30x &= -1 \quad \mid +27 \\ -26x &= 26 \quad \mid :(-26) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + 2(b - a + 2x) &= 6a \\ 4x + 2b - 2a + 4x &= 6a \quad \mid -2b + 2a \\ 8x &= 8a - 2b \quad \mid :8 \\ x &= a - \frac{b}{4} \end{aligned}$$

In (II′) ersetzen wir x durch die errechnete Zahl und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= -4{,}5 - 5 \cdot (-1) \\ y &= -4{,}5 + 5 \\ y &= 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= b - a + 2\left(a - \frac{b}{4}\right) \\ y &= b - a + 2a - \frac{b}{2} \\ y &= a + \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Probe:

Linke Seite: (I) $4 \cdot (-1) + 6 \cdot 0{,}5 = -4 + 3 = -1$ | (I) $4\left(a - \frac{b}{4}\right) + 2\left(a + \frac{b}{2}\right) = 4a - b + 2a + b = 6a$

Rechte Seite: -1 | $6a$

Vergleich: $-1 = -1$ | $6a = 6a$

Linke Seite: (II) $10 \cdot (-1) + 2 \cdot 0{,}5 = -10 + 1 = -9$ | (II) $a + \frac{b}{2} - 2\left(a - \frac{b}{4}\right) = a + \frac{b}{2} - 2a + \frac{b}{2} = b - a$

Rechte Seite: -9 | $b - a$

Vergleich: $-9 = -9$, also $L = \{[-1; 0{,}5]\}$ | $b - a = b - a$, also $L = \left\{\left[a - \frac{b}{4}; a + \frac{b}{2}\right]\right\}$

Treten bei einer Variablen in beiden Gleichungen gleiche Koeffizienten auf, so löst man eine Gleichung nach dem gemeinsamen Glied auf und setzt dann diesen Term in die andere Gleichung ein.

32 Es soll das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 6x + 9y &= 123 \\ \text{(II)} \quad 6x + 4y &= 78 \end{aligned}$$

gelöst werden.

(I') $6x = 123 - 9y$

(I') in (II) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} 123 - 9y + 4y &= 78 \quad &|-123 \\ -5y &= -45 \quad &|:(-5) \\ y &= 9 \end{aligned}$$

$y = 9$ in (I') eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned} 6x &= 123 - 9 \cdot 9 \\ 6x &= 42 \quad &|:6 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Probe:	(I)	(II)
Linke Seite:	$6 \cdot 7 + 9 \cdot 9$	$6 \cdot 7 + 4 \cdot 9$
	$= 42 + 81 = 123$	$= 42 + 36 = 78$
Rechte Seite:	123	78
Vergleich:	$123 = 123$	$78 = 78$, also $L = \{[7; 9]\}$

Wie erkennt man bei der rechnerischen Lösung eines Gleichungssystems, daß die Lösungsmenge leer ist oder unendlich viele Elemente enthält?

33 a) Es soll das Gleichungssystem

(I) $2x + 3y = 4$
(II) $x + 1{,}5y = -3$

gelöst werden.
Wie wir uns sofort mit Hilfe einer graphischen Darstellung überzeugen können, besitzt dieses Gleichungssystem *keine* Lösung.
Beim rechnerischen Lösen verfahren wir zunächst so wie bisher.

(II') $x = -3 - 1{,}5y$

Wir setzen (II') in (I) ein.

$$\begin{aligned} 2(-3 - 1{,}5y) + 3y &= 4 \\ -6 - 3y + 3y &= 4 \quad &|+6 \\ 0 \cdot y &= 10 \end{aligned}$$

Es gibt keine reelle Zahl y, so daß $0 \cdot y = 10$ eine wahre Aussage wird. Beim Ermitteln von x erhält man ebenfalls eine nicht erfüllbare Gleichung. Also hat das Gleichungssystem keine Lösung.

b) Es soll das Gleichungssystem

(I) $2x + 3y = 4$
(II) $x + 1{,}5y = 2$

gelöst werden.
Dieses Gleichungssystem besitzt *unendlich viele* Lösungen.

(II') $x = 2 - 1{,}5y$

Wir setzen (II') in (I) ein.

$$\begin{aligned} 2(2 - 1{,}5y) + 3y &= 4 \\ 4 - 3y + 3y &= 4 \quad &|-4 \\ 0 \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung erfüllen alle reelle Zahlen. Wir können jede beliebige reelle Zahl für y in (II′) einsetzen und erhalten jeweils die dazugehörige Zahl für x. Einige Lösungen sind:

y	2	0	−1	0,8	...
x	−1	2	3,5	0,8	...

B

Ein Gleichungssystem besitzt *keine* Lösung, wenn man beim Umformen eine Aussage der Form $0 = a \; (a \neq 0)$ erhält; vgl. Beispiel B 33a).
Ein Gleichungssystem besitzt *unendlich viele* Lösungen, wenn man beim Umformen $0 = 0$ oder $a = a$ erhält; vgl. Beispiel B 33b). Die eine Gleichung ist ein Vielfaches der anderen.

* Ein zweites Verfahren, das **Additionsverfahren**, wird ohne Begründung hier nur mitgeteilt.
Bei diesem Verfahren kommt man zu einer Gleichung mit nur *einer* Variablen, indem man sowohl die linken als auch die rechten Seiten der beiden Gleichungen addiert. Dazu ist meist eine oder sind beide Gleichungen vorher so in einander äquivalente Gleichungen umzuformen, daß die Gleichungen bezüglich ein und derselben Variablen (x oder y) entgegengesetzte Zahlen als Koeffizienten haben.

34 Es sollen die folgenden Gleichungssysteme gelöst werden.

a)
$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 7x + 3y = 127 \\ \text{(II)} & \underline{4x - 3y = -17} \\ \text{(I)} + \text{(II)} & 11x = 110 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 2r + 3s = 40 & |\cdot(-2) \\ \text{(II)} & \underline{3r + 2s = 35} & |\cdot 3 \\ \text{(I')} & -4r - 6s = -80 & \\ \text{(II')} & \underline{9r + 6s = 105} & \\ \text{(I')} + \text{(II')} & 5r = 25 & \end{array}$$

Die weiteren Lösungsschritte haben wir beim Einsetzungsverfahren kennengelernt.

Aufgaben b 81 bis 90

17 Lösen von Sachaufgaben

Das auf den Seiten 53f über das Lösen von Sachaufgaben Gesagte bleibt dem Inhalt nach voll gültig, auch wenn der Sachverhalt auf ein Gleichungssystem führt.

35 Zum Abtransport von 698 dt Kartoffeln von einem Sortierplatz einer landwirtschaftlichen Kooperationsgemeinschaft stehen zwei gleich große LKW und ein Traktor mit zwei Anhängern zur Verfügung. Die beiden LKW und der Traktorzug bewältigen zusammen je Fahrt 138 dt Kartoffeln. Mit wieviel Dezitonnen Kartoffeln sind jeder LKW und der Traktorzug durchschnittlich beladen, wenn insgesamt zwölf LKW-Fuhren und vier Traktorzugfuhren erforderlich sind?
Jeder LKW wird jeweils mit x dt Kartoffeln, der Traktorzug jeweils mit y dt Kartoffeln beladen. Die beiden LKW laden dann zusammen $2x$ dt Kartoffeln.
Aus dem zweiten Satz des Aufgabentextes ergibt sich dann die Gleichung:

$$2x \text{ dt} + y \text{ dt} = 138 \text{ dt}.$$

Bei zwölf LKW-Fahrten werden $12 \cdot x$ dt Kartoffeln und bei vier Traktorzugfahrten $4 \cdot y$ dt Kartoffeln transportiert, das sind zusammen 698 dt Kartoffeln:

$$12 \cdot x\,\mathrm{dt} + 4 \cdot y\,\mathrm{dt} = 698\,\mathrm{dt}.$$

Da in beiden Gleichungen die Einheit der linken Seite mit der auf der rechten Seite übereinstimmt, können wir die Rechnung ohne Einheiten durchführen.

(I) $2x + y = 138$

(II) $\underline{12x + 4y = 698}$

(I′) $y = 138 - 2x$

Wir setzen (I′) in (II) ein.

$$\begin{aligned} 12x + 4(138 - 2x) &= 698 \\ 12x + 552 - 8x &= 698 \quad | -552 \\ 4x &= 146 \quad |:4 \\ x &= 36{,}5 \end{aligned}$$

Wir setzen $x = 36{,}5$ in (I′) ein.

$$\begin{aligned} y &= 138 - 2 \cdot 36{,}5 \\ y &= 65 \end{aligned}$$

Probe: Fahren jeder LKW und der Traktorzug je einmal, so wird eine Masse von 36,5 dt + 36,5 dt + 65 dt = 138 dt bewältigt.
Bei 12 LKW-Fahrten werden $12 \cdot 36{,}5$ dt = 438 dt und bei 4 Traktorzugfahrten werden $4 \cdot 65$ dt = 260 dt transportiert. Mit beiden Fahrzeugtypen zusammen werden also 698 dt transportiert.

Jeder LKW ist durchschnittlich mit 36,5 dt und der Traktorzug mit 65 dt Kartoffeln beladen.

Aufgaben b 91 bis 106

18* Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen

Das Lösen von linearen Gleichungssystemen, bei denen die Anzahl der Variablen und die Anzahl der Gleichungen größer als zwei ist, wird hier nur kurz besprochen.
Ein Verfahren beruht auf der schrittweisen Reduzierung der Anzahl der Variablen und Gleichungen jeweils um 1. Aus je zwei Gleichungen des Systems läßt sich z. B. mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens eine Gleichung gewinnen, in der eine Variable weniger auftritt.
Auf diese Weise läßt sich aus einem System mit n Variablen und n Gleichungen ($n \in N$; $n > 2$) ein System mit nur $n - 1$ Variablen und $n - 1$ Gleichungen gewinnen. Durch wiederholte Reduzierung der Anzahl der Variablen und Gleichungen erhält man schließlich eine Gleichung mit nur einer Variablen, z. B. x.
Deren Lösung (falls sie existiert) setzt man in eine Gleichung mit zwei Variablen, z. B. x, y, ein und löst nach der zweiten Variablen y auf. Die beiden Zahlen werden in eine Gleichung mit drei Variablen, z. B. x, y, z, eingesetzt. Diese Gleichung wird nach der dritten Variablen z aufgelöst. Ist schließlich die n-te Variable bestimmt, so hat man mit den n Zahlen eine Lösung des Systems gefunden. Es schließt sich noch die Probe mit allen n Gleichungen an.
Das geschilderte Verfahren ist stets anwendbar, wenn das System genau eine Lösung besitzt.

36 Es soll das folgende Gleichungssystem gelöst werden.

(1) $x + y + z = 0$

(2) $2x - y + z = 8$

(3) $\underline{3x + y - z = 2}$

(1′) $z = -x - y$

Wir setzen (1′) in (2) und (1′) in (3) ein.

$$2x - y + (-x - y) = 8$$
$$3x + y - (-x - y) = 2$$

Wir erhalten nunmehr nach dem Zusammenfassen das Gleichungssystem:

(I) $x - 2y = 8$

(II) $\underline{4x + 2y = 2}$

(II′) $2y = 2 - 4x.$

Wir setzten (II′) in (I) ein.

$$x - (2 - 4x) = 8$$
$$x = 2$$

Wir setzen $x = 2$ in (II′) ein.

$$2y = 2 - 4 \cdot 2$$
$$y = -3$$

Wir setzen $x = 2$ und $y = -3$ in (1') ein.

$$z = -2 - (-3)$$
$$z = 1$$

Die Lösung ist das Zahlentripel (2; −3; 1).

Probe:	(1)	(2)	(3)
Linke Seite:	$2 + (-3) + 1 = 0$	$2 \cdot 2 - (-3) + 1 = 8$	$3 \cdot 2 + (-3) - 1 = 2$
Rechte Seite:	0	8	2
Vergleich:	$0 = 0$	$8 = 8$	$2 = 2$

Aufgaben b 107* bis 112*

B

19* Systeme aus Gleichungen und Ungleichungen

37 Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems zu ermitteln.

(I) $y = 3x - 2$

(II) $3x + 3y - 6 > 0$

Wir setzen (I) in (II) ein.

$$3x + 3(3x - 2) - 6 > 0$$
$$12x - 12 > 0$$
$$x > 1$$

Die Lösungsmenge des Systems enthält alle Zahlenpaare $[x; 3x - 2]$ mit $x > 1$.
Das sind die Koordinaten aller Punkte der Geraden mit der Gleichung $y = 3x - 2$, für die $x > 1$ gilt.
Die *Lösungsmenge von (I)* kann man durch die Gerade,
die *Lösungsmenge von (II)* durch die Halbebene oberhalb der Geraden mit der Gleichung $y = -x + 2$ veranschaulichen.
Demnach ist die Lösungsmenge des Systems als Durchschnitt der Lösungsmengen von (I) und (II) durch denjenigen Teil der Geraden $y = 3x - 2$ darstellbar, der in der beschriebenen Halbebene liegt.

13 *Stellen Sie die drei Lösungsmengen aus Beispiel B 37 in ein und demselben Koordinatensystem dar!*

38 Es ist die Lösungsmenge des folgenden Systems zu ermitteln.

(I) $y + 2 < 3x$

(II) $3x + 3y < 0$

Jede der beiden Ungleichungen legt eine Halbebene fest. Den Durchschnitt der beiden Halbebenen kann man als Veranschaulichung der Lösungsmenge des vorgegebenen Systems ansehen.

14 *Stellen Sie die Lösungsmenge des Systems aus Beispiel B 38 graphisch dar!*

Aufgaben b 113* und 114*

C Potenzen und Potenzfunktionen

Geschosse beschreiben nach dem Abschuß eine ballistische Kurve, deren Weite und Höhe unter anderem auch vom Abschußwinkel abhängen. Würde nicht der Luftwiderstand den Flug beeinflussen, so wäre die Bahn eine Parabel. Die Bilder spezieller Potenzfunktionen sind ebenfalls Parabeln. Geschoßbahnen können mit Hilfe von Funktionen mathematisch erfaßt und die Einschlagstellen also im voraus berechnet werden.

Potenzen

1 Wiederholung

Bereits im Unterricht der vorangegangenen Klassenstufen lernten wir den Begriff der Potenz kennen. Wir schrieben immer dann eine Potenz, wenn eine Multiplikation von gleichen Faktoren vorlag, z. B.:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4;$$

Flächeninhalt eines Quadrates: $A = a \cdot a = a^2$;
Volumen eines Würfels: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$;

Flächeninhalt eines Kreises: $A = \frac{\pi}{4} d^2$;

Zerlegung von Zahlen in Produkte aus Primzahlen:

$$600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Wir erinnern uns an die Definition der **Potenz**.

C

1 **DEFINITION:** $\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} (a \in P,\ n \in N,\ n \geqq 1)}$

a^n heißt *Potenz*, a heißt *Basis*, n heißt *Exponent*.

Den Term „a^n" wollen wir lesen: „n-te Potenz von a", „a hoch n" oder „a potenziert mit n".
Ist die Potenz mit der Basis b und dem Exponenten m zu bilden, so sagen wir: „Es ist b mit m zu potenzieren".
Das **Potenzieren** bezeichnet man als **Rechenoperation dritter Stufe**. Es wird festgelegt, daß die Rechenoperation dritter Stufe stärker als die Rechenoperationen erster oder zweiter Stufe bindet.
Ist die Basis eine Summe oder ein Produkt oder mit einem Vorzeichen versehen, so muß sie in Klammern geschrieben werden; vgl. Aufträge C 1e) und C 1h). Es ist also unbedingt notwendig, vor Umformungen die Struktur des Terms zu analysieren.

1 a) In $4a^3$ ist 4 Faktor der Potenz a^3.
b) Der Term $x + y^2$ ist eine Summe aus einer Zahl und einer Potenz einer Zahl.
c) In $(-5)^4$ steht das Minuszeichen als Vorzeichen der Basis, d. h., es ist $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$.
d) In -5^4 ist die Basis der Potenz die Zahl 5 und das Minuszeichen steht als Vorzeichen vor der Potenz. Es ist $-5^4 = -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = -625$.

Man hat also zwischen Basisvorzeichen und Potenzvorzeichen zu unterscheiden.

(1) *Schreiben Sie die folgenden Terme um! Zerlegen Sie dabei alle Potenzen in Faktoren!*

a) 13^4 b) $0{,}1^3$ c) $4a^3$ d) $a + b^3$ e) $(a + b)^2$ f) $a^2 + b$ g) $-x^5$ h) $(-x)^5$

Ob eine Potenz bei negativer Basis positiv oder negativ ist, hängt vom Exponenten ab.

(2) a) *Zeigen Sie mit Hilfe der Definition* C 1, *daß folgendes gilt:*

$(-1)^{2n} = 1$ *und* $(-1)^{2n+1} = -1$ $(n \geqq 1,\ n \in N)$.

Geben Sie die Gesetzmäßigkeiten mit Worten wieder!

b) *Geben Sie an, ob die folgenden Potenzen größer als* 0, *kleiner als* 0 *oder gleich* 0 *sind!*

α) $(-3)^4$ β) $(-5)^3$ γ) $-1{,}5^2$ δ) $0{,}5^3$

ε) a^n $(a \in P, n \in N, n \geqq 1)$

Unterscheiden Sie vier Fälle!

Das Potenzieren ist im Unterschied zur Addition und Multiplikation nicht kommutativ und auch nicht assoziativ. Es ist im allgemeinen $a^b \neq b^a$ und $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$. Diese Aussage macht man sich am besten klar, indem man Zahlen für die Variablen setzt.

Aufgaben c 1 bis 10

2 Potenzen mit natürlichen Zahlen $n (n \geqq 1)$ als Exponenten

Bei Summen von Potenzen, die *sowohl* in den Basen *als auch* in den Exponenten übereinstimmen, kann man die Koeffizienten dieser Potenzen zusammenfassen.

2 a) $x^5 + 6x^5 + x^5 - 3x^5 = (1 + 6 + 1 - 3)\,x^5 = 5x^5$

b) $5x^3 - 8x^3 + 2x^4 = -3x^3 + 2x^4$

Bei Produkten und Quotienten von Potenzen, die in den Basen *oder* in den Exponenten übereinstimmen, kann man die Basen oder Exponenten miteinander verknüpfen.

3 a) $2^3 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3+5} = 2^8$

b) $a^4 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{4+3} = a^7$

c) $2^3 \cdot 1{,}5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5) = (2 \cdot 1{,}5) \cdot (2 \cdot 1{,}5) \cdot (2 \cdot 1{,}5) = (2 \cdot 1{,}5)^3 = 3^3$

d) $a^4 \cdot b^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^4$

e) $\dfrac{42^5}{7^5} = \dfrac{42 \cdot 42 \cdot 42 \cdot 42 \cdot 42}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \dfrac{42}{7} \cdot \dfrac{42}{7} \cdot \dfrac{42}{7} \cdot \dfrac{42}{7} \cdot \dfrac{42}{7} = \left(\dfrac{42}{7}\right)^5 = 6^5$

f) $\dfrac{102x^8}{42x^5} = \dfrac{102}{42} \cdot \dfrac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \dfrac{17}{7} \cdot x^3 = \dfrac{17}{7} x^{8-5}$

g) $(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$

h) Es gilt: $3^4 < 3^5$, aber $0{,}3^4 > 0{,}3^5$.

2 **Potenzgesetze: Für alle reellen Zahlen a, b $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ und alle natürlichen Zahlen m, n $(m \geqq 1, n \geqq 1)$ gilt:**

	gleiche Basen	gleiche Exponenten
Multiplikation	(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	(2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division	(3) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (m \geqq n+1)$	(4) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
Potenzieren	(5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$	

Ferner gilt:
(6) Wenn $m < n$ und $a > 0$, so ist $a^m < a^n$ für $a > 1$ bzw. $a^m > a^n$ für $a < 1$.

Diese als Satz formulierten Vermutungen müßten noch bewiesen werden. Der Beweis der Potenzgesetze kann jedoch hier nicht geführt werden, weil die bisher zur Verfügung stehenden Kenntnisse nicht ausreichen. Die Beispiele C 3 sind nur der Nachweis für einige Spezialfälle.

Die Potenzgesetze kann man auch mit Worten wiedergeben.
Die Gleichung (1) von links nach rechts gelesen sagt aus:
Das Produkt von Potenzen mit gleichen Basen ist gleich der mit der Summe der Exponenten potenzierten gemeinsamen Basis.
Die Gleichung (1) wird auch in umgekehrter Richtung angewandt.
Die Gleichung (2) wird häufig in beiden Richtungen angewandt:
Das Produkt von Potenzen mit gleichen Exponenten ist gleich dem mit dem gemeinsamen Exponenten potenzierten Produkt der Basen.
Oder: *Die Potenz eines Produktes ist gleich dem Produkt der Potenzen, die man durch das Potenzieren der Faktoren mit dem Exponenten erhält.*

(3) *Geben Sie die Gesetze (3), (4) und (5) mit Worten wieder!*

C

Mit Hilfe der Potenzgesetze vereinfacht sich das Lösen vieler Aufgaben wie in Beispiel C 3.

4 a) $m^4 \cdot m^5 = m^{4+5} = m^9$

b) $(-x)^8 : x^5 = x^8 : x^5 = x^{8-5} = x^3$

Hier muß man erst den Dividenden umformen, damit eine Division von Potenzen mit gleichen Basen vorliegt.

c) $\frac{21^3}{10^3} : \frac{14^3}{5^3} = \frac{21^3}{10^3} \cdot \frac{5^3}{14^3} = \frac{21^3 \cdot 5^3}{10^3 \cdot 14^3} = \frac{(21 \cdot 5)^3}{(10 \cdot 14)^3} = \left(\frac{21 \cdot 5}{10 \cdot 14}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

oder

$\frac{21^3}{10^3} : \frac{14^3}{5^3} = \left(\frac{21}{10}\right)^3 : \left(\frac{14}{5}\right)^3 = \left(\frac{21}{10} : \frac{14}{5}\right)^3 = \left(\frac{21 \cdot 5}{10 \cdot 14}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

(4) a) *Erläutern Sie die unterschiedliche Bedeutung der Formulierungen „es gibt ein ...“ und „für alle ... gilt ...“!*

b) *Ist die Aussage „Es gibt natürliche Zahlen m, n ($m \geqq 1$, $n \geqq 1$), so daß für alle reellen Zahlen a die Gleichung $(a^m)^n = a^{(m^n)}$ gilt“ wahr?*

c) *Ist die Aussage „Für alle natürlichen Zahlen m, n ($m \geqq 1$, $n \geqq 1$) und für alle reellen Zahlen a gilt die Gleichung $(a^m)^n = a^{(m^n)}$“ wahr?*

Um stets ein eindeutiges Ergebnis beim Berechnen von a^{m^n} zu erhalten, wird festgelegt:

$$a^{m^n} = a^{(m^n)}.$$

Betrachtet man die Potenzgesetze in der Tabelle auf Seite 71, so erkennt man: Das Rechnen mit Potenzen mit gleichen Basen wird auf das Rechnen mit den Exponenten in der nächstniederen Stufe zurückgeführt.

Rechnen mit Potenzen	**Rechnen mit den Exponenten**
Produkt (2. Stufe) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	**Summe (1. Stufe)** $m + n$

Quotient (2. Stufe) $a^m : a^n = a^{m-n}$	**Differenz (1. Stufe)** $m - n$
Potenz (3. Stufe) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	**Produkt (2. Stufe)** $m \cdot n$

Aufgaben c 11 bis 28

3 Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten

Die Potenzgesetze enthalten die einschränkende Bedingung $m \geqq 1$ und $n \geqq 1$, da Potenzen mit dem Exponenten 0 nach Definition C 1 nicht erklärt sind. Deshalb muß die Bedeutung der Potenzen a^0 sinnvoll festgesetzt werden.
Sinnvoll ist eine Festsetzung in diesem Zusammenhang dann, wenn die Potenzgesetze auch auf die um a^0 erweiterte Menge der Potenzen zutreffen.
Nicht jede beliebige Festsetzung für a^0 ist sinnvoll. Man sieht, daß z. B. die Festsetzung $a^0 = 0$ nicht mit den Potenzgesetzen verträglich ist, bereits an einem einfachen Beispiel. Bildet man das Produkt $5^3 \cdot 5^0$ einmal mit und zum anderen ohne Anwendung des Potenzgesetzes für die Multiplikation von Potenzen mit gleichen Basen, so erhält man eine falsche Aussage.

$$5^3 \cdot 5^0 = 5^{3+0}$$
$$125 \cdot 0 = 5^3$$
$$0 = 125$$

3 **DEFINITION: $a^0 = 1$ $(a \in P, a \neq 0)$**

Es ist erforderlich, die Verträglichkeit dieser Definition mit den Potenzgesetzen nachzuweisen. Wir wollen den Nachweis nur für ein Gesetz als Beispiel durchführen.

SATZ: Für alle reellen Zahlen a $(a \neq 0)$ und alle natürlichen Zahlen m, n gilt: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Beweis: Die Menge der Potenzen mit natürlichen Exponenten kann man in zwei Teilmengen M_1 und M_2 zerlegen.

M_1: Menge der Potenzen mit Exponenten $n \geqq 1$
$M_2 = \{a^0\}$

Um die Behauptung $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für alle möglichen Potenzen a^m und a^n zu beweisen, kann man eine Fallunterscheidung durchführen.

Fall 1: a^m und a^n sind beide aus M_1, d. h. $m \geqq 1; n \geqq 1$.
Fall 2: a^m und a^n sind beide aus M_2, d. h. $m = 0; n = 0$.
Fall 3: a^m ist aus M_1, a^n ist aus M_2, d. h. $m \geqq 1; n = 0$.
Fall 4: a^m ist aus M_2, a^n ist aus M_1, d. h. $m = 0; n \geqq 1$.

Fall 1 ist in der Lerneinheit C 2 behandelt worden und wird nunmehr als gültig vorausgesetzt.
Bei Fall 2 ist zu beweisen: $a^0 \cdot a^0 = a^{0+0}$
Linke Seite: $a^0 \cdot a^0 = 1 \cdot 1 = 1$ *Rechte Seite:* $a^{0+0} = a^0 = 1$
Vergleich: $1 = 1$
Fall 3 und Fall 4: Diese beiden Fälle sind auf Grund der Kommutativität der

Multiplikation nicht voneinander verschieden. Es genügt, den Fall 3 zu beweisen: $a^m \cdot a^0 = a^{m+0}$

Linke Seite: $a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$ *Rechte Seite:* $a^{m+0} = a^m$

Vergleich: $a^m = a^m$

Die Potenzgesetze gelten somit für alle Potenzen mit von Null verschiedenen Basen und natürlichen Zahlen als Exponenten.

Bei der Definition $a^0 = 1$ wurde $a = 0$ nicht zugelassen, da die Festsetzung $0^0 = 1$ nicht sinnvoll ist. Es müßte dann nämlich gelten:

$$1 = 0^0 = 0^{3-3} = \frac{0^3}{0^3} = \frac{0}{0}.$$

Das stünde im Widerspruch dazu, daß $\frac{0}{0}$ nicht definiert ist.

$\frac{0}{0}$ ist bekanntlich deshalb nicht definiert, weil die Gleichung $0 \cdot x = 0$ nicht eindeutig lösbar ist, sondern alle reellen Zahlen als Lösung besitzt.

Wie man z. B. aus der nachstehenden Folge von Divisionsaufgaben erkennt, sind die Festsetzungen $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ naheliegend.

C

$$\begin{aligned} 5^4 : 5 &= 625 : 5 = 125 = 5^3 \\ 5^3 : 5 &= 125 : 5 = 25 = 5^2 \\ 5^2 : 5 &= 25 : 5 = 5 = 5^1 \\ 5^1 : 5 &= 5 : 5 = 1 = 5^0 \end{aligned}$$

Bei der Erweiterung des Potenzbegriffs auf Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten fordert man: Für die Menge aller Potenzen mit ganzzahligen Exponenten sollen die bisher benutzten Potenzgesetze unverändert gelten. Es ist

$$\frac{5^3}{5^7} = \frac{5^3 \cdot 1}{5^3 \cdot 5^4} = \frac{1}{5^4}.$$

Andererseits erhält man bei Aufgabe der Beschränkung $m - n \geqq 0$ in a^{m-n}, also bei formaler Anwendung des Potenzgesetzes für die Division von Potenzen mit gleichen Basen:

$$\frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4}.$$

Es liegt die Festsetzung $\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$ nahe.

4 **DEFINITION:** $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ $\quad (k \in G,\ a \neq 0)$

5 Folgende Gleichungen sind mit Hilfe von Definition C 4 entstanden.

a) $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$ b) $\frac{1}{5^{-4}} = 5^4$ c) $5^3 = 5^{-(-3)} = \frac{1}{5^{-3}}$

d) $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{5^{-(-3)}} = 5^{-3}$ e) $(-5)^{-6} = \frac{1}{(-5)^6} = \frac{1}{5^6}$

f) $a^3 \cdot b^{-2} = a^3 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{a^3}{b^2}$ g) $\frac{1\ \text{kp}}{1\ \text{cm}^2} = 1\ \text{kp} \cdot \frac{1}{1\ \text{cm}^2} = 1\ \text{kp} \cdot \text{cm}^{-2}$

h) $\frac{a^{-2}be^3}{c^4d^{-5}x^{-2}} = \frac{bd^5e^3x^2}{a^2c^4}$

Mit Hilfe der Definition C 4 ist es möglich, einen Term so umzuformen, daß nur noch positive Exponenten auftreten. Es ist aber unter Verwendung von negativ-ganzzahligen Exponenten auch möglich, daß der Term als Produkt von Potenzen geschrieben wird.
Das Schreiben eines Terms als Produkt wendet man häufig bei der Angabe der Einheiten einer Größe an, z. B. bei der Geschwindigkeit ($1\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$), der Beschleunigung ($1\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$), dem Druck (Beispiel C 5g)), den verschiedenen Konstanten (z. B. Molares Volumen $V_{mo} = 22{,}42\,\mathrm{dm}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1}$).

Es ist wiederum erforderlich, die Verträglichkeit der Definition C 4 mit den Potenzgesetzen nachzuweisen. Wir wollen auf den Beweis hier nicht eingehen und im folgenden die Potenzgesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten als gültig betrachten. Damit entfällt nunmehr die bisher geforderte Bedingung $m \geqq n$ im Gesetz für die Division von Potenzen mit gleichen Basen.
Es ist möglich, auf das Formulieren von Potenzgesetzen für die Division zu verzichten, denn jede Divisionsaufgabe von Potenzen läßt sich als Multiplikation schreiben; vgl. Beispiele C 6c) und C 6d).

6 a) $7^4 \cdot 7^{-6} = 7^{4+(-6)} = 7^{-2}$ b) $x^{-3} \cdot y^{-3} = (x \cdot y)^{-3}$

c) $a^6 : a^{-3} = a^{6-(-3)} = a^9$ oder $a^6 : a^{-3} = a^6 \cdot a^3 = a^{6+3} = a^9$

d) $56^{-4} : 8^{-4} = (56 : 8)^{-4} = 7^{-4}$ oder

$$56^{-4} : 8^{-4} = 56^{-4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-4} = \left(\frac{56}{8}\right)^{-4} = 7^{-4}$$

e) $(-5^3)^{-2} = (-5)^{3 \cdot (-2)} = 5^{-6}$

Aufgaben c 29 bis 40

4 Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten

Nach der Definition der n-ten Wurzel bedeutet

$$\sqrt[n]{a^m} = b,$$

daß $b^n = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m \quad (a, b > 0;\ a, b \in P;\ m, n \in G;\ n > 0)$.

7 a) $\sqrt[3]{a^2} = b$ bedeutet $b^3 = a^2$. b) $\sqrt{5^6} = 5^3$, denn $(5^3)^2 = 5^6$

c) $\sqrt[3]{2^{-6}} = 2^{-2}$, denn $(2^{-2})^3 = 2^{-6}$

8 Es gilt $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$. Denn wenn $\sqrt[3]{a^2} = b$, so folgt aus $b^3 = a^2$ durch Potenzieren mit 2

$$(b^3)^2 = (a^2)^2,\ b^6 = a^4.$$

Damit ist $b = \sqrt[6]{a^4}$. Wegen der Eindeutigkeit der Wurzel gilt die Gleichheit $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3 \cdot 2]{a^{2 \cdot 2}}$.

5 **SATZ: Ist $a > 0$ und sind m, n und c ganze Zahlen mit $n > 0$ und $c > 0$, so ist**

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot c]{a^{m \cdot c}}.$$

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt.

Angenommen, es sei $\sqrt[n]{a^m}$ verschieden von $\sqrt[n\cdot c]{a^{m\cdot c}}$. Potenzieren wir beide Terme mit $n \cdot c$, so müßten die Potenzen ebenfalls verschieden sein.

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n\cdot c} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^c = [a^m]^c = a^{m\cdot c}$$

$$\left(\sqrt[n\cdot c]{a^{m\cdot c}}\right)^{n\cdot c} = a^{m\cdot c}$$

Wir stellen aber die Gleichheit der Potenzen fest. Deshalb müssen wir die Annahme fallen lassen. Es gilt: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot c]{a^{m\cdot c}}$. Damit haben wir gezeigt, daß $\sqrt[n]{a^m}$ außer von a nur von dem Verhältnis $\frac{m}{n}$ abhängt.

9 a) $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$ b) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$ c) $\sqrt[3]{5^6} = \sqrt[1]{5^2} = 5^2$

Wir wollen für $\sqrt[n]{a^m}$ eine andere Schreibweise einführen, die die Abhängigkeit von den Quotienten $\frac{m}{n}$ deutlich zum Ausdruck bringt.

6 **DEFINITION:** $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad (a > 0,\ a \in P;\ m, n \in G;\ n > 0)$

Nach dieser Definition ist $a^{\frac{m}{n}}$ diejenige positive reelle Zahl b, für die $b^n = a^m$ gilt.

Es ist $a^{\frac{m}{n}} = b$ genau dann, wenn $b^n = a^m$.

Da die Zahl $a^{\frac{m}{n}}$ die Form einer Potenz hat, sind damit **Potenzen für jede rationale Zahl als Exponent** erklärt.

10 a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$ c) $3^{-\frac{2}{5}} = 3^{\frac{-2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}}$

d) $\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3 \quad (a \geqq 0)$ e) $\sqrt{1m^2 \cdot s^{-2}} = 1m^{\frac{2}{2}} \cdot s^{-\frac{2}{2}} = 1m \cdot s^{-1}$

Es gilt nachzuweisen, daß die Potenzgesetze für die Menge der Potenzen mit rationalen Exponenten gelten. Für den Fall, daß n ein Teiler von m ist, gelten die Potenzgesetze bereits, denn in diesem Fall ist $a^{\frac{m}{n}}$ eine Potenz mit ganzzahligem Exponenten.

7 **SATZ: Für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle ganzen Zahlen m, n, p, q ($n \neq 0$, $q \neq 0$) gilt:**

	gleiche Basen	**gleiche Exponenten**
Multiplikation	(1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$	(2) $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}}$
Division	(3) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$	(4) $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a : b)^{\frac{m}{n}}$
Potenzieren	(5) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m\cdot p}{n\cdot q}}$	

Ferner gilt: (6) $a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$;

(7) **Wenn $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, so ist $a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}}$ für $a > 1$ bzw. $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$ für $a < 1$.**

Die Gesetze für die Division ergeben sich aus den Gesetzen für die Multiplikation unter Beachtung des Gesetzes (6). Wir wollen hier nur ein Gesetz als Beispiel beweisen.

Beweis zu (1): Wir setzen $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot q}{n \cdot q}} = u \; (u > 0)$ und $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n \cdot p}{n \cdot q}} = v \; (v > 0)$. Dann ist $u^{n \cdot q} = a^{m \cdot q}$ und $v^{n \cdot q} = a^{n \cdot p}$. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt durch Multiplikation der linken und der rechten Seiten

$$u^{n \cdot q} \cdot v^{n \cdot q} = a^{m \cdot q} \cdot a^{n \cdot p}.$$

Wir wenden die Potenzgesetze der Multiplikation für ganzzahlige Exponenten an.

$$(u \cdot v)^{n \cdot q} = a^{m \cdot q + n \cdot p}$$

Zu dieser Gleichung ist auf Grund der Definition der Potenzen mit gebrochenen Exponenten äquivalent

$$u \cdot v = a^{\frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q}}.$$

Wir setzen $u = a^{\frac{m}{n}}$, $v = a^{\frac{p}{q}}$ und formen den Exponenten der rechten Seite nach den Rechenregeln für gebrochene Zahlen um. Also gilt:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

(5) *Beweisen Sie das Gesetz (2) aus Satz C 7!*

Hinweis: Setzen Sie $a^{\frac{m}{n}} = u \; (u > 0)$ und $b^{\frac{m}{n}} = v \; (v > 0)$!

11 a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{6}{6}} = 3$ b) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{\frac{1}{2}} = (3 \cdot 12)^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6$

c) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 8^{\frac{3}{4}} = (2 \cdot 8)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = 8$

12 a) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4}} = a^{\frac{1}{6}} \quad (a \geqq 0)$ b) $\frac{a^2}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{2-\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}} \quad (a \geqq 0)$

c) $\left(p^{-\frac{1}{4}} \cdot q^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{2}{3}} = p^{\frac{1}{6}} \cdot q^{-\frac{2}{5}} \quad (p > 0, q > 0)$

d) $2^{\frac{1}{2}} : 8^{\frac{1}{2}} = (2:8)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Aufgaben c 41 bis 56

5 Wurzelgesetze als Spezialfälle der Potenzgesetze

Addition und Subtraktion

13 a) $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 8\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = (2+8)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3} = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

b) $3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x^2} = (3+4-5)\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x^2}$

$= 2\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x^2} \quad (x \geqq 0)$

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten und gleichen Radikanden, d. h. Potenzen mit gleichen Exponenten und gleichen Basen, lassen sich durch Addition und Subtraktion der Koeffizienten zusammenfassen; vgl. Lerneinheit C 2.

C

Multiplikation und Division

14 a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ $(a \geqq 0,\ b > 0)$

Beim Lösen zahlreicher Aufgaben ist es zweckmäßig, Spezialfälle der Potenzgesetze (vgl. Satz C 7) in der Wurzelschreibweise zu formulieren. Man spricht dann von **Wurzelgesetzen**. Die Wurzelgesetze sind also für uns keine neuen Gesetze. Die Gesetze (2) und (4) des Satzes C 7 heißen für $m = 1$ in Wurzelschreibweise:

(2a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$ $(a \geqq 0,\ b \geqq 0)$

(4a) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(a \geqq 0,\ b > 0)$

C

15 a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{32} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ $(a \geqq 0,\ b > 0)$ d) $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \dfrac{5}{3}$

Radizieren und Potenzieren

Für das Radizieren und Potenzieren von Wurzeln gilt:

(5a) $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[n\cdot q]{a}$ $(a \geqq 0)$ **bzw.**

(5b) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$ $(a \geqq 0)$

6 *Für welche m und p bzw. m und q stellen die Gesetze (5a) bzw. (5b) Spezialfälle des Gesetzes (5) des Satzes C 7 dar?*

16 a) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[15]{a^2}$ c) $\sqrt[4]{25} = \sqrt{\sqrt{25}} = \sqrt{5}$

d) $\left(\sqrt[4]{3^6}\right)^2 = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3$ e) $\sqrt[4]{64} = \sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\cdot\sqrt{2}$

17 Welche Geschwindigkeit erreicht ein frei fallender Körper, der in einer Höhe $h = 85$ m losgelassen wird ($v = \sqrt{2gh}$, $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$)?

$v = \sqrt{2gh}$

$v = \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot 85\ \mathrm{m}}$ *Überschlag:*

$= \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 85\ \mathrm{m^2\cdot s^{-2}}}$ $\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 85} \approx \sqrt{2\cdot 10\cdot 80} = \sqrt{1600} = 40$

$v = 40{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *Vergleich:* $40{,}8 \approx 40$

Der aus 85 m Höhe frei fallende Körper erreicht eine Geschwindigkeit von etwa $41\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Aufgaben c 57 bis 68

6 Das Abtrennen von Zehnerpotenzen

Für das Rechnen mit dem Rechenstab und bei der Angabe von besonders großen oder kleinen Maßzahlen in Wissenschaft und Technik bedient man sich häufig des Vorteils, mit abgetrennten Zehnerpotenzen zu arbeiten.
Jede positive rationale Zahl a läßt sich stets in der Form $a = a_0 \cdot 10^p$ darstellen ($a_0 \in R$; $1 \leqq a_0 < 10$; $p \in G$).

18

	a	$a_0 \cdot 10^p$	a_0	p
a)	803	$8{,}03 \cdot 10^2$	8,03	2
b)	0,0038	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$	3,8	−3
c)	1000	$1 \cdot 10^3$	1	3
d)	0,0001	$1 \cdot 10^{-4}$	1	−4

Da man mit dem Rechenstab nur die Ziffernfolge des Ergebnisses ermittelt, erleichtert man sich das Lösen wesentlich durch das Schreiben der Aufgabe mit abgetrennten Zehnerpotenzen.

C

19

$$\frac{0{,}0000345}{0{,}0312} \cdot 54\,500 = \frac{3{,}45 \cdot 10^{-5}}{3{,}12 \cdot 10^{-2}} \cdot 5{,}45 \cdot 10^4$$
$$= \frac{3{,}45 \cdot 5{,}45}{3{,}12} \cdot 10^{-5} \cdot 10^4 \cdot 10^2$$
$$= 6{,}03 \cdot 10^1 = 60{,}3$$

Überschlag:
$$\frac{3{,}45 \cdot 5{,}45}{3{,}12} \approx \frac{3 \cdot 5}{3} = 5$$
Vergleich: $6{,}03 \approx 5$

In Wissenschaft und Technik verwendet man vielfach Vorsätze für die Einheiten oder schreibt die Maßzahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen, um die Größe überschaubarer darzustellen; vgl. Tafelwerk, Mathematik – Physik – Chemie, Seite 69.

20 a) Leistung der größten Generatoren: 500 000 000 W = 500 MW
b) Kapazität eines Kondensators: 0,000 002 F = 2 μF
c) Masse der Erde: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
d) Durchmesser eines Wasserstoffatoms: $1{,}07 \cdot 10^{-8}$ cm
e) Dicke von Blattgold: 0,000 0001 m = 0,0001 mm = 0,1 μm

7 *Nennen Sie häufig benutzte Vorsätze bei Längen- und Massemaßen!*
Geben Sie jeweils die Bedeutung des Vorsatzes an!

21 Es ist die mittlere Dichte der Erde zu ermitteln.
Das Volumen der Erde beträgt $1{,}08 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3$, die Masse $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

$$m = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} = 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 10^3\ \text{g}$$
$$V = 1{,}08 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12} \cdot 10^{15}\ \text{cm}^3$$
$$1\ \text{km}^3 = (10^5\ \text{cm})^3 = 10^{15}\ \text{cm}^3$$

$$\varrho = \frac{m}{V}$$
$$\varrho = \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 10^3\ \text{g}}{1{,}08 \cdot 10^{12} \cdot 10^{15}\ \text{cm}^3}$$
$$= \frac{5{,}98 \cdot 10^{27}}{1{,}08 \cdot 10^{27}} \cdot 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$
$$= 5{,}5\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Überschlag: $\frac{5{,}98}{1{,}08} \approx \frac{6}{1} = 6$ *Vergleich:* $5{,}5 \approx 6$

Die mittlere Dichte der Erde beträgt rund $5{,}5\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$.

Aufgaben c 69 bis 78

7 Das Rechnen mit physikalischen Größen

Eine physikalische Größe besteht aus einer Zahl und einer Einheit.

22

	Physikalische Größe	Maßzahl	Einheit
Länge	$s = 5\ m = 5 \cdot 1\ \mathrm{m}$	5	1 m
Zeit	$t = 25\ \mathrm{min} = 25 \cdot 1\ \mathrm{min}$	25	1 min
Masse	$m = 3\ \mathrm{kg} = 3 \cdot 1\ \mathrm{kg}$	3	1 kg

C

Eine solche Größenangabe wird formal als Produkt aus Maßzahl und Einheit aufgefaßt.
Die Bezeichnungen für die Einheiten von abgeleiteten physikalischen Größen werden entsprechend der formelmäßigen Definition dieser Größen aus den Einheiten der Grundgrößen zusammengesetzt.

23 Es ist die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Radfahrers zu ermitteln, der in 3 h einen Weg von 60 km zurücklegt ($s = 60$ km; $t = 3$ h).

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{60\ \mathrm{km}}{3\ \mathrm{h}} = \frac{60 \cdot 1\ \mathrm{km}}{3 \cdot 1\ \mathrm{h}} = \frac{60}{3} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}}$$

Für $\frac{1\ \mathrm{km}}{1\mathrm{h}}$ schreibt man $1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ oder $1\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Radfahrers beträgt $20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Auf Grund der Tatsache, daß die zusammengesetzten Einheiten hinsichtlich der Einheiten der Grundgrößen die gleiche mathematische Struktur aufweisen wie die Formeln, die zur Berechnung der physikalischen Größen dienen, kann man mit den Einheiten wie mit Variablen „rechnen". Es ergibt sich bei fehlerfreiem Rechnen auch die richtige Einheit für die zu berechnende physikalische Größe.

24 Ein mit Hilfe von Elektroenergie angetriebenes Fahrzeug wird aus dem Stand gleichmäßig beschleunigt und erreicht nach 100 m eine Geschwindigkeit von $80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Wie groß ist die Beschleunigung?

$$s = 100\ \mathrm{m}$$

$$v = 80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = \frac{80}{3{,}6}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Lösen wir $v = a \cdot t$ nach t auf und setzen $\frac{v}{a}$ in $s = \frac{a}{2} t^2$ ein, so erhalten wir nach dem Umformen $a = \frac{v^2}{2s}$. Wir setzen die Größen ein.

$$a = \frac{\left(\frac{80}{3{,}6}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)^2}{2 \cdot 100\,\mathrm{m}} = \frac{\frac{80^2}{3{,}6^2}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}}{2 \cdot 100\,\mathrm{m}}$$

$$= \frac{8^2 \cdot 10^2}{3{,}6^2 \cdot 2 \cdot 10^2} \cdot \frac{\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m}}$$

$$= 2{,}47\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Überschlag:

$$\frac{8^2}{3{,}6^2 \cdot 2} \approx \frac{60}{15 \cdot 2} = 2$$

Vergleich: $2{,}47 \approx 2$

Das Fahrzeug erreicht auf 100 m eine Geschwindigkeit von $80\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ bei einer Beschleunigung von $2{,}47\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Aufgaben c 79 bis 86

8 Das Darstellen von Zahlen mit Hilfe von Positionssystemen

C

Wir betrachten zunächst das System der römischen Zahlzeichen. Es handelt sich um ein Additionssystem. In diesem werden durch die Grundziffern

25 I = 1, X = 10, C = 100, M = 1000,
V = 5, L = 50, D = 500

weitere Zahlzeichen mit Hilfe der Addition oder Subtraktion der zugehörigen Zahlen gewonnen.

1 = I 2 = 1 + 1 = II 3 = 1 + 1 + 1 = III
4 = 5 − 1 = IV 6 = 5 + 1 = VI
321 = 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 = CCCXXI
444 = (500 − 100) + (50 − 10) + (5 − 1) = CDXLIV
1971 = 1000 + (1000 − 100) + 50 + 10 + 10 + 1 = MCMLXXI

Diese Zahlzeichen sind im allgemeinen sehr lang und unübersichtlich. Zur Bezeichnung beliebig großer Zahlen muß man neue Zeichen hinzunehmen. Das schriftliche Rechnen ist sehr umständlich.
Ein Stellenwertsystem (z. B. das Dezimalsystem) gestattet ein relativ leichtes Rechnen und das Bezeichnen beliebig großer Zahlen mit einer recht kleinen Anzahl von verschiedenen Zeichen. Man benutzt im Dezimalsystem zur Darstellung von Zahlen die Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Schreibt man Grundziffern zur Bezeichnung einer Zahl nebeneinander, so ist ihnen durch ihre Stellung eindeutig ein Stellenwert (eine Zehnerpotenz) zugeordnet.

Jeder endliche Dezimalbruch ist eine Summe aus Vielfachen von Potenzen der Zahl 10 mit ganzzahligen Exponenten.

26 $$321 = 300 + 20 + 1 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$805{,}3204 = 800 + 5 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{10000}$$
$$= 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4}$$

Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, kann als Basis für ein Positionssystem benutzt werden. Stets gilt es, eine gegebene Zahl in eine Summe von Vielfachen der Potenzen dieser Basiszahl zu zerlegen und die Koeffizienten in der entsprechenden Reihenfolge anzuordnen.

27 Es ist die Dezimalzahl 444 im Positionssystem mit der Basis 7 anzugeben.

$$\begin{aligned} 444 &= 1 \cdot 343 + 2 \cdot 49 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 \qquad 444 = [1203]_7 \end{aligned}$$

Verwendet man 2 als Basis, so spricht man vom *Zweier-* oder *Dualsystem*. In diesem System sind nur zwei Grundzeichen zur Darstellung von Zahlen erforderlich: „0“ und „1“. Für die „1“ verwendet man im Dualsystem häufig das Zeichen „L“.

Damit man von Dezimalzahlen rasch zu Dualzahlen und umgekehrt übergehen kann, benutzt man eine Tabelle der Potenzen von 2.

n	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
2^n	...	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	...

28 Es sind die Dezimalzahlen 37; 444; 6,625 als Dualzahlen zu schreiben.

$$\begin{aligned} 37 &= 32 + 4 + 1 \\ &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]_2 \\ 37 &= \mathrm{L00L0L} \\ 444 &= 256 + 128 + 32 + 16 + 8 + 4 \\ &= 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]_2 \\ 444 &= \mathrm{LL0LLLL00} \\ 6{,}625 &= 4 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\ &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ &= [1 \quad 1 \quad 0 \;, \; 1 \quad 0 \quad 1]_2 \\ 6{,}525 &= \mathrm{LL0{,}L0L} \end{aligned}$$

Man erkennt, daß die Schreibweise für Zahlen im Dualsystem sehr lang ist. Dieser Nachteil mag ein Grund sein, weshalb man im täglichen Gebrauch der Zahlen nicht das Dualsystem bevorzugt, obwohl das Rechnen sehr einfach ist. Man kann nämlich die Rechenoperationen erster und zweiter Stufe mit allen Zahlen ausführen, wenn man folgende Grundaufgaben der Addition und Multiplikation beherrscht.

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + \mathrm{L} = \mathrm{L}, \quad \mathrm{L} + 0 = \mathrm{L}, \quad \mathrm{L} + \mathrm{L} = \mathrm{L0}$$
$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot \mathrm{L} = 0, \quad \mathrm{L} \cdot 0 = 0, \quad \mathrm{L} \cdot \mathrm{L} = \mathrm{L}$$

8 *Zeigen Sie die Richtigkeit dieser angegebenen Grundaufgaben, indem Sie diese Aufgaben im Dezimalsystem nachrechnen.*

29

$$\begin{array}{rcl} 37 & \leftrightarrow & \text{L00L0L} \\ +\,14 & \leftrightarrow & \text{LLL0} \\ \hline 51 & \leftrightarrow & \text{LL00LL} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37 \cdot 14 \\ \hline 37 \\ 148 \\ \hline 518 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{L00L0L} \cdot \text{LLL0} \\ \hline \text{L00L0L} \\ \text{L00L0L} \\ \text{L00L0L0} \\ \hline \text{L000000LL0} \end{array}$$

Auf der Grundlage des Dualsystems ist der Einsatz von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen möglich. Die beiden Ziffern „0" und „L" können durch zwei Schaltzustände von elektrischen oder elektronischen Bauelementen realisiert werden. Das gilt auch für das Verknüpfen und für das Speichern von Informationen.

Die beiden Schaltzustände können sein:

a) Spannung vorhanden – keine Spannung vorhanden;

b) Relais ist „gezogen" – Relais ist „abgefallen";

c) Magnetisierter Ferritkern – unmagnetisierter Ferritkern;

d) Magnetisiertes Magnetband – unmagnetisiertes Magnetband.

Aufgaben c 87 bis 90

C

9 Rationalmachen von Nennern

9 *Berechnen Sie die folgenden Quotienten auf drei Stellen nach dem Komma!*

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Die Berechnung von Näherungswerten für die Zahl $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{z. B. } \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1{,}4142}\right)$ läßt sich vereinfachen, wenn man den Quotienten $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mit $\sqrt{2}$ erweitert.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \frac{1}{2} \cdot 1{,}4142 = 0{,}7071$$

Durch das Erweitern hat man einen Quotienten erhalten, dessen Nenner rational ist.

Kommt im Nenner eines Quotienten eine Wurzel vor und erhält man durch Erweitern einen Quotienten, dessen Nenner rational ist, so spricht man vom **Rationalmachen des Nenners.**

30 a) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$

c) $\frac{6}{\sqrt{18}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$

Aufgaben c 91 und 92

10 Wiederholung

(10) *Bilden Sie Mengen, deren Elemente Zahlen, geordnete Zahlenpaare bzw. Objekte unserer Umgebung sind!*

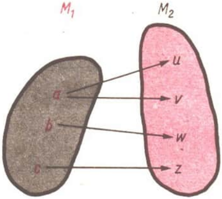
Hat man zwei Mengen M_1 und M_2, so kann man geordnete Paare bilden, bei denen an erster Stelle ein Element von M_1 und an zweiter Stelle ein Element von M_2 steht. Bildet man von diesen geordneten Paaren Mengen F in der Weise, daß *alle* Elemente von M_1 und M_2 in wenigstens einem geordneten Paar vorkommen, so nennt man jede Menge F von geordneten Paaren eine **Abbildung von der Menge M_1 auf die Menge M_2.**

31 a) Wählt man $M_1 = \{a; b; c\}$ und $M_2 = \{u; v; w; z\}$, so sind

$$F_1 = \{[a, u]; [a, v]; [b, w]; [c, z]\} \quad \text{und}$$

$$F_2 = \{[a, z]; [b, u]; [b, v]; [c, w]; [c, z]\}$$

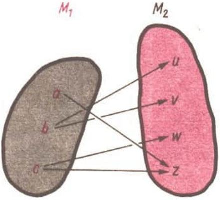
mehrdeutige Abbildungen von M_1 auf M_2; vgl. Bilder C 1 und C 2.



Veranschaulichung von F_1 aus Beispiel 31a)

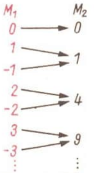
C 1

C 2



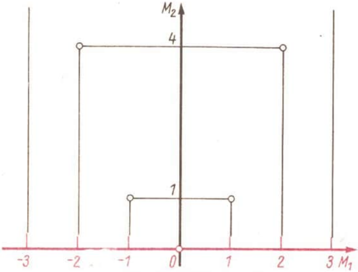
Veranschaulichung von F_2 aus Beispiel 31a)

C 3



Veranschaulichung von F_1 aus Beispiel 31b)

C 4



Veranschaulichung von F_1 aus Beispiel 31b)

b) M_1 sei die Menge der ganzen Zahlen.

M_2 sei die Menge der Quadrate der ganzen Zahlen.

Wenn eine Menge F_1 die geordneten Zahlenpaare enthält, deren zweite Zahl jeweils das Quadrat der ersten Zahl ist (vgl. Bilder C 3 und C 4), und
wenn eine Menge F_2 die geordneten Zahlenpaare enthält, deren zweite Zahl jeweils das Quadrat der um 1 verminderten ersten Zahl ist,
dann sind die Menge F_1 und die Menge F_2 *eindeutige* Abbildungen von M_1 auf M_2.
Man kann kürzer schreiben:

$$M_1 = \{x;\, x \in G\}, \quad M_2 = \{x^2;\, x \in G\};$$
$$F_1 = \{[x;\, x^2];\, x \in G\}, \quad F_2 = \{[x;\, (x-1)^2];\, x \in G\}.$$

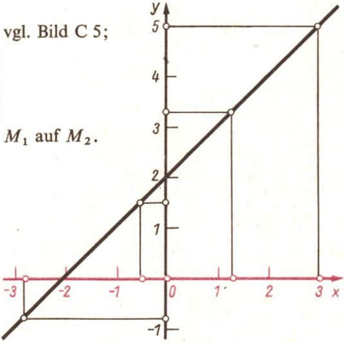
c) M_1 und M_2 seien jeweils die Menge der rationalen Zahlen.

$$M_1 = \{x;\, x \in R\}, \quad M_2 = \{x;\, x \in R\}$$

Dann sind

$$F_1 = \{[x,\, x+2];\, x \in R\}; \quad \text{vgl. Bild C 5;}$$
$$F_2 = \{[x,\, 4x];\, x \in R\} \quad \text{und}$$
$$F_3 = \left\{\left[x, \frac{1}{2}x - 3\right];\, x \in R\right\}$$

eineindeutige Abbildungen von M_1 auf M_2.



C 5

Veranschaulichung von F_1 aus Beispiel 31c)

Eine Abbildung F von M_1 auf M_2 heißt		
mehrdeutige	**eindeutige**	**eineindeutige**
Abbildung von M_1 auf M_2 genau dann, wenn		
wenigstens einem Element von M_1 zwei oder mehr als zwei verschiedene Elemente von M_2 zugeordnet sind.	jedem Element von M_1 genau ein Element von M_2 zugeordnet ist.	jedem Element von M_1 genau ein Element von M_2 und jedem Element von M_2 genau ein Element von M_1 zugeordnet ist.

(11) *Bilden Sie Beispiele* a) *für mehrdeutige*, b) *für eindeutige*, c) *für eineindeutige Abbildungen zweier Mengen!*
Verwenden Sie bei a) $M_1 = \{2; 4; 6\}$, $M_2 = \{0; 1; 2; 3\}$; *bei* b) $M_1 = \{0; 1; -1; 5; -5\}$, $M_2 = \{0; 1; 5\}$; *bei* c) M_1 *und* M_2 *jeweils Menge der nichtnegativen reellen Zahlen!*

Die graphische Veranschaulichung der Abbildungen von einer Menge M_1 auf eine Menge M_2 kann so vorgenommen werden, wie es die Bilder C 1, C 2, C 3, C 4, C 5 zeigen.

(12) *Veranschaulichen Sie die übrigen Abbildungen aus Beispiel C 31 c)!*

Im Unterricht der Klasse 8 wurde der Funktionsbegriff folgendermaßen eingeführt.

8 **DEFINITION: Eine *Funktion* ist eine Menge geordneter Paare $[x; y]$, die durch eindeutige Zuordnungen der Elemente y zu den Elementen x entstanden sind.**

Die folgende Definition des Funktionsbegriffes stimmt inhaltlich voll mit der in Klasse 8 formulierten überein.

Eine *Funktion* ist eine eindeutige Abbildung f von einer Menge M_1 auf eine Menge M_2.
Die Menge M_1 heißt *Definitionsbereich*, die Elemente von M_1 heißen *Argumente* der Funktion.
Die Menge M_2 heißt *Wertebereich*, die Elemente von M_2 heißen *Funktionswerte*.

C

Durch die Definition der Funktion als Abbildung wird der Funktionsbegriff in einen größeren Zusammenhang eingeordnet.
Es sei f eine Funktion und x_0 ein Element des Definitionsbereiches von f. Der zum Argument x_0 gehörende Funktionswert kann mit $f(x_0)$ bezeichnet werden.
Die Vorschrift zum Bilden der geordneten Paare $[x; y = f(x)]$ einer Funktion f kann auf verschiedene Weise gegeben sein.

Die *Abbildungsvorschrift* kann gegeben sein:

a) durch eine *Wortvorschrift*; vgl. Beispiel C 31 b);
b) durch Angabe der geordneten Paare in einer *Wertetabelle*; vgl. Bild C 3;
c) durch eine *graphische Darstellung* (Graph); vgl. Bild C 5;
d) durch eine *Gleichung*; vgl. Beispiel C 31 c).

Die einzelnen Möglichkeiten weisen Vorteile und Nachteile auf. Deshalb benutzt man oft mehrere Darstellungsformen gleichzeitig. Es ist aber in vielen Fällen nicht möglich, alle Darstellungsformen anzugeben. So ist zum Beispiel jedem Zeitpunkt eines Tages eine bestimmte Außentemperatur zugeordnet. Das läßt sich graphisch mit Hilfe eines Temperaturschreibers, aber nicht durch eine Gleichung erfassen.
Man muß zwischen einer *Funktion* und einer *Gleichung als Zuordnungsvorschrift* für eine Funktion unterscheiden.
Ist die Zuordnungsvorschrift für eine Funktion durch eine Gleichung gegeben, so spricht man von der „Funktion mit der Gleichung ...". Im Beispiel C 31 c) ist F_1 „die Funktion mit der Gleichung $y = x + 2$ $(x \in R)$". Im Beispiel C 31 b) ist F_2 „die Funktion mit der Gleichung $y = (x - 1)^2$ $(x \in G)$".
Wir wollen eine vereinfachte Sprechweise vereinbaren, z. B.: „die Funktion mit der Gleichung $y = x + 2$" oder „die Funktion $y = x + 2$".

Aufgaben c 93 bis 101

11 Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ $(n \in G; n \geqq 2)$

Die Abbildungen F_1, F_2 und F_3 im Beispiel C 31 c) sind lineare Funktionen, denn deren geordnete Paare haben alle die Form $[x; mx + n]$.
Die geordneten Paare der Abbildung F_1 im Beispiel C 31 b) haben die Form $[x; x^2]$. Diese Abbildung ist eine **Potenzfunktion.**

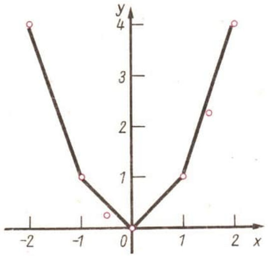
Eine Funktion, deren geordnete Paare die Form $[x; x^n]$ mit $n \in G$ haben, heißt *Potenzfunktion.*

32 Es ist die Potenzfunktion $y = x^2$ zu untersuchen.
Wir stellen zunächst fest, daß der *Definitionsbereich* alle reellen Zahlen umfassen kann, denn für alle reellen Zahlen ist die Bildung des Quadrates erklärt. Da jede nichtnegative reelle Zahl das Quadrat einer reellen Zahl ist, enthält dann der *Wertebereich* alle nichtnegativen reellen Zahlen.
Das läßt sich kürzer und übersichtlicher formulieren.

