LEHRBUCH DER MATHEMATIK

NEUNTES SCHULJAHR

LEHRBUCH
DER
MATHEMATIK

FÜR DIE OBERSCHULE

9. SCHULJAHR

Mit 306 Abbildungen

VOLK UND WISSEN VERLAG
BERLIN/LEIPZIG
1951

Verfaßt von Herbert Zummach
unter Mitarbeit von Dr. Gustav Beyrodt
und Johannes Reth
Zeichnungen: Kurt Dornbusch

Betrifft: Bestell-Nr. 2046, Lehrbuch der Mathematik für die Oberschule — 9. Schuljahr

Druckfehlerberichtigung

Seite 76	Zeile 5:	Statt 2 700 setze 27 000!
Seite 86	Zeile 10:	Statt $(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})$ setze $(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = (\sqrt[n]{\bar{a}} \cdot \sqrt[n]{\bar{b}})^n$!
Seite 99	Aufgabe 11b:	Statt $\sqrt{x^3 - 1} + 1 = 0$ setze $\sqrt{x^2 - 1} + 1 = 0$!
Seite 170	Aufgabe 29f:	Statt $k_2 = -\ {}^{4}_{1}$ setze $k_2 = -\frac{4}{1}$!
Seite 172	Zeile 9 v. u.:	Setze alle Buchstaben auf gleiche Höhe!
Seite 181	Zeile 3 v. u.:	Statt **45-Eck** setze **60-Eck**!
Seite 210	Abb. 210a:	Ergänze die Bezeichnung der linken Außenecke zu D_1!
Seite 226	Zeile 7 v. u.:	Statt ein m setze einem!
Seite 267	Abb. 293:	Ergänze das nicht ausgedruckte Bogenstück des Meridians N 30° S!

III/18/93

Best.-Nr. 2046 3.60 DM br. (2.90 DM bei Lieferung über die Schule) · 1.—80. Tausend
Lizenz Nr. 334 · 1000/51-I-58/51
Satz: B. G. Teubner, Leipzig (III/18/154) — F 2227
Druck: Leipziger Druckhaus VEB, Leipzig (III/18/203)

INHALTSVERZEICHNIS

ARITHMETIK, ALGEBRA UND ANALYSIS

A. Die quadratische Funktion und die quadratische Gleichung

B. Die Potenzfunktion und ihre Umkehrung

a) Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

b) Potenzen mit gebrochenen Exponenten

C. Die Exponentialfunktion und ihre Umkehrung

GEOMETRIE

D. Ähnlichkeit

E. Geometrie der Lage

F. Abbildung durch Parallelprojektion

Anhang

ARITHMETIK, ALGEBRA UND ANALYSIS

A. Die quadratische Funktion und die quadratische Gleichung

I. Funktionen

1. Funktionen

a) Das rechtwinklige Koordinatensystem

1. Das xy-Achsenkreuz

Beobachtungsreihen kann man zeichnerisch darstellen, z. B. die Lufttemperatur an einem Ort zu bestimmten Zeiten eines Tages (Abb. 1), die Körpertemperatur eines

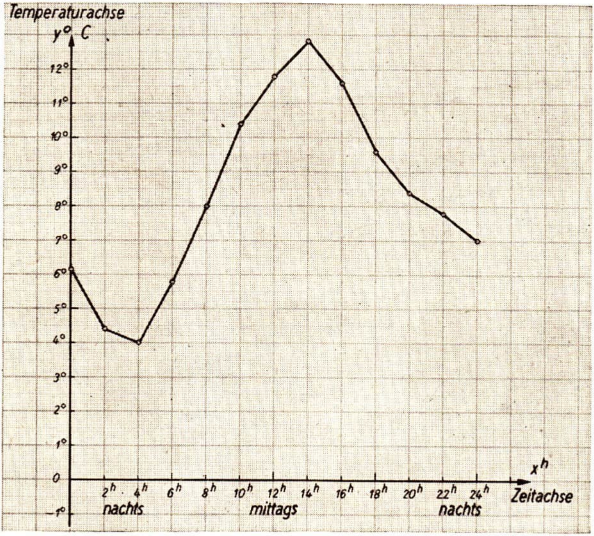


Abb. 1. Lufttemperatur an einem Oktobertag

Kranken an mehreren aufeinanderfolgenden Krankheitstagen (Abb. 2), die Körperlänge eines Kindes in aufeinanderfolgenden Lebensjahren (Abb. 3) usw. Man zeichnet dazu in einer Ebene zwei aufeinander senkrecht stehende Zahlengerade mit gemeinsamem Nullpunkt. Aus den beiden Zahlengeraden werden durch diese gegenseitige Verknüpfung Zahlenachsen.

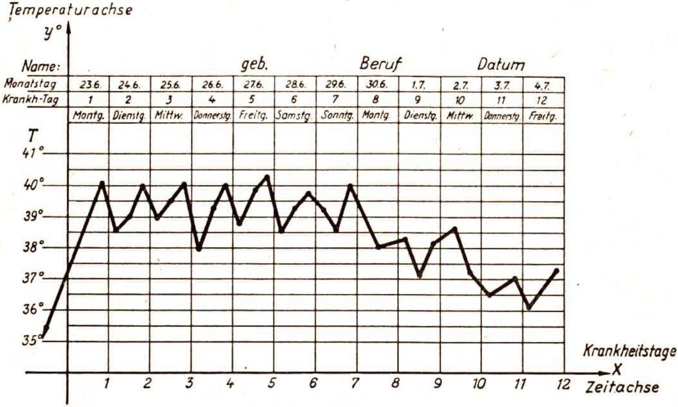


Abb. 2. Fieberkurve eines Kranken

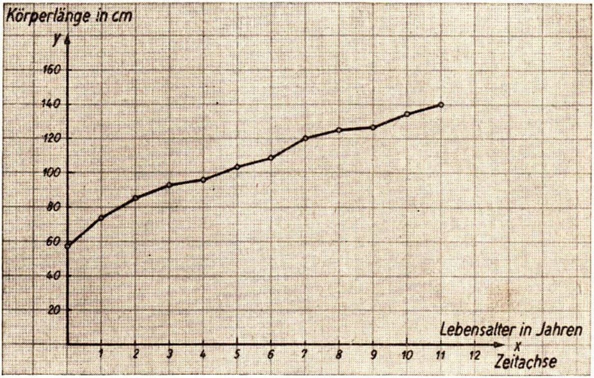


Abb. 3

Die waagerecht liegende Achse heißt x-Achse, die lotrecht liegende y-Achse. Beide Achsen zusammen bilden ein rechtwinkliges xy-Achsenkreuz.

Das Achsenkreuz teilt die Ebene in vier Achsenfelder oder Quadranten[1]), den I., II., III. und IV. Quadranten, abgekürzt I, II, III und IV (Abb. 4).

Strecken gleicher Länge, die in der Zeichnung von demselben Anfangspunkt aus nach entgegengesetzten Richtungen laufen, unterscheidet man durch die Vorzeichen plus und minus: $+5$ und -5; $+4$ und -4; $+a$ und $-a$.

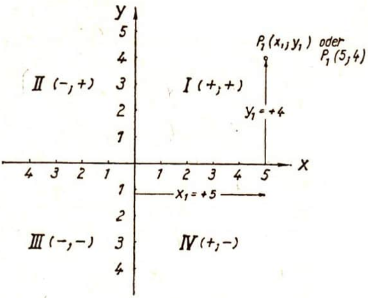


Abb. 4

Wir legen im Achsenkreuz fest (Abb. 4): Die positive x-Richtung zeigt vom Nullpunkt aus nach rechts, die positive y-Richtung vom Nullpunkt aus nach oben.

Den Nullpunkt des Koordinatensystems nennt man seinen Ursprung und bezeichnet ihn mit O[2]).

2. Der Punkt im xy-Achsenkreuz, das xy-Koordinatensystem.

Ein Punkt P ist im xy-Achsenkreuz durch seine Abstände von den Achsen bestimmt. Diese lassen sich auch auf den Achsen messen. Der x-Abschnitt heißt die **Abszisse x**[3]), der y-Abschnitt die **Ordinate y**[4]) des Punktes P.

Abszisse und Ordinate eines Punktes heißen die **Koordinaten**[5]) **des Punktes P**, man schreibt $P(x; y)$. Das rechtwinklige Achsenkreuz als Bezugssystem zu diesen Koordinaten heißt daher auch **rechtwinkliges Koordinatensystem** (Abb. 4).

b) Veränderliche und Funktion

1. Veränderliche

Größen, die verschiedene Werte annehmen können, heißen veränderliche Größen oder Veränderliche.

In den Beobachtungsreihen der Abb. 1, 2 und 3 sind die Zeitpunkte der Beobachtungen und die gemessenen Beobachtungswerte untereinander verschieden oder veränderlich.

Die Veränderliche, über die wir willkürlich oder frei verfügen können, heißt die **willkürliche oder unabhängige Veränderliche x**; sie ist in den obigen Beobachtungsreihen

---

1) Quadrant (lat.) heißt Vierteil, Achsenfeld.

2) Anfangsbuchstabe des lateinischen Wortes origo oder Ursprung.

3) abscindere, lies: ab-scindere, (lat.) heißt abschneiden, abtrennen. Abszisse (lies: Ab-szisse) ist das auf der x-Achse abgeschnittene Stück, der „x-Abschnitt des Punktes“.

4) ordinare (lat.) heißt zuordnen. Ordinate ist der einer Abszisse zugeordnete „y-Abschnitt eines Punktes“.

5) coordinare (lat.) heißt einander zuordnen, nebenordnen.

der Zeitpunkt der Messung. Die Veränderliche, über die wir nicht frei verfügen können, heißt die **abhängige Veränderliche** y; sie ist in den angeführten Beispielen der zum gewählten Zeitpunkt zugehörige Meßwert der Beobachtung.

2. Darstellung von Funktionen

In den Beispielen der Abb. 1, 2 und 3 hängt die Größe y von x ab. Jedem frei gewählten Wert der unabhängigen Veränderlichen x kann ein bestimmter Wert der abhängigen Veränderlichen y zugeordnet werden. Für dieses Abhängigkeitsverhältnis sagt man in der Mathematik:

y ist eine Funktion[1]) von x.

Die Abhängigkeit der Veränderlichen y von der unabhängigen Veränderlichen x ist in den gewählten Beispielen durch messende Beobachtung festgestellt. In allen drei Beispielen ist die Zeit die unabhängige Veränderliche x (Abb. 1, 2, 3). Zur bildlichen Veranschaulichung dieser Funktionen zeichnet man zu frei gewählten Zeitpunkten als Abszissen die beobachteten Werte als Ordinaten in ein rechtwinkliges xy-Achsenkreuz ein und verbindet die entstandenen Beobachtungspunkte als „Marksteine" durch Strecken. Die beobachtete und gemessene Abhängigkeit wird in der zeichnerischen Darstellung durch eine **Kurve**[2]) – in den Abb. 1, 2, 3 je durch einen geknickten Streckenzug – wiedergegeben.
In den graphischen[3]) Darstellungen der Abb. 1, 2 und 3 entsprechen die geknickten Streckenzüge nicht genau dem tatsächlichen Verlauf der Funktionen. Dieser wird im allgemeinen nicht durch einen geknickten Streckenzug, sondern durch einen gekrümmten Linienzug dargestellt, wie ihn z. B. selbstregistrierende Apparate aufzeichnen (s. Aufgabe 7 und Abb. 7). Da wir aber das Bildungsgesetz dieser Funktionen nicht in einen mathematischen Ausdruck fassen können, können wir den Verlauf der Kurven zwischen den beobachteten „Marksteinen" ohne weitere Zwischenmessungen nicht zuverlässig und richtig ergänzen. Aus diesem Grunde, aber auch des leichteren Zeichnens wegen, benutzt man bei derartigen Funktionen den geknickten Streckenzug als Bild der Funktion.

Analytische Darstellung einer Funktion. Bei anderen Funktionen ist die Abhängigkeit der Veränderlichen y von der unabhängigen Veränderlichen x durch eine mathematische Abhängigkeitsvorschrift zwischen y und x gegeben, nach der jedem x-Wert ein Funktionswert y zugeordnet werden kann. Man nennt diese Vorschrift die **analytische[4]) Darstellung der Funktion.** In vielen Fällen läßt sie sich durch einen geschlossenen mathematischen Ausdruck zwischen y und x darstellen.

Beispiel: $y = x^2 + x - 2$.

Geometrische Veranschaulichung des Verlaufs einer Funktion. Um den Verlauf der Funktion $y = x^2 + x - 2$ in einem gewissen **Bereich,** z. B. von $x = -4$ bis $x = +4$, geometrisch veranschaulichen zu können, stellen wir eine **Wertetafel der Funktion** oder **Funktionstafel** auf. In diesem Bereich kann x jeden

1) Funktion (lat.) heißt Verrichtung.
2) linea curva (lat.) heißt gekrümmte Linie.
3) graphisch (gr.) heißt zeichnerisch.
4) Analysis (gr.) heißt Auflösung. Die Analysis behandelt die Lösung einer mathematischen Aufgabe durch Feststellung des Zusammenhangs der veränderlichen Größen.

Wert zwischen -4 und $+4$ annehmen. Wir beschränken uns vorerst auf ganzzahlige Werte der unabhängigen Veränderlichen x in diesem Bereich:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$+10$	$+4$	0	-2	-2	0	4	10	18

Zeichnen wir die zusammengehörigen Wertepaare von x und y in ein rechtwinkliges xy-Achsenkreuz ein, so erhalten wir zu jedem Wertepaar $(x; y)$ der Funktionstafel einen Punkt $P\ (x; y)$ im Achsenkreuz. Die Verbindung der gefundenen Punkte im Achsenkreuz durch einen gekrümmten Linienzug nennt man die **Kurve der Funktion $y = x^2 + x - 2$** oder das **Funktionsbild** (Abb. 5).

Die Funktionskurve ist eine zeichnerische Veranschaulichung des Verlaufs einer Funktion in einem gewissen x-Bereich.

Funktionsbild und Funktionstafel sind anschauliche und praktische Hilfsmittel zum Arbeiten mit einer Funktion. Beide werden in Technik und Physik oft angewandt.

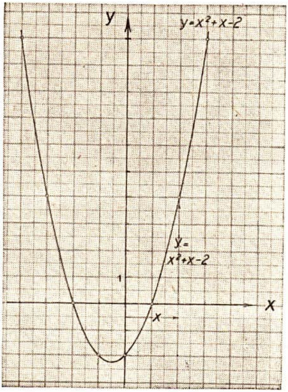


Abb. 5. Die Funktion $y=x^2+x-2$

Aufgaben

I. Das rechtwinklige Koordinatensystem

1. Bestimme die Lage der folgenden Punkte im xy-Achsenkreuz: $(1; 1)$, $(+1; -1)$, $(-1; -1)$, $(-1; +1)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; 0)$, $(-4; 0)$, $(4; -4)$, $(-4; -4)$! In welchen Quadranten liegen die Punkte?

2. Welche Koordinaten haben die Ecken der Dreiecke und Vierecke in Abb. 6? In welchen Quadranten liegen die einzelnen Eckpunkte?

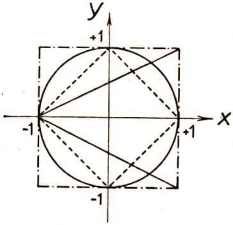


Abb. 6

II. Veränderliche und Funktion

3. Stelle eine Fieberkurve nach Angaben aus dem örtlichen Krankenhaus dar! Anleitung in Abb. 2. Der Pfeil in Abb. 2 vom Punkt der ersten Temperaturmessung zu der Bezeichnung 35° T besagt nicht, daß die Temperatur des Kranken bei der Einlieferung in das Krankenhaus 35° betrug, sie ist nur der Hinweis, daß die gezeichnete Kurve zu den Ordinatenwerten 35°; 36°; 37°; ...; 41° gehört.

4. Im Laufe eines Sommertages erhielt man durch zweistündlich durchgeführte Messungen der Lufttemperatur die folgende Zahlentafel:

Uhrzeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24^h^,
Temperatur	14	11,5	9,5	10	14	22	26,5	27,5	27	25,5	22	19	17,5°C.

a) Stelle den Temperaturverlauf während des Tages zeichnerisch dar! Maßstab: 1 Std. $\widehat{=}$ 0,5 cm; 1°C $\widehat{=}$ 0,5 cm.

b) Wie groß ist die Temperaturschwankung des Tages (Differenz zwischen der höchsten und der tiefsten Temperatur)?

c) Zu welchen Zeiten treten das Temperaturmaximum und -minimum des Tages auf?

d) Schätze die Durchschnittstemperatur des Tages nach dem Funktionsbild!

5. Die Messung der relativen Feuchtigkeit zu denselben Uhrzeiten am gleichen Beobachtungsort und gleichen Tage ergab die folgende Wertetafel:

Uhrzeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24^h^,
rel. Feuchtigkeit	72	73	76	75	68	60	55	53	53	55	60	65	68%.

a) Stelle die Zahlentafel zeichnerisch dar!

b) Zu welchen Tageszeiten treten das Maximum und das Minimum der relativen Feuchtigkeit auf?

c) Vergleiche die zeichnerische Darstellung der relativen Feuchtigkeit mit der Darstellung des Temperaturverlaufs der Aufgabe 4!

6. Die barometrische Höhenmessung beruht auf der Abnahme des Luftdrucks mit zunehmender Entfernung des Meßortes von der Erdoberfläche. Verschiedenen Höhen sind die folgenden Barometerstände zugeordnet:

Höhe in km	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10,
Barometerstand in Torr	760	674	598	530	470	417	370	328	291	258	229.

a) Stelle die Abhängigkeit des Barometerstandes von der Höhe des Meßortes zeichnerisch dar!

b) Welcher Barometerstand herrscht unter Normalumständen auf dem Gipfel der Zugspitze (2970 m)?

c) In welcher Höhe befindet sich ein Beobachter, wenn sein Höhenmesser einen Druck von 500 Torr anzeigt?

7. Zur fortlaufenden Beobachtung einer zeitlich veränderlichen Größe verwendet man in der Wissenschaft und Technik selbstregistrierende[1]) Apparate, insbesondere dann, wenn die Vorgänge so langsam oder so rasch verlaufen, daß sie sich einer direkten Beobachtung mit gewöhnlichen Hilfsmitteln entziehen. Als Beispiele seien erwähnt: der Thermograph zur Aufzeichnung von Temperaturkurven, der Barograph zur Messung des Luftdrucks, der Indikator zur Aufzeichnung des Dampfdrucks im Zylinder einer Expansionsdampfmaschine.
Abb. 7 zeigt den von einem Thermograph aufgezeichneten Temperaturverlauf während einer Juniwoche.

---

1) Selbstregistrierende Apparate sind Geräte, die Vorgänge selbsttätig aufzeichnen, z. B. Änderungen der Temperatur, des Luftdrucks, des Feuchtigkeitsgehalts, aber auch Erdbeben, Wasserstände usw. Bei selbstregistrierenden Apparaten überträgt ein für die Veränderungen der Meßgröße empfindliches Konstruktionselement seine Bewegungen auf einen als Hebel ausgebildeten Zeiger, an dessen Ende sich ein Schreibstift befindet. Das auf einer Trommel aufgespannte Koordinatenpapier wird durch ein Uhrwerk unter dem Schreibstift bewegt.

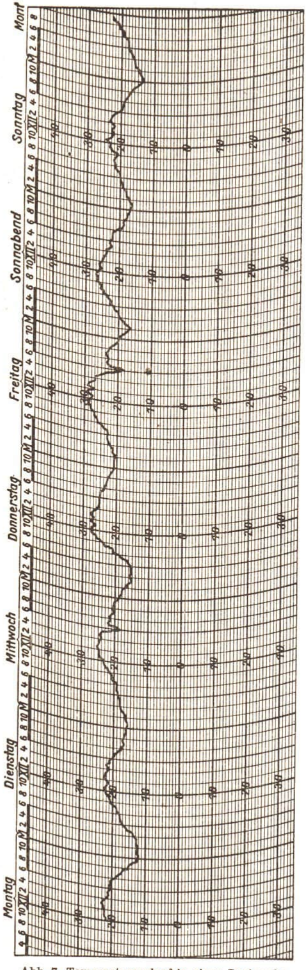


Abb. 7. Temperaturverlauf in einer Juniwoche

a) Zu welcher Zeit erreicht die Temperatur an jedem Tage ihr Maximum und ihr Minimum?

b) Wie groß waren die Temperaturschwankungen an jedem Tage?

c) Welches war die höchste und die tiefste Temperatur der Woche?

d) Schätze die Durchschnittstemperatur an jedem Tage und innerhalb der Woche!

e) An welchen Tagen treten plötzliche, starke Temperaturschwankungen auf? Um welche Tageszeit treten sie auf? Auf welche Ursachen sind sie vermutlich zurückzuführen?

f) Warum sind die Ordinaten im Koordinatenpapier selbstregistrierender Instrumente Kreisbögen?

8. Ein volkseigenes Stahlwerk meldete 1949 in zwei aufeinanderfolgenden Monaten für die Thomasstahlerzeugung die folgenden Sollerfüllungen in Prozentsätzen:

Tag des Monats	1. Monat	2. Monat
3.	12	14
6.	25	27
9.	34	41
12.	46	49
15.	57	59
18.	70	73
21.	81	87
24.	95	100
27.	108	112
30.	120	126
31.	125	—

Stelle die monatliche Erfüllung zeichnerisch dar!

9. Im Wettbewerb der Stahlwerke Hennigsdorf und Riesa der VESTA sind 1949 für Siemens-Martin-Stahl die folgenden Sollerfüllungen in Prozentsätzen für einen Monat gemeldet worden:

Tag des Monats	Hennigsdorf	Riesa
3.	15	9
6.	25	22
9.	30	36
12.	45	52
15.	58	58
18.	71	71
21.	84	81
24.	98	93
27.	113	105
30.	126	117
31.	130	120

Stelle das Ergebnis zeichnerisch dar!

10. Im Wettbewerb der Profilstahlwalzwerke der VESTA sind 1949 für mittelschwere Profile in einem Monat die folgenden Sollerfüllungen in Prozentsätzen des Monatssolls gemeldet worden:

Tag des Monats	Maxhütte	Hennigsdorf	Finow
3.	9	3,7	1
6.	21	9	4
9.	34	14	17
12.	48	22	42
15.	57	33	44
18.	62	45	44
21.	67	63	55
24.	76	68	83
27.	84	86	107
30.	90	104	110
31.	106	104	110

Stelle das Ergebnis in einem Diagramm dar!

11. Um den Nullpunkt eines xy-Achsenkreuzes ist ein Kreis mit dem Radius $r = 1$ beschrieben. Eine Parallele zur y-Achse wird von der Stelle $x = -4$ längs der x-Achse bis zur Stelle $x = +4$ verschoben.

a) Wie groß ist die Anzahl der Punkte, die der Parallelen und dem Kreis für die einzelnen x-Stellen des Bereiches gemeinsam sind?

b) Stelle die Anzahl dieser Punkte in Abhängigkeit von x für den Bereich $x = -4$ bis $x = +4$ in einem zweiten Achsenkreuz zeichnerisch dar!

Anleitung: Die Anzahl dieser Punkte sei Y; das zweite Achsenkreuz sei ein xY-Achsenkreuz. Dann kann jedem x-Wert des Bereiches ein bestimmter Y-Wert zugeordnet werden, Y ist eine Funktion von x.

Wertetafel der Funktion im Bereich $x = -4$ bis $x = +4$:

Stelle x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	0	0	0	1	2	1	0	0	0

x	$-1,2$	-1	$-0,8$	$-0,6$	$-0,4$	$-0,2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
Y	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0

Das Funktionsbild ist keine zusammenhängende Kurve. Aus wieviel Einzelteilen besteht sie? Aus welchen Einzelteilen?

12. Löse dieselbe Aufgabe für $r = 2$!

13. Die Funktion $y = x^2 + x - 2$ ist geometrisch darzustellen (vgl. Abb. 5)!

14. Zeige für die Funktion $y = x^2 + x - 2$ den Verlauf der Funktionskurve im Bereich $x = -1$ bis $x = +1$! (Man drückt diesen x-Bereich formelmäßig folgendermaßen aus: $-1 \leqq x \leqq +1$; lies: -1 kleiner oder gleich x kleiner oder gleich $+1$.)

Anleitung: Bestimme zu den Punkten $(-1; -2)$, $(0; -2)$, $(1; 0)$ die Zwischenpunkte für $x = \pm 0,1; \pm 0,2; \ldots; \pm 0,9$ (Wertetafel) und stelle sie geometrisch dar! Verbinde die Punkte $(-1; -2)$, $(0; -2)$, $(1; 0)$ miteinander a) durch Strecken: geknickter Streckenzug, b) über die Zwischenpunkte: Linienzug, Kurve der Funktion!

15. Stelle die folgenden Funktionen geometrisch dar:

a) $y = x^2 - x - 2$ **b)** $y = x^2 + x - 6$ **c)** $y = x^2 - x - 6$

d) $y = x^2 + 2x - 3$ **e)** $y = x^2 - 2x - 3$!

16. Die Funktion $y = x^3 - 13x + 12$ ist geometrisch darzustellen,

a) indem für die y-Werte derselbe Maßstab wie für x gewählt wird,

b) indem für die y-Werte der Maßstab auf den 10. Teil verkürzt wird!

Ergebnis: Eine Maßstabsänderung der y-Achse ändert nichts an den Bereichen des Steigens oder Fallens einer Kurve, nichts an der Lage ihrer Schnittpunkte mit der x-Achse und nichts an der x-Stelle ihrer Hoch- und Tiefpunkte (Maxima und Minima); aber die Stärke des Steigens und Fallens wird geändert.

17. In gleicher Weise sind die Funktionen a) $y = x^3 - 7x - 6$, b) $y = x^3 - 7x + 6$, c) $y = x^3 - 13x - 12$ geometrisch darzustellen!

III. Mittelwert oder Durchschnitt

18. Mittelwert zu einer Reihe von Einzelwerten heißt die Zahl, für welche die Summe der Überschüsse der größeren Einzelwerte gleich der Summe der Fehlbeträge der kleineren Einzelwerte ist.

Beispiele: Welches sind die Mittelwerte zu 4 und 6; 4, 5 und 6; 23, 37, 49 und 31; a, b, c und d? Stelle für jedes Beispiel die Einzelwerte und den Mittelwert zeichnerisch in einem Streifendiagramm dar! (Anleitung in Abb. 8). Wie groß sind die Überschüsse der größeren Einzelwerte über den Mittelwert? Wie groß die Fehlbeträge der kleineren Einzelwerte bis zum Mittelwert? Bilde die Summe der Überschüsse und der Fehlbeträge! Welche Gleichung für m ergibt sich aus dem Begriff des Mittelwertes? Erkläre das Wort Durchschnitt und Mittelwert zeichnerisch und rechnerisch!

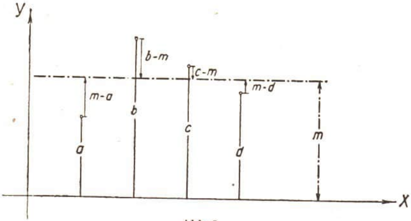


Abb. 8

Man erhält den Mittelwert zu einer Reihe von Einzelwerten, indem man die Summe der Einzelwerte durch ihre Anzahl dividiert.

$$m = \frac{a + b + c + d + \cdots}{n}.$$

19. Stelle den monatlichen Gas- und Elektrizitätsverbrauch des eigenen Haushaltes während eines Jahres zeichnerisch dar! Berechne und veranschauliche durch Zeichnung das Monatsmittel des Jahres! Stelle den Mehr- bzw. Minderverbrauch jedes Monats zum Monatsmittel (als + bzw. —) dar! Wie entsteht die Kurve des monatlichen Mehr- bzw. Minderverbrauchs aus der ursprünglichen Verbrauchskurve? Welche rechnerische Vereinfachung ergibt sich daraus für die Berechnung des Mittelwertes?

Zusatz: Dieser Mittelwert wird genauer arithmetischer Mittelwert genannt.

20. Bestimme rechnerisch und zeichnerisch die Mitten zu den folgenden Punktpaaren: $(0; 0)$ und $(1; 0)$, $(0; 0)$ und $(0; 1)$, $(0; 0)$ und $(-1; 0)$, $(0; 0)$ und $(0; -1)$, $(0; 0)$ und $(1; 1)$, $(0; 0)$ und $(-1; -1)$, $(0; 0)$ und $(-1; +1)$, $(0; 0)$ und $(+1; -1)$, $(0; 0)$ und $(4; 6)$, $(0; 0)$ und $(-4; +6)$, $(1; 1)$ und $(3; 5)$, $(1; -1)$ und $(-3; 5)$, $(-2; +3)$ und $(+4; -5)$, $(-3; -4)$ und $(2; -3)$, $(2; -3)$ und $(3; -1)$!

21. Durch Einsatz von Arbeitsinstrukteuren im Bergbau eines Steinkohlengebietes wurden u. a. die Schichtleistungen dreier Hacker in einer Woche folgendermaßen gesteigert:

Hacker	Schicht-norm	Schichtleistungen in m³						
		4. 12.	5. 12.	6. 12.	7. 12.	8. 12.	9. 12.	10. 12.
A	6,5 m³	5,3	6,5	6,2	8,4	7,8	12,1	8,9
B	6,5 m³	5,0	6,0	6,2	7,3	8,7	7,5	8,5
C	6,5 m³	6,3	6,5	4,2	7,0	10,5	8,5	8,5

Stelle die wöchentliche Schichtleistung jedes Hackers zeichnerisch dar! Berechne die durchschnittliche wöchentliche Schichtleistung jedes Hackers!

22. Im Erntejahr 1949/50 wurden die folgenden Kalimengen je ha im Bereich der Deutschen Demokratischen Republik verbraucht:

Gesamtanbaufläche 4 930 000 ha, je ha 30 kg. Darüber hinaus wurden zusätzlich verbraucht:

für Zucker- und Futterrüben, Ölfrüchte, Faserpflanzen, Gemüse .... auf 752 000 ha Anbaufläche je ha 30 kg,
„ Tabak .... „ 14 000 ha „ je ha 200 kg,
„ Vermehrungsanbau .... „ 270 000 ha „ je ha 20 kg,
„ Neuland .... „ 31 000 ha „ je ha 60 kg.

Berechne die durchschnittliche Kalidüngung je ha, bezogen auf die Gesamtanbaufläche!

23. Wir messen die Körpergröße der Schüler unserer Klasse und bestimmen die Durchschnittsgröße. Welches sind die größten Abweichungen vom Durchschnittsmaß? Wieviel Schüler liegen mit ihrer Körpergröße unter und wieviel über dem Durchschnittsmaß?

24. Wir wägen sämtliche Schüler unserer Klasse und bestimmen das Durchschnittsgewicht.

25. Bei zehn Einzelreißversuchen an einer Spule Wollkammgarn Nummer 24/3fach riß der Faden bei den folgenden Belastungen (Festigkeitswerte in p): 790, 585 790, 710, 890, 765, 665, 855, 905, 750 p. Berechne **a)** den Mittelwert der Festigkeit, **b)** die Abweichungen vom Mittelwert!

2. Die lineare Funktion $y = mx + n$

a) Die lineare Funktion $y = mx + n$

1. Lineare Funktionen

Wir untersuchen eine **Funktion 1. Grades** von x, z.B. $y = 2x + 1$. Stellt man die Funktion geometrisch dar, so zeigt ihr Funktionsbild (Abb. 9):

Die Kurve einer Funktion 1. Grades ist eine gerade Linie.

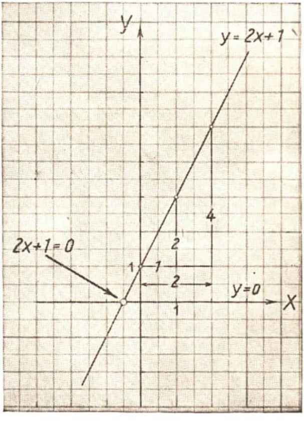


Abb. 9

Die Funktionen 1. Grades heißen daher **lineare Funktionen.** Da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, genügen zwei

Punkte zur zeichnerischen Darstellung einer linearen Funktion.

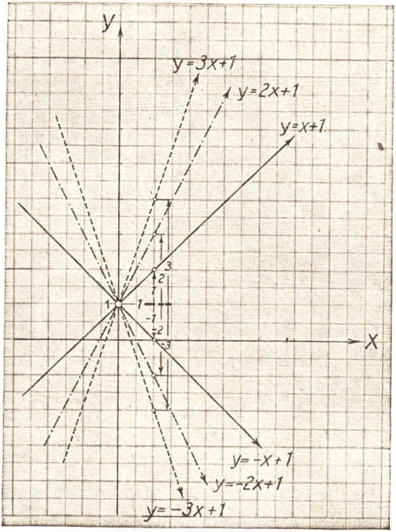


Abb. 10

2. Die gerade Linie $y = mx + n$

Größen, die verschiedene Werte annehmen können, nennt man Veränderliche; Größen, die einen bestimmten Wert besitzen, nennt man Konstante[1]). Veränderliche bezeichnet man im allgemeinen mit den letzten Buchstaben des Alphabets, z. B. x, y, z; Konstante durch Anfügen eines Index[2]), z. B. x_1, y_1, z_1, oder mit Buchstaben vom Anfang des Alphabets, z. B. a, b, c oder m, n oder p, q.

Die Kurve $y = mx + n$ ist eine gerade Linie. Alle Punkte $P(x; y)$ der Ebene, zwischen deren Koordinaten x und y die Gleichung $y = mx + n$ besteht, liegen auf dieser geraden Linie, und alle Punkte $P(x; y)$ der geraden Linie erfüllen mit ihren Koordinaten x und y die Gleichung $y = mx + n$. Man nennt daher $y = mx + n$ die **Gleichung der geraden Linie**. mx heißt das lineare Glied in x, n das absolute[3]) Glied. m heißt der Koeffizient[4]) des linearen Gliedes.

Welche Bedeutung haben die Konstanten m und n für die gerade Linie $y = mx + n$?

Wir stellen dazu die linearen Funktionen

$$y = x + 1, \qquad y = 2x + 1, \qquad y = 3x + 1$$

und

$$y = -x + 1, \qquad y = -2x + 1, \qquad y = -3x + 1$$

in demselben Achsenkreuz geometrisch dar (Abb. 10).

Jeder Kurve einer Funktion legt man einen bestimmten Durchlaufungssinn zu. Schreitet man für die Werte der unabhängigen Veränderlichen x vom Negativen zum

1) constans (lat.) heißt stets gleichbleibend, fest; Konstante sind feste, gleichbleibende Zahlengrößen.

2) Index (lat.) heißt der Anzeiger, das Kennzeichen, das Unterscheidungsmerkmal; Mehrzahl: die Indizes.

3) absolutus (lat.) heißt losgelöst; absolutes Glied ist ein von x losgelöstes oder x-freies Glied.

4) Koeffizient (lat.) heißt die Vorzahl, der Zahlenfaktor einer Veränderlichen oder Unbekannten.

Positiven fort, also auf der x-Achse in der positiven x-Richtung, so durchläuft der Kurvenpunkt die Kurve in einem bestimmten Richtungssinn.

Dem wachsenden x ordnet man den Durchlaufungssinn einer Kurve zu. Hierdurch wird die Kurve einer Funktion zu einer orientierten Kurve (Abb. 10).

Die Kurven der in Abb. 10 dargestellten linearen Funktionen zeigen:

In der Gleichung $y = mx + n$ gibt der Koeffizient m den **Anstieg** der Geraden an. Ist m größer als Null oder positiv, so **steigt** die Gerade; ist m kleiner als Null oder negativ, so **fällt** die Gerade.

Das absolute Glied n gibt den Abschnitt der Geraden auf der y-Achse an. Die Gerade schneidet die y-Achse oberhalb oder unterhalb des Nullpunkts des Achsenkreuzes, je nachdem das absolute Glied n positiv oder negativ ist.

Die Kurve $y = mx + n$ ist eine gerade Linie vom Anstieg m und dem Abschnitt n auf der y-Achse.

b) Entwickelte und unentwickelte Form einer linearen Funktion

Wenn eine Gleichung zwischen x und y nach y aufgelöst ist, heißt sie nach x entwickelt, wenn aber x und y auf derselben Seite der Gleichung stehen, heißt sie unentwickelt.

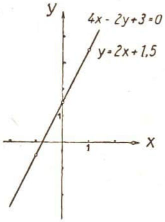


Abb. 11

Eine lineare Funktion kann auch in unentwickelter Form durch eine lineare Gleichung zwischen x und y gegeben sein, z. B. $+4x - 2y + 3 = 0$.

Man entwickelt dann y nach x und erhält die entwickelte Form der Funktion.

$$-2y = -4x - 3,$$
$$y = 2x + 1{,}5.$$

Wertetafel und Kurve einer Funktion lassen sich aus der unentwickelten Form in gleicher Weise gewinnen wie aus der entwickelten. Für die Aufstellung einer Wertetafel aus der unentwickelten Form ist es vorteilhaft, leicht berechenbare ganzzahlige x-Werte auszuwählen, z. B. $x = 0$; $x = +1$; $x = -1$.

Beispiel (Abb. 11):

unentwickelte Form:

$$4x - 2y + 3 = 0,$$

x	-1	0	$+1$
y	$-0{,}5$	$1{,}5$	$+3{,}5$

entwickelte Form der Funktion:

$$y = 2x + 1{,}5.$$

x	-1	0	$+1$
y	$-0{,}5$	$1{,}5$	$+3{,}5$

Die Kurve $4x - 2y + 3 = 0$ stimmt mit der geraden Linie $y = 2x + 1{,}5$ überein (Abb. 11).

Aufgaben

1. Stelle die folgenden linearen Funktionen geometrisch dar und bestimme aus dem Funktionsbild durch Ausmessen ihren Anstieg:

a) $y = x$; **b)** $y = 2x$; **c)** $y = 3x$; **d)** $y = \frac{1}{2}x$;
e) $y = -x$; **f)** $y = -2x$; **g)** $y = -3x$; **h)** $y = -\frac{1}{2}x$!

Anleitung zu b: Setze den Koeffizienten 2 gleich $\frac{2}{1}$ $\left(\text{zu f: } -2 \text{ gleich } \frac{-2}{1}\right)$; dann gilt für alle Punkte der geraden Linie $\frac{y}{x} = \frac{2}{1}$!

2. Stelle die folgenden linearen Funktionen geometrisch dar:

a) $y = x$; **b)** $y = x + 1$; **c)** $y = x + 2$; **d)** $y = x + 3$;
e) $y = 2x$; **f)** $y = 2x + 1$; **g)** $y = 2x + 2$; **h)** $y = 2x + 3$!

Wie verlaufen die Geraden a bis d und e bis h zueinander? Durch welche Bewegungen lassen sie sich ineinander überführen?

3. Stelle die folgenden Geraden geometrisch dar:

a) $y = -2$; $y = -1$; $y = +1$; $y = +2$;
b) $x = -2$; $x = -1$; $x = +1$; $x = +2$!

Durch welche Bewegungen lassen sie sich ineinander überführen? Welche Gleichungen haben die x-Achse und die y-Achse?

4. Welche der folgenden Punkte der Ebene liegen auf der Geraden $y = 2x + 1$:
$P_1(-2;\ -3)$, $P_2(-1;\ -1)$, $P_3(-\frac{1}{2};\ 0)$, $P_4(1;\ 1)$, $P_5(2;\ 5)$, $P_6(3;\ 6)$, $P_7(0;\ 1)$?

5. Eine Schraubenfeder hat eine Länge von 6 cm. Belastet man sie mit 5 p, so dehnt sie sich um 1,3 cm. Bei einer Belastung mit 10 p dehnt sie sich um 2,6 cm, bei 15 p um 3,9 cm.

a) Um wieviel dehnt sich die Feder bei einer Belastung mit 1 p, mit 2 p, mit $x\,p$?
b) Wie lang wird sie bei einer Belastung mit 5 p, 10 p, 15 p, 1 p, 2 p, $x\,p$?
c) Stelle ihre Länge y als Funktion der Belastung x dar! Zeichne das Diagramm!
d) Lies aus dem Diagramm die Belastung ab, die eine Dehnung um 1 cm hervorruft!
e) Kann man für die Belastung x beliebig große Werte annehmen (Elastizitätsgrenze)?

6. Ein Energiebezirk stellt elektrische Energie für Kleinabnehmer zu folgenden Tarifen zur Verfügung:

1. Haushalttarif (H 8). Der Strompreis setzt sich aus einem Grundpreis und einem Arbeitspreis für die abgenommene elektrische Energie zusammen. Die Höhe des Grundpreises richtet sich nach der Zahl der beleuchteten Räume. Als monatliche Teilbeträge des Grundpreises werden erhoben:

für 1 Raum	1,10 DM,	für 5 Räume	3,50 DM,
„ 2 Räume	1,30 „ ,	„ 6 „	4,50 „ ,
„ 3 „	1,75 „ .	„ jeden weiteren Raum	1,20 DM.
„ 4 „	2,50 „ ,		

Der Arbeitspreis beträgt 0,08 DM/kWh.

2. Kleinstabnehmertarif. Der Strompreis setzt sich aus einem Arbeitspreis von 0,40 DM für die kWh und einem Grundpreis für den Elektrizitätszähler in Höhe von 0,25 DM je Monat zusammen.

a) Stelle die Abhängigkeit der monatlichen Stromrechnung (y) vom kWh-Verbrauch ($x = 1; 2; 3; \ldots; 10$ kWh) je Monat für beide Tarife fest unter Zugrundelegung einer 3-Zimmerwohnung!

b) Zeichne die Diagramme der beiden Funktionen in dasselbe Achsenkreuz ein!

c) Bei welchem kWh-Bezug sind beide Tarife gleich günstig?

d) Welchen Tarif wird man wählen, wenn der monatliche Durchschnittsverbrauch 3 kWh, 10 kWh beträgt?

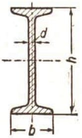


Abb. 12. I-Stahl nach DIN 1025

7. I-Stahl (Doppel-T-Stahl) hat einen Querschnitt, wie ihn Abb. 12 zeigt. h bedeutet die Trägerhöhe, b die Flanschbreite. In DIN 1025[1]) sind die genormten Abmessungen für die Höhe und die Flanschbreite der verschiedenen Typen angegeben.

Bezeichnung	I	8	10	12	14	16	18	20	22	24	25	26	28
Abmessungen in mm	h	80	100	120	140	160	180	200	220	240	250	260	280
	b	42	50	58	66	74	82	90	98	106	110	113	119
Bezeichnung	I	30	32	34	36	38	40	$42\frac{1}{2}$	45	$47\frac{1}{2}$	50	55	60
Abmessungen in mm	h	300	320	340	360	380	400	425	450	475	500	550	600
	b	125	131	137	143	149	155	163	170	178	185	200	215

Die Flanschbreite b ist von der Trägerhöhe h abhängig; b ist eine Funktion der Trägerhöhe h.

a) Trage die in der Tafel einander zugeordneten Werte von h und b als Koordinaten in ein rechtwinkliges Achsenkreuz ein! (Maßstab der Abszissenachse h: 100 mm $\hat{=}$ 20 mm, [1 : 5]; Maßstab der Ordinatenachse b: 100 mm $\hat{=}$ 50 mm, [1 : 2].)

b) Welcher Art ist die Kurve im Bereich $80 < h < 250$ und im Bereich $250 < h < 600$?

c) Ist die in der Tafel angegebene Abhängigkeit durch eine einzige Gleichung darstellbar?

d) Welche allgemeine Form haben die Gleichungen der Kurve in den beiden Bereichen?

e) Bringe die beiden Funktionskurven durch Rückwärtsverlängerung zum Schnitt mit der Ordinatenachse und bestimme das absolute Glied der beiden Kurvengleichungen!

f) Bestimme aus der Zeichnung den Anstieg jeder Geraden und damit den Koeffizienten von h jeder Kurvengleichung!

g) Welche Gleichung ergibt sich aus den in e und f gefundenen Werten für die Kurve in jedem der beiden Bereiche?

3. Die lineare Gleichung

a) Funktion und Gleichung

Gibt man in einer Funktion, z. B. in der linearen Funktion $y = 2x + 1$ (Abb. 9), der Veränderlichen y den Zahlenwert Null, also $y = y_1 = 0$, so geht die Funktion

1) DIN ist die Abkürzung für „Das ist Norm!“ — Norm (lat.) heißt Regel, Vorschrift, Maßvorschrift. In den Normblättern (z. B. DIN 1025) sind die Ergebnisse der Arbeiten des Deutschen Normenausschusses (DNA) niedergelegt. Diese haben zum Ziele, an Stelle der technisch und wirtschaftlich unzweckmäßigen Vielheit in den Abmessungen und Eigenschaften industrieller Erzeugnisse eine technisch erforderliche und wirtschaftlich tragbare Auswahl zu setzen.

$y = 2x + 1$ in eine Bestimmungsgleichung für die unbekannte Größe x über,

$$2x_1 + 1 = 0.$$

Zur linearen Funktion $y = 2x + 1$ gehört die lineare Gleichung $2x + 1 = 0$; sie hat eine Lösung, $x_1 = -0{,}5$.

b) Nullstellen einer Funktion

Die Stellen einer Funktion, an denen y den bestimmten Wert $y_1 = 0$ annimmt, heißen die **Nullstellen der Funktion.** Sie sind in der geometrischen Darstellung der Funktion die **Schnittpunkte der Funktionskurve mit der x-Achse.** Die Nullstellen einer Funktion sind die Lösungen der zugehörigen Bestimmungsgleichung. Die lineare Funktion $y = 2x + 1$ besitzt eine Nullstelle $x_1 = -0{,}5$. Diese ist der Schnittpunkt der Funktionskurve, (Gleichung $y = 2x + 1$), mit der x-Achse, (Gleichung $y = 0$).

Aufgaben

I. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

1. Die folgenden linearen Gleichungen sind zeichnerisch und rechnerisch zu lösen:

a) $-2x + 4 = 0$ **b)** $4x - 2 = 0$ **c)** $-\frac{1}{2}x + 1 = 0$
d) $-2x - 2 = 0$ **e)** $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$!

II. Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Zeichnerische Lösung

2. Bewegliche Punkte und feste Punkte einer Kurve. Durch welchen gemeinsamen Punkt gehen die Kurven:

a) $y = x$; $y = 2x$; $y = 3x$, **b)** $y = x + 1$; $y = 2x + 1$; $y = 3x + 1$,

c) $y = -x - 1$; $y = -2x - 1$; $y = -3x - 1$?

Bewegliche Punkte einer Kurve werden mit $P(x; y)$ bezeichnet; die laufenden Koordinaten $(x; y)$ eines beweglichen Kurvenpunktes sind Veränderliche.
Feste Punkte einer Kurve werden durch einen Index bezeichnet, z. B. $P_0(x_0; y_0)$, $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, usw.; ihre Koordinaten sind Konstante.

3. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten:

a) $y = -x + 1$, $y = -2x - 1$ **b)** $y = 4x - 2$, $y = 2x + 4$ **c)** $y = -2x - 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **d)** $y = 2x - 2$, $y = 5x - 11$

e) $x - y = 1$, $x + 4y = 6$ **f)** $x - 2y = -4$, $3x - y = 3$ **g)** $x + 3y = 3$, $x - 3y = 9$

h) $4x - 7y - 8 = 0$, $3x - 7y + 1 = 0$ **i)** $x - 2y = 0$, $2x + y = 0$ **k)** $3x + 2y - 5 = 0$, $2x + y - 3 = 0$!

Anleitung: Die Aufgabe, aus zwei Gleichungen die beiden Unbekannten x und y zu bestimmen, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Funktionskurven zu finden.

4. Die Aufgabe, die Gleichung $2x + 1 = 0$ zu lösen, läßt sich geometrisch dadurch veranschaulichen, die Nullstelle der Funktion $y = 2x + 1$ zu finden! Zeige die Richtigkeit dieser Aussage!

Rechnerische Lösung

Löse die folgenden linearen Gleichungspaare!

5. Einsetzungsverfahren

a) $4x + y = 40$; $x - y = 5$

b) $7x - y = 99$; $2x - y = 24$

c) $x + 2y - 13 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$

d) $2x + 7y - 41 = 0$; $4x - y - 7 = 0$

e) $2x - y - 14 = 0$; $y = x - 2$

f) $4x - 9y + 47 = 0$; $4x = -3y + 85$

g) $5x + 3y - 42 = 0$; $5x + 8y - 57 = 0$

h) $6x + 5y = 27$; $3x = -4y + 18$

i) $4x - 7y - 23 = 0$; $8x - 21y - 25 = 0$

k) $11x - 8y - 59 = 0$; $3x + 2y - 37 = 0$

l) $6x - 5y - 9 = 0$; $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

m) $4x + 3y = 26$; $\frac{x}{y} = \frac{7}{8}$

6. Additionsverfahren

a) $3x + 5y = 95$; $3x - 5y = 25$

b) $5x + 4y = 40$; $5x - 4y = 20$

c) $7x + 3y = 127$; $4x + 3y = 97$

d) $5x + 7y = 176$; $5x - 3y = 46$

e) $10x - 3y = 220$; $10x + 8y = 330$

f) $3x + 2y = 22$; $2x + 5y = 33$

g) $4x - 7y = 41$; $5x + 3y = 63$

h) $8x + 3y = 30$; $3x - 4y = 1$

i) $12x - 8y = 4$; $18x - 15y = 3$

k) $4x + 15y = +99$; $6x - 17y = -49$

l) $15x - 32y + 81 = 0$; $35x - 20y - 16 = 0$

m) $26x - 51y + 1 = 0$; $39x - 34y - 1 = 0$

n) $35x - 38y + 3 = 0$; $-63x + 57y - 6 = 0$

Anleitung: Prüfe zuerst, ob sich die gegebenen Einzelgleichungen noch durch Division durch einen Zahlenfaktor vereinfachen lassen. Beispiel: Aufgabe i!

7. a) $4y \cdot (10x - 3) - 5x \cdot (8y + 7) + 165 = 0$; $9x \cdot (4y - 7) + 3y \cdot (5 - 12x) + 114 = 0$

b) $16 \cdot (4y - 1) + 3 \cdot (5x - 12y) - 259 = 0$; $-5 \cdot (9x + 7) + 14 \cdot (5x - 3y) + 20 = 0$

c) $10x \cdot (2y + 3) - 3 \cdot (4y + 5) - 4y \cdot (5x + 2) = 0$; $(3x + 5) \cdot (2y - 3) - 3x \cdot (2y - 1) = 0$

d) $(6x + 1) \cdot (10y - 4) - 15x \cdot (4y - 1) = 0$; $(5x - 4) \cdot (6y + 1) - 5 \cdot (4x + y) - 15y \cdot (2x - 3) = 0$

8. a) $\frac{x + y + 1}{x + y - 1} = \frac{3}{2}$; $\frac{x - y + 1}{x + y + 1} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{3x + 5y + 3}{3x + 5y - 3} = \frac{5}{4}$; $\frac{5x + 3y - 13}{5x + 3y + 13} = \frac{8}{21}$

c) $\frac{3y - 7x}{70} = \frac{y - x - 2}{14} - \frac{2 \cdot (y - 2)}{35}$; $\frac{5y - 9}{15} = \frac{2x + 1}{24} + \frac{x + 3y}{40}$

d) $\frac{2y - x}{6} + \frac{4x + 7y + 6}{27} = \frac{5x + 2}{54}$; $\frac{6y + x}{18} - \frac{3x - 16}{14} = \frac{30y - x}{63}$

e) $\frac{3 - x}{3} + \frac{7 \cdot (x - y)}{20} = \frac{4x - 5y}{60}$; $-\frac{5x - 7y}{15} - \frac{2 \cdot (y - 4)}{33} = \frac{x + y}{55}$

9. a) $x + y = 7a$; $x - y = 3a$

b) $x + y = 2a$; $x - y = 2b$

c) $x + y = a + b$; $x - y = a - b$

d) $4x + 6y = 10a - 2b$; $6x - 4y = 2a + 10b$

10. Warum haben die folgenden linearen Gleichungspaare keine oder keine eindeutigen Lösungen:

a) $2x - y + 1 = 0$; $2x - y - 1 = 0$

b) $6x - 2y + 5 = 0$; $3x - y + 2 = 0$

c) $6x - 3y + 9 = 0$; $2x - y + 3 = 0$

d) $3x = y + 5$
$6x - 2y - 10 = 0$

e) $-4x + 2y - 3 = 0$
$-6x + 3y - 4{,}5 = 0$?

Anleitung: Stelle die Gleichungen zeichnerisch dar und versuche sie zu lösen!

Zur Bestimmung von zwei Unbekannten x und y sind zwei voneinander unabhängige Gleichungen erforderlich. Die Gleichungspaare a, b und c, d, e zeigen:

Ein Gleichungssystem hat keine oder keine eindeutigen Lösungen, wenn die Gleichungen sich widersprechen oder identisch sind.

III. Lineare Gleichungen mit drei und mehr Unbekannten

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

11. a) $x + y - z = 2$
$3x - 2y = 0$
$6x - 3z = 0$

b) $x + 2y + 3z = 94$
$x + 2y = 43$
$+ 3y + z = 62$

c) $x - 5y + 9z = 136$
$y + 3z = 102$
$x - z = -4$

12. a) $5x - 6y = 8$
$-5x + 4z = 4$
$6y + 4z = 36$

b) $5x + 7y = 45$
$9x + 2z = 30$
$7y - 2z = 23$

c) $10x - 9y = 32$
$2x + 4z = 26$
$-7y + 4z = 2$

13. a) $4x - 8y + 9z = 5$
$6x + 12y - 5z = 37$
$24x - z = 71$

b) $5x - 9y + 8z = 13$
$7x + 6y - 12z = 23$
$3y - 2z = 6$

c) $12x + 10y - 4z = 92$
$4x - 5y = 4$
$8x - 15y + 3z = 3$

14. a) $6x + 8y - 5z = 40$
$9x + 12y + 11z = 60$
$14x - 18y + 19z = 20$

b) $9x - 12y - 15z = 6$
$4x + 16y + 20z = 56$
$5x - 10y + 9z = 38$

c) $3x - 5y - 6z = 27$
$2x + 4y - 9z = 3$
$x + 13y + 3z = 24$

d) $4x - 8y + 7z = 3$
$6x - 12y + 9z = 3$
$5x + 13y - 11z = 53$

e) $x + y + 3z = 19$
$2x + 3y + 4z = 31$
$3x + 4y + 5z = 40$

f) $4x - 8y + 7z = 3$
$5x + 13y - 11z = 53$
$6x - 12y + 9z = 3$

15. a) $2x + 3y + 2z = 21$
$3x + 2y + 2u = 23$
$2x + 2z + 3u = 33$
$2y + 3z + 2u = 35$

b) $x - 2y + 3z - 4u = -2$
$x - 3y + 5z - 6u = -4$
$x - 4y + 6z - 8u = -9$
$x - 7y + 10z - 10u = -13$!

IV. Angewandte Aufgaben

16. Berechne die Belastung der beiden Achsen eines beladenen Lastkraftwagens, wenn die Lage seines Schwerpunkts zwischen den Achsen bekannt ist!

		a)	b)
Gesamtgewicht des beladenen Wagens	G	3 200 kp	5 700 kp
Achsstand	a	3,25 m	3,6 m
Abstand des Schwerpunkts von der Hinterachse	b	0,91 m	1,02 m

Anleitung zur Herstellung der Ansätze von Gleichungen: Wir wählen die gesuchten Größen der Aufgabe als Unbekannte x und y und drücken die in den Aufgaben gemachten Angaben durch x und y aus. — In Aufgabe 16 verteilt sich das Gewicht auf beide Achsen. Die Produkte aus den Achsdrucken und den zugehörigen Schwerpunktsabständen müssen gleich sein.

17. Berechne die Schwerpunktsabstände der Achsen einer Straßenwalze mit dem Achsstand a und den Achsdrucken P (vorn) und Q (hinten)!

a) $a = 3$ m, $P = 10\,000$ kp, $Q = 14\,000$ kp

b) $a = 2{,}80$ m, $P = 7\,000$ kp, $Q = 9\,000$ kp

18. Abb. 13 zeigt einen Auszug aus dem Fahrplanblatt der Bahnstrecke Halle—Leipzig Hbf. Erkläre den graphischen Fahrplan! Bestimme die mittlere Geschwindigkeit **a)** von D 84, **b)** von D 183, **c)** von P 442, **d)** von P 459 (Sa.)! Kann man aus einem graphischen Fahrplan ersehen, ob die Strecke ein- oder zweigleisig ist?

19. 17.45 fährt ein D-Zug von Berlin Anh. Bf. nach Halle (Ankunft 20.51). 19.05 fährt ein D-Zug von Leipzig-Hbf. nach Berlin Anh. Bf. (Ankunft 22.10), Entfernungen 162 bzw. 165 km. Die Entfernung Bitterfeld—Halle beträgt 30 km, Bitterfeld—Leipzig 33 km. Um welche Zeit und in welcher Entfernung von Berlin begegnen die Züge einander? Es wird mit gleichbleibender Durchschnittsgeschwindigkeit gerechnet. Prüfe mit einem Kursbuch, zwischen welchen Stationen die Züge sich begegnen!

20. Stelle an Hand eines Kursbuches einen graphischen Fahrplan für eine Hauptstrecke und für eine Strecke des Heimatbezirkes auf!

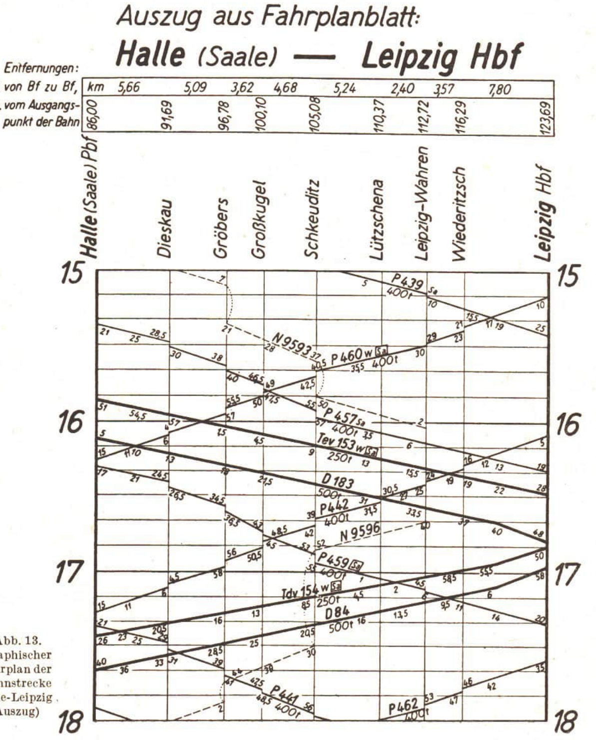


Abb. 13. Graphischer Fahrplan der Bahnstrecke Halle-Leipzig (Auszug)

II. Die quadratische Funktion

4. Die quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$

a) Die quadratische Funktion

1. Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Quadrates mit seiner Seite?
Seite und Flächeninhalt des Quadrats sind hier veränderliche Größen (Abb. 14). Die Quadratseite ist in der Aufgabe als unabhängige Veränderliche x festgelegt. Der Flächeninhalt des Quadrats ist die abhängige Veränderliche y. Er ist eine Funktion von x und nach den Formeln der Geometrie gleich x^2. Die analytische Darstellung der Funktion lautet also $y = x^2$.

Eine Wertetafel der Funktion ist:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Die Kurve der Funktion ist in Abb. 14 dargestellt.

2. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seite 3 cm. Wie ändert sich der Flächeninhalt des Quadrats bei Verlängerung oder Verkürzung der Quadratseite?

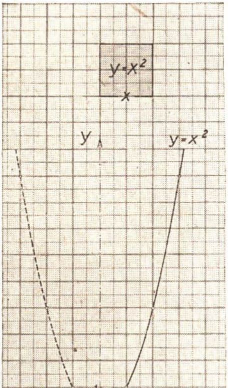


Abb. 14. Die Funktion $y = x^2$

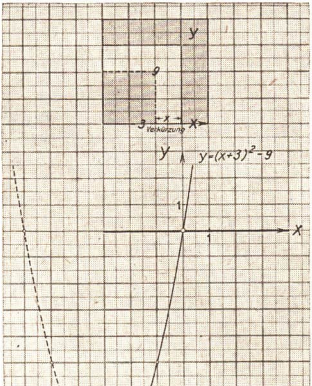


Abb. 15. Die Funktion $y = (x + 3)^2 - 9$

Die Veränderlichen dieser Aufgabe sind die Verlängerung x der Quadratseite und die Flächeninhaltszunahme y. Bei Verkürzung der Quadratseite nehmen x und y negative Werte an (Abb. 15). y ist eine Funktion von x, ihre analytische Darstellung lautet $y = (x + 3)^2 - 9$. Stelle eine Wertetafel der Funktion auf und zeichne das Funktionsbild! Die Kurve der Funktion hat dieselbe Form wie in Beispiel 1, sie liegt aber anders im Achsenkreuz.

In beiden Beispielen haben wir Funktionen 2. Grades von x.

Funktionen 2. Grades heißen quadratische Funktionen. Ihre Kurven heißen Parabeln.

b) Die quadratische Funktion $y = x^2$

Die Funktion $y = x^2$ ist die einfachste quadratische Funktion von x. Zwei Wertepaare der Funktionstafel genügen nicht mehr zur Zeichnung der Funktionskurve. Die Funktionskurve ist eine gekrümmte Linie, eine Parabel. Die Kurve $y = x^2$ heißt **Einheits-** oder **Normalparabel** (Abb. 14). Ihr tiefster Punkt (0; 0) heißt Scheitel; er ist die Stelle der größten Krümmung der Kurve. Die Normalparabel ist achsensymmetrisch. Ihre Symmetrieachse ist die y-Achse, sie schneidet die Kurve im Scheitel.

c) Die quadratische Funktion $y = (x + d)^2 + e$

Zur Auswertung des zweiten Beispiels stellen wir die folgenden Funktionen nebeneinander geometrisch dar (Abb. 16):

a) $y = x^2$, b) $y = (x + 3)^2$, c) $y = (x + 3)^2 - 4$.

Sämtliche Funktionen sind quadratische Funktionen von x. Ihre Bildkurven sind trotz der verschiedenen analytischen Darstellungen untereinander kongruent,

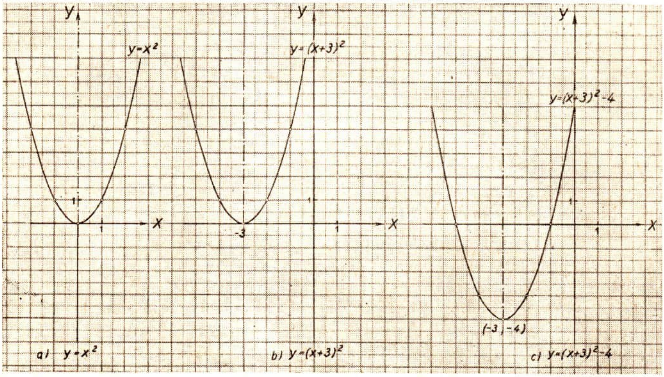


Abb. 16. a) $y = x^2$; b) $y = (x + 3)^2$; c) $y = (x + 3)^2 - 4$

ihre Funktionskurven sind sämtlich Normalparabeln. Aber die Lage der Normalparabeln im xy-Achsenkreuz ist infolge Parallelverschiebung verschieden. Ihre Scheitel liegen

a) im Punkt $(0; 0)$,

b) im Punkt $(-3; 0)$, Verschiebung der Parabel längs der x-Achse,

c) im Punkt $(-3; -4)$, Verschiebung der Parabel längs der x- und y-Achse.

Allgemein ergibt sich:

Die Kurve der quadratischen Funktion $y = (x + d)^2 + e$ ist eine Normalparabel mit dem Scheitel $(-d; e)$ und der Symmetrieachse parallel zur y-Achse.

d) Die quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$

Die quadratische Funktion $y = (x + d)^2 + e$ läßt sich durch Quadrieren der Klammer und Zusammenfassen der x-freien Glieder vereinfachen.

$$y = x^2 + 2d \cdot x + d^2 + e,$$
$$y = x^2 + \quad p \cdot x + \quad q.$$

Die letzte Darstellung für y heißt die **Normalform der quadratischen Funktion.** Sie ist ein mehrgliedriger Ausdruck von x. x^2 heißt das quadratische Glied, $+px$ das lineare, $+q$ das absolute Glied der Normalform der quadratischen Funktion. Wo liegt der Scheitel der Parabel $y = x^2 + px + q$?

Die Kurve der Normalform der quadratischen Funktion $y = x^2 + px + q$ ist eine Normalparabel mit dem Scheitel $\left[-\frac{p}{2}; -\left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right]$ und der Symmetrieachse parallel zur y-Achse.

Aufgaben

Zeichne die Kurven der folgenden Funktionen:

1. $y = x^2$; $y = x^2 + 1$; $y = x^2 - 1$; $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 2$; $y = x^2 + 3$; $y = x^2 - 3$!

2. $y = (x - 1)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x + 3)^2$!

3. $y = (x - 1)^2 + 2$; $y = (x - 2)^2 + 2$; $y = (x + 1)^2 + 2$; $y = (x + 2)^2 + 2$; $y = (x + 3)^2 - 2$; $y = (x + 1)^2 - 2$; $y = (x - 1)^2 - 2$; $y = (x - 2)^2 - 2$; $y = (x - 3)^2 - 2$; $y = (x + 2)^2 - 3$; $y = (x + 3)^2 + 3$; $y = (x - 1)^2 - 3$; $y = (x - 2)^2 + 3$!

4. $y = x^2 - 2x + 1$; $y = x^2 - 4x + 4$; $y = x^2 + 4x + 4$; $y = x^2 - 6x + 9$; $y = x^2 + 6x + 9$!

5. $y = x^2 - 2x + 3$; $y = x^2 - 4x + 6$; $y = x^2 + 4x + 1$; $y = x^2 - 6x + 6$; $y = x^2 + 6x + 10$!

Anleitung: Zeichne die Funktionskurven a) punktweise nach einer Wertetafel, b) durch Scheitelbestimmung und Parallelverschiebung einer Normalparabel im Achsenkreuz! Benutze dazu eine selbstgefertigte Pappschablone einer Normalparabel, auf der Scheitel und Symmetrieachse gekennzeichnet sind! Welche Zeichenart ist einfacher?

5. Die quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$

a) Die allgemeine quadratische Funktion

Gegeben sind ein Rechteck, dessen Höhe doppelt so groß wie seine Grundseite x ist, ein Quadrat von gleicher Seite x und ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck von gleichen Katheten x wie die Rechteckseite. Wie ändern sich die Flächeninhalte der drei Figuren mit den Seiten x?

