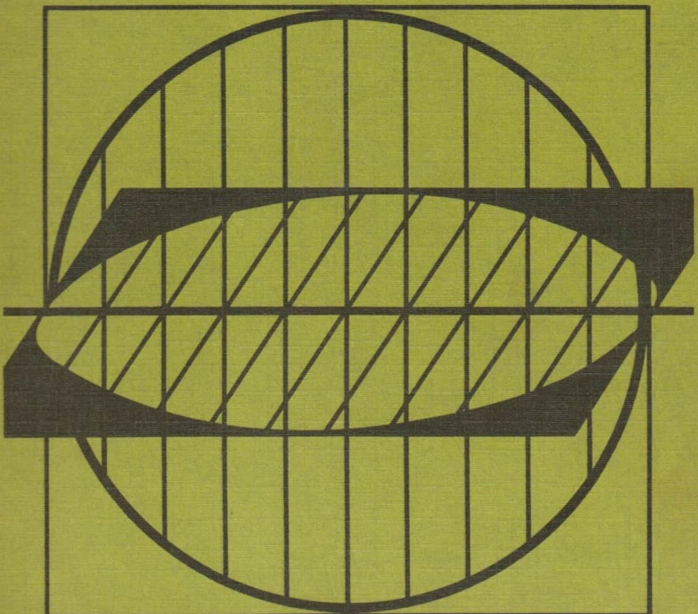
Mathematik 7



A a	Rechenstab; Anwendung von Verhältnisgleichungen
B b	Rationale Zahlen
C c	Gleichungen
D d	Quadratzahl und Quadratwurzel
E e	Darstellende Geometrie
F f	Der Kreis
G g	Stereometrie
Z	Register

Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

Das farbige **Randregister** auf dem Rand einer jeden Seite dient dem bequemen und schnellen Auffinden der einzelnen Stoffgebiete.
Das Buch untergliedert sich in den Lehrteil A bis G und in den Aufgabenteil a bis g. Der Teil a enthält die Aufgaben zum Stoffgebiet A, der Teil b die Aufgaben zum Stoffgebiet B usw.
Jedes **Stoffgebiet** beginnt mit einer Inhaltsübersicht. Durch eine fortlaufende Numerierung wird jedes Stoffgebiet in **Lerneinheiten** unterteilt. Innerhalb der Lerneinheiten werden **Beispiele, Aufträge** und **Merksätze** durch folgende Zeichen besonders hervorgehoben:

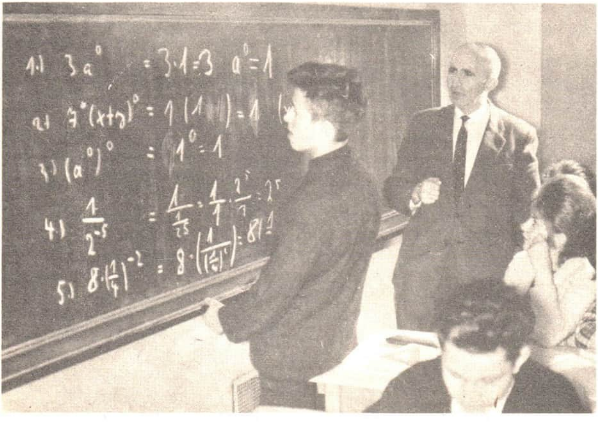
Beispiele ■
Aufträge ●
Merksätze ▶ **SATZ bzw.** ▶ **DEFINITION**

(Beachte stets den Unterschied zwischen einer Definition und einem Satz!)
Am Ende vieler Lerneinheiten findest du einen Hinweis darauf, welche Aufgaben zu dem soeben behandelten Stoff gehören.
Der Aufgabenteil enthält zusätzlich noch Aufgaben zur Übung und Wiederholung, die schwarz numeriert wurden.
Wenn du einen bestimmten Begriff suchst, so schlägst du zuerst das Register Z am Schluß des Buches auf.

Mathematik

Lehrbuch für Klasse 7

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1977



Autoren:
Prof. Dr. Rudolf Bittner — Kapitel A, D, F, G
Prof. Dr. Dieter Ilse, Dr. Werner Tietz — Kapitel B, C
Prof. Dr. Manfred Gimpel — Kapitel E, e
Dr. Herbert Vockenberg — Kapitel a, f, g
Dr. Günter Fanghänel — Kapitel b, c, d
Prof. Dr. Hans Wußing — Historische Abschnitte

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt.

8. Auflage
Ausgabe 1970
Lizenz Nr. 203 — 1000/76 (DN 00 07 06-8)
LSV 0681
Redaktion: Ingrid Fabian, Karlheinz Martin
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Umschlag und Vorsatz: Manfred Behrendt
Typographie: Atelier vwv, Wolfgang Lorenz
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden (III/9/1)
Schrift: Bodoni
Redaktionsschluß: 25. Mai 1976
Bestell-Nr. 730 373 8
Schulpreis DDR: 2,10

A Rechenstab; Anwendungen von Verhältnisgleichungen

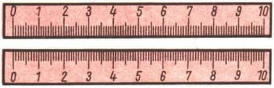
Von Facharbeitern, Technikern, Konstrukteuren, Ingenieuren – von ihnen allen wird erwartet, daß sie mit dem Rechenstab vertraut sind. Trotz moderner Rechenmaschinen ist der Rechenstab nach wie vor ein wichtiges Rechenhilfsmittel zur Lösung vieler Aufgaben, die unmittelbar bei der täglichen Arbeit auftreten und zu lösen sind. Mit ihm lassen sich im Vergleich zum schriftlichen Rechnen die geforderten Ergebnisse schneller finden. Die Rechengenauigkeit ist zwar geringer als bei schriftlichen Rechnungen, aber sie genügt bei vielen praktischen Problemen.

Einführung in den Gebrauch des Rechenstabs

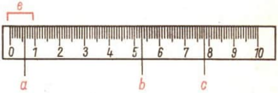
1 Gleichmäßig und ungleichmäßig geteilte Skalen

Im Mathematik- und Physikunterricht der Klasse 6 haben wir einige Meßinstrumente benutzt, auf denen gleichmäßig geteilte Skalen angebracht sind, z. B. das Lineal, den Meßzylinder, den Federkraftmesser, das Thermometer. Eine Skale mit gleichmäßiger Teilung kann man sich so aufgebaut denken, daß eine Einheitsstrecke wiederholt abgetragen wurde. Auch die Meßstreifen im Bild A 1 tragen gleichmäßig geteilte Skalen.

Für das Ablesen einer Skale ist von großer Bedeutung, welchen Abstand man als Einheit betrachtet. Wenn im Bild A 2 der Abstand von 0 bis 1 als Einheit betrachtet wird, so bedeuten $a = 0{,}6$; $b = 5{,}3$; $c = 7{,}8$. Wenn der Abstand von 0 bis 10 als Einheit angesehen wird, so bedeuten $a = 0{,}06$; $b = 0{,}53$; $c = 0{,}78$.



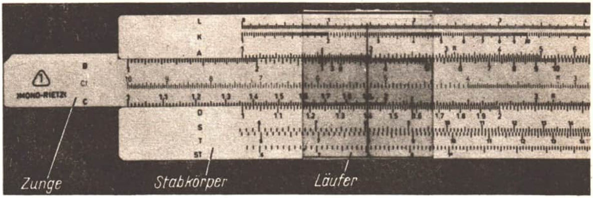
A 1



A 2

① *Welche Zahlen stellen die Teilstriche a, b und c im Bild A 2 dar, wenn als Einheit der Abstand von 0 bis 0,1 betrachtet wird?*

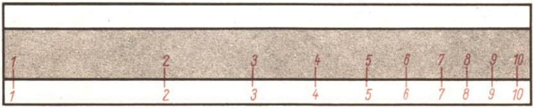
Eine Skale, bei der die Teilstriche nicht gleiche Abstände haben, heißt **ungleichmäßig** geteilt. Der Rechenstab enthält ungleichmäßig geteilte Skalen (Bild A 3). Wir lernen zuerst die Skale D auf dem Stabkörper (Bild A 3) kennen.



A 3

② *Miß auf deinem Rechenstab die Abstände, die die Teilstriche über den Ziffern 1 und 2; 2 und 3; usw. bis 9 und 10 haben! Vergleiche die Längen miteinander!*

Die Skale D des Rechenstabs enthält mit den Teilstrichen, die mit 1, 2, 3, ..., 10 beschriftet sind, eine Einteilung, die der im Bild A 4 entspricht. Durch weitere



A 4

Striche ist diese Skale auf dem Rechenstab noch weiter unterteilt worden. Dabei unterscheiden sich die Abschnitte von 1 bis 2, von 2 bis 4 und von 4 bis 10 voneinander.

3 *Versuche anhand deines Rechenstabs herauszufinden, worin die Unterschiede der Teilungen in diesen drei Abschnitten bestehen!*

2 Einstellen und Ablesen auf dem Rechenstab

Jeder Rechenstab besitzt einen Läufer (Bild A 3). Der Ablesestrich dient zum Einstellen und Ablesen der Zahlen. Bei einem Läufer mit drei Ablesestrichen verwenden wir den mittleren zum Einstellen und Ablesen.
Für das Einstellen und Ablesen von Zahlen betrachten wir nur ihre **Ziffernfolgen**, das heißt, wir lassen ein eventuell vorhandenes Komma unberücksichtigt. Deshalb sprechen wir auch das Komma nicht mit. Beim Einstellen der Zahl 5,23 sprechen wir z. B. 5 — 2 — 3 (fünf — zwei — drei).
Der **Stellenwert** des Ergebnisses wird vor dem Einstellen mit Hilfe eines Überschlags ermittelt.
Beim Rechenstabrechnen werden nur die **wesentlichen Ziffern** berücksichtigt. Alle von Null verschiedenen Ziffern sind **stets** wesentlich. Die Ziffer 0 ist **nur dann** wesentlich, wenn sie weder erste noch letzte Ziffer der betreffenden Zahl ist.

1 **a)** Die Zahl 1970 hat die wesentlichen Ziffern 1, 9 und 7. Eingestellt wird die Ziffernfolge 1—9—7.
b) Die Zahl 10,9 hat die wesentlichen Ziffern 1, 0 und 9. Eingestellt wird die Ziffernfolge 1—0—9.

Im ersten Abschnitt kann jede Zahl mit drei wesentlichen Ziffern genau eingestellt werden. Zahlen mit vier wesentlichen Ziffern können eingestellt bzw. abgelesen werden, indem die Einstellung der vierten Ziffer geschätzt wird.

4 *Stelle mit dem Ablesestrich des Läufers auf der Skale D Zahlen mit folgender Ziffernfolge ein!*

a) *1—0—1*	**b)** *1—0—2*	**c)** *1—0—5*	**d)** *1—0—9*	**e)** *1—1*
f) *1—1—1*	**g)** *1—1—9*	**h)** *1—2*	**i)** *1—2—1*	**k)** *1—2—9*
l) *1—5*	**m)** *1—5—5*	**n)** *1—5—9*	**o)** *1—6*	**p)** *1—9—5*

Im zweiten Abschnitt kann jede Zahl mit drei wesentlichen Ziffern genau eingestellt werden, wenn die letzte wesentliche Ziffer eine 2, 4, 6 oder 8 ist. Falls die letzte wesentliche Ziffer eine 1, 3, 5, 7 oder 9 ist, muß die Mitte zwischen zwei Teilstrichen nach Augenmaß eingestellt werden.

5 *Stelle mit dem Ablesestrich des Läufers auf der Skale D Zahlen mit folgender Ziffernfolge ein!*

a) *2—0—4*	**b)** *2—7—8*	**c)** *2—9—4*	**d)** *3—0—2*	**e)** *3—8—8*
f) *2—0—3*	**g)** *2—1—7*	**h)** *2—5—5*	**i)** *3—0—5*	**k)** *3—3—9*
l) *2—2*	**m)** *2—2—2*	**n)** *3—3*	**o)** *3—3—3*	**p)** *2*
q) *3*				

Im dritten Abschnitt kann jede Zahl mit zwei wesentlichen Ziffern genau eingestellt werden. Zahlen mit drei wesentlichen Ziffern lassen sich genau einstellen, wenn die letzte Ziffer eine 5 ist. Bei allen übrigen Zahlen mit drei wesentlichen Ziffern muß die Einstellung der letzten Ziffer geschätzt werden.

(6) *Stelle mit dem Ablesestrich des Läufers auf der Skale D Zahlen mit folgender Ziffernfolge ein!*

a) *4–1*	**b)** *5–2*	**c)** *6–4*	**d)** *7–9*	**e)** *9–8*
f) *4–0–5*	**g)** *5–3–5*	**h)** *8–5–5*	**i)** *8–9–5*	**k)** *9–9–5*
l) *4–0–7*	**m)** *6–1–8*	**n)** *7–7–7*	**o)** *8–9–2*	**p)** *9–0–3*

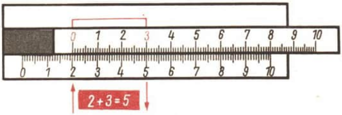
Aufgaben a 1 bis 6

3 Multiplizieren mit Hilfe des Rechenstabs

(7) *a) Wie können zwei Strecken addiert werden?*
b) Addiere die Strecken a = 5 cm und b = 3 cm!

Mit Hilfe des Additionsrechenstabs, der gleichmäßig geteilte Skalen trägt, können wir unter Ausnutzung der Streckenaddition Zahlen addieren.

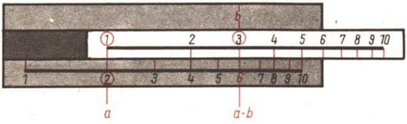
2 Es sollen die Zahlen 2 und 3 addiert werden (Bild A 5).
1.) Wir verschieben den oberen Meßstab so, daß der Anfangspunkt 0 der oberen Skale über dem Teilstrich 2 der unteren Skale steht.
2.) Wir suchen auf der oberen Skale den Teilstrich 3 auf und lesen auf der unteren Skale unter diesem Teilstrich die Summe $2 + 3 = 5$ ab.



A 5

Mit Hilfe unseres Rechenstabs können wir unter Ausnutzung der Streckenaddition Zahlen multiplizieren. Die ungleichmäßige Teilung der Skalen unseres Rechenstabs ist so angelegt, daß wir bei der Streckenaddition auf einen Punkt der Teilung gelangen, dem das Produkt der Zahlen zugeordnet ist.

3 Es sollen die Zahlen 2 und 3 miteinander multipliziert werden (Bild A 6).
1.) Wir verschieben die Zunge so, daß der Anfangspunkt 1 der Skale C über dem Teilstrich 2 der Skale D steht.
2.) Wir suchen auf der Skale C den Teilstrich 3 auf und lesen auf der Skale D unter diesem Teilstrich das Produkt $2 \cdot 3 = 6$ ab.



A 6

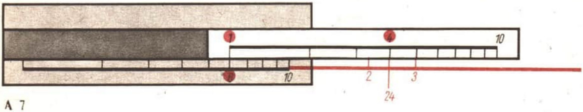
Beim Multiplizieren mit Hilfe des Rechenstabs führen wir folgende Schritte aus:

1.) Durch Überschlag wird ein Näherungswert des Produktes ermittelt.
2.) Auf der Skale D wird einer der beiden Faktoren eingestellt. Die Zunge wird so verschoben, daß der Anfangspunkt 1 der Skale C (wir sagen kurz C 1) über dieser Einstellung steht.
3.) Mit dem Ablesestrich des Läufers wird auf der Skale C der andere Faktor eingestellt. Unter dem Ablesestrich wird auf der Skale D die Ziffernfolge des Produktes abgelesen.

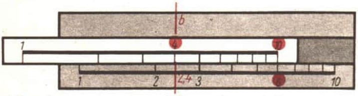
4 Es soll das Produkt 3,42 · 0,224 berechnet werden.
1.) *Überschlag:* $3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$.
2.) Wir stellen C 1 über D 3–4–2 ein.
3.) Wir lesen unter C 2–2–4 die Ziffernfolge D 7–6–6 ab.
Ergebnis: $3{,}42 \cdot 0{,}224 \approx 0{,}766$

4

Beim Multiplizieren mit Hilfe des Rechenstabs kann es vorkommen, daß der zweite Faktor auf der Skale C nicht mehr eingestellt werden kann (Bild A 7). In diesem Falle wird nicht der Anfangspunkt C 1, sondern der Endpunkt C 10 der Skale C über die Einstellung des ersten Faktors auf der Skale D gestellt (Bild A 8). Die Zunge wird in diesem Falle nicht nach rechts, sondern nach links verschoben. Man nennt dieses Verfahren **Multiplikation mit Rückschlag** (kurz: Rückschlag).



A 7



A 8

5 Es soll das Produkt 62,4 · 5,37 berechnet werden.
1.) *Überschlag:* $60 \cdot 5 = 300$.
2.) Wir stellen C 10 über D 6–2–4 ein.
3.) Wir lesen unter C 5–3–7 die Ziffernfolge D 3–3–5 ab.
Ergebnis: $62{,}4 \cdot 5{,}37 \approx 335$

Das Produkt aus drei Faktoren berechnet man folgendermaßen:
Zuerst wird das Produkt aus den ersten beiden Faktoren ermittelt. Der Ablesestrich wird auf das Zwischenergebnis eingestellt, das aber nicht abgelesen wird.
Dann betrachtet man das Ergebnis der ersten Multiplikation als ersten Faktor der zweiten Multiplikation.
Bei mehr als drei Faktoren verfährt man entsprechend.

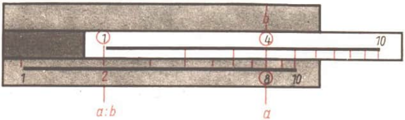
6 Ein Quadratmeter Plastefolie koste 3,25 M. Für eine Ausstellung wird eine rechteckige Folie mit den Seitenlängen 0,45 m und 0,67 m benötigt. Der Preis der benötigten Folie soll mit dem Rechenstab berechnet werden:
1.) *Überschlag:* $0,5 \cdot 1 \cdot 3 = 1,5$.
2.) Wir stellen C 10 über D 4–5 ein.
3.) Der Ablesestrich wird über D 6–7 gestellt.
4.) C 1 kommt unter den Ablesestrich.
5.) Wir lesen unter C 3–2–5 die Ziffernfolge D 9–7–9 ab.
Ergebnis: Der Preis der benötigten Folie beträgt 0,98 M.

Aufgaben a 7 bis 19

5 Dividieren mit Hilfe des Rechenstabs

Beim Dividieren mit Hilfe des Rechenstabs führen wir folgende Schritte aus:
1.) Durch Überschlag wird ein Näherungswert des Quotienten ermittelt.
2.) Auf der Skale D wird mit dem Ablesestrich des Läufers der Dividend eingestellt. Die Zunge wird so verschoben, daß die Einstellung des Divisors auf der Skale C unter dem Ablesestrich erscheint.
3.) Unter dem Anfangspunkt der Skale C wird auf der Skale D die Ziffernfolge des Quotienten abgelesen.

7 Es soll die Zahl 8 durch die Zahl 4 dividiert werden (Bild A 9).
1.) Wir verschieben die Zunge so, daß der Teilstrich 4 der Skale C über dem Teilstrich 8 der Skale D steht.
2.) Wir suchen auf der Skale C den Anfangspunkt 1 auf und lesen auf der Skale D unter diesem Punkt den Quotienten $8 : 4 = 2$ ab.



A 9

8 Es soll der Quotient 51,7 : 1,74 berechnet werden.
1.) *Überschlag:* $50 : 2 = 25$.
2.) Wir stellen C 1–7–4 über D 5–1–7 ein.
3.) Wir lesen unter C 1 die Ziffernfolge D 2–9–7 ab.
Ergebnis: $51,7 : 1,74 \approx 29,7$

Beim Dividieren mit Hilfe des Rechenstabs kann es vorkommen, daß unter dem Anfangspunkt C 1 der Skale nicht mehr abgelesen werden kann. In diesem Falle wird die Ziffernfolge des Quotienten unter C 10 abgelesen.

9 Es soll der Quotient 5,81 : 8,74 berechnet werden.
1.) *Überschlag:* $5 : 10 = 0,5$.
2.) Wir stellen C 8–7–4 über D 5–8–1 ein.
3.) Wir lesen unter C 10 die Ziffernfolge D 6–6–5 ab.
Ergebnis: $5,81 : 8,74 \approx 0,665$

Aufgaben a 20 bis 25

6 Verbindung von Division und Multiplikation

Ein Vorteil des Rechenstabrechnens gegenüber dem schriftlichen Rechnen wird bei der Verbindung von Divisions- mit Multiplikationsaufgaben deutlich.

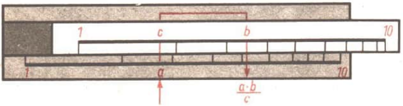
10 Es soll der Term $\frac{0{,}157 \cdot 375}{42{,}3}$ berechnet werden.

Zuerst wird der Quotient $\frac{0{,}157}{42{,}3} = x$ ermittelt. Anschließend wird dann das Produkt $x \cdot 375$ berechnet.
Beim schriftlichen Rechnen muß zunächst das Zwischenergebnis x ausgerechnet werden. Bei Verwendung des Rechenstabs finden wir das Ergebnis, ohne daß das Zwischenergebnis x abgelesen werden muß.

1.) *Überschlag:* $\frac{0{,}2 \cdot 400}{40} = 2$
2.) Wir stellen C 4–2–3 über D 1–5–7 ein.
3.) Wir lesen unter C 3–7–5 die Ziffernfolge D 1–3–9 ab.

Ergebnis: $\frac{0{,}157 \cdot 375}{42{,}3} \approx 1{,}39$.

Beim Berechnen eines Terms der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ $(c \neq 0)$ mit Hilfe des Rechenstabs führen wir folgende Schritte aus (Bild A 10):



A 10

1.) Durch Überschlag wird ein Näherungswert für das Ergebnis ermittelt.
2.) Auf der Skale D wird mit dem Ablesestrich die Zahl a eingestellt. Die Zunge wird so verschoben, daß der Teilstrich c der Skale C unter dem Ablesestrich erscheint.
3.) Auf der Skale C wird mit dem Ablesestrich die Zahl b eingestellt. Auf der Skale D wird unter dem Ablesestrich die Ziffernfolge des Ergebnisses abgelesen.

Wenn im Schritt 3.) die Zahl b auf der Skale c nicht eingestellt werden kann, so ist zunächst ein Rückschlag erforderlich.

11 Es soll der Term $\frac{4{,}53 \cdot 11{,}9}{9{,}71}$ berechnet werden.

1.) *Überschlag:* $\frac{5 \cdot 10}{10} = 5.$
2.) Wir stellen C 9–7–1 über D 4–5–3 ein.
3.) Rückschlag: Wir stellen den Ablesestrich über C 10 und verschieben die Zunge so, daß C 1 unter dem Ablesestrich erscheint.
4.) Wir lesen unter C 1–1–9 die Ziffernfolge D 5–5–5 ab.

Ergebnis: $\frac{4{,}53 \cdot 11{,}9}{9{,}71} \approx 5{,}55$

Aufgaben a 26 bis 29

7 Verhältnisgleichungen

A

Jede Gleichung der Form

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bzw. } a : b = c : d \text{ mit } b, d \neq 0$$

heißt **Verhältnisgleichung.**

Die Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ kann nach a, nach b, nach c oder nach d aufgelöst werden.

12 Gegeben ist die Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

a) Die Gleichung ist nach a aufzulösen.
Wir multiplizieren die Verhältnisgleichung mit b:

$$\frac{a}{b} \cdot b = \frac{c}{d} \cdot b$$

$$a = \frac{c \cdot b}{d}.$$

b) Die Gleichung ist nach c aufzulösen.
Wir multiplizieren die Verhältnisgleichung mit d:

$$\frac{a}{b} \cdot d = \frac{c}{d} \cdot d.$$

Wir vertauschen die Seiten der Gleichung:

$$c = \frac{a \cdot d}{b}.$$

c) Die Gleichung ist nach b aufzulösen.
Wir multiplizieren die Verhältnisgleichung mit $b \cdot d$:

$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d$$

$$a \cdot d = c \cdot b.$$

Dann dividieren wir durch c und vertauschen die Seiten:

$$\frac{a \cdot d}{c} = \frac{c \cdot b}{c}$$

$$b = \frac{a \cdot d}{c}.$$

d) Die Gleichung ist nach d aufzulösen.
Wir multiplizieren die Verhältnisgleichung mit $b \cdot d$:

$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d$$

$$a \cdot d = c \cdot b.$$

Dann dividieren wir durch a:

$$\frac{a \cdot d}{a} = \frac{c \cdot b}{a}$$

$$d = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Sind drei Glieder einer Verhältnisgleichung bekannt, so kann das vierte Glied berechnet werden.

13 *Gegeben:* $\frac{21{,}2}{6{,}8} = \frac{5{,}5}{x}$ *Gesucht:* x

$$\frac{21{,}2}{6{,}8} = \frac{5{,}5}{x} \quad \Big| \cdot x$$

$$\frac{21{,}2 \cdot x}{6{,}8} = 5{,}5 \quad \Big| \cdot 6{,}8$$

$$21{,}2 \cdot x = 5{,}5 \cdot 6{,}8 \quad \Big| : 21{,}2$$

$$x = \frac{5{,}5 \cdot 6{,}8}{21{,}2}$$

Der Term $\frac{5{,}5 \cdot 6{,}8}{21{,}2}$ kann mit Hilfe des Rechenstabs berechnet werden.

8 *Führe die Rechnung im Beispiel A 13 selbst zu Ende!*

14 Die Genossenschaftsbauern einer LPG wollen auf ihre insgesamt 37,2 ha große Weizenanbaufläche 41,3 dt Kalkstickstoff aufbringen. Wieviel Dezitonnen Kalkstickstoff werden für einen Schlag von 8,6 ha verbraucht, wenn auf alle Getreideflächen je Hektar die gleiche Menge kommen soll?

Ansatz:

Fläche in ha	37,2	8,6
Kalkstickstoff in dt	41,3	x

Verhältnisgleichung:

$$\frac{37{,}2}{41{,}3} = \frac{8{,}6}{x}$$

$$x = \frac{41{,}3 \cdot 8{,}6}{37{,}2}$$

Rechenstabrechnung:

1.) Überschlag: $\frac{40 \cdot 10}{40} = 10$

2.) Wir stellen C 3–7–2 über D 4–1–3 ein.

3.) Wir lesen unter C 8–6 die Ziffernfolge D 9–5–5 ab.

Ergebnis: Für den Schlag werden etwa 9,5 dt Kalkstickstoff verbraucht.

15 In 825,0 g einer bestimmten Salzlösung sind 47,9 g Salz enthalten. Von derselben Lösung sollen weitere 165,0 g hergestellt werden. Wieviel Salz wird dazu benötigt?

Ansatz:

Salzlösung in g	825,0	165,0
Salzmenge in g	47,9	x

Verhältnisgleichung:

$$\frac{825{,}0}{47{,}9} = \frac{165{,}0}{x}$$

$$x = \frac{47{,}9 \cdot 165{,}0}{825{,}0}$$

Rechenstabrechnung:

1.) Überschlag: $\frac{50 \cdot 200}{800} \approx 12$

2.) Wir stellen C 8–2–5 über D 4–7–9

3.) Rückschlag: Wir stellen den Ablesestrich über C 10 und schieben C 1 unter den Ablesestrich.

4.) Wir lesen unter C 1–6–5 die Ziffernfolge D 9–5–3 ab.

Ergebnis: Für die Salzlösung werden etwa 9,5 g Salz benötigt.

Aufgaben a 30 bis 45

8 Die Proportionaleinstellung des Rechenstabs

In den Beispielen A 13, 14, 15 haben wir das vierte Glied einer Verhältnisgleichung berechnet und dabei den Rechenstab benutzt. Mit Hilfe der **Proportionaleinstellung des Rechenstabs** kann man sich das Auflösen nach der Variablen ersparen. Zur Berechnung von x im Beispiel A 14 stellen wir beispielsweise den Rechenstab wie im Bild A 11 ein. Wir denken uns gewissermaßen die Gleitfuge als Bruch-

A 11

strich und stellen auf der Skale C die Zähler und auf der Skale D die Nenner ein. Also:

1.) *Überschlag:* Da der Nenner auf der linken Seite etwas größer als der Zähler auf der linken Seite ist, muß auch der Nenner auf der rechten Seite etwas größer als der Zähler auf der rechten Seite (etwa 10) sein.
2.) Wir stellen C 3—7—2 über D 4—1—3.
3.) Wir lesen unter C 8—6 die Ziffernfolge D 9—5—5 ab.

Ergebnis: $x = 9{,}55$

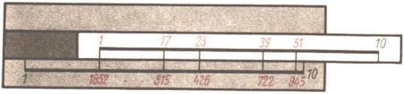
Die Proportionaleinstellung ist besonders vorteilhaft, wenn mehrere Werte durch eine Einstellung abgelesen werden können.

16 Gegeben sind folgende Entfernungen in Seemeilen:
1,7 sm; 2,3 sm; 3,9 sm; 5,1 sm. Diese Entfernungen sollen in Kilometer umgerechnet werden. Aus der Beziehung 1 sm = 1,852 km folgt die Verhältnisgleichung

$$\frac{1}{1{,}852} = \frac{1{,}7}{x}.$$

Wir stellen C 1 über D 1—8—5—2 ein. Dann lesen wir der Reihe nach ab (Bild A 12):

a) unter C 1—7 die Ziffernfolge D 3—1—5,
b) unter C 2—3 die Ziffernfolge D 4—2—6,
c) unter C 3—9 die Ziffernfolge D 7—2—2,
d) unter C 5—1 die Ziffernfolge D 9—4—5.



A 12

Ergebnis: Die Umrechnung ergibt 3,15 km; 4,26 km; 7,22 km; 9,45 km.
Mit einer einzigen Einstellung

$$\frac{1}{1{,}852} = \frac{a}{x}$$

können wir in diesem Beispiel für jede Entfernung a, die uns in Seemeilen gegeben ist, die Entfernung in Kilometern ablesen. Möglicherweise ist jedoch auch ein Rückschlag erforderlich. In unserem Beispiel wäre ein Rückschlag zum Beispiel für die Umrechnung von 85 sm erforderlich geworden.
Wir stellen also C 10 über D 1—8—5—2 ein und lesen unter C 8—5 die Ziffernfolge D 1—5—8 ab.

Ergebnis: 85 sm sind 158 km.

17 Gesucht sind Zahlenpaare $[a; b]$, die die Verhältnisgleichung

$$\frac{3}{5{,}5} = \frac{a}{b}$$

erfüllen.

Wir stellen C 3 über D 5–5 ein. Dann finden wir zu jeder beliebigen Zahl a, deren Ziffernfolge wir auf der Skale C aufsuchen, die Ziffernfolge der zugehörigen Zahl b auf der Skale D.
Für $a = 4{,}2$ erhalten wir $b = 7{,}7$, also [4,2; 7,7].
Für $a = 18$ erhalten wir $b = 33$, also [18; 33].

9 *Stelle in einer Tabelle zehn Zahlenpaare [a; b] zusammen, die die Verhältnisgleichung* $\frac{a}{b} = \frac{3}{5{,}5}$ *erfüllen!*

Gib mindestens drei Zahlenpaare an, für die ein Rückschlag erforderlich ist!

Aufgaben a 46 bis 53

Prozentrechnung

9 Die Zahl 100 als Vergleichszahl

Viele Aufgaben des täglichen Lebens führen auf Zahlenvergleiche.

18 **a)** Teilnahme an der Mathematikolympiade

	Kl. 7a	Kl. 7b
Schülerzahl	31	33
Teilnehmer	24	26

Frage: In welcher Klasse ist die Beteiligung besser?

b) Jahresplanerfüllung bei der Produktion von Maschinen

	Betrieb A	Betrieb B
Plan	260	350
Planerfüllung	275	380

Frage: Welcher Betrieb hat eine höhere Planerfüllung?

Solche Aufgaben können mit Hilfe der Prozentrechnung gelöst werden.
Die Prozentrechnung ist ein Anwendungsgebiet der Verhältnisgleichungen. Verhältnisgleichungen haben wir mit Hilfe des Rechenstabs gelöst. Daraus ist zu ersehen, daß wir zur Lösung der Aufgaben aus der Prozentrechnung den Rechenstab verwenden können.

Im Beispiel A 18a ist ein Vergleich beider Klassen nicht ohne weiteres möglich, da beide Klassen unterschiedliche Schülerzahlen haben.
In der Praxis werden zur Erleichterung des Vergleichs viele Zahlenangaben auf die Zahl 100 bezogen.
Die Normen für die Viehhaltung in der Landwirtschaft beziehen sich auf 100 ha landwirtschaftlicher Nutzfläche.
Die Angaben über den Kraftstoffverbrauch für Kraftfahrzeuge erfolgen je 100 km Fahrstrecke.
Die Preise verschiedener Waren werden je 100 g angegeben usw.
Auch beim Vergleich von Zahlenverhältnissen (Quotienten) wird die Zahl 100 als Vergleichszahl verwendet; die Quotienten werden dann in Brüche mit dem Hauptnenner 100 verwandelt.

A

19 Die Norm für den Kraftstoffverbrauch des PKW Trabant 601 beträgt 6,8 l je 100 km Fahrstrecke. Ein Kraftfahrer benötigte für seinen Wagen von diesem Typ 27 l Kraftstoff für eine Fahrstrecke von 375 km. Es soll der Kraftstoffverbrauch je 100 km Fahrstrecke berechnet werden. Um wieviel Liter weicht der Verbrauch vom Normverbrauch ab?

Fahrstrecke in km	100	375
Verbrauch in l	x	27

Da der Verbrauch und die Fahrstrecke direkt proportional sind, ergibt sich die Verhältnisgleichung

$$\frac{100}{x} = \frac{375}{27}.$$

Wir finden

$$x = \frac{100 \cdot 27}{375} = \frac{2700}{375}.$$

Die Berechnung mit dem Rechenstab ergibt $x \approx 7{,}2$.
Ergebnis: Der Verbrauch beträgt 7,2 l je 100 km und liegt also um 0,4 l je 100 km höher als die Norm.

20 In 715 g einer Kochsalzlösung A seien 107 g Kochsalz gelöst. In einer anderen Kochsalzlösung B seien in 565 g dieser Lösung 79 g Kochsalz enthalten. Welche Lösung ist salzhaltiger?
Der Lösungsweg ist aus der folgenden Tabelle zu ersehen:

	Salzlösung A	Salzlösung B
Salzanteil	$\frac{107}{715}$	$\frac{79}{565}$
Überschlag	$\frac{100}{700} \approx 0{,}1$	$\frac{80}{600} \approx 0{,}1$
Berechnung der Quotienten mit dem Rechenstab	$\frac{107}{715} \approx 0{,}15 = \frac{15}{100}$	$\frac{79}{565} \approx 0{,}14 = \frac{14}{100}$

Ergebnis: Die Salzlösung A ist salzhaltiger, denn auf 100 g dieser Lösung entfallen 15 g Salz, während 100 g Salzlösung B nur 14 g Salz enthalten.

10 *Beantworte die in den Beispielen A 18 a und b gestellten Fragen!*

Aufgaben a 54 bis 59

10 Prozentbegriff

Der Vergleich von Zahlenverhältnissen wird in der Praxis meistens auf den Vergleich von Brüchen mit dem Nenner 100 zurückgeführt. Im Beispiel A 20 betrug der Salzanteil der Lösung A $\frac{15}{100}$ und der Salzanteil der Lösung B $\frac{14}{100}$. Auf 100 g der Salzlösung A entfallen 15 g Salz, auf 100 g der Salzlösung B 14 g Salz. Da der Vergleich von Brüchen mit dem Nenner 100 sehr häufig vorkommt, wurde für die Angaben in Hundertstel ein besonderer Begriff eingeführt. Für 1 Hundertstel einer gegebenen Zahl wird die Bezeichnung **1 Prozent** (geschrieben 1 %) verwendet. Das Wort „Prozent" geht auf die lateinischen Wörter „pro centum" zurück, die „für hundert", sinngemäß also „Hundertstel", bedeuten.

A

Die Salzlösungen A und B im Beispiel B 20 enthalten also 15 % bzw. 14 % Salz.

1 **DEFINITION: Ein Prozent einer Zahl ist der hundertste Teil dieser Zahl.**

1 % von a sind $\frac{a}{100}$.

Jede Angabe in Prozenten kann durch einen Dezimalbruch ersetzt werden. Umgekehrt läßt sich jeder Bruch mit dem Nenner Hundert durch eine Prozentangabe ersetzen. In der folgenden Tabelle sind einige Prozentangaben mit den zugehörigen Dezimalbrüchen angegeben.

Prozente	1 %	4 %	10 %	23 %	50 %	75 %	100 %	105 %	231 %
Dezimalbruch	0,01	0,04	0,10	0,23	0,50	0,75	1,00	1,05	2,31

Wenn also beispielsweise die Hälfte aller Schüler einer Klasse aktive Sportler sind, so kann auch gesagt werden, daß 50 % aller Schüler dieser Klasse aktiv Sport betreiben. Umgekehrt bedeutet die Angabe, daß 75 % der Schüler einer Klasse 7 den Englischunterricht besuchen, daß $\frac{3}{4}$ aller Schüler dieser Klasse Englisch lernen.

11 *Erläutere folgende Angaben:*

a) *In der Klasse 7 a einer Schule nahmen 77 % der Schüler und in der Klasse 7 b derselben Schule nahmen 79 % der Schüler an der Mathematikolympiade teil!*

b) *Der Betrieb A hat den Jahresplan mit 106 %, der Betrieb B mit 109 % erfüllt!*

11 Grundwert, Prozentsatz, Prozentwert

21 Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft stellte sich in einem Jahresplan die Aufgabe, 362 dt Schlachtrind (Lebendgewicht) abzuliefern.
Nach Ablauf des ersten Quartals wurden 94 dt abgeliefert. Wie hoch war die prozentuale Erfüllung des Jahresplanes nach dem ersten Quartal?

Tabelle:

Jahresplan:	362 dt
Im 1. Quartal geliefert:	94 dt

A

Wir berechnen die prozentuale Erfüllung, indem wir auf Hundertstel umrechnen:

$$\frac{94}{362} \approx 0{,}26, \text{ das sind } 26\,\%.$$

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein, die wir in jeder Aufgabe aus der Prozentrechnung benutzen: Grundwert (G), Prozentwert (P), Prozentsatz (p).

Im Beispiel A 21 war:
der Grundwert der Jahresplan in dt,
der Prozentwert die Leistung im ersten Quartal in dt,
der Prozentsatz die Anzahl der Hundertstel.

Wir können also schreiben: $G = 362$, $P = 94$, $p = 26$.

12 *Führe eine entsprechende Berechnung für zwei andere landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften durch:*

	LPG A	*LPG B*
Jahresplan	*248 dt*	*144 dt*
Planerfüllung nach dem ersten Quartal	*62 dt*	*32 dt*

Ist ein Grundwert G gegeben, so ist jedem **Prozentsatz** von diesem Grundwert **ein** Prozentwert zugeordnet. Umgekehrt ist auch jedem Prozentwert ein Prozentsatz von diesem Grundwert zugeordnet.

22 Der Grundwert betrage 248 dt. Dann gilt die folgende Zuordnung:

Prozentsatz	1	2	3	...	10	...	50	...	70	...	100
Prozentwert in dt	2,48	4,96	7,44	...	24,8	...	124	...	173,6	...	248

Jeder Prozentwert ergibt sich aus dem zugehörigen Prozentsatz durch Multiplikation mit dem Proportionalitätsfaktor 2,48. Zwischen den Prozentsätzen und den ihnen zugeordneten Prozentwerten besteht Proportionalität. Dem Prozentsatz 100 % ist der Grundwert G zugeordnet.
Wegen der Proportionalität kann die Tabelle kürzer geschrieben werden.

Prozentsatz	p	100
Prozentwert in dt	P	248

($G = 248$)

Es gilt die Verhältnisgleichung

$$\frac{P}{p} = \frac{248}{100}.$$

Wenn wir für den Grundwert das Zeichen G schreiben, erhalten wir

$$\boxed{\frac{P}{p} = \frac{G}{100}.}$$

12 Berechnung von Prozentwerten

Bei bekanntem Grundwert G und Prozentsatz p läßt sich der Prozentwert P berechnen, der dem gegebenen Prozentsatz zugeordnet ist. Wir lösen dazu die Verhältnisgleichung $\frac{P}{p} = \frac{G}{100}$ nach P auf:

$$P = \frac{G \cdot p}{100}.$$

23

A 13

In den letzten Jahren ist der Anteil des Autobusverkehrs an der Personenbeförderung gegenüber der Eisenbahn und der Schiffahrt immer mehr gestiegen. Dem „Statistischen Jahrbuch der Deutschen Demokratischen Republik", Jahrgang 1968, wurde die folgende Übersicht entnommen:

Jahr	Beförderte Personen insgesamt in Mill.	Anteil des Kraftverkehrs in %
1950	2 830	3,9
1955	3 078	10,9
1960	3 607	18,5
1964	3 473	25,1
1967	3 491	28,3
1968	3 461	29,3

Durch die Tabelle sind die Grundwerte für die einzelnen Jahre und die Prozentsätze für den Anteil des Kraftverkehrs an der gesamten Personenbeförderung gegeben. Wir wollen die jeweiligen Prozentwerte berechnen. Die Gesamtzahl der beförderten Personen ist der Grundwert. Für 1950 erhalten wir:

$$P = \frac{G \cdot p}{100}$$

$$P = \frac{2830 \cdot 3{,}9}{100}$$

$$P = 110{,}37$$

Ergebnis: $P \approx 110$, d. h., mit Autobussen wurden 1950 rund 110 Mill. Personen befördert.

13 *Ermittle mit Hilfe des Rechenstabs die Anzahl der Personen, die durch den Kraftverkehr in den Jahren 1955, 1960, 1964, 1967 und 1968 befördert wurden!*

Aufgaben a 60 bis 74

13 Berechnung von Prozentsätzen

A

Bei bekanntem Grundwert und Prozentwert läßt sich der Prozentsatz berechnen, der dem gegebenen Prozentwert zugeordnet ist. Wir lösen dazu die Verhältnisgleichung $\frac{P}{p} = \frac{G}{100}$ nach p auf:

$$p = \frac{P \cdot 100}{G}.$$

24 Aus der folgenden Tabelle ist die Steigerung des Maschinenbestandes in den landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften unserer Republik ersichtlich.

	1960	**1968**
Traktoren	43 170	120 125
Mähdrescher	3 241	15 461
Kartoffelsammelroder	3 228	8 182

Es ist zu berechnen, **auf wieviel Prozent** der Bestand jeweils gebracht wurde. Der Bestand im Jahre 1960 ist jeweils der Grundwert.
Für Traktoren erhalten wir:

$$\frac{P}{p} = \frac{G}{100}$$

$$p = \frac{P \cdot 100}{G} = \frac{120\,125 \cdot 100}{43\,170} \approx 278{,}26$$

Ergebnis: Der Bestand an Traktoren wurde auf rund 278,3 % gesteigert.

Das Beispiel A 24 zeigt, daß der Prozentwert größer als der Grundwert sein kann. Wenn $P < G$, so $p < 100$. Wenn $P = G$, so $p = 100$. Wenn $P > G$, so $p > 100$.

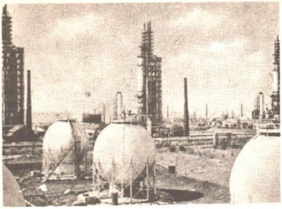
(14) *Die Tabelle im Beispiel A 24 enthält außer Angaben für Traktoren auch die Bestände an Mähdreschern und Kartoffelsammelrodern. Berechne auch für den Bestand an Mähdreschern und Kartoffelsammelrodern die prozentuale Steigerung! In welcher Position wurde die größte Steigerung erzielt?*

Aufgaben a 75 bis 86

14 Berechnung von Grundwerten

Bei bekanntem Prozentsatz und Prozentwert läßt sich der Grundwert berechnen, auf den sich die gegebenen Angaben beziehen. Wir lösen dazu die Verhältnisgleichung $\frac{P}{p} = \frac{G}{100}$ nach G auf:

$$G = \frac{P \cdot 100}{p}.$$

25 

A 14

Die Sowjetunion hat ihre Erdölförderung ständig steigern können. Dabei war die Zunahme größer als in vielen anderen Ländern der Erde; größer als z. B. in den USA, Venezuela oder Saudi-Arabien. Dadurch erhöhte sich der Anteil der Sowjetunion an der Erdölförderung der Welt immer mehr (Bild A 14).

Jahr	**1950**	**1955**	**1960**	**1964**	**1966**
Erdölförderung in der SU in Mill. t	38	71	147	223	264
Anteil an der Weltförderung	7,3 %	9,2 %	13,9 %	15,8 %	16,2 %

Die Angaben in dieser Tabelle sind Prozentwerte bzw. Prozentsätze, die sich auf die Erdölförderung der gesamten Welt beziehen. Wir wollen die jeweilige Weltförderung berechnen.
Für 1950 erhalten wir:

$$\frac{P}{p} = \frac{G}{100}$$

$$G = \frac{P \cdot 100}{p}$$

$$G = \frac{38 \cdot 100}{7,3} \approx 521$$

Ergebnis: Die Erdölförderung der Welt betrug 1950 rund 521 Mill. t.

15 *Berechne die Erdölförderung der Welt in den Jahren 1955, 1960, 1964 und 1966!*

Aufgaben a 87 bis 94

15 Bequeme Prozentsätze

Es gibt Prozentsätze, mit denen es sich besonders einfach rechnen läßt.

26 **a)** 50 % von 240 sind 120. **b)** 25 % von 480 sind 120. **c)** 4 % von 600 sind 24.
Ist der Prozentsatz p ein Teiler der Zahl 100, so läßt sich der Bruch $\frac{p}{100}$ kürzen. Wir erhalten einen Bruch mit dem Zähler 1. Die gesuchten Prozentwerte finden wir, indem wir die betreffenden Grundwerte durch den jeweiligen Nenner dividieren. Besitzen der Prozentsatz p und die Zahl 100 einen gemeinsamen Teiler, so läßt sich der Bruch $\frac{p}{100}$ ebenfalls kürzen. Auch in diesen Fällen kann die Rechnung vereinfacht werden.

27 75 % von 120 sind 90.
(Diesem Prozentsatz ist der Bruch $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ zugeordnet. Wir rechnen also $120 \cdot \frac{3}{4}$).

Die folgende Tabelle enthält einige Prozentsätze, mit denen es sich besonders einfach rechnen läßt.

Prozentsatz p	1	4	5	10	$12\frac{1}{2}$	20	25	$33\frac{1}{3}$	50	75	100	150	200
$\frac{p}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2

Diese „bequemen" Prozentsätze werden häufig für Überschlagsrechnungen verwendet.

28 Die durchschnittliche jährliche Milchleistung wurde in einer LPG von 1900 kg auf 2790 kg je Kuh gesteigert. Auf wieviel Prozent der früheren Leistung ist die jetzige Leistung gestiegen?
Bekannt sind der Grundwert $G = 1900$ und der Prozentwert $P = 2790$. Gesucht ist der Prozentsatz $p = \frac{P \cdot 100}{G}$.

Lösung: 1. Überschlag: $\frac{p}{100} \approx \frac{3000}{2000} = \frac{3}{2}$, also $p \approx 150\,\%$.

2. $p = \frac{2790 \cdot 100}{1900}$. Die Berechnung mit dem Rechenstab ergibt $p = 147\,\%$.

Ergebnis: Die jährliche Milchleistung ist auf rund 147 % der früheren Leistung je Kuh gesteigert worden.

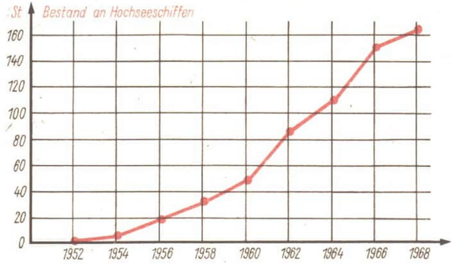
Aufgaben a 95 bis 98

16 Graphische Darstellungen

Wenn zwei Zahlenfolgen gegeben sind und wenn den Zahlen der einen Folge Zahlen der anderen Folge zugeordnet sind, so kann diese Zuordnung graphisch dargestellt werden.

29 Die folgende Tabelle gibt den Schiffsbestand der Handelsflotte der DDR an.

a	**Jahr**	1952	1954	1956	1958	1960	1962	1964	1966	1968
b	**Anzahl**	1	3	17	31	47	82	110	150	163

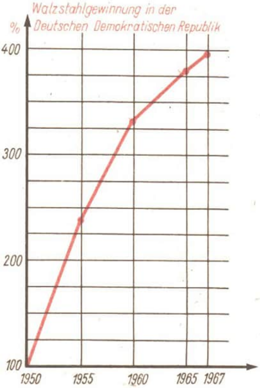


A 15

Jeder Jahreszahl *a* ist eine (und nur eine) Zahl *b* zugeordnet, die die Anzahl der Hochseeschiffe unserer Handelsflotte in dem betreffenden Jahr angibt. Tragen wir die Jahreszahlen *a* auf einer horizontalen Achse und die Zahlen *b* auf einer vertikalen Achse auf, so ist jedem Zahlenpaar $[a; b]$ ein Punkt der Ebene zugeordnet (Bild A 15). Wir verbinden diese Punkte durch einen Streckenzug und erhalten ein sogenanntes **Liniendiagramm,** das die Entwicklung des Schiffsbestandes in der DDR veranschaulicht.

Liniendiagramme zeigen Entwicklungstendenzen an. Sie geben im allgemeinen keinen Aufschluß über Zwischenwerte. Im Jahre 1965 beispielsweise bestand die Handelsflotte der DDR aus 127 Schiffen. Das Bild A 15 zeigt jedoch für das Jahr 1965 einen Bestand von 130 Schiffen an. Das liegt daran, daß die Verbindung der gegebenen Ebenenpunkte durch einen Streckenzug mathematisch nur in besonderen Fällen gerechtfertigt ist.
Die graphische Darstellung von Zahlenmaterial durch Liniendiagramme erfolgt häufig so, daß die gegebenen Zahlen zunächst in Prozentsätze bezüglich eines willkürlich gewählten Grundwertes umgerechnet werden.

30 Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Entwicklung der Walzstahlerzeugung in unserer Republik. Wegen der großen Zahlen sind die Angaben in der zweiten Zeile unübersichtlich. Wir wählen deshalb die Produktion von 1950 als Grundwert (100 %) und rechnen die auf diesen Wert bezogenen Prozentsätze für die übrigen Jahre aus. (Mit Hilfe des Rechenstabs ergeben sich die Prozentsätze mit einer einzigen Einstellung.) Die Prozentsätze werden auf einer vertikalen Achse abgetragen (Bild A 16).



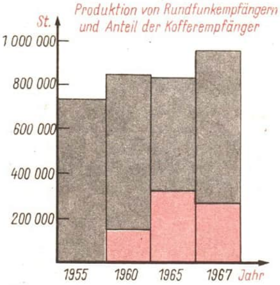
A 16

Walzstahlgewinnung in der Deutschen Demokratischen Republik					
Jahr	1950	1955	1960	1965	1967
in t	780 700	1 884 100	2 613 300	2 986 300	3 075 200
in % 1950 ≙ 100 %	100	241	334	382	394

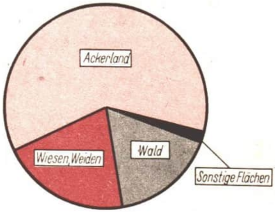
Eine weitere Möglichkeit zur graphischen Darstellung von Zahlenmaterial sind sogenannte **Streifendiagramme.**

31 Die folgende Tabelle, die im Streifendiagramm (Bild A 17) dargestellt ist, zeigt die Entwicklung der Produktion von Rundfunkempfängern, wobei der Anteil an Kofferempfängern besonders vermerkt wurde.

Jahr	**1955**	**1960**	**1965**	**1967**
Rundfunkempfänger (insgesamt)	724 659	809 582	808 008	932 009
davon Kofferempfänger		137 327 17 %	305 743 37,8 %	264 350 28 %



A 17



A 18

32 Zahlenangaben können auch durch sogenannte **Kreisdiagramme** graphisch dargestellt werden. Kreisdiagramme werden besonders dann bevorzugt, wenn bestimmte Aufteilungen veranschaulicht werden sollen.

Drei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften haben sich zu einer Kooperationsgemeinschaft mit insgesamt 2 163 ha Fläche zusammengeschlossen. Davon sind 1 316 ha Ackerland, 450 ha Wiesen und Weiden und 362 ha Wald. Der verbleibende Rest entfällt auf Wege, bebautes Gelände und Ödland (Bild A 18).

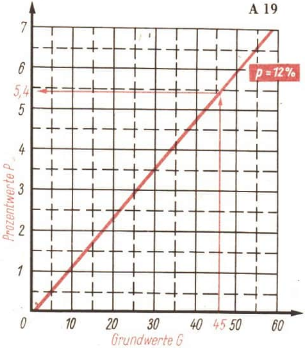
(Wir rechnen mit Hilfe der Proportionaleinstellung des Rechenstabs!)

2 163 ha ≙	100 %	100 % ≙	360°
1 316 ha ≙	60,8 %	60,8 % ≙	219°
450 ha ≙	20,8 %	20,8 % ≙	75°
362 ha ≙	16,7 %	16,7 % ≙	60°
35 ha ≙	1,6 %	1,6 % ≙	6°

(Die Abweichungen von 100 %, die sich bei der Addition der prozentualen Anteile ergeben, sind auf das Runden zurückzuführen.)

Bei den bisherigen Aufgaben der Prozentrechnung sind wir von der Verhältnisgleichung $\frac{P}{p} = \frac{G}{100}$ ausgegangen. Wird der Prozentsatz p fest gewählt, so läßt sich der Zusammenhang zwischen P und G mit Hilfe eines Koordinatensystems graphisch darstellen.
Die Grundwerte werden auf der horizontalen, die Prozentwerte auf der vertikalen Achse abgetragen.

A 19



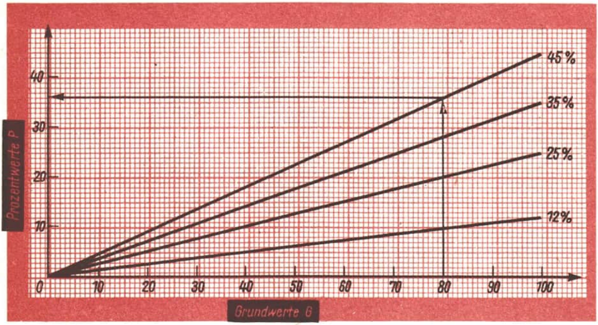
33 Die Auflösung der Verhältnisgleichung $\frac{P}{12} = \frac{G}{100}$ nach P ergibt die Gleichung

$$P = \frac{12}{100} \cdot G = 0{,}12\ G.$$

Wir tragen die Grundwerte auf einer horizontalen und die Prozentwerte auf einer vertikalen Achse ab (Bild A 19). Für $G = 45$ finden wir $P = 5{,}4$.

Das Bild A 20 zeigt die graphischen Darstellungen der Gleichung $P = \frac{p}{100} \cdot G$ für mehrere Prozentsätze, die fest gewählt wurden.

A 20



17 Weitere Aufgaben aus der Prozentrechnung

A

Besondere Beachtung verdienen in den Aufgabentexten die Wortverbindungen „Steigerung **um**“ oder „Steigerung **auf**“ bzw. „Senkung **um**“ oder „Senkung **auf**“.

34 In einem Betrieb werden monatlich 530 Apparate hergestellt.

a) Nach dem Einbau einer automatischen Taktstraße war eine **Steigerung um** 130 % festzustellen. Wieviel Apparate werden nun monatlich hergestellt?

b) Nach dem Einbau einer automatischen Taktstraße war eine **Steigerung auf** 130 % festzustellen. Wieviel Apparate werden nun monatlich hergestellt?

Im Beispiel 34a stellen wir die Verhältnisgleichung

$$\frac{100}{530} = \frac{230}{x}$$

auf, denn die Produktion von 100 % wird **um** 130 % gesteigert:

$$100\,\% + 130\,\% = 230\,\%.$$

Wir erhalten als Ergebnis: $x = 1219$.

Das Beispiel 34b führt auf die Verhältnisgleichung

$$\frac{100}{530} = \frac{130}{x},$$

denn die Steigerung **auf** 130 % bedeutet, daß sie nur 30 % höher ist als zuvor.
Wir erhalten als Ergebnis: $x = 689$.

Es gibt Aufgaben, bei denen an Stelle des Grundwertes ein **vermehrter** Grundwert gegeben ist, z. B.:

„In einem Jahr produzierte ein Betrieb Waren im Werte von 32,4 Millionen Mark. Das sind 108 % der Produktion des Vorjahres. Um wieviel Mark wurde die Produktion gegenüber dem Vorjahr gesteigert?“

In dieser Aufgabe ist an Stelle des Grundwertes ein um 8 % vermehrter Wert gegeben. Um die Produktionssteigerung in Mark zu berechnen, kann zunächst der Grundwert bestimmt werden. Die Produktionssteigerung ergibt sich dann als Differenz aus dem vermehrten Grundwert und dem Grundwert. Aus der Verhältnisgleichung

$$\frac{32{,}4}{G} = \frac{108}{100} \quad \text{finden wir} \quad G = \frac{32{,}4 \cdot 100}{108} = 30\,.$$

Ergebnis: Die Produktionssteigerung beträgt 2,4 Mill. M.

35 Die geplante Produktion eines Betriebes wurde im Jahre 1968 mit einem Betrag von 6 Millionen Mark überboten. Die Produktion betrug insgesamt 126 Millionen Mark. Um wieviel Prozent wurde die geplante Produktion überboten?

In dieser Aufgabe ist an Stelle des Grundwertes ein um 6 Millionen Mark vermehrter Grundwert gegeben. Um die Produktionssteigerung in Prozenten zu berechnen, ist es günstig, zunächst den Grundwert zu ermitteln. Er ergibt sich als Differenz aus dem vermehrten Grundwert und dem überplanmäßigen Betrag:

$$G = 126 - 6 = 120.$$

Den Prozentsatz finden wir nun aus der Verhältnisgleichung

$$\frac{120}{6} = \frac{100}{p}.$$

Es ergibt sich $p = 5$.

Ergebnis: Die Produktion wurde um 5 % gesteigert.

Aufgaben, bei denen an Stelle des Grundwertes ein vermehrter Grundwert gegeben ist, werden also gelöst, indem zunächst der Grundwert berechnet wird. Anschließend wird die gesuchte Größe ermittelt.
Entsprechend gibt es Aufgaben, bei denen an Stelle des Grundwertes ein **verminderter** Grundwert angegeben ist.

A

36 Durch Materialeinsparung konnten die Kosten für die Herstellung eines Werkstücks um 9 % gesenkt werden und betragen nun nur noch 455 Mark. Um wieviel Mark wurden die Herstellungskosten je Werkstück gesenkt?
In dieser Aufgabe ist ein um 9 % verminderter Grundwert gegeben. Die Kostensenkung in Mark ergibt sich als Differenz aus den alten und den neuen Kosten. Dazu müssen zunächst die alten Kosten berechnet werden. Wir stellen hierzu die Verhältnisgleichung

$$\frac{455}{G} = \frac{91}{100}$$

auf. Es ergibt sich

$$G = \frac{455 \cdot 100}{91}$$

$$G = 500\ .$$

Ergebnis: Die Kosten konnten um 45 M gesenkt werden.

37 Die Selbstkosten für ein Werkstück betragen 235 Mark. Sie liegen damit um 15 Mark unter den geplanten Selbstkosten. Um wieviel Prozent wurden die geplanten Selbstkosten unterboten?
In dieser Aufgabe ist ein um 15 Mark verminderter Grundwert gegeben. Den Grundwert finden wir als Summe aus dem verminderten Grundwert und dem Betrag, um den die geplanten Selbstkosten unterboten wurden.

$$G = 235 + 15$$

$$G = 250.$$

Die Selbstkostensenkung in Prozenten ergibt sich jetzt aus der Verhältnisgleichung

$$\frac{250}{15} = \frac{100}{p}\ .$$

Wir finden

$$p = \frac{15 \cdot 100}{250}$$

$$p = 6\ .$$

Ergebnis: Die geplanten Selbstkosten wurden um 6 % unterboten.

Manche Aufgaben aus der Prozentrechnung führen infolge ihrer Fragestellung nicht auf direkte, sondern auf umgekehrte Proportionalität.

38 Die Normzeit für die Überholung einer Maschine beträgt 66 Stunden. Die Maschine wurde in 60 Stunden überholt. Welcher prozentualen Planerfüllung entspricht das?
Bei halbem Zeitaufwand würde eine Planerfüllung von 200 % angerechnet werden. Je geringer der Zeitaufwand ist, desto höher ist die Planerfüllung. Aus diesem Grunde gehen wir in diesem Beispiel nicht von einer Verhältnisgleichung, sondern von einer Produktgleichung aus.

Zeitaufwand in h	66	60
Prozentsatz	100	p

Produktgleichung: $66 \cdot 100 = 60 \cdot p$

$$p = \frac{66 \cdot 100}{60} = 110\,.$$

Ergebnis:
Der Plan wurde mit 110 % erfüllt.
(In dieser Aufgabe spiegelt die Fragestellung nicht genau den Sachverhalt wider. Es müßte danach gefragt werden, um wieviel Prozent die Normzeit unterboten wurde.)

Aufgaben a 99 bis 108

18 Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung auf das Geldwesen. Die Sparkasse vergütet für die eingezahlten Geldbeträge **jährlich** einen bestimmten Betrag, der von der Höhe des Guthabens und von dem festgelegten Prozentsatz abhängt. Dieser Betrag stellt den Prozentwert dar und wird *Zinsen* genannt.
Bei der Zinsrechnung wird die Zeit mit in Rechnung gesetzt. Die Zinsen werden nur von vollen Markbeträgen berechnet.
In der folgenden Tabelle stellen wir die besonderen Fachausdrücke der Zinsrechnung den entsprechenden Ausdrücken in der Prozentrechnung gegenüber.

Prozentrechnung		Zinsrechnung	
Grundwert	G	Guthaben	G
Prozentsatz	p	Zinssatz	p
Prozentwert	P	Zinsen	Z
		Zeit	t

Bei den folgenden Betrachtungen nehmen wir stets an, daß sich das Guthaben im Laufe eines Jahres nicht ändert. Unter dieser Voraussetzung gilt in der Zinsrechnung die Grundbeziehung

$$\boxed{\frac{Z}{p} = \frac{G}{100}}$$

mit der die Zinsen für das Guthaben G beim Zinssatz p für die Laufzeit 1 Jahr berechnet werden.

$$Z = \frac{G \cdot p}{100}\,.$$

Sparguthaben werden in der DDR einheitlich mit 3,25 % jährlich verzinst.
Für Kredite sind jedoch auch andere Zinssätze üblich.

39 Am Anfang eines Jahres läßt sich jemand ein Sparbuch ausstellen und zahlt 250,00 M ein. Der Zinssatz beträgt 3,25 %. Im Laufe des Jahres ändert sich das Guthaben nicht. Wieviel Zinsen erhält der Sparer am Ende des Jahres?
Gegeben sind das Guthaben $G = 250$ und der Zinssatz $p = 3{,}25$.
Gesucht sind die Zinsen Z für ein Jahr.

Ansatz: $\frac{Z}{p} = \frac{G}{100}$

Lösung: $Z = \frac{G \cdot p}{100}$

$$Z = \frac{250 \cdot 3{,}25}{100} = 8{,}125$$

Ergebnis:
Die Zinsen betragen 8,13 M.
(Im Bankwesen und Geschäftsleben wird, wenn am Ende einer Ziffer die Grundziffer 5 steht, stets aufgerundet.)

Um die Zinsen für mehrere Jahre berechnen zu können gehen wir wieder von der Annahme aus, daß das Guthaben für den betrachteten Zeitraum unverändert bleibt und daß die Zinsen nach jedem Jahr ausgezahlt werden. Häufig lassen Sparer die Zinsen zum Guthaben zuschlagen. Dann bringen die Zinsen im nächsten Jahr wieder Zinsen usw. Aufgaben dieser Art, die zur sogenannten Zinseszinsrechnung gehören, werden in Klasse 7 nicht behandelt.
Die Formel für das Berechnen der Zinsen mehrerer Jahre finden wir folgendermaßen:

Die Zinsen für ein Jahr betragen $Z_1 = \frac{G \cdot p}{100} \cdot 1$,

die Zinsen für zwei Jahre betragen $Z_2 = Z_1 \cdot 2 = \frac{G \cdot p}{100} \cdot 2$,

die Zinsen für drei Jahre betragen $Z_3 = Z_1 \cdot 3 = \frac{G \cdot p}{100} \cdot 3$ usw.

Die Zinsen für t Jahre betragen $Z_t = Z_1 \cdot t = \frac{G \cdot p}{100} \cdot t$.

In vielen Fällen müssen die Zinsen für einen kürzeren Zeitraum als ein Jahr berechnet werden. Bei diesen Rechnungen ist es in der DDR wie in vielen anderen Staaten üblich, das Jahr zu 360 Tagen und den Monat zu 30 Tagen in Rechnung zu setzen.
Die Zinsen für einen Tag ergeben sich aus den Zinsen Z für ein Jahr, indem die Jahreszinsen mit dem Faktor $\frac{1}{360}$ multipliziert werden.
Die Zinsen für t Tage ergeben sich aus den Jahreszinsen Z durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{t}{360}$.