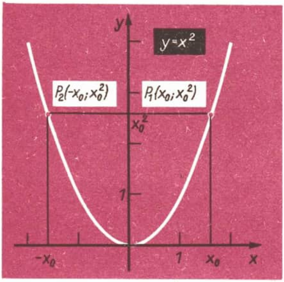
Definitionsbereich: $\{x; x \in P\}$ *Wertebereich:* $\{y \geqq 0; y \in P\}$

Wir berechnen für die Argumente $-2; -1; 0; 1; 2$ die Funktionswerte und stellen die erhaltenen Zahlenpaare in einem Koordinatensystem als Punkte dar. Wir wählen auf beiden Koordinatenachsen als Einheit 1 cm. Verbinden wir die gezeichneten Punkte zu einem Streckenzug, so haben wir damit noch nicht den Graph der Funktion $y = x^2$ erhalten. Das sehen wir sofort, wenn wir weitere Zahlenpaare der Funktion $y = x^2$ ermitteln und in dieses Koordinatensystem eintragen, z. B.: $[-0{,}5; 0{,}25]$, $[1{,}5; 2{,}25]$; vgl. Bild C 6.
Der Graph der Funktion $y = x^2$ ist selbst zwischen zwei beliebig dicht nebeneinander liegenden Punkten nicht geradlinig.
Der Graph der Funktion $y = x^2$ ist eine Kurve. Man erhält diese Kurve, indem man alle Zahlenpaare der Funktion $y = x^2$ in einem Koordinatensystem als Punkte darstellt. Da man das praktisch nicht verwirklichen kann, wählt man einige Zahlenpaare der Funktion aus, stellt sie als Punkte dar und legt durch sie eine Kurve. Diese Kurve wird dem tatsächlichen Graph der Funktion umso näher kommen, je mehr Zahlenpaare man zur Darstellung benutzt. Besondere Beachtung muß man beim Zeichnen der Kurve dem Bereich um den Koordinatenanfangspunkt widmen.
Da zu einander entgegengesetzten Argumenten gleiche Funktionswerte gehören, erkennt man, daß die Kurve symmetrisch zur y-Achse ist; vgl. Bild C 7.

C 6



C 7



Enthält der Definitionsbereich einer Funktion alle reellen Zahlen oder gilt für ihn $a < x$ bzw. $x < b$, so kann man immer nur einen Teil des Graphen der Funktion zeichnen, da das Zeichenblatt begrenzt ist.

(13) *Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = x^2$ im Bereich $-1 \leqq x \leqq 1$, indem Sie mindestens 20 Punkte ermitteln! Wählen Sie als Einheit auf den Achsen 2 cm!*

33 Es ist die Potenzfunktion $y = x^3$ zu untersuchen.
Definitionsbereich und Wertebereich sind jeweils alle reellen Zahlen.
Der Graph der Funktion $y = x^3$ ist selbst zwischen zwei beliebig dicht beieinander liegenden Punkten nicht geradlinig; vgl. Beispiel C 32.
Man zeichnet mit Hilfe einiger Zahlenpaare der Funktion $y = x^3$ die Kurve. Sie stellt umso besser einen Teil des Graphen der Funktion $y = x^3$ dar, je mehr Zahlenpaare der Funktion $y = x^3$ benutzt werden.
Besonders sorgfältig muß man die Kurve in der Umgebung des Punktes (0; 0) zeichnen.
Zu einander entgegengesetzten Argumenten gehören auch einander entgegengesetzte Funktionswerte.
Der Graph der Funktion $y = x^3$ ist deshalb zentralsymmetrisch bezüglich des Koordinatenanfangspunktes; vgl. Bild C 8.

C

(14) *Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = x^3$ im Bereich $-2 \leqq x \leqq 2$, indem Sie zunächst mindestens 20 Zahlenpaare darstellen! Wählen Sie auf beiden Achsen die Einheit 1 cm!*

Entsprechende Überlegungen wie in Beispiel C 32 für die Funktionen $y = x^{2n}$ mit $n \in \{1; 2; 3; \ldots\}$ führen zu folgender Erkenntnis.

Die Graphen der Funktionen $y = x^{2n}$ mit $n \in \{1; 2; 3; \ldots\}$ bilden eine Schar von Kurven, die alle die Punkte $P_1\,(1; 1)$, $P_2\,(-1; 1)$ und $P_3\,(0; 0)$ gemeinsam haben und die symmetrisch zur y-Achse sind; vgl. Bild C 9.

Entsprechende Überlegungen wie im Beispiel C 33 für die Funktionen $y = x^{2n+1}$ mit $n \in \{1; 2; 3; \ldots\}$ führen zu folgender Erkenntnis.

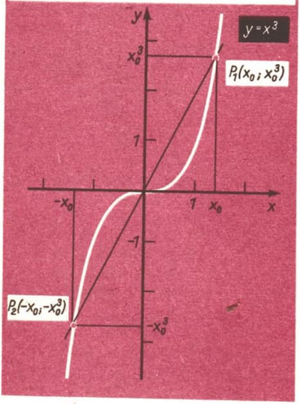
Die Graphen der Funktionen

$y = x^{2n+1}$ mit $n \in \{1; 2; 3; \ldots\}$

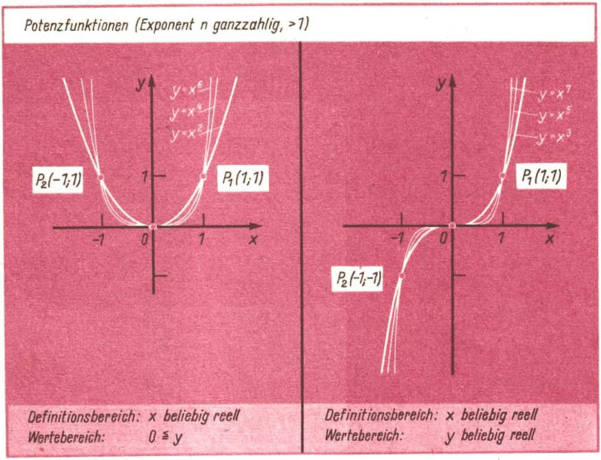
bilden eine Schar von Kurven, die alle die Punkte $P_1\,(1; 1)$, $P_2\,(-1; -1)$ und $P_3\,(0; 0)$ gemeinsam haben und die zentralsymmetrisch zum Punkt (0; 0) sind; vgl. Bild C 10.

(15) *Überzeugen Sie sich mit Hilfe der Bilder C 9 und C 10 von den in der folgenden Tabelle angegebenen Gesetzmäßigkeiten!*

Graph der Funktion $y = x^3$



C 8

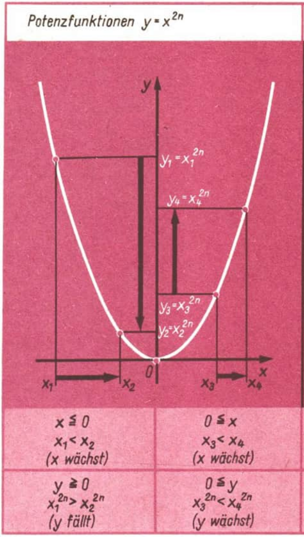


C 9 C 10

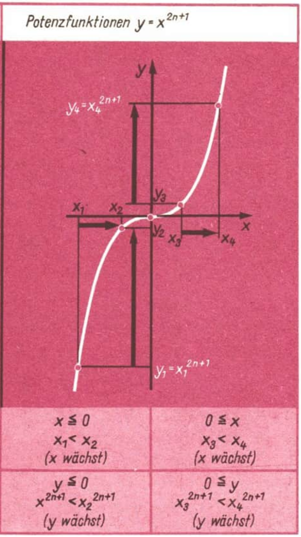
Potenzfunktionen	Intervall	Beziehungen zwischen den Funktionswerten bei *gleichen* Argumenten
$\left.\begin{array}{l} y = x^{2n} \\ y = x^{2n+1} \end{array}\right\} n \geqq 1$	$x < -1$	$x^2 < x^4 < x^6 < \cdots$ $x^3 > x^5 > x^7 > \cdots$
$\left.\begin{array}{l} y = x^{2n} \\ y = x^{2n+1} \end{array}\right\} n \geqq 1$	$-1 < x < 0$	$x^2 > x^4 > x^6 > \cdots$ $x^3 < x^5 < x^7 < \cdots$
$y = x^n \quad (n \geqq 2)$	$0 < x < 1$	$x^2 > x^3 > x^4 > x^5 > \cdots$
$y = x^n \quad (n \geqq 2)$	$1 < x$	$x^2 < x^3 < x^4 < x^5 < \cdots$

Die Graphen der Funktionen $y = x^n$ ($n \in G$, $n > 1$) heißen **Parabeln n-ten Grades**. Parabeln zweiten Grades bzw. dritten Grades nennt man auch **quadratische bzw. kubische Parabeln**. Die y-Achse ist die **Achse der Parabeln**, die die Graphen der Funktionen $y = x^{2n}$ mit $n \in \{1; 2; 3; \ldots\}$ sind; vgl. Bild C 9.
Die Achse einer Parabel verläuft durch den **Scheitelpunkt der Parabel**.
Die Funktionswerte der Potenzfunktionen $y = x^{2n}$ mit $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ *fallen* für wachsende Argumente im Intervall $x \leqq 0$ und *steigen* für wachsende Argumente im Intervall $0 \leqq x$. Man sagt, diese Funktionen sind für $x \leqq 0$ **monoton fallend** und für $0 \leqq x$ **monoton steigend**; vgl. Bild C 11.
Die Potenzfunktionen $y = x^{2n+1}$ mit $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ sind im gesamten Definitionsbereich monoton steigend, d. h., für wachsende Argumente werden die Funktionswerte auch größer; vgl. Bild C 12.

Aufgaben c 102 bis 111



C 11



C 12

12 Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ $(n \in G;\ n \leqq 1)$

Die folgende Tabelle enthält einen Überblick über wesentliche Eigenschaften einiger spezieller Potenzfunktionen. Die Potenzfunktion $y = x^1$ ist uns bereits als spezielle lineare Funktion $y = mx + n$ mit $n = 0$ und $m = 1$ bekannt.

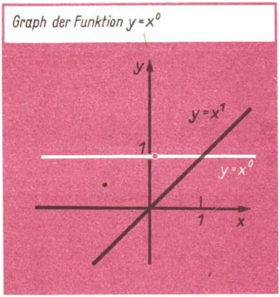
Potenzfunktionen	Definitionsbereich	Wertebereich	Graph
$y = x^1$	Alle reellen Zahlen	Alle reellen Zahlen	Gerade durch die Punkte $P_1\ (1;\ 1)$, $P_2\ (-1;\ -1)$, $P_3\ (0;\ 0)$
$y = x^0$	$x < 0$ und $0 < x$ (0^0 nicht definiert)	Nur die reelle Zahl 1	Parallele zur x-Achse im Abstand 1; Lücke an der Stelle $x = 0$; vgl. Bild C 13
$y = x^n$ $(n \in G,\ n < 0)$	$x < 0$ und $0 < x$ (für $x = 0$ nicht definiert)	für n ungerade: $y < 0$ und $0 < y$; für n gerade: $0 < y$	Vgl. Seite 92 und Auftrag C 16!

Die folgende Tabelle enthält ausgewählte Zahlenpaare für einige Potenzfunktionen $y = x^n$ $(n \in G,\ n < 0)$.

x	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10
$y = x^{-1}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-10	10	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$
$y = x^{-3}$	$-\frac{1}{1000}$	$-\frac{1}{8}$	-1	-8	-1000	1000	8	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{1000}$
$y = x^{-5}$	$-\frac{1}{100000}$	$-\frac{1}{32}$	-1	-32	-100000	100000	32	1	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{100000}$
$y = x^{-2}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$	1	4	100	100	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{100}$
$y = x^{-4}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{16}$	1	16	10000	10000	16	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{10000}$
$y = x^{-6}$	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1}{64}$	1	64	1000000	1000000	64	1	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{1000000}$

Man erkennt: Bei sehr kleinen und bei sehr großen Argumenten sind die Funktionswerte Zahlen in der Nähe der Null. Bei Annäherung der Argumente an Null im Intervall $-1 < x < 0$ wachsen die Funktionswerte über alle Grenzen für gerade Exponenten bzw. werden beliebig klein für ungerade Exponenten.

Bei Annäherung der Argumente an Null im Intervall $0 < x < 1$ wachsen die Funktionswerte über alle Grenzen.



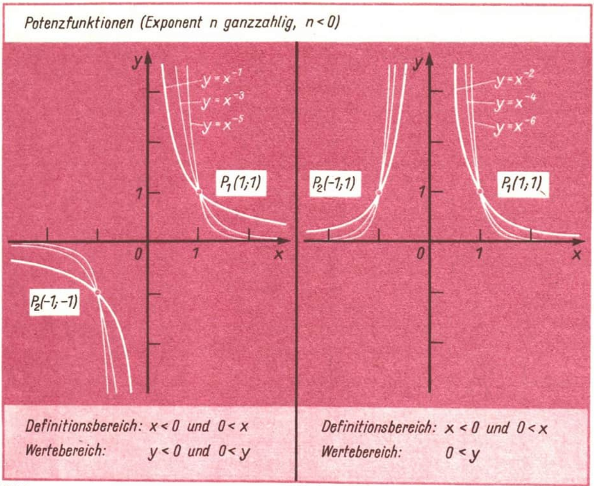
C 13

(16) *Machen Sie sich diese Aussagen klar, indem Sie die Tabelle um die Funktionswerte zu den Argumenten* -100; $-\frac{1}{100}$; $\frac{1}{100}$; 100 *erweitern!*

Für sehr kleine und für sehr große Argumente liegen die Graphen dieser Funktionen nahe der x-Achse. Dabei verläuft bei gleichen Argumenten der Graph derjenigen Funktion näher an der x-Achse, deren Exponent kleiner ist.

Die Graphen dieser Funktionen liegen für Argumente zwischen -1 und 1 nahe an der y-Achse. Bei gleichen Funktionswerten verläuft der Graph derjenigen Funktion näher an der y-Achse, deren Exponent größer ist; vgl. Bilder C 14 und C 15.

(17) *Geben Sie die Beziehungen zwischen den Funktionswerten der Potenzfunktionen* $y = x^n$ $(n \in G,\ n < 0)$ *in einer Tabelle an; vgl. Auftrag C 15!*



C 14 C 15

Die Graphen der Funktionen $y = x^n$ $(n \in G, n < 0)$ heißen **Hyperbeln**. Die Hyperbeln bestehen aus zwei Teilen, den **Hyperbelästen**. Die Hyperbeln sind auch in kleinen Abschnitten nicht geradlinig.

18 a) *Beschreiben Sie die Symmetrieeigenschaften der Hyperbeln!*
b) *Geben Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Hyperbeln an!*

Die Potenzfunktionen $y = x^n$ $(n \in G, n < 0)$ sind im Intervall $x < 0$ *monoton steigend*, wenn *n gerade* ist, bzw. *monoton fallend*, wenn *n ungerade* ist, und im Intervall $0 < x$ *monoton fallend.*

Aufgaben c 112 bis 117

13 Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ $\left(n = \frac{p}{q}; p, q \in G; p \neq q; q > 0\right)$

Die bisher behandelten Potenzfunktionen $y = x^n$ $(n \in G)$ sind Beispiele für **rationale Funktionen.**
Die Potenzfunktionen

$$y = x^n \text{ mit } n = \frac{p}{q} (p, q \in G;\ q > 0;\ p \text{ ist nicht Vielfaches von } q)$$

sind Beispiele für **nichtrationale Funktionen**.
Weitere nichtrationale Funktionen lernen wir noch im Verlaufe des Unterrichts der Klassen 9 und 10 kennen.

Die Potenzfunktionen

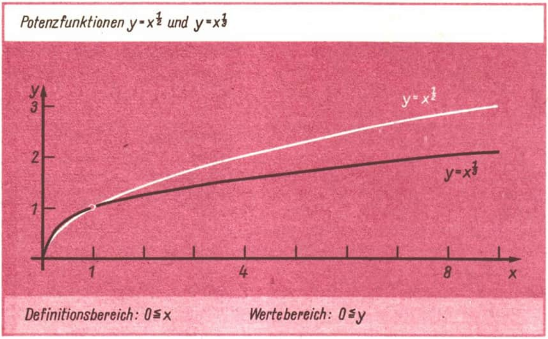
$y = x^n$ mit $n = \frac{p}{q}$ (für die weiteren Ausführungen dieser Lerneinheit soll stets gelten: p ist nicht Vielfaches von q und $q > 0$),
sind bei $p > 0$ für alle nichtnegativen reellen Zahlen und bei $p < 0$ für alle positiven reellen Zahlen definiert. Der Wertebereich ist jeweils gleich dem Definitionsbereich. Diese Ergebnisse leitet man unmittelbar aus der Definition von $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ ab.
Wir betrachten im Beispiel C 34 als Vertreter der Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n = \frac{p}{q}$ diejenigen mit $p = 1$ und $q = 2$ bzw. $q = 3$.

34 Die Funktionen $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$ sind graphisch darzustellen.

Die folgende Tabelle enthält ausgewählte Zahlenpaare, mit deren Hilfe die Graphen der Funktionen ermittelt werden; vgl. Bild C 16.

x	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1	2	4	8
$y = x^{\frac{1}{2}}$	0	0,22	0,32	0,45	0,55	0,71	0,84	1	1,41	2	2,83
$y = x^{\frac{1}{3}}$	0	0,37	0,46	0,58	0,67	0,79	0,89	1	1,26	1,59	2

C



C 16

Die beiden Funktionen $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$ haben die Punkte $P_1\,(1;\,1)$ und $P_2\,(0;\,0)$ gemeinsam.
Im Intervall $0 < x < 1$ gilt $x^{\frac{1}{3}} > x^{\frac{1}{2}}$, d. h., der Graph der Funktion $y = x^{\frac{1}{3}}$ liegt *über* dem Graph der Funktion $y = x^{\frac{1}{2}}$.
Im Intervall $1 < x$ gilt $x^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{2}}$, d. h., der Graph der Funktion $y = x^{\frac{1}{3}}$ liegt *unter* dem Graph der Funktion $y = x^{\frac{1}{2}}$.

19 *Stellen Sie die Funktionen $y = -x^{\frac{1}{2}}$ und $y = -x^{\frac{1}{3}}$ graphisch dar!*

Stellt man die Funktionen $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ und $y = x^{\frac{1}{2}}$ in ein und demselben Koordinatensystem graphisch dar und vergleicht beide Kurven, so stellt man fest, daß die beiden Kurven symmetrisch zum Graph der Funktion $y = x$ liegen. Die beiden Funktionen $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ und $y = x^{\frac{1}{2}}$ stellen eineindeutige Abbildungen dar.
Die Funktion $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ enthält geordnete Zahlenpaare, bei denen an zweiter Stelle das Quadrat der ersten Zahl steht.

Die Funktion $y = x^{\frac{1}{2}}$ enthält geordnete Zahlenpaare, bei denen an erster Stelle das Quadrat der zweiten Zahl steht.

Die Funktion $y = x^{\frac{1}{2}}$ geht also aus der Funktion $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ dadurch hervor, daß in allen geordneten Zahlenpaaren die Reihenfolge der Zahlen vertauscht wird. Man nennt die Funktion $y = x^{\frac{1}{2}}$ die **Umkehrfunktion** der Funktion $y = x^2$ $(x \geqq 0)$. Ebenso ist die Funktion $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ die Umkehrfunktion zur Funktion $y = x^{\frac{1}{2}}$. Es gilt allgemein:

Unter der *Umkehrfunktion* $\bar{f}$ zu einer eineindeutigen Funktion f mit dem Definitionsbereich M_1 und dem Wertebereich M_2 versteht man die Menge aller und nur der geordneten Paare $[y; x]$, für die $[x; y] \in f$ gilt $(x \in M_1, y \in M_2)$.

$\bar{f}$ hat den Definitionsbereich M_2 und den Wertebereich M_1. Die Umkehrfunktion von $\bar{f}$ ist die Ausgangsfunktion f.
Damit eine Funktion f eine Umkehrfunktion $\bar{f}$ hat, ist notwendig, daß die Abbildung von M_2 auf M_1, die durch Vertauschen von x und $f(x)$ in f entsteht, eindeutig ist. Diese Bedingung erfüllen die eineindeutigen Funktionen.

Aufgaben c 118* und 119*

14 Graphen von Funktionen mit Gleichungen der Form $g(x) = f(x) + e$

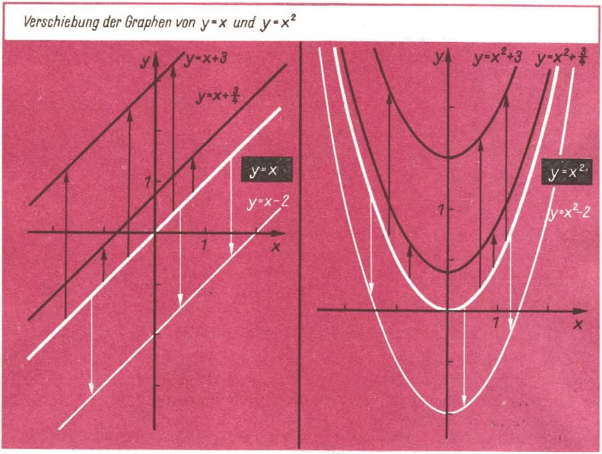
Wir wollen Untersuchungen an den beiden Funktionen $f(x) = x$ und $f(x) = x^2$ durchführen.

Die Funk[redacted] $f(x) = x$ enthält alle geordneten Zahlenpaare $[x; x]$ mit $x \in P$.
Der Gr[redacted] $f(x) = x$ ist eine Gerade, die alle Punkte mit den Koordinaten $P(x; x)$ e[redacted].
Addiert man zu allen Funktionswerten die reelle Zahl e, so erhält man die geordneten Paare $[x; x + e]$ mit $x \in P$. Es entsteht eine neue Funktion, die wir mit g bezeichnen.
Jeder Punkt des Graphen von g geht aus dem Punkt mit der gleichen Abszisse des Graphen von f durch Verschiebung hervor. Ist dabei $e > 0$, so wird um e in Richtung der y-Achse gemäß ihrer Orientierung, andernfalls um $|e|$ entgegengesetzt verschoben.

Die Funktion $f(x) = x^2$ enthält alle geordneten Zahlenpaare $[x; x^2]$ mit $x \in P$.
Der Graph von $f(x) = x^2$ ist eine Parabel, die alle Punkte mit den Koordinaten $P(x; x^2)$ enthält.
Addiert man zu allen Funktionswerten die reelle Zahl e, so erhält man die geordneten Paare $[x; x^2 + e]$ mit $x \in P$. Es entsteht eine neue Funktion, die wir mit g bezeichnen.
Jeder Punkt des Graphen von g geht aus dem Punkt mit der gleichen Abszisse des Graphen von f durch Verschiebung um e in Richtung der y-Achse hervor.

In beiden Fällen geht der Graph der Funktion g aus dem Graph der Funktion f durch **Verschiebung um e in Richtung der y-Achse** hervor.
Das gilt allgemein, wenn für die Funktionswerte der Zusammenhang $g(x) = f(x) + e$ besteht.
Zur graphischen Darstellung von $g(x) = x^2 + e$ kann man daher dieselbe Schablone verwenden, die man zur graphischen Darstellung der Funktion $y = x^2$ benutzt.

35 Es ist der Graph a) von $y = x$ und b) von $y = x^2$ in Richtung der y-Achse um e mit $e \in \left\{3; \frac{3}{4}; -2\right\}$ zu verschieben.
Wir verfahren wie aus den Bildern C 17 und C 18 ersichtlich und schreiben die Gleichungen an die entsprechenden Kurven.



C 17

C 18

Aufgaben c 120

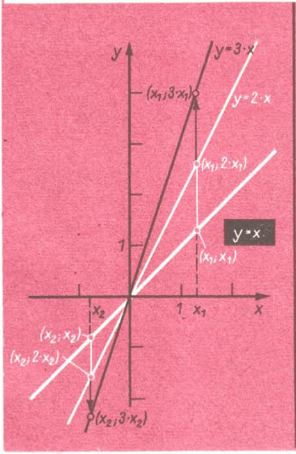
15 Graphen von Funktionen mit Gleichungen der Form $h(x) = a \cdot f(x)$

Wir gehen von einer Funktion f aus ($f(x) = x$ und $f(x) = x^2$) und bilden eine neue Funktion h, indem wir von allen geordneten Paaren $[x; f(x)]$ zu den geordneten Paaren $[x; a \cdot f(x)]$ übergehen. Dabei betrachten wir folgende Fälle.

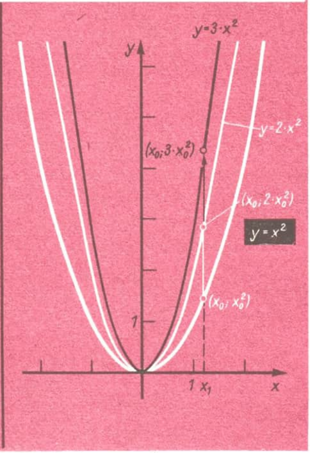
Fall 1: $a > 1$

Die Funktionswerte von h sind bei gleichen Argumenten größer (kleiner) als die von f, wenn $f(x)$ positiv (negativ) ist. Der Graph von h geht durch **Streckung** in Richtung der y-Achse von der x-Achse aus dem Graph von f hervor.

Strecken der Graphen von $y = x$ und $y = x^2$



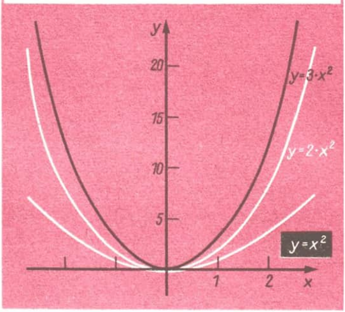
C 19



C 20

36 Es sind die Graphen von $f(x) = x$ und $f(x) = x^2$ zu strecken ($a = 2$ und $a = 3$). Die Bilder C 19 und C 20 zeigen die entsprechenden Ergebnisse. Um die Funktionen $h(x) = a \cdot f(x)$ auch für größere Argumente darstellen zu können, wählt man häufig auf der y-Achse eine andere Strecke als Einheit. Die gegenseitige Lage der Kurven wird davon nicht beeinflußt; vgl. Bild C 21.

Unterschiedliche Einheitsstrecken auf den Achsen

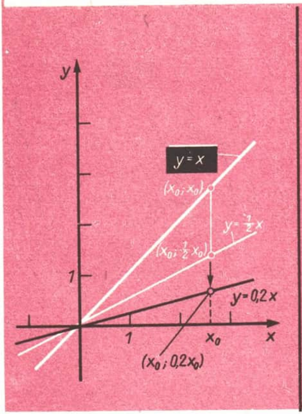


C 21

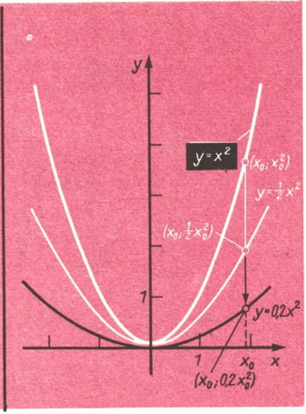
Fall 2: $0 < a < 1$

Die Funktionswerte von h sind bei gleichen Argumenten kleiner (größer) als die von f, wenn $f(x)$ positiv (negativ) ist. Der Graph von h geht durch **Stauchung** in Richtung der y-Achse zur x-Achse hin aus dem Graph von f hervor.

Stauchen der Graphen von $y = x$ und $y = x^2$



C 22



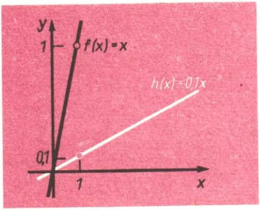
C 23

37 Es sind die Graphen von $f(x) = x$ und $f(x) = x^2$ zu stauchen $\left(a = \frac{1}{2}\right.$ und $\left.a = 0{,}2\right)$.
Die Bilder C 22 und C 23 zeigen die entsprechenden Ergebnisse.

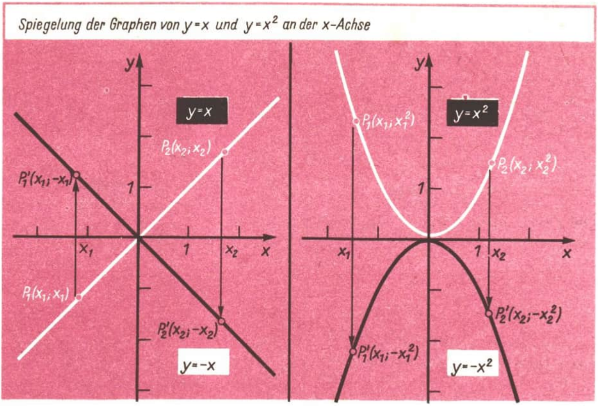
Wird der Graph einer Funktion sehr stark gestaucht (z. B. $a = 0{,}1$), so ist es ratsam, die gestauchte Kurve in einem Koordinatensystem darzustellen, bei dem die Einheit der y-Achse größer als auf der x-Achse gewählt wird (z. B.: Einheit der x-Achse 0,5 cm, Einheit der y-Achse 2,5 cm); vgl. Bild C 24.

Fall 3: $a = -1$

Die Funktionswerte von h sind bei gleichen Argumenten zu denen von f entgegengesetzt. Die Punkte des Graphen von h gehen durch Spiegelung an der x-Achse aus den entsprechenden Punkten des Graphen von f hervor.
Der Graph von h ist die Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse.



C 24



C 25 C26

C

38 Es sind die Spiegelungen der Graphen von $f(x) = x$ und $f(x) = x^2$ an der x-Achse darzustellen. Die Bilder C 25 und C 26 zeigen die Ergebnisse.

Fall 4: $a < 0$; $a \neq -1$

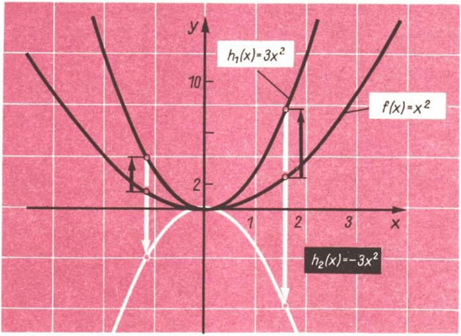
In diesem Fall gewinnt man den Graph von h aus dem Graph von f, indem man zunächst die Stauchung oder Streckung mit $|a|$ und danach die Spiegelung an der x-Achse ausführt; vgl. Bild C 27.

Fall 5: $a = 1$

Fall 6: $a = 0$

20 *Was können Sie in den Fällen 5 und 6 über die Graphen von h aussagen?*

Aufgaben c 121 bis 123



C 27

16 Beispiele für rationale Funktionen

Wir kennen die Begriffe „proportional“ und „umgekehrt proportional“.
Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen zueinander proportional, wenn es eine Funktion von M_1 als Definitionsbereich und M_2 als Wertebereich gibt, bei der sich die Funktionswerte aus den Argumenten durch Multiplikation mit einer reellen Zahl k ergeben, d. h., wenn für alle geordneten Paare $[x; y]$ mit $x \in M_1$ und $y \in M_2$ gilt:

$$y = k \cdot x.$$

Die Zahl k heißt **Proportionalitätsfaktor.**
Viele in der Praxis und in den verschiedenen Wissensgebieten auftretende Funktionen stellen Proportionalitäten dar.
Es handelt sich dabei also stets um **Funktionen** $\boldsymbol{f(x) = k \cdot x}$.

39

	$f(x) = k \cdot x$	$f(x)$	k	x	Sachverhalt
a)	$s(t) = v \cdot t$	s	v	t	Bei der gleichförmigen Bewegung ist der Weg der Zeit proportional.
b)	$G(V) = V \cdot \gamma$	G	γ	V	Das Gewicht von Körpern aus einem bestimmten Material ist dem Volumen proportional.
c)	$F(a) = m \cdot a$	F	m	a	Die aufgewandte Kraft ist bei konstanter Masse der erreichten Beschleunigung proportional.
d)	$I(U) = \frac{1}{R} \cdot U$	I	$\frac{1}{R}$	U	Für einen bestimmten Widerstand ist der durch ihn fließende Strom der angelegten Spannung proportional.

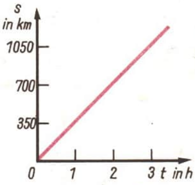
21 *Fertigen Sie eine Tabelle wie in Beispiel C 39 an und verwenden Sie folgende Gleichungen!*

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h; \quad R(A) = \varrho \cdot \frac{l}{A};$$

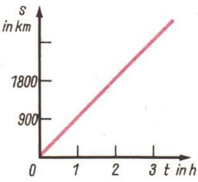
$$W(\Delta t) = m \cdot c \cdot \Delta t; \quad W_{\text{pot}}(h) = m \cdot g \cdot h$$

Die Bilder C 28, C 29, C 30 stellen Weg-Zeit-Diagramme für die gleichförmige Bewegung einiger Flugzeugtypen dar. Man muß beim Arbeiten mit diesen Diagrammen die unterschiedliche Teilung der Achsen beachten.

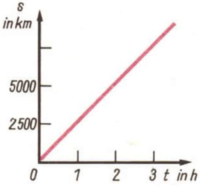
C 28



C 29



C 30



(22) *Mit Hilfe der Bilder C 28, C 29, C 30 sind zu ermitteln:*
a) *Die Flugzeiten für die Strecken 300 km, 1000 km, 1200 km*;
b) *die Strecken, die in 0,5* h, *1,25* h, *2* h *zurückgelegt werden*;
c) *die Gleichungen der dargestellten Funktionen.*

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind zueinander umgekehrt proportional, wenn es eine Funktion mit M_1 als Definitionsbereich und M_2 als Wertebereich gibt, bei der das Produkt aus den Argumenten und den zugehörigen Funktionswerten konstant gleich einer reellen Zahl k ist, d. h., wenn für alle geordneten Paare $[x; y]$ mit $x \in M_1$ und $y \in M_2$ gilt: $x \cdot y = k$ bzw. $y = k \cdot x^{-1}$.

Die graphische Darstellung dieses Sachverhalts kann sein:

eine Hyperbel oder

nur ein Teil einer Hyperbel oder

einzelne Punkte einer Hyperbel.

In der Praxis und in den verschiedenen Wissensgebieten treten Funktionen auf, die umgekehrte Proportionalitäten darstellen. Es handelt sich dabei stets um **Funktionen** $\boldsymbol{f(x) = k \cdot x^{-1}}$.

C

40

	$f(x) = k \cdot x^{-1}$	$f(x)$	k	x	Sachverhalt
a)	$I(R) = U \cdot R^{-1}$	I	U	R	Bei konstanter Spannung ist die Stromstärke umgekehrt proportional zum Widerstand.
b)	$R(A) = \varrho \cdot l \cdot A^{-1}$	R	$\varrho \cdot l$	A	Bei elektrischen Leitern gleicher Länge aus demselben Material ist der elektrische Widerstand umgekehrt proportional dem Leiterquerschnitt.

(23) *Stellen Sie die Funktion $I(R) = U \cdot R^{-1}$ für $U = 40$ V graphisch dar! Überlegen Sie, wie Sie die Teilung der Achsen vornehmen müssen, damit die Ströme für Widerstände zwischen 5 Ω und 200 Ω abgelesen werden können!*

Viele in der Mathematik und anderen Wissensgebieten auftretende Funktionen gehen aus Potenzfunktionen hervor, d. h., sind rationale **Funktionen** der Form $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^n \; (n \in G, a \neq 0)}$.

41

	$f(x) = a \cdot x^n$	$f(x)$	a	x	n	Sachverhalt
a)	$V(a) = a^3$	V	1	a	3	Volumen eines Würfels in Abhängigkeit von der Kantenlänge
b)	$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$	V	$\frac{4}{3}\pi$	r	3	Volumen einer Kugel in Abhängigkeit von der Länge des Radius
c)	$V(a) = \frac{1}{3}ha^2$	V	$\frac{1}{3}h$	a	2	Volumen einer quadratischen Pyramide mit bestimmter Höhe in Abhängigkeit von der Grundkantenlänge

d)	$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$	a	$\frac{g}{2}$	t	2	Weg eines Körpers beim freien Fall im Vakuum in Abhängigkeit von der Zeit
e)	$P(r) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$	F	$\gamma m_1 m_2$	r	-2	Gegenseitige Anziehungskraft zweier Körper mit den Massen m_1 und m_2 in Abhängigkeit von ihrem Abstand
f)	$W_{\text{kin}}(v) = \frac{m}{2} v^2$	W	$\frac{m}{2}$	v	2	Kinetische Energie eines Körpers mit der Masse m in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Man kann die im Beispiel C 41 angegebenen Gleichungen auch so betrachten, wie es für einige Fälle im Beispiel C 42 geschieht.

42 a) $V(a) = a^3$

Das Volumen eines Würfels ist proportional der dritten Potenz der Kantenlänge.
Wird beispielsweise die Kantenlänge verdoppelt, so steigt das Volumen auf das Achtfache.

b) $V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$

Das Volumen einer Kugel ist proportional der dritten Potenz der Länge des Radius.
Ist beispielsweise das Verhältnis der Länge der Radien zweier Kugeln 1 : 3, so ist das Verhältnis ihrer Rauminhalte 1 : 27.

c) $$V(a) = \frac{1}{3} h \cdot a^2$$

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$W_{\text{kin}}(v) = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

Diese mathematischen bzw. physikalischen Gesetze haben alle dieselbe Struktur.
Die Diagramme für diese Gesetze sind gestauchte bzw. gestreckte quadratische Parabeln für positive Argumente.

d) $F(r) = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Die Kraft, mit der sich zwei Massen m_1 und m_2 gegenseitig anziehen, ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung der Massen voneinander. γ ist die Gravitationskonstante.
Wird beispielsweise der Abstand der Massen verdoppelt, so sinkt die Kraftwirkung auf den vierten Teil ab. Bei Verringerung des Abstandes auf ein Drittel vergrößert sich die Kraftwirkung auf das Neunfache.

24 *Formulieren Sie an Hand der folgenden Tabelle, wie sich die Veränderung des Arguments auf die Veränderung des Funktionswertes bei den Funktionen $y = 36 \cdot x^2$ und $y = \frac{36}{x^2}$ auswirkt!*

C

	$y = 36x^2$			$y = \frac{36}{x^2}$		
Veränderung des Arguments	x	y	Veränderung des Funktionswertes	x	y	Veränderung des Funktionswertes
$\cdot 2$	2	144	$\cdot 2^2$	2	9	$: 2^2$
	4	$576 = 144 \cdot 4$		4	$2{,}25 = \frac{9}{4}$	
$\cdot 3$	2	144	$\cdot 3^2$	2	9	$: 3^2$
	6	$1296 = 144 \cdot 9$		6	$1 = \frac{9}{9}$	
$: 2$	6	1296	$: 2^2$	6	1	$\cdot 2^2$
	3	$324 = \frac{1296}{4}$		3	$4 = 1 \cdot 4$	
$: 3$	6	1296	$: 3^2$	6	1	$\cdot 3^2$
	2	$144 = \frac{1296}{9}$		2	$9 = 1 \cdot 9$	

25 *Nennen Sie weitere Beispiele für proportionale bzw. umgekehrt proportionale Abhängigkeiten aus verschiedenen Sachbereichen! Stellen Sie ähnliche Tabellen wie in den Beispielen C 39, C 40, C 41 auf!*

Aufgaben c 124 bis 131

D Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Das sozialistische Lager ist mit den besten Verteidigungswaffen ausgerüstet. Diese modernen strahlgetriebenen Jagdflugzeuge der NVA können mit Überschallgeschwindigkeit fliegen. Dazu ist ein hoher Schub, dazu ist viel Energie erforderlich. Diese mechanische Energie erhält man durch die Umformung der chemischen Energie der Treibstoffe in den Triebwerken. Man kann die Bewegungsenergie eines Körpers mit Hilfe der Gleichung

$$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

errechnen. Die kinetische Energie eines Körpers wächst bei konstanter Masse mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Dieses physikalische Gesetz ist ein Beispiel für eine quadratische Funktion.

1 Der Begriff „Quadratische Funktion"

Als spezielle Funktionen haben wir bisher die linearen Funktionen und die Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten kennengelernt. Mehrere Beispiele haben gezeigt, welche Bedeutung diese Funktionen für die Mathematik und ihre Anwendungen haben. Zahlreiche physikalische Sachverhalte lassen sich mit Hilfe von linearen Funktionen darstellen. So ist z. B. das Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = v \cdot t$ für die geradlinig gleichförmige Bewegung eine lineare Funktion.
Im allgemeinen sind aber die Zusammenhänge zwischen physikalischen oder anderen Größen wesentlich komplizierter und lassen sich demzufolge nicht mit Hilfe von linearen Funktionen darstellen. Beispielsweise ist es nicht möglich, den Zusammenhang zwischen Weg und Zeit bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung durch eine lineare Funktion anzugeben. Das Weg-Zeit-Gesetz für diese Bewegung lautet:

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad (t \geqq 0;\ a \text{ eine Konstante}).$$

Betrachtet man den Flächeninhalt einer Kreisfläche in Abhängigkeit von der Länge des Radius r, so erhält man die Funktion

$$f(r) = \pi \cdot r^2 \quad (r > 0).$$

Solche Funktionen, die ebenfalls sowohl für die Mathematik als auch für die technische und naturwissenschaftliche Praxis von Bedeutung sind, sollen hier nun näher untersucht werden.

D

Sind a, b und c reelle Zahlen mit $a \neq 0$, so nennt man die durch die Gleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

definierte Funktion f eine **quadratische Funktion** oder eine (ganze rationale) **Funktion zweiten Grades.**
f ist also die Menge aller geordneten Paare $[x, y]$ mit $x \in P$ und

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Die Zahlen a, b und c heißen **Koeffizienten** der Funktion f.

Die Gleichung „$f(x) = ax^2 + bx + c$" bzw. „$y = ax^2 + bx + c$" heißt die **allgemeine Form** der Gleichung einer quadratischen Funktion.
Der Definitionsbereich einer quadratischen Funktion ist – wenn keine Einschränkung erfolgt – die Menge der reellen Zahlen.

Wichtige Eigenschaften einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ hängen von ihren Koeffizienten a, b und c ab.
Um eine gewisse Systematik beim Erarbeiten der wichtigsten Eigenschaften der quadratischen Funktionen zu sichern, führen wir die in der Tabelle auf Seite 105 zusammengestellten Fallunterscheidungen durch.
In dem unter (1) bzw. (2) genannten Fall erhalten wir die Funktionen

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0) \qquad \text{bzw.}$$

$$y = x^2 + c.$$

Diese speziellen quadratischen Funktionen kennen wir bereits aus dem Kapitel C.

	Koeffizienten	Beispiel
(1)	$b = c = 0$	$y = -3x^2$
(2)	$a = 1, b = 0, c \neq 0$	$y = x^2 + 5$
(3)	$b = 0, c \neq 0$	$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$
(4)	$a = 1, b \neq 0, c \neq 0$	$y = x^2 - 6x + 7$
(5)	$a \neq 1, b \neq 0, c \neq 0$	$y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$

Der unter (3) genannte Fall läßt sich ohne Schwierigkeiten auf die uns bereits bekannten Spezialfälle (1) und (2) zurückführen.
Ein besonders wichtiger, neu zu erarbeitender Fall ist der unter (4) genannte. Mit diesen Funktionen werden wir uns deshalb ausführlicher beschäftigen.
Der unter (5) angegebene Fall läßt sich wiederum auf (4) zurückführen.

Aufgaben d 1 bis 3

2 Die Funktionen $y = ax^2 + c$

Für $a = 1$ und $c = 0$ erhalten wir die Funktion

$$f(x) = x^2,$$

deren wichtigste Eigenschaften noch einmal zusammengestellt werden sollen.

(1) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist für alle reellen Zahlen definiert. Ihr Wertebereich ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.
(2) Der kleinste Funktionswert der Funktion ist $f(0) = 0$.
(3) Für $x \leqq 0$ fällt die Funktion monoton, für $x \geqq 0$ wächst sie monoton.
(4) Für jede Zahl x gilt $f(-x) = f(x)$.

Den Graph der Funktion $f(x) = x^2$ in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem mit gleicher Achsenteilung nennt man auch **Normalparabel**; vgl. Bild D 1.

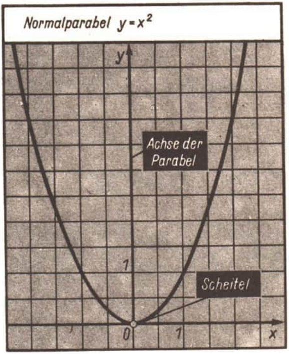
Der Scheitelpunkt der Normalparabel – auch kurz Scheitel genannt – ist der tiefste Kurvenpunkt. Er liegt im Koordinatenursprung.

Wir werden im folgenden der Einfachheit halber von der Normalparabel oder von der Parabel $y = x^2$ sprechen, wenn wir den Graph der Funktion $y = x^2$ meinen.

① *Stellen Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktion $y = -x^2$ zusammen und beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der Funktion!*

Vergleichen Sie den Graph mit der Parabel $y = x^2$!

D 1



D

(2) *Wiederholen Sie an Hand Ihres Lehrbuches, wie die Graphen der Funktionen $y = ax^2$ mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$ aus der Parabel $y = x^2$ entstehen! Führen Sie folgende Fallunterscheidung durch!* 1) $a > 1$ 2) $0 < a < 1$ 3) $a < 0$

Für welche a haben die Funktionen einen kleinsten und für welche a einen größten Funktionswert?

Die Graphen der Funktionen $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ heißen auch für $a \neq 1$ Parabeln; vgl. Bilder C 20 und C 23. Ist $a > 0$, so sagt man: Die Parabeln sind „nach oben geöffnet". Entsprechend nennt man die Parabeln für $a < 0$ „nach unten geöffnet".

$\boxed{1}$ Es gibt genau eine Funktion $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, die das geordnete Paar [6; 12] enthält. Durch das Paar [6; 12] ist der Koeffizient a eindeutig bestimmt, denn es gilt:

$$12 = a \cdot 6^2.$$

Daraus folgt $a = \frac{1}{3}$. Folglich ist $y = \frac{1}{3}x^2$ die gesuchte Funktion.

(3) *Wie erhält man die Graphen der Funktionen $y = x^2 + c$ aus der Parabel $y = x^2$? Stellen Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen $y = x^2 + c$ zusammen!*

(4) a) *Erläutern Sie, wie man den Graph der Funktion $y = 0{,}5\,x^2 + 1$ aus der Parabel $y = x^2$ erhält!*

b) *Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = 0{,}5\,x^2 + 1$ im Intervall $\langle -3; 3\rangle$, indem Sie von der Normalparabel ausgehen!*

c) *Wie erhält man aus der Parabel $y = 0{,}5\,x^2 + 1$ den Graph der Funktion $y = -0{,}5\,x^2 + 1$?*

(5) *Begründen Sie die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Aussagen über die Funktionen $y = ax^2 + c$!*

$y = ax^2 + c$	$a > 0$	$a < 0$
Größter Funktionswert	existiert nicht	$f(0) = c$
Kleinster Funktionswert	$f(0) = c$	existiert nicht
Wertebereich	$y \geqq c$	$y \leqq c$

(6) *Ermitteln Sie den größten Funktionswert der Funktion $y = -\frac{1}{5}x^2 + 7$!*

Aufgaben d 4 bis 22

3 Die Funktionen $y = (x + d)^2 + e$

$\boxed{2}$ Gegeben sei die quadratische Funktion $f(x) = x^2 - 6x + 7$.
Bildet man zu der Summe $x^2 - 6x$ die quadratische Ergänzung, so läßt sich die Gleichung dieser Funktion wie folgt umformen.

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} \quad \underbrace{-9 + 7}_{-2}$$

$$f(x) = (x - 3)^2 \quad -2$$

Der Graph der Funktion $f(x) = (x - 3)^2 - 2$ entsteht aus dem Graph der Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2$ durch Verschiebung um -2 in Richtung der y-Achse.
Wenn man bereits weiß, wie der Graph der Funktion f_1 verläuft, und wenn man diesen bereits gezeichnet hat, so erhält man ohne Schwierigkeiten auch den Graph der Funktion f.

Eine quadratische Funktion mit den Koeffizienten $a = 1$, $b \neq 0$ und $c \neq 0$ läßt sich einfacher untersuchen, wenn ihre Gleichung die Form

$$y = (x + d)^2 + e$$

hat. Da die Eigenschaften der Funktionen $y = (x + d)^2 + e$ aus den Eigenschaften der Funktionen $y = (x + d)^2$ folgen, werden wir uns zunächst mit den zuletzt genannten Funktionen genauer beschäftigen.

7 a) *Stellen Sie Wertetafeln für die Funktionen $f_1(x) = (x - 3)^2$ und $f_2(x) = (x + 4)^2$ auf und zeichnen Sie die Graphen dieser Funktionen sowie den Graph der Funktion $f(x) = x^2$ in ein und dasselbe Koordinatensystem! Zeichnen Sie den Graph von f_1 im Intervall $\langle 0; 6 \rangle$ und den von f_2 im Intervall $\langle -7; 1 \rangle$!*

b) *Für welche Zahlen x gilt $f(x) = 4$ bzw. $f_1(x) = 4$?*

Hinweis: Entnehmen Sie die betreffenden Zahlen aus der Wertetafel!

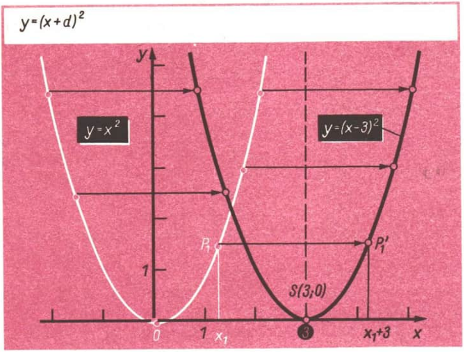
Es sei x_1 eine beliebige Zahl. Der Funktionswert der Funktion $f(x) = x^2$ an dieser Stelle ist $f(x_1) = x_1^2$. Den gleichen Funktionswert hat die Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2$ an der Stelle $x_1 + 3$, denn es ist

$$f_1(x_1 + 3) = (x_1 + 3 - 3)^2 = x_1^2.$$

Der Punkt $P_1\,(x_1 + 3; x_1^2)$ ist also ein Punkt des Graphen der Funktion f_1. Da x_1 beliebig gewählt war, gilt für jede Zahl x

$$f_1(x + 3) = f(x).$$

Folglich gibt es zu jedem Punkt $P\,(x; x^2)$ der Parabel $y = x^2$ einen eindeutig bestimmten Punkt $P'\,(x + 3; x^2)$, der zum Graph von f_1 gehört. Das heißt aber: Der Graph der Funktion f_1 entsteht durch Verschiebung der Parabel $y = x^2$ um 3 in Richtung der x-Achse; vgl. Bild D 2. Der Graph von f_1 ist



D 2

D

also der Normalparabel kongruent. Der Scheitel der Parabel $y = (x - 3)^2$ ist der Punkt S mit den Koordinaten $x_S = 3$ und $y_S = 0$.

8 *Stellen Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2$ zusammen!*

9 *Begründen Sie, weshalb die Parabel $y = x^2$ um vier Einheiten nach links verschoben werden muß, um den Graph der Funktion $f_2(x) = (x + 4)^2$ zu erhalten!*

Ist f eine beliebige quadratische Funktion mit

$$f(x) = (x + d)^2,$$

so gilt für jedes x

$$f(x - d) = (x - d + d)^2 = x^2.$$

Daraus folgt: Der Graph der Funktion $f(x) = (x + d)^2$ entsteht, indem man die Normalparabel um $|d|$ Einheiten parallel zur x-Achse verschiebt, und zwar nach rechts, wenn $d < 0$, und nach links, wenn $d > 0$. Der Graph der Funktion $y = (x + d)^2$ ist also eine zur Normalparabel kongruente Parabel mit den Scheitelkoordinaten $x_S = -d$ und $y_S = 0$. Die Achse der Parabel ist die Gerade $x = -d$.
Da $f(-d) = 0$ der kleinste Funktionswert der Funktion ist, enthält ihr Wertebereich alle nichtnegativen Zahlen. Die Funktion fällt für $x \leqq -d$ und wächst für $x \geqq -d$ monoton.

10 *Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = x^2 - 3x + 2{,}25$ im Intervall $\langle -1{,}5; 4{,}5 \rangle$ unter Verwendung einer Schablone für die Parabel $y = x^2$!*

Hinweis: Schreiben Sie die Gleichung der Funktion zunächst in der Form $y = (x + d)^2$!

Aufgaben d 23 bis 28

D

4

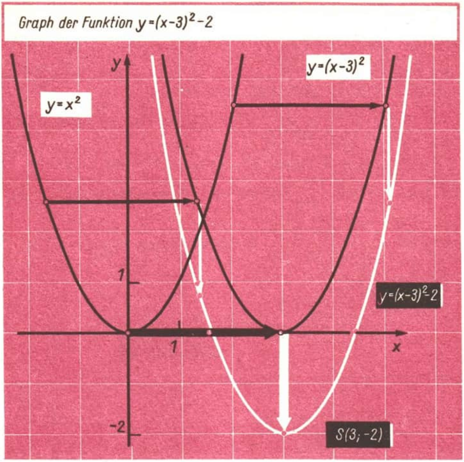
11 a) *Zeichnen Sie mit Hilfe einer Schablone für die Normalparabel die Graphen der Funktionen $f_1(x) = (x - 3)^2$ und $f_2(x) = (x + 4)^2$ in den im Auftrag D 7 angegebenen Intervallen in ein und dasselbe Koordinatensystem!*

b) *Zeichnen Sie – ohne Aufstellung von Wertetafeln – die Graphen der Funktionen $f_3(x) = (x - 3)^2 - 2$ und $f_4(x) = (x + 4)^2 + 3$ in den entsprechenden Intervallen in das unter* a) *benutzte Koordinatensystem!*

c) *Begründen Sie, daß die Graphen der Funktionen f_3 und f_4 der Normalparabel kongruent sind!*

d) *Geben Sie die Wertebereiche der Funktionen f_3 und f_4 an!*

Das Bild D 3 zeigt, daß man den Graph der Funktion $f_4(x) = (x - 3)^2 - 2$ erhält, indem man die Parabel $y = x^2$ erst um 3 in Richtung der x-Achse und dann um -2 in Richtung der y-Achse verschiebt. Die Reihenfolge der beiden Schritte kann man auch vertauschen.
Ist f eine beliebige Funktion mit $f(x) = (x + d)^2 + e$, so gilt:
Der Graph der Funktion f ist eine zur Normalparabel kongruente Parabel mit dem Scheitel $S(-d; e)$.
Die Achse der Parabel ist die Gerade $x = -d$.
Die Funktion hat einen kleinsten Funktionswert, nämlich $f(-d) = e$. Ihr Wertebereich enthält alle Zahlen y mit $y \geqq e$.
Für $x \leqq -d$ fällt die Funktion monoton, für $x \geqq -d$ wächst sie monoton.



D 3

(12) *Begründen Sie diese Aussagen über die Funktionen $f(x) = (x + d)^2 + e$!*

Der Graph einer quadratischen Funktion entstehe durch Verschiebung der Normalparabel parallel zu den Koordinatenachsen. Die Scheitelkoordinaten seien $x_S = -3$ und $y_S = -4$.
Dann lautet die Gleichung der betreffenden Funktion

$$y = (x + 3)^2 - 4.$$

Aufgaben d 29 bis 31

5 Nullstellen quadratischer Funktionen

Wir kennen bereits die folgende Definition.

x_1 ist eine Nullstelle der Funktion f genau dann, wenn $f(x_1) = 0$ gilt.

Ist x_1 eine Nullstelle der Funktion f, so schneidet oder berührt der Graph von f an der Stelle x_1 die x-Achse. Es gilt auch umgekehrt: Wenn der Graph einer gegebenen Funktion f die x-Achse an der Stelle x_1 schneidet oder berührt, so gehört das geordnete Paar $[x_1; 0]$ zur Funktion f, d. h. aber: x_1 ist eine Nullstelle von f.

(13) a) *Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion $y = 3x - 2$!*

b) *Ermitteln Sie zeichnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen der Funktion $y = 3x - 2$ mit der x-Achse!*

c) *Ermitteln Sie zeichnerisch einen Näherungswert für die Nullstelle der Funktion $y = -\frac{2}{5}x + 1$! Kontrollieren Sie das Ergebnis durch Rechnung!*

4 Die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ hat die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$, denn es ist

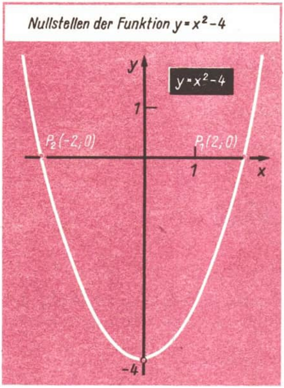
$$f(2) = 2^2 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0.$$

Die Schnittpunkte des Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ mit der x-Achse sind die Punkte $P_1\,(2; 0)$ und $P_2\,(-2; 0)$; vgl. Bild D 4.

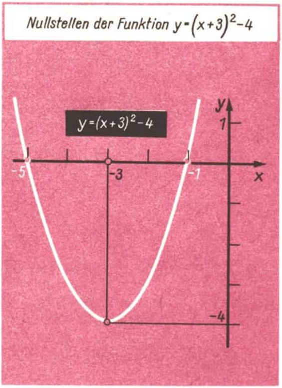
5 Der Graph der Funktion $f(x) = (x + 3)^2 - 4$ schneidet die x-Achse an den Stellen $x_1 = -5$ und $x_2 = -1$; vgl. Bild D 5.

Es ist $f(-5) = (-5 + 3)^2 - 4 = 0$ und $f(-1) = (-1 + 3)^2 - 4 = 0$.

Folglich sind die Zahlen -5 und -1 Nullstellen der Funktion f.



D 4



D 5

Während jede lineare Funktion $y = mx + n$ für $m \neq 0$ genau eine Nullstelle hat, können quadratische Funktionen – wie die Beispiele D 4 und D 5 zeigen – auch zwei Nullstellen haben. Auch die Funktion $f(x) = (x - 3)^2 - 2$ hat zwei Nullstellen. Aus der graphischen Darstellung der Funktion erhält man für diese Nullstellen die Näherungswerte $x_1 \approx 1{,}6$ bzw. $x_2 \approx 4{,}4$; vgl. Bild D 3.

(14) *Berechnen Sie die Funktionswerte der Funktion $f(x) = (x - 3)^2 - 2$ für die Zahlen 1,6 und 4,4! Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie aus den erhaltenen Ergebnissen?*

(15) *Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = (x - 1{,}5)^2 - 2{,}8$ im Intervall $\langle 1{,}5; 4{,}5 \rangle$! Ermitteln Sie Näherungswerte für die Nullstellen der Funktion!*

Der Graph einer quadratischen Funktion $f(x) = (x + d)^2 + e$ hat genau dann Punkte mit der x-Achse gemeinsam, wenn der Scheitelpunkt des Graphen nicht oberhalb der x-Achse liegt.

Folglich gilt für jede quadratische Funktion $f(x) = (x + d)^2 + e$:
f hat genau dann Nullstellen, wenn $e \leqq 0$ ist.

Ist $e < 0$, so hat f zwei Nullstellen.
Ist $e = 0$, so hat f eine Nullstelle.

Im Beispiel D 2 wurde gezeigt, daß sich die Funktion

$$(1) \quad f(x) = x^2 - 6x + 7$$

auch durch die Gleichung

$$(2) \quad f(x) = (x - 3)^2 - 2$$

darstellen läßt. Umgekehrt erhält man aus (2) durch Ausrechnen der Klammer wieder die Gleichung (1). Da man aus der Gleichung (2) u. a. sofort die Koordinaten des Scheitels des entsprechenden Graphen ablesen kann, ist diese zweckmäßiger als die Gleichung (1).
Jede quadratische Funktion $y = (x + d)^2 + e$ läßt sich in der Form $y = x^2 + px + q$ darstellen, wenn man

$$(*) \quad 2d = p \quad \text{und} \quad d^2 + e = q \quad \text{setzt.}$$

Die Gleichung „$y = x^2 + px + q$" heißt die **Normalform der quadratischen Funktionen.**
Ist eine quadratische Funktion in der Normalform gegeben, so kann man sie stets durch eine Gleichung der Form $y = (x + d)^2 + e$ darstellen, indem man $p = 2d$ und $q = d^2 + e$ setzt:

$$y = x^2 + px + q = x^2 + 2dx + d^2 + e = (x + d)^2 + e.$$

Aus (*) folgt

$$d = \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad e = q - d^2 = q - \frac{p^2}{4} = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Somit erhält man

$$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Die Differenz $D = \frac{p^2}{4} - q$ nennt man die **Diskriminante**[1] der betreffenden quadratischen Funktion.

Aus diesen Betrachtungen folgt:

Jede quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$ hat als Graph eine zur Normalparabel kongruente Parabel mit dem Scheitel $S\left(-\frac{p}{2}; -D\right)$.
Jede Funktion $y = x^2 + px + q$ nimmt also an der Stelle $x_S = -\frac{p}{2}$ ihren kleinsten Funktionswert $y_S = -D$ an.

Für $x \leqq -\frac{p}{2}$ ist sie monoton fallend und für $x \geqq -\frac{p}{2}$ monoton wachsend.

Der Graph der Funktion $y = x^2 + 5x + 4$ ist zu zeichnen.

Lösung: Der Graph der gegebenen Funktion ist eine Parabel, die der Normalparabel kongruent ist. Wir berechnen die Scheitelpunktskoordinaten x_S und y_S der zu zeichnenden Parabel.