Lösung (Abb. 17): Die unabhängige Veränderliche ist stets die Seite x, der Flächeninhalt der Figuren ist die abhängige Veränderliche y. Die analytischen Darstellungen für die Flächeninhaltsfunktionen sind für das

Rechteck	$y = 2x^2$,
Quadrat	$y = x^2$,
Dreieck	$y = \frac{1}{2}x^2$.

Ihre Funktionsbilder sind in Abb. 17 dargestellt. Sämtliche Funktionskurven sind Parabeln. Sie haben alle denselben Scheitel (0; 0), aber die Form der Parabeln ist verschieden.

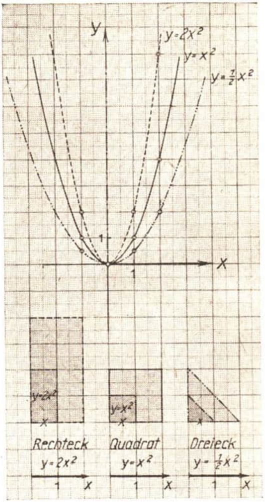


Abb. 17. $y=2x^2$; $y=x^2$ und $y=\frac{1}{2}x^2$

b) Die quadratische Funktion $y=ax^2$, $(a>0)$

Der Koeffizient a des quadratischen Gliedes einer Funktion $y = ax^2$ ändert die Art der Funktionskurve nicht, sie bleibt eine Parabel; aber die Form der Parabel wird durch den Koeffizienten a verändert.

Ist $a = 1$, so ist die Funktionskurve eine Normalparabel. Ist $a > 1$, z.B. gleich 2, so wird jeder Ordinatenwert y der Normalparabel auf das Doppelte vergrößert, die Normalparabel wird senkrecht zur x-Achse im Verhältnis $\frac{2}{1}$ gedehnt. Ist $a < 1$, z.B. gleich $\frac{1}{2}$, so wird jeder Ordinatenwert y der Normalparabel auf die Hälfte verkleinert, die Normalparabel wird senkrecht zur x-Achse im Verhältnis $\frac{1}{2}$ gestaucht. (Siehe Abb. 17 für die x-Werte $-1; 0; +1; +2$.)

$a > 1$ Dehnung der Normalparabel senkrecht zur x-Achse im Verhältnis $\frac{a}{1}$.	**$a = 1$ Normalparabel.**	**$a < 1$ Stauchung der Normalparabel senkrecht zur x-Achse im Verhältnis $\frac{a}{1}$.**

c) Die quadratische Funktion $y = -ax^2$, $(a > 0)$

Wir zeichnen die Kurven der Funktionen $y = 2x^2$ und $y = -2x^2$ in ein gemeinsames Achsenkreuz (Abb. 18a). Die Funktionskurve $y = +ax^2$ wird durch Umklappen um die x-Achse in die Funktionskurve $y = -ax^2$ übergeführt und umgekehrt, beide Funktionskurven liegen spiegelbildlich zur x-Achse. Der Scheitel (0; 0) und die Symmetrieachse sind beiden Parabeln gemeinsam.

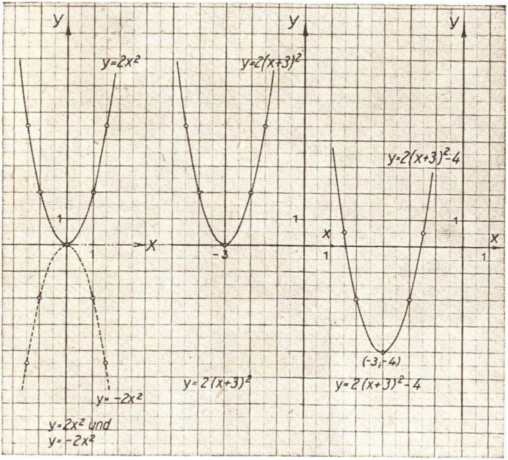


Abb. 18. a) $y = 2x^2$ und $y = -2x^2$; b) $y = 2(x+3)^2$; c) $y = 2(x+3)^2 - 4$

d) Die quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$

Wir stellen die folgenden quadratischen Funktionen geometrisch dar (Abb. 18a, b, c):

a) $y = 2x^2$, b) $y = 2 \cdot (x+3)^2$, c) $y = 2 \cdot (x+3)^2 - 4$.

In allen drei Fällen erhalten wir als Bildkurven Parabeln derselben Form, aber die Parabeln sind im xy-Achsenkreuz parallel zueinander verschoben. Ihre Scheitel liegen

a) im Punkt (0; 0), b) im Punkt (− 3; 0), Verschiebung der Parabel längs der x-Achse, c) im Punkt (− 3; − 4). Verschiebung der Parabel längs der x- und y-Achse.

Die letzte Gleichung $y = 2 \cdot (x+3)^2 - 4$ läßt sich durch Ausmultiplizieren in die Form

$$y = 2x^2 + 12x + 14$$

bringen, oder allgemein

$$y = ax^2 + bx + c.$$

$y = ax^2 + bx + c$ heißt die **allgemeine Form der quadratischen Funktion.** Sie läßt sich durch Division durch a stets in die Normalform der quadratischen Funktion überführen.

$y = 2x^2 + 12x + 14$	Allgemeine Form:	$y = ax^2 + bx + c$
$\frac{y}{2} = x^2 + 6x + 7$		$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$
$Y = x^2 + 6x + 7$	Normalform:	$Y = x^2 + px + q$

Diese Überführung in die Normalform wird geometrisch veranschaulicht als Überführung der Parabel $y = 2x^2 + 12x + 14$ in die Normalparabel $Y = x^2 + 6x + 7$ durch Verkürzen des y-Maßstabes auf die Hälfte ($Y = \frac{y}{2}$, siehe Abb.19).

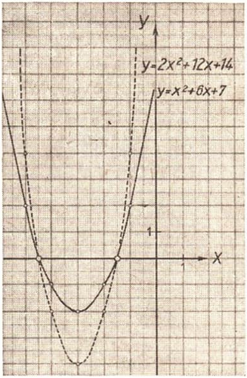


Abb. 19

Aufgaben

I. Die Funktion $y = ax^2$

1. Bestimme für die Parabeln der Abb. 17 die Ordinaten zu den Abszissenwerten $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = -1$; $x_5 = -2$! Wie verhalten sich die Ordinaten der drei Parabeln für jeden gemeinsamen x-Wert?

2. Stelle die quadratischen Funktionen $y = 3x^2$; $y = x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$ geometrisch dar! Durch welche geometrischen Transformationen entstehen die Kurven $y = 3x^2$ und $y = \frac{1}{3}x^2$ aus der Normalparabel $y = x^2$?

II. Die Funktion $y = -ax^2$

Stelle die folgenden quadratischen Funktionen geometrisch dar:

3. $y = x^2$ und $y = -x^2$ **4.** $y = 3x^2$ und $y = -3x^2$

5. $y = \frac{1}{2}x^2$ und $y = -\frac{1}{2}x^2$ **6.** $y = (x-1)^2$ und $y = -(x-1)^2$

7. $y = (x+2)^2$ und $y = -(x+2)^2$

8. $y = (x-2)^2 + 1$ und $y = -(x-2)^2 - 1$!

Durch welche Transformationen lassen sich die Kurven jeder Aufgabe ineinander überführen? Wie liegt jedes Kurvenpaar zur x-Achse?

III. Die Funktion $y = ax^2 + bx + c$

9. Die quadratischen Funktionen $y = 2x^2$; $y = 2\cdot(x-2)^2$; $y = 2\cdot(x-2)^2 + 3$ sind

a) durch Aufstellen einer Wertetafel und Zeichnen der Kurve aus Kurvenpunkten,

b) durch Scheitelbestimmung und Verschiebung der Kurve $y = 2x^2$ geometrisch darzustellen!

Anleitung: Benutze zum Verschieben der Parabel $y = 2x^2$ eine Pappschablone mit Kennzeichnung des Scheitels und der Symmetrieachse!

10. Die Funktionen $y = 2\cdot(x-1)^2 + 2$ und $y = 2\cdot(x-1)^2 - 2$ sind

a) durch Wertetafel und Zeichnen der Kurven aus Punkten,

b) durch Scheitelbestimmung und Verschiebung der Parabel $y = 2x^2$ geometrisch darzustellen!

6. Gerade und ungerade Funktionen

a) Die Funktion 2. Grades $y = x^2$ (Abb. 14 und 16a)

Die Kurve der quadratischen Funktion $y = x^2$ ist eine Parabel, genauer eine **Parabel 2. Grades oder quadratische Parabel.** Die quadratische Parabel $y = x^2$ ist achsensymmetrisch, ihre Symmetrieachse ist die y-Achse. Umklappen der Parabel um die

y-Achse oder Spiegelung an der y-Achse bringt die Kurve mit sich selbst zur Deckung. Funktionen, deren Kurven achsensymmetrisch zur y-Achse liegen, heißen **gerade Funktionen.** Die quadratische Funktion $y = x^2$ ist eine gerade Funktion.

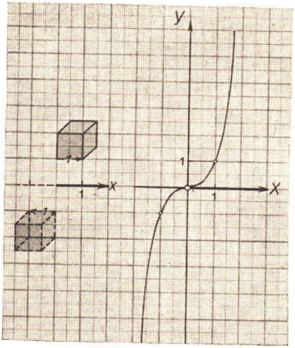


Abb. 20. Die Funktion $y = x^3$

b) Die Funktion 3. Grades $y = x^3$

Wie ändert sich der Rauminhalt eines Würfels mit seiner Kante?

In dieser Aufgabe ist die Würfelkante die unabhängige Veränderliche x, der Rauminhalt die abhängige Veränderliche y. Die analytische Darstellung für den Rauminhalt y des Würfels als Funktion der Würfelkante x lautet $y = x^3$.

Die Funktion $y = x^3$ ist vom 3. Grad in x oder – wegen ihrer geometrischen Bedeutung – kubisch[1]). Die Kurve der Funktion $y = x^3$ nennt man eine **Parabel 3. Grades oder kubische Parabel** (Abb. 20). Sie liegt zentrischsymmetrisch zum Nullpunkt (0; 0) als Symmetriezentrum. Dreht man die Kurve um 180° um den Nullpunkt des Achsenkreuzes, so deckt sie sich selbst. Funktionen, deren Kurven zentrischsymmetrisch zum Nullpunkt liegen, heißen **ungerade Funktionen.** Die kubische Funktion $y = x^3$ ist eine ungerade Funktion.

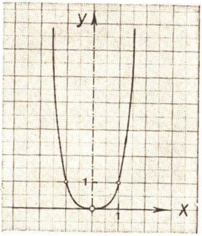


Abb. 21. Die Funktion $y = x^4$

c) Die Funktion 4. Grades $y = x^4$

Die Kurve der Funktion $y = x^4$ heißt eine **Parabel 4. Grades.** Sie liegt achsensymmetrisch zur y-Achse. Umklappen der Kurve um die y-Achse bringt die Parabel mit sich selbst zur Deckung. Die Funktion $y = x^4$ ist eine gerade Funktion (Abb.21).

d) Das Funktionszeichen $f(x)$

Daß für irgendeine Funktion deren Veränderliche y zur unabhängigen Veränderlichen x in irgendeiner mathematischen Abhängigkeitsbeziehung steht, drückt man symbolisch durch das Zeichen

$$y = f(x) \qquad \text{(lies: } \boldsymbol{y} \textbf{ ist gleich } \boldsymbol{f} \textbf{ von } \boldsymbol{x}\text{)} \qquad \text{aus.}$$

1) Kubus (lat.) heißt der Würfel.

Hierin ist f keine Größe, sondern ein Operationszeichen. Dieses Zeichen $f(x)$ gilt für alle möglichen Rechenoperationen in x. Ist y z. B. eine lineare Funktion von x, so ist unter $f(x)$ der lineare x-Ausdruck $mx + n$ zu verstehen, es ist $y = f(x) = mx + n$. Ist y die einfachste quadratische Funktion von x, so ist unter $f(x)$ der quadratische x-Ausdruck x^2 zu verstehen, es ist $y = f(x) = x^2$. Für die einfachste Funktion 3. Grades ist $f(x) = x^3$, für die einfachste Funktion 4. Grades ist $f(x) = x^4$ usw. In dem Funktionszeichen $f(x)$ wird die unabhängige Veränderliche x eingeklammert, um jede Verwechslung mit der Multiplikation $f \cdot x$ auszuschließen.

Aufgaben

1. Welche Symmetrieverhältnisse besitzen die Kurven $y = -x^2$, $y = -x^3$ und $y = -x^4$? Wie liegen sie zu den Kurven $y = +x^2$, $y = +x^3$ und $y = +x^4$?

2. Die einfachsten geraden und ungeraden Funktionen und ihre Symmetrieverhältnisse sind zusammenzustellen.

3. Zeige an den Kurven $y = x^2$; $y = x^4$; $y = -x^2$; $y = -x^4$ und $y = x$; $y = x^3$; $y = -x$; $y = -x^3$

a) daß bei Achsensymmetrie Umklappen der Kurve um die Symmetrieachse,

b) daß bei zentrischer Symmetrie Drehen der Kurve um das Symmetriezentrum um 180° die Funktionskurve mit sich selbst zur Deckung bringt!

4. Zeige an den Kurven $y = x^4$ und $y = x^2$, daß bei Achsensymmetrie auch Spiegelung der Kurve an der Achse die Funktionskurve mit sich selbst zur Deckung bringt.

5. Welche Punkte **a)** der Kurve $y = x^2$, **b)** der Kurve $y = x^4$ liegen symmetrisch zur y-Achse und werden durch diese ineinander gespiegelt? Welche analytischen Beziehungen bestehen zwischen den Abszissen x_1 und x_2 und den Ordinaten y_1 und y_2 zweier zur y-Achse symmetrischer Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ dieser Funktionskurven (gerade Funktionen)? Welche Eigenschaft hat der Scheitel (0; 0) beider Parabeln?

6. Dieselbe Aufgabe für die Kurven **a)** $y = -x^2$ und **b)** $y = -x^4$.

7. Welche Punkte der Kurve $y = x^3$ liegen symmetrisch zum Zentrum (0; 0)? In welchen Richtungen liegen diese Kurvenpunkte zum Nullpunkt? Welche analytischen Beziehungen bestehen zwischen den Abszissen x_1 und x_2 und den Ordinaten y_1 und y_2 zweier zum Nullpunkt symmetrischer Punkte dieser Kurve (ungerade Funktion)? Welche Eigenschaft hat der Punkt (0; 0)?

8. Dieselbe Aufgabe für die Kurve $y = -x^3$.

9. Aus einer rechteckigen Stahlblechplatte von 2 m und 4 m Seitenlänge sollen an den vier Ecken gleiche Quadrate ausgeschnitten werden und nach Hochbiegen der überstehenden Seitenteile ein oben offener Wasserbehälter hergestellt werden. Stelle **a)** die für den Wasserbehälter benötigte Menge Blech (m²), **b)** den Rauminhalt des Wasserbehälters (m³), **c)** den Abfall an Blech durch Ausschneiden der Quadrate als Funktionen der Quadratseite analytisch und geometrisch dar! Welche Symmetrieverhältnisse herrschen bei den Funktionskurven?

Anleitung: Die Quadratseite ist die unabhängige Veränderliche x. Stelle die Funktionen zu a und c in einem gemeinsamen Achsenkreuz, die Funktion zu b in einem gesonderten Achsenkreuz dar. Welche Funktionskurven sind achsensymmetrisch, welche ist zentrischsymmetrisch?

III. Die quadratische Gleichung

7. Die rein-quadratische Gleichung $x^2 - q = 0$

a) Die quadratische Gleichung

Wie groß ist die Seite eines Quadrats mit dem Flächeninhalt 4 cm²?
Es muß $x^2 = 4$ oder $x^2 - 4 = 0$ sein. Dies ist eine Bestimmungsgleichung 2. Grades oder eine **quadratische Gleichung** für die Unbekannte x.

b) Die quadratische Funktion $y = x^2 - q$ und die quadratische Gleichung $x^2 - q = 0$

Aus der quadratischen Funktion $y = x^2 - 4$ erhält man die quadratische Gleichung $x^2 - 4 = 0$ dadurch, daß man in der Funktion für y den Zahlenwert 0 einsetzt. Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 4 = 0$ sind die Nullstellen der quadratischen Funktion $y = x^2 - 4$. Diese werden durch die Schnittpunkte der Funktionskurve $y = x^2 - 4$ mit der x-Achse (Gerade $y = 0$) zeichnerisch dargestellt (Abb. 22).

Die quadratische Gleichung $x^2 - 4 = 0$ besteht nur aus dem quadratischen Glied x^2 und dem absoluten Glied -4, ein lineares Glied in x fehlt. Eine quadratische Gleichung der Form $x^2 - q = 0$ heißt eine **rein-quadratische Gleichung.**

Lösung der rein-quadratischen Gleichung $x^2 - 4 = 0$

Zeichnerische Lösung (Abb. 22)

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung nennt man die **Wurzeln der quadratischen Gleichung.** Die rein-quadratische Gleichung $x^2 - 4 = 0$ hat zwei Wurzeln,

$$x_1 = +2$$

und $$x_2 = -2.$$

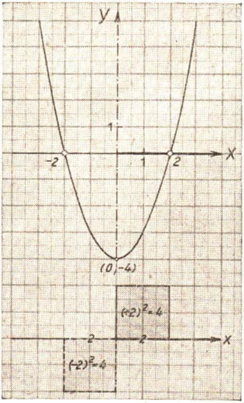


Abb. 22. Die Funktion $y = x^2 - 4$

Rechnerische Lösung

$$x^2 - 4 = 0$$

Wir ordnen die Gleichung: $$x^2 = +4.$$

Wir ziehen auf beiden Seiten die Quadratwurzel:

$$x_{1;2} = \pm \sqrt[2]{4}$$

oder $$x_1 = +2$$

und $$x_2 = -2.$$

Welche Lösung kommt für die gestellte geometrische Aufgabe nur in Frage?

Mache die Probe auf die Richtigkeit der Lösung durch Einsetzen der Wurzeln x_1 und x_2 in die Ausgangsgleichung! Was bedeutet diese Probe für die Punkte $(x_1; 0)$ und $(x_2; 0)$ und die Funktionskurve $y = f(x) = x^2 - 4$?

Zur rechnerischen Lösung wiederholen wir: Quadratwurzel aus einer Zahl a heißt die Zahl, deren Quadrat gleich der gegebenen Zahl a ist. Beachte das doppelte Vorzeichen der Quadratwurzel!

Die rein-quadratische Gleichung $x^2 - q = 0$, $(q > 0)$, hat zwei Wurzeln, $x_1 = +\sqrt[2]{q}$ und $x_2 = -\sqrt[2]{q}$.

Aufgaben

1. Wie groß sind die Quadrate der folgenden Zahlen:
15; 1,5; 0,15; 150; 1 500; 19; 1,9; 0,19; 190; 1 900; 0,37; 3,7; 37; 370; 3 700; 0,26; 2,6; 26; 260; 2 600; 901; 90,1; 9,01; 0,901; 762; 76,2; 7,62; 0,762?

Anleitung: Mache für jede Aufgabe zuerst einen Überschlag! Benutze für die größeren Zahlen die Quadrattafel (Schülkes Tafeln)! Stellenzahl: Wieviel Stellen der Quadratzahl entstehen aus je einer Stelle der Grundzahl? Was wird aus der vordersten Stelle der Grundzahl?

2. Wie groß sind die Quadratwurzeln aus den folgenden Zahlen:
81; 324; 25; 0,25; 256; 2,56; 0,0256; 400; 4; 0,04; 144; 1,44; 225; 529; 7,84; 12,96; 42,25; 0,6724; 0,9604; 0,9801; 0,2704; 62,41; 0,7921; 0,009 025; 2; 3; 5; 6; 10; 0,1; 0,4; 0,9; 2,5; 1,6; 6,4?

Anleitung: Mache für jede Aufgabe zuerst einen Überschlag! Benutze die Quadrattafel (auf 3 Stellen genau)! Stellenzahl: Wieviel Stellen der Wurzel entstehen aus je zwei Stellen des Radikanden[1])? Abteilen des Radikanden vom Komma aus in Gruppen zu je zwei Stellen!

3. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden rein-quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 - 1 = 0$ **b)** $x^2 - 9 = 0$ **c)** $x^2 = \frac{16}{49}$

d) $x^2 - 5 = 0$ **e)** $x^2 - 3 = 0$ **f)** $x^2 - 2 = 0$!

Anleitung:
Zeichnerische Lösung. Zeichne die Funktionskurve $y = x^2 - q$ durch Scheitelbestimmung und Parallelverschiebung der Normalparabel $y = x^2$ (vgl. Abb. 22).

Rechnerische Lösung. Ist das absolute Glied der Gleichung keine Quadratzahl, so sind die Näherungslösungen auf drei Stellen genau anzugeben (Quadrattafel).

Beispiel: $x^2 - 10 = 0$. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind

$x_1 = +\sqrt[2]{10}$, Näherungslösungen $x_1 \approx +3{,}16$ (lies: x_1 angenähert gleich plus 3,16),

$x_2 = -\sqrt[2]{10}$, $x_2 \approx -3{,}16$.

Mache für die Näherungslösungen die Probe durch Einsetzen in die Gleichung! Was bedeutet die Probe für die Funktion $y = x^2 - 10$?

4. Löse die folgenden Gleichungen:

a) $(x + 2) \cdot (x - 2) + 3 = 0$ **b)** $(x + \frac{1}{2}) \cdot (x - \frac{1}{2}) - 2 = 0$

c) $(x + 7) \cdot (x - 9) + (x - 7) \cdot (x + 9) + 101 = 0$

d) $\frac{25 + x}{9 + x} = \frac{13 + x}{47 - x}$!

---

1) Radikand (lat.) ist die Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll.

5. Wie groß muß der Durchmesser eines Baumstammes, aus dem ein Balken mit dem rechteckigen Querschnitt $18 \cdot 24\ \text{cm}^2$ geschnitten werden soll, mindestens sein?

6. Aus einem Stück Rundstahl von 28 mm Durchmesser soll ein quadratischer Zapfen von möglichst großem Querschnitt hergestellt werden. Wie groß wird die Quadratseite?

7. Ein Schiff ist mit einer Echoloteinrichtung ausgerüstet. Diese besteht aus einem an Backbord befindlichen Schallerreger S und einem an Steuerbord befindlichen, mit einem Kurzzeitmesser ausgestatteten Schallempfänger E. Die Breite des Schiffsrumpfes ist $b = 20$ m (22,4 m); die Schallgeschwindigkeit im Meerwasser beträgt $c = 1\,510$ m/s. Die Zeitmessung wird bei ruhendem Schiff ausgeführt. Der Meeresboden werde als waagerecht angenommen. Ermittle die Meerestiefe für einen Zeitunterschied von $t = 0{,}054$ s (0,046 s)!

8. Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$

a) Die quadratische Gleichung $x^2 + px = 0$

Wir untersuchen als Beispiel die quadratische Gleichung $x^2 + 2x = 0$. Sie besteht aus dem quadratischen Glied x^2 und dem linearen Glied $2x$, das absolute Glied q ist gleich Null.

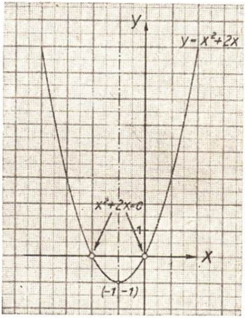


Abb. 23

Zeichnerische Lösung der Gleichung $x^2 + 2x = 0$

Die Nullstellen der quadratischen Funktion $y = f(x) = x^2 + 2x$ ergeben die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x = 0$. Diese sind nach Abb. 23 $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

Rechnerische Lösung der Gleichung $x^2 + 2x = 0$

Durch Ausklammern der Unbekannten x läßt sich der x-Ausdruck der linken Gleichungsseite in Faktoren zerlegen,

$$x \cdot (x + 2) = 0.$$

Ein Produkt $u \cdot v$ kann nur dann gleich Null werden, wenn entweder der erste Faktor u oder der zweite Faktor v gleich Null ist. Gleicherweise kann die linke Seite der Gleichung nur dann gleich Null werden, wenn entweder der erste Faktor x oder der zweite Faktor $(x + 2)$ gleich Null ist. Die quadratische Gleichung spaltet sich also durch Faktorenzerlegung in zwei lineare Gleichungen,

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x + 2 = 0,$$

auf, deren Wurzeln $\quad x_1 = 0 \quad$ und $\quad x_2 = -2 \quad$ sind.

Die quadratische Gleichung $x^2 + px = 0$ hat zwei Wurzeln, $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$.

b) Die gemischt-quadratische Gleichung $\boxed{x^2 + px + q = 0}$

1. Die quadratische Gleichung $(x + 1)^2 = 4$

Um welchen Betrag muß man den Radius eines Einheitskreises vergrößern, damit sein Flächeninhalt viermal so groß wird?

Einheitskreis nennt man einen Kreis mit dem Radius 1, gemessen in der festgelegten Längeneinheit. Der Flächeninhalt des Einheitskreises ist $F = \pi r^2 = \pi$. Vergrößert man den Radius des Einheitskreises um den Betrag x auf $(x+1)$, so wächst der Flächeninhalt des zugehörigen Kreises auf $\pi(x+1)^2$. Es muß also sein (Abb. 24):

$$\pi \cdot (x+1)^2 = 4\pi.$$

Da die Zahl π von Null verschieden ist, kann die Gleichung durch π dividiert werden.

$$(x+1)^2 = 4$$

oder

$$(x+1)^2 - 4 = 0.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung ist die Unbekannte x zu bestimmen!

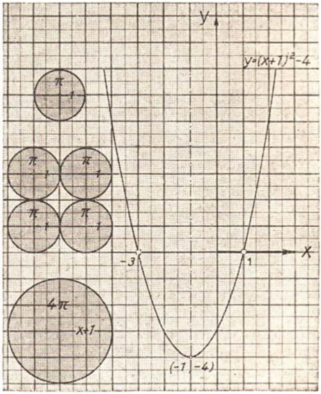


Abb. 24

Zeichnerische Lösung (Abb. 24).

Wir erhalten als Wurzeln $x_1 = +1$ und $x_2 = -3$.

Rechnerische Lösung

Da auf beiden Gleichungsseiten volle Quadrate stehen, ziehen wir beiderseits die Quadratwurzel,

$$x + 1 = \pm 2,$$

und erhalten als Wurzeln der Gleichung

$$x_{1;\,2} = -1 \pm 2$$

oder

$$x_1 = +1$$

und

$$x_2 = -3.$$

Zur rechnerischen Lösung: Genügen beide Lösungen als Antwort auf die gestellte Frage den Bedingungen der Aufgabe?

Zur zeichnerischen Lösung (Abb. 24): Die Bedingungen der gestellten Aufgabe grenzen für die unabhängige Veränderliche x aus dem gesamten Bereich der x-Achse den Geltungsbereich $x > 0$ ab. In diesen fällt nur die Lösung $x_1 = 1$.

Wodurch unterscheidet sich nur die quadratische Gleichung $(x+1)^2 = 4$ von der rein-quadratischen Gleichung $x^2 = 4$? Durch welche analytische Umformung kann man die Gleichung $(x+1)^2 = 4$ auf die rein-quadratische $x^2 = 4$ zurückführen? Durch welche Bewegung wird diese Umformung geometrisch veranschaulicht (vgl. Abb. 22 und 24)?

2. Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$

Die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$ besteht aus dem quadratischen Glied x^2, dem linearen $2x$ und dem absoluten Glied -3. Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ heißen **gemischt-quadratische Gleichungen.**

Zeichnerische Lösung der Gleichung

Die Kurve der quadratischen Funktion $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$ ist eine Normalparabel mit dem Scheitel $(-1; -4)$. Ihre Nullstellen sind $x_1 = +1$ und $x_2 = -3$; die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$ sind also

$$x_1 = +1 \quad \text{und} \quad x_2 = -3.$$

Rechnerische Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Wir ordnen die Gleichung: $x^2 + 2x = +3.$

Wir ergänzen die linke Gleichungsseite zum vollen Quadrat und addieren die quadratische Ergänzung auf beiden Gleichungsseiten:

$$x^2 + 2x + 1 = +3 + 1.$$

Wir schreiben die linke Seite als volles Quadrat:

$$(x + 1)^2 = +4,$$

und ziehen auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel:

$$x + 1 = \pm 2.$$

Die Wurzeln der Gleichung sind $x_{1;2} = -1 \pm 2$

oder $x_1 = +1$

und $x_2 = -3.$

Beide Beispiele, $(x + 1)^2 = 4$ und $x^2 + 2x - 3 = 0$, führen trotz anfänglich verschiedener äußerer Form auf die Lösung derselben quadratischen Gleichung $(x + 1)^2 = 4$. Wie entstehen die beiden Formen $(x + 1)^2 = 4$ und $x^2 + 2x - 3 = 0$ auseinander? Welchen Vorteil hat die erste Form für die zeichnerische Lösung? Wie kann man die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$ auf eine reinquadratische zurückführen?

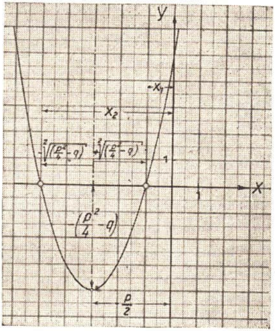


Abb. 25

3. Die Normalform der quadratischen Gleichung, $x^2 + px + q = 0$

Die Normalform der quadratischen Funktion ist $y = f(x) = x^2 + px + q$. Ihr Funktionsbild ist eine Normalparabel mit dem Scheitel $\left[-\frac{p}{2}; -\left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right]$ (vgl. Abb. 25). Aus der

Normalform der quadratischen Funktion entsteht durch Einsetzen des Zahlenwertes 0 für y die **Normalform der quadratischen Gleichung** $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$.

Zeichnerische Lösung

Die Nullstellen der Funktion ergeben die Wurzeln der Gleichung. Diese sind nach Abb. 25

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt[2]{\frac{p^2}{4} - q}$$

und $$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt[2]{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Rechnerische Lösung

Wir ordnen die quadratische Gleichung:

$$x^2 + px = -q.$$

Wir ergänzen die linke Gleichungsseite zum vollen Quadrat und addieren die quadratische Ergänzung $+\left(\frac{p}{2}\right)^2$ oder $+\frac{p^2}{4}$ auf beiden Gleichungsseiten:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Wir schreiben die linke Seite der Gleichung als volles Quadrat,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

und ziehen auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel,

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}.$$

Als Wurzeln der Gleichung erhalten wir

$$x_{1;\,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

oder $$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

und $$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}.$$

Die Normalform der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$ hat zwei Wurzeln,

$$\boldsymbol{x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}, \qquad \left(\frac{p^2}{4} - q\right) > 0.}$$

4. Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$.

Aus der allgemeinen Form der quadratischen Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ergibt sich für $y = 0$ die allgemeine Form der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Die allgemeine Form der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ läßt sich durch Division durch a, ($a \neq 0$; lies: a ungleich Null), stets in die Normalform der quadratischen Funktion $y = x^2 + px + q$ überführen. Hierbei bleiben die Nullstellen der Funktion erhalten (vgl. Abb. 19). Folglich läßt sich die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ durch Division der Gleichung durch a, $(a \neq 0)$, in ihre Normalform überführen.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + px + q &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei bleiben die Wurzeln der quadratischen Gleichung erhalten.

Aufgaben

I. Die quadratische Gleichung $x^2 + px = 0$

1. Zerlege die folgenden Ausdrücke in Faktoren:

$x^2 - 5x$; $x^2 + 2x$; $x^2 + x$; $x^2 - x$; $x^2 - \frac{3}{2}x$; $x^2 - ax$; $x^2 + px$;
$2x^2 - 3x$; $3x^2 - 2x$; $3x^2 - 6x$; $2x^2 + 4x$; $4x^2 + 6x$; $6x^2 + 4$!

2. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

$x^2 + x = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $x^2 = x$; $x^2 = 4x$; $x^2 = ax$; $x^2 + px = 0$!

Anleitung: Mache die Probe auf die Richtigkeit der Lösungen durch Einsetzen der Wurzeln x_1 und x_2 in die Ausgangsgleichung! Wie liegen die Punkte $(x_1; 0)$ und $(x_2; 0)$ zur Funktionskurve $y = x^2 + px$?

II. Die gemischt-quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$

3. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $(x-1)^2 - 1 = 0$ b) $(x+1)^2 - 1 = 0$ c) $(x+2)^2 - 1 = 0$
d) $(x-2)^2 = 4$ e) $(x-3)^2 - 4 = 0$ f) $(x-1)^2 = 4$!

4. Ergänze die folgenden Ausdrücke zu vollen Quadraten:

a) $x^2 + 4x$, $x^2 - 6x$, $x^2 - 2x$, $x^2 - 10x$, $x^2 + 8x$, $x^2 - 12x$, $x^2 + 16x$;
b) $x^2 + x$, $x^2 - x$, $x^2 + 3x$, $x^2 - 5x$, $x^2 + 9x$, $x^2 - 7x$, $x^2 - 13x$;
c) $x^2 + \frac{x}{2}$, $x^2 - \frac{5x}{3}$, $x^2 + \frac{13x}{5}$, $x^2 - \frac{11x}{6}$, $x^2 + \frac{9x}{2}$, $x^2 - \frac{17x}{4}$, $x^2 - \frac{15}{8}x$;
d) $x^2 + \frac{8x}{3}$, $x^2 + \frac{10x}{3}$, $x^2 - \frac{10x}{7}$, $x^2 - \frac{12x}{5}$, $x^2 + \frac{18x}{11}$, $x^2 - \frac{26x}{11}$, $x^2 - \frac{24x}{13}$!

Anleitung zu d: Nimm als quadratische Ergänzung zu $x^2 + \frac{8x}{3}$ nicht $\left(\frac{8}{6}\right)^2$, sondern $\left(\frac{4}{3}\right)^2$; zu $x^2 - \frac{26x}{11}$ nicht $\left(\frac{26}{22}\right)^2$, sondern $\left(\frac{13}{11}\right)^2$ usw. Erst kürzen, dann quadrieren! Warum?

5. Ergänze die folgenden Ausdrücke zu vollen Quadraten:

a) $x^2 + 2ax$, $x^2 - 2ax$, $x^2 + 4ax$, $x^2 - 4ax$, $x^2 - 16bx$, $x^2 + 24bx$;
b) $x^2 + ax$, $x^2 + px$, $x^2 - \frac{ax}{2}$, $x^2 + \frac{ax}{3}$, $x^2 - 3ax$, $x^2 - \frac{5ax}{2}$;
c) $x^2 + \frac{2ax}{3}$, $x^2 + \frac{4ax}{3}$, $x^2 + \frac{6ax}{5}$, $x^2 - \frac{12ax}{5}$, $x^2 - \frac{24ax}{7}$, $x^2 - \frac{26ax}{3}$!

6. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ **b)** $x^2 - 12x + 35 = 0$ **c)** $x^2 - 2x - 63 = 0$
d) $x^2 + 18x - 40 = 0$ **e)** $x^2 + 6x - 16 = 0$ **f)** $x^2 - 10x = -24$
g) $x^2 + 14x = 15$ **h)** $x^2 + 12x = -27$ **i)** $x^2 - x - 2 = 0$
k) $x^2 + x - 6 = 0$ **l)** $x^2 - 5x - 36 = 0$ **m)** $x^2 + 15x + 56 = 0$
n) $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ **o)** $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$ **p)** $x^2 - \frac{5}{2}x - 9 = 0$
q) $x^2 - \frac{x}{2} - 3 = 0$ **r)** $x^2 - \frac{20x}{3} + 4 = 0$ **s)** $x^2 + \frac{22x}{5} - 3 = 0$!

Anleitung zur zeichnerischen Lösung: Zeichne die Kurve der quadratischen Funktion $y = (x + d)^2 + e$ durch Scheitelbestimmung und Parallelverschiebung der Normalparabel $y = x^2$! Mache bei jedem Beispiel die Probe durch Einsetzen!

III. Die gemischt-quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

Die folgenden quadratischen Gleichungen sind rechnerisch zu lösen!

7. a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ **b)** $2x^2 + 7x - 4 = 0$ **c)** $3x^2 + 17x - 6 = 0$
d) $3x^2 + 26x - 9 = 0$ **e)** $2x^2 - 5x - 18 = 0$ **f)** $3x^2 - x - 30 = 0$
g) $4x^2 - x - 5 = 0$ **h)** $12x^2 - x - 20 = 0$ **i)** $10x^2 - 3x = 1$
k) $5x^2 - 12x = 9$ **l)** $3x^2 - 14x = 49$ **m)** $4x^2 - 17x = -15$
n) $6x^2 - 19x = -15$ **o)** $10x^2 - 47x = -42$ **p)** $12x^2 + x = +35$

Anleitung: Bringe die quadratischen Gleichungen zuerst auf die Normalform! Mache bei jedem Beispiel die Probe durch Einsetzen der Wurzeln x_1 und x_2 in die Ausgangsgleichung! Löse die Aufgaben a bis f auch zeichnerisch!

8. a) $(x - 2) \cdot (x - 4) + (x - 3) \cdot (x - 1) = 11$
b) $(2x - 3) \cdot (3x - 2) - (x + 1) \cdot (3x - 7) = 13$
c) $(3x + 2) \cdot (2x - 3) - (4x - 3) \cdot (x - 1) - 3 = 0$
d) $(3x - 4) \cdot (4x - 1) - (5x - 6) \cdot (2x - 1) - 2 = 0$
e) $(x + 2) \cdot (x - 3) + (x + 1) \cdot (x - 2) - (x - 1) \cdot (x + 3) = 0$
f) $(x + 4) \cdot (x - 3) - (x + 3) \cdot (x + 4) - (x - 5) \cdot (x + 6) = 0$

9. a) $(x + 3)^2 + (x + 5)^2 - (x + 7)^2 = 0$ **b)** $(x - 2)^2 - (x - 4)^2 = (x - 3)^2$
c) $(x + 3)^2 + (3x - 1)^2 = (3x + 1)^2$ **d)** $(4x + 1)^2 - (3x + 1)^2 = (2x + 1)^2$
e) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = (3x - 2)^2$ **f)** $(3x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (2x + 3)^2$
g) $(3x - 5)^2 - (x + 1)^2 - (x + 3)^2 = 0$
h) $(3x - 4)^2 - (3x + 2)^2 = (x - 1) \cdot (x + 11) - (2x + 1)^2$

10. a) $12x^2 - 10ax + 2a^2 = 0$ **b)** $12x^2 - 2ax - 2a^2 = 0$
c) $12x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$ **d)** $12x^2 - ax - 6a^2 = 0$
e) $4x^2 - 16ax + 15a^2 = 0$ **f)** $4x^2 - 4ax - 15a^2 = 0$

11. a) $(a-x)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$ b) $(x+a)^2+(x+b)^2=(a-b^2)$

c) $(x-a)^2+(x+b)^2=(a+b)^2$

d) $(x-a)^2+(x+b)^2+(x+a)\cdot(x+b) = 2x^2+a^2+b^2$

e) $(x-a)^2+(x-a)\cdot(x-b)+(x-b)^2=(a-b)^2$

Gleichungen mit Brüchen

12. a) $\dfrac{5x-2}{3x+1}=\dfrac{3x+10}{4x-5}$ b) $\dfrac{2x+5}{x-2}=\dfrac{7x-15}{2x-6}$ c) $\dfrac{2x^2-4x+5}{4x^2-6x-3}=\dfrac{3x^2-6x+5}{6x^2-9x-5}$

13. a) $\dfrac{x+3}{2x+2}-\dfrac{2x-7}{3x-6}-\dfrac{1}{3}=0$ b) $\dfrac{x-1}{2x-6}-\dfrac{x-4}{3x-15}=\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{4x-3}{5x-10}+\dfrac{7}{10}=0$ d) $\dfrac{2x-3}{2x+4}-\dfrac{x+2}{3x+9}=-\dfrac{2}{3}$

14. a) $\dfrac{3x-2}{6x+9}=\dfrac{16x^2+10x+5}{24x^2-54}-\dfrac{x+2}{4x-6}$ b) $\dfrac{3x+5}{6x-9}-\dfrac{2x^2+5x-1}{4x^2-9}=\dfrac{10}{27}$

c) $\dfrac{4x-3}{6x+4}=\dfrac{40x^2+20x+5}{54x^2-24}-\dfrac{2x+3}{9x-6}$ d) $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{2}{15x}-\dfrac{1}{x^2+x}$

15. a) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{3}{x-3}=0$ b) $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{6}{x+2}-\dfrac{14}{x+3}=0$

c) $\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{27}{x+3}=0$ d) $\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{6}{x-3}=0$

16. a) $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x-a}=\dfrac{4}{3a}$ b) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{5}{12a}$

c) $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{10}{3}$

IV. Angewandte Aufgaben

17. Zur Eindeichung eines Flusses kann man rund 1800 m³ Erde auf je 100 m Deichlänge aus dem Flußbett und seiner Umgebung gewinnen. Wie hoch kann man damit jeden der Dämme machen, wenn die Kronenbreite der Dämme 3 m und ihr Böschungswinkel 45° betragen soll?

Anleitung:

a) *Herstellung des Ansatzes* der Gleichung: Wir wählen die gesuchte Höhe des Dammes als Unbekannte x, drücken den Rauminhalt des Dammes nach den in der Aufgabe gemachten Angaben durch x aus und stellen den Ansatz für die Gleichung her.

b) *Rechnerische Lösung* der Gleichung: Nicht immer genügen alle Lösungen der im Ansatz gebildeten Gleichung den in der Aufgabe geforderten Bedingungen. Daher ist für jede Lösung der Gleichung am Aufgabentext nachzuprüfen, ob sie als Antwort auf die gestellte Frage den Bedingungen der Aufgabe genügt.

c) *Zeichnerische Lösung* der Gleichung: Die Bedingungen der Aufgabe grenzen für die unabhängige Veränderliche x einen bestimmten Geltungsbereich ab, in den oft nur eine Lösung fällt. Die andern Lösungen, die wohl dem Ansatz, aber nicht den Bedingungen der Aufgabe genügen, gelten nur bei Erweiterung des durch die Aufgabe begrenzten Geltungsbereiches von x (vgl. Abb. 14, 15, 20, 22 und 24). Man teilt deshalb die x-Achse in zwei Bereiche ein, 1. in den durch die Aufgabe bedingten Geltungsbereich von x, 2. in den Bereich derjenigen x-Werte, die als Lösungen der Gleichung den Bedingungen der Aufgabe nicht genügen.

18. Um einen oben offenen Wasserbehälter mit quadratischer Grundfläche und einem Fassungsvermögen von 450 l herzustellen, werden aus einem quadratischen Stahlblech an den vier Ecken Quadrate von 20 cm Kantenlänge ausgeschnitten. Die überstehenden Rechtecke werden rechtwinklig zur Grundfläche umgebogen und die aneinanderstoßenden Rechteckkanten verschweißt. Wie groß muß die Kante des quadratischen Blechs gewählt werden?

19. Das Produkt aus einer Zahl und der um 17 kleineren Zahl beträgt 60. Wie heißen die beiden Zahlen?

20. Die Summe zweier Zahlen ist 29, die Summe ihrer Quadrate 433. Wie groß sind die beiden Zahlen?

21. **a)** Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete um 1 cm kleiner als die andere Kathete ist und dessen größere Kathete wieder um 1 cm kleiner als die Hypotenuse ist. Wie groß sind die Katheten und die Hypotenuse des Dreiecks?

b) Wie groß sind die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, wenn der Seitenunterschied a cm beträgt?

22. Die Klemmenspannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Stromkreises bleibt 12 Volt. Vergrößert man den Widerstand zwischen den beiden Punkten der Leitung um 5 Ohm, so sinkt die Stromstärke um 0,2 Ampere. Wie groß war der ursprüngliche Widerstand?

23. Die Klemmenspannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Stromkreises bleibt 220 Volt. Verkleinert man den Widerstand zwischen den beiden Punkten der Leitung um 100 Ohm, so steigt die Stromstärke um 0,11 Ampere an. Wie groß war der ursprüngliche Widerstand?

9. Zeichnerische Lösung von Gleichungen

a) Die Gleichung 2. Grades oder quadratische Gleichung

Eine quadratische Gleichung in ihrer Normalform $x^2 + px + q = 0$ läßt sich zeichnerisch auf eine zweite Art lösen. Liegt z. B. die quadratische Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$ zur Lösung vor, so führen wir für x^2 die Veränderliche y ein. Dann ist

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y - 2x - 3 = 0,$$
$$y = 2x + 3.$$

Die Kurve der quadratischen Funktion $y = x^2$ ist für jede quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ eine feste quadratische Normalparabel mit dem Scheitel $(0; 0)$, die Kurve der linearen Funktion $y = 2x + 3$ ist eine gerade Linie vom Anstieg 2 und dem y-Abschnitt $+ 3$. Beide Funktionskurven zeichnen wir in dasselbe xy-Achsenkreuz (Abb. 26). **Die Abszissen der Kurvenschnittpunkte ergeben die Wurzeln der quadratischen Gleichung, $x_1 = + 3$ und $x_2 = - 1$,** denn nur die Koordinaten $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ der Kurvenschnittpunkte genügen beiden Funktionsgleichungen. Mache die Probe durch Einsetzen der Wurzelwerte x_1 und x_2 in die Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$ und in die Funktionen $y = x^2$ und $y = 2x + 3$!

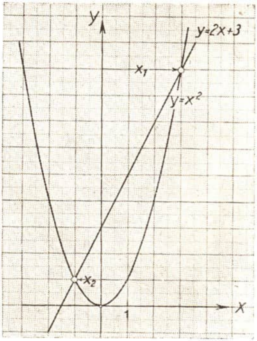


Abb. 26

b) Die Gleichung 3. Grades oder kubische Gleichung

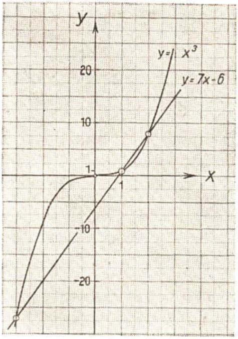


Abb. 27

Diese zeichnerische Lösungsmethode ist auch auf Gleichungen 3. Grades anwendbar, wenn die Gleichung in der reduzierten – d.h. vom quadratischen Glied ax^2 freien – Form $x^3 + px + q = 0$ vorliegt.

Beispiel: $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Wir führen für x^3 die Veränderliche y ein. Dann ist

$$y = x^3 \quad \text{und} \quad y - 7x + 6 = 0,$$
$$y = 7x - 6.$$

Die Kurve der Funktion $y = x^3$ ist für jede kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ eine feste kubische Parabel mit dem Mittelpunkt (0; 0), die Kurve der Funktion $y = 7x - 6$ ist eine gerade Linie. Beide Funktionskurven zeichnen wir in dasselbe xy-Achsenkreuz (Abb. 27). Die Abszissen der Kurvenschnittpunkte ergeben die Wurzeln der kubischen Gleichung, $x_1 = +1$; $x_2 = +2$; $x_3 = -3$.

c) Zeichnerische Lösung von Bestimmungsgleichungen

Die zeichnerische Lösung von Bestimmungsgleichungen liefert für die Wurzeln der Gleichungen im allgemeinen Näherungswerte, deren Abweichung von den genauen Werten durch die Genauigkeit der Zeichnung bestimmt ist. Sind die Wurzeln der Gleichung kleine ganze Zahlen wie in den bisherigen Beispielen, so ist die rechnerische Lösung einfacher und genauer als die zeichnerische. Bei größeren Zahlen und für den Fall, daß die auftretenden Quadratwurzeln sich nicht ausziehen lassen, ist die zeichnerische Lösung im allgemeinen einfacher. Der Hauptwert der zeichnerischen Lösung von Gleichungen liegt einmal in ihrer Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit und zum andern darin, daß dieses Verfahren sich auch auf Gleichungen höheren Grades in x, z. B. 3. und 4. Grades, anwenden läßt.

Aufgaben

Löse auf zeichnerische Weise wie in Abb. 26 und 27 die folgenden Gleichungen:

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x^2 + x - 6 = 0$

2. a) $x^2 - 1 = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x^2 - \frac{1}{4} = 0$; $x^2 - 2 = 0$; $x^2 - 3 = 0$

b) $x^2 + x = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $x^2 - 3x = 0$; $x^2 + \dfrac{x}{2} = 0$

c) $x^2 + 6x + 9 = 0$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; $x^2 + 2x + 1 = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$

3. $x^3 - 7x - 6 = 0$; $x^3 - 13x + 12 = 0$; $x^3 - 13x - 12 = 0$!

Mache die Probe durch Einsetzen der Wurzelwerte in die Gleichungen und in die Funktionen!

IV. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

10. Die Wurzeln quadratischer Gleichungen

a) Reelle Zahlen

Die Zahlen des bisher behandelten Zahlenbereichs – positive und negative, ganze Zahlen und Brüche – faßt man als **reelle Zahlen** zusammen.

b) Die Wurzeln quadratischer Gleichungen

Wir lösen die folgenden drei quadratischen Gleichungen:

I. $x^2 - 2x - 3 = 0$, II. $x^2 - 2x + 1 = 0$, III. $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Zeichnerische Lösung der drei Gleichungen

Die zeichnerische Lösung der drei Gleichungen ist in Abb. 28 in einem gemeinsamen $x\,y$-Achsenkreuz durchgeführt. Die Kurven der drei quadratischen Funktionen

$$\text{I. } y = f_1(x) = x^2 - 2x - 3$$
$$\text{II. } y = f_2(x) = x^2 - 2x + 1$$
$$\text{III. } y = f_3(x) = x^2 - 2x + 5$$

sind quadratische Normalparabeln. Ihre Scheitel haben dieselbe Abszisse $x_0 = +1$, liegen aber in verschiedenen Höhen zur x-Achse,

$$\text{I. bei } y_0 = -4,$$
$$\text{II. bei } y_0 = 0,$$
$$\text{III. bei } y_0 = +4.$$

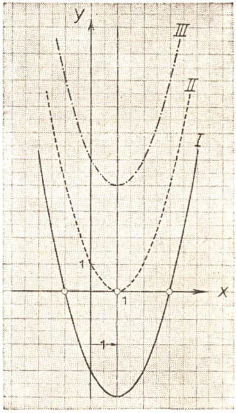


Abb. 28

Die Nullstellen der Funktionen ergeben die Wurzeln der Gleichungen.

I. Der Scheitel der Kurve I liegt unterhalb der x-Achse, Kurve I schneidet die x-Achse. Funktion I besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen und Gleichung I **zwei verschiedene reelle Wurzeln,**

$$x_{1;2} = +1 \pm 2 \quad \text{oder} \quad x_1 = +3 \quad \text{und} \quad x_2 = -1.$$

II. Verschiebt man Kurve I längs ihrer Achse nach oben, so rücken die Nullstellen der Funktion auf der Kurve immer dichter an den Scheitel heran. Schließlich berührt die Funktionskurve die x-Achse, Kurve I ist in II übergeführt. Die Nullstellen fallen mit dem Scheitel zusammen, es wird $x_{1;2} = +1 \pm 0$. Gleichung II besitzt **zwei gleiche reelle Wurzeln** oder **eine Doppelwurzel,**

$$x_{1;2} = +1 \pm 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = x_2 = 1.$$

III. Verschiebt man Kurve II längs ihrer Achse weiter nach oben bis zur Deckung mit Kurve III, so kann die Funktionskurve durch ihre Lage oberhalb der x-Achse Nullstellen nicht mehr ausbilden. Gleichung III besitzt **keine reellen Wurzeln.**

Rechnerische Lösung der drei Gleichungen

	I. $x^2 - 2x - 3 = 0$	II. $x^2 - 2x + 1 = 0$	III. $x^2 - 2x + 5 = 0$
Ordnen:	$x^2 - 2x = 3$	$x^2 - 2x = -1$	$x^2 - 2x = -5$
Hinzufügen der quadratischen Ergänzung:	$x^2 - 2x + 1 = 3 + 1$ $(x-1)^2 = 4$	$x^2 - 2x + 1 = -1 + 1$ $(x-1)^2 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = -5 + 1$ $(x-1)^2 = -4$
Ausziehen der Quadratwurzel:	$x - 1 = \pm 2$	$x - 1 = \pm 0$	$x - 1 = \pm\sqrt[2]{-4}$
Wurzeln:	$x_{1;2} = 1 \pm 2$	$x_{1;2} = 1 \pm 0$	Die Quadratwurzel aus -4 ist nicht vorhanden!
oder	$x_1 = +3,$ $x_2 = -1$	$x_1 = x_2 = 1$	
	2 verschiedene reelle Wurzeln	**1 Doppelwurzel**	**Keine reellen Wurzeln**

Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung können sein

2 verschiedene reelle Wurzeln, die Funktionskurve **schneidet** die x-Achse;
1 Doppelwurzel, „ „ **berührt** „ „ ;
keine reellen Wurzeln, „ „ **„meidet"** „ „ .

Aufgaben

Löse die folgenden quadratischen Gleichungen jeder Aufgabe nebeneinander:

1.	$x^2 - 2x - 8 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x^2 - 2x + 10 = 0$	
2.	$x^2 + 2x - 7 = 0$	$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x^2 + 2x + 9 = 0$	
3.	$x^2 + 4x = 0$	$x^2 + 4x + 4 = 0$	$x^2 + 4x + 8 = 0$	
4.	$x^2 - 4x - 5 = 0$	$x^2 - 4x - 1 = 0$	$x^2 - 4x + 4 = 0$	$x^2 - 4x + 13 = 0$
5.	$x^2 - 6x + 5 = 0$	$x^2 - 6x + 7 = 0$	$x^2 - 6x + 9 = 0$	$x^2 - 6x + 13 = 0$
6.	$x^2 - 8x + 7 = 0$	$x^2 - 8x + 12 = 0$	$x^2 - 8x + 14 = 0$	$x^2 - 8x + 15 = 0$
	$x^2 - 8x + 16 = 0$	$x^2 - 8x + 17 = 0$	$x^2 - 8x + 20 = 0$	
7.	$x^2 - x - 2 = 0$	$4x^2 - 4x + 1 = 0$	$2x^2 - 2x + 5 = 0!$	

Anleitung: Bringe die quadratischen Gleichungen zuerst auf die Normalform! Stelle die quadratischen Funktionen jeder Aufgabe in einem gemeinsamen Achsenkreuz geometrisch dar! Berechne $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[2]{5}$ auf 3 Stellen genau (Quadrattafel)!

11. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

a) Zeichnerische Untersuchung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung

Wann hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zwei verschiedene reelle Wurzeln, wann eine Doppelwurzel und wann keine reellen Wurzeln?
Die zeichnerische Lösung der quadratischen Gleichungen in Abb. 28 zeigt, daß die

Art der Wurzeln einer quadratischen Gleichung nur von der Lage der zugehörigen Funktionskurve zur x-Achse abhängt. Der Abstand des Scheitels der Bildkurve $y = f(x) = x^2 + px + q$ von der x-Achse ist (Abb. 25 und 29)

$$y_0 = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

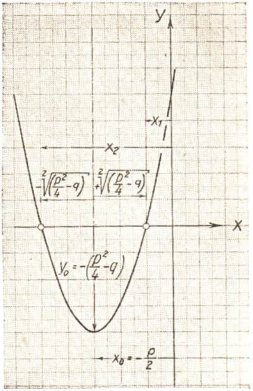


Abb. 29

I. Ist der Zahlenwert der Klammer $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ **größer als Null,** so ist der Scheitelabstand y_0 negativ. Der Scheitel der Normalparabel liegt unterhalb der x-Achse, die Funktionskurve **schneidet** die x-Achse in zwei reellen Nullstellen, die quadratische Gleichung hat **zwei verschiedene reelle Wurzeln.**

II. Ist der Wert der Klammer $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ **gleich Null,** so ist der Scheitelabstand y_0 der Normalparabel gleich Null. Der Scheitel der Parabel liegt auf der x-Achse, die Funktionskurve **berührt** die x-Achse, die quadratische Gleichung hat **zwei gleiche reelle Wurzeln** oder **eine Doppelwurzel.**

III. Ist der Wert der Klammer $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ **kleiner als Null,** so ist der Scheitelabstand y_0 der Parabel positiv. Die Parabel liegt oberhalb der x-Achse, die Funktionskurve **meidet** die x-Achse, die quadratische Gleichung hat **keine reellen Wurzeln.**

Die Größe $D = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ nennt man die **Diskriminante**[1]) der quadratischen Gleichung. **Entscheidend für die Art der Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist allein die Diskriminante $D = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$.**

$$\text{Ist} \quad D = \left(\frac{p^2}{4} - q\right) \begin{matrix} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{so hat die} \\ \text{quadratische} \\ \text{Gleichung} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{2 verschiedene reelle Wurzeln,} \\ \text{1 Doppelwurzel,} \\ \text{keine reellen Wurzeln.} \end{matrix}$$

b) Rechnerische Untersuchung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung

Wir lösen die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ rechnerisch.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = +\frac{p^2}{4} - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

---

1) discriminare (lat.) heißt entscheiden, unterscheiden.

Wurzeln: $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$ oder $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$,

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}.$$

Der Radikand der Quadratwurzel ist die Diskriminante $D = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$.

Ist $\left(\frac{p^2}{4} - q\right) > 0$, so ist der Radikand der Quadratwurzel eine positive Zahl, die Quadratwurzel läßt sich ausziehen, die Gleichung hat 2 verschiedene reelle Wurzeln;

$\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0$, so ist die Quadratwurzel gleich Null, die Gleichung hat eine Doppelwurzel;

$\left(\frac{p^2}{4} - q\right) < 0$, so ist der Radikand der Quadratwurzel eine negative Zahl, die Quadratwurzel ist nicht vorhanden, die Gleichung hat keine reellen Wurzeln.

Eine solche kritische Erörterung über die Art der Lösungen einer quadratischen Gleichung nennt man eine Lösungsdiskussion[1]) der quadratischen Gleichung. Vergleiche hierzu den Anhang: Nomogramme zur quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ auf Seite 276 bis 280!

Aufgabe

Untersuche, welcher Art die Wurzeln der Aufgaben 1 bis 7 von Abschn. 10 sind! Benutze dazu auch die Nomogramme der quadratischen Gleichung in Abb. 305 und 306!

12. Wurzelfaktoren

a) Wurzeln und Gleichung

Aus einer gegebenen quadratischen Gleichung lassen sich durch Lösen der Gleichung ihre Wurzeln finden. Läßt sich umgekehrt aus zwei gegebenen Wurzeln auch die zugehörige quadratische Gleichung finden?

Beispiel: $x_1 = +1$ und $x_2 = -3$ seien die Wurzeln einer quadratischen Gleichung. Wie heißt die zugehörige quadratische Gleichung $f(x) = 0$ in Normalform?

b) Wurzelfaktoren

Die gesuchte quadratische Gleichung $f(x) = 0$ muß vom 2. Grad in x sein (quadratische Gleichung) und muß für $x = +1$ und für $x = -3$ gleich Null werden (quadratische Gleichung).

Wir bilden die **Wurzelfaktoren** $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ und ihr Produkt $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, für das gewählte Beispiel $(x - 1)$, $(x + 3)$ und $(x - 1) \cdot (x + 3)$. Das Produkt der Wurzelfaktoren $(x - 1) \cdot (x + 3)$ ist vom 2. Grad in x und wird für $x = +1$ und für $x = -3$ gleich Null. Die Gleichung $(x - 1) \cdot (x + 3) = 0$ ist die gesuchte

1) Diskussion (lat.) heißt kritische Erörterung.

quadratische Gleichung in Produktform. Durch Ausmultiplizieren erhalten wir die Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$ (vgl. Abb. 28, Kurve I).

Jede quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit den Wurzeln x_1 und x_2 läßt sich in Wurzelfaktoren zerlegen. $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ ist die Produktform der quadratischen Gleichung.

Aufgaben

1. Von welchem Grad in x ist jeder einzelne Wurzelfaktor? Warum nennt man die Wurzelfaktoren einer quadratischen Gleichung auch Linearfaktoren?

2. Warum muß in der Produktform einer Gleichung jeder Wurzelfaktor für sich gleich Null werden?

3. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $(x - 1) \cdot (x - 2) = 0$; $(x + 1) \cdot (x + 2) = 0$;
$(x - 1) \cdot (x + 2) = 0$; $(x + 1) \cdot (x - 2) = 0$

b) $(x + 1) \cdot (x + 3) = 0$; $(x - 2) \cdot (x + 3) = 0$; $(x - 3) \cdot (x + 2) = 0$

c) $x \cdot (x - 2) = 0$; $x \cdot (x + 2) = 0$; $x \cdot (x + 1) = 0$; $x \cdot (1 - x) = 0$

d) $(x - 1) \cdot (x - 1) = 0$; $(x + 2)^2 = 0$; $(x - 2)^2 = 0$; $(x + 3)^2 = 0$; $x^2 = 0$

e) $x^2 - x = 0$; $x^2 - 4x = 0$; $x^2 + x = 0$; $x^2 + 3x = 0$

f) $(x - 1) \cdot (x + 1) = 0$; $(x - 2) \cdot (x + 2) = 0$

g) $(x - a) \cdot (x + a) = 0$; $(x - a)^2 = 0$!

Anleitung: Löse die Gleichungen zuerst durch Nullsetzen der einzelnen Wurzelfaktoren! Löse die Gleichungen dann durch Ausmultiplizieren und Auflösen der Normalform! Welche rechnerische Lösung ist einfacher?

4. Welcher Unterschied besteht zwischen den Gleichungen $x - 1 = 0$ und $(x - 1)^2 = 0$; $x + 1 = 0$ und $(x + 1)^2 = 0$; $x + 2 = 0$ und $(x + 2)^2 = 0$; $(x - 2) = 0$ und $(x - 2)^2 = 0$?

Anleitung: Wie heißen die Funktionen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$, aus denen man für $y = 0$ die zugehörigen Gleichungen $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = 0$ erhält? Welche Kurven gehören zu den Funktionen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$? Zeichne die beiden Kurven in ein gemeinsames Achsenkreuz und bestimme ihre Nullstellen! Gib Anzahl und Werte der Wurzeln jeder Gleichung an!

5. Wie heißen die quadratischen Gleichungen zu den folgenden Wurzeln:

a) $x_1 = +3$ und $x_2 = -2$; $x_1 = +4$ und $x_2 = +2$; $x_1 = +2$ und $x_2 = -1$;
$x_1 = +1$ und $x_2 = -2$; $x_1 = -1$ und $x_2 = -3$

b) $x_1 = +1$ und $x_2 = -1$; $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$; $x_1 = -3$ und $x_2 = +3$;
$x_1 = +2$ und $x_2 = -2$; $x_1 = +2{,}5$ und $x_2 = +2{,}5$

c) $x_1 = 2$ und $x_2 = 0$; $x_1 = 0$ und $x_2 = -4$; $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$;
$x_1 = 0$ und $x_2 = -2$; $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$; $x_1 = -2{,}5$ und $x_2 = 0$

d) $x_1 = x_2 = 1$; $x_1 = x_2 = -1$; $x_1 = x_2 = -2$; $x_1 = x_2 = 2{,}5$; $x_1 = x_2 = 0$

e) $x_1 = a$ und $x_2 = -a$; $x_1 = a$ und $x_2 = 0$; $x_1 = 0$ und $x_2 = -a$; $x_1 = x_2 = a$;
$x_1 = x_2 = -a$?

13. Vietascher Wurzelsatz

Welche Beziehungen bestehen zwischen den Wurzeln x_1 und x_2 und den Koeffizienten p und q einer quadratischen Gleichung?
Zu den beiden Wurzeln x_1 und x_2 gehört in der Normalform eine quadratische Gleichung.

Diese lautet in Produktform

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0.$$

Ihre Normalform ist

$$x^2 + px + q = 0.$$

Beide Formen müssen identisch sein,

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \equiv x^2 + px + q \quad (\equiv \text{ lies: identisch gleich}),$$

oder nach Ausmultiplizieren

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 \equiv x^2 + px + q.$$

Die Identität beider Gleichungsseiten ist nur erfüllt, wenn $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ ist.

Zwischen den Wurzeln x_1 und x_2 und den Koeffizienten p und q einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ bestehen die Beziehungen: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

Der Satz heißt nach seinem Entdecker **Vietascher**[1] **Wurzelsatz.**

Aufgabe

Löse die Aufgaben 5 in Abschn. 12 auch nach dem Vietaschen Wurzelsatz und zeige die Übereinstimmung beider Ergebnisse. Vergleiche hierzu die Nomogramme der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ in Abb. 305 und 306!

B. Die Potenzfunktion und ihre Umkehrung

a) Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

V. Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten

14. Die Potenz a^n

a) Die Potenz

Wie schreibt man in kürzerer Form $3 + 3 + 3 + 3$; $a + a + a + a$? Was heißt Multiplizieren? Wie schreibt man in kürzerer Form $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; $a \cdot a \cdot a \cdot a$? Was bedeutet 4^3, a^5, a^n?

Ein Produkt gleicher Faktoren heißt Potenz. Wir setzen

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5; \qquad \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}} = a^n, \quad (n \text{ eine positive ganze Zahl}).$$

Der Faktor a heißt Grundzahl oder **Basis**[2]), die Anzahl n der Faktoren **Exponent**[3]). a^n heißt die **n-te Potenz**[4]) von a.

---

1) Viëta oder Francois Viète, 1540—1603, Paris, französischer Mathematiker, Begründer der Buchstabenrechnung.

2) Basis (gr.) heißt Grundlage, Grundzahl.

3) exponere (lat.) heißt heraussetzen; Exponent ist die herausgesetzte Zahl.

4) potentia (lat.) heißt Macht, Fähigkeit.

Die auszuführende Rechenart heißt Potenzieren. Das Potenzieren ist eine neue Rechenart neben dem Addieren und Subtrahieren und dem Multiplizieren und Dividieren. **Potenzieren ist mehrfaches Multiplizieren derselben Größe.**

Beispiel: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$. Die auszuführende Rechenoperation heißt: 3 ist mit 4 zu potenzieren oder 3 ist in die 4. Potenz zu erheben.

b) Vorzeichen

1. Das Potenzvorzeichen

Eine Potenz hat wie jede relative Zahl ein Vorzeichen, z. B. $+ 3^3$ oder $- 3^3$; $+ a^n$ oder $- a^n$. Welchen Zahlenwert hat $+ 3^3$, welchen $- 3^3$? Wo liegt auf der Zahlengeraden die Zahl $+ 3^3$, wo $- 3^3$?

2. Das Basisvorzeichen

Auch die Grundzahlen können verschiedene Vorzeichen haben.