Berechnung der Zinsen	
Zinsen für t Jahre	**Zinsen für t Tage**
$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot t$	$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{360}$

A

40 Ein Kredit von 1284 Mark hat eine Laufzeit von 75 Tagen und wird mit 6% verzinst. Wieviel Mark müssen zurückgezahlt werden?

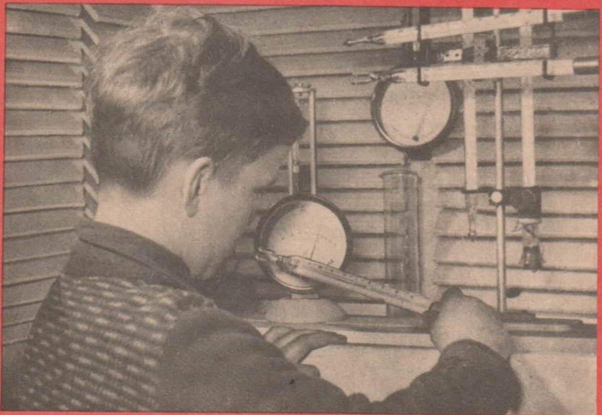
$$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{360} = \frac{1\,284 \cdot 6 \cdot 75}{100 \cdot 360} = 16{,}05\,.$$

Ergebnis: 1300,05 Mark müssen zurückgezahlt werden.

Aufgaben a 109 bis 118

B Rationale Zahlen

Auf meteorologischen Stationen wird täglich mehrmals die Lufttemperatur gemessen. Die Thermometer befinden sich in weißen Wetterhäuschen, in die durch breite Öffnungen die Außenluft eintreten kann. Auf diese Weise wird gesichert, daß die Temperaturanzeige nicht durch Sonnenbestrahlung, Regentropfen oder auf andere Weise beeinflußt wird, sondern daß tatsächlich die Lufttemperatur ermittelt wird. Bei Frost zeigt das Thermometer eine Temperatur an, die unter 0 °C liegt, z. B. — 5 °C. Die Maßzahl — 5 bei dieser Temperaturangabe ist keine natürliche Zahl und keine gebrochene Zahl. Sie gehört einem anderen Zahlenbereich an, dem Bereich der **rationalen Zahlen.**



Der Begriff „rationale Zahl"

1 Rückblick auf die gebrochenen Zahlen

In der 5. Klasse haben wir aus natürlichen Zahlen m und n geordnete Zahlenpaare gebildet. Diese Paare haben wir in der Form „$\frac{m}{n}$" geschrieben, wobei n nicht Null sein durfte.

Geordnete Zahlenpaare $\frac{m}{n}$ nennen wir Brüche.

B

Die Menge aller dieser Brüche ist in **Klassen** eingeteilt. Einer Klasse gehört jeweils ein Bruch an und alle und nur diejenigen Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern aus diesem Bruch hervorgehen.
Eine **gebrochene Zahl** ist eine solche Klasse von Brüchen.
Zur Bezeichnung gebrochener Zahlen werden auch Variablen „a", „b", „c", ... verwendet.
Ordnung: Für gebrochene Zahlen a und b gilt immer nur genau einer der drei Fälle:

1) $a < b$, 2) $a = b$, 3) $a > b$.

Die gebrochene Zahl 0 ist die kleinste gebrochene Zahl.
Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen hat keine gebrochene Zahl einen unmittelbaren Nachfolger; denn zwischen je zwei gebrochenen Zahlen liegen beliebig viele weitere. Wir sagen: die gebrochenen Zahlen liegen *überall dicht*.
Rechenoperationen: Die Addition und die Multiplikation sind **uneingeschränkt ausführbar.** Das bedeutet: Zu beliebigen gebrochenen Zahlen a und b gibt es immer die eindeutig bestimmte Summe $a + b$ und immer das eindeutig bestimmte Produkt $a \cdot b$.
Für alle gebrochenen Zahlen a, b und c gilt:

	Addition	**Multiplikation**
Kommutativität	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativität	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivität	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	
	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.

$x = b - a$ bedeutet:
$a + x = b$ oder $x + a = b$.

Die Subtraktion gebrochener Zahlen ist **nicht uneingeschränkt** ausführbar.
Sie ist dann ausführbar, wenn der Subtrahend kleiner als der Minuend ist, oder wenn beide gleich sind.
Sie ist nicht ausführbar, wenn der Subtrahend größer als der Minuend ist.

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.

$x = b : a \; (a \neq 0)$ bedeutet:
$a \cdot x = b$ oder $x \cdot a = b$

Die Division gebrochener Zahlen ist uneingeschränkt ausführbar, falls der Divisor von 0 verschieden ist.

Für jede gebrochene Zahl a gilt

$a - 0 = a$ $a - a = 0$	$a : 1 = a$	$1 : a = \frac{1}{a}$ (Reziprokes von a) $a : a = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ $0 : a = 0$	Diese drei Gleichungen gelten nur für $a \neq 0$

Beachte:

$a - b = b - a$
gilt nur für $a = b$

$a : b = b : a$
gilt nur für $a = b$, falls a und damit auch b von 0 verschieden ist.

In der Menge der gebrochenen Zahlen gibt es eine Teilmenge von Zahlen, die sich beim Vergleichen und Rechnen genauso verhalten wie die natürlichen Zahlen. Das sind die gebrochenen Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 und mit einer natürlichen Zahl als Zähler darstellen lassen. Daher können wir diese gebrochenen Zahlen durch die natürlichen Zahlen ersetzen. Wir sagen dann:
Die natürlichen Zahlen bilden einen **Teilbereich** des Bereichs der gebrochenen Zahlen.

Aufgaben b 1 bis 7

2 Veranschaulichung von Differenzen gebrochener Zahlen durch Streckenabtragung

In einem Kühlraum soll die Temperatur, die augenblicklich 4 °C über dem Gefrierpunkt (über Null) beträgt, um 9 Grad gesenkt werden. Welche Temperatur soll also im Kühlraum herrschen?
Dieses Problem führt zu der Aufgabe $4 - 9$.
Nun wissen wir von der Benutzung des Thermometers her, daß in diesem Fall die Temperatur im Kühlraum auf -5 °C sinkt.
Man müßte also rechnen können: $4 - 9 = -5$.
Das ist aber im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht möglich.
Wir sind also gezwungen, über diesen Bereich hinaus einen neuen Zahlenbereich aufzubauen. Diese Zahlenbereichserweiterung werden wir in ähnlicher Weise durchführen wie die Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen zum Bereich der gebrochenen Zahlen. Daß diese Erweiterung notwendig ist, sollen uns noch folgende Beispiele zeigen:

1 a) Höhenangaben auf einer Landkarte mit Höhen unter Normalnull. (Vgl. Atlas, Karte Sowjetunion, europäischer Teil, Seite 50/51 und Karte Nordafrika, Seite 74/75.) Mit „Normalnull“ ist ein Bezugspunkt gemeint, der etwa im Niveau des Mittelwassers der Meere liegt.

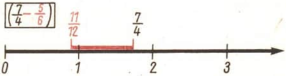
b) Ist ein Eisenträger 2 mm länger als vorgeschrieben, so sagt man, daß seine Länge um $+20$ mm vom vorgeschriebenen Maß abweicht. Ist er dagegen um 20 mm zu kurz, so sagt man, sie weicht um -20 mm davon ab.

B 1

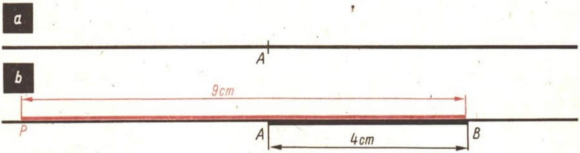
c) Mit Hilfe einer Rachenlehre überprüft man die Maßhaltigkeit von Werkstücken (Bild B 1). Die Öffnung mit der Aufschrift — 11 ist $\frac{11}{1000}$ mm enger als das geforderte Maß.

Wir suchen nun nach einem geeigneten Weg, den neuen Zahlenbereich, in dem auch die Subtraktion stets ausführbar sein soll, so aufzubauen, daß er den Bereich der gebrochenen Zahlen als Teilbereich enthält. Wir wissen: Differenzen gebrochener Zahlen, in denen der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist, lassen sich durch Streckenabtragung am Zahlenstrahl darstellen (Bilder B 2 und 3). Derartige Differenzen sind gebrochene Zahlen, und es ist ihnen eindeutig ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.
Differenzen gebrochener Zahlen, in denen der Subtrahend größer als der Minuend ist, sind keine gebrochenen Zahlen, denn in diesem Fall ist die Subtraktion ja nicht ausführbar. Daher lassen sie sich auch nicht am Zahlenstrahl darstellen. Wir wollen aber solchen „Differenzen", z. B. (4 — 9), dennoch durch Streckenabtragung bestimmte Punkte zuordnen. Wir behelfen uns zunächst, indem wir statt des Zahlenstrahls eine Gerade verwenden und auf ihr einen Punkt A festlegen (Bild B 4a). Wir tragen nun z. B. Strecken von 4 cm bzw. 9 cm Länge wie im Bild B 4b ab und erhalten einen Punkt P.

B 2

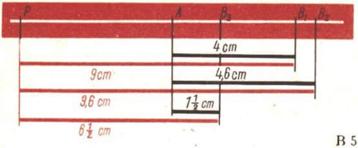


B 3



B 4

Unter Beibehaltung der gewählten Einheit (in diesem Beispiel 1 cm) können wir zu jeder beliebigen anderen „Differenz" gebrochener Zahlen genau einen Punkt auf dieser Geraden finden. Den auf diese Weise erhaltenen Punkten und damit auch den „Differenzen" gebrochener Zahlen sind aber noch keine Zahlen zugeordnet. Um anzudeuten, daß diese „Differenzen" keine Zahlen sind, setzen wir alle „Differenzen" gebrochener Zahlen zunächst in Klammern. Der im Bild B 4b eingetragene Punkt P kann bei festem Punkt A durch die Veranschaulichung vieler „Differenzen" gebrochener Zahlen erhalten werden (Bild B 5).



B 5

Im Beispiel des Bildes B 5 wurde im ersten Fall zum Minuenden und zum Subtrahenden dieselbe Zahl, nämlich 0,6, addiert. Im zweiten Fall wurde jeweils $2\frac{1}{2}$ subtrahiert.

Dem Punkt P im Bild B 5 sind also u. a. die „Differenzen" (4 — 9), (4,6 — 9,6), $\left(1\frac{1}{2} - 6\frac{1}{2}\right)$ zugeordnet.

Wenn wir allen Punkten dieser Geraden, die wir auf diese Weise gewinnen, Zahlen zuordnen können, so könnten wir mit diesen Zahlen uneingeschränkt subtrahieren.

Aufgaben b 8 und 9

3 Klassen von Differenzen gebrochener Zahlen

1 *Veranschauliche die folgenden „Differenzen" durch Streckenabtragung!*

a) $(5-3)$, $(9-7)$, $(4-2)$

b) $(3-5)$, $(7-9)$, $(2-4)$

c) $\left(2-\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{13}{4}-\frac{11}{4}\right)$, $\left(\frac{19}{2}-9\right)$

d) $\left(\frac{3}{2}-2\right)$, $\left(\frac{11}{4}-\frac{13}{4}\right)$, $\left(9-\frac{19}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{4}-3\right)$, $\left(\frac{2}{5}-2{,}65\right)$, $\left(9-\frac{47}{5}\right)$

Allgemein gilt:

Einer „Differenz" sei der Punkt P zugeordnet. Wird zum Minuenden und zum Subtrahenden dieser „Differenz" dieselbe Zahl addiert, so ist der neuen „Differenz" derselbe Punkt P zugeordnet.

Dasselbe gilt, wenn man vom Minuenden und vom Subtrahenden die gleiche Zahl subtrahiert (falls das möglich ist).

Wir fassen nun alle „Differenzen" gebrochener Zahlen, denen derselbe Punkt auf einer Geraden zugeordnet ist, zu einer **Klasse** zusammen. Jede dieser Klassen enthält mit einer „Differenz" $(a - b)$ gebrochener Zahlen auch alle diejenigen „Differenzen", die durch Addition derselben gebrochenen Zahl zu a und b oder (falls möglich) durch Subtraktion derselben gebrochenen Zahl von a und b aus der „Differenz" $(a - b)$ hervorgehen. Jeder dieser Klassen ist dann eindeutig ein Punkt dieser Geraden zugeordnet. (Umgekehrt ist jedoch nicht jedem Punkt der Geraden eine Klasse von „Differenzen" gebrochener Zahlen zugeordnet.)

(2) *Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!*

a	b	c	d	$(a-b)$	$(c-d)$	$a+d$	$b+c$
17	10	90	83	$(17-10)$	$(90-83)$	100	100
0	9	91	100				
7	5	0	2				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{7}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{91}{60}$	$\frac{1}{6}$				
38	$\frac{4}{5}$	30	$\frac{14}{5}$				
$\frac{17}{9}$	0	$\frac{62}{9}$	5				

Stelle fest, in welchen Zeilen der Tabelle „Differenzen" stehen, die demselben Punkt zugeordnet sind, die also in einer Klasse liegen!
Bei einem Vergleich der Spalten im Auftrag B 2 stellen wir fest:

1 **SATZ: Für „Differenzen" $(a-b)$ und $(c-d)$ von gebrochenen Zahlen, die in einer Klasse liegen gilt: $a+d=b+c$.**

Mit Hilfe dieses Satzes können wir leicht feststellen, ob zwei „Differenzen" derselbe Punkt zugeordnet ist.

(3) *Welche der folgenden „Differenzen" liegen jeweils in einer Klasse?*

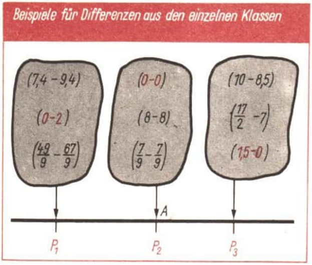
a) $(20-8)$ *und* $(16-4)$
b) $\left(\frac{17}{9}-\frac{4}{9}\right)$ *und* $\left(\frac{20}{9}-\frac{7}{9}\right)$
c) $\left(12{,}7-\frac{25}{5}\right)$ *und* $\left(\frac{11}{5}-2\right)$
d) $\left(\frac{17}{23}-\frac{65}{23}\right)$ *und* $\left(\frac{13}{23}-\frac{61}{23}\right)$
e) $(64{,}3-90{,}6)$ *und* $(24{,}1-40{,}8)$
f) $\left(\frac{128}{37}-\frac{56}{37}\right)$ *und* $\left(\frac{101}{37}-\frac{29}{37}\right)$

Aufgaben b 10 bis 13

4 Rationale Zahlen

Mit Hilfe der in Lerneinheit B 3 gewonnenen Klassen können wir nunmehr jedem Punkt der Geraden, der durch die beschriebene Streckenabtragung erhalten werden kann, durch die folgende Definition eine Zahl zuordnen.

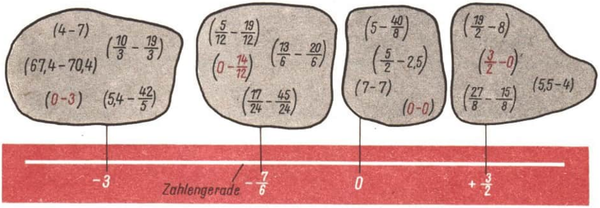
2 **DEFINITION: Jede Klasse von „Differenzen", die bei der Streckenabtragung denselben Punkt ergibt, wird *rationale Zahl* genannt.**
Alle „Differenzen", die in einer Klasse liegen, stellen ein und dieselbe rationale Zahl dar.



B 6

Durch die Zuordnung der rationalen Zahlen zu den entsprechenden Punkten wird die bei der Streckenabtragung verwendete Gerade zu einer Zahlengeraden (Bild B 6). Liegt der einer rationalen Zahl zugeordnete Punkt auf der Zahlengeraden *rechts* vom Punkt A, so wollen wir dafür kürzer sagen:
Die betreffende rationale Zahl liegt *rechts* von A.
Andererseits sagen wir:
Die rationale Zahl liegt *links* von A, wenn der ihr zugeordnete Punkt *links* von A liegt.

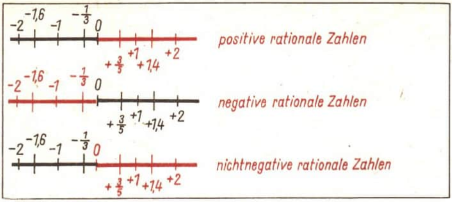
Zur Bezeichnung einer rationalen Zahl ist jede „Differenz" aus der jeweiligen Klasse geeignet. So kann zum Beispiel die rationale Zahl, die dem Punkt P_1 im Bild B 6 zugeordnet ist, mit $(7{,}4 - 9{,}4)$ oder mit $(0 - 2)$ oder mit $\left(\frac{49}{9} - \frac{67}{9}\right)$ oder mit vielen anderen „Differenzen", die in dieser Klasse liegen, bezeichnet werden.
Zur Vereinfachung wollen wir jetzt zu einer einheitlichen Bezeichnung übergehen, indem wir aus jeder Klasse eine spezielle „Differenz" auswählen.
Wenn eine Klasse von „Differenzen" einem Punkt zugeordnet ist, der rechts von A liegt, so enthält diese Klasse genau eine „Differenz" $(a - 0)$ mit $a \neq 0$.
Wenn eine Klasse von „Differenzen" einem Punkt zugeordnet ist, der links von A liegt, so enthält diese Klasse genau eine „Differenz" $(0 - a)$ mit $a \neq 0$.
Eine Klasse von „Differenzen" ist dem Punkt A selbst zugeordnet. Nur diese Klasse enthält die „Differenz" $(0 - 0)$.
Wir legen nun fest (Bild B 7):



B 7

3 **DEFINITION: Die rationale Zahl, in der die „Differenz" $(a - 0)$ vorkommt, wird mit $+a$ (gelesen: plus a) bezeichnet.**
Die rationale Zahl, in der die „Differenz" $(0 - a)$ vorkommt, wird mit $-a$ (gelesen: minus a) bezeichnet.
Die rationale Zahl, in der die „Differenz" $(0 - 0)$ vorkommt, wird mit 0 (Null) bezeichnet.

Hierbei ist a als Variable für eine gebrochene Zahl verwendet worden.



B 8

B

In den Bezeichnungen „$+ a$“ bzw. „$- a$“ für die rationalen Zahlen heißen die Zeichen „+“ bzw. „—“ die **Vorzeichen** der rationalen Zahlen. Nur die Null hat kein Vorzeichen.
Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden rechts von Null liegen, heißen **positive rationale Zahlen.**
Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden links von Null liegen, heißen **negative rationale Zahlen.**
Die positiven rationalen Zahlen und die Zahl 0 werden als **nichtnegative rationale Zahlen** bezeichnet.
Die Menge der rationalen Zahlen bezeichnen wir künftig mit R (Bild B 8). Wenn nichts anderes angegeben wurde, sollen künftig die Buchstaben „a“, „b“, ..., „x“, „y“, ... als Variablen für rationale Zahlen benutzt werden. Das hat zur Folge, daß z. B. a eine positive, eine negative oder die Zahl 0 sein kann.

ZUSAMMENFASSUNG
Jede rationale Zahl ist eine Klasse von „Differenzen“ gebrochener Zahlen. Dabei liegen in einer Klasse alle diejenigen „Differenzen“, die aus einer gegebenen „Differenz“ durch Addition oder Subtraktion ein und derselben Zahl im Minuenden und im Subtrahenden hervorgehen.
Es gilt für die „Differenzen“ $(a - b)$ und $(c - d)$ derselben Klasse:

$$a + d = b + c \quad (a, b, c, d \in R).$$

Die rationalen Zahlen können an einer Zahlengeraden veranschaulicht werden.

Aufgaben b 14 und 15

Ordnung rationaler Zahlen

5 Entgegengesetzte Zahlen

(4) *Veranschauliche die folgenden rationalen Zahlen an einer Zahlengeraden!*

a) $+5$ *und* -5 **b)** $-1{,}5$ *und* $+1{,}5$ **c)** $+\frac{3}{5}$ *und* $-\frac{3}{5}$

d) $-\frac{17}{10}$ *und* $+\frac{17}{10}$ **e)** $+1\frac{1}{3}$ *und* $-1\frac{1}{3}$ **f)** $-\frac{16}{5}$ *und* $+\frac{16}{5}$

4 **DEFINITION: Rationale Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, heißen *zueinander entgegengesetzt*. Die Zahl Null ist zu sich selbst entgegengesetzt.**

Einander entgegengesetzte Zahlen liegen auf der Zahlengeraden symmetrisch zur Null.

5 **SATZ: Zu jeder rationalen Zahl gibt es eine eindeutig bestimmte entgegengesetzte Zahl.**

Wir bezeichnen die zu einer gegebenen rationalen Zahl a entgegengesetzte Zahl mit „$-a$". Dieses Minuszeichen darf nicht mit dem Vorzeichen der rationalen Zahl a verwechselt werden. Zur besseren Übersicht setzen wir dabei die gegebene rationale Zahl in Klammern.

2 **a)** $-(+6) = -6$, denn -6 ist die zu $+6$ entgegengesetzte Zahl.
b) $-\left(-\frac{7}{4}\right) = +\frac{7}{4}$, denn $+\frac{7}{4}$ ist die zu $-\frac{7}{4}$ entgegengesetzte Zahl.

Wir können von der zu a entgegengesetzten Zahl $-a$ erneut die entgegengesetzte Zahl $-(-a)$ bilden.

3
$$\left.\begin{array}{llll} \textbf{a)} & a = +\frac{3}{4}; & -a = -\frac{3}{4}; & -(-a) = +\frac{3}{4} \\ \textbf{b)} & a = -1{,}8; & -a = +1{,}8; & -(-a) = -1{,}8 \\ \textbf{c)} & a = -9; & -a = +9; & -(-a) = -9 \end{array}\right\} -(-a) = a$$

6 **SATZ: Es gilt stets: $-(-a) = a$.**

Genauso wie a kann auch $-a$ sowohl eine positive als auch eine negative rationale Zahl als auch Null sein.

4 **a)** Wenn wir in $-a$ für a die rationale Zahl $-\frac{3}{2}$ einsetzen, so erhalten wir
$$-\left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{3}{2}.$$
Also kann $-a$ durchaus eine positive rationale Zahl sein.

b) Wenn wir in $-a$ für a die rationale Zahl $+\frac{3}{2}$ einsetzen, so erhalten wir
$$-\left(+\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$
In diesem Falle ist $-a$ eine negative rationale Zahl.

Aufgabe b 16

6 Der absolute Betrag einer rationalen Zahl

Durch folgende Definition wird jeder rationalen Zahl eine nichtnegative rationale Zahl zugeordnet.

7 **DEFINITION: Der *absolute Betrag* $|a|$ einer rationalen Zahl a (kurz: Betrag von a) wird folgendermaßen festgelegt:**

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \text{ positiv oder gleich 0 ist.} \\ -a, & \text{falls } a \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

5 **a)** $a = -7$, $|a| = +7$ **b)** $a = +13{,}5$, $|a| = +13{,}5$ **c)** $a = 0$, $|a| = 0$ **d)** $|-7| = +7$ **e)** $|+1{,}3| = +1{,}3$

5 *Trage auf einer Zahlengeraden die rationalen Zahlen ein, deren Beträge gleich $+1$; $+3$; $+\frac{1}{2}$; $+0$; $+1{,}5$ sind!*

Einander entgegengesetzte rationale Zahlen haben den gleichen Betrag.

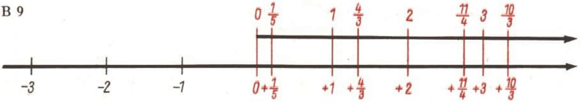
Aufgaben b 17 bis 19

7 Die Ordnung der rationalen Zahlen

Aus der 6. Klasse wissen wir:
Jeder gebrochenen Zahl, die sich durch einen Bruch mit dem Nenner 1 darstellen läßt, entspricht eine natürliche Zahl und umgekehrt. Der gebrochenen Zahl $\frac{a}{1}$, ($a \in N$), ist die natürliche Zahl a zugeordnet. Die gebrochenen Zahlen $\frac{a}{1}$ sind genauso geordnet wie die natürlichen Zahlen. Deshalb können die gebrochenen Zahlen $\frac{a}{1}$ beim Vergleichen durch die natürlichen Zahlen ersetzt werden.

Beispielsweise können wir statt $\frac{3}{1} < \frac{5}{1}$ auch $3 < 5$ schreiben. Wir vergleichen jetzt einen Zahlenstrahl, auf dem die gebrochenen Zahlen veranschaulicht sind, mit einer Zahlengeraden, auf der die rationalen Zahlen veranschaulicht sind. Wir stellen fest:
Jeder positiven rationalen Zahl und der Null entspricht eine gebrochene Zahl und umgekehrt (Bild B 9).
Von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegt auf dem Zahlenstrahl die kleinere stets links von der größeren.
Entsprechend legen wir fest, daß auf der Zahlengeraden die kleinere von zwei positiven rationalen Zahlen links von der größeren liegen soll.

B 9



6 **a)** $+1 < +3$, denn $1 < 3$;

b) $+\frac{1}{5} < +\frac{4}{3}$, denn $\frac{1}{5} < \frac{4}{3}$.

Damit haben wir die positiven rationalen Zahlen geordnet. Dieses Ordnungsprinzip wollen wir auf alle rationalen Zahlen übertragen.
Wir erklären also:

8 **DEFINITION: Von zwei verschiedenen rationalen Zahlen ist diejenige *kleiner*, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.**

Daraus folgt:
Jede positive rationale Zahl ist größer als Null und auch größer als jede negative rationale Zahl. Jede negative rationale Zahl ist kleiner als Null.
Wir wählen zwei beliebige negative Zahlen, z. B. -2 und -4. Nach unserem Ordnungsprinzip gilt:

$-4 < -2$, denn -4 liegt links von -2.

Vergleichen wir jedoch die absoluten Beträge dieser Zahlen, so stellen wir fest:

$|-4| > |-2|$

9 **SATZ: Von zwei verschiedenen negativen rationalen Zahlen ist diejenige die kleinere, die den größeren absoluten Betrag hat.**

Für beliebige rationale Zahlen a und b gilt immer nur einer der drei Fälle:

1) $a < b$ 2) $a = b$ 3) $a > b$

Aufgaben b 20 bis 27

Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

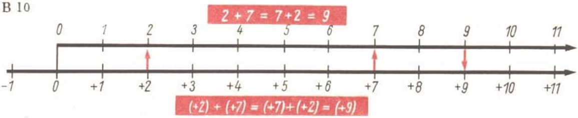
8 Die beiden Summanden (bzw. Minuend und Subtrahend) sind nichtnegative rationale Zahlen

Da jeder positiven rationalen Zahl und der rationalen Zahl Null eine gebrochene Zahl entspricht und umgekehrt, führen wir die **Addition nichtnegativer rationaler Zahlen** auf die Addition gebrochener Zahlen zurück. Damit übertragen sich auch die Kommutativität und Assoziativität der Addition auf die nichtnegativen rationalen Zahlen.

7 **a)** $(+2) + (+7) = (+7) + (+2) = +9$, denn $2 + 7 = 7 + 2 = 9$ (Bild B 10)

b) $(+3) + 0 = 0 + (+3) = +3$, denn $3 + 0 = 0 + 3 = 3$

B 10



Die im Beispiel B 7 vorkommenden Pluszeichen haben verschiedene Bedeutung. Das zwischen den beiden rationalen Zahlen + 2 und + 7 stehende Pluszeichen gibt an, daß die beiden Zahlen addiert werden sollen.

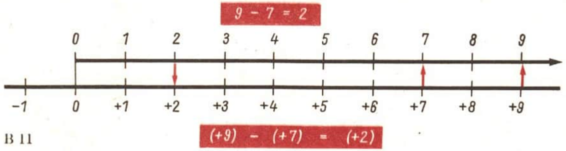
Wir nennen dieses Pluszeichen deshalb **Rechenzeichen** oder **Operationszeichen.** Damit wir zwischen Operationszeichen und Vorzeichen genau unterscheiden können, setzen wir die rationalen Zahlen in Klammern.

Wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist, können wir die **Subtraktion nichtnegativer rationaler Zahlen** ebenfalls auf das Rechnen mit gebrochenen Zahlen zurückführen.

B

8 **a)** $(+9) - (+7) = +2$, denn $9 - 7 = 2$ (Bild B 11)

b) $\left(+\frac{17}{9}\right) - \left(+\frac{8}{9}\right) = +\frac{9}{9} = +1$, denn $\frac{17}{9} - \frac{8}{9} = \frac{9}{9} = 1$



B 11

Auch hier müssen wir wieder zwischen Vorzeichen (in diesem Beispiel „+“) und Operationszeichen (in diesem Beispiel „—“) unterscheiden. Daher setzen wir die rationalen Zahlen in Klammern. Der in den Bildern B 10 und B 11 veranschaulichte Rechenweg enthält also folgende Schritte:

	Beispiel 7a)	**Beispiel 8a)**
Aufgabe im Zahlenbereich R	$(+2) + (+7)$	$(+9) - (+7)$
Übergang zum Zahlenbereich R*	$2 + 7 = 9$	$9 - 7 = 2$
Zurückgehen zum Zahlenbereich R	$(+9)$	$(+2)$

9 Wir schreiben kürzer:

a) $(+2) + (+7) = +9$ **b)** $(+9) - (+7) = +2$

Aufgaben b 28 und 29

9 Die beiden Summanden haben unterschiedliche Vorzeichen

Bei der Einführung der Ordnung rationaler Zahlen hatten wir das Ordnungsprinzip von den gebrochenen Zahlen auf die rationalen Zahlen übertragen. Entsprechend wollen wir auch bei der Definition der Addition verfahren.

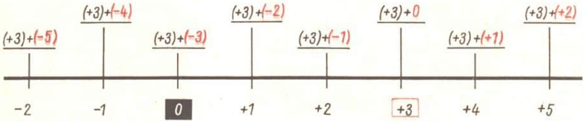
Auf Grund der Festlegung der Addition nichtnegativer rationaler Zahlen gilt:

$$(+3) + (+2) = +5$$
$$(+3) + (+1) = +4$$
$$(+3) + 0 \quad = +3$$

Wenn wir die Folge der Summen in gleicher Weise fortsetzen wollen, müssen wir festsetzen (Bild B 12):

$$(+3) + (-1) = +2$$
$$(+3) + (-2) = +1$$
$$(+3) + (-3) = \quad 0$$
$$(+3) + (-4) = -1$$
$$(+3) + (-5) = -2$$

Diese Festlegung beruht auf folgender Überlegung: Wenn in einer Summe jeweils ein Summand gleich bleibt und der andere verkleinert wird, dann muß auch die Summe um denselben Betrag kleiner werden. Wir legen deshalb fest:



B 12

10 **DEFINITION: Eine positive und eine negative rationale Zahl werden addiert, indem man**
1. die Beträge beider Zahlen ermittelt und
2. den kleineren Betrag vom größeren Betrag subtrahiert.
3. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen, das der Summand mit dem größeren Betrag hat.

Aus dieser Definition ergibt sich der folgende Satz.

11 **SATZ: Die Summe zweier zueinander entgegengesetzter Zahlen ist gleich 0.**

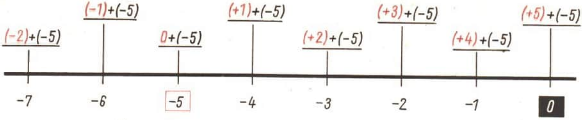
10

Aufgabe	Differenz der Beträge	Ergebnis
$(+39) + (-50)$	$\lvert -50 \rvert - \lvert +39 \rvert = +11$	-11
$\left(+\frac{25}{4}\right) + (-3{,}7)$	$\left\lvert +\frac{25}{4} \right\rvert - \lvert -3{,}7 \rvert = +2{,}55$	$+2{,}55$
$\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(+\frac{3}{8}\right)$	$\left\lvert -\frac{3}{8} \right\rvert - \left\lvert +\frac{3}{8} \right\rvert = 0$	0

Aufgabe b 30

10 Die beiden Summanden sind negative rationale Zahlen

Wir erweitern die Definition der Addition rationaler Zahlen für den noch nicht behandelten Fall, daß beide Summanden negativ sind. Dazu knüpfen wir an die



B 13

Überlegungen in Lerneinheit B 9 an, indem wir bei der letzten dort aufgeschriebenen Gleichung beginnen und den anderen Summanden schrittweise verkleinern (Bild B 13):

$$
\begin{aligned}
(+3) + (-5) &= -2\\
(+2) + (-5) &= -3\\
(+1) + (-5) &= -4\\
0 + (-5) &= -5\\
(-1) + (-5) &= -6\\
(-2) + (-5) &= -7
\end{aligned}
$$

Auf Grund dieser Überlegung definieren wir:

12 **DEFINITION: Eine negative und eine negative rationale Zahl werden addiert, indem man**
1. die Beträge beider Zahlen ermittelt,
2. die Summe dieser Beträge bildet.
3. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen „—".

11

Aufgabe	Summe der Beträge	Ergebnis
$(-39) + (-50)$	$\lvert -39 \rvert + \lvert -50 \rvert = +89$	-89
$\left(-\frac{25}{4}\right) + (-3{,}7)$	$\left\lvert -\frac{25}{4} \right\rvert + \lvert -3{,}7 \rvert = +9{,}95$	$-9{,}95$
$\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right)$	$\left\lvert -\frac{3}{8} \right\rvert + \left\lvert -\frac{3}{8} \right\rvert = +\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$

Aufgaben b 31 und 32

11 Eigenschaften der Addition rationaler Zahlen

Wie die Addition der gebrochenen Zahlen ist auch die Addition der rationalen Zahlen kommutativ und assoziativ.

13 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a und b gilt:**

$$a + b = b + a \text{ (Kommutativität).}$$

Beweis: Beim Beweis dieses Satzes müssen wir zwei Fälle unterscheiden:
a) Beide Summanden haben gleiche Vorzeichen.
b) Die Summanden haben verschiedene Vorzeichen.

Fall a) Da Beträge rationaler Zahlen, also nichtnegative rationale Zahlen, wie gebrochene Zahlen addiert werden, ist auch die Addition der Beträge kommutativ, unabhängig von dem gemeinsamen Vorzeichen der Summanden.

Fall b) Da bei der Bildung der Differenz der Beträge unabhängig von der Reihenfolge der Summanden stets der kleinere vom größeren Betrag subtrahiert wird, ist auch in diesem Fall das Ergebnis der Addition von der Reihenfolge der Summanden unabhängig.

14 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:**

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c \text{ (Assoziativität).}$$

Den Beweis dieses Satzes wollen wir hier nicht führen.

6 *Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft, und vervollständige sie!*

a	b	c	$(a + b)$	$(a + b) + c$	$(b + c)$	$a + (b + c)$
$+3$	-4	$+7$	-1	$+6$	$+3$	$+6$
$-1{,}5$	$-2{,}7$	$+3{,}2$	-4,2			
$-\frac{21}{5}$	$+0{,}8$	$+\frac{3}{5}$	-			
$+7$	$-4{,}9$	$-4{,}9$				
$+\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$-0{,}5$				

Vergleiche die Ergebnisse in der fünften und in der siebenten Spalte!

Aufgaben b 33 bis 35

12 Die Subtraktion rationaler Zahlen

Wir erweitern die Subtraktion nichtnegativer rationaler Zahlen jetzt so, daß die Subtraktion beliebiger rationaler Zahlen wieder die Umkehrung der Addition ist. Das heißt, durch die Subtraktion wird zu einer gegebenen Summe und einem gegebenen Summanden der andere Summand bestimmt.
Es soll also $x = b - a$ wieder dasselbe bedeuten wie $a + x = b$ oder $x + a = b$.
Wie bisher wird auch hierbei b als *Minuend*, a als *Subtrahend* und $b - a$ als *Differenz* bezeichnet.

12 $x + (-4) = -3$

$x = +1$, denn $(+1) + (-4) = -3$

Gleichbedeutend damit ist:

$x = (-3) - (-4) = +1.$

Zum selben Ergebnis kommen wir auch durch folgende Rechnung:

$(-3) + (+4) = +1.$

Daraus wird ersichtlich: Die Addition von $(+4)$ führt zum gleichen Ergebnis wie die Subtraktion von (-4).
Wir legen die Subtraktion daher folgendermaßen fest:

15 **DEFINITION: Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem man die zu ihr entgegengesetzte Zahl zum Minuenden addiert.**

13 a) $(+5)-(+2)=(+5)+(-2)=+3$
b) $(+4)-(+9)=(+4)+(-9)=-5$
c) $(+8)-(-2)=(+8)+(+2)=+10$
d) $(-2)-(+9)=(-2)+(-9)=-11$
e) $(-14)-(-6)=(-14)+(+6)=-8$
f) $(-7)-(-12)=(-7)+(+12)=+5$

16 **SATZ: Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.**

Beweis: Es soll die Zahl $x = b - a$ gefunden werden. Das bedeutet, daß für diese Zahl x gelten muß

(1) $x + a = b$ und (2) $a + x = b$.

Nach der Definition B 15 wird

$x = b - a$ errechnet durch die Addition

$x = b + (-a)$.

Die erhaltene Summe setzen wir für x in die linken Seiten der Gleichungen (1) und (2) ein:

(1) $[b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b$

(2) $a + [b + (-a)] = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = b$

Die Zahl x ist also tatsächlich der zweite Summand, der zu a addiert b ergibt.

Aufgaben b 36 und 37

13 Verallgemeinerung des Begriffs „Summe"

Durch die Definition B 15 ist die *Subtraktion* rationaler Zahlen auf die *Addition* der jeweils *entgegengesetzten* Zahlen zurückgeführt worden. Da es nun zu jeder rationalen Zahl einschließlich der Null eine entgegengesetzte Zahl gibt und da die Addition im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist, können wir jetzt feststellen:

17 **SATZ: Im Bereich der rationalen Zahlen ist die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar.**

Wir haben nun die Möglichkeit, in einem Term vorkommende Subtraktionszeichen durch Additionszeichen zu ersetzen, indem wir von der Subtraktion einer Zahl zur Addition der entgegengesetzten übergehen. Für beliebige rationale Zahlen a und b gilt also

$a - b = a + (-b)$.

14 a) $(+1{,}5) - (-3{,}8) = (+1{,}5) + (+3{,}8)$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right) - (+0{,}67) + (+10{,}0) - (-14) =$

$= \left(-\frac{3}{2}\right) + (-0{,}67) + (+10{,}0) + (+14)$

c) $x - y - r + s = x + (-y) + (-r) + s$ (x, y, r, s beliebige rationale Zahlen).

Auf Grund dieser Umwandlungsmöglichkeit können wir einen Term auch dann als *Summe* bezeichnen, wenn in ihm das Rechenzeichen „—" auftritt, falls dieser

Term nicht Produkt oder Quotient ist. Die Terme im Beispiel B 14 heißen also auch Summen.

> **ZUSAMMENFASSUNG**
> **Rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen** werden addiert, indem man
> 1. die Beträge der beiden rationalen Zahlen bildet,
> 2. entsprechend dem Rechnen mit gebrochenen Zahlen die Summe dieser Beträge berechnet.
> 3. Diese Summe hat das gemeinsame Vorzeichen der rationalen Zahlen.
>
> **Rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen** werden addiert, indem man
> 1. die Beträge der beiden rationalen Zahlen bildet,
> 2. entsprechend dem Rechnen mit gebrochenen Zahlen den kleineren Betrag vom größeren subtrahiert.
> 3. Diese Differenz hat das Vorzeichen, das der Summand mit dem größeren Betrag hat.
>
> Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.
> Die Subtraktion ist im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar.
> Die Subtraktion einer rationalen Zahl a führt zum gleichen Ergebnis wie die Addition der zu a entgegengesetzten Zahl.

Aufgaben b 38 bis 44

Multiplikation und Division rationaler Zahlen

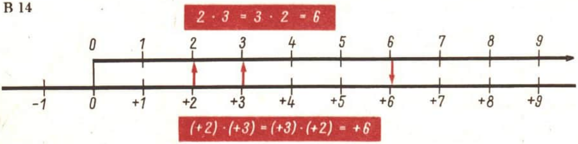
14 Die beiden Faktoren sind nichtnegative rationale Zahlen

Da jeder nichtnegativen Zahl eine gebrochene Zahl entspricht und umgekehrt, führen wir die Multiplikation nichtnegativer rationaler Zahlen auf die Multiplikation gebrochener Zahlen zurück. Damit übertragen sich auch Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation auf die nichtnegativen rationalen Zahlen.

15 **a)** $(+2) \cdot (+3) = (+3) \cdot (+2) = +6$; denn $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$ (Bild B 14)
b) $(+4) \cdot 0 = 0 \cdot (+4) = 0$; denn $4 \cdot 0 = 0 \cdot 4 = 0$

Das Produkt positiver rationaler Zahlen ist stets eine positive rationale Zahl. Ähnlich wie bei der Addition können wir auch bei der Multiplikation mit den gebrochenen Zahlen statt mit den nichtnegativen Zahlen rechnen.

B 14



16

Aufgabe im Zahlenbereich R	$\left(+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(+\frac{7}{8}\right)$
Übergang zum Zahlenbereich R*	$\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{8}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 2}=\frac{7}{6}$
Zurückgehen zum Zahlenbereich R	$+\frac{7}{6}$

B

Wir schreiben kürzer: $\left(+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(+\frac{7}{8}\right)=+\frac{4\cdot 7}{3\cdot 8}=+\frac{7}{6}$

15 Die beiden Faktoren haben unterschiedliche Vorzeichen

Die Multiplikation zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen wird ähnlich wie bei der Addition wieder so erklärt, daß die Regel für die Multiplikation nichtnegativer rationaler Zahlen nicht verletzt wird. Zunächst wollen wir uns überlegen, wie wir dabei sinnvoll vorgehen können.

$$\begin{aligned}(+4)\cdot(+3)&=+12\\(+3)\cdot(+3)&=+\ 9\\(+2)\cdot(+3)&=+\ 6\\(+1)\cdot(+3)&=+\ 3\\0\cdot(+3)&=\ \ \ 0\end{aligned}$$

Wenn wir die Folge der Produkte in der gleichen Weise fortsetzen wollen, müssen wir festsetzen:

$$\begin{aligned}(-1)\cdot(+3)&=-\ 3\\(-2)\cdot(+3)&=-\ 6\\(-3)\cdot(+3)&=-\ 9\\(-4)\cdot(+3)&=-12\\ \vdots\quad\ \ \vdots\ \ &\quad\ \ \vdots\end{aligned}$$

Wir definieren die Multiplikation rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen wie folgt:

18 **DEFINITION: Eine negative und eine positive rationale Zahl werden miteinander multipliziert, indem man**
1. die Beträge beider Zahlen ermittelt und
2. das Produkt dieser Beträge errechnet.
3. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen „—".

17

Aufgabe	Produkt der Beträge	Ergebnis
$(-9)\cdot(+7)$	$\lvert-9\rvert\cdot\lvert+7\rvert=+63$	-63
$\left(+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{25}{9}\right)$	$\left\lvert+\frac{3}{5}\right\rvert\cdot\left\lvert-\frac{25}{9}\right\rvert=+\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Aufgabe b 45

Um die Multiplikation rationaler Zahlen auf zwei negative Faktoren zu erweitern, knüpfen wir an die Überlegungen in Lerneinheit B 15 an. Wir beginnen bei der letzten aufgeschriebenen Gleichung und verkleinern jetzt den anderen Faktor

$$(-4)\cdot(+3) = -12$$
$$(-4)\cdot(+2) = -\ 8$$
$$(-4)\cdot(+1) = -\ 4$$

Wir erkennen, daß das Produkt größer wird. Wir setzen in gleicher Weise die Folge der Produkte fort:

$$(-4)\cdot\ \ 0 = \ \ 0$$
$$(-4)\cdot(-1) = +\ 4$$
$$(-4)\cdot(-2) = +\ 8$$
$$(-4)\cdot(-3) = +12$$
$$(-4)\cdot(-4) = +16$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

19 **DEFINITION: Eine negative und eine negative rationale Zahl werden miteinander multipliziert, indem man**
1. die Beträge beider Zahlen ermittelt und
2. das Produkt dieser Beträge errechnet.
3. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen „+“.

18

Aufgabe	Produkt der Beträge
$(-9)\cdot(-7)$	$\|-9\|\cdot\|-7\| = +63$
$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{25}{9}\right)$	$\left\|-\frac{3}{5}\right\|\cdot\left\|-\frac{25}{9}\right\| = +\frac{5}{3}$

ZUSAMMENFASSUNG

Rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden miteinander multipliziert, indem man
1. die Beträge der beiden rationalen Zahlen bildet und
2. entsprechend dem Rechnen mit gebrochenen Zahlen das Produkt dieser Beträge errechnet.
3. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen „+“.

Rationale Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen werden miteinander multipliziert, indem man
1. die Beträge der beiden rationalen Zahlen bildet und
2. entsprechend dem Rechnen mit gebrochenen Zahlen das Produkt dieser Beträge errechnet.
3. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen „—“.

Aufgaben b 46 und 47

17 Eigenschaften der Multiplikation rationaler Zahlen

20 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a und b gilt:**

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \textbf{(Kommutativität).}$$

Beweis: Die Multiplikation rationaler Zahlen wird unabhängig von den Vorzeichen der Faktoren auf die Multiplikation von Beträgen, also von nichtnegativen Zahlen, zurückgeführt. Im Produkt der Beträge ist aber deren Reihenfolge beliebig, da sie wie gebrochene Zahlen multipliziert werden und die Multiplikation gebrochener Zahlen kommutativ ist.

B

21 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:**

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c \quad \textbf{(Assoziativität).}$$

Den Beweis dieses Satzes wollen wir nicht führen.

(7) *Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!*

a	b	c	$(a \cdot b)$	$(a \cdot b) \cdot c$	$(b \cdot c)$	$a \cdot (b \cdot c)$
-4	$+2$	-5	-8	$+40$	-10	$+40$
$+3$	$+8$	-4				
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$+\frac{5}{12}$				
$+3{,}5$	$+4{,}0$	$+0{,}1$				
$-\frac{4}{5}$	-20	-5				

Vergleiche jeweils die Ergebnisse in der fünften und in der siebenten Spalte!

18 Produkte mit mehr als zwei Faktoren

Auf Grund des Assoziativgesetzes kann man auch ein Produkt mit mehr als zwei Faktoren so ausrechnen, daß man die Multiplikation je zweier nebeneinanderstehender Faktoren in beliebiger Reihenfolge ausführt. Berücksichtigt man noch das Kommutativgesetz, so braucht man bei den einzelnen Multiplikationen nicht unbedingt nebeneinanderstehende Faktoren zu wählen. Dadurch können sich Rechenvorteile ergeben.

19 $$\underbrace{(-0{,}25) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right)} \cdot (+9) \cdot (+4) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = \underbrace{(-0{,}05) \cdot (+9)} \cdot (+4) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) =$$

$$\underbrace{(-0{,}45) \cdot (+4)} \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = (-1{,}80) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = -0{,}60$$

Mit Rechenvorteilen

$$(-0{,}25)\cdot\left(+\frac{1}{5}\right)\cdot(+9)\cdot(+4)\cdot\left(+\frac{1}{3}\right)=\underbrace{(-0{,}25)\cdot(+4)}\cdot\underbrace{(+9)\cdot\left(+\frac{1}{3}\right)}$$

$$\cdot\left(+\frac{1}{5}\right)=\underbrace{(-1)\cdot(+3)}\cdot\left(+\frac{1}{5}\right)=(-3)\cdot\left(+\frac{1}{5}\right)=-\frac{3}{5}=-0{,}6$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens eines Produktes rationaler Zahlen gilt folgende Regel:

22 **SATZ: Ein Produkt rationaler Zahlen ist positiv, falls die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist.**
Ein Produkt rationaler Zahlen ist negativ, falls die Anzahl der negativen Faktoren ungerade ist.

8 *Versuche den Satz B 22 zu begründen!*

23 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:**

$$\boxed{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}\quad \textbf{(Distributivität).}$$

Diesen Satz wollen wir hier nicht beweisen.

9 *Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!*

a	b	c	$(b+c)$	$a\cdot(b+c)$	$a\cdot b$	$a\cdot c$	$a\cdot b+a\cdot c$
$+4$	$+3$	$+5$	$+8$	$+32$	$+12$	$+20$	$+32$
$+2$	-3	$+4$					
-3	$+5$	-6					
$+10$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{5}$					
$+\frac{5}{6}$	$-\frac{3}{12}$	$+\frac{1}{4}$					

Vergleiche jeweils die Ergebnisse in der fünften und in der achten Spalte!

Wegen der Kommutativität der Multiplikation gilt ebenso:

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a.$$

Da die Subtraktion rationaler Zahlen auf die Addition der jeweils entgegengesetzten Zahlen zurückgeführt werden kann, gilt auch

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

Aufgaben b 48 bis 52

19 Division rationaler Zahlen

Wir hatten im Bereich der gebrochenen Zahlen die Division als Umkehrung der Multiplikation definiert. Auch im Bereich der rationalen Zahlen soll die Division die Umkehrung der Multiplikation sein, d. h., es soll $x = a : b$ dasselbe bedeuten wie $x \cdot b = a$. Dabei muß $b \neq 0$ sein.
Daraus können wir schon folgern, daß zwei nichtnegative rationale Zahlen wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen dividiert werden.

20

$$\left(+\frac{9}{7}\right) : \left(+\frac{3}{14}\right)$$

Übergang zu den gebrochenen Zahlen: $\frac{9}{7} : \frac{3}{14} = \frac{9 \cdot 14}{7 \cdot 3} = 6,$

also $\left(+\frac{9}{7}\right) : \left(+\frac{3}{14}\right) = +6\,.$

Wie im Bereich der gebrochenen Zahlen nennen wir auch hier in der Gleichung $x = a : b$ die Zahl x den *Quotienten aus a und b*, die Zahl a den *Dividenden* und die Zahl b den *Divisor*.
In den folgenden Aufgaben gehen wir bei der Division beliebiger rationaler Zahlen auf die Multiplikation zurück, um den gesuchten Quotienten zu finden. Dadurch erhalten wir einen Anhalt für eine Regel für die Division.

a) $(+20) : \left(+\frac{1}{5}\right) = +100;$ denn $(+100) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right) = +20$

b) $(-20) : \left(-\frac{1}{5}\right) = +100;$ denn $(+100) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -20$

c) $(+20) : \left(-\frac{1}{5}\right) = -100;$ denn $(-100) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = +20$

d) $(-20) : \left(+\frac{1}{5}\right) = -100;$ denn $(-100) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right) = -20$

24 **DEFINITION: Man dividiert zwei rationale Zahlen, indem man zunächst den Quotienten ihrer absoluten Beträge bildet.**
Der Quotient der rationalen Zahlen ist positiv, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen haben; er ist negativ, wenn Dividend und Divisor verschiedene Vorzeichen haben.
Die Division durch Null ist auch im Bereich der rationalen Zahlen nicht erklärt.

21

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(+\frac{5}{6}\right)$$

$$\left|-\frac{2}{3}\right| : \left|+\frac{5}{6}\right| = \left(+\frac{2}{3}\right) : \left(+\frac{5}{6}\right) = +\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right) = +\frac{4}{5}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(+\frac{5}{6}\right) = -\frac{4}{5}$$

Wie im Bereich der gebrochenen Zahlen können wir auch im Bereich der rationalen Zahlen den Bruchstrich als Divisionszeichen auffassen:

$$a : b = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

Aus der Regel für die Division rationaler Zahlen folgt:

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

22 $$\frac{+2}{-7} = (+2) : (-7) = (-2) : (+7) = \frac{-2}{+7} = -\frac{2}{7}$$

25 **DEFINITION: Ist $a \neq 0$, so heißt $\frac{+1}{a}$ bzw. $(+1) : a$ die zu a *reziproke Zahl* oder das *Reziproke* von a.**

B

23

a	$+3$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$+\frac{11}{12}$	$+\frac{12}{11}$
$\frac{+1}{a}$ (Reziproke von a)	$+\frac{1}{3}$	$+3$	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{12}{11}$	$+\frac{11}{12}$

Das Produkt aus einer von 0 verschiedenen rationalen Zahl und ihrem Reziproken ist gleich $+1$.

Für jede Zahl $a \neq 0$ gilt:

$$a \cdot \frac{+1}{a} = +1.$$

Aufgabe b 53

Isomorphiebetrachtungen; ganze Zahlen

20 Vereinfachung der Schreibweise

Da sich die nichtnegativen rationalen Zahlen beim Vergleichen und bei den Rechenoperationen wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen verhalten, können wir die betreffenden rationalen Zahlen durch die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen ersetzen. Das bedeutet, daß wir das Vorzeichen „+" weglassen können.

So können wir zum Beispiel schreiben:

statt $-3 < +5$, jetzt $-3 < 5$;

statt $(-4) + (+8) = +4$, jetzt $-4 + 8 = 4$;

statt $\left(+\frac{4}{5}\right) \cdot \left(+\frac{2}{7}\right) = +\frac{8}{35}$, jetzt $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{35}$;

statt $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(+\frac{2}{7}\right) = -\frac{8}{35}$, jetzt $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{2}{7} = -\frac{8}{35}$;

statt $\left(+\frac{5}{9}\right) : \left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{1}{6}$, jetzt $\frac{5}{9} : \left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{1}{6}$ und statt $\frac{+1}{a}$, jetzt $\frac{1}{a}$.

24 a) $-4+8=(-4)+(+8)=4$

b) $4-8=(+4)+(-8)=-4$

c) $1{,}5-3{,}4+6{,}8-5=(+1{,}5)+(-3{,}4)+(+6{,}8)+(-5)=-0{,}1$

Der im Beispiel B 24 gezeigte Zwischenschritt wird später ausgelassen.
Auch bei der Multiplikation und Division verkürzt sich die Schreibweise gegenüber der in den Beispielen B 18 und B 22.

B

25 a) $\frac{5}{9}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)=-\frac{5\cdot 10}{9\cdot 3}=-\frac{50}{27}$

b) $\frac{5}{9}:\left(-\frac{10}{3}\right)=-\frac{5\cdot 3}{9\cdot 10}=-\frac{1}{6}$

Aufgaben b 54 bis 70

21 Teilbereiche der rationalen Zahlen

Die gebrochenen Zahlen bilden einen Teilbereich der rationalen Zahlen.
Entsprechend können wir die natürlichen Zahlen als Teilbereich der Menge der gebrochenen Zahlen und damit auch als Teilbereich der Menge der rationalen Zahlen auffassen.
Die natürlichen Zahlen und die zu ihnen entgegengesetzten Zahlen fassen wir zu einer weiteren Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen zusammen.

26 **DEFINITION: Die Menge der natürlichen und der zu ihnen entgegengesetzten rationalen Zahlen heißt die Menge der *ganzen Zahlen*. Sie wird mit dem Symbol „G“ bezeichnet.**

Die Menge der ganzen Zahlen enthält also die Zahlen

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

27 **SATZ: Jede rationale Zahl läßt sich in der Form „$\frac{p}{q}$“ ($q \neq 0$) darstellen, wobei p und q teilerfremde ganze Zahlen sind.**

Ohne diesen Satz zu beweisen, wollen wir uns diese Aussage an Beispielen verdeutlichen.

26 a) $-0{,}78=-\frac{78}{100}=\frac{-39}{50}$

b) $0{,}\overline{6}=\frac{2}{3}$

c) $-5=-\frac{5}{1}=\frac{-5}{1}$

Jede natürliche Zahl hat einen unmittelbaren Nachfolger. Da es nun aber im Bereich der rationalen Zahlen zu jeder natürlichen Zahl eine entgegengesetzte Zahl gibt, hat jede ganze Zahl sowohl einen unmittelbaren Nachfolger als auch einen unmittelbaren Vorgänger.
Für die Gesamtheit **aller** rationalen Zahlen gilt dagegen, daß sie überall dicht liegen, d. h., daß genau wie bei den gebrochenen Zahlen zwischen zwei rationalen Zahlen unendlich viele weitere liegen.

B

22 Übersicht über die Zahlenbereiche

B 15

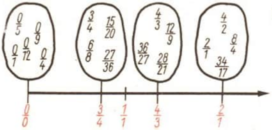
Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, ...
Addition und Multiplikation sind uneingeschränkt ausführbar.

B 16

Gebrochene Zahlen

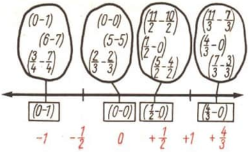
Eine gebrochene Zahl ist die Klasse aller der Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen.
Addition, Multiplikation und Division (mit Ausnahme durch Null) sind uneingeschränkt ausführbar.
Die natürlichen Zahlen bilden einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen.



B 17

Rationale Zahlen

Eine rationale Zahl ist die Klasse aller der Differenzen gebrochener Zahlen, die dadurch auseinander hervorgehen, daß man im Minuenden und im Subtrahenden die gleiche gebrochene Zahl addiert oder subtrahiert.



B 18

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (mit Ausnahme durch Null) sind uneingeschränkt ausführbar.
Die gebrochenen Zahlen bilden einen Teilbereich der rationalen Zahlen.
Auch im Bereich der rationalen Zahlen gilt stets

für das **Rechnen mit 0**:

$a + 0 = 0 + a = a$

$a - 0 = a$

$a \cdot 0 = 0$

$a : 0$ nicht erklärt

$0 : a = 0 \quad (a \neq 0)$

für das **Rechnen mit 1**:

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

$a : 1 = a$

$1 : a = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$

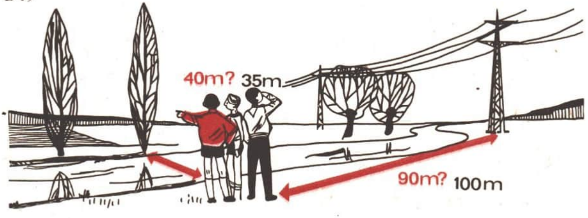
$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$

Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung

23 Der absolute und der relative Fehler

Jürgen schätzt von einem Punkt im Gelände die Entfernung zum nächsten Telegrafenmast auf 90 m. Die Kontrolle mit dem Meßband ergibt jedoch eine Entfernung von 100 m (Bild B 19).
Gerhard schätzt die Breite eines Flusses auf 40 m. Beim Nachmessen auf einer Brücke stellt sich heraus, daß der Fluß 35 m breit ist (Bild B 19). Jürgen hat sich also um 10 m und Gerhard um 5 m verschätzt. Wer hat genauer geschätzt?
Ohne genauere Überlegung könnten wir annehmen, daß Gerhard genauer geschätzt hat; denn sein Fehler beträgt nur 5 m, während sich Jürgen um das Doppelte, nämlich um 10 m, verschätzt hat. Dabei haben wir aber außer acht

B 19



gelassen, daß die Strecke, die Jürgen schätzen mußte, viel länger ist als die von Gerhard geschätzte.
Wir berücksichtigen diesen Umstand, indem wir jeweils das Verhältnis des Fehlers zur richtigen Streckenlänge bilden:

Jürgen Fehler: 10 m
richtige Länge: 100 m
Verhältnis: $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

Gerhard Fehler: 5 m
richtige Länge: 35 m
Verhältnis: $\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

Wenn wir die beiden Verhältnisse vergleichen, so finden wir:

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{7}.$$

Bei Jürgen ist also das Verhältnis des Fehlers zur gemessenen Entfernung kleiner als bei Gerhard.

B

28 **DEFINITION: Die Differenz zwischen dem geschätzten Wert und dem richtigen Wert heißt *absoluter Fehler*.**

Je nach Vorzeichen dieser Differenz ist der absolute Fehler positiv oder negativ. Der absolute Fehler hat dieselbe Einheit wie die betrachtete Größe.

29 **DEFINITION: Das Verhältnis des absoluten Fehlers zum richtigen Wert heißt *relativer Fehler*.**

Der absolute Fehler beim Entfernungsschätzen beträgt bei Jürgen 90 m — 100 m = — 10 m und bei Gerhard 40 m — 35 m = + 5 m. Die relativen Fehler betragen bei Jürgen $-\frac{1}{10}$ und bei Gerhard $+\frac{1}{7}$. Die Vorzeichen geben an, ob der Schätzwert nach oben (+) oder nach unten (—) vom richtigen Wert abweicht. Beim Vergleich der Fehlergröße betrachten wir jetzt nur die absoluten Beträge der Fehler. So hat Jürgen zwar einen größeren absoluten Fehler gemacht, denn $+10 > +5$, aber sein relativer Fehler ist kleiner als der von Gerhard, denn $+\frac{1}{10} < +\frac{1}{7}$.

30 **DEFINITION: Der *prozentuale Fehler* ist der in Prozenten angegebene relative Fehler.**

27 Die Lichtgeschwindigkeit c wird häufig mit $300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ angegeben. Ein genauerer Wert ist $299\,790\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Wie groß ist der Fehler, wenn mit dem Näherungswert $300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ gerechnet wird?

Der absolute Fehler beträgt: $(300\,000 - 299\,790)\,\frac{\text{km}}{\text{s}} = +\,210\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Er scheint sehr groß zu sein.

Der relative Fehler beträgt: $\frac{+\,210}{299\,790} \approx \frac{+\,210}{300\,000} = +\,0{,}0007$. Der relative Fehler ist sehr klein. Er vermittelt über die Qualität einer Messung oder einer Schätzung eine klarere Vorstellung als der absolute Fehler.

Der prozentuale Fehler beträgt: $0{,}0007 = \frac{0{,}07}{100}$, das sind 0,07 %.

B

Aufgaben b 71 bis 78

Zur Geschichte der rationalen Zahlen

Heute sind im Schulunterricht die Begriffe „rationale Zahl“ und „Proportion“ genau getrennt. Beide Begriffe haben aber in der Geschichte der Mathematik bis ins 18. Jahrhundert hinein in dauernder Wechselwirkung gestanden. Daher soll auch in einem gemeinsamen Abschnitt von dem schwierigen Weg berichtet werden, der bis zur Herausarbeitung dieser beiden grundlegenden Begriffe zurückgelegt werden mußte.

Die Menschen hatten schon in der Urgesellschaft zählen gelernt. Es galt, Tauschgeschäfte zwischen Viehzüchtern und Ackerbauern durchzuführen, Viehherden und Ackerbauprodukte zu zählen, Entfernungen in Tagereisen zu bestimmen und für Aussaat und Ernte einen Kalender zu führen. Dies alles machte die Kunst des Zählens, die Ausbildung von Zahlwörtern und die Anfänge des Rechnens zu dringenden gesellschaftlichen Bedürfnissen. Auch die Vorstellung von gebrochenen Zahlen hat sich bei den alten Völkern schon frühzeitig herausgebildet. Immer wieder traten solche Probleme auf, wie die Aufteilung einer gemeinsamen Jagdbeute, eines gemeinsam erarbeiteten Ernteertrages und einer von einer Kriegerschar eingebrachten Beute. Schon die frühesten uns erhalten gebliebenen Dokumente der Mathematik wie die Keilschrifttexte aus Babylon, einem Staat auf dem Gebiet des heutigen Irak, und die Papyri aus dem alten Ägypten zeigen, daß man bereits im 3. und 2. Jahrhundert v. u. Z. Zeichen für Brüche besaß und mit Brüchen rechnen konnte. Freilich beherrschten nur wenige Menschen diese damals sehr schwierige Kunst. Es waren die sogenannten Schreiber, welche als Verwaltungsbeamte der ersten Klassenstaaten Aufgaben zu erledigen hatten, die auch mathematische Kenntnisse erforderten. Die Schreiber hatten Kriegerheere mit Verpflegung und Waffen, die Sklaven mit Arbeitsgeräten auszurüsten, die Kanalbauten zur Bewässerung der Felder zu überwachen, Steuern einzutreiben usw. Sie waren somit ein wichtiges Instrument bei der Machtausübung der herrschenden Klasse, der Sklavenhalter.

Wenn man sich die alte Schreibweise für Brüche ansieht, so erkennt man ganz deutlich, daß die Brüche aus dem praktischen Leben hervorgegangen sind.

In Ägypten versah man um 1800 v. u. Z. zur Kennzeichnung eines Bruches eine Zahl mit dem vorgesetzten oder darübergesetzten Schriftzeichen für ein ganz kleines Hohlmaß, mit einem Punkt. Es bedeutete, wenn wir uns unserer heutigen Zahlzeichen bedienen, $\dot{3}$ soviel wie $\frac{1}{3}$, $\dot{4}$ soviel wie $\frac{1}{4}$ usw. Man rechnete nur mit Stammbrüchen, d. h. mit Brüchen, deren Zähler stets 1 ist. Auch dies weist auf

B 20 Entstehungsweise des babylonischen Schriftzeichens für den Bruch $\frac{1}{2}$.
Oben: Bildzeichen für das zur Hälfte gefüllte Gefäß.
Unten: Schreibweise für $\frac{1}{2}$ in der entwickelten Keilschrift.

die Entstehung der Brüche als Teile eines Ganzen hin. Für die Ägypter der damaligen Zeit bildete daher $\frac{2}{5}$ kein Zahlenergebnis, sondern eine Aufgabe, nämlich die Zerlegung in Stammbrüche. Das Ergebnis lautet $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, wenn wir uns unserer heutigen Schreibweise bedienen.