[1] discriminare (lat.) trennen

D

Es ist $p = 5$ und $q = 4$. Dann ist

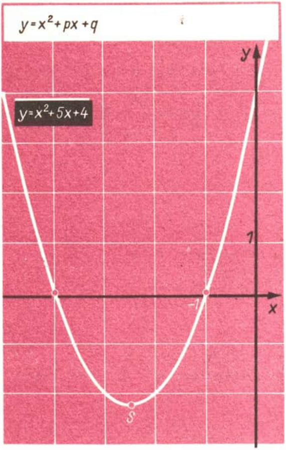
$$x_S = -\frac{p}{2} = -\frac{5}{2} \quad \text{und} \quad y_S = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = -\left(\frac{25}{4} - \frac{16}{4}\right) = -\frac{9}{4}.$$

Der Scheitelpunkt der zu zeichnenden Parabel ist also der Punkt

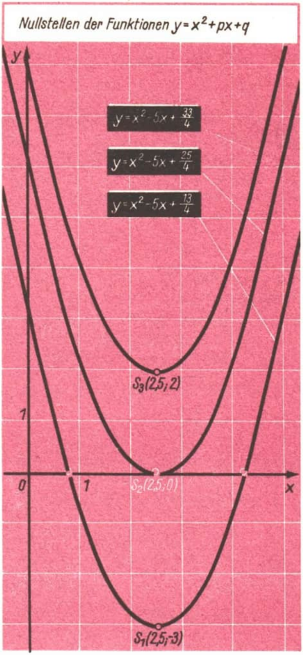
$$S\left(-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right).$$

Mit Hilfe der Schablone der Normalparabel erhalten wir den Graph der Funktion $y = x^2 + 5x + 4$; vgl. Bild D 6.

Aufgaben d 32 bis 46



D 6



D 7

7 Nullstellen der Funktionen $y = x^2 + px + q$

7 Es ist zu untersuchen, welche der folgenden Funktionen Nullstellen haben.

$$y = x^2 - 5x + \frac{13}{4}; \quad y = x^2 - 5x + \frac{25}{4}; \quad y = x^2 - 5x + \frac{33}{4}$$

Wir zeichnen die Graphen der drei Funktionen und stellen fest, welche von diesen Kurven gemeinsame Punkte mit der x-Achse haben. Die Scheitel der zu zeichnenden Parabeln sind die Punkte

$$S_1\left(\frac{5}{2}, -3\right); \quad S_2\left(\frac{5}{2}, 0\right); \quad S_3\left(\frac{5}{2}, 2\right); \text{ vgl. Bild D 7.}$$

Ergebnis:
Die Funktion $y = x^2 - 5x + \frac{13}{4}$ hat die Nullstellen $x_1 \approx 0{,}8$ und $x_2 \approx 4{,}2$.

Die Funktion $y = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$ hat die Nullstelle $x = \frac{5}{2}$.

Die Funktion $y = x^2 - 5x + \frac{33}{4}$ hat keine Nullstellen.

SATZ: Für jede Funktion f mit $f(x) = x^2 + px + q$ gilt:
f hat genau dann Nullstellen, wenn $D = \frac{p^2}{4} - q \geqq 0$.

Beweis: Es sei f eine beliebige quadratische Funktion mit $f(x) = x^2 + px + q$.
Für jede Zahl x gilt $x^2 + px + q = (x + d)^2 + e$ mit

$$d = \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad e = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

In der Lerneinheit D 5 wurde festgestellt, daß eine Funktion $y = (x + d)^2 + e$ genau dann Nullstellen hat, wenn $e \leqq 0$ ist. Nun ist $e \leqq 0$ genau dann, wenn $\frac{p^2}{4} - q = D \geqq 0$ ist. Folglich hat die Funktion f genau dann Nullstellen, wenn $D \geqq 0$ ist. Da f beliebig gewählt war, gilt der Satz für jede Funktion $f(x) = x^2 + px + q$.

Die verschiedenen Möglichkeiten für die Nullstellen einer gegebenen Funktion $y = x^2 + px + q$ werden in Abhängigkeit von ihrer Diskriminante in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

$D = \frac{p^2}{4} - q$	$y_S = -D$	Parabel $y = x^2 + px + q$	Funktion $y = x^2 + px + q$
$D > 0$	$y_S < 0$	schneidet die x-Achse in zwei verschiedenen Punkten	hat *zwei verschiedene* Nullstellen
$D = 0$	$y_S = 0$	berührt die x-Achse	hat *eine* Nullstelle
$D < 0$	$y_S > 0$	hat keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse	hat *keine* Nullstellen

Aufgaben d 47 bis 53

8 Die Funktionen $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$

Jede quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ läßt sich auch durch

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

bzw. durch

$$f(x) = a(x^2 + px + q) \quad \text{mit} \quad p = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{c}{a}$$

darstellen.
Die Graphen der Funktionen

$$g(x) = x^2 + px + q$$

sind Parabeln, die der Normalparabel kongruent sind. Es sei nun

$$f(x) = a \cdot g(x) = a(x^2 + px + q) \qquad (a \neq 0)$$

eine beliebige quadratische Funktion. Für eine beliebige Zahl x erhält man den Funktionswert der Funktion f, indem man den zu dieser Zahl x gehörenden Funktionswert der Funktion g mit a multipliziert. Damit wissen wir auch, wie man den Graph der Funktion f aus dem bereits vorliegenden Graph der Funktion g erhält:

1) Ist $a > 0$, so wird der Graph der Funktion g im Verhältnis $a:1$ senkrecht zur x-Achse gestreckt bzw. gestaucht, je nachdem $a > 1$ bzw. $0 < a < 1$ ist.
2) Ist $a < 0$, so ist $|a| = -a$, also $f(x) = a \cdot g(x) = -|a|\, g(x)$. Man zeichnet zunächst gemäß 1) die Parabel $y = |a|\, g(x)$ und spiegelt diese an der x-Achse.

Damit erhält man:

Jede quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ hat als Graph eine Parabel, die einer gestreckten oder gestauchten Normalparabel kongruent ist. Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet. Folglich hat jede Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ für $a > 0$ einen kleinsten und für $a < 0$ einen größten Funktionswert.

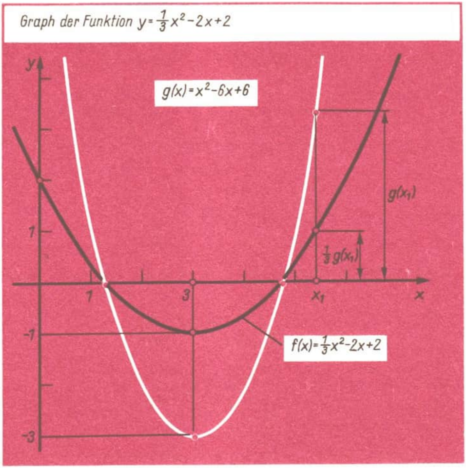
Wegen $f(0) = c$ schneidet der Graph von f die y-Achse im Punkt $(0; c)$.

8 Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$ ist im Intervall $0 \leqq x \leqq 6$ zu zeichnen.

1) Wir formen die Gleichung der Funktion wie folgt um:

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 6).$$

D 8



2) Wir zeichnen den Graph der Funktion $g(x) = x^2 - 6x + 6$ mit Hilfe der Schablone für die Normalparabel. Der Scheitel der Parabel hat die Koordinaten $x_S = 3$ und $y_S = -3$.

3) Wir zeichnen den Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3} g(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 6)$, indem wir die Parabel $y = x^2 - 6x + 6$ im Verhältnis 1 : 3 senkrecht zur x-Achse stauchen; vgl. Bild D 8.

Oft ist es einfacher, den Graph einer Funktion $y = ax^2 + bx + c$ in einem gegebenen Intervall zu zeichnen, indem man zunächst eine Wertetafel aufstellt. Allerdings müssen dann relativ viele Funktionswerte berechnet werden.

Aufgaben d 54 und 55

9 Anwendungen quadratischer Funktionen

9 Wird ein Stein zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 von einem Turm der Höhe h_0 senkrecht nach oben geworfen, so gilt für seine Höhe h zum Zeitpunkt t

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

Bild D 9 zeigt den Graph dieser Funktion für $h_0 = 30$ m und $v_0 = 25\,\text{ms}^{-1}$. (Für g wurde der Näherungswert $10\,\text{ms}^{-2}$ verwendet.) Aus Bild D 9 entnehmen wir, daß der Stein nach etwa 2,5 s seine maximale Höhe $h \approx 61$ m erreicht und sich nach etwa 6 s am Erdboden befindet.

10 Von allen Rechtecken, deren Umfang 10 m beträgt, ist dasjenige mit dem größten Flächeninhalt zu ermitteln.

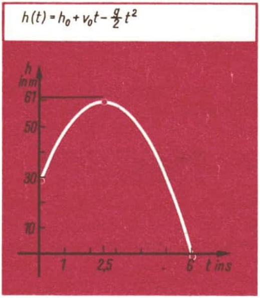
Lösung: Es sei R ein beliebiges Rechteck mit dem Umfang 10 m. Sind a und b die *Maßzahlen* der Seitenlängen dieses Rechtecks, so gilt

$$a + b = 5 \quad \text{bzw.} \quad b = 5 - a.$$

Dann ist die Maßzahl A des Flächeninhaltes dieses Rechtecks

$$A = a \cdot b = a(5 - a) = -a^2 + 5a.$$

Da nun für jedes a mit $0 < a < 5$ ein eindeutig bestimmtes Rechteck mit dem Umfang 10 m existiert, ist die Menge f der geordneten Paare $[a; A]$ mit $0 < a < 5$ eine Funktion, die durch die Gleichung



D 9

$$f(a) = -a^2 + 5a \qquad \text{definiert ist.}$$

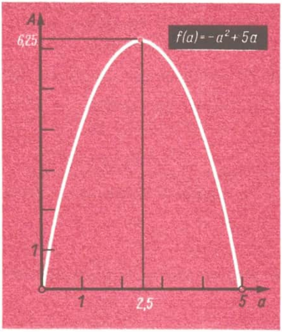
f ist eine quadratische Funktion. Da der Koeffizient von a^2 negativ ist, hat f einen größten Funktionswert. Diesen größten Funktionswert haben wir zu ermitteln. Dazu zeichnen wir den Graph der Funktion; vgl. Bild D 10. Beim Aufstellen einer Wertetafel berechnen wir zunächst die Funktionswerte für die Zahlen 1, 2, 3 und 4 und erhalten

$$f(1) = f(4) = 4 \quad \text{und} \quad f(2) = f(3) = 6.$$

Parabelpunkte mit gleichen Ordinaten liegen symmetrisch zur Achse der Parabel, auf der ja auch der Scheitel der Parabel liegt. Daraus folgt, daß der Scheitel der Parabel die Abszisse $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$ hat. Also ist $f(2{,}5) = 6{,}25$ der größte Funktionswert der Funktion f.

Ergebnis: Von allen Rechtecken mit dem Umfang 10 m hat das Quadrat mit der Seitenlänge 2,5 m den größten Flächeninhalt.

Aufgaben d 56 bis 63



D 10

Quadratische Gleichungen

10 Der Begriff „Quadratische Gleichung“

Die Nullstelle einer vorgegebenen linearen Funktion $y = mx + n$ mit $m \neq 0$ ist diejenige Zahl x, für die $mx + n = 0$ gilt. Die Nullstelle dieser Funktion ist also die Lösung der linearen Gleichung $mx + n = 0$.

(16) *Für folgende lineare Funktionen sind die Nullstellen zu berechnen.*

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 5$ c) $y = \sqrt{2}x - 3$

Hat eine vorgegebene quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ Nullstellen, so erhält man diese entsprechend als Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Die Gleichung

(1) $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ $(a, b, c \in P)$

heißt im Fall $a \neq 0$ **quadratische Gleichung** oder **Gleichung zweiten Grades.** Dividiert man die Gleichung (1) durch a $(a \neq 0)$, so erhält man die **Normalform der quadratischen Gleichung**

(2) $\boxed{x^2 + px + q = 0}$ mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$.

Zum Unterschied zur Normalform der quadratischen Gleichung nennt man die Gleichung (1) die **allgemeine Form der quadratischen Gleichung.**
Die Gleichungen (1) und (2) sind einander äquivalent. Ihre Lösungsmengen sind demzufolge identisch. Daher genügt es, wenn wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die Gleichung (2) Lösungen besitzt und wie man diese Lösungen findet.

11 Welche Zahlen x erfüllen die Gleichung $(x - 3)(x + 1) = 0$?

Lösung: Aus dem Satz

Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$a \cdot b = 0 \text{ genau dann, wenn } a = 0 \text{ oder}^1\ b = 0$$

folgt:

Für jede reelle Zahl x gilt:

$$(x-3)(x+1) = 0 \text{ genau dann, wenn } x - 3 = 0 \text{ oder } x + 1 = 0 \text{ bzw.:}$$

Für jede reelle Zahl x gilt:

$$(x-3)(x+1) = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 3 \text{ oder } x = -1.$$

Ist also x eine beliebige Zahl mit $x \neq 3$ *und* $x \neq -1$, so gilt auch $(x-3)(x+1) \neq 0$. Demnach sind die Zahlen 3 *und* -1 die *einzigen* Zahlen, die die Gleichung $(x-3)(x+1) = 0$ erfüllen.
Wegen $(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$ haben wir somit die quadratische Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$ gelöst. Ihre Lösungen sind die Zahlen 3 und -1.

Hat eine quadratische Gleichung die Form

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (x_1, x_2 \text{ beliebige reelle Zahlen}),$$

so kann man ihre Lösungen unmittelbar angeben.

Die Gleichung $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ hat die Lösungen x_1 und x_2.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zu lösen, indem wir die Summe $x^2 + px + q$ in ein Produkt aus linearen Faktoren umformen. Wir müssen feststellen, unter welchen Bedingungen eine solche Zerlegung in Linearfaktoren möglich ist und wie man diese Zerlegung findet. Die Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist also gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Summe $x^2 + px + q$ in ein Produkt aus zwei linearen Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ zu zerlegen.

17 a) *Welche Lösungen hat die Gleichung $(x-4)(x-6) = 0$?*

b) *Überzeugen Sie sich davon, daß es genau eine reelle Zahl x gibt, für die $(x+2)^2 = 0$ gilt!*

18 a) *Formen Sie folgende Summen durch Ausklammern in Produkte um!*

$$x^2 - 5x; \qquad 3x^2 - 7x; \qquad a^2 - ab$$

b) *Formen Sie folgende Summen unter Verwendung von $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ in Produkte um!*

$$x^2 - 4; \qquad x^2 - 7; \qquad a^2 - \frac{4}{9}$$

Aus der Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erhält man für

$p = q = 0$ die Gleichung $x^2 = 0$;

$p = 0$ und $q \neq 0$ die Gleichung $x^2 + q = 0$;

$p \neq 0$ und $q = 0$ die Gleichung $x^2 + px = 0$.

Die Gleichung $x^2 = 0$ hat die Lösung 0. Die Spezialfälle $x^2 + q = 0$ und $x^2 + px = 0$ betrachten wir in den Lerneinheiten D 11 und D 12.

Aufgaben d 64 bis 66

[1] Zur Verwendung des Wortes „oder" in der Mathematik vgl. die Anmerkung auf Seite 8.

(19) a) *Ein Quadrat habe den Flächeninhalt* $A = 2{,}56\ \text{m}^2$. *Wie lang ist die Quadratseite?*

b) *Für welche Zahlen x gilt* $x^2 = 2{,}56$?

12 Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 9 = 0$ sind zu ermitteln.
Die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ ist mit der Gleichung

(1) $(x - 3)(x + 3) = 0$

äquivalent. Durch diese Umformung ist die Summe $x^2 - 9$ in ein Produkt aus zwei linearen Faktoren zerlegt worden. Aus (1) erhält man unmittelbar: Die Zahlen 3 und -3 sind die Lösungen der Gleichung $x^2 - 9 = 0$.
Die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ kann auch folgendermaßen gelöst werden.
Die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ ist äquivalent mit $x^2 = 9$.
Diese Gleichung ist äquivalent[1] mit $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ bzw. mit $|x| = 3$.
Aus dieser Gleichung erhält man wiederum unmittelbar die Zahlen 3 und -3 als Lösungen.

(20) *Weshalb hat die Gleichung* $x^2 + 9 = 0$ *keine reellen Lösungen?*

Die Gleichung $x^2 + q = 0$ nennt man **reinquadratische Gleichung**.

2 **SATZ: Die Gleichung $x^2 + q = 0$ hat genau dann Lösungen, wenn $q \leqq 0$ ist. Ist $q = 0$, so hat die Gleichung die Lösung 0. Ist $q < 0$, so hat die Gleichung die zueinander entgegengesetzten Lösungen $\sqrt{-q}$ und $-\sqrt{-q}$.**

Beweis: Wir führen folgende Fallunterscheidung durch.

Fall 1: Es sei $q = 0$.

Die Gleichung $x^2 = 0$ hat nur die eine Lösung 0, denn für jede Zahl $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$.

Fall 2: Es sei $q > 0$.

Für jede Zahl x gilt $x^2 \geqq 0$. Folglich gibt es im Fall $q > 0$ keine Zahl x mit $x^2 + q = 0$.

Fall 3: Es sei $q < 0$.

Mit $q = -r$ $(r > 0)$ erhalten wir die Gleichung

(*) $x^2 - r = 0$.

Wegen $r = \sqrt{r}^2$ ist (*) äquivalent mit

$(x - \sqrt{r})(x + \sqrt{r}) = 0$.

Diese Gleichung hat die Lösungen $\sqrt{r}$ und $-\sqrt{r}$.

Mit $r = -q$ $(-q > 0)$ folgt also: Die Gleichung $x^2 + q = 0$ hat im Fall $q < 0$ die Lösungen $\sqrt{-q}$ und $-\sqrt{-q}$.

Damit ist der Satz D 2 bewiesen.

Es ist üblich, die Lösungen der Gleichung $x^2 + q = 0$ $(q < 0)$ mit „x_1" und „x_2" zu bezeichnen, wobei die Reihenfolge der Bezeichnungen willkürlich ist. Man sagt dann: „Die Gleichung $x^2 + q = 0$ $(q < 0)$ hat die Lösungen

$x_1 = \sqrt{-q}$ und $x_2 = -\sqrt{-q}$"

[1] Sind a und b nichtnegative Zahlen, so ist die Gleichung $a = b$ äquivalent mit $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

D

und schreibt dafür oft kürzer

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-q}.$$

(Lies: „x eins zwei gleich plus oder minus $\sqrt{-q}$".)

Wir haben beim Beweis des Satzes D 2 eine Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens von q durchgeführt. Die Annahmen $q = 0$, $q > 0$ und $q < 0$ erschöpfen alle möglichen Fälle bezüglich des Vorzeichens von q und schließen sich gegenseitig aus. Man spricht deshalb von einer **vollständigen Fallunterscheidung**. Die Methode der vollständigen Fallunterscheidung ist ein wichtiges Hilfsmittel beim Beweisen mathematischer Sätze.

13 Die Gleichung $(2x + 6)^2 + (4x - 3)^2 = 125$ lösen wir wie folgt.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 24x + 36 + 16x^2 - 24x + 9 - 125 &= 0 \\ 20x^2 - 80 &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

In dieser reinquadratischen Gleichung ist $q = -4$. Als Lösungen dieser Gleichung und damit der Ausgangsgleichung erhält man die Zahlen

$$x_1 = \sqrt{-q} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{-q} = -\sqrt{4} = -2.$$

Probe:	a) $x_1 = 2$	b) $x_2 = -2$
Linke Seite:	$(2 \cdot 2 + 6)^2 + (4 \cdot 2 - 3)^2$	$[2 \cdot (-2) + 6]^2 + [4 \cdot (-2) - 3]^2$
	$= 100 \quad + 25 \quad = 125$	$= 4 \quad + 121 \quad = 125$
Rechte Seite:	125	125
Vergleich:	$125 = 125$	$125 = 125$

14 Für welche x gilt $\dfrac{x^2}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b} - \dfrac{x^2}{a}$ $\quad (a \neq 0, b \neq 0)$?

Lösung: Da $a \neq 0$ und $b \neq 0$, ist auch $a \cdot b \neq 0$. Folglich ist die gegebene Gleichung äquivalent mit (Multiplikation mit ab):

$$ax^2 + b^2 = a^2 - bx^2$$

$$(a + b)\,x^2 = a^2 - b^2$$

$$(*) \qquad (a + b)\,x^2 = (a + b)(a - b)$$

1) Es sei $a + b \neq 0$. Dann ist $(*)$ äquivalent mit

$$x^2 = a - b.$$

Ist $a > b$, so hat die Gleichung die Lösungen $x_1 = \sqrt{a - b}$; $x_2 = -\sqrt{a - b}$.

Ist $a = b$, so hat die Gleichung die Lösung 0.

Ist $a < b$, so hat die Gleichung keine Lösungen.

2) Es sei $a + b = 0$, also $a = -b \neq 0$. Dann wird die Gleichung $(*)$ aber von *jeder* reellen Zahl erfüllt, d. h., die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung ist im Falle $a = -b \neq 0$ die Menge P.

Die gegebene Gleichung lautet für $a = -b \neq 0$

$$\frac{x^2}{b} - 1 = -1 + \frac{x^2}{b},$$

woraus man ebenfalls sofort erkennt, daß diese Gleichung ($b \neq 0$) für jede Zahl x gilt.
Auf die Durchführung der Probe für den Fall $a + b \neq 0$ wollen wir hier verzichten.

Aufgaben d 67 bis 88

12 Die Gleichung $x^2 + px = 0$

15 Die Lösungen der Gleichung $x^2 + \sqrt{7}\,x = 0$ sind zu ermitteln.

Lösung: Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$x(x + \sqrt{7}) = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\sqrt{7}$.
Entsprechend verfahren wir bei der Lösung der Gleichung

$$x^2 + px = 0.$$

Durch äquivalente Umformung erhalten wir die Gleichung

$$x(x + p) = 0$$

mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$.

Ergebnis: **Die Gleichung $x^2 + px = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$.**

16 Die Gleichung

$$\frac{c^2}{x^2 - c^2} - \frac{2c}{x - c} - 1 = 0 \quad (c \neq 0,\ x \neq |c|)$$

lösen wir wie folgt.
Wir multiplizieren mit $(x^2 - c^2)$ und erhalten

$$c^2 - 2c(x + c) - (x^2 - c^2) = 0$$

bzw. $$c^2 - 2cx - 2c^2 - x^2 + c^2 = 0$$

$$-x^2 - 2cx = 0$$

$$x^2 + 2cx = 0$$

$$x(x + 2c) = 0.$$

Die Lösungen der Gleichung sind also $x_1 = 0$ und $x_2 = -2c$.

Zur Kontrolle, ob bei den durchgeführten Umformungen Rechenfehler aufgetreten sind, machen wir die Probe.

Probe:	a) $x_1 = 0$	b) $x_2 = -2c$
Linke Seite:	$\frac{c^2}{-c^2} - \frac{2c}{-c} - 1$	$\frac{c^2}{(-2c)^2 - c^2} - \frac{2c}{-2c - c} - 1$
	$= -1 + 2 - 1 = 0$	$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1 = 0$
Rechte Seite:	0	0
Vergleich:	$0 = 0$	$0 = 0$

17 Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei 2 cm länger als die größere Kathete, diese wiederum sei 2 cm länger als die kleinere Kathete. Wie lang sind die Dreieckseiten?

Lösung: Es sei x $(x > 0)$ die in Zentimeter gemessene Maßzahl der Länge der größeren Kathete. Dann ist die Maßzahl der Länge

der Hypotenuse: $x + 2$;
der kleineren Kathete: $x - 2$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$x^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 \qquad (x > 0).$$

Diese Gleichung formen wir wie folgt um.

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4$$
$$x^2 - 8x = 0$$
$$x(x-8) = 0$$

Wegen $x > 0$ hat die Gleichung nur die Lösung 8. Demnach ist 8 die Maßzahl der Länge der größeren Kathete.

Probe: Es ist $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$.

Ergebnis: Länge der Hypotenuse: 10 cm
Länge der größeren Kathete: 8 cm
Länge der kleineren Kathete: 6 cm

Aufgaben d 89 bis 96

13 Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$

21 *Bilden Sie für folgende Summen jeweils die quadratische Ergänzung!*

a) $x^2 + 4x$ b) $x^2 - 2x$ c) $x^2 + px$

D

18 Gegeben sei die Gleichung

(1) $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Durch Addition und Subtraktion der quadratischen Ergänzung zu $x^2 - 2x$ auf der linken Seite der Gleichung (1) erhält man die zu (1) äquivalente Gleichung

$x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = 0$ bzw.

(2) $(x-1)^2 - 4 = 0$.

Unter Verwendung von $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ läßt sich (2) äquivalent umformen in

$[(x-1)-2][(x-1)+2] = 0$ bzw. in

(3) $(x-3)(x+1) = 0$.

Da man aus der Gleichung (3) die Lösungen unmittelbar ablesen kann, ist durch die Umformung der Summe $x^2 - 2x - 3$ in das Produkt $(x-3)(x+1)$ die gegebene Gleichung gelöst. Die Lösungen sind $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

Probe:	a) $x_1 = 3$	b) $x_2 = -1$
Linke Seite:	$3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$	$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$
Rechte Seite:	0	0
Vergleich:	$0 = 0$	$0 = 0$

19 Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Da für jede Zahl x gilt $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$,

ist die gegebene Gleichung mit der Gleichung

$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

äquivalent. Man erkennt, daß nur die Zahl 3 diese Gleichung erfüllt, denn für jede Zahl $x \neq 3$ gilt $(x - 3)^2 \neq 0$. Die Gleichung hat also die Lösung 3.

(22) *Lösen Sie die Gleichung $x^2 + 6x + 5 = 0$ nach dem im Beispiel D 18 angewandten Verfahren!*

20 Die Gleichung $x^2 + 6x + 20 = 0$ ist im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar.

Die quadratische Ergänzung zu $x^2 + 6x$ ist 9. Dann ist die gegebene Gleichung mit den folgenden Gleichungen äquivalent.

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + 20 = 0$$

$$(x + 3)^2 + 11 = 0$$

Für jede Zahl x ist $(x + 3)^2 \geqq 0$. Folglich gilt für jede Zahl x

$$(x + 3)^2 + 11 > 0.$$

Also gibt es keine Zahl x mit $(x + 3)^2 + 11 = 0$, d. h., die gegebene Gleichung hat keine Lösungen.

(23) *Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie aus den Ergebnissen der Beispiele D 18, D 19 und D 20 bezüglich der Lage der Graphen der Funktionen $y = x^2 - 2x - 3$, $y = x^2 - 6x + 9$ und $y = x^2 + 6x + 20$ im Koordinatensystem?*

Aufgaben d 97 und 98

D

14 Lösungsformel der Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Wir wenden uns nun der bereits in der Lerneinheit D 10 gestellten Aufgabe zu, nämlich zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lösbar ist.

Die quadratische Ergänzung zu $x^2 + px$ ist $\frac{p^2}{4}$. Dann ist die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ äquivalent mit

(1) $\quad x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0 \quad$ bzw. mit

(2) $\quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0.$

Setzt man zur Abkürzung wiederum $\frac{p^2}{4} - q = D$ (vgl. Seite 113), erhält man

(3) $\quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - D = 0.$

1. Fall: Es sei $D > 0$.

Dann gilt $D = \sqrt{D} \cdot \sqrt{D}$, so daß man unter Verwendung von $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ die Gleichung (3) äquivalent umformen kann in

$$\left[\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{D}\right]\left[\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{D}\right] = 0 \quad \text{bzw. in}$$

$$\left[x - \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)\right] = 0.$$

Aus dieser Gleichung kann man die Lösungen ablesen.

Ergebnis: Ist $D > 0$, so hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die voneinander verschiedenen Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} \quad \text{bzw.}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

wofür man häufig kürzer schreibt

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

2. Fall: Es sei $D = 0$

Dann lautet die Gleichung (3)

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung hat nur die eine Lösung $-\frac{p}{2}$.

3. Fall: Es sei $D < 0$.

Dann ist $-D > 0$, und es gilt für jede Zahl x

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - D > 0.$$

Folglich ist die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ nicht lösbar.

Da wir bezüglich des Vorzeichens von D eine vollständige Fallunterscheidung durchgeführt haben, ist somit der folgende Satz bewiesen.

SATZ: Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat genau dann (reelle) Lösungen, wenn $D = \frac{p^2}{4} - q \geqq 0$ ist.

Ist $D > 0$, so hat die Gleichung die voneinander verschiedenen Lösungen $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Ist $D = 0$, so hat die Gleichung die Lösung $x = -\frac{p}{2}$.

Hinweis: In dem schon erwähnten Bereich der komplexen Zahlen ist jede quadratische Gleichung lösbar; vgl. Seite 26.

Man nennt $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ $\left(\frac{p^2}{4} - q \geqq 0\right)$ die **allgemeine Lösungsformel der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.**

Die Lösungsformel kann man natürlich auch dann anwenden, wenn eine der beiden Zahlen p und q (oder auch beide) gleich Null ist (sind).
Doch in diesen Fällen wendet man die in den Lerneinheiten D 11 und D 12 betrachteten einfacheren Lösungswege an.

24 *Bestätigen Sie, daß die Lösungsformel der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ auch für die folgenden Spezialfälle gilt!*

D

a) $x^2 + q = 0 \quad (q < 0)$ b) $x^2 + px = 0$ c) $x^2 = 0$

Den Inhalt des Satzes D 3 kann man auch wie folgt formulieren.

Die Summe $x^2 + px + q$ läßt sich genau dann in Linearfaktoren zerlegen, wenn $D = \frac{p^2}{4} - q \geqq 0$ ist.
Ist $D > 0$, so gilt $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ mit $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$; $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$.
Ist $D = 0$, so gilt $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x + \frac{p}{2}\right)$.

15 Beispiele für das Lösen quadratischer Gleichungen

21 Die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ sind zu ermitteln.

Lösung: Die Nullstellen der gegebenen Funktion sind die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$.
Es ist $p = -2$ und $q = -3$. Folglich ist $D = \frac{p^2}{4} - q = 1 + 3 = 4 > 0$. Die Gleichung hat also zwei verschiedene Lösungen. Diese erhält man mit Hilfe der Lösungsformel.

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 1 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 1 - \sqrt{4} = 1 - 2 = -1$$

Probe: Es ist $f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$;
$f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$.

Ergebnis: Die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ hat die Nullstellen
$x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

(25) *Zeichnen Sie den Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$!*
Lesen Sie aus der Zeichnung Näherungswerte für die Nullstellen von f ab!

22 Die Lösungen der Gleichung $3x^2 - 6\sqrt{2}\,x - 3 = 0$ sind zu ermitteln.
Um die Normalform zu erhalten, dividiert man die Gleichung durch 3.

$$x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 1 = 0$$

Es ist $p = -2\sqrt{2}$; $\frac{p}{2} = -\sqrt{2}$; $q = -1$.

Man erhält

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{2} + \sqrt{2 + 1} = \sqrt{2} + \sqrt{3};$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{2} - \sqrt{2 + 1} = \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Die Lösungen der Gleichung sind also $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ und $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

(26) *Führen Sie für die errechneten Zahlen x_1 und x_2 die Probe durch!*

23 Welche Lösungen hat die Gleichung

$$(*) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{x^2+3}{x^2-1} = 0 \quad (x \neq 1, x \neq -1)?$$

Für alle x mit $x \neq 1$ und $x \neq -1$ ist $(x+1)(x-1) \neq 0$. Folglich erhält man durch Multiplikation der Gleichung $(*)$ mit $(x+1)(x-1)$ die zu $(*)$ äquivalente Gleichung

$$x - 1 + 2x + 2 - x^2 - 3 = 0 \quad (x \neq 1, x \neq -1).$$

Die Normalform dieser Gleichung lautet

$$(**) \quad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Die Gleichung $(**)$ hat in P die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$. Da die Gleichung $(*)$ aber für $x_2 = 1$ nicht definiert ist, erhält man als Lösung der Gleichung $(*)$ nur die Zahl $x_1 = 2$.

Probe:

Linke Seite: $\frac{1}{2+1} + \frac{2}{2-1} - \frac{2^2+3}{2^2-1} = \frac{1}{3} + 2 - \frac{7}{3} = 0$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $0 = 0$

24 Die Summe $x^2 + 6x - 7$ ist in Linearfaktoren zu zerlegen.

Lösung: Wir lösen die Gleichung $x^2 + 6x - 7 = 0$ und erhalten als Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -7$.
Folglich gilt $x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$.

Aufgaben d 99 bis 117

D

16

25 Für welche x gilt $(x-a)(x+1) + a(a-x) = b + x \quad (a + b \geqq 0)$?

Wir lösen die Klammern auf und fassen zusammen.

$$x^2 + x - ax - a + a^2 - ax = b + x$$
$$x^2 - 2ax + a^2 - a - b = 0$$

Es ist $p = -2a$ und $q = a^2 - a - b$.

Dann ist $D = \frac{p^2}{4} - q = a^2 - a^2 + a + b = a + b$.

Die Gleichung hat also genau dann reelle Lösungen, wenn $a + b \geqq 0$ ist. In diesem Falle ist

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} = a + \sqrt{a+b};$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} = a - \sqrt{a+b}.$$

Ergebnis:

Ist $a + b > 0$, so hat die Gleichung die Lösungen $x_1 = a + \sqrt{a+b}$ und $x_2 = a - \sqrt{a+b}$.

Ist $a + b = 0$, so hat die Gleichung die Lösung $x = a$.

Probe für $x_1 = a + \sqrt{a+b}$:

Linke Seite: $(a + \sqrt{a+b} - a)(a + \sqrt{a+b} + 1) + a(a - a - \sqrt{a+b})$

$$= \sqrt{a+b}\,(a + \sqrt{a+b} + 1) - a\sqrt{a+b}$$

$$= a\sqrt{a+b} + a + b + \sqrt{a+b} - a\sqrt{a+b}$$

$$= a + b + \sqrt{a+b}$$

Rechte Seite: $b + a + \sqrt{a+b}$

Vergleich: $a + b + \sqrt{a+b} = b + a + \sqrt{a+b}$

Folglich ist x_1 eine Lösung der Gleichung. Entsprechend zeigt man, daß auch $x_2 = a - \sqrt{a+b}$ Lösung der Gleichung ist.

26 Welche Zahlen x ($x \neq 0$ und $x \neq b$) erfüllen die Gleichung

$$\frac{a}{x} + \frac{a-b}{x-b} = 2 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b)?$$

Multiplikation mit $x(x - b)$:

$$a(x - b) + x(a - b) = 2x(x - b)$$

Auflösen der Klammern und Zusammenfassen:

$$ax - ab + ax - bx = 2x^2 - 2bx$$

$$2x^2 - (2a + b)\cdot x + ab = 0$$

Normalform:

$$x^2 - \frac{2a+b}{2}x + \frac{ab}{2} = 0$$

Es ist $p = -\dfrac{2a+b}{2}$ und $q = \dfrac{ab}{2}$

Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{2a+b}{4} \pm \sqrt{\frac{4a^2 + 4ab + b^2}{16} - \frac{8ab}{16}}$$

$$= \frac{2a+b}{4} \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 4ab + b^2}{16}} = \frac{2a+b}{4} \pm \sqrt{\frac{(2a-b)^2}{16}}$$

$$= \frac{2a+b}{4} \pm \frac{|2a-b|}{4}$$

1. Fall: Es sei $2a - b > 0$, also $|2a - b| = 2a - b$. Dann ist

$$x_1 = \frac{2a+b}{4} + \frac{2a-b}{4} = a \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2a+b}{4} - \frac{2a-b}{4} = \frac{b}{2}.$$

2. Fall: Es sei $2a - b < 0$, also $|2a - b| = -(2a - b)$.
Dann ist

$$x_1 = \frac{2a+b}{4} - \frac{2a-b}{4} = \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2a+b}{4} + \frac{2a-b}{4} = a.$$

Man erhält also für $2a - b < 0$ dieselben Zahlen wie für $2a - b > 0$; nur in umgekehrter Reihenfolge. Auf die Numerierung der Lösungen kommt es jedoch nicht an. Folglich hat die Gleichung für $2a - b \neq 0$ die Lösungen

$$x_1 = a \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{b}{2}.$$

3. Fall: Es sei $2a - b = 0$ also $b = 2a$ bzw. $a = \frac{b}{2}$.
Dann hat die Gleichung die Lösung

$$x = \frac{2a + b}{4} = a = \frac{b}{2}.$$

(27) *Führen Sie die Probe zum Beispiel D 26 durch!*

Aufgaben d 118 bis 120

17 Lösen von Sachaufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen

27 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sei die Hypotenuse $c = 10$ cm und die Höhe auf der Hypotenuse $h = 4$ cm. Wie lang sind die Katheten a und b?

Lösung: Es sei x die Projektion der Kathete b auf die Hypotenuse; vgl. Bild D 11.

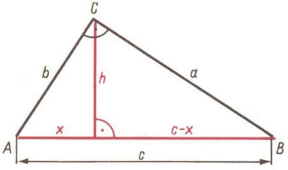
Nach dem Höhensatz gilt

$$h^2 = x(c - x) \quad \text{bzw.} \quad h^2 = cx - x^2.$$

Die Normalform dieser quadratischen Gleichung lautet

$$x^2 - cx + h^2 = 0.$$

Die Lösungen der Gleichung sind



D 11

$$x_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - h^2}.$$

Durch Einsetzen der gegebenen Größen erhält man als Lösungen

$$x_1 = 8 \text{ cm} \quad \text{und} \quad x_2 = 2 \text{ cm}.$$

Für die Katheten a und b gilt $\quad b^2 = h^2 + x^2 \qquad a^2 = h^2 + (c - x)^2$.

Für $x_1 = 8$ cm erhält man $\quad b^2 = (16 + 64)\text{ cm}^2 \qquad a^2 = (16 + 4)\text{ cm}^2$

$\qquad b = 4\sqrt{5}$ cm $\qquad a = 2\sqrt{5}$ cm.

Für $x_2 = 2$ cm erhält man $\quad b = 2\sqrt{5}$ cm $\qquad a = 4\sqrt{5}$ cm.

Es gibt also zwei Dreiecke mit der Hypotenuse $c = 10$ cm und der zugehörigen Höhe $h = 4$ cm, nämlich die Dreiecke mit den Katheten

$$a = 2\sqrt{5}\text{ cm} \quad \text{und} \quad b = 4\sqrt{5}\text{ cm} \quad \text{bzw.}$$
$$a = 4\sqrt{5}\text{ cm} \quad \text{und} \quad b = 2\sqrt{5}\text{ cm}.$$

(28) *Konstruieren Sie die beiden Dreiecke aus den gegebenen Stücken $c = 10$ cm und $h = 4$ cm!*

D

28 Eine Fahrzeugkolonne der NVA erhält den Befehl, mit Höchstgeschwindigkeit einen 120 km entfernten Punkt zu erreichen. Durch Erhöhung ihrer Geschwindigkeit um 10 km h^{-1} gelangt sie 1 h früher an den angegebenen Punkt, als wenn sie ihre ursprüngliche Geschwindigkeit beibehalten hätte. In welcher Zeit erreicht die Kolonne das angegebene Ziel, wenn man voraussetzt, daß die Bewegung gleichförmig erfolgt?

Lösung: Es sei v ($v > 0$) die Maßzahl der ursprünglichen Geschwindigkeit in km h^{-1} und t ($t > 1$) die Maßzahl der ursprünglich benötigten Zeit in h. Dann ist $v + 10$ die Maßzahl der erhöhten Geschwindigkeit und $t - 1$ die Maßzahl der zu berechnenden Zeit.

Nach Voraussetzung gilt

(1) $v \cdot t = 120;$

(2) $(v + 10)(t - 1) = 120.$

Aus (1) folgt $v = \dfrac{120}{t} \qquad (t > 0).$

Durch Einsetzen in (2) erhält man

$$\left(\frac{120}{t} + 10\right)(t - 1) = 120.$$

Diese Gleichung ist mit den folgenden äquivalent.

$$120 - \frac{120}{t} + 10t - 10 = 120$$

$$10t^2 - 10t - 120 = 0$$

$$t^2 - t - 12 = 0$$

Lösungen: $t_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{48}{4}} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{7}{2}$, also $t_1 = 4$ und $t_2 = -3$.

Wegen $t > 1$ scheidet die Lösung t_2 aus.

Probe:	Ursprüngliche Geschwindigkeit:	30 km h^{-1}
	Benötigte Zeit:	4 h
	Einsetzen in (1):	$30 \cdot 4 = 120$
	Einsetzen in (2):	$(30 + 10)(4 - 1) = 40 \cdot 3 = 120$

D

Ergebnis: Erhöht die Fahrzeugkolonne die Geschwindigkeit um $10\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, so benötigt sie für den 120 km langen Weg 3 h. Die ursprüngliche Geschwindigkeit betrug also $\frac{120}{4}\ \mathrm{km\,h^{-1}} = 30\ \mathrm{km\,h^{-1}}$.

Aufgaben d 121 bis 156

Zusammenfassung:

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$
Normalform der quadratischen Gleichung: $x^2 + px + q = 0$
Die **Diskriminante** der quadratischen Gleichung: $x^2 + px + q = 0$ ist $D = \frac{p^2}{4} - q$.

Die **Lösbarkeit** der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hängt von der Diskriminante D ab.
Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat für

$D > 0$ die Lösungen $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$; $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$;

$D = 0$ die Lösung $x = -\frac{p}{2}$;

$D < 0$ keine Lösungen (in der Menge der reellen Zahlen).

18* Wurzelsatz des VIETA

Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat für $\frac{p^2}{4} - q > 0$ die Lösungen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Bildet man die Summe und das Produkt der Lösungen, so erhält man

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Ist $\frac{p^2}{4} - q = 0$, also $\frac{p^2}{4} = q$, so hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ nur die eine Lösung $x = -\frac{p}{2}$, d. h., es ist $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$. Da der Faktor $\left(x + \frac{p}{2}\right)$ in der Zerlegung der Summe $x^2 + px + q$ in Linearfaktoren zweimal auftritt, sagt man auch:

Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat für $\frac{p^2}{4} - q = 0$ zwei gleiche Lösungen, nämlich $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

Mit dieser Vereinbarung gilt dann ebenfalls $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} = q$.

Damit ist bewiesen:

Sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:

Gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$, so sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Folglich ist $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$.

Es ist zu zeigen, daß die Zahlen x_1 und x_2 die Gleichung

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

erfüllen. Setzt man x_1 und x_2 in diese Gleichung ein, so erhält man

$$x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 = 0;$$
$$x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1x_2 = x_2^2 - x_1x_2 - x_2^2 + x_1x_2 = 0.$$

Da eine quadratische Gleichung höchstens zwei Lösungen haben kann, sind x_1 und x_2 in der Tat die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Damit erhält man den

Wurzelsatz[1] von VIETA[2]: Die Zahlen x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, wenn gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Hat man eine in der Normalform gegebene quadratische Gleichung gelöst, so kann man mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes die Probe durchführen.

29 Es ist nachzuprüfen, ob die Zahlen $x_1 = \frac{2}{3}$ und $x_2 = -\frac{6}{7}$ die Lösungen der Gleichung $x^2 + \frac{4}{21}x - \frac{4}{7} = 0$ sind.

Es ist $p = \frac{4}{21}$ und $q = -\frac{4}{7}$. Nun gilt

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{7} = -\frac{4}{21} = -p; \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{4}{7} = q.$$

Folglich sind die Zahlen $\frac{2}{3}$ und $-\frac{6}{7}$ die Lösungen der genannten Gleichung.

D

Mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes kann man zu beliebig vorgegebenen Zahlen x_1 und x_2 die Normalform der quadratischen Gleichung angeben, die die Zahlen x_1 und x_2 als Lösungen hat.

30 Wie heißt die Normalform der quadratischen Gleichung mit den Lösungen $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ und $x_2 = 3 - \sqrt{2}$?

Es ist $x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6 = -p$;

$$x_1 \cdot x_2 = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 = q.$$

Folglich lautet die Normalform der quadratischen Gleichung mit den Lösungen $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ und $x_2 = 3 - \sqrt{2}$

$$x^2 - 6x + 7 = 0.$$

Aufgaben d 157* bis 164*

19* Quadratische Ungleichungen

31 Für welche Zahlen x gilt $x^2 - 2x - 3 < 0$?

Lösung: Wir formen zunächst die Summe $x^2 - 2x - 3$ in ein Produkt um. Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$ sind die Zahlen -1 und 3. Folglich gilt

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3).$$

[1] Man nennt die Lösungen einer Gleichung auch „Wurzeln der Gleichung". Der Begriff „Wurzel einer Gleichung" darf nicht mit dem Begriff „Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl" verwechselt werden.

[2] FRANÇOIS VIÈTE, französischer Mathematiker, 1540 bis 1603.

Die gegebene Ungleichung ist also mit der Ungleichung $(x+1)(x-3) < 0$ äquivalent. Nun gilt für jede Zahl x:

Es ist $(x+1)(x-3) < 0$ genau dann, wenn

(1) $\quad x+1 > 0$ ***und*** $x-3 < 0$

oder

(2) $\quad x+1 < 0$ ***und*** $x-3 > 0$.

Die Ungleichungen des Systems (1) sind äquivalent mit den Ungleichungen

$$x > -1 \quad \text{und} \quad x < 3.$$

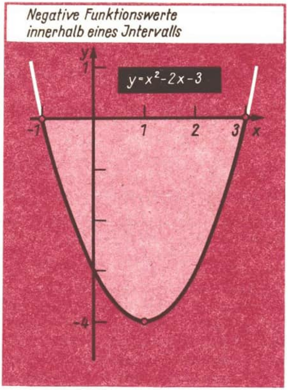
Folglich wird (1) von allen Zahlen x mit $-1 < x < 3$ erfüllt.

Die Ungleichungen des Systems (2) sind äquivalent mit den Ungleichungen

$$x < -1 \quad \text{und} \quad x > 3.$$

Es gibt aber keine Zahl x, für die $x < -1$ *und* $x > 3$ gilt.

Damit enthält die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung alle Zahlen x mit $-1 < x < 3$.



D 12

Zeichnet man den Graph der Funktion $y = x^2 - 2x - 3$, so erkennt man unmittelbar: Der Graph verläuft für $-1 < x < 3$ unterhalb der x-Achse; d. h., für $-1 < x < 3$ sind die Funktionswerte der Funktion $y = x^2 - 2x - 3$ negativ; vgl. Bild D 12.

32 Die Lösungsmenge der Ungleichung $-x^2 + 2x - 1 > 0$ ist die leere Menge.
Die Ungleichung ist äquivalent mit

$$x^2 - 2x + 1 < 0.$$

Nun gilt für jede Zahl x

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqq 0.$$

Es gibt also keine Zahl x mit $-x^2 + 2x - 1 > 0$.

Aufgaben d 165* bis 169*

20* Lösen von Gleichungen höheren Grades

Das Lösen gewisser Gleichungen höheren Grades läßt sich auf das Lösen quadratischer Gleichungen zurückführen.

33 Die Lösungen der Gleichung $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ sind zu ermitteln.

Lösung: Setzt man $x^2 = z$, so erhält man die quadratische Gleichung

$$z^2 - 26z + 25 = 0$$

mit den Lösungen

$$z_1 = 25 \quad \text{und} \quad z_2 = 1.$$

Mit $x^2 = z$ erhält man die Gleichungen $x^2 = 25$ und $x^2 = 1$. Die Lösungen der gegebenen Gleichung sind dann diejenigen Zahlen x, für die

$$x^2 = 25 \quad \textit{oder} \quad x^2 = 1$$

gilt.

Folglich hat die Gleichung $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ die Lösungen

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 1 \quad \text{und} \quad x_4 = -1.$$

34 Die Lösungen der Gleichung $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x = 0$ sind zu ermitteln.

Lösung: Die gegebene Gleichung ist mit der Gleichung $x\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right) = 0$ äquivalent. Die Lösungen der Gleichung sind also diejenigen Zahlen x, für die

$$x = 0 \quad \textit{oder} \quad x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

gilt.

Die Gleichung $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -2$. Folglich hat die gegebene Gleichung die Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 0$.

In diesem Zusammenhang taucht die Frage auf, wie man die eventuell existierenden Lösungen einer Gleichung n-ten Grades

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

mit reellen Koeffizienten a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ermitteln kann.
Es sei hier nur mitgeteilt, daß es auch für Gleichungen dritten und vierten Grades „Lösungsformeln" gibt, mit denen man die eventuell vorhandenen Lösungen dieser Gleichungen durch ihre Koeffizienten ausdrücken kann. Diese Formeln sind natürlich wesentlich komplizierter als die uns bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Für Gleichungen fünften und höheren Grades gibt es solche allgemeinen Lösungsformeln nicht. Solche Gleichungen und auch Gleichungen dritten und vierten Grades löst man – abgesehen von Spezialfällen – durch gewisse Näherungsverfahren, auf die wir hier aber nicht eingehen können, obwohl sie für die Anwendungen der Mathematik in der Praxis von sehr großer Bedeutung sind.

29 *Führen Sie für die in den Beispielen D 33 und D 34 ermittelten Lösungen jeweils die Probe durch!*

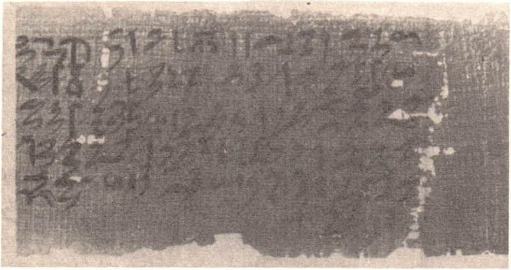
Aufgaben d 170* und 171*

D

Zur Geschichte der Algebra

Es ist erst reichlich 300 Jahre her, daß spezielle Symbole in großem Umfang in der Mathematik verwendet werden, um die Rechentätigkeit zu erleichtern und den Rechnungen eine größere Übersichtlichkeit zu verleihen.
Vor der Herausarbeitung einer mathematischen Formelsprache mußten die entsprechenden Rechenoperationen mit Hilfe von Wörtern der Umgangssprache ausgedrückt werden. Einige Beispiele aus der Frühzeit der Mathematik zeigen recht deutlich, daß eigentlich ebenso

D 13: Originaltext der Hau-Aufgabe



gerechnet wurde wie heute und nur die Variablen fehlten. In der ägyptischen Mathematik hatten die sogenannten Hau-Rechnungen große Bedeutung; vgl. Bild D 13. „Hau“ heißt soviel wie „Haufen“ oder „Menge“ und vertrat die Variablen. Die folgende Hau-Aufgabe, die auf eine lineare Gleichung mit einer Variablen führt, stammt aus einem mathematischen Papyrus aus der Zeit um 1700 v. u. Z.

Eigentlicher Text in deutscher Übersetzung	Moderne Schreibweise
Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet $1\frac{1}{2}$ mal zusammen mit 4. Er ist gekommen bis 10. Der Haufe nun nennt sich?	$1\frac{1}{2}x + 4 = 10$
Berechne Du die Größe dieser 10 über dieser 4. Es ensteht 6.	$10 - 4 = 6$
Rechne Du mit $1\frac{1}{2}$, um zu finden 1. Es entsteht $\frac{2}{3}$.	$1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$
Berechne Du $\frac{2}{3}$ von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4	$6 \cdot \frac{2}{3} = 4$
nennt sich. Du hast richtig gefunden.	$x = 4$

Die babylonische Mathematik, insbesondere die Algebra, hatte schon einen hohen Entwicklungsstand erreicht. In Mesopotamien war die Landwirtschaft auf künstliche Bewässerung angewiesen. Daher findet man häufig Berechnungen des Flächeninhalts von Feldern; vgl. Bild D 14. Das folgende Beispiel zur babylonischen Algebra stammt aus dem 3. Jahrtausend v. u. Z. und führt auf eine quadratische Gleichung.
„Länge und Breite habe ich multipliziert und so habe ich die Fläche errichtet. Wiederum: was immer die Länge über die Breite hinausgeht, habe ich mit der Summe von Länge und meiner Breite multipliziert und dann habe ich meine Fläche hinzugefügt und es macht 1, 13, 20. Wiederum: Länge und Breite habe ich addiert. Es macht 1,40.“

Die Zahlenangaben sind im Sexagesimalsystem gemacht. Also bedeutet

$$1, 13, 20 = 1 + \frac{13}{60} + \frac{20}{60^2} = 1\frac{2}{9} \text{ und}$$

$$1{,}40 = 1 + \frac{40}{60} = 1\frac{2}{3}.$$

Die Maßzahl der gesuchten Länge bezeichne man mit „x“, die Maßzahl der gesuchten Breite mit „y“. Dann erhält man durch Übertragung der Aufgabe in die moderne Schreibweise die Gleichungen $(x - y)(x + y) + xy = 1\frac{2}{9}$ und $x + y = 1\frac{2}{3}$. Löst man die zweite Gleichung nach y auf, so erhält man $y = 1\frac{2}{3} - x$. Man setzt in die erste Gleichung ein und erhält nach Umformen die quadratische Gleichung

$$x^2 - 5x + 9 = 0.$$

D 14: Keilschrifttafel mit Flächenberechnung

Die ersten Ansätze einer algebraischen Zeichenschrift finden sich schon in der babylonischen Mathematik und dann erst wieder in der spätgriechischen Mathematik, besonders bei DIOPHANTOS von ALEXANDRIA. Er hat ein umfangreiches Buch mit dem Titel Arithmetica geschrieben, das zum größten Teil erhalten geblieben ist. Es enthält feste Bezeichnungen für die Potenzen $x, x^2, \ldots, x^6$, ein festes Zeichen für die Subtraktion sowie die Abkürzung „ι“[1], die er immer als Gleichheitszeichen verwendete. Man weiß nicht genau, wann DIOPHANTOS gelebt hat, wahrscheinlich um 250 u. Z., aber über seine persönlichen Lebensumstände wissen wir durch das folgende Gedicht recht genau Bescheid:

„Hier dies Grabmal deckt DIOPHANTOS. Schaut das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel.“

Wie alt ist demnach DIOPHANTOS geworden?

Die arabischen Gelehrten übersetzten um 900 auch die „Arithmetica“ in ihre Sprache. Zugleich lernten sie Teile der hochentwickelten indischen und der schon sehr alten chinesischen Mathematik kennen. Das wurde durch den ausgedehnten Handel mit diesen Ländern erleichtert.
Ein großer Teil der alten indischen Textaufgaben ist besonders anmutig. So heißt es in der Aufgabensammlung „Krönung des Systems“ des indischen Mathematikers BHÂSKARA (1114–1185?[2]):

„Von einem Schwarm Bienen läßt $\frac{1}{5}$ sich auf einer Kadombablüte, $\frac{1}{3}$ auf einer Silindhablüte nieder. Der 3fache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutaja, eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin- und herschwebte, gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandamus. Sage mir die Anzahl der Bienen.“
Die arabischen Mathematiker knüpften an die indische und griechische Mathematik an und entwickelten sie weiter. Ihr besonderes Interesse galt der Algebra, da die Araber einen großangelegten Handel mit der ganzen ihnen bekannten Welt unterhielten. Auch das Wort „Algebra“ stammt aus dem Arabischen. Der Astronom und Mathematiker AL-HWÂRAZMÎ (gest. um 840) hatte ein Rechenbuch mit dem Titel „Hisâb aljabr w'almuqâbalah“, d. i. *Buch über die Ergänzung und das Hinüberschaffen*, geschrieben. Aus „aljabr“ (Ergänzung) wurde bei den europäischen Gelehrten später Algebra. Da dieses Buch sehr viele neue Rechenverfahren zum Lösen von Gleichungen enthielt, wurde der Verfasser zum Symbol des geschickten Rechnens überhaupt. Auf diese Weise ist das in der Mathematik so häufige Wort „Algorîthmus“, d. h. „Rechenverfahren“, entstanden. In diesem Buch vermittelt AL-HWÂRAZMÎ alles das, was „für die Menschen bei der Nachfolge und beim Vermächtnis, beim Aufteilen des Vermögens und bei Gerichtsprozessen sowie in allen ihren Wechselbeziehungen, beim Vermessen des Bodens und beim Anlegen von Kanälen, in der Geometrie und bei verschiedenen anderen Fragen ständig notwendig ist.“
Während arabische Kultur und Wissenschaft in hoher Blüte standen, wurde durch den Einfluß des herrschenden Religionsdogmas, des Katholizismus, in Europa die Entwicklung der Wissenschaften erschwert. Erst im 15. und 16. Jahrhundert begannen sich in Europa die Wissenschaften zu entwickeln. Über Spanien und Sizilien wurden die Europäer mit den Ergebnissen der arabischen Mathematik bekannt. Deshalb heißen die eigentlich aus Indien stammenden Ziffern heute noch „arabische Ziffern“.
Im 15. und 16. Jahrhundert wurde der Warenaustausch immer mehr durch die Geldwirtschaft ersetzt. Handel und Industrie entwickelten sich. Die sprunghafte Verstärkung des Geldumlaufs machte die Umrechnung der unterschiedlichen Währungseinheiten ineinander nötig. Zins-

[1] „ι“ ist der erste Buchstabe des griechischen Wortes „ισοι“, d. i. gleich.
[2] Die Jahreszahl mit einem Fragezeichen ist nicht sicher bekannt.

und Zinseszins mußten berechnet und die Buchhaltung mußte übersichtlich gestaltet werden. Überall in Europa gab es Rechenmeister, die für alle möglichen Auftraggeber derartige Rechnungen durchführten und die dann auch Lehrbücher schrieben, aus denen man die schwierige Kunst des Rechnens erlernen konnte. Von den deutschen Rechenmeistern ist ADAM RIES (1492–1559) am berühmtesten geworden. In einem seiner Rechenbücher stellt er z. B. die in Bild D 15 dargestellte Aufgabe. Dabei bedeutet ,,fl“ die Währungseinheit 1 Gulden, und ,,ein ort“ bedeutet ,,ein Viertel“.
Immer mehr nahm der Handel und damit die Rechentätigkeit zu. Um sich die Schreib- und Rechenarbeit zu erleichtern, gingen die Rechenmeister dazu über, Abkürzungen für häufig wiederkehrende mathematische Ausdrücke zu verwenden. Anfangs wählte jeder Abkürzungen nach eigenem Geschmack. Zum Beispiel kürzte der Italiener LUCA PACIOLI (1445–1514) das Wort ,,piu“, welches plus bedeutet, durch ,,*p*“ ab und benutzte ,,*m*“ für ,,meno“ als Zeichen der Subtraktion. Diese Schreibweise hat sich nicht durchgesetzt. Die heute verwendeten Zeichen ,,+“ und ,,–“ treten zum erstenmal gedruckt 1489 in einem Buch des böhmischen Rechenmeisters JOHANN WIDMANN (geb. um 1460) auf, das den Titel ,,Behende und hubsche Rechenung auf allen kauffmannschafft“ trägt.
Das heute gebräuchliche Gleichheitszeichen ,,=“ empfahl der Engländer ROBERT RECORDE (1510?–1558), der von Beruf Arzt war. Aber es dauerte noch mehr als 100 Jahre, ehe sich dieses Gleichheitszeichen durchsetzte. Der Niederländer SIMON STEVIN (1548–1620), ein Ingenieur, der an hervorragender Stelle den Befreiungskampf der Niederlande gegen die Spanier unterstützte, führte den Wurzelhaken mit nebengesetztem Exponenten ein, also bedeutete z. B. ,,$\sqrt{}$③“ die dritte Wurzel. Die heutige Schreibweise, den Wurzelexponenten in die Öffnung des Winkelhakens einzufügen, also ,,$\sqrt[3]{}$“ für die dritte Wurzel zu schreiben, wurde von dem holländischen Mathematiker ALBERT GIRARD (1595–1632) vorgeschlagen. Der französische Philosoph und Mathematiker RENÉ DESCARTES (1596–1650), der lange Zeit aus Furcht vor der katholischen Kirche im protestantischen Holland lebte, führte schließlich 1637 den Querstrich am Wurzelzeichen ein, um den Radikanden genau kennzeichnen zu können. Der bedeutendste Algebraiker jener Periode war der Franzose FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603), der als Jurist in hohen Staatsämtern tätig war. Einige Zeit stand er beim französischen König in Ungnade und beschäftigte sich währenddessen mit der Mathematik. Er ließ sich von dem Gedanken leiten, daß eine durchgängige Verwendung von Buchstaben die Übersichtlichkeit der mathematischen Rechnungen wesentlich erhöhen konnte und verwendete die Vokale ,,*a*“, ,,*e*“, ,,*i*“, ... für die Variablen und die Konsonanten ,,*b*“, ,,*d*“, ,,*g*“, ... für Konstanten. Zugleich machte er von eckigen, geschweiften und runden Klammern Gebrauch. Wegen der zu großen Anzahl von Symbolen fanden aber VIETAS Vorschläge nicht die Zustimmung seiner Zeitgenossen.

Adam Risen.
Vihekauff.

Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl? Machs nach den vorigen/ mach eines jeglichen kosten zu örtern/ deßgleichen die 100. fl. vnd setz als dann also:

	16	15	
	6	5	
100			400
	2	1	
	1		

Mulct.

D 15: Eine Seite aus einem Rechenbuch von A. RIES. Sie enthält eine Viehkauf-Aufgabe.

Von DESCARTES stammt die heutige Potenzschreibweise ,,a^3“, ,,b^4“ usw., d. h. die Vereinbarung, die Exponenten halbhoch rechts neben die Basis zu schreiben. Auch das rechtwinklige Koordinatensystem ist nach DESCARTES genannt, obwohl er selbst nur eine Achse benutzt hat.

D 16: FRANÇOIS VIÈTE
(1540–1603)

D 17: RENÉ DESCARTES
(1596–1650)

Wir können, auf die hier ausgewählten Beispiele aus der Geschichte der Algebra zurückblickend, feststellen: Zu allen Zeiten erforderte die Entwicklung der gesellschaftlichen Verhältnisse (die Veränderungen in den Produktionsweisen, das Aufblühen von Handelsbeziehungen, die großen Entdeckungen usw.) die Weiterentwicklung auch der mathematischen Wissenschaft sowie das ständige Anwachsen der Verbreitung von Rechenfertigkeiten und mathematischen Verfahrensweisen unter den arbeitenden Menschen. Umgekehrt förderten der Ausbau des Gebäudes der mathematischen Wissenschaft und die Vervollkommnung in der Handhabung mathematischer Methoden, nicht zuletzt die Erleichterungen, die die Entwicklung der Algebra und der entsprechenden Symbolik für das Lösen von Aufgaben mit sich brachte, in ständig wachsendem Maße die Fortschritte in der gesellschaftlichen Praxis. Dieser Prozeß mit seinen Wechselbeziehungen strebt in unserem Jahrhundert, in dem auf der Grundlage der Theorie des Marxismus-Leninismus das sozialistische Weltlager mit all seinen Möglichkeiten für die schaffende Menschheit entstand, neuen Höhepunkten zu; vgl. auch Lerneinheit E 14.