Eine Potenz mit positiver Basis ist z. B. $(+ 3)^3$; dies bedeutet

$$(+ 3) \cdot (+ 3) \cdot (+ 3) = + 3^3.$$

Eine Potenz mit negativer Basis ist z. B. $(- 3)^3$; dies bedeutet

$$(- 3) \cdot (- 3) \cdot (- 3) = - 3^3.$$

Wie hängen Potenzvorzeichen und Basisvorzeichen miteinander zusammen? Erkläre die folgenden Gleichungen:

$$(- 3)^2 = + 3^2; \quad (- 4)^4 = + 4^4; \quad (- a)^4 = + a^4; \quad (- x)^4 = + x^4$$

$$(- 3)^3 = - 3^3; \quad (- 4)^5 = - 4^5; \quad (- a)^5 = - a^5; \quad (- x)^5 = - x^5 \,!$$

3. Gerade und ungerade Potenzen

Eine Potenz heißt gerade, wenn ihr Exponent gerade ist. Eine Potenz heißt ungerade, wenn ihr Exponent ungerade ist. Gerade Potenzen sind z. B. 2^2, a^4, $(- a)^6$ oder allgemein a^{2n}, ungerade Potenzen sind z. B. 2^3, a^5, $(- a)^7$ oder allgemein a^{2n+1}.

Jede Potenz von (+ 1) ist gleich + 1, $\quad (+ 1)^n = + 1;$

also ist $\quad (+ a)^n = + a^n.$

Jede gerade Potenz von (— 1) ist gleich + 1, $\quad (- 1)^{2n} = + 1;$

also ist $\quad (- a)^{2n} = + a^{2n}.$

Jede ungerade Potenz von (— 1) ist gleich — 1, $\quad (- 1)^{2n+1} = - 1;$

also ist $\quad (- a)^{2n+1} = - a^{2n+1}.$

Beweis: Eine gerade Anzahl negativer Faktoren $(- a)$ läßt sich stets paarweise zusammenfassen, $(- a) \cdot (- a) \bullet (- a) \cdot (- a) \bullet \ldots \bullet (- a) \cdot (- a)$. Jedes Faktorenpaar und damit die aus ihnen entstehende Potenz wird positiv.
Bei einer ungeraden Anzahl negativer Faktoren bleibt bei paarweiser Zusammenfassung ein einzelner Faktor $(- a)$ übrig, $(- a) \cdot (- a) \bullet (- a) \cdot (- a) \bullet \ldots \bullet (- a) \cdot (- a) \bullet (- a)$. Dieser liefert bei Multiplikation mit den positiven Faktorenpaaren einen negativen Wert für die sich ergebende Potenz.

Aufgaben

1. Berechne

a) $(2a)^4$; $(3x)^3$; $(ab)^3$; $(xy)^5$; $(2ab)^4$ **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(\frac{3}{2}\right)^3$; $\left(\frac{a}{2}\right)^4$; $\left(\frac{x}{3}\right)^3$; $\left(\frac{2a}{3}\right)^2$; $\left(\frac{3x}{2}\right)^3$

c) $(a-2)^2$; $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(x+y)^2$; $(2x-3)^2$; $(3x-2)^2$; $(3x-4)^2$; $(3x-2y)^2$; $(3x-4y)^2$; $(4x+3y)^2$; $(1-x)^2$; $(x-1)^2$!

Anleitung zu c: Klammerfaktoren!

2. Berechne

a) 0^2; 0^3; 0^4; 0^n; 1^2; 1^3; 1^4; 1^n; $(+1)^4$; $(+1)^5$; $(+x)^3$; $(+a)^4$; $(+2x)^2$; $(+3a)^3$

b) $(-1)^{12}$; $(-1)^{14}$; $(-2)^4$; $(-3)^2$; $(-x)^4$; $(-2a)^4$; $(-3x)^4$

c) $(-1)^9$; $(-1)^{15}$; $(-2)^3$; $(-2)^5$; $(-a)^3$; $(-x)^5$; $(-ab)^3$; $(-2x)^5$

d) $-(+1)^2$; $-(+1)^3$; $-(-1)^2$; $-(-1)^3$; $-(-1)^4$; $-(-1)^5$; $-(-2)^3$; $-(-2)^4$; $+(-a)^5$; $-(-a)^5$; $+(-a)^6$; $-(-a)^6$!

15. Die Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$

a) Potenz und Potenzfunktion

Die Potenz a^n, in der die Basis a eine positive oder negative Zahl und der Exponent n eine ganze positive Zahl ist, ist eine positive oder negative Zahl.

Die Funktionen $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, ..., $y = x^n$ nennt man die **Potenzfunktionen $y = f(x) = x^n$**, $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Ihre Kurven heißen **Parabeln.**

b) Die Potenzfunktionen

1. Die geraden Potenzfunktionen $y = f(x) = x^{2n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Für $n = 1$ erhält man die Potenzfunktion $y = f(x) = x^2$. Sie ist die einfachste quadratische Funktion von x, wir nennen sie **2. Potenzfunktion**. Ihre Funktionskurve ist eine Parabel 2. Grades oder quadratische Parabel (Abb. 14).

Für $n = 2$ erhält man die Potenzfunktion $y = f(x) = x^4$. Sie ist die einfachste Funktion 4. Grades von x, wir nennen sie **4. Potenzfunktion**. Ihre Funktionskurve ist eine Parabel 4. Grades (Abb. 21).

In Abb. 30 ist die **Folge der geraden Potenzfunktionen $y = f(x) = x^{2n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$**, für $n = 1, 2, 3$ geometrisch dargestellt; sie ergibt die **Kurvenschar $y = x^2$; $y = x^4$; $y = x^6$; ....** Die Kurven sind Parabeln **2., 4., 6., ...** Grades. Sämtliche Kurven gehen durch den Nullpunkt (0; 0) als Scheitel und durch den Festpunkt (1; 1). Sie verlaufen im II. und I. Quadranten des Achsenkreuzes und liegen symmetrisch zur y-Achse.

Abb. 30.
Die geraden Potenzfunktionen
$y = x^2$; $y = x^4$; $y = x^6$

2. Die ungeraden Potenzfunktionen $y = f(x) = x^{2n+1}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Für $n = 1$ erhält man die Potenzfunktion $y = f(x) = x^3$. Sie ist die einfachste Funktion 3. Grades von x, wir nennen sie **3. Potenzfunktion.** Ihre Funktionskurve ist eine Parabel 3. Grades oder kubische Parabel (Abb. 20).

In Abb. 31 ist die **Folge der ungeraden Potenzfunktionen** $y = f(x) = x^{2n+1}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, für $n = 1, 2, 3$ geometrisch dargestellt; sie ergibt die **Kurvenschar** $y = x^3$; $y = x^5$; $y = x^7$; .... Die Kurven sind Parabeln 3., 5., 7., ... Grades. Sämtliche Kurven gehen durch die Festpunkte (0; 0) und (1;1) und verlaufen im III. und I. Quadranten des Achsenkreuzes. Sie liegen symmetrisch zum Nullpunkt (0; 0) als Symmetriezentrum.

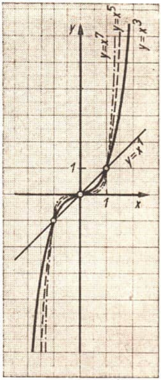


Abb. 31. Die ungeraden Potenzfunktionen $y = x^1$; $y = x^3$; $y = x^5$; $y = x^7$

3. Die Potenzfunktion $y = f(x) = x^1$

a^1 hat nach der Erklärung der Potenz keinen Sinn, da ein Produkt gleicher Faktoren mindestens zwei Faktoren besitzen muß. **Man definiert**[1]**: $a^1 = a$.**

Durch diese Festsetzung wird die Funktion $y = f(x) = x^1$ in der Folge der ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{2n+1}$ die 1. ungerade Potenzfunktion für $n = 0$. Ihre Kurve (Abb. 31) ist eine gerade Linie durch die Punkte (0; 0) und (1;1). Sie liegt im III. und I. Quadranten des Achsenkreuzes und verläuft symmetrisch zum Nullpunkt (0; 0). Durch die getroffene Definition ordnet sich die Funktion $y = x^1 = x$ der Folge der ungeraden Potenzfunktionen und ihrer Kurvenschar als 1. Potenzfunktion ein.

4. Die Potenzfunktionen $y = f(x) = x^n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Die Bildkurven sämtlicher Potenzfunktionen sind zusammenhängende Kurven durch die Festpunkte (0;0) und (1;1) und heißen Parabeln. Die Kurven der geraden Potenzfunktionen liegen symmetrisch zur y-Achse, die der ungeraden Potenzfunktion symmetrisch zum Nullpunkt (0; 0).

Die Kurve der Potenzfunktion $y = x^1$ ist eine ausgeartete Parabel, eine gerade Linie.

Aufgaben

I. Zahlenfolgen und Funktionenfolgen

1. Zahlenfolgen

a) Setze die aufgeführten Zahlenfolgen fort: 1, 2, 3, ...; 1, 3, 5, ...; 2, 4, 6, ...; 2, 3, 4, ...; 2, 4, 8, ...; $1^2, 1^3, 1^4, \ldots$; $2^2, 2^3, 2^4, \ldots$; $3^2, 3^3, 3^4, \ldots$; $10^2, 10^3, 10^4, \ldots$; $a^2, a^3, a^4, \ldots$!

---

1) definieren (lat.) heißt näher bestimmen, festsetzen. Eine mathematische Definition ist eine Festsetzung.

b) Durch welche Rechenoperation entsteht in den einzelnen Zahlenfolgen jedes Glied der Folge aus dem vorangehenden?

c) Durch welches Bildungsgesetz wird jede einzelne Zahlenfolge dargestellt?

Erklärung: Eine gesetzmäßige Aufeinanderfolge von Zahlen heißt Zahlenfolge. Die einzelnen Zahlen heißen Glieder der Folge.

2. Setze die aufgeführten Zahlenfolgen fort: $2^2, 2^4, 2^6, \ldots$; $3^2, 3^4, 3^6, \ldots$; $10^2, 10^4, 10^6, \ldots$; $a^2, a^4, a^6, \ldots$; $2^3, 2^5, 2^7, \ldots$; $3^3, 3^5, 3^7, \ldots$; $10^3, 10^5, 10^7, \ldots$; $a^3, a^5, a^7, \ldots$!

a) Durch welche Rechenoperationen entstehen die Glieder der einzelnen Folgen aus den vorangehenden?

b) Durch welche Bildungsgesetze werden die Zahlenfolgen dargestellt?

3. Funktionenfolgen

Erklärung: Eine gesetzmäßige Aufeinanderfolge von Funktionen heißt Funktionenfolge.

a) Wie heißen die Einzelfunktionen der Funktionenfolgen
$y = x^n$, $(n = 2, 3, 4, \ldots)$; $y = x^{2n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; $y = x^{2n+1}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$?

b) Durch welche Rechenoperationen entstehen die Einzelfunktionen der Folgen aus den vorangehenden?

c) Die drei Funktionenfolgen sind die Folge der Potenzfunktionen $y = x^n$, $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, die Folge der geraden Potenzfunktionen $y = x^{2n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, und die Folge der ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{2n+1}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

II. Die Potenzfunktionen

4. Untersuche a) den Verlauf und b) die Symmetrieeigenschaften der Kurve $y = x^2$!

Anleitung (Abb. 14):

a) Verlauf der Kurve $y = x^2$: Im Bereich $x < 0$ fällt die Parabel $y = x^2$ beständig mit wachsendem x, im Bereich $x > 0$ steigt die Kurve beständig mit wachsendem x (siehe Wertetafel und Funktionsbild!). Wie verläuft die Kurve an der Stelle $x = 0$? Scheitel der Kurve!

b) Symmetrieeigenschaften der Kurve $y = x^2$: Welche Umlegung bringt die Kurve mit sich selbst zur Deckung? Achsensymmetrie! Wie verläuft die Symmetrieachse? Welches sind die Koordinaten von Kurvenpunkten, die symmetrisch zur Achse liegen?

5. Untersuche a) den Verlauf und b) die Symmetrieeigenschaften der Kurve $y = x^3$!

Anleitung (Abb. 20):

a) Verlauf der Kurve: Wie verläuft die Kurve im Bereich $x < 0$, wie im Bereich $x > 0$ (Wertetafel und Funktionsbild!); wie an der Stelle $x = 0$?

b) Symmetrieeigenschaften der Kurve: Welche Bewegung bringt die Kurve mit sich selbst zur Deckung? Zentrische Symmetrie! Mittelpunkt der Kurve! Welches sind die Koordinaten zum Nullpunkt symmetrischer Kurvenpunkte?

6. Stelle die Folge der geraden Potenzfunktionen $y = x^{2n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, für $n = 1, 2, 3$ geometrisch dar! (Abb. 30.)

7. Stelle die Folge der ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{2n+1}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, für $n = 0, 1, 2, 3$ geometrisch dar (Abb. 31)!

8. Zeichne die Kurvenschar $y = x^n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ im Bereich $-1 \leqq x \leqq +1$!

Anleitung (Abb. 32): Wähle als Längeneinheit auf beiden Achsen 5 cm!
Wertetafel für die Kurvenschar (auf 2 Stellen genau):

x	-1	$-0{,}9$	$-0{,}8$	...	0	0,1	0,2	...	0,9	$+1$
$y = x^1$	-1	$-0{,}90$	.	.	0	0,10	.	.	0,90	1
$y = x^2$	$+1$	$+0{,}81$	.	.	0	0,01	.	.	0,81	1
$y = x^3$	-1	$-0{,}73$	.	.	0	0,00	.	.	0,73	1
$y = x^4$	$+1$	$+0{,}66$	.	.	0	0,00	.	.	0,66	1
$y = x^5$	-1	$-0{,}59$	.	.	0	0,00	.	.	0,59	1
$y = x^6$	$+1$	$+0{,}53$	.	.	0	0,00	.	.	0,53	1

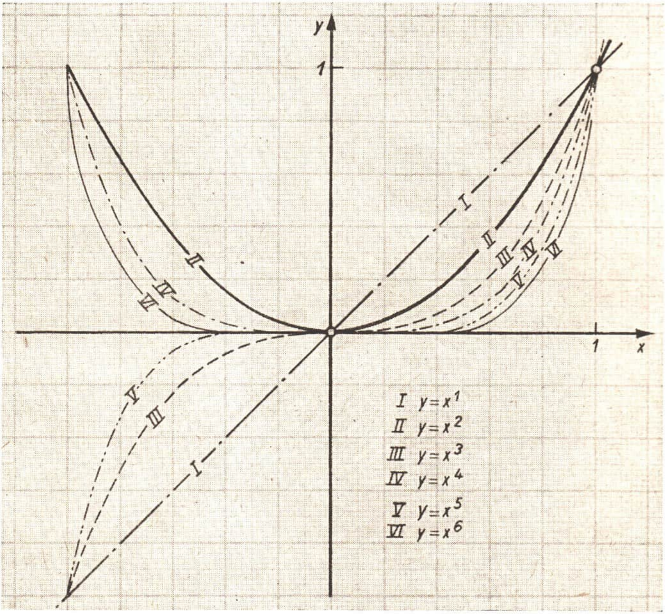


Abb. 32

III. Zwischenschalten von Funktionswerten, Interpolieren[1])

9. a) Stelle die Funktion $y = x^2$ im Bereich $0 \leqq x \leqq 4$ tabellarisch und geometrisch dar (Wertetafel für $x = 0, 1, 2, 3, 4$)!

b) Ersetze die Kurvenstücke in den Teilbereichen $0 \leqq x \leqq 1$, $1 \leqq x \leqq 2$, $2 \leqq x \leqq 3$, $3 \leqq x \leqq 4$ durch die geradlinigen Verbindungen der jeweiligen beiden Endpunkte!

c) Wie unterscheiden sich in diesen Teilbereichen die Funktionswerte y der Kurve von den y-Werten der geradlinigen Ersatzstücke an denselben x-Stellen? Wo ist der Unterschied am kleinsten, wo am größten?

d) In welchem dieser Teilbereiche kann man mit guter Annäherung an die Zeichnungsgenauigkeit das geradlinige Ersatzstück zum Einschalten von Zwischenwerten benutzen, in welchem nicht?

e) Bestimme für die Werte $x = 0{,}5$; $x = 1{,}5$; $x = 2{,}5$; $x = 3{,}5$; $x = 3{,}3$; $x = 3{,}7$; $x = 3{,}1$; $x = 3{,}9$ die zugehörigen y-Werte 1. aus der Wertetafel durch Interpolieren, 2. aus der Kurvengleichung $y = x^2$ durch Ausrechnung! Stelle die interpolierten Näherungswerte und die errechneten genauen Werte für y in einer Tafel zusammen!

f) Erkläre die Quadrattafel in der Logarithmentafel und deren Tafeldifferenzen D!

10. Erkläre in gleicher Weise die Tafel der Kuben in der Logarithmentafel!

11. Benutze den Rechenstab als Quadrattafel!

Anleitung (Abb. 33): Stelle auf der unteren Teilung D des Stabes die Grundzahlen n ein; lies auf der oberen Teilung A des Stabes die Quadratzahlen n^2 ab!

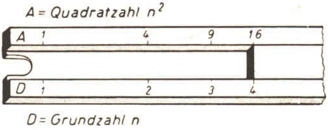


Abb. 33

16. Das Rechnen mit Potenzen

a) Die Rechenarten

An Rechenarten haben wir kennengelernt:

1. Rechenarten der ersten Stufe, Addieren und Subtrahieren.

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Beispiele für Addition und Subtraktion sind $7 + 5 = 12$ und $12 - 5 = 7$; $3a + 4a = 7a$ und $7a - 4a = 3a$.

2. Rechenarten der zweiten Stufe, Multiplizieren und Dividieren.

Die Multiplikation entsteht aus der Addition. **Multiplizieren ist mehrfaches Addieren derselben Größe,** z.B. $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$; $a + a + a + a = 4 \cdot a$.

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Beispiele für Multiplikation und Division sind $4 \cdot 3 = 12$ und $12 : 3 = 4$; $4 \cdot a = 4a$ und $4a : a = 4$.

Multiplizieren und Dividieren sind Rechenarten höherer Stufe als Addieren und Subtrahieren, sie sind Rechenarten der zweiten Stufe.

---

1) interpolare (lat.) heißt einschalten, dazwischenschalten.

3. Das Potenzieren

Abschn. 14 brachte die Erweiterung der Rechenarten durch Hinzunahme des Potenzierens. Die Potenz entsteht aus der Multiplikation. **Potenzieren ist mehrfaches Multiplizieren derselben Größe,** z. B. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$; $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$.
Potenzieren ist eine Rechenart höherer Stufe als Multiplizieren und Dividieren, es ist eine **Rechenart der dritten Stufe.** Wie rechnet man mit Potenzen?

b) Addition und Subtraktion von Potenzen

Man kann nur gleichartige Größen durch Addition oder Subtraktion zusammenfassen.

Beispiele: $a + a + a + a = 4a$; $2x + 3x = x + x + x + x + x = 5x$;

$$2(x+y) + 3(x+y) = (x+y) + (x+y) + (x+y) + (x+y) + (x+y) = 5(x+y).$$

Man kann nur gleichartige Potenzen durch Addition oder Subtraktion zusammenfassen.

Beispiele: $2a^2 + 3a^2 = 5a^2$; $2x^5 + 3x^5 = 5x^5$;

$$2 \cdot (x+y)^3 + 3 \cdot (x+y)^3 = 5 \cdot (x+y)^3.$$

c) Multiplikation und Division von Potenzen, die Potenzgesetze

1. Potenzen von gleicher Basis

1. Potenzgesetz: Man multipliziert Potenzen von gleicher Basis, indem man ihre Exponenten addiert.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Beweis:

$$a^m = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a}$$

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}$$

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}$$

$$= \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{(m+n) \text{ Faktoren } a}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. Potenzgesetz: Man dividiert Potenzen von gleicher Basis, indem man ihre Exponenten subtrahiert.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{für } m > n, \qquad \Bigg| \qquad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{für } m < n.$$

Beweis:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}}$$

Ist $m > n$, so lassen sich n Faktoren a im Zähler und Nenner kürzen. Es bleiben $(m - n)$ Faktoren a im Zähler stehen.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{für } m > n.$$

Ist $m < n$, so lassen sich m Faktoren a im Zähler und Nenner kürzen. Es bleiben $(n - m)$ Faktoren a im Nenner stehen.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{für } m < n.$$

2. Potenzierung eines Produkts und eines Bruches

3. Potenzgesetz: Man potenziert ein Produkt, indem man jeden Faktor potenziert.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Beweis:

$$(a \cdot b)^n = \overbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}^{n \text{ Faktoren } (a \cdot b)}$$

$$= \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{n \text{ Faktoren } b}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Umkehrung:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

4. Potenzgesetz: Man potenziert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner potenziert.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Beweis:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}^{n \text{ Faktoren } \left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren } b}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Umkehrung:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

3. Potenzierung einer Potenz

5. Potenzgesetz: Man potenziert eine Potenz, indem man die Exponenten multipliziert.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Beweis:

$$(a^m)^n = \overbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot \ldots \cdot (a^m)}^{n \text{ Faktoren } (a^m)} = \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}^{n \text{ Faktoren } a^m}$$

$$= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n \text{ Summanden } m}}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Umkehrung:

$$a^{m \cdot n} = (a^m)^n \quad \text{oder} \quad (a^n)^m.$$

Man kann eine Zahl mehrmals nacheinander in beliebiger Reihenfolge potenzieren.

4. Hauptregel der Potenzrechnung

1., 2. und 5. Potenzgesetz lassen sich in die folgende Hauptregel zusammenfassen:

Beim Rechnen mit Potenzen von gleicher Basis wird mit den Exponenten die nächstniedere Rechenart ausgeführt.

Aufgaben

I. Die Rechenarten

1. Erkläre die Zahlenbeispiele $7 + 5 = 12$ und $12 - 5 = 7$; $4 \cdot 3 = 12$ und $12 : 3 = 4$; $2^4 = 16$ an der Zahlengeraden! (Vgl. Abb. 43.)

2. Berechne die folgenden Zahlenausdrücke: $4 \cdot 5 - 2 \cdot 6$; $8 \cdot 3 + 2 \cdot 5$; $8 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5$; $2^2 + 2^3$; $2^4 + 3^4$; $4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 - 2 \cdot 10^2$; $8 \cdot 3^2 - 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2$! Welche Rechenart ist zuerst auszuführen, welche an zweiter Stelle, welche am Schluß?

II. Addition und Subtraktion von Potenzen

3. Vereinfache die folgenden mehrgliedrigen Ausdrücke:

a) $3x^3 - 4x^3 + 7x^3 - 21x^3$; $9a^4 - 7a^4 - 5a^4$; $a^3 + a^3$; $x^2 - x^2$; $3x^4 - 3x^4$

b) $7x^2y^3 - 3x^2y^3 - 12x^2y^3$; $7xy^3 + 3x^3y - 5xy^3 - 3x^3y$; $12a^2b - 6ab^2 - 5a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

c) $3 \cdot (x-1)^2 - 4 \cdot (x-1)^2 + 2 \cdot (x-1)^2$; $7 \cdot (x^2 - y^2)^2 - 4 \cdot (x^2 - y^2)^2 + 3 \cdot (x^2 - y^2)^2$!

Anleitung: Was versteht man unter „gleichartigen Potenzen“? Worin stimmen gleichartige Potenzen überein?

III. Die Potenzgesetze

4. Zeige die Richtigkeit des 1. Potenzgesetzes für $2^5 \cdot 2^3$; $10^5 \cdot 10^3$; $a^5 \cdot a^3$; $a^m \cdot a^n$!

5. Zeige die Richtigkeit des 2. Potenzgesetzes für

a) $2^5 : 2^3$; $10^5 : 10^3$; $a^5 : a^3$; $a^m : a^n$, $(m > n)$ b) $2^3 : 2^5$; $10^3 : 10^5$; $a^3 : a^5$; $a^m : a^n$, $(m < n)$!

6. Welcher Unterschied besteht zwischen

a) $2 \cdot 3^2$ und $(2 \cdot 3)^2$; $2 \cdot x^3$ und $(2 \cdot x)^3$; $a \cdot b^3$ und $(a \cdot b)^3$

b) $\frac{2^2}{3}$ und $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\frac{x^3}{2}$ und $\left(\frac{x}{2}\right)^3$, $\frac{a^3}{b}$ und $\left(\frac{a}{b}\right)^3$?

7. a) Zeige die Richtigkeit des 3. Potenzgesetzes für $(2 \cdot 3)^3$; $(2 \cdot 10)^3$; $(a \cdot b)^3$; $(a \cdot b)^n$!

b) Erkläre die Umkehrung $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$! Welche Größen der Potenzen a^n und b^n sind hier gleich, welche verschieden? Wodurch unterscheidet sich die Umkehrung des 3. Potenzgesetzes vom 1. Potenzgesetz?

8. a) Zeige die Richtigkeit des 4. Potenzgesetzes für $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(\frac{2}{10}\right)^3$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n$!

b) Erkläre die Umkehrung $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ und vergleiche sie mit dem 2. Potenzgesetz!

9. Was bedeuten $(10^3)^2$ und $10^{(3^2)}$; $(2^3)^2$ und $2^{(3^2)}$; $(3^3)^2$ und $3^{(3^2)}$; $2^{2 \cdot 3}$, $(2^2)^3$ und $2^{(2^3)}$? Wie groß sind ihre Zahlenwerte?

10. Zeige die Richtigkeit des 5. Potenzgesetzes für $(2^3)^2$; $(10^3)^2$; $(a^3)^2$; $(a^m)^n$!

11. Der Wortlaut der Potenzgesetze ist nicht vollständig. So müßte z. B. zum 1. Potenzgesetz noch der Zusatz hinzugefügt werden: „. . . und die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.“ Warum kann man diesen weglassen? Wie würden die anderen Potenzgesetze in vollständigem Wortlaut heißen?

IV. Aufgaben zu den Potenzgesetzen

1. Potenzgesetz

12. $3^2 \cdot 3^3$; $5^2 \cdot 5$; $x^3 \cdot x^7$; $a^9 \cdot a$; $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5$; $c^6 \cdot c^3 \cdot c^4$; $y \cdot y^2 \cdot y^5$; $(a+b)^2 \cdot (a+b)^5$; $(x-2y)^3 \cdot (x-2y)^7$; $(5p-3q)^4(5p-3q)^3(5p-3q)$

13. $b^3 \cdot b^m$; $q^a \cdot q^5$; $a^x \cdot a$; $b^{y-1} \cdot b^2$; $y^{a-2} \cdot y^{a+2}$

14. $(u-5v)^m \cdot (u-5v)^{2p} \cdot (u-5v)$; $(7c+3d)^4 \cdot (7c+3d)^{2x} \cdot (7c+3d)^y$

15. $3x^2 \cdot 5x^3$; $2a^5 \cdot 7a^5$; $9a^3 \cdot b^2 \cdot 7a^2b$; $3(x-5z)^{2m} \cdot 12(x-5z)^{m-1}$; $8(3u+v)^{2x+1} \cdot 5(3u+v)^{3y-1}$

16. Klammere den gemeinsamen Faktor aus: $x^7+x^5-x^3$; $15a^2-21a^3+27a^4$; $14m+42m^5+21m^3$; $3(a-b)^2+18(a-b)^3$; $5x^m-15x^{m+1}+20x^{m+2}$; $6a^4b^3+9a^3b^4$; $0{,}7pq^2-1{,}4q^3$!

2. Potenzgesetz

17. $5^7 : 5^4$; $2^{10} : 2^6$; $a^5 : a^3$; $4^5 : 4^7$; $9^9 : 9^3$

18. $b^4 : b^3$; $x^{14} : x^9$; $\dfrac{15x^3}{5x^2}$; $\dfrac{26v^9}{65v^4}$; $\dfrac{30p^3q^5}{135pq^3}$

19. $\dfrac{5^4}{5^7}$; $\dfrac{c^{12}}{c^{15}}$; $\dfrac{18p^3q^2}{45p^2q^3}$; $57x^3 : 19x^5$; $(a-b)^3 : (a-b)^5$

20. $\dfrac{a^m}{a^2}$; $\dfrac{c^{x-1}}{c^x}$; $\dfrac{p^{m+2}q^2}{p^2q^{m+2}}$; $\dfrac{18y^nz^p}{24y^{2n}z^{p-2}}$; $21(2p+q)^{m+1} : 35(2p+q)^m$

21. $\dfrac{9a^3b^2c}{35p^2q^3r^5} \cdot \dfrac{7p^4q^3r^2}{18a^5b^2c^3}$; $\dfrac{135x^my^3z^{n-2}}{75a^5x^{m-1}b^3} \cdot \dfrac{35a^{2n}b^3c^{p-1}}{25c^py^mz^2}$

$\dfrac{19x^m(a-y)^{n-1}}{7a^{m+1}b^2} : \dfrac{57x^4(a-y)^n}{21a^mb^n}$; $\dfrac{72(p-q)^{n-2}}{17(u+2v)} : \dfrac{54(p-q)^{n+3}}{68(u+2v)^{n+1}}$

3. Potenzgesetz

Berechne im Kopf:

22. $(3 \cdot 5)^2$; $(2x)^5$; $(-3m)^4$; $[-(a+b)]^3$; $-(3m)^4$

23. $(2p \cdot 5q)^3$; $(3aby)^4$; $[x \cdot (a+2b)]^3$; $[(a+b) \cdot (a-b)]^2$

24. $2^5 \cdot 5^5$; $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$; $(-x)^4 \cdot (3y)^4$; $(-1)^m \cdot (-5b)^n$; $\left(\dfrac{a}{2b}\right)^x \cdot \left(\dfrac{4b^2}{a^3}\right)^x$

25. $(x \cdot y)^n$; $(2ab)^x$; $(-3p)^{2n}$; $(-5q)^{2n-1}$; $[8(3p+q)]^m$

26. $(2a)^5 \cdot (5b)^5$; $36(m+n)^2 \cdot 25(m-n)^2$; $p^x \cdot (p+q)^x$; $(a+b)^m(a-b)^m$!

4. Potenzgesetz

27. $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3$; $\left(2\dfrac{1}{2}\right)^5$; $\left(3\dfrac{1}{3}\right)^4$; $\left(\dfrac{a \cdot 2b}{3c}\right)^3$; $\left(\dfrac{5xy}{3z}\right)^n$

28. $\dfrac{15^3}{3^3}$; $\dfrac{12^4}{36^4}$; $\dfrac{14^2 \cdot 35^2}{49^2}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$; $0{,}14^3 : 0{,}21^3$

29. $\dfrac{(2p^2q)^5}{(3pq^2)^5}$; $\dfrac{(a^2-b^2)^3}{(a+b)^3}$; $\dfrac{(x-2y)^2(x+2y)^2}{(x^2-4y^2)^2}$; $\dfrac{(u^2-v^2)^3}{(v-u)^3}$

5. Potenzgesetz

30. $(2^3)^2$; $(3a^2)^3$; $(-b^3)^4$; $(-c^4)^3$; $[(p-q)^3]^5$

31. $(a^m)^8$; $(u^{x+1})^3$; $(-v^{2y})^5$; $(-v^{5y})^2$; $[(p+q)^{3m}]^2$

32. $(c^{p-1})^5$; $(u^{3x+1})^2$; $(c^5)^{p-1}$; $(u^2)^{3x+1}$; $(-u^{3x+1})^2$; $(-u^2)^{3x+1}$

33. Wie groß ist 2^8, wenn $2^4 = 16$ ist? Wie groß ist 3^8?

34. $(2\,m^{x+y})^{x-y}$; $\dfrac{[(x+y)^{p+q}]^{p-q}}{[(x+y)^{p-q}]^{p+q}}$; $[(2m)^{x+y}]^{x-y}$; $\dfrac{(21\,a^2b^3c^4)^3}{(14\,a^4b^3c^2)^2}$

35. Zerlege $a^{2m} - b^{2n}$ in ein Produkt aus zwei Faktoren!

36. $\dfrac{a^{2x} - b^{2y}}{a^x - b^y}$; $\dfrac{a^{2x} - b^{2y}}{a^x + b^y}$; $\dfrac{c^{4p} - c^{4q}}{(c^p + c^q)(c^p - c^q)}$!

V. Das Rechnen mit Ungleichungen

37. Welches ist die größte Zahl, die man mit zwei Ziffern schreiben kann (Potenzschreibweise zugelassen)?

Anleitung:

a) In Frage kommen die folgenden Zahlen:

in ausgerechneter Form 99, in unausgerechneter Form $9 \cdot 9$ und 9^9.

Hiervon ist $9 \cdot 9 < 99$, denn es ist $9 \cdot 9 < 9 \cdot 11$, und $99 < 9^9$, denn es ist $9 \cdot 11 < 9 \cdot 9^8$.

b) Abschätzung des Wertes der Zahl 9^9.

Es ist $8 \cdot 10^1 < 9 \cdot 9$; $7 \cdot 10^2 < 9 \cdot 9 \cdot 9$; $6 \cdot 10^3 < 9^4$; $5 \cdot 10^4 < 9^5$; ...; $10^8 < 9^9$.
Also ist $10^8 < 9^9 < 10^9$. Die Zahl 9^9 liegt also zwischen 100 000 000 und 1 000 000 000.
Ihr genauer Wert ist $9^9 = 387\,420\,489$.

38. Welches ist die größte Zahl, die man mit drei Ziffern schreiben kann (Potenzschreibweise zugelassen)?

Anleitung:

a) In Frage kommen die folgenden Zahlen:

in ausgerechneter Form 999,
in unausgerechneter Form $9 \cdot 9 \cdot 9$; $(9 \cdot 9)^9$; 99^9; 9^{99}: $9^{9 \cdot 9}$ oder $(9^9)^9$ und $9^{(9^9)}$.

b) Die Zahlen $999 = 9 \cdot 111 < 9^4$, $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$ und $(9 \cdot 9)^9 = (9^2)^9 = 9^{18}$ scheiden aus, denn sie sind kleiner als die anderen Zahlen.

Ferner ist $9^{9 \cdot 9} < 9^{99}$, denn es ist $81 < 99$, also auch $9^{81} < 9^{99}$.

Ferner ist $99^9 < 9^{99}$; denn es ist $9 \cdot 11 < 9^{11}$,
also ist auch $(9 \cdot 11)^9 < (9^{11})^9$
oder $99^9 < 9^{99}$.

Endlich ist $9^{99} < 9^{(9^9)}$, denn es ist $9 \cdot 11 < 9^9$,
also ist auch $9^{9 \cdot 11} < 9^{(9^9)}$
oder $9^{99} < 9^{(9^9)}$.

Ergebnis: Die größte Zahl, die man mit drei Ziffern schreiben kann, ist die Zahl $9^{(9^9)}$.

c) Abschätzung des Wertes der Zahl $9^{(9^9)}$.

Nach Aufgabe 37 ist $9^{(9^9)} = 9^{387420489}$. Um uns einen Begriff von dieser Riesenzahl zu machen, schätzen wir die Anzahl ihrer Ziffern ab.

Es ist $3 \cdot 10^8 < 9^9 < 4 \cdot 10^8$.
Also ist auch $9^{3 \cdot 10^8} < 9^{(9^9)} < 9^{4 \cdot 10^8}$
oder $(9^3)^{10^8} < 9^{(9^9)} < (9^4)^{10^8}$.
Es ist aber $10^2 < 9^3$ und $9^4 < 10^4$.
Also ist $10^{2 \cdot 10^8} < 9^{(9^9)} < 10^{4 \cdot 10^8}$.

Ergebnis: $9^{(9^9)}$ ist eine Zahl mit mehr als $2 \cdot 10^8$ und weniger als $4 \cdot 10^8$ Ziffern, oder mit mehr als 200 000 000 und weniger als 400 000 000 Ziffern. $9^{(9^9)}$ ist eine Zahl von rund 370 000 000 Ziffern. Man kennt von der Zahl auf Grund von Untersuchungen der höheren Mathematik die ersten und die letzten Ziffern.

VI. Zahlensysteme

39. Drücke die Zehnerzahlen 10, 100, 1 000, . . ., 1 000 000 000 als Potenzen der Basis 10 aus!

40. Unser Zahlensystem ist dekadisch[1]) oder dezimal[2]), d. h. jede ganze Zahl unseres Zahlensystems läßt sich darstellen als Summe von Produkten aus den Einerziffern 1 bis 9 und aus Potenzen der Basis 10, die man als die Stufenzahlen des dezimalen Systems bezeichnet.

Beispiel: $956 = 900 + 50 + 6 = 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$
$= 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6.$

Stelle in gleicher Weise die Zahlen 9 856; 243 728; 1 256 304; 1 048 350; 27 005 326 975; 1 030 050; 3 004 005; 5 030 700 dar!

41. Das Dezimalsystem ist nicht das allein mögliche Zahlensystem. Es lassen sich Zahlensysteme mit beliebiger Basis X und den Einerziffern 1, 2, 3, . . ., $X - 1$ aufbauen.

a) Welches sind die Stufenzahlen eines Zahlensystems mit der Basis N?

b) Wieviel Einerziffern besitzt ein Zahlensystem mit der Basis N?

c) In welcher allgemeinen Form läßt sich eine beliebige Zahl A in einem Zahlensystem mit der Basis N darstellen, wenn man die Einerziffern mit $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ bezeichnet?

42. Das Dualsystem[3]).

a) Welches sind die Stufenzahlen eines Zahlensystems mit der Basis 2?

b) Wieviel Einerziffern besitzt das System?

c) Drücke die Zahlen 1 bis 12 in Potenzen der Basis 2 aus!

d) Eine einfachere Darstellung einer Zahl unter Weglassung der Stufenzahlen erhält man, wenn man festsetzt, daß man an die erste Stelle von rechts die Zahl der Einer, an die zweite Stelle die Zahl der in A enthaltenen Stufenzahlen 2^1, an die dritte Stelle die Zahl der in A enthaltenen Stufenzahlen 2^2 usw. schreibt und fehlende Stufenzahlen durch $0 \cdot 2^n$ ersetzt.

Beispiel: $5 = 2^2 + 1 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1$; $19 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1$.
Die Schreibweise der Zahlen 5 und 19 im Dualsystem wäre [101]; [10 011]. Welche Form haben die Zahlen 1 bis 12 im Dualsystem?

43. Die Verwandlungszahlen unserer Maßeinheiten geben an, wieviel Einheiten des niedrigeren Maßes gebraucht werden, um das nächsthöhere Maß zu erhalten.

a) Wie heißen die verschiedenen Maßeinheiten der Länge? Drücke die höheren Einheiten als Zehnerpotenzen der niedrigeren Einheiten aus!

b) Leite aus den Maßeinheiten der Länge durch Potenzieren die Maßeinheiten der Flächen- und Raummessung ab!

c) Schreibe in entsprechender Weise die Gewichtsmaße höherer Ordnung als Zehnerpotenzen der Maßeinheiten niedrigerer Ordnung!

44. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 299 860 km/s.

a) Welchen Näherungswert prägt man dem Gedächtnis ein? Drücke den Wert mit abgetrennten Zehnerpotenzen aus!

b) Desgl., wenn man an Stelle der Benennung km/s die Benennungen m/s benutzt!

45. Eine astronomische Längeneinheit ist das Lichtjahr, d.i. der Weg, den das Licht in einem Jahr zurücklegt.

a) Rechne 1 Lichtjahr angenähert in km, in m um! Runde die Zwischenergebnisse und scheide aus dem Endergebnis eine möglichst hohe Zahl von Zehnerpotenzen aus!

b) Der Stern Arktur ist 41 Lichtjahre von der Erde entfernt. Wie groß ist seine Entfernung in km (auf 3 Stellen genau)?

---

1) deka (gr.) heißt zehn. 2) decem (lat.) heißt zehn. 3) duo (lat.) heißt zwei.

46. Aus den Grundeinheiten unserer Maße und Gewichte lassen sich dezimale Einheiten höherer Ordnung durch Vorsetzen der nachstehenden Silben bzw. durch Vorsetzen der entsprechenden Buchstaben vor die Kurzzeichen bilden:

Deka[1]) = D; Hekto[1]) = h; Kilo[1]) = k; Mega[1]) = M.

Drücke die größeren Einheiten in Zehnerpotenzen der Grundeinheit aus!

47. Astronomische Zahlen. Gib die folgenden Größen unter Verwendung der Schreibweise mit abgetrennten Zehnerpotenzen in km und in m an:

Sonnendurchmesser	1 391 000 km
mittlerer Erddurchmesser	12 740 km
Monddurchmesser	3 476 km

48. Physikalische Konstanten. Gib die folgenden Konstanten in der Schreibweise mit abgetrennten Zehnerpotenzen an!

a) 1 cm^3 eines beliebigen Gases enthält bei 0° Temperatur und 760 Torr Druck 27,0 Trillionen Moleküle (Loschmidtsche Zahl).

b) In 1 Mol Wasserstoffgas (2 g) sind rund 605 000 Trillionen Moleküle enthalten.

VI. Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten

17. Die Potenzfunktion $y = f(x) = x^{-n}$

a) Der Exponent 0 und negative Exponenten

1. Die Zahlenfolge a^n, $(n = 4, 3, 2, \ldots)$

In der nach fallenden Exponenten geordneten Zahlenfolge a^n, $(n = 4, 3, 2, \ldots)$, nimmt der Exponent n in jedem folgenden Glied um 1 ab:

$$a^4; \qquad a^3; \qquad a^2; \qquad a^1.$$

Andererseits entsteht jedes Glied der Folge aus dem vorangehenden durch Division desselben durch a, $(a \neq 0)$,

$$a^4; \quad \frac{a^4}{a} = a^3; \quad \frac{a^3}{a} = a^2; \quad \frac{a^2}{a} = a^1.$$

Setzt man die Zahlenfolge fort, so wird man auf die Exponenten $0, -1, -2, \ldots$ geführt,

$$a^1; \qquad a^0; \qquad a^{-1}; \qquad a^{-2}; \quad \ldots .$$

Andererseits ergibt die Division jedes Gliedes durch a

$$a^1; \quad \frac{a}{a} = 1; \quad \frac{1}{a}; \quad \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}; \quad \ldots .$$

1) deka (gr.) heißt zehn; hekto (gr. hekaton) hundert; kilo (gr. chilioi) tausend; mega (gr. Vorsilbe) groß, sehr groß (1 000 000).

2. Die Division $\frac{a^m}{a^n}$, $(a \neq 0)$

Läßt man in der Divisionsaufgabe $\frac{a^m}{a^n}$, $(a \neq 0)$, für festes $m = 4$ die Zahl n die Werte 1, 2, 3, ... durchlaufen, so fällt im Quotienten $\frac{a^4}{a^n}$ der Exponent mit fortschreitendem n nach dem 2. Potenzgesetz jedesmal um 1; es ist

$$\frac{a^4}{a^1} = a^3; \quad \frac{a^4}{a^2} = a^2; \quad \frac{a^4}{a^3} = a^1.$$

Setzt man die Folge fort, so erhält man $\frac{a^4}{a^4} = a^0; \quad \frac{a^4}{a^5} = a^{-1}; \quad \frac{a^4}{a^6} = a^{-2}; \quad \ldots .$

Andererseits ergibt die Division $\frac{a^4}{a^4} = 1; \quad \frac{a^4}{a^5} = \frac{1}{a}; \quad \frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^2}; \quad \ldots .$

Was bedeuten die Potenzen a^0, a^{-1}, a^{-2}, ...? Für den Exponenten $n = 0$ und für negative Exponenten $n = -1, -2, \ldots$ verliert die Erklärung der Potenz als eines Produkts von n gleichen Faktoren ihren Sinn.

Man definiert: a^0 soll für jeden von 0 verschiedenen Wert von a gleich 1 sein,

$$a^0 = 1, \quad (a \neq 0).$$

Es soll sein $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad (a \neq 0).$$

b) Die Funktionen $y = f(x) = x^0$ und $y = f(x) = x^{-n}$

Für die Funktionen $y = x^0$ und $y = x^{-n}$ ergibt sich aus diesen Definitionen:

Die Funktion $y = x^0$ hat für jeden von 0 verschiedenen Wert der Veränderlichen x den Wert 1.

Für $x = 0$ führt die Funktion auf die sinnlose Form $y = 0^0$. Die Funktion $y = x^0$ ist für $x = 0$ nicht erklärt, sie existiert an der Stelle $x = 0$ nicht.

Unter der Funktion $y = x^{-n}$ ist die Funktion $y = \frac{1}{x^n}$, $(x \neq 0)$, zu verstehen.

Hierbei ist für die Veränderliche x der Wert $x = 0$ auszuschließen, da die Division durch 0 keinen Sinn hat. Die Funktion $y = x^{-n}$ ist für $x = 0$ nicht erklärt, sie existiert an der Stelle $x = 0$ nicht.

c) Die Kurven $y = x^0$ und $y = x^{-n}$

Die Kurve $y = x^0$ ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1 (Abb. 34), denn es ist stets $x^0 = 1$, $(x \neq 0)$.

Die Kurven $y = x^{-n}$ oder $y = \frac{1}{x^n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, heißen **Hyperbeln.** Je nachdem n ungerade oder gerade ist, zerfallen sie in zwei Gruppen.

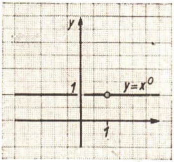


Abb. 34.
Die Potenzfunktion $y = x^0$

Die Kurvenschar $y = x^{-(2n+1)}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. In Abb. 35 sind für $n = 0$ und $n = 1$ die Potenzfunktionen $y = x^{-1}$ und $y = x^{-3}$ geometrisch dargestellt. Die Hyperbeln

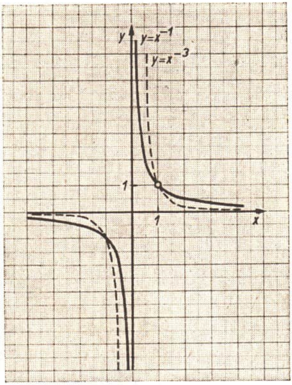


Abb. 35. Die ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{-1}$; $y = x^{-3}$

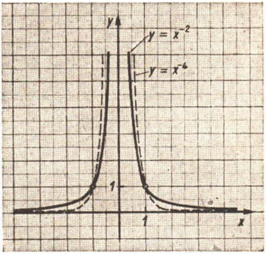


Abb. 36. Die geraden Potenzfunktionen $y = x^{-2}$; $y = x^{-4}$

bestehen je aus zwei kongruenten Ästen, die im III. und im I. Quadranten verlaufen. Sie liegen symmetrisch zum Nullpunkt (0; 0) und gehen sämtlich durch den Festpunkt (1;1). Die Funktionen sind ungerade Potenzfunktionen.

Die Kurvenschar $y = x^{-2n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. In Abb. 36 sind für $n = 1$ und $n = 2$ die Potenzfunktionen $y = x^{-2}$ und $y = x^{-4}$ geometrisch dargestellt. Die Hyperbeln bestehen je aus zwei kongruenten Ästen, die im II. und im I. Quadranten verlaufen. Sie liegen symmetrisch zur y-Achse. Sämtliche Kurven gehen durch den Festpunkt (1;1). Die Funktionen sind gerade Potenzfunktionen. Die Kurve $y = x^0$ ordnet sich der Kurvenschar $y = x^{-2n}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, für $n = 0$ ein.

d) Die Potenzfunktionen $y = f(x) = x^n$, (n eine positive oder negative ganze Zahl)

Die Zweckmäßigkeit der Erweiterung der Potenzfunktion $y = x^n$ von positiven Exponenten über den Exponenten 0 zu negativen Exponenten durch die gegebenen Definitionen zeigt sich geometrisch besonders deutlich bei zusammenfassendem Betrachten der Potenzfunktionen $y = x^n$, (n eine positive oder negative ganze Zahl).

1. Die geraden Potenzfunktionen $y = x^{2n}$, $(n = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots)$

Ihre Kurven (Abb. 37) sind

für positives n	Parabeln,
für $n = 0$	die Parallele zur x-Achse im Abstand 1,
für negatives n	Hyperbeln.

Sämtliche Kurven verlaufen im II. und I. Quadranten und liegen symmetrisch zur y-Achse.

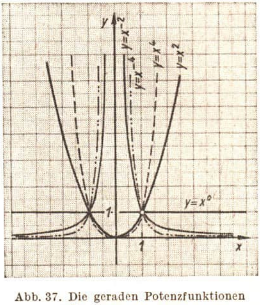


Abb. 37. Die geraden Potenzfunktionen $y = x^{2n}$, $(n = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2)$

2. Die ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{2n+1}$,
$(n = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots)$

Ihre Kurven (Abb. 38) sind

für positives n Parabeln,
für $n = 0$ die Gerade $y = x$,
für negatives n Hyperbeln.

Sämtliche Kurven verlaufen im III. und I. Quadranten und liegen symmetrisch zum Nullpunkt (0; 0).
Sämtliche Potenzfunktionen gehen durch den Festpunkt (1; 1).

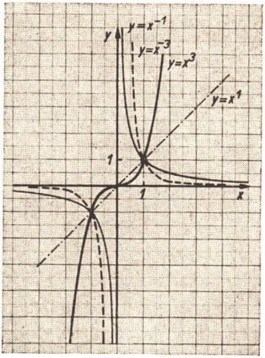


Abb. 38. Die ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{2n+1}$, $(n = -2; -1; 0; 1)$

e) Die Rechengesetze für Potenzen mit negativen Exponenten und dem Exponenten 0

Die Einführung von Potenzen mit negativen Exponenten durch die getroffene Definition ist erst dann voll gerechtfertigt, wenn sich diese Potenzen den Rechengesetzen einordnen, die für Potenzen mit positiven Exponenten gelten – Prinzip von der Permanenz[1]) der Rechengesetze in der Arithmetik –.

Für Potenzen mit negativen Exponenten gelten dieselben Rechengesetze wie für Potenzen mit positiven Exponenten. Die Beweise ergeben sich in jedem Fall, indem man auf die Definition zurückgeht.

1. Potenzgesetz: $$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n} = a^{-m+(-n)}.$$

2. Potenzgesetz: $$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{a^{-m}}{\frac{1}{a^n}} = a^{-m} \cdot a^n = a^{-m+n} = a^{-m-(-n)}.$$

Durch die Einführung negativer Exponenten wird die Ausführung der Division zweier Potenzen von gleicher Basis vereinfacht. Gleichgültig, ob m oder n größer ist, gilt stets nur das eine Gesetz
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

3. Potenzgesetz: $$(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$$ und Umkehrung.

4. Potenzgesetz: $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$$ und Umkehrung.

5. Potenzgesetz: $$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m\cdot n}}} = a^{m\cdot n}$$ und Umkehrung.

1) permanere (lat.) heißt verbleiben, erhalten bleiben. Das Permanenzprinzip ist 1867 von Hermann Hankel (1839—1873, Leipzig und Erlangen) als leitender Gesichtspunkt der Arithmetik aufgestellt worden.

Ist im 1., 2. und 5. Potenzgesetz nur ein Exponent negativ, so lassen sich die Beweise in gleicher Weise durchführen (siehe Aufgaben 15 bis 18).
Um nachzuweisen, daß die **Potenzgesetze auch für den Exponenten $n = 0$ gelten,** setzt man nach der Definition für a^0 den Wert 1 ein. Man findet beim 1. und 2. Potenzgesetz

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}; \quad \frac{a^m}{a^0} = \frac{a^m}{1} = a^m = a^{m-0}.$$

Ist auch der andere Exponent $m = 0$, so sagen die beiden Gesetze nur aus, daß $1 \cdot 1 = 1$ und $\frac{1}{1} = 1$ ist. Gleiche Formen nehmen das 3. und das 4. Potenzgesetz an, wenn der auftretende Exponent n gleich 0 wird: $1 = 1 \cdot 1$ und $1 = \frac{1}{1}$. Beim 5. Potenzgesetz erhält man beiderseits den Wert 1, gleichgültig, ob m oder n oder m und n gleich Null werden.

Daraus, daß auch die Potenzgesetze erhalten bleiben, ergibt sich die volle Zweckmäßigkeit der Erweiterung des Potenzbegriffs über den Exponenten 0 auf negative Exponenten durch die Definitionen $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $(a \neq 0)$.

Für positive und negative ganze Exponenten lauten also die Potenzgesetze:

1. $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$, **2.** $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$, **3.** $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$,

4. $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$, **5.** $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$.

Aufgaben

I. Der Exponent 0 und negative Exponenten

1. Setze die Zahlenfolgen $2^1, 2^2, 2^3, \ldots$; $10^1, 10^2, 10^3, \ldots$ und $a^1, a^2, a^3, \ldots$ weiter fort! Welche Veränderung erfährt der Exponent bei jedem neuen Glied? Durch welche Rechenoperation entsteht jedes Glied der Folge aus dem vorangehenden?

2. Setze die Zahlenfolgen $2^6, 2^5, 2^4, \ldots$; $10^6, 10^5, 10^4, \ldots$ und $a^6, a^5, a^4, \ldots$ weiter fort! Welche Veränderung erfährt der Exponent bei jedem neuen Glied? Durch welche Rechenoperation entsteht jedes Glied der Folge aus dem vorangehenden? Auf welche Exponenten kommt man schließlich?

3. Eine Zahlenfolge a^n kann nach steigenden Exponenten n, (z. B. $n = 1, 2, 3, \ldots$), und nach fallenden Exponenten n, (z. B. $n = 6, 5, 4, \ldots$), geordnet werden. Bilde Zahlenbeispiele für beide Fälle!

4. Ordne die Folge der Potenzfunktionen $y = x^n$

a) nach steigenden Exponenten $n = 1, 2, 3, \ldots$, **b)** nach fallenden Exponenten $n = 4, 3, 2, \ldots$!

Welche Veränderung erfährt dabei jedesmal der Exponent n? Auf welche Exponenten kommt man im Fall b? Durch welche Rechenoperationen entstehen die Einzelfunktionen auseinander?

II. Die Kurven $y = x^0$ und $y = x^{-n}$

5. Zeichne die Kurven $y = x^1$ und $y = x^0$. Durch welchen Punkt gehen beide Kurven?
Anleitung für die Kurve $y = x^0$ (Abb. 34). Für eine Wertetafel setze $x = -5, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +5$. Wie groß ist stets $y = x^0$? Für $x = 0$ ist die Funktion $y = x^0$ nicht erklärt; die Kurve $y = x^0$ existiert an der Stelle $x = 0$ nicht.

6. Zeichne die Kurve $y = x^{-1}$ und beschreibe Verlauf und Symmetrieeigenschaften der Kurve!

Anleitung (Abb. 35): Wertetafel der Funktion für $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$ und für $x = \pm \frac{5}{10}, \pm \frac{4}{10}, \pm \frac{3}{10}, \pm \frac{2}{10}, \pm \frac{1}{10}$.

Kurvenverlauf.

a) Aus wieviel kongruenten Ästen besteht die Hyperbel? In welchen Quadranten liegen die Äste der Hyperbel?

b) Wie ändert sich die Kurve, wenn man auf der x-Achse von $x = -5$ bis $-0,1$ und von $x = +0,1$ bis $+5$ fortschreitet?

Schreitet man auf der x-Achse von $x = +5$ weiter nach $x = +6, +7, \ldots$, so nähert sich der positive Ast der Hyperbel beständig der x-Achse, ohne jedoch mit dieser zusammenzufallen. Das gleiche gilt für den negativen Hyperbelast für Werte $x = -5, -6, -7, \ldots$ Die Kurve nähert sich asymptotisch der x-Achse, oder die Hyperbel hat die x-Achse zur Asymptote.[1])

c) Für $x = 0$ ist die Funktion nicht erklärt, an dieser Stelle existiert die Kurve nicht. Wie ist der Verlauf der Kurve bei Annäherung an die Stelle $x = 0$? Dazu stellen wir eine Wertetafel der Funktion für $x = \pm 1; \pm 0,1; \pm 0,01; \pm 0,001; \ldots$ auf.

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$ $\rightarrow$	0	$\leftarrow$ $+0,0001$	$+0,001$	$+0,01$	$+0,1$	$+1$
y	-1	-10	-100	$-1\,000$	$-10\,000$		$+10\,000$	$+1\,000$	$+100$	$+10$	$+1$

Die Wertetafel zeigt, daß y über alle Grenzen wächst, wenn x sich dem Wert 0 nähert. Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ hat für $x = 0$ eine Ausnahmestelle, die Funktion $y = \frac{1}{x}$ existiert an der Stelle $x = 0$ nicht.

d) Nähert man sich von negativen x-Werten her dem Nullpunkt, z. B. von $x = -1; -0,1; -0,01; \ldots$, so sind die Ordinatenwerte y der Funktion negativ; nähert man sich von positiven x-Werten her dem Nullpunkt, z. B. von $x = +1; +0,1; +0,01; \ldots$, so sind die Ordinatenwerte y der Funktion positiv. Schreitet man vom Abszissenwert $x = -5$ aus allmählich zu Abszissenwerten $x = -4, -3, -2, -1$ fort, so ändern sich die Ordinatenwerte y auch allmählich. Das gleiche geschieht, wenn man vom Abszissenwert $x = +5$ allmählich zu Werten $x = +4, +3, +2, +1$ zurückschreitet. Von einem zum andern Kurvenpunkt dieser Bereiche ist ein ständiger Zusammenhang der Kurve vorhanden. An der Stelle $x = 0$ reißt dieser Zusammenhang ab, an der Stelle $x = 0$ existiert die Kurve nicht!

Symmetrieeigenschaften.

Zentrische Symmetrie der beiden Kurvenäste zueinander. Welcher Punkt ist das Symmetriezentrum? Drehung der Kurve um das Symmetriezentrum um 180°!

Achsensymmetrie: Zu welcher Geraden liegen beide Äste der Kurve symmetrisch? Zu welcher Geraden liegt jeder Kurvenast symmetrisch?

Die Kurve $y = x^{-1}$ oder $y = \frac{1}{x}$ heißt eine gleichseitige Hyperbel.

7. Durch welche Gleichungen zwischen x und y können die Funktionen $y = x^{-1}$; $y = x^{-2}$; $y = x^{-3}$; ... in unentwickelter Form auch gegeben sein?

8. Zeichne die Kurve $y = x^{-2}$ und beschreibe ihren Verlauf und ihre Symmetrieeigenschaften!

Anleitung (Abb. 36): Wertetafel der Funktion für $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$ und für $x = \pm \frac{8}{10}, \pm \frac{7}{10}, \pm \frac{6}{10}, \pm \frac{5}{10}, \pm \frac{4}{10}, \pm \frac{3}{10}, \pm \frac{2}{10}, \pm \frac{1}{10}$.

Kurvenverlauf. Aus wieviel kongruenten Ästen besteht die Kurve? In welchen Quadranten liegen diese? Wie ändert sich die Kurve mit wachsendem x? An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion nicht erklärt; an der Stelle $x = 0$ existiert die Kurve nicht!

Symmetrieeigenschaften. Achsensymmetrie, Umklappen der Kurve um die y-Achse!

---

1) asymptotos (gr.) heißt nicht zusammenfallend.

9. Stelle die Folge der geraden Potenzfunktionen $y = x^{-2n}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, für $n = 0, 1, 2$ geometrisch dar (vgl. Abb. 36)!

10. Stelle die Folge der ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{-(2n+1)}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, für $n = 0, 1, 2$ geometrisch dar (vgl. Abb. 35)!

III. Die Potenzfunktionen $y = x^n$, (n eine positive oder negative ganze Zahl)

11. Stelle die Folge der geraden Potenzfunktionen $y = x^{2n}$, $(n = \ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots)$, für $n = -2, -1, 0, +1, +2$ geometrisch dar (vgl. Abb. 37)!

12. Stelle die Folge der ungeraden Potenzfunktionen $y = x^{2n+1}$, $(n = \ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots)$, für $n = -2, -1, 0, +1, +2$ geometrisch dar (vgl. Abb. 38)!

13. In den I. Quadranten eines Achsenkreuzes ist ein Einheitsquadrat so eingezeichnet, daß es den beiden Koordinatenachsen anliegt. Verwandle das Quadrat in flächengleiche Rechtecke, die gleichfalls den beiden Koordinatenachsen anliegen! Wo liegen die freien Ecken dieser Rechtecke?

14. Zeichne die Kurven $y = x^{-1}$; $y = 2 \cdot x^{-1}$; $y = 3 \cdot x^{-1}$; $y = 4 \cdot x^{-1}$ in dasselbe Achsenkreuz! Welche Eigenschaft zeigt die Kurvenschar $xy = n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$?

Anleitung. Wertetafel:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+3$
$y = x^{-1}$	.	$-\frac{1}{2}$	-1	.	.		4	2	1	.	.
$y = 2 \cdot x^{-1}$	.	-1	-2	.	.		8	4	2	.	.
$y = 3 \cdot x^{-1}$	.	$-1\frac{1}{2}$	-3	.	.		12	6	3	.	.
$y = 4 \cdot x^{-1}$	.	-2	-4	.	.		16	8	4	.	.

Wie kann man die Kurvenschar $xy = n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, als Multiplikationstafel verwenden? Schalte freihändig die Kurven $xy = 1{,}5$; $xy = 2{,}5$; $xy = 3{,}5$ in der Kurvenschar dazwischen! Durch welche geometrische Transformation entstehen die Hyperbeln $y = \frac{2}{x}$; $y = \frac{3}{x}$; $y = \frac{4}{x}$ aus der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$?

IV. Die Rechengesetze für Potenzen mit negativen Exponenten und dem Exponenten 0

15. Die Zweckmäßigkeit der Erweiterung des Potenzbegriffes auf die Exponenten 0 und $-n$ durch die Definitionen $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $(a \neq 0)$, sieht man am eindringlichsten durch das Gegenbeispiel einer unzweckmäßigen Festsetzung. Auf welche Widersprüche würden z. B. die Definitionen $a^0 = 0$ und $a^{-n} = -a^n$, $(a \neq 0)$, schon für $a = 2$ und $n = 3; 2; 1; 0$ führen?

16. Erläutere das 1. Potenzgesetz für

a) $2^{-5} \cdot 2^{-3}$; $10^{-5} \cdot 10^{-3}$; $a^{-5} \cdot a^{-3}$; $a^{-m} \cdot a^{-n}$ b) $2^5 \cdot 2^{-3}$; $a^5 \cdot a^{-3}$; $10^{-5} \cdot 10^3$; $a^{-m} \cdot a^n$!

17. Erläutere das 2. Potenzgesetz für

a) $\frac{2^{-5}}{2^{-3}}$; $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$; $\frac{a^{-5}}{a^{-3}}$; $\frac{a^{-m}}{a^{-n}}$ b) $\frac{2^5}{2^{-3}}$; $\frac{a^5}{a^{-3}}$; $\frac{10^{-5}}{10^3}$; $\frac{a^{-m}}{a^n}$!

18. Erläutere

a) das 3. Potenzgesetz für $(2 \cdot 3)^{-3}$; $(2 \cdot 10)^{-3}$; $(a \cdot b)^{-3}$; $(a \cdot b)^{-n}$

b) das 4. Potenzgesetz für $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; $\left(\frac{2}{10}\right)^{-3}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$

c) das 5. Potenzgesetz für $(a^3)^{-2}$; $(a^{-3})^2$; $(a^{-3})^{-2}$; $(a^{-m})^{-n}$!

19. Zeige die Gültigkeit der Potenzgesetze für $a^3 \cdot a^0$; $a^{-5} \cdot a^0$; $\frac{a^4}{a^0}$; $\frac{a^0}{a^2}$!

20. Auf welche Identitäten führen nach den Potenzgesetzen die folgenden Aufgaben:

$$(a \cdot b)^0; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^0; \quad (a^3)^0; \quad (a^0)^3; \quad (a^0)^0; \quad a^0 \cdot b^0; \quad \frac{a^0}{b^0} \quad (a \text{ und } b \neq 0)\,?$$

V. Das Rechnen mit Potenzen negativer Exponenten

Berechne

21. a^{-1}; a^{-2}; $(-a)^{-1}$; $(-a)^{-2}$; $-a^{-1}$; $-a^{-2}$

22. 1^{-1}; 1^{-2}; $(-1)^{-1}$; $(-1)^{-2}$; -1^{-1}; -1^{-2}

23. 3^{-1}; 3^{-4}; 4^{-3}; $(-3)^{-4}$; -3^{-4}

24. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$; $0{,}1^{-1}$; $0{,}3^{-2}$; $1{,}2^{-1}$

25. $x^{-5} \cdot x^5$; $x^{-5} \cdot x^6$; $x^{-6} \cdot x^5$; $(xy)^{-3}$; $x \cdot y^{-3}$

26. $p^5 \cdot (pq)^{-3}$; $p^5 : (pq)^{-3}$; $p^{-5} \cdot (pq)^{-3}$; $p^{-5} : (pq)^{-3}$; $p^{-m} : (pq)^{-n}$

27. $(a+b)^{-2}$; $a^2(a-b)^{-3}$; $a^2 : (a-b)^{-3}$; $(a+b)(a-b)^{-1}$; $a^m \cdot (a+b)^{-n}$

28. $\left(\frac{u}{v}\right)^{-9}$; $u^8 \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^{-7}$; $3v^5 : \left(\frac{u}{v}\right)^{-3}$; $25x^2 : \left(5\frac{x}{y}\right)^{-3}$; $(pq)^m \left(\frac{3p}{q}\right)^{-n}$

29. $(ab)^{-5m}$; $\left(\frac{c}{d}\right)^{-3q}$; $(5xy)^{-3a} : \left(\frac{10y}{3x}\right)^{-3a}$; $2(a^2-b^2)^{-m} \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-2n}$

30. $(x^{-3})^5$; $(x^3)^{-5}$; $(x^{-3})^{-5}$; $\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{3}\right]^5$; $\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{-3}\right]^{-5}$

31. $[(2a)^{-2}]^3$; $[(2a)^3]^{-2}$; $[(2a)^{-m}]^n$; $[(2a)^m]^{-n}$; $[(2a)^{-m}]^{-n}$

32. $21y^3 + 35y^{-2} - 14y^0 + 28y^{-1}$; $2^{-4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - \left(-\frac{4}{3}\right)^{-1}$

33. $ax^0 + bx^{-1} + cx^{-2}$; $b \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 + 2p \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{-1} - 9q \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^{-2}$!

34. Schreibe die Summe
$7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$ in kürzester Form!

35. Schreibe die folgenden Zahlen als Summen von Zehnerpotenzen: 953,1; 70,52; 0,364; 0,002 85! Welches allgemeine Gesetz wird bei den Regeln für die Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen angewandt?

36. Schreibe die folgenden Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen:

a) 953 000; 72 000; 1 040 000; 762 000 000; 340 000 000; 300 000; 299 800

b) 0,364; 0,003 64; 0,000 364; 0,000 036; 0,000 009!