In Babylon bezeichnete man den Bruch $\frac{1}{2}$ mit einem Zeichen, das ein zur Hälfte gefülltes Hohlmaß darstellt (Bild B 20).

Im alten Griechenland und im römischen Weltreich bezeichnete man ganze Zahlen und Brüche mit Buchstaben aus dem griechischen bzw. lateinischen Alphabet.

Während des 7. und 6. Jh. v. u. Z. verarbeiteten die griechischen Mathematiker das aus Babylonien und Ägypten übernommene mathematische Wissen im streng mathematischen Sinne. Sie lernten gedanklich zwischen Voraussetzung, Lehrsatz und Beweis zu unterscheiden. Dabei wurde auch die Frage aufgeworfen, was eigentlich unter dem Begriff „Zahl" zu verstehen sei.

Nach griechischer Auffassung wurden nur die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . unter dem Begriff „Zahl" (griech., arithmos) verstanden. Unsere heutigen Brüche galten also den griechischen Mathematikern nicht als Zahlen. Man behandelte sie als Verhältnisse von „Zahlen" (d. h. von ganzen positiven Zahlen). Das, was wir heute „Bruchrechnung" nennen, wurde mit Hilfe von Proportionen behandelt, mit ihrer Hilfe wurden das Kürzen und Erweitern von Brüchen gelehrt. Die Multiplikation von Brüchen wurde aufgefaßt als das Zusammensetzen von Verhältnissen.

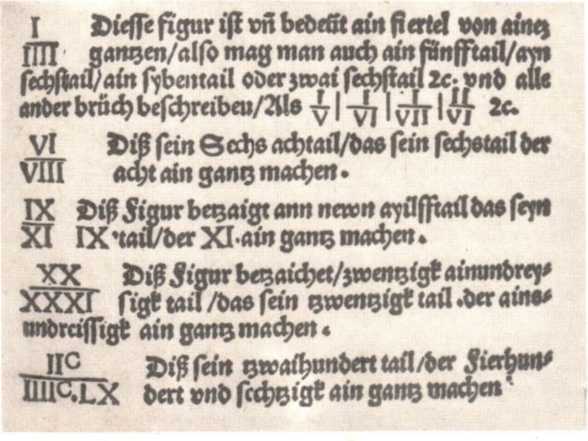
Erst gegen Ende der Antike wurde diese enge Auffassung des Begriffs „Zahl" als natürliche Zahl teilweise überwunden.

Die alte griechische Mathematik kannte in gar keiner Form den Begriff der negativen Zahl, wenn natürlich auch in den Kreisen der Kaufleute mit Schulden und Guthaben gerechnet worden ist. Aber unter den Bedingungen der Sklavenhaltergesellschaft, wo jede produktive Tätigkeit und jede Form der Arbeit als verächtlich galten, bestand eine tiefe Kluft zwischen Theorie und Praxis. Der in der Antike überaus einflußreiche Philosoph PLATON (427 – etwa 347 v. u. Z.)

hatte ausdrücklich gefordert, die Mathematik dürfe „nicht für die Zwecke des Krämers" benutzt und dadurch „hinabgewürdigt" werden. Auch EUKLEIDES war Anhänger der philosophischen Lehre von PLATON. Für ihn waren daher die mathematische Praxis und die kaufmännische Rechenkunst völlig uninteressant. Die negativen Zahlen waren dagegen schon in der indischen und chinesischen Mathematik des 6. Jh. u. Z. fester Bestandteil der Mathematik geworden. Sie verdanken ihre Einführung, wie man aus ihrer ursprünglichen Bezeichnung als „Schulden" ersehen kann, der kaufmännischen Praxis. Auch in der Mathematik der arabischen Länder, welche seit etwa 800 u. Z. einen großartigen Aufschwung nahm, waren die negativen Zahlen heimisch.

Die Mathematiker Europas haben sich am Ende des Mittelalters, als auch in Europa die Wissenschaften nach und nach wieder belebt werden konnten, weitgehend an die arabischen Gelehrten angeschlossen. So übernahm man unter anderem die aus Indien stammenden Zahlzeichen, welche auch die arabischen Gelehrten verwendeten. Daher nennen wir unsere heutigen Zahlzeichen *arabische Ziffern*. Bei den engen Handelsbeziehungen zum Orient lernte man in Europa im 13. und 14. Jahrhundert weiterhin die negativen Zahlen kennen. Sie setzten sich allerdings erst durch, als die Produktion und der Handel im 15. und 16. Jh. einen raschen Aufschwung nahmen, insbesondere nach der Entdeckung Amerikas. Während in den Handelskontoren negative Zahlen schon zum normalen Handwerkszeug der Buchhalter und großen Kaufherren geworden waren, gab es noch Ende des 16. Jh. selbst führende Mathematiker, die die negativen Zahlen als „absurde" Zahlen bezeichneten. Immer noch war der Einfluß des idealistischen Philosophen PLATON sehr stark. Erst Ende des 17. Jh. wurden die letzten Vorbehalte gegen die Anerkennung der negativen Zahlen als vollwertige Zahlen fallengelassen.

B 21 Bruchschreibweise mit Bruchstrich und römischen Ziffern. Aus einem deutschen Rechenbuch vom Jahre 1514.


$\frac{I}{IIII}$ Dieſſe figur iſt vñ bedeüt ain fiertel von ainez ganzen/alſo mag man auch ain fünfftail/ayn ſechſtail/ain ſybentail oder zwai ſechſtail zc. vnd alle ander brüch beſchreiben/Als $\frac{I}{V}$ | $\frac{I}{VI}$ | $\frac{I}{VII}$ | $\frac{II}{VI}$ zc.

$\frac{VI}{VIII}$ Diß ſein Sechs achtail/das ſein ſechstail der acht ain gantz machen.

$\frac{IX}{XI}$ Diß Figur bezaigt ann newn ayilfftail das ſeyn IX tail/der XI ain gantz machen.

$\frac{XX}{XXXI}$ Diß Figur bezaichet/zwentzigk ainundreyſigk tail/das ſein zwentzigk tail der ainsundreiſſigk ain gantz machen.

$\frac{II^{C}}{IIII^{C}.LX}$ Diß ſein zwaihundert tail/der Sierhundert vnd ſechtzigk ain gantz machen.

C Gleichungen

Hubschrauber haben die Fähigkeit, ohne Standortveränderung fliegen zu können. Sie benötigen keine Rollbahn für Start und Landung und werden für viele Spezialaufgaben eingesetzt. Hubschrauber können zum Beispiel als fliegender Kran eingesetzt werden, Schiffbrüchige retten; sie haben auch für unsere Volksarmee große Bedeutung. Der Hubschrauber schwebt in gleicher Höhe, wenn der durch den Drehflügel erzeugte Auftrieb F_A gleich der Gewichtskraft F_G ist: $F_A = F_G$. Wenn $F_A > F_G$ gilt, steigt der Hubschrauber, und er sinkt, wenn $F_A < F_G$ gilt.

1 Zur Wiederholung

Ziffern, Variablen und bestimmte Zusammensetzungen aus ihnen mit Hilfe der Rechenzeichen „+", „—", „·", „:" bzw. Bruchstrich und Klammern werden **Terme** genannt.

Terme sind z. B.: „3"; „a"; „$\frac{7}{8}$"; „$2{,}7 + x$"; „$\frac{a+b}{2}$"; „$3\,(x - 4)$".

Ausdrücke, in denen zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind, heißen **Gleichungen**. Ausdrücke, in denen Terme durch eines der Zeichen „<" oder „>" verbunden sind, heißen **Ungleichungen**.

Enthalten Gleichungen oder Ungleichungen Variablen, so muß festgelegt werden, aus welchem Zahlenbereich wir Zahlen für die Variablen einsetzen dürfen. Diesen Bereich nennen wir auch Grundbereich der Variablen. Alle Zahlen des vorgegebenen Grundbereiches, die die gegebene Gleichung oder Ungleichung beim Einsetzen zu einer wahren Aussage machen und nur diese, heißen **Lösungen** dieser Gleichung bzw. Ungleichung. Man sagt: Diese Zahlen **erfüllen** die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung. Die Menge aller Lösungen einer Gleichung bzw. Ungleichung wird als **Lösungsmenge** bezeichnet.

C

1 **a)** $4 + x = 5{,}5 \quad (x \in R)$

Die Gleichung enthält eine Variable, der Variablengrundbereich ist die Menge der rationalen Zahlen. Durch Einsetzen der Zahl 1,5 für x wird die Gleichung erfüllt. Es gibt keine anderen Zahlen, die diese Gleichung erfüllen. Die Lösungsmenge enthält nur ein Element.

$L = \{1{,}5\}$.

b) $17 > 5 \cdot x + 20 \quad (x \in R^*)$

Die Ungleichung wird durch keine gebrochene Zahl erfüllt. Die Lösungsmenge ist leer.

$L = \varnothing$.

c) $2 + x < 8 \quad (x \in N)$

Die Ungleichung wird durch die natürlichen Zahlen 0; 1; 2; 3; 4; 5 erfüllt.

$L = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

Wenn bei den folgenden Gleichungen kein Grundbereich angegeben ist, so ist als Variablengrundbereich stets der Bereich R anzusehen.

Aufgaben c 1 bis 6

2 Äquivalente Gleichungen

Beim Lösen von Gleichungen können wir die Lösung manchmal durch Probieren ermitteln. So können wir z. B. erkennen, daß für die Gleichung $4\,x = 3$ die Zahl $\frac{3}{4}$ Lösung ist.

Wir können aber auch durch systematische Anwendung von Rechenoperationen, die wir auf beiden Seiten einer gegebenen Gleichung ausführen, diese Gleichung schrittweise auf die Form $x = a$ bringen. Dieses schrittweise Umformen nennen wir *Auflösen der Gleichung nach der Variablen* oder *Isolieren der Variablen*. Die dabei entstehenden Gleichungen haben alle dieselbe Lösungsmenge.

1 **DEFINITION: Gleichungen heißen zueinander *äquivalent*, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen.**

Umformungen, die Schritt für Schritt auf Gleichungen führen, die zur gegebenen äquivalent sind, nennt man **äquivalente Umformungen.**
Durch Vertauschen der Seiten einer gegebenen Gleichung ohne Variable erhalten wir eine neue Gleichung.
Aus $4 + 1 = 5$ erhalten wir $5 = 4 + 1$.
Beide Gleichungen stellen eine wahre Aussage dar.
Vertauscht man in einer Gleichung, die eine wahre Aussage darstellt, die Seiten, so erhält man wieder eine wahre Aussage.
Enthält eine gegebene Gleichung eine Variable, so erhalten wir durch Vertauschen der Seiten eine äquivalente Gleichung. Setzt man nämlich in beide Gleichungen ein und dieselbe Zahl ein, so gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Entweder beide Gleichungen werden zu einer wahren Aussage. Dann ist die eingesetzte Zahl Lösung beider Gleichungen.
b) Oder beide Gleichungen werden zu einer falschen Aussage. Dann ist die eingesetzte Zahl nicht Lösung der Gleichung.

Gibt es für die eine Gleichung im vorgegebenen Grundbereich keine Lösung, so hat auch die durch Vertauschen der Seiten entstandene Gleichung in diesem Grundbereich keine Lösung.

2 $x + 3 = 7$ und $7 = x + 3$.
Die Lösung ist in beiden Fällen 4; denn durch Einsetzen erhalten wir die Aussagen
$4 + 3 = 7$ und $7 = 4 + 3$.
Die Gleichungen $x + 3 = 7$ und $7 = x + 3$ sind also zueinander äquivalent.

2 **SATZ: Vertauscht man in einer Gleichung mit einer Variablen die Seiten, so erhält man eine äquivalente Gleichung.**

3 Weitere äquivalente Umformungen

Wenn wir auf beiden Seiten einer Gleichung ohne Variablen dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren, so erhalten wir eine neue Gleichung.

3 (1) $10 - 2 = 8$ (1a) $10 - 2 + 5 = 8 + 5$
(1b) $10 - 2 - 5 = 8 - 5$

Addiert oder subtrahiert man in einer Gleichung, die eine wahre Aussage darstellt, auf beiden Seiten dieselbe Zahl, so erhält man wieder eine wahre Aussage.

Enthält eine gegebene Gleichung eine Variable, so erhalten wir durch Addition oder Subtraktion derselben Zahl auf beiden Seiten dieser Gleichung auch wieder eine neue Gleichung.

4 (2) $x + 9 = 15$ (2a) $x + 9 + 4 = 15 + 4$

(2b) $x + 9 - 3 = 15 - 3$

Setzen wir die Zahl 6 ein, so erhalten wir die wahren Aussagen

(3) $6 + 9 = 15$ (3a) $6 + 9 + 4 = 15 + 4$ bzw.

(3b) $6 + 9 - 3 = 15 - 3$.

Also haben die Gleichungen (2), (2a) und (2b) dieselbe Lösung. Daher sind die Gleichungen (2a) und (2b) zur Gleichung (2) äquivalent.
Hat die gegebene Gleichung keine Lösung, so ist auch die durch Addition bzw. Subtraktion entstandene Gleichung nicht lösbar.

3 **SATZ: Addiert oder subtrahiert man in einer Gleichung, die eine Variable enthält, auf beiden Seiten dieselbe Zahl, so erhält man äquivalente Gleichungen.**

4

C

Wenn wir beide Seiten einer Gleichung ohne Variablen mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl dividieren, so erhalten wir jeweils eine neue Gleichung. Dabei ist die Division durch 0 natürlich ausgeschlossen, während die Multiplikation mit 0 stets die wahre Aussage $0 = 0$ ergibt.

5 (1) $10 - 2 = 8$ (1a) $4 \cdot (10 - 2) = 4 \cdot 8$

(1b) $(10 - 2) : 7 = 8 : 7$

Werden beide Seiten einer Gleichung, die eine wahre Aussage darstellt, mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl (außer Null) dividiert, so erhalten wir wieder eine wahre Aussage.

Entsprechend können wir die Seiten einer Gleichung, die eine Variable enthält, mit einer Zahl multiplizieren oder durch eine Zahl außer Null dividieren.

6 (2) $x + 9 = 15$ (2a) $4 \cdot (x + 9) = 4 \cdot 15$

(2b) $(x + 9) : 7 = 15 : 7$

Wenn wir nun die Zahl 6 einsetzen, so erhalten wir in jedem Fall eine wahre Aussage. Daher sind die Gleichungen (2a) und (2b) zur Gleichung (2) äquivalent.

Hat die Gleichung im vorgegebenen Grundbereich keine Lösung, so kann auch die durch Multiplikation oder Division beider Seiten entstandene Gleichung von keiner Zahl in diesem Grundbereich erfüllt werden.
Bemerkung: Bei der Division beider Seiten einer Gleichung müssen wir die Null selbstverständlich wieder ausschließen. Aber auch bei der Multiplikation muß im Falle von Gleichungen mit Variablen die Null ausgeschlossen werden. Multiplizieren wir nämlich beide Seiten einer solchen Gleichung mit Null, so erhalten wir die wahre Aussage $0 = 0$. In dieser Gleichung tritt aber die Variable nicht mehr auf. Diese Gleichung ist also der ursprünglichen nicht äquivalent; die Multiplikation mit Null ist keine äquivalente Umformung.

4 **SATZ: Multiplizieren wir in einer Gleichung, die eine Variable enthält, beide Seiten mit derselben von Null verschiedenen Zahl, so erhalten wir eine äquivalente Gleichung.**

Dividieren wir in einer Gleichung, die eine Variable enthält, beide Seiten durch dieselbe von Null verschiedene Zahl, so erhalten wir eine äquivalente Gleichung.

Die Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit der Variablen führt nicht immer auf eine äquivalente Gleichung.

7 Die Gleichung $\frac{0}{x} = 7$ hat keine Lösung; denn es gibt keine von 0 verschiedene Zahl x, die den Quotienten $\frac{0}{x}$ gleich 7 werden läßt. Die Zahl 0 dürfen wir für x nicht einsetzen, da dann die linke Seite der Gleichung nicht definiert ist.
Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit x führt zu

$$0 = 7 \cdot x.$$

Diese Gleichung hat die Lösung 0, also ist in diesem Falle die Multiplikation mit x keine äquivalente Umformung.

8 Dagegen liefert die Multiplikation mit der Variablen x auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{14}{x} = 7$ eine äquivalente Gleichung:
Die Gleichung $\frac{14}{x} = 7$ hat die Lösung 2.
Die Gleichung $14 = 7 \cdot x$ hat ebenfalls die Lösung 2.

9 Auch in der Gleichung $\frac{14}{x} = 0$ liefert die Multiplikation mit der Variablen x auf beiden Seiten der Gleichung eine zu ihr äquivalente Gleichung:
Die Gleichung $\frac{14}{x} = 0$ hat keine Lösung.
Die Gleichung $14 = 0 \cdot x$ hat ebenfalls keine Lösung.

Aufgabe c 7

ZUSAMMENFASSUNG

Man erhält zu einer Gleichung eine äquivalente Gleichung,

a) wenn man die Seiten der Gleichung vertauscht,
b) wenn man auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert,
c) wenn man beide Seiten der Gleichung mit derselben von Null verschiedenen Zahl multipliziert,
d) wenn man beide Seiten der Gleichung durch dieselbe von Null verschiedene Zahl dividiert.

5 Anwendung der Umformungsregeln

Wir wollen jetzt verschiedene Gleichungen auf die Form $x = a$ bringen, d. h., wir wollen x isolieren.

Im Anschluß an jede Aufgabe führen wir die **Probe** durch. Wir überprüfen dabei, ob die gegebene Gleichung mit einer Variablen in eine wahre Aussage übergeht, wenn wir für x die berechnete Zahl einsetzen. Ist dies nicht der Fall, liegt ein Rechenfehler vor. Bei der Probe werden beide Seiten getrennt ausgerechnet.

10

$x + 16 = 23$

Wir subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung 16:

$$x + 16 - 16 = 23 - 16$$
$$x = 7$$

Probe:

linke Seite: $7 + 16 = 23$

rechte Seite: 23

Vergleich: $23 = 23$, also $L = \{7\}$.

Die letzte Gleichung hat als Lösung die Zahl 7. Da die angegebene Umformung auf eine äquivalente Gleichung führt, ist 7 aber auch Lösung der ursprünglich angegebenen Gleichung. Die Probe bestätigt das. Also liegt kein Rechenfehler vor, und die Zahl 7 ist tatsächlich Lösung der gegebenen Gleichung:

$$L = \{7\}.$$

C

In Produkten wie $5 \cdot x$ und $\frac{3}{2} \cdot y$ nennt man die Zahlen 5 und $\frac{3}{2}$ **Koeffizienten** von x bzw. y. In solchen Produkten kann das Rechenzeichen „·" vor der Variablen entfallen. Man schreibt also kürzer $5x$, $\frac{3}{2}y$ usw.

11

a)
$$-\frac{11}{8}x = 2{,}5 \quad \Big| : \left(-\frac{11}{8}\right)$$
$$x = 2{,}5 : \left(-\frac{11}{8}\right)$$
$$x = -2{,}5 \cdot \frac{8}{11}$$
$$x = -\frac{20}{11}$$

Probe:

linke Seite:
$$\left(-\frac{11}{8}\right) \cdot \left(-\frac{20}{11}\right) = \frac{11 \cdot 20}{8 \cdot 11} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

rechte Seite: $2{,}5$

Vergleich: $\frac{5}{2} = 2{,}5$, also $L = \left\{-\frac{20}{11}\right\}$.

b)
$$4x + 19 = 31 \quad | -19$$
$$4x = 31 - 19$$
$$4x = 12 \quad | :4$$
$$x = \frac{12}{4}$$
$$x = 3$$

Probe:

linke Seite: $4 \cdot 3 + 19 = 12 + 19 = 31$

rechte Seite: 31

Vergleich: $31 = 31$, also $L = \{3\}$.

Wir können die Umformungen auch in anderer Reihenfolge vornehmen. Im Beispiel C 11b ergibt sich dann folgende Rechnung:

c)
$$4x + 19 = 31 \quad | :4$$
$$x + \frac{19}{4} = \frac{31}{4} \quad \Big| -\frac{19}{4}$$
$$x = \frac{31}{4} - \frac{19}{4}$$
$$x = \frac{12}{4}$$
$$x = 3$$

Der erste Lösungsweg ist in diesem Beispiel jedoch rechnerisch rationeller.

12

$$\begin{aligned} 6{,}2 &= 2{,}2 - 8x && \mid -2{,}2 \\ 6{,}2 - 2{,}2 &= -8x \\ 4 &= -8x \\ -8x &= 4 && \mid :(-8) \\ x &= -\frac{4}{8} \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Probe:
linke Seite: 6,2
rechte Seite:

$$2{,}2 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2{,}2 + \frac{8}{2} = 2{,}2 + 4 = 6{,}2$$

Vergleich: 6,2 = 6,2, also $L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

6

Summanden, die sich nur durch ihre Koeffizienten unterscheiden, können auf Grund des Distributivgesetzes zusammengefaßt werden.

13

$$5x + 7x = (5 + 7)x = 12x.$$

Wir brauchen also nur die Koeffizienten zu addieren.

Auf diese Weise fassen wir auch entsprechende Summanden in Gleichungen zusammen.

14

$$\begin{aligned} 5x + 2x + 8 - 4x &= 9 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 3x + 8 &= 9 && \mid -8 \\ 3x &= 1 && \mid :3 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Probe:

linke Seite: $5 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 8 - 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5 + 2 - 4}{3} + 8 = \frac{3}{3} + 8 = 9$

rechte Seite: 9

Vergleich: 9 = 9, also $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Die Variable kann auch auf beiden Seiten einer gegebenen Gleichung vorkommen. In diesem Fall ordnen wir zunächst, d. h., wir formen die Gleichung so um, daß die Variable nur auf einer Seite der Gleichung vorkommt.

15

$5x - 2 = 6 + 3x$

Wir subtrahieren auf beiden Seiten $3x$:

$$\begin{aligned} 5x - 2 - 3x &= 6 + 3x - 3x \\ 2x - 2 &= 6 && \mid +2 \\ 2x &= 8 && \mid :2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Probe:
linke Seite: $5 \cdot 4 - 2 = 18$
rechte Seite: $6 + 3 \cdot 4 = 18$
Vergleich: 18 = 18, also $L = \{4\}$.

Wir haben also die Lösung der gegebenen Gleichung gefunden, d. h., die Subtraktion von $3x$ führte auf eine äquivalente Gleichung. Denn unabhängig davon,

welche Zahl wir für x einsetzen, bedeutet die beiderseitige Subtraktion von $3x$, daß auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl subtrahiert wird. Nach Satz C 4 erhalten wir dadurch eine äquivalente Gleichung.

1 *Die Gleichung im Beispiel C 15 können wir auch auf nebenstehende Art lösen:*

$$
\begin{array}{rcll}
5x - 2 &=& 6 + 3x & \quad | - 5x \\
-2 &=& 6 + 3x - 5x & \\
-2 &=& 6 - 2x & \quad | - 6 \\
-8 &=& -2x & \quad | : (-2) \\
4 &=& x & \\
x &=& 4 &
\end{array}
$$

Vergleiche diesen Lösungsweg mit dem im Beispiel C 15! Überlege, welcher Lösungsweg rationeller ist!

Bei den in den Sätzen C 2 bis C 4 aufgestellten Regeln brauchen wir weder zwischen Addition und Subtraktion noch zwischen Multiplikation und Division zu unterscheiden. Statt die rationale Zahl a zu subtrahieren, können wir nämlich die Zahl $-a$ addieren. Statt durch die rationale Zahl a, $(a \neq 0)$, zu dividieren, können wir auch mit $\frac{1}{a}$ multiplizieren.

Durch äquivalente Umformungen können wir auf Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$ kommen.

16

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{80}{x} - \frac{16}{3} &=& 8 & \quad \left| + \frac{16}{3} \right. \\
\frac{80}{x} &=& 8 + \frac{16}{3} & \\
\frac{80}{x} &=& \frac{40}{3} & \quad | \cdot x \\
80 &=& \frac{40}{3} \cdot x & \quad \left| : \frac{40}{3} \right. \\
80 \cdot \frac{3}{40} &=& x & \\
x &=& 6 &
\end{array}
$$

Probe:

linke Seite:

$$\frac{80}{6} - \frac{16}{3} = \frac{80}{6} - \frac{32}{6} = \frac{80 - 32}{6} =$$
$$= \frac{48}{6} = 8$$

rechte Seite: 8

Vergleich: $8 = 8$, also

$L = \{6\}$.

Aufgaben c 8 bis 22

Übungen im Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

7 Lösbarkeit von Gleichungen

Die meisten der bisher von uns betrachteten Gleichungen ließen sich durch äquivalente Umformungen auf die Form $x = a$ bringen. Die rationale Zahl a ist dann die **einzige** Lösung einer solchen Gleichung.
Es gibt aber auch Gleichungen, die alle rationalen Zahlen als Lösungen besitzen.

17

$$
\begin{array}{rcll}
2x - 3 + x - 1 &=& -4 + 5x - 2x & \quad | \text{ zusammenfassen} \\
3x - 4 &=& 3x - 4 &
\end{array}
$$

Ganz gleich, welche rationale Zahl wir für x in diese Gleichung einsetzen, stets erhalten wir eine wahre Aussage. Die Lösungsmenge L dieser Gleichung enthält also alle rationalen Zahlen: $L = R$. Wir können die letzte Gleichung noch weiter äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 3x - 4 \qquad &|\; -3x \\ -4 &= -4 \qquad &|\; +4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Jede der hier betrachteten Gleichungen, die sich durch äquivalente Umformungen auf die Form $0 = 0$ bringen läßt, wird von allen Zahlen des jeweiligen Grundbereichs erfüllt. Auch solche Gleichungen bezeichnet man als **lösbar.**
Schließlich gibt es auch Gleichungen, die von keiner rationalen Zahl erfüllt werden. Solche Gleichungen nennt man **nicht lösbar.**

18
$$\begin{aligned} 5 + 7x - 8 &= 4x + 6 + 3x - 1{,}5 \quad | \text{ zusammenfassen} \\ 7x - 3 &= 7x + 4{,}5 \end{aligned}$$

Ganz gleich, welche rationale Zahl wir für x in die letzte Gleichung einsetzen, stets erhalten wir eine falsche Aussage. Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist also die leere Menge $\emptyset$.
Wir können noch weiter äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} 7x - 3 &= 7x + 4{,}5 \qquad | -7x + 3 \\ 0 &= 7{,}5 \end{aligned}$$

Jede Gleichung, die sich durch äquivalente Umformungen auf eine solche falsche Aussage bringen läßt, hat keine Lösung.

8 Verschiedene Grundbereiche

Die Lösbarkeit einer Gleichung hängt nicht nur von der Gleichung selbst ab. Die Lösbarkeit hängt auch von dem Zahlenbereich ab, aus dem für die jeweilige Variable eingesetzt werden kann.

19 Welche natürliche Zahl erfüllt die Gleichung $3x = 4$?
Ergebnis:
Es gibt keine natürliche Zahl, die mit 3 multipliziert 4 ergibt.
Wir sagen:
Die Gleichung ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Im Bereich der rationalen Zahlen dagegen hat die Gleichung die Lösung $\frac{4}{3}$.

Ermittle **a)** alle natürlichen Zahlen,
b) alle gebrochenen Zahlen,
c) alle rationalen Zahlen, die die Gleichung $5x + 7 = 3$ erfüllen!

20 *Ergebnis:*
Es gibt keine natürliche und auch keine gebrochene Zahl, die die Gleichung erfüllt; denn es gilt $7 > 3$, und in beiden Fällen ist die Zahl $5x$ nichtnegativ.
Im Bereich der rationalen Zahlen hat die Gleichung die Zahl $-\frac{4}{5}$ als Lösung.

(2) *Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!*

	Lösungen aus dem Zahlenbereich der			
	natürlichen Zahlen	gebrochenen Zahlen	ganzen Zahlen	rationalen Zahlen
$6 + x = 4$	n. l.	n. l.	-2	-2
$3 + x = 9$				
$2x = 5$				
$4x = 28$				
$-\frac{7}{5}x = \frac{7}{2}$				

Aufgabe c 23

9 Ungleichungen

Wie bei den Gleichungen gibt es auch unter den Ungleichungen mit Variablen lösbare und unlösbare. Auch hier hängt die Lösbarkeit sowohl von der Ungleichung selbst als auch von dem Zahlenbereich, aus dem für die Variable eingesetzt werden darf, ab.

21 **a)** Löse die Ungleichung $x + 3 < 9$ im Bereich der natürlichen Zahlen!
Durch Einsetzen für x finden wir:

x	0	1	2	3	4	5	6
$x + 3$	3	4	5	6	7	8	9

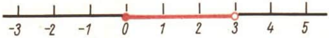
Die Lösungsmenge L (Bild C 1) der gegebenen Ungleichung ist also
$L = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

C 1

b) Löse die Ungleichung $x + 9 < 7$ im Bereich der natürlichen Zahlen!
Diese Ungleichung hat keine Lösung; denn die Summe von 9 und einer beliebigen natürlichen Zahl ist stets **größer** als 7. Es gilt also $L = \emptyset$.

c) Löse die Ungleichung aus **b)** im Bereich der ganzen Zahlen! Die größte ganze Zahl x, für die die Ungleichung erfüllt ist, ist die Zahl -3. Also sind -3 und alle kleineren ganzen Zahlen Lösungen:
$L = \{\ldots, -6, -5, -4, -3\}$.

d) Welche gebrochenen Zahlen sind Lösungen der Ungleichung $3x < 9$?
Lösungen sind alle gebrochene Zahlen x, für die $x < 3$ gilt. Wir können uns die Lösungsmenge L auf der Zahlengeraden veranschaulichen (Bild C 2).



C 2

22 Löse die Ungleichung $5x - 6 < 10$ im Bereich der rationalen Zahlen!
Die Ungleichung wird sicher von allen negativen Zahlen und der Zahl 0 erfüllt; denn für diese Zahlen ist die linke Seite der Ungleichung negativ, und eine negative Zahl ist stets kleiner als 10. Um die positiven Lösungen der gegebenen Ungleichung zu finden, überlegen wir uns, daß für die Zahl $\frac{16}{5}$ die linke Seite gleich $5 \cdot \frac{16}{5} - 6 = 10$ ist. Also sind alle positiven Zahlen, die kleiner als $\frac{16}{5}$ sind, ebenfalls Lösungen. Insgesamt sind also alle Zahlen x mit $x < \frac{16}{5}$ Lösungen der gegebenen Ungleichung.

Aufgaben c 24 bis 26

10 Gleichungen mit Beträgen

Wir untersuchen jetzt Gleichungen, in denen die Variable zwischen Betragsstrichen auftritt. Da immer zwei rationale Zahlen dieselbe positive Zahl als Betrag haben, werden solche Gleichungen im allgemeinen zwei Lösungen haben.

C

23 **a)** $|x| = 3$

Um diese Gleichung zu lösen, muß man die Zahlen finden, die den Betrag 3 haben. Das sind die Zahlen 3 und -3. Der gegebenen Gleichung sind also die beiden folgenden Gleichungen äquivalent:

$x = 3$ und $-x = 3$, d. h., $x = -3$. Für $|x| = 3$ ist also $L = \{3; -3\}$

b) $\left|x - \frac{3}{2}\right| = 0{,}7$

Wir erhalten die Gleichungen

$x - \frac{3}{2} = 0{,}7$ und $-\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0{,}7$.

$$x - 1{,}5 = 0{,}7 \quad | + 1{,}5$$
$$x = 0{,}7 + 1{,}5$$
$$x = 2{,}2$$

$$x - 1{,}5 = -0{,}7 \quad | + 1{,}5$$
$$x = -0{,}7 + 1{,}5$$
$$x = 0{,}8$$

Probe für $x = 2{,}2$:

linke Seite: $\left|2{,}2 - \frac{3}{2}\right| = |0{,}7| = 0{,}7$

rechte Seite: 0,7

Vergleich: $0{,}7 = 0{,}7$

Probe für $x = 0{,}8$:

linke Seite: $\left|0{,}8 - \frac{3}{2}\right| = |-0{,}7| = 0{,}7$

rechte Seite: 0,7

Vergleich: $0{,}7 = 0{,}7$

Also $L = \{2{,}2;\ 0{,}8\}$.

c) $|x| + \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \quad \left| -\frac{3}{4}\right.$

$$|x| = \frac{5}{6} - \frac{3}{4}$$
$$|x| = \frac{1}{12}$$
$$x = \frac{1}{12} \quad \text{und} \quad x = -\frac{1}{12}$$

Probe für $x = \frac{1}{12}$ **:**

linke Seite: $\left|\frac{1}{12}\right| + \frac{3}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12}$

rechte Seite: $\frac{5}{6}$

Vergleich: $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Probe für $x = -\frac{1}{12}$ **:**

linke Seite: $\left|-\frac{1}{12}\right| + \frac{3}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12}$

rechte Seite: $\frac{5}{6}$

Vergleich: $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Also $L = \left\{\frac{1}{12}; -\frac{1}{12}\right\}$.

d) $8 - |x| = 12 \qquad | \; + |x| - 12$

$-4 \quad = |x|$

Diese Gleichung hat keine Lösung, da der Betrag einer rationalen Zahl stets positiv oder mindestens gleich 0 ist.

Aufgaben c 27 bis 29

C

11 Eingekleidete Aufgaben

Häufig ergibt sich der Zusammenhang zwischen einer unbekannten Zahl und anderen bekannten Zahlen aus einem praktischen Sachverhalt. Um solche Aufgaben zu lösen, müssen wir die im Text gegebenen Beziehungen zwischen den Zahlen in Form einer Gleichung bzw. Ungleichung aufschreiben. Dabei bezeichnen wir die unbekannte Zahl durch eine Variable.
Treten die Zahlen im Zusammenhang mit Maßeinheiten auf, handelt es sich also um Größen, so müssen wir darauf achten, daß alle gleichartigen Größenangaben auch dieselbe Maßeinheit besitzen. Ist das nicht der Fall, so müssen Größenangaben umgerechnet werden. Die Probe muß stets an Hand des Aufgabentextes durchgeführt werden. Das Einsetzen der gefundenen Zahl in die Gleichung genügt nicht als Probe; denn es könnte bei der Aufstellung der Gleichung bereits ein Fehler unterlaufen sein.

24 Drei Traktoristen pflügen an einem Tag 8,4 ha. Die Leistung des ersten war um 80 a größer als die des zweiten. Der zweite pflügte 50 a mehr als der dritte. Wieviel Hektar pflügte jeder?
Wir rechnen zunächst die Maßangabe 80 a und 50 a in Hektar um. Dann ergibt sich aus dem Text, daß die gepflügte Ackerfläche des ersten Traktoristen um 0,8 ha größer als die des zweiten und die des zweiten um 0,5 ha größer als die des dritten ist.
Nun bezeichnen wir die Größe der Ackerfläche, die der dritte Traktorist gepflügt hat, mit x ha.
Die folgende Tabelle veranschaulicht noch einmal das Arbeitsergebnis:

	erster Traktorist	zweiter Traktorist	dritter Traktorist	gesamt
Ackerfläche in ha	$x + 0{,}5 + 0{,}8$	$x + 0{,}5$	x	8,4

Da die drei Traktoristen zusammen 8,4 ha pflügten, erhalten wir folgende Gleichung:

Ansatz:

$$\begin{aligned} x + 0{,}5 + 0{,}8 + x + 0{,}5 + x &= 8{,}4 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 3x + 1{,}8 &= 8{,}4 && \mid -1{,}8 \\ 3x &= 6{,}6 && \mid :3 \\ x &= 2{,}2 \end{aligned}$$

Wir setzen dieses Ergebnis in die Tabelle ein und erhalten:

	erster Traktorist	zweiter Traktorist	dritter Traktorist	gesamt
Ackerfläche in ha	3,5	2,7	2,2	

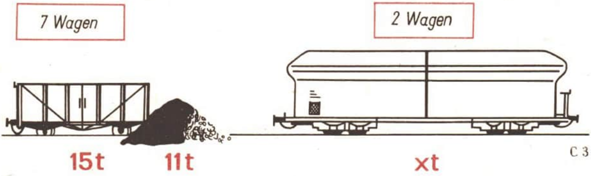
Durch Addition erhalten wir die in der Aufgabe angegebene Gesamtfläche von 8,4 ha. Außerdem pflügte der erste Traktorist auch wirklich 0,8 ha mehr als der zweite, denn $2{,}7 + 0{,}8 = 3{,}5$; der zweite pflügte 0,5 ha mehr als der dritte, denn $2{,}7 = 2{,}2 + 0{,}5$.

Antwortsatz: Der erste Traktorist pflügte 3,5 ha, der zweite 2,7 ha und der dritte 2,2 ha.

25 Die Deutsche Reichsbahn setzt neben modernen Großraumwagen auch noch Güterwagen alter Bauart mit weniger Laderaum ein. Die offenen Güterwagen alter Bauart können im allgemeinen mit 15 t beladen werden. Wir wollen ermitteln, wieviel Tonnen Last ein moderner Großraumwagen trägt.

Es sei bekannt, daß mit sieben Wagen alter Bauart 11 t weniger transportiert werden können als mit zwei Großraumwagen.

Lösung: Die Ladung zweier Großraumwagen (Ladung: $2x$ t) ist gleich der Ladung von sieben Wagen alter Bauart (Ladung $7 \cdot 15$ t) vermehrt um weitere 11 t (Bild C 3).



C 3

Ansatz:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x &= 7 \cdot 15 + 11 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 2 \cdot x &= 105 + 11 \\ 2x &= 116 && \mid :2 \\ x &= 58 \end{aligned}$$

Probe: Mit sieben Wagen alter Bauart werden $7 \cdot 15\ \text{t} = 105\ \text{t}$ befördert, mit zwei Großraumwagen $2 \cdot 58\ \text{t} = 116\ \text{t}$. Tatsächlich beträgt also der Unterschied der Gesamtladungen 11 t.

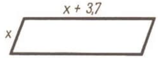
Antwortsatz: Ein Großraumwagen kann mit 58 t beladen werden.

26 Eine Seite eines Parallelogramms ist 3,7 cm länger als eine der anderen Seiten. Der Umfang dieses Parallelogramms beträgt 27,4 cm. Wie lang sind seine Seiten?

Lösung: Wir bezeichnen die Länge der kürzeren Seite mit x cm. Dann hat die andere Seite eine Länge von $(x + 3{,}7)$ cm (Bild C 4).

Da zwei gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms gleich lang sind, gilt

$$\begin{aligned} 2x + 2(x + 3{,}7) &= 27{,}4 \\ 2x + 2x + 7{,}4 &= 27{,}4 \\ 4x + 7{,}4 &= 27{,}4 \quad \mid -7{,}4 \\ 4x &= 20 \quad \mid :4 \\ x &= 5 \end{aligned}$$



C 4

Probe: Wenn die kürzere Seite des Parallelogramms 5 cm lang ist, dann hat die längere Seite des Parallelogramms eine Länge von 8,7 cm. Für den Umfang ergibt sich dann tatsächlich $(2 \cdot 5 + 2 \cdot 8{,}7)$ cm $= 27{,}4$ cm.

Antwortsatz: Die Seiten des Parallelogramms sind 5 cm und 8,7 cm lang.

Aufgaben c 30 bis 66

C

D Quadratzahl und Quadratwurzel

In einem laufenden Motor bewegen sich die Kolben auf und ab, angetrieben von den wechselnden Explosionen des Kraftstoff-Luft-Gemisches in den Zylindern. Die Kolben durchlaufen dabei einen Hubraum, der charakteristisch für die Größe des Motors ist. Ein Pkw vom Typ „Trabant 601" hat z. B. einen Hubraum von 594,5 cm^3, ein Lkw vom Typ „IFA W 50" einen von 6560 cm^3. Man berechnet den Hubraum mit Hilfe einer Formel, die, wie viele andere in Physik und Mathematik, eine Variable in der zweiten Potenz enthält. Wir werden uns in diesem Kapitel mit dem Berechnen der zweiten Potenz, mit dem sogenannten **Quadrieren,** näher vertraut machen.

Quadrieren

1 Zur Wiederholung

Das Produkt einer Zahl a mit sich selbst heißt das **Quadrat** von a. Für das Produkt $a \cdot a$ schreiben wir a^2 und sagen, daß die Zahl a **quadriert** wird. Die Quadrate natürlicher Zahlen heißen **Quadratzahlen.**

1 Die natürlichen Zahlen 1, 4, 9, 16, 25 usw. sind Quadratzahlen.

Die Verwendung dieser Begriffe erklärt sich daraus, daß der Inhalt einer Quadratfläche mit der Seitenlänge a durch a^2 angegeben wird.

Jedem Paar natürlicher Zahlen ist durch die Multiplikation eine natürliche Zahl als Produkt zugeordnet. Das Quadrat jeder beliebigen natürlichen Zahl a ist daher eine natürliche Zahl. Also gilt:

1 **SATZ: Zu jeder natürlichen Zahl a gibt es genau eine natürliche Zahl b mit $b = a^2$.**

Das Quadrat einer ganzen Zahl a ist eine ganze Zahl, denn jedem Paar ganzer Zahlen ist durch die Multiplikation eine ganze Zahl als Produkt zugeordnet. Da aber das Produkt zweier negativer ganzer Zahlen stets positiv ist, erhalten wir beim Quadrieren ganzer Zahlen immer nichtnegative ganze Zahlen. Wir finden also:

D

2 **SATZ: Zu jeder ganzen Zahl a gibt es genau eine ganze Zahl $b = a^2$ mit $b \geqq 0$.**

2 **a)** Das Quadrat der Zahl $a = 12$ ist die Zahl $b = 144$.
b) Das Quadrat der Zahl $a = -12$ ist ebenfalls die Zahl $b = 144$.

Jede rationale Zahl a läßt sich in der Form $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ darstellen, wobei p und q teilerfremde ganze Zahlen sind. Das Quadrat der rationalen Zahl $a = \frac{p}{q}$ ergibt sich zu

$$a^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p^2}{q^2}.$$

Sowohl der Zähler als auch der Nenner der Zahl $\frac{p^2}{q^2}$ ist nichtnegativ. Folglich ist auch die Zahl $\frac{p^2}{q^2}$ eine nichtnegative Zahl. Demnach gilt:

3 **SATZ: Zu jeder rationalen Zahl a gibt es genau eine rationale Zahl $b = a^2$ mit $b \geqq 0$.**

1 *Quadriere die folgenden Zahlen! Ordne dabei jeder dieser Zahlen ihr Quadrat zu!*

$0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; 1; -1; \frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; 2; -2; 2{,}5; -2{,}5; 3; -3$

Wenn wir Quadrate berechnen, so bestimmen wir erst einen Näherungswert durch Überschlag. Hierfür ist die folgende Tabelle über die Stellenzahl nützlich.

Ist a	so ist a^2	Beispiele
einstellig	ein- oder zweistellig	$2^2 = 4$; $9^2 = 81$
zweistellig	drei- oder vierstellig	$12^2 = 144$; $90^2 = 8\,100$
dreistellig	fünf- oder sechsstellig	$105^2 = 11\,025$; $902^2 = 813\,604$
⋮	⋮	
n-stellig	$(2n - 1)$- oder $2n$-stellig	

(2) *Ermittle die Quadrate der folgenden Zahlen!*

a) *20* **b)** *2* **c)** *0,2* **d)** *0,02* **e)** *0,002*

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Stellenzahlen der Quadrate rationaler Zahlen a mit

$$0 < a < 1.$$

a	a^2
$0{,}1 \leqq a < 1$	$0{,}01 \leqq a^2 < 1$
$0{,}01 \leqq a < 0{,}1$	$0{,}000\,1 \leqq a^2 < 0{,}01$
$0{,}001 \leqq a < 0{,}01$	$0{,}000\,001 \leqq a^2 < 0{,}000\,1$
⋮	⋮

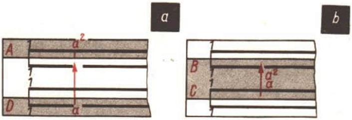
Aufgaben d 1 bis 4

2 Berechnung von Quadraten mit Hilfe des Rechenstabs bzw. der Quadrattafel

Für die Berechnung der Quadrate rationaler Zahlen genügt bei vielen Aufgaben Rechenstabgenauigkeit.
Für die Berechnung von Quadraten gegebener Zahlen mit Hilfe des Rechenstabs wird die Skale A oder die Skale B benötigt (Bild A 3). Diese Skalen bestehen aus zwei gleich langen Abschnitten: der Teilung von 1 bis 10 und der Teilung von 10 bis 100. Die Skalen A und B sind kongruente ungleichmäßig geteilte Skalen. Das Quadrat einer Zahl a wird mit dem Rechenstab folgendermaßen berechnet:

1. Durch Überschlag wird ein Näherungswert der Quadratzahl ermittelt.
2. Auf der Skale D wird die Zahl a eingestellt.

3. Mit dem Ablesestrich des Läufers wird auf der Skale A die Ziffernfolge der Zahl a^2 abgelesen (Bild D 1a). (Wir können die Zahl a auch auf der Skale C einstellen und die Ziffernfolge von a^2 auf der Skale B ablesen; Bild D 1b).



D 1

3 Das Quadrat der Zahl $a = 62{,}5$ ist mit Hilfe des Rechenstabs zu ermitteln.

1. Überschlag: $a^2 \approx 60^2 = 3600$.
2. Wir stellen den Ablesestrich über D 6-2-5.
3. Wir lesen unter dem Ablesestrich auf der Skale A die Ziffernfolge 3-9-1 ab.

Ergebnis: Das Quadrat der Zahl 62,5 beträgt etwa 3910.

Das Buch *Tabellen und Formeln* enthält auf den Seiten 10 und 11 eine Quadrattafel. Aus dieser Tafel können die Quadrate der Zahlen 1,00; 1,01; ... ; 9,99 abgelesen werden. Die meisten dieser Quadrate sind Näherungswerte. Zahlen mit mehr als drei wesentlichen Ziffern werden vor dem Quadrieren mit der Zahlentafel auf drei wesentliche Ziffern gerundet.
Mit der Quadrattafel werden die Quadrate gegebener Zahlen folgendermaßen ermittelt. Wir suchen die Zeile in der Tabelle auf, die durch die beiden ersten wesentlichen Ziffern einer gegebenen Zahl a bestimmt wird. Dann suchen wir die Spalte in der Tabelle, die mit der dritten wesentlichen Ziffer der Zahl a überschrieben ist. Die Ziffernfolge von a^2 finden wir im „Schnittpunkt" der aufgesuchten Zeile und Spalte.

4 Das Quadrat der Zahl $a = 43{,}23$ soll mit Hilfe der Quadrattafel berechnet werden (↗ Tabellen und Formeln, Seite 10).

1. Wir runden die Zahl a auf 43,2.
   Überschlag: $a^2 \approx 40^2 = 1600$.
2. Wir suchen in der Tabelle die Zeile 4,3 auf.
3. Wir suchen in der Tabelle die Spalte mit der Überschrift 2 auf.
4. Im „Schnittpunkt" der aufgesuchten Zeile und Spalte finden wir die Ziffernfolge 1-8-6-6.

Ergebnis: Das Quadrat der Zahl 43,23 beträgt etwa 1866.

Aufgaben d 5 bis 14

Die Quadratwurzel

3 Das Wurzelziehen

Beim Quadrieren ist das Produkt einer Zahl a mit sich selbst zu ermitteln. Umgekehrt kann die Aufgabe gestellt werden, eine Zahl a in ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren zu zerlegen.

5 Eine Quadratfläche hat den Inhalt $A = 16\ \text{cm}^2$. Wie groß ist die Seitenlänge dieser Fläche? Wir finden sie, indem wir die Zahl 16 in das Produkt $4 \cdot 4$ zerlegen. Die Seitenlänge beträgt also 4 cm.

Die Zahl 4 im Beispiel D 5 heißt die **Quadratwurzel** aus 16.

Die Rechenoperation, bei der eine Zahl in ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren zu zerlegen ist, heißt **Quadratwurzelziehen,** kurz **Wurzelziehen.** Diese Operation kehrt die Operation des Quadrierens um.

3 *Ziehe aus folgenden Zahlen die Quadratwurzel!*

a) *1* **b)** *4* **c)** *9* **d)** *16* **e)** *25* **f)** *36*

Nenne weitere Zahlen, aus denen die Quadratwurzel gezogen werden kann!

4 **DEFINITION: Quadratwurzel aus einer nichtnegativen Zahl a heißt diejenige nichtnegative Zahl b, deren Quadrat gleich a ist.**

Neben der Quadratwurzel b aus einer Zahl a gibt es eine weitere Zahl, deren Quadrat gleich a ist. Diese Zahl ist die zu b entgegengesetzte Zahl $-b$.

6 Die Quadratwurzel aus der Zahl 121 ist die Zahl 11. Die zu ihr entgegengesetzte Zahl ist -11. Diese Zahl ist keine Quadratwurzel aus 121, obwohl ihr Quadrat gleich 121 ist.

4 Umkehrung des Quadrierens natürlicher Zahlen

4 *Zerlege die Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 in alle möglichen Produkte aus zwei Faktoren natürlicher Zahlen!*

Der Auftrag D 4 führt zu der Vermutung: Im Bereich der natürlichen Zahlen ist die Umkehrung des Quadrierens (das Quadratwurzelziehen) nicht uneingeschränkt ausführbar.

5 **SATZ: Es gibt natürliche Zahlen, die im Bereich der natürlichen Zahlen keine Quadratwurzel besitzen.**

Beweis: Die Zahl 2 läßt sich im Bereich der natürlichen Zahlen nur in das Produkt aus den Zahlen 1 und 2 zerlegen. Folgedessen besitzt die Zahl 2 im Bereich der natürlichen Zahlen keine Quadratwurzel. Also gibt es (wenigstens) eine natürliche Zahl, die im Bereich der natürlichen Zahlen keine Quadratwurzel besitzt.

5 *Zerlege die Zahl 33 in alle möglichen Produkte natürlicher Zahlen! Zeige, daß die Zahl 33 keine Quadratwurzel im Bereich der natürlichen Zahlen besitzt!*

Aufgabe d 15

5 Umkehrung des Quadrierens nichtnegativer rationaler Zahlen

Das Quadrat der rationalen Zahl $a = \frac{2}{7}$ ist die rationale Zahl $b = \frac{4}{49}$. Umgekehrt kann die Aufgabe gestellt werden, die Quadratwurzel aus der rationalen Zahl $b = \frac{4}{49}$ zu ziehen. Dann ist die Zahl b in ein Produkt aus zwei gleichen nichtnegativen Faktoren zu zerlegen. Wegen $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$ ist die Zahl $a = \frac{2}{7}$ Quadratwurzel aus $\frac{4}{49}$.

7 Es soll die Quadratwurzel aus der rationalen Zahl 4,84 gezogen werden.
Wir wandeln 4,84 um:

$$4{,}84 = \frac{484}{100} = \frac{121}{25} = \frac{11}{5} \cdot \frac{11}{5}.$$

Die rationale Zahl $\frac{11}{5}$ ist Quadratwurzel aus 4,84.

Läßt sich eine rationale Zahl a auf die Form

$$\frac{p^2}{q^2} \; (p \in N;\; q \in N,\; q \neq 0;\; p \text{ und } q \text{ teilerfremd})$$

bringen, so ist die Zahl $\frac{p}{q}$ die Quadratwurzel aus a. Die Mehrzahl der rationalen Zahlen läßt sich jedoch nicht auf die Form $\frac{p^2}{q^2}$ bringen.

6 *Stelle die rationalen Zahlen*

a) *2,* **b)** *0,5,* **c)** *1,69,* **d)** *7 und* **e)** *33 durch Brüche $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ dar! Versuche aus ihnen die Quadratwurzel zu ziehen!*

Der Auftrag D 6 führt zu der Vermutung, daß auch im Bereich der nichtnegativen rationalen Zahlen das Quadratwurzelziehen nicht uneingeschränkt möglich ist. Wir drücken diese Vermutung durch den folgenden Satz aus, den wir jedoch in der 7. Klasse nicht beweisen können:

6 **SATZ: Es gibt nichtnegative rationale Zahlen, die im Bereich der rationalen Zahlen keine Quadratwurzel besitzen.**

Wir werden später sehen, daß es einen Zahlenbereich gibt, in dem jede nichtnegative rationale Zahl genau eine Quadratwurzel besitzt.

Aufgabe d 16

D

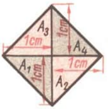
6 Quadratwurzeln, die keine rationalen Zahlen sind

Als Operationszeichen für das Quadratwurzelziehen verwenden wir das Zeichen „$\sqrt{}$“. Es wird über die Zahl a gesetzt, aus der die Quadratwurzel zu ziehen ist. Für $\sqrt{a}$ lesen wir: Quadratwurzel aus a. Die Zahl a, die unter dem Wurzelzeichen steht, heißt **Radikand**.

8 Es soll die Quadratwurzel aus 2 gezogen werden. Wir schreiben:
$\sqrt{2}$. Das bedeutet:
Gesucht ist eine nichtnegative Zahl x, für die die Beziehung $x^2 = 2$ gilt.
Unsere Überlegungen im Auftrag D 6 führten zu der Vermutung, daß es eine solche Zahl x im Bereich der rationalen Zahlen nicht gibt. Es gibt aber einen umfassenderen Zahlenbereich, in dem diese Zahl x existiert.
Das folgende Beispiel aus der Geometrie zeigt uns, wie notwendig dieser umfassendere Zahlenbereich ist. Uns sei der Flächeninhalt eines Quadrats bekannt, und wir suchen die Länge der Quadratseite dieses Quadrats.
Im Bild D 2 wurden vier gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke gezeichnet, deren Katheten die Länge 1 cm besitzen. Sie sind zu einem Quadrat angeordnet.

7 *Berechne die Basiswinkel und den Flächeninhalt eines jeden Dreiecks im Bild D 2!*

D 2

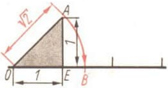


$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2\,cm^2$

Das Quadrat hat den Flächeninhalt 2 cm². Die Maßzahl 2 für den Flächeninhalt des Quadrats erhalten wir, wenn wir das Quadrat der Maßzahl x der Seitenlänge des Quadrats bilden: $x^2 = 2$. Also muß für die Maßzahl x die Beziehung $x = \sqrt{2}$ gelten. Die Messung einer Seite eines Quadrats mit dem Inhalt von 2 cm² ergibt demnach einen Näherungswert für $x = \sqrt{2}$. Der Näherungswert ist um so genauer, je genauer die Messung erfolgen kann.

8 *Ermittle durch Messung einen Näherungswert für die Quadratwurzel aus 8! (Anleitung: Konstruiere ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Kathetenlänge von 2 cm!)*

D 3



Auch die Zahl $\sqrt{2}$, die keine rationale Zahl ist, ist einem Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet. Wir überzeugen uns an Hand von Bild D 3 davon, daß dies tatsächlich der Fall ist. Der Punkt 0 sei Nullpunkt, der Punkt E Einheitspunkt der Zahlengeraden. Wir ordnen also dem Punkt 0 die Zahl Null und dem Punkt E die Zahl Eins zu. Über der Strecke $\overline{0E}$ konstruieren wir ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck $0EA$ mit der Strecke $\overline{0E}$ als Kathete. Die Länge der Strecke $\overline{0A}$ beträgt dann $\sqrt{2}$ Längeneinheiten. Die Strecke $\overline{0A}$ tragen wir von 0 aus auf dem positiven Teil der Zahlengeraden ab und erhalten den Punkt B. Wegen $\overline{0A} \cong \overline{0B}$ beträgt die Länge der Strecke $\overline{0B}$ ebenfalls $\sqrt{2}$ Längeneinheiten. Dem Punkt B ist also keine rationale Zahl zugeordnet, denn sonst wäre die Zahl $\sqrt{2}$ wegen der Eindeutigkeit der Streckenabtragung eine rationale Zahl. Auf der Zahlengeraden gibt es also Punkte, denen keine rationale Zahl zugeordnet werden kann.
Um diese „Lücken“ auf der Zahlengeraden zu schließen, wird ein Zahlenbereich benötigt, der außer den rationalen Zahlen auch noch Zahlen enthält, die keine rationalen Zahlen sind.

Aufgaben d 17 und 18

7 Berechnung von Näherungswerten nichtrationaler Quadratwurzeln

Die Zahl $a = \sqrt{2}$ ist eine nichtrationale Zahl. Wir haben gesehen, daß wir einen Näherungswert für diese Zahl durch Messung einer geeigneten Strecke finden können. Die Genauigkeit für einen solchen Näherungswert, der durch Messung gefunden wird, ist nicht sehr groß. Wir benötigen ein Verfahren, das Näherungswerte von nichtrationalen Quadratwurzeln mit einer besseren Genauigkeit liefert.

9 Wir berechnen die Zahl $x = \sqrt{2}$ durch folgendes Verfahren:
1. Schritt: Wegen $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$ gilt $1 < x < 2$.
2. Schritt: Wir quadrieren die Zahlen 1,1 bis 1,9.

n	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
n^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61

Wegen $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$ gilt $1{,}4 < x < 1{,}5$.
3. Schritt: Wir quadrieren die Zahlen 1,41 bis 1,49.

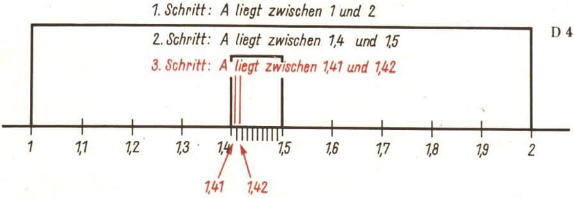
n	1,41	1,42
n^2	1,988 1	2,016 4

Weitere Quadrate brauchen hier nicht errechnet zu werden, da $n^2 = 2$ schon mit $1{,}42^2 = 2{,}016\,4$ überschritten wurde.
Wegen $1{,}41^2 = 1{,}9881$ und $1{,}42^2 = 2{,}0164$ gilt $1{,}41 < x < 1{,}42$.
Fährt man in dieser Weise fort, kann man für die nichtrationale Zahl $\sqrt{2}$ mit beliebiger Genauigkeit rationale Zahlen als Näherungswerte errechnen.
Die drei Schritte liefern uns die Näherungswerte

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1{,}4; \quad a_3 = 1{,}41.$$

Ist ein Näherungswert einer Quadratwurzel gegeben, so kann auf der Zahlengeraden die Lage des Punktes angegeben werden, dem dieser Näherungswert zugeordnet ist. Das Vorgehen dazu entspricht dem im Beispiel D 9 angegebenen Verfahren.

10 Es ist auf der Zahlengeraden die Lage des Punktes A zu beschreiben, dem die Zahl $A = \sqrt{2}$ zugeordnet ist (Bild D 4).



D 4

1. Schritt:
Da $1 < a < 2$ (siehe Beispiel D 9, 1. Schritt), liegt der Punkt A zwischen den Punkten 1 und 2.
2. Schritt:
Wir teilen die Strecke von 1 bis 2 auf der Zahlengeraden in zehn gleich lange Teilstrecken und bezeichnen die Teilpunkte mit 1,1 bis 1,9. Der Punkt A liegt dann zwischen den Punkten 1,4 und 1,5.
3. Schritt:
Wir teilen die Strecke von 1,4 bis 1,5 auf der Zahlengeraden in zehn gleich lange Teilstrecken und bezeichnen die Teilpunkte mit 1,41 bis 1,49. Der Punkt A liegt dann zwischen den Punkten 1,41 und 1,42.
Fährt man in dieser Weise fort, kann man die Lage des Punktes A mit beliebiger Genauigkeit beschreiben.

Ist umgekehrt ein Punkt A auf der Zahlengeraden gegeben, dem keine rationale Zahl zugeordnet ist, so kann die Lage des Punktes A auf der Zahlengeraden mit diesem Verfahren der „fortgesetzten Zehnteilung" durch die Angabe der Stellen eines Dezimalbruchs – jedenfalls in Gedanken – beliebig genau beschrieben werden.
Wir denken uns zum Abschluß dieser Betrachtungen eine beliebige Quadratwurzel gegeben, die keine rationale Zahl ist. Wenn wir beliebig viele Schritte zur Berechnung dieser Quadratwurzel ausführen, erhalten wir einen Dezimalbruch mit beliebig vielen Stellen hinter dem Komma. Werden (in Gedanken) unendlich viele Schritte ausgeführt, so ist der Dezimalbruch unendlich. Dieser Dezimalbruch kann nicht periodisch sein, denn sonst wäre die betreffende Quadratwurzel eine rationale Zahl. In dem Dezimalbruch gibt es also keine Zifferngruppen, die sich regelmäßig wiederholen. Zahlen, die durch unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche ausgedrückt werden können, werden **irrationale Zahlen** genannt. Jede Quadratwurzel aus einer nichtnegativen rationalen Zahl ist demnach entweder eine rationale oder eine irrationale Zahl.

Aufgaben d 19 und 20

D

Übungen

8 Berechnung von Quadratwurzeln mit Hilfe des Rechenstabs

Quadratwurzelziehen ist eine Umkehroperation des Quadrierens. Die Skalen des Rechenstabs, mit denen Zahlen quadriert werden, können demnach auch zum Quadratwurzelziehen verwendet werden. Eine Überschlagsrechnung ergibt die Stellenzahl der gesuchten Quadratwurzel. Die in Lerneinheit D 1 aufgestellte Tabelle über die Stellenzahlen kann man auch beim Quadratwurzelziehen verwenden, indem man die Spalten vertauscht.

Ist a	so ist $\sqrt{a}$	a	$\sqrt{a}$
ein- oder zweistellig	einstellig	$0{,}01 \leqq a < 1$	$0{,}1 \leqq \sqrt{a} < 1$
drei- oder vierstellig	zweistellig	$0{,}000\,1 \leqq a < 0{,}01$	$0{,}01 \leqq \sqrt{a} < 0{,}1$
fünf- oder sechsstellig	dreistellig	$0{,}000\,001 \leqq a < 0{,}000\,1$	$0{,}001 \leqq \sqrt{a} < 0{,}01$
.	.	.	.
$(2n - 1)$- oder $2n$-stellig	n-stellig	.	.

Die Übersichten lassen erkennen: Beim Quadratwurzelziehen werden die geltenden Ziffern des Radikanden vom Komma aus nach links bzw. rechts in Gruppen zu je zwei Ziffern eingeteilt. Aus der Anzahl der Zweiergruppen finden wir dann die Stellenzahl der betreffenden Quadratwurzel.

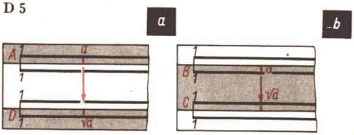
11 Es sind Näherungswerte für die folgenden Quadratwurzeln anzugeben!

a) $\sqrt{36\,987} = \sqrt{3/69/87} \approx \sqrt{4/00/00} = 200$

b) $\sqrt{3\,698{,}7} = \sqrt{36/98{,}7} \approx \sqrt{36/00} = 60$

c) $\sqrt{0{,}036\,987} = \sqrt{0{,}03/69/87} \approx \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

D 5



Um die Quadratwurzel aus einer Zahl a mit dem Rechenstab zu ermitteln, stellen wir sie mit dem Ablesestrich auf der Skale A (bzw. auf der Skale B) ein. Die Ziffernfolge der Quadratwurzel lesen wir dann unter dem Ablesestrich auf der Skale D (bzw. auf der Skale C) ab (Bild D 5).

12 Wir berechnen mit dem Rechenstab die Quadratwurzel aus 3699.

1) *Überschlag:* $\sqrt{36/99} \approx \sqrt{36/00} = 60$
2) Wir stellen mit dem Ablesestrich die Ziffernfolge A 36-9-9 ein.
3) Unter dem Ablesestrich lesen wir die Ziffernfolge D 6-0-8 ab.

Ergebnis: $\sqrt{3\,699} \approx 60{,}8$.

Aufgaben d 21 und 22

9 Berechnung von Quadratwurzeln mit Hilfe der Quadrattafel

Zum Quadratwurzelziehen kann man die Quadrattafel auf den Seiten 10 und 11 des Buches *Tabellen und Formeln* verwenden. Wir suchen den Radikanden in der Tabelle auf und finden in der ersten Spalte die ersten Ziffern der Wurzel und in der ersten Zeile eine weitere Ziffer.

13 $\sqrt{18{,}66}$

1. Ein Überschlag ergibt: $\sqrt{16{,}00} = 4$.
2. Wir suchen in der Tabelle die Zahl 18,66. Aus der ersten Spalte entnehmen wir die Ziffern 43 und aus der ersten Zeile die Ziffer 2.

Ergebnis: $\sqrt{18{,}66} \approx 4{,}32$.

Ist die Zahl nicht in der Tafel enthalten, so suchen wir die Zahl auf, die der gesuchten am nächsten kommt.

14 $\sqrt{1{,}772}$

Der Radikand 1,772 ist nicht in der Tafel enthalten. Wir lesen bei 1,769 ab.