D

E Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel

Das Flaggschiff der sowjetischen Eismeerflotte ist der Eisbrecher „Lenin". Das Schiff wird mit Kernenergie betrieben. Der Kernbrennstoff, das angereicherte Uran 235, zerfällt im Reaktor des Eisbrechers und gibt Wärmeenergie frei. Der Zerfall eines radioaktiven Elements vollzieht sich nach folgendem Zerfallsgesetz.

$$n = f(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

[n_0 – die Anzahl der zu einem (willkürlich angenommenen) Zeitpunkt Null vorhandenen unzerfallenen Atome;
e – eine Konstante 2,718...;
λ – eine Materialkonstante;
t – die vom Zeitpunkt Null an verflossene Zeit;
n – die Anzahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen Atome]

Funktionen, bei denen das Argument als Exponent einer Potenz auftritt, heißen Exponentialfunktionen.

1

Im Unterricht der Klasse 7 haben wir den Rechenstab als ein sehr wichtiges und leicht zu handhabendes Rechenhilfsmittel kennengelernt und ihn seitdem ständig beim numerischen Rechnen sowohl im Mathematikunterricht als auch in anderen Unterrichtsfächern verwendet.
In diesem Kapitel soll nun u. a. das Rechnen mit dem Rechenstab mathematisch begründet werden. Warum *addiert* man beispielsweise gewisse Strecken auf dem Rechenstab, wenn man das *Produkt* gegebener Zahlen berechnet?
Um solche Fragen beantworten zu können, müssen wir den Potenzbegriff zunächst noch einmal erweitern. Ferner werden wir in diesem Kapitel unsere Kenntnisse über Funktionen vertiefen, indem wir noch Funktionen kennenlernen, die für die Mathematik und ihre Anwendungen von besonderer Bedeutung sind.

(1) *Für welche Zahlen als Exponenten wurden bisher Potenzen definiert? Wiederholen Sie die entsprechenden Definitionen an Hand Ihres Lehrbuches! Achten Sie bei den bisher durchgeführten Erweiterungen des Potenzbegriffs besonders auf die notwendigen Einschränkungen der Basis!*

1 a) Welche rationale Zahl x erfüllt die Gleichung $2^x = \frac{1}{32}$?
Es ist $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$. Somit erhält man die Gleichung $2^x = 2^{-5}$, aus der man die Lösung -5 sofort ablesen kann.

b) Welche rationale Zahl x erfüllt die Gleichung $3^x = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$?
Es ist $3 \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}}$. Somit erhält man die Gleichung $3^x = 3^{\frac{4}{3}}$ mit der Lösung $x = \frac{4}{3}$.

(2) *Begründen Sie, daß die im Beispiel E 1 betrachteten Gleichungen nur eine Lösung haben können!*

(3) *Ermitteln Sie diejenige Zahl x, die die jeweils angegebene Gleichung erfüllt!*

a) $2^x = 64$ b) $3^x = 81$ c) $10^x = 1000000$

d) $10^x = 0{,}001$ e) $5^x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ f) $2^x = \sqrt[3]{4}$

Es gibt aber auch Gleichungen $a^x = b$ mit $a \in P$ und $b \in P$, die keine rationale Lösung haben.

Beweis: Um diese Aussage zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß *wenigstens eine* solche Gleichung existiert, die keine rationale Lösung hat.

Wir wählen als Beispiel die Gleichung $10^x = 3$ und zeigen, daß es keine rationale Zahl x gibt, für die $10^x = 3$ gilt. Wir führen den *Beweis indirekt.*

Wir nehmen also an, es gäbe eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ $(p, q \in G;\ q > 0)$ mit

(1) $\quad 10^{\frac{p}{q}} = 3.$

Durch Potenzieren der Gleichung (1) mit q erhalten wir

(2) $\quad 10^p = 3^q$.

Da 3^q wegen $q > 0$ eine natürliche Zahl ist, muß auch 10^p eine natürliche Zahl sein. Zerlegen wir die Zahl 10 in Primfaktoren, so folgt

(3) $\quad 2^p \cdot 5^p = 3^q$.

Jede natürliche Zahl ist eindeutig in Primfaktoren zerlegbar. Daher erhält man aus (3) nur für $p = q = 0$ eine wahre Aussage. $p = q = 0$ widerspricht aber der Voraussetzung $q > 0$, so daß die Annahme, es gäbe eine rationale Zahl x mit $10^x = 3$, widerlegt ist.

Aufgaben e 1 bis 4

2 Potenzen mit irrationalen Exponenten

Die Gleichung $10^x = 3$ hat, wie in Lerneinheit E 1 gezeigt wurde, keine rationale Lösung. Man kann jedoch *rationale* Zahlen r so bestimmen, daß die Zahl 3 durch die Potenzen 10^r mit jeder gewünschten Genauigkeit angenähert wird. So gilt:

$$\begin{array}{lllll}
10^0 & = 1 & < 3 < 10 & = 10^1 \\
10^{0,4} & \approx 2{,}51189 & < 3 < 3{,}16228 & \approx 10^{0,5} \\
10^{0,47} & \approx 2{,}95121 & < 3 < 3{,}01995 & \approx 10^{0,48} \\
10^{0,477} & \approx 2{,}99916 & < 3 < 3{,}00608 & \approx 10^{0,478} \\
10^{0,4771} & \approx 2{,}99985 & < 3 < 3{,}00054 & \approx 10^{0,4772} \\
10^{0,47712} & \approx 2{,}99999 & < 3 < 3{,}00006 & \approx 10^{0,47713}
\end{array}$$

usw.

Auf die Angabe eines Verfahrens zur Berechnung dieser Potenzen wird hier verzichtet.
Der nichtperiodische Dezimalbruch $x = 0{,}47712\ldots$, von dem wir somit die ersten fünf Dezimalstellen kennen, ist – wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden muß – eine Lösung der Gleichung $10^x = 3$, d. h., es ist

$$10^{0,47712\ldots} = 3.$$

Diese Behauptung setzt allerdings voraus, daß **Potenzen mit irrationalen Exponenten** überhaupt definiert sind. Da wir bereits auf die Definition der Rechenoperationen mit reellen Zahlen verzichten mußten, kann auch die Definition der Potenzen mit irrationalen Exponenten hier nicht angegeben werden. Wir wollen lediglich an einem Beispiel plausibel machen, wie man Potenzen mit irrationalen Exponenten definieren *kann*.

2 Es ist $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$. Nach dem Monotoniegesetz für Potenzen mit *rationalen* Exponenten (vgl. Seite 77) gilt

$$3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < 3^{1,4142} < 3^{1,41421} < 3^{1,414213} < \ldots$$
$$< 3^{1,414214} < 3^{1,41422} < 3^{1,4143} < 3^{1,415} < 3^{1,42} < 3^{1,5}.$$

Beachten Sie! Auf Seite 140 oben sind mit Ausnahme von 3^1 und 3^2 alle anderen vorkommenden Potenzen *irrationale* Zahlen, für die lediglich *rationale* Näherungswerte angegeben werden.

Unter $3^{\sqrt{2}}$ versteht man diejenige reelle Zahl x, für die gilt:

$$
\begin{array}{lllll}
3 & = 3^{1} & < x < 3^{2} & = 9 \\
4{,}65554 & \approx 3^{1{,}4} & < x < 3^{1{,}5} & \approx 5{,}19615 \\
4{,}70697 & \approx 3^{1{,}41} & < x < 3^{1{,}42} & \approx 4{,}75896 \\
4{,}72770 & \approx 3^{1{,}414} & < x < 3^{1{,}415} & \approx 4{,}73289 \\
4{,}72874 & \approx 3^{1{,}4142} & < x < 3^{1{,}4143} & \approx 4{,}72926 \\
4{,}72879 & \approx 3^{1{,}41421} & < x < 3^{1{,}41422} & \approx 4{,}72884 \\
4{,}72880 & \approx 3^{1{,}414213} & < x < 3^{1{,}414214} & \approx 4{,}72881
\end{array}
$$

usw.

Man kann sich überlegen, daß auch die Intervallfolge

$$\langle 3^{1}; 3^{2}\rangle;\quad \langle 3^{1{,}4}; 3^{1{,}5}\rangle;\quad \langle 3^{1{,}41}; 3^{1{,}42}\rangle;\quad \langle 3^{1{,}414}; 3^{1{,}415}\rangle;\quad \ldots$$

eine Schachtelung ist, durch die genau eine reelle Zahl x bestimmt wird. Es ist also

$$3^{\sqrt{2}} = 4{,}72880 \ldots$$

Allgemein kann nur mitgeteilt werden:

Für jede positive reelle Zahl a und jede reelle Zahl c existiert genau eine positive reelle Zahl b mit $a^c = b$.

Die Definition der Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten wird so festgelegt, daß sie im Falle rationaler Exponenten mit der uns bekannten Definition der Potenzen mit rationalen Exponenten übereinstimmt und daß alle Potenzgesetze, die wir bereits vom Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten kennen, auch für die Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten gültig bleiben. Es gilt also, wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden muß, der folgende Satz.

SATZ: Sind a und b beliebige positive reelle Zahlen und r und s beliebige reelle Zahlen, so ist

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ **(2)** $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

(3) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ **(4)** $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

(5) Wenn $r < s$, so ist $a^r < a^s$ für $a > 1$; $a^r > a^s$ für $a < 1$.

3 a) $3^{\sqrt{18}} \cdot 3^{\sqrt{32}} = 3^{\sqrt{18}+\sqrt{32}} = 3^{3\cdot\sqrt{2}+4\sqrt{2}} = 3^{7\cdot\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{5^3}{5^{\sqrt{3}}} = 5^3 \cdot 5^{-\sqrt{3}} = 5^{3-\sqrt{3}}$ c) $\left(\sqrt{5}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = (\sqrt{5})^{\sqrt{16}} = \sqrt{5}^{4} = 25$

Aufgaben e 5 bis 8

3 Definition des Logarithmus

Es wurde bereits erwähnt, daß die reelle Zahl $x = 0{,}47712\ldots$ eine Lösung der Gleichung $10^x = 3$ ist; vgl. Seite 139. Außer dieser Lösung hat die Gleichung $10^x = 3$ keine weitere. Wäre z. B. $y \neq x$ ebenfalls Lösung der genannten

Gleichung, so müßte

(*) $10^x = 10^y = 3$

gelten. Ist $x < y$ bzw. $x > y$, so ist nach Satz E 1 (5) $10^x < 10^y$ bzw. $10^x > 10^y$ im Widerspruch zu (*). Folglich gibt es *genau eine* Zahl x mit $10^x = 3$.

2 **SATZ: Jede Gleichung $a^x = b$ ($a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$) hat genau eine reelle Lösung.**

Auf den Beweis dieses Satzes müssen wir wiederum verzichten.

4 a) Die Gleichung $2^x = \sqrt{2}$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $x = \frac{1}{2}$.

b) Aus $3^{\sqrt{2}} = 4{,}72880\ldots$ (vgl. Beispiel E 2) folgt, daß die Gleichung $3^x = 4{,}72880\ldots$ die eindeutig bestimmte Lösung $x = \sqrt{2}$ hat.

Für die nach Satz E 2 eindeutig bestimmte Zahl x hat man einen besonderen Namen eingeführt. Man nennt sie den **Logarithmus von b zur Basis a** und bezeichnet sie mit **„$\log_a b$"**.

3 **DEFINITION: $\log_a b$ ($a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$) ist diejenige reelle Zahl c, für die $a^c = b$ gilt.**

Nach Definition E 3 ist also

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0).$$

Die Gleichungen

$$a^c = b \quad \text{und} \quad c = \log_a b \quad (a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$$

stellen bei fest vorgegebenen Zahlen a, b und c nur verschiedene Schreibweisen für denselben Sachverhalt dar. Es ist also

$$\mathbf{\log_a b = c \text{ genau dann, wenn } a^c = b.}$$

Wegen $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) bzw. $a^1 = a$ gilt für jede positive Basis a mit $a \neq 1$

$$\mathbf{\log_a 1 = 0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\log_a a = 1}.$$

5 a) $\log_2 64 = 6$, denn $2^6 = 64$ b) $\log_{10} 100 = 2$, denn $10^2 = 100$

c) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$, denn $3^{-4} = \frac{1}{81}$ d) $\log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, denn $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

e) $\log_3 4{,}72880\ldots = \sqrt{2}$, denn $3^{\sqrt{2}} = 4{,}72880\ldots$

f) $\log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots$, denn $10^{0{,}47712\ldots} = 3$

(4) a) *Schreiben Sie die Gleichungen* $2^7 = 128$ *und* $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$ *in der Form* $c = \log_a b$*!*

b) *Schreiben Sie die Gleichungen* $\log_3 81 = 4$ *und* $\log_{10} 1 = 0$ *in der Form* $a^c = b$*!*

(5) *Beweisen Sie, daß* $\log_{10} 2$ *eine irrationale Zahl ist!*

Hinweis: Es sei $\log_{10} 2 = a$*, also* $10^a = 2$*. Zeigen Sie indirekt, daß es keine rationale Zahl* a *mit* $10^a = 2$ *gibt!*

Aufgaben e 9 bis 20

E

(6) *Geben Sie für die folgenden Zahlen x die Potenzen 2^x mit einer Genauigkeit von einer Dezimalstelle an! Verwenden Sie dabei den Rechenstab!*

$$0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{4};\ \pm\frac{2}{3};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{5}{2}$$

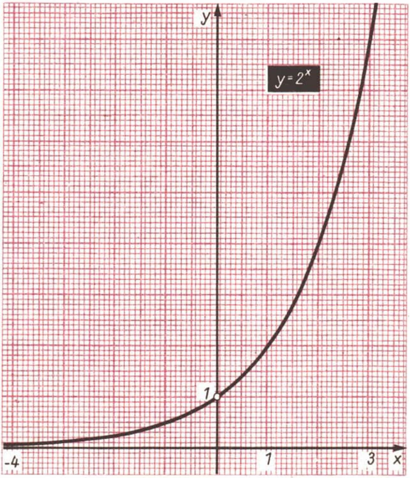
Zu jeder reellen Zahl x gibt es *genau eine* reelle Zahl 2^x. Folglich ist die Menge f aller geordneten Paare $[x;\ 2^x]$ mit $x \in P$ eine Funktion, die durch die Gleichung

$$f(x) = 2^x$$

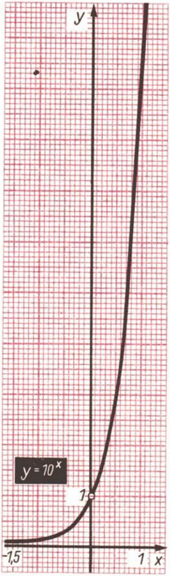
beschrieben werden kann. Man nennt diese Funktion f eine **Exponentialfunktion.**

Da es im allgemeinen nicht möglich ist, die Funktionswerte von f durch Anwendung der vier rationalen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) zu berechnen, ist die Funktion $f(x) = 2^x$ ein weiteres Beispiel für eine *nichtrationale* Funktion. Sie ist für alle reellen Zahlen definiert. Alle Funktionswerte der Funktion sind positiv; folglich hat f keine Nullstellen. Nach Satz E 2 existiert zu jeder positiven reellen Zahl y genau eine reelle Zahl x mit $2^x = y$. Demnach ist der Wertebereich von f die Menge der positiven reellen Zahlen.

E 1



E 2



E

Nach Satz E 1 (5) gilt für beliebige Zahlen x_1 und x_2: Wenn $x_1 < x_2$, so $2^{x_1} < 2^{x_2}$.
Also ist die Funktion f eine monoton wachsende Funktion. Da nun *alle* positiven reellen Zahlen Funktionswerte der Funktion f sind, folgt: Mit wachsendem x werden die Funktionswerte der Funktion größer als jede noch so große reelle Zahl. Ist x eine beliebige reelle Zahl, so gilt

$$f(x) = 2^x \quad \text{und} \quad f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}.$$

Die Funktionswerte zweier entgegengesetzter Zahlen sind also zueinander reziprok. Daraus folgt: Die Funktionswerte von f werden mit abnehmendem x kleiner als jede noch so kleine positive Zahl. Aus diesen Betrachtungen erhält man: Der Graph von f verläuft nur im 1. und 2. Quadranten. Wegen $f(0) = 2^0 = 1$ schneidet der Graph die y-Achse im Punkt $P(0; 1)$. Mit abnehmendem x nähert sich der Graph von f immer mehr dem negativen Teil der x-Achse. Bild E 1 zeigt den Graph der Funktion $f(x) = 2^x$ im Intervall $\langle -4; 3 \rangle$.
Ist a eine beliebige positive reelle Zahl, so ist a^x für jede reelle Zahl x definiert. Demnach erhalten wir *für jede positive reelle Zahl a eine Exponentialfunktion*

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

mit der Menge P als Definitionsbereich. Der Wertebereich jeder Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ enthält alle positiven reellen Zahlen. Für alle diese Funktionen gilt $f(0) = a^0 = 1$.
Ist $a > 1$, so folgt aus $x_1 < x_2$ nach Satz E 1 (5) $a^{x_1} < a^{x_2}$. Alle Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ mit $a > 1$ sind also monoton wachsende Funktionen. Mit wachsendem x werden die Funktionswerte größer als jede noch so große Zahl. Mit abnehmendem x werden sie kleiner als jede noch so kleine positive Zahl. Die Graphen aller Exponentialfunktionen $y = a^x$ mit $a > 1$ nähern sich demnach mit abnehmendem x immer mehr der x-Achse.
Je größer die Basis a $(a > 1)$ einer Exponentialfunktion ist, desto steiler verläuft ihr Graph für positive Zahlen und desto „schneller" schmiegt sich der Graph für negative Zahlen an die x-Achse an. Bild E 2 zeigt den Graph der Funktion $y = 10^x$ im Intervall $\langle -1{,}5; 1 \rangle$.

Aufgaben e 21 bis 28

5 Logarithmusfunktionen

(7) *Vervollständigen Sie folgende Wertetafel; vgl. Auftrag E 6! Geben Sie für die in der Tabelle enthaltenen Zahlen x Näherungswerte mit einer Genauigkeit von einer Dezimalstelle an!*

x	1	2	4	8	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\log_2 x$	0	1								
x	$\sqrt[3]{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\sqrt[3]{4}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$\sqrt{8}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\sqrt{32}$	$\frac{1}{\sqrt{32}}$
$\log_2 x$										

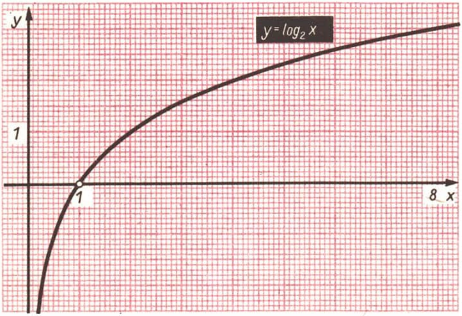
Nach Satz E 2 existiert zu jeder *positiven* Zahl x genau eine Zahl y mit $2^y = x$, die wir auch als $y = \log_2 x$ schreiben können. Folglich ist die Menge f aller geordneten Paare $[x; \log_2 x]$ $(x > 0)$ eine Funktion, die durch die Gleichung

$$f(x) = \log_2 x \quad (x > 0)$$

beschrieben werden kann.
Diese nichtrationale Funktion f heißt eine **Logarithmusfunktion**. Ihr Definitionsbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen; ihr Wertebereich enthält alle reellen Zahlen. Sind x_1 und x_2 beliebige Zahlen mit $0 < x_1 < x_2$, so gilt $\log_2 x_1 < \log_2 x_2$. Ist nämlich $\log_2 x_1 = y_1$ und $\log_2 x_2 = y_2$, so gilt $x_1 = 2^{y_1}$ und $x_2 = 2^{y_2}$.
Nach Voraussetzung ist

$$(*) \quad 2^{y_1} < 2^{y_2}.$$

Dann ist aber auch $y_1 < y_2$. Wäre nämlich $y_1 \geqq y_2$, so müßte nach Satz E 1 (5) $2^{y_1} \geqq 2^{y_2}$ im Widerspruch zu $(*)$ gelten. Folglich ist $\log_2 x_1 < \log_2 x_2$.
Die Funktion $f(x) = \log_2 x$ $(x > 0)$ ist also eine monoton wachsende Funktion. Wegen $\log_2 1 = 0$ folgt daraus, daß die Funktionswerte der Funktion für alle x mit $0 < x < 1$ negativ und für alle x mit $x > 1$ positiv sind. Bild E 3 zeigt den Graph der Funktion $f(x) = \log_2 x$ für $0 < x \leqq 8$. Mit den im Auftrag E 7 gegebenen geordneten Paaren läßt sich dieser Graph schon recht genau zeichnen.



E 3

E

(8) *Begründen Sie, daß der Wertebereich der Funktion* $y = \log_2 x$ $(x > 0)$ *alle reellen Zahlen enthält!*

Entsprechend erhält man für jede positive Zahl a mit $a \neq 1$ eine Logarithmusfunktion

$$f(x) = \log_a x \quad (x > 0),$$

die für alle positiven reellen Zahlen definiert ist und deren Wertebereich die Menge der reellen Zahlen ist.
Ist $a > 1$, so wachsen die Funktionen $y = \log_a x$ $(x > 0)$ monoton, wie man völlig analog zu dem für die Funktion $y = \log_2 x$ geführten Nachweis beweisen kann. Ihre Funktionswerte sind für $x > 1$ positiv und für $0 < x < 1$ negativ. Die Graphen der Funktionen $y = \log_a x$ verlaufen nur im ersten und vierten Quadranten und schneiden die x-Achse an der Stelle 1, denn es ist $\log_a 1 = 0$. Für $a > 1$ nähern sich die Kurven mit abnehmendem x $(x > 0)$ immer mehr dem negativen Teil der y-Achse.

(9) *Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = \log_{10} x$ für $0 < x \leqq 10$! Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve!*

* Die Funktion $f(x) = 2^x$ ist eine eineindeutige Funktion, denn aus $2^{x_1} = 2^{x_2}$ folgt stets $x_1 = x_2$. Da jede eineindeutige Funktion umkehrbar ist, existiert zu f die Umkehrfunktion $\bar{f}$, die man erhält, indem man in jedem geordneten Paar $[x; y]$, das zu f gehört, die Zahlen x und y miteinander vertauscht; vgl. Seite 94.
Die Funktion f ist die Menge aller geordneten Paare $[x; y]$ mit $y = 2^x$ ($x \in P$; $y \in P$; $y > 0$). Dann ist $\bar{f}$ die Menge aller geordneten Paare $[y; x]$, für die $x = \log_2 y$ ($x \in P$; $y \in P$; $y > 0$) gilt. Die Gleichung für die Funktion $\bar{f}$ lautet demnach

$$\bar{f}(y) = \log_2 y \quad (y > 0).$$

Benennt man in dieser Gleichung die Variablen um – durch die Umbenennung der Variablen wird die Funktion nicht geändert – so erhält man die Gleichung

$$\bar{f}(x) = \log_2 x \quad (x > 0).$$

Damit erhält man: Die Funktion $\bar{f}(x) = \log_2 x$ ($x > 0$) ist die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = 2^x$ und umgekehrt. Die Graphen der Funktionen f und $\bar{f}$ gehen durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ auseinander hervor.

Allgemein gilt: **Ist a eine fest vorgegebene positive Zahl mit $a \neq 1$, so sind die Funktionen $y = a^x$ und $y = \log_a x$ ($x > 0$) Umkehrfunktionen zueinander.**

(10) *Es sei a eine beliebige Zahl mit $a > 1$. Welche Eigenschaften der Funktion $y = \log_a x$ ($x > 0$) erhält man aus bereits bekannten Eigenschaften ihrer Umkehrfunktion $y = a^x$?*

Aufgaben e 29 bis 31

6 Anwendungen

Viele physikalische Zusammenhänge lassen sich durch Exponentialfunktionen bzw. durch Logarithmusfunktionen beschreiben. Aber auch für andere Wissenschaftszweige, z. B. für die Biologie (Wachstumsprozesse) und für die Ökonomie, haben Exponentialfunktionen große Bedeutung. Hauptsächlich lassen sich solche Naturvorgänge annähernd durch Exponentialfunktionen beschreiben, bei denen die Änderung einer gegebenen Größe (z. B. zeitliche Vermehrung oder Verminderung einer gegebenen Substanz; zeitliche Änderung eines Bewegungsvorganges) dieser Größe selbst proportional ist.

6 Der biologische Wachstumsprozeß (z. B. Zunahme des Holzbestandes eines Waldes, Wachstum einer Bakterienkultur) läßt sich unter vereinfachten Bedingungen durch die Exponentialfunktion

$$m = m_0 e^{at}$$

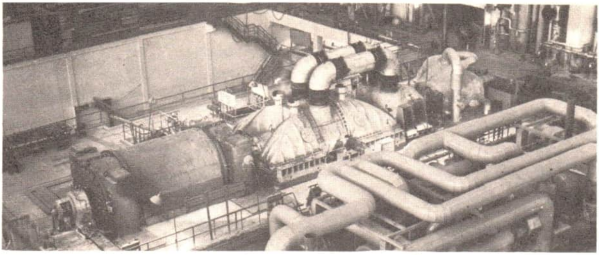
beschreiben. Darin ist m_0 die zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ vorhandene Stoffmenge, $e = 2{,}71828\ldots$ eine irrationale Zahl, a eine für den Wachstumsprozeß des betreffenden Stoffes charakteristische Konstante und m die zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \geqq t_0$ vorhandene Stoffmenge.

(11) *Aus gewissen Bakterienkulturen, die auf geeigneten Nährböden gezüchtet werden, werden in der pharmazeutischen Industrie wertvolle Antibiotika (z. B. Streptomyzin) hergestellt. Für das Wachstum einer speziellen Bakterienkultur möge gelten:*

$$m = m_0 \cdot 2^{at} \quad \text{mit} \quad a = 0{,}5\,\mathrm{d}^{-1} \quad (t \geqq 0\,\mathrm{d}).$$

Nach wieviel Tagen hat sich die ursprünglich vorhandene Menge m_0 verdoppelt bzw. vervierfacht bzw. verachtfacht?

E



7 Durch die schnelle Entwicklung der Volkswirtschaft in der DDR steigt der Elektroenergiebedarf von Jahr zu Jahr. Unsere Republik gehört heute in der Pro-Kopf-Erzeugung von Elektroenergie zu den zehn führenden Ländern der Welt.
Im Jahre 1950 betrug die Erzeugung von Elektroenergie ungefähr $W_0 = 20 \cdot 10^9$ kWh. Bei einer durchschnittlichen jährlichen Wachstumsrate von 8% läßt sich die Entwicklung der Elektroenergieerzeugung für den Zeitraum von 1950 bis 1980 durch die Exponentialfunktion

$$W_n = W_0 \cdot 1{,}08^n \quad (n \in N;\ 0 \leqq n \leqq 30)$$

beschreiben. Für das Jahr 1980 ($n = 30$) erhält man

$$W_{30} = W_0 \cdot 1{,}08^{30} \approx 200 \cdot 10^9 \text{ kWh}.$$

Das bedeutet, daß die Erzeugung von Elektroenergie nach dem Stand von 1970 auf mehr als das Doppelte ansteigen muß.

12 *Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie aus diesen Angaben, wenn man bedenkt, daß diese gewaltige Steigerung durch den Neubau von Wärmekraftwerken auf Kohlebasis allein nicht möglich ist, da die Kohleförderung nicht beliebig erhöht werden kann?*

E

8 Der atmosphärische Luftdruck nimmt mit der Höhe über dem Meeresspiegel ab. Ist p_0 der Luftdruck in Meeresspiegelhöhe und p der Luftdruck in der Höhe h über dem Meeresspiegel (gemessen in m), so wird der Zusammenhang zwischen h und p durch die logarithmische Funktion

$$h = a \cdot \log_{10} \frac{p_0}{p} \quad (a = 18\,400 \text{ m};\ p \leqq p_0)$$

beschrieben. Mit Hilfe dieser logarithmischen Funktion läßt sich die Höhe über dem Meeresspiegel berechnen, wenn der Luftdruck in dieser Höhe und der Luftdruck p_0 bekannt sind. Gilt beispielsweise $p_0 = 750$ Torr und $p = 250$ Torr, so ist

$$h = a \cdot \log_{10} \frac{750}{250} = a \cdot \log_{10} 3 \approx 18\,400 \cdot 0{,}477 \text{ m};\ h \approx 8{,}77 \text{ km}.$$

7 Dekadische Logarithmen

Sind a und c reelle Zahlen mit $a > 0$, so gibt es genau eine positive Zahl b mit $a^c = b$. Diese Zahl b heißt die Potenz mit der Basis a und dem Exponenten c. Die Operation, die den Zahlen a und c die Zahl $b = a^c$ zuordnet, heißt **Potenzieren.**
Ist c eine *natürliche Zahl* mit $c > 0$ und b eine beliebige positive Zahl, so gibt es genau eine positive Zahl a mit $a = \sqrt[c]{b}$. Die Operation, die den Zahlen b und c die Zahl $a = \sqrt[c]{b}$ zuordnet, heißt **Radizieren.**

Sind ferner a und b beliebige positive Zahlen mit $a \neq 1$, so gibt es nach Satz E 2 genau eine Zahl c mit $c = \log_a b$. Die Operation, die den Zahlen a und b die Zahl $c = \log_a b$ zuordnet, heißt **Logarithmieren.**
Radizieren und Logarithmieren sind also – man beachte die notwendigen Einschränkungen – *Umkehroperationen des Potenzierens.*

9 Aus $2^3 = 8$ folgt $2 = \sqrt[3]{8}$ und $3 = \log_2 8$.

Aus $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ folgt $\frac{1}{3} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ und $4 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$.

Aus $10^2 = 100$ folgt $10 = \sqrt{100}$ und $2 = \log_{10} 100$.

(13) *Begründen Sie, warum die Addition und die Multiplikation reeller Zahlen jeweils nur eine Umkehroperation haben! Warum gibt es für die Operation Potenzieren zwei Umkehroperationen?*

Die Menge der Logarithmen aller positiven reellen Zahlen zu einer vorgegebenen Basis a ($a > 0$; $a \neq 1$) heißt das **Logarithmensystem zur Basis a.**

Von besonderer Bedeutung für die Praxis ist das *Logarithmensystem zur Basis 10.* Die Logarithmen mit der Basis 10 heißen **dekadische Logarithmen.** Statt „$\log_{10} b$" schreibt man kürzer „$\lg b$". Es ist also beispielsweise

$$\lg 100 = 2; \quad \lg 0{,}1 = -1; \quad \lg 3 = 0{,}47712\ldots; \quad \text{vgl. Beispiel E 4f.}$$

Wenn wir künftig von Logarithmen sprechen, so sollen stets dekadische Logarithmen gemeint sein.

(14) *Geben Sie die Logarithmen der Zahlen 10^k an, wenn k eine ganze Zahl mit $-5 \leqq k \leqq 5$ ist!*

Ist k eine beliebige ganze Zahl, so gilt $\lg 10^k = k$.

Ganzzahlige Logarithmen haben nur diejenigen Zahlen, die Potenzen von 10 mit ganzzahligen Exponenten sind. Die Logarithmen aller anderen positiven *rationalen* Zahlen sind irrational. Für gewisse irrationale Zahlen erhält man rationale Logarithmen. So gilt beispielsweise $\lg \sqrt{10} = 0{,}5$.
Die Berechnung der Logarithmen auf elementarem Wege ist zwar möglich, jedoch sind solche Berechnungen mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden. Man berechnet die Logarithmen daher mit Hilfsmitteln, die hier nicht zur Verfügung stehen. Eine solche Berechnung liefert z. B. $\lg 3{,}47 = 0{,}5403$. Streng genommen müßte man $\lg 3{,}47 \approx 0{,}5403$ schreiben, denn $0{,}5403$ ist ein rationaler Näherungswert für die irrationale Zahl $\lg 3{,}47$.

E

Ist der Logarithmus einer beliebigen positiven Zahl r bereits bekannt, so kann man sofort, wie Beispiel E 10 zeigt, unter Verwendung der Potenzgesetze die Logarithmen aller Zahlen $r \cdot 10^k$ mit $k \in G$ angeben. Darin besteht die besondere Vorzugsstellung des dekadischen Logarithmensystems.

10 Es ist $\lg 3{,}47 = 0{,}5403$, d. h., es ist $3{,}47 = 10^{0{,}5403}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
34{,}7 &= 3{,}47 \cdot 10^1 = 10^{0{,}5403} \cdot 10^1 = 10^{1{,}5403};\\
347 &= 3{,}47 \cdot 10^2 = 10^{0{,}5403} \cdot 10^2 = 10^{2{,}5403};\\
3470 &= 3{,}47 \cdot 10^3 = 10^{0{,}5403} \cdot 10^3 = 10^{3{,}5403};\\
0{,}347 &= 3{,}47 \cdot 10^{-1} = 10^{0{,}5403} \cdot 10^{-1} = 10^{0{,}5403-1};\\
0{,}0347 &= 3{,}47 \cdot 10^{-2} = 10^{0{,}5403} \cdot 10^{-2} = 10^{0{,}5403-2};\\
0{,}00347 &= 3{,}47 \cdot 10^{-3} = 10^{0{,}5403} \cdot 10^{-3} = 10^{0{,}5403-3}.
\end{aligned}$$

x	$\lg x$
3470	3,5403
347	2,5403
34,7	1,5403
3,47	0,5403
0,347	0,5403 − 1
0,0347	0,5403 − 2
0,00347	0,5403 − 3

Aus diesen Gleichungen erhält man die Logarithmen der angegebenen Zahlen, die in der nebenstehenden Tabelle zusammengefaßt sind. Beispiel E 10 zeigt außerdem, daß es unzweckmäßig wäre, die Differenzen $0{,}5403-1$; $0{,}5403-2$ usw. auszurechnen, weil dadurch die Vorteile des dekadischen Systems verlorengingen.

Aus Beispiel E 10 entnimmt man ferner, daß es genügt, beispielsweise die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 zu kennen, um dann für alle positiven Zahlen die Logarithmen angeben zu können. Jede positive reelle Zahl läßt sich nämlich eindeutig als Produkt aus einer reellen Zahl r mit $1 \leqq r < 10$ und einer Potenz 10^k mit ganzzahligem Exponenten k darstellen; vgl. Seite 79.

Ist r eine beliebige positive Zahl mit $1 \leqq r < 10$ und $\lg r = m$ und ist k eine beliebige ganze Zahl, so ist $\lg (r \cdot 10^k) = m + k$.

Ist nämlich $\lg r = m$, so gilt $r = 10^m$. Dann ist $r \cdot 10^k = 10^m \cdot 10^k = 10^{m+k}$. Daraus folgt aber sofort $\lg (r \cdot 10^k) = m + k$.
Man nennt die ganze Zahl k die **Kennzahl** und die Zahl m die **Mantisse** des Logarithmus von $r \cdot 10^k$.

11

x	$\lg x$	Kennzahl	Mantisse
3,47	0,5403	0	0,5403
347	2,5403	2	0,5403
0,00347	0,5403 − 3	−3	0,5403

Da $\lg 1 = 0$ und $\lg 10 = 1$ ist und die Funktion $y = \lg x$ monoton wächst, gilt: Ist $1 \leqq r < 10$, so gilt $0 \leqq \lg r < 1$.

Jede reelle Zahl ist ein unendlicher Dezimalbruch. Die Zahl $r \cdot 10^k$ mit $1 \leqq r < 10$ und $k \in G$ hat

für $k \geqq 0$ vor dem Komma $k + 1$ Stellen;

für $k < 0$ vor der ersten von Null verschiedenen Stelle $|k|$ Nullen einschließlich der Null vor dem Komma.

Aus diesen Betrachtungen folgt:

(1) Unterscheiden sich zwei positive Zahlen nur um einen Faktor 10^k ($k \in G$), so haben ihre Logarithmen gleiche Mantissen.

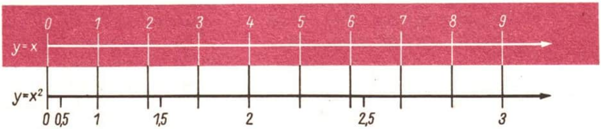
(2) Ist $x \geqq 1$, so ist die Kennzahl des Logarithmus von x um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen, die der Dezimalbruch x vor dem Komma hat.

(3) Ist $0 < x < 1$, so ist die Kennzahl des Logarithmus von x negativ. Ihr Betrag ist gleich der Anzahl der Nullen, die der Dezimalbruch x links vor der ersten von Null verschiedenen Stelle, einschließlich der Null vor dem Komma, hat.

Aufgaben e 32 bis 35

9 Die logarithmische Skale

Eine bisher noch nicht verwendete Darstellung einer Funktion ist die Darstellung durch eine Skale. Für eine gegebene Funktion f gewinnt man eine solche geradlinige Skale, indem man nach Wahl einer Einheitsstrecke die Funktionswerte $f(x)$ von einem festgelegten Anfangspunkt auf einer Geraden abträgt und an die so erhaltenen Punkte die entsprechenden Zahlen x schreibt.



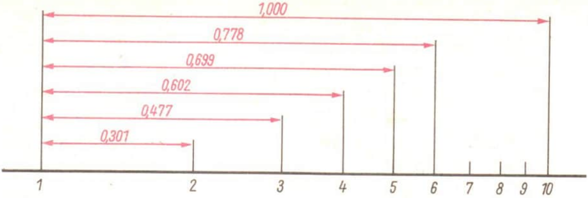
E 4

Bild E 4 zeigt einen Abschnitt der Skale für die Funktion $y = x^2$, bei der die Einheitsstrecke 1 cm lang ist. In Bild E 4 sind für einige wenige Zahlen x die Teilstriche markiert. Zum Vergleich ist ein Abschnitt der Skale für die Funktion $y = x$ mit der gleichen Einheitsstrecke angegeben.
Wir wollen nun den Abschnitt einer Skale für die Funktion $y = \lg x$ für die Zahlen x mit $1 \leqq x \leqq 10$ konstruieren. Wir beschränken uns darauf, die Teilstriche für die ganzen Zahlen zwischen 1 und 10 zu markieren. Für diese Konstruktion benötigen wir die Logarithmen der betreffenden Zahlen. Die mit Hilfsmitteln der höheren Mathematik berechneten Mantissen der dekadischen Logarithmen werden in sogenannten Logarithmentafeln tabelliert. In der uns zur Verfügung stehenden Tafel sind die Mantissen der Logarithmen für die natürlichen Zahlen von 100 bis 999 und von 1000 bis 1099 mit vier Dezimalstellen ohne Angabe der Null vor dem Komma aufgeführt.
Aus dieser Tabelle lesen wir beispielsweise ab:

$\lg 2 = 0{,}3010$; $\lg 3 = 0{,}4771$; $\lg 4 = 0{,}6021$; usw.[1]

Als Einheitsstrecke wählen wir eine Strecke von 10 cm Länge. Wegen $\lg 1 = 0$ bzw. $\lg 10 = 1$ bezeichnen wir den Anfangs- bzw. Einheitspunkt der Skale mit 1 bzw. 10. Tragen wir vom Anfangspunkt dieser Skale – unter Beachtung

[1] Auch hier müßte man eigentlich $\lg 2 \approx 0{,}3010$, $\lg 3 \approx 0{,}4771$ usw. schreiben; vgl. den Hinweis auf S. 139.
Aus dem Tafelwert für lg 2 folgt $0{,}30095 < \lg 2 < 0{,}30105$.
Aus dem Tafelwert für lg 3 folgt $0{,}47705 < \lg 3 < 0{,}47715$.



E 5

des gewählten Maßstabes – die Funktionswerte lg 2, lg 3, …, lg 9 ab und schreiben an die erhaltenen Teilpunkte die Zahlen 2, 3, …, 9, so erhalten wir den im Bild E 5 dargestellten Abschnitt der Skale für die Funktion $y = \lg x$. Eine solche Skale heißt eine **logarithmische Skale**.
Jeder Zahl x mit $1 \leqq x \leqq 10$ ist eine Strecke mit dem Anfangspunkt 1 zugeordnet. Der mit x bezeichnete Endpunkt dieser Strecke ist $(10 \lg x)$ cm vom Anfangspunkt der Skale entfernt. Jede Strecke mit dem Anfangspunkt 1 und einem Endpunkt x, der zwischen 1 und 10 liegt, stellt so den Logarithmus einer Zahl x mit $1 \leqq x \leqq 10$ dar.
Die im Bild E 5 dargestellte Skale läßt sich nach rechts und links beliebig weit fortsetzen. Erweitert man die Skale, indem man beispielsweise für die Zahlen 20, 30, …, 100 die Teilstriche einzeichnet, so erhält man ein weiteres Teilstück der logarithmischen Skale, das dem schon gezeichneten kongruent ist.

(15) *Erläutern Sie, warum man den im Bild E 5 dargestellten Abschnitt der logarithmischen Skale auch als Abschnitt für die Zahlen x mit* $10^k \leqq x \leqq 10^{k+1}$ $(k \in G)$ *ansehen kann!*

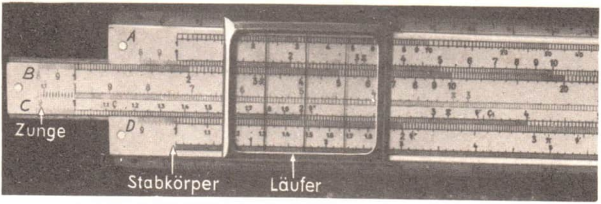
Aufgabe e 36

10 Der Rechenstab

(16) *Lösen Sie folgende Aufgaben mit Hilfe des Rechenstabes!*

a) $1{,}74 \cdot 5{,}35$ b) $\pi \cdot 64{,}3$ c) $915 : 423$ d) $22{,}7 : 64{,}7$ e) $6{,}9^2$ f) $\sqrt{0{,}655}$

Der Rechenstab enthält ein System logarithmischer Skalen, die auf dem Stabkörper bzw. der Zunge mit großer Genauigkeit aufgetragen sind; vgl. Bild E 6. Die Skalen A und B bzw. C und D sind kongruent. Als Einheitsstrecke für die Skalen C und D wird meist eine Strecke mit der Länge 25 cm gewählt. Die Einheitsstrecke für die Skalen A und B ist dann 12,5 cm lang.



E 6

Für die mathematische Begründung des Arbeitens mit dem Rechenstab benötigt man den folgenden Satz.

4 **SATZ: Sind u und v positive reelle Zahlen und ist a eine positive Zahl mit $a \neq 1$, so gilt:**

(1) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v;$

(2) $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v;$

(3) $\log_a u^r = r \cdot \log_a u \; (r \in P).$

Beweis: Die Gültigkeit der genannten Beziehungen erhält man sofort aus der Definition des Logarithmus und der Gültigkeit der Potenzgesetze für Potenzen mit reellen Exponenten.

Es sei $\log_a u = b$ und $\log_a v = c$, also $u = a^b$ und $v = a^c$.

Dann ist

(1′) $u \cdot v = a^b \cdot a^c = a^{b+c}$,

also $\log_a (u \cdot v) = b + c = \log_a u + \log_a v;$

(2′) $\frac{u}{v} = \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$,

also $\log_a \frac{u}{v} = b - c = \log_a u - \log_a v;$

(3′) $u^r = (a^b)^r = a^{rb}$,

also $\log_a u^r = rb = r \log_a u$.

Für den Logarithmus eines Produktes aus endlich vielen positiven Faktoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt – wie hier ohne Beweis mitgeteilt wird –

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n.$$

Aus (3) erhält man speziell für $r = \frac{1}{n}$ $(n \in N;\, n > 0)$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u.$$

12 a) $\lg (5{,}73 \cdot 0{,}27 \cdot 1{,}69) = \lg 5{,}73 + \lg 0{,}27 + \lg 1{,}69$

b) $\lg \frac{2{,}84 \cdot 4{,}97}{0{,}061} = \lg 2{,}84 + \lg 4{,}97 - \lg 0{,}061$

c) $\lg \sqrt{\frac{85{,}1 \cdot 35{,}4}{85{,}1 - 35{,}4}} = \frac{1}{2} \; [\lg 85{,}1 + \lg 35{,}4 - \lg (85{,}1 - 35{,}4)]$

13 a) $\lg 2 + \lg 7 - \lg 11 = \lg \frac{2 \cdot 7}{11} = \lg \frac{14}{11}$

b) $3 \cdot \lg 5{,}1 + \frac{1}{2} \cdot \lg 7{,}3 - 2 \cdot \lg 6{,}2 - \frac{1}{3} \cdot \lg 9{,}3 = \lg \frac{5{,}1^3 \cdot \sqrt{7{,}3}}{6{,}2^2 \cdot \sqrt[3]{9{,}3}}$

c) $\lg 16 + \lg 625 = \lg 2^4 + \lg 5^4 = 4 \cdot \lg 2 + 4 \cdot \lg 5 = 4(\lg 2 + \lg 5)$
$= 4 \cdot \lg (2 \cdot 5) = 4 \cdot \lg 10 = 4$

17 *Begründen Sie, weshalb auf den Skalen A, B, C, D des Rechenstabes die Strecken von 2 bis 4 bzw. von 4 bis 8 genauso lang sind wie die Strecke von 1 bis 2!*

Aufgaben e 37 bis 48

E

Die große Bedeutung der dekadischen Logarithmen für das praktische Rechnen beruht auf den Formeln

$$\lg(u \cdot v) = \lg u + \lg v; \quad \lg \frac{u}{v} = \lg u - \lg v$$

und $\lg u^r = r \cdot \lg u \quad (u > 0;\, v > 0;\, r \in P)$; vgl. Satz E 4.

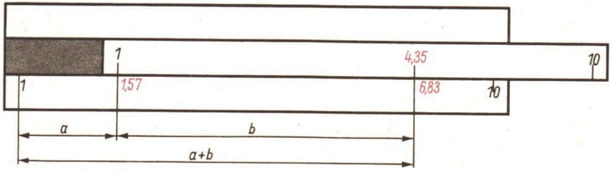
Mit Hilfe dieser Formeln kann man Produkte, Quotienten und Potenzen positiver reeller Zahlen „logarithmisch" berechnen.

14 Es ist $\lg 2 = 0{,}3010$; $\lg 4 = 0{,}6021$; $\lg 8 = 0{,}9031$.
Dann gilt $\lg(2 \cdot 4) = \lg 2 + \lg 4 = 0{,}3010 + 0{,}6021 = 0{,}9031 = \lg 8$.
Aus dieser Gleichung folgt $2 \cdot 4 = 8$.

Wir haben also das Produkt der Zahlen 2 und 4 „logarithmisch" berechnet. Dabei führt man die Berechnung des *Produktes* $2 \cdot 4$ auf die *Addition* der Logarithmen der Faktoren 2 und 4 zurück.
Entsprechend führt man durch das Logarithmieren die Berechnung des *Quotienten* zweier positiver reeller Zahlen auf die *Subtraktion* der Logarithmen von Dividend und Divisor und die Berechnung der *Potenz* einer positiven reellen Zahl auf die *Multiplikation* des Logarithmus der Basis mit dem Exponenten zurück.

Das Addieren und Subtrahieren von Logarithmen wird mit dem Rechenstab geometrisch ausgeführt.

15 Das Produkt $x = 1{,}57 \cdot 4{,}35$ ist mit dem Rechenstab zu berechnen.
Es ist $\lg(1{,}57 \cdot 4{,}35) = \lg 1{,}57 + \lg 4{,}35$.



E 7

Bild E 7 veranschaulicht die zur Lösung der Aufgabe erforderliche Einstellung. Die Maßzahlen der Strecken a bzw. b sind unter Berücksichtigung der gewählten Einheitsstrecke $\lg 1{,}57$ bzw. $\lg 4{,}35$. Die Maßzahl der Strecke $a + b$ ist dann

$$\lg 1{,}57 + \lg 4{,}35 = \lg(1{,}57 \cdot 4{,}35) = \lg 6{,}83.$$[1]

Aus dieser Gleichung folgt $1{,}57 \cdot 4{,}35 \approx 6{,}83$.
Die Logarithmen der Zahlen 1,57 und 4,35 sowie der Logarithmus des zu berechnenden Produktes x treten also beim Stabrechnen als Maßzahlen gewisser Strecken auf. An den Endpunkten der betreffenden Strecken stehen

[1] Vgl. Fußnote auf Seite 149.

aber – wie bei der Konstruktion der logarithmischen Skale erläutert wurde – die Zahlen selbst und nicht ihre Logarithmen. Man kann also das Ergebnis der Rechnung unmittelbar ablesen, ohne daß man wie im Beispiel E 14 mit den Logarithmen numerisch rechnet.
Beim Rechnen mit dem Rechenstab rechnet man – wie uns bereits bekannt ist – ohne Berücksichtigung der Kommastellung der Eingabewerte. Die Stellenzahl des Ergebnisses ermittelt man durch einen Überschlag, der gleichzeitig eine gewisse Kontrolle des berechneten Resultats liefert. Bei der im Beispiel E 15 gestellten Aufgabe beschreiben wir die Einstellung daher wie folgt.
Wir stellen die Zahl 1 der Skale C, kurz C 1, über D 157; lies: „D eins-fünf-sieben". Unter C 435 lesen wir auf D ab: 683. Die im Bild E 8 gezeigte Einstellung ermöglicht auch die Lösung der Aufgabe $6{,}83 : 4{,}35 \approx 1{,}57$.

Es ist nämlich $\lg 6{,}83 - \lg 4{,}35 = \lg \frac{6{,}83}{4{,}35} = \lg 1{,}57$.

18 a) *Veranschaulichen Sie durch eine Zeichnung an Hand der Aufgabe $x = 2{,}75 \cdot 6{,}24$ die „Multiplikation mit Rückschlag"! Deuten Sie an Ihrer Zeichnung folgende Rechnung!*

$$\begin{aligned}\lg x &= \lg 62{,}4 - (\lg 10 - \lg 2{,}75) = \lg 62{,}4 - \lg 10 + \lg 2{,}75 \\ &= \lg \frac{62{,}4}{10} + \lg 2{,}75 = \lg (6{,}24 \cdot 2{,}75)\end{aligned}$$

b) *Erläutern Sie, warum man bei Benutzung der Skalen A und B ohne „Rückschlag" auskommt!*

Die für die Skalen D und A verwendeten Einheitsstrecken verhalten sich wie 2 : 1. Demnach ist die Strecke für $2 \cdot \lg a = \lg a^2$ auf der Skale A genauso lang wie die Strecke für $\lg a$ auf der Skale D. Über jeder Zahl a auf der Skale D steht also auf der Skale A das Quadrat dieser Zahl.

19 *Erläutern Sie, wie man mit den Skalen D und K (K über Skale A) Kubikzahlen bzw. Kubikwurzeln berechnen kann!*

12 Anwendungsbeispiele

Ein Produkt aus mehreren Faktoren wird schrittweise berechnet. Die Zwischenergebnisse werden mit dem Läuferstrich markiert, bis man die Zunge für die nächste Berechnung eingestellt hat.

16 *Aufgabe:* $x = \dfrac{\sqrt{31{,}5} \cdot 4041}{29{,}6 \cdot 1230}$

Überschlag: $x = \dfrac{\sqrt{31{,}5} \cdot 4{,}041 \cdot 10^3}{2{,}96 \cdot 10^1 \cdot 1{,}23 \cdot 10^3} \approx \dfrac{6 \cdot 4}{3} \cdot 10^{-1} = 0{,}8$

Um mit möglichst wenig Einstellungen der Zunge auszukommen, wird abwechselnd dividiert und multipliziert.

Einstellung:

(a) Läuferstrich über A315 (wegen $\sqrt{31{,}5} \approx 6$ steht der Läuferstrich auf dem Abschnitt zwischen 10 und 100 der Skale A)
(b) C296 unter Läuferstrich
(c) Läuferstrich über C404
(d) C123 unter Läuferstrich
(e) Unter C1 ablesen: D622

Ergebnis: $x \approx 0{,}622$

20 ***Erläutern Sie, wie Sie mit Hilfe des Rechenstabes die folgenden Quotienten berechnen können!***

a) $x = \dfrac{2{,}45^2 \cdot 3{,}89}{\sqrt{358}}$ b) $x = \dfrac{1{,}37^3 \sqrt{20{,}7} + \sqrt[3]{5{,}69} \cdot 14{,}2^2}{\sqrt{27{,}8 \cdot 35{,}6 - 0{,}56^2 \cdot 71{,}5}}$

17 Die Masse m eines 11,3 m langen Kupferdrahtes beträgt 1031 g. Die Dichte des Kupfers ist $\varrho = 8{,}93\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. Welchen Durchmesser hat der Draht?

Gegeben: $m = 1031\ \mathrm{g}$; $h = 11{,}3\ \mathrm{m}$; $\varrho = 8{,}93\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$

Gesucht: d in cm

Benötigte Formeln: (1) $m = \varrho \cdot V$ (2) $V = \dfrac{\pi}{4} d^2 \cdot h$

Allgemeine Lösung: $m = \varrho \dfrac{\pi}{4} d^2 h$

$$d^2 = \frac{4m}{\pi \varrho h}$$

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \varrho h}}$$

Einsetzen der gegebenen Größen:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 1031\ \mathrm{g}}{\pi \cdot 8{,}93\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}} \cdot 1130\ \mathrm{cm}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1031}{\pi \cdot 8{,}93 \cdot 1130}}\ \mathrm{cm}$$

Überschlag:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}031 \cdot 10^3}{\pi \cdot 8{,}93 \cdot 1{,}13 \cdot 10^3}}\ \mathrm{cm} \approx \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 9}}\ \mathrm{cm} \approx \sqrt{0{,}1}\ \mathrm{cm} \approx 0{,}3\ \mathrm{cm}$$

Numerische Lösung:

Man berechnet zunächst den Radikanden. Die Rechnung mit dem Rechenstab liefert $d \approx \sqrt{0{,}130}\ \mathrm{cm}$.

Zur Berechnung von $\sqrt{0{,}130}$ verwendet man entweder den Rechenstab oder die Tafel der Quadratwurzeln und erhält $\sqrt{0{,}130} \approx 0{,}361$.

Ergebnis: $d \approx 0{,}361\ \mathrm{cm} = 3{,}61\ \mathrm{mm}$

18 Um zu ermitteln, welche Wärmeenergie der elektrischen Energie von 1 Ws äquivalent ist, wird folgendes Experiment durchgeführt. Durch eine Heizspirale werden $m = 526\ \mathrm{g}$ Wasser in $t = 265\ \mathrm{s}$ von $\vartheta_1 = 12{,}5\ \mathrm{°C}$ auf $\vartheta_2 = 17{,}2\ \mathrm{°C}$ erwärmt. An der Spirale liegt eine Spannung von $U = 120\ \mathrm{V}$; die Stromstärke beträgt $I = 324\ \mathrm{mA}$. (Die Wärmeaufnahme durch das Gefäß wird nicht berücksichtigt.)

E

Lösung:

Die in Wärmeenergie umgewandelte elektrische Energie beträgt

(1) $W = k \cdot U \cdot I \cdot t$ (k ist die zu berechnende Konstante).

Die vom Wasser aufgenommene Wärmemenge beträgt

(2) $W = m \cdot c \cdot \Delta\vartheta$ ($c = 1\ \mathrm{cal \cdot g^{-1} \cdot grd^{-1}}$ ist die spezifische Wärme des Wassers).

Aus (1) und (2) erhält man

$$k \cdot U \cdot I \cdot t = m \cdot c \cdot \Delta\vartheta$$

$$k = \frac{m \cdot c \cdot \Delta\vartheta}{U \cdot I \cdot t}$$

Durch Einsetzen der gegebenen Größen folgt

$$k = \frac{526\ \text{g} \cdot 1\ \text{cal g}^{-1}\ \text{grd}^{-1} \cdot 4{,}7\ \text{grd}}{120\ \text{V} \cdot 0{,}324\ \text{A} \cdot 265\ \text{s}} = \frac{526 \cdot 4{,}7}{120 \cdot 0{,}324 \cdot 265}\ \text{cal (Ws)}^{-1}.$$

Überschlag:

$$\frac{526 \cdot 4{,}7}{120 \cdot 0{,}324 \cdot 265} = \frac{5{,}26 \cdot 10^2 \cdot 4{,}7}{1{,}2 \cdot 10^2 \cdot 3{,}24 \cdot 10^{-1} \cdot 2{,}65 \cdot 10^2} \approx \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3} \cdot 10^{-1} \approx 0{,}3$$

Die Rechnung mit dem Rechenstab ergibt

$$k \approx 0{,}24\ \text{cal (Ws)}^{-1}.$$

Ergebnis: Die elektrische Energie von 1 Ws entspricht ungefähr der Wärmeenergie 0,24 cal (genauerer Wert: 1 Ws = 0,239 cal).

Aufgaben e 49 bis 93

13 Genauigkeit des Rechnens mit Hilfe des Rechenstabes

Beim Rechnen mit Hilfe des Rechenstabes erhält man für die gesuchten Ergebnisse Näherungswerte, deren Genauigkeit von der Größe des verwendeten Rechenstabes, von der Anzahl der durchgeführten Rechenoperationen und von der Einstell- und Ablesegenauigkeit abhängt. Außerdem hängt die Genauigkeit der Ergebnisse natürlich von der Genauigkeit der Eingabewerte ab.
Bei allen mit Hilfe eines Rechenstabes, dessen Einheitsstrecke 25 cm lang ist, durchgeführten Rechnungen erhält man die Ergebnisse mit drei geltenden Ziffern, wenn die Eingabewerte mindestens drei geltende Ziffern haben. So wird beispielsweise statt der Aufgabe $1{,}2 \cdot 4{,}012$ mit Hilfe des Stabes gerechnet: $1{,}20 \cdot 4{,}01 = 4{,}81$.
Die ersten beiden Ziffern lassen sich stets genau einstellen bzw. ablesen. Auf den Skalen C und D kann man für die Zahlen zwischen $1 \cdot 10^k$ und $2 \cdot 10^k$ ($k \in G$) die ersten drei Ziffern genau einstellen bzw. ablesen. Die nächste Ziffer wird jeweils geschätzt. Da man beim Schätzen nicht berücksichtigt, daß die Teilstriche einer logarithmischen Skale nach rechts enger aufeinander folgen, kann also die dritte Ziffer nicht mehr völlig zuverlässig sein. Auf den Skalen C und D ist die Einstell- und Ablesegenauigkeit größer als auf den Skalen A und B. Eine logarithmische Skale ist so beschaffen, daß der prozentuale Ablesefehler im wesentlichen an allen Stellen gleich groß ist.
Außerdem ist zu berücksichtigen, daß man in der Praxis hauptsächlich Rechnungen auszuführen hat, bei denen die Eingabewerte Näherungswerte sind, d. h., es handelt sich um gerundete Zahlen, z. B. um $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, oder um Maßzahlen gemessener Größen, z. B. um $a = 4{,}7 \pm 0{,}05$. Bei solchen Rechnungen erhält man sowieso, auch wenn nicht mit Hilfe des Rechenstabes gearbeitet wird, nur Näherungswerte für die Resultate.

19 Es ist $2{,}287 \cdot 1{,}384 = 3{,}165208$.

(a) Rundet man die Faktoren auf drei geltende Ziffern, so erhält man $2{,}29 \cdot 1{,}38 = 3{,}1602$.

(b) Rundet man auf zwei geltende Ziffern, so gilt $2{,}3 \cdot 1{,}4 = 3{,}22$.

Man erkennt, daß im Fall (a) die beiden letzten Ziffern von 3,1602 völlig sinnlos sind. Das Ergebnis wird daher nur mit drei zuverlässigen Ziffern angegeben: 3,16.

E

Entsprechend gibt man im Fall (b) das Ergebnis nur mit zwei zuverlässigen Ziffern an: 3,2.

Beim Rechnen mit Näherungswerten muß unbedingt beachtet werden, daß im Ergebnis keine überflüssigen Ziffern beibehalten werden und damit eine Genauigkeit vorgetäuscht wird, die gar nicht vorhanden ist. Das ist insbesondere auch beim Rechnen mit Hilfe des Rechenstabes zu beachten.

14 Überblick über weitere Rechenhilfsmittel

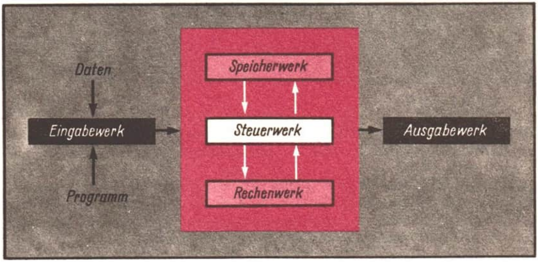
Durch die Verwendung von Logarithmen wurde vor etwa 400 Jahren eine außerordentliche Vereinfachung der Rechenarbeit erzielt. Die Einführung von Logarithmen und die Aufstellung von Logarithmentafeln ermöglichte insbesondere den Astronomen, ihre komplizierten und umfangreichen Rechnungen mit der notwendigen Genauigkeit durchzuführen.
Aus der stürmischen Entwicklung der Naturwissenschaften im 17. Jahrhundert ergab sich zwangsläufig die Notwendigkeit, die Rechenarbeit weiter zu vereinfachen. So wurden bereits damals die ersten manuell betriebenen mechanischen Rechenmaschinen mit automatischer Zehnerübertragung konstruiert und verwendet.
Gegen Ende des vorigen Jahrhunderts wurden — bedingt durch das schnelle Wachstum der Industrie und des Handels — immer bessere mechanische **Tischrechenmaschinen** serienmäßig hergestellt und in den Kontoren der Fabriken und Banken eingesetzt.
Bei den sogenannten **Lochkartenmaschinen** werden in Lochkarten gestanzte Zahlenwerte **automatisch** nach einer vorher festgelegten Vorschrift verarbeitet. Die erste Lochkartenmaschine wurde 1880 von HERMANN HOLLERITH zur maschinellen Auswertung statistischer Erhebungen konstruiert. Lochkarten sind Karteikarten, durch die Informationen durch Einbringen von Löchern so gespeichert werden, daß sie mit Hilfe der Maschinen wieder abgelesen, ausgewertet und aufgeschrieben werden können. Zu einer Lochkartenanlage gehören mehrere einzelne Maschinen wie Kartenlocher, Kartenprüfer, Kartendoppler, Kartenmischer, Sortiermaschinen und eine Tabelliermaschine.
Für die Weiterentwicklung der Rechenmaschinen waren folgende Überlegungen wesentlich.