Anleitung: $395\,000 = 3{,}95 \cdot 10^5$; $0{,}000\,525 = 5{,}25 \cdot 10^{-4}$; $0{,}000\,004 = 4 \cdot 10^{-6}$.

37. Gib die Längeneinheiten
1 μ = 1 Mikron[1]) = 0,001 mm,
1 mμ = 1 Millimikron = 0,000 001 mm,
1 ÅE = 1 Ångström-Einheit[2]) = 0,000 000 01 cm = 0,1 mμ,
1 XE = 1 X-Einheit = 0,001 ÅE
in Zehnerpotenzen von m, cm und von mm an!

1) mikron (gr., von mikros, Vorsilbe mikro-) heißt klein.
2) A. J. Ångström (1814—1874), Schweden, ein um die Spektralforschung verdienter Physiker.

VI. Angewandte Aufgaben

38. Zuweilen werden die Einheiten der Geschwindigkeit und Beschleunigung in der Form $m \cdot s^{-1}$ und $m \cdot s^{-2}$ geschrieben. Erkläre die Bedeutung und Entstehung dieser Bezeichnungen!

39. Die umständliche Schreibweise sehr kleiner Größen in Dezimalbruchform ersetzt man oft durch ein Produkt aus einer einstelligen Dezimalzahl und abgetrennten Zehnerpotenzen mit negativen Exponenten (vgl. Aufg. 36). Benutze diese Schreibweise für die Angabe der Wellenlänge des gelben Lichtes (D-Linie) von 0,000 589 mm!

40. Dichte einiger Gase.

1 Liter	Luft	hat bei 0°C und 760 Torr die Masse	1,293 g;	
1 „	Wasserstoff	„ „ „ „ „ „ „ „	0,09 g,	(Molekulargewicht 2);
1 „	Sauerstoff	„ „ „ „ „ „ „ „	1,43 g,	(„ 32);
1 „	Stickstoff	„ „ „ „ „ „ „ „	1,26 g,	(„ 28);
1 „	Kohlendioxyd	„ „ „ „ „ „ „ „	1,98 g,	(„ 44);
1 „	Chlor	„ „ „ „ „ „ „ „	3,22 g,	(„ 71);
1 „	Kohlenoxyd	„ „ „ „ „ „ „ „	1,25 g,	(„ 28).

Gib die Dichte in g/cm^3 unter Abtrennung von 10^{-3} an!

41. Berechne aus der Loschmidtschen Zahl N ($N = 2{,}70 \cdot 10^{19}$ Moleküle eines beliebigen Gases sind bei 0°C und einem Druck von 760 Torr in 1 cm^3 enthalten) und den in Aufgabe 40 ermittelten Gasdichten die Masse eines Wasserstoffatoms in g! Wieviel Moleküle enthält ein Mol eines Gases (ein Mol eines Stoffes sind soviel g, wie sein Molekulargewicht angibt)?

$1{,}67 \cdot 10^{-24}$

42. Stofferfüllter Raum. Auf Grund von Versuchen und Berechnungen hat man den Durchmesser eines Wasserstoffatoms zu $d = 1{,}06 \cdot 10^{-8}$ cm ermittelt. (Näherungswert $d \approx 1$ ÅE $= 0{,}1$ mμ.)

a) Wie groß wäre der Rauminhalt eines Atoms, wenn man sich dieses als kleine Kugel vorstellt? ($\pi \approx 3$.)

b) Bedenke, daß 1 cm^3 Wasserstoffgas bei 0°C und 760 Torr $2{,}70 \cdot 10^{19}$ Moleküle zu je zwei Atomen enthält! Wie groß wäre dann der von den Molekülen erfüllte Teil für 1 cm^3? Da die Atome keineswegs stofferfüllte Kugeln sind, ist auch dieser errechnete Wert noch viel zu groß.

43. Masse des Elektrons.

a) Die Masse eines Wasserstoffatoms ist nach Aufgabe 41 gleich $1{,}6727 \cdot 10^{-24}$ g. Schreibe diese Zahl als Zehnerbruch und mit abgetrennten Zehnerpotenzen in kg!

b) Die Masse eines Elektrons, des kleinsten Elektrizitätsteilchens, ist davon etwa der 1838. Teil. Wie groß ist sie in g und in kg (auf 2 Stellen genau)?

44. Astronomische Zahlen. Sonnendurchmesser 1 391 000 km, mittlerer Erddurchmesser 12 740 km, Monddurchmesser 3 476 km; mittlere Entfernung der Erde von der Sonne 149 500 000 km, mittlere Entfernung des Mondes von der Erde 384 400 km.
Gib unter Verwendung abgetrennter Zehnerpotenzen die obengenannten Zahlen als Bruchteile des Sonnendurchmessers an (auf 2 Stellen genau)!

45. Gib die Entfernung der Erde von der Sonne in Lichtjahren an! Vgl. dazu Abschn. 16. Aufg. 45!

b) Potenzen mit gebrochenen Exponenten

VII. Die Wurzelfunktion

18. Die Wurzelfunktion $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$

a) Die Zahl $\sqrt[n]{a}$

1. Die 2. Wurzel oder Quadratwurzel

Beispiel: Wie groß ist die Seite eines Quadrats von 16 cm² Flächeninhalt?
Als Ansatz erhält man die Bestimmungsgleichung $x^2 = 16$, als Lösung der Aufgabe

$$x_1 = 4.$$

Die zweite Lösung der Gleichung, $x_2 = -4$, genügt wohl dem Ansatz, aber nicht den Bedingungen der Aufgabe.

Wir betrachten die Identität $\qquad 4^2 = 16.$

Als Potenz betrachtet ist die Basis 4 und der Exponent 2 gegeben, der Wert der Potenz gesucht, es ist $\qquad 4^2 = y.$

Umgekehrt kann der Potenzwert 16 und der Exponent 2 gegeben sein, dann ist die Basis gesucht, es ist $\qquad y^2 = 16.$

Man schreibt dann für die Basis $\qquad y = \sqrt[2]{16}$, (lies: zweite Wurzel aus 16).

Die gesuchte Basis y kann man in zwei Formen darstellen,

$$\text{in Potenzform } \underset{\text{Basis}}{y}^{\overset{\text{Potenzexponent}}{2}} = \underset{\text{Potenzwert}}{16} \quad \text{und} \quad \text{in Wurzelform } \underset{\text{Wurzelwert}}{y} = \sqrt[\overset{\text{Wurzelexponent}}{2}]{\underset{\text{Radikand}}{16}}.$$

Die 2. Wurzel nennt man wegen ihrer geometrischen Bedeutung **Quadratwurzel.**

> **Quadratwurzel aus einer Zahl a heißt die Zahl, deren Quadrat gleich a ist.**
>
> **In Wurzelform** $\boldsymbol{y = \sqrt[2]{a}}$, $\qquad$ **in Potenzform** $\boldsymbol{y^2 = a}$;
>
> **oder** $\boldsymbol{\left(\sqrt[2]{a}\right)^2 = a}$.

Man erhält die Quadratwurzel aus einer Zahl a, indem man a in zwei gleiche Faktoren y zerlegt: $y \cdot y = a$. Der Faktor y ist die Quadratwurzel aus a, es ist $y = \sqrt[2]{a}$.
Zerlegt man eine positive Zahl, z. B. $a = 36$, in zwei gleiche Faktoren y, so erhält man $(+6) \cdot (+6) = 36$, d. h. $y_1 = +6$, aber auch $(-6) \cdot (-6) = 36$, d. h. $y_2 = -6$.
Es ist also $\sqrt[2]{36} = \pm 6$ (lies: plus oder minus 6), ebenso ist $\sqrt[2]{16} = \pm 4$.

Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl a ergibt zwei Werte, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden. Es ist $y = \pm \sqrt[2]{a}$, $(a > 0)$.

Durch das Wurzelvorzeichen + oder − wird festgelegt, welcher Wert der Quadratwurzel gemeint ist. Steht vor dem Wurzelzeichen kein Vorzeichen, so ist der positive Wurzelwert gemeint.

Eine *negative* Zahl, z. B. $a = -36$, läßt sich *nicht* in zwei gleiche Faktoren zerlegen, denn sowohl $(+6) \cdot (+6)$ als auch $(-6) \cdot (-6)$ sind gleich $+36$.

Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl existiert nicht.

2. Die 3. Wurzel oder Kubikwurzel

Beispiel: Wie groß ist die Grundkante eines Würfels von 8 cm³ Rauminhalt?
Als Ansatz erhält man die Bestimmungsgleichung $x^3 = 8$, als Lösung der Aufgabe $x_1 = \sqrt[3]{8}$ (lies: dritte Wurzel aus 8) oder $x_1 = 2$.

Die 3. Wurzel nennt man wegen ihrer geometrischen Bedeutung auch **Kubikwurzel**[1]**)**.

> **Dritte Wurzel (Kubikwurzel) aus einer Zahl a heißt die Zahl, deren dritte Potenz gleich a ist.**
>
> **In Wurzelform** $y = \sqrt[3]{a}$, **in Potenzform** $y^3 = a$;
>
> **oder** $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

Man erhält die dritte Wurzel aus einer Zahl a, indem man a in drei gleiche Faktoren y zerlegt: $y \cdot y \cdot y = a$. Der Faktor y ist die 3. Wurzel aus a, es ist $y = \sqrt[3]{a}$.

3. Die n-te Wurzel

> **n-te Wurzel aus einer Zahl a heißt die Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist.**
>
> **In Wurzelform** $y = \sqrt[n]{a}$, **in Potenzform:** $y^n = a$;
>
> **oder** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Bei der Quadratwurzel läßt man zur Vereinfachung den Wurzelexponenten 2 weg.

4. Das Radizieren

Die Rechenart des Wurzelziehens heißt *Radizieren*[2]). Die Zahl unter dem Wurzelzeichen heißt *Radikand*[2]). **Das Radizieren ist eine Umkehrung des Potenzierens.** Radizieren und Potenzieren einer Zahl mit demselben Exponenten heben einander auf, es ist

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Ist der Wurzelexponent gerade, so heißt auch die Wurzel *gerade*. Beispiele sind $\sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a}$; ...; $\sqrt[2n]{a}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ist der Wurzelexponent ungerade, so heißt auch die Wurzel *ungerade*. Beispiele sind $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[5]{a}$; ...; $\sqrt[2n+1]{a}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

---

1) Kubus (lat.) heißt der Würfel.

2) radix (lat.) heißt die Wurzel. Radikand (lat.) ist die Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll. Das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ ist aus dem Anfangsbuchstaben von radix entstanden.

b) Irrationale Wurzeln

1. Rationale und irrationale Zahlen

An Zahlen haben wir ganze Zahlen, gemeine Brüche und Dezimalbrüche kennengelernt. Beispiele sind $+7$; -15; $+\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{7}$; $-\frac{14}{5}$; $+0{,}2$; $-0{,}33\ldots$; $-2{,}5$; $+3{,}66\ldots$.

Ganze Zahlen lassen sich als Brüche mit dem Nenner 1 darstellen, z. B. $+7 = +\frac{7}{1}$; $-15 = -\frac{15}{1}$.

Dezimalbrüche können endlich oder unendlich sein, z. B. $+0{,}2$; $-2{,}5$ und $-0{,}33\ldots$; $+3{,}66\ldots$. Jeder endliche Dezimalbruch läßt sich in einen gemeinen Bruch $\frac{p}{q}$ verwandeln. Hierin sollen p und q ganze Zahlen sein, die keinen gemeinsamen Teiler haben oder teilerfremd sind; der Bruch $\frac{p}{q}$ läßt sich also nicht mehr kürzen. Beispiele sind $+0{,}2 = +\frac{1}{5}$; $-2{,}5 = -\frac{5}{2}$.

Unendliche Dezimalbrüche sind entweder periodisch oder unperiodisch, z. B. $-0{,}\bar{3}\ldots$; $+0{,}\bar{6}\ldots$ und $0{,}145\ldots$; $-0{,}827\ldots$. Jeder periodische Dezimalbruch läßt sich in einen gemeinen Bruch $\frac{p}{q}$ verwandeln, (p und q teilerfremde ganze Zahlen). Beispiele sind in den Aufgaben 7 und 8 behandelt. Bei unperiodischen unendlichen Dezimalbrüchen folgen die Ziffern hinter dem Komma ohne erkennbare Ordnung aufeinander. Unperiodische Dezimalbrüche lassen sich nicht in gemeine Brüche verwandeln.

Jede ganze Zahl und jeder gemeine Bruch aus zwei ganzen Zahlen lassen sich als Quotient $\frac{p}{q}$, (p und q teilerfremd), schreiben. Zahlen, die sich als Quotient $\frac{p}{q}$ zweier teilerfremder ganzer Zahlen darstellen lassen, heißen **rationale[1]) Zahlen.** Die ganzen Zahlen und gemeinen Brüche sind rationale Zahlen, jeder endliche und jeder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl.

Jeder unperiodische unendliche Dezimalbruch heißt eine Irrationalzahl[2]).

Irrationalzahlen lassen sich nicht als Quotient $\frac{p}{q}$ zweier ganzen Zahlen darstellen. Wie entstehen solche Irrationalzahlen?

2. Irrationale Quadratwurzeln

Rationale Quadratwurzeln. Die Quadratwurzel aus einer Quadratzahl ergibt stets rationale Zahlen als Wurzelwerte. Rationale Quadratwurzeln sind z. B. $\sqrt{1} = \pm 1$; $\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt{81} = \pm 9$; $\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$; $\sqrt{1{,}44} = \pm 1{,}2$ usw.

Welchen Wert hat $\sqrt{2}$? $\sqrt{2}$ ergibt als Wurzelwert sicher keine ganze Zahl, denn $1^2 = 1$ ist als Radikand zu klein und $2^2 = 4$ bereits zu groß.

---

1) ratio (lat.) bedeutet das Verhältnis einer Rechnung, das Zahlenverhältnis, der Quotient zweier ganzen Zahlen.

2) irrational (lat.; ir-, in- als Vorsilbe der Verneinung) heißt nicht-rational.

Wir wollen annehmen, $\sqrt{2}$ sei gleich einem gemeinen Bruch $\frac{p}{q}$, wo $q \neq 1$ ist und p und q teilerfremde ganze Zahlen sind. Dann ist

in Wurzelform $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, in Potenzform $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Aus $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ würde folgen, daß p^2 durch q^2 und damit p durch q teilbar wäre. Da q nicht gleich 1 ist, müßte q gegen p sich kürzen lassen. Die getroffene Annahme führt also zu einem Widerspruch, d. h. $\sqrt{2}$ kann nicht gleich einem gemeinen Bruch $\frac{p}{q}$ sein.

$\sqrt{2}$ ergibt keine rationale Zahl, $\sqrt{2}$ ergibt keinen endlichen oder periodischen Dezimalbruch. $\sqrt{2}$ ergibt einen unperiodischen unendlichen Dezimalbruch. $\sqrt{2}$ ist eine **irrationale Quadratwurzel,** ihr Wurzelwert ist eine **Irrationalzahl.**

Berechnung des Wertes von $\sqrt{2}$ durch Einschachteln. Der Wert einer irrationalen Quadratwurzel läßt sich durch planvolles Einschachteln zwischen rationale Quadratwurzeln mit jeder geforderten Genauigkeit bestimmen. Als Beispiel sei $y = \sqrt{2}$ bestimmt.

Der Radikand 2 liegt zwischen den Quadratzahlen	Also liegt der Wert von $\sqrt{2}$ zwischen den rationalen Zahlen
1^2 und 2^2 oder 1 und 4; es ist $1 < 2 < 4$.	1 und 2; $1 < \sqrt{2} < 2$.
$1{,}4^2$ und $1{,}5^2$ oder 1,96 und 2,25; es ist $1{,}96 < 2 < 2{,}25$.	1,4 und 1,5; $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.
$1{,}41^2$ und $1{,}42^2$ oder 1,9881 und 2,0164; es ist $1{,}9881 < 2 < 2{,}0164$.	1,41 und 1,42; $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
$1{,}414^2$ und $1{,}415^2$ oder 1,999396 und 2,002225; es ist $1{,}999396 < 2 < 2{,}002225$.	1,414 und 1,415; $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

Dies Verfahren kann man beliebig weit fortsetzen; jede neue Stelle des Wurzelwertes läßt sich aus den vorangegangenen Quadratzahlen durch Interpolieren abschätzen.

Ergebnis: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Quadratwurzel. Ihr Wurzelwert ist eine Irrationalzahl und läßt sich mit jeder geforderten Genauigkeit bestimmen, $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$. Für praktisches Rechnen stellt man ihren Wurzelwert je nach der geforderten Genauigkeit durch ihre rationalen Näherungswerte dar; auf 3 Stellen genau (Rechenstab) ist $\sqrt{2} = 1{,}41$, auf 4 Stellen (Quadrattafel) $\sqrt{2} = 1{,}414$.

Irrationale Quadratwurzeln. In gleicher Weise kann man zeigen: Die Quadratwurzel aus jeder positiven Zahl, welche keine Quadratzahl ist, ist **irrational.**

Die Ziffern einer Irrationalzahl bilden einen unperiodischen unendlichen Dezimalbruch. In diesem folgen die Ziffern hinter dem Komma einander nach einem bestimmten Bildungsgesetz, wie es die Berechnung von $\sqrt{2}$ zeigt, die Ordnung der Ziffernfolge ist jedoch nicht erkennbar.

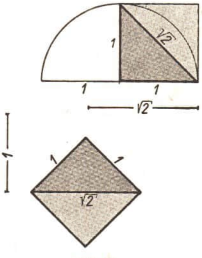


Abb. 39

Jede irrationale Quadratwurzel läßt sich durch eine Strecke geometrisch veranschaulichen. In Abb. 39 sind z. B. Strecken von der Länge $\sqrt{2}$ cm nach dem pythagoreischen Lehrsatz und dem Kathetensatz geometrisch konstruiert. Die Diagonale eines Quadrats von der Seite 1 cm hat eine Länge von $\sqrt{2}$ cm. In ähnlicher Weise läßt sich jede irrationale Quadratwurzel nach dem pythagoreischen Lehrsatz, dem Kathetensatz oder Höhensatz durch eine Strecke geometrisch veranschaulichen. (Vgl. dazu Abschn. 29.)

3. Irrationale Wurzeln

Kubikwurzeln. Die Kubikwurzel aus einer Kubikzahl ist rational. Rationale Kubikwurzeln sind z. B. $\sqrt[3]{8}=2$; $\sqrt[3]{27}=3$; $\sqrt[3]{64}=4$; $\sqrt[3]{-27}=-3$; $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{2}{5}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}=-\frac{1}{4}$; $\sqrt[3]{1{,}331}=1{,}1$; $\sqrt[3]{-1{,}728}=-1{,}2$ usw.

Die Kubikwurzel aus jeder positiven oder negativen Zahl, die keine Kubikzahl ist, ist **irrational**. Der Wert einer irrationalen Kubikwurzel läßt sich durch Einschachteln zwischen rationale Kubikwurzeln mit jeder geforderten Genauigkeit bestimmen. Als Beispiel sei $y=\sqrt[3]{10}$ bestimmt.

Der Radikand 10 liegt zwischen den Kubikzahlen	Also liegt der Wert von $\sqrt[3]{10}$ zwischen den rationalen Zahlen
2^3 und 3^3 oder 8 und 27; es ist $8<10<27$.	2 und 3; $2<\sqrt[3]{10}<3$.
$2{,}1^3$ und $2{,}2^3$ oder 9,261 und 10,648; es ist $9{,}261<10<10{,}648$.	2,1 und 2,2; $2{,}1<\sqrt[3]{10}<2{,}2$.
$2{,}15^3$ und $2{,}16^3$ oder 9,938375 und 10,077696; es ist $9{,}938375<10<10{,}077696$.	2,15 und 2,16; $2{,}15<\sqrt[3]{10}<2{,}16$.
$2{,}154^3$ und $2{,}155^3$; es ist $9{,}993948264<10<10{,}028423875$.	2,154 und 2,155; $2{,}154<\sqrt[3]{10}<2{,}155$.

Dies Verfahren läßt sich beliebig weit fortsetzen; jede neue Stelle des Wurzelwertes läßt sich aus den vorangegangenen Kubikzahlen durch Interpolieren abschätzen.

$\sqrt[3]{10}$ ist eine irrationale Kubikwurzel, es ist $\sqrt[3]{10} = 2{,}154\ldots$. Näherungswerte von $\sqrt[3]{10}$ für praktisches Rechnen sind auf 3 Stellen genau (Rechenstab) $\sqrt[3]{10} = 2{,}15$, auf 4 Stellen (Kubiktafel) $\sqrt[3]{10} = 2{,}154$.

Die Ergebnisse für Quadratwurzeln lassen sich auf sämtliche geraden Wurzeln, die Ergebnisse für Kubikwurzeln auf sämtliche ungeraden Wurzeln übertragen.

4. Die reellen Zahlen

Auf der Zahlengeraden liegen alle positiven und negativen ganzen Zahlen, gemeinen Brüche, endlichen und periodisch-unendlichen Dezimalbrüche, das heißt alle rationalen Zahlen; außerdem alle positiven und negativen unperiodisch-unendlichen Dezimalbrüche, das heißt alle irrationalen Zahlen. Rationale und irrationale Zahlen heißen **reelle** Zahlen.

Die Zahlengerade trägt die Gesamtheit der reellen Zahlen, sie heißt daher auch die **reelle** Zahlengerade.

c) Die Wurzelfunktion $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$

1. Die Funktion $y = \pm\sqrt{x}$

Wertetafel der Funktion:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,25	0,50	0,75	1	2	3	4	5
y	nicht vorhanden					0	$\pm 0{,}5$	$\pm 0{,}71$	$\pm 0{,}87$	± 1	$\pm 1{,}41$	$\pm 1{,}73$	± 2	$\pm 2{,}24$

Zu negativen x-Werten gibt es keine reellen y-Werte. Die Funktion $y = \pm\sqrt{x}$ ist nur für positive x-Werte erklärt. Zu jedem positiven x-Wert gehören zwei Werte der Quadratwurzel, die Funktion ist im Bereich $x > 0$ zweideutig. Die Funktion $y = \pm\sqrt{x}$ ist eine **mehrdeutige Funktion.**

Die Kurve $y = \pm\sqrt{x}$ ist in Abb. 40 dargestellt. Sie besteht im erklärten Bereich aus zwei Zweigen. Zu demselben x-Wert gehört ein Funktionswert $y > 0$ für den positiven Zweig $y = +\sqrt{x}$ der Kurve (I. Quadrant) und ein Funktionswert $y < 0$ für den negativen Zweig $y = -\sqrt{x}$ der Kurve (IV. Quadrant). Beide Zweige der Kurve hängen im Nullpunkt zusammen. Die Funktionswerte y des positiven Zweiges der Kurve heißen die Hauptwerte der Funktion.

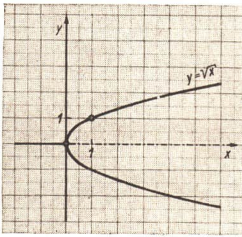


Abb. 40. Die Funktion $y = \pm\sqrt{x}$

Die Kurve $y = \pm\sqrt{x}$ ist eine quadratische Parabel, die symmetrisch zur x-Achse liegt. Ihr Scheitel ist der Nullpunkt (0; 0). Der positive Zweig der Kurve geht durch den Festpunkt (1; 1).

2. Die geraden Wurzelfunktionen $y = \pm\sqrt[2n]{x}$,
$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Ihr Verhalten und ihr Kurvenverlauf entsprechen dem der Funktion $y = \pm\sqrt{x}$ (siehe Abb. 41).

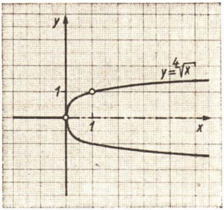


Abb. 41. Die Funktion $y = \pm\sqrt[4]{x}$

3. Die ungeraden Wurzelfunktionen $y = \sqrt[2n+1]{x}$,
$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$. Wertetafel der Funktion:

x	-5	$-4{,}5$	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}75$	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1
y	$-1{,}71$	$-1{,}65$	$-1{,}58$	$-1{,}52$	$-1{,}44$	$-1{,}36$	$-1{,}26$	$-1{,}20$	$-1{,}14$	$-1{,}08$	-1

x	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$+0{,}25$	$+0{,}5$	$+0{,}75$	$+1$	$+1{,}25$	$-1{,}5$	$\ldots$
y	$-0{,}91$	$-0{,}79$	$-0{,}63$	0	$+0{,}63$	$+0{,}79$	$+0{,}91$	$+1$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Zu jedem x-Wert gehört ein y-Wert. Die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ ist eine **eindeutige Funktion** und für den ganzen x-Bereich erklärt.

Die Kurve $y = \sqrt[3]{x}$ (Abb. 42) liegt im III. und I. Quadranten, symmetrisch zum Nullpunkt als Symmetriezentrum. Sie ist für wachsendes x beständig steigend.

Kurvenverlauf und Eigenschaften der ungeraden Wurzelfunktionen $y = \sqrt[2n+1]{x}$, $(n = 2, 3, \ldots)$, entsprechen dem der Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ (Abb. 42).

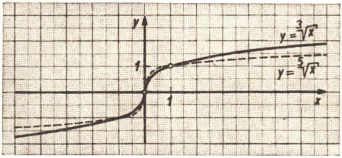


Abb. 42. Die Funktionen $y = \sqrt[3]{x}$ und $y = \sqrt[5]{x}$

Aufgaben

I. Die Zahl $\sqrt[n]{a}$

1. Wie groß ist die Seite eines Quadrats mit dem Flächeninhalt

a) $4\ cm^2$ **b)** $25\ cm^2$ **c)** $\frac{1}{4}\ cm^2$ **d)** $\frac{4}{25}\ cm^2$ **e)** $0{,}25\ cm^2$ **f)** $1{,}44\ cm^2$ **g)** $400\ cm^2$?

2. Wie heißen die folgenden Gleichungen in Wurzelform:

$y^2 = 16$; $y^2 = 81$; $y^2 = 144$; $y^2 = 400$; $y^2 = 256$; $y^2 = \frac{9}{16}$; $y^2 = 0{,}25$; $y^2 = 0{,}01$; $y^2 = a$?

3. Wie heißen die folgenden Gleichungen in Potenzform:

$y = \pm\sqrt[2]{9}$; $y = \pm\sqrt[2]{64}$; $y = \pm\sqrt[2]{81}$; $y = \pm\sqrt[2]{144}$; $y = \pm\sqrt[2]{289}$; $y = \pm\sqrt[2]{324}$;
$y = \pm\sqrt[2]{225}$; $y = \pm\sqrt[2]{400}$; $y = \pm\sqrt[2]{900}$; $y = \pm\sqrt[2]{0{,}49}$; $y = \pm\sqrt[2]{0{,}04}$; $y = \pm\sqrt[2]{a}$?

4. Zerlege die folgenden Zahlen in zwei gleiche Faktoren: 36; 49; 121; 196; 169; 1 600; 2 500; 4 900; 0,81; 0,09; 0,04; 144; 1,44; 225; 2,25; 625; 6,25; 6 400; 64; 0,64; a^2! Warum heißen die Zahlen Quadratzahlen? Wie groß sind ihre Quadratwurzeln?

5. Zerlege die folgenden Zahlen in drei gleiche Faktoren: 8; 27; 125; — 8; — 64; — 216; 1 000; — 8 000; 2 700; 0,001; — 0,008; 0,027; $+a^3$; $-a^3$! Warum heißen diese Zahlen Kubikzahlen? Wie groß sind ihre Kubikwurzeln?

6. Wie groß sind die folgenden Wurzeln: $y = \pm\sqrt[4]{16}$; $y = \pm\sqrt[4]{81}$; $y = \pm\sqrt[4]{625}$; $y = \sqrt[5]{243}$; $y = \pm\sqrt[8]{256}$; $y = \sqrt[5]{32}$; $y = \pm\sqrt[4]{a^4}$; $y = \sqrt[5]{a^5}$; $y = \pm\sqrt[8]{a^8}$; $y = \sqrt[n]{a^n}$?

II. Irrationale Wurzeln

7. Verwandle die folgenden periodischen Dezimalbrüche in gemeine Brüche:

a) Reinperiodische Dezimalbrüche $0,\overline{3}\ldots$; $0,\overline{6}\ldots$; $2,\overline{63}\ldots$; $3,\overline{09}\ldots$; $4,\overline{27}\ldots$; $5,\overline{405}\ldots$

b) Vorperiodische Dezimalbrüche $0,3\overline{18}\ldots$; $4,7\overline{45}\ldots$; $2,0\overline{405}\ldots$!

Anleitung: $3,\overline{54}\ldots$

$$\begin{array}{rl|l} x = & 0,5454\ldots & - \\ 100x = & 54,5454\ldots & + \\ \hline 99x = & 54 & \\ x = & \frac{54}{99} = \frac{6}{11} & \end{array}$$

$$3,\overline{54}\ldots = 3\tfrac{6}{11}$$

$5,2\overline{27}\ldots$

$$\begin{array}{rl|l} x = & 0,227\,27\ldots & \\ 10x = & 2,2727\ldots & - \\ 1\,000x = & 227,2727\ldots & + \\ \hline 990x = & 225 & \\ x = & \frac{225}{990} = \frac{5}{22} & \end{array}$$

$$5,2\overline{27}\ldots = 5\tfrac{5}{22}$$

8. Warum lassen sich unperiodische unendliche Dezimalbrüche nicht in gemeine Brüche verwandeln?

9. Wie groß sind die Quadratwurzeln aus den folgenden Zahlen:

a) 529; 5,29; 0,0529; 3 481; 34,81; 0,3481; 0,9025; 90,25; 9025; 324 900; 688 900; 65,61; 0,7744; 0,002 809?

b) 67,08; 6,708; 73,44; 7,344; 1 232; 12 320; 3 204; 32 040; 9 082; 0,5256; 74,13; 7 242; 53; 22; 24,5; 55,2?

c) 26,66; 64,88; 55,1: 75,1; 37,49; 48,68; 2; 10; 3; 5; 7; 0,2; 0,3; 0,4; 0,9?

Anleitung: Mache für jede Aufgabe zuerst einen Überschlag! — Stellenzahl: Wieviel Stellen der Wurzel entstehen aus je 2 Stellen des Radikanden? Abteilen des Radikanden vom Komma aus in Gruppen zu je 2 Stellen! — Benutze zur Bestimmung der Wurzelwerte die Quadratzahltafel! Mache für einige Aufgaben die Probe auf die Genauigkeit der Näherungswerte durch Ausmultiplizieren!

10. Benutze den Rechenstab als Quadratzahltafel zur Berechnung der Aufgaben 9 c!

Anleitung in Abb. 33: Stelle auf Skala A den Radikand ein, lies auf Skala D den Wurzelwert ab! Vergleiche die Genauigkeit der Ergebnisse des Rechenstabes und der Quadratzahltafel miteinander!

11. Berechne durch Einschachteln die Quadratwurzeln aus 2, 12, 19, 24, 47, 70, 79, 51, 52 auf 4 Stellen!

Anleitung: Näherungswert $\sqrt{79} = 8,888$. Kann $8,\overline{8}\ldots$ der Wurzelwert sein?

12. Berechne durch Einschachteln die Kubikwurzeln aus 10, 15, 31, 40, 63, 70, 78 auf 4 Stellen!
Anleitung: Näherungswert $\sqrt[3]{78} = 4,272$. Kann $4,\overline{27}\ldots$ der Wurzelwert sein?

13. Wie groß sind die Kubikwurzeln aus

a) 729; 0,343; 0,125; 512; 64; 0,216?

b) 364; 243; 62 100; 8 615; 4 252; 300 800; 578 000; 852 000; 907 000; 0,439; 0,493; 0,148; 0,0105; 0,0184; 0,0455?

c) 2; 3; 6; 20; 100; 200; 400; 750; 0,1; 0,8; 0,27; 0,64; 0,01; 0,08; 2,7; 6,4; 12,5?

Anleitung: Mache zu jeder Aufgabe zuerst einen Überschlag und bestimme die Stellenzahl der Wurzel! Wieviel Stellen der Wurzel entstehen aus je 3 Stellen des Radikanden? Abteilen des Radikanden vom Komma aus in Gruppen zu je 3 Stellen, z. B. $\sqrt[3]{0{,}045\,500}$!

14. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen, schreibe die Gleichungen in Produktform und prüfe den Vietaschen Wurzelsatz nach:

a) $x^2 - 10x + 13 = 0$ $\quad x^2 - 6x - 23 = 0$ $\quad x^2 - 4x - 71 = 0$
$x^2 - 8x - 29 = 0$ $\quad x^2 - 12x - 14 = 0$ $\quad x^2 - 14x + 37 = 0$

b) $x^2 + 2x - 7 = 0$ $\quad x^2 - 4x - 41 = 0$ $\quad x^2 + 6x + 1 = 0$
$x^2 + 10x + 13 = 0$ $\quad x^2 + 8x - 11 = 0$ $\quad x^2 + 18x + 31 = 0$

c) $9x^2 - 72x + 132 = 0$ $\quad 4x^2 - 40x + 94 = 0$ $\quad 3x^2 + 18x + 25 = 0$
$4x^2 + 48x + 69 = 0$ $\quad 4x^2 + 48x + 148 = 0$ $\quad 6x^2 + 12x + 9 = 0$

d) $18x^2 - 24x - 19 = 0$ $\quad 16x^2 - 24x + 3 = 0$ $\quad 12x^2 + 12x - 1 = 0$
$18x^2 + 24x - 73 = 0$!

15. Wie lassen sich die Irrationalzahlen $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ als Strecken geometrisch veranschaulichen?

Anleitung: Zeichne mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes, des Kathetensatzes oder des Höhensatzes Strecken von $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{5}$ cm, ..., $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm (vgl. Abb. 39)!

16. Besitzen Seite und Diagonale eines Quadrats von 1 cm Seitenlänge ein gemeinsames Maß?

17. Für welche Zahlen wird die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks eine ganze Zahl, wenn die Längen seiner Katheten ganze Zahlen sind? („Pythagoreische Zahlen", rechtwinklige Dreiecke mit 3 Seiten mit gemeinsamem Maß.)

18. Wie läßt sich die Irrationalzahl $\sqrt[4]{2}$ als Strecke geometrisch veranschaulichen?
Anleitung: a) Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten 1 cm und $\sqrt[2]{2}$ cm wird nach dem Höhensatz gleich $\sqrt[4]{2}$ cm. b) Die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $\sqrt{2}$ cm und dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt 1 cm wird nach dem Kathetensatz gleich $\sqrt[4]{2}$ cm.

III. Die Wurzelfunktion $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$, $(n = 2, 3, 4, \ldots)$

19. Zeichne die Kurve $y = \pm\sqrt{x}$ (Abb. 40)!

a) Welche Näherungswerte ergibt die Kurvendarstellung für $\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{2{,}5}$; $\sqrt{3{,}5}$; $\sqrt{4{,}5}$? Vergleiche diese Näherungswerte mit denen des Rechenstabes und der Quadratzahltafel!

b) Beschreibe Verlauf und Symmetrieeigenschaften der Kurve!

20. Verfahre in gleicher Weise für die Kurve $y = \pm\sqrt[4]{x}$ (Abb. 41)!

21. Zeichne die Kurve $y = \sqrt[3]{x}$ (Abb. 42)!

a) Welche Näherungswerte ergibt die Kurve für $\sqrt[3]{-4}$; $\sqrt[3]{-3}$; $\sqrt[3]{-2}$ und für $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{4}$? Vergleiche die Näherungswerte der Zeichnung mit denen des Rechenstabes und der Kubikzahltafel!

b) Beschreibe Verlauf und Symmetrieeigenschaften der Kurve!

19. Die Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$ und ihre Umkehrfunktion

a) Die Rechenarten

An Rechenarten haben wir kennengelernt:

1. Rechenarten der ersten Stufe, Addieren und Subtrahieren

Die Subtraktion ist die **Umkehrung** der Addition. Beispiele für Addition und Subtraktion (Abb. 43) sind $7 + 5 = 12$ und $12 - 5 = 7$; $3a + 4a = 7a$ und $7a - 4a = 3a$.

2. Rechenarten der zweiten Stufe, Multiplizieren und Dividieren

Multiplizieren ist mehrfaches Addieren derselben Größe. Die Division ist die **Umkehrung** der Multiplikation. Beispiele für Multiplikation und Division sind $4 \cdot 3 = 12$ und $12 : 3 = 4$; $4 \cdot a = 4a$ und $4a : a = 4$.

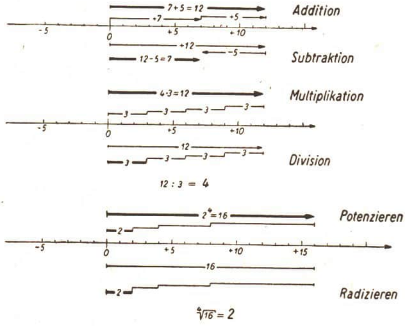


Abb. 43

3. Rechenarten der dritten Stufe, Potenzieren und Radizieren

Potenzieren ist mehrfaches Multiplizieren derselben Größe. Das Radizieren ist eine **Umkehrung** des Potenzierens. Beispiele für Potenzieren und Radizieren sind $2^4 = 16$ und $\sqrt[4]{16} = 2$; $(2a)^3 = 8a^3$ und $\sqrt[3]{8a^3} = 2a$.

Zum Radizieren tritt als zweite Umkehrung des Potenzierens noch das Logarithmieren hinzu (Abschn. 23 und 24).

b) Stammfunktion und Umkehrfunktion

Gibt es entsprechende Umkehrungen auch bei Funktionen? Welche analytischen und geometrischen Zusammenhänge bestehen zwischen der Ausgangs- oder Stammfunktion und ihrer Umkehrfunktion, zwischen Stammkurve und Umkehrkurve?

1. Die Funktion $y = f(x) = 2x$ und ihre Umkehrung

Die Stammfunktion ist analytisch in der nach x entwickelten Form gegeben,

$$y = f(x) = 2x.$$

Die Bildkurve der linearen Stammfunktion ist in Abb. 44 dargestellt. Die Stammkurve ist eine Gerade vom Anstieg 2 durch den Nullpunkt des xy-Achsenkreuzes. Wir kehren nun in der Gleichung $y = 2x$ die Bedeutung der Veränderlichen x und y um. y wird als unabhängige und x als abhängige Veränderliche festgesetzt und x als Funktion von y entwickelt.

$$2x = y$$

$$x = g(y) = \frac{y}{2}$$

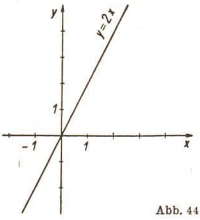


Abb. 44

$x = g(y) = \frac{y}{2}$ heißt die Umkehrfunktion zur Stammfunktion $y = f(x) = 2x$. Die Bildkurve der Umkehrfunktion, die Umkehrkurve $x = g(y)$, ist in Abb. 45 dargestellt. Da y jetzt die unabhängige und x die abhängige Veränderliche ist, bildet y jetzt die horizontale und x die vertikale Achse eines yx-Achsenkreuzes. Die Umkehrkurve ist eine Gerade vom Anstieg $\frac{1}{2}$ durch den Nullpunkt des yx-Achsenkreuzes.

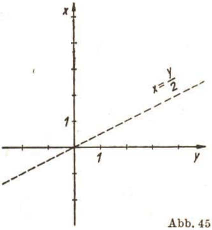


Abb. 45

Man nennt aber die unabhängige Veränderliche einer Funktion gewöhnlich x, so daß die horizontale Achse im Funktionsbild die x-Achse des Achsenkreuzes darstellt. Wir wechseln daher in der analytischen Darstellung der Umkehrfunktion noch die Bezeichnung der Veränderlichen. Für die unabhängige Veränderliche – bisher y – setzen wir x, für die abhängige Veränderliche – bisher x – setzen wir y und erhalten als Umkehrfunktion

$$y = g(x) = \frac{x}{2}.$$

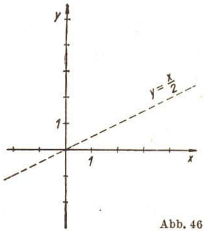


Abb. 46

Für die Bildkurve der Umkehrfunktion bedeutet dieser Wechsel der Veränderlichen in der analytischen Darstellung der Funktion: Wir lassen die Umkehrkurve in ihrer Form und ihrer Lage im Achsenkreuz unverändert, legen sie aber aus dem ungebräuchlichen yx-Achsenkreuz in ein xy-Achsenkreuz (Abb. 46).

In den analytischen Darstellungen der Stamm- und der Umkehrfunktion ist jetzt gleicherweise x die unabhängige und y die abhängige Veränderliche, beide Funktionskurven liegen in rechtwinkligen xy-Achsenkreuzen und lassen sich in einem gemeinsamen Achsenkreuz vereinigen (Abb. 47).

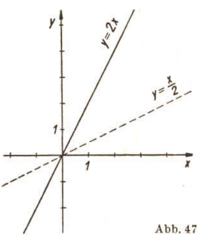


Abb. 47

Stammfunktion	Umkehrfunktion
$y = f(x) = 2x,$	$y = g(x) = \frac{x}{2}.$

2. Die Funktion
$y = f(x) = x$

Die Stammfunktion ist $y = f(x) = x$.

Die Stammkurve $y = x$ ist in Abb. 48 dargestellt.

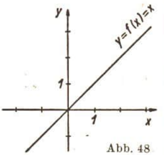


Abb. 48

Die Umkehrfunktion ist $y = g(x) = x$.

Die Umkehrkurve $y = x$ ist in Abb. 49 dargestellt.

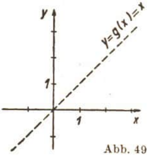


Abb. 49

In Abb. 50 sind Stamm- und Umkehrkurve in einem gemeinsamen xy-Achsenkreuz vereinigt. Für die lineare Funktion $y = x$ sind Stamm- und Umkehrfunktion identisch.

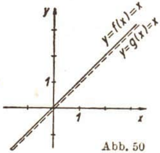


Abb. 50

3. Stammkurve und Umkehrkurve

Abb. 47 und 51 zeigen: Die Umkehrung einer Stammfunktion wird geometrisch durch eine Spiegelung (Umklappung) der Stammkurve veranschaulicht. Für die Funktion $y = x$ werden Stamm- und Umkehrkurve in sich gespiegelt. Die Gerade $y = x$ heißt daher auch Symmetriegerade. Ihre Einzeichnung in das Funktionsbild der Abb. 47 zeigt, daß die Umkehrkurve sich zeichnerisch aus der Stammkurve durch Spiegeln an der Geraden $y = x$ oder durch Umklappen um diese ergibt und umgekehrt (Abb. 51). Die Umkehrung einer Funktion wird geometrisch durch Spiegelung der Funktionskurve an der Geraden $y = x$ dargestellt.

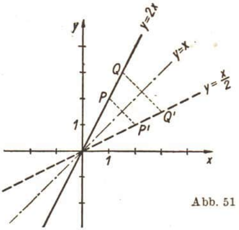


Abb. 51

4. Die Funktion $y = f(x) = x^2$ und ihre Umkehrung

Die Stammfunktion ist $y = f(x) = x^2$. Sie ist die 2. Potenzfunktion von x. Ihre Bildkurve ist in Abb. 52 dargestellt.

Die Umkehrfunktion ist $y = g(x) = \pm \sqrt[2]{x}$. Sie ist die 2. Wurzelfunktion von x. Ihre Kurve (2 Zweige!) ist in Abb. 53 dargestellt.

Stamm- und Umkehrkurve liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$ (Abb. 54).

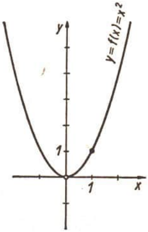


Abb. 52. Die Stammfunktion $y = f(x) = x^2$

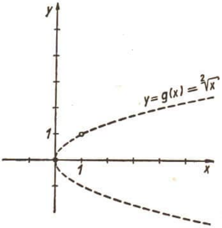


Abb. 53. Die Umkehrfunktion $y = g(x) = \pm \sqrt[2]{x}$

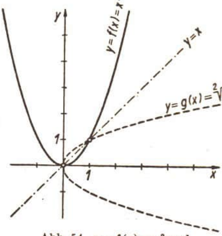


Abb. 54. $y = f(x) = x^2$ und $y = g(x) = \pm \sqrt[2]{x}$

5. Die Funktion $y = f(x) = x^3$ und ihre Umkehrung

Die Stammfunktion ist $y = f(x) = x^3$.	Die Umkehrfunktion ist $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$.
Sie ist die 3. Potenzfunktion von x.	Sie ist die 3. Wurzelfunktion von x.

Stamm- und Umkehrkurve liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$ (Abb. 55).

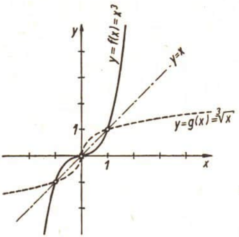


Abb. 55. $y = f(x) = x^3$ und $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$

Die Wurzelfunktionen sind die Umkehrungen der Potenzfunktionen.

Stammfunktion $y = f(x) = x^n$, **Umkehrfunktion $y = g(x) = \sqrt[n]{x}$.**

c) Bruchpotenzen, die Wurzelfunktion $y = f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Wurzelexponent und Potenzexponent?

Erste Erweiterung des Wurzelbegriffs. Man definiert: $\sqrt[1]{a} = a$.

Die Zweckmäßigkeit dieser Erweiterung ergibt sich aus dem Begriff der Wurzel. Für die Wurzelfunktion ist:

Wurzelform	...	$y = \pm\sqrt[4]{x}$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = \pm\sqrt[2]{x}$	$y = \sqrt[1]{x}$
Potenzform	...	$y^4 = x$	$y^3 = x$	$y^2 = x$	$y^1 = x$

Zweite Erweiterung des Wurzelbegriffs. Man definiert:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad \text{(}n\text{ eine positive ganze Zahl).}$$

Die Schreibweise $a^{\frac{1}{n}}$ ordnet sich den bisherigen Potenzregeln ein, denn es wird

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a \qquad \text{und} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Potenzen der Form $a^{\frac{1}{n}}$ heißen Potenzen mit gebrochenem Exponenten oder **Bruchpotenzen.** Bruchpotenzen sind eine andere Schreibweise für Wurzeln.

Die Zweckmäßigkeit dieser Einführung der Bruchpotenzen sei an der Funktion $y = f(x) = x^2$ gezeigt. Die Umkehrung der Stammfunktion $y = f(x) = x^2$ führt als Umkehrfunktion auf die beiden möglichen Formen

$$y = g(x) = \pm x^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad y = g(x) = \pm\sqrt[2]{x}.$$

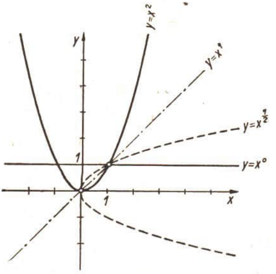


Abb. 56

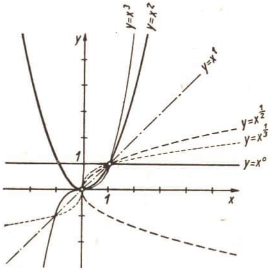


Abb. 57

Zur Stammkurve $y = x^2$ gehört jedoch nur eine Umkehrkurve mit zwei Zweigen im Bereich $x \geqq 0$ (Abb. 56), es ist

$$y = g(x) = \pm\, x^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt[2]{x}.$$

Die Wurzelfunktion läßt sich also analytisch in den folgenden Formen darstellen:

in entwickelter Form
als Wurzel und als Bruchpotenz,

$$y = \sqrt[n]{x} \qquad \text{und} \qquad y = x^{\frac{1}{n}},$$

in unentwickelter Form
als Potenz durch die Gleichung

$$y^n = x.$$

Zusammenstellung der Potenz- und Wurzelfunktionen (Abb. 57):

Stammfunktion		$y = x^1$	$y = x^2$	$y = x^3$	$\ldots$	$y = x^n$
Umkehrfunktion	als Wurzel	$y = \sqrt[1]{x}$	$y = \pm \sqrt[2]{x}$	$y = \sqrt[3]{x}$	$\ldots$	$y = \sqrt[n]{x}$
	als Bruchpotenz	$y = x^{\frac{1}{1}}$	$y = \pm\, x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{\frac{1}{3}}$	$\ldots$	$y = x^{\frac{1}{n}}$

Dritte Erweiterung des Wurzelbegriffs. m und n seien positive ganze Zahlen. Dann definiert man:

$$\text{a)} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Für gerades n muß hierin $a > 0$ und für b) muß $a \neq 0$ sein.

Die Potenzfunktion $y = f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ werde am Beispiel $m = 3$, $n = 2$ erläutert.

Die Funktion $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ läßt sich darstellen

in entwickelter Form
als Bruchpotenz und als Wurzel,

$$y = f(x) = \pm\, x^{\frac{3}{2}} \qquad y = f(x) = \pm \sqrt{x^3},$$

in unentwickelter Form
durch die Gleichung

$$y^2 = x^3.$$

Als Wertetafel der Funktion ergibt sich auf 2 Dezimalstellen genau:

x	-3	-2	-1	0	$+0{,}5$	$+1$	$+1{,}5$	$+2$	$+2{,}5$	$+3$
$y^2 = x^3$	-27	-8	-1	0	$+0{,}125$	$+1$	$+3{,}375$	$+8$	$+15{,}63$	$+27$
y	nicht vorhanden			0	$\pm 0{,}35$	± 1	$\pm 1{,}84$	$\pm 2{,}83$	$\pm 3{,}95$	$\pm 5{,}20$

Die Funktion $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$ ist **nur für positive x-Werte erklärt.** Sie ist im Bereich $x > 0$ **zweideutig.** Die Funktion $y = \pm x^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{x^3}$ ist eine **mehrdeutige Funktion.**
Die Bildkurve der Funktion ist in Abb. 58 dargestellt. Sie besteht im erklärten Bereich aus zwei Zweigen, dem positiven Zweig $y = +x^{\frac{3}{2}}$ mit $y > 0$ im I. Quadranten und dem negativen Zweig $y = -x^{\frac{3}{2}}$ mit $y < 0$ im IV. Quadranten. Beide Zweige hängen im Nullpunkt $(0; 0)$ in einer Spitze zusammen. Die Funktionskurve geht als Potenzkurve durch die Festpunkte $(0; 0)$ und $(1; 1)$.

Die Kurve $y = x^{\frac{3}{2}}$ ist eine Parabel vom Grad $\frac{3}{2}$. Sie heißt **Neilsche Parabel.**

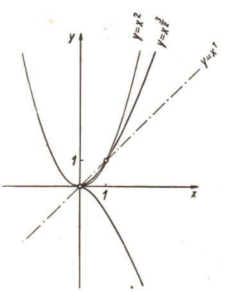


Abb. 58

Aufgaben

I. Rechenarten

1. Erkläre die Zahlenbeispiele $7 + 5 = 12$ und $12 - 5 = 7$; $4 \cdot 3 = 12$ und $12 : 3 = 4$, $2^4 = 16$ und $\sqrt[4]{16} = 2$ an der Zahlengeraden (vgl. Abb. 43)!

II. Stammfunktion und Umkehrfunktion

2. Spiegele die folgenden Punkte an der Geraden $y = x$ eines rechtwinkligen xy-Achsenkreuzes: $(0; 1)$, $(3; 0)$, $(2; 1)$, $(3; 2)$, $(1; 1)$, $(4; 4)$, $(0; 0)$, $(-2; 3)$, $(3; -4)$, $(-1; -1)$, $(-3; -4)$!
Welche Bildpunkte ergeben sich bei der Spiegelung (vgl. Abb. 51)?

3. Wie heißen die Umkehrfunktionen zu den folgenden Stammfunktionen:
a) $y = x + 2$, **b)** $y = 3x$, **c)** $y = 3x + 2$, **d)** $y = 2x + 3$, **e)** $y = 2x - 3$?
Wie liegen Stamm- und Umkehrkurve zueinander (vgl. Abb. 59)?

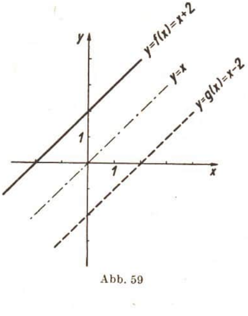


Abb. 59

4. Welche Wertepaare der Koordinaten $x; y$ bleiben bei Umkehrung der Funktion $y = x^2$ erhalten? Welche Punkte $(x; y)$ werden bei Spiegelung der Stammkurve $y = x^2$ an der Geraden $y = x$ (Umklappung der Stammkurve um die Gerade $y = x$) in sich gespiegelt (Ruhepunkte)?

5. Führe dieselben Untersuchungen für die Funktion $y = x^3$ durch!

6. Gegeben ist die Funktion $y = x^{-1}$.

a) Wie heißt ihre Umkehrfunktion?

b) Spiegele die Stammkurve an der Geraden $y = x$ (Umklappen um diese)! Welche Eigenschaft hat die Funktion $y = x^{-1}$? Wie liegt die Symmetriegerade $y = x$ zur Funktion $y = x^{-1}$ (vgl. Abschn. 17, Aufg. 6 und Abb. 35)?

III. Bruchpotenzen

7. Berechne und zeichne die Umkehrfunktion zur Stammfunktion $y = x^3$ (vgl. Abb. 55)!

8. Stelle in einem gemeinsamen rechtwinkligen xy-Achsenkreuz die folgenden Funktionen geometrisch dar: $y = x^0$, $y = x^1$, $y = x^2$, $y = x^3$ und ihre Umkehrfunktionen (vgl. Abb. 57)!

9. Zeichne die Kurven $y = x^0$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = \pm x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^1$ in ein gemeinsames xy-Achsenkreuz! In welcher Weise ordnen sich die Bruchpotenzfunktionen den beiden andern Potenzfunktionen ein (vgl. Abb. 57)?

10. Zeichne die Kurven $y = x^1$, $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$ und $y = x^2$ in ein gemeinsames xy-Achsenkreuz! In welcher Weise ordnet sich die Neilsche Parabel den beiden andern Kurven ein (vgl. Abb. 58)?

11. Wie heißt die Umkehrfunktion zur Funktion $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$?

A n l e i t u n g: Spiegele die Funktionskurve $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$ an der Geraden $y = x$ (Umklappen der Stammkurve $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$ um die Gerade $y = x$)! — Berechne die Umkehrfunktion und zeichne ihr Bild nach einer Wertetafel (Rechenstab)!

12. Welches ist die Stammfunktion zur Umkehrfunktion $y = \pm x^{-\frac{1}{2}}$? Zeichne die Kurve der Funktion $y = \pm x^{-\frac{1}{2}}$ als Umkehrkurve durch Umklappen der Stammkurve um die Gerade $y = x$ und als Wurzelfunktion $y = \pm \frac{1}{\sqrt{x}}$ nach einer Wertetafel!

IV. Aufgaben aus der Geometrie

13. Stelle geometrisch dar ($\pi = 3{,}14$):

a) den Kreisumfang als Funktion des Halbmessers r (Durchmessers $2r$),

b) den Halbmesser (Durchmesser) als Funktion des Kreisumfangs!

14. a) Um wieviel Meter verlängert sich der Erdäquator bei Vergrößerung des Erdradius um 1 m?

b) Um wieviel Meter muß der Erdradius verlängert werden, wenn der Erdäquator um 1 km länger werden soll? (Die Erde ist als Kugel anzunehmen [vgl. Abschn. 39]; $\pi = 3{,}14$).

15. Stelle für ein Quadrat mit der veränderlichen Seite s dar:

a) den Flächeninhalt als Funktion der Seite, **b)** die Seite als Funktion des Flächeninhalts!

16. Um welchen Betrag muß man die Seite eines Quadrats vergrößern, damit sein Flächeninhalt **a)** zweimal, **b)** viermal so groß wird?

A n l e i t u n g zu den Aufgaben 13 und 15. F u n k t i o n a l e A b h ä n g i g k e i t e n untersucht man zweckmäßig folgendermaßen: 1. Welche veränderlichen Größen sollen auf ihre Abhängigkeit voneinander untersucht werden? 2. Welche mathematische Beziehung besteht zwischen den Veränderlichen? 3. Welche Größe soll die unabhängige Veränderliche x, welche die abhängige Veränderliche y werden? 4. Stelle $y = f(x)$ analytisch dar und zeichne die Bildkurve der Funktion!

20. Das Rechnen mit Wurzeln

a) Wurzel aus der Zahl 0

Jede Wurzel aus Null ist gleich Null.

Es ist $\sqrt[n]{0} = 0$, denn $0^n = 0$, und $0^{\frac{1}{n}} = 0$, denn $0^n = 0$.

Die Kurven sämtlicher Wurzelfunktionen gehen durch den Nullpunkt (0;0) des Achsenkreuzes (Abb. 40, 41, 42 und 57).

b) Wurzeln aus + 1 und − 1

1. Ungerade Wurzeln

Jede ungerade Wurzel aus + 1 ist gleich + 1, aus − 1 gleich − 1.

Es ist $\sqrt[2n+1]{+1} = +1$, denn $(+1)^{2n+1} = +1$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

und $\sqrt[2n+1]{-1} = -1$, denn $(-1)^{2n+1} = (-1)^{2n} \cdot (-1) = -1$.

Die Kurven sämtlicher ungerader Wurzelfunktionen gehen durch die Punkte (+ 1; + 1) und (− 1; − 1), siehe Abb. 42; die Kurven liegen symmetrisch zum Nullpunkt (0; 0).

2. Gerade Wurzeln

Jede gerade Wurzel aus + 1 ist gleich ± 1.

Es ist $\sqrt[2n]{+1} = \pm 1$, denn $(+1)^{2n} = +1$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

und $(-1)^{2n} = \overbrace{(-1)^2 \cdot (-1)^2 \cdot \ldots \cdot (-1)^2}^{n \text{ mal}} = +1$.

Die Kurven sämtlicher gerader Wurzelfunktionen gehen durch die Punkte (+1; +1) und (+1; −1), siehe Abb. 40 und 41; die Kurven liegen symmetrisch zur x-Achse.

Die Quadratwurzel $\sqrt{-1}$ ist nicht vorhanden.

c) Die Wurzelgesetze

Was ergeben $\sqrt{8a} + \sqrt{2a}$; $\sqrt{8a} - \sqrt{2a}$; $\sqrt{8a} \cdot \sqrt{2a}$; $\frac{\sqrt{8a}}{\sqrt{2a}}$; $\sqrt{8a^3} \cdot \sqrt{2a}$; $\frac{\sqrt{8a^3}}{\sqrt{2a}}$?

In diesen Beispielen sind Wurzeln aus allgemeinen Zahlen auszurechnen. Die Werte der Radikanden sind unbestimmt. Die Ausdrücke lassen sich aber durch Rechnung noch umformen und vereinfachen. Dieses Rechnen mit Wurzeln behandeln die Wurzelgesetze. (Vgl. Abschn. 16, die Potenzgesetze.)

1. Addition und Subtraktion von Wurzeln

Man kann nur gleichartige Wurzeln durch Addition oder Subtraktion zusammenfassen.

2. Radizierung eines Produkts und eines Bruches, Multiplikation und Division von Wurzeln

1. Wurzelgesetz: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, **in Bruchpotenzform** $(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$.

Umkehrung: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\quad a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$.

(3. Potenzgesetz für den Exponenten $\frac{1}{n}$.)

Beweis:

Die Wurzelzeichen hindern daran, die Richtigkeit des Gesetzes zu erkennen. Wenn das 1. Wurzelgesetz richtig ist, muß es auch richtig bleiben, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Rechenoperationen vornimmt. Um die n-ten Wurzeln fortzubringen, potenzieren wir beide Gleichungsseiten mit n.

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a \cdot b})^n &= (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}), \\ &= (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n, \quad \text{(3. Potenzgesetz)}, \\ a \cdot b &= a \cdot b. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \left[(a \cdot b)^{\frac{1}{n}}\right]^n &= \left(a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}\right)^n, \\ &= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n, \\ a \cdot b &= a \cdot b. \end{aligned}$$

Die Identität der Gleichung zeigt die Richtigkeit des 1. Wurzelgesetzes.

2. Wurzelgesetz: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, **in Bruchpotenzform** $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$.

Umkehrung: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $\quad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(4. Potenzgesetz für den Exponenten $\frac{1}{n}$.)

Der Beweis ergibt sich in entsprechender Weise wie beim 1. Wurzelgesetz.
1. und 2. Wurzelgesetz entsprechen dem 3. und 4. Potenzgesetz.

3. Radizierung einer Potenz und einer Wurzel

Welcher Unterschied besteht zwischen $\sqrt{4^3}$ und $(\sqrt{4})^3$; $\sqrt{9^3}$ und $(\sqrt{9})^3$; $\sqrt{a^3}$ und $(\sqrt{a})^3$; $\sqrt[3]{8^2}$ und $(\sqrt[3]{8})^2$; $\sqrt[3]{64^2}$ und $(\sqrt[3]{64})^2$; $\sqrt[3]{a^2}$ und $(\sqrt[3]{a})^2$? Welche Ergebnisse erhält man?

3. Wurzelgesetz: $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$.

Beweis: Wir potenzieren mit n und erhalten nach dem 5. Potenzgesetz

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a^m})^n &= [(\sqrt[n]{a})^n]^m = a^{\frac{m}{n} \cdot n}, \\ a^m &= \quad a^m \quad = a^m. \end{aligned}$$

Welcher Unterschied besteht zwischen $\sqrt[3]{\sqrt[2]{8}}$ und $\sqrt[2]{\sqrt[3]{8}}$; $\sqrt[2]{\sqrt[3]{9}}$ und $\sqrt[3]{\sqrt[2]{9}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$ und $\sqrt[4]{\sqrt[3]{64}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}$ und $\sqrt[3]{\sqrt[4]{81}}$? Welche Ergebnisse erhält man?

4. Wurzelgesetz: $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}.$$

Beweis: Wir potenzieren mit $m \cdot n$ und erhalten

$$\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[m \cdot n]{a}\right)^{m \cdot n} = \left(a^{\frac{1}{m n}}\right)^{m \cdot n},$$
$$a = a = a = a.$$

d) Das Rechnen mit Bruchpotenzen $a^{\frac{m}{n}}$

Wir haben gezeigt, daß für Bruchpotenzen dieselben Rechengesetze wie für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gelten. Nach dem Permanenzprinzip der Arithmetik findet damit die Einführung der Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ durch die getroffenen Definitionen ihre volle Rechtfertigung. Der Vorteil des Rechnens mit Bruchpotenzen liegt in der Einfachheit gegenüber dem Rechnen mit Wurzeln.

Für Potenzen $a^{\frac{m}{n}}$ lassen sich das 3. und das 4. Wurzelgesetz zusammenfassen:

In der Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ kann der Exponent $\frac{m}{n}$ beliebig in Faktoren zerlegt, erweitert oder gekürzt werden.

Aufgaben

I. Wurzeln aus 0 und 1

1. Berechne die folgenden Wurzeln:

   a) $\sqrt{0}$, $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[4]{0}$, $0^{\frac{1}{2}}$, $0^{\frac{1}{3}}$, $0^{\frac{1}{4}}$

   b) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[5]{+1}$, $\sqrt[5]{-1}$, $-\sqrt[3]{1}$, $-\sqrt[3]{-1}$, $-\sqrt[5]{1}$, $-\sqrt[5]{-1}$, $1^{\frac{1}{3}}$, $-1^{\frac{1}{3}}$, $(-1)^{\frac{1}{3}}$, $-(-1)^{\frac{1}{3}}$

   c) $\sqrt{1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[6]{1}$, $1^{\frac{1}{2}}$, $1^{\frac{3}{2}}$, $1^{\frac{1}{4}}$, $1^{\frac{3}{4}}$!

II. Die Wurzelgesetze

2. Addition und Subtraktion von Wurzeln. Berechne

   a) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$, $2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[4]{3} + 3\sqrt[4]{3} - 7\sqrt[4]{3}$, $2\sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt[3]{3} - 7 \cdot \sqrt[4]{3}$

   b) $2\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a}$, $2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 4\sqrt{x}$, $2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[4]{x} + 4\sqrt[4]{x}$, $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[4]{a}$

   c) $2\sqrt{2x} + 3\sqrt{2x} + 4\sqrt{2x}$, $2\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} + 4\sqrt{3x}$, $2\sqrt{x} + 3\sqrt{2x} + 4\sqrt{3x}$!

3. Radizierung eines Produkts und Umkehrung. Zeige die Richtigkeit des 1. Wurzelgesetzes für

   a) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ und die Umkehrung $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$,

   b) $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ „ „ „ $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$,

   c) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ „ „ „ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$!

4. Radizierung eines Quotienten. Zeige die Richtigkeit des 2. Wurzelgesetzes für

$\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$!

5. Radizierung einer Potenz.

a) Welcher Unterschied ist zwischen $\sqrt{9^3}$ und $(\sqrt{9})^3$, $\sqrt{16^3}$ und $(\sqrt{16})^3$, $\sqrt[3]{8^2}$ und $(\sqrt[3]{8})^2$, $\sqrt[3]{64^2}$ und $(\sqrt[3]{64})^2$, $\sqrt[4]{16^3}$ und $(\sqrt[4]{16})^3$, $\sqrt[n]{a^m}$ und $(\sqrt[n]{a})^m$? Welche Ergebnisse erhält man?

b) Zeige die Richtigkeit des 3. Wurzelgesetzes für $\sqrt[2]{a^3}$, $\sqrt[3]{a^5}$, $\sqrt[n]{a^m}$!

c) Berechne auf zweierlei Weise $\sqrt{2^3}$, $\sqrt{3^3}$, $\sqrt[3]{2^6}$, $\sqrt[3]{3^4}$, $\sqrt[3]{2^4}$, $\sqrt{4^3}$, $\sqrt{9^3}$!

6. Radizierung einer Wurzel. Berechne auf zweierlei Weise $\sqrt[2]{\sqrt[3]{16}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[2]{27}}$, $\sqrt[2]{\sqrt[3]{81}}$, $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[2]{8}}$!

7. Stelle **a)** die Potenzgesetze, **b)** die Wurzelgesetze in Wurzelform und Bruchpotenzform zusammen!

III. Das Rechnen mit Bruchpotenzen

8. Berechne

a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{1000}}$, $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{64}}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{81}}}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{12}}}$, $\left(\sqrt[5]{\sqrt{a^5}}\right)^2$, $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2}}\right)^6$, $\sqrt[2]{\sqrt[3]{a^4}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ **c)** $\sqrt{a\sqrt{a}}$, $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^2}}$, $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}$, $\sqrt[5]{a^3\cdot\sqrt[4]{a^3}}$!

IV. Aufgaben zu den Wurzelgesetzen

1. Wurzelgesetz

Ziehe in den Aufgaben 9 bis 15 die Wurzeln soweit wie möglich aus den Radikanden! „Teilweises Ausziehen der Wurzeln!"