$\sqrt{1{,}772} \approx 1{,}33$

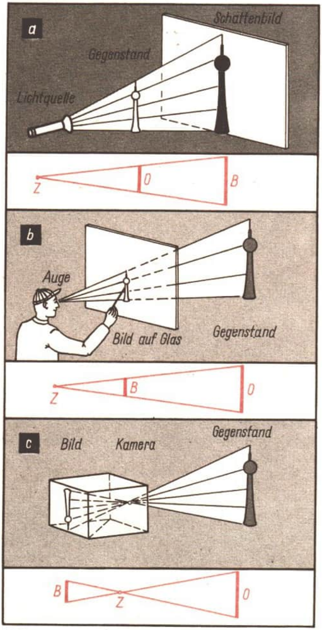
Aufgaben d 23 bis 30

E Darstellende Geometrie

Technische Zeichner fertigen nach den Unterlagen, die Konstrukteure, Ingenieure, Architekten u. a. ausgearbeitet haben, die Konstruktionszeichnungen an. Sie halten sich dabei an Zeichenregeln, die oftmals in der darstellenden Geometrie ihre mathematischen Grundlagen haben. Die technischen Zeichnungen müssen sauber, sehr genau und maßstabgerecht sein; sie werden in Konstruktionsbüros mit Hilfe von Zeichenmaschinen angefertigt.

Projektionsbegriff; Projektionsarten; Kavalierperspektive

1 Projektion



E 1

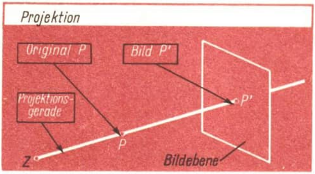
Oft genügt ein Bild (Foto, Zeichnung, Skizze), um eine klare Vorstellung von einem Gegenstand zu bekommen. Wir werden jetzt Verfahren kennenlernen, nach denen man geometrische Gebilde auf ein Zeichenblatt abbildet. Diese Verfahren machen es möglich, daß man sich auf Grund der Zeichnung auch geometrische Gebilde des Raumes genau vorstellen kann.

Das Bild E 1 zeigt verschiedene Möglichkeiten, wie wir von Gegenständen Bilder erhalten können.

In allen drei Fällen erhalten wir vom Gegenstand, den man allgemein **Original** nennt, ein **Bild** auf einer **Bildebene.** Originalpunkte sind mit ihren Bildpunkten durch Geraden verbunden, die alle durch einen Punkt (Lichtquelle, Auge, Lochblende) gehen. Diesen Punkt bezeichnen wir mit Z (Zentrum), die Geraden nennen wir **Projektionsgeraden**, den ganzen Vorgang **Projektion.**

Damit wir in der Zeichnung das Bild vom Original unterscheiden können, versehen wir die Buchstaben der Bildpunkte mit einem Strich, z. B. (Bild E 2): Originalpunkt: P; Bildpunkt: P'.

E 2



ZUSAMMENFASSUNG

In der darstellenden Geometrie werden geometrische Gebilde des Raumes auf eine Zeichenebene so abgebildet, daß man aus der ebenen Zeichnung auf das geometrische Gebilde des Raumes *schließen* kann. Die Verbindungsgeraden von **Originalpunkten** mit den **Bildpunkten** nennt man **Projektionsgeraden.**

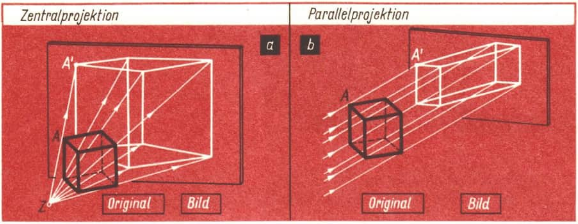
2 Projektionsarten

(1) **a)** ***Beleuchte das Kantenmodell eines Würfels mit Hilfe einer Taschenlampe so, daß sein Schatten auf eine dahinterliegende Wand (Bildebene) fällt!***

b) ***Benutze für den Schattenwurf des Würfelmodells Sonnenlicht!***

Die Projektionsgeraden gehen alle durch einen Punkt.
Diese Projektionsart heißt **Zentralprojektion** (Bild E 3a).

Die Projektionsgeraden liegen alle parallel zueinander.
Diese Projektionsart heißt **Parallelprojektion** (Bild E 3b).

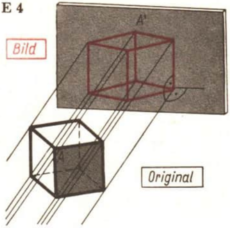


E 3

(2) ***Stelle im Auftrag E 1b die Bildebene so, daß die Sonnenstrahlen senkrecht auftreffen!***

Der im Auftrag E 2 dargestellte Sonderfall der Parallelprojektion, bei dem die Projektionsgeraden senkrecht zur Bildebene liegen, heißt **senkrechte Projektion** (Bild E 4).

E 4

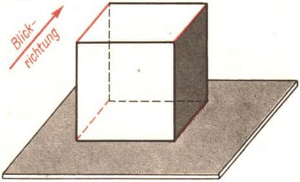


3 Parallelprojektion

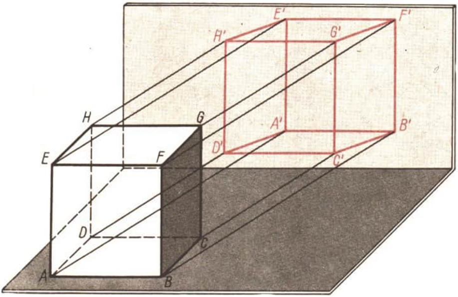
An einem Quader wollen wir die Breite, die Höhe und die Tiefe unterscheiden. Blicken wir im Bild E 5 in der angegebenen Blickrichtung auf den Würfel, so können wir feststellen:

1. vier Kanten liegen in **Tiefenrichtung** (im Bild E 5 rot),
2. vier Kanten liegen in **Breitenrichtung,**
3. vier Kanten liegen in **Höhenrichtung.**

E 5



Hinter dem Modell befinde sich eine Bildebene (Bild E 6), die zu den Kanten in Breiten- und Höhenrichtung parallel verlaufe. Fällt Sonnenlicht (Parallelprojektion) so auf das Würfelmodell, daß auf der Bildebene ein Schattenbild entsteht, so können wir folgendes beobachten:



E 6

1. **Kanten in Breitenrichtung** (Bild E 7):

a) Das Bild $\overline{E'F'}$ der Kante $\overline{EF}$ verläuft in Zeilenrichtung.

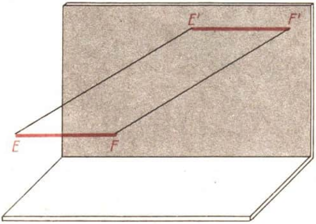
b) Es gilt $\overline{E'F'} \cong \overline{EF}$.

Wir beweisen die Aussage 1b:

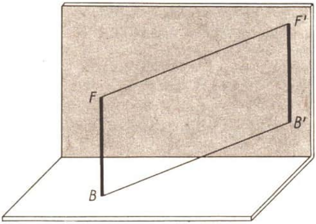
Voraussetzung: $EF \parallel E'F'$ (die Kante $\overline{EF}$ wurde parallel zur Bildtafel festgelegt)

Behauptung: $\overline{EF} \cong \overline{E'F'}$

Beweis: $EF \parallel E'F'$ (nach Voraussetzung)
$EE' \parallel FF'$ (Parallelprojektion)
$EFF'E'$ ist ein Parallelogramm.
Folglich ist $\overline{EF} \cong \overline{E'F'}$.



E 7



E 8

2. **Kanten in Höhenrichtung** (Bild E 8):

a) Das Bild $\overline{B'F'}$ der Kante $\overline{BF}$ verläuft in Spaltenrichtung.

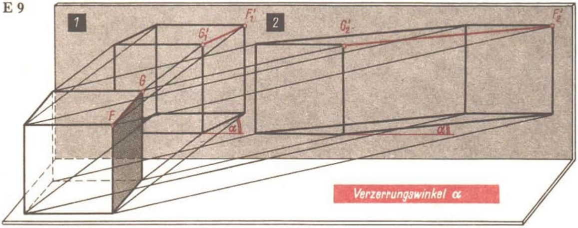
b) Es gilt $\overline{B'F'} \cong \overline{BF}$.

(3) *Beweise die Aussage 2b! Vergleiche mit dem Beweis in 1b!*

1 **SATZ: Kanten, die parallel zur Bildebene liegen, werden bei Parallelprojektion in wahrer Größe abgebildet.**

3. **Kanten in Tiefenrichtung** (Bild E 9):
Die Länge des Bildes $\overline{F'G'}$ der Kante $\overline{FG}$ ist abhängig von dem Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen (Projektionsgeraden) auf die Bildebene auftreffen. Je flacher

E 9



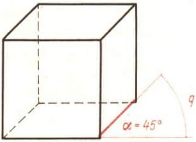
diese auftreffen, um so länger werden die Schatten (Bilder) einer Kante in Tiefenrichtung. Das Schattenbild eines Würfels sieht dann sehr verzerrt aus (Bild E 9).
Den Quotienten aus der Länge des Bildes und der Länge des Originals einer Kante in Tiefenrichtung nennt man **Verkürzungsverhältnis q.** Gilt zum Beispiel für die Parallelprojektion einer Kante in Tiefenrichtung
Länge des Originals 15 mm,
Länge des Bildes 5 mm,
so beträgt das Verkürzungsverhältnis $q = \frac{5\text{ mm}}{15\text{ mm}} = \frac{1}{3}$.
Bei ein und derselben Projektion ist das Verkürzungsverhältnis q für alle Kanten in Tiefenrichtung gleich groß.
Der in Bild E 9 angegebene Winkel α heißt **Verzerrungswinkel.** Die Größe des Verzerrungswinkels ist von der Richtung der Projektionsgeraden abhängig. Bei ein und derselben Parallelprojektion ist der Verzerrungswinkel α für alle Kanten in Tiefenrichtung gleich groß.
Wir haben gesehen, daß die Bilder der Kanten in Breitenrichtung alle in Zeilenrichtung verlaufen; sie sind also untereinander parallel. Die Bilder der Kanten in Höhenrichtung verlaufen alle in Spaltenrichtung, sie sind also auch untereinander parallel. Auch die Bilder der Kanten in Tiefenrichtung sind untereinander parallel.
Man kann ganz allgemein feststellen: Kanten, die zueinander parallel verlaufen, haben zueinander parallele Bilder. Ausgenommen ist der Fall, daß die Kanten in Richtung der Projektionsgeraden liegen.
Wir übertragen unsere Kenntnisse auf Geraden und formulieren:

2 **SATZ: Zueinander parallele Geraden haben bei Parallelprojektion zueinander parallele Bilder. Eine Ausnahme bilden solche Geraden, die in Projektionsrichtung liegen.**

Auf einen Beweis dieses Satzes müssen wir noch verzichten.

E

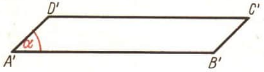
Im Bild E 9 wurde gezeigt, daß je nach Richtung der Projektionsgeraden unterschiedliche Würfelbilder entstehen, die mitunter nicht sehr anschaulich sind. Wählt man aber als Verzerrungswinkel $\alpha = 45°$ und als Verkürzungsverhältnis $q = \frac{1}{2}$ (Bild E 10), so erhalten wir ein sehr anschauliches Würfelbild, das sich auch leicht konstruieren läßt. Diesen Sonderfall der Parallelprojektion nennt man **Kavalierperspektive.** Diese Bezeichnung stammt wahrscheinlich aus der Praxis des Festungsbaus im 18. Jahrhundert.



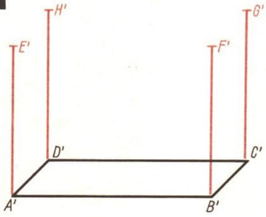
E 10

E 11

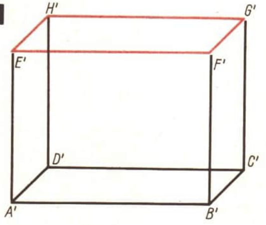
a



b



c



ZUSAMMENFASSUNG

Eigenschaften der Kavalierperspektive:

1. **Kanten in Breiten- bzw. Höhenrichtung** werden in wahrer Größe abgebildet. Ihre Bilder verlaufen in Zeilen- bzw. in Spaltenrichtung.

2. **Kanten in Tiefenrichtung** werden verkürzt abgebildet. Wir verkürzen jede dieser Kanten auf die Hälfte des Originals $\left(\text{Verkürzungsverhältnis } q = \frac{1}{2}\right)$ und zeichnen sie im Winkel $\alpha = 45°$ zur Zeilenrichtung (Verzerrungswinkel).

1 Es soll von einem Quader mit den Maßen

$a = 2$ cm (Tiefe); $b = 4$ cm (Breite); $c = 3$ cm (Höhe)

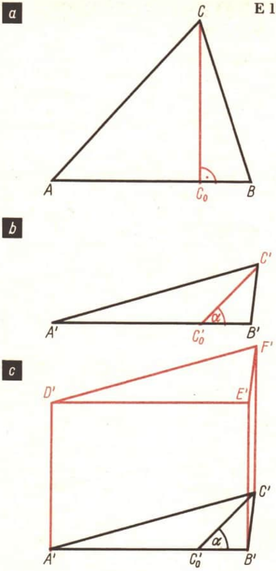
ein Schrägbild in Kavalierperspektive gezeichnet werden.

Konstruktion (Bild E 11):

a) Wir konstruieren zuerst das Schrägbild der Grundfläche (Bild E 11 a): Wir zeichnen die Strecke $\overline{A'B'} = 4$ cm in Zeilenrichtung, tragen in A' den Winkel $\alpha = 45°$ an die Strecke $\overline{A'B'}$ an und tragen auf dem freien Schenkel wegen $q = \frac{1}{2}$ die Strecke $\overline{A'D'} = 1$ cm ab. Dann zeichnen wir durch D' die Parallele zu $A'B'$ und durch B' die Parallele zu $A'D'$ und erhalten als Schnittpunkt der beiden Parallelen C'.

b) Nun zeichnen wir die Bilder der Kanten in Höhenrichtung (Bild E 11 b): In den Punkten A', B', C' und D' errichten wir die Senkrechten zu $A'B'$ bzw. $D'C'$ und tragen auf ihnen Strecken mit der Länge 3 cm ab.

c) Schließlich zeichnen wir das Bild $E'F'G'H'$ der Deckfläche (Bild E 11 c).



E 12

2 Es soll von einem geraden dreiseitigen Prisma mit der Grundfläche aus $a = 3{,}5\,\text{cm}$, $b = 4{,}5\,\text{cm}$ und $c = 4{,}0\,\text{cm}$ (Breite!) und der Höhe $h = 3{,}0\,\text{cm}$ ein Schrägbild in Kavalierperspektive gezeichnet werden.

Konstruktion (Bild E 12):

a) Wir zeichnen zuerst das Dreieck der Grundfläche ABC in wahrer Größe als Hilfsfigur und wählen $\overline{AB}$ als Breitenkante. Um das Bild des Punktes C zeichnen zu können, konstruieren wir die Tiefenstrecke $\overline{CC_0}$ als Lot von C auf $\overline{AB}$ (Bild E 12 a).

b) Nun konstruieren wir das Schrägbild $A'B'C'$ der Grundfläche ABC (Bild E 12 b): Wir zeichnen die Strecke $\overline{A'B'} = 4{,}0\,\text{cm}$ in Zeilenrichtung, legen auf ihr den Punkt C_0' im Abstand $\overline{AC_0}$ von A' aus fest. Wir tragen in C_0' den Winkel $\alpha = 45°$ an $\overline{C_0'B'}$ an, tragen auf dem freien Schenkel wegen $q = \frac{1}{2}$ die Hälfte des Lotes $\overline{CC_0}$ ab und erhalten C'. Wir verbinden C' mit A' und B'.

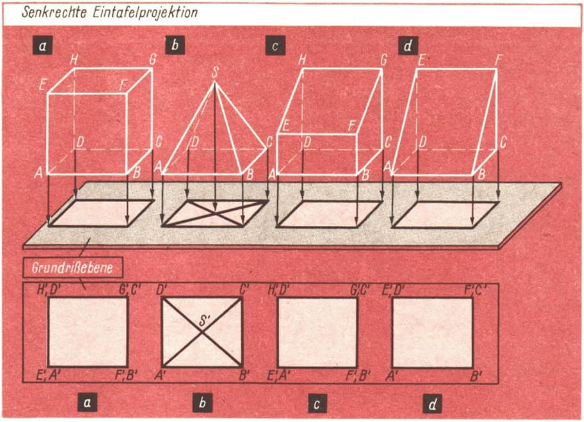
c) Schließlich zeichnen wir die Bilder der Kanten in Höhenrichtung und das Bild der Deckfläche! (Bild E 12 c).

Aufgaben e 1 bis 8

Senkrechte Eintafelprojektion

5 Die Projektion eines Punktes

Projiziert man einen geometrischen Körper *senkrecht* auf eine Bildebene, so spricht man von **senkrechter Eintafelprojektion**. Das Bild nennt man **Riß**. Zur Unterscheidung von Bild und Original versehen wir die Bezeichnung des zum Punkt P gehörenden Bildes mit einem Strich (P').



E 13

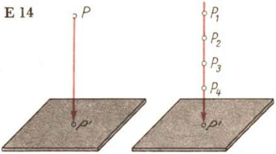
Den Riß erhalten wir, indem wir von jedem Eckpunkt des Körpers das Lot auf die Grundrißebene fällen (Bild E 13). Die Fußpunkte der Lote ergeben die Bildpunkte. Dabei können mehrere Eckpunkte denselben Bildpunkt haben.

3 **SATZ: Bei senkrechter Eintafelprojektion ist jedem Punkt des Raumes ein und nur ein (genau ein) Bildpunkt zugeordnet.**

Umgekehrt gilt jedoch:

Bei senkrechter Eintafelprojektion kann jeder Bildpunkt unendlich viele Originalpunkte haben (Bild E 14).

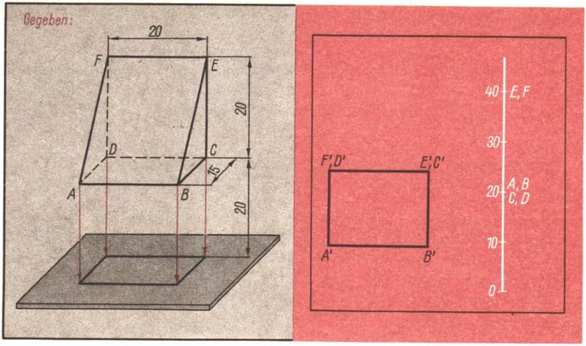
E 14



Das heißt: Die senkrechte Eintafelprojektion ist im Gegensatz zur Verschiebung, Drehung oder Spiegelung nur eine eindeutige, aber keine eineindeutige (umkehrbar eindeutige) Abbildung.
Dieser Satz wird hier nicht bewiesen.

6 Der Höhenmaßstab

Da die senkrechte Eintafelprojektion nicht umkehrbar eindeutig ist, kommt es vor, daß unterschiedliche Körper gleiche Bilder haben (Bild E 13). Um dennoch aus dem Riß eindeutig auf das Original schließen zu können, muß man die Höhen



E 15

der einzelnen Punkte kennen. Wir fügen deshalb einem Riß einen **Höhenmaßstab** bei, aus dem man die Höhen der Punkte über der Bildebene ablesen kann.

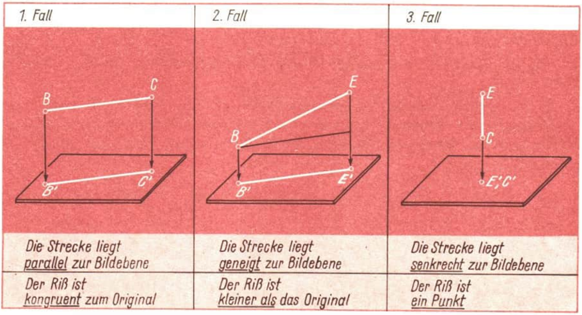
3 Es sollen der Riß und der Höhenmaßstab eines Körpers gezeichnet werden, wobei die Maße dem Bild E 15 zu entnehmen sind.

Aufgaben e 9 und 10

7 Die Projektion einer Strecke (einer Geraden)

4 *Halte einen Bleistift (Modell einer Strecke) parallel zur Tischplatte! Wie verändert sich die Länge seines Risses, wenn man den Bleistift um seine Spitze nach oben dreht?*

Betrachten wir die Lage einer Strecke bezüglich der Bildebene, so können wir drei Fälle unterscheiden (Bild E 16):



E 16

4 SATZ: Das Bild einer Strecke, die nicht senkrecht zur Bildebene liegt, ist bei senkrechter Eintafelprojektion wieder eine Strecke.

(5) *Formuliere einen ähnlichen Satz für die Projektion einer Geraden, und begründe diesen Satz!*

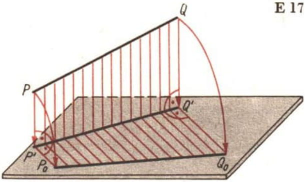
8 Die wahre Länge einer Strecke (Grundaufgabe)

Die Länge der Originalstrecke nennt man **wahre Länge der Strecke.**
Das Bild E 17 veranschaulicht, wie wir die wahre Länge einer Strecke $\overline{PQ}$ aus dem Riß und dem Höhenmaßstab ermitteln können. Wir klappen das Trapez $P'Q'QP$, das aus

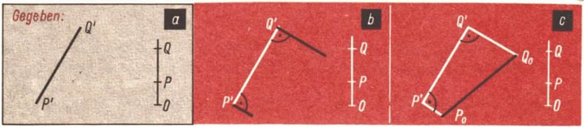
dem Original $\overline{PQ}$,
dem Bild $\overline{P'Q'}$ und
den Loten $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$

besteht, um das Bild $\overline{P'Q'}$ in die Bildebene.
Dadurch gelangt die Strecke $\overline{PQ}$, ohne ihre Länge zu verändern, nach $\overline{P_0Q_0}$.

E 17



4 **Grundaufgabe:**
Gegeben sei eine Strecke $\overline{PQ}$ durch ihren Riß $\overline{P'Q'}$ mit Höhenmaßstab (Bild E 18).
Gesucht ist die wahre Länge der Strecke $\overline{PQ}$.



E 18

Konstruktion:

a) Wir errichten in den Punkten P' und Q' die Senkrechten zur Strecke $\overline{P'Q'}$ (Bild E 18b).

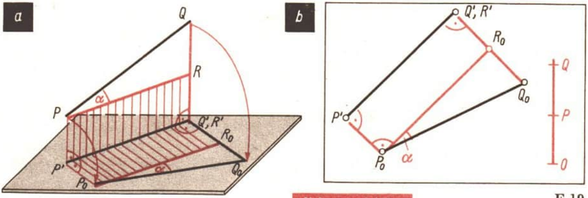
b) Auf den entsprechenden Senkrechten tragen wir die Höhen der Punkte P und Q ab, die wir dem Höhenmaßstab entnehmen. Damit erhalten wir die Punkte P_0 und Q_0 und mit der Verbindungsstrecke $\overline{P_0Q_0}$ die wahre Länge der Strecke $\overline{PQ}$ (Bild E 18c).

Aufgaben e 11 und 12

E

9 Der Neigungswinkel einer Strecke (Grundaufgabe)

Unter dem **Neigungswinkel einer Strecke** $\overline{PQ}$ versteht man den Winkel, den die Gerade PQ mit der Geraden $P'Q'$ einschließt.
Im Bild E 19a wurde der Neigungswinkel α ermittelt, indem im Trapez $P'Q'QP$ durch den tieferen der beiden Endpunkte der Strecke $\overline{PQ}$ (in diesem Fall durch den Punkt P) die Parallele zu $P'Q'$ gezeichnet wurde. Denkt man sich dann das Trapez $P'Q'QP$ in die Bildebene geklappt, so erhält man im Winkel $Q_0P_0R_0$ den Neigungswinkel α ($0° \leqq \alpha \leqq 90°$) in wahrer Größe. Dieser Überlegung entspricht die Konstruktion, die im Bild E 19b dargestellt wird.



Neigungswinkel α

E 19

⑥ *Erkläre die Konstruktion an Hand des Bildes E 19b!*

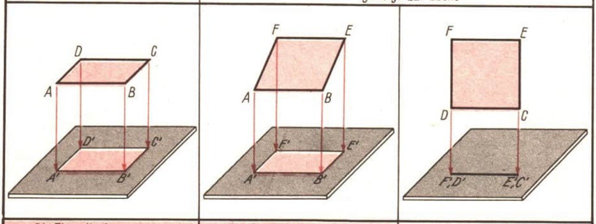
Aufgabe e 13

10 Die Projektion einer ebenen Figur

⑦ *Halte ein Heft (Modell eines Rechteckes) parallel zur Tischplatte! Wie verändert sich der Flächeninhalt des Risses, wenn man das Heft um eine Kante nach oben dreht?*

Betrachten wir die Lage einer ebenen Figur bezüglich der Bildebene, so können wir drei Fälle unterscheiden (Bild E 20):

parallel zur Ebene	geneigt zur Ebene	



Die Figur liegt parallel zur Bildebene	Die Figur liegt geneigt zur Bildebene	Die Figur liegt senkrecht zur Bildebene
Der Riß ist kongruent zum Original	Der Riß ist kleiner als das Original	Der Riß ist eine Strecke

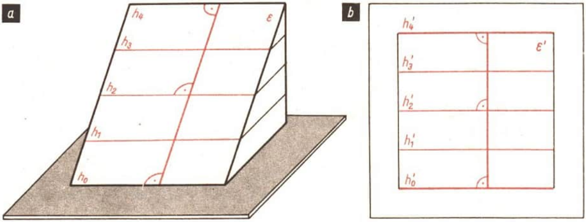
E 20

E

5 **SATZ: Das Bild einer ebenen Figur, die nicht senkrecht zur Bildebene liegt, ist bei senkrechter Eintafelprojektion wieder eine ebene Figur.**

11 Höhenlinien und Fallinien

Da die Bilder der Punkte einer geneigten Ebene die gesamte Bildebene ausfüllen, benutzt man zur Darstellung einer Ebene besondere Linien. (Im Bild E 21 und in den folgenden Bildern sind immer nur begrenzte Teile der stets unbegrenzten Ebene dargestellt.)
Jede Gerade, auf der nur Punkte gleicher Höhe über der Bildebene liegen, heißt **Höhenlinie.** Jede Gerade in einer geneigten Ebene, die senkrecht zu den Höhenlinien dieser Ebene liegt, heißt **Fallinie.** Sie stellt den Weg dar, den eine Kugel auf einer geneigten Ebene zurücklegt, wenn man sie von einem Punkt P der Ebene aus rollen läßt. Die Bilder der Höhenlinien einer geneigten Ebene liegen parallel zueinander. Diese Tatsache beruht auf dem Satz: Zueinander parallele Geraden, die nicht in Projektionsrichtung liegen, haben bei Parallelprojektion zueinander parallele Bilder (↗ Satz E 2 auf Seite 87). Das Bild einer Fallinie einer geneigten Ebene verläuft senkrecht zu den Bildern der Höhenlinien dieser Ebene (Bild E 21).



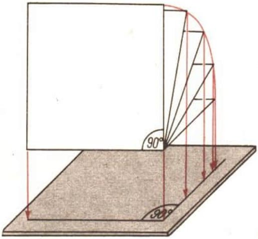
E 21

6 **SATZ: Das Bild eines rechten Winkels ist bei senkrechter Projektion wieder ein rechter Winkel, wenn**

1. **wenigstens ein Schenkel parallel zur Bildebene verläuft und**
2. **der andere Schenkel nicht senkrecht auf der Bildebene steht.**

8 *Halte zur Veranschaulichung dieses Satzes ein rechteckiges Stück Karton so, daß die untere Kante parallel zur Bildebene (Tischplatte) verläuft (Bild E 22)! Drehe das Blatt um die untere Kante und beobachte den rechten Kartonrand! Er bewegt sich in einer Ebene, die senkrecht zur Drehachse verläuft!*

E 22

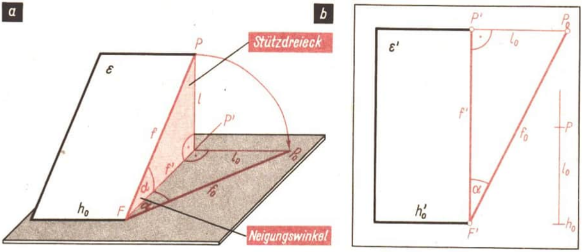


Auf einen Beweis des Satzes E 6 verzichten wir.

12 Neigungswinkel einer Ebene (Grundaufgabe)

Charakteristisch für eine geneigte Ebene ist ihr **Neigungswinkel** gegen die Bildebene. Es sei der Neigungswinkel einer Fallinie der Ebene gegen die Bildebene der Winkel α (Bild E 23a). Will man den Neigungswinkel α einer Ebene ε gegen die Bildebene bestimmen, so verwendet man ein sogenanntes **Stützdreieck.**

5 **Grundaufgabe:**
Gegeben sei eine Ebene ε durch das Bild der Höhenlinie h_0 und den Riß des Punktes P mit Höhenmaßstab, die dadurch eindeutig bestimmt ist.
Gesucht ist der Neigungswinkel α der Ebene ε gegen die Bildebene.

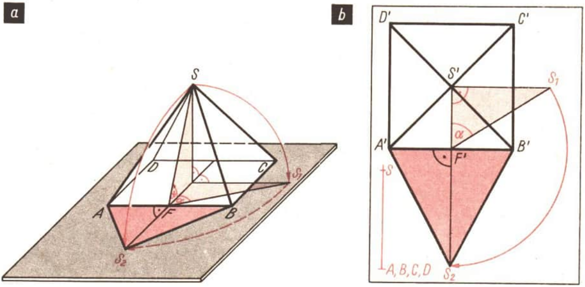


E 23

Konstruktion (Bild E 23b):
a) Wir zeichnen das Bild f' der Fallinie durch P senkrecht zu h_0'.
b) Wir zeichnen das geklappte Lot $l_0 = \overline{P'P_0}$ senkrecht zu f'!
c) Der Winkel $P'F'P_0$ ist der gesuchte Neigungswinkel α.

6 Gegeben sei eine gerade quadratische Pyramide mit der Grundseite $a = 4{,}0$ cm und der Höhe $h = 3{,}5$ cm (Bild E 24).
Gesucht ist
a) der Neigungswinkel α einer Seitenfläche,
b) die wahre Länge einer Seitenhöhe (Fallinie durch S),
c) die wahre Größe und Gestalt einer Seitenfläche.

E 24



Konstruktion (Bild E 24):
Gegeben sind Riß und Höhenmaßstab der Pyramide.

a) Wir zeichnen das Bild einer Fallinie durch S' und konstruieren das in die Bildebene geklappte Stützdreieck $S'F'S_1$. Der Winkel $S'F'S_1$ ist der gesuchte Neigungswinkel α der Seitenfläche gegen die Bildebene.

b) Die Länge der Seitenhöhe (auf der Fallinie durch S) finden wir als Länge der Strecke $\overline{F'S_1}$ (Hypotenuse) des Stützdreiecks.

c) Die wahre Größe und Gestalt der Seitenfläche ABS ermitteln wir, indem wir das Dreieck ABS um $\overline{AB}$ in die Bildebene klappen. Dabei bewegt sich das Bild des Punktes S auf einer Senkrechten zu AB. Die Länge der Fallinie $\overline{FS}$ finden wir als Strecke $\overline{F'S_1}$ (Hypotenuse) im Stützdreieck. Das Dreieck $A'B'S_2$ weist die wahre Größe und Gestalt der Seitenfläche ABS auf.

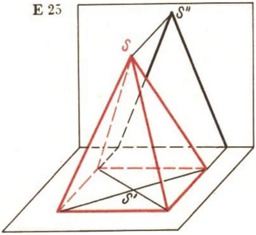
Aufgaben e 14 bis 16

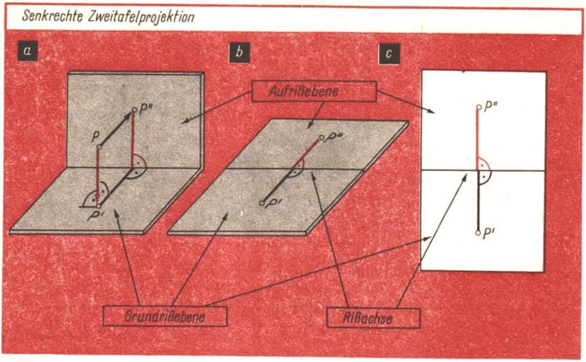
Senkrechte Zweitafelprojektion

13 Grund- und Aufriß eines Punktes

Wir haben in den meisten Fällen die Bildebene in horizontaler Lage angenommen, obwohl das nicht nötig ist. Eine Ausnahme bildete z. B. die Projektion in Kavalierperspektive, wo die Bildebene vertikal angenommen wurde (Bild E 9). In dem speziellen Fall, in dem die Bildebene horizontal liegt, wollen wir künftig den Riß als **Grundriß** und die Bildebene als **Grundrißebene** bezeichnen.
Wie wir wissen, liefert die **Projektion** eines Punktes ein eindeutiges Bild:
Jedem Originalpunkt ist genau ein Bildpunkt zugeordnet,
aber:
Einem Bildpunkt können viele Originalpunkte zugeordnet sein (Bild E 14).
In der Eintafelprojektion erzielten wir Eineindeutigkeit durch Beifügen eines Höhenmaßstabs. Für die **Eintafelprojektion mit Höhenmaßstab gilt:**
Jedem Originalpunkt ist genau ein Bildpunkt zugeordnet,
und:
Jedem Bildpunkt ist genau ein Originalpunkt zugeordnet.
Wir können auch Eineindeutigkeit erzielen, indem wir dem Grundriß an Stelle eines Höhenmaßstabs einen zweiten Riß auf einer Bildebene beifügen, die zur ersten Bildebene senkrecht steht. Dieses Verfahren heißt **senkrechte Zweitafelprojektion.**
Im Bild E 25 wird dieses Verfahren am Modell einer Pyramide veranschaulicht. Bevor wir jedoch Körper in Zweitafelprojektion zeichnen, beschäftigen wir uns mit Punkten, Strecken und ebenen Figuren.
Das Bild E 26 c zeigt die Darstellung eines Punktes P in Zweitafelprojektion.
Hierzu wurde das Original

E 25





E 26

1. auf eine Grundrißebene, die sich unter dem Original befindet, und
2. auf eine Aufrißebene, die sich hinter dem Original befindet, projiziert.

Das erste Bild nennen wir **Grundriß** und bezeichnen es mit P'. Das zweite Bild nennen wir **Aufriß** und bezeichnen es mit P''. Damit die Bilder in eine Zeichenebene zu liegen kommen, klappen wir die zweite Bildebene in die Grundrißebene um. Die Klappachse ist dabei die Schnittgerade der beiden Bildebenen und heißt **Rißachse.**

Wird die Aufrißebene in die Grundrißebene geklappt, liegen der Grundriß P' und der Aufriß P'' des Punktes P auf einer Geraden, die senkrecht zur Rißachse verläuft (Bild E 26c). Diese Gerade heißt **Ordnungslinie.**

7 **SATZ: Ordnungslinien liegen senkrecht zur Rißachse.**

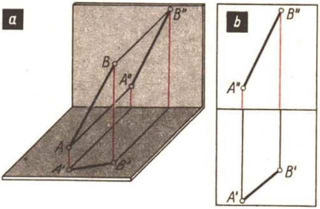
8 **SATZ: Der Abstand des Aufrisses P'' eines Punktes P von der Rißachse ist gleich der Höhe des Punktes P über der Grundrißebene.**

E

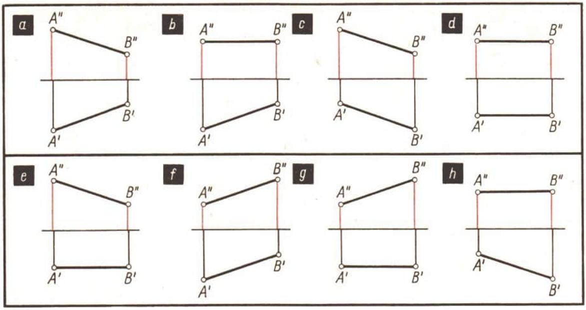
14 Grund- und Aufriß von Strecken (Geraden)

Im Bild E 27 wird eine Strecke $\overline{AB}$ in senkrechter Zweitafelprojektion dargestellt. Wir erkennen in diesem Bild:

1. aus dem Grundriß: B liegt weiter hinten als A,
2. aus dem Aufriß: B liegt höher als A.



E 27

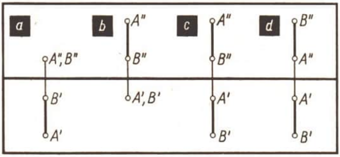


E 28

(9) *Formuliere ähnliche Aussagen über die Richtung der Strecken in den Bildern E 28 a bis h! Veranschauliche die Richtung dieser Strecken in einer Klapptafel!*

(10) *Erkläre das Besondere der Richtung der im Bild E 29 a bis d in Grund- und Aufriß abgebildeten Strecken!*

Verlängern wir im Bild E 28 die Strecke $\overline{AB}$ in Grund- und Aufriß über ihre Endpunkte A und B hinaus, so erhalten wir die senkrechte Zweitafelprojektion einer Geraden AB

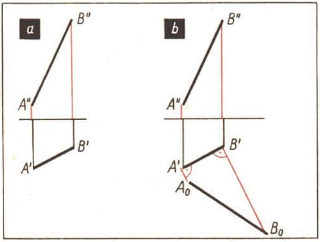


E 29

15 Wahre Länge einer Strecke (Grundaufgabe)

Bei der Ermittlung der wahren Länge einer Strecke in der Zweitafelprojektion gehen wir ähnlich wie bei der entsprechenden Aufgabe in der Eintafelprojektion vor. Dabei entnehmen wir die Höhen der Endpunkte der Strecke dem Aufriß.

E 30



[7] **Grundaufgabe:**

Gegeben ist das Zweitafelbild einer Strecke $\overline{AB}$.

Gesucht ist die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ (Bild E 30).

(11) *Was kannst du über die wahre Länge der Strecken im Bild E 28b, d, e, g, h und im Bild E 29a, b aussagen?*
Anleitung: Im Bild E 28b verläuft die Strecke $\overline{AB}$ parallel zur Grundrißebene, deshalb ist ihre Länge gleich der Länge des Grundrisses $\overline{A'B'}$.

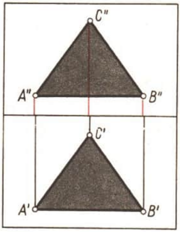
Aufgaben e 17 bis 19

16 Grund- und Aufriß einer ebenen Figur; Lagebeziehungen zwischen geometrischen Figuren

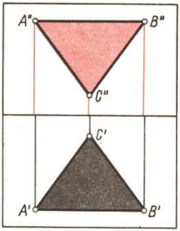
(12) *Zeichne ein Dreieck auf Pappe und schneide es aus! Färbe dann eine Seite der Pappscheibe rot! Halte die Pappe in unterschiedlicher Stellung in eine Klapptafel, so daß sich a) das Bild E 31 und b) das Bild E 32 ergibt!*

Wir sehen im Grund- und Aufriß **die gleiche Seite** der Dreiecksfläche. Der Umlaufssinn der Bezeichnungen der Ecken mit A, B, C ist in Grund- und Aufriß der **gleiche** (Bild E 31).

Wir sehen im Grund- und Aufriß **verschiedene Seiten** der Dreiecksfläche. Der Umlaufssinn der Bezeichnungen der Ecken mit A, B, C ist in Grund- und Aufriß **entgegengesetzt** (Bild E 32).



E 31



E 32

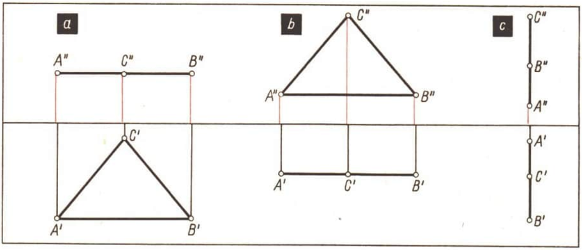
(13) *Erkläre die Stellung der Dreiecke, die in den Bildern E 33a bis c dargestellt sind! Veranschauliche diese Stellung vorher in der Klapptafel!*

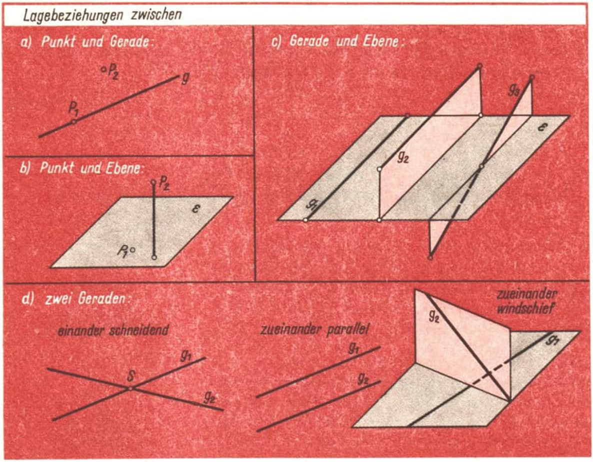
(14) *Erkläre, wie die geometrischen Gebilde im Bild E 34 zueinander liegen!*

(15) *Zeige jeden Fall am Kantenmodell eines Quaders! (Betrachte die Ecken als Punkte, die Kanten als Teile von Geraden und die Seitenflächen als Teile von Ebenen!)*

Aufgabe e 20

E 33



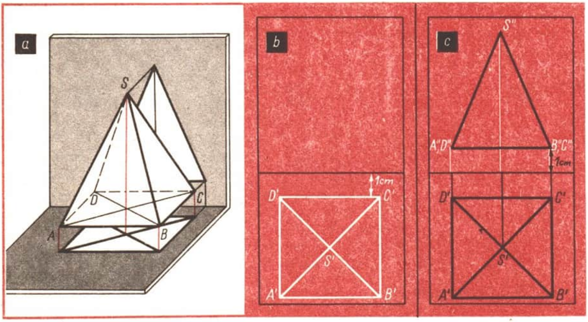


E 34

17 Grund- und Aufriß eines Körpers

8 Es sollen der Grund- und der Aufriß einer quadratischen Pyramide gezeichnet werden. Die Pyramide hat folgende Maße: Quadratseite $a = 4{,}0$ cm, Höhe der Pyramide $h = 5{,}0$ cm. Der Abstand der Grundfläche von der Grund- und der Aufrißebene soll jeweils 1,0 cm betragen.

E 35



Konstruktion (Bild E 35):

a) Wir zeichnen die Rißachse und den Grundriß der Pyramide im Abstand von 1,0 cm von der Rißachse (Bild E 35 b, im Bild nicht maßgetreu).

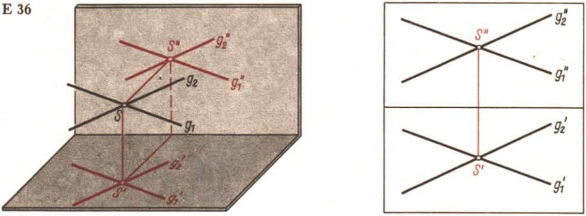
b) Dann zeichnen wir Ordnungslinien von den Grundrißpunkten aus und erhalten im Abstand der jeweiligen Höhen (1,0 cm bzw. 6,0 cm von der Rißachse entfernt) die Aufrißpunkte (Bild E 35 c).

Aufgaben e 21 bis 23

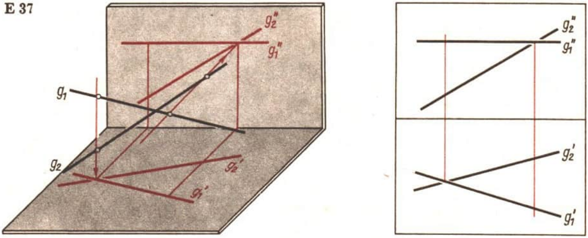
18 Grund- und Aufriß zweier Geraden

Der Grund- und der Aufriß eines Punktes P liegen stets auf einer Ordnungslinie. Das gilt auch für den Schnittpunkt S der beiden Geraden g_1 und g_2 im Bild E 36.

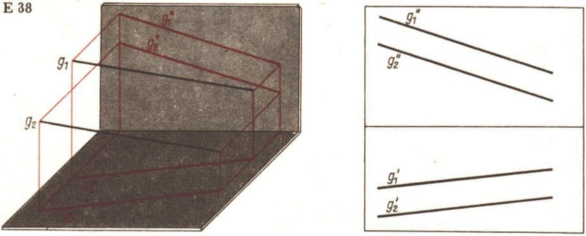
E 36



E 37



E 38



9 **SATZ: Zwei Geraden schneiden einander, wenn der Schnittpunkt ihrer Grundrisse und der Schnittpunkt ihrer Aufrisse auf einer Ordnungslinie liegen.**

Liegen der Schnittpunkt der Aufrisse und der Schnittpunkt der Grundrisse zweier Geraden nicht auf einer Ordnungslinie, so haben die beiden Geraden keinen Schnittpunkt (Bild E 37).
Nach Satz E 2 auf Seite 87 haben zueinander parallele Geraden im allgemeinen zueinander parallele Bilder (Bild E 38). Ausgenommen ist der Fall, daß die beiden Geraden senkrecht zu einer Bildebene verlaufen; dann haben sie als Bilder zwei Punkte.

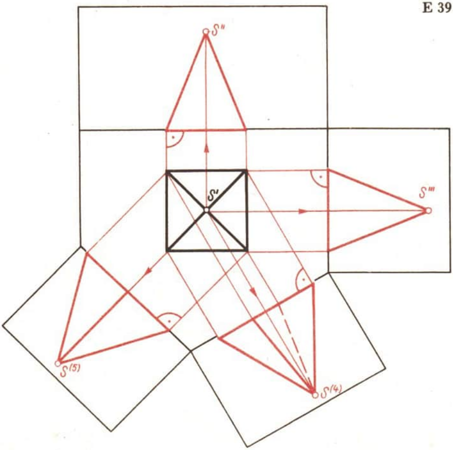
Aufgabe e 24

19 Die unterschiedliche Anordnung des Aufrisses

Bisher nahmen wir die Aufrißebene vertikal stehend *hinter* dem Original an. Dadurch erhielten wir ein Bild, das den Körper von vorn zeigt. Möchten wir wissen, wie das Bild des Körpers aussieht, wenn wir ihn von links betrachten, müssen wir eine vertikale Bildebene rechts vom Körper aufbauen. Auf entsprechende Weise können wir Bilder erhalten, die den Körper von einer beliebigen Seite zeigen (Bild E 39).

(16) *Drehe das Buch so, daß der jeweils betrachtete Aufriß im Bild E 39 oben steht! Du erkennst dann folgendes:*
1. *Die neuen Ordnungslinien liegen stets senkrecht zur neuen Rißachse.*
2. *Die Abstände der Aufrißpunkte von der Rißachse sind im neuen Aufriß genauso groß wie im alten Aufriß. (Warum?)*

E 39



E

17 *Im Aufriß mit S[(5)] in Bild E 39 verläuft die Rißachse parallel zu zwei Seitenkanten der Pyramide. Was folgt daraus für die Länge der Bilder dieser Seitenkanten in dem genannten Aufriß?*

Damit haben wir ein zweites Verfahren zur Ermittlung der wahren Länge einer Strecke kennengelernt.

9 Es soll die wahre Länge einer Raumdiagonalen eines Quaders ($a = 2{,}5$ cm; $b = 2{,}1$ cm; $c = 1{,}2$ cm) mit Hilfe eines geeigneten Aufrisses ermittelt werden.

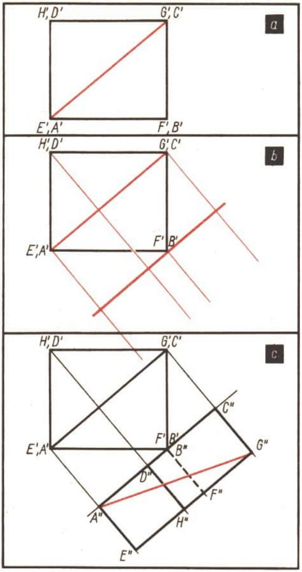
Konstruktion:

a) Wir zeichnen den Grundriß des Quaders mit einer Raumdiagonalen (Bild E 40 a).

b) Dann konstruieren wir eine Rißachse parallel zum Grundriß der Raumdiagonalen und die Ordnungslinien senkrecht zur Rißachse (Bild E 40 b).

c) Wir tragen auf den Ordnungslinien die gegebenen Höhen der Punkte von der Rißachse aus ab, zeichnen den Aufriß des Quaders und messen die Länge der Raumdiagonalen (Bild E 40 c).

Aufgaben e 25 bis 28



E 40

20 Ebener Schnitt durch ein Prisma

Im Bild E 41 wird ein Quader durch eine Ebene ε schräg geschnitten. Die Ebene ε verläuft

– im Winkel $\alpha = 45°$ (Neigungswinkel) gegen die Grundrißebene und

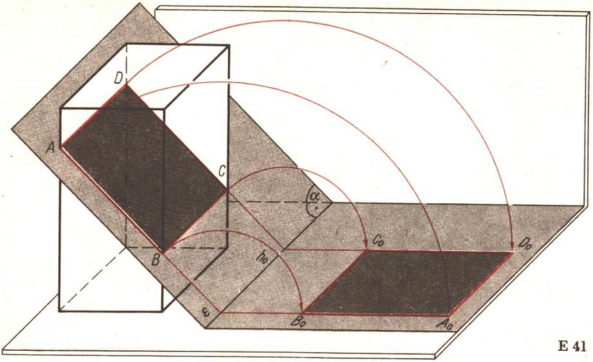
– senkrecht zur Aufrißebene.

Die Höhenlinie h_0 der Ebene ε verläuft senkrecht zur Rißachse in der Grundrißebene, die Schnittgerade der Ebene ε (Fallinie) mit der Aufrißebene verläuft im Winkel $\alpha = 45°$ zur Rißachse. Die Schnittfigur habe die Eckpunkte A, B, C, D. Um die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur $ABCD$ zu bestimmen, klappen wir die Ebene ε mit der Schnittfigur $ABCD$ um ihre Höhenlinie h_0 in die Grundrißebene. Dabei beschreiben die Punkte A, B, C, D Kreisbögen, deren Grundrisse senkrecht zur Höhenlinie h_0 verlaufen und deren Radien gleich den Abständen (Fallinien) der Punkte A, B, C und D von h_0 sind.

10 Gegeben sind

1. Grund- und Aufriß eines Quaders ($a = 1{,}5$ cm; $b = 2{,}5$ cm; $c = 3{,}0$ cm) und
2. eine geneigte Ebene ε durch ihre Höhenlinie h_0 im Abstand von 1,2 cm vom

E



E 41

Grundriß des Quaders in der Grundrißebene (dabei gilt: h_0 verläuft senkrecht zur Rißachse) und durch ihre Schnittgerade mit der Aufrißebene, die mit der Rißachse einen Winkel von $\alpha = 45°$ bildet.

Gesucht ist die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur $ABCD$.

Konstruktion (Bild E 42):

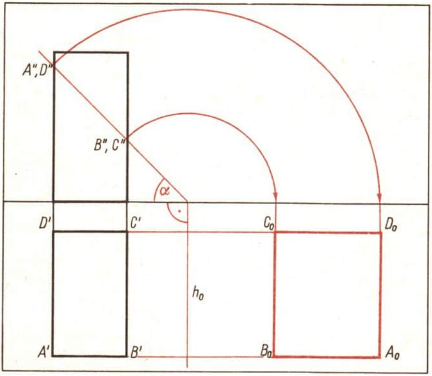
a) Wir zeichnen die Grundrisse der Fallinien der Punkte A, B, C und D (senkrecht zur Höhenlinie h_0).

b) Die Punkte A_0, B_0, C_0 und D_0 der geklappten Schnittfigur liegen auf den verlängerten Grundrissen der Fallinien.

c) Den Abstand der Punkte A_0, B_0, C_0 und D_0 von der Höhenlinie h_0 (wahre Länge der Fallinie) übertragen wir mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus dem Aufriß.

d) Wir verbinden die gefundenen Punkte A_0, B_0, C_0 und D_0 und erhalten damit die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur $ABCD$.

Aufgabe e 29

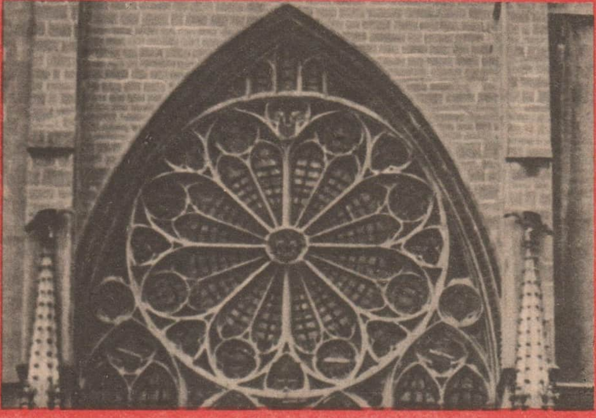


E 42

E

F Der Kreis

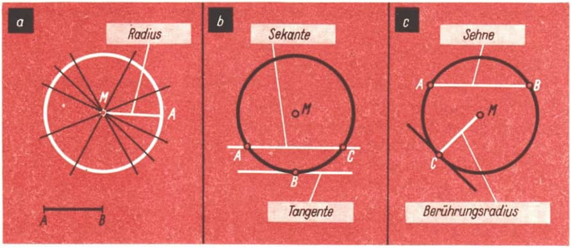
Schöne Bauwerke zeugen vom Können und Fleiß der Architekten, Baumeister und Handwerker; sie geben aber auch einen Einblick in die gesellschaftlichen Verhältnisse der Zeit, in der sie entstanden. In den vergangenen Jahrhunderten wurden die Kirchen, Schlösser und Paläste prächtig ausgestattet, während die Wohnstätten der Menschen, die mit ihrer Hände Arbeit den Wohlstand der Besitzenden schufen, sehr ärmlich waren. Ein Zierat der gotischen Kirchen waren Kreisfenster, die mit farbigem Glas ausgelegt waren (Bild f 1, Seite 177). Die Aufgliederung der Kreisfläche wurde unter Beachtung der Symmetrie mit Hilfe von Zirkel und Lineal zunächst in Konstruktionszeichnungen geplant.



Definition des Kreises; Sätze über den Kreis

1 Definition des Kreises

Wenn wir auf allen Strahlen mit einem gemeinsamen Anfangspunkt M von diesem Punkt M aus ein und dieselbe Strecke $\overline{AB}$ abtragen (Bild F 1 a), so erhalten wir einen Kreis.



F 1

DEFINITION: Die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt M dieser Ebene die Entfernung r haben, heißt Kreis um den Mittelpunkt M mit dem Radius r.

Einen Kreis mit dem Mittelpunkt M nennen wir kurz Kreis um M.
Der Begriff „Radius" wird in doppelter Bedeutung verwendet. Als Radien bezeichnet man einerseits „Strecken" (Bild F 1 a) und andererseits die gemeinsame Länge dieser Strecken.

(1) **a)** *Zeichne den Kreis um M mit dem Radius $r = 3$ cm!*
b) *Zeichne einen Radius dieses Kreises!*

Wir betrachten die Lagemöglichkeiten eines Punktes bezüglich eines Kreises: Ist r der Radius eines Kreises um M und ist A ein von M verschiedener Punkt der Ebene, so kann die Länge der Strecke $\overline{AM}$ entweder größer oder kleiner als r oder gleich r sein Im ersten Fall sagen wir, daß A außerhalb des Kreises liegt. Im zweiten Fall liegt A innerhalb des Kreises. Im dritten Fall sprechen wir davon, daß A auf dem Kreis liegt.

Aufgaben f 1 bis 4

2 Lagebeziehungen von Kreis und Gerade

(2) **a)** *Zeichne den Kreis um M mit dem Radius $r = 3$ cm! Konstruiere dann eine Gerade g, die von dem Punkt M den Abstand $a = 4$ cm hat!*
b) *Welche Möglichkeiten gibt es für a im Vergleich mit r?*
c) *Beschreibe für die verschiedenen Möglichkeiten von a die gegenseitige Lage von Kreis und Gerade!*

Aus dem Auftrag F 2 entnehmen wir folgende Vermutung, die wir als Satz formulieren, aber nicht beweisen:

2 **SATZ: Jede Gerade hat mit einem gegebenen Kreis höchstens zwei Punkte gemeinsam.**

Jede Gerade, die mit einem festen Kreis genau zwei Punkte gemeinsam hat, heißt **Sekante**[1] dieses Kreises (Bild F 1 b). Wir sagen dann, daß die betreffende Gerade den Kreis schneidet.
Jede Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat, heißt **Tangente**[2] dieses Kreises (Bild F 1 b). Wir sagen dann, daß die betreffende Gerade den Kreis berührt. Den gemeinsamen Punkt nennen wir den Berührungspunkt dieser Geraden mit dem Kreis.
Jede Strecke $\overline{AB}$, deren Endpunkte A und B auf einem Kreis liegen, heißt **Sehne** dieses Kreises (Bild F 1 c). Jede Sehne durch den Mittelpunkt M eines Kreises wird **Durchmesser** des Kreises genannt.
Außer Sekanten und Tangenten eines Kreises gibt es noch Geraden, die mit dem Kreis keinen gemeinsamen Punkt haben.

Aufgaben f 5 bis 9

3 Tangente und Berührungsradius

Durch einen Punkt A eines Kreises lassen sich viele Geraden legen. Es gibt jedoch nur eine einzige Gerade durch A, die Tangente dieses Kreises ist.

3 *Zeichne einen Kreis um einen Punkt M, wähle auf ihm einen Punkt A, und versuche in A die Tangente an den Kreis zu zeichnen!*

Mit Hilfe eines Lineals läßt sich die Tangente in einem Punkte eines Kreises nur näherungsweise zeichnen. Wir wollen ein Verfahren kennenlernen, das die *Konstruktion* der Tangente in einem Kreispunkt ermöglicht. Hierzu untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der Tangente in einem Punkt A eines Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\overline{AM}$.
Der Radius, der den Berührungspunkt einer Tangente mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet, heißt der **Berührungsradius** dieser Tangente (Bild F 1 c). Es gilt der

3 **SATZ: Wenn A der Berührungspunkt einer Tangente t an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M ist, so steht der Radius $\overline{AM}$ senkrecht auf t.**

Aus Klasse 6 wissen wir bereits, daß Sätze zu beweisen sind. Bei der Beweisführung dürfen wir uns nur auf bereits bekannte Sätze bzw. Definitionen stützen.
Beweis des Satzes F 3: Die Gerade t sei eine Tangente eines Kreises mit dem Mittelpunkt M und berühre diesen Kreis in A.
Wir fällen von M das Lot auf t. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

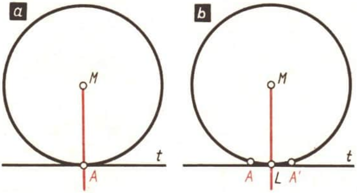
[1] secans (lat.), schneidend
[2] tangens (lat.), berührend

F

a) Der Fußpunkt des Lotes ist der Punkt A (Bild F 2a). In diesem Falle ist der Satz bewiesen.

b) Der Fußpunkt L des Lotes ist von A verschieden (Bild F 2b). In diesem Falle bestimmen wir das Bild der Geraden t und des Kreises bei der Spiegelung an der Geraden ML. Das Bild A' des Punktes A liegt dann sowohl auf der Geraden t als auch auf dem Kreis, da t wegen des rechten Winkels auf sich selbst abgebildet wird. Die Gerade t hat also mit dem Kreis zwei gemeinsame Punkte und ist demnach nicht Tangente an den Kreis. Da wir vorausgesetzt hatten, daß t Tangente sein soll, ist der Fall b) nicht möglich. Es kann immer nur der Fall a) eintreten.

F 2



Der Satz F 3 ermöglicht noch nicht die Konstruktion der Tangente, denn wir gehen in diesem Satz von der Tangente aus und stellen eine Behauptung über den Berührungsradius auf. Erst die Umkehrung dieses Satzes wird uns ein Konstruktionsverfahren liefern. Um die Umkehrung des Satzes zu finden, vertauschen wir die Voraussetzung mit der Behauptung.

	Voraussetzung	Behauptung
Satz	A ist der Berührungspunkt einer Tangente t an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M	Der Radius $\overline{AM}$ steht senkrecht auf der Geraden t
Umkehrung	Der Radius $\overline{AM}$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt M steht senkrecht auf einer Geraden t durch den Punkt A	Die Gerade t ist Tangente an den Kreis im Punkt A

4 **SATZ: Steht der Radius $\overline{AM}$ eines Kreises senkrecht auf einer Geraden t durch den Punkt A, so ist die Gerade t Tangente an den Kreis im Punkt A.**

Auch dieser Satz müßte bewiesen werden. Wir übergehen jedoch den Beweis. Die Sätze F 3 und F 4 lassen sich zu folgendem Satz zusammenfassen:

5 **SATZ: Eine Gerade t durch einen Punkt A eines Kreises mit dem Mittelpunkt M ist Tangente des Kreises *genau dann*, wenn der Radius $\overline{AM}$ senkrecht auf t steht.**

Mit dem Satz F 4 haben wir die Konstruktion der Tangente in einem Punkt A eines Kreises mit dem Mittelpunkt M auf die der Senkrechten im Punkt A auf die Gerade AM zurückgeführt. Diese Konstruktion wurde in Klasse 6 behandelt.

4 *Konstruiere die Tangente in einem Punkt A eines Kreises um M, und beschreibe die Konstruktion!*

Aufgaben f 10 bis 14

F

4 Symmetrieverhältnisse am Kreis

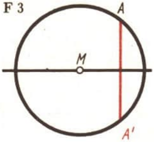
Gibt es eine Spiegelung an einer Geraden, durch die eine geometrische Figur auf sich abgebildet wird, so heißt diese Figur **axialsymmetrisch.** Die betreffende Gerade heißt **Symmetrieachse** dieser geometrischen Figur.
Jede Gerade, die durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, ist Symmetrieachse des Kreises. Kreise sind also axialsymmetrische Figuren (Bild F 3). Von dieser bereits bekannten Eigenschaft haben wir beim Beweis des Satzes F 3 Gebrauch gemacht.
Jeder Kreis wird bei jeder Drehung um seinen Mittelpunkt auf sich abgebildet (Bild F 4). Geometrische Figuren, die bei einer Drehung um einen Punkt M auf sich abgebildet werden, heißen **zentralsymmetrisch** mit dem Symmetriezentrum M. Kreise sind also zentralsymmetrische Figuren mit dem jeweiligen Mittelpunkt als **Symmetriezentrum.** Es gilt demnach folgender

6 **SATZ: Jeder Kreis ist sowohl axialsymmetrisch als auch zentralsymmetrisch. Jede Gerade durch den Mittelpunkt ist Symmetrieachse, der Mittelpunkt selbst ist Symmetriezentrum des betreffenden Kreises.**

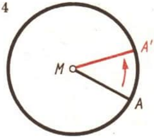
5 *Gegeben sind ein Kreis und eine Sekante dieses Kreises, die durch den Mittelpunkt geht. Der Kreis soll zunächst an dieser Sekante gespiegelt werden. Dann soll das dabei entstandene Bild mit einem Drehwinkel von 40° um den Mittelpunkt gedreht werden. Konstruiere das Bild des Kreises, das bei der Nacheinanderausführung dieser Bewegungen entsteht!*

Aufgaben f 15 bis 18

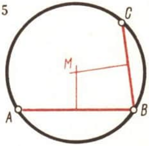
F 3



F 4



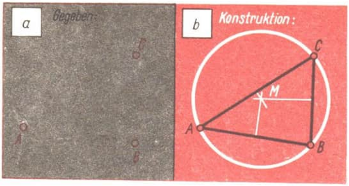
F 5



5 Umkreis und Inkreis von Dreiecken

Der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises liegt wegen der Symmetrieverhältnisse auf der Mittelsenkrechten einer beliebigen Sehne des Kreises. Soll bei gegebenem Kreis der Mittelpunkt M dieses Kreises konstruiert werden, so genügt es, den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zweier Sehnen zu bestimmen. Für die Konstruktion kann man zwei Sehnen wählen, die einen Punkt des Kreises gemeinsam haben, etwa wie die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ in Bild F 5. Diese Sehnen sind durch drei Punkte des Kreises bestimmt. Da es auf dem Kreis immer drei derartige Punkte gibt, ist die Konstruktion des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises stets ausführbar.
Es taucht nun die Frage auf, ob durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, immer ein Kreis geht.

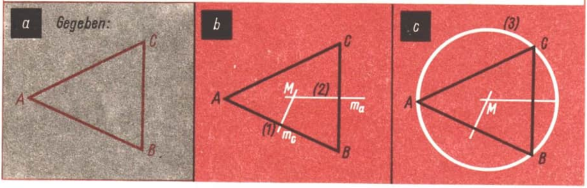
F



F 6

1 Gegeben sind drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen. Gesucht ist ein Kreis, der durch diese Punkte geht (Bild F 6). Falls es einen derartigen Kreis gibt, liegt sein Mittelpunkt auf den Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. Wir konstruieren zwei dieser Mittelsenkrechten. Ihren Schnittpunkt bezeichnen wir mit M. Der Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}$ geht durch die drei gegebenen Punkte.
Durch drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, ist das Dreieck ABC bestimmt. Die Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ sind gleichzeitig die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC. In Klasse 6 haben wir den Satz bewiesen, daß die Mittelsenkrechten eines Dreiecks durch genau einen gemeinsamen Punkt gehen. Dieser Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks ist von den Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt. Er ist also Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Eckpunkte des Dreiecks geht. Dieser Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}$ heißt der **Umkreis** des Dreiecks ABC. Da es nur einen einzigen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks gibt, hat jedes Dreieck genau einen Umkreis.

Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks



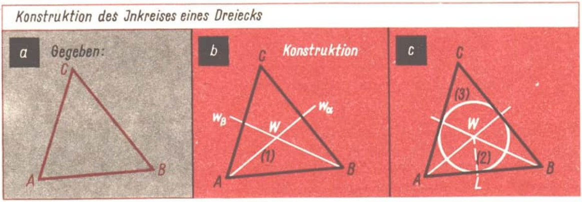
F 7

F

2 *Konstruktion (Bild F 7):*
1.) Wir konstruieren die Mittelsenkrechte m_c der Seite $\overline{AB}$.
2.) Wir konstruieren die Mittelsenkrechte m_a der Seite $\overline{BC}$. Sie schneidet m_c im Punkt M.
3.) Wir zeichnen den Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}$; er ist der gesuchte Umkreis.
Die Konstruktion ist eindeutig ausführbar.

6 *Der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks ABC hat von $\overline{AB}$ den Abstand $p = 2$ cm. Konstruiere ein Dreieck aus $\overline{AB} = 3$ cm und $\sphericalangle\, CAB = 50°$!*

Wie wir wissen, ist der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC von den Eckpunkten A, B und C gleich weit entfernt. Wir stellen nun die Frage, ob es auch Punkte der Ebene gibt, die von den Seiten des Dreiecks gleichen Abstand haben.
Aus Klasse 6 wissen wir, daß die Winkelhalbierenden eines Dreiecks durch genau einen gemeinsamen Punkt gehen. Dieser Punkt hat von allen drei Seiten des Dreiecks denselben Abstand. Er ist also Mittelpunkt eines Kreises, der die Seiten des Dreiecks von innen berührt. Dieser Kreis heißt der **Inkreis** des Dreiecks. Da es nur einen einzigen Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks gibt, hat jedes Dreieck genau einen Inkreis.



F 8

3 *Konstruktion (Bild F 8):*

1.) Wir konstruieren die Winkelhalbierenden w_α und w_β. Ihren Schnittpunkt bezeichnen wir mit W.
2.) Wir fällen von W das Lot auf die Gerade AB und bezeichnen den Fußpunkt des Lotes mit L.
3.) Wir zeichnen den Kreis um W mit dem Radius $\overline{WL}$; er ist der gesuchte Inkreis.

Die Konstruktion ist eindeutig ausführbar.

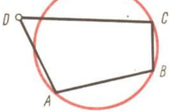
7 *Der Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks ABC hat von $\overline{AB}$ den Abstand $s = 2$ cm. Konstruiere ein Dreieck aus $\overline{AB} = 6$ cm und $\sphericalangle CAB = 50°$!*

Aufgaben f 19 bis 26

6 Sehnenvierecke; Winkel am Kreis

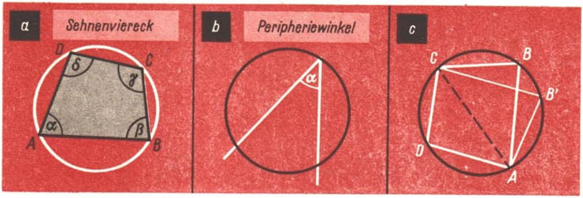
8 *Konstruiere den Umkreis eines Dreiecks ABC! Wähle einen Punkt D, der nicht auf dem Umkreis des Dreiecks liegt! Zeichne das Viereck $ABCD$ (Bild F 9a)!*

F 9



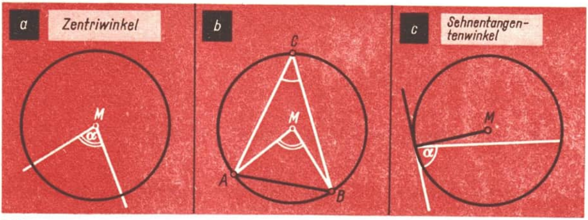
Das Viereck $ABCD$ im Auftrag F 8 hat keinen Umkreis. Begründung: Durch das Dreieck ABC ist ein Kreis, der Umkreis dieses Dreiecks festgelegt. Es gibt keinen weiteren Kreis, auf dem gleichzeitig die Punkte A, B und C liegen. Der Umkreis des Dreiecks enthält aber nicht den Punkt D. Es gibt also Vierecke, für die es keinen Kreis gibt, der durch alle Eckpunkte des Vierecks geht.

Andererseits lassen sich in jedem Kreis Vierecke zeichnen, deren Eckpunkte auf dem Kreis liegen (Bild F 10a). Die Seiten derartiger Vierecke sind Sehnen dieses Kreises. Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt **Sehnenviereck.**[1]



F 10

Wir betrachten die Innenwinkel des Sehnenvierecks im Bild F 10a. Die Scheitel liegen auf dem Umkreis, die Schenkel schneiden den Kreis.
Winkel, deren Scheitel auf einem Kreis liegen und deren Schenkel den Kreis schneiden, heißen **Peripheriewinkel** des betreffenden Kreises (Bild F 10b). Die Winkel eines Sehnenvierecks sind demnach Peripheriewinkel seines Umkreises.
Zeichnet man in einem Kreis zwei Sehnenvierecke $ABCD$ und $AB'CD$, so liegen die Scheitel der Peripheriewinkel ABC und $AB'C$ auf derselben Seite der Sehne $\overline{AC}$ (Bild F 10c). Zwei Peripheriewinkel ABC und $AB'C$, deren Scheitel B und B' auf derselben Seite der Sehne $\overline{AC}$ liegen, heißen **Peripheriewinkel über derselben Sehne.**
Verbindet man den Mittelpunkt M eines Kreises mit den Eckpunkten eines Sehnenvierecks $ABCD$, so erhält man Winkel, deren Scheitel der Mittelpunkt des Kreises ist.
Winkel, deren Scheitel der Mittelpunkt eines Kreises ist, heißen **Zentriwinkel** des Kreises (Bild F 11a).



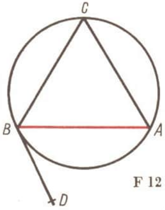
F 11

(9) *Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und eine Sehne $\overline{AB}$, die nicht durch M geht. Wieviel* **a)** *Peripheriewinkel und* **b)** *Zentriwinkel gibt es, die über der Sehne $\overline{AB}$ liegen?*

[1] Wir betrachten in der 7. Klasse nur konvexe Vierecke. Das sind Vierecke, in denen beide Diagonalen im Innern verlaufen. Mit dem Begriff „Viereck" ist also im folgenden stets ein konvexes Viereck gemeint.

Liegen der Scheitel C eines Peripheriewinkels ABC und der Scheitel M des Zentriwinkels AMB auf derselben Seite der Sehne $\overline{AB}$, so sagen wir, daß der Peripheriewinkel ABC und der Zentriwinkel AMB über derselben Sehne liegen oder einander zugehörig sind (Bild F 11 b).

Eine weitere Menge von Winkeln am Kreis zeichnet sich durch die folgenden Eigenschaften aus:
Der Scheitel liegt auf einem Kreis, ein Schenkel schneidet den Kreis, der andere Schenkel liegt auf einer Tangente an den Kreis (Bild F 11 c).
Derartige Winkel heißen **Sehnentangentenwinkel.**
Ein Peripheriewinkel ACB und ein Sehnentangentenwinkel ABD heißen einander zugehörig, wenn der Scheitel C des Peripheriewinkels und der Punkt D auf verschiedenen Seiten der Sekante AB liegen (Bild F 12).



F 12

(10) *Zeichne eine Sehne $\overline{AB}$, die nicht durch den Mittelpunkt M eines Kreises geht! Zeichne dann*

a) *den Zentriwinkel AMB,*
b) *einen Peripheriewinkel ACB, der mit dem Zentriwinkel AMB über derselben Sehne liegt und*
c) *den zum Peripheriewinkel ACB gehörigen Sehnentangentenwinkel mit dem Scheitel B!*

(11) *Was verstehst du unter einem zum Zentriwinkel AMB gehörigen Sehnentangentenwinkel?*

7 Satz über die Gegenwinkel eines Sehnenvierecks; Peripheriewinkelsatz

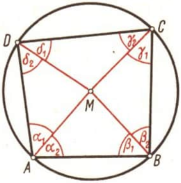
(12) *Zeichne ein Sehnenviereck $ABCD$ und ein Viereck $ABCD'$, das kein Sehnenviereck ist! Ermittle*

a) *die Summe der Winkel ABC und ADC sowie*
b) *die Summe der Winkel ABC und $AD'C$!*

Was vermutest du?

7 **SATZ über die Gegenwinkel eines Sehnenvierecks: In jedem (konvexen) Sehnenviereck betragen die Gegenwinkel zusammen 180°.**

F 13 a



Beweis: Wir bezeichnen die Winkel eines Sehnenvierecks $ABCD$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und den Kreismittelpunkt mit M. Der Punkt M kann entweder innerhalb oder außerhalb des Vierecks oder auf einer Seite des Vierecks liegen. Wir beweisen den Satz für den Fall, daß M innerhalb des Sehnenvierecks $ABCD$ liegt (Bild F 13 a).
Wir verbinden M mit den Eckpunkten des Vierecks und erhalten vier gleichschenklige Dreiecke, in denen die Basiswinkel jeweils gleich groß sind. Die Basiswinkel bezeichnen wir wie im Bild F 13 a.

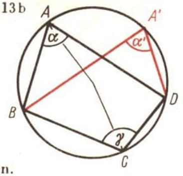
Aus $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 = 360°$
folgt wegen

$\alpha_2 = \beta_1$, $\gamma_1 = \beta_2$, $\gamma_2 = \delta_1$ und $\alpha_1 = \delta_2$
$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 360°$ bzw.
$\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180°$.

Da $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ und $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ ist, finden wir
$\alpha + \gamma = 180°$.

Ebenso ergibt sich $\beta + \delta = 180°$, *w. z. b. w.*
Die beiden anderen Fälle lassen sich entsprechend beweisen.

F 13b



(13) *Das Bild F 13b zeigt zwei Sehnenvierecke ABCD und A'BCD. Die Punkte A und A' liegen auf derselben Seite der Sehne BD. Wende auf beide Sehnenvierecke den Satz F 7 an! Welche Aussage ergibt sich daraus für die Winkel BAD und BA'D?*

8 **Peripheriewinkelsatz:**
Peripheriewinkel über derselben Sehne eines Kreises sind gleich groß.

Beweis: α und α' seien beliebige Peripheriewinkel über derselben Sehne $\overline{BD}$. Ihre Scheitel seien A und A' (Bild F 13b). Wir wählen einen Punkt C des Kreises, der mit A und damit auch mit A' auf verschiedenen Seiten der Geraden BD liegt. Den Winkel BCD bezeichnen wir mit γ. Dann gilt nach Satz F 7 $\alpha + \gamma = 180°$ und $\alpha' + \gamma = 180°$. Daraus folgt $\alpha = \alpha'$, *w. z. b. w.*

Aufgaben f 27 bis 32

8 Satz des Thales

(14) *Zeichne einen Peripheriewinkel über einem Durchmesser eines Kreises und ermittle seine Größe! Was vermutest du?*

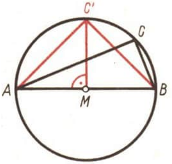
9 **Satz des Thales: Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel.**

Beweis: Der Winkel ACB sei ein beliebiger Peripheriewinkel über einem Durchmesser $\overline{AB}$ eines Kreises um M. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ schneide den Kreis in C' (Bild F 14). Wegen Satz F 8 gilt:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC'B.$$

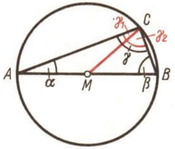
Wir zeigen, daß der Winkel $AC'B$ ein rechter Winkel ist. Die Dreiecke AMC' und MBC' sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, die bezüglich der Geraden MC' spiegelbildlich liegen. Da die Basiswinkel gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke stets 45° betragen, ist der Winkel $AC'B$ ein rechter Winkel. Damit ist auch der Winkel ACB ein rechter Winkel, *w. z. b. w.*

(15) *Führe einen anderen Beweis des Thalessatzes an Hand von Bild F 15! (Anleitung: Beachte, daß $\alpha = \gamma_1$ und $\beta = \gamma_2$ gilt!)*



F 14

F 15



F

114

Wenn also ein Peripheriewinkel ACB über einem Durchmesser $\overline{AB}$ eines Kreises um M gegeben ist, so ist dieser Winkel ein rechter Winkel. Das Dreieck ABC ist dann rechtwinklig mit dem Scheitel des rechten Winkels bei C. Wir gehen jetzt umgekehrt von einem rechtwinkligen Dreieck ABC (Scheitel des rechten Winkels bei C) aus und fragen, ob C auf einem Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ liegt.

16 *Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem Scheitel des rechten Winkels bei C! Konstruiere den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ und zeichne den Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}$! Was vermutest du?*

10 **SATZ: Der Scheitel C des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck ABC liegt stets auf dem Kreis um den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ mit dem Radius $\overline{MA}$.**

Dieser Satz, den wir nicht beweisen wollen, kehrt den Satz des Thales um. Folgende Tabelle soll zeigen, daß der Satz F 10 tatsächlich eine Umkehrung von Satz F 9 ist. Zur besseren Übersicht bezeichnen wir den Durchmesser mit $\overline{AB}$ und den Scheitel des Peripheriewinkels mit C.

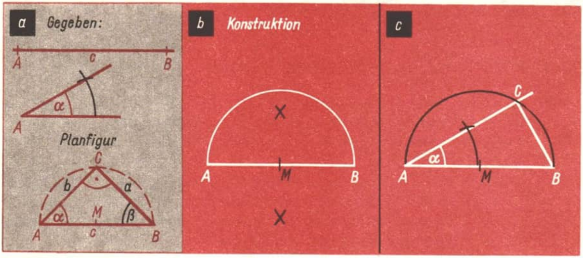
	Voraussetzung	**Behauptung**
Satz	$\overline{AB}$ ist Durchmesser eines Kreises und $\sphericalangle\, ACB$ ist Peripheriewinkel	$\sphericalangle\, ACB$ ist ein rechter Winkel
Umkehrung	$\sphericalangle\, ACB$ ist ein rechter Winkel	Der Kreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser geht durch C (so daß $\sphericalangle\, ACB$ Peripheriewinkel ist)

9 Anwendungen

Die Umkehrung des Thalessatzes wird bei vielen Konstruktionsaufgaben angewendet.

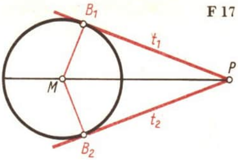
4 Es soll ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem Scheitel des rechten Winkels bei C konstruiert werden, wenn $\overline{AB} = 3$ cm und $\alpha = 30°$ gegeben sind.

F 16



Wir konstruieren den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ und zeichnen den Kreis mit dem Radius $\overline{MA}$ um M (Bild F 16). Wir tragen in A an den Strahl AB einen Winkel von 30° an. Derjenige Schenkel, der B nicht enthält, schneidet den Kreis in C. Das Dreieck ABC ist das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

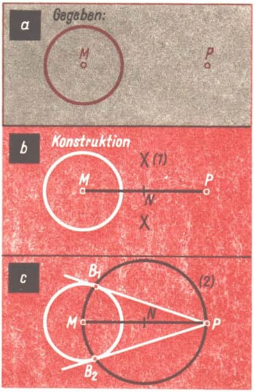
F 17



Der Satz F 10 wird auch für die Konstruktion der Tangenten von einem Punkt außerhalb eines Kreises an diesen Kreis angewendet.

Von jedem Punkt P außerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt M gibt es zwei Tangenten an diesen Kreis (Bild F 17). Sind B_1 und B_2 die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Kreis, so steht der Radius $\overline{MB_1}$ senkrecht auf der Tangente PB_1 und der Radius $\overline{MB_2}$ senkrecht auf der Tangente PB_2. Die Dreiecke PMB_1 und PMB_2 sind also rechtwinklig.

F 18



5 *Konstruktion (Bild F 18):*

1. Wir konstruieren den Mittelpunkt N der Strecke $\overline{PM}$.
2. Wir zeichnen den Kreis mit dem Radius $\overline{MN}$ um N und bezeichnen seine Schnittpunkte mit dem gegebenen Kreis mit B_1 und B_2.
3. Wir zeichnen die Geraden PB_1 und PB_2; sie sind die gesuchten Tangenten.

Die Berührungspunkte B_1 und B_2 der Tangenten von P an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M liegen bezüglich der Geraden PM symmetrisch. Bei der Spiegelung an der Geraden PM ist B_2 das Bild von B_1. Die Strecken $\overline{PB_1}$ und $\overline{PB_2}$ sind deshalb gleichlang.

Aufgaben f 33 bis 35

10 Zwei Kreise

Für die gegenseitige Lage zweier Kreise unterscheiden wir folgende Fälle:

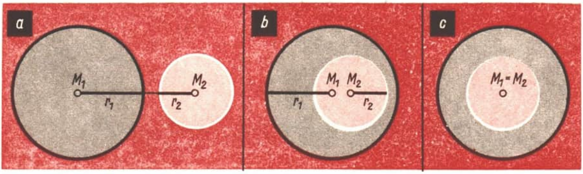
Fall 1: Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam (Bild F 19).

Fall 1 a: Jeder der beiden Kreise liegt außerhalb des anderen (Bild F 19a). Die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise ist dann größer als die Summe der Radien beider Kreise ($\overline{M_1M_2} > r_1 + r_2$).

Fall 1 b: Einer der beiden Kreise liegt innerhalb des anderen. Die Mittelpunkte beider Kreise sind verschieden (Bild F 19b). Die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise ist dann kleiner als die Differenz der Radien beider Kreise ($\overline{M_1M_2} < r_1 - r_2$).

Fall 1 c: Einer der beiden Kreise liegt innerhalb des anderen. Beide Kreise haben den Mittelpunkt gemeinsam (Bild F 19 c) $M_1 = M_2$. In diesem Fall heißen die Kreise **konzentrisch.** Die Fläche, die von zwei konzentrischen Kreisen begrenzt wird, heißt **Kreisring.**

F 19



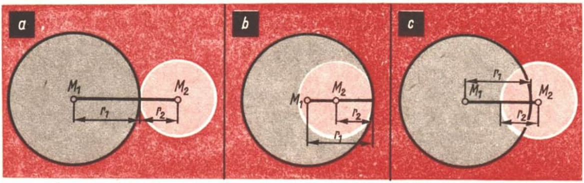
Fall 2: Die beiden Kreise haben genau einen Punkt gemeinsam (Bild F 20 a und b).

Fall 2 a: Die beiden Kreise berühren einander von außen (Bild F 20 a). Die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise ist dann gleich der Summe der Radien beider Kreise $\left(\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2\right)$.

Fall 2 b: Die beiden Kreise berühren einander von innen (Bild F 20 b). Die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise ist dann gleich der Differenz der Radien beider Kreise $\left(\overline{M_1M_2} = r_1 - r_2\right)$.

Fall 3: Die beiden Kreise haben genau zwei Punkte gemeinsam (Bild F 20 c). Die beiden Kreise schneiden einander (Bild F 20 c). Die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise ist in diesem Falle größer als die Differenz und kleiner als die Summe der Radien beider Kreise
$\left(r_1 - r_2 < \overline{M_1M_2} < r_1 + r_2\right)$.
(Falls zwei Kreise drei Punkte gemeinsam haben, so sind sie identisch.)

F 20

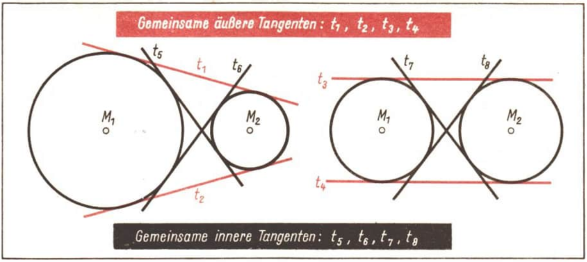


11 Gemeinsame Tangenten zweier Kreise

Eine Tangente eines Kreises, die gleichzeitig Tangente eines zweiten Kreises ist, heißt **gemeinsame Tangente beider Kreise.** Schneidet eine gemeinsame Tangente zweier Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 die Gerade M_1M_2 nicht zwischen den Punkten M_1 und M_2, so heißt sie **gemeinsame äußere Tangente** der beiden Kreise (Bild F 21).

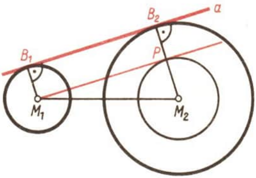
17 *In welchen der Fälle 1 bis 3 existieren gemeinsame äußere Tangenten der beiden Kreise?*

F



F 21

Die Konstruktion der gemeinsamen äußeren Tangenten zweier Kreise läßt sich auf die Konstruktion der Tangenten von einem Punkt außerhalb an einen Kreis zurückführen. Wir begründen diese Behauptung an Hand von Bild F 22 für den Fall 1. Die Radien $\overline{M_1B_1}$ und $\overline{M_2B_2}$ stehen senkrecht auf der Geraden a. Die Parallele zu a durch M_1 schneide die Strecke $\overline{M_2B_2}$ in P. Dann ist die Gerade M_1P Tangente von M_1 an den Kreis um M_2 mit dem Radius $\overline{M_2P}$. Wegen $\overline{M_1B_1} = \overline{PB_2} = r_1$ ergibt sich $\overline{M_2P} = \overline{M_2B_2} - \overline{B_2P} = r_2 - r_1$. Aus dieser Überlegung ergibt sich das folgende Verfahren zur Konstruktion der gemeinsamen äußeren Tangenten zweier Kreise.

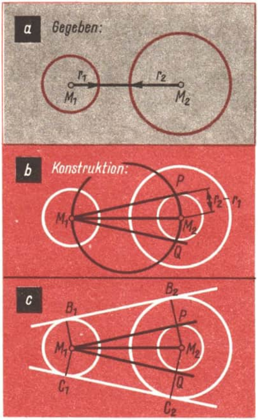


F 22

6 *Konstruktion (Bild F 23):*

1. Wir zeichnen um M_2 den Kreis mit dem Radius $r = r_2 - r_1$ und konstruieren mit Hilfe des Thaleskreises von M_1 die Tangenten an diesen Kreis. Die Berührungspunkte bezeichnen wir mit P und Q.
2. Wir zeichnen die Strahlen M_2P und M_2Q. Sie schneiden den gegebenen Kreis um M_2 in den Punkten B_2 bzw. C_2. Wir konstruieren weiter in M_1 die Senkrechten auf die Gerade M_1P sowie auf die Gerade M_1Q. Sie schneiden den gegebenen Kreis um M_1 in den Punkten B_1 bzw. C_1.
3. Wir zeichnen die Geraden B_1B_2 und C_1C_2; sie sind die gesuchten gemeinsamen äußeren Tangenten beider Kreise.

F 23



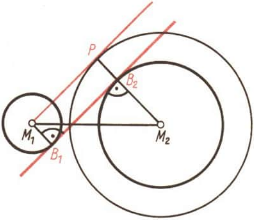
F

18 ***Beschreibe die Konstruktion der gemeinsamen äußeren Tangenten zweier Kreise im Fall 1, wenn deren Radien gleich groß sind!***

Schneidet eine gemeinsame Tangente zweier Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 die Gerade M_1M_2 zwischen den Punkten M_1 und M_2, so heißt sie **gemeinsame innere Tangente** der beiden Kreise (Bild F 21).

19 ***In welchen der Fälle 1 bis 3 existieren gemeinsame innere Tangenten der beiden Kreise?***

Die Konstruktion der gemeinsamen inneren Tangenten zweier Kreise läßt sich ebenfalls auf die Konstruktion der Tangenten von einem Punkt außerhalb an einen Kreis zurückführen. Diese Behauptung begründen wir an Hand von Bild F 24 für den Fall 1a. Die Radien $\overline{M_1B_1}$ und $\overline{M_2B_2}$ stehen senkrecht auf der Geraden a. Die Parallele zu a durch M_1 schneidet den Strahl M_2B_2 in P. Dann ist die Gerade M_1P Tangente von M_1 an den Kreis um M_2 mit dem Radius $\overline{M_2P}$.
Wegen
$\overline{M_1B_1} = \overline{B_2P} = r_1$
ergibt sich
$\overline{M_2P} = \overline{M_2B_2} + \overline{B_2P} = r_2 + r_1$.
Hieraus ergibt sich das folgende Verfahren zur Konstruktion der gemeinsamen inneren Tangenten zweier Kreise.

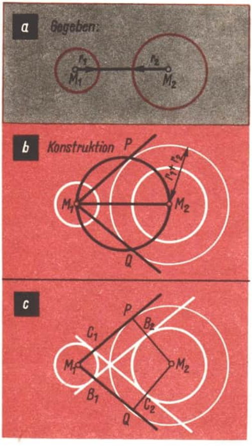


F 24

7 *Konstruktion (Bild F 25):*

1. Wir zeichnen um M_2 den Kreis mit dem Radius $r = r_1 + r_2$ und konstruieren mit Hilfe des Thaleskreises von M_1 die Tangenten an diesen Kreis. Die Berührungspunkte bezeichnen wir mit P und Q.
2. Wir zeichnen die Strahlen M_2P und M_2Q. Sie schneiden den gegebenen Kreis um M_2 mit dem Radius r_2 in den Punkten B_2 bzw. C_2. Wir konstruieren weiter in M_1 die Senkrechten auf die Gerade M_1P sowie auf die Gerade M_1Q. Sie schneiden den gegebenen Kreis um M_1 in den Punkten B_1 bzw. C_1.
3. Wir zeichnen die Geraden B_1B_2 und C_1C_2; sie sind die gesuchten inneren Tangenten beider Kreise.

F 25



20 ***Beschreibe die Konstruktion der gemeinsamen inneren Tangente für den Fall 2a (vgl. F 17)!***

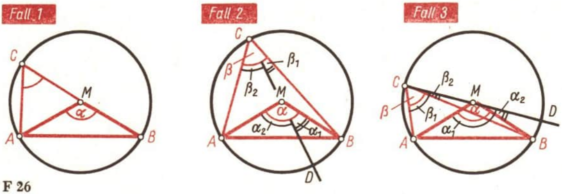
Aufgabe f 36

F

21 *Zeichne einen Zentriwinkel α und einen Peripheriewinkel β über ein und derselben Sehne $\overline{AB}$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt M! Ermittle die Größen von α und β! Was vermutest du?*

11 **Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz:**
Jeder Zentriwinkel ist doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über derselben Sehne.

Beweis: $\alpha = \sphericalangle AMB$ sei ein beliebiger Zentriwinkel und $\beta = \sphericalangle ACB$ sei ein beliebiger Peripheriewinkel. Der Punkt M liege nicht auf $\overline{AB}$, jedoch mit C auf derselben Seite von $\overline{AB}$. Der Mittelpunkt M liegt dann entweder auf einem Schenkel oder innerhalb des Winkels β oder außerhalb des Winkels β (Bild F 26).



F 26

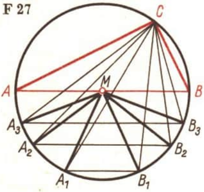
1. Fall: M liege auf $\overline{BC}$.
Das Dreieck AMC ist gleichschenklig; es gilt $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC$. Der Winkel AMB ist Außenwinkel des Dreiecks MCA; es gilt $\sphericalangle AMB = \sphericalangle MCA + \sphericalangle MAC$.
Daraus folgt $\alpha = 2\beta$.

2. Fall: M liege innerhalb des Winkels β.
Der Strahl CM schneide den Kreis in D. Nach Fall 1 gilt: $\alpha_1 = 2\beta_1$ und $\alpha_2 = 2\beta_2$.
Daraus folgt $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$. Wegen $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ und $\beta = \beta_1 + \beta_2$ ergibt sich $\alpha = 2\beta$.

3. Fall: M liege außerhalb des Winkels β.
Der Strahl CM schneide den Kreis in D. Nach Fall 2 gilt: $\alpha_1 = 2\beta_1$ und $\alpha_2 = 2\beta_2$.
Daraus folgt $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta_1 - 2\beta_2 = 2(\beta_1 - \beta_2)$. Wegen $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ und $\beta = \beta_1 - \beta_2$ ergibt sich $\alpha = 2\beta$.

Wir wollen den Zusammenhang zwischen den Sätzen F 9 und F 11 an Hand von Bild F 27 erläutern. In diesem Bild sind in einem Kreis verschiedene Parallelen A_nB_n zu einem Durchmesser $\overline{AB}$ gezeichnet. Nach Satz F 11 ist beispielsweise der Zentriwinkel A_2MB_2 doppelt so groß wie der Peripheriewinkel A_2CB_2. Fällt eine der Sehnen $\overline{A_nB_n}$ mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ zusammen, so geht der Zentriwinkel in einen gestreckten Winkel über. Er ist doppelt so groß wie der Winkel ACB, der nach Satz F 9 ein rechter Winkel ist. Der Satz des Thales kann also als Grenzfall des Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satzes aufgefaßt werden.

F 27



F

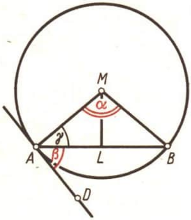
13 Sätze über Sehnentangentenwinkel

(22) *Zeichne in einem Kreis mit dem Mittelpunkt M einen Zentriwinkel AMB! Konstruiere in A und B die Tangenten des Kreises! Vergleiche*
a) *die Sehnentangentenwinkel miteinander und*
b) *den Zentriwinkel mit einem zugehörigen Sehnentangentenwinkel!*
Was vermutest du?

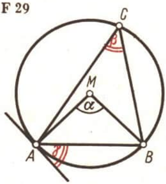
12 **SATZ: Jeder Zentriwinkel eines Kreises ist doppelt so groß wie ein zugehöriger Sehnentangentenwinkel.**

Beweis: $\alpha = \sphericalangle AMB$ sei Zentriwinkel und $\beta = \sphericalangle BAD$ sei ein zugehöriger Sehnentangentenwinkel (Bild F 28). Den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ bezeichnen wir mit L. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ geht durch M. Da das Dreieck ABM gleichschenklig ist, ist die Mittelsenkrechte ML zugleich Winkelhalbierende des Zentriwinkels α. Den Winkel LAM bezeichnen wir mit γ. Da der Radius $\overline{MA}$ senkrecht auf der Geraden AD steht, gilt $\beta + \gamma = 90°$. Da das Dreieck MLA rechtwinklig ist, gilt $\frac{\alpha}{2} + \gamma = 90°$.

Daraus folgt $\beta = \frac{\alpha}{2}$ bzw. $\alpha = 2\beta$, **w. z. b. w.**



F 28



F 29

(23) *Vergleiche die Sätze F 11 und F 12 miteinander! Zu welcher Feststellung gelangst du?*

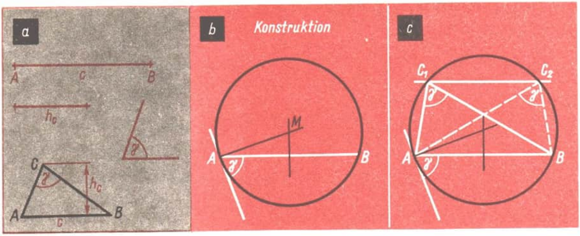
13 **SATZ: Jeder Peripheriewinkel eines Kreises ist genauso groß wie ein zugehöriger Sehnentangentenwinkel.**

Beweis: α sei Zentriwinkel, β ein zugehöriger Peripheriewinkel und γ ein zugehöriger Sehnentangentenwinkel (Bild F 29). Aus $\alpha = 2\beta$ (nach Satz F 11) und $\alpha = 2\gamma$ (nach Satz F 12) folgt $2\beta = 2\gamma$ bzw. $\beta = \gamma$, **w. z. b. w.**

Die Sätze über den Sehnentangentenwinkel werden zu Dreieckskonstruktionen herangezogen.

8 Es ist ein Dreieck ABC aus $\overline{AB} = c = 3{,}0$ cm, $\gamma = 70°$ und $h_c = 1{,}5$ cm zu konstruieren.

F



F 30

Konstruktion (Bild F 30):

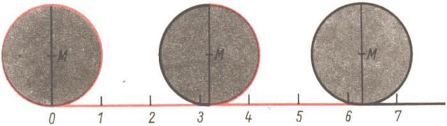
1. Wir zeichnen die Strecke $\overline{AB} = c = 3{,}0$ cm und die Mittelsenkrechte dieser Strecke. In A tragen wir an $\overline{AB}$ den Winkel $\gamma = 70°$ als Sehnentangentenwinkel an. Wir errichten in A die Senkrechte auf dem freien Schenkel von γ. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und des Lotes liefert den Mittelpunkt für den Kreis, in dem γ Sehnentangentenwinkel ist. Der Kreis um M mit dem Radius $\overline{AM}$ ergibt eine Bestimmungslinie für den Punkt C.
2. Im Abstand $h_c = 1{,}5$ cm ziehen wir eine Parallele zu AB. Diese Parallele schneidet den Kreis um M in zwei Punkten, die wir mit C_1 und C_2 bezeichnen. Wir erhalten die Dreiecke ABC_1 bzw. ABC_2, die beide die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgaben f 37 bis 45

Kreisberechnung

14 Umfang von Kreisen

(24) *Fertige aus Pappe Kreisflächen an, deren Durchmesser 2,0 cm, 4,0 cm, 6,0 cm, 8,0 cm, 10,0 cm und 12,0 cm betragen! Ermittle den jeweiligen Umfang dieser Flächen! Schneide sie dazu aus und rolle sie auf einem Lineal ab (Bild F 31)! Stelle folgende Tabelle auf!*



F 31

Durchmesser d in cm	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0
Umfang u in cm						
Quotient $\frac{u}{d}$						

F

An Hand der dritten Zeile der Tabelle im Auftrag F 24 ist festzustellen, daß der Quotient $\frac{u}{d}$ annähernd eine konstante Zahl k ist. Wir vermuten demnach

$$\frac{u}{d} = k \quad \text{bzw.} \quad u = k \cdot d \quad \text{bzw.} \quad u = k \cdot 2r.$$

Mit Hilfsmitteln, die uns in Klasse 7 noch nicht zur Verfügung stehen, kann man beweisen, daß diese Beziehung für jeden Kreis gilt. Der Faktor, mit dem der Durchmesser eines Kreises multipliziert werden muß, um den Umfang des Kreises zu erhalten, wird mit dem griechischen Buchstaben π (lies: pi) bezeichnet.
Die Zahl π ist also als Quotient aus Umfang und Durchmesser eines beliebigen Kreises definiert. Die Zahl π läßt sich nicht als Bruch $\frac{p}{q}$ darstellen. Sie ist wie die Mehrzahl der Quadratwurzeln eine **irrationale Zahl** (Seite 81). Sie beträgt näherungsweise 3,14 oder $\frac{22}{7}$. Die ersten 35 Stellen hinter dem Komma lauten:

$$\pi = 3{,}14\,159\;265\,35\;897\,93\;238\,46\;264\,33\,832\,79\,502\,88\,419\,71\;\ldots$$

14 **SATZ: Der Umfang u eines Kreises mit dem Radius r beträgt:**

$$\boxed{u = \pi d \quad \text{bzw.} \quad u = 2\pi r}$$

Zu jedem Zentriwinkel eines Kreises gehört ein **Kreisbogen,** der innerhalb des betreffenden Winkels liegt (Bild F 32). Wir sagen, daß der Kreisbogen b im Bild F 32 dem Zentriwinkel α zugeordnet oder zugehörig ist.

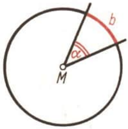
25 *Berechne* **a)** *die Länge eines Halbkreises,* **b)** *die Länge eines Viertelkreises und* **c)** *die Länge eines Kreisbogens, der einem Zentriwinkel von 1° zugehörig ist! (Der Radius betrage in allen Fällen r cm.)*

Die Länge e eines Kreisbogens mit dem Radius r, der einem Zentriwinkel von 1° zugehörig ist, beträgt $e = \frac{u}{360°}$. Dabei ist u der Umfang des Kreises.
Die Länge b eines Kreisbogens mit dem Radius r, der einem Zentriwinkel von $\alpha°$ zugehörig ist, beträgt das α-fache von e.

$$b = \frac{u}{360°} \cdot \alpha.$$

Aus dieser Beziehung finden wir die Verhältnisgleichung

15 $$\boxed{\frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360°}}$$



F 32

Mit Hilfe dieser Verhältnisgleichung können wir die Länge des Kreisbogens berechnen, falls außer der Länge des Umfangs die Größe des zugehörigen Zentriwinkels gegeben ist. Umgekehrt können wir die Größe des Zentriwinkels berechnen, wenn außer der Länge des Umfangs die Länge des Kreisbogens gegeben ist.

9 Gesucht ist die Länge eines Kreisbogens, der einem Zentriwinkel von $\alpha = 100°$ zugehörig ist. Der Radius des Kreises beträgt $r = 4$ cm.

F

Aus $\dfrac{b}{u} = \dfrac{\alpha}{360°}$ ergibt sich

$$b = \frac{u}{360°} \cdot \alpha.$$

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnen wir also

$$b = \frac{2\pi \cdot 4\ \text{cm}}{360°} \cdot 100° \quad \text{und erhalten}$$

$$b \approx 7\ \text{cm}.$$

10 Gesucht ist die Größe eines Zentriwinkels, der einem Kreisbogen von der Länge $b = 10$ cm zugehörig ist. Der Radius des Kreises beträgt $r = 5$ cm!

Aus $\dfrac{b}{u} = \dfrac{\alpha}{360°}$ ergibt sich

$$\alpha = \frac{b \cdot 360°}{u}$$

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnen wir also

$$\alpha = \frac{10\ \text{cm} \cdot 360°}{2 \cdot \pi \cdot 5\ \text{cm}} \quad \text{und erhalten}$$

$$\alpha \approx 114{,}7°.$$

11 Gesucht ist der Radius eines Kreises, in dem ein Kreisbogen von 5 cm Länge einem Zentriwinkel von 50° zugehörig ist.

Aus $\dfrac{b}{u} = \dfrac{\alpha}{360°}$ ergibt sich

$$u = \frac{360° \cdot b}{\alpha}$$

$$2\pi r = \frac{360° \cdot b}{\alpha}$$

$$r = \frac{b \cdot 360°}{2\pi\alpha}$$

Mit Hilfe des Rechenstabs berechnen wir also

$$r = \frac{5\ \text{cm} \cdot 360°}{2 \cdot \pi \cdot 50°} \quad \text{und erhalten} \qquad \text{Ü: } \frac{360 \cdot 5}{6 \cdot 50} = \frac{60 \cdot 1}{1 \cdot 10} = 6$$

$$r \approx 5{,}7\ \text{cm}.$$

Aufgaben f 46 bis 50

F

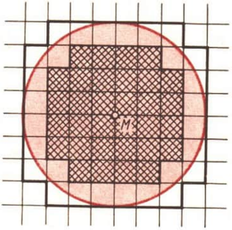
15 Inhalt von Kreisflächen

Wie wir aus früheren Klassen wissen, kann der Inhalt einer Rechteckfläche durch „Auszählen" ermittelt werden, indem sie mit einem quadratischen Gitter überdeckt wird. Wir wenden diese Methode an, um einen Näherungswert für den Inhalt einer Kreisfläche zu erhalten. Wir überdecken eine beliebige Kreisfläche mit einem quadratischen Gitter (Bild F 33). Die doppelt schraffierte Fläche enthält alle Quadrate, die ganz innerhalb des Kreises liegen. Wir bezeichnen den Inhalt dieser

Fläche mit A_i. Die stark rot umrandete Fläche enthält die Kreisfläche vollständig. Den Inhalt dieser Fläche bezeichnen wir mit A_a. Den Kreisinhalt bezeichnen wir mit A. Dann gilt:

$$A_i \leqq A \leqq A_a.$$

Wird das quadratische Gitter verfeinert, so wird die Zahl A_i größer und die Zahl A_a kleiner. Bei fortgesetzten Verfeinerungen des Gitters weichen die Werte für A_i und A_a immer weniger voneinander ab, d. h., die Werte für A_i und A_a nähern sich so einem gemeinsamen Wert, der die Maßzahl des Kreisinhalts ist.



F 33

(26) *Zeichne Kreise mit den Radien 1,0 cm; 2,0 cm; 3,0 cm; 4,0 cm; 5,0 cm und 6,0 cm auf Millimeterpapier! Ermittle näherungsweise die zugehörigen Kreisinhalte durch Auszählen der Quadratflächen von 0,5 cm Seitenlänge entsprechend Bild F 33! Schätze die Kreisinhalte aus den gefundenen Zahlen, und stelle folgende Tabelle auf!*

r^2 in cm²	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2
Kreisinhalt A in cm²						
Quotient $\frac{A}{r^2}$						

An Hand der dritten Zeile der Tabelle im Auftrag F 26 ist festzustellen, daß der Quotient $\frac{A}{r^2}$ annähernd eine konstante Zahl k ist. Die Ungenauigkeiten sind größer als bei der Berechnung des Quotienten $\frac{u}{d}$, weil die Kreisinhalte geschätzt wurden. Wir erhalten demnach

$$\frac{A}{r^2} = k \quad \text{bzw.} \quad A = k \cdot r^2.$$

Auch diese Beziehung gilt für alle Kreise. Für einen Beweis dieser Behauptung stehen uns jedoch die Hilfsmittel noch nicht zur Verfügung. Man kann zeigen, daß der Proportionalitätsfaktor k die nun schon bekannte irrationale Zahl π ist, was hier nicht näher ausgeführt werden soll.

Die Zahl π haben wir bisher als Quotient $\frac{u}{d}$ definiert; sie könnte also auch als Quotient $\frac{A}{r^2}$ definiert werden, wobei A der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r ist.

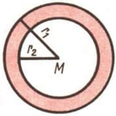
16 **SATZ: Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r beträgt**

$$\boxed{A = \pi \cdot r^2 \text{ bzw. } A = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2}$$

Wird die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises auf einen Kreisring mit den Radien r_1 und r_2 angewendet (Bild F 34), so erhalten wir den Flächeninhalt A_R des betreffenden Kreisringes.

$$\boxed{A_R = \pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2} \quad (r_1 > r_2) \text{ bzw.}$$

$$\boxed{A_R = \pi \cdot (r_1^2 - r_2^2)} \; .$$

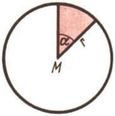


F 34

Aufgaben f 51 bis 55

16 Kreisausschnitte

F 35



Eine Fläche, die von einem Kreisbogen und den Schenkeln des zugehörigen Zentriwinkels begrenzt wird, heißt **Kreisausschnitt** (Bild F 35). Der Zentriwinkel wird auch Öffnungswinkel des Kreisausschnittes genannt.

(27) *Berechne* **a)** *den Inhalt einer Halbkreisfläche,* **b)** *den Inhalt einer Viertelkreisfläche und* **c)** *den Inhalt eines Kreisausschnittes mit einem Öffnungswinkel von 1°!*

Der Flächeninhalt A_e eines Kreisausschnittes mit dem Öffnungswinkel von 1 beträgt

$$A_e = \frac{A}{360°} \, .$$

Der Flächeninhalt A_α eines Kreisausschnittes mit einem Öffnungswinkel α beträgt das α-fache von A_e:

$$A_\alpha = \frac{A}{360°} \cdot \alpha \, .$$

Aus dieser Beziehung finden wir die Verhältnisgleichung

17

$$\boxed{\frac{A_\alpha}{A} = \frac{\alpha}{360°}}$$

Nach Satz F 17 läßt sich der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes berechnen, wenn die Größe des Öffnungswinkels und der Radius des Kreises bekannt sind.

(28) *Welche Aufgabenstellungen sind auf Grund dieser Verhältnisgleichungen noch möglich?*

Wenn wir die Verhältnisgleichung $\frac{A_\alpha}{A} = \frac{\alpha}{360°}$ mit der Verhältnisgleichung $\frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360°}$ vergleichen, so finden wir außerdem die Verhältnisgleichung $\frac{A_\alpha}{A} = \frac{b}{u}$.

(29) *Erläutere diese Verhältnisgleichung!*
Die Länge eines Kreisbogens mit dem Radius $r = 4$ cm beträgt $b = 8$ cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des von diesem Kreisbogen begrenzten Kreisausschnittes?

Aufgaben f 56 bis 72

Zur Geschichte der Kreislehre

Der Kreis gehört zu den Figuren, um deren Inhalts- und Umfangsberechnung sich die Menschen schon vor sehr langer Zeit bemühten. Der Grund hierfür ist in der Bedeutung kreisförmiger Gegenstände, z. B. der Töpferscheibe und des Wagenrades, zu suchen. Die Verbreitung des Wagenrades, dessen Erfindung naturgemäß in Steppengegenden und nicht in waldreicher Gegend geschehen mußte, begann im Gebiet zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris (etwa dem heutigen Irak) schon um 3500 v. u. Z., in Südrußland um 2000 v. u. Z. und in den waldreichen Gegenden Mittel- und Nordeuropas um 1000 v. u. Z.

Ursprünglich wurde die Konstruktion des Kreises mit Hilfe eines gespannt gehaltenen Seiles ausgeführt, dessen eines Ende an einem festen Stab befestigt war. Die aus der griechischen Sprache stammenden Wörter „Zentrum“ und „Peripherie“ bedeuten eigentlich „Stab“ bzw. das „Herumgetragene“.

Für die alten Völker stellte die Berechnung des Verhältnisses der Maßzahlen von Kreisumfang und Durchmesser, also die Bestimmung der Zahl π, ein sehr schwieriges Problem dar.

Im alten Babylon, einem wichtigen Kulturzentrum des Altertums am Ufer des Euphrat, verwendeten die Mathematiker im zweiten Jahrtausend vor unserer Zeitrechnung für π die grobe Näherung 3. Dagegen rechneten in Ägypten manche Mathematiker schon mit der besseren Annäherung $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$, was auf $\pi = 3{,}160\,5$ hinausläuft. Bei der Umfangsbestimmung eines Kreises mit dem Durchmesser 10 cm hätte also der babylonische Rechner als Kreisumfang $3 \cdot 10$ cm $= 30$ cm berechnet, der altägyptische Rechner $3{,}160\,5 \cdot 10$ cm $\approx 31{,}6$ cm, und wir würden $3{,}141\,6 \cdot 10$ cm $\approx 31{,}4$ cm ermitteln.

Viele Sätze über den Kreis, z. B. der sogenannte Thalessatz, wurden von babylonischen Mathematikern des 2. und 1. Jahrtausends v. u. Z. benutzt. Aber erst die griechischen Mathematiker brachten die Kreislehre in eine zusammenhängende, streng systematische und auf Festlegungen und Beweisen aufbauende Darstellung. THALES VON MILET (etwa 624 bis etwa 548 v. u. Z.) z. B. soll, wie die Überlieferung berichtet, als erster wirklich bewiesen

F 36 Chinesische Methode der Kreisberechnung durch Einbeschreiben regulärer Polygone. 3. Jahrhundert u. Z.

haben, daß der Durchmesser die Kreisfläche halbiert; aber natürlich war von dieser Eigenschaft genauso wie vom Inhalt des nach THALES benannten Satzes schon viel früher Gebrauch gemacht worden. Später ist die Kreislehre, soweit sie damals bekannt war, durch EUKLEIDES von Alexandria (etwa 365 bis 300 v. u. Z.) in seinem berühmten Werk „Elemente" dargestellt worden.

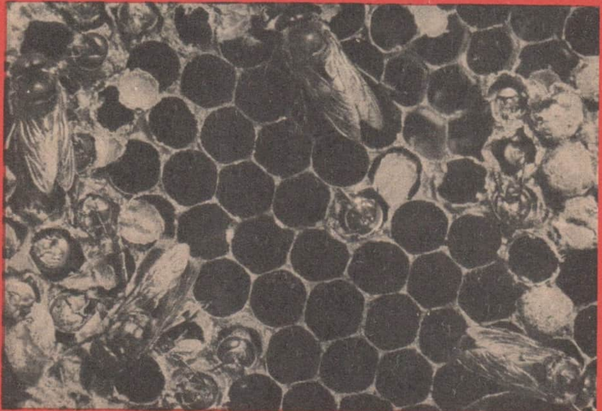
F 37 Seite aus der ersten europäischen Druckausgabe (1482) der „Elemente" von EUKLEIDES in lateinischer Sprache. Diese Seite enthält die grundlegenden Definitionen der Elementargeometrie, darunter des Kreises.

Die Berechnung des Flächeninhalts und des Umfangs eines Kreises stellten auch in der alten griechischen Mathematik zentrale Probleme dar. Die meisten Mathematiker der Antike beschäftigten sich allerdings mit dieser Frage nur aus Interesse am mathematischen Problem und nicht aus dem Wunsch heraus, der Praxis einen Schritt voran zu helfen. Dagegen war der große Mathematiker ARCHIMEDES von Syrakus (etwa 287 bis 212 v. u. Z.) den Erfordernissen der Technik weit mehr zugewandt. Einen großen Anteil hatte er auch an der Verteidigung seiner Heimatstadt gegen feindliche Eroberer. Archimedes hatte sich auch um die Bestimmung des Flächeninhalts und des Umfangs eines Kreises große Verdienste erworben. Er fand, indem er einem Kreis regelmäßige Vielecke umbeschrieb bzw. einbeschrieb, daß der Wert von π zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liegt (Lerneinheit F 15). Schreibt man diese Werte in Dezimalzahlen, so erhält man die Abschätzung $3{,}140\,845\ldots < \pi < 3{,}142\,857\ldots$

Im Mittelalter war in Europa das Niveau der Wissenschaften, darunter auch der Mathematik, sehr niedrig; zum Teil lag es an der wissenschaftsfeindlichen Haltung der christlichen Kirche, zum Teil an dem niedrigen Stand der Produktivkräfte im Feudalismus. Erst im 14. und 15. Jh. entwickelten sich in Europa Handel und Produktion im Feudalismus wesentlich vorwärts. Damit stieg auch das Interesse an den Wissenschaften. Über Sizilien und Spanien, die geographischen Berührungspunkte mit dem islamischen Weltreich, wurden die europäischen Gelehrten mit der außerordentlich hochentwickelten arabischen Mathematik und mit den aus Indien stammenden Zahlzeichen vertraut. Die Leistungen von ARCHIMEDES und EUKLEIDES wurden nun auch in Europa bekannt. Die Kreislehre wurde wieder zum Gegenstand von Forschungen. Heutzutage kann die Zahl π mit Hilfe von Rechenautomaten immer besser angenähert werden.

G Stereometrie

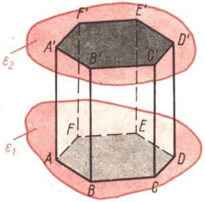
Bienenwaben bestehen aus Zellen, die von den Bienen aus Wachs gefertigt werden und zum Aufziehen der Brut dienen. Die Zellen bestehen aus einem ziemlich weichen Material, das die Bienen an der Bauchseite ihres Hinterleibes absondern. Die Zellenform gibt aber der Wabe die nötige Festigkeit, sie ermöglicht einen sparsamen Verbrauch des Wachses und sichert dabei eine gute Raumausnutzung.
Die Zellen der Bienenwabe haben näherungsweise die Gestalt eines Körpers, den der Mathematiker ein sechsseitiges Prisma nennt. Die Berechnung von Prismen und Kreiszylindern wird uns im nächsten Kapitel beschäftigen.



1 Prismen

Die Stereometrie ist ein Teilgebiet der Geometrie, in dem räumliche Lagebeziehungen untersucht werden. Zur Stereometrie gehört auch die Körperberechnung. Die Körper können in ebenflächig und in krummflächig begrenzte Körper eingeteilt werden. **Ebenflächig begrenzte Körper,** z. B. Quader, werden nur von ebenen Flächen begrenzt. **Krummflächig begrenzte Körper,** z. B. Kugeln, Zylinder, werden ganz oder teilweise von gekrümmten Flächen begrenzt.
Zu den ebenflächig begrenzten Körpern gehören die Prismen. Im Bild G 1 werden zwei zueinander parallele Ebenen ε_1 und ε_2 dargestellt. In der Ebene ε_1 liegt das Sechseck $ABCDEF$. Die Senkrechten auf der Ebene ε_1 in den Eckpunkten dieses Sechsecks schneiden die Ebene ε_2 in den Punkten A', B', C', D', E' bzw. F'. Der ebenflächig begrenzte Körper, der durch die Eckpunkte der Sechsecke in den beiden parallelen Ebenen bestimmt wird, ist ein Prisma.
Die Begrenzungsflächen, die in den Ebenen ε_1 und ε_2 liegen, sind kongruent. Sie heißen Grund- bzw. Deckfläche. Die übrigen Begrenzungsflächen sind Parallelogramme. Sie heißen Seitenflächen des Körpers. Die Kanten des Körpers, die weder in der Ebene ε_1 noch in der Ebene ε_2 liegen, heißen Seitenkanten.

G 1

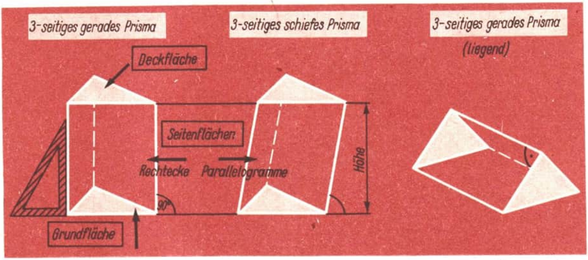


1 **DEFINITION: Ein ebenflächig begrenzter Körper heißt *Prisma*, wenn er begrenzt wird**

a) von zwei zueinander parallelen und kongruenten n-Ecksflächen und
b) von n Parallelogrammflächen.

Es gibt gerade und schiefe Prismen. Bei geraden Prismen stehen die Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche. Die begrenzenden Parallelogramme sind dann stets Rechtecke.
Man unterscheidet 3seitige, 4seitige, ..., n-seitige Prismen. Der Abstand der Grundfläche von der Deckfläche heißt Höhe des Prismas. Bei geraden Prismen ist die Höhe gleich der Länge der Seitenkanten. Bei schiefen Prismen ist die Höhe gleich dem Lot von einem Punkt der Deckfläche auf die Ebene, in der die Grundfläche liegt (Bild G 2).

G 2



(1) *Untersuche, ob* **a)** *Quader und* **b)** *Würfel auch Prismen sind!*
Anleitung: Benutze die Definition G 1 und untersuche:
1. Ist der Körper ebenflächig begrenzt?
2. Gibt es zwei Flächen, die in zueinander parallelen Ebenen liegen?
3. Sind diese Flächen kongruent?
4. Sind die Seitenflächen Parallelogramme?

(2) *Stelle ein dreiseitiges gerades Prisma* **a)** *im Grund- und Aufriß und* **b)** *im Schrägbild dar!*

Aufgaben g 1 und 2

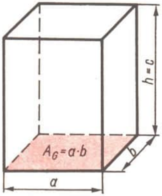
2 Volumen eines Prismas

Das Volumen eines Quaders kann ermittelt werden, indem man ihn mit einer geeigneten Raumeinheit vergleicht. Mit Hilfe einer Maßzahl wird angegeben, wieviel Raumeinheiten oder geeignete Bruchteile von ihr der betreffende Quader enthält. Rechnerisch können wir das Volumen eines Quaders ermitteln, indem wir die Kantenlängen a, b und c des Quaders miteinander multiplizieren:

$$\boxed{\textbf{Quader: } V = a \cdot b \cdot c} \qquad (1)$$

[1] Die Kantenlängen eines Quaders betragen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm und $c = 6$ cm. Das Volumen V beträgt dann

$V = a \cdot b \cdot c$
$V = 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 72\text{ cm}^3.$



G 3

(3) *Das Volumen V eines Quaders betrage $V = 350$ cm³. Die Längen zweier Kanten seien bekannt; es sei $a = 5$ cm und $b = 7$ cm. Wie lang ist die dritte Kante?*

Die Kanten eines Würfels haben alle dieselbe Länge a.

$$\boxed{\textbf{Würfel: } V = a^3} \qquad (2)$$

(4) *Das Volumen V eines Würfels betrage $V = 27$ cm³. Welchen Flächeninhalt hat eine Begrenzungsfläche des Würfels?*

Wir werden nun eine Formel für die Volumenberechnung beliebiger Prismen aufstellen. Hierzu formen wir zunächst die Formeln (1) und (2) um:
Sind a, b und c die Kantenlängen eines Quaders, so beträgt der Flächeninhalt A_G seiner Grundfläche $A_G = a \cdot b$ (Bild G 3). Die Kantenlänge c ist dann gleich der Länge der Höhe h des Quaders: $h = c$. Aus $V = a \cdot b \cdot c$ folgt also $V = A_G \cdot h$.
Das Volumen eines Quaders ergibt sich demnach als Produkt aus dem Flächeninhalt der Grundfläche und der Länge der Höhe des Quaders.

(5) *Führe entsprechende Überlegungen für die Berechnung des Volumens eines Würfels durch!*

Aufgaben g 3 bis 9

Wir gehen nun zu dreiseitigen geraden Prismen über.
Das Bild G 4 zeigt ein dreiseitiges gerades Prisma mit der Höhe h in Zweitafelprojektion. Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck. Dieses Prisma läßt sich durch ein dazu kongruentes Prisma zu einem Quader ergänzen (Bild G 5 und Bild G 6).

Das Volumen V_Q dieses Quaders beträgt

$$V_Q = A'_G \cdot h.$$

Das Volumen V des gegebenen Prismas beträgt

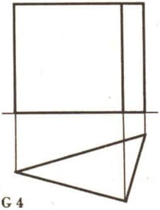
$$V = \frac{V_Q}{2}, \text{ also } V = \frac{A'_G \cdot h}{2}.$$

Nun ist aber die Grundfläche A'_G des Quaders doppelt so groß wie die Grundfläche A_G des gegebenen dreiseitigen Prismas:

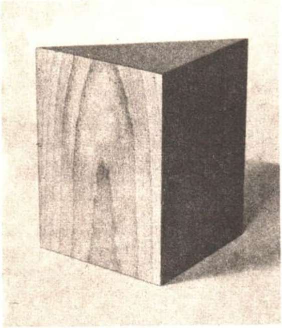
$$A'_G = 2 \cdot A_G.$$

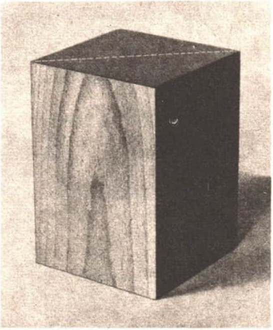
Damit finden wir

$$V = \frac{2 \cdot A_G \cdot h}{2} \quad \text{bzw.} \quad V = A_G \cdot h.$$

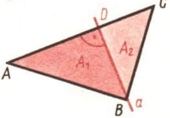

G 4

Das Volumen des gegebenen Prismas ergibt sich also als Produkt aus dem Inhalt seiner Grundfläche und der Höhe.


G 5


G 6

Es sei nun ein dreiseitiges gerades Prisma mit der Höhe h und einem beliebigen Dreieck als Grundfläche gegeben.
Wir zerlegen die Grundfläche durch die Gerade a in zwei rechtwinklige Dreiecke (Bild G 7). Wir denken uns nun eine Ebene, die senkrecht auf der Grundfläche des Prismas steht und die Grundfläche in a schneidet. Diese Ebene zerlegt das gegebene Prisma in zwei Prismen, die beide als Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck haben.

G 7


G

Die Flächeninhalte der Grundflächen bezeichnen wir mit A_1 und A_2. Für die Volumina V_1 bzw. V_2 der beiden Teilkörper gilt:

$$V_1 = A_1 \cdot h \quad \text{bzw.} \quad V_2 = A_2 \cdot h.$$

Das Volumen V des gegebenen Prismas beträgt

$$V = V_1 + V_2.$$

Durch Einsetzen finden wir

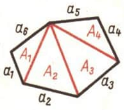
$$V = A_1 \cdot h + A_2 \cdot h \quad \text{bzw.} \quad V = (A_1 + A_2) \cdot h.$$

Da die Summe $A_1 + A_2$ gleich dem Flächeninhalt A_G der Grundfläche des gegebenen Prismas ist, finden wir

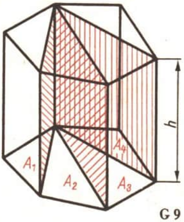
$$V = A_G \cdot h.$$

Das Volumen des gegebenen Prismas ist also das Produkt aus seiner Grundfläche und Höhe.

Es sei nun ein n-seitiges gerades Prisma mit der Höhe h gegeben. Die Grundfläche läßt sich durch geeignete Geraden in k Dreiecke zerlegen (Bild G 8). Die Flächeninhalte dieser Dreiecke bezeichnen wir mit $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Durch die Geraden, die diese Zerlegungen bewirken, denken wir uns Ebenen, die senkrecht auf der Grundfläche des gegebenen Prismas stehen (Bild G 9). Durch diese Ebenen wird das gegebene Prisma in k dreiseitige gerade Prismen zerlegt.



G 8



G 9

Für die Rauminhalte $V_1, V_2, \ldots, V_k$ dieser Teilkörper gilt:

$$V_1 = A_1 \cdot h; \; V_2 = A_2 \cdot h; \; \ldots; \; V_k = A_k \cdot h.$$

Das Volumen V des gegebenen Prismas beträgt

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_k.$$

Durch Einsetzen finden wir

$$V = A_1 \cdot h + A_2 \cdot h + \cdots + A_k \cdot h \quad \text{bzw.}$$
$$V = (A_1 + A_2 + \cdots + A_k) \cdot h.$$

Da die Summe $A_1 + A_2 + \cdots + A_k$ gleich dem Flächeninhalt A_G der Grundfläche des gegebenen Prismas ist, finden wir

$$V = A_G \cdot h.$$

Man kann zeigen, daß auch das Volumen von schiefen Prismen mit Hilfe der Formel $V = A_G \cdot h$ berechnet werden kann. Wir können deshalb feststellen:

2 **SATZ: Das Volumen V eines n-seitigen Prismas mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhe h beträgt**

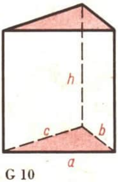
$$\boxed{V = A_G \cdot h}$$

Aufgaben g 10 bis 13

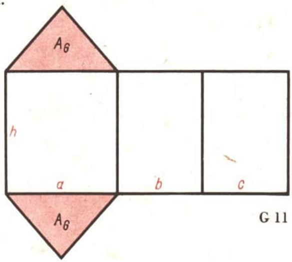
Die Oberfläche eines dreiseitigen geraden Prismas setzt sich aus den beiden kongruenten Dreiecken (Grund- und Deckfläche) sowie aus den drei Rechtecken (Seitenflächen) zusammen (Bilder G 10 und G 11). Die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Begrenzungsflächen des dreiseitigen geraden Prismas heißt sein Oberflächeninhalt A_O. Mit den Bezeichnungen aus Bild G 11 und der Bezeichnung A_G für den Flächeninhalt der Grundfläche ergibt sich:

$$A_O = 2\,A_G + a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h \quad \text{bzw.}$$
$$A_O = 2\,A_G + (a + b + c) \cdot h.$$

Der Oberflächeninhalt eines dreiseitigen geraden Prismas ergibt sich also als Summe aus dem doppelten Flächeninhalt der Grundfläche und den Flächeninhalten der Seitenflächen.



G 10



G 11

2 Es ist der Oberflächeninhalt eines geraden Prismas mit der Höhe $h = 10$ cm zu berechnen. Die Grundfläche sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 3$ cm und $b = 4$ cm sowie der Hypotenuse $c = 5$ cm.

Lösung:

$$A_G = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}^2$$
$$A_O = 2\,A_G + (a + b + c) \cdot h = 2 \cdot 6\text{ cm}^2 + (3\text{ cm} + 4\text{ cm} + 5\text{ cm}) \cdot 10\text{ cm}$$
$$A_O = 12\text{ cm}^2 + 120\text{ cm}^2 = 132\text{ cm}^2$$

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt des gegebenen Prismas beträgt 132 cm².

(6) *Von einem fünfseitigen Prisma ist ein Schrägbild in Kavalierperspektive zu zeichnen. Berechne den Oberflächeninhalt dieses Körpers!*
Was vermutest du für den Oberflächeninhalt eines beliebigen n-seitigen Prismas?

Die Oberfläche eines n-seitigen geraden Prismas mit der Höhe h setzt sich aus zwei kongruenten n-Ecken (Grund- und Deckfläche) und aus n Rechtecken (Seitenflächen) zusammen, die die gemeinsame Seitenlänge h haben. Bezeichnen wir die Seitenflächeninhalte mit $S_1, S_2, \ldots, S_n$, so ergibt sich:

$$\boxed{A_O = 2\,A_G + S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$$

In der gleichen Weise können wir den Oberflächeninhalt eines schiefen Prismas berechnen.

SATZ: Der Oberflächeninhalt eines Prismas ist gleich der Summe aus dem doppelten Grundflächeninhalt und den Flächeninhalten der Seitenflächen.