1) Die Maschine soll über einen *Speicher* verfügen, der alle eingegebenen Daten und Zwischenresultate aufbewahrt.
2) Die Maschine soll *selbsttätig* nach einem an ihr eingestellten *Programm* mit den gespeicherten Daten operieren.

Eine solche Maschine heißt ein **programmgesteuerter Rechenautomat.**

Die Entwicklung programmgesteuerter Rechenautomaten erfolgte in den Jahren von 1935 bis 1945. Der deutsche Ingenieur KONRAD ZUSE und der amerikanische Mathematiker HOWARD H. AIKEN entwickelten 1941 bzw. 1944 unabhängig voneinander Rechenautomaten, die mit 2000 bzw. 3000 elektrischen Relais arbeiteten.
Der erste in der DDR hergestellte Rechenautomat war die im VEB Carl Zeiß konstruierte „Oprema" (Optikrechenmaschine), die 1954 speziell für optische Berechnungen in Betrieb genommen wurde. Dieser Automat war mit annähernd 17000 Relais und mit 90000 Selengleichrichtern ausgerüstet. Seine Kapazität entsprach etwa der von 200 Rechnern.
Heute werden an Stelle der Relais Elektronenröhren bzw. Halbleiterbauelemente verwendet, durch die die Rechengeschwindigkeit der Automaten beträchtlich erhöht und ihr Raumbedarf erheblich eingeschränkt werden konnten.
Der erste **elektronische** Rechenautomat „Eniac" wurde 1946 an der Pennsylvania-Universität in Betrieb genommen.
In der Sowjetunion wurde 1953 der erste mit Elektronenröhren arbeitende Automat, BESM 1, von der Akademie der Wissenschaften der UdSSR fertiggestellt.
Der im VEB Carl Zeiß hergestellte Rechenautomat ZRA 1, der als Bauelemente Ferritkerne, Germaniumdioden und Elektronenröhren besitzt, führt in 1 s etwa 150 Rechenoperationen aus. Der ZRA 1 ist auch heute noch in zahlreichen Rechenzentren der DDR eingesetzt.
Größere und leistungsfähigere Automaten sind die sowjetischen Anlagen der Ural-Serie, von denen bereits einige in die DDR importiert worden sind, die BESM 6, die in 1 s ca.

10^6 Rechenoperationen ausführt, sowie die amerikanischen Anlagen IBM 1401 und IBM 360. Es gibt heute bereits Rechenautomaten, die in 1 s mehrere Millionen Rechenoperationen ausführen können.
Die sozialistischen Länder hatten es nach dem zweiten Weltkrieg infolge der umfangreichen Zerstörungen besonders schwer, die Grundlagen ihrer wirtschaftlichen Ordnung völlig neu aufzubauen. Um so beachtenswerter sind daher die Ergebnisse, die in den vergangenen Jahren von diesen Ländern auf dem Gebiet der automatischen Rechentechnik erzielt wurden.
Die digitalen Rechenautomaten (Ziffernrechenautomaten) arbeiten mit Ziffern als Eingabewerten und liefern auch Ziffern als Ausgabewerte. Die Schaltglieder (Relais, Elektronenröhren, Ferritkerne oder Transistoren) der digitalen Automaten können im allgemeinen nur zwei unterscheidbare Zustände haben. Deswegen können sie auch nur Dualzahlen verarbeiten. Die wichtigsten Teile eines Ziffernrechenautomaten sind das eigentliche Rechenwerk, der Speicher, das Steuerwerk, das die vom Menschen angefertigte Befehlsfolge (das Programm) abtastet und das Rechenwerk zur Ausführung veranlaßt, und das Ein- und Ausgabewerk. Eine vereinfachte schematische Übersicht zeigt Bild E 8. Dem Automaten wird ein Algorithmus, nach dem die eingegebenen Daten zu verknüpfen sind, von vornherein mitgeteilt. Auch der Algorithmus selbst kann von der Maschine gespeichert werden. Der Automat kann also nur solche Probleme lösen, für die der Mensch vorher einen Lösungsweg vorgegeben hat.



E 8

Rechenautomaten werden nicht nur für die Lösung bestimmter mathematischer Probleme, für die sie ursprünglich gedacht waren, eingesetzt. Sie haben in den letzten Jahren große Anwendungsbereiche gefunden. So werden sie beispielsweise eingesetzt für Abrechnungszwecke in Betrieben, Banken und Versicherungen, für die Erforschung des Kosmos durch Satelliten und Raumschiffe, für die Automatisierung und Optimierung von Produktionsprozessen in allen möglichen Produktionszweigen, für automatische Sprachübersetzungen, für medizinische Diagnosen und vor allem für die Rationalisierung der komplexen Lenkungs- und Leitungsarbeit unserer sozialistischen Volkswirtschaft.
In all diesen Fällen handelt es sich um die automatische Verarbeitung von Informationen oder Daten. Man spricht deshalb besser von Datenverarbeitungsanlagen statt von Rechenautomaten. Einen prinzipiellen Unterschied zwischen Rechentechnik und Datenverarbeitung gibt es nicht. Datenverarbeitungsanlagen, die durch Weiterentwicklung der älteren Lochkartenmaschinen entstanden sind, sind Rechenautomaten zur Verarbeitung sehr umfangreichen Datenmaterials gleicher Struktur. Eine für die Datenverarbeitung vorgesehene Anlage muß zusätzlich über sehr große Speicher verfügen.
Neben verschiedenen in der DDR entwickelten Kleinrechnern, z. B. SER 2, wurde von Betrieben der VVB Datenverarbeitung die Datenverarbeitungsanlage **Robotron 300** entwickelt und gebaut; vgl. Bild E 9. Sie wurde 1966 in Moskau anläßlich der internationalen Fachausstellung „interorg-technica 66" vorgestellt und fand hier vor der gesamten Weltöffentlichkeit große Beachtung. Mit der Entwicklung dieser Datenverarbeitungsanlage haben Wissenschaftler, Techniker und Werktätige unserer Republik eine wissenschaftliche Leistung vollbracht, die zur Erhöhung des internationalen Ansehens unserer Republik beigetragen hat.

E 9

Der Bau der Anlage ist ein Beispiel dafür, wie die Werktätigen der DDR durch ihre schöpferische Arbeit unseren Staat zu einem der leistungsfähigsten Industriestaaten der Welt gemacht haben.
Der Hauptspeicher der Anlage Robotron 300 kann etwa 40000 Zeichen speichern. Außerdem kann diese Anlage gleichzeitig zwei und mehr als zwei Programme unabhängig voneinander bearbeiten, so daß ihre Arbeitsgeschwindigkeit bei 5000 Operationen je Sekunde liegt. Die Anlage ist volltransistorisiert. Die Eingabewerte können sowohl Buchstaben als auch Zahlen sein. Die Anlage ist universell einsetzbar und so konstruiert, daß eine Erweiterung entsprechend den steigenden Anforderungen jederzeit möglich ist.
Die wissenschaftlich-technische Revolution treibt die Entwicklung von Wissenschaft und Technik ständig voran. Der Umfang der Produktion vergrößert sich. Durch die ständig zunehmende Konzentration der Produktion wird die Planung und Leitung in den Betrieben und den staatlichen Organen komplizierter. Daher gewinnen Maschinen zur Verarbeitung von Informationen eine immer größere Bedeutung. Der umfassende und zweckmäßige Einsatz von Rechenautomaten bzw. Datenverarbeitungsanlagen ist zur unabdingbaren Notwendigkeit geworden, um einen möglichst hohen wissenschaftlich-technischen Stand in allen Bereichen unserer Volkswirtschaft zu erzielen. So wird die Anwendung der elektronischen Datenverarbeitung zu einem wesentlichen Faktor beim weiteren Aufbau des Sozialismus in der Deutschen Demokratischen Republik.
Von der Fähigkeit, die zunehmende Komplexität gesellschaftlicher und insbesondere ökonomischer Prozesse mit Hilfe neuer Methoden zu meistern, hängt in entscheidendem Maße unsere ökonomische Entwicklung ab.
Dieser revolutionäre Prozeß verändert die Arbeits- und Lebensbedingungen vieler Menschen und stellt hohe Anforderungen an ihre Qualifizierung. Die Lösung der neuen und höheren Aufgaben ist nicht nur eine wissenschaftlich-technische Angelegenheit, sondern wird wiederum beweisen, daß die sozialistische Gesellschaftsordnung der kapitalistischen überlegen ist.

Aufgaben

a) Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen

a

1. Geben Sie jeweils alle Elemente der folgenden Mengen an!

   a) Die Menge aller zweistelligen durch 11 teilbaren natürlichen Zahlen

   b) Die Menge aller Primzahlen zwischen 50 und 100

   c) Die Menge der geraden Primzahlen

2. Geben Sie von folgenden Mengen jeweils zehn Elemente an!

   a) Die Menge der natürlichen Zahlen, die bei der Division mit Rest durch 11 den Rest 6 lassen

   b) Die Menge der Kubikzahlen

   c) Die Menge der gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$ $(n \in N)$ mit $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$

3. Welche Menge erhält man jeweils zu den folgenden Beschreibungen?

   a) „x ist ein Bruch, der durch Erweitern aus dem Bruch $\frac{1}{2}$ entsteht."
   b) „x ist eine natürliche Zahl mit $x \mid 72$."
   c) „x ist eine natürliche Zahl mit $x \mid 72$ und $x \mid 84$."
   d) „Es seien A und B zwei feste Punkte einer Ebene und X ein Punkt dieser Ebene mit $\sphericalangle AXB = 90°$."

Geben Sie die Lösungsmengen für folgende Gleichungen im Bereich der rationalen Zahlen an!

4. a) $3x + 7 = 0$
   b) $x^2 + 1 = 0$

5. a) $x^2 - 9 = 0$
   b) $2x + 5 = 3x + 5 - x$

Stellen Sie fest, ob die folgenden Mengen A und B jeweils gleich sind!

6. a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
   $B = \{6; 3; 4; 2; 1; 5\}$

   b) A sei die Menge der Primzahlen zwischen 30 und 40, B sei die Menge der natürlichen Zahlen zwischen 30 und 40, die bei der Division mit Rest durch 6 den Rest 1 lassen.

7. a) A sei die Menge der geraden Primzahlen, B sei die Lösungsmenge der Gleichung $4x - 8 = 0$.

   b) A sei die Menge der Primzahlen zwischen 10 und 20, B sei die Menge der ungeraden Zahlen zwischen 10 und 20.

8. Warum ist die Menge der Schulklassen Ihrer Schule nicht gleich der Menge aller Schüler Ihrer Schule?

Definieren Sie mit Hilfe des Mengenbegriffs folgende Punktmengen!

9. Die Mittelsenkrechte einer gegebenen Strecke $\overline{AB}$

10. Die Winkelhalbierende eines gegebenen Winkels (a, b)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Beziehungen richtig bzw. falsch sind! Begründen Sie Ihre Antwort!

11. a) $\{3\} \subset \{5; 3; 4\}$
    b) $\{3\} \in \{5; 3; 4\}$

12. a) $3 \in \{5; 3; 4\}$
    b) $3 \subset \{5; 3; 4\}$

13. Geben Sie von den in den Aufgaben 1a) und 1b) gegebenen Mengen jeweils zehn verschiedene Teilmengen an!

14. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
    Begründen Sie Ihre Antwort!

    a) Es gibt (mindestens) eine natürliche Zahl x mit $3 < x < 10$.
    b) Es gibt (mindestens) eine natürliche Zahl x mit $3 + x = 1$.
    c) Es gibt (mindestens) drei natürliche Zahlen x mit $3 < x < 10$.

d) Es gibt (mindestens) drei natürliche Zahlen n mit $n^2 < 4n$.
e) Es gibt genau drei natürliche Zahlen n mit $n^2 < 4n$.
f) Es gibt höchstens eine durch 7 teilbare Primzahl.
g) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es höchstens einen Vorgänger.
h) Es gibt genau ein Rechteck mit dem Umfang $u = 10$ m.
i) Es gibt genau ein Quadrat mit dem Umfang $u = 10$ m.
k) Es gibt höchstens einen Punkt, in dem sich zwei verschiedene gegebene Geraden schneiden.
l) Es gibt höchstens ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse 5 cm lang ist.
m) Es gibt genau einen Punkt, in dem sich die Seitenhalbierenden eines gegebenen Dreiecks schneiden.

a

---

1. Beweisen Sie folgende Aussage!
Für beliebige Mengen A, B und C gilt: Wenn $A \subset B$ und $B \subset C$, so $A \subset C$.

2. Stellen Sie fest, ob es eine eineindeutige Abbildung von der Menge A auf die Menge B gibt!

a) $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; \ldots\}$;
$B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; \ldots\}$

b) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots\}$;
$B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \ldots\}$

---

15. Welche der folgenden Gleichungen sind im Bereich der natürlichen Zahlen lösbar?

a) $7 + x = 35$ b) $7 + x = 4$
c) $3 \cdot x = 21$ d) $3 \cdot x = 17$
e) $0 + x = 0$ f) $0 \cdot x = 0$

16. Zerlegen Sie die Zahlen 24; 2520; 4719; 863 in Primfaktoren!

17. Erweitern Sie den Bruch $\frac{2}{3}$ mit allen natürlichen Zahlen von 1 bis 10!

Kürzen Sie folgende Brüche, bis Sie jeweils einen Bruch erhalten, dessen Zähler und Nenner teilerfremd sind!

18. $\frac{7}{35}$; $\frac{22}{77}$; $\frac{60}{105}$

19. $\frac{273}{357}$; $\frac{23}{207}$; $\frac{99}{135}$

20. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ $(a, b, c, d \in N; b \neq 0; d \neq 0)$ ein und dieselbe gebrochene Zahl darstellen?

Geben Sie die folgenden gebrochenen Zahlen durch Dezimalbrüche an!

21. $\frac{3}{25}$; $\frac{12}{3}$; $\frac{1}{9}$

22. $\frac{7}{12}$; $\frac{25}{7}$; $\frac{9}{13}$

23. Begründen Sie die folgenden Aussagen!
Es ist $\frac{1}{6} \neq 0{,}16666$; $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$.

Ordnen Sie die folgenden gebrochenen Zahlen der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

24. $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{14}$; $\frac{18}{25}$; $\frac{7}{30}$; $\frac{5}{9}$

25. $4{,}66$; $\frac{117}{25}$; $4{,}67$; $\frac{14}{3}$; $\frac{23}{6}$; $4{,}\overline{6}$

26. Gibt es eine gebrochene Zahl, die kleiner ist als alle Zahlen der Menge $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \ldots\right\}$?

a

Stellen Sie fest, ob die folgenden Gleichungen in der Menge der gebrochenen Zahlen eine Lösung haben!

27. a) $\frac{5}{6} + x = \frac{7}{8}$

b) $0,\overline{42} + x = 0,\overline{41}$

c) $\frac{5}{6} \cdot x = \frac{7}{8}$

28. a) $\frac{3}{7} + x = \frac{2}{9}$

b) $3,36 + x = 3,3\overline{6}$

c) $\frac{3}{7} \cdot x = \frac{2}{9}$

Übertragen Sie die folgenden Tabellen in Ihr Heft und vervollständigen Sie!

29.

a	b	$a+b$	$a-b$	$a \cdot b$	$a : b$	$2a$	$3b$	$2a+3b$
$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$							
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$							
$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{9}$							
$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{5}$							
0,36	$\frac{1}{3}$							
2,34	0,15							

30.

a	b	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$5a$	$b:3$	$a:b$	$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$	$5a+(b:3)$
$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{7}$							
$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$							
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$							
0,4	$\frac{1}{6}$							
1,25	1,6							
5	$\frac{27}{8}$							

---

3. Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $0 < a < b$.

Ordnen Sie die Zahlen 1, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ der Größe nach! Welche von den Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ liegt näher an der Zahl 1?

4. Geben Sie fünf Zahlen an, die größer sind als alle Dezimalbrüche der Menge $\{0,5;\ 0,55;\ 0,555;\ 0,5555;\ \ldots\}$! Gibt es unter denjenigen Zahlen, die größer sind als alle Elemente der genannten Menge, eine kleinste Zahl? Begründen Sie Ihre Antwort!

---

a

Ordnen Sie die folgenden rationalen Zahlen der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

31. $+1;\ -\frac{7}{8};\ +0,\overline{3};\ +\frac{5}{6};\ +\frac{3}{5};\ -\frac{7}{6}$ **32.** $-1,3;\ 0,8;\ -\frac{6}{5};\ 0,\overline{8};\ -1,\overline{3};\ +0,84$

Übertragen Sie die folgenden Tabellen in Ihr Heft und vervollständigen Sie!

33.

a	b	$-a$	$\lvert a\rvert$	$\frac{1}{a}$	$\left\lvert\frac{1}{a}\right\rvert$	Ist $a < b$?	Ist $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$?
7	-5						
-3	$-\frac{1}{2}$						
$-0,6$	$-1,2$						
$+3,4$	$-5,8$						

34.

a	b	$a+b$	$a-b$	$b-a$	$a \cdot b$	$a:b$	$b:a$	$3a-5b$	$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert$
$+5$	$+7$								
$+6$	-3								
-3	-5								
0	-4								
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$								
$-\frac{2}{5}$	$+0,6$								
$-3,51$	$-0,15$								

35. Berechnen Sie!

a) $(+6)+(-7)-(-1)$ **b)** $(+1,3)-(-0,8)+(-5,6)$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{9}\right):\left(-\frac{5}{6}\right)$

36. Konstruieren Sie auf der Zahlengeraden (mit Hilfe des Strahlensatzes) die Bildpunkte der Zahlen $\frac{3}{5};\ \frac{1}{7};\ -\frac{3}{5}$ und $-\frac{1}{7}$!

37. Auf der Zahlengeraden sind die Bildpunkte zweier beliebiger positiver rationaler Zahlen a und b gegeben. Konstruieren Sie die Bildpunkte der Zahlen $a+b$ und $a-b$! Veranschaulichen Sie: $a+b=b+a$!

38. Geben Sie zehn verschiedene rationale Zahlen an, die zwischen den Zahlen **a)** $-0,1$ und $+0,1$; **b)** $0,250$ und $0,251$; **c)** $-\frac{1}{5}$ und $-\frac{1}{6}$ liegen!

a

39. Geben Sie die Menge derjenigen rationalen Zahlen x an, für die die folgende Festlegung gilt!

a) $2{,}5 \leqq x \leqq 7$ und $4 \leqq x \leqq 9$

b) $1 \leqq x \leqq 2$ und $1{,}4 \leqq x \leqq 1{,}5$ und $1{,}41 \leqq x \leqq 1{,}42$

Veranschaulichen Sie die Mengen jeweils auf der Zahlengeraden!

---

5. Beweisen Sie (indirekt) unter Verwendung der Monotoniegesetze folgende Aussagen! Sind a, b und c beliebige rationale Zahlen, so gilt:

a) Wenn $a + c = b + c$, so $a = b$.

b) Wenn $a + c < b + c$, so $a < b$.

c) Wenn $a \cdot c = b \cdot c$ und $c \neq 0$, so $a = b$.

d) Wenn $a \cdot c < b \cdot c$ und $c > 0$, so $a < b$.

---

40. Gegeben seien die folgenden rationalen Zahlen.

a) $x = 7{,}38$ und $y = -0{,}2\overline{51}$

b) $x = 25{,}23$ und $y = -0{,}\overline{16}$

Berechnen Sie $x + y$; $x - y$; $x \cdot y$ und $x : y$, so daß der Fehler nicht größer als 0,0001 ist!

---

6. Beweisen Sie, daß es keine natürlichen Zahlen a und n gibt, so daß $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ gilt!

Hinweis: Jede natürliche Zahl läßt sich auf genau eine Weise in Primfaktoren zerlegen.

---

41. Es sei n die natürliche Zahl mit $n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$.
Geben Sie die Primzahlzerlegungen der Zahlen n^2, n^3 und n^4 an!

42. Beweisen Sie, daß die Gleichungen $x^2 = 3$ und $x^2 = \frac{4}{7}$ keine rationalen Lösungen haben!

43. Beweisen Sie, daß die Kantenlänge eines Würfels mit dem Volumen $2\,\mathrm{m}^3$ keine rationale Maßzahl hat!

44. Wenden Sie die gleiche Beweisführung an, um festzustellen, ob die Gleichung $x^2 = 4$ eine rationale Lösung hat oder nicht!

45. Beweisen Sie, daß man auf der Zahlengeraden einen irrationalen Punkt erhält, wenn man die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seitenlänge zwei Längeneinheiten beträgt, vom Nullpunkt aus abträgt!

---

7. Es sei p eine beliebige Primzahl. Beweisen Sie, daß es keine rationale Zahl x mit $x^2 = p$ gibt!

---

46. Numerieren Sie die bei der Teilung Z_n aus dem Intervall $\langle a; b\rangle$ entstehenden Teilintervalle nach dem in der Lerneinheit A 7 geschilderten Verfahren für folgende Beispiele!

$\langle a; b\rangle$	$\langle 7; 8\rangle$	$\langle 0{,}1; 0{,}2\rangle$	$\langle 1{,}59; 1{,}60\rangle$	$\langle 4{,}705; 4{,}706\rangle$	$\langle 0; 0{,}01\rangle$
Z_n	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_3

47. Beschreiben Sie die Lage des in Aufgabe 45 gegebenen irrationalen Punktes auf der Zahlengeraden durch eine Folge von natürlichen Zahlen a_n mit $0 \leqq a_n \leqq 9$! Geben Sie die ersten sechs Folgenglieder an und erläutern Sie die Bedeutung dieser Folgenglieder!

48. Geben Sie die ersten zehn Intervalle einer durch fortgesetzte Zehnteilung entstehenden Schachtelung an, in denen der durch die Folge 11; 1; 4; 9; 1; 6; 2; 5; 3; 6; 4; 9; ... gekennzeichnete Punkt liegt!

49. Beschreiben Sie die Lage des rationalen Punktes $\frac{71}{6}$ auf der Zahlengeraden durch eine Folge natürlicher Zahlen!

50. Welcher Punkt der Zahlengeraden wird durch die Folge 0,2222... beschrieben? Geben Sie die ersten zehn Intervalle einer durch fortgesetzte Zehnteilung entstehenden Schachtelung an, in denen der betreffende Punkt liegt!

a

51. Welcher Dezimalbruch ist dem rationalen Punkt $\frac{1}{37}$ eineindeutig zugeordnet?

52. Spiegeln Sie den in Aufgabe 45 gegebenen Punkt am Nullpunkt! Geben Sie die ersten Stellen des Dezimalbruches an, der dem entstehenden Punkt eineindeutig zugeordnet ist!

53. Geben Sie die ersten zehn Dezimalstellen des Dezimalbruches an, der dem rationalen Punkt $-\frac{1}{7}$ eineindeutig zugeordnet ist!

Vergleichen Sie die reellen Zahlen a und b in den folgenden Aufgaben miteinander! Setzen Sie jeweils das Zeichen „<" bzw. „>"!

54. a) $a = 5{,}7380251\ldots$; $b = 5{,}738\,1\overline{0}$

b) $a = 15{,}121\,3141516\ldots$;
$b = 15{,}121\,314151515\ldots$

c) $a = 2{,}2360679\overline{8}$; $b = \sqrt{5}$

d) $a = -\frac{22}{7}$; $b = -\pi$

55. a) $a = 1{,}112112112\ldots$;
$b = 1{,}112111211112\ldots$

b) $a = -\sqrt{2}$; $b = -1{,}41421\overline{4}$

c) $a = 3{,}141414\ldots$; $b = \pi$

d) $a = -4{,}154154415444\ldots$;
$b = -4{,}154154414444\ldots$

56. Es ist $\pi = 3{,}141\,5926535\ldots$
Geben Sie Näherungswerte für π auf 2; 3; 4 und 5 Dezimalstellen genau an!

57. Für die Zahl $\sqrt{2}$ sind zwei rationale Zahlen r und s mit $r < \sqrt{2} < s$ und $s - r = \frac{1}{10^5}$ anzugeben!

Berechnen Sie die folgenden Summen bzw. Produkte jeweils auf sechs Dezimalstellen genau! ($\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$)

58. a) $\sqrt{2} + \frac{1}{3}$ b) $\sqrt{5} + 5{,}010010001\ldots$
c) $3 \cdot \sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

59. a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$
c) $\pi + \sqrt{2}$ d) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

60. Kann die Summe (das Produkt) zweier irrationaler Zahlen eine rationale Zahl sein?

61. Berechnen Sie den Umfang des Kreises mit dem Radius $r = 12{,}423$ m mit fünf geltenden Ziffern!

62. Berechnen Sie die Länge der Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten $a = 2{,}00$ cm und $b = 5{,}00$ cm mit drei geltenden Ziffern!

63. Geben Sie einen rationalen Näherungswert für die Lösung der Gleichung $x^2 = 8$ mit einer Genauigkeit von drei Dezimalstellen an!

64. Berechnen Sie folgende Wurzeln! Begründen Sie Ihre Ergebnisse wie im Beispiel A 12!

$\sqrt{25600}$; $\sqrt{490000}$; $\sqrt{0{,}81}$; $\sqrt[3]{27}$;
$\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[4]{0{,}0081}$; $\sqrt[4]{256}$;
$\sqrt[5]{243}$; $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt[4]{(-5)^4}$; $\sqrt[6]{a^6}$

65. Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes Näherungswerte für folgende Wurzeln! Machen Sie vor der Einstellung eine Überschlagsrechnung!

$\sqrt{23}$; $\sqrt{0{,}38}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{60}$; $\sqrt{600}$; $\sqrt{0{,}6}$

---

8. Jemand rechnet folgendermaßen.

$x = \sqrt{a^2 - 2a + 1} - a = \sqrt{(a-1)^2} - a = a - 1 - a = -1$

Für $a = 0$ erhält man jedoch $x = 1$. Wo steckt der Fehler?

---

a

Beschreiben Sie die folgenden Mengen natürlicher Zahlen mit Hilfe von Variablen! Formulieren Sie jeweils das Ergebnis in Worten!

Beispiel: $M = \{2; 7; 12; 17; 22; \ldots\}$

Lösung: $5n + 2$ mit $n \in N$

Die Menge M enthält alle natürlichen Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 2 lassen.

66. **a)** $M_1 = \{0; 3; 6; \ldots; 15\}$
b) $M_2 = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$
c) $M_3 = \{2; 5; 8; 11; \ldots\}$
d) $M_4 = \{0; 1; 4; 9; 16; \ldots\}$
e) $M_5 = \{2; 4; 8; 16; 32; \ldots\}$
f) $M_6 = \{3; 7; 11; 15; 19; 23\}$

67. **a)** $M_1 = \{0; 6; 12; \ldots; 36\}$
b) $M_2 = \{1; 3; 5; 9\}$
c) $M_3 = \{2; 6; 10; 14; \ldots\}$
d) $M_4 = \{0; 1; 8; 27; 64; \ldots\}$
e) $M_5 = \{3; 9; 27; 81; \ldots\}$
f) $M_6 = \{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$

Schreiben Sie die Elemente der folgenden Mengen auf, die jeweils mit Hilfe von Variablen und ihres Grundbereiches dargestellt sind!

Beispiel: $x^2 - 2x$ mit $x \in \{0; 1; 3; 8\}$

Lösung: $M = \{0; -1; 3; 48\}$

68. **a)** $2n + 1$ mit $n \in \{0; 1; 2; \ldots; 10\}$
b) $\frac{1}{n}$ mit $n \in \{1; 10; 100; 1000\}$
c) $3 - 2x$ mit $x \in \{2; 1; 0; -1; -2\}$
d) $5x - 2y$ mit $x \in \{1; 5; 10\}$ und $y \in \{0; 1\}$

69. **a)** $3n + 2$ mit $n \in \{0; 1; 2; \ldots; 10\}$
b) $\frac{1}{2n}$ mit $n \in \{1; 5; 10; 50; 100\}$
c) $2x - 3$ mit $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
d) $2(x - y)$ mit $x \in \{8; 9; 10\}$ und $y \in \{5; 8\}$

70. **a)** Deuten Sie $\frac{a}{b}$ als Durchschnittsgeschwindigkeit, als Durchschnittsertrag einer landwirtschaftlichen Kultur, als Leistung, als Druck, als Wirkungsgrad, indem Sie die Variablen entsprechend konkretisieren!
b) Geben Sie entsprechende Deutungen für $\frac{a \cdot b}{c}$ an!

Ermitteln Sie die natürlichen Zahlen x, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen zu wahren Aussagen werden! Lösen Sie die Aufgaben auch, wenn x dem Bereich der gebrochenen, der rationalen bzw. der reellen Zahlen angehört!

71. **a)** $4x < 12$ **b)** $(x + 2)(x - 1) = 0$
c) $3 + x = x + 3$ **d)** $3 + x = x - 3$
e) $x^2 = 2$ **f)** $x^2 < x$

72. **a)** $5x < 10$ **b)** $(x + 3)(x - 2) = 0$
c) $35 + x = x + 35$ **d)** $4 + x = x - 4$
e) $x^2 = 3$ **f)** $x^2 = x$

73. Bilden Sie das arithmetische und das geometrische Mittel der beiden reellen Zahlen a^2 und b^2!

Für welche Zahlen sind die folgenden Terme im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert, wenn als Grundbereich der Variablen nacheinander die natürlichen, die gebrochenen, die rationalen, die reellen Zahlen gewählt werden?

74. **a)** $\frac{3x - 4}{4 - 6x}$ **b)** $\frac{2}{a} + \frac{18}{6 - a}$
c) $\sqrt{18 - b}$ **d)** $\frac{18}{y(y^2 - 9)}$

75. **a)** $\frac{p}{q}$ **b)** $\frac{1}{m + 9} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$
c) $\frac{12x(x^2 - 4)}{x^2 - 16}$ **d)** $\sqrt{z^2 - 25}$

---

9. In einer Klasse haben 11 Schüler ein Fahrrad und 12 Schüler eine Luftmatratze. Was kann man über die Anzahl der Schüler in dieser Klasse aussagen?

10. In einer Klasse sind 11 Rettungsschwimmer und zwei Nichtschwimmer. Was kann man über die Anzahl der Schüler dieser Klasse aussagen?

11. Geben Sie drei natürliche Zahlen an, die sowohl der Menge der Quadratzahlen als auch der Menge der Kubikzahlen angehören!

12. Welche Eigenschaften haben zwei gebrochene Zahlen,
a) deren Produkt 1,
b) deren Quotient 1 ist?

13. Wie ändert sich die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, wenn sein Umfang
a) verdoppelt, **b)** auf ein Viertel verkürzt, **c)** um ein Drittel verkürzt wird?

a

Schreiben Sie die folgenden Terme in eine möglichst einfache Form um!

76. a) $a - (2a - 8b) - (6b + 4a - 2)$

b) $a^3 + (30^3 - 25a^3) - (10^3 + 25a^2 - a)$

c) $\frac{3}{2}r + \left(-\frac{2}{3}r + \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{r}{3} + \frac{3}{2}a\right)$

d) $2{,}9m - (0{,}8n + 0{,}1m - 2) + (1{,}6n - m)$

77. a) $15 - (3x - 19y) - (3 - 4x - 2y)$

b) $15b^2 - (120^2 - 3b^2)$
$+ (800^2 + 70b^2 - 40b)$

c) $\frac{4}{5}a - \left(\frac{5}{4}a - \frac{b}{5}\right) + \left(\frac{a}{4} - \frac{4}{5}b\right)$

d) $(0{,}6r - 5{,}7s + 3) - (2{,}4r + 2{,}7s - 3)$

78. Gegeben sind die Summen

$S_1 = 3p - 4q + 5r;$

$S_2 = -2p + 3q - 4r - 1;$

$S_3 = \frac{1}{3}p - \frac{1}{4}q + \frac{r}{3} + \frac{2}{3}.$

79. Gegeben sind die Summen

$S_1 = p^3 - q^2 - 3r^3 - 7;$

$S_2 = -3p^3 + 4q^2 - 5r^4;$

$S_3 = \frac{3}{2}p^3 - \frac{5}{7}q + \frac{5}{4}r^4 - \frac{3}{7}.$

Bilden Sie die folgenden neuen Summen! Fassen Sie jeweils soweit wie möglich zusammen!

a) $S_1 + S_2$ **b)** $S_2 - S_1$ **c)** $S_1 - S_2$ **d)** $S_1 + S_2 + S_3$ **e)** $S_1 - S_2 - S_3$
f) $S_3 - S_1 + S_2$ **g)** $S_2 + S_3$ **h)** $S_3 - S_2$ **i)** $S_1 - S_3$ **k)** $S_1 + S_2 - S_3$
l) $S_1 - (S_2 - S_3)$ **m)** $S_2 - (S_1 + S_3)$ **n)** $S_3 + (S_1 - S_2)$

Untersuchen Sie, ob für alle reellen Zahlen x, y, z bzw. a, b, c die folgenden Gleichungen gelten!

80. a) $(x - y - z) - (y - z - x)$
$- (z - x - y) = 3x - y - z$

b) $(x - y) - (y - z) + (z - 2x)$
$- (-x - 2y + 2z) = 0$

c) $5x + 4y - z - [7x - 3y - (2x - 7y)]$
$= -z$

81. a) $(a + b - c) - (-b - c - a)$
$- (c - a + b) = 3a + b - c$

b) $(a - b) - (b - c) + (c - a)$
$- (2c - 2b - a) = a$

c) $(a - c) - [(b + a) - (2a - b) + c] + 2b$
$= 2a - c$

Formen Sie die folgenden Produkte in Summen um!

82. a) $mn[1 + (k - l)]$

b) $3(a - 5b) \cdot 2ab$

c) $\frac{2}{3}x\left(\frac{9}{10}ax - \frac{6}{7}\right)$

83. a) $3x^2[8y - 4x(2 - 3y)]$

b) $5a(a - 5b) \cdot 3b$

c) $\left(\frac{13}{14} + \frac{6}{7}x^2\right) \cdot \left(-\frac{7}{6}x^2\right)$

84. Unter welcher Bedingung ist das Produkt in Aufgabe 82a) gleich mn?

85. Unter welcher Bedingung ist das Produkt in Aufgabe 83b) gleich 0?

a

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen!

86. a) $7a(2a-3b)-2b(a+5b)$

b) $\frac{3}{4}\left(\frac{7}{9}r-\frac{s}{5}\right)+\frac{2}{3}\left(4\frac{1}{2}-6r\right)$

c) $0{,}8x(1{,}2a+0{,}1)-1{,}1x\,(10{,}1-0{,}9a)$

d) $a(b-c)-b(a+c)+c(a-b)$

87. a) $9x(6-11y)-(3x+7y)\,4x$

b) $\frac{7}{8}\left(\frac{p}{14}-\frac{16}{21}\right)+3\frac{1}{2}\left(2p-\frac{q}{7}\right)$

c) $0{,}4a(0{,}4x-0{,}1)-0{,}3a\,(25+0{,}3x)$

d) $x(y+z)-y(x-z)+z(x+y)$

Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus! Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie wieder ausmultiplizieren!

88. a) $v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ b) $l_0+l_0\alpha\cdot\Delta t$

c) $\frac{h}{3}A_1+\frac{h}{3}\sqrt{A_1A_2}+\frac{h}{3}A_2$

d) $\pi r_1s+\pi r_2s$

e) $\pi h^2r-\frac{\pi}{3}h^3$ f) $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$

89. a) $v_0t+\frac{1}{2}gt^2$ b) $V_0+V_0\gamma\cdot\Delta t$

c) $\frac{\pi}{3}hr_1^2+\frac{1}{3}\pi hr_1r_2+\frac{\pi}{3}hr_2^2$

d) $\frac{\pi}{2}d_1s+\frac{1}{2}\pi d_2s$

e) $\pi\frac{d}{2}h^2-\frac{1}{3}\pi h^3$ f) n^2+n

90. a) $-4x+xy$ b) $\frac{2}{3}ab+2a$

c) $2ab+3abx-aby$

d) $9a^2b^2-6a^2b-3ab^2+12ab$

e) $-x-xy$

91. a) $-y+3xy$ b) $\frac{2}{5}x+2x$

c) $5rst-7rt+35rst^2$

d) $15xy^2-50x^2y-45xy+25x^2y^2$

e) $-a-a^2b$

92. a) $-28rs-77rt-84ru-91rv$

b) $\frac{4}{5}a^2b^2c^2-\frac{2}{5}a^4bc^2+\frac{6}{5}a^3b^2c-\frac{8}{5}a^2bc$

c) $0{,}24m^2n^2-0{,}64m^2n^3+0{,}8m^2n-48m^3n^2$

d) $15ab^2-18a^2b^2-33b^2$

e) $54m^2n^2-108mn-36m^2+180n^2$

93. a) $-45mn^2-15mn-135m^2n^2-105m^2n$

b) $\frac{5}{6}xy^2z^3-\frac{7}{6}x^3y^3z^3-\frac{2}{3}x^2y^2z^2+\frac{5}{6}x^2yz^3$

c) $1{,}2ab^3-24a^2b^2-0{,}6a^3b^3+0{,}36a^3b^2$

d) $18x^2y^2-27x^2y+12x^2$

e) $91r^2s-39rs+130rs^2-65r^2s^2$

94. Gegeben sind die Summen

$S_1=3c+d;\qquad S_2=6-5d$

$S_3=\frac{4}{7}c-\frac{2}{3}d;\quad S_4=-0{,}08-20c.$

95. Gegeben sind die Summen

$S_1=r+9s;\qquad S_2=-2r+11s;$

$S_3=\frac{5}{8}r-\frac{3}{4}s;\quad S_4=-50r-0{,}09.$

Berechnen Sie die folgenden Produkte! Fassen Sie soweit wie möglich zusammen!

a) $S_1\cdot S_2$ b) $S_1\cdot S_3$ c) $S_2\cdot S_3$ d) $S_2\cdot S_4$ e) $S_1\cdot S_4$

f) $S_2\cdot S_2$ g) $S_1\cdot S_2\cdot S_3$ h) $S_2\cdot S_3\cdot S_4$ i) $S_1\cdot S_1-S_1\cdot S_2$

k) $S_3\cdot S_3+S_1\cdot S_2$

Berechnen Sie!

96. a) $(a-b)\left(3x-\frac{2}{3}y\right)$

b) $\left(-a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}y-7x\right)$

c) $(3+x)(a-2b-c)$

97. a) $(1-y)\left(\frac{4}{5}a+b\right)$

b) $\left(\frac{2}{3}-a\right)\left(\frac{7}{9}x-2y\right)$

c) $(x-5y-z)(x+y)$

98. a) $(x + x^2 + x^3)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$ mit $x \neq 0$

b) $(x^2 - 2x + 5)(x - 1)$

c) $[u - (2b + a)] \cdot [b + (a - u)]$

d) $[5a - 4a(b + 2c)] \cdot [a + 9ab(5 + b)]$

99. a) $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\right)(2 - a - a^2)$ mit $a \neq 0$

b) $(x^2 - 2x - 4)(x + 1)$

c) $[x + (2y - z)] \cdot [5z - (3x + 4y)]$

d) $[7e - 12ef(e + 2f)] \cdot [4d + 2d(5d - ef)]$

Formen Sie die folgenden Summen durch Ausklammern in Produkte um!

100. a) $6ab + 2ac + 15b + 5c$

b) $4aq + 10bq - 2ap - 5bp$

c) $910ab - 70a^3b^3 - 39 + 3a^2b^2$

d) $15x + 5ax - 25bx - 6y - 2ay + 10by$

e) $8pq^2 - 40p^2q^2 + 88pq^3 - 56pq^2r$

101. a) $15y + 5z + 2xz + 6xy$

b) $10dg - 5dh - 2ch + 4cg$

c) $70a^3b^2 - 3a^2b + 910ab - 39$

d) $63x - 49ax + 9y - 7ay - 18z + 14az$

e) $6a^3b - 42ab^2 - 6ab + 36abc$

102. a) $(a - b)(3x - 2y) - (b - a)(4x - 3y) - (-a + b)(-7x + 5y)$

b) $3(2x - 5) - 5u(4y - 3) + 2u(2x - 5) + (4y - 3) + 3u(2x - 5) - 4(4y - 3)$

---

14. Der Quotient zweier rationaler Zahlen a und b sei **a)** 1, **b)** -1. Ermitteln Sie für jeden der beiden Fälle

α) die Summe, β) die Differenz,

γ) das Produkt dieser beiden rationalen Zahlen!

15. Das Produkt zweier rationaler Zahlen a und b sei **a)** 1, **b)** -1, **c)** 0. Ermitteln Sie in jedem Falle

α) die Summe $a + b$, β) die Differenz $a - b$, γ) den Quotienten $\frac{a}{b}$

dieser beiden Zahlen!

Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit die Aufgabe *15c*) immer lösbar ist?

---

103. Gegeben seien:

$$\frac{a+b}{a \cdot b};\ \frac{a}{b} + b;\ \frac{a+b}{b};\ \frac{a}{a+b};\ (a+b)\cdot a;\ a \cdot b;\ a + b;\ (a+b)(a-b);\ a^2 - b^2.$$

a) Geben Sie die jeweilige Struktur an!

Beispiel: $\frac{a \cdot b}{a + b}$ ist ein *Quotient* aus dem *Produkt* zweier Zahlen und der *Summe* dieser beiden Zahlen.

b) Beschreiben Sie die Reihenfolge der auszuführenden Rechenoperationen, wenn für die Variablen natürliche Zahlen eingesetzt werden!

Beschreiben Sie die folgenden mathematischen Strukturen!

104. a) $2a + (a + b)$ **b)** $a + b + c$

c) $a \cdot (b - c)$ **d)** $\frac{a}{b} + c$

e) $\frac{a}{b + c}$

105. a) $2a - (b + c)$ **b)** $a + b + 2c$

c) $(a - b) \cdot c$ **d)** $\frac{a + b}{c}$

e) $a + \frac{b}{c}$

106. a) $(2x + y)(x - y)$ **b)** $(2x + y)x - y$

c) $xy - (x + y)$

107. a) $(2x - y)(x + y)$ **b)** $(2x - y)x + y$

c) $2xy + (x - y)$

a

Formulieren Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Variablen a, b, c!

108. Bilden Sie

a) die Differenz aus dem Produkt zweier Zahlen und einer dritten Zahl;
b) die Summe aus einer Zahl und dem Quotienten zweier anderer Zahlen;
c) die Differenz aus einer Zahl und der Summe zweier anderer Zahlen;
d) das Produkt aus der Summe zweier Zahlen und einer dritten Zahl!

109. Bilden Sie

a) die Differenz aus einer Zahl und dem Produkt zweier anderer Zahlen;
b) die Summe aus dem Quotienten zweier Zahlen und einer dritten Zahl;
c) die Differenz aus einer Zahl und der Differenz zweier anderer Zahlen;
d) das Produkt aus einer Zahl und der Summe zweier anderer Zahlen!

Geben Sie die folgenden Angaben mit Hilfe von Variablen wieder!

110. a) Die Summe zweier Zahlen wird mit dem Doppelten einer dritten Zahl multipliziert.
b) Es ist das Produkt aus der dreifachen Differenz zweier Zahlen und der Summe dieser beiden Zahlen zu bilden.
c) Der vierte Teil einer Zahl, vermehrt um das Fünffache einer zweiten Zahl, wird mit der Differenz zweier anderer Zahlen multipliziert.

111. a) Die Summe aus dem Dreifachen einer Zahl und einer anderen Zahl wird mit dem Fünffachen einer dritten Zahl multipliziert.
b) Es ist das Produkt aus der Summe zweier Zahlen und der Differenz dieser beiden Zahlen zu bilden.
c) Die Differenz des Doppelten einer Zahl und der Hälfte einer zweiten Zahl und die erste Zahl bilden ein Produkt. Davon ist die erste Zahl zu subtrahieren.

---

16. Jede der drei Kanten a, b, c eines Quaders wird um die Länge d ($d < a$; $d < b$; $d < c$) in einem Fall verlängert und im anderen Fall verkürzt.
Ist, verglichen mit dem ursprünglichen Quader, die Volumenzunahme bei Verlängerung der Kanten oder die Volumenabnahme bei Verkürzung der Kanten größer?

Schreiben Sie die folgenden Produkte (Potenzen) als Summen! Wenden Sie dabei die binomischen Formeln an!

112. a) $(4 + a)^2$ b) $(b - 3)^2$ c) $(3x - 2y)^2$ d) $(15a + 20c)^2$ e) $(11r - 9t)^2$ f) $(8 + 9b)^2$

113. a) $(5 + z)^2$ b) $(s - 12)^2$ c) $(18x + 2y)^2$ d) $(5a + 4b)^2$ e) $(13r - 8s)^2$ f) $(30 - 25x)^2$

114. a) $(2x + y)(2x - y)$ b) $(12r + 0{,}9s)(12r - 0{,}9s)$ c) $(1{,}5a - 13b)(1{,}5a + 13b)$

115. a) $(b + 5c)(b - 5c)$ b) $(14x + 0{,}7y)(14x - 0{,}7y)$ c) $(1{,}1a - 1{,}2b)(1{,}1a + 1{,}2b)$

116. a) $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$ b) $(x - 0{,}4)^2$ c) $(x + 2)(x - 2)$ d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ e) $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ f) $(x + 2a)^2$ g) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$ h) $(x - 0{,}3s)^2$

117. a) $\left(x - \frac{4}{5}\right)^2$ b) $(x + 0{,}1)^2$ c) $(x + 7)(x - 7)$ d) $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$ e) $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2$ f) $(x + 3s)^2$ g) $(x + 1{,}6)^2$ h) $\left(x - \frac{9}{7}\right)^2$

118. a) $(0{,}1 - y)^2$ b) $(1{,}2mn - 1{,}1n^2)^2$ c) $\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{2}b\right)^2$ d) $\left(\frac{2}{5}a + 0{,}3\right)^2$ e) $(-5a + 0{,}2)^2$ f) $(2{,}5 + 0{,}5x)(2{,}5 - 0{,}5x)$

119. a) $(z - 0{,}08)^2$ b) $\left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}y\right)^2$ c) $\left(-\frac{6}{7} - 0{,}5e\right)^2$ d) $(-0{,}9a^2 + 9ab)^2$

e) $\left(0{,}2z + \frac{1}{2}\right)\left(0{,}2z - \frac{1}{2}\right)$ f) $\left(\frac{7}{8}p + \frac{18}{25}\right)^2$

Rechnen Sie möglichst vorteilhaft im Kopf!

120. a) 38^2 b) 71^2 c) $58 \cdot 62$ d) $104 \cdot 96$ e) 85^2 f) 18^2 g) 103^2 h) 87^2

121. a) 52^2 b) 35^2 c) $52 \cdot 48$ d) 57^2 e) $38 \cdot 62$ f) 76^2 g) 44^2 h) 99^2

Fassen Sie soweit wie möglich zusammen!

122. a) $(3x - 5)^2 - (9 - x)^2$

b) $(3x - 5)^2 + (-9 + x)^2$

123. a) $(2x + 3)^2 + (-4 + x)^2$

b) $(2x + 3)^2 - (4 - x)^2$

124. a) $\left(0{,}3a + \frac{1}{2}\right)^2 - (1{,}3a - 1{,}7)^2$

b) $(25 + 36b)^2 - (35 - 25b)^2 + (25 + 35b)(35b - 25)$

c) $(7 - 8y)^2 + (8 + 7y)^2 - (7 + 8y)^2 - (8 - 7y)^2$

125. a) $(3x - 4y)^2 + (4y + 3x)^2 - 2(3x - 4y)(3x + 4y)$

b) $36a^2 - (45ab - 49b^2) - (6a - 7b)^2$

c) $(0{,}3x - 0{,}2y)^2 - (0{,}2x + 0{,}3y)^2 + (0{,}3x - 0{,}2y)(0{,}2x + 0{,}3y)$

Schreiben Sie die folgenden Summen mit Hilfe der binomischen Formeln als Produkte!

126. a) $x^2 + 4x + 4$ b) $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ c) $x^2 + 6xy + 9y^2$ d) $16r^2 - 56rs + 49s^2$ e) $\frac{4}{9}a^2 - 0{,}09b^2$ f) $2{,}25x^4 - 484x^2$

127. a) $x^2 + 14x + 49$ b) $x^2 - x + \frac{1}{4}$ c) $4a^2 + 4ab + b^2$ d) $36a^2 - 60ab + 25b^2$ e) $10{,}24y^2 - 361y^4$ f) $0{,}04x^2 - \frac{16}{25}y^2$

128. a) $m^4 - 2m^2n^2 + n^4$ b) $0{,}25a^2 - rs + r^2$ c) $-p^2 + 2pq - q^2$ d) $1{,}44 - 4{,}8c + 4c^2$ e) $0{,}81m^2 - 0{,}54m + \frac{9}{100}$

129. a) $a^4 + 2a^2b + b^2$ b) $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$ c) $26n - 169 - n^2$ d) $9a^2 - 4{,}8ab + 0{,}64b^2$ e) $\frac{49}{100}m^2 - 0{,}84lm + 0{,}36l^2$

---

17. Berechnen Sie $(a + b)^n$ für $n \in \{2; 3; 4; 5\}$! Formulieren Sie aus den Ergebnissen eine Gesetzmäßigkeit für die Koeffizienten der Summanden und die Exponenten von a und b!

18. Zeigen Sie, daß das Quadrat einer ungeraden Zahl stets eine ungerade und das Quadrat einer geraden Zahl stets eine gerade Zahl ist!

19. Zeigen Sie, daß für $m \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$ die Beziehung $(1 + x)^m > 1 + mx$ gilt, wenn $x \neq 0$ und $x > -1$ ist!

Ermitteln Sie die quadratische Ergänzung! Schreiben Sie die entstandene Summe als Potenz!

130. a) $x^2 - 6x$ b) $x^2 + 3x$ c) $x^2 - \frac{x}{10}$ d) $x^2 + 100x$ e) $4a^2 + a$ f) $a^2 + 14{,}4ab$ g) $0{,}0225p^2 - 3p$ h) $81x^2 + 9x$

a

131. a) $x^2 - 5x$ b) $x^2 + 12x$ c) $x^2 - \frac{1}{2}x$ d) $x^2 + 1000x$

e) $1{,}44a^2 - ab$ f) $9x^2 + x$ g) $0{,}49r^2 - 4{,}2r$ h) $25y^2 - 25x \ (y \neq 0)$

132. a) $\frac{r^2}{16} + rx$ b) $a^2x^2 - 5x \ (a \neq 0)$

c) $x^2 + ax$ d) $m^4 - 2m^2n$

e) $4a^2 + 4a^2b$

133. a) $1{,}21x^2 + 22x$ b) $\frac{a^2}{9} + ab$

c) $a^2 + ab$ d) $r^4 + 2r^2s^2$

e) $9c^2 - 18c^2d$

Formen Sie die folgenden Summen so um, daß sie jeweils ein vollständiges Quadrat enthalten!

134. a) $x^2 + 2x + 5$ b) $x^2 - 2x - 5$

c) $x^2 + bx - c$ d) $x^2 - bx + c$

e) $a^2 + 2ab - b^2$ f) $25m^2 - 5mn + 5n^2$

g) $x^2 - x + 1{,}25$ h) $0{,}81 - 18x + 25x^2$

i) $x^2 + 7x - 10$ k) $x^2 - 15x - 0{,}25$

135. a) $x^2 + 8x - 3$ b) $x^2 - 8x + 3$

c) $x^2 - px + q$ d) $x^2 + px - q$

e) $x^2 + 2xy - y^2$ f) $4x^2 + 8xy + 8y^2$

g) $r^2 - 3r + 3{,}5$ h) $0{,}16 - 16x + 16x^2$

i) $x^2 - 7x + 0{,}25$ k) $x^2 + 9x - 0{,}75$

136. Wie heißt die kleinste Zahl, die die folgenden Terme jeweils bestimmen, wenn x eine reelle Zahl ist?

a) $(x + 5)(x - 5)$ b) $\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$

c) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$ d) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$

e) $x^2 - 18$ f) $(3x + 4)(3x - 4)$

137. Wie heißt die größte Zahl, die die folgenden Terme jeweils bestimmen, wenn x eine reelle Zahl ist?

a) $(5 - x)(5 + x)$ b) $\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4} - x\right)$

c) $\left(-x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$

d) $-3(2x + 3)(2x - 3)$

e) $(-3x + 4)(3x - 4)$ f) $19 - x^2$

138. Zeigen Sie, daß die folgenden Gleichungen im Bereich der reellen Zahlen gelten!

a) $(a + b)^2 = (-a - b)^2$ b) $(a - b)^2 = (b - a)^2$

Geben Sie an, ob es sich bei den folgenden Aufgaben um eine Summe, um eine Differenz oder um ein Produkt (Potenz) handelt! Formen Sie so um, daß in jedem Falle eine Summe entsteht! Fassen Sie zusammen!

139. a) $(3x + 0{,}2y) \cdot (3x - 0{,}2y)$

b) $3x + 0{,}2y \cdot 3x - 0{,}2y$

c) $3x + 0{,}2y \cdot (3x - 0{,}2y)$

d) $(3x + 0{,}2y) \cdot 3y - 0{,}2y^2$

e) $(3x + 0{,}2y)^2$ f) $3x + 0{,}2y^2$

g) $3x + (0{,}2y)^2$

h) $(3x - 0{,}2) \cdot y - y$

140. a) $\frac{3}{2}a - (0{,}1b)^2$

b) $(3a - 0{,}1b) \cdot (3a - 0{,}1b)$

c) $0{,}3a - 0{,}1b \cdot 0{,}3b + a$

d) $\frac{3}{2}a - 0{,}1b \cdot \left(\frac{3}{2}a + 0{,}1b\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}a - 0{,}1b\right)^2$ f) $0{,}1a - \frac{3}{2}b^2$

g) $(0{,}2 + 0{,}1a) \cdot a - a$

h) $\left(\frac{3}{2}a - 0{,}1b\right) \cdot b - b^2$

---

20. Bilden Sie aus den folgenden Summen (mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$) durch Hinzunahme eines weiteren Summanden jeweils ein vollständiges Quadrat!

Hinweis: Es gibt jeweils zwei Möglichkeiten: 1. Ergänzen des Summanden $2ab$; 2. Quadratische Ergänzung.

a) $196 + 25z^2$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{256}$ c) $-196 - 25z^2$ d) $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{81}$

e) $x^2y^2 + z^2$ f) $0{,}0144x^2 + y^2$ g) $0{,}81 + 0{,}04z^2$ h) $x^2 + 16y^2$

a

21. Schreiben Sie die folgenden Quadrate als Summen!

a) $(a+b+c)^2$ b) $(2x-3y+4z)^2$ c) $(-2x+3y-4z)^2$

22. Untersuchen Sie, ob alle reellen Zahlen x und y die folgenden Ungleichungen erfüllen!

a) $x^2 - 6x + 9 \geqq 0$ b) $x^2 + 8x + 17 > 0$ c) $-x^2 + 20x - 101 < 0$

d) $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geqq 0$ e) $\frac{x^2}{16} - 4x + 65 > 0$ f) $\frac{9x^2}{25} - x + \frac{25}{35} > 0$

23. Wie heißt die kleinste Zahl, die die folgenden Terme jeweils bestimmen?

a) $a^2 - 2ab - 4a + b^2 + 4b + 4\ (a, b \in P)$ b) $r^4 - 4r^3s + 6r^2s^2 - 4rs^3 + s^4\ (r, s \in P)$

c) $r^4 - 2r^2 + 2\ (r \in P)$

24. Beweisen Sie den folgenden Satz!
Das arithmetische Mittel zweier positiver reeller Zahlen ist mindestens gleich dem geometrischen Mittel dieser beiden Zahlen.

25. Die Länge a der Seite eines Quadrates wird gemessen. Die ermittelte Größe a sei mit einem Fehler Δa behaftet. Sodann wird der Flächeninhalt A des Quadrates nach der Formel $A = a^2$ berechnet.

a) Wie groß ist dann der Fehler ΔA beim Flächeninhalt?
b) Zeigen Sie, daß der prozentuale Fehler für den Flächeninhalt mindestens doppelt so groß wie der prozentuale Fehler für die Seitenlänge des Quadrates ist!

Ordnen Sie die folgenden gebrochenen Zahlen der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

141. a) $\frac{44}{55}; \frac{33}{44}; \frac{22}{55}; \frac{99}{100}; \frac{66}{77}; \frac{77}{88}$

b) $\frac{9}{51}; \frac{14}{85}; \frac{20}{102}$ c) $\frac{5}{8}; \frac{17}{24}; \frac{5}{6}$

142. a) $\frac{3}{4}; \frac{99}{100}; \frac{6}{9}; \frac{20}{25}; \frac{36}{42}; \frac{14}{16}$

b) $\frac{12}{68}; \frac{8}{34}; \frac{14}{85}$ c) $\frac{2}{3}; \frac{19}{51}; \frac{6}{17}$

Für welche natürlichen Zahlen n werden die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen zu wahren Aussagen?

143. a) $\frac{3}{7} < \frac{n}{56}$ b) $\frac{3}{7} = \frac{n}{56}$ c) $\frac{3}{10} > \frac{6}{n}$

144. a) $\frac{5}{8} < \frac{40}{n}$ b) $\frac{5}{8} = \frac{40}{n}$ c) $\frac{2}{5} > \frac{n}{15}$

Welches der drei Zeichen „<", „=", „>" gilt zwischen den folgenden Zahlenpaaren?

145. a) $\frac{35}{49}; \frac{15}{21}$ b) $\frac{27}{21}; \frac{49}{35}$ c) $\frac{10}{26}; \frac{12}{27}$

146. a) $\frac{3}{5}; \frac{30}{55}$ b) $\frac{15}{33}; \frac{14}{28}$ c) $\frac{5}{3}; \frac{15}{9}$

Erweitern Sie mit dem jeweils hinter dem Semikolon angegebenen Erweiterungsfaktor!

147. a) $\frac{7ab}{10c}$; $0{,}3bc$ b) $\frac{0{,}04x^2}{40y^2}$; $4xy$ c) $\frac{a+b}{17r}$; $5st$ d) $\frac{0{,}3}{4x-2y}$; $20a$

e) $\frac{x+y}{x-y}$; xy f) $\frac{2a+b}{y-2b}$; $a+2b$

a

148. a) $\frac{30b^2}{0{,}03a^2}$; $3ab$ **b)** $\frac{21xy}{25z}$; $0{,}1xyz$ **c)** $\frac{1{,}2}{5a-6b}$; $30b$ **d)** $\frac{3y+2x}{xy}$; $5xy$

e) $\frac{a-12ab}{a+12ab}$; $a-12ab$ **f)** $\frac{x-y}{x+y}$; xy

Erweitern Sie die folgenden Brüche so, daß sich der jeweils hinter dem Semikolon stehende Term als Nenner ergibt!

149. a) $\frac{15ab}{14bc}$; $112bc$ **b)** $\frac{a+b}{17r}$; $85rst$

c) $\frac{2ab}{a+b}$; a^2-b^2 **d)** $\frac{\frac{1}{2}}{p^2-\frac{q}{4}}$; $16p^2-4q$

e) $\frac{a-b}{4u-2v}$; $4u^2-4uv+v^2$

150. a) $\frac{3m}{15n}$; $10m^2n^2$ **b)** $\frac{13}{x+y}$; x^2-y^2

c) $\frac{x-y}{17xy}$; $85xy$ **d)** $\frac{4a-2b}{a+b}$; $4(a+b)^2$

e) $\frac{15}{11a-1}$; $121a^2-22a+1$

Kürzen Sie soweit wie möglich!

151. a) $\frac{242p^2}{33pq}$ **b)** $\frac{x^3}{x^5}$ **c)** $\frac{22ab+11a}{11a}$

d) $\frac{15a^2}{20b^2}$ **e)** $\frac{7a-14b}{a-2b}$ **f)** $\frac{x^3yz}{xz}$

g) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$

h) $\frac{27a^2b-18ab+63ab^2}{9ab}$

152. a) $\frac{182rs}{39r^2}$ **b)** $\frac{x^5}{x^3}$ **c)** $\frac{3a-12ab}{30a}$

d) $\frac{12a-6b}{4a-2b}$ **e)** $\frac{0{,}3xy^2}{30xy^2}$

f) $\frac{4-y^2}{4-4y+y^2}$

g) $\frac{54r^3s-105r^2s^2-7rs}{7rs}$ **h)** $\frac{mn}{m^2n^3}$

153. Schreiben Sie mit Hilfe von Variablen!

a) Der Quotient zweier Zahlen ist mit dem dreifachen Produkt dieser beiden Zahlen zu erweitern.

b) Kürzen Sie den Bruch, dessen Zähler das Produkt zweier Zahlen und dessen Nenner die Summe aus dem Quadrat der ersten Zahl und dem vierfachen Produkt beider Zahlen ist!

c) Erweitern Sie den Quotienten aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen mit dem Produkt zweier anderer Zahlen!

d) Kürzen Sie den Quotienten, der aus der Differenz des Fünffachen der dritten Potenz einer Zahl und dem Quadrat einer anderen Zahl und der Differenz der Quadrate dieser beiden Zahlen gebildet wird!

154. Die Summe $24xy-21y^2-3y$ ist durch folgende Divisoren zu dividieren.

a) 3 **b)** -3 **c)** $3y$ **d)** $-3y$

e) $10y$ **f)** xy

155. Die Summe $-a^2+2ab-6a^2b^2+3ab^2$ ist durch folgende Divisoren zu dividieren.

a) 2 **b)** a **c)** a^2 **d)** $4a^2$

e) a^2b **f)** $4a^2b^2$

Berechnen Sie!