9. $\sqrt{x^2y^2}$, $\sqrt{x^2y}$, $\sqrt[3]{x^3y^6}$, $\sqrt[3]{x^3y^4}$, $\sqrt[n]{x^{n+1}}$

10. $\sqrt{4a}$, $\sqrt{25a^2b}$, $\sqrt[3]{216u^3v^2}$, $\sqrt[5]{64x^6y^{10}}$, $\sqrt{27a^2x}$

11. $\sqrt{18}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{180}$, $\sqrt{98}$, $2\sqrt{112}$, $3\sqrt{80}$, $11\sqrt{28}$, $2\sqrt{294}$, $3\cdot\sqrt{108}$, $4\cdot\sqrt{128}$, $5\cdot\sqrt{50}$, $2\cdot\sqrt[3]{54}$, $3\cdot\sqrt[3]{250}$, $5\sqrt{126}$, $2\sqrt{242}$, $3\sqrt[3]{686}$

12. $\sqrt{15\cdot 45x^2y^2}$, $\sqrt[3]{3\cdot 4\cdot 18a^3}$, $\sqrt[5]{24\cdot 54b^3\cdot 6b^2}$, $\sqrt[n]{2^{n-3}x\cdot 8x^{n-1}}$

13. $\sqrt{45}+\sqrt{80}-\sqrt{125}$, $8\sqrt{18}-4\sqrt{8}+5\sqrt{32}$, $2\sqrt[3]{54}+5\sqrt[3]{250}-3\sqrt[3]{686}$, $m\sqrt{p^3q}-n\sqrt{pq^3}+\sqrt{p^3q^3}$, $2\sqrt{98}-3\sqrt{18}-2\sqrt{50}+3\sqrt{8}$, $4\sqrt{12}+\sqrt{363}-3\sqrt{75}+3\sqrt{48}-\sqrt{507}$

14. $3\sqrt{16v}-5\cdot\sqrt{9v}+4\cdot\sqrt{v}$, $5y\sqrt{25x^3y}-3x\sqrt{9x\cdot y^3}$

15. $\sqrt{u^{4x}}$, $\sqrt{u^{4x+1}}$, $\sqrt{u^{4x-1}}$, $\sqrt{u^{2-6x}}$, $\sqrt{u^{2x+4y}}$, $\sqrt{u^{2x-4y}}$

Vereinfache die folgenden Produkte:

16. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$, $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$, $\sqrt{12}\cdot\sqrt{75}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}$, $\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{75}$

17. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{90}$, $\sqrt{21}\cdot\sqrt{33}$, $\sqrt{8}\cdot\sqrt{14}$, $\sqrt{12}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{35}$, $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}$

18. $\sqrt{4ab^2}\cdot\sqrt{25a^2b}$, $\sqrt{6pq}\cdot\sqrt{54pq}$, $\sqrt[3]{4u^2v}\cdot\sqrt{128u^4v^2}$

19. $(7\sqrt{3}-3\sqrt{7})(7\sqrt{3}-3\sqrt{7})$, $(7\sqrt{3}-3\sqrt{7})\cdot(7\sqrt{3}+3\sqrt{7})$, $(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})$

20. $(\sqrt{15}-\sqrt{21})\cdot\sqrt{3}$, $(\sqrt{35}+\sqrt{28})\cdot\sqrt{7}$, $(\sqrt{u}+\sqrt{v})\cdot(2\sqrt{u}-3\sqrt{v})$

21. $(\sqrt{2x}+\sqrt{5y})^2$, $(\sqrt{7m}-3\sqrt{n})^2$, $(\sqrt{6pq}+\sqrt{3pq})^2$, $(p\sqrt{u}-u\sqrt{p})^2$

22. $\sqrt{z^2+az}\cdot\sqrt{z^4+az^3}$, $\sqrt{p^2-4q^2}\cdot\sqrt{\frac{p+2q}{p-2q}}$, $\sqrt{\frac{p-2q}{p+2q}}\cdot\sqrt{p^2-4q^2}$!

23. Berechne $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{200}$, $\sqrt{450}$ auf 4 Stellen genau!
Anleitung: Entnimm den Näherungswert von $\sqrt{2}$ auf 4 Stellen genau der Quadratzahltafel! Berechne daraus $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, ...! Prüfe die gefundenen Werte auf ihre Genauigkeit mit der Quadratzahltafel nach!

24. Berechne $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{108}$, $\sqrt{300}$, $\sqrt{675}$ auf 4 Stellen genau!

25. Klammere den gemeinsamen Faktor aus! $\sqrt{2}-\sqrt{6}$, $\sqrt{63}-\sqrt{28}$, $\sqrt{15}+\sqrt{21}$, $\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{75}$, $\sqrt{7}-\sqrt{14}+\sqrt{21}$, $\sqrt{ax}+\sqrt{bx}+\sqrt{cx}$, $\sqrt[3]{u^2v}-\sqrt[3]{v^2u}$, $\sqrt[m]{ab^2}+\sqrt[m]{5ac^3}$!

26. Bringe den Faktor vor der Wurzel unter die Wurzel!

$2\sqrt{3}$, $5a\sqrt{7}$, $6\sqrt{\frac{1}{4}}$, $9\sqrt{\frac{2}{3}}$, $4\sqrt{0{,}125}$, $2u\sqrt{\frac{1}{4}u}$, $2\sqrt[3]{3}$, $a\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$,

$(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$, $(1+\sqrt{2})\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\cdot\sqrt{\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}$!

27. Bestimme mit der Quadratzahltafel die folgenden Quadratwurzeln auf 4 Stellen genau:
$\sqrt{0{,}85}$, $\sqrt{0{,}085}$, $\sqrt{0{,}0085}$, $\sqrt{0{,}61}$, $\sqrt{0{,}061}$, $\sqrt{0{,}0061}$, $\sqrt{0{,}0057}$, $\sqrt{0{,}0069}$, $\sqrt{0{,}069}$, $\sqrt{48{,}96}$, $\sqrt{9{,}1}$, $\sqrt{8{,}19}$, $\sqrt{6{,}3}$, $\sqrt{0{,}63}$, $\sqrt{2{,}5}$!

2. Wurzelgesetz

28. $\sqrt{\frac{49}{81}}$, $\sqrt{\frac{25}{121}}$, $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, $\sqrt{3\frac{1}{16}}$, $\sqrt{5\frac{5}{9}}$, $\sqrt{14\frac{2}{9}}$, $\sqrt{\frac{u^2}{v^2}}$, $\sqrt{\frac{16x^2}{81y^2}}$, $\sqrt{\frac{49p^2q^4}{25m^2n^6}}$,
$\sqrt[3]{\frac{2a^2b}{9c^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4ab^2}{3c}}$, $\sqrt[3]{125:216}$, $\sqrt[4]{\frac{16x^4z^5y^3}{81y^7z}}$, $\sqrt[3]{27u^3:64v^6}$, $\sqrt{\frac{7xz}{5y}}:\sqrt{\frac{63y}{20xz}}$

29. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}$, $\sqrt{2\frac{1}{2}}:\sqrt{3\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{15}:\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[n]{ab}:\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[x]{b^{x-1}a}:\sqrt[x]{\frac{a}{b}}$.

30. Rechne den Wert des Bruches $\frac{1}{\sqrt{2}}$ auf 4 Stellen genau aus! Warum ist diese Berechnung unbequem? Wie kann man die Form eines Bruches ändern, ohne seinen Wert zu ändern? Welche Größe muß man zu dieser Formänderung für den Bruch $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verwenden, wenn man im Nenner an Stelle der Wurzel eine ganze Zahl erhalten will? Warum ist die Berechnung dann einfacher? — Die Beseitigung einer Wurzel aus dem Nenner eines Bruches nennt man Rationalmachen des Nenners.

Berechne in entsprechender Weise $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{3}{\sqrt{6}}$, $\frac{8}{\sqrt{10}}$, $\frac{7}{\sqrt{7}}$, $\frac{2}{3\sqrt{2}}$, $\frac{3}{4\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{6}}$, $\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\frac{4}{5\sqrt{5}}$!

31. Mit welchem Ausdruck muß man den Bruch $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ erweitern, damit die Wurzel im Nenner wegfällt? Mit welchem Ausdruck muß man den Bruch $\frac{1}{a-\sqrt{b}}$ erweitern, damit der Nenner rational wird?

Mache in den Aufgaben 32 bis 38 die Nenner der Brüche rational!

32. $\frac{5}{\sqrt{5}}$, $\frac{10}{\sqrt{5}}$, $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$, $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$, $\frac{7\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$, $\frac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}$, $\frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{8}}$, $\frac{3\sqrt{8}}{4\sqrt{6}}$, $\frac{24\sqrt{50}}{25\sqrt{12}}$, $\frac{4\sqrt{18}}{\sqrt{48}}$

33. $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{a}{\sqrt{x}}$, $\frac{z}{\sqrt{z}}$, $\frac{5}{\sqrt{xy}}$, $\frac{20a}{3\sqrt{5a}}$

34. $\frac{u^2 - v^2}{\sqrt{u - v}}$, $\frac{u^2 + v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, $\frac{4a^2 - 9b^2}{\sqrt{2a + 3b}}$, $\frac{4a^2 - 9b^2}{\sqrt{2a - 3b}}$, $\frac{\sqrt{2a + 3b}}{\sqrt{2a - 3b}}$, $\frac{3x - 5v}{\sqrt{3x - 5v}}$, $\frac{3x + 5v}{\sqrt{3x - 5v}}$

35. $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$, $\frac{4}{\sqrt{5} - 1}$, $\frac{1}{1 - \sqrt{5}}$, $\frac{1}{1 + \sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{5} + 1}$, $\frac{-4}{1 + \sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5} + 2}$, $\frac{3}{3 - 2\sqrt{2}}$, $\frac{4}{3 - \sqrt{5}}$

36. $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}$, $\frac{5}{\sqrt{8} - \sqrt{3}}$, $\frac{21}{\sqrt{18} + \sqrt{11}}$, $\frac{12}{3 \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$, $\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$

37. $\frac{3 + \sqrt{7}}{3 - \sqrt{7}}$, $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{5}}{\sqrt{12} + \sqrt{5}}$, $\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$, $\frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{\sqrt{u} - \sqrt{v}}$

38. $\frac{3\sqrt{7} - 2\sqrt{5}}{3\sqrt{7} + 2\sqrt{5}}$, $\frac{5\sqrt{15} + 4\sqrt{3}}{8\sqrt{12} - 3\sqrt{6}}$, $\frac{3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $\frac{a\sqrt{3x} + b\sqrt{7y}}{b\sqrt{12x} + a\sqrt{14y}}$!

3. Wurzelgesetz

39. $\sqrt[3]{8^4}$, $\sqrt{25^3}$, $\sqrt[5]{32^2}$, $\sqrt[4]{16^5}$, $\sqrt[3]{27^4}$

40. $\sqrt[m]{(x^m)^n}$, $\sqrt[m]{x^{mn}}$, $\sqrt[m]{(x^{m+1})^n}$, $\sqrt[m]{x^{2m}}$, $\sqrt[m]{x^{3m-1}}$

41. $(\sqrt{3})^4$, $(\sqrt{7})^{-4}$, $(\sqrt[3]{4})^6$, $(\sqrt[5]{3})^{-20}$, $(\sqrt[7]{a})^{14}$

42. $(\sqrt{pq})^2$, $(\sqrt[3]{u^2v})^9$, $(\sqrt[3]{u^2v})^{-4}$, $(\sqrt[5]{a^3b^2})^7$

4. Wurzelgesetz

43. $\sqrt[3]{\sqrt{(2^2)^3}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{x^6}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$, $\sqrt[5]{\sqrt{32}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{4^{-3}}}$

44. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$, $\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{a}}$, $\sqrt[3]{5\sqrt[5]{5}}$

45. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3b^2}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{a^9b^4}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{16}{25}u^4v^2}} : \sqrt[3]{\sqrt{6\frac{1}{4}u^{-2}v^2}}$

46. $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}}$, $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$

V. Bruchpotenzen

47. Berechne die Bruchpotenzen $9^{\frac{1}{2}}$; $27^{\frac{1}{3}}$; $8^{\frac{2}{3}}$; $256^{\frac{3}{4}}$; $1\,024^{\frac{7}{10}}$; $0{,}36^{\frac{1}{2}}$; $1{,}69^{\frac{1}{2}}$; $0{,}027^{\frac{2}{3}}$!

48. Berechne als Bruchpotenzen $4 \cdot \sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{b^4}$, $\sqrt[5]{c^5}$, $\sqrt{d^6}$, $\sqrt{u^{-1}}$, $\sqrt[-3]{v^2}$, $\sqrt[-10]{z^{-3}}$!

49. Berechne $8^{\frac{2}{3}} + 25^{\frac{1}{2}} + 27^{1\frac{2}{3}} - 1\,000^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-1\frac{1}{4}}$, $9^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{3}{4}} - 1^{\frac{1}{5}} - 27^{\frac{2}{3}}$!

50. a) $a^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}}$, $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{9}{4}}$, $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}}$, $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}}$

c) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3$, $\left(a^{\frac{5}{4}}\right)^2$, $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4$, $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$, $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$!

VI. Quadratische Gleichungen

51. Berechne die Wurzeln $\sqrt{25}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-10}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$!
Was versteht man hier unter der Bezeichnung „Wurzel"?

52. Welches sind die Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2-4=0$ $\quad x^2-9=0$ $\quad x^2-2=0$ $\quad x^2-6=0$

b) $x^2-2x-3=0$ $\quad x^2-2x-1=0$ $\quad x^2-2x+1=0$ $\quad x^2-2x-11=0$
$x^2-6x+5=0$ $\quad x^2-6x+7=0$ $\quad x^2-6x+9=0$ $\quad x^2-6x-9=0$?

Was versteht man hier unter der Bezeichnung „Wurzel"?

53. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x^2-2x-8=0$ $\quad x^2-2x-5=0$ $\quad x^2-2x+1=0$
$x^2-2x+2=0$ $\quad x^2-2x+10=0$

b) $x^2-6x+5=0$ $\quad x^2-6x+7=0$ $\quad x^2-6x+9=0$
$x^2-6x+10=0$ $\quad x^2-6x+13=0$

c) $x^2-2x-8=0$ $\quad x^2+2x-7=0$ $\quad x^2+2x+1=0$
$x^2+2x+2=0$ $\quad x^2+2x+3=0$

d) $x^2+6x-7=0$ $\quad x^2+6x+1=0$ $\quad x^2+6x+9=0$
$x^2+6x+10=0$ $\quad x^2+6x+17=0$

e) $x^2+4x=0$ $\quad x^2+4x+4=0$ $\quad x^2+4x-4=0$

f) $x^2-4x-8=0$ $\quad x^2-4x+4=0$ $\quad x^2-4x-4=0$!

54. Wie heißen die Produktformen der quadratischen Gleichungen der Aufgabe 53? Weise für diese Gleichungen die Identität der gegebenen quadratischen Gleichungen mit ihren Produktformen nach!

55. Wie heißen die quadratischen Gleichungen zu den folgenden Wurzelpaaren:

a) 1 ± 2, $\quad 1\pm\sqrt{2}$, $\quad 1\pm 0$, $\quad 1\pm 1$, $\quad 1\pm 2\sqrt{2}$

b) $-1\pm 2\sqrt{2}$, $\quad -1\pm 2$, $\quad -1\pm 0$, $\quad -1\pm\sqrt{2}$, $\quad -1\pm\sqrt{3}$

c) $2\pm 2\sqrt{3}$, $\quad 2\pm 2$, $\quad 2\pm 0$, $\quad 2\pm 2\sqrt{2}$, $\quad 2\pm 2\sqrt{3}$?

56. Löse die Aufgaben 55 **a)** durch die Produktform der quadratischen Gleichung, **b)** nach dem Vietaschen Wurzelsatz! Warum müssen die beiden Ergebnisse übereinstimmen?

57. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $4x^2-4x-3=0$ $\quad 4x^2-4x=0$ $\quad 4x^2-4x+1=0$ $\quad 4x^2-4x+3=0$

b) $8x^2-2x-1=0$ $\quad 4x^2-x=0$ $\quad 64x^2-16x+1=0$ $\quad 8x^2-4x+1=0$

c) $9x^2-6x-17=0$ $\quad 3x^2-6x=0$ $\quad 9x^2-6x+1=0$ $\quad 9x^2-6x+17=0$!

58. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $x+\frac{1}{x}-8\frac{1}{8}=0$, $\quad x+\frac{1}{x}-6\frac{1}{6}=0$, $\quad x+\frac{1}{x}-2\frac{1}{6}=0$, $\quad x-\frac{1}{x}-6\frac{6}{7}=0$

b) $2x+\frac{2}{x}=\frac{29}{5}$, $\quad 3x-\frac{3}{x}=\frac{40}{7}$, $\quad x-\frac{1}{4x}=1$

c) $\frac{x}{a^2}=\frac{1}{x-2a}$, $\quad x-\frac{a}{x}=a$, $\quad \frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$!

VII. Biquadratische Gleichungen

59. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden biquadratischen Gleichungen:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $\quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $\quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ $\quad x^4 - 18x^2 + 32 = 0$ $\quad x^4 - 8x^2 + 12 = 0$
$x^4 + 12x^2 + 32 = 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$ $\quad x^4 - 14x^2 + 48 = 0$ $\quad x^4 - 26x^2 + 144 = 0$

d) $18x^4 - 11x^2 + 1 = 0$!

Anleitung zur Aufgabe $x^4 - 8x^2 + 12 = 0$

Zeichnerische Lösung:

Die Nullstellen der Funktion $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$ ergeben die Wurzeln der biquadratischen Gleichung $x^4 - 8x^2 + 12 = 0$. — Wir stellen für die Funktion eine Wertetafel auf.

x	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
x^4	256	81	16	1	0	1	16	81	256
$-8x^2$	-128	-72	-32	-8	0	-8	-32	-72	-128
y	$+140$	$+21$	-4	$+5$	$+12$	$+5$	-4	$+21$	$+140$

Wir zeichnen die Kurve $y = x^4 - 8x^2 + 12$; Maßstab für y ist $1:5$ (Abb. 60).

Ergebnis: Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung liegen symmetrisch zur y-Achse,

$$-3 < x_2 < -2; \quad -2 < x_4 < -1; \quad 1 < x_3 < 2; \quad 2 < x_1 < 3.$$

Näherungswerte sind $\quad x_2 = -2{,}4; \quad x_4 = -1{,}4; \quad x_3 = +1{,}4; \quad x_1 = +2{,}4.$

Rechnerische Lösung:

In der gegebenen Gleichung führen wir für x^2 eine neue Unbekannte z ein.

$$\text{I. } z^2 - 8z + 12 = 0, \qquad \text{II. } x^2 = z.$$

Wir lösen die gemischt-quadratische Gleichung I für z.

$$\text{I. } z^2 - 8z = -12$$
$$z_1 = +6; \quad z_2 = +2.$$

Wir lösen die rein-quadratischen Gleichungen II für x.

$$\text{II. } x^2 = +6, \qquad x^2 = +2.$$

Ergebnis: $\quad x_1 = +\sqrt{6}; \quad x_3 = +\sqrt{2};$
$\quad x_2 = -\sqrt{6}; \quad x_4 = -\sqrt{2}.$

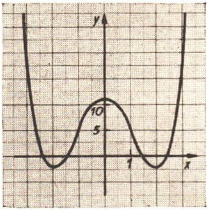


Abb. 60

Näherungswerte auf 3 Stellen genau sind

$$x_1 = +2{,}45; \quad x_2 = -2{,}45; \quad x_3 = +1{,}41; \quad x_4 = -1{,}41.$$

Mache die Probe durch Einsetzen der Wurzeln in die Ausgangsgleichung bzw. Funktion $y = f(x)$!

Warum nennt man diese Gleichungen biquadratische Gleichungen? Stelle die beiden quadratischen Funktionen I. $y = f_1(z) = z^2 - 8z + 12$ und II. $z = f_2(x) = x^2$ in einem zy- bzw. xz-Achsenkreuz zeichnerisch dar! Welcher Zusammenhang besteht zwischen zusammengehörigen Werten von x, z und y?

VIII. Gleichungen mit Wurzeln

60. Quadriere die folgenden Ausdrücke:

a) $\sqrt{x}$, $-\sqrt{2x}$, $\sqrt{3x}$, $-\sqrt{(x+2)}$, $\sqrt{(x+3)}$, $-\sqrt{2(x+2)}$, $\sqrt{5(x+3)}$, $-\sqrt{2x+2}$, $\sqrt{5x+3}$

b) $\sqrt{x}+1$, $-\sqrt{2x}-2$, $\sqrt{3x}+5$, $-\sqrt{(x+2)}+1$, $\sqrt{(x+3)}-2$, $-\sqrt{2(x+2)}+3$, $\sqrt{2x+2}-1$, $\sqrt{5(x+3)}-3$, $\sqrt{5x+3}-3$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}$, $\sqrt{2x}-\sqrt{3x}$, $-\sqrt{x}+\sqrt{3x+5}$, $+\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$, $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$ $\sqrt{2x+2}-\sqrt{2x-2}$, $-\sqrt{5(x-3)}+\sqrt{5(x+3)}$!

Bei welchen Ausdrücken verschwinden die Wurzeln durch das Quadrieren?

61. Löse zeichnerisch und rechnerisch die Wurzelgleichungen

$$\text{I. } +\sqrt{x}-2=0; \qquad \text{II. } +\sqrt{x}+2=0!$$

Anleitung: Die Quadratwurzeln $\sqrt{x}$ sind hier mit dem Vorzeichen $+$ gegeben (man könnte dieses beim 1. Glied der Gleichungen auch weglassen). Die Quadratwurzel $\sqrt{x}$ darf man hier nicht mit doppeltem Vorzeichen $\pm$ ansetzen; die gegebene Quadratwurzel darf man nur mit dem gegebenen Vorzeichen benutzen!

Rechnerische Lösung:

Durch welche Rechenart kann man die Wurzel in den Gleichungen wegbringen? Welche Umformung müssen wir dazu mit den Gleichungen vor dem Quadrieren vornehmen? Merke für das Lösen von Wurzelgleichungen: Erst die Wurzeln isolieren, dann quadrieren!

Isolieren: I. $+\sqrt{x}=+2$, II. $+\sqrt{x}=-2$.
Quadrieren: $x_1=+4$, $x_1=+4$.

Wir machen die Probe auf die Richtigkeit durch Einsetzen der gefundenen Lösungen in die Ausgangsgleichungen. Im Fall I stimmt die Probe, der gefundene Wert x_1 ist eine Lösung der Aufgabe I. Im Fall II stimmt die Probe nicht, der gefundene Wert $x_1=4$ ist keine Lösung der Gleichung II.

Gleichung II. $+\sqrt{x}=-2$ ist unmöglich. Durch das Vorzeichen $+$ der Quadratwurzel ist für $\sqrt{x}$ der positive Wurzelwert vorgeschrieben. In der Gleichung $+\sqrt{x}=-2$ steht links eine positive Größe, rechts aber eine negative. Eine positive Größe kann nicht gleich einer negativen sein.

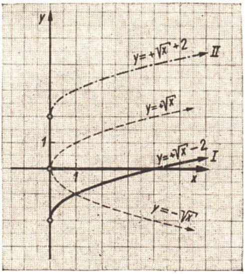


Abb. 61

Zeichnerische Lösung:

Wir stellen die Funktionen I. $y=+\sqrt{x}-2$ und II. $y=+\sqrt{x}+2$ geometrisch dar.

Wertetafel der beiden Funktionen:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
I. y	nicht vorhanden		-2	-1	$-0{,}59$	$-0{,}27$	0	$+0{,}24$	$+0{,}45$
II. y			$+2$	$+3$	$+3{,}41$	$+3{,}73$	$+4$	$+4{,}24$	$+4{,}45$

Beide Funktionen sind nur im Bereich $x \geqq 0$ erklärt. Aus welchen Linienstücken bestehen die Funktionskurven? (Abb. 61.)

Die Nullstellen der Funktionen I und II ergeben die Lösungen der Bestimmungsgleichungen I und II. Kurve I, vom Punkt $(0; -2)$ aus im erklärten Bereich beständig steigend, schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = 4$; Gleichung I hat die Lösung $x_1 = 4$. Kurve II, vom Punkt $(0; +2)$ aus im erklärten Bereich beständig steigend, verläuft vollständig oberhalb der x-Achse. Gleichung II hat keine Lösung; Gleichung II ist unmöglich.

Zum Verlauf der Kurven vergleiche Abb. 40. Durch welche Bewegungen entstehen die Linienstücke der Kurven I und II aus dem positiven Zweig der Kurve $y = \pm\sqrt{x}$ (Abb. 61)?

62. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden Wurzelgleichungen:

a) I. $-\sqrt{x} - 2 = 0$ II. $-\sqrt{x} + 2 = 0$

b) I. $+\sqrt{3x} - 3 = 0$ II. $+\sqrt{3x} + 3 = 0$

III. $-\sqrt{3x} - 3 = 0$ IV. $-\sqrt{3x} + 3 = 0$

c) I. $+\sqrt{x+1} - 2 = 0$ II. $+\sqrt{x+1} + 2 = 0$

III. $-\sqrt{x+1} - 2 = 0$ IV. $-\sqrt{x+1} + 2 = 0$

d) I. $\sqrt{13x-4} - 3 = 0$ II. $\sqrt{13x-4} + 3 = 0$

III. $-\sqrt{13x-4} - 3 = 0$ IV. $-\sqrt{13x-4} + 3 = 0$

e) I. $\sqrt{7x+2} - 4 = 0$ II. $\sqrt{7x+2} + 4 = 0$

III. $-\sqrt{7x+2} - 4 = 0$ IV. $-\sqrt{7x+2} + 4 = 0$!

Anleitung zur Aufgabengruppe e:

Rechnerische Lösung:

Die gegebenen Wurzelgleichungen haben:

I. eine Lösung,	II. keine Lösung, III. keine Lösung, Die Gleichungen sind unmöglich.	IV. eine Lösung.

Zeichnerische Lösung in Abb. 62:

Alle vier Funktionen $y = f(x)$ sind nur im Bereich $x \geqq -\frac{2}{7}$ erklärt. Kurve I und IV schneiden die x-Achse; Gleichung I und IV besitzen je eine Lösung $x_1 = +2$. Kurve II und III schneiden die x-Achse nicht. Kurve II verläuft, vom Punkt $(-\frac{2}{7}; +4)$ aus im erklärten Bereich beständig steigend, vollständig oberhalb der x-Achse. Kurve III verläuft, vom Punkt $(-\frac{2}{7}; -4)$ aus im erklärten Bereich beständig fallend, vollständig unterhalb der x-Achse. Gleichung II und III besitzen keine Lösungen, Gleichung II und III sind unmöglich.

Durch welche Bewegungen entstehen die Linienstücke der Kurven I, II, III und IV aus den beiden Zweigen der Kurve $y = \pm\sqrt{x}$?

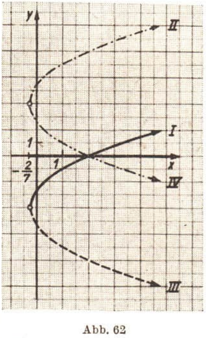


Abb. 62

63. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden Wurzelgleichungen:

a) $\sqrt{7x+2} - \sqrt{5x+6} = 0$ $\sqrt{7x+2} + \sqrt{5x+6} = 0$

$-\sqrt{7x+2} - \sqrt{5x+6} = 0$ $-\sqrt{7x+2} + \sqrt{5x+6} = 0$

b) $4 \cdot \sqrt{7x-3} - 5 \cdot \sqrt{5x-4} = 0$ $4 \cdot \sqrt{7x-3} + 5 \cdot \sqrt{5x-4} = 0$

$-4 \cdot \sqrt{7x-3} - 5 \cdot \sqrt{5x-4} = 0$ $-4 \cdot \sqrt{7x-3} + 5 \cdot \sqrt{5x-4} = 0$

c) $6 \cdot \sqrt{2x+9} - 5 \cdot \sqrt{5x-4} = 0$ $6 \cdot \sqrt{2x+9} - 5 \cdot \sqrt{5x-4} = 0$

$-6 \cdot \sqrt{2x+9} - 5 \cdot \sqrt{5x-4} = 0$ $-6 \cdot \sqrt{2x+9} - 5 \cdot \sqrt{5x-4} = 0$!

64. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden Wurzelgleichungen:

a) **I.** $\sqrt{5x+24}+\sqrt{x+4}-4=0$ **II.** $\sqrt{5x+24}-\sqrt{x+4}-4=0$

III. $-\sqrt{5x+24}+\sqrt{x+4}-4=0$ **IV.** $-\sqrt{5x+24}-\sqrt{x+4}-4=0$

b) **I.** $\sqrt{7x-12}+\sqrt{13-3x}-5=0$ **II.** $\sqrt{7x-12}-\sqrt{13-3x}-5=0$

III. $-\sqrt{7x-12}+\sqrt{13-3x}-5=0$ **IV.** $-\sqrt{7x-12}-\sqrt{13-3x}-5=0$!

Anleitung zur zeichnerischen Lösung der Aufgabengruppe a in Abb. 63, b in Abb. 64.

65. Eine in einer Funktion oder einer Gleichung gegebene Quadratwurzel darf man nur mit dem gegebenen Vorzeichen benutzen. – Geht man aber im Verlaufe einer Rechnung (z. B. beim Lösen von quadratischen oder biquadratischen Gleichungen) zum Quadratwurzelziehen über, so muß man bei diesen Quadratwurzeln das doppelte Vorzeichen Plus oder Minus ($\pm$) benutzen. Erläutere dies an den Lösungen der Aufgaben 60 bis 64!

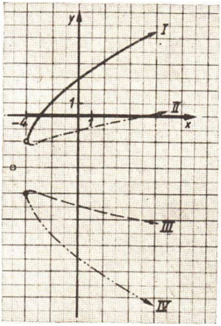


Abb. 63

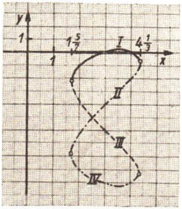


Abb. 64

IX. Angewandte Aufgaben

66. Eine Strecke a soll so geteilt werden, daß die Summe der Quadrate über ihren Teilstrecken **a)** die Hälfte, **b)** $\frac{1}{n}$ des Quadrates über der ganzen Strecke ist. Wie groß sind die beiden Teilstrecken? Für welche Werte von n erhält man nur reelle Lösungen?

67. Zerlege die Zahl 3 in zwei Faktoren, deren Summe 5 ist!

68. Welche Zahl ist doppelt so groß wie ihr Kehrwert?

69. Die Summe aus einer Zahl und ihrem Kehrwert ist gleich $2\frac{1}{6}$. Wie heißt die Zahl?

70. Für Vierkant- und Sechskantmuttern steht die Schlüsselweite s in einem bestimmten Verhältnis zum Eckenmaß e (Abb. 65).

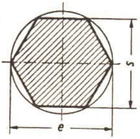


Abb. 65

a) Bestimme die Schlüsselweite s, wenn das Eckenmaß e bekannt ist!

b) Bestimme das Eckenmaß e für eine gegebene Schlüsselweite s!

c) Zeichne in Kreise von 50mm, 80 mm und 120 mm Durchmesser je ein Quadrat und ein regelmäßiges Sechseck! Berechne nach den unter a) und b) abgeleiteten Formeln die Schlüsselweiten und aus diesen wieder die Eckenmaße! Vergleiche die errechneten Werte mit den Maßen der Zeichnungen!

71. Bei Verwendung einer neuen Sorte Rundstahl für eine Fertigung können 25% an Gewicht eingespart werden. Eine Faustformel für das Gewicht von 1 m Rundstahl von d cm Durchmesser ist $G \approx d^2 \cdot 612$, (d in cm; G in p).

a) Begründe die angegebene Faustformel!

b) Wieviel mm kleiner kann der Durchmesser der verwendeten Rundstähle gegenüber den früheren gewählt werden, damit die vorgesehene Ersparnis erzielt wird?

c) Berechne den Durchmesser, der an Stelle von ○-Stahl 95 mm (○-Stahl 45 mm; ○-Stahl 35 mm) verwendet werden kann!

VIII. Algebraische Funktionen

21. Einfache algebraische Funktionen

1. Die Kurve $x^2 + y^2 = 1$

Eine Funktion sei in unentwickelter Form durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

gegeben. In dieser sind beide Veränderlichen x und y vom 2. Grad. Entwickelt man y nach x, so erhält man die Funktion

$$y = f(x) = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Die Funktion $y = f(x) = \pm \sqrt{1 - x^2}$ ist nur im Bereich $-1 \leqq x \leqq +1$ erklärt. Sie ist eine mehrdeutige Funktion.

Die Bildkurve der Funktion (siehe Aufg. 1) ist ein Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt des Achsenkreuzes als Mittelpunkt (Abb. 66). $x^2 + y^2 = 1$ nennt man daher die Mittelpunktsgleichung des Einheitskreises.

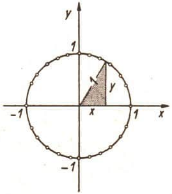


Abb. 66. Die Kurve $x^2 + y^2 = 1$

Die Richtigkeit dieser Aussage ergibt sich folgendermaßen: Verbindet man irgendeinen Punkt $P(x; y)$ der Kurve mit dem Nullpunkt des Achsenkreuzes, dann ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz (Abb. 66) $x^2 + y^2 = 1^2$.

2. Die Kurve $x^2 - y^2 = 1$

Eine Funktion sei in unentwickelter Form durch die Gleichung

$$x^2 - y^2 = 1$$

gegeben. Auch in dieser Gleichung sind beide Veränderlichen x und y vom 2. Grad. Entwickelt man y nach x, so erhält man die Funktion

$$y = f(x) = \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Für x-Werte zwischen $x = -1$ und $x = +1$ ergeben sich für y keine reellen Werte; die Funktion ist für den Bereich $-1 < x < +1$ nicht erklärt.

Die Bildkurve der Funktion ist in Abb. 67 gezeichnet. Sie besitzt im Bereich $-1 < x < +1$ keine Kurvenpunkte. Die Kurve ist nicht geschlossen, sie besteht aus zwei getrennt liegenden Ästen.

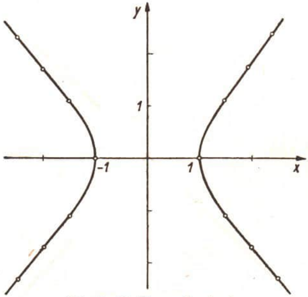


Abb. 67. Die Kurve $x^2 - y^2 = 1$

Die Kurve $x^2 - y^2 = 1$ hat ähnliche Gestalt wie die gleichseitige Hyperbel $xy = 1$ in Abschn. 17, Aufg. 6 (Abb. 35); sie liegt aber anders im Achsenkreuz. Sie ist um den Nullpunkt des Achsenkreuzes um 45° gedreht. Diese andere Lage der Kurve zur x- und y-Achse bewirkt, daß ihre Gleichung eine andere Form als die gleichseitige Hyperbel $xy = 1$ hat.

Die Kurve $x^2 - y^2 = 1$ ist eine gleichseitige Hyperbel.

3. Algebraische Funktionen

In den vorigen Beispielen sind die Funktionen analytisch folgendermaßen dargestellt:

Einheitskreis

$$y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

Gleichseitige Hyperbel

$$y = f(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}.$$

Funktionen $y = f(x)$, die aus der Veränderlichen x durch Anwenden algebraischer Rechenarten – d. h. der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, des Potenzierens und des Radizierens – auf x entstanden sind, gehören zu den algebraischen Funktionen.

Aufgaben

I. Die Kurve $x^2 + y^2 = 1$

1. Stelle die Funktion $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ geometrisch dar!

Anleitung (Abb. 66). Wertetafel der Funktion (Rechenstab als Quadratwurzeltafel):

x	-3	-2	-1	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0	$0{,}2$	...	1	2	3
x^2	9	4	1	0,81	0,64	0,36	0,16	0,04	0	0,04	...	1	4	9
$1 - x^2$	-8	-3	0	0,19	0,36	0,64	0,84	0,96	1	0,96	...	0	-3	-8
$y = \pm\sqrt{1-x^2}$	nicht vorhanden		0	$\pm 0{,}44$	$\pm 0{,}6$	$\pm 0{,}8$	$\pm 0{,}92$	$\pm 0{,}98$	± 1	$\pm 0{,}98$	...	0	nicht vorhanden	

2. Warum besitzt die Kurve $x^2 + y^2 = 1$ außerhalb des Bereiches $-1 \leqq x \leqq +1$ keine Kurvenpunkte?

Anleitung: In welchem x-Bereich liefert die Funktion $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ reelle y-Werte? In welchem Bereich ist die Funktion $y^2 = \pm\sqrt{1 - x^2}$ erklärt? In welchem Bereich liegt die Kurve $x^2 + y^2 = 1$? Vergleiche die Funktionen $y = \pm\sqrt{x}$ und $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ miteinander!

3. Welchen Verlauf und welche Symmetrieeigenschaften hat die Kurve $x^2 + y^2 = 1$?

4. Stelle die Kurven $x^2 + y^2 = r^2$, (r eine positive Konstante), für $r = 2$ und $r = 3$ dar! Welche Kurven erhält man?

5. Zeige, daß $x^2 + y^2 = r^2$ die Mittelpunktsgleichung eines Kreises mit dem Radius r um den Nullpunkt als Mittelpunkt ist!

II. Die Kurve $x^2 - y^2 = 1$

6. Stelle die Kurve $x^2 - y^2 = 1$ zeichnerisch dar!
Anleitung (Abb. 67) Wertetafel der Funktion (Rechenstab als Quadratwurzeltafel):

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
x^2	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$x^2 - 1$	8	5,25	3	1,25	0	$-0{,}75$	-1	$-0{,}75$	0	1,25	3	5,25	8
$y = \pm\sqrt{x^2-1}$	$\pm 2{,}8$	$\pm 2{,}3$	$\pm 1{,}7$	$\pm 1{,}1$	0	nicht vorhanden			0	$\pm 1{,}1$	$\pm 1{,}7$	$\pm 2{,}3$	$\pm 2{,}8$

7. a) Warum besitzt die Kurve $x^2 - y^2 = 1$ im Bereich $-1 < x < +1$ keine Kurvenpunkte?
b) Welchen Verlauf und welche Symmetrieeigenschaften hat die Kurve $x^2 - y^2 = 1$?

8. Vergleiche den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ und die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ miteinander und zeichne beide in ein gemeinsames Achsenkreuz!

9. Stelle die Kurven $x^2 - y^2 = a^2$, (a eine positive Konstante), für $a = 2$ und $a = 3$ dar! Welche Kurven erhält man?

III. Quadratische Gleichungen mit 2 Unbekannten

10. Löse die folgenden Gleichungssysteme durch Zeichnung und Rechnung:

a)
$$\begin{array}{llll} x^2 + y^2 = 25 & x^2 + y^2 = 25 & x^2 + y^2 = 25 & x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - 4y = 0 & 4x - 3y = 0 & 3x + 4y - 25 = 0 & 4x + 3y - 25 = 0 \\[6pt] x^2 + y^2 = 4 & x^2 + y^2 = 2 & x^2 + y^2 = 1 & x^2 + y^2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 & x - y + 2 = 0 & x - y + 2 = 0 & x - y + 2 = 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lll} x^2 - y^2 = 16 & x^2 - y^2 = 16 & x^2 - y^2 = 16 \\ x + y - 6 = 0 & x - 3y - 4 = 0 & 5x - 3y - 16 = 0 \\[6pt] x^2 - y^2 = 9 & x^2 - y^2 = 9 & x^2 - y^2 = 1 \\ x - 2y - 3 = 0 & -5x + 4y - 9 = 0 & 3x - 2y = 0 \\[6pt] x^2 - y^2 = 16 & x^2 - y^2 = 16 & x^2 - y^2 = 9 \\ x - y - 2 = 0 & x - y - 4 = 0 & x - y - 3 = 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{lll} x^2 - y^2 = 16 & x^2 - y^2 = 16 & x^2 - y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 48 & x^2 + y^2 = 16 & x^2 + y^2 = 8 \\[6pt] x^2 - y^2 = 4 & x^2 - y^2 = 4 & x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 12 & x^2 + y^2 = 4 & x^2 + y^2 = 2 \\[6pt] x^2 - y^2 = 12 & x^2 - y^2 = 5 & \\ x^2 + y^2 = 20 & x^2 + y^2 = 13 & \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{lll} x^2 + y^2 = 1 & x^2 - y^2 = 4 & x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 & x^2 - y^2 = 16 & \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}\,! \end{array}$$

Rechnerische Lösung

Ist eine der gegebenen Gleichungen linear, so führt die Einsetzungsmethode stets zum Ziele. Ist $(x^2 \pm y^2)$ und die Differenz $(x - y)$ gegeben, so berechnet man die Summe $(x + y)$ und umgekehrt. Sind $x^2 + y^2$ und $x^2 - y^2$ gegeben, so wendet man die Additionsmethode an.

Zur Bestimmung von zwei Unbekannten sind zwei voneinander unabhängige Gleichungen notwendig. Ein Gleichungssystem hat keine oder keine eindeutigen Lösungen, wenn die Gleichungen sich widersprechen oder identisch sind (Aufgaben d).

IV. Gleichungen mit Wurzeln

11. Löse zeichnerisch und rechnerisch die folgenden Gleichungen:

a)	$\sqrt{1-x^2}-1=0$	$\sqrt{1-x^2}+1=0$
b)	$\sqrt{x^2-1}-1=0$	$\sqrt{x^3-1}+1=0$
c)	$\sqrt{x^2+1}-1=0$	$\sqrt{x^2+1}+1=0$
d)	$x\cdot\sqrt{1-x^2}-x=0$	$x\cdot\sqrt{1-x^2}+x=0$
e)	$x\cdot\sqrt{x^2-1}-x=0$	$x\cdot\sqrt{x^2-1}+x=0$
f)	$x\cdot\sqrt{x^2+1}-x=0$	$x\cdot\sqrt{x^2+1}+x=0$!

Anleitung zur zeichnerischen Lösung der Aufgabe a: Durch welche Bewegung entsteht die Kurve $y=+\sqrt{1-x^2}-1$ aus dem positiven Zweig der Kurve $y=\pm\sqrt{1-x^2}$?

V. Angewandte Aufgaben

12. Damit eine Hohlsäule aus Grauguß die auf ihr ruhende Last tragen kann, ist eine tragende Fläche von 471 cm² erforderlich. Wie groß sind bei kreisförmigem Querschnitt der Säule und einer Wanddicke von 6 cm der äußere und der innere Durchmesser der Säule zu wählen?

13. Aus einem 2 m langen Stück Flachstahl soll ein rechtwinkliges Stützdreieck so gebogen werden daß die eine Kathete doppelt so lang wird wie die andere. Wie lang muß man den Tragarm den Wandarm und die Stütze machen?

14. Zwei Wasserleitungsrohre werden aus einem Hauptrohr gespeist, dessen Durchmesser 900 mm beträgt. Welche Durchmesser müssen die beiden Zweigrohre haben, wenn die Wassergeschwindigkeit in den drei Röhren gleich sein soll und das stärkere Zweigrohr doppelt soviel Wasser führen soll als das kleinere?

15. In einer Blechstanzerei sollen aus kreisrunden Abfallscheiben von 12 cm Durchmesser Rechtecke mit 54 cm² Fläche ausgestanzt werden, deren Diagonale gleich dem Kreisdurchmesser ist. Welche Maße muß der Schnittstempel erhalten?

16. Aus einem 0,5 m³ großen Stahlblock soll ein 5 m langes, nahtloses Stahlrohr mit einer Wanddicke von 6 cm gezogen werden. Wie groß werden der äußere und der lichte Durchmesser des Rohres?

17. Der Umfang eines Baumes wird in 2 m Höhe mit 2,83 m gemessen. Wie groß wird die Grundkante eines Balkens von größtem quadratischem Querschnitt und 2 m Länge, der aus dem Baume geschnitten werden kann?

18. Wie groß müssen die Seiten eines Rechtecks von 1 m² Fläche sein, damit das Quadrat über der kleineren Seite halb so groß wie das Quadrat über der größeren Seite wird?

a) Berechne die Seiten auf Millimeter! b) Bestimme das Seitenverhältnis des Rechtecks!

c) Falte das Rechteck parallel zur kleineren Seite und bestimme das Seitenverhältnis des Teilrechtecks!

d) Bestimme das Verhältnis der Quadrate über den Seiten des Teilrechtecks!

e) Welche Maße ergeben sich durch fortgesetztes Falten des Grundformats für die Seiten der Teilrechtecke (in Millimetern)?

Das in der Aufgabe bestimmte Rechteck ist vom Deutschen Normenausschuß nach DIN 476 als Grundformat für Blattgrößen der Reihe A (DIN A) gewählt worden. Durch fortgesetztes Falten des Grundformats ergeben sich die Teilformate der Blattgrößen der Reihe A. Die Anzahl der ausgeführten Faltungen bezeichnet die Klasse des Teilformats. DIN A 4 bedeutet z. B. das Format, das durch 4fache Faltung aus dem Grundformat entsteht (Briefbogen). DIN A 5 ist das Format dieses Mathematiklehrbuches.

C. Die Exponentialfunktion und ihre Umkehrung

IX. Die Exponentialfunktion und ihre Umkehrung

22. Die Exponentialfunktion

a) Die allgemeine Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$, (*n* eine reelle Zahl)

Rationale Exponenten n. Ersetzt man in der Potenz $y = a^n$ die Basis a durch die Veränderliche x und versteht unter n eine bestimmte rationale Zahl $\frac{p}{q}$, so erhält man die Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$, $\left(n \text{ eine rationale Zahl } \frac{p}{q}\right)$.

Irrationale Exponenten n. Ist n eine Irrationalzahl, so stellt man n mit der geforderten Genauigkeit durch ihren rationalen Näherungsdezimalbruch dar und erhält dadurch die Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$ für irrationales n mit der geforderten Genauigkeit.

b) Die Exponentialfunktion $y = f(x) = a^x$

1. Die Funktion $y = f(x) = a^x$, $(a > 0)$

Gibt man in der Potenz $y = a^n$ dagegen der Basis a einen bestimmten Zahlenwert, z. B. 1, 2 oder 10, ersetzt aber den Exponenten n durch die unabhängige Veränderliche x, so erhält man die Funktionen

$$y = 1^x, \quad y = 2^x, \quad y = 10^x, \quad \text{allgemein} \quad y = a^x, \ (a > 0).$$

Diese Funktionen heißen **Exponentialfunktionen zur Basis 1, 2, 10, a.** Damit die Funktion $y = a^x$ einen Sinn hat, muß die Basis a eine positive Zahl sein. Vergleiche dazu Aufgabe 3. Der Exponent x kann sämtliche positiven und negativen reellen Zahlenwerte annehmen. Wird x negativ, z. B. $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3, \ldots$, so ist

$$y_1 = a^{-1} = \frac{1}{a^1}, \quad y_2 = a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad y_3 = a^{-3} = \frac{1}{a^3}, \quad \ldots$$

Für irrationale Werte von x stellt man den Exponenten mit der geforderten Genauigkeit durch seine rationalen Näherungswerte dar und schließt damit die Werte von a^x für irrationale Exponenten x an die rationalen Werte an.

Zusammenfassung. Aus der Potenz $y = a^n$, (n eine reelle Zahl), entsteht

die Potenzfunktion, wenn die Basis veränderlich wird, $a = x$, und der Exponent n konstant bleibt. $y = x^n$.	die Exponentialfunktion, wenn die Basis a konstant bleibt $(a > 0)$ und der Exponent veränderlich wird, $n = x$. $y = a^x$, $(a > 0)$.

2. Die Exponentialkurve $y = a^x$, $(a > 0)$

In Abb. 68 sind die Exponentialfunktionen

I. $y = 1^x$, II. $y = 2^x$, III. $y = 10^x$

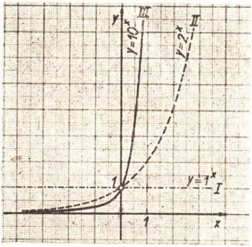


Abb. 68. Die Exponentialfunktionen $y = 1^x$; $y = 2^x$; $y = 10^x$

geometrisch dargestellt. Die Kurve $y = 1^x$ ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1. Die Exponentialkurven $y = a^x$, $(a > 0)$ verlaufen im II. und I. Quadranten. Sie schneiden die y-Achse im Punkt (0; 1), denn es ist $1^0 = 1$, $2^0 = 1$, $10^0 = 1$, $a^0 = 1$. Die Exponentialfunktionen $y = a^x$, $(a > 1)$ sind im ganzen x-Bereich erklärt, sie sind eindeutige Funktionen, ihre Kurven sind beständig steigend. Schreitet man vom Nullpunkt aus auf der x-Achse zu Werten -1, -2, -3, ... zurück, so nähern sich diese Exponentialkurven asymptotisch der x-Achse.

3. Das Additionstheorem der Exponentialfunktion

Für zwei beliebige Werte x_1 und x_2 der Veränderlichen x gilt das **Additionstheorem**[1]) **der Exponentialfunktion** $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$.

Veranschauliche das Gesetz an den Exponentialkurven der Abb. 68.

Aufgaben

1. Stelle die Exponentialfunktion $y = 1^x$ geometrisch dar (Abb. 68)!
2. Stelle die Exponentialfunktionen $y = 2^x$ und $y = 10^x$ geometrisch dar!

Anleitung (Abb. 68).
Wertetafel für die Exponentialfunktion $y = 2^x$ (auf 2 Dezimalstellen genau):

x	-4	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
y	0,06	0,13	0,25	0,5	1	1,41	2	2,83	4	5,66	8	16

Wertetafel für die Exponentialfunktion $y = 10^x$ (auf 2 Dezimalstellen genau):

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0,00	0,01	0,1	0,31	1	1,78	3,16	5,62	10	31,62	100

3. Stelle die Funktion $y = (-1)^x$ geometrisch dar!

Anleitung (Abb. 69). Wertetafeln für die Funktion $y = (-1)^x$.
Wertetafel für ganzzahlige Werte von x (vgl. Abschn. 14, b):

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1

1) Theorem (gr.) bedeutet mathematischer Grundsatz, Rechengesetz.

Wertetafeln für Bruchwerte von x (vgl. Abschn. 20b):

$x = 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \ldots$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
y	+1	nicht vorhanden	− 1	nicht vorhanden	+ 1	nicht vorhanden	− 1

$x = 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \ldots$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
y	+1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1

$x = 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \ldots$

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2
y	+1	nicht vorhanden			− 1	nicht vorhanden			+ 1

$x = 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \ldots,$

x	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
y	+1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1

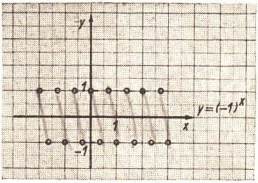


Abb. 69. Die Funktion $y = (-1)^x$

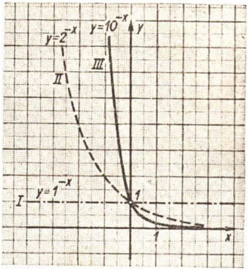


Abb. 70. Die Exponentialfunktionen $y=1^{-x}$; $y=2^{-x}$; $y=10^{-x}$

Das Bild der Funktion $y = (-1)^x$ besteht nur aus einzelnen reellen Punkten (Abb. 69). Die Funktion springt zwischen den Werten $+1$ und -1 dauernd hin und her. Das Bild der Funktion $y = (-1)^x$ ist keine Kurve mehr. Ähnlich verhalten sich die Funktionen $y = (-2)^x = 2^x \cdot (-1)^x$, $y = (-10)^x = 10^x \cdot (-1)^x$, $y = (-a)^x = a^x \cdot (-1)^x$.

Die Exponentialfunktion $y = a^x$ ist nur für eine positive Basis a erklärt: $y = a^x$, $(a > 0)$.

4. Stelle die Funktionen I. $y = 1^{-x}$; II. $y = 2^{-x}$; III. $y = 10^{-x}$ geometrisch dar! Wie liegen die Exponentialkurven $y = 1^x$ und $y = 1^{-x}$, $y = 2^x$ und $y = 2^{-x}$, $y = 10^x$ und $y = 10^{-x}$ zueinander? (Abb. 70 und 68.) Welches sind steigende, welches fallende Exponentialkurven?

23. Die Umkehrung der Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion

a) Der Logarithmus einer Zahl n

1. Praktische Bedeutung der Logarithmen

In der Potenz $y = 2^n$ setzen wir für den Exponenten n die Zahlenwerte $n = 0, 1, 2, \ldots, 20$ ein und stellen eine „Exponententafel zur Basis 2" auf.

$y = 2^n$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$y = 2^n$	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576
n	13	14	15	16	17	18	19	20

Wie kann man aus dieser Tafel die Ergebnisse der folgenden Rechenaufgaben ablesen: $4096 \cdot 128$, $524288 : 32768$, 64^3, $\sqrt[5]{1048576}$? Gilt dieses für beliebige Zahlen n?

2. Der Logarithmus einer Zahl n

a) Die Basis 2.

Setzt man in der Potenz $y = 2^n$ für den Exponenten n die Zahlenwerte 1, 2, 3, ... ein, so erhält man durch Anwenden der Potenzrechnung für die gesuchten Potenzwerte y die Gleichungen

$$y = 2^1 = 2, \quad y = 2^2 = 4, \quad y = 2^3 = 8, \quad \ldots .$$

Kehrt man die Rechnung um, d. h. ist der Potenzwert gegeben, dagegen der *Exponent gesucht* (gleich y), so erhält man für die Exponenten die Gleichungen

$$2^y = 2, \qquad 2^y = 4, \qquad 2^y = 8, \quad \ldots .$$

Aus diesen Gleichungen, z. B. aus $2^y = 8$, läßt sich der unbekannte Exponent y durch die bisherigen Rechenarten – etwa durch Wurzelziehen! – *nicht* berechnen. Nur durch Vergleichen mit den vorigen Ergebnissen oder durch Probieren kann man für den Exponenten den Zahlenwert $y = 3$ finden.

Zur *Berechnung des Exponenten* y führt man eine *neue Rechenart*, das **Logarithmieren,** ein. Man schreibt

$$y = {}^2\log 8, \quad \text{lies:} \quad \textbf{Logarithmus von 8 zur Basis 2.}$$

Die Zahl 2, die *Basis* der ursprünglichen Potenz, heißt auch **Basis des Logarithmus,** der ursprüngliche *Potenzwert* 8 heißt jetzt **Numerus**[1]), der *Exponent* y **Logarithmus.**

Ursprüngliche Exponentialform $\underset{\text{Basis}}{2}^{\overset{\text{Exponent}}{y}} = \underset{\text{Potenzwert}}{8}$.

Neue Logarithmusform $\overset{\text{Logarithmus}}{y} = \underset{\text{Basis}}{{}^2}\log \underset{\text{Numerus}}{8}$.

Logarithmus einer Zahl n zur Basis 2 nennt man den Exponenten y, mit dem man 2 potenzieren muß, um den Numerus n zu erhalten.

Exponentialform $2^y = n$, | **Logarithmusform** $y = {}^2\log n$.

Logarithmus bestimmen heißt *Potenzexponenten* zur gegebenen Basis finden!

---

1) numerus (lat.) heißt die Zahl. Die Mehrzahl von Numerus heißt „Die Numeri".

b) Die Basis 10.

Setzt man in der Potenz $y = 10^n$ für den Exponenten n die Zahlenwerte 1, 2, 3, ... ein, so erhält man durch Anwenden der Potenzrechnung für die gesuchten Potenzwerte y die Gleichungen

$$y = 10^1 = 10, \quad y = 10^2 = 100, \quad y = 10^3 = 1000, \quad \ldots .$$

Kehrt man die Rechnung um, d. h. ist der Potenzwert gegeben, dagegen der Exponent gesucht (gleich y), so erhält man für die Exponenten y die Gleichungen

$$10^y = 10, \qquad 10^y = 100, \qquad 10^y = 1000, \quad \ldots,$$

oder unter Verwendung des Rechenzeichens log die Gleichungen

$$y = {}^{10}\log 10, \qquad y = {}^{10}\log 100, \qquad y = {}^{10}\log 1000, \quad \ldots .$$

Logarithmus einer Zahl n zur Basis 10 nennt man den Exponenten y, mit dem man 10 potenzieren muß, um den Numerus n zu erhalten.

Exponentialform $10^y = n,$	**Logarithmusform** $y = {}^{10}\log n.$

c) Die Basis a.

In der Potenz $y = a^n$ ist der Exponent n zur Basis a gegeben, der Potenzwert y gesucht. Es ist
$$y = a^n, \quad (a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1).$$

Kehrt man die Rechnung um, d. h. ist der Potenzwert gegeben (gleich n), dagegen der Exponent zur Basis a gesucht (gleich y), so erhält man die Gleichung

$a^y = n$ oder, unter Verwendung des Rechenzeichens log,

$y = {}^a\log n$ (lies: Logarithmus von n zur Basis a).

Logarithmus einer Zahl n zur Basis a nennt man den Exponenten y, mit dem man a potenzieren muß, um n zu erhalten.

Exponentialform $a^y = n,$ **Logarithmusform** $y = {}^a\log n.$

Das Logarithmieren ist die zweite Umkehrung des Potenzierens.

b) Die Logarithmusfunktion

1. Die Logarithmusfunktion $y = {}^a\log x$

Die Exponentialfunktionen $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = a^x$ als Stammfunktionen haben die Umkehrfunktionen $y = {}^2\log x$, $y = {}^{10}\log x$, $y = {}^a\log x$.

Diese Funktionen heißen **Logarithmusfunktionen zur Basis 2, 10, a,** $(a > 0$ und $a \neq 1)$.

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrung der Exponentialfunktion.

Stammfunktion $y = f(x)$,	Umkehrfunktion $y = g(x)$.
Exponentialfunktion	Logarithmusfunktion
$y = f_1(x) = 2^x$	$y = g_1(x) = {}^2\log x$
$y = f_2(x) = 10^x$	$y = g_2(x) = {}^{10}\log x$
$y = f(x) = a^x$, $(a > 0$ und $a \neq 1)$,	$y = g(x) = {}^a\log x$.

2. Die Logarithmuskurve

In Abb. 71 sind die Funktionen $y = {}^{2}\log x$ und $y = {}^{10}\log x$ geometrisch dargestellt. Die Logarithmuskurve ist die Umkehrung der entsprechenden Exponentialkurve. Stamm- und Umkehrkurve liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$. (Siehe Abb. 72 und 73.) Die Logarithmuskurven verlaufen nur im IV. und I. Quadranten, sie sind beständig steigend.

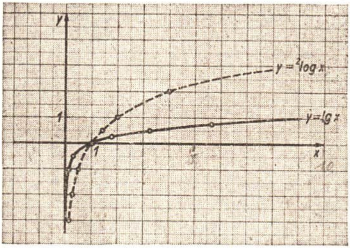


Abb. 71. Die Logarithmusfunktionen $y = {}^{2}\log x$ und $y = \lg x$

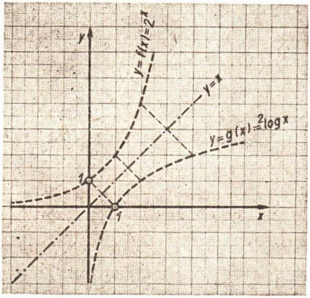


Abb. 72. $y = f(x) = 2^x$ und $y = g(x) = {}^{2}\log x$

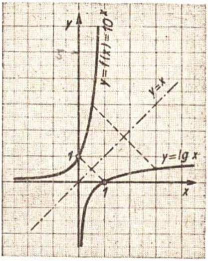


Abb. 73. $y = f(x) = 10^x$ und $y = g(x) = \lg x$

Die Kurve $y = {}^{1}\log x$ oder $1^y = x$ ist eine Parallele zur y-Achse im Abstand $x = 1$ (Abb. 74 und Aufg. 12). Die Funktion $y = {}^{1}\log x$ ist nur an der Stelle $x = 1$ erklärt und kann für $x = 1$ jeden (positiven oder negativen) y-Wert annehmen. **$a = 1$ ist als logarithmische Basis unbrauchbar.**

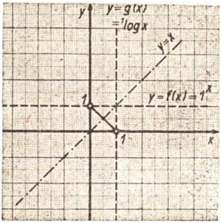


Abb. 74. $y = f(x) = 1^x$ und $y = g(x) = {}^{1}\log x$

Die Funktion $y = {}^{a}\log x$, $(a > 0$ und $a \neq 1)$, ist nur für positive x-Werte erklärt.

Alle Logarithmuskurven schneiden die x-Achse im Punkt $(1; 0)$, denn es ist

$$ {}^{2}\log 1 = 0 \quad \text{oder} \quad 2^0 = 1, $$

$$ {}^{10}\log 1 = 0 \quad \text{oder} \quad 10^0 = 1, $$

$$ {}^{a}\log 1 = 0 \quad \text{oder} \quad a^0 = 1 \quad (a > 0). $$

3. Die Logarithmusfunktion $y = \lg x$

Die Logarithmusfunktion zur Basis 10 ist besonders übersichtlich (vgl. Aufg. 11). Ihre Funktionswerte werden **Zehnerlogarithmen** oder **dekadische**[1] **Logarithmen** genannt und mit $\lg x$ bezeichnet. Es ist

$$\lg x = {}^{10}\log x .$$

Für negative x-Werte und für $x = 0$ ist die Funktion $y = \lg x$ nicht erklärt, **Logarithmen negativer Numeri gibt es nicht.** Für jeden positiven Wert von x ist die Funktion $y = \lg x$ erklärt, zu jedem positiven Numerus x gehört ein Wert von $y = \lg x$ (Abb. 71). Man kann also jede positive Zahl x in **Exponentialform mit der Basis 10** darstellen; es ist

$$x = 10^y, \quad \text{wo} \quad y = \lg x \quad \text{ist.}$$

c) Die dekadischen Logarithmen der positiven ganzen Zahlen

1. Der Logarithmus $\lg n$, (n eine positive ganze Zahl)

Abb. 71 zeigt für die dekadischen Logarithmen der ganzen Zahlen: Logarithmen negativer Zahlen gibt es nicht. Der Logarithmus von 1 ist gleich 0. Die Logarithmen aller Zahlen $n > 1$ ergeben positive Zahlenwerte.

Die Logarithmen der meisten ganzen Zahlen sind **Irrationalzahlen.**

Beispiel: Beweis der Irrationalität von lg 2.
Der Zahlenwert von lg 2 muß zwischen den ganzen Zahlen 0 und 1 liegen (Aufg. 16),

$$0 < \lg 2 < 1, \qquad \text{denn es ist} \quad 10^0 < 2 < 10^1 \quad \text{oder} \quad 1 < 2 < 10.$$

lg 2 kann also keine ganze Zahl sein. – Wir nehmen an, lg 2 sei gleich einem Bruch $\frac{p}{q}$. $\quad \lg 2 = \frac{p}{q}$, ($p$ und q ganze Zahlen und teilerfremd).

Dann müßte $10^{\frac{p}{q}} = 2$ oder, mit q potenziert, $10^p = 2^q$ sein. Die Gleichung $10^p = 2^q$, (p und q ganze Zahlen), ist aber nie möglich, denn 2^q ergibt stets Zahlen mit der letzten Ziffer 2, 4, 6 oder 8, dagegen 10^p stets Zahlen mit der letzten Ziffer 0.

lg 2 kann also auch nicht ein Bruch $\frac{p}{q}$ oder eine rationale Zahl werden.

lg 2 kann nur eine Irrationalzahl werden. lg 2 läßt sich mit jeder geforderten Genauigkeit durch einen rationalen Näherungsdezimalbruch darstellen; auf 2 Stellen genau ist $\lg 2 = 0.30$ (Aufg. 16), auf 4 Stellen genau ist $\lg 2 = 0.3010$.

Der Logarithmus einer Zahl n besteht aus zwei Teilen, der Zahl vor dem Komma oder **Kennzahl** und der Ziffernfolge hinter dem Komma oder **Mantisse**[2]. Die Kennzahl des Logarithmus hängt nur von der Stellenzahl des Numerus ab; sie ist um 1 kleiner als die Stellenzahl der Numeri (siehe Aufg. 18 und 19).

---

1) deka (gr.) heißt zehn. Die dekadischen Logarithmen heißen auch gewöhnliche oder Briggssche Logarithmen, nach Henry Briggs, 1556—1630, Oxford, der sie als einer der ersten berechnete.

2) mantissa (lat.) heißt Zugabe, Anhängsel.

Die Mantisse hängt nur von der Ziffernfolge des Numerus ab. Für Rechnungen wird die Mantisse gewöhnlich auf 3 oder 4 Stellen angegeben.
Kennzahl und Mantisse eines Logarithmus werden gewöhnlich nicht durch ein Komma, sondern durch einen Punkt getrennt. Die Rechnung wird nämlich übersichtlicher, wenn die Dezimalstellen der Numeri durch Kommata, die Dezimalstellen der Logarithmen aber durch Punkte abgetrennt werden.

2. Die Logarithmentafel

Die Logarithmen aller Numeri zur Basis 10 bilden das **dekadische Logarithmensystem.** Zum Aufsuchen der Logarithmen zu gegebenen Numeri und umgekehrt dient die **Logarithmentafel.** Ihre Angaben sind nicht auf zeichnerischem Wege bestimmt, sondern mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik berechnet. Die dekadische Logarithmentafel enthält nicht die Logarithmen, sondern nur die Mantissen der Logarithmen; die Kennzahlen sind in jedem Einzelfall selbständig zu bestimmen. Die Logarithmentafel gibt die rationalen Näherungswerte der Logarithmen auf 4 Stellen genau an; Berechnungen mit ihrer Hilfe sind Rechnungen mit Näherungsdezimalbrüchen von 4 Stellen Genauigkeit.

Aufgaben

I. Der Logarithmus einer Zahl n

1. Stelle für die Potenz $y = 2^n$ eine Exponententafel zur Basis 2 für $n = 1, 2, 3, \ldots, 20$ auf und berechne die folgenden Zahlenausdrücke:

a) $512 \cdot 256$; $2\,048 \cdot 128$; **b)** $\frac{65\,536}{1\,024}$; $\frac{524\,288}{2\,048}$; **c)** 32^3; 16^5; 256^2; 1024^2;

d) $\sqrt[3]{32\,768}$; $\sqrt[4]{65\,536}$; $\sqrt[5]{1\,048\,576}$; $\sqrt[6]{262\,144}$; $\sqrt[7]{16\,384}$; $\sqrt[8]{65\,536}$; $\sqrt[9]{262\,144}$!