(7) *Leite die Formel für den Oberflächeninhalt eines Quaders als Spezialfall der Formel für den Oberflächeninhalt gerader Prismen her!*

Aufgaben g 14 und 15

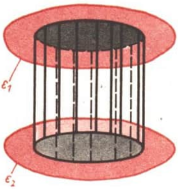
Kreiszylinder

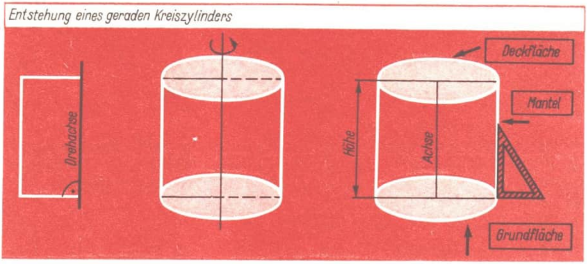
5 Gerade Kreiszylinder

An Hand von Bild G 12 kann ein Zylinder auf folgende Weise beschrieben werden: Die Ebenen ε_1 und ε_2 liegen parallel zueinander. In der Ebene ε_1 liege ein Kreis. Die Senkrechten auf die Ebene ε_1 in den Kreispunkten schneiden die Ebene ε_2 in Punkten, die einen Kreis ergeben. Diese Senkrechten liegen auf einer gekrümmten Fläche. Der Körper, der von den beiden Kreisflächen und der gekrümmten Fläche begrenzt wird, ist ein **gerader Kreiszylinder.**

Wir können uns einen geraden Kreiszylinder (kurz: Kreiszylinder) durch Drehung einer Rechteckfläche um eine ihrer Symmetrieachsen oder um eine ihrer Seiten entstanden denken (Bild G 13).

G 12





G 13

Die beiden kongruenten Kreisflächen, die einen Kreiszylinder begrenzen, heißen seine Grund- bzw. Deckfläche, die gekrümmte Begrenzungsfläche heißt Mantel. Die Strecken auf dem Mantel, die senkrecht auf der Grundfläche stehen und Punkte der Grund- und Deckfläche als Endpunkte besitzen, heißen Mantellinien oder Mantelstrecken. Der Abstand der beiden Kreisflächen heißt die Höhe des Kreiszylinders; sie ist gleich der Länge einer Mantellinie.

6 Volumen gerader Kreiszylinder

8 *Wiederhole die Formel für die Berechnung des Volumens eines Prismas! Wie groß ist das Volumen eines Prismas mit der Höhe h und dem Grundflächeninhalt* $A_G = \pi \cdot r^2$*?*

Wird einem Kreiszylinder ein regelmäßiges n-seitiges Prisma von gleicher Höhe umbeschrieben, so berührt jede Seitenfläche des Prismas den Mantel des Kreiszylinders in genau einer Mantellinie (Bild G 14a). Bezeichnen wir das Volumen des Kreiszylinders mit V und das Volumen des umbeschriebenen Prismas mit V_a, so gilt

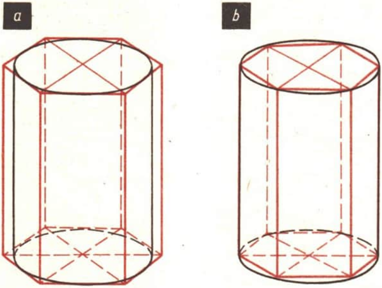
$$V \leqq V_a.$$

Wird einem Kreiszylinder ein regelmäßiges n-seitiges Prisma von gleicher Höhe einbeschrieben, so sind die Seitenkanten des Prismas Mantellinien des Kreiszylinders (Bild G 14b). Bezeichnen wir das Volumen des einbeschriebenen Prismas mit V_i, so gilt

$$V_i \leqq V.$$

Wir fassen beide Ungleichungen zusammen:

$$V_i \leqq V \leqq V_a.$$



G 14

Wir bezeichnen den Grundflächeninhalt des umbeschriebenen Prismas mit A_a, den Grundflächeninhalt des einbeschriebenen Prismas mit A_i, den Grundflächeninhalt des Kreiszylinders mit A_G und den Radius des Grundflächenkreises mit r. Es gilt

$$V_a = A_a \cdot h \quad \text{bzw.} \quad V_i = A_i \cdot h.$$

Aus $V_i \leqq V \leqq V_a$ folgt also

$$A_i \cdot h \leqq V \leqq A_a \cdot h.$$

Da h eine positive von Null verschiedene Zahl ist, dürfen wir durch h dividieren:

$$A_i \leqq \frac{V}{h} \leqq A_a.$$

Wenn wir dem Kreiszylinder Prismen mit sehr vielen Seitenkanten und immer kleineren Seitenflächen einbeschreiben bzw. umbeschreiben, so wird die Grundfläche des Kreiszylinders immer besser durch die Grundflächen des umbeschriebenen bzw. einbeschriebenen Prismas angenähert. Die Differenz $A_a - A_i$ wird im-

G

mer kleiner, das heißt, sie nähert sich immer mehr der Null. Eine Fortführung dieser Überlegung führt dazu, daß die Flächeninhalte der Grundflächen beider Prismen gleich dem Flächeninhalt der Grundfläche des Kreiszylinders sind:

$$A_i = A_a = A_G = \pi \cdot r^2.$$

Da dann

$$A_i = \frac{V}{h} = A_a$$

gilt, finden wir

$$\frac{V}{h} = A_G \quad \text{bzw.} \quad V = A_G \cdot h.$$

4 **SATZ: Das Volumen eines geraden Kreiszylinders ist gleich dem Produkt aus seinem Grundflächeninhalt und seiner Höhe.**

$$\boxed{V = A_G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h}$$

3 Es soll das Volumen eines Rundstabs, dessen Durchmesser 40 mm und dessen Länge 250 mm beträgt, berechnet werden.
Gegeben: $d = 40 \text{ mm} = 4 \text{ cm}$; $h = 250 \text{ mm} = 25 \text{ cm}$

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h$$

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot 4^2 \text{ cm}^2 \cdot 25 \text{ cm}$$

$$V = 100\,\pi \text{ cm}^3$$

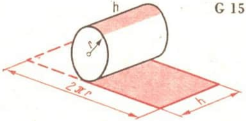
Die Berechnung erfolgt entweder mit Hilfe des Rechenstabs oder mit Hilfe des Buches *Tabellen und Formeln.*
Ergebnis: Das Volumen des Rundstahls beträgt rund 314 cm³.

7 Mantel- und Oberflächeninhalte gerader Kreiszylinder

Ein gerader Kreiszylinder wird von zwei kongruenten Kreisflächen und einer gekrümmten Fläche, dem Mantel, begrenzt. Wird der Mantel längs einer Mantellinie aufgeschnitten, so kann er in die Ebene abgewickelt werden. Als Abwicklungsfläche erhalten wir ein Rechteck, dessen eine Seite gleich dem Kreisumfang $u_G = 2\pi r = \pi d$ des Grundkreises und dessen andere Seite gleich der Höhe des Zylinders ist (Bild G 15). Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Mantels mit A_M, so ergibt sich

$$\boxed{A_M = 2\pi \cdot r \cdot h = \pi d \cdot h}$$

G 15



5 **SATZ: Der Flächeninhalt des Mantels eines geraden Kreiszylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfang seiner Grundfläche und seiner Höhe.**

G

4 Eine Konservendose ist 112 mm hoch und hat einen Durchmesser von 86 mm. Sie soll mit einem Papierstreifen als Etikett umklebt werden. Wieviel Papier wird für eine Dose benötigt?

Gegeben: $d = 86$ mm; $h = 112$ mm

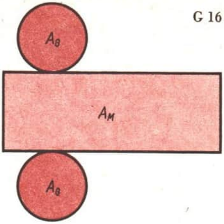
$A_M = \pi d \cdot h$

$A_M = \pi \cdot 86 \text{ mm} \cdot 112 \text{ mm}$

Die Berechnung kann mit Hilfe des Rechenstabs erfolgen.

Ergebnis: Für das Etikettieren der Dose werden rund 300 cm² Papier benötigt.

G 16



Sollte für die Dose im Beispiel G 4 der Oberflächeninhalt A_O ermittelt werden, so müßten wir noch die Flächeninhalte A_G der beiden Grundflächen addieren (Bild G 16). Allgemein gilt: $A_O = 2\,A_G + A_M$. Daraus ergibt sich

$$\boxed{A_O = 2\pi r^2 + 2\pi r h \qquad A_O = \frac{\pi}{2} d^2 + \pi d h}$$

5 Wieviel Blech wird zur Herstellung einer Konservendose mit einem Durchmesser von 86 mm und einer Höhe von 112 mm benötigt?

Gegeben: $d = 86 \text{ mm} = 8{,}6$ cm; $h = 112 \text{ mm} = 11{,}2$ cm

$A_O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 4{,}3^2 \text{ cm}^2 + 2\pi \cdot 4{,}3 \cdot 11{,}2 \text{ cm}^2.$

Die Berechnung kann mit Hilfe des Rechenstabs oder der Tabelle erfolgen.

Ergebnis: Zum Herstellen einer Dose werden ohne Berücksichtigung des Zuschlags für das Falzen rund 42 000 mm² = 420 cm² Blech benötigt.

Aufgaben g 16 bis 18

8 Volumen und Oberflächeninhalt gerader Hohlzylinder

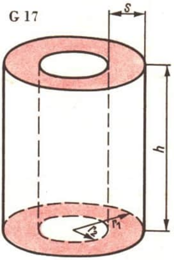
Wird aus einem geraden Kreiszylinder ein anderer Kreiszylinder entsprechend Bild G 17 „ausgebohrt“, so entsteht ein Hohlzylinder. Das Volumen eines geraden Hohlzylinders ergibt sich als Differenz aus dem Volumen des Kreiszylinders mit dem größeren Grundkreisradius r_1 und dem Volumen des Kreiszylinders mit dem kleineren Grundkreisradius r_2:

$$V = \pi r_1^2 \cdot h - \pi r_2^2 \cdot h \; (r_1 > r_2)$$

bzw.

$$V = \pi h \,(r_1^2 - r_2^2)\,.$$

G 17



Der Oberflächeninhalt eines geraden Hohlzylinders setzt sich aus den Inhalten folgender Flächen zusammen: dem Mantel des Kreiszylinders mit dem größeren Grundkreisradius, dem Mantel des Kreiszylinders mit dem kleineren Grundkreisradius und der Grund- und Deckfläche des Hohlzylinders, die kongruente Kreisringe sind:

$$A_O = 2\pi r_1 \cdot h + 2\pi r_2 \cdot h + 2\pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,.$$

Aufgaben g 19 bis 39

G

Aufgaben

Die Aufgaben sind so angeordnet, daß gleichartige Aufgaben nebeneinander stehen. Manchmal stehen zwei Nummern, manchmal aber auch drei Nummern nebeneinander. Zu jedem Kapitel gehört eine Gruppe von Aufgaben, die zur Wiederholung nach Behandlung des jeweiligen Stoffgebietes gedacht ist. Zur besseren Unterscheidung dieser Aufgaben von den übrigen wurden die *Aufgaben zur Wiederholung* jeweils schwarz numeriert, während der Hauptteil der Aufgaben durch rote Nummern bezeichnet wird.

a) Rechenstab; Anwendungen von Verhältnisgleichungen

1. Stelle mit dem Ablesestrich des Läufers auf der Skale D folgende Ziffernfolgen ein! Ermittle jeweils die Ziffernfolge, die dem unmittelbar davor liegenden Skalenstrich zugeordnet ist!
- **a)** 1–0–3; 1–3–3; 1–3; 1–1–3
- **b)** 1–1–4; 1–4–1; 1–3–5; 1–5–3
- **c)** 2–0–8; 2–1–8; 2–4–8; 2–8–8
- **d)** 3–7–2; 3–7; 3–6–4; 3–4–6
- **e)** 4–0–5; 4–5; 4–8–5; 4–9
- **f)** 5–2–5; 6–2–5; 7–2–5; 9–2–5
- **g)** 1–0–1; 10; 3; 3–1
- **h)** 1–5; 4–9–5; 8–9; 1–3
- **i)** Stelle C 1 über die Skalenstriche von D mit den in **a)** bis **e)** genannten Ziffernfolgen ein!

2. Stelle mit dem Ablesestrich des Läufers auf der Skale C folgende Ziffernfolgen ein! Ermittle jeweils die Ziffernfolge, die dem unmittelbar danach liegenden Skalenstrich zugeordnet ist!
- **a)** 1–0–6; 1–6; 1–1–6; 1–6–6
- **b)** 1–2–7; 1–7–2; 1–2–3; 1–3–2
- **c)** 2–0–4; 2–2–4; 2–4–4; 2–7–4
- **d)** 3–5; 3–5–8; 3–8–2; 3–2–8
- **e)** 4–2; 4–2–5; 4–9–5; 4–7
- **f)** 6–7–5; 7–7–5; 8–7–5; 9–7–5
- **g)** 2–2; 2; 2–2–2; 2–5
- **h)** 1–5; 2–5; 8–5; 1–5
- **i)** Stelle C 1 über die Skalenstriche von D mit den in **a)** bis **e)** genannten Ziffernfolgen ein!

3. Stelle die folgenden Ziffernfolgen mit dem Ablesestrich nach Augenmaß ein! Welche Ziffernfolgen sind den benachbarten Skalenstrichen zugeordnet?

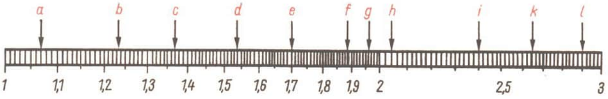
a) 3–5–9	**f)** 7–0–7
b) 3–9–5	**g)** 3–0–5
c) 1–7–8–5	**h)** 8–9–8
d) 1–5–8–7	**i)** 6–7–8
e) 2–9–9	**k)** 6–0–4

4. Stelle die folgenden Ziffernfolgen mit dem Ablesestrich ein! Welche Ziffernfolgen sind den jeweils sechs nachfolgenden Skalenstrichen zugeordnet?

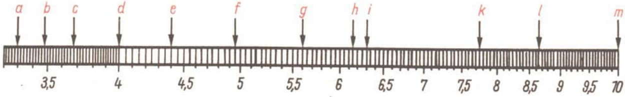
a) 1–9–5	**f)** 1–7–8–5
b) 3–9–2	**g)** 3–4–5
c) 3–6	**h)** 2–8–9
d) 6–3	**i)** 4–7–7
e) 8–7	**k)** 5–8–8

5. Gib die Ziffernfolgen an, die die Pfeile **a)** bis **l)** im Bild a 1 anzeigen!

6. Gib die Ziffernfolgen an, die die Pfeile **a)** bis **m)** im Bild a 2 anzeigen!



a 1



a 2

Berechne die nachstehenden Produkte unter Benutzung des Rechenstabs!

7. **a)** 1,23 · 4,35 **b)** 10,4 · 81,5 **c)** 206 · 425 **d)** 32,4 · 2,86 **e)** 0,182 · 535 **f)** 0,125 · 8

8. **a)** 1,37 · 5,15 **b)** 1,07 · 73,5 **c)** 208 · 455 **d)** 28,8 · 3,04 **e)** 0,191 · 395 **f)** 40 · 12,5

9. **a)** 17,8 · 705 **b)** 0,042 4 · 254 **c)** 0,376 · 0,376 **d)** 0,324 · 530 **e)** 8,25 · 7,75 **f)** 9,05 · 89,5

10. **a)** 14,4 · 805 **b)** 0,348 · 0,348 **c)** 0,051 6 · 199 **d)** 0,027 6 · 720 **e)** 9,75 · 9,95 **f)** 8,65 · 98,5

11. a) $2{,}45 \cdot 3{,}79$ b) $524 \cdot 13{,}4$ c) $77{,}7 \cdot 123$ d) $307 \cdot 2{,}07$ e) $0{,}723 \cdot 11{,}8$ f) $0{,}634 \cdot 1{,}385$

12. a) $2{,}83 \cdot 2{,}04$ b) $666 \cdot 0{,}131$ c) $84{,}1 \cdot 109$ d) $303 \cdot 3{,}08$ e) $0{,}487 \cdot 20{,}3$ f) $0{,}781 \cdot 1{,}275$

13. a) $3{,}02 \cdot 357$ b) $555 \cdot 6{,}23$ c) $0{,}002\,81 \cdot 0{,}433$ d) $0{,}428 \cdot 823$ e) $0{,}428 \cdot 35{,}5$ f) $24{,}8 \cdot 91{,}3$

14. a) $5{,}08 \cdot 65{,}3$ b) $327 \cdot 5{,}47$ c) $0{,}527 \cdot 0{,}003\,83$ d) $0{,}703 \cdot 894$ e) $0{,}788 \cdot 42{,}3$ f) $17{,}4 \cdot 18{,}8$

15. a) $0{,}82 \cdot 0{,}43 \cdot 11{,}3$ b) $15{,}8 \cdot 2{,}7 \cdot 3{,}24$ c) $0{,}332 \cdot 0{,}825 \cdot 0{,}278$

16. a) $15{,}3 \cdot 0{,}73 \cdot 0{,}52$ b) $4{,}33 \cdot 0{,}11 \cdot 2{,}77$ c) $0{,}541 \cdot 9{,}26 \cdot 0{,}203$

17. a) $0{,}44 \cdot 2{,}28 \cdot 77{,}3$ b) $580 \cdot 0{,}72 \cdot 1{,}04$ c) $250 \cdot 0{,}34 \cdot 11{,}5$

18. a) $0{,}472 \cdot 0{,}025\,2 \cdot 0{,}003\,81$ b) $35{,}4 \cdot 1{,}17 \cdot 0{,}835$ c) $30{,}5 \cdot 0{,}207 \cdot 94{,}1$ d) $81{,}2 \cdot 211 \cdot 0{,}73 \cdot 0{,}54$

19. a) $0{,}017\,2 \cdot 0{,}002\,84 \cdot 0{,}568$ b) $21{,}8 \cdot 0{,}305 \cdot 16{,}7$ c) $76{,}3 \cdot 844 \cdot 0{,}34 \cdot 0{,}82$ d) $4{,}28 \cdot 43 \cdot 21{,}4$

Berechne die nachstehenden Quotienten unter Benutzung des Rechenstabs!

20. a) $31{,}4 : 7{,}25$ b) $15{,}6 : 28{,}4$ c) $24{,}6 : 0{,}33$ d) $75\,500 : 34{,}2$ e) $0{,}222 : 0{,}485$ f) $7{,}25 : 31{,}4$ g) $28{,}4 : 15{,}6$ h) $125 : 55$ i) $530 : 1\,060$ k) $0{,}003\,84 : 0{,}278$

21. a) $43{,}5 : 3{,}28$ b) $18{,}3 : 34{,}2$ c) $35{,}8 : 0{,}44$ d) $92\,500 : 29{,}6$ e) $0{,}555 : 0{,}725$ f) $3{,}28 : 43{,}5$ g) $34{,}2 : 18{,}3$ h) $275 : 75$ i) $720 : 1\,440$ k) $0{,}0047 : 0{,}465$

22. a) $55{,}3 : 2{,}25$ b) $3{,}85 : 0{,}772$ c) $2\,570 : 541$ d) $753 : 0{,}043\,8$ e) $7{,}81 : 5{,}33$ f) $512 : 81{,}3$ g) $38\,500 : 0{,}723$ h) $55{,}2 : 37{,}7$

23. a) $78{,}4 : 3{,}35$ b) $4{,}73 : 0{,}782$ c) $17\,550 : 385$ d) $862 : 0{,}062\,7$ e) $8{,}72 : 6{,}27$ f) $613 : 83{,}4$ g) $41\,200 : 0{,}576$ h) $77{,}4 : 56{,}3$

24. a) $\frac{15{,}4}{2{,}65}$ b) $\frac{7\,760}{53{,}8}$ c) $\frac{11}{12}$ d) $\frac{0{,}428}{0{,}003\,7}$ e) $\frac{277}{0{,}343}$ f) $\frac{5{,}28}{738}$

25. a) $\frac{17{,}8}{3{,}78}$ b) $\frac{83\,600}{974}$ c) $\frac{13}{14}$ d) $\frac{0{,}118\,3}{25{,}7}$ e) $\frac{588}{0{,}729}$ f) $\frac{0{,}004\,87}{0{,}000\,238}$

26. a) $\frac{425 \cdot 0{,}378}{87{,}5}$ b) $\frac{1{,}97 \cdot 0{,}005\,75}{0{,}685}$ c) $\frac{384 \cdot 532}{728}$ d) $\frac{9{,}20 \cdot 2{,}58}{39{,}8}$ e) $\frac{91{,}5 \cdot 50{,}5}{6\,200}$ f) $\frac{0{,}427 \cdot 3{,}85}{0{,}672}$

27. a) $\frac{655 \cdot 0{,}398}{72{,}5}$ b) $\frac{1{,}83 \cdot 0{,}006\,7}{0{,}785}$ c) $\frac{578 \cdot 422}{648}$ d) $\frac{8{,}95 \cdot 3{,}54}{47{,}5}$ e) $\frac{97{,}5 \cdot 64{,}5}{7\,800}$ f) $\frac{0{,}804 \cdot 2{,}03}{0{,}898}$

28. a) $\frac{533 \cdot 8\,400}{26\,000}$ b) $\frac{15 \cdot 37}{71}$ c) $\frac{2{,}71 \cdot 0{,}000\,53}{892}$ d) $\frac{0{,}472 \cdot 0{,}079}{0{,}604}$

29. a) $\frac{674 \cdot 6\,600}{32\,000}$ b) $\frac{16 \cdot 54}{92}$ c) $\frac{3{,}84 \cdot 0{,}000\,67}{483}$ d) $\frac{0{,}623 \cdot 0{,}086}{0{,}708}$

Löse die folgenden Verhältnisgleichungen!

30. a) $\frac{x}{3} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{x}{7} = \frac{8}{7}$ c) $\frac{x}{11} = \frac{12}{13}$ d) $\frac{15}{x} = \frac{12}{9}$

31. a) $\frac{x}{5} = \frac{3}{12}$ b) $\frac{x}{13} = \frac{9}{13}$ c) $\frac{x}{7} = \frac{8}{9}$ d) $\frac{4}{x} = \frac{12}{15}$

32. a) $\frac{x}{12} = \frac{5}{16}$ b) $\frac{x}{9} = \frac{7}{6}$ c) $\frac{5}{x} = \frac{15}{21}$ d) $\frac{15}{x} = \frac{11}{18}$

33. a) $\frac{4}{5} = \frac{x}{13}$ b) $\frac{3{,}4}{5{,}8} = \frac{x}{9{,}2}$ c) $\frac{0{,}5}{0{,}375} = \frac{x}{0{,}5}$ d) $\frac{12{,}3}{5} = \frac{15{,}4}{x}$

34. Löse die folgenden Verhältnisgleichungen nacheinander nach allen jeweils vorkommenden Variablen auf!

a) $x : y = 3 : 5$ c) $r : s = u : v$ e) $r : s = v : u$

b) $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ d) $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ f) $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$

35. 1060 g Mehl kosten 1,40 M. Wieviel Mark kostet 1 kg?

36. 530 g Erbsen kosten 0,55 M. Wieviel Mark kostet 1 kg?

37. Für 23 kWh Elektroenergie bezahlt man 1,84 M.
a) Wieviel Mark kosten 27 kWh?
b) Wieviel Kilowattstunden kann man für 10 M beziehen?

38. 13 m³ Stadtgas kosten 2,08 M.
a) Wieviel Mark kosten 231 m³?
b) Wieviel Kubikmeter Stadtgas kann man für 15 Mark beziehen?

39. Eine Kolonne der Nationalen Volksarmee legte in einer Stunde 15 km zurück. Wieviel Minuten muß man für weitere 11 km bei gleicher Geschwindigkeit und gleichartigem Gelände in Rechnung stellen?

40. Ein sowjetischer Kreuzer legt in 2 h 30 min 33 sm zurück. Welche Entfernung legt er in 1 h 12 min bei dieser Geschwindigkeit zurück?

41. Ein PKW „Trabant 601" hat für 552 km 40 l Kraftstoffgemisch verbraucht. Wie hoch wird dann der Verbrauch für 740 km sein?

42. Ein PKW „Wartburg 353" hat für 312 km 30 l Kraftstoffgemisch verbraucht. Welche Entfernung wird er dann mit 55 l zurücklegen?

43. Eine Treppe mit 25 Stufen zu je 18 cm Höhe soll durch eine neue mit je 15 cm Stufenhöhe ersetzt werden.
Wieviel Stufen hat dann die neue Treppe?

44. Eine Treppe mit 24 Stufen zu je 20 cm Höhe soll durch eine Treppe mit 32 Stufen ersetzt werden.
Wie hoch ist dann eine Stufe?

45. Auf einem Werkzeugautomaten können in 62 Minuten ebenso viele gleichartige Werkstücke bearbeitet werden wie auf einer herkömmlichen Werkzeugmaschine in 465 Minuten, nämlich 155 Stück.
Welche Zeit wird dann zur Herstellung von 100 Stück
a) auf dem Werkzeugautomaten, b) auf der Werkzeugmaschine benötigt?

46. Rechne die nachfolgend in Seemeilen (sm) angegebenen Längen l in Kilometer um!

l in sm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	351	5240	37,1	0,842	2,84
l in km					9,26										

47. In der Sowjetunion wird mitunter als Masseneinheit „1 Pud" benutzt (z. B. bei Getreide). Rechne die nachfolgend in Pud angegebenen Massen m in Kilogramm um!

m in Pud	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	5	10	1 250	12 500 000	280
m in kg						82,9				

48. 1060 g Mehl kosten 1,40 M. Wieviel Mark kosten
a) 250 g d) 5 kg
b) 400 g e) 12 kg
c) 2 000 g f) 78,3 kg?

49. 530 g Erbsen kosten 0,55 M. Wieviel Mark kosten
a) 100 g d) 4 kg
b) 250 g e) 15 kg
c) 1 000 g f) 83,2 kg?

50. 34,20 m Anzugstoff kosten 1539 M. Wieviel kosten
a) 80 cm **b)** 2,80 m **c)** 3,00 m
d) 3,25 m **e)** 3,50 m **f)** 3,80 m
g) 5,20 m **h)** 20,00 m **i)** 50,00 m?

51. 17,25 m Kleiderstoff kosten 241,50 M. Wieviel kosten
a) 70 cm **b)** 1,30 m **c)** 2,00 m
d) 2,25 m **e)** 2,80 m **f)** 3,10 m
g) 5,10 m **h)** 20,00 m **i)** 50,00 m?

52. Um den Aushub einer Baugrube abzufahren, muß jedes von 8 Fahrzeugen gleicher Ladefähigkeit 60 Fahrten durchführen.

a) Wievielmal muß jedes Fahrzeug fahren, wenn
2; 3; 5; 7; 9; 10; 12; 15; 20
Fahrzeuge derselben Ladefähigkeit eingesetzt werden?
b) Wieviel Fahrzeuge derselben Ladefähigkeit muß man einsetzen, wenn jedes Fahrzeug
5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15; 20; 30
Fahrten durchführen soll?

53. Um eine Großbaustelle mit Beton zu versorgen, muß jedes von 12 Fahrzeugen gleicher Ladefähigkeit 50 Fahrten durchführen.

a) Wievielmal muß jedes Fahrzeug fahren, wenn
3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 12; 15; 20; 30
Fahrzeuge derselben Ladefähigkeit eingesetzt werden?
b) Wieviel Fahrzeuge derselben Ladefähigkeit muß man einsetzen, wenn jedes Fahrzeug
4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15; 20
Fahrten durchführen soll?

Löse die Aufgaben a 54 bis 59 nach dem Beispiel A 21 auf Seite 15!

54. Von den 600 Schülern einer Schule A erwarben 432 das Touristenabzeichen, von den 750 Schülern einer anderen Schule B 570 Schüler. Welche Schule erzielte das bessere Ergebnis?

55. In einer Schule A beteiligten sich von 280 Schülern 260 an der Mathematikolympiade, in einer Schule B von 180 Schülern 168. In welcher der beiden Schulen war eine bessere Beteiligung?

56. 50 Schüler der dritten Klassen einer Schule A erhielten Schwimmunterricht. Nach 6 Monaten erfüllten 37 von ihnen die Bedingungen für das Schwimmabzeichen. Von 76 Schülern der dritten Klassen einer Schule B erfüllten nach diesem Zeitraum 57 die Bedingungen für das Schwimmabzeichen. In welcher Schule war das Ergebnis besser?

57. In einem Betrieb A arbeiten insgesamt 835 Arbeiter und Angestellte, davon 171 Frauen. In einem zweiten Betrieb B des gleichen Industriezweiges sind von 917 Arbeitern und Angestellten 211 Frauen. In welchem Betrieb liegt der Anteil der weiblichen Beschäftigten an der Gesamtzahl der Beschäftigten höher?

58. Mit der Brutmaschine einer Hühnerfarm wurden folgende Ergebnisse erzielt:
a) Aus 120 Eiern schlüpften 108 Küken.
b) Aus 150 Eiern schlüpften 129 Küken.
Vergleiche die beiden Brutergebnisse!

59. In einem Forst wurden bei Neuanpflanzungen folgende Ergebnisse erzielt:
a) Von 1500 Stecklingen gingen 320 ein.
b) Von 1200 Stecklingen gingen 250 ein.
Vergleiche die beiden Ergebnisse!

Berechne den Prozentwert in den folgenden Aufgaben!

60. **a)** 2% von 300 **c)** 15% von 70
b) 3% von 200 **d)** 9% von 9

61. **a)** 3% von 80 **c)** 12% von 200
b) 8% von 30 **d)** 11% von 11

62. **a)** 12,2% von 700 **c)** 92% von 3 400
b) 31,5% von 38 **d)** 0,5% von 20

63. **a)** 18,4% von 500 **c)** 88% von 4 600
b) 34,5% von 54 **d)** 0,4% von 25

Berechne in den folgenden Aufgaben den Prozentwert und runde sinnvoll!

64. **a)** 3% von 5 200 M
b) 2,7% von 10 l
c) 35,4% von 1 280 ha
d) 75% von 444 hl

65. **a)** 5% von 3 200 M
b) 18,3% von 53 l
c) 0,63% von 4,25 a
d) 7,5% von 44,4 hl

66. **a)** 2% von 1 800 M
b) 3,3% von 20 l
c) 42,5% von 1 050 ha
d) 25% von 888 hl

(Fortsetzung der Aufgaben 64, 65, 66 auf Seite 144.)

e) $5\frac{1}{2}\,\%$ von 323 M
f) 38,4% von 522 t
g) $33\frac{1}{3}\,\%$ von 300 ha

e) $3\frac{1}{5}\,\%$ von 11,80 M
f) 11% von 11 t
g) 12,5% von 8,0 ha

e) $4\frac{1}{2}\,\%$ von 472 M
f) 32,8% von 783 t
g) $66\frac{2}{3}\,\%$ von 150 ha

67. Wieviel getrocknete Kamille erhält man aus 40 kg frischer, wenn sie beim Trocknen 84% ihrer Masse verliert?

68. Lindenblüten verlieren beim Trocknen 74% ihrer Masse. Wieviel Masse verlieren 350 kg frische Lindenblüten beim Trocknen?

69. Die Erdoberfläche beträgt etwa 510 Millionen km². Das Festland nimmt annähernd 29% der Erdoberfläche ein. Es ist die ungefähre Größe der Fläche zu berechnen, die vom Festland auf der Erdoberfläche eingenommen wird.

70. Die landwirtschaftliche Nutzfläche der DDR beträgt etwa 6,67 Millionen ha. Davon entfallen 10,1% auf den Bezirk Neubrandenburg. Wieviel Hektar sind das?

71. In einem volkseigenen Betrieb sind 1250 Werktätige beschäftigt. Davon sind
63% Facharbeiter
7% Arbeiter ohne Facharbeiterausbildung
6% Lehrlinge
17% Angehörige der technischen und wissenschaftlichen Intelligenz
7% Sonstige Angestellte
Wieviel Werktätige gehören zu den einzelnen Beschäftigungsgruppen?

72. Im VEB Petrolchemisches Kombinat Schwedt (Oder) wird sowjetisches Erdöl aufbereitet. Dabei werden aus einer Masseneinheit Erdöl anteilmäßig folgende Produkte gewonnen:
32,5% Dieselkraftstoff
25,6% Benzin
20,0% Heizöl
5,5% Bitumen
4,5% Schmieröl
1,5% gasförmige Kohlenwasserstoffe
Wie hoch war die Tagesproduktion an diesen Stoffen, wenn an diesem Tag 21400 t Erdöl verarbeitet wurden?

73. Warum sind $x\,\%$ einer Größe a ebensoviel wie $\frac{x}{2}\,\%$ der Größe $2a$?

74. Warum sind $y\,\%$ einer Größe b ebensoviel wie $n \cdot y\,\%$ der Größe $\frac{b}{n}$?

Berechne in den folgenden Aufgaben den Prozentsatz!

75. a) 5 von 40
b) 7 von 84
c) 1 von 200
d) 2 von 100
e) 17,3 von 18
f) 35 von 40,2
g) 0,7 von 4
h) 0,2 von 0,9

76. a) 8 von 64
b) 8 von 72
c) 1 von 400
d) 4 von 100
e) 23,8 von 25
f) 45 von 49,1
g) 0,8 von 3
h) 0,3 von 0,8

77. a) 32 M von 160 M
b) 36 m von 900 m
c) 17 g von 140 g
d) 2,4 kg von 13,2 kg
e) 21 dt von 22 dt

78. a) 15 M von 160 M
b) 36 m von 1,2 km
c) 137 g von 140 g
d) 720 g von 720 kg
e) 0,38 dt von 3,8 t

79. a) 24 M von 120 M
b) 45 m von 600 m
c) 23 g von 180 g
d) 2,8 kg von 15,4 kg
e) 35 dt von 36 dt

80. a) 0,028 t von 580 kg
b) 3,8 l von 11,2 l
c) 11 mm von 2,0 cm
d) 2,4 km von 380 km
e) 8,42 m von 802 cm

81. a) 0,41 t von 23,8 t
b) 2,4 l von 0,36 hl
c) 14,3 cm von 11,8 cm
d) 0,372 km von 34,1 km
e) 0,784 m von 1230 cm

82. a) 0,017 t von 940 kg
b) 6,7 l von 14,1 l
c) 13 mm von 2,0 cm
d) 5,4 km von 620 km
e) 3,81 m von 350 cm

83. Aus 64 t Kupferschiefer wird etwa 1 t Rohkupfer gewonnen. Wieviel Prozent beträgt demnach die Ausbeute?

84. 3,52 kg einer Lösung enthalten 276 g Kochsalz. Wieviel prozentig ist die Lösung?

85. Die geplante Bauzeit für eine Großstallanlage betrug 180 Tage. Die Anlage wurde nach 171 Tagen fertiggestellt. Wieviel Prozent beträgt die zeitliche Einsparung?

86. Der Rohling einer Welle wiegt 67,0 kg. Nach der Bearbeitung auf der Drehmaschine wiegt die fertige Welle noch 61,5 kg. Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

a

Berechne in den folgenden Aufgaben den jeweiligen Grundwert!

87. a) 15 sind 2% des Grundwertes
b) 2,40 M sind 3% des Grundwertes
c) 81,40 M sind 72% des Grundwertes
d) 2540 M sind 12,4% des Grundwertes
e) 20 Pf sind 1,5% des Grundwertes

88. a) 18 sind 3% des Grundwertes
b) 3,20 M sind 4% des Grundwertes
c) 94,50 M sind 78% des Grundwertes
d) 3720 M sind 11,8% des Grundwertes
e) 15 Pf sind 2% des Grundwertes

89. a) 87,3 g sind 22,4% des Grundwertes
b) 3,8 mm sind 38% des Grundwertes
c) 208 dm sind 0,45% des Grundwertes
d) 35,4 ha sind 20,4% des Grundwertes
e) 1,07 m^2 sind 0,34% des Grundwertes

90. a) 73,2 g sind 35,4% des Grundwertes
b) 5,4 mm sind 54% des Grundwertes
c) 408 dm sind 0,65% des Grundwertes
d) 28,3 ha sind 30,6% des Grundwertes
e) 1,04 m^2 sind 0,44% des Grundwertes

91. Eine 4,2prozentige Kochsalzlösung enthält 17,5 g Salz.
a) Wie groß ist ihre Gesamtmasse?
b) Wieviel Gramm Wasser enthält die Lösung?

92. Messing besteht aus Kupfer und Zink. Man hat 195 kg Kupfer zur Verfügung und will eine Legierung herstellen, die 65% Kupfer enthält.
a) Wieviel Kilogramm Messing können hergestellt werden?
b) Wieviel Kilogramm Zink werden dazu benötigt?

93. Bronze ist eine Legierung aus Kupfer und Zinn. Wieviel Kilogramm Bronze könnte man aus 213 kg Kupfer herstellen, wenn die Legierung 85% Kupfer und 15% Zinn enthalten soll?
Berechne auch, wieviel Kilogramm Zinn benötigt würden!

94. Auf einer modernen Fertigungsstrecke in einem volkseigenen Betrieb werden bei 62% zeitlicher Auslastung 523 Einheiten täglich hergestellt. Wieviel Einheiten können dann bei voller Auslastung täglich produziert werden?

95. Berechne im Kopf für die Grundwerte
200 m; 40 M; 400 t; 8 km; 3 200 m; 48 hl; 96 a
die Prozentwerte beim Prozentsatz:
a) 1%, b) 5%,
c) $12\frac{1}{2}$ %, d) 40%,
e) 75%, f) 200 %!

96. Löse im Kopf!
a) $3\frac{1}{3}$ % von 150; 30; 45; 450
b) 60% von 200; 125; 75; 500
c) 80% von 125; 175; 200; 250
d) 2% von 250; 300; 1 000; 20

97. Löse im Kopf!
a) $3\frac{1}{3}$ % von 60; 270; 90; 600
b) 60% von 150; 300; 250; 400
c) 80% von 75; 150; 250; 400
d) 2% von 100; 150; 200; 25

98. In einem volkseigenen Autowerk werden täglich durchschnittlich 60 LKW gefertigt. Infolge einer Betriebsstörung wurden an einem Tag nur 60% und am folgenden Tag nur 80% dieser Stückzahl produziert. Am dritten Tag wurden nach Beseitigung der Störung 150% erreicht. Ist dadurch der entstandene Produktionsrückstand beseitigt?

a

99. Entwicklung der Elektroenergieerzeugung in der DDR

1961	43,0 Mrd. kWh
1963	47,8 Mrd. kWh
1965	54,1 Mrd. kWh
1967	59,7 Mrd. kWh
1968	63,2 Mrd. kWh

a) Setze den Wert für 1961 gleich 100% und berechne, **auf** wieviel Prozent die Erzeugung in den Jahren 1963, 1965, 1967 und 1968 gegenüber 1961 gestiegen ist!

b) **Um** wieviel Prozent ist die Erzeugung jeweils von 1961 zu 1963, von 1963 zu 1965, von 1965 zu 1967 und von 1967 zu 1968 gestiegen?

c) Stelle den Anstieg graphisch dar!

100. Entwicklung der Milcherzeugung in der DDR (3,5% Fettgehalt)

1963	5,13 Mill. t
1965	5,86 Mill. t
1967	6,37 Mill. t
1968	6,68 Mill. t

a) Setze den Wert für 1963 gleich 100% und berechne, **um** wieviel Prozent die Erzeugung in den Jahren 1965, 1967 und 1968 gegenüber 1963 gestiegen ist!

b) **Auf** wieviel Prozent ist die Erzeugung jeweils von 1963 zu 1965, von 1965 zu 1967, von 1967 zu 1968 gestiegen?

c) Stelle den Anstieg graphisch dar!

101. Stelle den Anteil der einzelnen Produkte der Erdölaufbereitung (siehe Aufgabe **a 72**) in einem Kreisdiagramm dar!

102. Stelle den Anteil der einzelnen Beschäftigungsgruppen aus Aufgabe **a 71** in einem Kreisdiagramm dar!

103. Für die nachfolgend genannten Erzeugnisse des Industriezweiges Elektrotechnik/Elektronik/Gerätebau entwickelte sich die Produktion in der DDR wie folgt:

Erzeugnis	Einheit	1950	1955	1960	1963	1968
Hoch- und Niederspannungsschaltgeräte und Zubehör	Mill. M	—	195	556	708	1 171
Halbleiterbauelemente	Mill. M	—	—	—	28	277
Kabel und Leitungen	Mill. M	—	423	624	809	1 247
Buchungsmaschinen	Stück	2 330	5 290	8 440	11 720	17 185
Physikalisch-optische Meßgeräte	Mill. M	5	9	25	33	66

a) Setze die jeweils erste Angabe gleich 100% und berechne den prozentualen Zuwachs für jede folgende Angabe gegenüber der ersten!

b) Stelle die Entwicklung der Produktion dieser 5 Erzeugnisse graphisch dar!

104. Das Nationaleinkommen der DDR entwickelte sich folgendermaßen:

1949	22 320 000 000 M
1950	27 177 000 000 M
1955	50 347 000 000 M
1960	71 045 000 000 M
1963	76 692 000 000 M
1964	80 487 000 000 M
1965	84 175 000 000 M
1966	88 294 000 000 M
1967	93 043 000 000 M
1968	98 018 000 000 M

a) Setze den Betrag für 1950 gleich 100%, und berechne die jeweilige Steigerung gegenüber 1950 in Prozent!

b) Setze den Betrag für 1967 gleich 100%, und berechne die Prozentsätze für die anderen Jahre!

c) Stelle die in **a)** und **b)** erhaltenen Ergebnisse in je einem Liniendiagramm dar!

105. Der Außenhandelsumsatz der DDR mit der UdSSR, unserem größten Handelspartner, betrug 1950 rund 1,5 Milliarden Valutamark (VM). Seitdem steigerte sich dieser Umsatz folgendermaßen:

	1955	1960	1965	1968
auf Milliarden VM auf % gegenüber 1950	4,0	527 %	10,6	860 %

Berechne die fehlenden Angaben!

106. Der Außenhandelsumsatz der DDR nach Ländergruppen entwickelte sich folgendermaßen:

Jahr	Sozialistische Länder	Entwicklungsländer	Kapitalistische Industrieländer
1950	2,66 Mrd. VM	14 Mill. VM	1,004 Mrd. VM
1955	7,494 Mrd. VM	304 Mill. VM	2,592 Mrd. VM
1960	13,799 Mrd. VM	791 Mill. VM	3,897 Mrd. VM
1963	16,628 Mrd. VM	731 Mill. VM	3,824 Mrd. VM
1965	18,241 Mrd. VM	1106 Mill. VM	5,346 Mrd. VM
1968	22,939 Mrd. VM	1233 Mill. VM	5,952 Mrd. VM

a) Stelle die Entwicklung für jede Ländergruppe und für den Gesamtumsatz in einem Liniendiagramm dar!

b) Stelle für jedes aufgeführte Jahr den Anteil der einzelnen Ländergruppen in einem Kreisdiagramm dar!

107. Im Jahre 1949 gab es in der DDR 16000 Studierende an Fachschulen. Das waren 0,085 % der Gesamtbevölkerung in der DDR.

a) Wie groß war damals die Bevölkerungszahl in der DDR?

b) Zur gleichen Zeit waren 0,151 % der Gesamtbevölkerung Studierende an Universitäten und Hochschulen. Wieviel Studierende waren das?

c) Wieviel Studierende an Fach- und Hochschulen gab es damals insgesamt?

108. 1968 gab es in der DDR allein an Fachschulen 140600 Studierende. Das sind 0,823 % der Gesamtbevölkerung von 1968. Weitere 0,647 % der Gesamtbevölkerung studierte an Universitäten und Hochschulen. Wieviel Studierende waren das insgesamt?

109. Berechne im Kopf die Jahreszinsen folgender Beträge:
200 M; 700 M; 150 M; 320 M; 580 M; 70 M; 425 M; 32 M; 1 200 M; 75 M; 1 600 M; 4 500 M
für die nachstehenden Zinssätze!
a) 3 %   b) 5 %   c) 4 %   d) 6 %

110. Berechne für die Beträge
233,40 M; 17,30 M; 1 844 M; 508,25 M; 68,55 M
die Jahreszinsen beim Zinssatz:
a) 1,5 %   b) 2,5 %   c) 4,5 %!

111. Klaus erhält von seinem Großvater 200 M zum Geschenk. Er möchte sich später einmal ein neues Fahrrad kaufen und eröffnet deshalb mit diesem Geld ein Sparkonto (Zinssatz 3,25 %). Welches Guthaben kann er nach drei Jahren abheben, wenn er die Jahreszinsen
a) der vergangenen zwei Jahre sofort abgehoben und anderweitig verbraucht hat,
b) nicht abgehoben hat, so daß diese ebenfalls zu 3,25 % jährlich weiter verzinst wurden?
Wieviel Geld muß er im Fall **a)** bzw. im Fall **b)** noch aufbringen, wenn das Fahrrad 242 M kostet?

a

112. Marion erhält von ihren Großeltern drei Jahre hintereinander zu Weihnachten jeweils 100 M geschenkt. Sie bringt dieses Geld auf ein Sparbuch (Zinssatz 3,25 %).

Wie hoch ist ihr Guthaben
a) ein Jahr nach dem ersten Geschenk,
b) zwei Jahre nach dem ersten Geschenk,
c) drei Jahre nach dem ersten Geschenk,
wenn sie die Zinsen weiter verzinsen ließ?

113. Zeichne ein Zinsdiagramm für 2,5 %; 3 %; 3,5 %; 4 %; 4,5 % und 5 % Jahreszinsen auf Millimeterpapier (Format A 5)! Trage auf der horizontalen Achse (senkrecht zur Breite des Millimeterheftes) die Guthaben (10 mm ≙ 50 M) auf!
a) Welche Guthabenbeträge kannst du dann auf dieser Achse eintragen?
b) Welche Einheit wählst du dann zweckmäßigerweise auf der anderen Achse, auf der die Zinsen aufgetragen werden?
c) Lies aus dem Zinsdiagramm die Jahreszinsen für folgende Guthaben und jeweils für alle sechs oben angegebenen Zinssätze ab:
520 M; 410 M; 280 M; 110 M; 640 M; 720 M; 825 M; 900 M!
Kontrolliere die erhaltenen Ergebnisse durch Rechnung!
d) Lies aus dem Zinsdiagramm für alle sechs angegebenen Zinssätze die erforderlichen Guthaben für folgende Jahreszinsen ab:
4 M; 7 M; 10 M; 13 M; 17 M; 21 M; 24 M; 25 M; 31 M; 35 M!
Kontrolliere die erhaltenen Ergebnisse durch Rechnung!
e) In einigen Fällen entstehen bei **d)** Schwierigkeiten. Erläutere und begründe, wie sie sich überwinden lassen!

114. Berechne jeweils die Tageszinsen!

G in Mark	2500	84	520	805	38000	3700	72
p in Prozent	3	4	3,5	5	2,5	4	3,5
t in Tagen	205	71	36	400	570	198	43

115. Ein Guthaben von 450 Mark (Zinssatz 3,25 %) wird nach 200 Tagen wieder restlos abgehoben. Wieviel Mark fehlen dann an 500 M?

116. Wieviel Zinsen sind für ein Guthaben von 35,20 M bei einem Zinssatz von 3,25 % von einer Sparkasse zu zahlen, wenn es nach 400 Tagen restlos abgehoben wird?

117. Ein mit 5 % Jahreszinsen aufgenommener Kredit in Höhe von 3 200 wird nach 320 Tagen zurückgezahlt. Wie hoch ist die gesamte Rückzahlungssumme?

118. Ein mit 6 % verzinster Kredit in Höhe von 5 830 M wird nach 180 Tagen zurückgezahlt. Reichen dafür 6 000 M?

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Berechne die nachstehenden Terme unter Benutzung des Rechenstabs!

1. a) $5{,}23 \cdot 7{,}56$ b) $38{,}4 \cdot 0{,}32$ c) $0{,}278 \cdot 1{,}34$ d) $11{,}4 \cdot 17{,}25$ e) $0{,}427 \cdot 0{,}038$ f) $72\,000 \cdot 8{,}3$ g) $44{,}7 \cdot 1{,}79$ h) $771 \cdot 25$ i) $3{,}84 \cdot 54{,}2$ k) $1\,450 \cdot 7{,}81$ l) $0{,}287 \cdot 13{,}4$ m) $560 \cdot 281$

2. a) $8{,}23 \cdot 5{,}81$ b) $83{,}7 \cdot 0{,}54$ c) $0{,}426 \cdot 1{,}55$ d) $13{,}2 \cdot 18{,}75$ e) $0{,}725 \cdot 0{,}042$ f) $64\,000 \cdot 4{,}7$ g) $72{,}3 \cdot 15{,}9$ h) $834 \cdot 75$ i) $4{,}26 \cdot 71{,}8$ k) $2\,440 \cdot 9{,}81$ l) $0{,}354 \cdot 11{,}8$ m) $328 \cdot 560$

3. a) $13{,}44 \cdot 15{,}8$ b) $500 \cdot 200$ c) $16{,}28 \cdot 9{,}81$ d) $0{,}028 \cdot 0{,}76$ e) $5\,000 \cdot 13{,}4$ f) $0{,}027 \cdot 11\,500$ g) $7{,}48 \cdot 0{,}321$ h) $870 \cdot 870$ i) $0{,}437 \cdot 158$ k) $0{,}284 \cdot 0{,}031$

4. a) $19{,}22 \cdot 11{,}3$ b) $400 \cdot 125$ c) $15{,}38 \cdot 8{,}24$ d) $0{,}67 \cdot 0{,}029$ e) $6\,000 \cdot 12{,}7$ f) $22\,100 \cdot 0{,}324$ g) $0{,}418 \cdot 0{,}245$ h) $530 \cdot 530$ i) $328 \cdot 0{,}333$ k) $0{,}372 \cdot 0{,}086$

5. a) $2{,}28 \cdot 3{,}28 \cdot 4{,}28$
b) $4{,}32 \cdot 23{,}8 \cdot 533$

6. a) $5{,}54 \cdot 4{,}54 \cdot 3{,}54$
b) $5{,}78 \cdot 27{,}4 \cdot 288$

7. a) $0{,}36 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}36$
b) $4\,200 \cdot 107 \cdot 0{,}028$

8. a) $3:7$ **b)** $0{,}346:0{,}173$ **c)** $280:60$ **d)** $535:284$

9. a) $4:9$ **b)** $0{,}568:0{,}284$ **c)** $480:90$ **d)** $645:328$

10. a) $253:8\,740$ **b)** $0{,}007\,23:5{,}28$ **c)** $54{,}8:0{,}002\,75$ **d)** $7{,}33:0{,}082\,7$

11. a) $4{,}72:538$ **b)** $0{,}005\,38:3{,}27$ **c)** $82{,}3:0{,}325$ **d)** $8{,}44:0{,}099\,9$

12. a) $\frac{65{,}2 \cdot 77{,}3}{348}$ **b)** $\frac{15{,}4^2}{451}$ **c)** $\frac{0{,}728 \cdot 534}{0{,}277}$ **d)** $\frac{0{,}023\,5 \cdot 0{,}802}{18{,}05}$

13. a) $\frac{82{,}3 \cdot 84{,}7}{599}$ **b)** $\frac{17{,}8^2}{514}$ **c)** $\frac{0{,}608 \cdot 258}{0{,}137\,5}$ **d)** $\frac{0{,}072\,4 \cdot 1{,}08}{92{,}3}$

Löse die folgenden Verhältnisgleichungen!

14. a) $\frac{25}{x} = \frac{212}{14}$ **b)** $\frac{4}{21{,}8} = \frac{5}{x}$ **c)** $\frac{0{,}75}{x} = \frac{0{,}8}{\frac{6}{7}}$ **d)** $\frac{5{,}3}{x} = \frac{4{,}6}{7{,}2}$

15. a) $\frac{5}{15{,}4} = \frac{4}{x}$ **b)** $\frac{3{,}4}{x} = \frac{4{,}3}{7{,}8}$ **c)** $\frac{x}{0{,}5} = \frac{0{,}75}{\frac{5}{3}}$ **d)** $\frac{x}{1{,}5} = \frac{0{,}3}{0{,}2}$

16. Ein Transportflugzeug der Sowjetarmee legte eine bestimmte Strecke bei einer Geschwindigkeit von $900\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in 20 min zurück. Wie lange braucht das Flugzeug für dieselbe Strecke, wenn es mit einer Geschwindigkeit von $720\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fliegt?

17. Ein Mähdrescher vom Typ E 175 mäht 22 ha in 55 Stunden;
ein Mähdrescher vom Typ E 512 mäht 30 ha in 25 Stunden.
a) Wie lange benötigt ein Mähdrescher vom Typ E 175 für 30 ha?
b) Wie lange benötigt ein Mähdrescher vom Typ E 512 für 22 ha?
c) Wie lange benötigt ein Mähdrescher vom Typ E 512 für eine Fläche, für die ein Mähdrescher vom Typ E 175 die Zeit von 5,3 h benötigt?

18. Ein eingelagerter Futtervorrat würde für 240 Tiere 65 Tage reichen.
Wie lange reicht er bei gleicher Futterration für
a) 260 Tiere, **b)** 290 Tiere, **c)** 320 Tiere, **d)** 200 Tiere, **e)** 185 Tiere?

19. Eine Großküche hat so viel Kartoffeln eingelagert, daß an 180 Tagen je 550 Portionen ausgegeben werden können. Wieviel Portionen können täglich ausgegeben werden, wenn der Vorrat
a) 150 Tage, **b)** 175 Tage, **c)** 200 Tage, **d)** 208 Tage, **e)** 220 Tage reichen soll?

20. Das englische Längenmaß „inch" ist bei uns unter der Bezeichnung „Zoll" bekannt und in der Technik teilweise noch in Gebrauch. Rechne die nachfolgend in Zoll (inch) angegebenen Längen l in Zentimeter um!

l in Zoll	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	5	8	10	12	15	20
l in cm									12,7					

21. Eine Düsenverkehrsmaschine vom Typ TU 134 fliegt die 1500 km lange Flugstrecke Berlin–Sofia in 110 Minuten.
a) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fliegt die Maschine?
b) Wie lange würde ein Flug Berlin–Sofia bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $210\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $280\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $320\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $480\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $550\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $750\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $830\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $1500\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ dauern?

22. Berechne den Prozentwert!

a) 22% von 135 c) 17% von 312
b) 50% von 2 d) 50% von 22

23. a) 24% von 140 c) 18% von 295
b) 25% von 4 d) 25% von 44

24. Berechne den Prozentwert und runde sinnvoll!

a) 4% von 8100 M c) 0,72% von 72 l e) 8% von 9,0 t
b) 23,1% von 72 l d) 2,5% von 88,8 hl f) 37,5% von 4,0 ha

25. Auf einer Grünfläche von 5 ha wird ein Gemenge von 30% Rotklee, 20% Weißklee, 5% Schwedenklee und 45% Weidelgras ausgesät. Insgesamt werden 105 kg Saatgut benötigt. Wieviel Kilogramm entfallen auf die einzelnen Sorten?

26. Aus Knochen können 9% Knochenfett, 45% Knochenmehl und 15% Leim gewonnen werden. Wieviel Kilogramm dieser Stoffe können aus 1460 kg Knochen hergestellt werden?

Berechne in den Aufgaben 27 bis 30 jeweils den Prozentsatz!

27. a) 4 von 17 c) 40 von 17
b) 45 von 50 d) 45 von 46

28. a) 5 von 24 c) 50 von 24
b) 36 von 40 d) 36 von 37

29. a) 10 M von 120 M c) 176 g von 180 g e) 0,72 dt von 7,2 t
b) 45 m von 1,5 km d) 830 g von 830 kg f) 0,62 t von 575 dt

30. Ein Schütze erzielte bei 60 Schüssen 57 Treffer. Ein anderer Schütze erzielte bei 80 Schüssen 75 Treffer. Gib die Treffsicherheit der beiden Schützen in Prozenten an!

31. Berechne jeweils den Grundwert!

a) 0,43 kg sind 0,25% des Grundwertes
b) 532 kg sind 91,8% des Grundwertes
c) 0,028 dt sind 17,5% des Grundwertes
d) 0,87 kg sind 0,45% des Grundwertes
e) 654 kg sind 94,7% des Grundwertes
f) 0,021 dt sind 15,7% des Grundwertes

32. In einem FDGB-Heim meldeten sich 49 Urlauber, das sind 87,5% aller Urlauber dieses Heimes, zur Teilnahme am Frühsport. Wieviel Urlauber sind in diesem Heim untergebracht?

33. Eine Konsumgenossenschaft zahlte in einem Jahr 1,5% des Umsatzes an ihre Mitglieder zurück. Eine Familie erhielt eine Rückvergütung von 34,50 M, eine andere Familie 54,30 M. Für wieviel Mark hatten die beiden Familien in diesem Jahr im Konsum eingekauft?

34. Durch einen Verbesserungsvorschlag beträgt der Materialverbrauch für ein Werkstück nur noch 31,4 kg. Das sind 81,7% des ursprünglichen Materialverbrauchs. Berechne ihn!

35. Für Überstunden werden 25% Lohnzuschlag bezahlt. Wie hoch ist der Lohnzuschlag, wenn der Stundenlohn **a)** 2,40 M, **b)** 2,60 M, **c)** 2,80 M beträgt?
Für welche Überstundenzahlen werden in **a)** und **c)** gleiche Lohnzuschläge gezahlt?

36. Stelle den Saatgutbedarf in Aufgabe **a 25** auf Seite 150 für die einzelnen Klee- und Grassorten in einem Koordinatensystem dar! Verwende Millimeterpapier, und trage auf der horizontalen Achse die Flächengröße von 0 bis 10 ha ab!

a) Begründe, warum die erhaltenen Linien Halbgeraden sind, die alle durch den Koordinatenursprung gehen!
b) Lies aus der erhaltenen graphischen Darstellung den Saatgutbedarf für jede Sorte für 1 ha, 2 ha, ..., 10 ha ab!
c) Ermittle auch den Saatgutbedarf für 3,2 ha; 4,5 ha; 7,8 ha; 8,1 ha!
d) Kann man aus der graphischen Darstellung auch den Saatgutbedarf für 32 ha; 45 ha; 94 ha; 120 ha; 0,12 ha; 0,35 ha ablesen?
Beschreibe, wie du dabei vorgehst, und kontrolliere deine Ergebnisse durch Rechnung!
e) Beschreibe, wie du vorgehst, wenn du aus der graphischen Darstellung ermitteln sollst, welche Fläche man mit 10 kg; 17 kg; 8 kg; 0,9 kg Rotklee, Weißklee, Schwedenklee bzw. Weidelgras bestellen kann! Ermittle diese Werte aus der graphischen Darstellung, und kontrolliere sie durch Rechnung!

37. Berechne für die Beträge
377,20 M; 12,70 M; 1625 M; 608,75 M; 72,35 M die Jahreszinsen beim Zinssatz:
a) 3% **b)** 3,5% **c)** 4,25%

a

38. Berechne aus der nachfolgenden Tabelle den jeweiligen Prozentsatz der Studentinnen an Universitäten und Hochschulen:

Jahr	1951	1955	1960	1965	1968
Studenten insgesamt davon weiblich	31 512 6 510	74 742 19 141	101 773 25 398	108 791 28 377	110 581 35 079

39. Von den 500 Abgeordneten der Volkskammer sind nach der sozialen Herkunft
57,4% Arbeiter
8,8% werktätige Bauern
10,4% Handwerker und Gewerbetreibende
14,2% Angestellte
6,8% Angehörige der Intelligenz
2,4% Sonstige

a) Berechne im Kopf, wieviel Abgeordnete das jeweils sind!
b) Stelle die soziale Herkunft der Volkskammerabgeordneten in einem Kreisdiagramm dar!

40. Bei den Europameisterschaften der Leichtathleten gewannen die Teilnehmer aus der DDR folgende Medaillen

	Zahl der Wettbewerbe	Zahl der Medaillen für die DDR Gold	Silber	Bronze
1954 in Bern	—	Durch westdeutschen Einspruch am Start gehindert		
1958 in Stockholm	36	—	2	4
1962 in Belgrad	36	1	6	1
1966 in Budapest	36	8	3	6
1969 in Athen	38	11	7	7

a) Berechne den jeweiligen prozentualen Anteil der DDR an Gold-, Silber- und Bronzemedaillen und an Medaillen insgesamt!
b) Stelle diese Ergebnisse in Kreisdiagrammen graphisch dar!

41. In der nachfolgenden Tabelle ist für einige ausgewählte Erzeugnisse die Entwicklung der Produktion der RGW-Länder der Entwicklung der Weltproduktion gegenübergestellt:

Erzeugnis		1950	1955	1960	1965	1967
Elektroenergie in GWh	RGW	135 346	243 639	406 561	677 497	790 236
	Welt	956 800	1 544 500	2 303 600	3 349 500	—
Erdöl in Mill. t	RGW	43,8	83,6	161,9	258,8	304,9
	Welt	523	772	1 054	1 512	1 745
Eisenerzförderung in Mill. t	RGW	43,1	78,8	115,4	165,8	180,7
	Welt	251	379,6	499,2	609,0	631,1
Rohstahl in Mill. t	RGW	35,8	59,5	86,5	119,6	135,3
	Welt	189,6	273	341,2	459,4	498,4
Synthetische Fasern in 1 000 t	RGW	—	13,7	32,0	133,4	201,0
	Welt	69	263	705	2 045	2 855

Berechne den jeweiligen prozentualen Anteil der RGW-Länder an der Gesamtweltproduktion, und stelle die Entwicklung für jedes der fünf Erzeugnisse graphisch dar!

b) Rationale Zahlen

1. Stelle fest, welche der folgenden Brüche dieselbe gebrochene Zahl darstellen!

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{8}{10}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{14}{21}$

b) $\frac{59}{111}$; $\frac{63}{117}$; $\frac{7}{13}$; $\frac{56}{91}$; $\frac{28}{52}$; $\frac{17}{104}$

c) $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{8}{10}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{15}{18}$

d) $\frac{28}{36}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{45}{55}$; $\frac{15}{33}$; $\frac{63}{108}$; $\frac{40}{88}$

2. Ordne die folgenden Zahlen nach ihrer Größe! Beginne mit der kleinsten!

a) $\frac{5}{17}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{2}{6}$

b) $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{6}{19}$

3. Ermittle für die geordneten Zahlenpaare $[a; b]$ jeweils $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$! Falls eine Aufgabe im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar ist, schreibe „n. l."!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)
a	18	102	9	24	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	1,8	101	6,3	12
b	12	17	18	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{8}$	2	0,6	97	8,1	0

4. Unter welcher Bedingung ist die Aufgabe $a - b$ im Bereich der gebrochenen Zahlen lösbar? Gib für lösbare und für nicht lösbare Aufgaben je 3 Beispiele an!

5. Löse folgende Aufgaben! Falls eine Aufgabe nicht lösbar ist, schreibe „n. l."!

a) $17 - 15$
b) $506 - 560$
c) $0 - 99$
d) $\frac{5}{9} - \frac{23}{36}$
e) $418 - 418$
f) $8\,431 - 8\,341$
g) $5 - 23$
h) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$
i) $19 - 15$
k) $309 - 390$
l) $99 - 0$
m) $\frac{4}{3} - \frac{3}{2}$
n) $396 - 396$
o) $7\,653 - 7\,563$
p) $1 - 2$
q) $\frac{4}{3} - \frac{5}{4}$

6. Mit welcher natürlichen Zahl muß in den folgenden Aufgaben der Minuend mindestens multipliziert werden, damit die Aufgabe lösbar wird?

a) $3 - 17$
b) $\frac{3}{2} - \frac{18}{7}$
c) $5 - 15$
d) $\frac{4}{7} - 3$
e) $4 - 19$
f) $\frac{4}{3} - \frac{28}{9}$
g) $6 - 18$
h) $\frac{5}{8} - 4$

7. Ermittle für die Zahlenpaare aus der Aufgabe **b 3** jeweils $2a + b$; $3a - 2b$ und $2ab$!

8. Die folgende Tabelle enthält jeweils eine vorher abgelesene Temperatur und eine Angabe über die inzwischen eingetretene Veränderung. Berechne jeweils den Stand des Thermometers!

Temperatur	Veränderung	Temperatur	Veränderung
a) − 5 °C	steigt um 8 grd	f) − 4 °C	steigt um 7 grd
b) + 8 °C	fällt um 9 grd	g) + 6 °C	fällt um 8 grd
c) + 11 °C	steigt um 6 grd	h) + 23 °C	fällt um 4 grd
d) 0 °C	steigt um 2 grd	i) + 2 °C	fällt um 2 grd
e) − 4 °C	steigt um 2 grd	k) − 13 °C	steigt um 4 grd

9. Stelle folgende Subtraktionsaufgaben am Zahlenstrahl dar!

a) $5 - 2$
b) $6 - \frac{2}{5}$
c) $7 - 4$
d) $\frac{9}{8} - 1$
e) $6 - 6$
f) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$
g) $6 - 8$
h) $\frac{5}{8} - \frac{5}{8}$

10. Addiere zum Minuenden und zum Subtrahenden der „Differenzen“ (7 — 5) und (1 — 1,6) jeweils
a) 2; **b)** 0,5; **c)** 0,6; **d)** 6!
Veranschauliche die erhaltenen „Differenzen“ jeweils durch Streckenabtragung!

11. Subtrahiere von den Minuenden und Subtrahenden der „Differenzen“ (8 — 5) und (4,75 — 5,75) jeweils
a) 3; **b)** 0,75; **c)** 1; **d)** 3,5!
Veranschauliche die erhaltenen „Differenzen“ jeweils durch Streckenabtragung!