156. a) $(ab^2c+a^2bc-abc^2+4abc):8abc$

b) $\frac{a^2b^2+ab^2-ab}{ab}$

c) $\frac{rst+2rs^2-4st^2+s}{-20s}$

d) $(10p^2q+12pq-4pq^2)\cdot\frac{1}{4pq}$

157. a) $(ax^2-a^2xy+ax^2+axy):2ax$

b) $\frac{m^2n+2mn+mn^2}{mn}$

c) $\frac{182r^2s^2-104rs}{-13rs}$

d) $(55x^2y^2-121x^2y+132xy^2)\cdot\frac{1}{11xy}$

158. a) $(0{,}88x^2y - 121xy + 2{,}2y^2) : 0{,}11x^2y^2$
b) $(45a^2b^3 + 9a^3b^2 - 2{,}7a^3b^3) : 90a^2b^3$
c) $(206rs - 600r - 0{,}36) : (-0{,}3rs)$

159. a) $(0{,}144 - 72xy^2 + 36x^2) : 0{,}36x^2$
b) $(40xy^2 - 6{,}4x^2y^2 + 8x^2) : 0{,}8x^2y^2$
c) $(526 - 96xy - 0{,}48y) : (-0{,}24y)$

160. Dividieren Sie die Summe $600m^3n^2r - 0{,}36m^2n^3r^2 - 7{,}2m^2r^3 + 144\,m^3n^3r^3$ jeweils durch einen der folgenden Divisoren!

a) $0{,}2\,mnr$ b) $20m^2n^2$ c) $1{,}2r^2$ d) $-24mn^2r$ e) $-4{,}8m^2nr^2$

161.* a) $(x^2 + 11x + 24) : (x + 8)$
b) $(c^3 - 8cd^2 + 8d^3) : (c - 2d)$
c) $(x^4 + x^3 + x^2 - 3) : (x - 1)$

162.* a) $(x^2 + 2{,}1x - 1) : (2x + 5)$
b) $(x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 11x + 20) : (x - 5)$
c) $(2a^2 + ab - b^2 + 3) : (a + b)$

Ermitteln Sie das k. g. V.!

163. a) 20; 35; 15 b) 25; 30; 40
c) 260; 390; 65 d) 195; 130; 110
e) 165; 440; 495

164. a) 21; 42; 210 b) 210; 126; 420
c) 105; 35; 175 d) 210; 315; 36
e) 60; 24; 48

Ermitteln Sie ein gemeinsames Vielfaches!

165. a) $abc;\ ab^2c;\ a^2bc^2$
b) $abc^2;\ a^2b^2c^2;\ ac^2$
c) $a^3b;\ ab^2c;\ ab^3$

166. a) $x^2yz;\ xy^2z;\ xyz^2$
b) $xyz;\ xy;\ xz$
c) $yz^3;\ xy^3z;\ xyz$

167. a) $r^3s^2t;\ r^2st^3$ b) $63m^2n;\ 21mn^2$
c) $25a^2b;\ 30ab;\ 40a^2b^2$

168. a) $rs^3t^2;\ r^2s^2t^2$ b) $2x;\ 3y;\ 5z$
c) $42m^2n^2;\ 84mn$

169. a) $x;\ y;\ x + y$ b) $21;\ 28a;\ 7 - a$
c) $a + b;\ a^2 - b^2;\ a^2 + 2ab + b^2$

170. a) $x;\ y;\ x - y$ b) $m + 4;\ m^2;\ mn$
c) $x - y;\ y^2 - x^2;\ x^2 - 2xy + y^2$

Vergleichen Sie jeweils die zwei Brüche der folgenden Paare von Brüchen miteinander! (Alle vorkommenden Variablen bedeuten natürliche von Null verschiedene Zahlen.)

171. a) $\frac{a}{b};\ \frac{2a}{3b}$ b) $\frac{a}{5ab};\ \frac{3b}{7b^2}$
c) $\frac{a+b}{a-b};\ \frac{a-b}{a+b}$ d) $\frac{2a+1}{4ab};\ \frac{1}{2b}$
e) $\frac{2}{c};\ \frac{c}{2}$
Unterscheiden Sie drei Fälle!

172. a) $\frac{x}{2y};\ \frac{11x}{22y}$ b) $\frac{rs}{3st};\ \frac{rst}{4st^2}$
c) $\frac{2x-y}{2x+y};\ \frac{2x+y}{2x-y}$ d) $\frac{xy}{ab};\ \frac{xy+z}{ab}$
e) $\frac{a}{b};\ \frac{b}{a}$
Unterscheiden Sie drei Fälle!

Formen Sie die folgenden Quotienten in Summen um!

173. a) $\frac{a^2b + ab^2 - a^2b^2}{ab}$ b) $\frac{a^2b + ab^2 - a^2b^2}{abc}$
c) $\frac{a^2 + 2cb + b^2}{ab}$ d) $\frac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{2x - 3y}$
e) $\frac{5s + r}{s}$ f) $\frac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{20x - 30y}$
g) $\frac{s - f}{sf}$ h) $\frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}$

174. a) $\frac{xy + x^2y + xy^2}{xy}$ b) $\frac{1 - 2xy + x^2y^2}{xy}$
c) $\frac{25 - 20x + x^2}{50x^2}$ d) $\frac{2s - t}{2t}$
e) $\frac{16r^2 - 40rs + 25s^2}{8r - 10s}$ f) $\frac{s + s'}{ss'}$
g) $\frac{49x^2 - 121y^2}{21x + 33y}$ h) $\frac{R_1 - R}{R_1R}$

a

Formen Sie die folgenden Summen in Quotienten um!

175. a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1$ b) $\frac{1}{15x}+\frac{1}{x^2y^2}$ c) $\frac{15a}{14bc}+\frac{7a}{112bc}$ d) $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}$ e) $\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}$ f) $\frac{1}{x^2}+x^2$

176. a) $\frac{1}{15a^2}+\frac{1}{20b^2}+30$ b) $\frac{2}{c}-\frac{c}{2}$ c) $\frac{1}{12y}+\frac{1}{30xy}$ d) $\frac{a}{b^2}+b^2$ e) $\frac{a+b}{17r}+\frac{ar-bs}{85rs}$ f) $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$

177. a) $\frac{c-3}{20c}-\frac{c-4}{25c}+\frac{c-5}{c}$ b) $\frac{5}{4m}-\frac{7}{6n}-\frac{9-m}{8mn}$ c) $\frac{n}{5}-\frac{n+r}{3r}+\frac{n-r}{2n}$

178. a) $\frac{x^2+xy}{7y}+\frac{xy-y^2}{5y}-\frac{x-y}{3}$ b) $\frac{7}{8rs}-\frac{5a}{6r^2}-\frac{r+5}{4s}$ c) $\frac{2s-t}{2t}-\frac{t-2s}{4s}+\frac{t+s}{5}$

179. a) $\frac{2x}{4y+5}-\frac{5x-1}{10y}-\frac{y-1}{8}$ b) $\frac{2u}{u-v}-\frac{3v}{u+v}+\frac{5}{u}$ c) $\frac{7y}{x^2+xy}-\frac{5x}{xy+y^2}+\frac{3}{xy}$ d) $\frac{4m+n}{(m-n)^2}+\frac{21}{m+n}-\frac{2m-5n}{(m+n)^2}-\frac{22m^3+29n^3}{m^2-n^2}$

180. a) $\frac{9}{m+n}-\frac{5}{m}+\frac{4}{n}$ b) $\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}+\frac{xy}{a}$ c) $\frac{7s-1}{15r-30t}+\frac{4s-11}{5r+10t}-\frac{18s+1}{2rt}$ d) $\frac{5y-7z}{2y^3+2y^2z}-\frac{14y+9z}{3yz^2-3z^3}+\frac{2y^2-z^2}{4y^2z+4yz^2}-\frac{13z^2-11y^2}{6y^3z-6yz^3}$

Zeigen Sie, daß folgende Gleichungen gelten!

181. a) $\frac{6s-3rs}{5s}-\frac{12+4r}{10}=-r$ b) $\frac{4m^2-9}{4m^2-12m+9}=\frac{4m^2+12m+9}{4m^2-9}$ c) $\frac{p^2+p}{p}-p=1$

182. a) $\frac{a-bx}{b}+x=\frac{a}{b}$ b) $\frac{x}{y}-\frac{xy+y^2z}{y^2}=-z$ c) $p\left(1-\frac{1}{p}\right)+1=p$

---

26. Es seien a, b, c, d natürliche Zahlen mit $b \neq 0, d \neq 0$. Vergleichen Sie die beiden Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ miteinander! Stellen Sie die zusätzlichen Bedingungen für a, b, c, d fest, damit die folgenden Ungleichungen gelten!

a) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ b) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ c) $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

27. Es seien a und b natürliche Zahlen mit $b \neq 0$, $a > b$. Vergleichen Sie jeweils die folgenden Paare von Quotienten!

a) $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+1}{b+1}$ b) $\frac{a}{b}$ und $\frac{a-1}{b-1}$ $(b \neq 1)$ c) $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+n}{b+n}$ $(n \in N)$

d) $\frac{a+1}{b+1}$ und $\frac{a-1}{b-1}$ $(b \neq 1)$ e) $\frac{a}{b}$ und $\frac{a-n}{b-n}$ mit $n < a$, $n \in N$, $b \neq n$

f) Welche allgemeinen Gesetzmäßigkeiten für echte Brüche ergeben sich aus **c)** und **e)**? Formulieren Sie diese Gesetzmäßigkeiten in Worten!

g) Untersuchen Sie, ob es entsprechende Gesetzmäßigkeiten für unechte Brüche gibt! Formulieren Sie gegebenenfalls solche Gesetzmäßigkeiten als Ungleichungen und in Worten!

28. **Welche Beziehungen zwischen a und b erhält man aus den folgenden Gleichungen?**

a) $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a}{b}$ **b)** $\frac{a-n}{b-n} = \frac{a}{b}$ **c)** $\frac{a+n}{b-n} = \frac{a}{b}$

Berechnen Sie!

183. a) $\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b}$ b) $2\frac{3}{5} \cdot \frac{a}{b}$ c) $15m \cdot \frac{3n}{5m}$ d) $\frac{9x^2}{12ab} \cdot \frac{4x}{18m}$ e) $\frac{1{,}11a^2}{52y} \cdot \frac{6{,}5xy}{4{,}4ab}$ f) $\frac{13xy}{12ab} \cdot \frac{15ac}{26xz} \cdot \frac{48bz}{90cy}$

184. a) $\frac{r^2s}{uv^2} \cdot \frac{u^2v}{rs^2}$ b) $3\frac{3}{4} \cdot \frac{p}{q}$ c) $\frac{15m}{7n} \cdot 14n$ d) $\frac{13m^3}{14n^2} \cdot \frac{28mn^2p}{39m^2n}$ e) $\frac{a^2}{x} \cdot \frac{y}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}$ f) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3rs}{5m^2n^2} \cdot \frac{15m^2n}{8r^2s}$

185. a) $\frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{a+b}$ b) $\frac{1}{x+y} \cdot (x+y)$ c) $\frac{1}{x+y} \cdot x + y$ d) $\frac{a-7}{a^2-49} \cdot (a+7)$

186. a) $\frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{a-b}$ b) $(x+y) \cdot \frac{1}{x+y}$ c) $x + y \cdot \frac{1}{x+y}$ d) $\frac{3x-2}{10y+4} \cdot \frac{4y}{6x-4}$

187. a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ b) $\left(\frac{a}{b}+b\right)^2$ c) $\frac{3x-2}{10y+4} \cdot \frac{5y+2}{6x-4}$

188. a) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ b) $\left(\frac{x}{y}-y\right)^2$ c) $\frac{5a-2b}{6r-4s} \cdot \frac{5{,}4r-3{,}6s}{5{,}5a-2{,}2b}$

189. a) $\frac{a}{5} : \frac{a^2x}{25}$ b) $\frac{ax}{b^2y^2} : \frac{a^2x^2}{by}$ c) $\frac{1}{3a} : \frac{1}{5a}$ d) $\frac{27x^3}{16y^2} : \frac{81x^2y}{8y^3}$

190. a) $\frac{1}{10a} : \frac{1}{5a^2}$ b) $\frac{7}{5x} : \frac{35x}{b}$ c) $\frac{1{,}2p^2}{4{,}6q^2} : \frac{6p^2}{11{,}5q}$ d) $\frac{m^2n}{xy^2} : \frac{mn^2}{x^2y}$

191. a) $\frac{-36m^2p}{1{,}3d} : \frac{-0{,}18m}{-52df}$ b) $\frac{2{,}4r}{7s} : \frac{6rs}{2{,}1}$ c) $\frac{15a^2b}{81ac} : 25ab$ d) $15x : \frac{4{,}5x}{2y}$

192. a) $\frac{8}{9abc} : \frac{9abc}{8}$ b) $\frac{-0{,}39}{0{,}25r} : \frac{2{,}6rs}{7{,}5x^2}$ c) $\frac{26abc}{3{,}9axy} : (-10bc)$ d) $(-27rs) : \frac{8{,}1s}{18r}$

193. a) $(-65ab) : \frac{1{,}3a^2}{-50b}$ b) $5\frac{1}{5} : 1{,}3a$ c) $11\frac{1}{5}a : (-7a)$ d) $143x^2y^2 : 6\frac{3}{11}xy$ e) $(-25rs) : 4\frac{1}{6}r$ f) $2\frac{5}{12}qx : \left(-5\frac{3}{11}a\right)$

194. a) $(-145m) : \frac{29mn}{5n}$ b) $\left(-5\frac{1}{7}\right) : 1\frac{3}{21}x$ c) $\left(-\frac{27}{8}a\right) : \left(-\frac{16}{3}b\right)$ d) $\left(-\frac{69}{11}xy\right) : 143x^2y^2$ e) $(-357mn) : \left(-11\frac{9}{10}m^2\right)$

Vereinfachen Sie die folgenden Doppelbrüche!

195. a) $\dfrac{\frac{21a^2b}{20xy^2}}{\frac{35ab^2}{75x^2y}}$ b) $\dfrac{\frac{4xy^2}{a-b}}{\frac{16x^2y}{a^2-b^2}}$

196. a) $\dfrac{4p-3q}{\frac{12pq-9q^2}{21pq}}$ b) $\dfrac{\frac{27rs^2}{25ab^2}}{\frac{81rs}{50ab}}$

a

197. Untersuchen Sie, ob folgende Gleichungen gelten!

a) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\dfrac{2ab}{a+b}$ b) $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{\frac{(k-1)+(k+1)}{2}}$

c) $\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=q \qquad \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geqq q\right)$

---

29. Von drei parallel geschalteten Widerständen, an denen die Gleichspannung U anliegt, sei der zweite Widerstand doppelt so groß wie der erste und der dritte Widerstand doppelt so groß wie der zweite.

a) Der kleinste Widerstand sei R.
b) Der größte Widerstand sei R.

Berechnen Sie für beide Fälle die Gesamtwiderstände, die Gesamtstromstärken und die Zweigstromstärken!

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der bzw. nach den hinter der Gleichung stehenden Variablen auf!

198. a) $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2};\ R;\ R_1$

b) $a^2=b^2+c^2-2bcd;\ d$

c) $A=\dfrac{a+c}{2}\cdot h;\ a;\ h$

d) $V=\dfrac{\pi}{3}h^2(3r-h);\ r$

199. a) $\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'};\ f;\ s$

b) $b^2=a^2+c^2-2acg;\ g$

c) $A_M=\dfrac{\pi}{2}s(d_1+d_2);\ d_1;\ s$

d) $V=\dfrac{\pi}{6}h^2(3d-2h);\ d$

200. a) $\dfrac{a^2}{c}=p;\ a;\ c$ b) $v=\dfrac{s}{t};\ s;\ t$

c) $A=\dfrac{gh_g}{2};\ g$ d) $s=\dfrac{a}{2}t^2;\ a;\ t$

e) $\dfrac{c_1}{c_2}=n;\ c_1;\ c_2$

201. a) $\dfrac{b^2}{c}=q;\ b;\ c$ b) $v=\dfrac{2s}{t};\ s;\ t$

c) $A=\dfrac{abc}{4r};\ r;\ b$ d) $v=a\cdot t;\ t$

e) $c=\lambda\cdot f;\ \lambda;\ f$

Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von Variablen! Zeigen Sie die Richtigkeit der Aussagen!

202. a) Die Summe zweier Zahlen vermehrt um ihre Differenz ist gleich dem Doppelten der ersten Zahl.

b) Die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist eine gerade Zahl.

c) Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl ist eine gerade Zahl.

d) Das Produkt aus zwei ungeraden natürlichen Zahlen ist eine ungerade Zahl.

203. a) Die Summe zweier Zahlen vermindert um ihre Differenz ist gleich dem Doppelten der zweiten Zahl.

b) Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist

α) gerade, wenn die kleinste Zahl ungerade,

β) ungerade, wenn die kleinste Zahl gerade ist.

c) Das Produkt aus zwei geraden natürlichen Zahlen ist eine gerade Zahl.

d) Das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden natürlichen Zahl ist eine gerade Zahl.

204. a) Die Differenz aus zwei ungeraden natürlichen Zahlen ist eine gerade Zahl.

b) Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

c) Die Summe (Differenz) von zwei geraden natürlichen Zahlen ist eine gerade Zahl.

205. a) Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 5 teilbar.

b) Die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 4 teilbar.

c) Die Summe (Differenz) von zwei ungeraden natürlichen Zahlen ist eine gerade Zahl.

a

206. Zwei Zahlen a und b seien durch dieselbe Zahl c teilbar ($a, b, c \in N$). Zeigen Sie, daß dann auch

a) die Summe, b) das Produkt, c) die Differenz (falls sie existiert) der Zahlen a und b durch c teilbar sind!

207. Wie ändert sich die Länge des Radius eines Kreises, wenn die Länge des Umfanges um 1 m vergrößert wird?

208. Wie verändert sich für einen Quader mit den Kantenlängen a, b, c das Volumen und der Oberflächeninhalt unter den folgenden Bedingungen?

a) Eine Kantenlänge wird verdoppelt (halbiert).

b) Zwei Kantenlängen werden verdoppelt (verdreifacht).

c) Alle drei Kantenlängen werden verdoppelt (auf ein Viertel verkürzt).

209. Wie verändern sich für einen Würfel mit der Kantenlänge a das Volumen und der Oberflächeninhalt unter den folgenden Bedingungen?

a) Die Kantenlänge wird verdoppelt (halbiert).

b) Die Kantenlänge wird auf ein Drittel verkürzt.

c) Die Kantenlänge wird um ein Drittel verkürzt.

210. Die Differenz aus einer vierstelligen natürlichen Zahl und der aus ihr durch Vertauschen der Reihenfolge ihrer Grundziffern entstehenden Zahl ist durch 9 teilbar. Beweisen Sie diese Aussage!

211. Die Differenz aus einer mehrstelligen natürlichen Zahl und ihrer Quersumme ist durch 9 teilbar. Führen Sie den Nachweis für vierstellige Zahlen!

---

30. Es gilt: $2 + \frac{2}{1} = 2 \cdot \frac{2}{1}$; $\quad 3 + \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{3}{2}$; $\quad 4 + \frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{4}{3}$; $\ldots$

a) Drücken Sie diese Gesetzmäßigkeit mit Hilfe einer Variablen aus (Grundbereich angeben)!

b) Zeigen Sie, daß die in *a)* formulierte Aussage wahr ist!

c) Gilt die in *a)* formulierte Aussage auch, wenn man als Grundbereich der Variablen die Menge der ganzen (reellen) Zahlen wählt?

31. Für alle natürlichen Zahlen gilt:

$$n - \frac{n}{n+1} = n \cdot \frac{n}{n+1}.$$

a) Beweisen Sie die Wahrheit dieser Aussage!

b) Gilt diese Aussage auch, wenn man als Grundbereich der Variablen die Menge der ganzen (reellen) Zahlen wählt?

32. $n^2 - 1$ ist für jede ungerade natürliche Zahl n durch 8 teilbar! Beweisen Sie die Wahrheit dieser Aussage!

---

b) Ungleichungen und Gleichungssysteme

Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Zahlen bzw. Zahlenpaare Lösungen der danebenstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen sind!

1. a) $x = 7;\ 5x - 40 = -5$

b) $x = \frac{1}{3};\ (5x + 8) \cdot 3 > 20$

c) $a = -5;\ \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$

d) $y = 0{,}8;\ 0{,}5y + 6{,}25 < 6{,}7$

e) $[x; y] = [-2; 5];\ 5y + 10x = 5$

2. a) $a = -\frac{1}{2};\ 5a + 1 = a - 1$

b) $y = -4;\ 15y < 3y$

c) $x = 0{,}6;\ 7{,}2 - 2x = x + 6{,}2$

d) $x = 3;\ (2x - 5)\,x > 0$

e) $[u; v] = \left[1; -\frac{1}{2}\right];\ (u + 3)(4v + 2) = 0$

Untersuchen Sie, ob die beiden jeweils angegebenen Gleichungen einander äquivalent sind! Begründen Sie Ihre Aussage!

3. a) $7x + 1 = 2x + 5;\ 5x + 1 = 5$

b) $\frac{x}{9} + 1 = 4;\ x + 1 = 36$

c) $7x - 5 = 17;\ 7x = 12$

d) $\frac{x}{5} - \frac{3x}{5} = 2;\ 2x = -10$

e) $\frac{6x - 3}{x + 1} = \frac{2}{x + 1};$

$(6x - 3)(x + 1) = 2(x + 1)$

4. a) $8x - 27 + 2x = 2 - x;\ 8x + 3x = 25$

b) $6x + 27 = 9;\ 2x + 9 = 3$

c) $8 - 2x = 36;\ -4 + x = -18$

d) $\frac{2x}{3} - \frac{5x}{6} = \frac{x}{2} + 1;\ -x = 3x + 6$

e) $\frac{5}{2x - 1} = \frac{7x + 2}{2x - 1};$

$5(2x - 1) = (7x + 1)(2x - 1)$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

5. a) $3 - (5x + 8) = 6x - (15 + x)$

b) $2x - (3 + 4x) = 9 - (10x - 1)$

c) $\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right)^2$

6. a) $4(17x + 8) + 3(9 - 6x) = 5x - 4(6x - 9)$

b) $12\left(1 + \frac{x}{6}\right) - 4\left(\frac{x}{6} - 2\right) = 5\left(\frac{x}{10} - 7\right)$

c) $7(x + 1) - 5(3x - 7) = 50$

7. a) $\frac{x + 3}{x - 3} = 3 \quad (x \neq 3)$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{5}{2x + 2}$

$(x \neq 0;\ x \neq -1)$

c) $\frac{x - 2}{x - 3} = \frac{x + 6}{x + 4} \quad (x \neq 3;\ x \neq -4)$

8. a) $\frac{7}{4x} - \frac{1}{12x} = \frac{3}{x} - 2 \quad (x \neq 0)$

b) $\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{3x + 12}$

$(x \neq 0;\ x \neq -4)$

c) $\frac{x + 1}{x + 5} + \frac{x + 3}{x - 1} = 2 \quad (x \neq -5;\ x \neq 1)$

9. Bilden Sie drei verschiedene Gleichungen der Form $\frac{ax + b}{c} = d$ mit $a, b, c \in N;\ c \neq 0$, die alle die Lösung $x = 10$ besitzen!

Ermitteln Sie die Lösungen x der folgenden Gleichungen!

10. a) $b + x = a$ b) $ax + b = c$

11. a) $m - x = n$ b) $\frac{x}{a} - b = c$

c) $\frac{x}{r} + s = 0$ d) $a - \frac{b}{c}x = 0$

e) $m(x - n) = p(x + q)$

c) $ax = bx + c$ d) $p : x = q : r$

e) $\frac{x + a}{x - a} = a$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen für jede der vorkommenden Variablen!

12. a) $a = \frac{b}{2}(c + d)$ b) $a = b \cdot \frac{c - d}{2c}$

c) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

13. a) $a = b \cdot c(d - e)$ b) $a = b(1 + c \cdot d)$

c) $a = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{d \cdot e}{2}$

Ermitteln Sie alle Zahlen, die durch folgende Bedingungen festgelegt sind!

14. a) Das Fünffache einer Zahl ist gleich der um 3 vermehrten Hälfte dieser Zahl.

b) Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist gleich 30.

c) Die Differenz aus dem Fünffachen und dem Doppelten einer Zahl ist gleich der um $\frac{1}{2}$ verminderten Zahl.

15. a) Die Summe aus zwei aufeinanderfolgenden Zahlen ist um 7 größer als 14.

b) Die Hälfte einer Zahl, vergrößert um 2, ist doppelt so groß wie die um 1 verminderte Zahl.

c) Eine um $\frac{2}{3}$ verkleinerte Zahl ist dreimal so groß wie ihr Doppeltes.

Formulieren Sie Textaufgaben (vgl. Aufgaben b 14 und b 15), zu deren Lösung folgende Gleichungen aufgestellt werden müssen!
Formulieren Sie anschließend entsprechende Sachaufgaben aus verschiedenen Bereichen!

16. a) $\frac{x + 3}{4} = \frac{x - 7}{9}$

b) $8(x - 3) + 5 = 3(2x + 1)$

17. a) $\frac{x}{4} + 3 = \frac{x}{9} - 7$

b) $1 - \frac{x}{x + 1} = 3$

18. Das treibende Rad eines Zahnradgetriebes habe 60 Zähne, das angetriebene Rad 35 Zähne. Wie groß ist die Drehzahl des treibenden Rades zu wählen, wenn das zweite Rad 85 Umdrehungen in der Minute macht?

19. Das Übersetzungsverhältnis eines Zahnradgetriebes sei 2 : 7. Wie groß ist die Anzahl der Zähne des getriebenen Rades, wenn das treibende Rad 42 Zähne hat?

20. Berechnen Sie den Widerstand einer 60-W-Lampe mit einer Betriebsspannung von 220 V!

21. Berechnen Sie die Stärke des durch eine 100-W-Lampe fließenden Stromes, wenn die Lampe an 220 V angeschlossen ist!

22. Wieviel Liter Äthin entstehen bei der Reaktion von 6,5 t Kalziumkarbid mit Wasser?

23. Wieviel Liter Äthin benötigt man zur Herstellung von 500 g Äthanal?

24. Wieviel Liter Äthin reagieren mit Wasserstoff zu 100 l Äthan?

25. Wieviel Liter Wasserstoff benötigt man zur Herstellung von 112 l Äthan aus Äthin?

26. Der Gesamtwiderstand zweier parallelgeschalteter Widerstände betrage 20000 Ω. Der eine Widerstand betrage 100 kΩ, wie groß ist der andere?

27. Von drei parallelgeschalteten Widerständen sei der zweite doppelt so groß wie der erste, der dritte doppelt so groß wie der zweite. Wie groß sind die drei Widerstände, wenn der Gesamtwiderstand 14 Ω beträgt?

28. Für das Roden eines 23,5 ha großen Kartoffelschlages einer LPG mit einer Vollerntemaschine wären bei rationellstem Einsatz der Maschine 14 Arbeitsstunden zu planen. Wie lange dauert die Rodung der Kartoffeln, wenn gleichzeitig noch eine zweite Vollerntemaschine eingesetzt wird, deren Leistung aber um 25% geringer als die der anderen ist?

29. Auf der Autobahn fahre ein PKW mit konstanter Geschwindigkeit von $v_1 = 80\,\text{kmh}^{-1}$. In welcher Zeit hat ihn ein anderer eingeholt, der 10 min später abgefahren ist und mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_2 = 90\,\text{kmh}^{-1}$ fährt?

30. Ein Autobus habe vor einem später abgefahrenen PKW einen Vorsprung von 3,5 km. Der PKW hole den Bus 5 km vom Abfahrtsort entfernt ein. Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge zueinander?

31. 4 l 96%ige Schwefelsäure werden in 2 l Wasser gegeben. Wieviel Prozent Schwefelsäure enthält die entstandene Säure?

32. Wieviel Liter 42%ige Säure sind 2 l 10%iger Säure zuzusetzen, damit 30%ige Säure entsteht?

b

33. a l einer p_1-prozentigen Lösung werden mit b l einer p_2-prozentigen Lösung vermischt. Berechnen Sie die Konzentration der entstandenen Lösung in Prozent!

34. a l einer p_1-prozentigen Lösung sollen mit einer p_2-prozentigen Lösung vermischt werden, so daß eine p-prozentige Lösung entsteht. Wieviel Liter der p_2-prozentigen Lösung sind zuzufügen?

35. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks betrage 67,6 cm. Ein Schenkel sei 4 cm kürzer als die Grundlinie. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

36. In einem rechtwinkligen Dreieck sei die eine Kathete 5 cm lang. Die Hypotenuse sei 3 cm länger als die andere Kathete. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

---

1. Ermitteln Sie die Lösungen x der folgenden Gleichungen!

a) $x + a = a - x$ **b)** $x - a = a - x$ **c)** $x + a = a + x$

d) $mx + n = nx + m$ **e)** $mx - n = nx - m$ **f)** $mx + n = mx - n$

2. Geben Sie die Lösungen x im Bereich der natürlichen Zahlen für nachstehende Gleichungen an, wenn a eine natürliche Zahl ist!

a) $a + x = 5$ **b)** $x + 3a = 10$ **c)** $3x + a = 6$ **d)** $3x + 3a = a$

3. Es seien 910 dt Düngemittel aus Güterwagen der Reichsbahn zu entladen. Dazu stehen entweder 5 LKW mit je 36,4 dt Ladefähigkeit oder 7 Traktorenzüge mit je 65 dt Ladefähigkeit zur Verfügung. Ein LKW benötige für Hin- und Rückfahrt, Be- und Entladung zusammen 50 min, ein Traktorenzug 120 min. Mit welchen Fahrzeugen läßt sich

a) am schnellsten entladen,

b) am billigsten entladen, wenn einmal gleicher Stundenlohn für LKW- und Traktorenfahrer, ein andermal gleicher Lohn für jeden Tonnenkilometer gezahlt wird?

Ermitteln Sie durch Überlegen bzw. Probieren die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen! Der Grundbereich sei jeweils der Reihe nach die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge der ganzen Zahlen, die Menge der gebrochenen Zahlen.

37. a) $3 + x < 2$ b) $x < -2$

38. a) $3 - x > 2$ b) $x < 2$

Addieren bzw. subtrahieren Sie auf beiden Seiten der folgenden Ungleichungen jeweils der Reihe nach 7; 3,6; $\frac{1}{2}$! Setzen Sie dann jeweils eines der Relationszeichen „<“ oder „>“ zwischen die Summen bzw. Differenzen, so daß stets eine neue wahre Aussage entsteht!

39. a) $-\frac{1}{2}$ ⧧ $\frac{5}{6}$ b) -9 ⧧ -3 c) $4{,}5$ ⧧ $1{,}2$

40. a) -2 ⧧ $\frac{1}{2}$ b) $-5{,}5$ ⧧ -4 c) $\frac{13}{4}$ ⧧ $\frac{13}{5}$

Multiplizieren Sie beide Seiten der folgenden Ungleichungen jeweils der Reihe nach mit 2; -4; $-\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$! Setzen Sie dann jeweils eines der Relationszeichen „<“ oder „>“ zwischen die Produkte, so daß stets eine neue wahre Aussage entsteht!

41. a) $13 \neq 19$ b) $7 \neq -2$ c) $-4 \neq -2$

42. a) $\frac{39}{2} \neq 12$ b) $-2 \neq 1$ c) $-1 \neq -9$

Dividieren Sie beide Seiten der folgenden Ungleichungen jeweils der Reihe nach durch 5; -3; $-\frac{5}{2}$; $\frac{4}{5}$! Setzen Sie dann eines der Relationszeichen „$<$“ oder „$>$“ zwischen die Quotienten, so daß stets eine neue wahre Aussage entsteht!

43. a) $\frac{9}{5} \neq \frac{9}{6}$ b) $-5 \neq -4$ c) $1\frac{1}{2} \neq -1\frac{1}{2}$

44. a) $\frac{16}{10} \neq \frac{21}{10}$ b) $-9 \neq -6$ c) $-3\frac{2}{5} \neq 2\frac{3}{5}$

---

4. Zeigen Sie, daß für die reellen Zahlen r und s folgendes gilt!

a) Aus $0 < r < s$ folgt $r^2 < s^2$.   **b)** Aus $r < s < 0$ folgt $r^2 > s^2$.

5. Es sei $x < 0 < y$. Welche reellen Zahlen x und y erfüllen die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen?

a) $x^2 < y^2$ **b)** $x^2 = y^2$ **c)** $x^2 > y^2$

6. Welche reellen Zahlen x erfüllen die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen?

a) $x^2 > x$ **b)** $x^2 = x$ **c)** $x^2 < x$

d) $x^2 > -x$ **e)** $x^2 = -x$ **f)** $x^2 < -x$

7. Es sei a eine reelle Zahl. Ordnen Sie der Größe nach!

a) a, a^2, a^3 **b)** $a^2, 3a^2, 2a^2$

Hinweis: Führen Sie dabei Fallunterscheidungen durch!

Ermitteln Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen im Bereich der natürlichen Zahlen! Geben Sie auch die Lösungsmenge im Bereich der ganzen, der gebrochenen und der reellen Zahlen an! Bilden Sie die einzelnen Mengen auf einem Zahlenstrahl bzw. auf einer Zahlengeraden ab!

45. a) $3b + 7 < 13 + 2b$ b) $6a - 7 > 5a$ c) $3(x - 5) < 5 - 2(-x + 1)$ d) $8 - x < 27$ e) $6x - 9 > 7x - 7$

46. a) $5x - 3 < 4x$ b) $3a - 19 > 2a - 12$ c) $4(2x + 3) < x - 3(3 - 2x)$ d) $33 < 3 - x$ e) $8x - 10 > 9x - 11$

47. a) $3b + 7 < 13$ b) $8 + \frac{1}{4}x > 11$ c) $7 - a < 11$ d) $3a < 5a$

48. a) $6x - 5 < 13$ b) $7 + \frac{1}{5}a < 9$ c) $9 - x > 20$ d) $8b > 10b$

49. a) $6x - 9 < 3x - 7$ b) $\frac{1 - x}{3} < 4$ c) $1 + \frac{x}{5} > \frac{x}{3} - 1$ d) $\frac{k + 1}{3} + \frac{1}{2} < \frac{k - 1}{2} - \frac{1}{3}$

50. a) $24x - 15 < 18x + 1$ b) $1 - \frac{x}{3} < 4$ c) $1 - \frac{x}{5} > \frac{x - 1}{3}$ d) $\frac{b}{3} - \frac{b + 1}{5} < \frac{1}{15} - \frac{b}{3}$

51. a) $\frac{4}{5}x + 9 < \frac{5}{4}x$ b) $\frac{x}{4} + 3 < 4 - \frac{x}{8}$ c) $7(x - 1) < 9(x + 2)$ d) $\frac{2 - x}{10} > 2(x - 2)$ e) $\frac{x + 3}{4} < \frac{x - 4}{6}$

52. a) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} < \frac{1}{2}x$ b) $\frac{3 - x}{5} > \frac{5 - x}{3}$ c) $2{,}5(1 - 4x) > 2{,}5x - 10$ d) $2 - \frac{x}{10} > 2(7 - x)$ e) $3 - \frac{x}{5} > 5 - \frac{x}{3}$

Sind die beiden jeweils angegebenen Ungleichungen einander äquivalent? Begründen Sie Ihre Antworten!

53. a) $7x - 5 < 17$; $7x < 22$
b) $-6x < 12$; $x < -2$
c) $\frac{x}{5} - \frac{3x}{5} > 1$; $2x > -5$

54. a) $6c > 9$; $2c > 3$
b) $8 - 2x < 36$; $-4 + x < -18$
c) $\frac{1-x}{3} < 4$; $1 - x < 12$

---

b

Formen Sie die folgenden Ungleichungen so um, daß jeweils eine dazu äquivalente Ungleichung entsteht, bei der die Variable x allein auf einer Seite steht! Schränken Sie dabei, falls es notwendig erscheint, die Grundbereiche für die Variablen a, b, c geeignet ein oder führen Sie Fallunterscheidungen durch!

8. **a)** $a + x < b$ **b)** $ax + b > 0$
c) $b - x < a$ **d)** $ax - b > c$
e) $ax + b > bx + a$ **f)** $ax - b < a - bx$
g) $\frac{x}{a} - b < c \quad (a \neq 0)$ **h)** $a - \frac{x}{b} > c \quad (b \neq 0)$

9. Welches der drei Zeichen „$<$", „$=$", „$>$" gilt zwischen den natürlichen Zahlen a und b $(b \neq 0)$ in den folgenden Gleichungen und Ungleichungen? Für die Aufgaben d), e), f) gilt außerdem $b \neq 1$.

a) $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$ **b)** $\frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+1}$ **c)** $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$

d) $\frac{a}{b} > \frac{a-1}{b-1}$ **e)** $\frac{a}{b} = \frac{a-1}{b-1}$ **f)** $\frac{a}{b} < \frac{a-1}{b-1}$

10. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen wahr sind!

a) Für $a > b$ und $c > d$ gilt $(a - b) \cdot (c - d) > 0$.
b) Für $a > b$ und $c < d$ gilt $(a - b) \cdot (c - d) < 0$.
c) Für $a, b \in P$ und $c = d$ gilt $(a - b) \cdot (c - d) = 0$.

11. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen. Untersuchen Sie, welche Beziehungen zwischen a und b bzw. c und d bestehen, wenn folgendes gilt!
Führen Sie Fallunterscheidungen durch!

a) $(a + b)(c + d) > 0$ **b)** $(a + b)(c + d) = 0$ **c)** $(a + b)(c + d) < 0$

---

55. 1 l 40%ige Salzsäure ist mit Wasser so zu verdünnen, daß eine Flüssigkeit entsteht, die mehr als 6% Salzsäure enthält. In wieviel Liter Wasser darf man den einen Liter Säure zugeben?

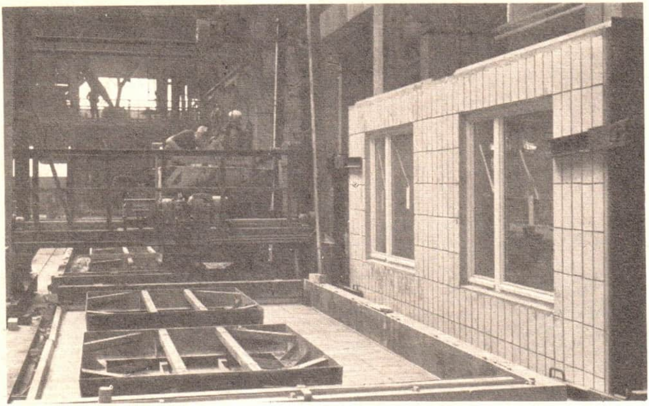
56. 3 l 70%ige Säure sind mit 12%iger Säure so zu mischen, daß eine Flüssigkeit entsteht, die weniger als 30% der Säure enthält. Wieviel Liter der 12%igen Säure muß man zusetzen?

57. Eine selbstfahrende Walze zum Befestigen von Wegen habe eine Arbeitsbreite von 1,20 m. Jeder nachfolgende Streifen muß den vorhergehenden um ein Fünftel seiner Breite überlappen.
Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit muß die Walze fahren, damit ein Straßenabschnitt von 1250 m Länge und 6 m Breite in einer Zeit zwischen 5 h und 6 h doppelt überwalzt wird?

Hinweis: Stellen Sie zwei Ungleichungen auf!

58. Ein Behälter aus rostfreiem Stahl mit der Masse 20 kg enthalte 120 kg Wasser mit einer Temperatur von 20 °C. Wieviel Kilogramm Wasser mit einer Temperatur von 85 °C sind nachzufüllen, damit eine Wassertemperatur zwischen 35 °C und 40 °C erreicht wird? Die spezifische Wärme von Stahl ist $0{,}11\ \text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1}$.

Hinweis: Stellen Sie zwei Ungleichungen auf!



59. Zwei Werke W_1 und W_2 liegen a km voneinander entfernt. Sie stellen Betonbauelemente her und liefern diese zu einer zwischen W_1 und W_2 liegenden Baustelle B. Das Werk W_1 produziert ein Bauelement für b M. Das Werk W_2 hat einen um c% niedrigeren Produktionspreis. Für je ein Teil und Kilometer entstehen d M Transportkosten.
Wie weit darf B höchstens von W_1 entfernt sein, damit die von W_1 kommenden Teile billiger als die von W_2 sind?

60. Wie lange braucht ein Motorradfahrer mindestens zum Durchfahren eines Ortes von 2,2 km Länge, wenn die zulässige Höchstgeschwindigkeit 50 kmh^{-1} beträgt?

61. Wenn man zu einer zweistelligen natürlichen Zahl die Hälfte addiert, so erhält man eine Zahl, die größer als 130 ist. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

62. Ermitteln Sie zweistellige Zahlen, deren Zehnerziffern um 2 kleiner sind als die Einerziffern und die größer als 23 und kleiner als 43 sind!

63. Beweisen Sie, daß die Länge des halben Umfanges in jedem Dreieck größer als die Länge jeder Dreiecksseite ist!
Hinweis: Die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten ist stets größer als die Länge der dritten Dreiecksseite.

---

*12.** Stellen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen in jeweils einem Koordinatensystem dar!
Die Grundbereiche seien jeweils $x \in P$ und $x \in G$!

a) $x + y > 2$ **b)** $2x - 2 < 4y$ **c)** $4 - 4y < 2x + 2$ **d)** $3x - y > -2$

Geben Sie für die folgenden Gleichungen jeweils sechs Lösungen an! Stellen Sie die Lösungsmengen jeweils in einem Koordinatensystem dar!

64. **a)** $2y - 3x - 2 = 0$
b) $5a + 10b = 0$
c) $0{,}8x + 6{,}4y - 6{,}4 = 0$
d) $4x = 8y + 12$

65. **a)** $3x - 2y - 2 = 0$
b) $10a - 5b = 0$
c) $0{,}4x - 2{,}4y + 2{,}4 = 0$
d) $8x - 12 = 4y$

b

Geben Sie lineare Gleichungen mit den beiden Variablen x und y an, für die die folgenden Zahlenpaare $[x; y]$ Lösungen sind!

66. a) $[2; 0]$, $[-3; -10]$, $[-1; -6]$, $[4; 4]$
b) $[0; 2]$, $[-2; 0]$, $[-4; -2]$, $[3; 5]$
c) $[0; 0]$, $[3; 2]$, $[-6; -4]$, $[9; 6]$

67. a) $[0; 1]$, $[-2; -3]$, $[4; 9]$, $[-5; -9]$
b) $[4; 0]$, $[0; -4]$, $[-4; -8]$, $[1; -3]$
c) $[0; 0]$, $[2; 1]$, $[-4; -2]$, $[-6; -3]$

---

13. Welche reellen Zahlenpaare $[x; y]$ erfüllen die folgenden Gleichungen?

a) $xy - 3x + 3y - 9 = 0$ **b)** $xy - 3x + 3y - 9 = 9$

---

b

Bilden Sie den Durchschnitt der Mengen M_1 und M_2! Veranschaulichen Sie die Mengen mit Hilfe von Mengendiagrammen! Geben Sie die Eigenschaft der Elemente des Durchschnitts an!

68. a) M_1: Menge der durch 5 teilbaren Zahlen
M_2: Menge der Primzahlen

b) M_1: Menge der durch 4 teilbaren Zahlen, die kleiner sind als 20
M_2: Menge der durch 6 teilbaren Zahlen, die größer sind als 5

c) M_1: Menge der durch 2 teilbaren Zahlen
M_2: Menge der durch 3 teilbaren Zahlen

69. a) M_1: Menge der durch 3 teilbaren Zahlen
M_2: Menge der Primzahlen

b) M_1: Menge der durch 3 teilbaren Zahlen, die kleiner sind als 20
M_2: Menge der durch 5 teilbaren Zahlen, die größer sind als 2

c) M_1: Menge der durch 4 teilbaren Zahlen
M_2: Menge der durch 6 teilbaren Zahlen

70. a) M_1: Menge der Schüler Ihrer Klasse
M_2: Menge der Schüler Ihrer Schule, die in Mathematik die Note 1 haben

b) M_1: Menge der Punkte der Ebene, die oberhalb der Geraden $y = -x + 2$ liegen
M_2: Menge der Punkte der Ebene, die oberhalb der Geraden $y = 2x - 1$ liegen

c) M_1: Menge der Punkte der Ebene, deren Koordinaten die Gleichung $2x - y = 2$ erfüllen
M_2: Menge der Punkte der Ebene, deren Koordinaten die Gleichung $x + y = 4$ erfüllen

71. a) M_1: Menge der Schüler Ihrer Klasse
M_2: Menge der Schüler Ihrer Schule, die in Mathematik die Note 2 haben

b) M_1: Menge der Punkte der Ebene, die oberhalb einer Geraden liegen
M_2: Menge der inneren Punkte eines Kreises
(Beachten Sie verschiedene Lagen der Geraden zum Kreis!)

c) M_1: Menge der Punkte der Ebene, deren Koordinaten die Gleichung $y = 2x - 1$ erfüllen
M_2: Menge der Punkte der Ebene, deren Koordinaten die Gleichung $x + y = -2$ erfüllen

72. a) M_1: Menge der rechtwinkligen Dreiecke
M_2: Menge der gleichschenkligen Dreiecke

b) M_1: Menge der Schüler Ihrer Klasse
M_2: Menge der Abonnenten der „Jungen Welt"

73. a) M_1: Menge der rechtwinkligen Dreiecke
M_2: Menge der gleichseitigen Dreiecke

b) M_1: Menge der Schüler Ihrer Klasse
M_2: Menge der Mitglieder der SSG Ihrer Schule

74. Kennzeichnen Sie die Elemente des Durchschnitts der Mengen M_1 und M_2!
M_1 sei die Menge aller männlichen Bürger der DDR am Tage der Aufgabenstellung und M_2 die Menge aller Lehrer der DDR an demselben Tage.

75. Wie viele Schüler gehen in die Klasse, wenn 18 Schüler ein Fahrrad, 15 Schüler eine Luftmatratze, 10 Schüler eine Luftmatratze und ein Fahrrad und 10 Schüler weder ein Fahrrad noch eine Luftmatratze besitzen? Stellen Sie den Sachverhalt in einem Mengendiagramm dar!

---

14. Bilden Sie zwei Mengen, deren Durchschnitt alle natürlichen Zahlen enthält, die kleiner als 9 und größer als 4 sind!

15. Veranschaulichen Sie folgenden Sachverhalt in einem Mengendiagramm und beantworten Sie anschließend die Fragen!
Von 550 Schülern einer Schule beziehen 50 Schüler regelmäßig die Zeitschrift „alpha“, 40 Schüler die „Urania“ und 25 Schüler „Jugend und Technik“. Es wird weiter festgestellt, daß 15 Schüler zugleich „alpha“ und „Jugend und Technik“, 10 Schüler zugleich „alpha“ und „Urania“ und 5 Schüler zugleich „Urania“ und „Jugend und Technik“ abonniert haben. Wie viele Schüler dieser Schule haben genau eine der drei Zeitschriften abonniert und wie viele Schüler gar keine?

Stellen Sie graphisch fest, ob die folgenden Gleichungssysteme eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzen!

76. a) $\begin{aligned} 5y + 2x &= 1 \\ 5y + 2x &= 14 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 6x - 3y &= 15 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y &= 1{,}5x + 2 \\ x &= 1{,}5y + 2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 4x - 3y &= 9 \\ 3x + 4y &= 8 \end{aligned}$

77. a) $\begin{aligned} 2x - 5y &= 6 \\ 5y - 2x &= 6 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 8y + 5x &= 20 \\ 1{,}6y + x &= 4 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$

78. Fügen Sie zu jeder der folgenden Gleichungen eine zweite hinzu, so daß jeweils ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen entsteht, das α) genau eine Lösung, β) keine Lösung, γ) unendlich viele Lösungen besitzt!

a) $y = -x + 2$ b) $x + 5y = 15$ c) $2x - 3y = -1$

Lösen Sie graphisch die folgenden Gleichungssysteme!

79. a) $\begin{aligned} y &= x - 1 \\ y &= 3 - x \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} y - 2x &= 2 \\ 2y - x &= -2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} y + x &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ 6y - 10x - 3 &= 0 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{y}{3} &= 1 \\ \frac{y}{2} + \frac{x}{3} &= 0 \end{aligned}$

80. a) $\begin{aligned} y &= 2x + 4 \\ y &= 4x - 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 4y - x &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ 4x + 3 &= y \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 23x - 4y &= 20 \\ y - 2x &= 0 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} \frac{4x}{3} + y &= 5 \\ \frac{x}{5} - \frac{y}{10} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens!

81. a) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 253 \\ y &= 5x \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x &= 3y - 2 \\ x &= 5y - 12 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 14y - 4x &= 0 \\ 7y &= 2x \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x + y &= 54 \\ x : y &= 2 \end{aligned}$

82. a) $\begin{aligned} 8x - 7y &= 85 \\ x &= 3y \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 6x - 4y &= 24 \\ x &= y + 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y &= 3x - 17 \\ y &= 2x - 12 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} y : x &= 1 : 4 \\ y + x &= 100 \end{aligned}$

83. a) $\begin{aligned} 3x + y &= 9 \\ 2x - y &= -1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 6x + 5y &= 8 \\ 3x - 2y &= 1{,}3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 0{,}4x + 0{,}3y &= 6 \\ 1{,}2x - 2y &= 760 \end{aligned}$

84. a) $\begin{aligned} 6x + 4y &= 4 \\ -6x - 2y &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x + 0{,}5y &= 0{,}8 \\ 0{,}5x + 2y &= -6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5y + 2x &= 11 \\ 7y - 3x &= 27 \end{aligned}$

85. a) $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 8x - 15y &= -3 \\ 2x + 3y &= \frac{3}{2} \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} u &= v + \frac{7}{2} \\ 14u &= 112v \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 3y - 11 &= -2x \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 18a - 7b &= 2 \\ a &= b + \frac{1}{42} \end{aligned}$

86. a) $\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 8y - 5x &= 0 \\ -8y - 5x &= 80 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x - 15 &= -2y \\ 9x - 10y &= 21 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} a + 1 &= -2b \\ -5a &= 38 + b \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 22y - 4 &= z \\ 33y + 3 &= 2z \end{aligned}$

87. a) $\begin{aligned} 3x - 10 &= 5y \\ 6x - 20 &= 5y \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \frac{3}{x} + 2y &= -\frac{7}{2} \\ \frac{15}{x} - \frac{5}{4}y &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 15(x+2) - 20y &= 50 \\ 20(x-3) - 40(y-x) &= -20 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 5(x-3) - 24y &= 5\left(x - \frac{3}{5}\right) \\ 5x + 7 &= 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(y+1) &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{2}y &= \frac{9}{2} \end{aligned}$

88. a) $\begin{aligned} 2r + \frac{10}{s} &= 1 \\ \frac{r}{4} + \frac{1}{2s} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \frac{38}{7} - x &= y + \frac{2}{7} \\ 38 - 7x &= 10(y-1) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5(x+2) - 3(y+1) &= 23 \\ 3(x-2) + 5(y-1) &= 19 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 11(x-y) + 12(y-x) &= 1 \\ (x-2) : y &= 1 : 4 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \frac{1}{x+y} &= \frac{2}{3x+1} \\ \frac{1}{2x+1} &= \frac{2}{7y} \end{aligned}$

b

Ermitteln Sie die Lösungen $[x; y]$ der folgenden Gleichungssysteme!

89. a) $\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= b \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} ax + by &= 1 \\ bx + ay &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x - 2y &= 3a \\ 6x + 6y &= 6a + 5b \end{aligned}$

e) Setzen Sie in Aufgabe a) $a = 6$. Unter welcher Bedingung hat dieses System dann ganzzahlige Lösungen?

f) Ermitteln Sie den Grundbereich für b, wenn $a \in G$, damit die Lösungen in Aufgabe d) ganzzahlig sind!

90. a) $\begin{aligned} ax + by &= c \\ x + y &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} ax + ay &= m \\ x - y &= n \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + y &= a - b \\ x - y &= b \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x - y &= 2a - b \\ x + y &= 6a \end{aligned}$

e) Setzen Sie in Aufgabe c) $b = 3$. Unter welcher Bedingung sind die Zahlen der Lösungsmenge natürliche Zahlen?

f) Ermitteln Sie den Grundbereich für b, wenn $a \in G$, damit die Lösungen in Aufgabe d) gerade Zahlen sind!

---

16. Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5ax - y &= 32 \\ -ax + y &= 0 \end{aligned}$$

sollen ganzzahlig sein.

a) Welche natürlichen Zahlen bilden den Grundbereich für a, um diese Bedingung zu erfüllen?

b) Welche gebrochenen Zahlen bilden den Grundbereich für a, um diese Bedingung zu erfüllen?

17. Ermitteln Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ max + mby &= c \end{aligned} \quad \text{mit} \quad a \neq 0;\ b \neq 0;\ m \neq 0$$

für die folgenden Bedingungen!

a) $c = 0$

b) $c \neq 0$.

18. Die Variablen a und b seien natürliche Zahlen. Welche Bedingungen müssen gelten, damit die Elemente der Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems auch natürliche Zahlen sind?

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= b \end{aligned}$$

---

91. In einem chemischen Betrieb sollen aus einer 96%igen und einer 70%igen Schwefelsäure

a) 5 t einer 84%igen, **b)** 3 t einer 50%igen

Schwefelsäure hergestellt werden. Welche Ausgangsmengen sind dazu erforderlich?

92. Die Summe zweier Zahlen sei 52. Die Differenz aus dem Dreifachen der einen und dem Fünffachen der anderen sei 100. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

93. Die Summe aus dem Dreifachen einer Zahl und dem Achtfachen einer anderen sei 310. Die Summe aus dem dritten Teil der ersten und dem achten Teil der zweiten sei 10. Für welche beiden Zahlen gelten diese Bedingungen?

94. Eine zweistellige Zahl habe als Quersumme 10. Schreibt man die beiden Ziffern in umgekehrter Reihenfolge, so werde die Zahl dadurch weder kleiner noch größer. Für welche zweistellige Zahl gilt dies?

95. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl sei 10. Schreibt man die beiden Ziffern in umgekehrter Reihenfolge, so entstehe eine um 36 kleinere Zahl als die ursprüngliche. Für welche zweistellige Zahl trifft dies zu?

96. Ein Güterzug transportiere mit insgesamt 38 Wagen 730 t Braunkohlenbriketts. Einige Wagen seien mit 15 t, die anderen mit 20 t Briketts beladen. Wie viele Wagen von jeder Art sind es?

97. Auf einer Großbaustelle werden täglich 62 Wagenladungen mit insgesamt 480 t Beton angeliefert. Einige Fahrzeuge werden mit 6 t, die anderen mit 10 t Beton beladen. Wie viele Ladungen von jeder Art sind es täglich?

98. Ein Panzer der Nationalen Volksarmee habe einen Weg von 230 km zurückgelegt. Im ursprünglich vollen Kraftstofftank befinden sich noch 40 l. Könnte der Kraftstoffverbrauch je 100 km um 15 l eingeschränkt werden, so würde dieser Panzer einen Aktionsradius von 270 km haben. Wie groß ist das Fassungsvermögen des Tanks? Wieviel Kraftstoff wird für 100 km verbraucht?

99. Ein Kraftwagen fahre auf der Strecke $\overline{AB}$ mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_1 = 50\ \text{kmh}^{-1}$. Gleichzeitig fahre ihm ein anderer PKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_2 = 70\ \text{kmh}^{-1}$ von B nach A entgegen. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ betrage

a) 90 km, b) 108 km.

Nach wieviel Minuten Fahrzeit treffen sie sich? Wieviel Kilometer ist der Treffpunkt von A entfernt?

100. Ein Feuerlöschteich enthalte $135\ \text{m}^3$ Wasser. Bei einem Einsatz entnimmt eine Motorspritze $750\ \text{l} \cdot \text{min}^{-1}$. Wann ist der Teich leergepumpt, wenn 30 min nach der ersten Motorspritze noch eine zweite mit einer Leistung von $500\ \text{l} \cdot \text{min}^{-1}$ zusätzlich eingesetzt wird und die erste Pumpe zwischendurch einmal 10 min ausfällt?

101. Zwei Freunde umrunden die 400 m lange Aschenbahn eines Sportplatzes. Der eine benötigt für zwei Runden dieselbe Zeit wie der andere für drei Runden.
Laufen sie von einem Punkt dieser Aschenbahn gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung los, so begegnen sie sich alle 40 s. Mit welcher Geschwindigkeit läuft jeder der beiden Freunde?

102. Aus der Antike wurde uns überliefert: ARCHIMEDES (287–212 v. u. Z.) prüfte einen goldenen Kranz des Königs HIERO von SYRAKUS. Er fand sein Gewicht zu 9 kp und in Wasser eingetaucht zu 8,375 kp. Aus reinem Gold hätte er im Wasser 8,5 kp, aus reinem Silber hätte er im Wasser 8,125 kp gewogen. Wieviel Prozent Silber war im Kranz, wenn man annimmt, daß er außer Gold nur Silber enthielt?

103. Eine Messinggußlegierung von 35 kg enthalte 12 kg mehr Kupfer als Zink und außerdem 1 kg Blei. Wieviel Kilogramm Kupfer und wieviel Kilogramm Zink enthält die Legierung?

104. Ein zylinderförmiger Kessel von 3 m Höhe und 190 cm Durchmesser sei zu einem Drittel mit einer 25%igen Ammoniaklösung gefüllt. Wieviel Liter einer 18%igen Ammoniaklösung muß man zugeben, um eine 24%ige Lösung zu erhalten?

105. Ein ganz mit Quecksilber ($\varrho = 13{,}6\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) gefülltes und verschlossenes Gefäß aus Gußeisen ($\varrho = 7{,}2\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$), das beim Eintauchen in Wasser 20 kg Wasser verdrängt, habe eine Masse von 250 kg. Wie groß ist die Masse des Quecksilbers, wie groß die des Gefäßes?

106. In einem Stromkreis, in dem zwei Widerstände parallel geschaltet sind, sei die Gesamtstromstärke 3 A. Welche Stromstärken werden in den Verzweigungen gemessen, wenn sich die Widerstände wie $2:3$ verhalten?

---

19. Ein Aufklärungsflugzeug der NVA überfliege eine Fahrzeugkolonne in Marschrichtung in 1 min 12 s und in entgegengesetzter Richtung in 52 s. Wie lang ist die Fahrzeugkolonne und welche Geschwindigkeit hat diese, wenn das Flugzeug die Kolonne mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von $v_F = 400\ \text{kmh}^{-1}$ überfliegt?

---

b

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme!

107.* a) $\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 6x + y + 2z &= 4 \\ x - 10y - 2z &= 7 \\ 5x - 2y + z &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \frac{5}{2}x + \frac{10}{3}y + \frac{17}{4}z &= 64 \\ \frac{15}{4}x &= \frac{5}{2}y \\ \frac{10}{3}y &= \frac{5}{2}z \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} y - z &= a \\ y + z &= b \\ x + z &= \frac{b-a}{2} \end{aligned}$

108.* a) $\begin{aligned} x + y &= 21 \\ y + z &= 15 \\ x + z &= 12 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 10x + 3y + 6z &= 0 \\ 45x - 6y + 60z &= 1 \\ 5x - 6y - 24z &= 7 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x &= \frac{7}{3}y - 6 \\ y &= z - 1 \\ z &= \frac{6}{5}x - 8 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ x + z &= c \end{aligned}$

109.* Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks, wenn zwei Seiten jeweils zusammen 9 cm bzw. 12 cm bzw. 13 cm lang sind?

110.* Die Innenwinkel eines Dreiecks verhalten sich wie $5:6:7$. Berechnen Sie diese!

111.* Drei Zahlen verhalten sich wie $2:3:4$. Ihre Summe beträgt 36. Für welche Zahlen gilt dies?

112.* Drei Bagger unterschiedlicher Förderleistung schaffen eine Ausschachtungsarbeit in 10 Tagen. Die beiden kleineren Bagger hätten zusammen 20 Tage dazu benötigt, die beiden größeren zusammen 12 Tage.
Wie groß ist die Tagesleistung von jedem der drei Bagger?

---

*20.** In welchen Fällen hat ein lineares Gleichungssystem mit drei Variablen als Lösungsmenge die leere Menge?
Unter welchen Bedingungen besitzt die Lösungsmenge unendlich viele Elemente?

*21.** Eine dreistellige Zahl sei durch 9 und durch 11 teilbar. Wenn man ihre erste und letzte Ziffer vertauscht, so erhalte man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl.
Für welche dreistellige Zahl gilt das?

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Systeme!

113.* a) $\begin{aligned} 2x + y - 1 &= 0 \\ 3x + 2y &< -2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y &> 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x - 3y &< 3 \\ y + 4x &> -2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x - y + 1 &< 0 \\ x + y + 2 &< 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x &= 5 \\ x - y &< 5 \end{aligned}$

114.* a) $\begin{aligned} 4x - y &= 0 \\ 2y - 3x &> 7 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + y &> 0 \\ x - y &> 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + y &> 3 \\ 2x - y &< 3 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 5x &> 2{,}5y \\ 10x - 5 &< 4y \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} y &< 3 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$

c) Potenzen und Potenzfunktionen

Schreiben Sie die folgenden Produkte in Potenzschreibweise!

1. a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ b) $4 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5$ c) $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$ d) $c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$ e) $(xy) \cdot (xy)$ f) $(m-n) \cdot (m-n) \cdot (m-n)$

2. a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ b) $2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$ c) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ d) $b \cdot b \cdot b \cdot b$ e) $(rh) \cdot (rh) \cdot (rh)$ f) $(m+k) \cdot (m+k) \cdot (m+k) \cdot (m+k)$

Schreiben Sie die folgenden Potenzen als Produkte!

3. a) 3^5 b) $0{,}2^3$ c) $\left(-\frac{3}{8}\right)^4$ d) 6^3a e) $(mn^2)^4$ f) $(-k)^3$ g) $(a+b+c)^2$ h) $(x-y)^3$

4. a) 4^6 b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ c) $(-6)^5$ d) $5a^3$ e) $(2a^2)^3$ f) $(-a)^3$ g) $(x+y)^3$ h) $(p-q)^3$

Berechnen Sie!

5. a) $(-2)^3$ b) $-(-2)^3$ c) $(-25)^2$ d) -2^3 e) $(-1)^5$ f) $-\left(\frac{1}{5}\right)^4$ g) a^n mit $a \in \{-3; -1; 1; 3; 5\}$ und $n \in \{2; 3; 4; 5\}$

6. a) $(-3)^4$ b) $-(-3)^4$ c) -5^4 d) -25^2 e) $-(-1)^{15}$ f) $-(-13)^2$ g) x^y mit $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ und $y \in \{2; 3; 5; 6; 7\}$

Sind die folgenden Potenzen ($n \in N$, $n \geqq 2$) positiv oder negativ?

7. a) $(-1)^{2n}$ b) $(-2)^{2n-1}$ c) $(-a)^{2n+1}$ $(a \in P, a \neq 0)$

8. a) a^{2n-2} $(a \in P, a \neq 0)$ b) $(-a)^{2n+4}$ c) $-(-1)^{2n-1}$

Geben Sie die Struktur folgender Terme in Worten an!