2. a) Kann man aus der Exponententafel zur Basis 2 auch die Ergebnisse der folgenden Aufgaben ablesen: $499 \cdot 256$; $36\,536 : 1\,024$; 29^3; $\sqrt[3]{4\,000}$? Warum nicht?

b) Wie müßte man für beliebige ganze Zahlen y die Exponententafel zur Basis 2 erweitern?

c) An welcher Funktionskurve kann man die fehlenden Exponentenwerte ablesen? Welche Exponenten x gehören danach zu den Zahlen $y = 3, 5, 6, 7, 9, 10$ (vgl. Abb. 68)?

d) Stelle für die Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ eine solche Tafel auf! Was ist über die Genauigkeit einer solchen Exponententafel zu sagen?

3. Logarithmen zur Basis 2. Wie groß sind die Exponenten y in den folgenden Gleichungen: $2^y = 2$; $2^y = 8$; $2^y = 16$; $2^y = 64$; $2^y = 256$; $2^y = 2\,048$; $2^y = 8\,192$; $2^y = 65\,536$? Schreibe die Gleichungen in Logarithmusform!

4. Logarithmen zur Basis 10.

a) Stelle eine Exponententafel zur Basis 10 auf! Welche einfachen Ergebnisse findet man?

b) Entnimm aus der Funktionskurve $y = 10^x$ (Abb. 68) die x-Werte für die Zwischenwerte $y = 2, 3, 4, 5, \ldots, 10$ und stelle sie in einer Exponententafel zusammen! Was ist über die Genauigkeit dieser Exponententafel zu sagen?

5. Wie groß sind die Exponenten y in den folgenden Gleichungen: $10^y = 10$, $10^y = 1\,000$, $10^y = 10\,000$, $10^y = 1\,000\,000$? Schreibe die Gleichungen in Logarithmusform!

6. a) Wie groß sind lg 100, lg 1 000, lg 100 000, lg 10, lg 1?

b) Erkläre die Identitäten: $10^{\lg 100} = 100$, $10^{\lg 1000} = 1\,000$, $10^{\lg 10} = 10$, $10^{\lg 1} = 1$!

II. Die Logarithmusfunktion $y = {}^a\log x$

7. Zeichne die Kurve $y = {}^2\log x$ und beschreibe ihren Verlauf und ihre Eigenschaften!
Anleitung (Abb. 71). Wertetafel der Kurve $y = {}^2\log x$ oder $2^y = x$ (auf 2 Dezimalstellen genau).

x	$\frac{1}{16} = 0{,}06$	$\frac{1}{8} = 0{,}13$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	1	$\sqrt{2} = 1{,}41$	2	4	8
y	-4	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	1	2	3

8. Zeichne die Kurve $y = {}^2\log x$ als Umkehrung der Exponentialkurve $y = 2^x$ (vgl. Abb. 72)!

9. Zeichne die Kurve $y = \lg x$ und beschreibe ihren Verlauf und ihre Eigenschaften!
Anleitung (Abb. 71). Wertetafel der Kurve $y = \lg x$ oder $10^y = x$ (auf 2 Dezimalstellen genau).

x	$10^{-2} = 0{,}01$	$10^{-1} = 0{,}1$	$10^{-\frac{1}{2}} = 0{,}32$	$10^0 = 1$	$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = 1{,}78$	$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}16$	$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{1\,000} = 5{,}62$	$10^1 = 10$
y	-2	-1	$-0{,}5$	0	0,25	0,5	0,75	1

10. Zeichne die Kurve $y = \lg x$ als Umkehrung der Exponentialkurve $y = 10^x$ (vgl. Abb. 73)!

11. Warum ist die Funktion $y = \lg x$ besonders übersichtlich (vgl. Aufg. 4, 5, 6)?

12. Zeichne die Kurve $y = {}^1\log x$ oder $1^y = x$
a) punktweise über eine Wertetafel; **b)** als Umkehrung der Exponentialkurve $y = 1^x$ (Abb. 74)!

13. Warum ist $a = 1$ als logarithmische Basis unbrauchbar?

14. Warum sind alle negativen Zahlen als logarithmische Basis unmöglich?
Anleitung: Vergleiche Abschn. 22, Aufgabe 3 und Abb. 69. Wie sehen die Umkehrkurven zu den Stammkurven $y = (-1)^x$; $y = (-2)^x$; $y = (-10)^x$; ... aus?

III. Die dekadischen Logarithmen der positiven ganzen Zahlen

15. Beschreibe den Verlauf der Kurve $y = \lg x$, wenn man auf der x-Achse von der Stelle $x = 1$ **a)** fortschreitet zu Werten $x = 2, 3, \ldots$, **b)** zurückschreitet gegen den Nullpunkt! Welcher Geraden nähert sich die Kurve, wenn man beim Zurückschreiten sich dem Nullpunkt nähert?
c) Wie groß sind die Logarithmen der positiven ganzen Zahlen n, wenn $n = 1$; $n > 1$ ist?
d) Gibt es Logarithmen negativer Numeri?

16. Stelle die Funktion $y = \lg x$ für den Bereich $1 \leqq x \leqq 10$ geometrisch möglichst genau dar und stelle nach der Zeichnung eine Wertetafel der dekadischen Logarithmen zu den Numeri $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$ auf!
Anleitung: Wähle als x-Einheit 1 cm, als y-Einheit 5 cm. Zeichengenauigkeit 2 Dezimalstellen.

17. Stelle die Ergebnisse der Aufgabe 16 in Logarithmusform und in Exponentialform zusammen!
Anleitung:

Logarithmusform	Exponentialform	
	Exponent ausgerechnet	Exponent unausgerechnet
$\lg 1 = 0$	$1 = 10^0$	$1 = 10^{\lg 1}$
$\lg 2 = 0.30$	$2 = 10^{0.30}$	$2 = 10^{\lg 2}$
...	...	...
$\lg 9 = 0.95$	$9 = 10^{0.95}$	$9 = 10^{\lg 9}$
$\lg 10 = 1$	$10 = 10^1$	$10 = 10^{\lg 10}$

18. Identitäten. Wodurch unterscheiden sich voneinander

a) $7 \cdot 5$ und 35; $6 \cdot 8$ und 48; $16:2$ und 8; $24:4$ und 6; $24:8$, $12:4$, $6:2$ und 3?

b) 5^3 und 125; 7^4 und 2 401; 2^5 und 32; 3^6 und 729;
$\pm\sqrt{81}$ und ± 9; $\pm\sqrt{2}$ und $\pm 1{,}414$; $\sqrt[3]{64}$ und 4; $\sqrt[3]{10}$ und 2,154?

c) lg 1 000 und 3; lg 100 und 2; lg 10 und 1; lg 2 und 0.3010; lg 3 und 0.4771; lg 4 und 0.6021; lg 5 und 0.6990; lg 8 und 0.9031; lg 9 und 0.9542?

d) $10^{2 \cdot 3}$ und 10^6; $10^{(2^3)}$ und 10^8; $10^{\sqrt{9}}$ und 10^3; $10^{\lg 100}$ und 10^2; $10^{\lg 2}$ und $10^{0.30}$; $10^{\lg 5}$ und $10^{0.70}$; $10^{\lg 3}$ und $10^{0.48}$ (auf 2 Dezimalstellen genau)?

e) Wie groß sind die ausgerechneten Zahlenwerte der Aufgabe d?

f) Erkläre die Identitäten $10^{\lg 2} = 2$, $10^{\lg 3} = 3$, $10^{\lg 5} = 5$, $10^{\lg n} = n$!

g) Jede positive Zahl n läßt sich in der Exponentialform $n = 10^{\lg n}$ darstellen!

19. Zwischen welchen Grenzen liegen die dekadischen Logarithmen aller einstelligen, zweistelligen, dreistelligen ... ganzen Zahlen?

Anleitung ($\lg x$ auf 1 Dezimalstelle genau):

	einstellige		zweistellige		dreistellige		vierstellige Zahlen	
x	1 ...	9	10 ...	99	100 ...	999	1 000	...
$\lg x$	**0** ...	0.9	**1** ...	1.9	**2** ...	2.9	**3**	...

20. Welche Form haben die dekadischen Logarithmen aller einstelligen, zweistelligen, dreistelligen ... ganzen Zahlen?

Anleitung:

Einstellige ganze Zahlen: $\lg x =$ **0.** ····; Beispiele lg 2 = 0.3010, lg 9 = 0.9542.
Zweistellige ganze Zahlen: $\lg x =$ **1.** ····; Beispiele lg 11 = 1.0414, lg 99 = 1.9956.
Dreistellige ganze Zahlen: $\lg x =$ **2.** ····; Beispiele lg 101 = 2.0043, lg 999 = 2.9996.

21. Beweise die Irrationalität von lg 3, lg 4, lg 5, lg 6!

22. Welche Zahlenwerte haben die folgenden Logarithmen:

a) lg 15, lg 27, lg 67, lg 57, lg 96, lg 12

b) lg 500, lg 50, lg 5, lg 700, lg 70, lg 7, lg 200, lg 20, lg 2, lg 4, lg 8, lg 16, lg 32, lg 64

c) lg 106, lg 103, lg 105, lg 203, lg 576, lg 476, lg 376

d) lg 1 026, lg 1 056, lg 1 049, lg 1 028, lg 1 098, lg 1 073, lg 1 029, lg 1 079, lg 1 097

e) lg 4 147, lg 4 342, lg 4 558, lg 4 273, lg 2 147, lg 2 178, lg 2 846, lg 7 874, lg 8 656, lg 7 246, lg 6 066, lg 8 954

f) lg 1 867, lg 2 958, lg 1 588, lg 7 946, lg 5 018, lg 1 999, lg 2 517, lg 3 168, lg 3 987, lg 5 015?

Anleitung zum Aufschlagen von Logarithmen, Beispiel $y = \lg 2\,643$.

I. Bestimmen der Kennzahl: 3. ···· (sprich: „drei Punkt“ ····).

II. Aufschlagen der Mantisse mit der Logarithmentafel:

Die drei ersten Ziffern ergeben: lg 264 (sprich: „26 Spalte 4“) = 3.4216.
Der Logarithmenwert der vierten Ziffer **3** wird interpoliert. Der Numerus 2643 liegt zwischen 2640 und 2650 (Numerusdifferenz 10), also liegt der Logarithmus zwischen 4216 und 4232 (Tafeldifferenz $D = 16$).

10 entspricht die Tafeldifferenz 16,	allgemein	10 entspricht die Tafeldifferenz D,
3 „ „ Eigendifferenz d.		n „ „ Eigendifferenz d.

$$10 \mathrel{\hat{=}} 16 \qquad\qquad 10 \mathrel{\hat{=}} D$$
$$3 \mathrel{\hat{=}} d \qquad\qquad n \mathrel{\hat{=}} d$$

Eigendifferenz $d = \dfrac{3 \cdot 16}{10} = 4{,}8$ Eigendifferenz $d = \dfrac{n \cdot D}{10}$

III. Runden der Eigendifferenz beim Interpolieren: Bei 0, 1, 2, 3, 4 hinter dem Komma wird die Eigendifferenz d abgerundet, bei 5, 6, 7, 8, 9 hinter dem Komma aufgerundet. Also ist lg 2 643 = 3.4221.

23. Wie groß sind die Numeri x der folgenden Logarithmen:

a)	$\lg x = 0.9031$	$\lg x = 2.5611$	$\lg x = 2.8344$	$\lg x = 0.8451$
	$\lg x = 2.5729$	$\lg x = 3.3711$	$\lg x = 4.6990$	$\lg x = 4.9320$
b)	$\lg x = 3.0306$	$\lg x = 3.0103$	$\lg x = 3.0310$	$\lg x = 3.0406$
	$\lg x = 3.0187$	$\lg x = 3.0410$	$\lg x = 3.0013$	$\lg x = 3.0000$
c)	$\lg x = 3.0086$	$\lg x = 3.8027$	$\lg x = 3.9313$	$\lg x = 3.3480$
	$\lg x = 3.1070$	$\lg x = 3.4169$	$\lg x = 3.6080$	$\lg x = 3.7550$
d)	$\lg x = 3.6125$	$\lg x = 3.2038$	$\lg x = 3.5310$	$\lg x = 3.9028$
	$\lg x = 3.7922$	$\lg x = 3.2300$	$\lg x = 4.3800$	$\lg x = 4.6900$
e)	$\lg x = 3.4405$	$\lg x = 3.2010$	$\lg x = 3.5005$	$\lg x = 3.0202$
	$\lg x = 3.0401$	$\lg x = 3.9002$?	$\lg x = 4.7800$	$\lg x = 4.9000$?

Anleitung: Bestimme I. die Stellenzahl des Numerus aus der Kennzahl des Logarithmus, II. die Ziffernfolge des Numerus aus der Mantisse des Logarithmus!

24. Das Rechnen mit Logarithmen

a) Einführung

Berechne mit den bisherigen Rechenmitteln die folgenden Zahlenausdrücke:

a) $x = 525{,}2 \cdot 5$ und $x = 525{,}2 : 5$, b) $x = 525{,}2^5$ und $x = \sqrt[5]{525{,}2}$, c) $1{,}71^x = 5$!

Die Aufgaben a lassen sich durch Multiplizieren und Dividieren ausrechnen. Die Berechnung der Potenz $x = 525{,}2^5$ ist durch mehrmaliges Anwenden der Multiplikation mit 525,2 langwierig, aber ausführbar. Bei der Wurzelaufgabe $x = \sqrt[5]{525{,}2}$ und der Exponentialaufgabe $1{,}71^x = 5$ versagen die bisherigen Rechenmittel. Die Lösung der beiden letzten Aufgaben erfordert die Anwendung der Logarithmenrechnung.

Wie rechnet man mit Logarithmen? Die Rechengesetze für Logarithmen werden im folgenden für dekadische Logarithmen abgeleitet, sie gelten jedoch für jede positive Basis a, $(a \neq 1)$.

b) Die Rechengesetze für Logarithmen

Die Rechengesetze für dekadische Logarithmen leiten sich aus den Potenzgesetzen für die Basis 10 her.

1. Die Logarithmengesetze

a) Logarithmieren eines Produkts und eines Quotienten oder Bruches.

1. Logarithmengesetz oder logarithmisches Hauptgesetz:

$$\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b \quad \textbf{(Produkt).}$$

2. Logarithmengesetz: $$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b \quad \textbf{(Quotient, Bruch).}$$

Beweis des logarithmischen Hauptgesetzes:
Jede positive Zahl läßt sich als Potenz mit der Grundzahl 10 darstellen. Es ist

$$a = 10^{\lg a}$$

und $$b = 10^{\lg b}.$$

Also ist $$(a \cdot b) = 10^{\lg a} \cdot 10^{\lg b} = 10^{(\lg a + \lg b)}$$ (Additionstheorem der Exponentialfunktion).

Logarithmiert $$\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b.$$

In gleicher Weise läßt sich das 2. Logarithmengesetz beweisen.

Für n Faktoren $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ lautet das logarithmische Hauptgesetz:

$$\lg (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = \lg a_1 + \lg a_2 + \cdots + \lg a_n.$$

b) Logarithmieren einer Potenz und einer Wurzel.

3. Logarithmengesetz: $$\lg a^n = n \cdot \lg a \quad \textbf{(Potenz).}$$

4. Logarithmengesetz: $$\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \lg a \quad \textbf{(Wurzel).}$$

Beweis des 3. Logarithmengesetzes. Es ist $a = 10^{\lg a}$

und $a^n = 10^{n \cdot \lg a}$ (5. Potenzgesetz).

Logarithmiert $\lg a^n = n \cdot \lg a.$

Im 4. Logarithmengesetz ist $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$,

also ist nach dem 3. Logarithmengesetz $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \lg a.$

2. Logarithmieren von Summen und Differenzen

Logarithmenrechnung ist Exponentenrechnung zur Basis 10. **Die Rechenzeichen + und — unterbrechen die Logarithmenrechnung.** Vgl. dazu Abschn. 16, die Potenzgesetze!

c) Die Logarithmen der Zahlen $n > 1$, positive Kennzahl

1. Die geltenden Ziffern einer Ziffernfolge

Die Zahl 4365000 hat die Ziffernfolge 4, 3, 6, 5, 0, 0, 0. Die Zahl 0,004365 hat die Ziffernfolge 0, 0, 0, 4, 3, 6, 5.
Läßt man die Anfangs- und Endnullen einer Ziffernfolge weg, so erhält man die Folge der geltenden Ziffern. Die Zahlen 4365000 und 0,004365 haben dieselbe Folge der geltenden Ziffern, nämlich 4, 3, 6, 5. Ebenso haben die Zahlen 3004000 und 0,003004 dieselbe Folge der geltenden Ziffern, 3, 0, 0, 4.

2. Multiplikation eines Numerus mit 10, 100, 1 000, . . .

Wie wirkt die Multiplikation eines Numerus mit 10, 100, . . . auf den Logarithmus? Als Numerus sei z. B. die Zahl $n = 4365$ gewählt.

Numerus	Logarithmus
4 365	lg 4 365 = **3.**6400
4 365 · 10 = 43 650	lg 43 650 = lg (4 365 · 10) = lg 4 365 + lg 10 = 3.6400 + 1 = **4.**6400
4 365 · 100 = 436 500	lg 436 500 = lg (4 365 · 100) = lg 4 365 + lg 100 = 3.6400 + 2 = **5.**6400
4 365 · 1 000 = 4 365 000	lg 4 365 000 = lg (4 365 · 1 000) = lg 4 365 + lg 1 000 = 3.6400 + 3 = **6.**6400

Multipliziert man einen Numerus mit 10, 100, 1000, . . ., so wächst nur die Kennzahl des Logarithmus um 1, 2, 3, ... Die Mantisse bleibt unverändert.

3. Division eines Numerus durch 10, 100, 1000, . . .

Wie wirkt die Division eines Numerus durch 10, 100, 1000, . . . auf den Logarithmus? Als Numerus sei wieder die Zahl $n = 4365$ gewählt.

Numerus	Logarithmus
4 365	lg 4 365 = **3.**6400
$\frac{4\,365}{10} = 436{,}5$	$\lg 436{,}5 = \lg \frac{4\,365}{10} = \lg 4\,365 - \lg 10 = 3.6400 - 1 = \mathbf{2.}6400$
$\frac{4\,365}{100} = 43{,}65$	$\lg 43{,}65 = \lg \frac{4\,365}{100} = \lg 4\,365 - \lg 100 = 3.6400 - 2 = \mathbf{1.}6400$
$\frac{4\,365}{1\,000} = 4{,}365$	$\lg 4{,}365 = 3.6400 - 3 = \mathbf{0.}6400$

Dividiert man einen Numerus durch 10, 100, 1000, so fällt nur die Kennzahl des Logarithmus um 1, 2, 3. Die Mantisse bleibt unverändert.

4. Die Logarithmen der Zahlen $n > 1$, positive Kennzahl

Die **Kennzahl eines Logarithmus** hängt nur von der **Stellenzahl des Numerus vor dem Komma** ab, die **Mantisse** nur von der Folge der **geltenden Ziffern des Numerus** und umgekehrt.

Merkregel für die Logarithmen der Zahlen $n > 1$, positive Kennzahl

Numerus gegeben, Logarithmus gesucht: Die Kennzahl des Logarithmus ist um 1 kleiner als die Stellenzahl vor dem Komma.

Logarithmus gegeben, Numerus gesucht: Die Stellenzahl des Numerus vor dem Komma ist um 1 größer als die Kennzahl.

Die Logarithmen aller Zahlen $n > 1$ ergeben positive Zahlenwerte.

d) Die Logarithmen der positiven Zahlen $n < 1$, negative Kennzahl.

1. Weitere Division eines Numerus durch 10, 100, 1000, ...

Welchen Wert erhält der Logarithmus, wenn man den Numerus 4,365 weiter durch 10, 100, 1000, . . . dividiert?

Numerus	Logarithmus
4 365	lg 4 365 $= \mathbf{3.}6400$
$\frac{4\,365}{10} = 436{,}5$	lg 436,5 $= \lg \frac{4\,365}{10} = 3.6400 - 1 = \mathbf{2.}6400$
$\frac{436{,}5}{10} = 43{,}65$	lg 43,65 $= \lg \frac{436{,}5}{10} = 2.6400 - 1 = \mathbf{1.}6400$
$\frac{43{,}65}{10} = 4{,}365$	lg 4,365 $= \lg \frac{43{,}65}{10} = 1.6400 - 1 = \mathbf{0.}6400$
$\frac{4{,}365}{10} = 0{,}436\,5$	lg 0,436 5 $= \lg \frac{4{,}365}{10} = \mathbf{0.}6400 \mathbf{-1} \quad = -0.3600$
$\frac{4{,}365}{100} = 0{,}043\,65$	lg 0,043 65 $= \lg \frac{4{,}365}{100} = \mathbf{0.}6400 \mathbf{-2} \quad = -1.3600$
$\frac{4{,}365}{1\,000} = 0{,}004\,365$	lg 0,004 365 $= \lg \frac{4{,}365}{1\,000} = \mathbf{0.}6400 \mathbf{-3} \quad = -2.3600$

Die Logarithmen der positiven Zahlen $n < 1$ ergeben negative Zahlenwerte.

2. Negative Kennzahlen von Logarithmen

Die Logarithmen der positiven Zahlen $n < 1$ kann man in unausgerechneter Form als Differenzen oder in ausgerechneter Form als Zahlen mit negativem Vorzeichen darstellen.

Beispiele:

$$\begin{array}{llll}
\lg 4{,}365 = 0.6400, & & \lg 4{,}365 = & 0.6400; \\
\lg 0{,}4365 = 0.6400 - \mathbf{1}, & & \lg 0{,}4365 = & -0.3600; \\
\lg 0{,}04365 = 0.6400 - \mathbf{2}, & & \lg 0{,}04365 = & -1.3600; \\
\quad \dots & & \quad \dots & \\
\lg 7 = 0.8451, & & \lg 7 = & 0.8451; \\
\lg 0{,}7 = 0.8451 - \mathbf{1}, & & \lg 0{,}7 = & -0.1549; \\
\lg 0{,}07 = 0.8451 - \mathbf{2}, & & \lg 0{,}07 = & -1.1549; \\
\quad \dots & & \quad \dots &
\end{array}$$

Schreibt man die Logarithmen als Differenzen, so bleibt die Mantisse des Logarithmus unverändert, nur die Kennzahl wird negativ.

Schreibt man dagegen die Logarithmen in ausgerechneter Form als Zahlen mit negativem Vorzeichen, so ändern sich die Mantissen der Logarithmen; aus 6400 wird 3600, aus 8451 wird 1549 usw. Bei dieser Schreibweise müßte man in der Logarithmentafel zur Ziffernfolge eines jeden Numerus zwei Mantissen angeben, die eine für den Numerus $n > 1$, die zweite für $n < 1$. Das ist praktisch nicht durchführbar. Auch für praktisches Rechnen hat die Schreibweise mit negativer Kennzahl für die Logarithmen der positiven Zahlen $n < 1$ entscheidende Vorteile (siehe Aufg. 12).

3. Die Logarithmen der positiven Zahlen $n < 1$.

Die Logarithmen aller positiven Zahlen $n < 1$ besitzen negative Kennzahlen. Die **negative Kennzahl eines Logarithmus** hängt nur von der **Anzahl der Nullen** des Numerus **vor und hinter dem Komma** ab, die **Mantisse** nur von der Folge der **geltenden Ziffern des Numerus** und umgekehrt.

Merkregel für die Logarithmen der positiven Zahlen $n < 1$, negative Kennzahl.

Numerus gegeben, Logarithmus gesucht:	Logarithmus gegeben, Numerus gesucht:
Die negative Kennzahl des Logarithmus ist gleich der Gesamtzahl der Nullen vor und hinter dem Komma.	Die Anzahl der Nullen des Numerus vor und hinter dem Komma ist gleich der negativen Kennzahl.

e) Das Rechnen mit Logarithmen

1. Logarithmische Ausrechnung von Zahlenausdrücken

Größere Zahlenausdrücke lassen sich mit Hilfe der Logarithmen näherungsweise ausrechnen (Aufgaben 17 bis 19). Die Rechenzeichen + und − unterbrechen die logarithmische Ausrechnung eines Zahlenausdruckes, Addition und Subtraktion müssen mit den Numeruswerten selbst ausgeführt werden.

2. Exponentialgleichungen

Wie löst man die Bestimmungsgleichung $1{,}71^x = 5$ von Seite 110, Beispiel c?

An Bestimmungsgleichungen für die Unbekannte x sind bisher aufgetreten:
Gleichungen 1. Grades oder lineare Gleichungen in x, z. B. $x - 3 = 0$, $2x - 5 = 0$,
Gleichungen 2. Grades oder quadratische Gleichungen in x, z. B.

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad 16x^2 - 40x + 7 = 0,$$

Gleichungen 3. Grades in x, z. B. $x^3 - 7x + 6 = 0$,
Gleichungen 4. Grades in x, z. B. $x^4 - 35x^2 + 216 = 0$ (biquadratische Gleichung).

In allen Gleichungen kommt die Unbekannte x als Basis einer Potenz mit positiven, ganzen Exponenten vor, die Koeffizienten der einzelnen Glieder sind rationale Zahlen, die zugehörige Funktion $y = f(x)$ ist eine ganze rationale Funktion von x. Bestimmungsgleichungen dieser Art heißen **algebraische Gleichungen.** Die höchste Potenz von x gibt den **Grad** der algebraischen Gleichung an. Algebraische Gleichungen 1. bis 4. Grades lassen sich algebraisch lösen, d. h. unter Verwendung der algebraischen Rechenarten Addition–Subtraktion, Multiplikation–Division und des Potenzierens und Radizierens. Ihre Lösungen oder Wurzeln sind rationale oder irrationale Zahlen. Löse die angegebenen Gleichungen (siehe auch Aufgabe 20)!

Die Bestimmungsgleichung $1{,}71^x = 5$ ist keine algebraische Gleichung. Gleichungen, in denen die Unbekannte x im Exponenten steht, heißen **Exponential-**

gleichungen. Exponentialgleichungen lassen sich im allgemeinen nicht durch Anwenden der algebraischen Rechenarten – (etwa durch „Ziehen der x-ten Wurzel!“) – lösen. Zur Auflösung nach x **logarithmiert** man die gegebene Gleichung und erhält

$$x \cdot \lg 1{,}71 = \lg 5\,.$$

Setzt man für die Logarithmen ihre Zahlenwerte (Näherungswerte) ein, so erhält man

$$0{,}2330 \cdot x = 0{,}6990\,,$$
$$x = 3{,}000\,.$$

Die Lösung ist eine Näherungslösung. Warum muß man $x = 3{,}000$ schreiben und nicht $x = 3$? (Siehe auch Aufgabe 21.)
Die Lösungen von Exponentialgleichungen sind **Irrationalzahlen** – bis auf gewisse Sonderfälle, wie z. B. die Gleichungen $2^x = 8$; $10^x = 10000$; $7^x = 49$, in denen $8 = 2^3$; $10000 = 10^4$; $49 = 7^2$ ist und damit $x = 3$; $x = 4$; $x = 2$ wird.

f) Die logarithmische Teilung und die logarithmische Funktionsskala

1. Die logarithmische Teilung

Trägt man auf einer Strecke von 10 cm als Einheit die Werte der dekadischen Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10 auf, also $\lg 1 = 0$, $\lg 2 = 0{,}301$, $\lg 3 = 0{,}477$, ..., $\lg 10 = 1$ (Abb. 75), benennt aber die Teilstriche nicht mit $\lg x$, sondern mit den Numeri $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$, so erhält man eine **logarithmische Teilung** von 10 cm Teilungslänge. Der Nullpunkt der Teilung trägt jetzt die Zahl 1, der Einheitspunkt die Zahl 10.

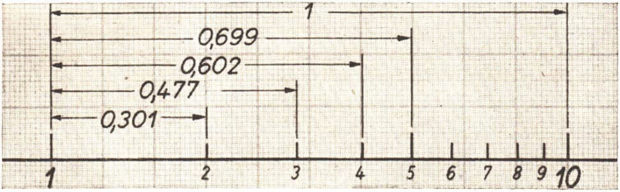


Abb. 75. Logarithmische Teilung

Das Kennzeichen einer logarithmischen Teilung ist die ungleichmäßige Anordnung ihrer Teilpunkte, diese rücken nach größeren Zahlenwerten zu immer dichter aneinander.

2. Die logarithmische Funktionsskala

Erweitert man die Teilung der Einheit in gleicher Weise nach rechts und nach links, so erhält man kongruente logarithmische Teilungen hinzu,

nach rechts für 10; 20; 30; ...; 100 oder für die Einheit $(1, 2, 3, \ldots, 10) \cdot 10^1$,
nach links für 0,1; 0,2; 0,3; ...; 1 oder für die Einheit $(1, 2, 3, \ldots, 10) \cdot 10^{-1}$.

Setzt man den x-Werten 1, 10, 100, ... der logarithmischen Teilung noch die y-Werte 0, 1, 2, ... hinzu, so erhält man eine **zeichnerische Wertetafel** oder eine **Skala**[1]) für

1) scala (lat.) heißt Leiter, hier „Funktionsleiter“.

die Funktion $y = \lg x$, eine **logarithmische Funktionsskala.** In Abb. 76 und 77 a und b sind drei logarithmische Teilungen von 5 bzw. von 1 cm Teilungslänge dargestellt. Wo liegen die Nullpunkte der zugehörigen logarithmischen Funktionsskalen? Wie

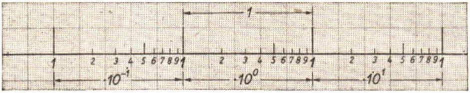


Abb. 76. Logarithmische Teilung

laufen die Teilungen der logarithmischen Funktionsskalen zu Abb. 76, 77 a und 77 b? Die beiden ersten Skalen sind logarithmische Funktionsskalen mit **normallaufender logarithmischer Teilung.** Skala 77 b ist eine logarithmische Funktionsskala mit **gegenläufiger logarithmischer Teilung.**

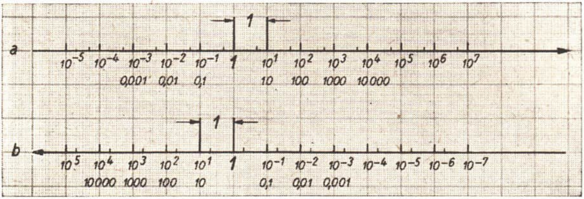


Abb. 77. a) Normallaufende logarithmische Teilung, b) gegenläufige logarithmische Teilung

3. Zwei gegeneinander verschiebbare logarithmische Teilungen

Trägt man auf einen Pappstreifen eine logarithmische Teilung von 25 cm Teilungslänge auf und schneidet den Streifen in der Längsrichtung der Teilung auf, so erhält

Abb. 78

man zwei gegeneinander verschiebbare, kongruente logarithmische Teilungen C und D (Abb. 78). Wie kann man mit C und D weitere Teilpunkte für ihre Teilungen gewinnen (siehe Aufgabe 29 und Abb. 90)? Wie kann man mit den beiden gegeneinander verschiebbaren logarithmischen Teilungen einfache Multiplikationen und Divisionen ausführen?

g) Der logarithmische Rechenstab

1. Die Teilungen des logarithmischen Rechenstabes

Der logarithmische Rechenstab besteht aus drei Teilen, dem Stab, der Zunge und dem Läufer mit Ablesestrich (Abb. 79).

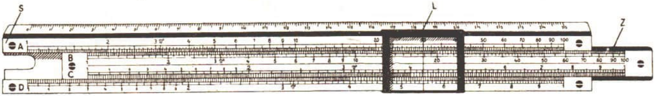


Abb. 79. Rechenstab; S = Stab, Z = Zunge, L = Läufer mit Ablesestrich

Der am häufigsten benutzte Rechenstab hat eine Länge von 25 cm. Er trägt zwei Paare gegeneinander verschiebbarer logarithmischer Teilungen C, D und A, B. D und A sind *Stab*teilungen, C und B *Zungen*teilungen. Die Teilungen C und D sind untereinander kongruent, sie umfassen jede auf *einer* logarithmischen Teilungseinheit von 25 cm Teilungslänge den Bereich von 1 bis 10; die Teilungen A und B sind gleichfalls untereinander kongruent, aber sie umfassen jede auf 25 cm Gesamtlänge *zwei* logarithmische Teilungseinheiten von je 12,5 cm Teilungslänge, den Bereich von 1 bis 10 und den Bereich von 10 bis 100.

Das Kennzeichen des Rechenstabes ist die *ungleichmäßige* Art der *Unterteilung der logarithmischen Einheit.*
Teilungen C und D: Wie ist die *Teilung zwischen den Zehnteln* in den Bereichen 1 bis 2, 2 bis 4 und 4 bis 10? *Wieviel geltende Ziffern* kann man in diesen Bereichen **ablesen,** welche geltende Ziffer muß man **schätzen?**
Teilungen A und B: Wie ist die Teilung zwischen den Zehnteln in den Bereichen 1 bis 2, 2 bis 5 und 5 bis 10? Wieviel geltende Ziffern kann man in diesen Bereichen **ablesen,** welche geltende Ziffer muß man **schätzen?**

Das **Schätzen** der letzten geltenden Ziffer. Beim Rechenstab wird das Ergebnis einer Rechnung mit dem Ablesestrich des Läufers (dem „Läuferstrich") markiert. Die *beiden ersten geltenden Ziffern* werden *abgelesen* (für Zahlen 1 . . . der Teilungen C und D die *drei* ersten geltenden Ziffern), die *nächste geltende Ziffer* wird *geschätzt.*
Beim Schätzen ist von der *Mitte des freien Feldes* auszugehen und die letzte geltende Ziffer in Zehnteln zu schätzen (*Zehntelschätzung!*). Von der Eigenart der logarithmischen Teilung, daß die Teilstriche nach rechts zu enger aufeinanderfolgen, ist beim Schätzen *kein* Gebrauch zu machen, es ist *linear* zu interpolieren!

Genauigkeit *des Rechenstabes.* Beim Rechnen mit dem Rechenstab liest man auf diesem mit Sicherheit die beiden ersten geltenden Ziffern ab, für Zahlen 1 . . . der Teilungen C und D die *drei* ersten geltenden Ziffern. Die nächste geltende Ziffer muß geschätzt werden. Die Ablesegenauigkeit auf den Teilungen C und D ist doppelt so groß wie die auf den Teilungen A und B. Die Genauigkeit des Rechenstabes genügt für die meisten Fälle des praktischen Rechnens in der Mathematik und Technik.

2. Das Rechnen mit dem Rechenstab

a) *Allgemeine Regeln für das Stabrechnen.* Um den Rechenstab mit voller Genauigkeit auszunützen, wird möglichst auf den *Grundteilungen* C und D *gerechnet.*
Stellenzahl und Kommastellung des Rechenergebnisses sind *vor* der Einstellung des Rechenstabes zu bestimmen. Dazu ist vor jeder Einstellung am Rechenstab die Aufgabe in die *Schreibweise der Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen* umzuformen und eine *Überschlagsrechnung* durchzuführen, die nur so genau zu sein braucht, daß die Kommastellung des Ergebnisses entschieden ist.

Beispiel: $x = \frac{0{,}523 \cdot 17{,}14}{4{,}56 \cdot 0{,}0432}$.

Schreibweise der Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen: $\frac{5{,}23 \cdot 10^{-1} \cdot 1{,}714 \cdot 10^{1}}{4{,}56 \cdot 4{,}32 \cdot 10^{-2}} = \frac{5{,}23 \cdot 1{,}714}{4{,}56 \cdot 4{,}32} \cdot 10^2$

Überschlag: $x \approx \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 4} \cdot 10^2 = 0{,}5 \cdot 10^2 = 5\,.\,.$

Stabrechnung: $x = 45{,}5$ (auf 3 Stellen genau).

b) Zur Abkürzung bezeichnen wir Punkt 1 auf Teilung D mit D1; Punkt 2 auf D mit D2; Punkt a auf D mit Da. Es bedeuten C1 Punkt 1 auf Teilung C; C2 Punkt 2 auf C; Cb Punkt b auf C usw.

c) Multiplikation. Beispiel: $x = 0{,}1762 \cdot 34{,}3$ (Abb. 80).

Schreibweise der Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen: $1{,}762 \cdot 3{,}43$, Überschlag: $x \approx 6, .\,.$

Stabrechnung: Einstellen C1 über D1762; Läuferstrich auf C343.
Ablesen auf D unter C343; $x = 6{,}04$.

Beweis: Nach dem 1. Logarithmengesetz ist $\lg a + \lg b = \lg (ab)$ (Abb. 80).

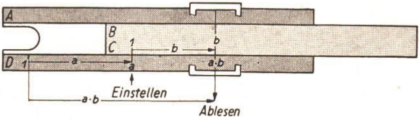


Abb. 80

d) Multiplikation mit Rückschlag. Liegt bei der Einstellung Cb rechts von D10 in der rechten Nachbarteilung, so wird die Zunge durchgeschoben (Abb. 81). a und b werden in der kongruenten linken Nachbarteilung eingestellt, das Ergebnis in der Hauptteilung abgelesen. Man nennt diese Stabrechnung Multiplikation mit Rückschlag.

Beispiel (Abb. 81): $x = 4{,}05 \cdot 0{,}0725$.

Schreibweise der Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen: $4{,}05 \cdot 7{,}25 \cdot 10^{-2}$, Überschlag: $x \approx 0{,}2\,.\,.$

Stabrechnung: Einstellen C10 über D405; Läuferstrich auf C725.
Ablesen auf D unter C725; $x = 0{,}294$.

Die Notwendigkeit zum Rückschlag der Zunge ergibt sich aus dem Überschlag.

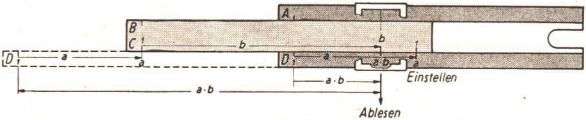


Abb. 81

e) Division. Beispiel I (Abb. 82): $x = \frac{77{,}5}{0{,}515}$.

Schreibweise der Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen: $\frac{7{,}75}{5{,}15} \cdot 10^2$, Überschlag: $x \approx 1\ldots$.

Stabrechnung: Einstellen C 515 über D 775; Läuferstrich auf C 1.
Ablesen auf D unter C 1; $x = 150{,}5$.

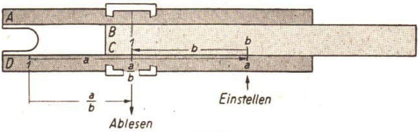


Abb. 82

Beispiel II (Abb. 83): $x = \frac{0{,}435}{87{,}5}$.

Schreibweise der Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen: $\frac{4{,}35}{8{,}75} \cdot 10^{-2}$, Überschlag: $x \approx 0{,}004\ldots$

Stabrechnung: Einstellen C 875 über D 435; Läuferstrich auf C 10.
Ablesen auf D unter C 10; $x = 0{,}00497$.

Rückschlag der Zunge ist nicht notwendig.

Beweis: Nach dem 2. Logarithmengesetz ist $\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$ (Abb. 82 u. 83).

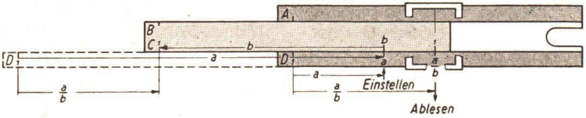


Abb. 83

f) Multiplikation und Division. $x = \frac{a \cdot c}{b}$ (Abb. 84).

An die Division $\frac{a}{b}$ läßt sich die Multiplikation mit c ohne neue Zungeneinstellung anschließen. – Regel: Beginne beim Ausrechnen von $\frac{a \cdot c}{b}$ stets mit der Division!

Beweis: $$\lg a - \lg b + \lg c = \lg \frac{a \cdot c}{b} \quad \text{(Abb. 84)}.$$

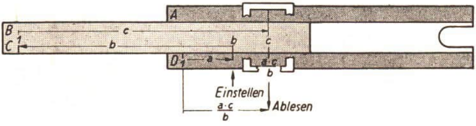


Abb. 84

g) Quadrieren und Wurzelziehen; 2. Potenz und 2. Wurzel.

Wir setzen jetzt die Teilungen A und D (B und C) zueinander in Beziehung. Die Längeneinheit von Teilung A ist gleich 12,5 cm; von D gleich 25 cm. Der Maßstab der Teilung A ist $\frac{1}{2}$ vom Maßstab der Teilung D. Dasselbe gilt für Teilung B und C.

Stellt man senkrecht übereinander auf Teilung D eine Zahl d und auf Teilung A eine Zahl a mit dem Läuferstrich ein, so gilt in Richtung

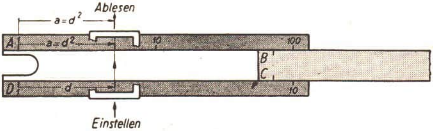


Abb. 85

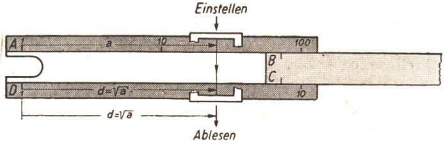


Abb. 86

von D nach A (Abb. 85) $\lg a = 2 \cdot \lg d$,	von A nach D (Abb. 86) $\lg d = \frac{1}{2} \lg a$,
(3. Logarithmengesetz) $\lg a = \lg d^2$,	(4. Logarithmengesetz) $\lg d = \lg \sqrt{a}$,
Quadrieren $a = d^2$.	Wurzelziehen $d = \sqrt{a}$.

Beispiele:	$x = 0{,}164^2$,	$x = \sqrt{0{,}4}$.
Schreibweise der Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen:	$(1{,}64 \cdot 10^{-1})^2$	$\sqrt{40 \cdot 10^{-2}}$ [1])
Überschlag:	$x \approx 0{,}02\,..$	$x \approx 0{,}6\,..$
Stabrechnung:	$x = 0{,}0269$	$x = 0{,}632$

Wie kann man mit den Teilungen D, B und A die 3. Potenz und die 3. Wurzel[2]) berechnen? Siehe Abb. 87!

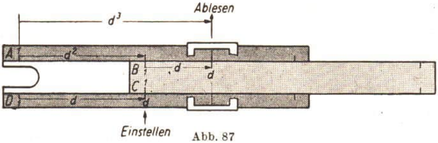


Abb. 87

1) Abteilen des Radikanden der Quadratwurzel vom Komma aus in Gruppen zu je zwei Stellen!

2) Manche Rechenstäbe führen auf dem Stab über der Teilung A eine dritte Teilung, die Kubikteilung K. K enthält die Kubikzahlen von D, D die Kubikwurzeln von K. Wie ist die Unterteilung von K?

h) Proportionen. Die Berechnung einer Proportion ist ein Hauptanwendungsgebiet des Rechenstabes, auf dem er alle anderen Rechenhilfsmittel übertrifft. Der Rechenstab löst mit einer Verhältniseinstellung – der Einstellung des Schlüssels der Proportion – nicht nur die vorgelegte Aufgabe, sondern die Gesamtheit der möglichen Aufgaben der ganzen Fragestellung. (Aufgaben 29, 33 und 34.)

Beispiel: Für beliebige Winkel soll Gradmaß in Bogenmaß umgerechnet werden!

Es verhält sich (vgl. Abschn. 32d) $\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\hat{b}}{\pi}$ oder $\frac{\alpha}{\hat{b}} = \frac{180}{\pi}$.

$\frac{180}{\pi}$ ist der Schlüssel der Proportion, seine Einstellung auf dem Rechenstab löst alle Umrechnungen von Gradmaß in Bogenmaß und umgekehrt (Abb. 88 und Aufgabe 39).

Abb. 88.

Aufgaben

I. Die Rechengesetze für lg x

1. Prüfe das logarithmische Hauptgesetz an den folgenden Zahlenbeispielen nach: lg (2 · 3), lg (3 · 5), lg 24, lg 72, lg 36, lg 20, lg 96, lg 64!
Anleitung: Zerlege 24 in 2 · 12, 3 · 8, 4 · 6, 2 · 2 · 2 · 3!

2. Prüfe das 2. Logarithmengesetz an den folgenden Zahlenbeispielen nach: $\lg\frac{16}{4}$, $\lg\frac{64}{8}$, $\lg\frac{75}{5}$, $\lg\frac{100}{10}$!

3. Beweise das 3. Logarithmengesetz mit dem logarithmischen Hauptgesetz!
Anleitung: Zerlege $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren a)!

4. Prüfe das 3. Logarithmengesetz für die folgenden Zahlenbeispiele nach: $\lg 2^3$, $\lg 5^2$, $\lg 3^5$!

5. Prüfe das 4. Logarithmengesetz nach für $\lg\sqrt{64}$, $\lg\sqrt[3]{64}$, $\lg\sqrt[4]{64}$, $\lg\sqrt[6]{64}$, $\lg\sqrt[12]{64}$!

6. Welcher Unterschied ist zwischen lg (2 · 3) und lg 2 · 3, $\lg\frac{2}{3}$ und $\frac{\lg 2}{3}$, $\lg 2^3$ und $(\lg 2)^3$, $\lg\sqrt[2]{2}$ und $\sqrt[2]{\lg 2}$? Wie schreibt man lg 2 · 3 und lg 2 : 3 eindeutiger?

II. Dekadische Logarithmen mit positiver Kennzahl

7. Wie lautet die Folge der geltenden Ziffern für die Zahlen
a) 34 000; 0,0340; 23 450; 0,002 345 **b)** 2 005; 200 500; 0,200 500; 0,030 450?

8. Wie ändert sich der Logarithmus, wenn der Numerus **a)** 2, **b)** 52, **c)** 263, **d)** 5 624 mit 10, 100, 1 000, ... multipliziert wird? Was ändert sich am Logarithmus, was bleibt unverändert?

9. Wie ändert sich der Logarithmus, wenn der Numerus 708 000 durch 10, 100, ..., 100 000 dividiert wird? Was ändert sich am Logarithmus, was bleibt unverändert?

10. Welche Zahlenwerte haben
a) lg 2,996; lg 16,99; lg 229,8; lg 8 094; lg 9,395; lg 489,7; lg 73,94; lg 319 900
b) lg 7,948; lg 17,78; lg 316,8; lg 7,945; lg 147,9; lg 2,348; lg 371,9; lg 66 080; lg 558 900; lg 437 800; lg 8 008; lg 57 570; lg 346 800; lg 501 800
c) lg 1,073; lg 10,26; lg 109,8; lg 1,077; lg 104,9; lg 1 029; lg 1 079?

11. Wie groß sind die Numeri der folgenden Logarithmen:

a) $\lg x = 0.3004$ $\quad \lg x = 2.5402$ $\quad \lg x = 0.4711$ $\quad \lg x = 0.9002$
$\lg x = 2.9503$ $\quad \lg x = 0.7006$ $\quad \lg x = 1.7807$ $\quad \lg x = 3.4435$

b) $\lg x = 1.6019$ $\quad \lg x = 2.9029$ $\quad \lg x = 0.1758$ $\quad \lg x = 0.3975$
$\lg x = 0.0395$ $\quad \lg x = 0.0789$ $\quad \lg x = 0.0643$ $\quad \lg x = 0.0567$?

III. Dekadische Logarithmen mit negativer Kennzahl

12. Wie ändert sich der Logarithmus, wenn der Numerus **a)** 20; **b)** 52; **c)** 26,3; **d)** 56,24 durch 10, 100, 1 000, ... dividiert wird? In welchen beiden Formen kann man den Logarithmus schreiben, wenn der Numerus $n < 1$ wird? Welche Form ist vorteilhaft, welche unvorteilhaft?

13. Man berechne den Zahlenausdruck $173{,}8 \cdot 0{,}043\,65 \cdot 708 \cdot 0{,}001\,862$, indem man für die Logarithmen der Zahlen $n < 1$ **a)** negative Kennzahlen, **b)** die Zahlenwerte mit negativem Vorzeichen benutzt!

14. Wie groß sind

a) lg 0,70; lg 0,040 9; lg 0,005; lg 0,88; lg 0,050 9; lg 0,007 88; lg 0,012 3; lg 0,537

b) lg 0,699 8; lg 0,439 3; lg 0,739 6; lg 0,005 391; lg 0,007 925; lg 0,003 979; lg 0,107 7; lg 0,109 8; lg 0,001 028; lg 0,001 048; lg 0,107 650; lg 0,102 870

c) lg 7,689; lg 0,756; lg 4,356; lg 0,079 2; lg 90,85; lg 9,777; lg 0,903 1; lg 0,098 76?

15. Berechne x aus

a) $\lg x = 0.7782 - 1$ $\quad \lg x = 0.4771 - 2$ $\quad \lg x = 0.6571 - 1$
$\lg x = 0.4456 - 1$ $\quad \lg x = 0.9165 - 3$ $\quad \lg x = 0.8756 - 2$

b) $\lg x = 0.9002 - 1$ $\quad \lg x = 0.5401 - 2$ $\quad \lg x = 0.6002 - 1$
$\lg x = 0.3003 - 1$ $\quad \lg x = 0.6900 - 2$ $\quad \lg x = 0.7401 - 1$

c) $\lg x = 0.0306$ $\quad \lg x = 0.0216$ $\quad \lg x = 0.0050$ $\quad \lg x = 0.0060$!

16. Berechne

a) lg 0,363 6; lg 0,063 4; lg 0,005 7; lg 0,003 8; lg 0,4677

b) $\lg x = 0.7000$; $\lg x = 0.8101$; $\lg x = 0.6700$; $\lg x = 0.8028$!

IV. Das Rechnen mit Logarithmen

Berechne die folgenden Zahlenausdrücke:

17. a) $2{,}385 \cdot 11{,}05 \cdot 17{,}81$; $\quad \dfrac{469.7}{9{,}434}$; $\quad \dfrac{7{,}543^3 \cdot 21{,}09^2}{15{,}12^4}$; $\quad \sqrt[3]{\dfrac{73{,}21^2}{104{,}6}}$

b) $0{,}738 \cdot 0{,}0846$; $\quad \dfrac{0{,}436}{0{,}0736}$; $\quad 0{,}0744^3$; $\quad \sqrt[5]{0{,}0436}$; $\quad \sqrt[3]{0{,}0234^2}$; $\quad \sqrt{0{,}456^3}$; $\quad \sqrt[4]{0{,}576^3}$

c) $\dfrac{7{,}547^3 \cdot 21{,}09}{15{,}12^2}$; $\quad \dfrac{1{,}093^6 \cdot 128{,}5}{54{,}93 \cdot 2{,}435^3}$; $\quad \dfrac{2{,}456 \cdot 17{,}85^2}{1{,}033 \cdot 5{,}18^3}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{456{,}5 \cdot 73{,}22^2}{104{,}7}}$; $\quad \sqrt[5]{\dfrac{4{,}38^2 \cdot 96{,}87}{8{,}176 \cdot 3{,}041^2}}$; $\quad \sqrt[5]{\dfrac{38{,}42 \cdot 26{,}44^3}{45{,}91 \cdot \sqrt[4]{96}}}$; $\quad \sqrt[7]{\dfrac{16 \cdot 7^5}{456 \cdot \sqrt[3]{84\,600}}}$; $\quad \sqrt[8]{\dfrac{3{,}467^6 \cdot 219}{377 \cdot \sqrt[4]{856^3}}}$!

Anleitung:

Mache zuerst einen Überschlag mit abgetrennten Zehnerpotenzen! Entwirf dann für jede Aufgabe mit Buchstaben einen Plan für die logarithmische Berechnung der Zahlenausdrücke!

18. **a)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$; **b)** $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$; $\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}}$: **c)** $\sqrt[5]{3\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}}$; $\sqrt[5]{4\sqrt[4]{3\sqrt[3]{2}}}$

19. **a)** $\sqrt[4]{7{,}56^2 - \sqrt[2]{0{,}9}}$; $\sqrt[4]{29{,}3^2 - \frac{11{,}47^3}{\sqrt[4]{42\,460}}}$; $\sqrt{\frac{\sqrt[4]{0{,}006\,7}}{6{,}43^2} - \frac{0{,}86^5}{\sqrt[4]{96}}}$

b) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

c) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

Vergleiche hierzu Abschn. 31, Aufg. 35.

V. Exponentialgleichungen

20. Löse die folgenden algebraischen Gleichungen in x:

a) $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $2x - 5 = 0$, $3x + 4 = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 2x - 2 = 0$, $x^2 -$ [illegible] $- 1 = 0$, $16x^2 - 40x + 7 = 0$

c) $x^3 - 8 = 0$, $x^3 - 3 = 0$, $x^3 - 7x + 6 = 0$, $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

d) $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$, $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$, $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, $x^4 - 35x^2 + 216 = 0$!

Anleitung zu c: Zerlege in Faktoren!

$x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6x + 6 = x \cdot (x^2 - 1) - 6 \cdot (x - 1) = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 6)$;

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2 \cdot (x - 2) - (x - 2) = (x - 2) \cdot (x^2 - 1)$!

21. Löse die folgenden Exponentialgleichungen:

a) $2^x = 8$; $2^x = 64$; $5^x = 25$; $5^{3x} = 125$; $3^{3x} = 81$, $10^{2x} = 100$, $10^{2x} = 1000$, $10^{3x} = 100$

b) $10^x = 0{,}01$; $2^x = \frac{1}{32}$; $3^{3x} = \frac{1}{27}$; $5^{3x} = \frac{1}{125}$

c) $10^x = 3{,}162$; $2^x = 180{,}9$; $10^x = 2^{10}$; $2^x = 10^3$

d) $1{,}71^x = 5$; $10^x = 1{,}380\,4$; $7^x = 129{,}6$; $10^x = 5{,}754$; $2^x = 6$!

Anleitung: Die Exponentialgleichung $1{,}71^x = 5$ hat die Lösung $x = 3{,}000$. Die Lösung ist eine Näherungslösung auf 4 Stellen genau. Warum muß man $x = 3{,}000$ schreiben und nicht $x = 3$? Probe: Durch Ausmultiplizieren der Potenz erhält man $1{,}71^3 = 5{,}000\,211$! Ein genauerer Näherungswert von x ist $x = 2{,}999\,921$. x ist eine Irrationalzahl.

VI. Die logarithmische Teilung und die logarithmische Funktionsskala

22. Stelle logarithmische Teilungen von **a)** 10 cm, **b)** 12,5 cm, **c)** 25 cm Teilungslänge her! (Abb. 75 und 76.)

23. Stelle logarithmische Funktionsskalen von 1 cm Teilungslänge **a)** mit normallaufender, **b)** mit gegenläufiger logarithmischer Teilung her! Wo liegen die Nullpunkte der logarithmischen Skalen? (Abb. 77.)

24. Stelle auf einer logarithmischen Teilung die Metereinteilung km — m — (dm, cm) — mm — μ — mμ — $\mu\mu$ zeichnerisch dar! Wo liegt auf der Skala die Ångström-Einheit 1 ÅE $= 10^{-10}$ m? Wo die X-Einheit 1 XE $= 10^{-13}$ m?

25. Stelle auf einer logarithmischen Teilung das elektromagnetische Wellenspektrum zeichnerisch dar! Wellenlängen: elektrische Wellen $10^7 \cdots 10^{-4}$ m, infrarote Wellen oder Wärmewellen $5 \cdot 10^{-4} \cdots 8 \cdot 10^{-7}$ m, optische Wellen oder sichtbares Licht $8 \cdot 10^{-7} \cdots 4 \cdot 10^{-7}$ m, ultraviolettes Licht $4 \cdot 10^{-7} \cdots 10^{-8}$ m, Röntgenlicht $10^{-7} \cdots 10^{-11}$ m, γ-Strahlen $10^{-11} \cdots 10^{-12}$ m, kosmische Höhenstrahlung $< 10^{-12}$ m.

Anleitung: Wähle 1 cm als Längeneinheit und stelle das Wellenspektrum auf normallaufender und auf gegenläufiger logarithmischer Teilung dar!

26. Stelle die folgenden Größen auf logarithmischen Teilungen dar:

a) Radien der Himmelskörper in km! Sonne $695 \cdot 10^3$; Merkur $2{,}40 \cdot 10^3$; Venus $6{,}11 \cdot 10^3$; Erde $6{,}37 \cdot 10^3$; Mond $1{,}74 \cdot 10^3$; Mars $3{,}40 \cdot 10^3$; Jupiter $71{,}8 \cdot 10^3$; Saturn $61{,}0 \cdot 10^3$; Uranus $24{,}8 \cdot 10^3$; Neptun $26{,}5 \cdot 10^3$; Pluto $\approx 2{,}5 \cdot 10^3$. Von welcher Größenordnung sind die Radien dieser Himmelskörper?

b) Durchmesser von Atomgrößen! Mittlerer Atomdurchmesser (Elektronenbahn) $d \approx 10^{-10}$ m; Atomkern $d \approx 10^{-15}$ m. Von welcher Größenordnung sind die Durchmesser dieser Atomgrößen?

c) Geschwindigkeiten in m/s! Fußgänger 1,4; Schnellzug 22; Verkehrsflugzeug 50 bis 100; Schall in Luft 333; Lichtwellen und elektrische Wellen $2{,}998 \cdot 10^8$; Gasmoleküle bei 0°: $N_2 \approx 0{,}5 \cdot 10^3$, $H_2 \approx 1{,}8 \cdot 10^3$; Erddrehung am Äquator 465; Erdumlauf um die Sonne $29{,}6 \cdot 10^3$. Stelle die einzelnen Größenordnungen zusammen!

d) Massen in g! Sonne $1{,}983 \cdot 10^{33}$; Merkur $0{,}221 \cdot 10^{27}$; Venus $4{,}96 \cdot 10^{27}$; Erde $5{,}97 \cdot 10^{27}$; Mond $71{,}6 \cdot 10^{24}$; Mars $0{,}659 \cdot 10^{27}$; Jupiter $1901 \cdot 10^{27}$; Saturn $568 \cdot 10^{27}$; Uranus $87{,}2 \cdot 10^{27}$; Neptun $101 \cdot 10^{27}$; Pluto $0{,}66 \cdot 10^{27}$. — H-Atom $1{,}662 \cdot 10^{-24}$; Elektron $0{,}911 \cdot 10^{-27}$. Stelle die Größenordnungen zusammen!

27. Die Kurve $y = 10 \cdot \lg x$ ist in einem rechtwinkligen Achsenkreuz dargestellt. Fällt man von den Kurvenpunkten zu den Abszissen $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$ die Senkrechten auf die y-Achse, so erhält man auf ihr eine logarithmische Teilung. Wo liegen Nullpunkt und Einheitspunkt der logarithmischen Teilung der y-Achse? Wie groß ist die Teilungslänge?

Anleitung: Man erhält auf der y-Achse eine gleichförmige Teilung $0, 1, 2, \ldots, 10$ und eine ungleichförmige logarithmische Teilung $1, 2, 3, \ldots, 10$, zusammen eine Funktionsskala für die Funktion $y = 10 \cdot \lg x$.

28. Einfache logarithmische Gitterteilung. Trägt man in einem rechtwinkligen Achsenkreuz auf der x-Achse eine gleichförmige Teilung, auf der y-Achse eine ungleichförmige logarithmische Teilung auf, so erhält man eine einfache logarithmische Gitterteilung (Abb. 89). Zeichne in dieses Achsenkreuz die folgenden Funktionen ein (Abb. 89):

a) $y = 10^x$, **b)** $y = 5 \cdot 10^x$, **c)** $y = 10^{-x}$, **d)** $y = 5 \cdot 10^{2x}$. Durch welche Bewegungen entstehen die Kurven b, c, d geometrisch aus der Kurve a?

Bemerkung: Papier mit eingedruckter einfacher logarithmischer Gitterteilung heißt einfaches Logarithmenpapier oder Exponentialpapier [1]). Warum?

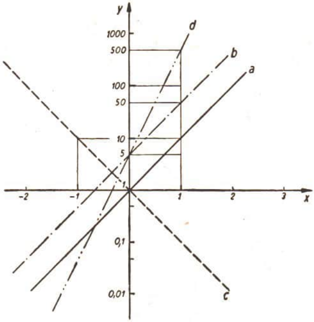


Abb. 89. Einfache logarithmische Gitterteilung

1) Zu beziehen durch Firma Gebr. Wichmann, Berlin NW 7, Marienstr. 19/20.

29. Stelle aus einem Pappstreifen zwei gegeneinander verschiebbare, kongruente logarithmische Teilungen C und D von 25 cm Teilungslänge her (Abb. 78)!

a) Wie kann man aus den Teilungspunkten 1, 2, 3, ..., 10 neue Teilpunkte für 1,5; 2,5; 3,5; 4,5; für 1,2; 1,4; 1,6; 1,8 gewinnen? Wie kann man weitere neue Teilpunkte der beiden Teilungen gewinnen? (Abb. 90.)

b) Wie kann man mit den beiden verschiebbaren Teilungen C und D einfache Multiplikationen und Divisionen ausführen, z.B.: 2 · 3; 3 · 1,5; 8 : 4; 7,5 : 5 usw. (vgl. Abb. 90)?

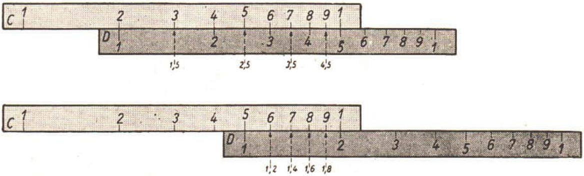


Abb. 90

VII. Der logarithmische Rechenstab

30. Die Teilungen des Rechenstabes. Wie ist auf den Teilungen C und D die Teilung zwischen den Zehnteln in den Bereichen 1 bis 2, 2 bis 4, 4 bis 10? Wie auf den Teilungen A und B?

31. Stelle auf Teilung D die folgenden Werte mit dem Läuferstrich ein:

a) 2,5; 4,8; 1,9; 7,6; 9,4; 3,5; 84; 99; 75; 12; 95; 135; 175; 185; 22; 224; 62; 625

b) 1,74; 1,27; 1,55; 179; 2,54; 3,72; 2,38; 334; 5,35; 7,25; 8,45; 665; 935; 775

c) 1,745; 1,235; 1,835; 2,53; 3,47; 3,13; 267; 413; 747; 58,7; 94,8; 65,4; 77,3; 97,8

d) 4,5; 4,05; 1,7; 1,17; 1,8; 1,18; 2,5; 2,05; 7,3; 7,03; 1,3; 10,3; 1,4; 10,4; 11,7; 17,7; 3,4; 30,4; 65; 6,5; 60,5; 28; 2,8; 20,8; 38,6; 36,8; 22,8; 28,2; 1,8; 1,18!

32. Stelle mit dem Läuferstrich auf Teilung A ein: 1,72; 17,2; 1,14; 11,4; 2,65; 26,5; 256; 4,75; 47,5; 475; 1,43; 14,3; 10; 100; 6,75; 67,5; 4,83; 48,3; 65,7; 6,57!

33. Stelle C 1 über D 1,1! Welche Teilpunkte auf D stehen den folgenden Teilpunkten von C gegenüber: C 1; 1,1; 1,2; 1,3; ...; 2; C 2; 2,2; 2,4; ...; 4; C 4; 4,5; 5; ...; 10!

34. Dieselbe Aufgabe für **a)** C 1 über D 1,2; **b)** C 1 über D 1,5; **c)** C 1 über D 2.

35. Multipliziere mit den Teilungen C und D:

a) 1,84 · 3,54; 2,48 · 1,58; 0,415 · 14,7; 645 · 0,0111; 176 · 47,5; 475 · 1,68

b) 0,405 · 0,162; 19,3 · 164; 0,255 · 0,164; 455 · 1,44; 84,5 · 67,5; 3,66 · 2,78

c) 110,8 · 0,086 5; 22,3 · 0,343; 335 · 34,5; 26,5 · 47,4; 2,25 · 28,7; 33,7 · 44,5

d) 5,2 · 0,86; 465 · 525; 765 · 535; 0,434 · 0,076; 0,247 · 0,287; 874 · 236

e) 5,25 · 0,835 · 1,76; 22,8 · 0,374 · 5,65; 124 · 0,94 · 372!

Anleitung zur technischen Handhabung des Rechenstabes. Man bedient die Zunge an beiden Enden, damit man die Einstellbewegung jederzeit bremsen kann. Um leichte und glatte Bewegung der Zunge zu erhalten, legt man einen Finger unter den Stab, so daß er sich etwas öffnet.

36. Dividiere mit den Teilungen C und D:

a) 4 : 1,72; 6,3 : 3,4; 384 : 2,38; 0,615 : 0,374; 86,5 : 224; 97,5 : 0,485; 3,86 : 2,24

b) 11,2 : 13,6; 274 : 32,8; 0,376 : 28,4; 2,74 : 3,28; 17,4 : 2,78; 153 : 55,5; 0,175 : 1,96

c) 45,5 : 62,5; 775 : 83,5; 0,435 : 765; 4,35 : 22,5; 12,6 : 18,2; 0,1765 : 45,4; 67,4 : 41,2!

37. Berechne mit den Teilungen C und D

a) $\dfrac{2,44 \cdot 6,3}{8,55}$ **b)** $\dfrac{2,44 \cdot 4,25}{8,55}$ **c)** $\dfrac{244 \cdot 3,75}{8,55}$ **d)** $\dfrac{244 \cdot 2,12}{8,55}$ **e)** $\dfrac{86,5 \cdot 27,4}{46,5}$

f) $\dfrac{86,5 \cdot 41,5}{46,5}$ **g)** $\dfrac{86,5 \cdot 65,5}{46,5}$ **h)** $\dfrac{86,5 \cdot 71,5}{46,5}$ **i)** $\dfrac{2,34 \cdot 2,46 \cdot 2,58}{0,885 \cdot 0,923}$!

38. Berechne

a) $1,9^2$; 366^2; $0,905^2$; $0,244^2$; $0,425^2$; $60,5^2$; $1\,056^2$; $0,0345^2$; $0,002\,55^2$; $0,003\,45^2$; $0,0085^2$; $0,007\,15^2$

b) $\sqrt{6,4}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{22,5}$; $\sqrt{2,25}$; $\sqrt{0,4}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{2,3}$; $\sqrt{23}$; $\sqrt{4,9}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{6,25}$; $\sqrt{62,5}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{12,1}$; $\sqrt{1,21}$; $\sqrt{0,070\,5}$; $\sqrt{0,705}$

c) $(3,04 \cdot 27,2)^2$; $(4,55 \cdot 0,815)^2$; $0,55^2 \cdot 0,31^2$; $4,55^2 \cdot 7,75^2$

d) $\left(\dfrac{4,55}{13,5}\right)^2$; $\left(\dfrac{46,2}{1,752}\right)^2$; $\dfrac{3,85^2}{0,615^2}$; $\dfrac{1,742^2}{0,645^2}$

e) $\sqrt{1,87 \cdot 1,45}$; $\sqrt{0,26 \cdot 515}$; $\sqrt{37,2 \cdot 7,25}$; $\sqrt{1,45 \cdot 37,7}$; $\sqrt{61,5} \cdot \sqrt{0,755}$; $\sqrt{62,5} \cdot \sqrt{19,8}$

f) $\sqrt{\dfrac{3,65}{1,44}}$; $\sqrt{\dfrac{27,5}{1,46}}$; $\dfrac{\sqrt{0,46}}{\sqrt{2,74}}$; $\dfrac{\sqrt{0,54}}{\sqrt{6,35}}$!