12. Stelle fest, ob die folgenden Differenzen in einer Klasse liegen!
a) (8 — 7) und (4 — 3) **c)** (9 — 2) und (15 — 9) **e)** (4 — 8) und (18 — 22)
b) $\left(\frac{14}{3}-\frac{7}{9}\right)$ und $\left(\frac{31}{6}-\frac{23}{18}\right)$ **d)** $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$ **f)** $\left(\frac{14}{5}-\frac{7}{10}\right)$ und $\left(\frac{73}{45}-\frac{3}{15}\right)$

13. Gib eine Zahl für x an, so daß beide Differenzen in derselben Klasse liegen.
a) (8 — 5) und (4 — x) **c)** (6 — 4) und (x — 3) **e)** (x — 4) und (2 — 5)
b) $\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\right)$ und $\left(\frac{1}{4}-x\right)$ **d)** $\left(x-\frac{2}{6}\right)$ und $\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{6}\right)$ **f)** (x — 3) und (1 — x)

14. Zeichne auf Millimeterpapier eine Zahlengerade (Einheit 1 cm), und gib auf ihr die folgenden rationalen Zahlen möglichst genau an!
a) + 4; — 5; + 5; — 2; 0 **c)** + 2; — 3; — 1; — 2; + 10
b) + 0,5; + 3,9; $-\frac{1}{4}$; — 0,6; $+3\frac{3}{4}$ **d)** $-\frac{1}{2}$; + 4,2; + 0,25; — 0,7; $+2\frac{1}{4}$

15. Gib an, welche rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden im Bild b 1 durch rote Buchstaben gekennzeichnet sind!

b 1

16. Bestimme zu den folgenden rationalen Zahlen jeweils die entgegengesetzte Zahl! Stelle jeweils beide auf der Zahlengeraden dar!
a) + 4; — 2; $+4\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{8}$; 0 **c)** + 3; — 4; $+2\frac{1}{2}$; $-\frac{4}{5}$; + 0,82
b) $+\frac{17}{3}$; — 1,33; + 0,4; — 0,73; $+\frac{9}{4}$ **d)** + 2,55; $-\frac{7}{8}$; — 0,6; 0; $-\frac{7}{3}$

17. Gib die Beträge der folgenden rationalen Zahlen an!
a) + 4; — 4; + 27,8; $-\frac{107}{11}$; 0 **c)** — 7; + 7; + 13,6; $-\frac{103}{9}$; — 14,3
b) — 1 403,78; $+3\frac{3}{4}$; — 0,76 **d)** $+2\frac{1}{5}$; — 2 406,31; — 0,53

18. Trage auf einer Zahlengeraden die rationalen Zahlen ein, deren Beträge gleich
a) + 2; **b)** $+\frac{5}{2}$; **c)** + 0,4; **d)** + 4; **e)** $+\frac{1}{3}$; **f)** + 0,8 sind!

19. Ermittle für die folgenden Zahlen x jeweils $+x$, $-x$ und $|x|$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)
x	+ 7	$-\frac{7}{8}$	— 0,3	+ 20,4	$+\frac{19}{5}$	$-\frac{1}{3}$	— 0,7	$-8\frac{1}{3}$	+ 2	0

20. Welche der rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengeraden weiter rechts?

a) $+5; +4$ c) $-3; -2$ e) $-5; +4$ g) $+3; -2$ i) $0; -5$

b) $+\frac{1}{2}; +\frac{3}{4}$ d) $-\frac{5}{8}; -\frac{3}{5}$ f) $+\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}$ h) $+\frac{5}{8}; -\frac{3}{5}$ k) $+3; 0$

21. Nenne drei positive und drei negative Zahlen, die

a) größer sind als -6 b) kleiner sind als $+5$ c) kleiner sind als 0!

22. Ordne die folgenden rationalen Zahlen ihrer Größe nach! Beginne mit der kleinsten!

a) $-11; +10; -5; +15; -16; +3; -19; -8; -2; -17; +6; 0; -1$

b) $-\frac{5}{6}; -2\frac{11}{12}; -1\frac{5}{6}; +\frac{5}{24}; +2\frac{1}{4}; +2\frac{2}{3}; 0; -\frac{7}{8}; +1; -1\frac{1}{12}$

23. Ermittle für die geordneten Zahlenpaare $[a; b]$, ob jeweils $a < b$, $a > b$ oder $a = b$ gilt!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
a	$+3$	$+2$	0	-3	-2	0	$+7{,}3$	$-7{,}3$	$-40{,}1$
b	$+7$	$+5$	$+4\frac{1}{3}$	-7	-5	$-4\frac{1}{3}$	$+\frac{73}{10}$	$-\frac{73}{10}$	$-40{,}01$

24. Ermittle für die geordneten Zahlenpaare $[a; b]$ in Aufgabe **b 23**, ob jeweils $|a| < |b|$, $|a| > |b|$ oder $|a| = |b|$ gilt!

25. Untersuche die Zahlen m und n sowie die absoluten Beträge $|m|$ und $|n|$ in gleicher Weise wie in den Aufgaben **b 23** und **b 24**!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
m	-2	-4	$+16{,}2$	-13	$+0{,}01$	$-0{,}01$	$+7$	-7	0
n	$+5$	$+2$	$-16{,}2$	$+12$	0	0	$+9$	-9	$-5{,}5$

26. Nenne jeweils fünf rationale Zahlen, die folgende Ungleichungen erfüllen, und veranschauliche sie an der Zahlengeraden!

a) $+3 < x < +5$ b) $0 < a < +7$ c) $-12 < m < -7{,}5$ d) $-\frac{21}{4} < b < 0$

27. Nenne jeweils fünf Zahlen (falls diese existieren), die die folgenden Ungleichungen erfüllen! Kennzeichne das Stück der Zahlengeraden, aus dem du die gesuchten Zahlen wählen kannst!

a) $|x| < +3$ b) $|a| < +\frac{4}{3}$ c) $|b| < +\frac{1}{2}$ d) $|y| < 0$

28. a) $(+2) + (+1)$ f) $(+7) + (+4)$ l) $(+6\,135) + (+17\,080)$

b) $(+2{,}8) + (+1{,}4)$ g) $(+4{,}6) + (+1{,}9)$ m) $(+74\,820) + (+9\,673)$

c) $\left(+\frac{4}{3}\right) + \left(+\frac{13}{6}\right)$ h) $(+11{,}5) + \left(+\frac{23}{2}\right)$ n) $\left(+5\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right)$

d) $(+6) - (+1{,}5)$ i) $(+5) - (+3{,}5)$ o) $(+38\,267) - (+9\,482)$

e) $\left(+\frac{3}{2}\right) - \left(+\frac{2}{3}\right)$ k) $\left(+\frac{5}{4}\right) - \left(+\frac{4}{5}\right)$ p) $(+2{,}6) - \left(+\frac{4}{5}\right)$

29. Löse folgende Gleichungen! Führe die Probe aus!

a) $x + (+2{,}5) = (+8)$ b) $(+3{,}4) + x = (+6)$ c) $\left(+\frac{7}{6}\right) + x = \left(+\frac{11}{6}\right)$

d) $x + \left(+\frac{3}{3}\right) = \left(+\frac{9}{5}\right)$ e) $x - (+2{,}9) = (+1{,}3)$ f) $x - (+4{,}2) = (+1{,}9)$

30. a) $(+3) + (-2)$ b) $(-6) + (+7)$ c) $(-6) + (+5)$ d) $(+3{,}5) + (-3)$ e) $\left(+13\frac{1}{2}\right) + (-5)$ f) $(+4) + (-3)$ g) $(+4) + (-5)$ h) $(-5) + (+5)$ i) $(+62{,}25) + (-5)$ k) $(+81{,}06) + (-59{,}75)$ l) $(+3) + (-4)$ m) $(-5) + (+7)$ n) $(+3{,}5) + (-4)$ o) $(-7{,}532) + (+9{,}611)$ p) $\left(-2\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right)$

31. a) $(-4) + (-9)$ b) $(-3) + (-12{,}5)$ c) $(-2{,}45) + \left(-\frac{3}{4}\right)$ d) $(-2) + (-7)$ e) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)$ f) $\left(-\frac{2}{5}\right) + (-1{,}96)$ g) $(-13) + (-9{,}5)$ h) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right)$ i) $\left(-\frac{5}{4}\right) + (-1{,}25)$

32. Zeichne eine Tabelle mit folgendem Tabellenkopf auf, und fülle sie für die nachstehenden Zahlenpaare $[a; b]$ aus!

$a + b$	$-a$	$-b$	$(-a) + b$	$a + (-b)$	$(-a) + (-b)$

Vergleiche dann die erste und die letzte Spalte miteinander!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)
a	$+3$	-4	$+4$	-3	$+\frac{1}{2}$	$-6{,}5$	0	$-\frac{1}{4}$	$+2{,}5$	$+\frac{5}{4}$
b	$+2$	$+5$	$+2$	$+2$	$-\frac{3}{2}$	-11	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{5}{4}$	-18	0

33. Setze in die Gleichung $a + b = b + a$ für die Variablen die in Aufgabe **32a** bis **g** genannten Zahlen ein!

34. Zeichne dir eine Tabelle mit folgendem Tabellenkopf auf, und fülle sie für die nachstehenden Zahlentripel $[a; b; c]$ aus!

$a + b$	$(a + b) + c$	$b + c$	$a + (b + c)$

Vergleiche dann die zweite mit der vierten Spalte!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
a	$+3$	$+5$	$-\frac{1}{2}$	-5	$+\frac{7}{8}$	-3	$+0{,}82$	$+\frac{8}{9}$	$+\frac{3}{2}$
b	$+2$	-2	$+\frac{1}{4}$	$+2$	0	-2	$+4{,}31$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$
c	$+2$	-6	$-1{,}75$	$+6$	$-\frac{3}{4}$	$+4$	$-\frac{5}{2}$	0	$+2{,}25$

35. Kann $+1 + |a|$ kleiner als Null sein?

b

36. a) $(+5)-(+3)$ f) $(-4)-(-7)$ l) $(+6)-(-2)$

b) $(+1)-(+4)$ g) $(-9)-(-2)$ m) $(+2)-(-5)$

c) $(+2)-0$ h) $(-2)-0$ n) $(+3)-(-1)$

d) $\left(-\frac{87}{2}\right)-\left(+\frac{45}{2}\right)$ i) $\left(+\frac{271}{16}\right)-\left(+\frac{59}{4}\right)$ o) $\left(-\frac{67}{4}\right)-\left(-\frac{139}{8}\right)$

e) $(+12{,}345)-(+98{,}765)$ k) $(-134{,}67)-(+256{,}00)$ p) $(-12{,}345)-(+98{,}765)$

37. Löse folgende Gleichungen!
Führe die Probe aus!

a) $(+7)-x=(-9)$ c) $(-8)+x=(+7)$ e) $(-26{,}4)+x=(-18{,}3)$

b) $\left(+\frac{17}{3}\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)=x-\left(-\frac{1}{15}\right)$ d) $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{11}{3}\right)=x+\left(-\frac{1}{15}\right)$ f) $(-3{,}42)-x=\left(-\frac{17}{2}\right)$

38. Wandle die nachstehenden Summen so um, daß
1. nur das Rechenzeichen „+“ auftritt,
2. nur das Rechenzeichen „—“ auftritt,
3. alle Vorzeichen positiv sind,
4. alle Vorzeichen negativ sind!

a) $(-12)+(+11)-(+8)-(-39)$ e) $(+45)+(-9)-(+91)-(-5)$

b) $(-5{,}4)-(-0{,}2)-(+0{,}6)-(-0{,}08)$ f) $(-0{,}65)-(+1{,}9)-(+0{,}1)-(-0{,}65)$

c) $\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)-(+0{,}5)+\left(+\frac{7}{6}\right)$ g) $(+0{,}25)-\left(+\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{25}{8}\right)+\left(-\frac{23}{4}\right)$

d) $(-0{,}1)+\left(+\frac{25}{3}\right)-\left(-\frac{35}{3}\right)-(+4{,}4)$ h) $(+5{,}2)+(-0{,}6)-\left(-\frac{3}{5}\right)-(+3{,}2)$

39. Rechne die in Aufgabe **b 38** aufgeführten Summen aus!

40. a) $(-157)+(+209)$ e) $(+2\,099)+(-738)+(-1\,245)$

b) $\left(+\frac{19}{2}\right)+\left(-\frac{19}{4}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)$ f) $(-10{,}15)+(+22{,}30)+(-12{,}15)$

c) $(-139)-(-139)-(+572)$ g) $(-2{,}54)-(-11{,}23)-(+4{,}78)$

d) $\left(+\frac{17}{5}\right)-\left(-\frac{83}{10}\right)-\left(+\frac{67}{10}\right)$ h) $\left(-\frac{9}{2}\right)-(+1{,}25)-(-7)$

41. a) $(+11)+(-72)+(+83)+(-11)+(-32)+(+56)$

b) $(-2{,}85)+(+97)+(+41{,}37)+(-13{,}96)+(+17{,}69)+(-0{,}11)$

c) $(+12{,}28)+(-80{,}75)+(+101{,}50)+(-0{,}25)+(+0{,}25)$

d) $(+3{,}3)+(-12{,}8)+(-31{,}6)+(+59{,}8)+(-8{,}7)$

e) $(+473{,}63)-(+208{,}17)-(-89{,}41)-(-17{,}09)-(+473{,}65)$

42. Ermittle die Differenzen $x-y$ und $y-x$ und vergleiche!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
x	$+7$	-8	$+\frac{3}{4}$	$+3{,}9$	0	$-3{,}18$
y	-3	-5	$-\frac{5}{6}$	$+1{,}1$	$-3{,}2$	$+3{,}18$

43. Setze ein und rechne aus!

a) $|a|-|b|+|c|$
für $a=-8;\ b=-5;\ c=1$

c) $|x|-|y|+|z|$
für $x=3;\ y=-2;\ z=-6$

b) $|a-b|-|c+d|$
für $a=-5;\ b=4;\ c=1;\ d=-3$

d) $\frac{|a+x|}{2}-\frac{|a-x|}{2}$
für $a=-2;\ x=-6$

44. Kennzeichne jeweils auf einer Geraden die Abschnitte, in denen die rationalen Zahlen liegen, die folgende Ungleichungen erfüllen!

a) $-2 < x < +2$ c) $-1 < x < -3$ e) $0 < x < +4$

b) $|x-(+2)| < +2$ d) $+1 < |x| < +3$ f) $+1 < x < +3$

45. a) $(+3)\cdot(+4)$ e) $(+2)\cdot(-7)$ i) $(+2)\cdot(+7)$ n) $(-9)\cdot(+3)$

b) $(+5)\cdot(+3{,}8)$ f) $\left(+\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ k) $(+4)\cdot(+2{,}9)$ o) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{1}{7}\right)$

c) $(+0{,}46)\cdot(+1{,}07)$ g) $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(+\frac{5}{7}\right)$ l) $(+0{,}53)\cdot(+2{,}07)$ p) $\left(+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{7}{11}\right)$

d) $\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)$ h) $(-0{,}48)\cdot(+1{,}5)$ m) $\left(+\frac{5}{7}\right)\cdot\left(+\frac{7}{10}\right)$ q) $(-0{,}72)\cdot(+2{,}5)$

Bemerkung: Verwende bei geeigneten Aufgaben (z. B. bei **c**), **h**), **l**)) den Rechenstab!

46. a) $(-5)\cdot(-11)$ e) $(-7)\cdot(-12)$ i) $(-2)\cdot(+579)$ n) $(-798)\cdot(-2)$

b) $(-2{,}5)\cdot(-8)$ f) $(-3{,}5)\cdot(-6)$ k) $(+206)\cdot(-4)$ o) $(-831)\cdot(+3)$

c) $(-3{,}7)\cdot(-0{,}4)$ g) $(-3{,}2)\cdot(-0{,}7)$ l) $(-0{,}4)\cdot(+2)$ p) $(-1{,}5)\cdot(+0{,}5)$

d) $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{10}{9}\right)$ h) $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)$ m) $(-2{,}5)\cdot(-1{,}2)$ q) $(+1{,}5)\cdot(-0{,}5)$

Bemerkung: Verwende bei geeigneten Aufgaben (z. B. bei **c**), **g**), **o**)) den Rechenstab!

47. Berechne für die folgenden Werte von a und b jeweils die Produkte $a\cdot b$, $(-a)\cdot(-b)$, $(-a)\cdot b$, $a\cdot(-b)$, $-(a\cdot b)$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
a	-3	$+3$	-3	$+\frac{1}{4}$	$-0{,}8$	-4	$+\frac{7}{12}$	$-\frac{9}{13}$	$-\frac{3}{5}$
b	$+6$	-6	-6	$-\frac{2}{3}$	$+0{,}5$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{12}{7}$	$+\frac{26}{3}$	$-\frac{4}{7}$

48. a) $(+5)\cdot(-1)\cdot(+19)$ d) $(-5)\cdot(+9)\cdot(-1{,}7)$ g) $(+4{,}9)\cdot(-7)\cdot(+2{,}1)$

b) $(-9)\cdot(+3)\cdot(-6)$ e) $(+4{,}5)\cdot(-6)\cdot(+8)$ h) $(-7{,}3)\cdot(+6)\cdot(-5)$

c) $(+6)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(+7)$ f) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(+7)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ i) $(+27)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)$

49. a) $(+2)\cdot\left(-\frac{11}{8}\right)\cdot\left(-\frac{5}{22}\right)\cdot\left(+\frac{7}{10}\right)\cdot\left(+\frac{5}{14}\right)$ c) $(+80)\cdot(-91)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$

b) $\left(-\frac{28}{5}\right)\cdot\left(+\frac{12}{5}\right)\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)\cdot\left(-\frac{32}{9}\right)$ d) $\left(-\frac{8}{3}\right)\cdot\left(-\frac{25}{8}\right)\cdot\left(+\frac{13}{10}\right)\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)$

50. Berechne die folgenden Aufgaben auf zwei Arten!

1. Führe zuerst die Rechnung in den eckigen Klammern aus!
2. Forme nach dem Distributivgesetz (↗ Satz B 23) um, und rechne dann aus!

a) $[(+10)-(-3)]\cdot(-6)$ d) $\left[\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{5}{8}\right)\right]\cdot(-3)$

b) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\cdot(+3)$ e) $[(-0{,}4)-(+1{,}8)]\cdot(+5)$

c) $[(-4)-(-8)]\cdot(+6)$ f) $[(+0{,}5)-(-2{,}3)]\cdot(-2)$

51. a) $(+3)^5$ c) $(+1)^7$ e) $(-5)^4$ g) $(+1)^6$ i) $(-4)^3$ l) $(-0{,}3)^2$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$ d) $\left(+\frac{2}{3}\right)^4$ f) $\left(-\frac{7}{8}\right)^2$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ k) $\left(+\frac{3}{5}\right)^4$ m) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

52. In welchen Fällen ist die Potenz einer rationalen Zahl positiv, in welchen Fällen negativ?

b

53. a) $(+48):(-6)$ e) $(+72):(+8)$ i) $(+96):(+12)$ n) $(+64):(-16)$
b) $(+119):(-17)$ f) $(+92):(-4)$ k) $(-108):(+18)$ o) $(-105):(-21)$
c) $(-24{,}8):(0{,}8)$ g) $(-5{,}8):(+17{,}4)$ l) $(-2{,}75):(+0{,}25)$ p) $(+4{,}95):(-33)$
d) $\left(+\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{1}{2}\right)$ h) $\left(-\frac{8}{3}\right):\left(+\frac{13}{8}\right)$ m) $\left(-\frac{19}{2}\right):\left(+\frac{20}{3}\right)$ q) $\left(+\frac{31}{6}\right):\left(-\frac{15}{4}\right)$

Bemerkung: Löse die Aufgaben b), c), g) und e) mit Hilfe des Rechenstabs!

54. a) $2-7$ b) $-3-9$ c) $-17+23$ d) $24-0{,}74$ e) $-\frac{1}{2}-\frac{2}{7}$
f) $0{,}28+0{,}04$ g) $3{,}15-6{,}51$ h) $-25+3{,}32$ i) $-2{,}8-1{,}2$ k) $\frac{9}{16}-\frac{7}{8}$

55. a) $4-8$ b) $-2-11$ c) $19-23$ d) $36-0{,}26$ e) $-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$
f) $0{,}22+0{,}05$ g) $4{,}11-5{,}2$ h) $-0{,}8+1{,}2$ i) $-0{,}8-0{,}08$ k) $2\frac{1}{2}-\frac{14}{3}$

56. a) $12-29+13-27{,}5$
b) $29{,}3-40{,}1+0-9{,}8$
c) $\frac{3}{4}-\frac{6}{9}+\frac{11}{12}-\frac{13}{6}+\frac{1}{2}$
d) $-28-3+5-6+29$
e) $45{,}6-22{,}8-53{,}1+6{,}2$
f) $-\frac{7}{8}-\frac{3}{7}+\frac{27}{28}-1\frac{1}{4}+\frac{19}{14}$

57. a) $(-7)\cdot 3$ b) $3\cdot(-9)$ c) $(-6)\cdot(-1)$ d) $(-3)\cdot\frac{1}{3}$ e) $\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}$
f) $(-104):8$ g) $98:(-49)$ h) $11{,}78:(-5{,}12)$ i) $\left(-\frac{7}{8}\right):\frac{5}{12}$ k) $(-409):1$

58. a) $(-3)\cdot 18$ b) $(-9)\cdot 8$ c) $(-1)\cdot(-1)$ d) $(-6)\cdot\frac{2}{3}$ e) $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{2}{10}\right)$
f) $(-75):15$ g) $114:(-19)$ h) $(-28{,}5):13{,}5$ i) $\frac{12}{22}:(-1)$ k) $1:\left(-\frac{2}{3}\right)$

59. Gib zwischen den folgenden rationalen Zahlen jeweils drei weitere rationale Zahlen an! Veranschauliche diese Zahlen an einer Zahlengeraden!
a) $2;\ \frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{6};\ 0$ d) $-\frac{17}{19};\ -\frac{18}{19}$

60. a) $11{,}07\cdot(-9{,}27)\cdot 2{,}19$
b) $(-6{,}38)\cdot 0{,}93\cdot(-8{,}63)$
c) $74{,}6\cdot(-0{,}79)\cdot(-17{,}9)$
d) $0{,}4\cdot 0\cdot(-3{,}256)$
e) $7{,}04\cdot(-93{,}75)\cdot(-13{,}11)$
f) $8{,}76\cdot 8{,}31\cdot(-10{,}14)$
g) $(-16{,}6)\cdot 14{,}3\cdot(-24{,}1)$
h) $0\cdot(-91{,}78)\cdot 0$

Bemerkung: Löse die Aufgaben a), b) und f) auch unter Verwendung des Rechenstabs!

61. Beachte bei den folgenden Aufgaben, daß zuerst multipliziert werden muß!
a) $5+6\cdot 3$ b) $5+6\cdot(-3)$ c) $-2+3\cdot 5$
d) $5\cdot(-2)+3$ e) $(-6)\cdot(-1)+2$ f) $-4+(-2)\cdot 3$
g) $6\cdot(-2)+5$ h) $3+(-5)\cdot 2$ i) $5+(-6)\cdot 2$

62. a) $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\cdot(-2)$ b) $\frac{3}{2}+\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot 2$ c) $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)-2$
d) $2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+5$ e) $\frac{5}{4}-\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{5}$ f) $\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{8}$
g) $\frac{2}{4}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)+1$ h) $\frac{2}{7}+\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 0$ i) $\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$

63. a) $(-5)\cdot(-4)+3\cdot(-2)$
b) $\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot(-16)-0{,}5\cdot(-5)\cdot(-4)$
c) $12\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-(-15)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)$
d) $-1-\left(-\frac{11}{2}\right)\cdot\frac{4}{11}$
e) $\left(-\frac{80}{11}\right)\cdot\frac{28}{5}\cdot\frac{17}{5}\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{17}{4}\right)\cdot\frac{21}{34}\cdot\left(-\frac{11}{7}\right)$

64. Beachte bei den folgenden Aufgaben, daß zuerst dividiert werden muß!

a) $5 + 6 : 3$ d) $4 : (-2) + 3$ g) $6 : (-2) + 5$
b) $5 + 6 : (-3)$ e) $(-6) : (-1) + 2$ h) $3 + (-7) : 14$
c) $-2 + 5 : 15$ f) $-4 + 2 : (-6)$ i) $5 + (-6) : 2$

65. Vermindere das Produkt aus -3 und -9 um 28 und multipliziere dann mit 14,62!

66. Addiere 12 zum Quotienten aus -39 und 3 und multipliziere dann mit $-28{,}21$!

67. Wie groß ist der Quotient aus dem Produkt der rationalen Zahlen (-4), (-3) und 2 und der Summe von (-50) und 14?

68. Durch welche Zahl muß man den Quotienten aus der Summe und der Differenz der rationalen Zahlen (-8) und 3 dividieren, um als Ergebnis (-1) zu erhalten?

69. In Hauptwetterstationen, die Tag und Nacht besetzt sind, wird die Temperatur an einem Tage viermal gemessen (um 7.00 Uhr, 13.00 Uhr, 19.00 Uhr und 1.00 Uhr). Aus diesen Werten wird die sogenannte mittlere Temperatur des Tages (durchschnittliche Temperatur) bestimmt. Die Temperaturwerte werden dabei bis auf eine Stelle nach dem Komma genau angegeben.
An mehreren Tagen werden folgende Temperaturen gemessen:
a) + 11,8 °C, + 22,5 °C, + 16,3 °C, + 9,7 °C
b) — 3,9 °C, + 8,4 °C, + 6,6 °C, — 2,8 °C
c) — 6,1 °C, + 2,0 °C, + 0 °C, — 4,2 °C
d) — 12,3 °C, — 10,5 °C, — 7,4 °C, — 9,6 °C
Ermittle die jeweilige mittlere Temperatur des Tages!

70. Setze in die folgenden Terme für x nacheinander rationale Zahlen ein, so daß der Term
im ersten Fall eine positive Zahl darstellt,
im zweiten Fall eine negative Zahl darstellt,
im dritten Fall zu Null wird!

a) $-2x$ b) $\frac{x-1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}x$ d) $\frac{x+1}{3}$ e) $\frac{x}{2} - \frac{1}{3}$

71. Markiere auf einem Blatt Papier zwei Punkte, deren Entfernung nach Augenmaß
a) 5 cm, b) 7 cm, c) 10 cm beträgt!
Miß diese Entfernungen mit dem Lineal nach, und berechne jeweils den absoluten, den relativen und den prozentualen Fehler!

72. Von folgenden Größen ist ein grober Meßwert und der absolute Fehler gegenüber einer genaueren Messung gegeben. Berechne jeweils den relativen und den prozentualen Fehler!

a)

Größe	Meßwert	absoluter Fehler
Länge	48,0 m	+ 0,5 m
Länge	48,0 m	— 0,05 m
Fläche	120,0 m²	— 0,5 m²

b)

Größe	Meßwert	absoluter Fehler
Masse	2,4 kg	+ 0,05 kg
Masse	2,40 kg	— 0,005 kg
Zeit	3 min 20 s	+ 5 s

73. Die Zahlen
a) 123,45; b) 123,458; c) 1234,57;
d) 12,34; e) 1,23 werden auf Einer gerundet.
Welche prozentualen Fehler gehen in eine Rechnung ein, wenn mit den gerundeten Zahlen gerechnet wird?

74. Die Zahlen
a) 0,234; b) 2,34; c) 23,45; d) 234,57;
e) 2345,67 werden auf Zehntel gerundet.
Welche prozentualen Fehler gehen in eine Rechnung ein, wenn mit den gerundeten Zahlen gerechnet wird?

75. Ein Werkstück, das für ein Präzisionsinstrument benötigt wird, soll eine Länge von 5,6500 Millimetern haben. Bei der Gütekontrolle wird festgestellt, daß das Werkstück eine Länge von 5,6492 Millimetern besitzt. Wie groß ist der prozentuale Fehler?

76. Die Länge des Äquators beträgt nach neuesten Berechnungen 40067,59 km. Welchen prozentualen Fehler begeht man, wenn man mit der Länge von 40000 km rechnet?

77. Der prozentuale Fehler einer Längenmessung beträgt 1,7%. Der Mittelwert der Messungen beträgt:
a) 43,7 cm b) 109,2 m c) 420 km d) 0,02 mm
Wie groß ist jeweils der absolute Fehler?

78. Um die Drehzahl eines Maschinenteils zu ermitteln, mißt man die Zeit für jeweils 10 Umdrehungen. Man erhält folgende Zeiten: $t_1 = 5{,}3$ s; $t_2 = 5{,}1$ s; $t_3 = 5{,}4$ s; $t_4 = 5{,}1$ s und $t_5 = 5{,}2$ s. Berechne den Mittelwert aus diesen 5 Messungen, und ermittle die Drehzahl!

b

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Ermittle für die geordneten Zahlenpaare $[a; b]$ jeweils $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$! Falls eine Aufgabe im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar ist, schreibe „n. l."!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)
a	21	78	4	12	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	2,4	113	4,2	0
b	14	13	8	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	3	0,8	89	6,3	12

2. Ermittle für die geordneten Zahlenpaare aus Aufgabe **b 1** jeweils $3a + b$, $4a - 3b$ und $3ab$!

3. Welche rationalen Zahlen werden durch folgende Differenzen dargestellt?
a) $(7 - 5)$ b) $(4 - 8)$ c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{6}\right)$
d) $(5 - 1)$ e) $\left(\frac{5}{3} - \frac{7}{6}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2} - 4\right)$
Veranschauliche diese rationalen Zahlen an der Zahlengeraden!

4. Ermittle für die folgenden Zahlen m jeweils $+m$, $-m$ und $|m|$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)
m	-27	$+34{,}8$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{7}$	$+5\frac{1}{4}$	$-0{,}3$	$+4$	-4	$+1{,}4$	$-1{,}4$

5. a) Für zwei rationale Zahlen m und n gelte $|m| = |n|$. Gilt dann auch $m = n$?
b) Für zwei rationale Zahlen m und n gelte $|m| < |n|$. Gilt dann auch $m < n$?
c) Für zwei rationale Zahlen m und n gelte $m > n$. Gilt dann auch $|m| > |n|$?
Begründe deine Angaben in **a)** bis **c)** jeweils durch Zahlenbeispiele!

6. Gib die folgenden Höhenangaben mit rationalen Zahlen an:
a) 165 m über dem Meeresspiegel, b) 20 m unter dem Meeresspiegel,
c) 7650 m über dem Meeresspiegel, d) 496 m unter dem Meeresspiegel!

7. Die Länge eines Eisenträgers wurde fünfmal gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte:
8015 mm, 8009 mm, 8012 mm, 8013 mm, 8011 mm. Ermittle den Durchschnitt, und gib die Abweichungen der Meßwerte vom Durchschnitt mit rationalen Zahlen an!

8. a) $\left(+\frac{22}{5}\right)+\left(+\frac{31}{10}\right)$ f) $(+1{,}8)-\left(+\frac{3}{5}\right)$ l) $(+48\,230)-(+9\,674)$

b) $\left(+\frac{9}{2}\right)-\left(+\frac{11}{4}\right)$ g) $(-35{,}6)+\left(+\frac{38}{5}\right)$ m) $\left(-\frac{127}{8}\right)+(+16)$

c) $\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)$ h) $(-23)+\left(+\frac{49}{2}\right)$ n) $(-59{,}697)+(+80{,}102)$

d) $(-0{,}48)+\left(-\frac{12}{25}\right)$ i) $(+28)-\left(+\frac{157}{10}\right)$ o) $(-0{,}3456)-(-0{,}7891)$

e) $\left(-\frac{11}{4}\right)-\left(+\frac{5}{2}\right)$ k) $\left(-\frac{31}{4}\right)-\left(-\frac{91}{12}\right)$ p) $(+45{,}67)-(-54{,}32)$

b

9. Löse folgende Gleichungen!
Führe die Probe aus!

a) $(+4{,}3)+x=(+4{,}3)$ c) $2x-\left(+\frac{1}{3}\right)=\left(+\frac{5}{3}\right)$ e) $2x+\left(+\frac{2}{7}\right)=\left(+\frac{6}{7}\right)$

b) $(-13{,}2)-x=(-18{,}3)$ d) $x-\left(-\frac{15}{2}\right)=(-2{,}83)$ f) $(-0{,}38)=(-3{,}07)+x$

10. Gib jeweils drei Zahlenpaare $[a;\ b]$ an, für die die folgende Ungleichung (bzw. Gleichung) gilt!

a) $a+b<a$ b) $a+b<b$ c) $a+b=0$ d) $a+b<0$

11. Bilde je zwei Additionsaufgaben und je zwei Subtraktionsaufgaben mit folgenden Ergebnissen!

a) -5 d) $+23$ g) 0 k) $+\frac{48}{7}$

b) -95 e) -31 h) $-3\frac{1}{5}$ l) $+73$

c) $+18$ f) -20 i) -60 m) $-19{,}75$

12. Setze ein und rechne aus!

a) $3|a|+5|b|$
für $a=-2;\ b=-1$

b) $|2x-3y|$
für $x=0{,}5;\ y=-0{,}7$

c) $|4x-3y|$
für $x=-0{,}5;\ y=-1{,}5$

d) $2|a|-3|b|$
für $a=-2;\ b=-\frac{1}{2}$

e) $4|a|+8-a$
für $a=-2$

f) $-3|x|+2x-1$
für $x=-5$

13. a) $(+4\,503)\cdot(-247)$ d) $(+3\,709)\cdot(-218)$ g) $(-278)\cdot(-35)$

b) $-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ e) $(-12)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)$ h) $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot(+2)$

c) $\left(+\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ f) $\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(+\frac{23}{27}\right)\cdot\left(+\frac{9}{4}\right)$ i) $\left(+\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)$

14. Gib zwischen den folgenden rationalen Zahlen jeweils drei weitere rationale Zahlen an! Veranschauliche diese Zahlen an einer Zahlengeraden!

a) $1;\ \frac{3}{2}$ b) $0;\ \frac{1}{4}$ c) $\frac{11}{12};\ 1$ d) $-\frac{20}{23};\ -\frac{21}{23}$

15. Gib drei Zahlen an, die zwischen den rationalen Zahlen a und b liegen!

16. a) $8+27-73$ d) $9-73+27$ g) $5-25+5$

b) $-9+27-9$ e) $-18+28-15$ h) $22-88-22$

c) $5\cdot(-2)+3$ f) $6-3\cdot5$ i) $(-12)\cdot2-3$

17. **a)** $-9+12{,}9-26{,}8-13{,}5+27-0+99{,}3$

b) $-\frac{4}{5}-\frac{3}{2}+\frac{9}{16}-\frac{2}{5}+\frac{3}{40}-\frac{25}{20}+\frac{79}{80}-\frac{7}{4}$

c) $23{,}5-23{,}5-7{,}91+15{,}66-22-8{,}9+13{,}22$

d) $7{,}3+\frac{1}{2}-\frac{3}{5}+2{,}88-26{,}0+5{,}1+27{,}66+\frac{7}{10}-1$

e) $7\,954-2\,047-4\,643+6\,009-3\,406$

f) $-82{,}56-34{,}67-25{,}17+50{,}78-49{,}49$

18. Die bisher beobachtete höchste Temperatur der arabischen Wüste betrug $+56{,}6\ ^\circ C$, die bisher tiefste auf der nördlichen Halbkugel $-78{,}0\ ^\circ C$.
Wieviel Grad beträgt der Unterschied zwischen diesen Temperaturen?

19. Der Durchmesser einer Welle wurde fünfmal gemessen. Dabei ergaben sich folgende Werte: 32,25 mm; 32,27 mm; 32,26 mm; 32,29 mm; 32,28 mm. Ermittle den Durchschnitt und gib die Abweichungen der einzelnen Meßwerte vom Durchschnitt mit rationalen Zahlen an!

20. Die folgende Tabelle gibt die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne in Mill. km an. Berechne die prozentualen Fehler, die bei Berechnungen auftreten, wenn du die Stellen hinter dem Komma vernachlässigst!

Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
57,74	108,14	149,50	227,80	777,84	1426,10	2867,83	4493,65	5899,04

21. Der prozentuale Fehler einer Längenmessung betrage $-2{,}3\,\%$. Der Mittelwert der Messungen betrage:
a) 43,7 cm **b)** 109,2 m **c)** 420 km **d)** 0,02 mm
Wie groß ist jeweils der absolute Fehler?

c

c) Gleichungen

1. Gib drei Gleichungen an, die wahre Aussagen sind, und drei Gleichungen, die falsche Aussagen sind!

2. Gib drei Ungleichungen an, die wahre Aussagen sind, und drei Ungleichungen, die falsche Aussagen sind!

3. Setze in folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen für die Variablen je eine natürliche (dann eine gebrochene und schließlich eine rationale) Zahl so ein, daß wahre Aussagen entstehen!
a) $a+b=c$ **c)** $2a+b<c$ **e)** $2a=a$
b) $a-b>a$ **d)** $3m-x=2m$ **f)** $2x+y=x$

4. Setze zwischen die folgenden Terme eines der Zeichen „=“, „<“ oder „>“, so daß wahre Aussagen entstehen, wenn man für x nacheinander die Zahlen $2;\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{8};\ 1{,}8$ einsetzt!
a) $2-x \quad 3{,}8$ **c)** $4+x \quad 5{,}9$ **e)** $\frac{1}{4}+x \quad \frac{3}{8}$
b) $x-\frac{1}{3} \quad \frac{5}{3}$ **d)** $\frac{1}{2}x \quad \frac{4}{7}$ **f)** $\frac{3}{4}x \quad \frac{1}{2}$

5. Gib für die folgenden Gleichungen die Lösungsmenge im angegebenen Grundbereich an!
a) $3x=5,\ x\in N$ **d)** $4x=7;\ x\in N$ **g)** $3x=-9;\ x\in N$
b) $3x=5;\ x\in R$ **e)** $4x=7;\ x\in R^*$ **h)** $3x=-9;\ x\in R^*$
c) $2x=-4;\ x\in N$ **f)** $4x=7;\ x\in R$ **i)** $3x=-9;\ x\in R$

6. Gib für die folgenden Gleichungen die Lösungsmenge im angegebenen Grundbereich an!

a) $\frac{3}{4}x = 15;\; x \in N$

b) $\frac{3}{4}x = 5;\; x \in R,\; x < 6$

c) $\frac{4}{3}x = 16;\; x \in N$

d) $\frac{4}{3}x = 6;\; x \in R,\; x < 4$

7. Gib zu jeder der folgenden Gleichungen **vier** äquivalente Gleichungen an, indem du auf beiden Seiten die gleiche Zahl addierst bzw. subtrahierst bzw. mit dieser Zahl multiplizierst bzw. durch diese Zahl dividierst!

a) $\frac{4}{9}x - 3 = 2$ b) $\frac{3}{5}x - 2 = 3$ c) $0{,}4x + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

Löse diese Gleichungen!

Wende in den Aufgaben c 8 bis c 22 die Umformungsregeln an, und löse die Gleichungen! Wenn in den folgenden Aufgaben kein Grundbereich der Variablen angegeben ist, dann ist der Bereich *R* gemeint.

8. a) $x + 20 = 50$
b) $y - 36 = 70$
c) $\frac{5}{2} + h = \frac{39}{4}$
d) $x - \frac{7}{2} = \frac{43}{4}$
e) $100 - z = 66$

9. a) $x - 4 = 16$
b) $24 + x = 126{,}9$
c) $\frac{84}{5} + h = \frac{223}{10}$
d) $f - \frac{19}{4} = \frac{43}{6}$
e) $15 - z = 12$

10. a) $y + 14 = 32$
b) $x - 6{,}7 = 19$
c) $x + 4{,}16 = 16{,}46$
d) $\frac{27}{2} + b = 42$
e) $-x + 81 = -19$

11. a) $-c - 3{,}5 = -14$
b) $24 - e = 25{,}85$
c) $4x = 12$
d) $2{,}3x = 18{,}4$
e) $2x = \frac{10}{3}$

12. a) $18{,}75 = 20{,}5 - p$
b) $38{,}875 - x = 40{,}75$
c) $36 = 6k$
d) $0{,}5w = 48$
e) $3x = \frac{17}{6}$

13. a) $17 = 39{,}375 - x$
b) $12 - x = 42$
c) $14x = 154$
d) $18x = 27$
e) $\frac{3}{8}u = \frac{6}{5}$

14. a) $\frac{15}{4} = \frac{5}{9}t$
b) $\frac{x}{24} = 3$
c) $80 = \frac{t}{0{,}8}$
d) $\frac{x}{\frac{1}{2}} = 3$

15. a) $\frac{25}{4}x = \frac{20}{3}$
b) $\frac{m}{24} = \frac{1}{2}$
c) $\frac{x}{1{,}6} = 60$
d) $\frac{x}{\frac{7}{10}} = 5$

16. a) $\frac{3}{14} = \frac{18}{7}x$
b) $38 = \frac{x}{2}$
c) $\frac{x}{6{,}1} = 0{,}05$
d) $\frac{n}{\frac{7}{6}} = 2$

17. a) $\frac{x}{0{,}25} = 8$
b) $\frac{x}{0{,}4} = 90$
c) $0{,}7 = \frac{x}{1{,}9}$
d) $\frac{x}{\frac{4}{9}} = \frac{45}{4}$

18. a) $3x + 4 = 2x + 7$
b) $16 + 8u = 25 + u$
c) $5x - 11 = 3x + 15$
d) $9 + 5p - 6 = 3p - 11$
e) $25 + 6x = 29 + 2x$
f) $6x - 16 = 20 - 3x$

19. a) $4x + 13 - 7x + 36 + 4x = 14x + 42 - 34 + 30x + 19\frac{1}{2}$

b) $3x + 21 - 8x + 30 - x = 71 - 12x + 19 + 4x - 35\frac{2}{3}$

c) $13 + 34a - 5 + 23 - 14a - 97 = 20a + 29 - 10a$

20. a) $3k - 2 - k + 8 - 11k - 4 = k + 16 + 4k - 12 - 3k - 4 - k$
b) $0{,}23l + 4{,}7 - 0{,}19l - 3{,}4 = 0{,}18l + 5{,}7 - 0{,}25l$
c) $0{,}56x + 8{,}9 + 1{,}14x - 6{,}5 + 8{,}8x - 19{,}7 + 12{,}4x - 0{,}9x = 4{,}7$

21. Stelle Gleichungen auf, die die folgenden Zahlen als Lösung haben!

a) 3 b) $-1{,}5$ c) $\frac{1}{3}$ d) $0{,}5$

22. a) $\frac{2}{3x} = 7$ c) $\frac{4}{3x} = 11$ e) $\frac{7}{x+2} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{x} - 6 = 0{,}8$ d) $\frac{13}{x} + 8 = 4{,}3$ f) $\frac{5}{4} - \frac{2}{x} = \frac{1}{3x}$

23. Zeichne wie im Auftrag C 2 auf Seite 68 eine Tabelle in dein Heft! Trage dann die Lösungen für die folgenden Gleichungen ein!

a) $3x + 2 = 7$ c) $2x + 6 = 4$ e) $18x = 0{,}6$

b) $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9} = -2$ d) $\frac{2}{5}x + \frac{19}{15} = 1$ f) $\frac{0{,}7}{x} = 49$

24. Zeichne wie im Auftrag C 2 auf Seite 68 eine Tabelle in dein Heft! Trage dann die Lösungen für die folgenden Ungleichungen ein!

a) $2x < 1$ c) $3x < 2$ e) $x + 4 < 1$

b) $x - 2 > 1$ d) $2x + 5 < -1$ f) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} > -\frac{1}{3}$

25. Löse folgende Ungleichungen!

a) $3x + 4 < 7$ c) $2x - 5 > 2$ e) $\frac{x}{2} + 1 < \frac{1}{3}$

b) $0{,}4x - 2{,}8 < 1{,}6$ d) $0{,}5x + 1{,}4 < -2{,}3$ f) $\frac{7}{x} < 5$

26. Löse folgende Ungleichungen!
Stelle den Bereich, in dem die Lösungen liegen, auf der Zahlengeraden dar!

a) $2x + 3 < 5$ b) $3 - x > 2$ c) $\frac{1}{2} + x > 4$ d) $3x - \frac{3}{2} < 5$

Löse die Gleichungen in den Aufgaben 27 bis 29!

27. a) $|x| = 4{,}5$
b) $|2x + 4| = 4$
c) $|2 + x| = 4$
$x \in R;\ -3 < x < 3$
d) $\left|x + \frac{1}{2}\right| = 0$
e) $\left|\frac{x}{2}\right| + 2 = \frac{9}{4}$
f) $|3x + 2| = -4$

28. a) $|x| = 2{,}3$
b) $|2x - 3| = -5$
c) $|x - 3| = 5$
$x \in R;\ -3 < x < 3$
d) $\frac{2}{3} - |x| = \frac{3}{5}$
e) $\left|\frac{3}{x} - 2\right| = 1$
f) $|x| - 2 = -3$

29. a) $|x| - 3 = 7$
b) $|x| - 2 = 5$
c) $-|x| - \frac{3}{2} = -\frac{2}{3}$
d) $\left|x + \frac{1}{5}\right| = \frac{2}{7}$
e) $\left|\frac{x}{2} - 1\right| + 2 = 5$
f) $|x| + 4 = 1$

30. Welche Zahl muß man um 45 vermindern, damit man 44 erhält?

31. Welche Zahl muß man um 63 vermindern, damit man 77 erhält?

32. Eine bestimmte Zahl wird um $\frac{68}{5}$ vermehrt. Dadurch erhält man $\frac{55}{2}$. Wie heißt diese Zahl?

33. Die Summe zweier Zahlen beträgt 85,17. Ein Summand heißt 18,83. Berechne den anderen Summanden!

34. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 95. Berechne den Minuenden, wenn der Subtrahend a) 15, b) 28, c) $44\frac{2}{3}$ ist!

35. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 95. Berechne den Subtrahenden, wenn der Minuend a) 113, b) 129, c) $134\frac{7}{8}$ ist!

36. Vermindert man den dritten Teil einer Zahl um 5, so erhält man — 3. Wie heißt diese Zahl?

37. Vermehrt man das Dreifache einer Zahl um 4,2, so erhält man ebensoviel wie bei der Verminderung dieser Zahl um 0,2. Wie heißt sie?

38. Ich habe mir eine Zahl aufgeschrieben. Sie wurde verdoppelt und das Ergebnis um 13 vermindert. Der gleiche Wert ergab sich, als ich das Fünffache der aufgeschriebenen Zahl um 55 verminderte. Welche Zahl habe ich mir notiert?

39. Die Summe dreier Zahlen beträgt 40. Die zweite Zahl ist um 3 größer als die erste, die dritte ist um 8 kleiner als die erste Zahl. Wie heißen diese drei Zahlen?

40. Die Summe dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen beträgt 45. Wie heißen diese drei Zahlen?

41. In den folgenden Aufgaben sind Gleichungen gegeben. Drücke die gegebenen Beziehungen jeweils in Worten aus!
Beispiel: $x + 2x = 60 - 3x$
Lösung: Ich erhalte dasselbe Ergebnis, wenn ich eine Zahl um ihr Doppeltes vermehre oder wenn ich ihr Dreifaches von 60 subtrahiere.

a) $35 + 3x = 10x$ b) $4x - 3 = 9x - 8$
c) $12 + 2x = 8x - 12$ d) $x + 10x + 100x = 37$
e) $x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}x - 10$ f) $\frac{1}{10}x + 3 = \frac{1}{100}x - 6$

42. Zwei Strecken sind zusammen 24 cm lang. Die eine ist doppelt so lang wie die andere. Wie lang ist jede der beiden Strecken?

43. In einem Rechteck mit dem Umfang 26 cm ist die eine der beiden Seiten um 3 cm länger als die andere. Wie lang sind die Rechteckseiten?

44. Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umfang von 64 mm. Die beiden Schenkel sind je eineinhalbmal so lang wie die Basis. Wie lang sind die Dreieckseiten?

45. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist ebenso lang wie die eines Quadrates. Die Summe aller Seiten des Dreiecks und des Quadrates beträgt 71,4 cm.
a) Berechne die Länge einer Seite!
b) Berechne den Umfang des Dreiecks und des Quadrates!

46. Von einem Nebenwinkelpaar ist der eine Winkel dreimal so groß wie der andere. Wie groß sind die beiden Winkel?

47. In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Summe aus einem Basiswinkel und dem Winkel an der Spitze 110°.
Wie groß ist der Basiswinkel?

48. Versuche für die folgenden Gleichungen einen entsprechenden Sachverhalt zu finden!
Beispiel: $x = 60$

a) x ist die Maßzahl eines Quadervolumens, die Einheit sei cm^3.
$x = 3 \cdot 4 \cdot 5$
Sachverhalt: Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen 3 cm; 4 cm; 5 cm.

b) x ist die Maßzahl einer Geschwindigkeit, die Einheit sei $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
$x = \frac{90}{1{,}5}$
Sachverhalt: Ein Fahrzeug braucht für eine Strecke von 90 km eine Zeit von 1,5 Stunden.

a) $x = 15$ b) $2x = 28$ c) $4x = 56$

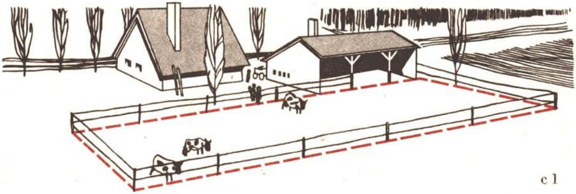
C

49. In einem Dreieck ist der Außenwinkel von α um 28° kleiner als der Außenwinkel von γ. Der Außenwinkel von β ist um 50° kleiner als der Außenwinkel von γ. Wie groß ist jeder der Außenwinkel und jeder der Innenwinkel?

50. In einem Dreieck ist der Winkel β dreimal so groß wie der Winkel α. Der Winkel γ ist um 5° größer als der Winkel α. Wie groß sind α, β und γ?

51. Rudolf und Elke haben zusammen 44,20 M gespart. Rudolf hat in seiner Sparbüchse 4,60 M weniger als die dreifache Sparsumme seiner Schwester Elke. Wieviel Geld hat jedes der beiden Geschwister?

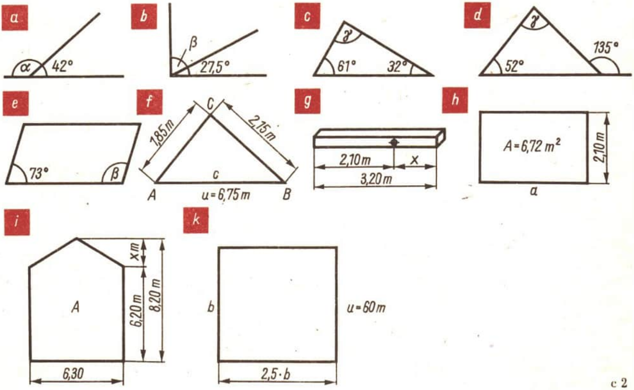
52. Die Weidefläche einer LPG hat die Form eines Rechtecks. Der Umfang beträgt 2 880 m. Die Koppel ist fünfmal so lang wie breit. Berechne den Flächeninhalt (Bild c 1)!



c 1

53. 14 Lehrlinge werden in einem VEG ausgebildet. Es sind zweieinhalbmal soviel Mädchen wie Jungen. Wieviel Jungen und wieviel Mädchen sind dort tätig?

54. Im zweiten Vierteljahr stellte ein volkseigenes Maschinenwerk monatlich durchschnittlich 14 Maschinen mehr her, als der Monatsdurchschnitt im ersten Vierteljahr ergab. So wurden im ersten Halbjahr 282 Maschinen produziert. Wie hoch war der Monatsdurchschnitt im ersten Vierteljahr?



c 2

55. Der Vorsteckbolzen einer Anhängerkupplung von 22 mm Durchmesser hält einen Zug von 25 600 kp aus. Aus Sicherheitsgründen darf die Belastung aber nur $\frac{1}{4}$ davon betragen. Wie hoch kann diese sein?

56. Berechne für die im Bild c 2 (Seite 166) dargestellten Sachverhalte jeweils die richtigen Werte für die angegebenen Variablen!

57. Eine LPG bezog insgesamt 119 dt Dünger (Thomasphosphat und Kali) für 996,80 M. 1 dt Thomasphosphat kostete 5,20 M, 1 dt Kali 9,70 M. Wieviel Dezitonnen Dünger jeder Sorte wurden geliefert?

58. Ein Rind erhält täglich 25 kg Gärfutter, ein Schwein 12 kg. An 63 Tiere (Rinder und Schweine) werden insgesamt 990 kg je Tag verfüttert. Wieviel Rinder und wieviel Schweine stehen in Futter?

59. Auf einem VEG konnten die Kosten für die Aussaat durch Einsatz von Maschinen um 22,5 % auf 5 140 M gesenkt werden.
Wie hoch waren die Kosten vorher?

60. Eine 24 cm dicke Wand aus Hohllochziegeln $\left(\text{Dichte } 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right)$ hat die gleiche Wärmedämmfähigkeit wie eine 36,5 cm dicke Wand aus Vollziegeln $\left(\text{Dichte } 1{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right)$.

a) Berechne für jede Ziegelart die Masse eines Wandstücks von 1 m² Fläche!
b) Wieviel Prozent beträgt die Masseersparnis durch das Verwenden von Hohllochziegeln?

C

61. Eine 3,25 m lange Stahlstange wird in Stücke von 125 mm Länge zersägt. Die Schnittbreite beträgt 3 mm. Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wieviel Prozent die Ausbeute?

62. Welche Kraft benötigt man, um einen Körper von 50 kg mit einem Hebel zu bewegen, bei dem der Kraftarm 2,00 m und der Lastarm 0,50 m lang sind?

63. An einer Stockschere ist der Hebelarm für die Handkraft 500 mm lang. Der Rundstahl wird so eingelegt, daß der Hebelarm für die Schneidkraft 60 mm lang ist. Wie groß ist die Schnittkraft, wenn die Hebelkraft 12 kp beträgt?

64. Zwei Kinder sitzen auf einer Wippe und schaukeln. Das erste wiegt 20 kg und sitzt 3,00 m von der Drehachse entfernt. Wo muß das zweite Kind sitzen, wenn es 30 kg wiegt und dem anderen das Gleichgewicht halten will?

65. Ein Würfel hat eine Kantenlänge von 5 cm und eine Masse von 175 g. Berechne die Dichte des Materials!

66. Welche Masse hat ein Quader mit den Abmessungen 3 cm, 5 cm und 7 cm, der aus Eisen $\left(\text{Dichte } 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ besteht?

67. Eine Säule mit quadratischer Grundfläche aus Beton $\left(\text{Dichte } 2{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ hat einen Grundflächeninhalt von 100 cm² und eine Masse von 33 kg. Wie hoch ist sie?

68. Welche Zeit braucht ein Fahrzeug für eine Strecke von 64 km, wenn seine Geschwindigkeit $12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt?

69. Aus dem Ort A fährt ein Radfahrer ab, der stündlich 12 km zurücklegt. Ein Fußgänger hatte einen Vorsprung von 9 km und legt stündlich 5 km zurück. Wann wird er vom Radfahrer eingeholt?
(Bilde selbst weitere Aufgaben dieser Art für PKW und LKW bzw. Flugzeuge!)

70. Wieviel Gramm Sauerstoff braucht man zur vollständigen Verbrennung von 1 kg Kohlenstoff?

71. Wieviel Gramm Phosphor kann man mit 100 g Sauerstoff verbrennen?

72. Es sollen 500 g Magnesiumoxid (MgO) hergestellt werden.
a) Wieviel Gramm Magnesium benötigt man?
b) Wieviel Gramm Sauerstoff benötigt man?

73. Eine Grube förderte in einem Jahr 907 200 t Kohle. Außerdem mußten in der Minute durchschnittlich 8,750 m^3 Wasser gehoben werden.
a) Wieviel Kubikmeter Wasser kamen auf jede Tonne geförderter Kohle (1 Jahr = 360 Tage)?
b) Für die Wasserhaltung wurden im Jahr 453 600 M ausgegeben. Mit welchem Betrag belasten diese Kosten jede Tonne Kohle?

74. Brauneisenstein enthält etwa 60% Eisen. Wieviel Tonnen Brauneisenstein sind nötig, um 20 t Roheisen mit einem Kohlenstoffgehalt von 4% herzustellen?

75. Um Weichlot herzustellen, wurden 12 kg Zinn, 0,6 kg Antimon und 27,4 kg Blei zusammen eingeschmolzen.
a) Berechne die Massenanteile als Prozente der Gesamtmasse!
b) Wieviel Kilogramm Weichlot entstehen bei einem Schmelzverlust von 3%?

76. Duraluminium, eine Legierung von stahlähnlicher Festigkeit und Härte, setzt sich aus 4% Kupfer, 1% Mangan, 0,5% Magnesium und 94,5% Aluminium zusammen. Unter Berücksichtigung von 1,5% Abbrand sind 250 kg Duraluminium herzustellen.

C

77. Die langen Seiten zweier flächengleicher Rechtecke sind 8,5 cm bzw. 11,9 cm lang. Die kurzen unterscheiden sich um 1,4 cm. Wie groß sind sie?

78. Wie lange braucht ein PKW mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, um einen 2 Stunden früher abgefahrenen LKW, der mit der Geschwindigkeit 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, einzuholen?

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Prüfe folgende Gleichungen auf ihre Lösbarkeit im angegebenen Grundbereich!
a) $\frac{3}{4}x = 5;\ x \in R^*$
b) $|x| = 3;\ x \in R^*$
c) $|x| = \frac{1}{2};\ x \in R,\ x < 0$
d) $2x = -5;\ x \in R,\ x > 0$
e) $|x| = 5;\ x \in N$
f) $|x| = 1;\ x \in R,\ x < 0$

2. a) $42 + z = 65$
b) $\frac{26}{3} + x = \frac{54}{5}$
c) $34 = 36 - x$
d) $12{,}5 = -18{,}3 - x$
e) $\frac{11}{3}z = \frac{55}{3}$
f) $70 = \frac{z}{1{,}24}$

3. a) $18 + w = 20$
b) $24{,}37 + z = 36{,}15$
c) $15{,}95 - x = 12{,}05$
d) $7x = 24{,}5$
e) $\frac{19}{3}x = \frac{76}{3}$
f) $\frac{u}{\frac{3}{4}} = 2$

4. a) $19{,}8 + a = 21{,}5$
b) $9{,}3 + y = 18{,}2$
c) $28{,}25 - s = 12{,}5$
d) $4z = \frac{10}{3}$
e) $\frac{25}{3}p = 15$
f) $\frac{\frac{2y}{3}}{\frac{3}{2}} = 1$

5. a) $8x + 20 - 4x = 98 - 9x$
b) $8x = 9x + 17 + 7x - 10x + 31$
c) $3x + 20 - 6x + 8x = 2x + 36 - 1$

6. a) $15v - 29 - 7v = 17 + 4v + 14$
b) $8 - 7z + 12 + 9z - 35 + 4z = z$
c) $7 - 5x + 8 + 3x - 5 + 8x = x$

7. a) $\frac{5}{x-3} = \frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{x} - \frac{1}{3x} = 5$
c) $\frac{4}{3} - \frac{3}{x} = \frac{1}{2x}$

8. Löse folgende Ungleichungen!
a) $\frac{x}{3} + 2 < \frac{1}{5}$
b) $\frac{3}{x} > 4$
c) $2{,}3x + 3 > 1{,}6$

9. Löse folgende Gleichungen!

a) $|x| = 1{,}9$ **b)** $\left|x - \frac{2}{7}\right| = \frac{3}{5}$ **c)** $\left|\frac{4}{x} + 1\right| = 3$

10. Wenn man das Dreifache einer Zahl um 16 vermindert, erhält man 26. Wie heißt diese Zahl?

11. Das Fünffache einer Zahl wird um 12 vermehrt. Dadurch erhält man 62. Wie heißt diese Zahl?

12. Wenn man den fünften Teil einer Zahl um $2\frac{1}{2}$ vermehrt, so erhält man $3\frac{1}{2}$. Wie heißt diese Zahl?

13. Die sowjetischen Zerstörer der Skory-Klasse erreichen eine Geschwindigkeit von 36 kn (1 Knoten = 1 Seemeile je Stunde; 1 sm = 1,852 km). Wieviel Kilometer legt ein solcher Zerstörer in 50 min zurück?

14. Ein Flugzeug, das mit einer Geschwindigkeit von $1580\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ flog, wurde in 250 km Entfernung mit einem Funkmeßgerät geortet. In wieviel Minuten ist das Flugzeug über dem Ortungsgerät zu erwarten, wenn es mit konstanter Geschwindigkeit den Beobachtungsort anfliegt?

d) Quadratzahl; Quadratwurzel

1. Ermittle die Quadrate der folgenden Zahlen!
a) 7 **b)** 11 **c)** 101 **d)** 342 **e)** 13 **f)** 99 **g)** 56 870

2. Schreibe die Folge der Quadratzahlen von $1^2 = 1$ bis $10^2 = 100$ auf!
Berechne jeweils die Differenz zweier benachbarter Glieder!

3. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft, und vervollständige sie!

b	4	-4	17	-17	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{8}$	0,6	0,1	2 020	4 731,3
b^2										

4. Übertrage die folgenden Tabellen, und vervollständige sie!
Welchen Zusammenhang stellst du fest?

a)

x	3	30	300	3 000
x^2				

b)

y	4	40	400	4 000
y^2				

c)

a	4	0,4	0,04	0,004
a^2				

d)

b	3	0,3	0,03	0,003
b^2				

5. Ermittle die Quadrate der folgenden Zahlen zuerst mit Hilfe des Rechenstabs, danach mit Hilfe der Zahlentafel! Vergleiche jeweils die Ergebnisse!

a) 1,7; 3,8; 5,5; 7,8; 25,7; 8,3; 36,1; 77,2

b) 2,6; 4,1; 6,9; 1,2; 17,2; 9,4; 99,9; 28,7

6. Zeichne eine Tabelle nach folgendem Muster in dein Heft! Nach dem Beispiel in der ersten Zeile sollen dann die Quadrate der nachstehenden Zahlen ermittelt werden.

d

x	x^2 (Überschlag)	x^2 (Rechenstab)	x^2 (Tafelwerk)
2,3	4	5,3	5,290

a) 7,3 b) 4,6 c) 2,9 d) 8,8 e) 34 f) 780 g) 5 200 h) 0,17 i) 0,059 k) 660

Ermittle in den Aufgaben 7 bis 14 die Quadrate der angegebenen Zahlen!

7. a) 1,07 b) 294 c) 61,9 d) 77,7 e) 1,01

8. a) 19,5 b) 0,35 c) 3,05 d) 0,035 e) 66,6

9. a) 1,95 b) 4,06 c) 832 d) 4 260 e) 46 200

10. a) 0,54 b) 0,054 c) 5,04 d) 3 480 e) 38 400

11. a) 3,462 b) 4 925 c) 380,7 d) 467,8 e) 20,25

12. a) 28,78 b) 2 665 c) 2,009 d) 6,001 e) 25,25

13. a) 4,643 b) 0,3815 c) 3,815 d) 15,15 e) 8 754

14. a) 39,66 b) 15,04 c) 0,3209 d) 7 623 e) 16,35

15. Suche aus der Menge der natürlichen Zahlen zwischen 100 und 400 die Teilmenge der Zahlen heraus,
a) die eine natürliche Zahl als Quadratwurzel besitzen,
b) die eine gerade natürliche Zahl als Quadratwurzel besitzen!

16. Gib von den folgenden rationalen Zahlen diejenigen an, aus denen die Quadratwurzel gezogen werden kann!
Achtung! Kürze vorher so weit, daß Zähler und Nenner teilerfremd sind!
a) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{16}{42}$ e) $\frac{9}{16}$ g) $\frac{10}{1960}$ i) $\frac{13}{39}$ l) $\frac{23}{84}$ n) $\frac{28}{63}$ p) $\frac{72}{162}$ r) $\frac{56}{128}$ t) $\frac{36}{92}$
b) $\frac{3}{17}$ d) $\frac{32}{72}$ f) $\frac{4}{25}$ h) $\frac{10}{1690}$ k) $\frac{169}{400}$ m) $\frac{17}{55}$ o) $\frac{75}{147}$ q) $\frac{23}{46}$ s) $\frac{49}{77}$ u) $\frac{64}{484}$

17. Konstruiere den Punkt der Zahlengeraden, der der Zahl $\sqrt{5}$ zugeordnet ist! Gehe hierzu von einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten von 1 cm bzw. 2 cm Länge aus!

18. Konstruiere den Punkt der Zahlengeraden, der der Zahl $\sqrt{8}$ zugeordnet ist! Gehe hierzu von einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten von je 2 cm Länge aus!