9. a) $a + b^3$ b) $6a^2$ c) $\frac{\pi}{4}d^2$ d) $\left(\frac{x}{2}\right)^2$

10. a) $(a+b)^3$ b) $3xy^5$ c) $\frac{x^2}{2}$ d) $\frac{x}{2^2}$

---

1. Geben Sie Zahlenpaare $[a; b]$ an, für die gilt: $a^b = b^a$!
Geben Sie Zahlenpaare $[a; b]$ an, für die gilt: $a^b \neq b^a$!

2. Schreiben Sie in eine Tabelle mit zwei Eingängen
die Elemente a der Menge $A = \left\{-3; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 3\right\}$ und
die Elemente n der Menge $N = \{2; 3; 4; 5\}$!

a) Berechnen Sie die Potenz a^n!

b) Ermitteln Sie in der Tabelle die Teilmengen der positiven und die der negativen Potenzen a^n! Geben Sie diese Teilmengen mit Hilfe der mathematischen Symbolik möglichst kurz an!

c) Geben Sie die Menge aller Zahlenpaare $[a; n]$ an, für die gilt: $a^n = 1$; $-1 < a^n < 0$; $a^n = 0$!

Berechnen Sie!

11. a) $3^2 \cdot 3^2$ b) $(-4)^2 \cdot (-4)^4$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$ d) $0{,}25^5 \cdot 4^5$ e) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5^2$

12. a) $7^5 : 7^3$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^6 : \left(\frac{1}{5}\right)^3$ c) $13^6 \cdot \frac{1}{13^4}$ d) $5^7 : 5^3$ e) $\frac{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}{(-2)^2}$

13. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 6^2$ b) $(-5)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$

c) $(2 \cdot 4)^3$ d) $\left(4 \cdot \frac{1}{8}\right)^2$ e) $8^5 : 4^5$

f) $(-2)^4 \cdot \frac{1}{4^4}$ g) $(5^2)^3$ h) $\left(\frac{1}{6^2}\right)^2$

14. a) $12^3 : 4^3$ b) $5^2 \cdot \frac{1}{10^2}$

c) $6^2 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2$ d) $\frac{49^4}{7^4}$ e) $\left(51 \cdot \frac{1}{17}\right)^4$

f) $(-1)^5 \cdot 2^5$ g) $(-5^2)^3$ h) $(3^3)^3$

Hinweise zu den Aufgaben 15 bis 38:

Alle Basen seien reelle Zahlen. Alle Divisoren bzw. alle Nenner von Brüchen seien von Null verschieden. Basis und Exponent seien jeweils nicht gleichzeitig Null.

Berechnen bzw. vereinfachen Sie weitgehend!

15. a) x^3x^5 b) a^2a^4 c) $\frac{3}{5}b^3 \cdot \frac{4}{7}b^2$

d) $(-x)^4\, x^3$ e) $(-x)^3\, x^4$

f) $\frac{1}{2}a^2b^4c^3 \cdot \frac{3}{4}a^3b^4c^2$

16. a) m^3m^5 b) y^6y^4 c) $\left(-\frac{6}{7}v^3\right)\left(-\frac{1}{8}v^6\right)$

d) $(-x^3)\,x^4$ e) $(-x^3)(-x^4)$

f) $7{,}24a^3b^2 \cdot 82{,}3a^2b^2$

17. a) $(x-1)^3 \cdot (x-1)^2$ b) $a^4 : a^2$

c) $5^{18} : 5^{14}$ d) $(1{,}2x^4) : (3{,}6x^2)$

e) $(-x^5) : x^2$ f) $(-x)^5 : x^2$

18. a) $(a-b)^4\, c^5 \cdot (a-b)^2\, c^7$ b) $x^6 : x^3$

c) $b^{27} : b^{13}$ d) $(1{,}8m^5) : (5{,}4m^2)$

e) $(-x)^7 : x^3$ f) $x^5 : (-x^2)$

Vereinfachen Sie weitgehend!

Hinweis: Alle Exponenten seien natürliche Zahlen $\geqq 1$, wenn nicht anders angegeben!

19. a) $a^{2m}a^m$ b) $c^{2m-n}c^{2n-m}$

c) $x^m : x^2$ $(m \geqq 3)$ d) $10^{5a-2} : 10^n$

e) $x^{2p+5q} : x^{q-p-2}$

20. a) $x^n x^{3n}$ b) $r^{3k+1}r^{3-2k}$

c) $a^n : a^3$ $(n \geqq 4)$ d) $5^{7k+1} : 5^{2k}$

e) $a^{2r-s+1} : a^{r-s}$

Fassen Sie zu einer Potenz zusammen!

21. a) $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ b) $a^4 \cdot b^4 \cdot (c+d)^4$

c) $m^2 \cdot \frac{k^2}{l^2}$ d) $\frac{(a-b)^5}{(a+b)^5} \cdot (a-1)^5$

22. a) $a^3b^3c^3$ b) $\frac{m^5}{n^5}$

c) $\frac{(r-s)^4}{(k+s)^4}$ d) $(x-y)^3\,(x+y)^3$

Fassen Sie zu einer Potenz zusammen und vereinfachen Sie die Basis!

23. a) $\frac{17^3}{34^3} \cdot \frac{23^3}{69^3}$ b) $\left(\frac{a^6}{2b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^5}{a^3}\right)^3$

c) $\frac{(2p^4q^7)^5}{(3p^2q^2)^5}$

24. a) $\frac{15^2}{22^2} \cdot \frac{11^2}{5^2}$ b) $\left(\frac{4b^4}{a}\right)^4 \left(\frac{a}{8b}\right)^4$

c) $\frac{(30^4p^5)^3}{(60^2p^2)^3}$

Berechnen bzw. vereinfachen Sie weitgehend!

25. a) $(m^2)^4$ b) $(0{,}3 \cdot m^3 \cdot n^2)^3$

c) $(x^{n-1} \cdot y^{n-2})^3$ $(n \in N, n \geqq 3)$ d) $\left(\frac{5x^3}{6y^2}\right)^3$

26. a) $(a^3)^4$ b) $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^2$

c) $(4m^pn^q)^3$ $(p, q \in N;\, p, q \geqq 1)$ d) $\left(\frac{4a^2}{7b^3}\right)^2$

27. a) $5^2 + 6 \cdot 5^2 - 10 \cdot 5^2$ b) $(1{,}3b - 0{,}4)^3$

c) $2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot (-3)^2$

28. a) $3^4 - 5 \cdot 3^4 + 7 \cdot 3^4$ b) $(1{,}5a - 0{,}2)^3$

c) $2 \cdot (-4)^4 - 5(-3)^2 - 2 \cdot 4^2$

3. Ordnen Sie die folgenden Potenzen nach ihrer Größe! 22^2; 2^{22}; $(2^2)^2$; 2^{2^2}

4. Geben Sie die größte Zahl an, die sich durch dreimalige Verwendung der Ziffer „3" darstellen läßt!

5. Welche Bedingungen müssen für die Variablen in den folgenden Termen gelten, wenn die Basen reelle und die Exponenten natürliche Zahlen $\geqq 2$ sein sollen?

a) a^{m-5} **b)** $\frac{r^m}{r^{2m-2}}$ **c)** $\frac{(x \cdot y)^k}{(x+y)^k}$ **d)** $(a \cdot x^{2m} + b \cdot x^{2n+4m} - c \cdot x^{2m}) : (x^{m-n})$

Hinweis zu den Aufgaben 29 bis 36:

Alle Exponenten seien ganze Zahlen!

29. Berechnen Sie folgende Potenzen!

a) 20^1 b) 5^0 c) 1^1 d) 100^0

e) $(-6)^0$ f) $(-b)^0$ $(b \neq 0)$

g) $\frac{(-3)^3}{(-3)^3}$ h) $2^3 \cdot 5^0$ i) $(-5)^3 \cdot (-5)^1$

30. Vereinfachen Sie folgende Quotienten!

a) $x^3 : x^3$ b) $a^{m+1} : a^m$ $(m \geqq 0)$

c) $3x^{m+2} : 3x^{m+1}$ $(m \geqq -1)$

d) $0{,}21x^3y^6 : (7x^2y^2)$ e) $\frac{27a^m}{20b^3} : \frac{9a^4}{12b^4}$

Formen Sie die folgenden Terme so um, daß keine Potenzen mit negativen Exponenten auftreten!

31. a) 5^{-6} b) x^{-4} c) 15^{-c} $(c \in N)$

d) $\frac{1}{6^{-2}}$ e) $\frac{1}{x^{-k}}$ $(k \in N)$ f) $\frac{1}{(-10)^{-3}}$

g) $a^4 \cdot b^{-3}$ h) $\frac{m^{-3}}{n^{-6}}$ i) $\frac{1}{x^{-7} \cdot y^a}$ $(a \in N)$

32. a) 4^{-3} b) $(-b)^{-2}$ c) $\frac{a^3}{a^{-3}}$

d) a^{-5} e) $(6^{-1})^3$ f) $\frac{1}{2^{-3}}$

g) $x^{-4} \cdot y^{-4}$ h) 1^{-3} i) $\frac{1}{(-3)^{-4}}$

Schreiben Sie die folgenden Terme in möglichst einfache Formen um!

33. $a^{k+1} \cdot b^{k-1} \cdot c^{-k} \cdot a^{-k} \cdot b^{-k} \cdot c^{k-1}$

34. $(2x + 3x^{-1}) \cdot (3x^{-2} - 2x^{-1})$

35. a) $(-5)^3 : (-5)^6$ b) $a^5 : a^9$

c) $\left(\frac{1}{2} \cdot p^{12}\right) : \left(\frac{3}{2} \cdot p^{14}\right)$

d) $(q^{2n-1} \cdot r^{3n}) : (q^{2n+1} \cdot r^{-3n})$

e) $\frac{2^a \cdot 2^5 \cdot 2^{10-a}}{2^{2a-3}}$

36. a) $(-4^{10}) : (-4)^{12}$ b) $c^6 : c^{11}$

c) $(1{,}4q^{12}) : (3{,}5q^{20})$

d) $(a^{m-1} \cdot b^{-n}) : (a^m \cdot b^{2n} \cdot c^1)$

e) $\frac{x^{-2a-4}}{x^{-2a+4}}$

37. a) $(3^2)^{-2}$ b) $\left(\frac{x^2}{10}\right)^{-1}$ c) $(a^{-5})^2$

d) $(-x^{-7})^{-2}$ e) $(r^{-4}s^3t)^{-3}$ f) $\frac{(a^2-b^2)^{-2}}{(a+b)^{-2}}$

38. a) $(5^2)^{-3}$ b) $\left(-\frac{1}{6}x^3\right)^{-1}$ c) $(3^{-2})^2$

d) $\left(\frac{4}{5}a^{-3}\right)^{-2}$ e) $(n^{-4} \cdot v^{-2})^3$ f) $\frac{(a-b)^{-2}}{(a^2-b^2)^{-1}}$

Für welche Größen verwendet man die folgenden Einheiten?
Schreiben Sie die Einheiten als Produkte mit zum Teil negativen Exponenten!

39. a) $1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ b) $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ c) $1\,\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm}^2}$

d) $1\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}$ e) $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

40. a) $1\,\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$ b) $1\,\frac{\mathrm{kpm}}{\mathrm{s}}$ c) $1\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}$

d) $1\,\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{grd}}$ e) $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

C

6. Gilt die folgende Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort!
Sind zwei Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gleich, so stimmen sie in Basis und Exponent überein.

7. Beweisen Sie die Gültigkeit des Potenzgesetzes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für $m, n \in G$! (Die Gültigkeit dieses Gesetzes für $m, n \in N$ wird vorausgesetzt.)
Führen Sie die folgende Fallunterscheidung durch! Fall 1: $m \geqq 0, n \geqq 0$; Fall 2: $m \geqq 0; n < 0$; Fall 3: $m < 0, n \geqq 0$; Fall 4: $m < 0; n < 0$.

8. Beweisen Sie die Gültigkeit des Potenzgesetzes $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ für $n \in G$. (Die Gültigkeit dieses Gesetzes für $n \in N$ wird vorausgesetzt.)

Radizieren Sie!

41. a) $\sqrt{(-7)^2}$ b) $\sqrt[5]{3{,}2^5}$ c) $\sqrt[4]{a^8}$ $(a \in P)$

42. a) $\sqrt{(-5)^2}$ b) $-\sqrt{5^2}$ c) $\sqrt[4]{(-4)^2}$

Ermitteln Sie mit Hilfe des Rechenstabes rationale Näherungswerte für folgende Wurzeln! Machen Sie vorher einen Überschlag!

43. a) $\sqrt{230}$ b) $\sqrt{63}$ c) $\sqrt{0{,}9}$ d) $\sqrt[3]{9}$ e) $\sqrt[3]{0{,}05}$

44. a) $\sqrt{319}$ b) $\sqrt{47}$ c) $\sqrt{0{,}5}$ d) $\sqrt[3]{60}$ e) $\sqrt[3]{0{,}6}$

45. Schreiben Sie die folgenden Wurzeln auf die vorgegebenen Wurzelexponenten n um!

a) $\sqrt{5}$ $(n = 4)$ b) $\sqrt[3]{3^5}$ $(n = 6)$ c) $\sqrt{2^5}$ $(n = 4)$ d) $\sqrt[4]{6^3}$ $(n = 8)$

46. Bringen Sie die folgenden Wurzeln jeweils auf den kleinstmöglichen Wurzelexponenten!

a) $\sqrt[8]{3^4}$ b) $\sqrt[4]{7^6}$ c) $\sqrt[6]{5^3}$ d) $\sqrt[4]{4^3}$

Schreiben Sie die folgenden Wurzeln als Potenzen!

47. a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt[3]{4^2}$ d) $\sqrt{11^{-3}}$ e) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{8}\right)^2}$ f) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

48. a) $\sqrt[3]{7}$ b) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt[3]{6^2}$ d) $\sqrt{32^{-3}}$ e) $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^4}$ f) $\sqrt[4]{\left(-\frac{2}{3}\right)^6}$

Schreiben Sie die folgenden Potenzen als Wurzeln!

49. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $6^{\frac{2}{3}}$ c) $13^{-\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}}$ e) $\left(\frac{2}{9}\right)^{-\frac{1}{3}}$

50. a) $7^{\frac{1}{2}}$ b) $9^{\frac{2}{3}}$ c) $21^{-\frac{1}{3}}$ d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{3}}$ e) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Wenden Sie auf die folgenden Produkte bzw. Quotienten die entsprechenden Potenzgesetze an und vereinfachen Sie weitgehend!

51. a) $9^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ d) $n^{\frac{3}{2}} \cdot n^{\frac{4}{2}} \cdot n^{\frac{5}{2}}$ $(n \geqq 0)$

52. a) $6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}$ b) $7^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{\frac{3}{5}}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ d) $a^{-\frac{4}{7}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{14}}$ $(a > 0)$

53. a) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ b) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot (-2)^{\frac{2}{3}}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} : \left(\frac{17}{15}\right)^{\frac{2}{5}}$

54. a) $6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{24}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$ c) $5^{\frac{1}{4}} : 10^{\frac{1}{4}}$

55. a) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ b) $\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{5}}$ c) $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$ $(x \geqq 0)$

56. a) $\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$ b) $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{4}}$ c) $(n^4)^{\frac{3}{4}}$ $(n \geqq 0)$

---

9. Unter welchen Bedingungen sind jeweils die folgenden Wurzeln definiert?

a) $\sqrt{b}$ b) $\sqrt[3]{-a}$ c) $\sqrt[m]{\frac{1}{x}}$ d) $\sqrt{x-y}$ e) $\sqrt{1-a}$ f) $\sqrt[4]{3b-2}$

10. Formen Sie die folgenden Terme um! Geben Sie für alle auftretenden Variablen die größtmöglichen Grundbereiche an!

a) $x \cdot y \sqrt[m]{x^{m+1} \cdot y^m}$ **b)** $\sqrt{ax^2 + bx^2} \cdot \sqrt{ay^2 - by^2}$ **c)** $\sqrt{a \cdot b \cdot c} \cdot (x\sqrt{a} - y\sqrt{b} - z\sqrt{c})$

Fassen Sie die folgenden Summen zusammen! Rechnen Sie dann mit Hilfe des Rechenstabes!

57. a) $5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

c) $7\sqrt[3]{9} + 4\sqrt[3]{9} - 6\sqrt[3]{9}$

d) $8\sqrt{2} - a\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

58. a) $7\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$

b) $9\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c) $4\sqrt[3]{5} - 7\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{8}$

d) $x\sqrt{7} + 7\sqrt{7} - 6\sqrt{7}$

Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Produkte und Quotienten!

59. a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$ **b)** $\sqrt[3]{17} \cdot \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{u} \cdot \sqrt[4]{u^2} \cdot \sqrt[8]{u^2}$ $(u \geqq 0)$

d) $\sqrt[3]{a^4x^2} \cdot \sqrt[3]{a^2x^4}$

e) $\sqrt{18} : \sqrt{2}$ **f)** $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{8}$

60. a) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$ **b)** $\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}$

c) $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$

d) $\sqrt[3]{b^5} : \sqrt[3]{b^2}$ $(b > 0)$

e) $\sqrt{40} : \sqrt{10}$ **f)** $\sqrt{\frac{15}{24}} \cdot \sqrt{\frac{9}{25}}$

Vereinfachen Sie die folgenden Wurzeln! Benutzen Sie dabei die Gesetze $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ bzw. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$!

61. a) $\sqrt[4]{160000}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}00004}$

c) $\sqrt[3]{81x^3}$ $(x \geqq 0)$

d) $\sqrt{\frac{a^2x}{b^2y}}$ $(b \neq 0, x \geqq 0, y > 0)$

62. a) $\sqrt[3]{162}$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{490000}}$

c) $\sqrt{225a^3b^2}$ $(a \geqq 0)$

d) $\sqrt[3]{\frac{16b^4c^2}{27dc^3}}$ $(d > 0, c > 0)$

Vereinfachen und berechnen Sie die folgenden Summen bzw. Produkte!

63. a) $2\sqrt{12} + 5\sqrt{3} + 10\sqrt{75} - 5\sqrt{243}$

b) $2\sqrt{8} - 2\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{18} - \sqrt{72}$

64. a) $(2 + 3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$ **b)** $(16 - \sqrt{2})(2\sqrt{2} - 3)$

c) $(5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + 2\sqrt{81}) \cdot \sqrt{3}$

Schreiben Sie die folgenden Terme in möglichst einfache Formen um!

65. a) $(\sqrt{5})^2$ **b)** $\sqrt{3^2}$ **c)** $(\sqrt[3]{3})^6$

d) $(\sqrt[5]{a^7b^6})^{10}$ $(a \geqq 0)$

66. a) $(\sqrt{3})^2$ **b)** $\sqrt[3]{4^6}$

c) $\sqrt[6]{(-3)^{12}}$ **d)** $(\sqrt[4]{25})^2$

Radizieren Sie!

67. a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[4]{9}}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$

68. a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$ **c)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{64}}$

Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a_0 \cdot 10^q$ mit $a_0 \in R$; $1 \leqq a_0 < 10$; $q \in G$!

69. a) 2421 **b)** 35040000 **c)** 0,238

d) 0,000048 **e)** 43800 **f)** 400

70. a) 23,41 **b)** 0,0205 **c)** 0,001

d) 0,00005 **e)** 34165 **f)** 4000300

C

Schreiben Sie ohne abgetrennte Zehnerpotenzen!

71. a) $7 \cdot 10^5$ b) $5 \cdot 10^{-3}$ c) $2{,}73 \cdot 10^4$ d) $9{,}834 \cdot 10^7$ e) $6 \cdot 10^4$ f) $8{,}42 \cdot 10^1$

72. a) $4{,}6 \cdot 10^{-2}$ b) $3{,}43 \cdot 10^{-4}$ c) $6{,}42 \cdot 10^7$ d) $8{,}3 \cdot 10^{-5}$ e) $4{,}2 \cdot 10^{-2}$ f) $3{,}2 \cdot 10^6$

73. Schreiben Sie die folgenden Größen mit abgetrennten Zehnerpotenzen!

a) In 22,4 l Sauerstoff unter Normalbedingungen befinden sich 602400000000000000000 Moleküle.

b) Ein Molekül Wasser (H_2O) hat eine Masse von 0,00000000000000000000002988 g

c) Die elektrische Elementarladung beträgt 0,0000000000000000001602 C.

d) Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne beträgt 149500000000 m.

74. Zwei quadratische Metallplatten mit einer Seitenlänge von 15 cm stehen sich in Luft (Abstand $d = 2{,}5$ mm) gegenüber. Wie groß ist die elektrische Kapazität dieser Anordnung?

$C = \frac{8{,}86}{10^{14}} \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$ ($\varepsilon_r \approx 1$; A – Flächeninhalt einer Platte in cm^2; d – Abstand der Platten in mm; C – Kapazität in F). Benutzen Sie den Rechenstab!

Drücken Sie die folgenden Maßangaben mit Hilfe der genormten Vorsätze aus!

75. a) 10^6 t b) 10^3 t c) 10^{-1} t d) 10^3 A

76. a) 10^{-3} A b) 10^3 m c) 10^{-3} p d) 10^{-3} l

Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes!

77. a) $7350 \cdot 172000$ b) $0{,}00041 \cdot 230$ c) $\frac{7270}{192}$ d) $3{,}8^2$ e) 1650^2 f) $0{,}0053^2$ g) $0{,}0000835^2$ h) $\frac{0{,}00038}{0{,}0145}$ i) $\frac{672}{0{,}54} \cdot 321$

78. a) $0{,}00643 \cdot 0{,}72$ b) $\frac{7310}{52}$ c) $\frac{0{,}093}{0{,}38}$ d) $\frac{691}{0{,}0485}$ e) $\frac{0{,}873}{0{,}00053}$ f) $57{,}2 \cdot 0{,}000081$ g) 370^2 h) 118000^2 i) $0{,}0062^2$

Berechnen Sie die Dichte (in $g \cdot cm^{-3}$) folgender Himmelskörper!

79. Sonne ($m = 1{,}985 \cdot 10^{30}$ kg, $V = 1{,}41 \cdot 10^{18}$ km^3)

80. Mond ($m = 5{,}979 \cdot 10^{24}$ kg, $V = 1{,}083 \cdot 10^{12}$ km^3)

Verwenden Sie beim Lösen der folgenden Aufgaben den Rechenstab!

81. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit eines frei-fallenden Körpers nach 2,5 s ($g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$)!

82. Ermitteln Sie die Beschleunigung eines Fahrzeuges, das nach 6 s eine Geschwindigkeit von 40 km h^{-1} erreicht ($v = a \cdot t$)!

83. Berechnen Sie den Bremsweg eines Motorrades, wenn die Verzögerung beim Bremsen 4 $m \cdot s^{-2}$ beträgt und das Motorrad mit 60 km h^{-1} fährt $\left(s = \frac{v^2}{2a};\ a \text{ Verzögerung}\right)$!

84. Wieviel Sekunden braucht ein D-Zug beim Anfahren, um auf die Geschwindigkeit von 80 km h^{-1} zu kommen ($v = a \cdot t$; $a = 0{,}25$ m s^{-2})?

85. Ermitteln Sie den elektrischen Widerstand einer Kupferfreileitung mit einem Querschnitt von 12 mm^2 und einer Länge von 150 m $\left(R = \varrho \cdot \frac{l}{A};\ \varrho_{Cu} = 0{,}0155\ \Omega\ mm^2\ m^{-1}\right)$!

86. Welche Masse hat ein Stahlrohr, dessen Länge 3000 mm, dessen Außendurchmesser 5,5 cm und dessen Wanddicke 2 mm betragen ($\varrho = 7{,}85\ g \cdot cm^{-3}$)?

Geben Sie die folgenden Dezimalzahlen als Dualzahlen an!

87. a) 13 b) 51 c) 105 d) 1,5 e) 0,375 f) 7

88. a) 17 b) 43 c) 205 d) 3,5 e) 0,875 f) 9

Geben Sie die folgenden Dualzahlen als Dezimalzahlen an!

89. a) LOLOL b) LLLOO c) LL, LL d) LO, OL

90. a) LOOLOOL b) LLOOLL c) LLL, LL d) LOL, OL

---

11. Geben Sie die Dezimalzahl 444 (321) im Positionssystem mit der Basis **a)** 5, **b)** 4 an!

12. Lösen Sie die folgenden Aufgaben zunächst im Dualsystem und danach im Dezimalsystem!

a) LLOLL + LOLOL **b)** LOLLOL + LLL + LOLOL **c)** LLOLLL + LLLLL

d) LLOL · LLOL **e)** LOLOLL · LOOLO **f)** LOLOLOLO · LLLL

Machen Sie die Nenner rational!

91. a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{32}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ d) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{2}{2\sqrt{8}}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

92. a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{8}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$ e) $\frac{9}{2\sqrt{18}}$ f) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

---

13. Machen Sie die Nenner rational!

Hinweis: Wenden Sie dabei die binomischen Formeln an!

a) $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{3}{3-\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ **d)** $\frac{2\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}}$ **e)** $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ **f)** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

---

93. Ordnen Sie jedem Element x der Menge $X = \{1; 2; 4\}$ genau ein Element y der Menge $Y = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}$ nach der Vorschrift

a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{1}{4}x$ zu!

Ermitteln Sie die Menge der geordneten Zahlenpaare!

94. Ordnen Sie jedem Element x der Menge $X = \{1; 3; 9\}$ genau ein Element y der Menge $Y = \left\{\frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 1\right\}$ nach der Vorschrift

a) $y = \frac{x}{9}$ b) $y = \frac{1}{x}$ zu!

Ermitteln Sie die Menge der geordneten Zahlenpaare!

95. Der Definitionsbereich einer Funktion sei $X = \left\{-\frac{1}{2}; 0; +\frac{1}{2}; +1; +\frac{3}{2}; +2\right\}$.

Man erhält die Funktionswerte, indem man die Argumente

a) quadriert und dann durch 3 dividiert, b) durch 3 dividiert und dann quadriert.

Geben Sie die so gegebene Funktion als Menge geordneter Zahlenpaare an! Stellen Sie die Funktion durch eine Gleichung dar! Zeichnen Sie einen entsprechenden Graph!

96. Gegeben sei die Funktion a) $4y + x = 20$, b) $x + 3y = 30$.

Ermitteln Sie die Menge der geordneten Zahlenpaare $[x; y]$ mit $x, y \in N$; $0 \leq x \leq 20$! Stellen Sie die Funktion graphisch dar! Geben Sie den Wertebereich der Funktion an!

97. Eine Drahtspirale von 100 mm Länge dehne sich bei Belastung so aus, daß das Verhältnis der ausgeübten Kraft zu der dadurch hervorgerufenen Längenausdehnung stets $\frac{2}{3}\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{mm}}$ beträgt.

Ermitteln Sie die Gesamtlänge l der Spirale, wenn eine Belastung F von 10p (20p, 30p, 50p, 60p) erfolgt! Geben Sie die Funktion an

a) durch die Menge der geordneten Paare $[F; l]$;

b) durch die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung!

98. Nachdem ein Auto 8 km vom Abfahrtsort entfernt ist, fahre es mit gleichbleibender Geschwindigkeit $v = 60$ km/h. Wie groß ist die Entfernung s vom Abfahrtsort, nachdem es $t = 10$ (20, 30, 40, 50) min mit gleichbleibender Geschwindigkeit gefahren ist? Geben Sie die Funktion an

a) durch die Menge der geordneten Paare $[t; s]$;

b) durch die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung!

Hinweis: Beachten Sie, daß Sie bei den Aufgaben 97b) und 98b) Definitionsbereich und Wertebereich angeben müssen!

99. Ermitteln Sie den Wertebereich der folgenden Funktionen jeweils für die Definitionsbereiche $0 \leqq x \leqq 8 \quad (x \in N)$ und $-5 \leqq x \leqq 8 \quad (x \in G)$!

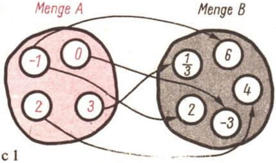
a) $y = 3x - 2$ b) $5y = x + 10$ c) $2x + 3y = 0$ d) $y = -2{,}4$

Untersuchen Sie, ob die Elemente der Menge A eindeutig den Elementen der Menge B zugeordnet sind!

100. a)

A	-2	0	1	3
B	-1	3	5	9

b)

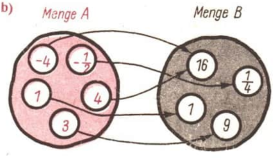


c 1

101. a)

A	0	1	2	3	4
B	0	1 und -1	4 und -4	9 und -9	16 und -16

b)



c 2

102. Gegeben sei eine Funktion durch die Gleichung $y = x^3$ mit dem Definitionsbereich

$$D = \left\{-2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}.$$

Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion!

103. Gegeben sei eine Funktion durch die Gleichung $y = x^2$ mit dem Definitionsbereich

$$D = \left\{-2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}.$$

Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion!

Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen! Wählen Sie jeweils als Definitionsbereich $-2 \leqq x \leqq 2$; $x \in P$! Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften dieser Funktionen!

104. a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ **105.** a) $y = x^4$ b) $y = x^5$

106. a) Stellen Sie die Volumen von Würfeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen graphisch dar! Tragen Sie dazu auf der Abszissenachse (Einheit 2 cm) die Seitenlängen und auf der Ordinatenachse (Einheit 2 mm) die Volumen ab!

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der graphischen Darstellung die folgenden Größen!

Volumen zu den Kantenlängen α) 2,2 m β) 0,7 cm γ) 3,5 dm δ) 1,3 mm ε) 2,8 cm

Kantenlängen zu den Volumen α) 2 m³ β) 10 cm³ γ) 25 dm³ δ) 33 mm³ ε) 50 cm³

In welchem Teilbereich des angegebenen Definitionsbereichs sind die folgenden Funktionen steigend bzw. fallend? Geben Sie auch zu jeder Funktion den Wertebereich an!

107. a) $f(x) = x^2 \quad (x \in P)$

b) $f(x) = x^3 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

108. a) $f(x) = x^2 \quad (-2 \leqq x \leqq 1)$

b) $f(x) = x^3 \quad (x \in P)$

109. $f(x) = x^4 \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$

110. $f(x) = x^4 \quad (0 \leqq x \leqq 5)$

111. Wie ändern sich die Funktionswerte bei der Funktion $f(x) = x^2$ $(f(x) = x^3)$, wenn man vom Argument x_0 zu $2 \cdot x_0$, $3 \cdot x_0$, $\frac{x_0}{2}$, $\frac{x_0}{3}$, $\frac{x_0}{10}$ geht? Geben Sie die Änderung des Arguments mit Worten wieder!

112. Stellen Sie für die Funktionen $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-4}$ Wertetafeln auf mit

$$x \in \left\{-10^3; -10^2; -50; -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{10}; -\frac{1}{10^2}; \frac{1}{10^3}; \frac{1}{10^2}; \frac{1}{10}; 1; 10^2; 5 \cdot 10^3; 10^6\right\}!$$

a) Welche Feststellungen können Sie für alle aufgeführten Funktionen treffen, wenn α) x dem absoluten Betrag nach groß wird; β) x dem absoluten Betrag nach klein wird?

b) Welche Schlußfolgerungen ergeben sich aus a) für die Graphen der Funktionen?

c) Was können Sie über die Zahlenpaare $[-1; y]$ und $[1; y]$ aussagen?

113. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $y = x^n$ mit $n \in \{-1; -2; -3; -4\}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Untersuchen Sie die Symmetrieverhältnisse dieser Funktionen an Hand ihrer Graphen!
Geben Sie an, welche dieser Funktionen gerade und welche ungerade sind!
Geben Sie die Intervalle an, in denen die Funktionen monoton steigen bzw. monoton fallen!

114. a) Zeichnen Sie die Graphen der Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n \in \{-3; -2; -1; 2; 3\}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

b) Zeichnen Sie zusätzlich die Graphen der Funktionen $y = x^1$ und $y = x^0$ in dieses Koordinatensystem! Beachten Sie den Definitionsbereich der Funktion $y = x^0$!

c) Untersuchen Sie die Graphen dieser Funktionen
- auf gemeinsame Punkte,
- auf die Symmetrieverhältnisse,
- auf das Monotonieverhalten,
- auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Definitionsbereich und im Wertebereich!

115. Wie ändern sich die Funktionswerte bei der Funktion $y = x^{-1}$ $(y = x^{-2})$, wenn man ein Argument verdoppelt, verdreifacht, halbiert? Formulieren Sie Ihre Antworten in Sätzen!

116. Zeichnen Sie in ein R, I-Koordinatensystem den Graph der Funktion $I = \frac{U}{R}$ (I – Stromstärke, $U = 220\ \text{V}$, R – Widerstand) für $0\ \Omega < R < 1000\ \Omega$! Geben Sie den Wertebereich für I an! Charakterisieren Sie das Verhalten der Stromstärke bei steigendem Widerstand! Geben Sie das Intervall an, für das $0\ \text{A} < I \leqq 6\ \text{A}$ gilt!

117. Der spezifische Widerstand in einem Gleichstromkreis kann durch folgende Gleichung beschrieben werden.
$R = \varrho \frac{l}{A}$ (ϱ spezifischer Widerstand in $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$, l Länge des Leiters in m, A Querschnitt des Leiters in mm^2)
Zeichnen Sie das Querschnitts-Widerstands-Diagramm für $0\ \text{mm}^2 < A \leqq 5\ \text{mm}^2$ für

a) $\varrho_{\text{Fe}} = 0{,}10\ \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$; $l_1 = 0{,}2\ \text{m}$ $(l_2 = 2\ \text{m}; l_3 = 20\ \text{m})$;

b) $\varrho_{\text{Cu}} = 0{,}0155\ \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$; $l_1 = 0{,}5\ \text{m}$ $(l_2 = 5\ \text{m}; l_3 = 50\ \text{m})$;

c) $\varrho_{\text{Al}} = 0{,}024\ \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$; $l_1 = 0{,}03\ \text{m}$ $(l_2 = 3\ \text{m}; l_3 = 30\ \text{m})$!

Wählen Sie dazu geeignete Koordinateneinheiten! Benutzen Sie den Rechenstab!

C

14. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen!
Geben Sie zu jeder Funktion den Wertebereich an! Für a gelte jeweils: $a \in \{3; 0{,}5; -1; -2\}$

a) $y = a \cdot x^{-1}$ $(x \in P; x \neq 0)$

b) $y = a \cdot x^{-2}$ $(x \in P; x \neq 0)$ **c)** $y = \frac{1}{x} + a$ $(x \in P; x \neq 0)$

118.* Zeichnen und spiegeln Sie die Graphen der Funktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$ (jeweils $0 \leqq x \leqq 10$) an der x-Achse!
Geben Sie die Gleichungen sowie den Definitionsbereich und den Wertebereich dieser durch die Spiegelbilder entstandenen Funktionen an!

119.* Ermitteln Sie zu jeder der folgenden Funktionen die Umkehrfunktion!

a) $f_1 = \left\{\left[-2; -\frac{7}{2}\right], [-1; -2], \left[0; -\frac{1}{2}\right]\right\}$ **b)** $f_2 = \{[0; 2], [1; 3], [3; 11], [4; 18]\}$

c) $f_3 = \left\{[-2; 3{,}2], [-1; 0{,}2], \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{80}\right], [0; 0]\right\}$

d) $f_4 = \{[0; -1], [1; 0], [8; 1], [27; 2]\}$

C

*15.** Bilden Sie zu $y = x^4$ $(0 \leqq x < 3)$ die Umkehrfunktion! Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen in ein und dasselbe Koordinatensystem!

*16.** Begründen Sie, warum zu folgenden Funktionen im angegebenen Definitionsbereich keine Umkehrfunktion gebildet werden kann!

a) $f(x) = 2x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ **b)** $f(x) = 4x^4$ $(x \in P)$

---

120. Stellen Sie die folgenden Funktionen in jeweils einem Koordinatensystem graphisch dar!

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = 2x + 1$ **d)** $y = x^2$ **e)** $y = x^2 - 2$

Verschieben Sie die Graphen um e $(e \in \{2; 0{,}5; -1; -3\})$ in Richtung der y-Achse!

121. Strecken Sie die Graphen der folgenden Funktionen (Streckungsfaktoren $a \in \{2; 1{,}5\}$)! Geben Sie die dazugehörigen Funktionsgleichungen an!

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = x^2$

122. Stauchen Sie die Graphen der folgenden Funktionen $\left(\text{Stauchungsfaktoren } a \in \left\{0{,}1; 0{,}5; \frac{3}{4}\right\}\right)$!
Geben Sie die dazugehörigen Funktionsgleichungen an!

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = x^2$

123. Spiegeln Sie die Graphen der Funktionen aus den Aufgaben c 120. an der x-Achse! Geben Sie die dazugehörigen Funktionsgleichungen an!

---

17. Strecken Sie die Graphen der folgenden Funktionen (Streckungsfaktoren $a \in \{2; 3; 1{,}5\}$)!

a) $f(x) = 2x + 1$ **b)** $f(x) = x^2 - 2$

18. Spiegeln Sie die Graphen folgender Funktionen!

a) $f(x) = 2x^2 + 2$ $(x \in P)$ an der x-Achse **b)** $f(x) = 2x^2 - 2$ $(x \in P)$ an der x-Achse

c) $f(x) = x^3 + 1$ $(0 \leqq x)$ an der x-Achse **d)** $f(x) = x^3 - 1$ $(0 \leqq x)$ an der x-Achse

e) $f(x) = x^2$ $(0 \leqq x)$ an der Geraden $f(x) = x$

Stellen Sie die Gleichungen der zu den Spiegelbildern gehörenden Funktionen auf! Ermitteln Sie zu diesen Funktionen den Definitionsbereich und den Wertebereich!

---

124. Stellen Sie graphisch die potentielle Energie in Abhängigkeit von der Höhe dar ($W_{pot} = m \cdot g \cdot h$; $0 \leqq h \leqq 5$ m; $m \in \{1$ kg; 6 kg; 8 kg$\}$)!
Wählen Sie unterschiedlich geteilte Achsen!

125. Der Inhalt einer Kreisfläche ist in Abhängigkeit von der Länge ihres Durchmessers graphisch darzustellen ($0 \leqq d \leqq 6$ cm).

126. Zeichnen Sie den Graph der Funktion

$$W_{kin}(v) = \frac{m}{2} \cdot v^2 \; (0 \leqq v \leqq 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1})$$

für $m_1 = 700$ kg und $m_2 = 1000$ kg!

127. Zeichnen Sie den Graph der Funktion

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 \; (0 \leqq t \leqq 10 \text{ s}) \text{ für}$$

$a_1 = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_2 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,
$a_3 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_4 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$!

128. Das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls lautet: $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ (s ist der zurückgelegte Weg in m; t ist die Fallzeit in s; $g = 9{,}81 \text{ ms}^{-2}$ ist die Fallbeschleunigung).

a) Stellen Sie dieses Gesetz graphisch dar!
b) Ermitteln Sie das Intervall aus dem Definitionsbereich von t für $50 \text{ m} < s < 100 \text{ m}$!

129. In einer Meßreihe wird die elektrische Leistung eines Gleichstromkreises in Abhängigkeit von der Spannung untersucht.

U (in V)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
P (in W)	0,1	0,35	0,9	1,55	2,55	3,6	5,0	6,4	8,0	10

a) Tragen Sie die Meßwerte in ein U,P-Koordinatensystem ein! Zeichnen Sie die Kurve (Spannung U auf der Abszissenachse, Leistung P auf der Ordinatenachse)!

b) Ermitteln Sie aus einigen Meßwertpaaren $[U; P]$ den Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{R}$ zu dieser Funktion $\left(\text{Gleichung } P = \frac{1}{R} \cdot U^2\right)$!

c) Wie groß ist der Widerstand (in Ω), der bei diesem Versuch benutzt wird?

130. Stellen Sie das Volumen V von Pyramiden mit quadratischer Grundfläche in Abhängigkeit von der Seitenlänge a der Grundfläche graphisch dar! Berechnen Sie dazu für die gleichbleibende Höhe h einige Paare $[a; V]$! Tragen Sie diese in ein a,V-Koordinatensystem ein!

a) $h = 3$; $0 < a \leqq 5$ b) $h = 1$; $0 < a$; $V < 30$ (h und a in cm; V in cm³)

131. Bedeuten x die waagerechte und y die senkrechte Entfernung eines waagerecht geworfenen Körpers von der Abwurfstelle und v die dem Körper erteilte Anfangsgeschwindigkeit, so wird die Wurfbahn durch den Graph der Funktion $y = -\frac{g}{2v^2} \cdot x^2$ beschrieben.

Der Luftwiderstand werde vernachlässigt.
Zeichnen Sie die Wurfbahnen für die Anfangsgeschwindigkeiten
$v_1 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_3 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_4 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
in ein und dasselbe Koordinatensystem! Wählen Sie unterschiedlich geteilte Achsen!

---

19. Die Reichweite E (in km) einer Funkmeßstation wird oft nach der Formel

$$E = 3{,}57\left(\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}\right)$$

berechnet. (Dabei wird nur die Krümmung der Erdoberfläche berücksichtigt.) Es bedeuten H_1 (in m): Höhe der Empfangsantenne; H_2 (in m): Höhe des Flugzeuges.
In welcher Entfernung könnte ein Flugzeug aufgefaßt werden, das 1650 m hoch fliegt, wenn sich die Funkmeßstation 5 m über der Erde befindet?

C

d) Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Berechnen Sie die Funktionswerte der folgenden Funktionen für die Zahlen: 0; -1; 3; $-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$ und $-1{,}5$!

1. a) $y = x^2 - 7$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ **2.** a) $y = x^2 - 5x + 1$ b) $y = -2x^2 + \frac{1}{3}x + 5$

3. Für welche natürlichen Zahlen n mit $0 \leqq n \leqq 41$ sind die Funktionswerte der Funktion $f(n) = n^2 - n + 41$ Primzahlen?
Hinweis: Berechnen Sie die Funktionswerte der Funktion für alle natürlichen Zahlen von 0 bis 41! Verwenden Sie zur Beantwortung der gestellten Frage die Primzahltabelle in Ihrem Tafelwerk auf Seite 32! Überlegen Sie, wie Sie für die größeren Funktionswerte möglichst zweckmäßig entscheiden können, ob es sich um Primzahlen handelt oder nicht!

4. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = x^2$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$! Wählen Sie als Koordinateneinheit eine Strecke mit der Länge 10 cm!

5. Es sei bekannt, daß die Funktion $f(x) = x^2$ für $x \geqq 0$ monoton wächst. Zeigen Sie, daß diese Funktion dann wegen $f(x) = f(-x)$ für $x \leqq 0$ monoton fällt!

6. Begründen Sie, daß sich die Funktionen $y = ax^2$ bezüglich des Wachsens und Fallens so wie die Funktion $y = x^2$, wenn $a > 0$, bzw. wie die Funktion $y = -x^2$, wenn $a < 0$, verhalten!

7. Zeichnen Sie den Graph der Funktion f, die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geqq 0 \\ -x^2 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases}$$

definiert ist!
Ist diese Funktion f eine quadratische Funktion?

8. Ermitteln Sie zeichnerisch, ob die Parabel $y = x^2$ mit folgenden Geraden gemeinsame Punkte hat!

a) $y = 2x + 3$ b) $y = 2x - 1$ c) $y = 2x - 5$

Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen in ein und dasselbe Koordinatensystem!

9. $y = x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$;
$y = -\frac{1}{3}x^2$ für $-3 \leqq x \leqq 3$

10. $y = x^2$; $y = 2x^2$;
$y = -2x^2$ für $-2 \leqq x \leqq 2$

11. Ermitteln Sie diejenige Funktion $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, die das geordnete Paar

a) $[1; 2]$; b) $[-3; -3]$; c) $[\sqrt{5}; 4]$; d) $[2; -3]$

enthält!

12. Welche der Parabeln $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ verläuft durch den Punkt

a) $P(-5; 75)$; b) $P(\sqrt{2}; -1)$?

13. Ermitteln Sie diejenige Funktion $y = x^2 + c$, die das geordnete Paar

a) $[0; 0]$; b) $[-2; 9]$; c) $[-0{,}5; -2{,}75]$; d) $[2; 4 + \sqrt{2}]$

enthält! Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen im Intervall $-3 \leqq x \leqq 3$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

14. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ für das Intervall $-4 \leqq x \leqq 4$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

Wie erhält man die folgenden Parabeln aus der Parabel $y = x^2$?

15. a) $y = x^2 + 7$ **b)** $y = x^2 - 3$ **c)** $y = \frac{1}{5}x^2$

16. a) $y = -2x^2$ **b)** $y = 3x^2 - 4$ **c)** $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$

Geben Sie für die folgenden Parabeln die Koordinaten des Scheitels an!

17. a) $y = x^2 + 8$ **b)** $y = -\frac{1}{5}x^2 - 3$

18. a) $y = \frac{1}{5}x^2 - 3$ **b)** $y = -3x^2 + 5$

Welche der folgenden Funktionen hat einen größten bzw. einen kleinsten Funktionswert? Geben Sie den betreffenden Funktionswert jeweils an!

19. a) $y = \frac{1}{5}x^2 + 1$ **b)** $y = -\frac{1}{5}x^2 + 1$

20. a) $y = \frac{3}{7}x^2 - 11{,}5$ **b)** $y = -\frac{3}{7}x^2 - 11{,}5$

Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Wertebereich an!

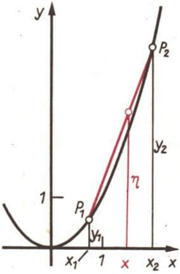
21. a) $y = x^2 - 7$ **b)** $y = -x^2 + 7$ **c)** $y = -x^2 - 7$

22. a) $y = \frac{1}{3}x^2 - 7$ **b)** $y = -\frac{1}{3}x^2 - 7$ **c)** $y = -\frac{1}{3}x^2 + 7$

---

1. Es seien $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ zwei beliebige Punkte der Parabel $y = x^2$. Es ist zu zeigen, daß der Bogen der Parabel zwischen den Punkten P_1 und P_2 unterhalb der Sehne P_1P_2 verläuft.

Hinweis: Zeigen Sie unter Verwendung des Strahlensatzes, daß für jedes x mit $x_1 < x < x_2$ gilt: $\eta > x^2$ bzw. $\eta - x^2 > 0$; vgl. Bild d 1! Weshalb genügt es, diese Behauptung für nichtnegative Zahlen x_1, x_2 zu beweisen?



d 1

2. Die Funktion $f(x) = \frac{x^3 + x}{x}$ ist für alle x mit $x \neq 0$ definiert. Geben Sie eine quadratische Funktion an, die mit der Funktion f für alle $x \neq 0$ übereinstimmt! Zeichnen Sie den Graph der Funktion f!

3. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen im Intervall $\langle -3; 3 \rangle$!
Geben Sie für jede Funktion den Wertebereich an!

a) $y = x^2 - 4$ **b)** $y = |x^2 - 4|$ **c)** $y = -|x^2 - 4|$

Geben Sie für die Graphen der folgenden Funktionen jeweils die Koordinaten des Scheitels an! Zeichnen Sie die betreffenden Graphen in dem angegebenen Intervall!

23. a) $y = (x - 1)^2$ für $-2 \leqq x \leqq 4$
b) $y = -(x - 1)^2$ für $-2 \leqq x \leqq 4$
c) $y = (x + 2)^2$ für $-5 \leqq x \leqq 1$
d) $y = (x - 2{,}5)^2$ für $0 \leqq x \leqq 5$
e) $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$ für $-4 \leqq x \leqq 3$

24. a) $y = (x - 2)^2$ für $-1 \leqq x \leqq 5$
b) $y = -(x - 2)^2$ für $-1 \leqq x \leqq 5$
c) $y = (x + 3)^2$ für $-6 \leqq x \leqq 0$
d) $y = (x - 1{,}5)^2$ für $-1 \leqq x \leqq 4$
e) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$ für $-3 \leqq x \leqq 4$

25. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen für das Intervall $-1 \leqq x \leqq 7$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

a) $y = -(x - 3)^2$ **b)** $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ **c)** $y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$

d

26. Der Graph einer quadratischen Funktion sei eine Parabel, die man durch Verschiebung der Normalparabel erhält und deren Scheitelpunkt der Punkt

a) $S\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; **b)** $S(-\sqrt{2}; 0)$; **c)** $S\left(\frac{3}{4}; 0\right)$; **d)** $S(-0,\overline{3}; 0)$

ist. Geben Sie jeweils die Gleichung der betreffenden Funktion in der Form $y = (x + d)^2$ an!

Für die folgenden Funktionen sind die Intervalle anzugeben, in denen die Funktion monoton wächst bzw. monoton fällt! Geben Sie jeweils den Wertebereich der genannten Funktionen an!

27. a) $y = (x + 2{,}5)^2$ **b)** $y = x^2 + 4x + 4$ **c)** $y = -(x + 2{,}5)^2$

28. a) $y = (x + 3{,}5)^2$ **b)** $y = x^2 - 6x + 9$ **c)** $y = -(x + 3{,}5)^2$

Geben Sie für die Graphen folgender Funktionen jeweils die Koordinaten des Scheitels an! Zeichnen Sie die betreffenden Graphen in einem geeigneten Intervall! Welche der Graphen haben Schnittpunkte mit der x-Achse? Geben Sie für jede Funktion den Wertebereich an!

29. a) $y = (x - 2)^2 + 3$ **b)** $y = (x + 2)^2 - 3$
c) $y = (x + 0{,}5)^2 + 1{,}8$
d) $y = (x - 0{,}5)^2 + 1{,}8$
e) $y = (x - 2{,}3)^2 - 1$

30. a) $y = (x + 5)^2 - 4$ **b)** $y = (x - 5)^2 + 4$
c) $y = -(x + 3)^2 + 5$
d) $y = -(x - 3)^2 + 5$
e) $y = (x + 1{,}8)^2 - 1$

31. Der Graph einer quadratischen Funktion sei eine Parabel, die man durch Verschiebung der Normalparabel erhält und deren Scheitelpunkt der Punkt

a) $S(-1; -4)$; **b)** $S(\sqrt{2}; \sqrt{3})$; **c)** $S(-7; 3)$; **d)** $S(3{,}5; -7)$

sei. Geben Sie die Gleichungen der Funktionen in der Form $y = (x + d)^2 + e$ an! Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen jeweils in einem geeigneten Intervall!
Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen mit der y-Achse!

d

Bringen Sie folgende Gleichungen auf die Form $y = (x + d)^2 + e$! Zeichnen Sie die betreffenden Parabeln mit Hilfe der Schablone für die Parabel $y = x^2$ in dem jeweils angegebenen Intervall!

32. a) $y = x^2 - 4x - 1$ $(-1 \leqq x \leqq 5)$
b) $y = x^2 + 6x + 10$ $(-6 \leqq x \leqq 0)$
c) $y = x^2 - 5x + 1{,}25$ $(-1{,}5 \leqq x \leqq 6{,}5)$

33. a) $y = x^2 + 4x - 1$ $(-5 \leqq x \leqq 1)$
b) $y = x^2 - 8x + 19$ $(1 \leqq x \leqq 7)$
c) $y = x^2 + 5x + 3{,}25$ $(-6{,}5 \leqq x \leqq 1{,}5)$

34. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen!
Entnehmen Sie der Zeichnung, für welche Zahlen x die Funktionswerte negativ sind!
a) $y = x^2 - 5x + 4$ **b)** $y = x^2 - 2x - 3$

Ermitteln Sie jeweils den kleinsten Funktionswert der folgenden Funktionen!

35. a) $y = x^2 - 4x + 1$
b) $y = x^2 - \frac{5}{2}x + 9$

36. a) $y = x^2 + 2x - 3$
b) $y = x^2 + \frac{3}{4}x + 10$

Ermitteln Sie jeweils den kleinsten und den größten Funktionswert der folgenden Funktionen in dem angegebenen Intervall!

37. a) $y = x^2 - 4x + 1$ im Intervall $\langle 3; 7\rangle$
b) $y = x^2 + 2x - 3$ im Intervall $\langle 1; 5\rangle$

38. a) $y = x^2 + 2x + 2$ im Intervall $\langle -5; -2\rangle$
b) $y = x^2 - 2x + 5$ im Intervall $\langle -1; 3\rangle$

Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Wertebereich an!

39. a) $y = x^2 - 7x + 10$ **b)** $y = x^2 - 2x - 63$

40. a) $y = x^2 - 8x + 15$ **b)** $y = x^2 - 2x + 255$

Welche Gleichungen haben die Symmetrieachsen der Graphen der folgenden Funktionen?

41. $y = x^2 + 2x - 4$

42. $y = x^2 - x + 56$

Ermitteln Sie die Intervalle, in denen die folgenden Funktionen monoton wachsen bzw. fallen!

43. a) $y = x^2 + 2x - 15$ b) $y = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ **44.** a) $y = x^2 - 3x - 18$ b) $y = x^2 + \frac{3}{2}x$

45. Es sei $f(x) = x^2 + px + q$ eine beliebige quadratische Funktion und h eine beliebige positive Zahl. Zeigen Sie, daß dann gilt: $f\left(-\frac{p}{2} - h\right) = f\left(-\frac{p}{2} + h\right)$! Was haben Sie damit bewiesen?

46. Geben Sie die Normalform der quadratischen Funktion an, deren Graph die Scheitelkoordinaten x_S und y_S hat!

a) $x_S = -4;\quad y_S = +3$ b) $x_S = -1{,}7;\quad y_S = -1$ c) $x_S = \sqrt{3};\quad y_S = -7$

---

4. Der Graph einer Funktion $y = x^2 + px + q$ gehe durch die Punkte

a) $P_1\ (2;\ 3)$ und $P_2\ (5;\ 0)$ b) $P_1\ (-4;\ -1)$ und $P_2\ (-2;\ 7)$.

Berechnen Sie p und q! Geben Sie die Scheitelkoordinaten des Graphen der Funktion an!

5. Es sei $f(x) = x^2 + px + q$ eine beliebige quadratische Funktion und x_1, x_2 seien beliebige Zahlen mit $-\frac{p}{2} < x_1 < x_2$. Zeigen Sie, daß $f(x_1) < f(x_2)$ gilt!

Hinweis: Bilden Sie die Differenz $f(x_2) - f(x_1)$!

6. Beweisen Sie indirekt! Ist $f(x) = x^2 + px + q$ eine beliebige quadratische Funktion, so gilt für jedes x mit $x \neq -\frac{p}{2}$: $f(x) > f\left(-\frac{p}{2}\right)$.

Ermitteln Sie zeichnerisch Näherungswerte für die Nullstellen der folgenden Funktionen!

47. a) $y = x^2 - 7$ b) $y = x^2 + 4x$ c) $y = x^2 + 5x + 6$

48. a) $y = x^2 + 2x + 1$ b) $y = x^2 + 3x - 4{,}5$ c) $y = x^2 + 2x - 4$

49. Spiegeln Sie den Graph der Funktion $y = x^2 - 2x + 3$ an der Geraden $y = 3$! Lesen Sie aus der Zeichnung die Abszissen der Schnittpunkte des Spiegelbildes mit der x-Achse ab!

50. Für die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 1$ gilt $f(2) = -1$ und $f(3) = 2$.

a) Welche Folgerung können Sie aus diesen Angaben bezüglich der Existenz von Nullstellen der Funktion f ziehen?
b) Ermitteln Sie rechnerisch von den 10 gleich langen Teilintervallen des Intervalls $\langle 2;\ 3\rangle$ dasjenige, in dem eine Nullstelle von f liegt!
c) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie den Graph von f so genau wie möglich zeichnen!
d) Entnehmen Sie aus der Zeichnung einen Näherungswert für die zweite Nullstelle von f!
e) Berechnen Sie für den abgelesenen Näherungswert den Funktionswert! Ist der abgelesene Näherungswert zu groß oder zu klein?

51. Untersuchen Sie mit Hilfe der Diskriminante, ob die folgenden quadratischen Funktionen Nullstellen haben!

a) $y = x^2 + 10x + 25$
b) $y = x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ c) $y = x^2 + 3x + 4$

52. Für welche Zahlen p haben die Funktionen $y = x^2 + px + 5$ Nullstellen? Wählen Sie drei Funktionen aus, die der erhaltenen Bedingung genügen und ermitteln Sie zeichnerisch Näherungswerte für die Nullstellen dieser Funktionen!

53. Für welche Zahlen q haben die Funktionen $y = x^2 + 6x + q$ Nullstellen?

Zeichnen Sie jeweils den Graph der folgenden Funktionen!

54. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ im Intervall $\langle -6;\ 2\rangle$ **55.** $y = -2x^2 + 4x - 4$ im Intervall $\langle -1;\ 3\rangle$

d

56. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $A = f(r) = \pi r^2$ mit $0\,\text{cm} < r \leqq 5\,\text{cm}$! Verwenden Sie zum Berechnen der benötigten Funktionswerte den Rechenstab! Wählen Sie einen geeigneten Maßstab!

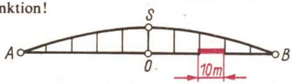
57. Geben Sie den Flächeninhalt einer Kreisfläche in Abhängigkeit vom Umfang des Kreises an! Zeichnen Sie den Graph der erhaltenen Funktion für $0\,\text{cm} < u \leqq 10\,\text{cm}$! Wählen Sie einen geeigneten Maßstab!

58. Das Weg-Zeit-Gesetz für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung lautet $s = \frac{a}{2}t^2$ $(t \geqq 0\,\text{s})$.
Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion für $a = 0{,}4\,\text{m s}^{-2}$ im Intervall $0\,\text{s} \leqq t \leqq 5\,\text{s}$! Entnehmen Sie der Zeichnung, welchen Weg der Körper nach 3,2 s zurückgelegt hat!

59. a) Ermitteln Sie zeichnerisch, für welche x die Funktionswerte der Funktion $y = x^2 - 4$ negativ sind!

b) Es sei x die Maßzahl der in Zentimeter gemessenen Länge einer Quadratseite. Man erhält ein Rechteck, wenn man von zwei benachbarten Quadratseiten eine um 2 cm verlängert und die andere um 2 cm verkürzt. Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Maßzahl des Flächeninhaltes dieses Rechtecks und der Maßzahl x durch eine Funktion an! Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion an! Zeichnen Sie ihren Graph in einem geeigneten Intervall! Vergleichen Sie diese Funktion mit der in Aufgabe 59a) gegebenen!

60. Die Seite eines Quadrates sei 5 cm lang. Man erhält aus dem Quadrat ein Rechteck, wenn man von zwei benachbarten Quadratseiten eine um x cm verlängert und die andere um x cm verkürzt. Geben Sie die Abhängigkeit der Maßzahl des Flächeninhaltes des entstehenden Rechtecks von x durch eine Funktion an! Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion!



d 2

61. Die Diagonalen eines Rhombus seien zusammen 12 cm lang. Wie groß kann der Flächeninhalt des Rhombus dann höchstens sein?
Hinweis: Geben Sie die Abhängigkeit der Maßzahl des Flächeninhaltes des Rhombus von der Maßzahl der Länge einer Diagonalen durch eine Funktion an! Zeichnen Sie den Graph der Funktion in dem Intervall, in dem die Funktion definiert ist! Lesen Sie aus der Zeichnung ab, an welcher Stelle der Funktionswert am größten ist!

62. Das Bild d 2 zeigt einen parabelförmigen Brückenbogen. Der Scheitel S befindet sich in der Mitte des Bogens. Die Form der Parabel ist durch die Strecken $\overline{AB} = 100\,\text{m}$ und $\overline{OS} = 10\,\text{m}$ eindeutig bestimmt.

a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und geben Sie die Gleichung des Parabelbogens an!

b) Berechnen Sie die Längen der eingezeichneten Streben!

63. Eine Heizspirale habe einen Widerstand von $100\,\Omega$. Geben Sie die Abhängigkeit der von der Spirale aufgenommenen Leistung von der angelegten Spannung U $(0\,\text{V} \leqq U \leqq 220\,\text{V})$ durch eine Funktion an! Zeichnen Sie den Graph der Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem!

---

7. Ein mit vier Personen besetzter PKW Wartburg hat eine Masse von 1200 kg. Er erreicht innerhalb von 15 s aus dem Stillstand eine Geschwindigkeit von $v = 80\,\text{km h}^{-1}$. Geben Sie die Abhängigkeit der kinetischen Energie des Fahrzeugs von der Zeit t $(0 \leqq t \leqq 15\,\text{s})$ durch eine Funktion an unter der Voraussetzung, daß die Bewegung auch während des Schaltens gleichmäßig beschleunigt erfolgt! Zeichnen Sie den Graph der Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem!

---

64. Formen Sie die folgenden Summen durch Ausklammern in Produkte um!

a) $x^2 + 3x$ **b)** $x^3 + x^2$

c) $5x^2 - 8x$ **d)** $7x^2 - 49x$

65. Formen Sie die folgenden Summen in Produkte um!

a) $x^2 - 1$ **b)** $x^2 - 9$

c) $x^2 - \frac{1}{16}$ **d)** $x^2 - 8$

66. Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen?

a) $(x-5)(x+4)=0$ b) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{4}{5}\right)=0$ c) $(x-1{,}5)^2=0$

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

67. a) $y=x^2-4$ b) $y=\frac{1}{2}x^2-8$ c) $y=1{,}5x^2-4{,}5$

68. a) $y=x^2-1$ b) $y=-\frac{1}{5}x^2+5$ c) $y=3{,}2x^2-12{,}8$

Lösen Sie folgende Gleichungen!