39. Proportionen.

a) Wie groß sind 360°; 180°; 90°; 60°; 30°; 10°; 5°; 1° im Bogenmaß?

b) Wie groß sind die Bogenmaße 0,1; 1; 1,5; 2; 2,5; 3 im Gradmaß?

40. Wertetafeln von Funktionen. Berechne die y-Werte der Funktionen

a) $y = 2\pi x$, **b)** $y = \dfrac{x}{2\pi}$, **c)** $xy = 8$, **d)** $xy = 2$ für $x = 1$; 1,5; 2; 2,5; ...; 10!

Anleitung zu a: Es ist $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2\pi}{1}$. Stelle A π und B 0,5 übereinander ein (Schlüssel)!

Zu c: Schiebe die Zunge gegenläufig in den Stab (Abb. 91) und stelle C 1 gegenläufig über D 8 oder C 8 gegenläufig über D 1 ein. Dann ist für jedes zusammengehörige Wertepaar $(x; y)$

$$\lg x + \lg y = \lg 8,$$
$$\lg (x \cdot y) = \lg 8,$$
$$x \cdot y = 8.$$

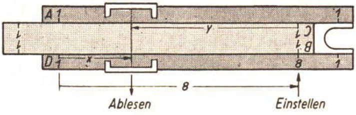


Abb. 91.

Warum nennt man eine eingearbeitete gegenläufige Teilung der Zunge zwischen den Teilungen B und C eine Reziprokteilung R[1])? Begründe ihre Zweckmäßigkeit beim Stabrechnen!

VIII. Angewandte Aufgaben

Berechne die folgenden Aufgaben mit der Logarithmentafel auf 4 Stellen genau und mit dem Rechenstab auf 3 Stellen genau und vergleiche die Ergebnisse miteinander!

1) reciprocare (lat.) heißt umkehren. Reziproke Werte sind Kehrwerte, z. B. 2 und $\frac{1}{2}$, 3 und $\frac{1}{3}$ usw. Die Reziprokteilung R der neueren Rechenstäbe zwischen den Zungenskalen B und C ist gewöhnlich rot beziffert, sie ist der Stabskala D kongruent, aber entgegengesetzt gerichtet.

41. Wieviel wiegen die folgenden Quadratstähle:

a) 1,15 m □-Stahl 8 mm, b) 17,5 m □-Stahl 12 mm, c) 6,75 m □-Stahl 15 mm,
d) 4,65 m □-Stahl 22 mm, e) 24,25 m □-Stahl 26 mm, f) 7,28 m □-Stahl 35 mm?

Anleitung: Berechne im Überschlag zunächst stets das Gewicht für 1 m Quadratstahl, da dieses das Schätzen und die Übersicht erleichtert.

42. Wieviel wiegen die folgenden Flachstähle:

a) 2,75 m Flachstahl 60 · 10 mm, b) 8,50 m Flachstahl 30 · 8 mm
c) 17,25 m Flachstahl 40 · 12 mm?

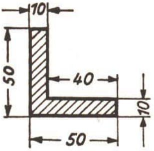


Abb. 92.

43. Zur Gewichtsberechnung von winkligen Profilstählen[1]) denkt man sich diese in Flachstähle gleicher Länge verwandelt. Warum ist diese Umrechnung möglich?

Beispiele (sämtliche Angaben in mm):

a) Winkelstahl: L-Stahl 50 · 50 · 10 = ▭-Stahl 90 · 10 (Abb. 92)
b) T-Stahl: ⊥-Stahl 30 · 30 · 4 = ▭-Stahl 56 · 4 (Abb. 93)

44. Wieviel wiegen die folgenden Profilstähle:

a) 11,50 m L-Stahl 30 · 30 · 4 (gleichschenkliger Winkelstahl)
b) 12,75 m L-Stahl 40 · 40 · 5 (gleichschenkliger Winkelstahl)
c) 18,30 m L-Stahl 30 · 60 · 5 (ungleichschenkliger Winkelstahl)
d) 2,75 m ⊥-Stahl 45 · 45 · 5,5 (hochstegiger ⊥-Stahl)
e) 65,50 m ⊥-Stahl 60 · 30 · 5,5 (breitfüßiger ⊥-Stahl)?

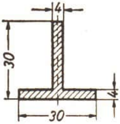


Abb. 93.

45. Wieviel wiegen die folgenden Rundstähle:

a) 25 m ○-Stahl von 9 mm Durchmesser,
b) 72,50 m ○-Stahl von 13 mm Durchmesser,
c) 12,50 m ○-Stahl von 16 mm Durchmesser, d) 75 m ○-Stahl von 26 mm Durchmesser?

46. Die Wichte von rhombischem Schwefel soll nach der Wasserverdrängungsmethode bestimmt werden. In vier Versuchen wurde festgestellt:

Gewicht	63,648 p;	95,340 p;	75,555 p;	84,872 p,
Rauminhalt	30,6 cm³;	45,4 cm³;	36,5 cm³;	41,2 cm³.

Wie groß ist die Wichte des rhombischen Schwefels?

47. Das Gewicht einer wässerigen Natronlauge wurde mit 71,980 p festgestellt, ihr Rauminhalt mit 64,91 cm³ gemessen. Wie groß ist ihre Wichte?

25. Praktische Mathematik

a) Genauigkeit und Näherungswerte

In der Wissenschaft und Technik spielt die Längenmessung unter allen Messungen eine besondere Rolle. Aus Längen wird der Inhalt einer Fläche und der Rauminhalt eines Körpers berechnet. Die Lage eines Punktes, einer Fläche, eines Körpers in der Ebene oder im Raum wird durch Bestimmung von Koordinaten festgelegt. Der Längenmessung folgt an Bedeutung die Massen- und Gewichtsbestimmung durch Wägung.

Die Maßzahlen, die wir feststellen, sind infolge der Ungenauigkeit der Meßeinrichtungen stets mit Fehlern behaftet, es sei denn, es handle sich um das Auszählen fertig gegebener Einheiten. Unsere Messungen sind Näherungswerte

1) Profil (franz.) bedeutet Seitenansicht, Querschnitt von Walzwerkserzeugnissen.

der wirklichen Größen, die wir nicht kennen und mit denen wir trotzdem rechnen müssen. Hierzu ist es notwendig, bei den Maßzahlen anzugeben, mit welcher Genauigkeit gemessen worden ist, und den Fehler abzuschätzen.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Herstellung von Bauteilen und Maschinen in der Technik. Hier sind auf Grund von Berechnungen und Zeichnungen die genormten „Sollmaße" bekannt („Nennmaße"). Von diesen werden für die Fertigung im „Istmaß" eingegrenzte Abweichungen – sog. Abmaße oder Toleranzen[1]) – zugelassen („Paßmaße"), da die Nennmaße mit den besten Hilfsmitteln nicht genau erreichbar sind (DIN 7182).

In der Mathematik werden Lehrsätze über Zahlen und Zahlenverbindungen aufgestellt. Die Zahlen gelten dabei als fehlerfrei und werden symbolisch durch Buchstaben bezeichnet, um die Allgemeingültigkeit der Sätze auszudrücken. Wir sprechen von einer systematischen Mathematik oder auch „Präzisionsmathematik"[2]).

In der praktischen Mathematik wird mit den Zahlen selbst gerechnet. Diese werden gewöhnlich als Dezimalzahlen geschrieben. Wir rechnen stets mit endlich vielen Ziffern und schreiben auch Dezimalzahlen stets mit einer endlichen Anzahl von Stellen hin. Damit ist die Genauigkeit fast jeder Zahlenrechnung begrenzt. Wir sprechen daher auch von einer „Approximationsmathematik"[2]).

Die Genauigkeit einer Rechnung kennzeichnen wir durch die Angabe, wieviel Stellen des Ergebnisses sicher richtig sind.

Den größtmöglichen Fehler eines berechneten Näherungswertes x können wir als absoluten Fehler mit Δx abschätzen oder als relativen Fehler in Prozenten mit $\left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\right)\%$ angeben[3]).

Der absolute Fehler Δx eines Näherungswertes ist stets kleiner als 5 Einheiten der Stelle, welche auf die als Genauigkeitsgrenze angegebene folgt. Begründe diese Aussage nach den Regeln für das Runden einer Dezimalzahl! Aus welcher Proportion folgt die Angabe für den größtmöglichen relativen Fehler eines Näherungswertes?

Beispiele:

a) $x = \sqrt{2} = 1{,}41$ ist der Wert der Quadratwurzel $x = \sqrt{2}$ auf 3 Stellen genau oder auf 2 Dezimalstellen genau.

Fehlerabschätzung: Der absolute Fehler Δx dieses Näherungswertes ist kleiner als 5 Einheiten der 3. Dezimalstelle oder $5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta x < 5 \cdot 10^{-3}$. Der relative Fehler $\left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\right)\%$ ist kleiner als $\frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{1{,}41}\%$ oder rund $0{,}35\%$, $\left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\right)\% < 0{,}35\%$.

Man sagt, $\sqrt{2} = 1{,}41$ ist mit einer Unsicherheit von höchstens $5 \cdot 10^{-3}$ oder 0,005 bestimmt, oder $\sqrt{2} = 1{,}41$ ist zu $0{,}35\%$ unsicher.

1) toleratio (lat.) bedeutet die Möglichkeit des Ertragens. Toleranz bedeutet hier die zulässige Abweichung vom genauen Maß, das zulässige Abmaß.

2) Beide Begriffe stammen von Felix Klein, 1849–1925; Erlangen, Göttingen. — proximus (lat.) heißt der nächste, sehr nahe; Approximation heißt Näherung.

3) Δ (groß Delta, gr.) bedeutet Differenz, Unterschied, Änderung.
Δx (lies: „Delta x") bedeutet Differenz zweier x-Werte, $\Delta x = x_2 - x_1$. Hier ist Δx die Differenz der möglichen Abweichungen x_2 und x_1 des gefundenen Näherungswertes x.
Δy (lies: „Delta y") bedeutet Differenz zweier y-Werte, $\Delta y = y_2 - y_1$.

b) $x = \sqrt{2} = 1{,}4142$ ist der Wert der Quadratwurzel $x = \sqrt{2}$ auf 5 Stellen genau. Fehlerabschätzung: Der absolute Fehler dieser Angabe ist $\Delta x < 5 \cdot 10^{-5}$, der relative Fehler $\left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\right)\% < 0{,}0035\,\%$. $\sqrt{2} = 1{,}4142$ ist nur zu $0{,}0035\,\%$ unsicher!

c) In $x = \lg 2 = 0{,}30$ ist $x = \lg 2$ auf 2 Dezimalstellen genau angegeben. Fehlerabschätzung: Der absolute Fehler dieser Angabe ist $\Delta x < 5 \cdot 10^{-3}$, der relative Fehler $\left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\right)\% < 1{,}7\,\%$. $\lg 2 = 0.30$ ist zu $1{,}7\,\%$ unsicher.

d) In $x = \lg 2 = 0.3010$ ist $x = \lg 2$ auf 4 Dezimalstellen genau angegeben. Fehlerabschätzung: Der absolute Fehler dieser Angabe ist $\Delta x < 5 \cdot 10^{-5}$, der relative Fehler $\left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\right)\% < 0{,}017\,\%$. $\lg 2 = 0.3010$ ist nur zu $0{,}017\,\%$ unsicher!

In der praktischen Mathematik ist z.B. zwischen den Angaben 2,5 und 2,50 ein wesentlicher Unterschied. Die Angabe $x = 2{,}5$ ist auf 2 Stellen genau. In ihr ist die Zahl x zwischen die Grenzen 2,45 und 2,55 eingeschlossen. x ist mit einer Unsicherheit von höchstens $5 \cdot 10^{-2}$ oder 0,05 bestimmt, es ist zu 2 % unsicher!
Die Angabe $x = 2{,}50$ dagegen ist auf 3 Stellen genau. In ihr ist die Zahl x zwischen die Grenzen 2,495 und 2,505 eingeschlossen. x ist mit einer Unsicherheit von höchstens $5 \cdot 10^{-3}$ oder 0,005 bestimmt, es ist nur zu 0,2 % unsicher!
Mit wieviel Stellen eine Rechnung durchzuführen ist, hängt davon ab, wieviel Stellen im Ergebnis verlangt werden und welchen Einfluß Ungenauigkeiten der gegebenen Größen auf das Ergebnis ausüben.

b) Überschlag

Beim Überschlagsrechnen runden wir die Zahlen bis auf die erste geltende Ziffer. Gleichzeitig schreiben wir die Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen.

Beispiele für Addition und Subtraktion:

$$387500 + 28975 + 32519 + 161335 \approx (39 + 3 + 3 + 16) \cdot 10^4 \approx 60 \cdot 10^4, \approx 600000 \quad \text{(genau } 610\,329\text{)}.$$

$$15962{,}71 - 1442{,}18 - 7351{,}49 - 2576{,}86 \approx (16 - 1 - 7 - 3) \cdot 10^3 \approx 5 \cdot 10^3, \approx 5000 \quad \text{(genau } 4592{,}18\text{)}.$$

Beispiele für Multiplikation und Division:

$$823{,}73 \cdot 37{,}59 \approx 8 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^1 \approx 32 \cdot 10^3, \approx 32000 \quad \text{(genau } 30964{,}01\text{)}.$$

$$1974675 : 6825 \approx 2 \cdot 10^6 : 7 \cdot 10^3 \approx 20 \cdot 10^5 : 7 \cdot 10^3 \approx 3 \cdot 10^2, \approx 300 \quad \text{(genau } 289{,}339\text{)}.$$

c) Abhängigkeit der Genauigkeit von den gegebenen Zahlen

1. Entsprechend der Genauigkeit der gegebenen Zahlen haben wir alle Rechnungen mit ihnen auszuführen. Gehen in eine Rechnung Zahlenwerte verschiedener Genauigkeitsstufen ein, so ist für die Genauigkeit des Ergebnisses die Zahl mit der geringsten Genauigkeit maßgebend. Vor jeder Zahlenrechnung haben wir deshalb zu überlegen, mit wieviel Dezimalstellen sie zweckmäßig durchzuführen ist. Besonders bei der Berechnung von Tabellen und der Auswertung von Versuchsergebnissen ist eine solche Überlegung erforderlich, um Täuschungen über die Genauigkeit des Ergebnisses zu vermeiden.

Beispiele:

a) $3{,}875 + 2{,}5 + 19{,}33 \approx 3{,}9 + 2{,}5 + 19{,}3 \approx 25{,}7.$

Dabei beträgt der größtmögliche Fehler $\Delta x = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05 = 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}15.$

b) $1{,}8 \cdot 1{,}3 \approx 2{,}3$; dagegen $1{,}80 \cdot 1{,}30 \approx 2{,}34.$

Im ersten Fall liegt der Wert entsprechend der Ungenauigkeit der Faktoren zwischen den Grenzen $1{,}75 \cdot 1{,}25 \approx 2{,}19$ und $1{,}85 \cdot 1{,}35 \approx 2{,}50$; im zweiten Fall aber zwischen den Grenzen $1{,}795 \cdot 1{,}295 \approx 2{,}32$ und $1{,}805 \cdot 1{,}305 \approx 2{,}36.$

c) $7{,}3 : 4{,}7 \approx 1{,}6$; dagegen $7{,}30 : 4{,}70 \approx 1{,}55.$

Schwierig ist die Ungenauigkeit einer Zahl zu beurteilen, die sich als Differenz zweier nahezu gleichgroßer Zahlen ergibt. Der absolute Wert des größtmöglichen Fehlers kann hier zwar klein sein, der relative Fehler aber sehr groß.

Beispiel: $2{,}735 - 2{,}733 = 0{,}002$. Das Ergebnis ist auf drei Dezimalstellen genau. Im ungünstigsten Falle ist der absolute Fehler $\Delta x = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001$, der relative Fehler aber 50%! Das Ergebnis ist zu 50% unsicher! Vergleiche dazu Abschn. 35, Aufgabe 29 bis 31.

2. Berechnung von Wertetafeln einer Funktion

Genauigkeit einer Wertetafel. Als Beispiel soll eine Wertetafel des Kreisumfanges $u = \pi d$ für $d = 1, 2, 3, \ldots, 30$ auf zwei Dezimalstellen genau berechnet werden. (Vgl. Abschn. 31, Aufg. 16.) Wählen wir $\pi = 3{,}14$, so wird sich die in diesem Wert enthaltene Ungenauigkeit entsprechend dem Wachsen des Durchmessers vervielfachen. Da die Maßzahlen des Durchmessers in die Zehner übergehen, rechnen wir mit $\pi = 3{,}1416$ und runden erst am Schluß auf zwei Dezimalstellen.

d	$u = 3{,}14 \cdot d$	$u = 3{,}1416 \cdot d$
1	3,14	3,14
2	6,28	6,28
3	9,42	9,42
4	12,56	12,57
5	15,70	15,71
...	...	...
10	31,40	31,42
...	...	...
20	62,80	62,83
...	...	...
30	94,20	94,25

Im ersten Fall wissen wir, daß in der zweiten Dezimalstelle eine nicht bekannte Ungenauigkeit enthalten sein kann; im zweiten Falle, daß diese genau ist.

Bei der Berechnung von Tabellen rechnen wir möglichst mit einer größeren Stellenzahl und runden am Schluß auf die geforderte Stellenzahl.

Differenzentafel. Beim Berechnen der Wertetafel einer Funktion $y = f(x)$ läßt eine **Differenzentafel** der y-Werte Rechenfehler leicht erkennen und Ungenauigkeiten abschätzen.

Beispiel: Für drei Funktionen $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$ und $y = f_3(x)$ seien zu den Werten $x = 3{,}0; 3{,}1; \ldots; 4{,}0$ die zugehörigen y-Werte auf 2 bzw. 3 Dezimalstellen berechnet worden (siehe unten). Man bildet dann aus je zwei benachbarten y-Werten y_n und y_{n-1} die **ersten Differenzen** $(y_n - y_{n-1})$ und nennt sie $\boldsymbol{\Delta^1 y}$ (lies: „Delta eins y"); aus diesen in gleicher Weise die **zweiten Differenzen** $\boldsymbol{\Delta^2 y}$ (lies: „Delta zwei y", nicht Delta Quadrat y!); aus diesen die **dritten Differenzen** $\boldsymbol{\Delta^3 y}$ („Delta drei y") usw.

x	$y = f_1(x)$	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$
3,0	9,00		
		+ 0,61	
3,1	9,61		+ 0,02
		+ 0,63	
3,2	10,24		+ 0,11
		+ 0,74	
3,3	10,98		− 0,16
		+ 0,58	
3,4	11,56		+ 0,11
		+ 0,69	
3,5	12,25		+ 0,02
		+ 0,71	
3,6	12,96		+ 0,02
		+ 0,73	
3,7	13,69		+ 0,02
		+ 0,75	
3,8	14,44		+ 0,02
		+ 0,77	
3,9	15,21		+ 0,02
		+ 0,79	
4,0	16,00		

x	$y = f_2(x)$	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3,0	27,00			
		+ 2,79		
3,1	29,79		+ 0,19	
		+ 2,98		0,00
3,2	32,77		+ 0,19	
		+ 3,17		0,00
3,3	35,94		+ 0,19	
		+ 3,36		0,03
3,4	39,30		+ 0,22	
		+ 3,58		+ 0,98
3,5	42,88		+ 1,20	
		+ 4,78		− 2,99
3,6	47,66		− 1,79	
		+ 2,99		+ 3,02
3,7	50,65		+ 1,23	
		+ 4,22		− 1,00
3,8	54,87		+ 0,23	
		+ 4,45		0,00
3,9	59,32		+ 0,23	
		± 4,68		
4,0	64,00			

x	$y = f_3(x)$	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$
3,0	0,477		
		+ 0,014	
3,1	0,491		0,000
		+ 0,014	
3,2	0,505		− 0,001
		+ 0,013	
3,3	0,518		+ 0,001
		+ 0,014	
3,4	0,532		+ 0,008
		+ 0,022	
3,5	0,554		− 0,020
		+ 0,002	
3,6	0,556		+ 0,010
		+ 0,012	
3,7	0,568		0,000
		+ 0,012	
3,8	0,580		− 0,001
		+ 0,011	
3,9	0,591		0,000
		+ 0,011	
4,0	0,602		

Die Differenzentafeln zeigen sofort Fehler in den Wertetafeln an. Wo liegen diese in den drei obigen Tafeln?

Es ist deshalb zu empfehlen, zu jeder gewonnenen Funktionstafel, mag sie aus Berechnungen oder aus Messungen hervorgegangen sein, eine Differenzentafel zu bilden. Man gewinnt dadurch ein gutes Urteil über die Zuverlässigkeit der gefundenen Funktionswerte.

In den Beispielen der drei obigen Wertetafeln handelt es sich um die Funktionen $y = f_1(x) = x^2$, $y = f_2(x) = x^3$ und $y = f_3(x) = \lg x$ im Bereich $3{,}0 \leqq x \leqq 4{,}0$ auf 2 bzw. 3 Dezimalstellen genau. Vgl. Abschn. 15, Aufg. 9, 10 und Abb. 30, 31 und 71. Berichtige in allen drei Fällen die Fehler in den obigen Funktionstafeln und stelle korrigierte Differenzentafeln der drei Funktionen auf (vgl. Aufgabe 13, 14, 15)!

3. Interpolieren

Als Funktionstafeln haben wir die Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen und die Logarithmentafel kennengelernt. In ihnen wird linear interpoliert, d.h. Zwischenwerte werden linear eingeschaltet. Auch beim Rechnen mit dem Rechenstab wird die geschätzte letzte geltende Ziffer linear interpoliert. Vergleiche Abschn. 15, 23 und 24! Lineare Interpolation ist in einer Funktionstafel zulässig, wenn die interpolierten Werte von gleicher Genauigkeit wie die Tafelwerte selbst sind.

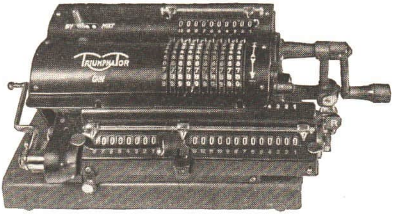
d) Abgekürztes Rechnen

Ist für das Ergebnis einer Rechnung eine bestimmte Genauigkeit vorgeschrieben, so bringt abgekürztes Rechnen bei größeren Aufgaben eine wesentliche Zeitersparnis und verhindert nutzlose Rechenarbeit. Im einzelnen wird dazu auf die Aufgaben 16 bis 25 dieses Abschnittes verwiesen.

e) Überblick über die Rechenarten

<table>
<tr><th>Rechenarten der</th><th>I. Stufe</th><th>II. Stufe</th><th colspan="2">III. Stufe</th></tr>
<tr><td>Direkte Rechenart
Umkehrung</td><td>Addition
Subtraktion</td><td>Multiplikation
Division</td><td colspan="2">Potenzieren
1. Radizieren   2. Logarithmieren</td></tr>
<tr><td>Die zu verknüpfenden Zahlen heißen</td><td>Summanden
Minuend
Subtrahend</td><td>Faktoren
Dividend
Divisor</td><td colspan="2">Basis
Exponent
Radikand   Numerus
Wurzelexponent   Basis</td></tr>
<tr><td>Das Ergebnis heißt</td><td>Summe
Differenz</td><td>Produkt
Quotient
(Bruch)
(Verhältnis)</td><td colspan="2">Potenz
Wurzel (Bruchpotenz)   Logarithmus</td></tr>
</table>

Das Rechnen mit Logarithmen war das Rechnen der Wissenschaftler und Techniker, bis der Rechenstab und die Rechenmaschine, zu vollgültigen Hilfsmitteln entwickelt, an die Stelle des Rechnens mit Logarithmen traten (Abb. 94). Der Wissen-



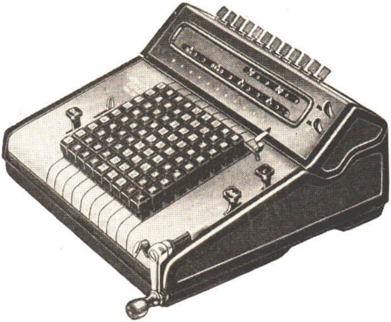


Abb. 94. oben: Rechenmaschine „Triumphator CRN", unten: Rechenmaschine „Mercedes Euklid"

schaftler und Techniker verwendet heute alle ihm zur Verfügung stehenden Rechenhilfsmittel so, daß er mit dem geringsten Aufwand an Arbeit und Zeit den größten Erfolg erzielt.

Aufgaben

I. Genauigkeit und Näherungswerte

1. Bestimme auf zwei und auf vier Stellen genau den Wert von **a)** $\sqrt{3}$, **b)** $\sqrt{5}$, **c)** $\sqrt{7}$! Fehlerabschätzung: Wie groß kann der absolute und der relative Fehler im Höchstfall werden? Gib den größtmöglichen Fehler des auf 4 Stellen genauen Wertes in einem Prozentsatz des auf 2 Stellen genauen Wertes an!

2. Wie groß ist die Unsicherheit einer Längenmessung, die **a)** mit 2,3 m, **b)** mit 4,35 m, **c)** mit 23 cm, **d)** mit 14,2 cm, **e)** mit 25,3 mm festgestellt worden ist?

3. Runde die folgenden Werte **a)** 48,725 1; **b)** 19,114 7; **c)** 126,355 8; **d)** 37,983 6 nach und nach auf eine geltende Ziffer!

II. Überschlagsrechnen

Berechne im Überschlag

4. a) 4 746 + 319 + 1 225 + 6 291 + 875, **b)** 31 714 + 296 + 15 759 + 4 823 + 8 116;

5. a) 35 748 — 9 154 — 835 — 11 867 — 2 144,
b) 196 459 — 48 920 — 5 347 — 72 300 — 6 918;

6. a) 427,35 · 5 296,19, **b)** 3,719 · 0,074 2, **c)** 28,753 · 0,174 6, **d)** 0,034 5 · 0,007 9;

7. a) 473,11 : 28 744,5, **b)** 3,74 : 0,089 2, **c)** 34,777 : 697,25, **d)** 0,034 5 : 0,007 9!

III. Genauigkeit bei Berechnungen

8. Auf wieviel Dezimalstellen muß eine Preisberechnung erfolgen, wenn der Einheitspreis in DM und Pf und die Menge **a)** in m und cm, **b)** kg und g, **c)** m^2 und dm^2, **d)** Stück gegeben ist?

9. Das Volumen eines Körpers ist mit 23,729 cm^3 bestimmt. Seine Wichte beträgt **a)** 2,75, **b)** 7,85, **c)** 0,97, **d)** 2,96, **e)** 11,3 p/cm^3. Auf wieviel Dezimalstellen muß das Gewicht bestimmt werden? Berechne es abgekürzt! Wie groß kann der relative Fehler werden?

10. Die Länge einer Eisenbahnschiene wurde mit einem 2 m langen Maßstab gemessen, der $12\frac{1}{2}$ mal angelegt wurde. Bei jedem Anlegen ist mit einem Fehler von 2 mm zu rechnen. Wie groß ist der mögliche Fehler des Ergebnisses (absolut und relativ)?

11. Die Gelenkwelle eines Lastkraftwagens wurde von zwei Lehrlingen unabhängig voneinander mit 1,752 und 1,755 m gemessen. Um wieviel Prozent ist die Messung unsicher?

IV. Berechnen von Wertetafeln

12. Stelle eine Wertetafel für den Kreisinhalt $F = \pi r^2$ für $r = 1, 2, 3, \ldots, 30$ auf zwei Dezimalstellen genau auf! Prüfe die Wertetafel auf ihre Richtigkeit mit einer Differenzentafel!

13. Prüfe die Tafel der Quadrate in Schülkes Tafeln mit einer Differenzentafel nach
a) waagerecht im Bereich 3,00; 3,01; ...; 3,10; **b)** senkrecht im Bereich 3,0; 3,1; ...; 4,0!

14. Löse dieselbe Aufgabe
a) waagerecht im Bereich 5,00; 5,01; ...; 5,10; **b)** senkrecht im Bereich 5,0; 5,1; ...; 6,0!

15. Löse dieselben Aufgaben **a)** für die Kuben; **b)** für die Logarithmen $\lg x$!

V. Abgekürztes Rechnen

16. Addiere abgekürzt auf 3 Stellen genau
a) 25,756 + 1,327 4 + 3,473 + 116,14; **b)** 145,257 + 3,775 + 126,19 + 25,714 5!
Anleitung: 1. Überschlag. 2. Runde die größte Zahl auf 4 geltende Ziffern! Bei den übrigen Zahlen sind nur soviel Stellen beizubehalten, als durch die letzte geltende Ziffer der größten Zahl bestimmt wird! 3. Runde das Ergebnis auf 3 geltende Ziffern!

17. Subtrahiere abgekürzt auf 3 Stellen genau
a) 25,115 — 9,821 — 3,1452 — 3,119 — 0,05234;
b) 337,185 — 92,137 — 10,00145 — 12,015 — 164,57!
Anleitung: 1. Überschlag. 2. Runde die größte Zahl auf 5 geltende Ziffern! Warum? 3. Sonst entsprechend Aufgabe 16.

18. Multipliziere abgekürzt auf 4 Stellen genau

a) 78,528 4 · 43,734; **b)** 746,258 · 19,135; **c)** 349,256 · 273,135; **d)** 716,248 · 122,481!

Anleitung zu 38,426 7 · 24,738. 1. Stelle die Kommastellung durch Überschlag fest, $x = 9\ldots,.$! 2. Bringe den 2. Faktor „auf Einerstelle"! Dazu wird der 2. Faktor durch 10 dividiert, der 1. Faktor dafür mit 10 multipliziert, 384,267 · 2,473 8! 3. Multipliziere abgekürzt auf **5** Stellen und runde das Ergebnis auf 4 Stellen!

3 8 4 , 2 6	7 · 2,473 8
7 6 8 5 3	
1 5 3 7 1	
2 6 9 0	
1 1 5	
3 1	
9 5 0 , 6 0	

auf 4 Stellen gerundet 9 5 0 , 6 (genaues Ergebnis 950,599 704 6).

19. Dividiere abgekürzt auf 4 geltende Ziffern

a) 6 543,215 : 3 143,742; **b)** 8,333... : 22,6 307; **c)** 7,456 7 : 57,666...; **d)** 59,347 : 22,487 9!

Anleitung zu 7 448,525 : 2 159,726. 1. Stelle die Kommastellung des Ergebnisses durch Überschlag fest, $x = 3, \ldots$! 2. Bringe den Divisor „auf Einerstelle"! 3. Trenne im Dividend und Divisor die entbehrlichen Stellen durch Striche ab und dividiere abgekürzt auf 4 Stellen!

7 , 4 4 8	5 2 5 : 2 , 1 5 9 | 7 2 6 = 3 , 4 4 9
6 4 7 9	(genaues Ergebnis 3 , 4 4 8 8 2 . . .)
9 6 9	
8 6 4	
1 0 5	
8 6	
1 9	
1 9	

20. Was kosten **a)** 17,35 m, wenn 1 m 9,25 DM kostet, **b)** 5,785 kg, wenn 1 kg 2,33 DM kostet? Auf wieviel Stellen genau muß gerechnet werden?

21. Der Rauminhalt eines Körpers beträgt **a)** 18,726 cm^3, seine Wichte 7,83 p/cm^3, **b)** 2,619 cm^3, seine Wichte 2,76 p/cm^3. Auf wieviel Stellen genau muß das Gewicht berechnet werden? Berechne es abgekürzt!

22. Ein Grundstück ist 21,75 m breit und 31,35 m lang. Berechne abgekürzt **a)** die Fläche auf m^2, **b)** auf dm^2 genau!

23. Ein Grundstück besitzt 847,38 m^2 Fläche und ist 22,43 m breit. Berechne abgekürzt die Länge auf cm genau!

24. Für 25,375 kg einer Ware werden 1 476,18 DM bezahlt. Was kostet 1 kg?

25. Ein Doppel-T-Stahl 20 nach DIN 1 025 hat einen Querschnitt von 33,5 cm^2 und ist 3,25 m lang. Er wiegt 85,5 kp. Wie groß ist **a)** sein Volumen in dm^3, **b)** die Wichte?

D. Ähnlichkeit

X. Ähnlichkeitslehre

26. Freie Ähnlichkeit

a) Verhältnis zweier Strecken

1. Verhältnis zweier Zahlen

Das Verhältnis zweier Zahlen a und b läßt sich darstellen

	in der Form	als Quotient	als Bruch
	$a:b$,	$a:b$,	$\frac{a}{b}$,
lies:	a zu b,	a durch b,	a durch b.

Jedes Verhältnis besteht aus zwei Gliedern, dem ersten und zweiten Glied oder dem Vorder- und Hinterglied. In Bruchschreibweise sind Zähler und Nenner des Bruches das erste und zweite Glied des Verhältnisses.

Beispiele: $12:18$; $10:15$; $0{,}8:1{,}2$; $3{,}2:4{,}8$; $4:5$; $8:10$; $1{,}2:1{,}5$; $20:25$; $a:b$.

Drückt man ein Verhältnis in den kleinsten ganzen Zahlen aus, so nennt man diese Form den Wert des Verhältnisses, z. B. $12:18 = 2:3$; $3{,}2:4{,}8 = 2:3$; $8:10 = 4:5$; $20:25 = 4:5$. Setzt man zwei Verhältnisse desselben Wertes einander gleich, so entsteht eine **Verhältnisgleichung oder Proportion**[1]. Beispiele sind $12:18 = 3{,}2:4{,}8$; $8:10 = 20:25$; $a:b = c:d$.

Jede Proportion läßt sich darstellen

als Quotientengleichung	und	als Bruchgleichung.
$12:18 = 3{,}2:4{,}8$		$\frac{12}{18} = \frac{3{,}2}{4{,}8}$
$a:b = c:d$,		$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Die Glieder der Proportion heißen 1., 2., 3. und 4. Proportionale. 1. und 4. Glied heißen die Außenglieder, 2. und 3. Glied die Innenglieder der Proportion.

Aus der Bruchgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt die **Produktengleichung** $\boldsymbol{a \cdot d = b \cdot c}$.

In jeder Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

1) proportio (lat.) heißt Ebenmaß, hier Verhältnisgleichheit.

2. Verhältnis zweier Strecken

Zahlen a und b kann man durch Strecken von a und b cm Länge geometrisch veranschaulichen.
Die größte Strecke m, die in zwei Strecken a und b gleichzeitig als Maß enthalten ist, heißt **das gemeinsame Maß** dieser Strecken. Ist m in der Strecke a p-mal, in der Strecke b q-mal enthalten, so ist $a = p \cdot m$ und $b = q \cdot m$.

Dann gilt die Proportion $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, ($p$ und q ganze, teilerfremde Zahlen).

Zwei Strecken mit gemeinsamem Maß heißen kommensurabel[1]), ihr Verhältnis stellt eine **rationale Zahl** dar. Zwei Strecken ohne gemeinsames Maß heißen inkommensurabel[1]), ihr Verhältnis stellt eine **irrationale Zahl** dar.

Beispiel: Die Diagonale eines Quadrats mit einer Seite von a cm Länge ist $d = a\sqrt{2}$ cm lang. Also ist $\frac{d}{a} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

Das Verhältnis der beiden Strecken d und a stellt die Irrationalzahl $\sqrt{2}$ dar, beide Strecken sind ohne gemeinsames Maß. Da man jede Irrationalzahl mit geforderter Genauigkeit durch einen rationalen Näherungsdezimalbruch ersetzen kann (siehe Abschn. 18), so kann man auch Strecken ohne gemeinsames Maß mit gewünschter Genauigkeit durch Strecken mit gemeinsamem Maß ersetzen.

b) Strahlensätze

1. Geometrische Grundgebilde der Ebene

Alle Strahlen einer Ebene, die durch einen Punkt S gehen, bilden ein **Strahlenbüschel.** S heißt der Scheitel des Büschels. Alle Punkte einer Ebene, die auf einer Geraden g liegen, bilden eine **Punktreihe** (Abb. 95).
Strahlenbüschel und Punktreihe bilden die **geometrischen Grundgebilde der Ebene.** Träger eines Strahlenbüschels ist der Punkt S, durch den alle Strahlen des Büschels gehen. Träger einer Punktreihe ist die Gerade g, auf der alle Punkte der Reihe liegen.

Abb. 95. Strahlenbüschel und Punktreihe

2. Die Strahlensätze

Werden zwei Strahlen I und II eines Büschels von zwei Parallelen geschnitten (Abb. 96), so heißen die Abschnitte SA_1 und SA_2, SB_1 und SB_2, A_1B_1 und A_2B_2 auf den Strahlen gleichliegende Abschnitte. Sie haben je gleiche Lage zum Büschelscheitel S.
Die beiden Strahlen I und II schneiden auf den Parallelen die Abschnitte A_1A_2 und B_1B_2 ab. Zur Parallelen A_1A_2 sind SA_1 und SA_2, zur Parallelen B_1B_2 sind SB_1 und SB_2 die zugehörigen Abschnitte auf den Strahlen I und II. Die den Parallelen zugehörigen Abschnitte auf jedem Strahl werden stets vom Scheitel des Büschels aus gemessen und benannt.

1) mensura (lat.) heißt Maß; mensurabel bedeutet meßbar; commensurabel mit gleichem Maß meßbar, mit gemeinsamem Maß; incommensurabel nicht mit gleichem Maß meßbar, ohne gemeinsames Maß.

Erster Strahlensatz: Werden zwei Strahlen eines Büschels von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte des einen Strahls wie die gleichliegenden des andern.

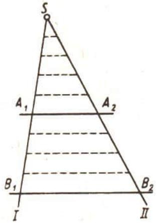


Abb. 96

Beweis (Abb. 96): SA_1 und A_1B_1 mögen m als gemeinsames Maß besitzen. m lasse sich auf SA_1 p-mal, auf A_1B_1 q-mal abtragen. (In Abb. 96 ist $p = 5$ und $q = 4$.)

Dann ist $\quad SA_1 = p \cdot m \quad$ und $\quad A_1B_1 = q \cdot m$

und $\quad \dfrac{SA_1}{A_1B_1} = \dfrac{p}{q}, \quad$ (p und q ganze, teilerfremde Zahlen).

Legt man durch die Teilpunkte von SA_1 und A_1B_1 des Strahles I Parallele zu A_1A_2, so erhält man auf Strahl II für SA_2 und A_2B_2 ebenso viele untereinander gleiche Teile wie auf Strahl I für SA_1 und A_1B_1. Man erhält für SA_2 und A_2B_2 ein anderes gemeinsames Maß n, das sich auf SA_2 p-mal, auf A_2B_2 q-mal abtragen läßt.

Es ist $\quad SA_2 = p \cdot n \quad$ und $\quad A_2B_2 = q \cdot n$

und $\quad \dfrac{SA_2}{A_2B_2} = \dfrac{p}{q}, \quad$ (p und q ganze, teilerfremde Zahlen).

Es ist also $\quad \dfrac{SA_1}{A_1B_1} = \dfrac{SA_2}{A_2B_2}.$

Sind SA_1 und A_1B_1 ohne gemeinsames Maß, so ersetzt man die Strecke mit irrationaler Maßzahl durch eine solche, deren Maßzahl der Näherungsdezimalbruch von geforderter Genauigkeit ist. Man erhält dadurch für beide Strecken ein gemeinsames Maß von Millimetern oder Zehntelmillimetern oder Hundertstelmillimetern, je nach der geforderten Genauigkeit, und schließt dann wie im ersten Fall.

In gleicher Weise ergeben sich die Beweise für die folgenden Zusammenstellungen der gleichliegenden Strahlenabschnitte (siehe Aufgabe 6):

$$\frac{SB_1}{A_1B_1} = \frac{SB_2}{A_2B_2}; \qquad \frac{SA_1}{SB_1} = \frac{SA_2}{SB_2}.$$

Zweiter Strahlensatz: Werden zwei Strahlen eines Büschels von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte der Parallelen wie die zugehörigen Abschnitte auf den Strahlen.

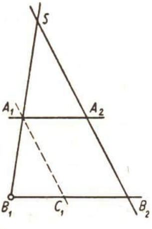


Abb. 97

Beweis (Abb. 97): Wir ziehen als Hilfslinie durch A_1 die Parallele A_1C_1 zu SB_2. Dann ist $A_1C_1B_2A_2$ ein Parallelogramm und C_1B_2 ist gleich A_1A_2.
Nach dem ersten Strahlensatz ist für B_1 als Büschelscheitel und für A_1C_1 und SB_2 als Parallele

$$\frac{C_1B_2}{B_1B_2} = \frac{A_1S}{B_1S}$$

oder $$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{SA_1}{SB_1}.$$

3. Strahlensätze und Verhältnisgleichungen

Bestimmen der vierten Proportionalen. Soll zu drei Zahlen oder Strecken a, b, c die 4. Proportionale x gefunden werden, so muß die Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{bestehen.}$$

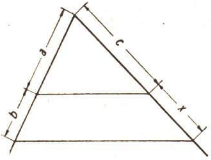


Abb. 98

Geometrisch findet man die 4. Proportionale x nach dem 1. Strahlensatz (Abb. 98), rechnerisch durch Auflösen der Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Die Produktengleichung lautet $\qquad a \cdot x = b \cdot c,$

also ist $\qquad x = \frac{b \cdot c}{a}.$

Die Strahlensatzfigur ist die geometrische Veranschaulichung einer Verhältnisgleichung.

Korrespondierende Addition und Subtraktion. Addiert oder subtrahiert man in der Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ beiderseitig 1, so erhält man

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1.$$

Hieraus folgt $\quad \boldsymbol{\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}} \quad$ und $\quad \boldsymbol{\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}}$,

korrespondierende Addition $\qquad$ korrespondierende Subtraktion,

und aus beiden $\quad \boldsymbol{\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}}$,

korrespondierende Addition und Subtraktion[1]).

Die geometrische Veranschaulichung der drei Verhältnisgleichungen der korrespondierenden Addition und Subtraktion zeigt die Strahlensatzfigur der Abb. 99.

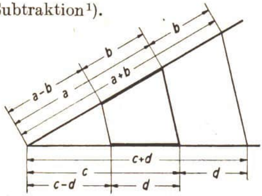


Abb. 99

c) Ähnliche Figuren

1. Ähnlichkeit

Geometrische Figuren einer Ebene können miteinander übereinstimmen (Beispiele in Abb. 100) in der Flächengröße, dann heißen sie **gleich** (Zeichen $=$), in der Gestalt, dann heißen sie **ähnlich** (Zeichen $\sim$ [2]), in der Flächengröße und in der Gestalt, dann heißen sie **kongruent**[3]) (Zeichen $\cong$, d.h. gleich und ähnlich).

1) respondere (lat.) heißt entsprechen, übereinstimmen; cor-respondere (von con-respondere, lat.) heißt beiderseitig entsprechen oder übereinstimmen.

2) Das Zeichen $\sim$ ist ein liegendes umgekehrtes S, von similis (lat.) oder ähnlich.

3) kongruent (lat.) bedeutet miteinander übereinstimmend in Größe und Gestalt, deckungsgleich.

Figuren, die durch maßstäbliche Vergrößerung oder Verkleinerung auseinander hervorgehen, heißen ähnlich.

Was bleibt bei Vergrößerung oder Verkleinerung einer Figur gleich, was wird verhältnisgleich? In den ähnlichen Figuren der Abb. 100 sind $\alpha_2 = \alpha_1$, $\beta_2 = \beta_1$, $\gamma_2 = \gamma_1$, $\delta_2 = \delta_1$, ..., d. h. entsprechende Winkel sind gleich. Ferner werden

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \cdots = \frac{e_2}{e_1} = k,$$

d. h. entsprechende Strecken werden verhältnisgleich.

In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel gleich und entsprechende Strecken verhältnisgleich.

Das Verhältnis zweier entsprechender Strecken ähnlicher Figuren heißt **Ähnlichkeitsverhältnis *k*.** Es gibt die Vergrößerung oder Verkleinerung an, welche die Strecken der ursprünglichen Figur erfahren, oder den **Maßstab *k*,** in dem das Bild gezeichnet ist.

Wie groß ist k bei kongruenten Figuren? Kongruenz ist der Sonderfall der Ähnlichkeit mit dem Ähnlichkeitsverhältnis (Maßstab) $k = \frac{1}{1}$!

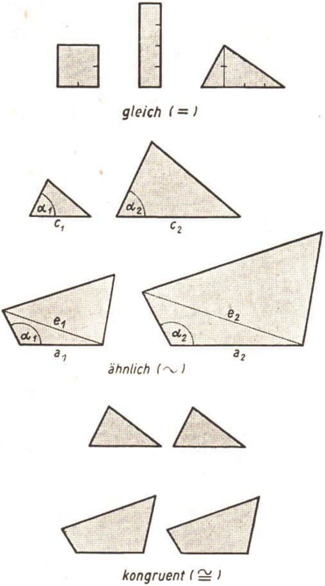


Abb. 100. Gleich (=), ähnlich (∼) und kongruent (≅)

2. Ähnliche Dreiecke

Dreiecke, die in allen entsprechenden Winkeln und im Verhältnis aller entsprechenden Seiten übereinstimmen, sind ähnlich.

Diese sechs Bedingungen für ähnliche Dreiecke sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Warum nicht? Gib einen Grund z. B. für die Dreieckswinkel an! In entsprechender Weise wie bei den Kongruenzsätzen kommt man bei der Zeichnung ähnlicher Dreiecke mit weniger Bedingungen aus. Aufgabe 22 zeigt, daß z. B. zwei gleiche entsprechende Winkel zur Zeichnung ähnlicher Dreiecke genügen. Entsprechend den 4 Kongruenzsätzen ergeben sich 4 Ähnlichkeitssätze (Aufg. 21 bis 24).

Ähnlichkeitssätze für das Dreieck. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen

a) im Verhältnis der drei Seiten,

b) im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,

c) im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite,

d) in zwei Winkeln (Haupt-Ähnlichkeitssatz für das Dreieck!).

Die Beweise für die Ähnlichkeitssätze erbringt man dadurch (Abb. 101a bis d), daß man Dreieck $A_1B_1C_1$ zu einem ähnlichen Dreieck $A_3B_3C_3$ vergrößert und die Kongruenz von $\triangle A_3B_3C_3$ und $\triangle A_2B_2C_2$ zeigt.

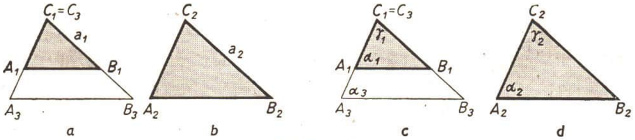


Abb. 101a bis d

Beweis für den Hauptähnlichkeitssatz (Abb. 101c u. d). Gegeben sind zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, die in den Winkeln α und γ übereinstimmen. Es ist $\alpha_2 = \alpha_1$ und $\gamma_2 = \gamma_1$.

Im Dreieck $A_1B_1C_1$ verlängert man C_1A_1 und C_1B_1 und macht C_3A_3 gleich C_2A_2 und C_3B_3 gleich C_2B_2. Dann ist $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$ (sws).

Folglich ist $\alpha_3 = \alpha_2$ und damit auch $\alpha_3 = \alpha_1$. In den Dreiecken $A_1B_1C_1$ und $A_3B_3C_3$ sind somit $\alpha_1 = \alpha_3$, $\gamma_1 = \gamma_1$, $\beta_1 = \beta_3$. Die Winkel α_1 und α_3 sind ihrer Lage nach Gegenwinkel, daher ist $A_1B_1 \parallel A_3B_3$. Nach dem 2. Strahlensatz verhält sich dann $\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{C_1A_1}{C_3A_3} = \frac{C_1B_1}{C_3B_3}$. $\triangle A_1B_1C_1$ und $\triangle A_3B_3C_3$ stimmen somit in allen entsprechenden Winkeln und im Verhältnis ihrer Seiten überein. Es ist $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_3B_3C_3$.

Es ist also $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_3B_3C_3$

und $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

Also ist auch $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken.

Beweis: $\triangle A_1B_1C_1$ und $\triangle A_2B_2C_2$ sind ähnlich. Die Flächeninhalte der Dreiecke sind $F_1 = \frac{c_1 \cdot h_{c_1}}{2}$; $F_2 = \frac{c_2 \cdot h_{c_2}}{2}$, also verhält sich $\frac{F_2}{F_1} = \frac{c_2 \cdot h_{c_2}}{c_1 \cdot h_{c_1}}$.

In den ähnlichen Dreiecken verhält sich $\frac{h_{c_2}}{h_{c_1}} = \frac{c_2}{c_1}$, $\frac{c_2}{c_1}$ ist gleich dem Maßstab k.

Also ist
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{c_2^2}{c_1^2} = k^2.$$

Die Flächenvergrößerung ähnlicher Dreiecke ist gleich dem Quadrat ihrer Streckenvergrößerung. Der Flächenmaßstab ähnlicher Dreiecke ist gleich dem Quadrat ihres Streckenmaßstabs.

3. Ähnliche Vielecke

Ähnliche Vielecke lassen sich durch entsprechende Diagonalen in Paare ähnlicher Dreiecke zerlegen. Umgekehrt entstehen ähnliche Vielecke durch Zusammenfügen entsprechender Paare ähnlicher Dreiecke. Daraus ergeben sich die folgenden Sätze:

In ähnlichen Vielecken verhalten sich irgend zwei entsprechende Strecken wie ein Paar entsprechender Seiten.

Das Seitenverhältnis $\frac{a_2}{a_1} = k$ (Abb. 100) gibt die Vergrößerung oder Verkleinerung der Strecken der ursprünglichen Figur oder den **Maßstab** an, in dem das Bild gezeichnet ist.

Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ein Paar entsprechender Strecken.

Die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken.

Die Flächenvergrößerung ähnlicher Vielecke ist gleich dem Quadrat der Streckenvergrößerung.

Aufgaben

I. Verhältnis zweier Strecken

1. Zeichne zwei Strecken, die das gemeinsame Maß **a)** 10 cm, **b)** 1 cm, **c)** 1 mm, **d)** 0,1 mm, **e)** 0,01 mm . . . haben!

2. Welches ist das gemeinsame Maß der folgenden Streckenpaare:

a) 12 cm und 16 cm, **b)** 16 mm und 20 mm, **c)** 4,4 mm und 4,8 mm, **d)** 4,04 mm und 4,08 mm?

3. Welches Verhältnis besitzen

a) Diagonale und Seite eines Quadrats? **b)** Höhe und Seite eines gleichseitigen Dreiecks?

c) Hypotenuse und Kathete eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks?

II. Die Strahlensätze

4. Zeichne Streckenpaare vom Verhältnis **a)** 2 : 3, **b)** 4 : 9, **c)** 3 : 4, **d)** 1 : 2!

5. Trage auf einem Strahl eines Büschels vom Scheitel aus zwei Strecken a und b vom Verhältnis $\frac{2}{3}$, auf einem zweiten Strahl desselben Büschels auch vom Scheitel aus zwei Strecken c und d von anderer Länge, aber demselben Verhältnis ab! Was folgt für die Streckenpaare a, b und c, d?

6. Beweise den ersten Strahlensatz für die folgenden gleichliegenden Strahlenabschnitte (Abb. 96):

a) $\frac{SB_1}{A_1B_1} = \frac{SB_2}{A_2B_2}$, $\frac{SA_1}{SB_1} = \frac{SA_2}{SB_2}$

b) $\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$, $\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SB_1}{SB_2}$, $\frac{SB_1}{SB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$!

7. Beweise den zweiten Strahlensatz für (Abb. 97)

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{SA_2}{SB_2}!$$

8. Verlängert man die Strahlen eines Büschels über den Scheitel, so entsteht aus dem Strahlenbüschel ein Geradenbüschel (Abb. 102). Beweise die beiden Strahlensätze für das Geradenbüschel!

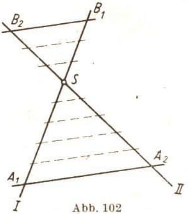


Abb. 102

9. Auf zwei Strahlen eines Büschels trage man **a)** vom Scheitel aus, **b)** hintereinander zwei Streckenpaare a, b und c, d von verschiedener Länge, aber gleichem Verhältnis $\frac{2}{3}$ ab. Welche Verhältnisgleichungen bestehen zwischen den vier Strecken? Verbinde die Endpunkte der gleichliegenden Strecken! Wie liegen die Verbindungslinien zueinander?

10. Umkehrung des ersten Strahlensatzes: Werden zwei Strahlen eines Büschels von zwei Geraden so geschnitten, daß zwei Abschnitte des einen Strahls sich verhalten wie die gleichliegenden des anderen, so sind die schneidenden Geraden parallel.
Anleitung zum Beweis: Indirekter Beweis.

11. Verallgemeinerung des 1. und 2. Strahlensatzes: Wird ein Strahlenbüschel von einer Parallelenschar geschnitten, so verhalten sich

a) die Abschnitte eines Strahls wie die gleichliegenden Abschnitte jedes anderen Strahls,

b) die Abschnitte einer Parallelen wie die gleichliegenden Abschnitte jeder anderen Parallelen.

Anleitung zum Beweis: Bilde fortlaufende Proportionen für die Strahlen und Parallelen!

12. Ein Strecke a ist in **a)** zwei, **b)** fünf, **c)** zehn gleiche Teile zu teilen.

13. Eine Strecke a ist im Verhältnis **a)** $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{5}{3}$, **c)** $\frac{1}{1}$ zu teilen.

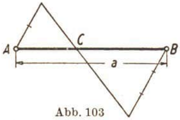


Abb. 103

Anleitung in Abb. 103: Jeder Teilabschnitt beginnt beim Teilpunkt C und reicht bis zu den Grundpunkten A und B. Er wird in dieser Anordnung auch benannt. Die Teilabschnitte der Strecke AB sind also CA und CB, das Teilverhältnis ist $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{3}$.

14. Die vierte Proportionale. Wie groß ist die 4. Proportionale zu **a)** 2, 3, 4; **b)** 2, 4, 3; **c)** 3, 2, 4; **d)** 3, 4, 2; **e)** 4, 2, 3; **f)** 4, 3, 2?

Anleitung: Wiederhole und beweise die Regel über die Vertauschbarkeit der Innen- und Außenglieder einer Verhältnisgleichung!

15. Zeichne die 4. Proportionale zu den folgenden Strecken:

a) $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm; **b)** $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3$ cm!

16. Bilde neue Verhältnisgleichungen aus den folgenden Proportionen durch korrespondierende Addition und Subtraktion:

a) $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$, **b)** $\frac{4}{3} = \frac{6}{4{,}5}$, **c)** $\frac{m-2}{2} = \frac{n-3}{3}$, **d)** $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$!

Zwischenschalten von Funktionswerten, Interpolieren.

17. Von einer Geraden durch den Nullpunkt eines xy-Achsenkreuzes ist zur Abszisse x_1 der Funktionswert y_1 bekannt. Wie groß ist der Funktionswert y_2 an der Stelle x_2?

a) $x_1 = 4$ $\quad y_1 = 12$ $\quad x_2 = 1;\ 2;\ 3,$

b) $x_1 = -4$ $\quad y_1 = 8$ $\quad x_2 = -1;\ -2;\ -3,$

c) $x_1 = 3{,}2$ $\quad y_1 = 4{,}8$ $\quad x_2 = 1;\ 2;\ 3;\ 0{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5;\ 4;\ 4{,}5,$

d) $x_1 = -0{,}8$ $\quad y_1 = -1{,}2$ $\quad x_2 = -0{,}2;\ -0{,}4;\ -0{,}6;\ -1;\ -1{,}2;\ -2.$

Anleitung: Stelle jede Aufgabe geometrisch dar und berechne y_2 mit Hilfe der Strahlensätze!

18. Von einer linearen Funktion $y = f(x)$ sind die Werte $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ gegeben. Schaltet man zwischen x_1 und x_2 einen Abszissenwert x_3 ein, $(x_1 < x_3 < x_2)$, so schiebt sich für y ein Funktionswert $y_3 = f(x_3)$ zwischen y_1 und y_2 ein. Um wieviel nimmt der Funktionswert y von y_1 bis y_3 zu bzw. ab, wenn man für x von x_1 bis x_3 fortschreitet? Wie groß ist der Funktionswert y_3?

a) (7; 2), (8; 6), $x_3 = 7{,}5$ $\quad$ **b)** (7; 2,4), (8; 6,4), $x_3 = 7{,}6$

c) (7; 2,8), (8; 6,3), $x_3 = 7{,}2;\ 7{,}4;\ 7{,}8$ $\quad$ **d)** (7; 2,8), (8; 6,4), $x_3 = 7{,}5;\ 7{,}2;\ 7{,}4;\ 7{,}7$

19. Beim Benutzen einer Tafel der Quadrate, der Kuben und einer Logarithmentafel interpoliert man in gleicher Weise wie bei linearen Funktionen. Warum ist lineare Interpolation für diese Tafeln zulässig? (Vergleiche Abschn. 15, Aufgabe 9 und 10 und Abschn. 25, Aufgabe 13 und 14.)

20. Wie groß sind

a) die Quadrate von 8,756; 75,43; 231,5; 1 347; 0,967 5

b) die Kuben von 3,456; 37,65; 765,4; 4 765; 1,865; 0,145 6

c) die Quadratwurzeln aus 70; 7; 8 400; 840; 0,6; 0,06

d) die Kubikwurzeln aus 514; 53; 6; 900 000; 35 000; 6 000

e) lg 7 586; lg 31,62; lg 5,012; lg 398,1

f) die Werte von x für $\lg x = 0.4000$; $\lg x = 1.9000$; $\lg x = 2.4000$; $\lg x = 1.6500$?

III. Ähnliche Figuren

21. Zeichne drei Paar verschieden lange, verhältnisgleiche Strecken $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3}$ und zeichne zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ aus a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2! Was läßt sich über die Größe entsprechender Winkel und über die Form der beiden Dreiecke aussagen?

22. Zeichne zwei Dreiecke von verschiedener Größe aus zwei gleichen Winkelpaaren $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$ und $\beta_1 = \beta_2 = 70°$! Was läßt sich über die Größe der Verhältnisse entsprechender Seiten und über die Gestalt der beiden Dreiecke aussagen?

23. Zeichne zwei Dreiecke von verschiedener Größe, welche übereinstimmen

a) im Verhältnis der drei Seiten $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = 7 : 4 : 6$,

b) im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = 7 : 4, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 70°,$$

c) im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite,

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = 2 : 3, \quad \beta_1 = \beta_2 = 60°,$$

d) in zwei Winkeln, $\alpha_1 = \alpha_2 = 50°, \beta_1 = \beta_2 = 60°$!

24. Beweise die Ähnlichkeitssätze für zwei ähnliche Dreiecke, wenn diese übereinstimmen

a) im Verhältnis der drei Seiten,

b) im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,

c) im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite!

25. Warum nennt man den Satz: »Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen« den Haupt-Ähnlichkeitssatz für Dreiecke?

26. Wann sind gleichseitige, gleichschenklige, rechtwinklige, gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke ähnlich?

27. Wann sind Quadrate, Rechtecke, Rhomben, Parallelogramme ähnlich?

Anwendung der Ähnlichkeitssätze auf ähnliche Dreiecke

28. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich irgend zwei entsprechende Strecken wie ein Paar entsprechender Seiten. Beweise (Abb. 104):

$$\frac{h_{c_2}}{h_{c_1}} = \frac{a_2}{a_1} = k, \quad \frac{w_{\gamma_2}}{w_{\gamma_1}} = \frac{a_2}{a_1},$$

$$\frac{s_{c_2}}{s_{c_1}} = \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1},$$

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{a_2}{a_1}\,!$$

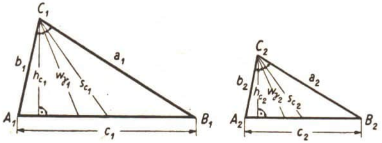


Abb. 104

Anleitung zu den Beweisen: Es sind stets Teildreiecke vorhanden, die ähnlich sind und in denen diese Stücke als Seiten liegen.

29. Die Umfänge ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie ein Paar entsprechender Seiten. Zeichne die Strahlensatzfigur zu diesem Satz und beweise ihn!

30. Das Verhältnis irgend zweier entsprechender Strecken ähnlicher Figuren gibt die Vergrößerung (Verkleinerung) an, welche die Strecken der Ausgangsfigur erfahren. Diese ist gleich dem Maßstab k, in dem die zweite Figur, das Bild, gezeichnet ist. Was heißt es, der Maßstab eines Bildes sei **a)** $\frac{1}{5}$ oder 1 : 5, **b)** $\frac{5}{1}$ oder 5 : 1, **c)** $\frac{1}{2}$ oder 1 : 2, **d)** $\frac{2}{1}$ oder 2 : 1, **e)** 1 : 25 000, **f)** 1 : 100 000, **g)** 1 : 300 000, **h)** 1 : 1 000 000?

31. Vergrößere ein gegebenes **a)** Dreieck, **b)** Viereck, **c)** Rechteck auf den Maßstab 5 : 3!

	Gestalt:		Größe:	
32. Zeichne ein Dreieck aus	**a)** $a:b,\ \gamma$	**e)** $h_c:p,\ \gamma$	**a)** c	**e)** s_c
	b) $a:b,\ c$	**f)** $a:w_\gamma$,	**b)** h_c	**f)** ϱ
	c) $a:b,\ \alpha,\ (a>b)$	**g)** $c:r,\ \beta$	**c)** p	**g)** s_c
	d) $a:h_c,\ \gamma$	**h)** $c:\varrho,\ \alpha$	**d)** q	**h)** w_γ

Anleitung: Aus den Angaben unter „Gestalt" zeichne jedesmal ein dem gesuchten ähnliches Dreieck $A_1B_1C_1$; darauf aus dem Stück unter „Größe" ein dem gesuchten kongruentes Dreieck ABC. Sind alle Zusammenstellungen von Dreiecksstücken bei „Gestalt" und „Größe" verwendbar? Kann zur Bestimmung der Größe ein Winkel gegeben sein?

33. Vergrößere ein gegebenes Dreieck auf das Streckenverhältnis 2 : 1! In welchem Verhältnis wird die Fläche vergrößert? Beweise die Flächenvergrößerung auch anschaulich durch Zerlegen der Fläche des Bilddreiecks in vier kongruente Ausgangsdreiecke!

34. Verkleinere ein gegebenes Dreieck auf das Streckenverhältnis 1: 2! In welchem Verhältnis wird die Fläche verkleinert? Beweise die Flächenverkleinerung anschaulich!

Anwendung der Ähnlichkeitssätze auf ein Dreieck.

35. Von den Höhen eines Dreiecks: Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die Seiten. Beweis!

36. Von den Seitenhalbierenden eines Dreiecks: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt und teilen sich im Verhältnis 2 : 1. Der Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Beweis! (Abb. 105.)

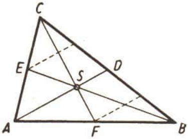


Abb. 105

IV. Angewandte Aufgaben. Ähnlichkeitskonstruktionen.

37. An Eisenbahnstrecken und gelegentlich auch an Straßen findet man bei Beginn einer Steigung eine schräg in die Richtung der Steigung zeigende Tafel nach Art eines Wegweisers (Abb. 106) aufgestellt, auf der ein Verhältnis und eine Weglänge angegeben sind, z. B. 1: 125, 1 500 m. Die Angabe bedeutet, daß auf je 125 m waagerechter Strecke des Steigungsdreiecks die Erhebung 1 m beträgt und daß dies für eine Länge von 1 500 m gilt.

a) Wie groß ist die Gesamterhebung am Ende der Steigung?

b) Bestimme durch eine maßstäbliche Zeichnung den Steigungswinkel und die Enderhebung!

c) Drücke den Anstieg in Prozenten aus!

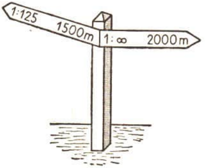


Abb. 106. Steigungstafel der Reichsbahn

38. Böschungslehren. Die Steilheit einer Damm- oder einer Grabenböschung wird durch das Verhältnis von Dammhöhe (Grabentiefe) zu Böschungsbreite bestimmt. Vor der Ausführung einer Dammschüttung oder eines Grabenstichs werden die Böschungen durch sog. Böschungslehren aus Pfählen und Latten festgelegt (Abb. 107). Der Pfahlabstand betrage 80 cm (90 cm; 100 cm), das untere Ende der Latte sei 20 cm vom Erdboden befestigt. Wie hoch liegt die obere Befestigungsstelle bei einem Böschungsverhältnis von 1 : 1,5 (1 : 2; 1 : 2,5)?

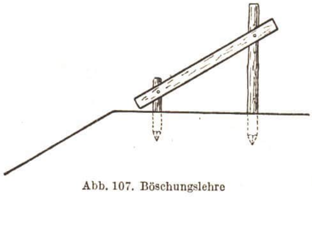


Abb. 107. Böschungslehre

39. Der Grundriß eines Gebäudes in einem Bauplan (Maßstab 1 : 200) hat die Form eines Rechtecks, das 6,5 cm lang und 4,8 cm breit ist.

a) Wie lang und wie tief ist das Gebäude in Wirklichkeit?

b) Wie groß ist die bebaute Fläche im Plan und in Wirklichkeit?

c) Vergleiche die Flächenvergrößerung mit der Streckenvergrößerung!

40. Bestimme die Länge des Obergurts, der Diagonalen und der Senkrechten der in Abb. 108 dargestellten Dachbinder! Sämtliche Maßzahlen sind in mm angegeben!

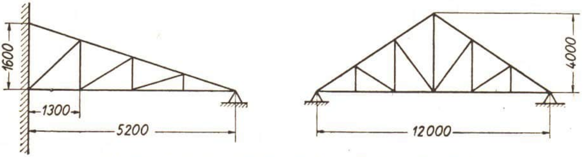


Abb. 108. Dachbinder a) Pultdachbinder, b) Englischer Dachbinder

41. Schneide von einem Rechteck mit den Seiten $a = 4$ cm und $b = 3$ cm durch eine Parallele zur kleineren Seite ein Rechteck ab, dessen Seiten sich wie die des gegebenen Rechtecks verhalten! Bestimme die kleinere Seite des gesuchten Rechtecks **a)** durch Rechnung, **b)** durch Zeichnung!