19. Berechne einen Näherungswert
a) für $\sqrt{5}$ b) für $\sqrt{8}$
auf zwei Stellen hinter dem Komma!

20 Stelle die folgenden Quadratwurzeln auf der Zahlengeraden dar, wenn die angegebenen Näherungswerte bekannt sind.
a) $\sqrt{3} \approx 1,73$ b) $\sqrt{7} \approx 2,646$ c) $\sqrt{12} \approx 3,464$ d) $\sqrt{19} \approx 4,36$

21. Ermittle für die folgenden Zahlen die Quadratwurzeln mit Hilfe des Rechenstabs!
a) 1,12 b) 2,49 c) 41,5 d) 3,1 e) 5,06 f) 41,2 g) 1,26 h) 10,4 i) 1,04 k) 5,7 l) 6,28 m) 17,8 n) 2,45 o) 1,06 p) 10,6

22. Übertrage folgende Tabellen in dein Heft, und vervollständige sie!

a)

n	2	20	200	2 000	20 000
$\sqrt{n}$					

b)

x	5	0,5	0,05	0,005	0,0005
$\sqrt{x}$					

c)

m	5	50	500	5 000	50 000
$\sqrt{m}$					

d)

y	2	0,2	0,02	0,002	0,0002
$\sqrt{y}$					

23. Ermittle für die folgenden Zahlen jeweils die Quadratwurzel, und zwar **1)** durch einen Überschlag, **2)** mit Hilfe des Rechenstabs und **3)** mit Hilfe der Quadrattafel!

a) 5,4 **c)** 2,9 **e)** 0,6 **g)** 72 **i)** 360
b) 0,53 **d)** 0,053 **f)** 1 400 **h)** 0,14 **k)** 0,0021

24. Ermittle für die folgenden Zahlen die Quadratwurzeln mit Hilfe der Quadrattafel!

a) 7,62 **e)** 324 **i)** 0,048 76 **n)** 4,93
b) 6,273 **f)** 0,999 **k)** 921,5 **o)** 4 325
c) 0,246 **g)** 0,008 73 **l)** 42,6 **p)** 0,462
d) 78,45 **h)** 0,33 **m)** 8 063 **q)** 26,38

25. Ermittle für die folgenden Zahlen zuerst das Quadrat und dann die Quadratwurzel!

a) 1,42 **e)** 53 **i)** 20,6 **n)** 1,01 **r)** 26,08
b) 3,65 **f)** 7,77 **k)** 28,5 **o)** 101 **s)** 26,1
c) 5,61 **g)** 10,02 **l)** 31,4 **p)** 0,101 **t)** 97,5
d) 5,3 **h)** 1 **m)** 64,8 **q)** 10,1 **u)** 7,01

26. Ein Rechteck hat die Seitenlängen a und b.

a) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm **b)** $a = 18$ cm, $b = 2,4$ cm **c)** $a = 1,5$ cm, $b = 3,7$ cm **d)** $a = 2,4$ cm, $b = 3,9$ cm

Zeichne jeweils das Rechteck, und berechne den Flächeninhalt. Welche Seitenlänge muß ein Quadrat haben, das den gleichen Flächeninhalt hat?
Zeichne auch die Quadrate!

27. Zwei Quadrate haben die Flächeninhalte von
36 cm² bzw. 64 cm².
Welche Länge muß ein Quadrat haben, dessen Flächeninhalt gleich der Summe dieser beiden Quadrate ist? Zeichne alle drei Quadrate!

28. Addiere die Quadrate der folgenden Zahlen, und ziehe aus der Summe die Wurzel!

a) 2 und 2 **d)** 5 und 7 **g)** 5 und 12
b) 2 und 3 **e)** 6 und 9 **h)** 8 und 15
c) 3 und 4 **f)** 6 und 8 **i)** 14 und 16

Beachte die Ergebnisse der Aufgaben **c)**; **f)**; **g)** und **h)**!
Versuche weitere solche Zahlen zu finden!

29. Es gelte $x = m \cdot n$; $y = \frac{m^2 - n^2}{2}$; $z = \frac{m^2 + n^2}{2}$.

Setze für m und n beliebige natürliche Zahlen ein!
Berechne die Werte für x, y und z!
Untersuche dann die Beziehung zwischen x^2, y^2 und z^2!

30. Der Inhalt einer Quadratfläche beträgt 98 cm². Wie groß ist näherungsweise der Umfang des zugehörigen Quadrates?

d

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und vervollständige sie!

m	6	-6	19	-19	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{9}$	0,7	0,2	3 030	3263,2
m^2										

2. Trage wie in Aufgabe **d 6.** die Quadrate folgender Zahlen in eine Tabelle ein!
a) 4,7 **b)** 1,4 **c)** 5,3 **d)** 3,1 **e)** 9,2 **f)** 42 **g)** 0,71

3. Ermittle die Quadratwurzeln aus den folgenden Zahlen!
a) 0,64 **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** 0,25 **d)** $\frac{49}{484}$ **e)** $\frac{1}{9}$ **f)** 3,24

4. Berechne einen Näherungswert für $\sqrt{3}$ auf zwei Stellen hinter dem Komma!

5. Ermittle für die folgenden Zahlen jeweils die Quadratwurzel, und zwar **1.** durch einen Überschlag, **2.** mit Hilfe des Rechenstabs und **3.** mit Hilfe der Quadrattafel!
a) 420 **c)** 3,1 **e)** 0,076 **g)** 6,3 **i)** 68
b) 0,42 **d)** 0,12 **f)** 7 600 **h)** 0,7 **k)** 0,0038

6. Ermittle für die folgenden Zahlen die Quadratwurzeln mit Hilfe der Quadrattafel!
a) 258 **c)** 361 **e)** 0,006 75 **g)** 34,7
b) 0,0899 **d)** 721,3 **f)** 0,54 **h)** 3052

7. Ermittle für die folgenden Zahlen die Quadratwurzeln!
a) 2,55 **e)** 78,5 **i)** 10 **n)** 86,5 **r)** 4,01
b) 4,75 **f)** 11,2 **k)** 20 **o)** 500 **s)** 40,1
c) 6,93 **g)** 19,8 **l)** 53,6 **p)** 6,43 **t)** 401
d) 8,22 **h)** 21,2 **m)** 42,5 **q)** 2,06 **u)** 0,401

e

e) Darstellende Geometrie

1. Zeichne einen Ziegelstein in Kavalierperspektive, wenn er
a) auf seiner größten,
b) auf seiner kleinsten
Begrenzungsfläche steht!
($a = 24{,}0$ cm; $b = 11{,}5$ cm;
$c = 7{,}1$ cm; Maßstab 1:4)

2. Zeichne eine Streichholzschachtel in Kavalierperspektive, wenn sie
a) auf ihrer größten,
b) auf ihrer kleinsten
Begrenzungsfläche steht im Maßstab 1:1!
(Miß die Kantenlängen selbst!)

3. Zeichne ein regelmäßiges sechsseitiges gerades Prisma in Kavalierperspektive!
($a = 3$ cm; $h = 5$ cm)

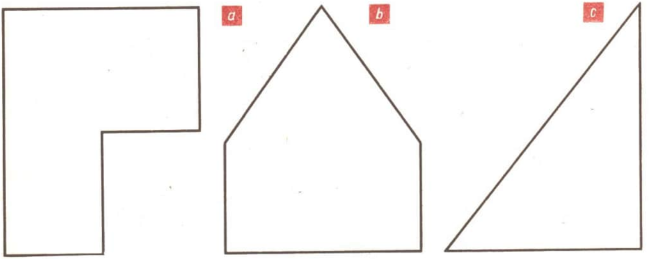
4. Zeichne ein regelmäßiges dreiseitiges gerades Prisma in Kavalierperspektive!
($a = 5$ cm; $h = 6$ cm)

5. Zeichne eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche in Kavalierperspektive!
($a = 5$ cm; $b = 6$ cm; $h = 4$ cm)

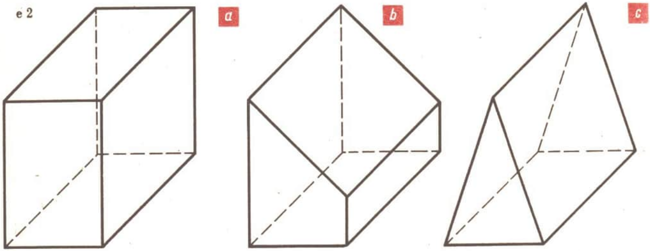
6. Zeichne eine gerade quadratische Pyramide in Kavalierperspektive!
($a = 4$ cm; $h = 7$ cm)

7. Zeichne gerade Prismen ($h = 5$ cm) in Kavalierperspektive mit den im Bild e 1a bis c dargestellten Grundflächen!

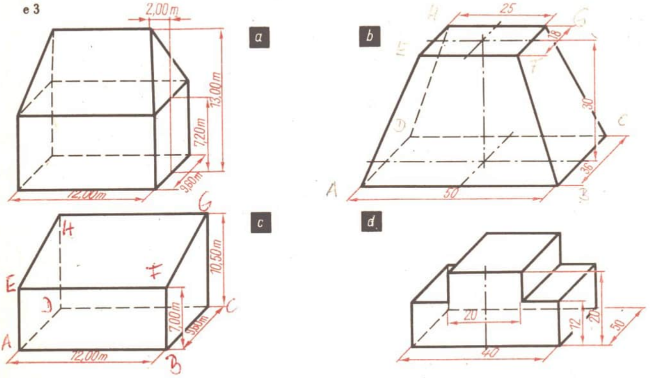
8. Ermittle die wahren Kantenlängen der im Bild e 2a bis c in Kavalierperspektive gezeichneten Prismen!



e 1



e 2



e 3

9. Fertige ein Modell eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm an! Bezeichne die Ecken mit den Buchstaben A bis H! Zeichne das Bild bei senkrechter Eintafelprojektion mit Eckbezeichnungen und Höhenmaßstab, wenn der Quader
a) auf seiner größten,
b) auf seiner kleinsten Begrenzungsfläche steht!

10. Bezeichne in den Schrägbildern im Bild e 3a bis d die Ecken, und konstruiere den Riß mit Höhenmaßstab!
(Figuren in den Bildern e 3a und e 3c im Maßstab 1:200)

11. Ermittle die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$, deren Riß mit Höhenmaßstab gegeben sei!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Länge von $\overline{A'B'}$ in mm	52	41	67	62	45	55
Höhe von A in mm	20	12	18	22	16	27
Höhe von B in mm	44	63	56	56	48	51

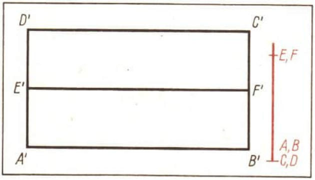
12. Zeichne drei voneinander verschiedene Risse $\overline{A'B'}$ mit Höhenmaßstab von Strecken $\overline{AB}$, deren wahre Längen gegeben sind!
a) $\overline{AB} = 44$ mm **b)** $\overline{AB} = 60$ mm **c)** $\overline{AB} = 50$ mm **d)** $\overline{AB} = 40$ mm

13. Ermittle den Neigungswinkel α der in Aufgabe **11** gegebenen Strecken $\overline{AB}$!

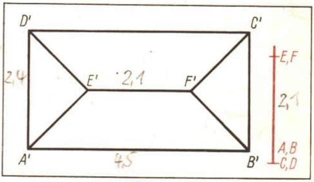
14. Zeichne den Riß mit Höhenmaßstab einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ($a = 6$ cm; $b = 4$ cm; $h = 7$ cm), und ermittle den Neigungswinkel, die wahre Größe und Gestalt der Seitenfläche
a) über der Seite $a = 6$ cm, **b)** über der Seite $b = 4$ cm!

15. Ermittle aus dem Riß mit Höhenmaßstab im Bild e 4 die wahre Größe und Gestalt der Dachfläche!

16. Ermittle aus dem Riß mit Höhenmaßstab im Bild e 5 die wahre Größe und Gestalt der Dachfläche!



e 4



e 5

17. Ermittle die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$, wenn ihr Grundriß $\overline{A'B'}$ im Winkel $\gamma = 45°$ gegen die Rißachse verläuft und folgendes gilt:
a) $\overline{A'B'} = \overline{A''B''} = 4{,}0$ cm
b) $\overline{A'B'} = \overline{A''B''} = 5{,}5$ cm
c) $\overline{A'B'} = \overline{A''B''} = 3{,}5$ cm
d) $\overline{A'B'} = \overline{A''B''} = 6{,}0$ cm

18. Zeichne Grund- und Aufriß einer Strecke, deren wahre Länge $\overline{AB} = 48$ mm beträgt! Gib drei verschiedene Fälle an!

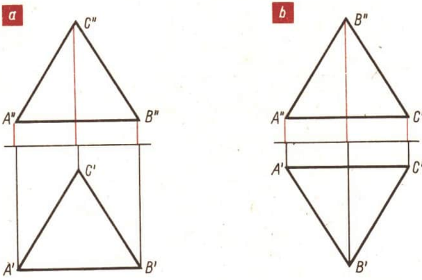
19. Zeichne Grund- und Aufriß einer Strecke, deren wahre Länge $\overline{AB} = 60$ mm beträgt! Gib drei verschiedene Fälle an!

20. Veranschauliche die Lage der in Grund- und Aufriß gegebenen Dreiecke im Bild e 6a, b mit Hilfe eines Dreieckmodells und einer Klapptafel!

21. Zeichne Grund- und Aufriß der in den Bildern e 3a bis d in Kavalierperspektive dargestellten Körper, und bezeichne die Ecken!

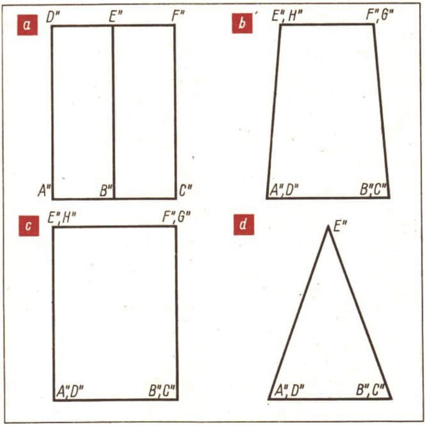
22. Übertrage die Aufrisse aus den Bildern e 7a bis d in dein Heft, und konstruiere die Grundrisse, wenn folgendes gilt:

Bild e 7a	Bild e 7b	Bild e 7c	Bild e 7d
Prisma mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche	Quadratischer Pyramidenstumpf	Quadratisches Prisma	Quadratische Pyramide

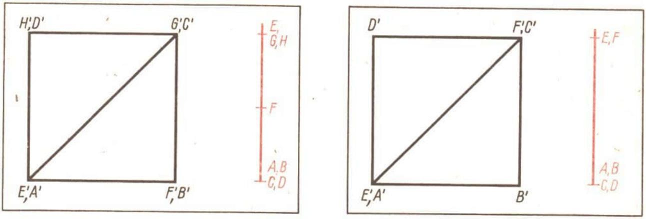


e 6

e 7

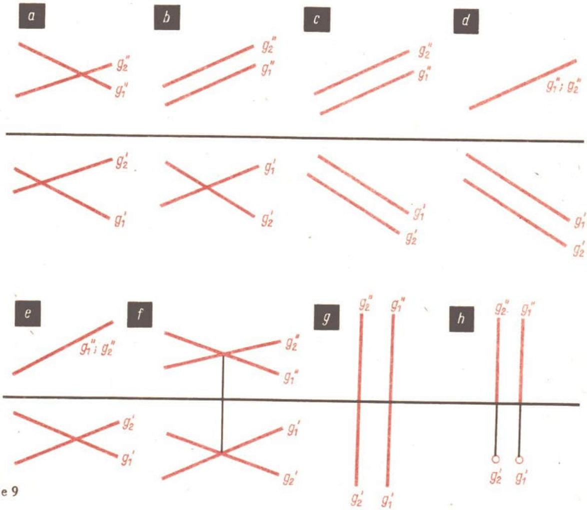


23. Zeichne zu den in den Bildern e 8 a und b im Grundriß mit Höhenmaßstab dargestellten Körpern jeweils Grund- und Aufriß und das Schrägbild in Kavalierperspektive!



e 8

24. Erläutere die gegenseitige Lage der im Bild e 9 a bis h in Zweitafelprojektion dargestellten Geraden! Veranschauliche die Lage in einer Klapptafel!



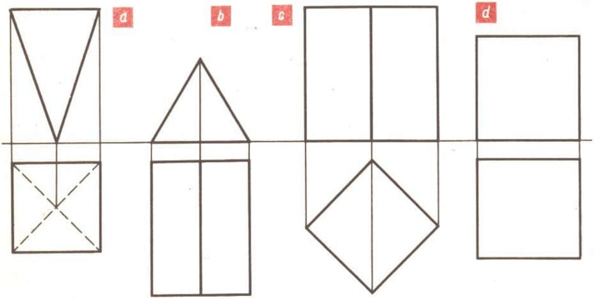
e 9

25. Ermittle die wahre Länge der Raumdiagonalen eines Quaders ($a = 6$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm) mit Hilfe einer Aufrißebene!

26. Ermittle die wahre Länge der Raumdiagonalen eines Würfels ($a = 5$ cm) mit Hilfe einer Aufrißebene!

27. Ermittle die wahre Länge der Kanten des Pyramidenstumpfes im Bild e 3b mit Hilfe einer Aufrißebene!

28. Um was für Körper handelt es sich bei den Grund- und Aufrißdarstellungen in den Bildern e 10 a bis d?

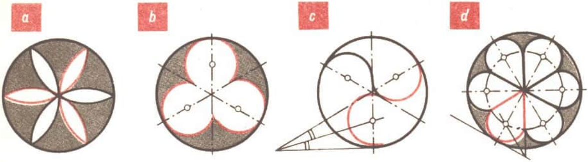


e 10

29. Ein gerades Prisma ($h = 8$ cm), dessen Grundfläche
a) ein gleichseitiges Dreieck ($a = 4$ cm),
b) ein gleichschenkliges Dreieck ($a = 5$ cm; $b = 3$ cm),
c) ein Quadrat ($a = 4$ cm),
d) ein Rechteck ($a = 5$ cm; $b = 3$ cm) ist,
wird von einer Ebene geschnitten, die senkrecht zur Aufrißebene verläuft und einen Neigungswinkel $\alpha = 40°$ gegen die Grundrißebene besitzt. Der Abstand der Höhenlinie h_0 zum Prisma beträgt 2 cm. Ermittle die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur!

f) Der Kreis

1. Konstruiere die im Bild f 1 dargestellten Rundfenster!



f 1

2. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge $s = 10$ cm! Zeichne dann die drei Höhen des Dreiecks ein! Zeichne um den Höhenschnittpunkt einen Kreis, der durch einen Höhenfußpunkt geht! Wie liegen die beiden anderen Höhenfußpunkte bezüglich dieses Kreises?

3. Zeichne in einen Kreis um M mit dem Radius $r = 3$ cm einen Radius $\overline{MP}$ ein! Verlängere dann den Radius über seinen Kreispunkt hinaus!
   a) Trage auf dem Strahl MP außerhalb des Kreises drei Punkte A, B, C so ab, daß $\overline{PA} < r$, $\overline{PB} = r$, und $\overline{PC} > r$!

b) Konstruiere die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Strecken $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, und beschreibe ihre Lage bezüglich des Kreises!

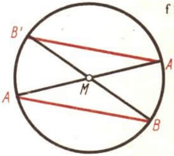
4. a) Zeichne eine Strecke $\overline{AB} = 5$ cm und um A einen Halbkreis so, daß B auf diesem Halbkreis liegt!
   b) Zeichne um den Mittelpunkt M_1 der Strecke $\overline{AB}$ einen Kreis so, daß B auf diesem Kreis liegt! Wie liegt A bezüglich dieses Kreises?
   c) Zeichne um den Mittelpunkt M_2 der Strecke $\overline{M_1B}$ einen Kreis mit $r = \overline{M_2B}$!
   Wie liegen A, M_1, M_2, B bezüglich dieses Kreises?
   d) Zeichne um den Mittelpunkt M_3 der Strecke $\overline{M_2B}$ je einen Kreis mit $r_1 = \overline{M_3B}$ und $r_2 = \overline{M_3A}$!
   Wie liegen A, M_1, M_2, M_3, B bezüglich dieser beiden Kreise?

5. Zeichne einen Kreis und drei parallele Geraden, von denen die eine Sekante, die zweite Tangente und die dritte eine Gerade ist, die mit dem Kreis keinen gemeinsamen Punkt hat!

6. Zeichne einen Kreis um M mit $r = 2{,}8$ cm! Zeichne dann außerhalb des Kreises zwei Punkte P und Q so, daß M, P, Q nicht auf einer Geraden liegen! Konstruiere je eine Parallele zu den Geraden MP, MQ und PQ, die mit dem Kreis um M a) zwei Punkte, b) einen Punkt, c) keinen Punkt gemeinsam hat!

7. Zeichne einen Kreis um M mit $r = 32$ mm! Zeichne dann einen Punkt P im Innern des Kreises und einen Punkt Q außerhalb des Kreises so, daß M, P, Q nicht auf einer Geraden liegen!
   Zeichne nun die Gerade PQ, und benenne die Schnittpunkte mit dem Kreis mit A und B, wobei A zwischen P und Q liegen soll!
   a) Beweise, daß das Dreieck ABM gleichschenklig ist!
   b) Wie ist die Lage von Q zu wählen, damit auch das Dreieck MAQ gleichschenklig ist?

8. In einem Kreis um M (Bild f 2) sind die Sehne $\overline{AB}$ und die Durchmesser $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ eingezeichnet.
   a) Beweise, daß die Sehne $\overline{A'B'}$ genauso lang ist wie die Sehne $\overline{AB}$!
   b) Beweise, daß die Sehne $\overline{A'B'}$ parallel zur Sehne $\overline{AB}$ ist!



f 2

9. Zeichne in einen Kreis mit einem Radius von 3 cm Sehnen ein, die a) 10 mm, b) 20 mm, c) 30 mm, d) 40 mm, e) 50 mm, f) 60 mm lang sind und den Kreispunkt A gemeinsam haben!

10. a) Beschreibe die Konstruktion zu Aufgabe **f 9**, und gib jeweils die Anzahl der Lösungen an!
    b) Begründe, warum du keine 7 cm lange Sehne in diesen Kreis einzeichnen kannst!

11. a) Zeichne einen Kreis um M mit $r = 35$ mm, und konstruiere in einem beliebigen Punkt B dieses Kreises die Tangente!
    b) Zeichne die Gerade MB, und bezeichne deren zweiten Schnittpunkt mit dem Kreis mit B'!
    c) Zeichne den zu $\overline{BB'}$ senkrechten Durchmesser $\overline{AA'}$, und konstruiere die Tangenten an den Kreis in den Punkten B', A, A'!
    d) Wie groß ist der Flächeninhalt des durch die vier gezeichneten Tangenten gebildeten Vierecks?

12. a) Zeichne in einen Kreis zwei Durchmesser ein, die nicht aufeinander senkrecht stehen, und konstruiere in den vier gemeinsamen Punkten mit dem Kreis die Tangenten!
    b) Stelle fest, welches spezielle Viereck von diesen vier Tangenten gebildet wird! Begründe!

13. a) Zeichne in einen Kreis einen Durchmesser und eine Sehne ein, die mit dem Durchmesser einen Punkt im Innern des Kreises gemeinsam hat, der vom Kreismittelpunkt verschieden ist.
b) Konstruiere in den vier gemeinsamen Punkten von Kreis und Durchmesser bzw. Sehne die Tangenten an den Kreis!
c) Stelle fest, welches spezielle Viereck von diesen vier Tangenten gebildet wird! Begründe!

14. a) Zeichne in einen Kreis zwei Sehnen, die einen Kreispunkt gemeinsam haben und deren Länge jeweils gleich dem Radius des Kreises ist!
b) Konstruiere die Tangenten in den drei Punkten, die die Sehnen und der Kreis gemeinsam haben!
c) Stelle fest, welches spezielle Dreieck von diesen drei Tangenten gebildet wird! Begründe!

15. Spiegele einen Kreis an einer Geraden, die
a) zwei Punkte, b) einen Punkt, c) keinen Punkt
mit dem Kreis gemeinsam hat!

16. Zeichne in einen Kreis einen Durchmesser und eine Sehne, die auf diesem Durchmesser senkrecht steht! Beweise, daß der Durchmesser diese Sehne halbiert!

17. a) Zeichne in einen Kreis zwei gleich lange Sehnen! Miß ihren Abstand vom Mittelpunkt! Was stellst du fest?
b) Formuliere einen entsprechenden Satz und beweise ihn!
c) Wie lautet die Umkehrung dieses Satzes? Beweise!

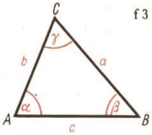
18. Zeichne in einen Kreis eine Sehne! Gewinne dann durch Konstruktion den Punkt des Kreises, der von den Endpunkten der Sehne gleich weit entfernt ist!

19. Gegeben sind eine Strecke $\overline{AB} = 30$ mm und ein Punkt C, der nicht auf der Geraden AB liegt. Konstruiere den Kreis, auf dem die Punkte A, B und C liegen!

20. Zeichne einen Winkel, der kleiner als 180° ist, und gib auf seinen Schenkeln je einen Punkt an. Konstruiere den Kreis, auf dem sowohl diese beiden Punkte als auch der Scheitelpunkt des Winkels liegen!

21. Zeichne einen Winkel $\beta = 40°$, und konstruiere einen Kreis mit $r = 24$ mm so, daß die Schenkel dieses Winkels Tangenten an dem Kreis sind!

22. Konstruiere unter Verwendung nachfolgend gegebener Stücke Dreiecke (Bild f 3)! Konstruiere dann jeweils den Umkreis und den Inkreis!
a) $a = 4$ cm; $b = 50$ mm; $c = 0{,}6$ dm
b) $b = 38$ mm; $\beta = 45°$; $\gamma = 37°$
c) $a = 5$ cm; $b = 40$ mm; $\alpha = 55°$
d) $c = 3{,}4$ cm; $a = 48$ mm; $\gamma = 32°$



f 3

23. Von einem rechtwinkligen Dreieck, in dem $\gamma = 90°$ ist, sind die folgenden Stücke gegeben. Konstruiere jeweils das Dreieck, den Umkreis und den Inkreis.
a) $a = 6{,}2$ cm; $b = 40$ mm
b) $c = 5{,}1$ cm; $a = 32$ mm
c) $b = 3{,}6$ cm; $\beta = 40°$
d) $c = 5{,}0$ cm; $\alpha = 57°$
Welche Besonderheit kannst du für den Mittelpunkt des Umkreises feststellen?

24. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus
a) der Basis $g = 5{,}8$ cm und dem Schenkel $s = 3{,}8$ cm,
b) dem Schenkel $s = 52$ mm und dem Basiswinkel $\beta = 34°$!
Konstruiere jeweils den Umkreis und den Inkreis dieser Dreiecke!

25. Konstruiere für ein gleichseitiges Dreieck In- und Umkreis! Welche besondere Lage haben die Mittelpunkte beider Kreise zueinander?

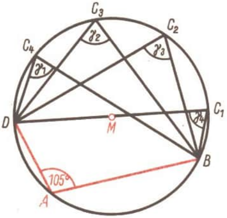
f

26. Zeichne ein Dreieck, dessen Umkreismittelpunkt außerhalb dieses Dreiecks liegt! Welche Besonderheit weist ein solches Dreieck auf?

27. Beweise den Satz F 7 (↗ Seite 113) für den Fall, daß der Mittelpunkt M des Kreises
a) außerhalb, **b)** auf einer Seite des Sehnenvierecks liegt!

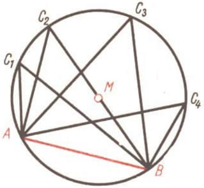
28. Stelle fest, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind!
- **a)** Jedes Sehnenviereck, in dem zwei benachbarte Winkel jeweils 90° groß sind, ist ein Rechteck.
- **b)** Jedes Sehnenviereck, in dem zwei benachbarte Winkel jeweils 90° groß und zwei benachbarte Seiten gleich lang sind, ist ein Quadrat.
- **c)** Jedes Sehnenviereck mit zwei zueinander parallelen Seiten ist ein Rechteck.
- **d)** Es gibt ein Sehnenviereck mit zwei gleich langen Seiten, das ein Drachenviereck ist.
- **e)** Jedes Sehnenviereck mit vier gleich langen Seiten ist ein Quadrat.
- **f)** Jedes Sehnenviereck, in dem zwei benachbarte Seiten gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen, ist ein Quadrat.
- **g)** Es gibt ein Sehnenviereck mit zwei zueinander parallelen Seiten, das ein Rechteck ist.
- **h)** Jedes Sehnenviereck mit zwei zueinander parallelen Seiten ist ein gleichschenkliges Trapez.

29. Im Bild f 4 sind vier Sehnenvierecke gezeichnet, in denen $\sphericalangle DAB = 105°$ ist. Wie groß sind die Winkel γ_1, γ_2, γ_3 und γ_4?



f 4

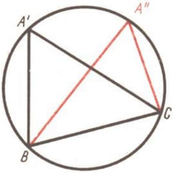
30. Im Bild f 5 sind die vier Dreiecke ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4 mit ihrem gemeinsamen Umkreis gezeichnet. Welche der vorkommenden zwölf Dreieckswinkel sind gleich groß? Begründe!



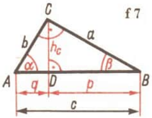
f 5

31. Im Bild f 6 sind zwei Dreiecke, die die Seite $\overline{BC}$ und den Umkreis gemeinsam haben, gezeichnet. Ferner ist $\overline{A'B} = \overline{A''C}$. Beweise, daß die beiden Dreiecke kongruent sind!

32. Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Seiten $a = 5$ cm; $b = 4$ cm und $c = 7$ cm!
Konstruiere dann weiter
- **a)** das Dreieck ABC' mit $\sphericalangle AC'B = \sphericalangle ACB$ und $b' = 6$ cm,
- **b)** das Dreieck $A'BC$ mit $\sphericalangle BA'C = \sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CBA' = 90°$,
- **c)** das Dreieck $AB'C$ mit $\sphericalangle AB'C = \sphericalangle ABC$ und $\overline{AB'} = \overline{B'C}$!



f 6



f 7

33. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck (Bild f 7) aus den folgenden Stücken!
a) $c = 6$ cm; $\beta = 55°$
b) $c = 5$ cm; $p = 2$ cm
c) $c = 8$ cm; $h_c = 3$ cm
d) $p = 3$ cm; $q = 4$ cm

34. Beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Hypotenuse halb so lang wie diese!

35. Zeichne einen Kreis mit dem Radius 3 cm! Konstruiere von einem Punkt, der vom Mittelpunkt des Kreises 7 cm entfernt ist, die Tangenten an den Kreis!

36. Gegeben sind je ein Kreis um M_1 mit $r_1 = 32$ mm und um M_2 mit $r_2 = 13$ mm. Ferner sei a) $\overline{M_1M_2} = 64$ mm, b) $\overline{M_1M_2} = 45$ mm, c) $\overline{M_1M_2} = 27$ mm, d) $\overline{M_1M_2} = 19$ mm. Konstruiere die gemeinsamen äußeren und inneren Tangenten an die beiden Kreise (soweit diese Tangenten existieren)!

37. Konstruiere Dreiecke ABC, für die die folgenden Stücke gegeben sind!
a) $c = 3{,}5$ cm; $\gamma = 42°$; $s_c = 25$ mm
b) $b = 37$ mm; $\beta = 53°$; $h_b = 21$ mm
c) $a = 42$ mm; $\alpha = 70{,}5°$; $h_a = 3{,}5$ cm
d) $b = 52$ mm; $\beta = 112°$; $s_b = 21$ mm

38. In einem Dreieck ist eine Seite genauso lang wie der Radius seines Umkreises. Wie groß ist der dieser Seite gegenüberliegende Winkel?

39. In einem Dreieck ist eine Seite genauso lang wie der Durchmesser seines Umkreises. Wie groß ist der dieser Seite gegenüberliegende Winkel?

40. Beweise folgenden Satz:
Zu gleich langen Sehnen eines Kreises gehören gleichgroße Mittelpunktswinkel!

41. Konstruiere in einen Kreis
a) ein regelmäßiges Sechseck,
b) ein gleichseitiges Dreieck!

42. Konstruiere in einen Kreis
a) ein Quadrat,
b) ein gleichseitiges Fünfeck!

43. Konstruiere alle Punkte, von denen eine gegebene Strecke $\overline{AB} = 5$ cm unter einem Winkel von a) 20°; b) 30°; c) 45°; d) 60°; e) 90° erscheint!

44. Auf einer Geraden g liegen die Strecken $\overline{AB} = 5$ cm und $\overline{BC} = 3$ cm. Konstruiere alle Punkte, von denen aus sowohl die Strecke $\overline{AB}$ als auch die Strecke $\overline{BC}$ unter einem Winkel von 50° erscheint!

45. Bei einem Satteldach ist die Höhe des Giebels gleich der Hälfte der Hausbreite. Wie groß ist dann der Winkel zwischen den Dachflächen?

46. Berechne den Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser
a) 25 mm; b) 5,8 cm; c) 10,1 cm; d) 6,4 m;
e) 72 m; f) 1 km beträgt!
Verwende dazu den Rechenstab, und kontrolliere die Ergebnisse mit Hilfe der Tafel!

47. Berechne den Umfang eines Kreises, dessen Radius
a) 11 mm; b) 3,4 cm; c) 17,8 cm; d) 2,3 m;
e) 87 m; f) 1 km beträgt.
Verwende dazu den Rechenstab, und kontrolliere die Ergebnisse mit Hilfe der Tafel!

48. Der Umfang eines Kreises betrage
a) 5,2 mm; b) 43,1 mm; c) 17,2 cm; d) 2,84 m; e) 62,8 m; f) 1 km.
Berechne jeweils den Durchmesser und den Radius des Kreises!

49. a) Gegeben: $u = 13{,}2$ cm; $\alpha = 50°$
Gesucht: b, d, r
b) Gegeben: $d = 7{,}8$ cm; $\alpha = 200°$
Gesucht: u, b, r
c) Gegeben: $d = 5{,}28$ m; $b = 5{,}28$ m
Gesucht: r, u, α

50. a) Gegeben: $u = 14{,}8$ cm; $b = 10$ cm
Gesucht: r, d, α
b) Gegeben: $r = 64$ mm; $\alpha = 18°$
Gesucht: d, u, b
c) Gegeben: $r = 0{,}43$ cm; $b = 10$ mm
Gesucht: d, u, α

f

51. Berechne für die Angaben in Aufgabe f 46 den jeweiligen Flächeninhalt des Kreises!

52. Berechne für die Angaben in Aufgabe f 47 den jeweiligen Flächeninhalt des Kreises!

53. Berechne für die Kreise mit den folgenden Flächeninhalten jeweils r, d und u!
a) 2,4 cm² b) 12,56 m² c) 100 mm² d) 0,432 m² e) 1 ha

54. Berechne für die Kreise mit den folgenden Umfängen jeweils r, d und A!
a) 29,15 m b) 8,1 dm c) 7 cm d) 24 mm e) 10,37 m

55. Berechne die Fläche eines Kreisringes, wenn
a) $r_a = 12$ cm, $r_i = 10$ cm; b) $r_a = 3{,}5$ m, $r_i = 3{,}4$ m; c) $d_a = 0{,}84$ m, $d_i = 41$ cm!

56. a) Gegeben: $u = 13{,}2$ cm; $\alpha = 45°$
Gesucht: r, d, A, A_α
b) Gegeben: $u = 14{,}8$ cm; $b = 9$ cm
Gesucht: r, d, A, A_α
c) Gegeben: $d = 5{,}2$ m; $b = 5{,}2$ m
Gesucht: α, A, A_α, u

57. a) Gegeben: $u = 14{,}8$ cm; $\alpha = 12°$
Gesucht: r, d, b, A_α
b) Gegeben: $r = 64$ mm; $\alpha = 50°$
Gesucht: b, A_α, u, A
c) Gegeben: $r = 5$ cm; $b = 6$ cm
Gesucht: α, A, A_α, u

58. Der Durchmesser des Rades eines Pkw betrage 65 cm.
a) Wie oft dreht sich das Rad bei einer Fahrt von Berlin nach Wittenberg (95 km)?
b) Welche Strecke legt der Pkw bei 100 Umdrehungen zurück?

59. Der Durchmesser der Räder eines Fahrrades möge 73 cm betragen!
a) Wieviel Umdrehungen machen sie auf einer 45 km langen Strecke?
b) Welche Strecke wird bei 1000 Umdrehungen zurückgelegt?

60. Berechne jeweils den Durchmesser!
a) Wagenrad: $u = 3{,}77$ m
b) Baum: $u = 2{,}35$ m
c) Abflußrohr: $u = 47{,}1$ cm
d) Zylinder: $u = 2{,}83$ m

61. Welche Umfänge hat Rundstahl mit den folgenden Durchmessern?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
d	5 mm	8 mm	10 mm	11 mm	16 mm	25 mm	29 mm	38 mm	155 mm
u									

62. Der große Zeiger einer Armbanduhr sei 11 mm lang. Welchen Weg beschreibt seine Spitze a) an einem Tag, b) in einer Woche, c) in einem Jahr?

63. Zeichne drei Kreise, deren Radien 2 cm, 4 cm und 6 cm messen! Berechne a) die Umfänge, b) die Inhalte der Kreise, und vergleiche die Ergebnisse unter Verwendung von Verhältnisgleichungen!

64. a) Wieviel Meter würde der Erdäquator bei Vergrößerung des Erdradius um 1 m länger werden?
b) Wieviel Meter länger müßte der Erdradius gemacht werden, wenn der Erdäquator um 1 km länger werden sollte?
Die Erde ist als Kugel anzunehmen ($r = 6370$ km; $\pi \approx 3{,}14$).

65. Wir stellen uns vor, ein Mensch gehe auf dem Äquator um die Erde. Um wieviel ist der Weg, den sein Kopf in Augenhöhe zurücklegt, länger als der, den seine Füße beschreiben? Die Erde ist als Kugel anzunehmen ($r = 6370$ km; mittlere Entfernung des Kopfes in Augenhöhe von den Fußsohlen $x = 1{,}60$ m; $\pi \approx 3{,}14$).

f

66. Eine Zugstange aus Stahl hat einen Umfang von 9,60 cm. Die höchstzulässige Zugkraft für 1 cm² Querschnitt beträgt 825 kp. Wieviel Kilopond darf der auf die Stange ausgeübte Zug höchstens betragen?

67. Der Stamm einer alten Eiche hat einen Umfang von 7,85 m. Berechne seinen Querschnitt!

68. Wie groß ist der Blechbedarf für 20 kreisförmige Blechscheiben mit folgendem Durchmesser, wenn der Verschnitt 10 % beträgt?
a) 27 mm **b)** 105 mm **c)** 17 mm **d)** 43 mm **e)** 33 mm

69. Eine Autobahnstrecke ändert an einer Stelle ihre Richtung um 40°. Bei Planung der Strecke hatte man zwischen den beiden Möglichkeiten zu entscheiden, den Radius des Bogens entweder 800 m oder 1200 m lang zu wählen (bezogen auf die Mittelachse der Bahn).
a) Ermittle für beide Werte des Radius die Bogenlängen durch Rechnung und Zeichnung!
b) Um wieviel ist in beiden Fällen die Außenkante der 12 m breiten Fahrbahn länger als die Innenkante?

70. Der Trog des Schiffshebewerkes Niederfinow hängt an 256 Seilen, von denen je zwei über Seilscheiben von 3,5 m Durchmesser laufen.
a) Wie oft dreht sich eine Seilscheibe bei dem 35,71 m hohen Auf- oder Abstieg des Troges?
b) Um wieviel Grad dreht sie sich während einer Sekunde, wenn die ganze Bergfahrt 5 min dauert?

71. Ergänze die folgende Tabelle für nahtlose Gasrohre (Angaben in Millimeter)!

D	t	d	A_q	A
10	2			
13,25	2,25			
16,75	2,25			
21,25	2,75			

D	t	d	A_q	A
26,75	2,75			
33,5	3,25			
42,25	3,25			
48,25	3,5			

Erklärungen: D = Außendurchmesser, d = Innendurchmesser, t = Wanddicke,
A = lichter Rohrquerschnitt, A_q = Wandquerschnitt

72. Wieviel Menschen haben auf einer kreisrunden Fläche **a)** mit einem Radius von 1 km, **b)** mit einem Radius von 100 m Platz, wenn man vier Personen auf 1 m² rechnet?

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Zeichne in einen Kreis eine Sehne, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht! Konstruiere die Sehne, die zur gezeichneten Sehne parallel und genauso lang wie diese ist!

2. **a)** Zeichne einen Kreis und eine Sekante, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht! Konstruiere das Bild dieses Kreises, das bei Spiegelung des Kreises an dieser Sekante entsteht!
b) Führe dieselbe Konstruktion für den Fall aus, daß die Sekante durch den Mittelpunkt des Kreises geht!

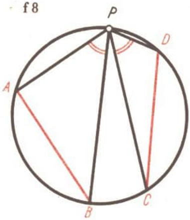
3. Gegeben ist eine Strecke $\overline{AB} = 5$ cm. Konstruiere Kreise, in denen $\overline{AB}$ Sehne ist!

4. Zeichne einen Winkel $\alpha = 50°$, und konstruiere drei Kreise so, daß die Schenkel dieses Winkels Tangenten an diese Kreise sind!

5. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus der Basis $g = 3{,}5$ cm und dem Winkel an der Spitze $\gamma = 42°$! Konstruiere dann den Umkreis und den Inkreis!

6. Im Bild f 8 sind über den Sehnen $\overline{AB} = \overline{CD}$ die Peripheriewinkel mit dem Scheitel in P gezeichnet. Beweise, daß $\sphericalangle\, APB = \sphericalangle\, CPD$ ist!

f 8



7. Konstruiere ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck aus
   a) einer 4 cm langen Hypotenuse,
   b) einem 3 cm langen Hypotenusenabschnitt,
   c) einer 3 cm langen Höhe auf der Hypotenuse!

8. Konstruiere Dreiecke ABC, für die die folgenden Stücke gegeben sind!
   a) $a = 42$ mm; $\gamma + \beta = 125°$; $h_a = 2{,}4$ cm
   b) $c = 25$ mm; $\alpha + \beta = 154°$; $s_c = 34$ mm

9. Ergänze die folgende Tabelle nach Berechnung der fehlenden Größen der Kreise!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
r	20 cm			17,2 m			518 cm	
d		50 cm			5,48 m			
u			100 cm			15,7 m		658 m

10. Führe folgende Berechnungen an Kreisen durch!
   a) Gegeben: $b = 52{,}3$ cm; $\alpha = 4{,}8°$
   Gesucht: r, d, u
   b) Gegeben: $b = 12$ cm; $r = 12$ cm
   Gesucht: d, u, α

11. Berechne für die Kreise mit den folgenden Flächeninhalten jeweils r, d und u!
   a) 47,3 cm² b) 1 m² c) 1 km² d) 4,52 cm² e) 73,14 mm²

12. Berechne für die Kreise mit den folgenden Umfängen jeweils r, d und A!
   a) 15,3 m b) 12,47 dm c) 12,5 cm d) 30,72 m e) 7,1 cm

13. Der Umfang einer Maschinenwelle beträgt 1365 mm. Wie groß ist ihr Durchmesser?

14. In einer Gärtnerei wird der Boden durch Beregnungsapparate künstlich bewässert. Wie groß ist die kreisförmige Fläche, die beregnet wird, wenn der Wasserstrahl 10 m weit reicht?

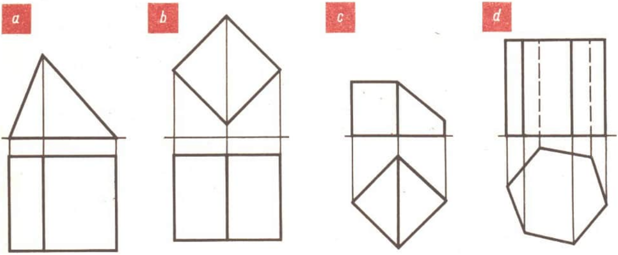
15. Die Seite einer quadratischen Marmorplatte mißt 89 cm. Aus ihr wird die größtmögliche Kreisfläche als Tischplatte ausgeschnitten. Berechne
   a) die Tischfläche, b) den Abfall! c) Wieviel Prozent beträgt der Abfall?

16. Die GST benutzt zum Pistolenschießen Scheiben, auf denen 10 Ringe angebracht sind. Der äußere Durchmesser des äußeren Ringes beträgt 50 cm, die äußeren Durchmesser zweier benachbarter Ringe unterscheiden sich um den Durchmesser des Kreises im Zentrum der Scheibe. Wie groß ist der äußere Durchmesser der „7"?

g) Stereometrie

1. Nenne prismatische Gegenstände aus einem Klassenraum, aus einer Wohnung und solche, die du beim UTP kennengelernt hast!

2. In Bild g 1 sind vier Körper in senkrechter Zweitafelprojektion dargestellt. Welche Bilder stellen Prismen dar? Begründe!



g 1

3. Berechne das Volumen der Quader mit den folgenden Kantenlängen!
   a) $a = 4$ cm; $b = 5{,}2$ cm; $c = 3{,}8$ cm
   b) $a = 512$ mm; $b = 83{,}4$ cm; $c = 0{,}707$ m
   c) $a = 43$ mm; $b = 4{,}7$ cm; $c = 0{,}45$ dm
   d) $a = 70{,}8$ cm; $b = 312$ mm; $c = 0{,}503$ m

4. Wie groß ist der Inhalt der Grundfläche eines Quaders mit dem folgenden Volumen und der folgenden Körperhöhe?
   a) $V = 512\ \text{cm}^3$; $h = 81{,}2$ mm b) $V = 478\ \text{cm}^3$; $h = 57{,}8$ mm

5. Wie lang ist die dritte Kante in einem Quader, wenn
   a) $V = 87{,}4\ \text{cm}^3$; $a = 5{,}3$ cm; $b = 4{,}7$ cm;
   b) $V = 712\ \text{mm}^3$; $A_G = 14{,}24\ \text{cm}^2$?

6. Wie groß ist das Volumen eines Quaders mit den folgenden Kantenlängen, verglichen mit dem Volumen des Quaders mit den Kantenlängen a, b, c?
   a) $2a, b, c$ c) $a, 2b, c$ e) $a, b, 2c$ g) $2a, 2b, c$ i) $a, 2b, 2c$
   b) $2a, 2b, 2c$ d) $a, 2b, 3c$ f) $3a, b, 2c$ h) $2a, 3b, 4c$ k) $\frac{a}{2}; \frac{b}{3}; \frac{c}{4}$

7. Berechne das Volumen eines Würfels mit der folgenden Kantenlänge!
   a) 0,43 cm b) 7,8 cm c) 0,84 m d) 35,4 cm e) 10,1 cm

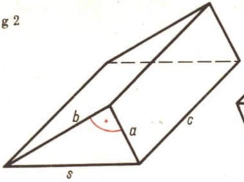
8. Berechne das Volumen eines Würfels, wenn die Grundfläche den folgenden Inhalt hat!
   a) $0{,}49\ \text{cm}^2$ b) $8{,}1\ \text{cm}^2$ c) $77\ \text{cm}^2$ d) $55{,}4\ \text{m}^2$ e) $10{,}1\ \text{cm}^2$

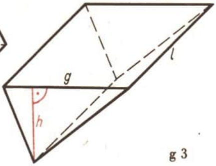
9. Wie ändert sich das Volumen eines Würfels, wenn man seine Kantenlängen
   a) verdoppelt, b) verdreifacht, c) halbiert, d) verzehnfacht, e) auf den zehnten Teil reduziert?

10. In Bild g 2 auf Seite 186 ist ein Prisma mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche in Kavalierperspektive dargestellt. Wie groß ist sein Volumen, wenn folgendes gilt:
    a) $a = 4{,}8$ cm; $b = 7{,}3$ cm; $c = 10{,}4$ cm d) $a = 15{,}7$ mm; $b = 2{,}38$ cm; $c = 0{,}478$ m
    b) $a = 40{,}3$ cm; $b = 458$ mm; $c = 0{,}704$ m e) $a = 7{,}4$ cm; $b = 7{,}4$ cm; $c = 7{,}4$ cm
    c) $a = p$; $b = 2p$; $c = p$ f) $a = 2p$; $b = 2p$; $c = 2p$

g

g 2



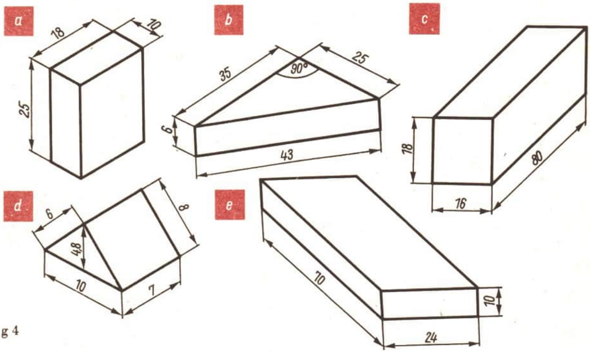


g 3

11. Im Bild g 3 ist ein dreiseitiges Prisma in Kavalierperspektive dargestellt. Wie groß ist sein Volumen, wenn folgendes gilt?

a) $g = 5{,}3$ cm; $h = 4{,}1$ cm; $l = 20{,}8$ cm
b) $g = 24{,}7$ mm; $h = 8{,}12$ cm; $l = 0{,}031$ m
c) $g = h = l$
d) $g = 4{,}7$ mm; $h = 2{,}8$ mm; $l = 103$ mm
e) $g = 60{,}4$ mm; $h = 6{,}71$ cm; $l = 0{,}407$ m
f) $h = 2g$; $l = 3g$

12. **Berechne jeweils das Volumen und die Masse der in den Bildern g 4a bis e dargestellten Prismen! Die Kantenlängen sind in Millimeter angegeben, und das Material sei Stahl. Entnimm die Dichte dem Tafelwerk!**



g 4

13. **Berechne in der folgenden Tabelle die fehlenden Größen!**

Art des Prismas	a) fünfseitiges	b) dreiseitiges	c) Quader	d) Würfel	e) achtseitiges	f) sechsseitiges
Inhalt der Grundfläche	512 mm²		38 cm²	6,25 m²		$3y$
Höhe des Prismas	10,3 cm	0,48 m			17,4 cm	
Volumen des Prismas		7020 cm³	0,38 dm³		1,00 m³	$\frac{1}{4}x \cdot y$

14. Berechne den Oberflächeninhalt für die Prismen, von denen folgende Angaben vorgegeben sind!

a) Quader: $a = 4$ cm; $b = 5{,}2$ cm; $c = 3{,}8$ cm

b) Quader: $a = 43$ mm; $b = 4{,}7$ cm; $c = 0{,}45$ dm

c) Würfel: $a = 0{,}43$ cm

d) Würfel: $a = 7{,}8$ m

e) Würfel: $a = 0{,}84$ m

f) Würfel: $a = 35{,}4$ m

g) Würfel: $A_G = 0{,}49$ cm²

h) Würfel: $A_G = 8{,}1$ cm²

i) Würfel: $A_G = 77$ cm²

k) Würfel: $A_G = 55{,}4$ cm²

15. Berechne den Inhalt der Oberfläche für die in den Bildern g 4a bis e dargestellten Prismen!

16. Von einem geraden Kreiszylinder sind folgende Stücke gegeben bzw. gesucht!

a) Gegeben: $r = 3{,}4$ cm; $h = 7{,}8$ cm
Gesucht: d, A_G, A_M, A_O, V

b) Gegeben: $d = 4{,}8$ cm; $V = 100$ cm³
Gesucht: A_M

c) Gegeben: $A_O = 0{,}84$ m²; $r = 12$ cm
Gesucht: A_M, V

d) Gegeben: $d = 126$ mm; $h = d$
Gesucht: r, A_G, A_M, A_O, V

e) Gegeben: $A_G = 691$ cm²; $h = 15{,}3$ cm
Gesucht: A_M, V

f) Gegeben: $A_M = 74{,}3$ mm²; $r = 0{,}54$ cm
Gesucht: V

17. Der Inhalt der Mantelfläche eines Zylinders sei 1 dm². Seine Höhe sei genauso lang wie sein Radius. Berechne V und A_O!

18. Der Inhalt der Mantelfläche eines Zylinders sei 1 dm². Seine Höhe sei genauso lang wie sein Durchmesser. Berechne V und A_O!

19. Von einem Hohlzylinder sind die folgenden Maße gegeben. Berechne jeweils das Volumen und den Oberflächeninhalt!

a) $r_1 = 5{,}3$ cm; $r_2 = 4{,}8$ cm; $h = 11{,}7$ cm

b) $r_2 = 0{,}72$ m; $r_1 - r_2 = 0{,}02$ m; $h = 1{,}8$ m

c) $d_1 = 17{,}8$ m; $d_2 = 17{,}7$ m; $h = 22{,}5$ m

d) $r_1 = 14{,}5$ cm; $d_2 = 28{,}8$ cm; $h = 512$ mm

20. a) Berechne für den Körper im Bild g 5a das Volumen!
Anleitung: Der Körper setzt sich aus Quadern zusammen.

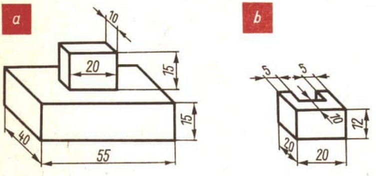
b) Berechne die Masse des Körpers, wenn sein Material Stahl ist!

c) Berechne die Masse des Körpers, wenn sein Material Aluminium ist!
Entnimm die Dichten für Stahl und Aluminium dem Tafelwerk!

21. a) Berechne für den Körper im Bild g 5b das Volumen!
Anleitung: Der Körper setzt sich aus Quadern zusammen.

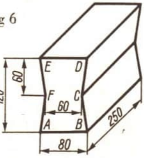
b) Berechne die Masse des Körpers, wenn sein Material Stahl ist!

c) Berechne die Masse des Körpers, wenn sein Material Kupfer ist!
Entnimm die Dichten für Stahl und Kupfer dem Tafelwerk!



g 5

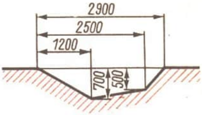
g 6



22. Ermittle die Masse und das Volumen des im Bild g 6 dargestellten geraden Prismas aus Stahl!

23. Das Becken eines Schwimmbades hat die Form eines Quaders mit den Maßen 50 m × 20 m × 3 m. Bestimme, in welcher Zeit das Becken bis zu einer Höhe von 2,8 m mit Wasser gefüllt wird, wenn dem Becken in 1 Minute 6,7 m³ Wasser zufließen!

24. Ein Flußbett hat an einem Beobachtungsort im Querschnitt die Form und die Maße, wie sie im Bild g 7 angegeben sind (Maßangaben in mm). Die Strömungsgeschwindigkeit beträgt $2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Bestimme, wieviel Kubikmeter Wasser an dieser Stelle während einer Minute passieren!



g 7

25. Wieviel Milliliter Wasser fassen folgende Standzylinder?
a) $d = 2{,}0$ cm; $h = 12{,}0$ cm
b) $d = 3{,}2$ cm; $h = 26{,}0$ cm
c) $d = 2{,}5$ cm; $h = 18{,}0$ cm
d) $d = 4{,}0$ cm; $h = 190$ mm

26. Ein zylindrischer Brunnen soll gegraben werden ($d = 1{,}50$ m).
a) Wieviel Kubikmeter Erdreich sind auszuschachten, wenn man 12 m tief graben muß?
b) Wieviel Fuhren sind das, wenn 1 Wagen 2 m³ faßt?

27. Ein zylinderförmiges Gefäß ist 4,00 m hoch und hat einen Durchmesser von 1,40 m. Wieviel solcher Gefäße werden in einem Chemiewerk benötigt, um 46 m³ Salzsäure zu lagern?

28. Bis zu welcher Höhe füllt 1 Liter Wasser ein Gefäß von der Form eines Zylinders, wenn der Radius des Zylinders a) 4 cm, b) 5 cm beträgt?

29. Ein Rechteck mit den Seiten a und b wird um die Seite a gedreht. Wie groß sind Volumen und Oberfläche des entstandenen Zylinders?
a) $a = 9$ cm; $b = 7$ cm b) $a = 15$ cm; $b = 18$ cm c) $a = 6$ cm; $b = 6$ cm

30. Ein 6,00 m langes Kupferrohr hat einen äußeren Durchmesser von 36 mm, einen inneren Durchmesser von 30 mm. Berechne a) seinen Querschnitt, b) seine Masse! (Entnimm die Dichte dem Tafelwerk!)

31. Du füllst in 3 Standzylinder mit den lichten Weiten a) $d = 2{,}8$ cm, b) $d = 3{,}4$ cm, c) $d = 4{,}1$ cm je 75 cm³ Wasser. Wie hoch steht das Wasser in jedem Zylinder?

32. Paßt ein Faß, dessen größter Umfang 7 m beträgt, durch eine 2 m breite Kellertür?

33. Ein zylinderförmiger Silo einer LPG ist 4,2 m hoch und hat einen Durchmesser von 3,5 m.
a) Wie groß ist sein Volumen?
b) Wieviel Tage reicht der Inhalt, wenn täglich 0,25 m³ Futter verbraucht werden?

34. Eine Anschlagsäule hat einen Durchmesser von 1,40 m und ist über dem Sockel 2,50 m hoch. Wie groß ist die Fläche zum Bekleben?

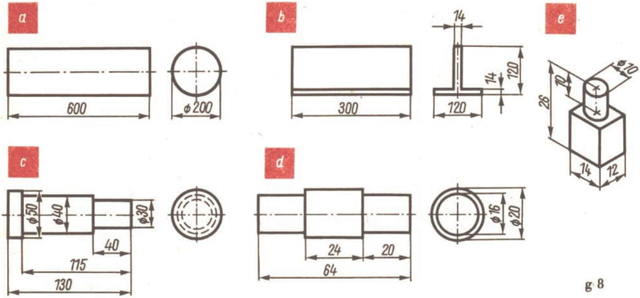
35. Ein Werkstück aus Grauguß $\left(\varrho = 7{,}2\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ mit der Masse 80 kg erhält durch Bearbeitung die Form eines Zylinders. Dessen Durchmesser beträgt 25 cm, die Höhe 20 cm. Berechne die Masse des Werkstückes! Wieviel Prozent beträgt der Bearbeitungsabfall?

36. Aus einem Kupferbarren (100 mm × 100 mm × 700 mm) wird Kupferdraht hergestellt. Berechne die Länge, wenn der Durchmesser a) 6 mm, b) 0,08 mm beträgt!

37. Wieviel Kilogramm wiegt der Bleimantel eines Kabels von 3,000 km Länge und einer Wanddicke von 3 mm? Der Durchmesser des Kabels ohne Mantel betrage 44 mm, die Dichte von Blei ist dem Tafelwerk zu entnehmen.

38. Der Mantel eines Zylinders beträgt 200 cm². Kann der Umfang der Grundfläche 400 cm lang sein?

39. Berechne das Volumen und die Masse der Werkstücke aus Stahl in den Bildern g 8a bis e! (Maßangaben in Millimeter, die Dichte ist dem Tafelwerk zu entnehmen.)



g 8

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

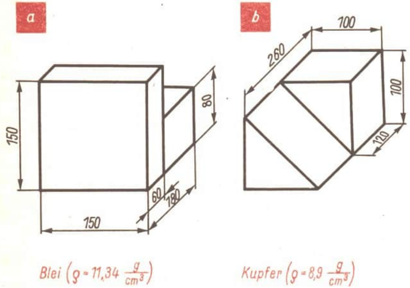
1. Berechne die Kantenlängen der Grundfläche eines Quaders, wenn die Grundfläche quadratisch sein soll und folgendes gilt!
a) $V = 512\,\text{cm}^3$; $h = 7{,}5\,\text{cm}$; **b)** $V = 478\,\text{cm}^3$; $h = 5{,}9\,\text{cm}$; **c)** $V = 712\,\text{mm}^2$; $A_G = 14{,}24\,\text{cm}^2$

2. Wie ändert sich das Volumen eines Würfels, wenn man den Inhalt seiner Grundfläche vervierfacht?

3. Berechne von folgenden Prismen jeweils V und A_O!
a) Quader: $a = 552$ mm; $b = 85{,}4$ cm; $c = 0{,}707$ m
b) Quader: $a = 70{,}8$ cm; $b = 26{,}5$ cm; $c = 0{,}402$ m
c) Würfel: $a = 10{,}1$ cm
d) Würfel: $A_G = 10{,}1\,\text{cm}^2$

4. Von einem geraden Kreiszylinder sind folgende Stücke gegeben bzw. gesucht!
a) Gegeben: $r = 13$ mm; $V = 1{,}06\,\text{cm}^3$
Gesucht: d, A_G, h, A_M, A_O
b) Gegeben: $r = 2{,}5$ cm; $h = 60{,}0$ cm
Gesucht: A_O, V
c) Gegeben: $d = 15$ cm; $h = 2$ cm
Gesucht: r, A_G, A_M, A_O, V
d) Gegeben: $d = 12$ cm; $V = 500\,\text{cm}^3$
Gesucht: A_G, A_M

5. Ermittle jeweils das Volumen und die Masse der in den Bildern g 9 a und b dargestellten Körper!



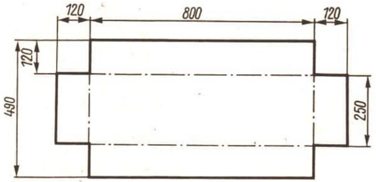
g 9

g

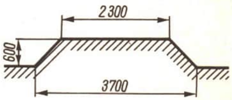
6. Im Bild g 10 ist das Netz einer quaderförmigen Schachtel gegeben. Ermittle nach den gegebenen Maßen ihr Volumen und den Flächeninhalt der Seitenflächen!

7. Im Bild g 11 ist der Querschnitt einer Erdaufschüttung gegeben. Wieviel Kubikmeter Erde entfallen auf einen laufenden Meter der Aufschüttung?
Wieviel Fahrten mit 6 m^3 fassenden Lkw sind erforderlich, wenn die Erdaufschüttung 324 m lang ist?

8. Ein Stück Blech soll zu Wellblech, dessen Querschnitt sich aus aneinandergefügten Halbkreisen mit dem Radius $r = 2$ (3; 3,5; 4; 5) cm zusammensetzt, geformt werden.
   a) Fertige dazu eine Zeichnung an, und berechne ($r = 2$ cm) wieviel Meter glattes Blech man zu 1 m Wellblech braucht!
   b) Untersuche, ob man Blech spart, wenn man der Rechnung einen anderen der angeführten Radien zugrunde legt!



g 10



g 11

9. Stelle zwei Zylinder mit gleichem Volumen in senkrechter Zweitafelprojektion dar, bei denen sich die Durchmesser der Grundfläche wie 1:2 verhalten!

g

Register

Quellennachweis der Bilder

Bild auf der Rückseite des Bezuges: Zentrale Bildstelle der Deutschen Reichsbahn; Kapitel A: Maximilian Seifert; Kapitel B: Heinz Krüger; Kapitel C: Zentralbild; Kapitel D: Lotzig; Kapitel E: Heinz Krüger; Kapitel F: Zentralbild; Kapitel G: Volk und Wissen; Bild A 3: Maximilian Seifert; Bild A 13: Maximilian Seifert; Bild A 14: Zentrales Haus der Deutsch-Sowjetischen Freundschaft; Bild B 20: Reproduktion B. L. van der Waerden: Science awakening. Groningen 1954, S. 40; Bild B 21: Reproduktion aus D. E. Smith: History of Mathematics. New York — Baltimore 1923, Vol. II, S. 317; Bild F 36: Reproduktion aus J. Needham: Science and Civilisation in China. Cambridge 1959, Vol. III, S. 29; Bild F 37: Reproduktion aus D. E. Smith: History of Mathematics. New York — Baltimore 1923, Vol. I, S. 250; Bild G 5: Volk und Wissen; Bild G 6: Volk und Wissen.

ARITHMETIK

RECHENSTAB A

Verhältnisgleichungen A 7

PROZENTRECHNUNG

Prozentwert A 12
Prozentsatz A 13
Grundwert A 14
Graphische Darstellungen A 16
Zinsrechnung A 18

RATIONALE ZAHLEN B

Klassen B 3	Ordnung B 7
Betrag B 6	Teilbereiche B 20 (Ganze Zahlen)

Rechenoperationen

Addition B 8 Subtraktion B 12	Multiplikation B 14 Division B 19

FEHLERRECHNUNG B 23

Absoluter Fehler
Relativer Fehler
Prozentualer Fehler

GLEICHUNGEN UNGLEICHUNGEN C

QUADRATZAHL QUADRATWURZEL D

Zahlenbereiche D 1
Rechenstab D 2, D 8
Quadrattafel D 2, D 9
Quadratwurzeln D 3

GEOMETRIE

DARSTELLENDE GEOMETRIE E

Projektionsarten E 2
Kavalierperspektive E 4

Eintafel-projektion E 5	Zweitafel-projektion E 13

Höhenmaßstab E 6
Neigungswinkel E 9, E 12
Wahre Länge einer Strecke E 8, E 15

DER KREIS F

Lagebeziehungen

Kreis und Gerade F 2	Kreis und Kreis F 10

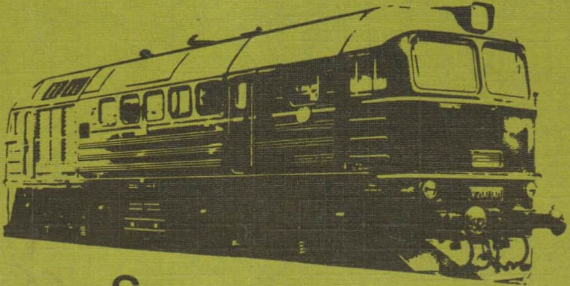
Umkreis (Inkreis) F 5
Winkel am Kreis F 6, F 12

Kreisberechnung

Umfang F 14
Flächeninhalt F 15
Kreisausschnitt F 16

STEREOMETRIE G

Prismen G 1
Kreiszylinder G 5



$$v = \frac{s}{t}$$

Kurzwort: 00 07 06 Lehrb. Mathe Kl 7
Schulpreis DDR 2,10