69. a) $x^2-25=0$ b) $x^2-5=0$ c) $x^2+7=0$ d) $2x^2=128$ e) $x^2-0{,}04=0$ f) $6x^2-216=0$

70. a) $x^2-289=0$ b) $x^2-\frac{9}{16}=0$ c) $x^2+10=0$ d) $4x^2=16$ e) $x^2-0{,}004=0$ f) $9x^2-4=0$

71. a) $\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{24}=0$ b) $\frac{1}{2}x^2+12=20$ c) $3x^2+4{,}13=20$ d) $4x^2+\frac{4}{5}=6x^2-\frac{16}{5}$

72. a) $\frac{2}{7}x^2-\frac{8}{63}=0$ b) $2x^2-5{,}6=4{,}08$ c) $\frac{1}{2}x^2-1{,}88=1$ d) $4x^2-\frac{1}{2}=3x^2+\frac{1}{2}$

73. a) $(7+x)^2+(7-x)^2=130$
b) $(2x-4)(x+3)=(x-4)(x+6)$
c) $(2x+1)(x-5)=(x-2)^2-(5x-1)$
d) $\frac{10}{x}-9x=x \quad (x\neq 0)$
e) $\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}=-2 \quad (|x|\neq 2)$
f) $\frac{x+3}{x+1}+\frac{x-1}{x-3}=\frac{150}{(x+1)(x-3)}$
$(x\neq 3;\ x\neq -1)$

74. a) $2x(2x+3)-(x+3)^2+8{,}25=0$
b) $(x+3)^2+(x-3)^2=10$
c) $(x+3)^2-(x+2)^2-(x+1)^2=0$
d) $\frac{4}{x}+\frac{3x}{4}=\frac{8}{x}+\frac{x}{4} \quad (x\neq 0)$
e) $\frac{x}{x-3}+\frac{x}{x+3}=\frac{9}{4} \quad (|x|\neq 3)$
f) $\frac{x+10}{x-5}-\frac{8x}{2x-10}=x+2$
$(x\neq 5)$

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen!

75. $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+6}{x^2-4}=0 \quad (|x|\neq 2)$

76. $\frac{1}{x-3}-\frac{x}{x+3}-\frac{4x-6}{x^2-9}=0 \quad (|x|\neq 3)$

Welche Zahlen x erfüllen die folgenden Gleichungen?

77. a) $ax^2+b=bx^2+a \quad (a\neq b)$
b) $(x+a)^2=2ax+b^2$
c) $ax^2=\frac{1}{a} \quad (a\neq 0)$
d) $(x+a)^2+(x-a)^2=52a^2$

78. a) $ax^2+b^2=bx^2+a^2 \quad (a\neq b)$
b) $(x-a)^2=b^2-2ax$
c) $ax^2=\frac{b^2}{a} \quad (a\neq 0)$
d) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{34}{15} \quad (x\neq |a|;\ a\neq 0)$

79. Lösen Sie die Gleichung $x^2=5$ zeichnerisch unter Verwendung
a) des Höhensatzes; b) des Kathetensatzes!

80. Subtrahiert man von dem Quadrat einer negativen Zahl 20, so erhält man 61.
Wie heißt diese Zahl?

d

81. Der Berliner Fernsehturm hat eine Höhe von 361,5 m. Wie lange braucht ein Stein, um aus dieser Höhe im freien Fall bis zur Erdoberfläche zu fallen? (Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt; $g \approx 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.)

82. Die Besatzung eines Schiffes ermittelt die Wassertiefe mit Hilfe eines Ultraschallgerätes durch sogenannte Echolotung. Der Schallerreger und der Schallempfänger befinden sich 10 m voneinander entfernt am Schiffsboden. Die Schallgeschwindigkeit im Wasser beträgt etwa $1500\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Berechnen Sie die Wassertiefe, wenn zwischen Aussendung und Empfang des Schallimpulses eine Zeit von $t = 0{,}02$ s registriert wird!

83. Die Diagonalen eines Rhombus seien 6 cm bzw. 10 cm lang. Wie lang ist die Seite des Rhombus?

84. Drücken Sie die Länge der Diagonale eines Quadrates durch seine Seitenlänge aus!

85. Von einer quadratischen Pyramide seien die Höhe h und die Seitenkante s gegeben. Berechnen Sie die Länge der Grundkante a für $h = 17$ cm und $s = 19$ cm!

86. Von einem Punkt P, der 11 cm von dem Mittelpunkt eines gegebenen Kreises mit dem Radius $r = 4$ cm entfernt ist, werden die Tangenten an den Kreis gelegt. Wie lang sind die Tangentenabschnitte von P bis zu den Berührungspunkten mit dem Kreis?

87. Drücken Sie den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks durch die Seitenlänge aus!

88. Ein Werkstück werde durch einen Laufkran transportiert. Die Geschwindigkeit der Kranbrücke betrage $v_1 = 0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, die Laufkatze bewege sich rechtwinklig dazu mit der Geschwindigkeit $v_2 = 0{,}3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Gleichzeitig werde das Werkstück mit der Geschwindigkeit $v_3 = 0{,}2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ gehoben. Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Geschwindigkeit!

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen! Zeichnen Sie jeweils den Graph der Funktion!

89. a) $y = x^2 - 4x$ b) $y = x^2 + 5x$ **90.** a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - 5x$

Lösen Sie folgende Gleichungen!

91. a) $x^2 - 9x = 0$ b) $3u^2 = 36u$ c) $\frac{3}{8}z^2 + \frac{3}{4}z = 0$ d) $2{,}5x^2 - 6{,}25x = 0$

92. a) $x^2 + 8x = 0$ b) $5u^2 = 25u$ c) $\frac{7}{8}z^2 - \frac{7}{4}z = 0$ d) $1{,}7x^2 + 2{,}89\,x = 0$

93. a) $x^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2$
b) $(x-1)(x+2) = (2x+2)(2x-1)$
c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2}{x^2-1}$ $(|x| \neq 1)$

94. a) $2x^2 + 6 = (x-3)(x-2)$
b) $(4x-3)(x+2) = (3x+2)(x-3)$
c) $\frac{x}{x+5} + \frac{x}{x-5} = \frac{x^2+8x}{x^2-25}$ $(|x| \neq 5)$

Welche Zahlen x erfüllen folgende Gleichungen?

95. a) $x^2 + 4ax = 0$
b) $3ax^2 - 5a^2x = 0$ $(a \neq 0)$
c) $\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} = 0$
$(x \neq a;\ x \neq b)$

96. a) $x^2 - 5bx = 0$
b) $2bx^2 + 7b^2x = 0$ $(b \neq 0)$
c) $\frac{a}{x-a} - \frac{2b}{x-b} = 1$
$(x \neq a,\ x \neq b,\ a \neq 0,\ b \neq 0)$

---

8. Für welche Zahlen k liegen die Scheitelpunkte der Parabeln $y = x^2 + (k+4)\,x + 3k + 4$ auf der x-Achse? Zeichnen Sie die betreffenden Parabeln!

---

97. Ermitteln Sie für folgende Summen die quadratische Ergänzung!

a) $x^2 + 8x$ b) $x^2 + 100x$ c) $x^2 - 5x$ d) $x^2 - x$ e) $x^2 + \frac{5}{3}x$!

98. Lösen Sie folgende Gleichungen nach dem im Beispiel D 18 auf Seite 121 angewandten Verfahren!

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $x^2 - 11x + 18 = 0$

d) $x^2 - 3x - 18 = 0$ e) $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$ f) $x^2 - 4x + 1 = 0$

---

9. Welche Zahlen x erfüllen die folgenden Gleichungen?

a) $x^2 - 6|x| + 9 = 0$ **b)** $x^2 - 6|x| + 8 = 0$

10. **a)** Wie müssen die Zahlen a und c beschaffen sein ($a \neq 0$), damit die Gleichung $ax^2 + c = 0$ Lösungen hat?

b) Welcher Bedingung müssen die Zahlen a, b und c ($a \neq 0$) genügen, damit die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ Lösungen hat? Drücken Sie die Lösungen der Gleichung, wenn die betreffende Bedingung erfüllt ist, durch die Koeffizienten a, b und c aus!

11. Begründen Sie, daß die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ stets Lösungen hat, wenn a und c verschiedene Vorzeichen haben!

12. Lösen Sie die Gleichung $x^2 - (5 - \sqrt{2})\,x + 6 - 3\sqrt{2} = 0$!

13. Beweisen Sie indirekt!
Wenn die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten p und q überhaupt rationale Lösungen hat, so sind diese Lösungen ganzzahlig.

Lösen Sie folgende Gleichungen!

99. a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $x^2 - x - 12 = 0$
c) $x^2 - 3x - 10 = 0$ d) $x^2 + 2x - 24 = 0$
e) $x^2 + 12x + 11 = 0$ f) $x^2 - 9x + 20 = 0$
g) $x^2 - 8x + 15 = 0$ h) $x^2 - 2x - 63 = 0$
i) $x^2 - 2x - 255 = 0$ k) $x^2 + 10x + 25 = 0$

100. a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ b) $x^2 + 2x - 15 = 0$
c) $x^2 - x - 20 = 0$ d) $x^2 - 11x + 18 = 0$
e) $x^2 - 3x - 18 = 0$ f) $x^2 - x - 56 = 0$
g) $x^2 - 12x + 35 = 0$ h) $x^2 + 24x + 143 = 0$
i) $x^2 - x - 42 = 0$ k) $x^2 - 8x + 16 = 0$

101. a) $x^2 - 3x + 0{,}81 = 0$ b) $x^2 - 4x + 1 = 0$
c) $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ d) $x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{3}{7} = 0$
e) $x^2 - \frac{7}{20}x - \frac{3}{20} = 0$

102. a) $x^2 - 2x + 0{,}36 = 0$ b) $x^2 + 2x - 4 = 0$
c) $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$ d) $x^2 - \frac{5}{2}x - 9 = 0$
e) $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$

103. a) $4x^2 + 10x = -4$ b) $8x^2 - 1 = 2x$
c) $5x^2 - 10x - 315 = 0$
d) $x + \frac{15}{x} = 8 \quad (x \neq 0)$
e) $x = \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$
f) $5x - \frac{9}{x} = 12 \quad (x \neq 0)$

104. a) $2x^2 + 6x = -9$ b) $4x^2 + 9x + 2 = 0$
c) $3x^2 + 17x - 6 = 0$
d) $\frac{3}{x} + x = -4 \quad (x \neq 0)$
e) $x + \frac{124}{5} = \frac{5}{x} \quad (x \neq 0)$
f) $3x - \frac{1}{x} = \frac{11}{2} \quad (x \neq 0)$

105. a) $(2x - 2)(x + 2) - (x + 1)(x - 1) = 5$ b) $(2x + 2)(x - 2) - (x + 1)(x + 2) = 0$
c) $(4x - 2)(x - 2) = (3x - 2)(x - 3)$ d) $(x - 8)(3x + 9) = (2x + 4)(x - 5)$
e) $(x + 4)^2 - (x - 5)^2 + (x - 3)^2 = 17x + 24$ f) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 + (x + 1)^2 = 20x - 9$

106. a) $\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(x+3)^2}{5} = \frac{(2x+6)^2}{5} - 17$ b) $\frac{(x+2)^2}{6} - \frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(2x-2)^2}{18} + 1 = 0$

107. a) $\dfrac{9}{x-2} - 5 = \dfrac{4}{x-7} \quad (x \neq 2;\ x \neq 7)$

b) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{3}{x-4} \quad (x \neq 0;\ x \neq 2;\ x \neq 4)$

108. a) $1 - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{6}{x-1} = \dfrac{2x^2-14}{x^2-1} \quad (|x| \neq 1)$

b) $\dfrac{6}{x+1} + \dfrac{8}{x-1} - 3 = 0 \quad (|x| \neq 1)$

109. a) $\dfrac{1}{x-3} - 2 = \dfrac{2}{x-6} \quad (x \neq 3;\ x \neq 6)$

b) $\dfrac{5}{x-3} + \dfrac{6}{x+5} = \dfrac{6}{x-5} \quad (x \neq 3;\ |x| \neq 5)$

c) $\dfrac{3}{x-2} + 2 - \dfrac{21}{x^2-4} = \dfrac{14}{x+2} \quad (|x| \neq 2)$

d) $\dfrac{5}{x-1} - \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{1}{x-4} \quad (x \neq 1;\ x \neq 2;\ x \neq 4)$

110. a) $\dfrac{x+2}{x} + \dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x^2-2}{x(x-2)} = 0 \quad (x \neq 0;\ x \neq 2)$

b) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{3}{x-3} \quad (x \neq 2;\ x \neq 3)$

Ermitteln Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen!

111. a) $\dfrac{x+5}{x-5} + \dfrac{2x}{x+5} + 1 = \dfrac{4x^2}{x^2-25} \quad (|x| \neq 5)$

b) $\dfrac{6x}{x-1} - \dfrac{11x}{x+1} + 5 = \dfrac{17x-5}{x^2-1} \quad (|x| \neq 1)$

112. a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{5}{x+1} + \dfrac{8x}{x^2-1} + 5 = \dfrac{6x^2+4x}{x^2-1} \quad (|x| \neq 1)$

b) $\dfrac{5x}{x^2-4} - \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{x}{x+2} + 1 = \dfrac{2x^2-10}{x^2-4} \quad (|x| \neq 2)$

113. In welchen Zahlbereichen sind die Gleichungen $x - 5 = 0$ und $(x-5)(x^2-5) = 0$ äquivalent?

114. Welche Zahlen x erfüllen die folgenden Gleichungen?
a) $5 - x = x - 5$ b) $(5-x)^2 = (x-5)^2$

115. Für welche Zahlen a hat die Gleichung
a) $x^2 - 14x + a = 0$;
b) $x^2 + 22x + a = 0$
genau eine Lösung?

116. Für welche Zahlen k hat die Gleichung
a) $x^2 + 6x + k = 0$; b) $x^2 + 6x - k = 0$;
c) $x^2 + kx + 4 = 0$; d) $x^2 + kx + 9 = 0$
zwei Lösungen, eine bzw. keine Lösung?

117. Ist $q < 0$, so hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ stets Lösungen. Begründen Sie diese Aussage!

Welche Zahlen x erfüllen folgende Gleichungen? Führen Sie jeweils die notwendigen Fallunterscheidungen durch!

118. a) $x^2 - ax + ab = b^2$

b) $9x^2 + 6ax + a^2 - 9b = 0$

c) $\dfrac{5a}{x-a} - \dfrac{2a}{x-2a} = \dfrac{a}{x-4a}$
$(x \neq a;\ x \neq 2a;\ x \neq 4a;\ a \neq 0)$

d) $\dfrac{3}{x-a} + \dfrac{5}{x+a} = \dfrac{x^2}{x^2-a^2} \quad (|x| \neq a)$

e) $(a^2-b^2)x^2 - 4abx = a^2 - b^2 \quad (|a| \neq |b|)$

119. a) $x^2 + ax - ab = b^2$

b) $4x^2 + 4ax + a^2 - 9b = 0$

c) $\frac{3a}{x-a} + \frac{3a}{x+a} = 4$
($|x| \neq a$; $a \neq 0$)

d) $\frac{a^2}{4(x^2-a^2)} - \frac{2x}{x+a} - \frac{x}{x-a} = 0$
($|x| \neq a$; $a \neq 0$)

e) $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0 \quad (a \neq 0)$

120. Zeigen Sie, daß die Gleichung $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ für beliebige Zahlen a und b Lösungen hat! Für welche Zahlen a und b hat die Gleichung eine Lösung bzw. zwei Lösungen? Geben Sie die betreffenden Lösungen an!

121. Welchen Zahlen x wird durch

a) $y = x^2 + 5x + 1$;

b) $y = x^2 - 2x - 8$

der Funktionswert 7 zugeordnet?

122. Gibt es Zahlen x, denen durch

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$;

b) $y = 2x^2 - 6x + 8$

-2 als Funktionswert zugeordnet wird?

123. Multipliziert man eine Zahl mit der um 10 größeren Zahl, so erhält man 459. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingung?

124. Die Zahl 28 soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß das Produkt der Summanden 192 beträgt.
Berechnen Sie die Summanden!

125. Die Summe der Quadrate von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen betrage 630. Berechnen Sie die betreffenden Zahlen! Wieviel Möglichkeiten gibt es?

126. Die Summe aus einer Zahl und der zugehörigen reziproken Zahl betrage $\frac{50}{7}$.
Welche Zahlen erfüllen diese Bedingung?

127. Für welche Paare aufeinanderfolgender ganzer Zahlen beträgt das Produkt 702?

128. Gibt es Primzahlzwillinge, deren Produkt a) 899, b) 255 beträgt?
Hinweis: Zwei Primzahlen, deren Differenz 2 beträgt, heißen Primzahlzwillinge.

129. Bei einem Wettkampf spielt jeder Teilnehmer gegen jeden. Es werden insgesamt 66 Spiele ausgetragen. Wie viele Personen nehmen an dem Wettkampf teil?

130. Jeder Abgänger einer 10. Klasse schreibt von allen anderen Schülern der Klasse die Adressen auf, insgesamt werden 600 aufgeschrieben. Wie viele Schüler hat die Klasse?

131. Ein ebenes n-Eck hat $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen. Welches Vieleck hat 119 Diagonalen?

132. Eine Strecke soll so in zwei Teile geteilt werden, daß der längere Teilabschnitt die mittlere Proportionale zur ganzen Strecke und dem kleineren Teilabschnitt ist. Berechnen Sie die Längen der Teilabschnitte, wenn die Länge der gegebenen Strecke a) 6 cm; b) l cm beträgt!

133. Es sei A_0 der Oberflächeninhalt eines Quaders mit den Kanten a, b und c. Berechnen Sie die Kantenlängen, wenn folgendes bekannt ist!

a) $A_0 = 88\ \text{cm}^2$; a ist 2 cm kürzer als b; c ist 2 cm länger als b.

b) $A_0 = 262\ \text{cm}^2$; a ist 2 cm länger als b; c ist 3 cm länger als b.

134. In einem rechtwinkligen Dreieck sei eine Kathete 12 cm lang. Die Hypotenuse sei 4 cm länger als die andere Kathete. Berechnen Sie die Länge dieser Kathete und die Länge der Hypotenuse!

135. Der Durchmesser eines geraden Kreiskegels sei 0,8 cm länger als dessen Seitenlinie. Die Höhe des Kegels verhalte sich zum Radius wie 4 : 3. Berechnen Sie die Länge des Radius des Kegels!

136. Eine Sehne eines Kreises habe vom Mittelpunkt des Kreises den Abstand 6 cm. Sie sei 6 cm länger als der Radius des Kreises. Berechnen Sie die Länge des Radius!

137. In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Hypotenuse 25 cm lang. Eine Kathete sei 5 cm länger als die andere. Berechnen Sie die Längen der Katheten!

138. Der Mantel eines Zylinders habe den Flächeninhalt $A_M = 32\pi\ \text{cm}^2$. Die Höhe des Zylinders sei 4 cm länger als der Durchmesser. Berechnen Sie das Volumen des Zylinders!

139. Eine Strecke von 10 cm Länge soll so in zwei Teilstrecken zerlegt werden, daß das aus ihnen konstruierte Rechteck den Flächeninhalt 24,96 cm² hat. Wie lang sind die Rechteckseiten?

140. Wenn man von zwei benachbarten Seiten eines Quadrates eine um 2 cm verlängert und die andere um 3 cm verkürzt, erhält man ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $A = 42{,}75\ \text{cm}^2$. Berechnen Sie die Längen der Rechteckseiten!

141. Einer Kugel sei ein Zylinder einbeschrieben. Der Radius der Kugel habe eine Länge von 30 cm. Der Achsenschnitt des Zylinders habe einen Umfang von 168 cm. Radius und Höhe des Zylinders sind zu berechnen!

142. Eine Seite eines Rechtecks sei 4 cm kürzer als die andere. Der Flächeninhalt des Rechtecks betrage 34,44 cm². Berechnen Sie die Längen der Rechteckseiten!

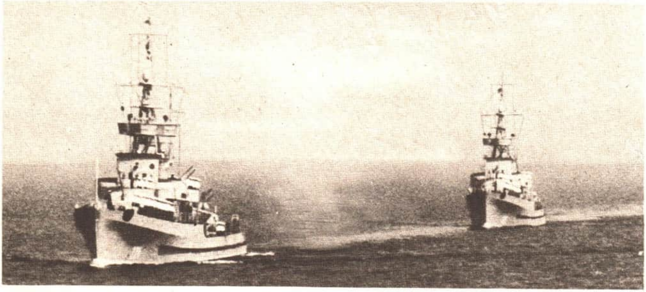
143. Der Umfang eines Rechtecks betrage 42 cm. Die Länge seiner Diagonalen betrage 15 cm. Berechnen Sie die Längen der Rechteckseiten!

144. Der Umfang eines Rechtecks betrage 32,8 cm; sein Flächeninhalt 64 cm². Wie lang sind die Rechteckseiten?

145. Ein Körper fällt in einen Schacht. Den Aufprall des Körpers auf die Schachtsohle hört man nach 5 s. Wie tief ist der Schacht? (Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt; Schallgeschwindigkeit $v = 340\ \text{m s}^{-1}$; $g \approx 10\ \text{m s}^{-2}$).

146. Bei der Internationalen Friedensfahrt sei eine Etappe 210 km lang. Der Fahrer *A* fahre mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit, die um $2\ \text{km h}^{-1}$ kleiner ist als die des Fahrers *B*. *A* benötige 15 min mehr als *B*. Mit welchen Geschwindigkeiten fahren *A* und *B*?

d



147. Ein Dampfer empfängt SOS-Rufe eines 50 sm entfernten Schiffes. Durch Erhöhung seiner Geschwindigkeit um 5 Knoten kommt er 30 min früher an die Unglücksstelle, als wenn er seine ursprüngliche Geschwindigkeit beibehalten hätte. Welche Zeit benötigt der Dampfer bis zur Unglücksstelle?

148. Zwei Schiffe S_1 und S_2 der Volksmarine begegnen sich auf der Ostsee. Nach der Begegnung fährt S_1 nach Norden. S_2 fährt nach Osten, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die um 10 Knoten größer ist als die von S_1. Nach zwei Stunden beträgt ihre Entfernung 100 sm. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Schiffe!

149. Die Eigengeschwindigkeit eines Schiffes betrage $v = 30\ \text{km h}^{-1}$. Für den gleichen Weg von 45 km benötige das Schiff gegen die Strömung eine um 0,5 h längere Fahrzeit, als wenn es mit der Strömung fährt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Strömung!

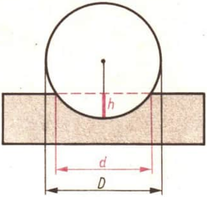
150. Ein Flugzeug benötige für eine 50 km lange Prüfstrecke mit Wind und gegen den Wind zusammen eine Flugzeit von 9,5 min. Die Windgeschwindigkeit betrage $8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Berechnen Sie die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges!

151. Zwei Orte A und B liegen 300 km voneinander entfernt. Um 9.00 Uhr fährt in A ein Güterzug ab, der sich auf der Hälfte der Strecke mit einem Schnellzug trifft, der um 10.00 Uhr in B abgefahren ist. Die Geschwindigkeit des Schnellzuges ist um $20\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ größer als die des Güterzuges. Wann treffen sich die Züge?

152. Für eine elektrische Anlage benötigt man zwei Widerstände, die hintereinandergeschaltet einen Gesamtwiderstand von $40\ \Omega$ und parallelgeschaltet einen Gesamtwiderstand von $7{,}5\ \Omega$ ergeben sollen. Wie groß hat man die Einzelwiderstände zu wählen?

153. Eine Sammellinse habe die Brennweite $f = 10$ cm. Ein Gegenstand und sein durch die Sammellinse entstehendes (reelles) Bild seien 80 cm voneinander entfernt. Wie weit sind der Gegenstand und sein Bild von der Linse entfernt?

154. Beim Ermitteln der Härte eines Werkstoffes mit Hilfe des Brinellschen Kugeldruckversuchs wird eine kleine Stahlkugel (Durchmesser D) mit einer bestimmten Kraft in den zu prüfenden Gegenstand eingedrückt. Aus dem leicht zu messenden Durchmesser d des Eindruckkreises (Bild d 3) und dem Kugeldurchmesser D wird die Eindrucktiefe h berechnet, die zur Berechnung der Härtezahl benötigt wird. Berechnen Sie h für $D = 10$ mm und $d = 6$ mm!



d 3

155. Zwei Brigaden verrichten eine Arbeit gemeinsam in 10 h. Die erste Brigade allein benötigt für diese Arbeit 2 h weniger als die zweite Brigade. In welcher Zeit könnte jede der beiden Brigaden die Arbeit allein schaffen?

156. Ein 480 m langer Güterzug durchfährt mit konstanter Geschwindigkeit $v = 12\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ einen Bahnhof.
Ein 180 m langer D-Zug beginnt in dem Augenblick (20 s nach diesem Augenblick; 20 s vor diesem Augenblick) mit einer Beschleunigung $a = 0{,}2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ seine Fahrt (mit gleichem Richtungssinn wie der Güterzug), in dem sich die Spitzen beider Züge nebeneinander befinden.

a) Stellen Sie den Bewegungsablauf in einem Weg-Zeit-Koordinatensystem dar!
b) Ermitteln Sie zeichnerisch Ort und Zeitpunkt des Nebeneinanderbefindens von Zugspitzen und Zugenden!
c) Ermitteln Sie die Strecke und die Zeitdauer des Vorbeifahrens der D-Zug-Spitze, des D-Zug-Endes, des D-Zuges am Güterzug!

---

14. Auf einer Ebene seien n Punkte gegeben, von denen jeweils nicht drei auf ein und derselben Geraden liegen. Wie viele Geraden lassen sich durch die n Punkte zeichnen? Wie viele solcher Punkte sind gegeben, wenn 36 Geraden gezeichnet werden können?

15. Es sei u der Umfang und A der Flächeninhalt eines Rechtecks.

a) Stellen Sie fest, welche Beziehung zwischen u und A bestehen muß, damit ein Rechteck mit dem Umfang u und dem Flächeninhalt A existiert!
b) Berechnen Sie die Längen der Rechteckseiten für den Fall, daß ein Rechteck mit dem Umfang u und dem Flächeninhalt A existiert!
c) Machen Sie die Probe für die errechneten Lösungen!

16. Ein Körper werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 60\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ senkrecht nach oben geschleudert. In welcher Zeit erreicht er die Höhe **a)** $h = 100$ m; **b)** $h = 180$ m?
Welche Folgerungen ziehen Sie aus den errechneten Ergebnissen?
Hinweis: Das Weg-Zeit-Gesetz für den senkrechten Wurf nach oben lautet bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes: $h(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen! Machen Sie die Probe mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes!

157.* a) $x^2 - 11x + 30 = 0$

b) $x^2 + \frac{13}{14}x + \frac{3}{14} = 0$

158.* a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $x^2 + \frac{8}{21}x - \frac{5}{21} = 0$

Wie lauten die Normalformen der quadratischen Gleichungen, die die Lösungen x_1 und x_2 haben?

159.* a) $x_1 = -1$; $x_2 = 3$ b) $x_1 = -7$; $x_2 = -5$

c) $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{4}$ d) $x_1 = -0{,}4$; $x_2 = -0{,}5$

e) $x_1 = 1 + \sqrt{5}$; $x_2 = 1 - \sqrt{5}$

160.* a) $x_1 = 2$; $x_2 = 4$ b) $x_1 = -1$; $x_2 = -8$

c) $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{6}$ d) $x_1 = 0{,}3$; $x_2 = -0{,}2$

e) $x_1 = -2 + \sqrt{7}$; $x_2 = -2 - \sqrt{7}$

161.* a) $x_1 = a$; $x_2 = -a$

b) $x_1 = c + d$; $x_2 = c - d$

c) $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{ab}$; $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{ab}$
$(ab \geqq 0)$

d) $x_1 = \frac{a}{b}$; $x_2 = \frac{b}{a}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

162.* a) $x_1 = 3b$; $x_2 = -3b$

b) $x_1 = 2a + b^2$; $x_2 = 2a - b^2$

c) $x_1 = \frac{c}{2} + \sqrt{c - d}$; $x_2 = \frac{c}{2} - \sqrt{c - d}$
$(c - d \geqq 0)$

d) $x_1 = \frac{a}{b}$; $x_2 = -\frac{b}{a}$ $(a \neq 0; b \neq 0)$

163.* Geben Sie jeweils fünf verschiedene quadratische Gleichungen mit folgenden Lösungen an!

a) $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{2}{3}$ b) $x_1 = 4$ und $x_2 = -\frac{1}{4}$

d

164.* Gegeben sei die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes!

a) Ist $q < 0$, so haben die Lösungen x_1 und x_2 verschiedene Vorzeichen.

b) Ist $q > 0$ und $p > 0$, so sind beide Lösungen negativ.

c) Ist $q > 0$ und $p < 0$, so sind beide Lösungen positiv.

---

*17.** Wie kann man die Seitenlängen eines Rechtecks, dessen Umfang 28 m und dessen Flächeninhalt 48 m² beträgt, mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes berechnen?

Welche Zahlen x erfüllen die folgenden Ungleichungen?

165.* a) $x^2 + 2x + 3 > 2$

b) $2x^2 + 3x - 2 < 0$ c) $5x^2 - 10x > 15$

166.* a) $x^2 - 2x + 3 > 2$

b) $3x^2 - 11x + 6 < 0$ c) $4x^2 + 8x > 12$

167.* a) $\frac{x^2 + 10}{x} < 7$ $(x \neq 0)$

b) $x^2 - 5x < 0$ c) $x^2 - 5x + 6 > 0$

168.* a) $\frac{x^2 - 12}{x} < -1$ $(x \neq 0)$

b) $x^2 + 4x > 0$ c) $x^2 - 2x - 3 < 0$

169.* Für welche Zahlen x sind die Funktionswerte der Funktion $y = x^2$ größer bzw. kleiner als die Funktionswerte der Funktion $y = x$? Veranschaulichen Sie das Ergebnis zeichnerisch! In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = x$ die Parabel $y = x^2$?

170.* Wo liegen alle Punkte $P(x; y)$, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten?

a) $y < x^2 - 5$ b) $y > x^2 - 4x + 1$ c) $y \geqq -x^2 + 7$

171.* Zeichnen Sie die folgende Punktmenge! $y \leqq x^2 - 5$ und $y \leqq -2$

---

*18.** Wie hängt die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^4 + ax^2 + b = 0$ $(a, b \in P)$ von a und b ab? Führen Sie zunächst mit Hilfe der Diskriminante der Gleichung $z^2 + az + b = 0$ die entsprechenden Fallunterscheidungen durch!

---

e) Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel

Lösen Sie folgende Gleichungen!

1. a) $2^x = 128$ b) $2^x = 0{,}125$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{256}$ d) $10^x = 0{,}000001$ e) $10^x = \sqrt[3]{10000}$ f) $4^{-x} = 1$

2. a) $5^x = 625$ b) $2^x = \frac{1}{256}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27^{-1}$ d) $10^x = 1000$ e) $10^x = \sqrt{1000}$ f) $3^x = 1$

3. a) $2^x = 2\sqrt{2}$ b) $3^x = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$ c) $\sqrt{5}^{x^2} = 25$ d) $3^x = 9^{0,8}$

4. a) $2^x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) $7^x = \frac{1}{\sqrt[4]{7}}$ c) $\sqrt{6}^{x^2} = 36$ d) $5^x = 25^{0,6}$

---

1. Für welche rationale Zahl x gilt $2^x = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$?

2. Zeigen Sie, daß die folgenden Gleichungen keine rationalen Lösungen haben!

a) $2^x = 7$ b) $3^x = 6$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{10}$ d) $10^x = 50$

Vereinfachen Sie unter Verwendung der Potenzgesetze folgende Ausdrücke!

5. a) $3^{2+\sqrt{2}} \cdot 3^{2-\sqrt{2}}$ b) $3^{\sqrt{2}+2} : 3^{\sqrt{2}-2}$ c) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

6. a) $b^{3\sqrt{6}+1} \cdot b^{5-3\sqrt{6}}$ $(b > 0)$ b) $6^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} : 6^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ c) $\left(a^{1+\sqrt{3}}\right)^{1-\sqrt{3}}$ $(a > 0)$

7. Vergleichen Sie folgende Potenzen miteinander!
Setzen Sie jeweils das richtige Relationszeichen!

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{2}}$ und $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{5}^{\sqrt{1,2}}$ und $\sqrt{5}^{\sqrt{1,3}}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ und $(0,\overline{3})^{\sqrt{5}}$

8. Es ist $10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$. Berechnen Sie mit Hilfe dieses Näherungswertes Näherungswerte für folgende Potenzen! Verwenden Sie – wo es erforderlich ist – den Rechenstab!

$10^{1,5}$; $10^{2,5}$; $10^{-0,5}$; $10^{-1,5}$; $10^{0,25}$; $10^{0,75}$; $10^{0,125}$; $10^{0,375}$; $10^{0,625}$; $10^{0,875}$

Hinweis: Es ist $10^{1,5} = 10^{1+0,5} = 10 \cdot 10^{0,5}$; $10^{0,25} = \sqrt{10^{0,5}}$ usw.

Ermitteln Sie die Logarithmen! Begründen Sie Ihre Ergebnisse jeweils wie im Beispiel E 5!

9. a) $\log_2 16$ b) $\log_2 2$ c) $\log_3 27$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_{27} 3$ f) $\log_{\frac{1}{27}} 3$

10. a) $\log_2 128$ b) $\log_2 1$ c) $\log_4 64$ d) $\log_4 \frac{1}{64}$ e) $\log_{64} 4$ f) $\log_{\frac{1}{64}} 4$

11. a) $\log_5 \frac{1}{125}$ b) $\log_3 \sqrt{3}$ c) $\log_2 \sqrt[3]{2}$ d) $\log_3 0,\overline{3}$ e) $\log_{10} 1000$ f) $\log_{10} 1$ g) $\log_{10} 0{,}0001$ h) $\log_{10} \sqrt[3]{10}$

12. a) $\log_5 \frac{1}{625}$ b) $\log_2 \sqrt{2}$ c) $\log_3 \sqrt[3]{3}$ d) $\log_4 \frac{1}{4}$ e) $\log_{10} 10000$ f) $\log_{10} 0{,}1$ g) $\log_{10} 10$ h) $\log_{10} \sqrt[5]{100}$

Schreiben Sie folgende Gleichungen in der Form $\log_a b = c$!

13. a) $3^5 = 243$ b) $3^{-5} = \frac{1}{243}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$ d) $2^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$

14. a) $6^3 = 216$ b) $6^{-3} = \frac{1}{216}$ c) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = 36$ d) $3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

Schreiben Sie folgende Gleichungen in der Form $a^c = b$!

15. a) $\log_2 0{,}125 = -3$ b) $\log_7 1 = 0$ c) $\log_7 7 = 1$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}125 = 3$

16. a) $\log_4 0{,}0625 = -2$ b) $\log_5 1 = 0$ c) $\log_5 5 = 1$ d) $\log_{\frac{1}{4}} 0{,}0625 = 2$

Berechnen Sie!

17. a) $3^{\log_3 27}$ b) $11^{\log_{11} 1}$ c) $5^{\log_5 7}$

18. a) $10^{\log_{10} 100}$ b) $6^{\log_6 15}$ c) $7^{\log_7 7}$

19. Berechnen Sie!

$$\log_2 16 + \log_2 8 + \log_2 4 + \log_2 2 + \log_2 1 + \log_2 0{,}5 + \log_2 0{,}25 + \log_2 0{,}125 + \log_2 \frac{1}{16}$$

20. Welche Zahlen x erfüllen jeweils folgende Gleichungen?

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x 16 = -4$ c) $\log_7 x = 2$ d) $\log_{\frac{1}{5}} x = -3$

---

3. Beweisen Sie, daß es höchstens eine Zahl x mit $a^x = b$ ($a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$) geben kann!

---

e

21. a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = 2^x$ im Intervall $-4 \leqq x \leqq 4$! Verwenden Sie zur Aufstellung einer Wertetafel das Ergebnis des Auftrages E 6 auf Seite 142!

b) Lesen Sie aus der Zeichnung Näherungswerte für die Potenzen $2^{0,7}$; $2^{1,2}$; $2^{\sqrt{2}}$; $2^{\sqrt{3}}$; $2^{\sqrt{5}}$ ab!

c) Ermitteln Sie aus der Zeichnung einen Näherungswert für die Lösung der Gleichung $2^x = 5$!

22. Wodurch unterscheiden sich die Graphen der folgenden Funktionen?

$y = 2^x$ mit $x \in G$; $y = 2^x$ mit $x \in R$; $y = 2^x$ mit $x \in P$

23. In welchem Punkt schneidet die Gerade $y = -x$ die Exponentialkurve $y = 2^x$? Ermitteln Sie zeichnerisch einen Näherungswert!

24. Wie erhält man den Graph der Funktion $y = -2^x$ aus dem Graph der Funktion $y = 2^x$? Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = -2^x$ im Intervall $-3 \leqq x \leqq 3$!

25. Wie erhält man die Graphen der Funktionen $y = 2^x + 1$ und $y = 2^x - 1$ aus dem Graph der Funktion $y = 2^x$? Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $y = 2^x + 1$ und $y = 2^x - 1$ im Intervall $-3 \leqq x \leqq 3$!

26. Zeichnen Sie den Graph der Exponentialfunktion $y = 1^x$ für $-5 \leqq x \leqq 5$!

27. Ermitteln Sie diejenige Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$, die das geordnete Paar

a) $[1; 4]$; b) $[2; 2{,}25]$; c) $\left[3; \frac{1}{8}\right]$ enthält!

28. a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = 10^x$ im Intervall $\langle -2; 1 \rangle$! Geben Sie für die Aufstellung einer Wertetafel etwa für folgende Zahlen x die Potenzen 10^x mit einer Genauigkeit von einer Dezimalstelle an: $0; \pm 1; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{4}$! Verwenden Sie auch die Ergebnisse der Aufgabe e 8!

b) Entnehmen Sie der Zeichnung Näherungswerte für die Lösungen der Gleichungen $10^x = 2$ und $10^x = 3$!

---

4. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = 2^{|x|}$ im Intervall $-3 \leqq x \leqq 3$!

5. a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ im Intervall $\langle -3; 3 \rangle$!

b) Wie erhält man diesen Graph aus dem Graph der Funktion $y = 2^x$?

c) Geben Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktion $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ an!

6. Geben Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen $y = a^x$ mit $0 < a < 1$ an!

---

29. Zeichnen Sie unter Verwendung der im Auftrag E 7 auf Seite 143 gegebenen Wertetafel den Graph der Funktion $y = \log_2 x$ $(x > 0)$ im Intervall $0 < x \leqq 8$! Lesen Sie aus der Zeichnung Näherungswerte für folgende Funktionswerte ab!

$\log_2 0{,}3$; $\log_2 1{,}5$; $\log_2 3$; $\log_2 5$

30. a) Ermitteln Sie aus der im Auftrag E 9 erhaltenen Kurve Näherungswerte für $\log_{10} 2$; $\log_{10} 3$; $\log_{10} 7{,}5$!

b) Für welche Zahl x gilt annähernd $\log_{10} x = 0{,}35$?

31. Geben Sie Intervalle an, in denen die Funktionswerte der Funktion $y = \log_{10} x$ jeweils um 1 zunehmen!

---

7. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = \log_{10} x$ $(x > 0)$ durch Spiegelung des Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion an der Geraden $y = x$!

8. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = \log_2 |x|$ $(x \neq 0)$ im Intervall $\langle -5; +5 \rangle$!

9. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen!

a) $y = \log_2 (x + 1)$ $(x > -1)$ im Intervall $-1 < x \leqq 7$

b) $y = \log_2 x + 1$ $(x > 0)$ im Intervall $0 < x \leqq 8$

---

32. Geben Sie die Kennzahlen für die Logarithmen folgender Zahlen an!

35; 839; 0,07; 2337; 8,71; 0,505; 25740; 0,0035; 0,000874

33. Geben Sie Intervalle an, in denen die Logarithmen der Zahlen x mit

a) $10 \leqq x < 100$; b) $100 \leqq x < 1000$; c) $0{,}1 \leqq x < 1$; d) $0{,}01 \leqq x < 0{,}1$ liegen!

34. Es ist $\lg 3 = 0{,}4771\ldots$; vgl. Beispiel E 5f. Geben Sie für die Zahlen $3 \cdot 10^k$ mit $k \in G$ und $-5 \leqq k \leqq 5$ die (dekadischen) Logarithmen an! Fertigen Sie eine Tabelle wie im Beispiel E 11 an!

35. Die Logarithmen zweier gegebener Zahlen haben

a) die gleiche Kennzahl; b) die gleiche Mantisse.

Welche Schlußfolgerungen über die gegebenen Zahlen können Sie daraus ziehen?

e

36. Fertigen Sie eine Skale für die Funktion $y = \lg x$ für das Intervall $1 \leqq x \leqq 10$ an, indem Sie als Einheitsstrecke eine Strecke von 25 cm Länge wählen! Markieren Sie auch die Teilpunkte für die Zahlen 1,1; 1,2; ...; 1,9!

Logarithmieren Sie die folgenden Produkte bzw. Quotienten bzw. Potenzen wie im Beispiel E 12!

37. a) $85 \cdot 36$ **b)** $\dfrac{84}{25 \cdot 19{,}7}$

38. a) $0{,}84 \cdot 6{,}35 \cdot 3{,}97$ **b)** $\dfrac{15{,}9}{6{,}3}$

39. a) $\dfrac{36{,}4 \cdot 72{,}1}{0{,}5 \cdot 90{,}72}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{7} \cdot 5{,}6^2}{3{,}8^3 \cdot \sqrt{27}}$ **c)** $\dfrac{6{,}5^2 \cdot 3{,}7^3}{5{,}1^4}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{25{,}7 \cdot 36}{31{,}5}}$

40. a) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}}{c^2}$ $(a > 0;\ b > 0;\ c > 0)$

b) $\dfrac{a \cdot b}{c}$ $(a > 0;\ b > 0;\ c > 0)$

c) $3a^2$ $(a > 0)$

41. a) $a \cdot b \cdot c \cdot d$ $(a > 0;\ b > 0;\ c > 0;\ d > 0)$

b) $\dfrac{u \cdot v^3}{w}$ $(u > 0;\ v > 0;\ w > 0)$

c) $\sqrt{a \cdot b}$ $(a > 0;\ b > 0)$

Fassen Sie die folgenden Summen jeweils zu einem Logarithmus zusammen!

42. a) $\lg 3{,}5 + \lg 8{,}7$ **b)** $\lg 84 + \lg 35 + \lg 49$

c) $\lg 62{,}7 - \lg 4{,}9 - \lg 8{,}1$

d) $3 \lg 2 + 3 \lg 5$

e) $\lg u - \lg v + \lg w\ (u > 0;\ v > 0;\ w > 0)$

43. a) $\lg 6{,}37 - \lg 0{,}48$ **b)** $2 \lg 48{,}7 + \dfrac{1}{3} \lg 5{,}6$

c) $\lg 825 + \lg 8{,}25 - \lg 71$

d) $\dfrac{1}{2} \lg 5 + 3 \lg 7 - \left(2 \lg 8{,}5 + \dfrac{1}{3} \lg 3\right)$

e) $2 \lg a + \lg b - \dfrac{1}{3} \lg c (a > 0; b > 0; c > 0)$

Berechnen Sie x aus folgenden Gleichungen!

44. a) $\lg x = \lg 2 + \lg 5$

b) $\lg x = \lg 3 + \lg 5 + \lg 8$

c) $\lg x = \lg 42 - \lg 7$

45. a) $\lg x = \lg 2 + \lg 50$

b) $\lg x = 2 \cdot \lg 3 + 2 \cdot \lg 2$

c) $\lg x = \dfrac{1}{3} \cdot \lg 2 + \dfrac{1}{3} \cdot \lg 32$

Es ist $\lg 2 = 0{,}3010$; $\lg 3 = 0{,}4771$; $\lg 5 = 0{,}6990$.

Berechnen Sie die folgenden Logarithmen jeweils mit einer Genauigkeit von drei Dezimalstellen!

46. a) $\lg 6$; $\lg 0{,}6$; $\lg 60$

b) $\lg 24$; $\lg 240$; $\lg 0{,}24$

c) $\lg 10$; $\lg 15$; $\lg 0{,}5$

47. a) $\lg 12$; $\lg 1{,}2$; $\lg 0{,}12$

b) $\lg 4$; $\lg 8$; $\lg 25$

c) $\lg \dfrac{2}{5}$; $\lg \dfrac{3}{5}$; $\lg \dfrac{4}{5}$

48. Es ist $\lg 2 = 0{,}3010$. Wieviel Stellen hat die Zahl 2^{100}?

---

10. Geben Sie alle ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 an, deren Logarithmen Sie mit Hilfe von lg 2 und lg 3 berechnen können!

---

49. a) Stellen Sie eine Tabelle der Potenzen der Zahl 2 für die natürlichen Exponenten $n = 0$ bis $n = 20$ auf!

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Tabelle folgende Aufgaben!

$256 \cdot 2048$; $128 \cdot 512$; $1\,048\,576 : 65\,536$; $524\,288 : 1024$; 64^3; $\sqrt[3]{262\,144}$; $\sqrt{262\,144}$

e

Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes!

50. a) $148 \cdot 0{,}37$ b) $\dfrac{50{,}8}{37{,}4}$

c) $8{,}35 \cdot 6{,}24 \cdot 0{,}183$

d) $\dfrac{6{,}19 \cdot 71{,}4}{5{,}73}$ e) $\dfrac{60000 \cdot 0{,}345}{672}$

f) $\dfrac{17{,}2 \cdot 348 \cdot 715}{15{,}6 \cdot 38{,}4}$ g) $\dfrac{9000 \cdot 7{,}44}{0{,}35 \cdot 15{,}7 \cdot 29{,}3}$

h) $\dfrac{11400 \cdot 0{,}00037 \cdot 1{,}6}{0{,}751 \cdot 223}$

51. a) $735 \cdot 0{,}23$ b) $\dfrac{61{,}7}{27{,}8}$

c) $7{,}26 \cdot 1{,}35 \cdot 0{,}278$

d) $\dfrac{14{,}5 \cdot 8{,}19}{6{,}43}$ e) $\dfrac{7{,}38 \cdot 5000}{918}$

f) $\dfrac{279 \cdot 15{,}3 \cdot 421}{29{,}1 \cdot 17{,}4}$ g) $\dfrac{8{,}19 \cdot 7020}{28{,}7 \cdot 49{,}4 \cdot 0{,}17}$

h) $\dfrac{0{,}0083 \cdot 16{,}37500}{0{,}638 \cdot 527}$

Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes die folgenden Quadrat- bzw. Kubikzahlen! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen, die Sie aus den entsprechenden Tafeln ablesen!

52. a) $5{,}46^2$ b) $34{,}7^2$ c) 182^2 d) $0{,}037^2$

53. a) $3{,}09^2$ b) $25{,}7^2$ c) 219^2 d) $0{,}0056^2$

54. a) $1{,}83^3$ b) $25{,}3^3$ c) $3{,}4^3$ d) $0{,}056^3$

55. a) $6{,}72^3$ b) $31{,}7^3$ c) $7{,}5^3$ d) $0{,}0035^3$

Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes die folgenden Quadratwurzeln!

56. a) $\sqrt{349}$ b) $\sqrt{34{,}9}$ c) $\sqrt{3{,}49}$ d) $\sqrt{0{,}349}$ e) $\sqrt{0{,}0349}$ f) $\sqrt{0{,}00349}$

57. a) $\sqrt{375}$ b) $\sqrt{37{,}5}$ c) $\sqrt{3{,}75}$ d) $\sqrt{0{,}375}$ e) $\sqrt{0{,}0375}$ f) $\sqrt{0{,}00375}$

Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes die folgenden Quadrat- bzw. Kubikwurzeln! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen, die Sie aus den entsprechenden Tafeln ablesen!

58. a) $\sqrt{26{,}5}$ b) $\sqrt{138}$ c) $\sqrt{6{,}38}$ d) $\sqrt{0{,}6}$ e) $\sqrt[3]{5{,}17}$ f) $\sqrt[3]{36}$ g) $\sqrt[3]{0{,}47}$ h) $\sqrt[3]{0{,}047}$

59. a) $\sqrt{51{,}7}$ b) $\sqrt{157}$ c) $\sqrt{8{,}49}$ d) $\sqrt{0{,}5}$ e) $\sqrt[3]{7{,}28}$ f) $\sqrt[3]{28}$ g) $\sqrt[3]{0{,}62}$ h) $\sqrt[3]{0{,}062}$

Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes!

60. a) $\dfrac{\sqrt{51{,}7} \cdot 18{,}1^2}{9{,}07}$ b) $\sqrt{\dfrac{7{,}2 \cdot 0{,}84}{0{,}062}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{\pi^2 \cdot 5{,}28}{6{,}04}}$ d) $\left(\dfrac{3{,}51 \cdot 6{,}24}{17{,}8}\right)^3$

61. a) $\dfrac{5{,}27^2 \cdot \sqrt{108}}{0{,}24}$ b) $\sqrt{\dfrac{6{,}9 \cdot 0{,}37}{0{,}0059}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}07 \cdot \pi}{3{,}27^2}}$ d) $\left(\dfrac{0{,}961 \cdot 7{,}4}{5{,}07}\right)^3$

62. a) Erläutern Sie, wie man mit einer einzigen Einstellung der Zunge eine fest vorgegebene Zahl c der Reihe nach mit verschiedenen Zahlen multiplizieren kann!

b) Stellen Sie eine Wertetafel für die Funktion $y = \pi \cdot x$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq 3$ auf! Der Abstand aufeinanderfolgender x-Werte betrage jeweils 0,3.

63. a) Begründen Sie, daß bei einer beliebigen Einstellung der Zunge stets zwei übereinander stehende Zahlen der C- und D-Skale (bzw. der A- und B-Skale) denselben Quotienten haben!

b) Wie kann man diese Tatsache zum Ermitteln der Zahl x in einer Verhältnisgleichung $a : b = c : x$ mit einer Zungeneinstellung ausnutzen?

Lösen Sie folgende Verhältnisgleichungen mit Hilfe des Rechenstabes!

64. a) $5{,}1 : 3{,}4 = 7{,}8 : x$ b) $5{,}7 : x = 9{,}2 : 17{,}8$

65. a) $0{,}48 : 3{,}51 = 1{,}72 : x$ b) $4{,}7 : x = 12{,}3 : 7{,}6$

66. Wenden Sie das Ergebnis der Aufgabe 63 b) bei der Berechnung folgender Prozentaufgaben an!

a) 3,5% von 138 b) 15,8% von 1040

c) Berechnen Sie den Prozentsatz für den Grundwert 785 (3020) und den Prozentwert 143 (158)!

67. a) Das Festland der Erde hat einen Flächeninhalt von etwa $149{,}3 \cdot 10^6$ km². Wieviel Prozent der gesamten Erdoberfläche sind das, wenn man die Erde als Kugel mit dem mittleren Radius $R = 6370$ km annimmt?

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Wasserfläche der Erde!

c) Die Anbaufläche der Erde betrug 1960 etwa $14 \cdot 10^6$ km². Wieviel Prozent der gesamten Landfläche sind das?

68. Berechnen Sie für folgende Haushaltsgeräte (Betriebsspannung 220 V)
a) die Stromstärke, **b)** den Widerstand, **c)** die Kosten, wenn das Gerät 1 h betrieben wird und 1 kWh 8 Pf kostet! Glühlampe 60 W; Tauchsieder 750 W; Bügeleisen 800 W; Heizofen 1000 W; Kochplatte 1200 W

69. a) Welche Wärmemenge gibt ein Tauchsieder mit einer Leistungsaufnahme von 750 W in $\frac{1}{2}$ h ab?

b) Ein Tauchsieder mit einer Leistungsaufnahme von 750 W erhitzt 1 l Wasser von 17 °C bis zum Sieden. Wie lange dauert es nach dem Einschalten des Tauchsieders, bis das Wasser siedet?

c) Ein Tauchsieder von 750 W bringt 1,5 l Wasser von 17 °C in 12,5 min zum Sieden. Mit welchem Wirkungsgrad wird die elektrische Energie ausgenutzt?

70. Auf der Zunge des Rechenstabes befindet sich zwischen den Skalen B und C die sogenannte Reziprokskale CI. Sie ist gleich der von rechts nach links angeordneten Skale C. Über jeder Zahl der Skale C bzw. D findet man auf der Reziprokskale die zugehörige reziproke Zahl.
Ermitteln Sie mit Hilfe der Reziprokskale zu folgenden Zahlen die reziproken Zahlen!

$5;\quad 2;\quad 0{,}67;\quad 5{,}21;\quad 252;\quad \pi;\quad 2{,}78;\quad \frac{\pi}{3};\quad \frac{4\pi}{3};\quad \pi^2$

71. Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt auf dem Äquator infolge der Rotation der Erde um ihre eigene Achse (Radius des Äquators $R = 6378$ km)?

72. Berechnen Sie die Radialbeschleunigung, die ein Massenpunkt auf dem Äquator infolge der Erdrotation hat!

73. Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, flog mit ihrem Raumschiff Wostok 6 in durchschnittlich 200 km Höhe 48 Erdumkreisungen in 70 h 50 min.

a) Welchen Weg legte die Kosmonautin insgesamt zurück, wenn man annimmt, daß der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte (Erdradius: $R = 6370$ km)?

b) Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit (in km h⁻¹) während des Raumfluges?

74. Das Gewicht G eines Körpers mit der Masse m an der Erdoberfläche beträgt $G = m \cdot g$ ($g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ ist die Erdbeschleunigung). Nach dem Gravitationsgesetz erhält man für das Gewicht $G = \frac{\gamma \cdot m \cdot M}{R^2}$

(M ist die Erdmasse; $R = 6370$ km der Erdradius und $\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ ist die Gravitationskonstante).

a) Berechnen Sie aus diesen beiden Gleichungen die Masse der Erde!

b) Berechnen Sie die mittlere Dichte der Erde!

75. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Kreissektors mit dem Radius $r = 3{,}7$ cm und dem Winkel $\varphi = 65{,}8°$!

76. Berechnen Sie das Gewicht der heute noch 137 m hohen Cheopspyramide, deren Seitenlänge der quadratischen Grundfläche 233 m beträgt! Die Wichte des Steins, aus dem sie gebaut ist, beträgt $\gamma = 2{,}75\ p \cdot \mathrm{cm^{-3}}$.

77. Hohlmaße sollen nach der Eichordnung doppelt so hoch wie weit sein. Welche Höhe und welchen Durchmesser besitzt ein zylindrisches 1-Liter-Maß?

78. Welches Volumen hat eine Kugel, deren Oberflächeninhalt 113 cm² beträgt?

79. Eine Spule mit der Masse 125 g hat mit Kupferdraht bewickelt eine Masse von 2015 g. Wieviel Meter Draht enthält die Spule, wenn der Durchmesser des Drahtes 0,42 cm beträgt ($\varrho_{Cu} = 8{,}93\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$)?

80. Ermitteln Sie das Verhältnis von Masse zu Oberflächeninhalt (in $\mathrm{g \cdot cm^{-2}}$) bei Hohlzylindern aus Hartporzellan ($\varrho = 2{,}35\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$)!
Außendurchmesser D: 3,5 cm; 6,4 cm; 4 cm; Innendurchmesser d: 1,75 cm; 3,2 cm; 3 cm;
Höhe h: 3,5 cm; 4,8 cm; 3 cm

81. Ein Kegel aus Holz mit der Wichte $\gamma = 0{,}55\ \mathrm{p \cdot cm^{-3}}$ und der Höhe $h = 28$ cm schwimmt mit der Spitze nach unten im Wasser. Wie tief sinkt er ein?

82. Die Landegeschwindigkeit der TU 104 beträgt $225\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Welche Strecke benötigt das Flugzeug zum Ausrollen, wenn die Bremszeit 48 s beträgt?

83. Ein Geschoß von 5 kg Masse verläßt ein 2 m langes Rohr mit einer Geschwindigkeit von $800\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Wie groß ist die Kraft der Pulvergase, wenn man annimmt, daß sie während der gesamten Beschleunigungszeit konstant ist?

84. Ein Schwungrad von 21 cm Durchmesser habe eine Drehzahl von $3000\ \mathrm{min^{-1}}$. Vom Schwungradkranz löse sich ein Teilchen mit der Masse 45 g.
a) Berechnen Sie die kinetische Energie in Nm, die das Stück bei der Ablösung hat!
b) Bis zu welcher Höhe könnte das Massenstück mit dieser Energie bei vertikaler Ablösung gehoben werden? (Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt.)

85. Ermitteln Sie für die folgenden Fahrzeuge bzw. Flugzeuge die mögliche Beschleunigung a in $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$!

Fahrzeug bzw. Flugzeug	Antriebskraft in kp	Masse in kg
MIG 17	4500	6800
MIG 19	2 · 3950	10000
TU 104	2 · 6750	70000
Güterzug	20000	800000
PKW	80	1300
LKW	220	5000

86. Eine Gasflasche mit einem Fassungsvermögen von 50 l wurde bei einer Temperatur von 17 °C unter einem Druck von 150 at mit Wasserstoff gefüllt. Wieviel Liter Wasserstoff sind bei einem Druck von 2,5 at und einer Temperatur von 21 °C verfügbar?

87. Die Erzeugung von Elektroenergie betrug im Jahre 1965 in der DDR $53{,}6 \cdot 10^9$ kWh. Die Energieerzeugung soll wie folgt gesteigert werden.

1970: $93 \cdot 10^9$ kWh; 1975: $138 \cdot 10^9$ kWh; 1980: $200 \cdot 10^9$ kWh

Berechnen Sie die Prozentsätze der voraussichtlichen Steigerung für die Jahre 1970, 1975, 1980, bezogen auf das Jahr 1965 ($53{,}6 \cdot 10^9$ kWh $\triangleq$ 100%)!

88. Wie groß ist die in 1 h durch eine 40-W-Lampe fließende elektrische Ladung, wenn die Betriebsspannung 220 V beträgt? Wie viele Elektronen sind das ungefähr?

89. a) Ein Meßinstrument habe einen Widerstand von 50 Ω. Der Meßbereich betrage 10 mA. Welcher Widerstand muß dem Instrument parallel geschaltet werden, damit man Stromstärken bis zu 1 A messen kann?
b) Welchen Widerstand muß man vor das Instrument schalten, um Spannungen bis zu 50 V messen zu können?

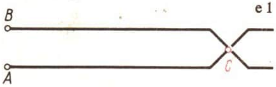
90. Welche Länge haben Drähte von 1 mm² Querschnitt aus Silber, Kupfer, Aluminium, Wolfram und Manganin, die jeweils einen Widerstand von 1 Ω besitzen?

e

91. Aus Manganindraht mit einem Durchmesser von 0,6 mm soll ein Schiebewiderstand von 330 Ω hergestellt werden. Wie lang muß der Draht sein?

92. Wie groß ist der Widerstand einer 12 km langen Leitung aus Aluminiumdraht von 7,5 mm Durchmesser? Welches Gewicht hat die Leitung?

e 1



93. Zwei Adern eines im Erdreich liegenden Fernsprechkabels aus Kupferdraht mit einem Durchmesser von 1,2 mm zeigen am Punkt C Kurzschluß gegeneinander; vgl. Bild e 1. Zur Ermittlung der Schadenstelle ermittelt man für die Leitungsstrecke ACB einen Widerstand von 13 Ω. In welcher Entfernung von A liegt etwa die Schadenstelle?

---

11. Ein chemischer Trichter (Kegel mit gleichseitigem Achsenschnitt) hat ein Volumen von 0,5 l. Wie groß ist die beim Filtrieren höchstens in Betracht kommende Fläche?

12. Wieviel Liter Benzin je Stunde benötigt ein Flugzeugmotor mit einer Leistung von 9000 PS bei einem Wirkungsgrad von $\eta = 35\%$? Die Dichte des Benzins beträgt $\varrho = 0{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, sein Heizwert 11 500 $\mathrm{kcal \cdot kg^{-1}}$.

13. Ein aus Eisen bestehender Meteorit mit der Masse 7,5 kg verringert beim Durchqueren der Erdatmosphäre innerhalb von 4 s seine Geschwindigkeit $v = 8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ um 1 200 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Berechnen Sie die Temperaturerhöhung des Meteoriten während dieser 4 s (spezifische Wärme des Eisens $c \approx 0{,}12\ \mathrm{cal \cdot g^{-1} \cdot grd^{-1}}$)! Welche Schlußfolgerungen ziehen Sie aus dem Ergebnis?

Bildnachweis:

Seite 3: Bildarchiv Volk und Wissen
Seite 43: Bildarchiv Volk und Wissen
Seite 69: Militärbilddienst
Seite 103: Zentralbild
Seite 128: Zentralbild
Seite 132: Reproduktion aus W. W. Struwe: Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Berlin 1930
Seite 133: Reproduktion aus O. Neugebauer: Mathematische Keilschrifttexte. Dritter Teil. Ergänzungsheft. Berlin 1937
Seite 135: Reproduktion aus einem Rechenbuch von Adam Ries
Seite 136: Reproduktion aus Struik: A Concise History of Mathematics. New York 1948
Seite 136: Reproduktion aus Wolf: A History of Science ... in the XVI$^{\text{th}}$ and XVII$^{\text{th}}$ Centuries. London 1950
Seite 137: Zentralbild
Seite 146: Zentralbild
Seite 150: Volk und Wissen (M. Seifert)
Seite 158: Zentralbild
Seite 185: Zentralbild
Seite 212: Zentralbild

Register

R

A a Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen

B b Ungleichungen und Gleichungssysteme

C c Potenzen und Potenzfunktionen

D d Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

E e Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel

R Register

B 2 Lineare Gleichungen und
B 6 Ungleichungen mit 1 Variablen

B 13 Systeme aus 2 linearen Gleichungen mit 2 Variablen

B 16 Lösungsverfahren

D 10 Quadratische Gleichungen

D 11 $x^2 + q = 0$

D 12 $x^2 + px = 0$

D 13 $x^2 + px + q = 0$

D 14
D 15 Lösungsverfahren

D 1 Quadratische Funktionen

D 5
D 7 Nullstellen

Potenzfunktionen

C 11 $y = x^n \, (n \in G;\ n \geqq 2)$

C 12 $y = x^n \, (n \in G;\ n \leqq 1)$

C 13 $y = x^n \left(n = \frac{p}{q};\ p, q \in G;\ p \neq q;\ q > 0\right)$

C 14
C 15 Graphen

C 4 Rechnen mit Potenzen

E 4 Exponentialfunktionen
E 5 Logarithmusfunktionen

E 11 Rechnen mit dem Rechenstab

B Ungleichungen
D Gleichungen

A Reelle Zahlen
Arbeiten mit Variablen

Rechnen mit reellen Zahlen

Umformen von Termen

Verknüpfen von Termen mit Variablen

Sachaufgaben
A, B 8, B 17, C 7, D 9, D 17, E 6, E 12
und Aufgabenteile a bis e

C
D
E Funktionen

00 09 02-4 · 2,70