42. Legt man in einem Rechteck besonderer Gestalt durch die Mitte der längeren Seite eine Parallele zur kürzeren Seite, so erhält man durch Faltung in der Parallelen zwei dem Ausgangsrechteck ähnliche Teilrechtecke.

a) In welchem Verhältnis zueinander müssen dazu die Seiten des Ausgangsrechtecks stehen? In welchem Verhältnis zueinander stehen dann **b)** die Seiten der Teilrechtecke,

c) entsprechende Seiten des Ausgangsrechtecks und der Teilrechtecke,

d) die Flächen des Ausgangsrechtecks und der Teilrechtecke,

(Blattgrößen nach DIN 476, Reihe A! Vergleiche Abschn. 21, Aufgabe 19!)

43. Wie groß (in mm) sind die Seiten eines Rechtecks, dessen Fläche 1 m² beträgt und dessen Seitenverhältnis ebenso groß ist wie das Seitenverhältnis der durch Falten nach Aufg. 42 aus dem Ausgangsrechteck entstehenden Teilrechtecke? (Format DIN A 0.)

44. Bestimme die Größen und das Verhältnis der Seiten derjenigen Rechtecke, die durch weiteres Falten der in Aufgabe 43 erhaltenen Teilrechtecke entstehen (Blattgrößen DIN A 0; A 1; A 2; A 3; A 4; ...)!

Nomogramme

45. Teile eine Strecke von 8 cm in 3 (4; 5) gleiche Teile **a)** durch parallele Strahlen (Parallelprojektion), **b)** durch Strahlen von einem festen Punkt O aus (Zentralprojektion)!

46. In welchen Abständen von einem festen Punkt O muß man drei verschiedene, nach Réaumur, Celsius und Fahrenheit geeichte Thermometer aufstellen, damit die Quecksilberkuppen bei jeder beliebigen Temperatur auf einer durch den Punkt O gehenden Geraden liegen, sofern auch die Eispunkte der Thermometer (0° R $\triangleq$ 0° C $\triangleq$ 32° F) auf einer durch O gehenden Geraden liegen? Die Thermometerskalen sind in gleichem Maßstab ausgeführt, die Siedepunkte der drei verschiedenen Thermometer liegen bei 80° R = 100° C = (180 + 32)° F.

47. Zeichne nach Aufgabe 46 ein Bild zur graphischen Umrechnung der drei Thermometerskalen! Ein solches Bild nennt man eine Rechentafel oder ein Nomogramm[1]).

---

1) Nomogramm (gr.) heißt Rechentafel.

48. Geschwindigkeiten werden in der Physik und Technik in verschiedenen Maßeinheiten angegeben, z. B. Windgeschwindigkeiten, Schall-, Lichtgeschwindigkeit in m/s, Fahrzeuggeschwindigkeiten in km/h, Schiffsgeschwindigkeiten in Knoten oder sm/h (Seemeilen je Stunde, 1 sm = 1,852 km).

a) Berechne die Umrechnungsverhältnisse von m/s in sm/h und in km/h!

b) Berechne die Geschwindigkeit 10 m/s in den Maßeinheiten sm/h und km/h!

c) In welchen Abständen vom Punkte O müssen in Abb. 109 die in gleichem Maßstab ausgeführten Skalen für sm/h und km/h der Skala für m/s parallel gezeichnet werden, damit einander entsprechende Geschwindigkeitswerte der verschiedenen Skalen stets auf einer durch O gehenden Geraden, der Fluchtlinie durch O, liegen?

d) Wie findet man aus dem Nomogramm zur Umrechnung der Geschwindigkeiten die einander bei den verschiedenen Maßeinheiten zugeordneten Werte? Welche Geschwindigkeit in m/s bzw. in km/s entspricht einer Geschwindigkeit von 12 Knoten?

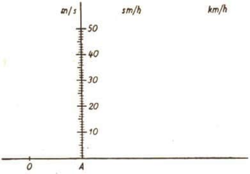


Abb. 109

Entfernungs- und Höhenmessung

49. Wie hoch ist ein Turm, der einen Schatten von 12 m wirft, wenn zur gleichen Zeit ein lotrecht stehender Fluchtstab von 2 m Länge einen Schatten von 80 cm wirft? 30 m

50. Bestimmung der Entfernung eines unzugänglichen Punktes X vom Beobachtungsort A (Abb. 110): Stecke im zugänglichen Gelände von A aus mit Fluchtstäben eine Strecke AB und eine zu ihr parallele Gerade g ab! Peile von A und B aus den Punkt X an und markiere die Schnittpunkte der Peilstrahlen mit g durch Einfluchten von Stäben in C und D! Messe $AB = m$, $CD = n$ und $AC = a$! Bestimme durch Zeichnung und Rechnung die gesuchte Strecke $AX = x$! ($m = 15{,}00$ m; $n = 9{,}50$ m; $a = 7{,}35$ m.)

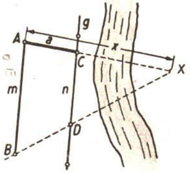


Abb. 110

51. Zwei Orte A und B sind durch einen Bergrücken getrennt und sollen durch einen geradlinigen Tunnel miteinander verbunden werden. Der Durchstich wird gleichzeitig von beiden Orten aus in Angriff genommen. Die Richtung, in welcher der Durchstich geführt werden muß, und die geradlinige Entfernung der beiden Orte A und B ist zu bestimmen.

Anleitung in Abb. 111: Man bestimmt einen Punkt C, von dem aus die beiden Orte A und B sichtbar sind, und ermittelt dessen Entfernungen von A und B. Dann bestimmt man für einen beliebigen Punkt D auf AC das Teilverhältnis $m:n$ und teilt die Strecke BC im gleichen Verhältnis. Die Verbindungslinie der Teilpunkte D und E wird durch eine dritte, durch C gehende Gerade im Punkte F geschnitten. Man bestimmt auf ihr die Strecke FG als vierte Proportionale aus $DC : DA = FC : FG$. Die Peillinie AG gibt die gesuchte Richtung an, in der der Durchstich vom Punkte A aus zu führen ist. In entsprechender Weise legt man auch im Punkte B die gesuchte Richtung fest. ($AC = 4\,200$ m; $BC = 5\,040$ m; $DE = 1\,900$ m; $FC = 1\,350$ m; $m:n = 9:5$.)

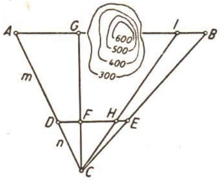


Abb. 111

a) Beweise, daß die Verlängerung von AG durch den Punkt B hindurchgeht! (Indirekter Beweis!)

b) Bestimme durch Zeichnung und Rechnung die Entfernung AB!

Meß- und Zeichengeräte

Die Gesetze der Ähnlichkeitslehre kommen vielfach in Meßgeräten und solchen Zeichengeräten zur praktischen Anwendung, die zur Anfertigung von Zeichnungen in vergrößertem oder verkleinertem Maßstab dienen.

52. Der Meßkeil (Abb. 112) wird zur Messung kleiner Abstände, z. B. des lichten (inneren) Durchmessers von Röhren, verwendet. Sein Querschnitt ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 10 cm und 1 cm lang sind. Der Keil ist durch Parallele zum Keilrücken in 1 cm Abstand unterteilt.

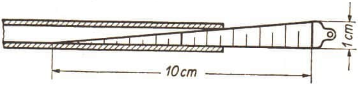


Abb. 112. Meßkeil

a) Beschreibe die Anwendung des Meßkeils!

b) Fertige auf Millimeterpapier eine genaue Zeichnung des Meßkeils an! Wie groß ist die Ordinate, die zur Abszisse 5,8 cm gehört?

c) Wie groß ist der lichte Durchmesser der Glasröhre in Abb. 112?

d) Welche Ablesegenauigkeit ist mit dem Meßkeil erreichbar?

53. Der Keilausschnitt (Abb. 113).

a) Beschreibe die Anwendung des Keilausschnitts zur Dickenmessung von Platten!

b) Wie groß ist in Abb. 113 die Dicke der Platte?

c) Welche Ablesegenauigkeit ist mit dem Keilausschnitt erreichbar?

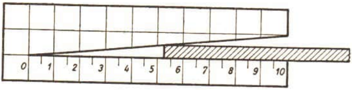


Abb. 113. Keilausschnitt

54. Der Proportionalmaßstab oder Transversalmaßstab ist ein Gerät zur Messung von Strecken, die mit dem Stechzirkel in Zeichnungen oder Geländekarten abgegriffen werden. Abb. 114 zeigt einen Transversalmaßstab für eine Karte im Maßstab 1 : 500. Er hat die Form eines Rechtecks, das durch Parallele zu den Seiten in Längs- und Querstreifen unterteilt ist. Der Kopf des Maßstabes (auf der linken Seite) ist ein Rechteck $ABCD$, dessen Länge

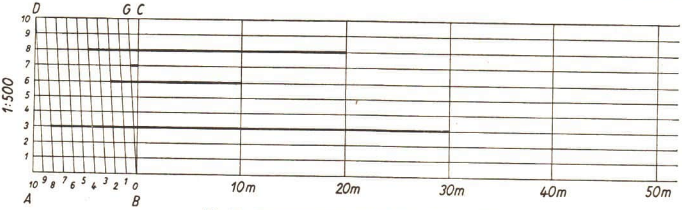


Abb. 114. Transversalmaßstab für eine Karte 1 : 500

10 Einheiten umfaßt und dessen Breite beliebig lang und in 10 gleiche Teile geteilt ist. Durch die Teilpunkte der Breite AD sind horizontale Parallele gezogen. Durch Verbindung der Teilpunkte von AB mit den um eine Einheit nach links verschobenen Teilpunkten von CD erhält man die schrägen Parallelen oder „Transversalen"[1]), nach denen der Maßstab als „Transversalmaßstab" bezeichnet wird. Die Parallelen zur Grundseite AB sind von unten nach oben mit 1, 2, . . ., 10, die Transversalen von B aus beginnend nach links mit 0, 1, 2, . . ., 9 beziffert.

1) transversus (lat.) heißt schräg.

a) Wie lang ist das im Dreieck BCG liegende Stück der 7. Horizontalparallelen?

b) In welchem Zusammenhang steht die Bezifferung an den horizontalen Parallelen mit der Länge ihrer Abschnitte im Dreieck BCG?

c) Wie lang sind die in der Abb. 114 eingetragenen Strecken in Wirklichkeit?

d) Zeichne Strecken, die den Entfernungen 15,4 m; 28,7 m; 10,4 m entsprechen!

e) Zeichne einen Transversalmaßstab für das Verkleinerungsverhältnis 1 : 1000!

f) Wie lang muß die Grundseite des Kopfrechtecks eines Transversalmaßstabes sein, der für ein Meßtischblatt (1 : 25 000) bzw. für eine Landkarte im Maßstab 1 : 100 000 verwendet werden soll?

55. Der Proportionalzirkel (Abb. 115) wird beim technischen Zeichnen benutzt, um Strecken einer vorliegenden Zeichnung nach einem vorgeschriebenen Maßstab zu vergrößern oder zu verkleinern. Er besteht aus zwei Schenkeln mit einem verschiebbaren Drehpunkt.

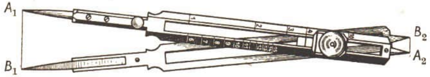


Abb. 115. Proportionalzirkel

a) Auf welchem Ähnlichkeitssatz beruht die Wirkungsweise des Proportionalzirkels?

b) Wie ist der Zirkel bei Vergrößerungen bzw. bei Verkleinerungen zu verwenden?

c) Berechne die Teilung für die Lage des Drehpunktes bei verschiedenen Umzeichnungsverhältnissen, wenn der Spitzenabstand eines Schenkels 20 cm beträgt!
Umzeichnungsverhältnisse: 2 : 1, 3 : 1, 4 : 1, 5 : 1, 10 : 1, k; 1:2, 1:3, ..., 1:k.

d) Wie erhält man von einer Originalzeichnung bei Verwendung eines Proportionalzirkels ein vergrößertes oder verkleinertes Bild in vorgeschriebenem Maßstab?

56. Der Meßtisch und die Meßtischaufnahme. Zur kartographischen Aufnahme eines Geländestücks verwendet man den Meßtisch. Er besteht aus einer auf einem Dreifuß ruhenden und um eine lotrechte Achse schwenkbaren quadratischen Platte, die mit Zeichenpapier überspannt wird. Zur Festlegung der Peilrichtungen dient ein Lineal mit aufmontiertem Fernrohr, die Kippregel. Mittels einer Wasserwaage wird die Tischplatte waagerecht eingestellt (Abb. 116). In dem aufzunehmenden Gelände sei die waagerechte Entfernung zweier Punkte A und B bekannt. Die „Standlinie AB" wird in dem gewünschten Maßstab (gewöhnlich 1 : 25 000) als

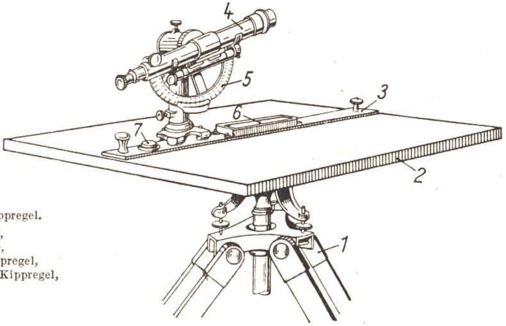


Abb. 116. Meßtisch mit Kippregel.
1. Dreifuß-Stativ,
2. Meßtischplatte,
3. Lineal der Kippregel,
4. Fernrohr der Kippregel,
5. Höhenkreis,
6. Magnetnadel,
7. Wasserwaage

Strecke $A'B'$ auf das Meßtischblatt übertragen (Abb. 117). Um die Lage eines dritten Punktes C in der Zeichnung festzulegen, stellt man den Meßtisch zunächst in A so auf, daß A' lotrecht über A liegt und die Richtung von $A'B'$ in die Richtung von AB fällt. Mit der Kippregel legt man die Richtung von A' nach dem Punkte C in der Zeichnung fest. Dann stellt man den Meßtisch im Punkte B so auf, daß B' lotrecht über B liegt und $B'A'$ mit der Richtung BA zusammenfällt. Die Richtung von B' nach C wird durch den Peilstrahl nach C bestimmt und in der Zeichnung festgelegt. Beide Peilstrahlen schneiden sich in der Zeichnung im Punkte C'. Wiederholt man dieses Verfahren für eine Reihe von Geländepunkten, so erhält man auf dem Meßtischblatt ein ähnliches Bild des Geländes im gewünschten Maßstab.

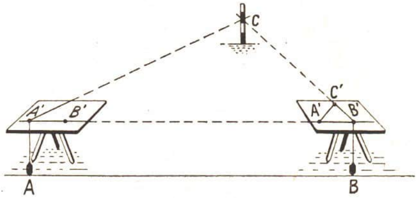


Abb. 117. Meßtischaufnahme

a) Beweise, daß das Bild $A'B'C'$ auf dem Meßtischblatt dem Geländedreieck ABC ähnlich und im gewünschten Maßstab verkleinert ist!

b) Übe das Meßtischverfahren vor seiner praktischen Anwendung im Gelände zu Hause ein! Als Gelände nimmt man eine Tischplatte, als Meßtisch einen Zeichenblock, als Standlinie markiert man an der Tischkante eine Strecke AB, die man auf das „Meßtischblatt" in einem passend gewählten Verkleinerungsmaßstab (1 : 10) überträgt (Abb. 118). Drei beliebig in die Tischplatte eingesteckte Stecknadeln (Fluchtstäbe C, D, E) ersetzen die Geländepunkte C, D, E. Beweise die Ähnlichkeit des Meßtischdreiecks $C_1D_1E_1$ mit dem „Geländedreieck" CDE!

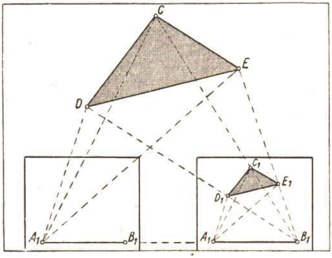


Abb. 118. Meßtischverfahren

57. Das Försterdreieck (Abb. 119) ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, das man zur schnellen Bestimmung der Höhe von Bäumen, Masten, Türmen usw. benutzt.

a) Beschreibe seinen Gebrauch!

b) Welchen Zweck hat das an einer Kathete herabhängende Lot und warum ist es notwendig?

c) Die Höhenbestimmung wird auf die Messung einer zugänglichen Größe zurückgeführt. Welche Größe muß gemessen werden?

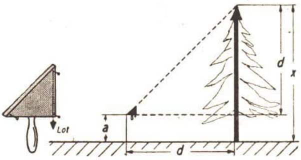


Abb. 119. Messungen von Höhen mit dem Försterdreieck. a Augenhöhe des Beobachters; d horizontale Entfernung des zu messenden Gegenstandes

d) Welche geometrischen Gesetze kommen bei der Höhenbestimmung zur Anwendung?

e) Welche Korrektur ist an dem Meßergebnis anzubringen?

f) Bestimme mit einem Försterdreieck die Höhe eines Hochspannungsgittermastes, eines Turmes, eines Hausgiebels usw. (vgl. c)!

58. Ein schon im Mittelalter bekanntes Gerät zur Höhen- und Entfernungsmessung ist der Jakobstab (Abb. 120). Auf einem mit Maßeinteilung versehenen Stab AB ist ein zu ihm senkrecht stehender Stab CD verschiebbar. Die Entfernungen der Marken C und D von der Mittellinie der Meßstange sind gegeben (gewöhnlich gleich 10 Einheiten).

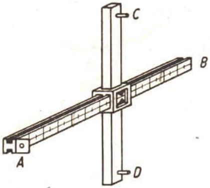


Abb. 120. Jakobstab

a) Um die Höhe eines Turmes zu messen, hält man AB in horizontaler Richtung, peilt die Turmspitze durch das Diopter A über die Marke C an und verschiebt den Stab CD so lange, bis der Peilstrahl die Turmspitze trifft. Welcher Ähnlichkeitssatz kommt für die Berechnung der Höhe in Anwendung? Welche Größe muß (außer dem am Jakobstab abgelesenen Verhältnis) der Messung zugänglich sein?

b) Bestimme die Höhe und die Entfernung eines unzugänglichen Turmes durch Anpeilen der Turmspitze von zwei hintereinanderliegenden, 29,40 m voneinander entfernten Beobachtungsstellen! Die am Jakobstab abgelesenen Verhältnisse betragen 10 : 21 und 10 : 28.

c) Wie benutzt man den Stab zur Bestimmung waagerechter Entfernungen? Warum arbeitet man dabei mit der ganzen Stablänge CD?

27. Figuren in Ähnlichkeitslage

a) Ähnlichkeitslage

1. Schattenwurf, Bildwurf und Projektion

Schattenwurf. Eine Punktlichtlampe P entwirft nach Abb. 121 von einem Quadrat, das sich auf einer mit Gitterteilung versehenen Glasplatte e befindet, ein Schattenbild auf dem Schirm ε. Welche Lage müssen Glasplatte e und Bildschirm ε zueinander haben, damit das Schattenbild wieder ein Quadrat ist, oder welche Lage muß die Bildebene ε zur Ebene e der abzubildenden Figur haben, damit Original und Bild ähnlich sind?

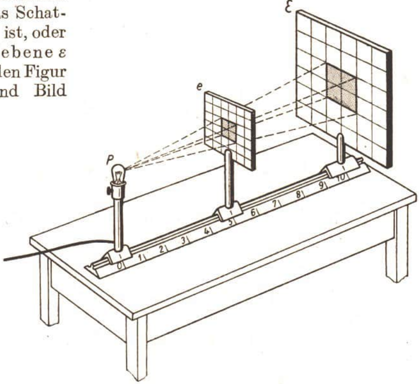


Abb. 121. Schattenwurf

Bildwurf. Abb. 122 zeigt dasselbe Quadrat im Bildwurf eines Projektionsapparates unter Fortlassung des mathematisch Unwichtigen. P ist die Abbildungslinse des Apparates. Welche Lage müssen auch hier Ebene e der abzubildenden Figur und Bildebene ε zueinander haben, damit Original und Bild ähnlich sind?

Projektion. Schattenwurf und Bildwurf nennt man auch **Projektion**[1]). P heißt das **Projektionszentrum.** Die Lichtstrahlen von P zu entsprechenden Punkten der Figur und ihres Bildes heißen **Projektionsstrahlen.** Die verwendete Projektionsart heißt **Zentralprojektion.**

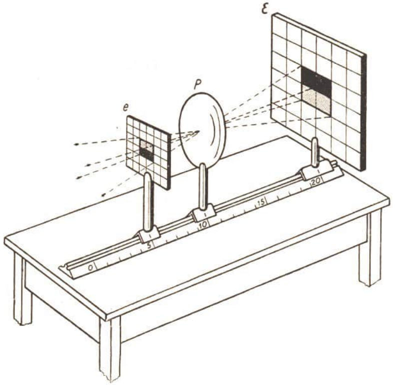


Abb. 122. Bildwurf

Liegt das Projektionszentrum außerhalb der Verbindungsstrecke je zweier entsprechender Punkte von Original und Bild, so spricht man von äußerem Projektionszentrum (Schattenwurf, Abb. 121); liegt es innerhalb, so spricht man von innerem Projektionszentrum (Bildwurf, Abb. 122).

2. Ähnlichkeitslage

Damit Original und Bild bei Abbildung durch Zentralprojektion ähnlich sind, muß die Bildebene ε parallel zur Ebene e des abzubildenden Gegenstandes stehen. Dann sind die entsprechenden Seiten der Ausgangsfigur und ihres Bildes verhältnisgleich und außerdem parallel und die entsprechenden Winkel gleich und außerdem in ihren Schenkeln parallel.

Ähnliche Figuren, deren entsprechende Seiten parallel laufen, sind in „Ähnlichkeitslage“.

b) Figuren in Ähnlichkeitslage

Figuren sind in Ähnlichkeitslage, wenn entsprechende Seiten parallel sind und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte durch denselben Punkt P gehen.

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ähnlich-liegender Figuren nennt man **Ähnlichkeitsstrahlen,** ihren gemeinsamen Schnittpunkt **Ähnlichkeitspunkt.**

---

1) proicere (lat.) heißt vorwärts hinwerfen.

1. Räumliche und ebene Ähnlichkeitslage

Nach der Lage der beiden Figuren zueinander unterscheidet man

räumliche Ähnlichkeitslage	und	ebene Ähnlichkeitslage.
Beide Figuren liegen in **parallelen** Ebenen, $e \parallel \varepsilon$; Abb. 123.		Beide Figuren liegen in **derselben** Ebene, $e = \varepsilon$; Abb. 124.

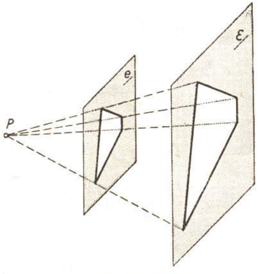


Abb. 123. ($e \parallel \varepsilon$)

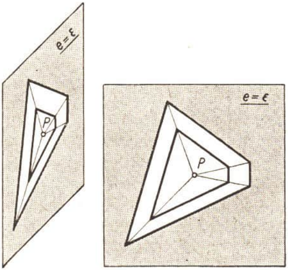


Abb. 124. ($e = \varepsilon$)

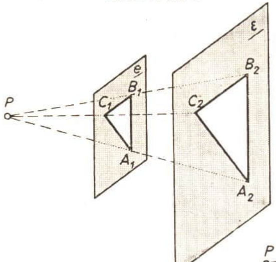


Abb. 125. ($e \parallel \varepsilon$)

Der Ähnlichkeitspunkt P liegt als **äußerer** Ähnlichkeitspunkt außerhalb (Abb. 125 und 126), als **innerer** Ähnlichkeitspunkt innerhalb (Abb. 127 und 128) der Verbindungsstrecke je zweier entsprechender Punkte A_1 und A_2 von Original und Bild.

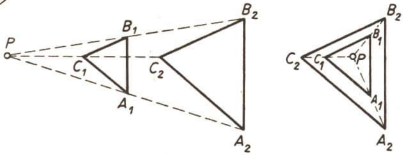


Abb. 126. ($e = \varepsilon$)

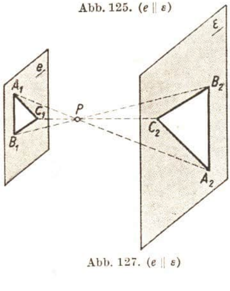


Abb. 127. ($e \parallel \varepsilon$)

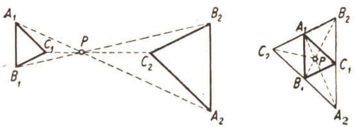


Abb. 128. ($e = \varepsilon$)

Vergleiche Ähnlichkeitspunkt und Projektionszentrum, Ähnlichkeitsstrahlen und Projektionsstrahlen, Ähnlichkeitslage von Original und Bild und Projektion des Originals vom Zentrum P aus miteinander! Durch welche Bewegungen entsteht die ebene Ähnlichkeitslage aus der räumlichen Ähnlichkeitslage? Vergleiche die Abbildungen 123 und 124, 125 und 126, 127 und 128 miteinander!

2. Das Ähnlichkeitsverhältnis

Sind A_2 und A_1 entsprechende Punkte zweier Figuren in Ähnlichkeitslage, so nennt man das Verhältnis $\frac{PA_2}{PA_1}$ das **Ähnlichkeitsverhältnis k** der beiden Figuren. Das Ähnlichkeitsverhältnis hat für alle entsprechenden Punkte zweier ähnlich-liegender Figuren denselben konstanten Wert (Abb. 125 bis 128), es ist

$$\frac{PA_2}{PA_1} = \frac{PB_2}{PB_1} = \frac{PC_2}{PC_1} = \cdots = k \quad \text{(1. Strahlensatz).}$$

Das Verhältnis entsprechender Strecken ähnlich-liegender Figuren hat denselben Wert wie das Ähnlichkeitsverhältnis k (Abb. 125 bis 128), denn es ist

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{PA_2}{PA_1} = k \qquad \text{(2. Strahlensatz).}$$

Das Ähnlichkeitsverhältnis k gibt also auch die Vergrößerung (oder Verkleinerung) der Strecken des Originals oder den Maßstab des Bildes an. Vergleiche dazu Abschn. 26.

Die Betrachtungen über die Ähnlichkeitslage zweier Figuren gelten nicht nur für geradlinig begrenzte Figuren, sondern lassen sich auf krummlinig begrenzte Figuren erweitern. Zwei beliebige Kreise mit verschiedenen Radien z. B. sind stets in Ähnlichkeitslage. Welches sind entsprechende Punkte der beiden Kreise? Welches sind entsprechende Strecken der beiden Kreise? Wo liegt der innere und der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise (vergleiche Aufgabe 5)?

c) Körper in Ähnlichkeitslage

Auch Körper können ähnlich liegen. Dazu müssen ihre begrenzenden Flächen paarweise in Ähnlichkeitslage sein (vergleiche Aufg. 8). Wie müssen z. B. zwei verschieden große Würfel zueinander liegen, damit entsprechende Seitenflächen paarweise in Ähnlichkeitslage sind?

Aufgaben

I. Projektion

1. Wie ändern sich in Abb. 121
- **a)** die Größe des Schattenbildes (Bildes),
- **b)** der Bildmaßstab,
- **c)** der Verlauf der Projektionsstrahlen,

wenn die Punktlichtlampe oder das Projektionszentrum P von der Originalfigur immer weiter weggrückt? Wann wird aus der Ähnlichkeit von Original und Bild eine Kongruenz der beiden? Was wird dann aus der Zentralprojektion?

Anleitung:

1. Projektionsarten. Es gibt die folgenden beiden Projektionsarten:

Zentralprojektion. Alle Projektionsstrahlen gehen von einem endlichen festen Punkt, dem Projektionszentrum P, aus. Abbildung durch Zentralprojektion liegt z. B. beim Schattenwurf bei künstlicher Beleuchtung vor.

Parallelprojektion. Alle Projektionsstrahlen laufen parallel. Abbildung durch Parallelprojektion liegt z. B. beim Schattenwurf bei Sonnenbeleuchtung vor.

2. Ähnlichkeit und Kongruenz. Stehen Ebene e des abzubildenden Gegenstandes und Bildebene ε parallel zueinander, so liegen Original und Bild bei Abbildung durch Zentralprojektion ähnlich, bei Abbildung durch Parallelprojektion kongruent zueinander.

II. Figuren in Ähnlichkeitslage

2. Zwei verschieden lange, parallele Strecken können auf zweierlei Weise in Ähnlichkeitslage gebracht werden. Zeichne die Ähnlichkeitsstrahlen und die Ähnlichkeitspunkte! Welche Figuren ergeben sich? Welche Sätze ergeben sich aus dem Ähnlichkeitsverhältnis k?

3. Beweise den zweiten Strahlensatz für den Fall, daß die beiden Parallelen zu verschiedenen Seiten des Büschelscheitels liegen.
Anleitung (Abb. 102): Der Büschelscheitel ist innerer Ähnlichkeitspunkt zu den Parallelenabschnitten! Die Parallelenabschnitte sind entsprechende Strecken in Ähnlichkeitslage!

4. Verbinde in einem Dreieck je zwei Seitenmitten miteinander! Warum liegt das entstehende Dreieck zum gegebenen ähnlich? Wo liegt der Ähnlichkeitspunkt? Welche Linien des Ausgangsdreiecks bilden die Ähnlichkeitsstrahlen? Wie groß ist das Ähnlichkeitsverhältnis? Welcher Satz wird durch die Ähnlichkeitslage beider Dreiecke bewiesen? (Abb. 128).

5. Warum sind zwei Kreise mit verschieden großen Radien ähnlich?
Anleitung: Zwei beliebige Kreise liegen stets ähnlich zueinander. Entsprechende Punkte sind z. B. die Mittelpunkte beider Kreise, die Endpunkte paralleler Durchmesser und Halbmesser, die Berührungspunkte paralleler Tangenten usw. Zeichne Ähnlichkeitsstrahlen und finde die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise! Wieviel Ähnlichkeitspunkte haben zwei Kreise?

6. Wie verhalten sich **a)** die Umfänge, **b)** die Flächen zweier Kreise mit den Radien r_1 und r_2, $(r_1 \neq r_2)$?

7. Eine Pyramide wird in der Mitte der Pyramidenhöhe durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten.

a) Wie liegen Schnittfigur und Grundfläche zueinander?

b) Wie groß ist das Ähnlichkeitsverhältnis der beiden Figuren? In welchem Verhältnis stehen entsprechende Strecken der beiden Figuren?

c) Wie verhalten sich die Flächen der beiden Figuren?

III. Körper in Ähnlichkeitslage

8. Welcher Körper entsteht durch maßstäbliche Vergrößerung **a)** eines Würfels, **b)** einer Kugel vom Körpermittelpunkt aus auf das Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{2}{1}$?

9. Warum sind **a)** zwei Würfel, **b)** zwei Kugeln stets ähnlich?

10. Zwei ähnlich-liegende Würfel haben die Kantenlängen 1 cm und 2 cm. Wie groß ist **a)** ihr Ähnlichkeitsverhältnis, **b)** ihr Kantenverhältnis? Wie verhalten sich **c)** je zwei entsprechende Seitenflächen der Würfel, **d)** ihre Rauminhalte? Wie oft hat der kleine Würfel im großen Platz?

IV. Angewandte Aufgaben, Ähnlichkeitskonstruktionen

11. Schattenwurf. Bei der Durchführung eines physikalischen Versuches soll eine 12,5 cm (12 cm; 8,5 cm) lange durchsichtige Teilung eines Meßgerätes auf eine 2,1 m (1,8 m; 2,4 m) dahinter gestellte Bildwand durch Schattenwurf so abgebildet werden, daß sie in einer Größe von 50 cm (60 cm; 40,5 cm) erscheint.

a) Berechne die Entfernung, in der man die Lichtquelle vor der Teilung aufstellen muß!

b) Wie müssen beim Schattenwurf Bildwand und Ebene der abzubildenden Teilung zueinander liegen, damit Teilung und Bild einander ähnlich werden (vergleiche Abb. 121)?

12. Bildwurf. Durch eine a cm von einem Gegenstand entfernte Linse wird b cm hinter der Linse ein d cm hohes Bild erzeugt. Wie hoch ist der Gegenstand c (vergleiche Abb. 122)?

Beispiele:	**a)** $a = 26{,}2$ cm	$b = 84{,}5$ cm	$d = 22{,}4$ cm
	b) $a = 15{,}0$ cm	$b = 13{,}5$ cm	$d = 35{,}2$ cm
	c) $a = 429{,}0$ cm	$b = 6{,}6$ cm	$d = 3{,}2$ cm

13. Von einem c cm hohen Gegenstand wird durch eine Linse auf einem e cm entfernten Schirm ein d cm hohes Bild entworfen. Berechne die Gegenstandsweite a und die Bildweite b und aus beiden nach der Linsenformel die Brennweite f! Linsenformel: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Beispiele:	**a)** $c = 4{,}2$ cm	$d = 21{,}0$ cm	$e = 72{,}0$ cm
	b) $c = 3{,}8$ cm	$d = 38{,}0$ cm	$e = 302{,}5$ cm
	c) $c = 3{,}5$ cm	$d = 70{,}0$ cm	$e = 661{,}5$ cm

14. Zeichne ein beliebiges Viereck und mit Hilfe eines Ähnlichkeitspunktes ein im Maßstab 1 : 2 verkleinertes Bild des Vierecks!

a) Welche Beziehung besteht zwischen den Flächeninhalten des Originals und seines Bildes?

b) Man kann die Verkleinerungszeichnung auch räumlich als Darstellung ähnlicher Vierecke in parallelen Ebenen deuten, die von der gleichen Zahl Lichtstrahlen einer im Ähnlichkeitspunkt aufgestellten punktförmigen Lichtquelle getroffen werden (vgl. Abb. 125, 126 und 127, 128). Welche Folgerung ergibt sich aus dem Ergebnis in a) für die Beleuchtungsstärke der beiden Flächen?

15. Das Giebelfeld eines Satteldaches soll eine rechteckige Fensteröffnung erhalten, deren Ecken 1 m Abstand von den Dachsimsen haben und deren Seiten (Breite : Höhe) sich wie 4 : 3 verhalten. Die Maße des Satteldaches sind aus Abb. 129 zu entnehmen. Lage und Maße der Fensteröffnung sind zu bestimmen.

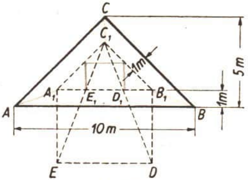


Abb. 129.

Anleitung: Da die Ecken der rechteckigen Fensteröffnung 1 m Abstand von den Dachsimsen haben sollen, müssen sie auf den Parallelen zu den Simsen in 1 m Abstand liegen. Die Aufgabe ist damit auf die geometrische Aufgabe zurückgeführt: In das gleichschenklige Paralleldreieck $A_1B_1C_1$ ist ein Rechteck so einzubeschreiben, daß zwei Ecken auf der Basis A_1B_1, die beiden andern Ecken auf den Schenkeln A_1C_1 und B_1C_1 liegen und daß seine Seiten sich wie 4 : 3 verhalten.

Zeichnet man über der Basis A_1B_1 ein Rechteck A_1B_1DE, dessen Seiten sich wie 4 : 3 verhalten (Abb. 129), so liegt dieses Rechteck ähnlich zum gesuchten Rechteck $A_2B_2D_2E_2$. A_1C_1 ist die Verbindungsgerade der einander entsprechenden Rechteckpunkte A_1 und A_2. B_1C_1 die Verbindungsgerade der einander entsprechenden Rechteckpunkte B_1 und B_2 usw. Die Ähnlichkeitsstrahlen A_1A_2, B_1B_2, DD_2, EE_2 gehen durch C_1!

a) Wo liegt der Ähnlichkeitspunkt der beiden ähnlich-liegenden Rechtecke?

b) Wie erhält man die den Eckpunkten D und E entsprechenden Eckpunkte D_2 und E_2 der Fensteröffnung?

c) Fertige eine Bauzeichnung im Maßstab 1 : 100 an! Entnimm der Zeichnung Lage und Maße der Fensteröffnung!

d) Berechne Lage und Maße der Fensteröffnung mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze!

16. Zeichne zu einem gegebenen Viereck mit Hilfe eines passend gelegenen Ähnlichkeitspunktes ein ähnlich-liegendes Viereck im Maßstab 3 : 2! Vergleiche dieses Verfahren mit der Anwendung des Proportionalzirkels in Abschn. 26, Aufgabe 55! Welches Verfahren ist bequemer?

Zeichengeräte für ähnlich-liegende Umzeichnungen von Figuren

17. Der Storchschnabel (Abb. 130) ist ein Zeichengerät zur unmittelbaren Umzeichnung ebener Figuren in vergrößertem oder verkleinertem Maßstab. Er besteht aus 4 Stäben, die in den Punkten A, B, C, F gelenkig miteinander verbunden sind und ein Gelenkparallelogramm $AFBC$ bilden. Die Punkte P, F, Z müssen stets in einer Geraden liegen. Der Punkt P, der Pol des Storchschnabels, wird auf dem Zeichentisch befestigt. Eine durch ihn geführte und auf der Zeichenebene senkrecht stehende Achse ist die Drehachse für die Bewegungen des Storchschnabels. Umfährt man mit dem in F befestigten „Fahrstift" die zu vergrößernde Originalfigur, so beschreibt der in Z befestigte „Zeichenstift" das ähnlich-liegende vergrößerte Bild (Abb. 130).

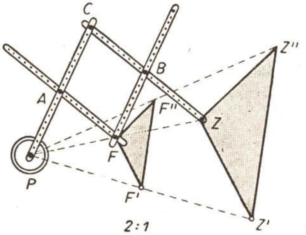


Abb. 130. Storchschnabel

a) Zeichne den Storchschnabel in seiner Endlage, wenn der Fahrstift die Strecke FF' beschrieben hat! Zeige, daß die Punkte P, F' und Z' wieder in einer Geraden liegen und daß die von Z beschriebene Linie ZZ' auch eine Gerade ist!

b) Beweise, daß das Verhältnis $PF : PZ$ bei der Bewegung unverändert bleibt!

c) In welchem Maßstab ist die Strecke ZZ' in Abb. 130 vergrößert?

d) Durch welche Umstellung kann man mit dem Gerät Figuren auf den Maßstab 1 : 2 verkleinern?

e) Beweise, daß die von Z beschriebene Bildfigur zur Originalfigur ähnlich liegt!

f) Wo liegt der Ähnlichkeitspunkt? Welches sind die Ähnlichkeitsstrahlen?

g) Durch welche in Abb. 130 angedeutete Einrichtung des Storchschnabels kann der Maßstab der Umzeichnung geändert werden?

h) Fertige Strichzeichnungen zum Storchschnabel für die Vergrößerungen 4 : 1; 5 : 1; 5 : 4 und für die Verkleinerungen 1 : 2; 1 : 3; 1 : 5; 4 : 5 an (Abb. 131)!

i) Stelle ein Modell eines Storchschnabels aus Pappstreifen her!

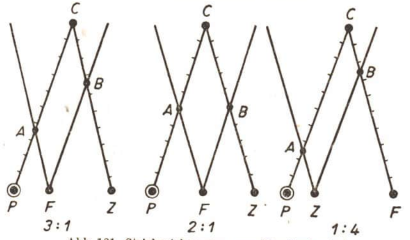


Abb. 131. Strichzeichnungen zum Storchschnabel

18. Der Pantograph[1]) (Abb. 132) ist eine andere Ausführungsform des Storchschnabels. Seine Wirkungsweise ist aus der Strichzeichnung in Abb. 133 ersichtlich. P ist der festgehaltene Pol, F und Z sind Fahrstift und Zeichenstift. P, F und Z liegen stets auf einer Geraden. Der Stab AB ist parallel verschiebbar.

a) Bestimme in der Strichzeichnung die Figur, welche die Vergrößerung der Zeichnung festlegt!

b) Fertige Strichzeichnungen für die Bildmaßstäbe 2 : 1; 3 : 1; 4 : 1; 5 : 4; 1 : 2; 1 : 3; 1 : 5; 4 : 5 an!

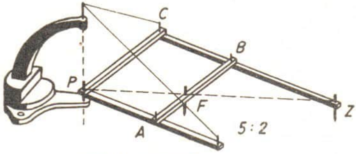


Abb. 132. Pantograph

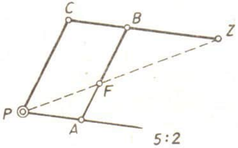


Abb. 133. Strichzeichnung zum Pantograph

19. Das Quadratnetzverfahren. Man überspannt das abzubildende Original mit einem Quadratnetz als Raster und zeichnet zu diesem ein zweites Quadratnetz im gewünschten Maßstab. In dieses trägt man das Bild ein. Erkläre Albrecht Dürers Bild: „Die Glastafelmethode“ (Abb. 134). Das Quadratnetzverfahren wird in der Kartenkunde häufig verwandt, um Geländekarten auf einen kleineren Maßstab umzuzeichnen. Begründe die Richtigkeit dieser Arbeitsweise!

Abb. 134. Albrecht Dürer, Die Glastafelmethode

28. Geometrische Transformationen, Kongruenz und Ähnlichkeit

a) Geometrische Transformationen

Eine Zuordnung, bei der jedem Punkt P der Ebene ein Punkt P' derselben Ebene entspricht und umgekehrt, nennt man eine **geometrische Transformation** aller Punkte der Ebene. P und P' heißen entsprechende Punkte. Den Punkt P' nennt man das **Bild** des Punktes P und umgekehrt. Überführt man eine Figur F durch eine geometrische Transformation ihrer Punkte in eine Figur F', so nennt man F' das **Bild** des Originals F.

1) Pantograph (gr., pan : alles; graphein : zeichnen) heißt „Allzeichner“.

b) Kongruente Transformationen

Welche Transformationen der Ebene überführen eine beliebige Figur F in ein kongruentes Bild F'?

1. Parallelverschiebung

Strecken von bestimmter Größe und Richtung nennt man **Vektoren**[1]. Vektoren werden mit deutschen Buchstaben bezeichnet, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots$ oder durch Anfangs- und Endpunkt dargestellt, $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \cdots, \overrightarrow{PP'}$. Bei Parallelverschiebung einer Figur F in ihrer Ebene werden alle Punkte von F in gleicher Richtung um das gleiche Stück verschoben. Verschiebungsrichtung und Größe der Verschiebung bestimmen den Verschiebungsvektor $\mathfrak{a}$ (Abb. 135).

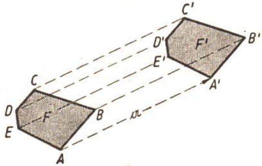


Abb. 135. Parallelverschiebung

Jede Parallelverschiebung ist durch ihren Verschiebungsvektor $\mathfrak{a}$ eindeutig festgelegt. Es gibt keinen Punkt, der bei Parallelverschiebung an seinem Ort oder in Ruhe bleibt. Jeder Punkt P der Figur hat bei Parallelverschiebung den Verschiebungsvektor $\overrightarrow{PP'} = \mathfrak{a}$ als Bahnkurve. Die Bahngeraden verschiedener Punkte der Figur sind parallel und gleichgerichtet oder gleichsinnig-parallel[2]. Eine Parallelverschiebung überführt jede Figur F in ein kongruentes Bild F', entsprechende Strecken von F und F' sind gleichsinnig-parallel. Kongruente Figuren, deren Seiten gleichsinnig-parallel sind, heißen gleichliegend-kongruent.

Jede Parallelverschiebung überführt eine Figur F in ein gleichliegend-kongruentes Bild F'.

2. Drehung um einen festen Punkt

Bei Drehung einer Figur F um einen festen Punkt ihrer Ebene, das Drehungszentrum O, werden alle Strahlen von O zu Punkten der Figur um den gleichen Drehungswinkel φ und in gleichem Drehungssinn gedreht. Die Bahnkurven aller Punkte der Figur sind Bögen konzentrischer Kreise um O von gleichem Zentriwinkel φ (Abb. 136). Original F und Bild F' sind kongruent, aber im allgemeinen nicht mehr gleichliegend.

Jeder ebenen Figur F kann man einen Umlaufssinn zulegen. Bleibt dieser Umlaufssinn bei Überführung von F in F' erhalten, so spricht man von gleichsinnigen Figuren (Abb. 136); wird er geändert, so spricht man von ungleichsinnigen Figuren. Kongruente Figuren mit gleichem Umlaufssinn heißen **gleichsinnig-kongruent,** mit verschiedenem Umlaufssinn **ungleichsinnig-kongruent.**

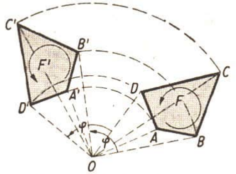


Abb. 136. Drehung um einen festen Punkt O

Jede Drehung um ein festes Zentrum O überführt eine ebene Figur F in ein gleichsinnig-kongruentes Bild F' (Abb. 136).

---

1) Vektor (lat.) heißt Pfeilgröße.

2) Das mathematische Zeichen für gleichsinnig-parallel ist $\uparrow\uparrow$, für ungleichsinnig-parallel $\uparrow\downarrow$.

Drehung um 180°. Dreht man eine Figur F um ein Zentrum O um 180°, so geht jede Strecke OP in die entgegengesetzt gerichtete Strecke OP' von gleicher Länge über. Entsprechende Strecken von Original und kongruentem Bild sind parallel, aber entgegengesetzt gerichtet, sie sind ungleichsinnig-parallel[1]) (Abb. 137). Der Umlaufssinn der Figur F bleibt im Bild F' erhalten.

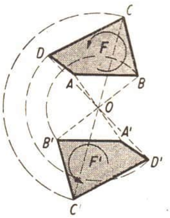


Abb. 137. Drehung um O um 180°

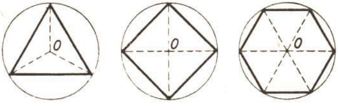


Abb. 138. Strahlig-symmetrische Figuren

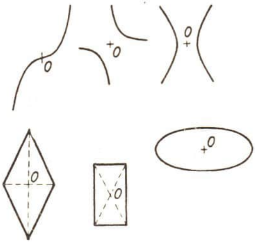


Abb. 139. Zentrisch-symmetrische Figuren

Strahlige und zentrische Symmetrie. Eine Figur, die bei Drehung um einen festen Punkt O um einen bestimmten Winkel φ mit sich selbst zur Deckung kommt, heißt **strahlig-symmetrisch.** Beispiele in Abb. 138.

Eine Figur, die bei Drehung um 180° um einen Punkt O mit sich selbst zur Deckung kommt, heißt **zentrisch-symmetrisch** zu diesem Punkt. Das Drehungszentrum heißt **Symmetriezentrum** oder **Mittelpunkt** der Figur. Beispiele in Abb. 139.

3. Transformationsgruppen

Transformationen durch Drehung um einen Punkt O. Überführt man eine Figur F durch Drehung um ein Zentrum O um einen Winkel φ_1 in F' und danach F' durch eine zweite Drehung um O um einen Winkel φ_2 in F'', so kann man F auch durch eine einzige Drehung um O um den Winkel $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ in F'' überführen (Abb. 140). Die Drehung um φ_3 heißt die **resultierende** Drehung zu den beiden gegebenen Drehungen um φ_1 und φ_2. Zwei hintereinander ausgeführte Drehungen um einen festen Punkt O können stets durch eine **resultierende Drehung** um O ersetzt werden.

Überführt man eine Figur F durch eine Drehung um den Winkel φ_1 in F', so kann man F' durch eine Rückdrehung um den Winkel $-\varphi_1$ wieder in die Figur F zurückführen. Diese Rückdrehung nennt man die **inverse**[2]) **Drehung** zur ersten. Zu jeder Drehung um O gibt es die **inverse Drehung.**

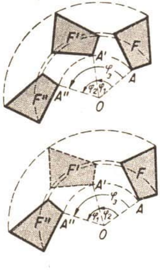


Abb. 140

1) S. Anmerkung 2) von Seite 159.
2) invertere (lat.) heißt umkehren, umdrehen; invers umgekehrt.

Führt man mit einer Figur F eine Drehung um φ_1 und anschließend mit F' eine inverse Drehung um $\varphi_2 = -\varphi_1$ aus, so gehen zuerst die Punkte von F in die Punkte von F' über, kehren dann aber an ihren alten Platz zurück. Die resultierende Drehung ist in diesem Fall eine Drehung um den Winkel 0°, es ist $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_1 = 0$. Bei dieser resultierenden Drehung bleiben alle Punkte von F in Ruhe, die Originalfigur F wird in sich übergeführt. Die Transformation einer Figur in sich heißt **identische Transformation.** Unter allen Drehungen um O ist die **identische Drehung** enthalten.

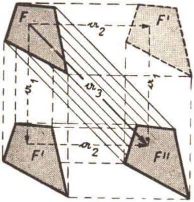


Abb. 141

Dieselben Eigenschaften besitzt die Schar der Transformationen durch Parallelverschiebung.

Zwei nacheinander ausgeführte Parallelverschiebungen können stets durch eine **resultierende Parallelverschiebung** ersetzt werden, ($\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3$; Abb. 141).

Zu jeder Parallelverschiebung gibt es die **inverse Verschiebung** ($\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{a}_1$).

Unter allen Parallelverschiebungen ist die **identische Verschiebung** enthalten (Parallelverschiebung um den Vektor $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1 = 0$).

Eine Schar von Transformationen bildet eine **Gruppe,** wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

Zwei nacheinander ausgeführte Transformationen der Schar können stets durch eine resultierende Transformation der Schar ersetzt werden.

Zu jeder Transformation der Schar gibt es die inverse Transformation.

Die Schar enthält auch die identische Transformation.

Alle Transformationen durch Parallelverschiebung und durch Drehung um einen Punkt O bilden je eine Transformationsgruppe.

4. Die gleichsinnig-kongruenten Transformationen, die Gruppe der Bewegungen

Die Drehungen um verschiedene Punkte der Ebene bilden keine Gruppe. Führt man z. B. zwei Drehungen um verschiedene Zentren O_1 und O_2 um je 180° oder um $+\varphi$ und $-\varphi$ nacheinander aus (Abb. 142a und b), so kann man die Originalfigur F mit ihrem kongruenten Bild F'' durch eine Parallelverschiebung zur Deckung bringen, da alle entsprechenden Seiten von F und F'' gleichsinnig-parallel sind. Die resultierende

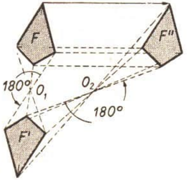


Abb. 142 a

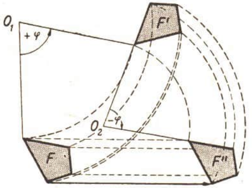


Abb. 142 b

Transformation zu den beiden Drehungen ist in beiden Fällen keine Drehung, sondern eine Parallelverschiebung.

Dieses Ergebnis läßt erwarten, daß die Drehungen und Verschiebungen zusammen eine Gruppe bilden werden. Zwei nacheinander ausgeführte Drehungen um verschiedene Zentren ergeben stets zwei gleichsinnig-kongruente Figuren F und F''. Zwei gleichsinnig-kongruente Figuren lassen sich jedoch stets durch eine resultierende Parallelverschiebung (F und F'' gleichliegend; Abb. 142) oder durch eine resultierende Drehung (F und F'' nicht gleichliegend: Abb. 143) miteinander zur Deckung bringen. Auch die Zusammensetzung einer Drehung mit einer Parallelverschiebung oder umgekehrt läßt sich resultierend durch eine einzige Drehung ersetzen. Siehe dazu in Abb. 142 die Überführung von F' über F'' in F und umgekehrt.

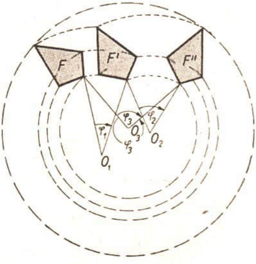


Abb. 143

Die Resultierende zweier Drehungen um verschiedene Zentren ist also entweder eine Drehung oder eine Parallelverschiebung; die Resultierende einer Drehung und einer Parallelverschiebung ist eine Drehung; die Resultierende zweier Parallelverschiebungen ist wieder eine Parallelverschiebung (Abb. 141).

Die Schar der Transformationen durch Drehungen und Verschiebungen hat also die folgenden Eigenschaften: Die resultierende Transformation ist stets in der Schar enthalten. Zu jeder Transformation der Schar gibt es die inverse Transformation. Die Schar enthält auch die identische Transformation, nämlich die Drehung um 0° oder die Verschiebung um $\mathfrak{a} = 0$.

Alle Drehungen und Verschiebungen zusammen bilden eine **Transformationsgruppe.** Drehungen und Verschiebungen faßt man als Bewegungen zusammen. Die Gruppe der Transformationen durch Drehungen und Verschiebungen heißt daher die **Gruppe der Bewegungen.** Die Gruppen der Drehungen um einen Punkt O und die Gruppe der Parallelverschiebungen sind Untergruppen der Bewegungsgruppe.

Die Transformationen der Bewegungsgruppe überführen eine gegebene Figur F in eine gleichsinnig-kongruente Figur F'.

5. Die ungleichsinnig-kongruenten Transformationen, die Umlegungen

Spiegelung an einer Achse oder Umklappung um diese. Bei Spiegelung einer Figur F an einer Achse g liegen Original F und Bild F' symmetrisch zur Achse g (Abb. 144). Spiegelung der Figur F an einer Achse g kann man auch durch Umklappen von F um die Achse g erzeugen. Hierbei bleiben Punkte auf der Achse in Ruhe; jeder Punkt P der Figur, der nicht auf der Achse liegt, beschreibt einen Kreisbogen von 180° in einer zur Achse senkrechten Ebene. Original F und Bild F' sind kongruent, aber ihr Umlaufssinn ist verschieden. **Bei Spiegelung einer Figur an einer Achse sind Original und Bild ungleichsinnig-kongruent.**

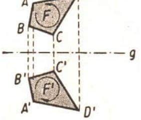


Abb. 144
Spiegelung an einer Achse g

Achsensymmetrie. Eine Figur F, die bei Spiegelung an einer Geraden g mit sich selbst zur Deckung kommt, heißt **achsensymmetrisch** zur Geraden g. Die Gerade g heißt **Symmetrieachse.** Beispiele in Abb. 145.

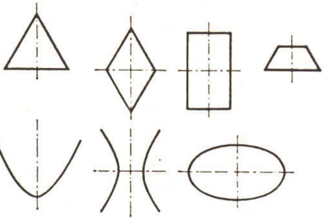


Abb. 145. Achsensymmetrische Figuren

Schubspiegelung. Die Spiegelungen an verschiedenen Achsen bilden keine Gruppe. Führt man mit der Figur F z. B. zwei Spiegelungen an zwei parallelen oder sich schneidenden Achsen g_1 und g_2 hintereinander aus, so sind F und F'' gleichsinnig-kongruent (Abb. 146). F und F'' lassen sich nicht durch eine resultierende Spiegelung zur Deckung bringen, die resultierende Transformation muß wegen der gleichsinnigen Kongruenz von F und F'' eine Bewegung sein. Sie ist

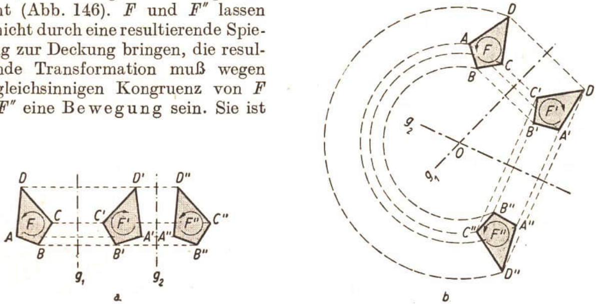


Abb. 146 a und b

im ersten Fall eine Parallelverschiebung, im zweiten Fall eine Drehung um den Schnittpunkt O der beiden Achsen als Zentrum (siehe Abb. 146 a und b).

Auch die Spiegelungen zusammen mit den Verschiebungen bilden keine Gruppe. Setzt man z. B. eine Spiegelung an einer Achse g mit einer Parallelverschiebung in Richtung der Achse g zusammen, so lassen sich F und F'' weder durch eine resultierende Verschiebung noch durch eine resultierende Spiegelung ineinander überführen (Abb. 147). Man erhält eine neue Transformation, die **Schubspiegelung.** Bei Schubspiegelung sind Original F und Bild F'' **ungleichsinnig-kongruent.**

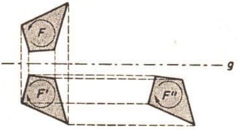


Abb. 147. Schubspiegelung

Die ungleichsinnig-kongruenten Transformationen. Spiegelungen und Schubspiegelungen faßt man als **Umlegungen** zusammen. Bei diesen Transformationen wird die ganze Ebene um die Achse g umgelegt. Bei einer Umlegung sind Original und Bild **ungleichsinnig-kongruent.** Alle Umlegungen zusammen bilden die Schar der **ungleichsinnig-kongruenten Transformationen.** Sie bilden keine Transformationsgruppe.

6. Die kongruenten Transformationen, die Gruppe der Bewegungen und Umlegungen

Die ungleichsinnig-kongruenten Transformationen (Umlegungen) zusammen mit den gleichsinnig-kongruenten Transformationen (Bewegungen) bilden die Gruppe der kongruenten Transformationen (Gruppe der Bewegungen und Umlegungen). **Durch Transformationen der Gruppe der Bewegungen und Umlegungen kann man jede Figur F in eine kongruente Figur F'' überführen.**

c) Ähnlichkeitstransformationen

Eine geometrische Transformation, bei der eine ebene Figur F in ein ähnliches Bild F' übergeführt wird, heißt eine **Ähnlichkeitstransformation.** Bleibt bei der Transformation der Umlaufssinn des Originals im Bild erhalten, so heißt sie eine **gleichsinnige,** im entgegengesetzten Fall eine **ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation.**

1. Streckung von einem festen Punkt aus, zentrale Streckung

Jede Vergrößerung oder Verkleinerung einer ebenen Figur F von einem festen Punkt O aus ist eine Ähnlichkeitstransformation, man nennt sie **Streckung vom Punkt O aus.** O heißt das **Streckungszentrum,** die Transformation heißt daher auch **zentrale Streckung.**

Bei zentraler Streckung wird jede Figur F in ein ähnlich-liegendes Bild F' übergeführt. Transformationen durch zentrale Streckung sind **gleichsinnige Ähnlichkeitstransformationen.**

Das Bild P' eines beliebigen Punktes P des Originals liegt auf dem Strahl OP (Abb. 148). Das Verhältnis $\frac{OP'}{OP}$ hat für alle entsprechenden Punkte von F' und F einen festen Wert k. k heißt der Maßstab der Streckung,

$$k = \frac{OP'}{OP}.$$

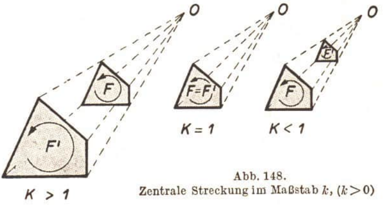


Abb. 148.
Zentrale Streckung im Maßstab k, ($k > 0$)

Eine Streckung ist durch das Streckungszentrum O und ihren Maßstab k festgelegt. Sie ist auch gegeben, wenn man das Streckungszentrum O und ein Paar entsprechender Punkte P und P' kennt, da dann der Maßstab k der Streckung bekannt ist.

Ist $k > 1$, so wird die Figur F bei der Streckung vergrößert. Ist $k < 1$, so wird die Figur F bei der Streckung verkleinert. Ist $k = 1$, so bleiben alle Punkte von F in Ruhe; man nennt diese Transformation die identische Streckung (Abb. 148).

Bei positivem Maßstab k ist das Streckungszentrum O äußerer Ähnlichkeitspunkt von Original F und Bild F' (Abb. 148). Ist der Maßstab k der Streckung negativ, so wird das Streckungszentrum innerer Ähnlichkeitspunkt von Original F und Bild F' (Abb. 149). Bei negativem k ergibt $|k| > 1$ eine Vergrößerung der Figur, $|k| < 1$ eine Verkleinerung der Figur. Ist $k = -1$, so liegen Original F und Bild F' zentrisch-symmetrisch zum Ähnlichkeitspunkt O.

Führt man vom festen Streckungszentrum O aus zwei Streckungen mit verschiedenen Maßstäben k_1 und k_2 nacheinander aus, so ist die resultierende Transformation der beiden Streckungen wieder eine Streckung von O aus im Maßstab $k_3 = k_1 \cdot k_2$,

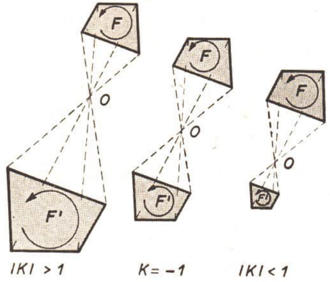


Abb. 149. Zentrale Streckung im Maßstab k, ($k < 0$)

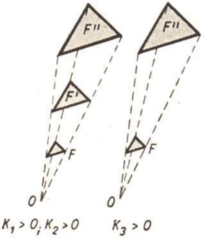


Abb. 150

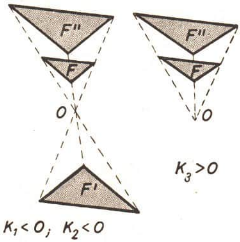


Abb. 151

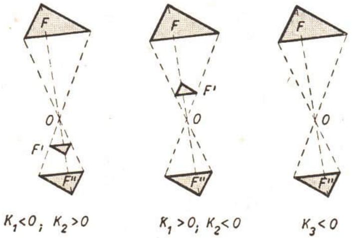


Abb. 152

denn es ist (Abb. 150, 151, 152) $k_3 = \frac{OP''}{OP} = \frac{OP''}{OP'} \cdot \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{OP} \cdot \frac{OP''}{OP'} = k_1 \cdot k_2.$

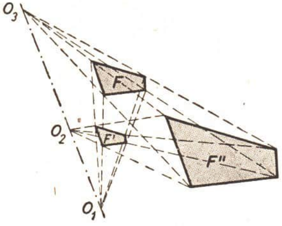
Zu jeder Streckung im Maßstab k_1 gibt es die **inverse Streckung** im Maßstab $k_2 = \frac{1}{k_1}$.

Unter allen Streckungen vom Zentrum O aus ist die **identische Streckung** $\left(k = \frac{1}{1} = 1\right)$ enthalten.

Die Streckungen mit festem Streckungszentrum O bilden eine Gruppe. Original F und Bild F' dieser Gruppe liegen **ähnlich** ($k \neq \pm 1$) oder **kongruent** ($k = \pm 1$).

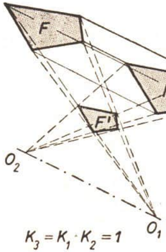
2. Zentrale Streckung und Parallelverschiebung, die ähnlich-liegenden Transformationen

Führt man an einer ebenen Figur F zwei Streckungen von verschiedenen Streckungszentren O_1 und O_2 nacheinander aus, so liegen Original F und Endbild F'' entweder ähnlich ($k_3 = k_1 \cdot k_2 \neq \pm 1$; Abb. 153) oder kongruent ($k_3 = k_2 \cdot k_1 = \pm 1$; Abb. 154). Im ersten Fall kann man F in F'' durch eine resultierende Streckung vom Zentrum O_3 aus, im zweiten Fall durch eine resultierende Parallelverschiebung überführen. Die Streckungen und Verschiebungen zusammen werden also möglicherweise eine Gruppe bilden.



$K_3 = K_1 \cdot K_2 \neq 1$

Abb. 153



$K_3 = K_1 \cdot K_2 = 1$

Abb. 154

Für die Schar der Transformationen durch Streckung und Verschiebung finden wir: Zwei Streckungen ergeben als resultierende Transformationen eine Streckung (Abb. 153) oder eine Parallelverschiebung (Abb. 154). Eine Streckung und eine Parallelverschiebung (oder umgekehrt eine Parallelverschiebung und eine Streckung) haben als Resultierende eine Streckung (Abb. 154). Zwei Parallelverschiebungen ergeben resultierend eine Parallelverschiebung (Abb. 141).

Die inversen Transformationen einer Streckung oder einer Parallelverschiebung sind wieder eine Streckung $\left(k_2 = \frac{1}{k_1}\right)$ oder eine Parallelverschiebung $\left(\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{a}_1\right)$.

In der Transformationsschar sind die identischen Transformationen enthalten (identische Streckung $k = +1$; identische Parallelverschiebung $\mathfrak{a} = 0$).

Die Transformationen durch zentrale Streckung und Verschiebung bilden eine Gruppe, die **Gruppe der ähnlich-liegenden Transformationen.** Alle Figuren, die durch Transformationen dieser Gruppe erzeugt werden, liegen ähnlich oder kongruent zueinander. Alle Transformationen durch zentrale Streckung und Verschiebung sind **gleichsinnige Ähnlichkeitstransformationen.**

3. Zentrale Streckung und Drehung, Drehstreckung

Schließt man an eine Streckung der Originalfigur F im Maßstab k vom Zentrum O aus (F übergeführt in F') eine Drehung von F' um den Winkel φ um dasselbe Zentrum O an (F' übergeführt in F''; Abb. 155), so nennt man die resultierende Transformation aus Streckung und Drehung (Original F unmittelbar übergeführt in Bild F'') eine **Drehstreckung.** Man kann eine Drehstreckung auch als resultierende Transformation einer Drehung und einer Streckung vom Drehungszentrum O aus ausführen.

Die Drehstreckung enthält die reine Streckung ($\varphi = 0$; $k \neq 0$) und die reine Drehung ($\varphi \neq 0$; $k = +1$) als Sonderfälle. Vgl. Aufgabe 30.

Bei einer Drehstreckung wird jede ebene Figur F in eine gleichsinnig-ähnliche Figur F'' übergeführt (Abb. 156). Transformationen durch Drehstreckung sind **gleichsinnige Ähnlichkeitstransformationen.**

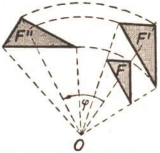


Abb. 155. Drehstreckung

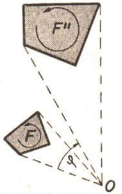


Abb. 156. Drehstreckung

4. Die Gruppe der gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen

Zwei gleichsinnig-ähnliche Figuren F und F'', deren entsprechende Seiten parallel sind, lassen sich stets durch eine Streckung oder eine Verschiebung ineinander überführen (Abb. 153, 154).

Zwei gleichsinnig-ähnliche Figuren F und F', deren entsprechende Seiten nicht parallel sind, lassen sich stets durch eine Drehstreckung ineinander überführen. Beweis (Abb. 156): Die Figur F läßt sich durch Streckung stets in eine Figur F' überführen, die F'' kongruent ist. F' läßt sich dann durch eine Bewegung in F'' überführen. Da bei Transformation durch Streckung und Bewegung der Umlaufssinn der Figuren erhalten bleibt, muß die resultierende Transformation, die F direkt in F'' überführt, eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation sein. Die resultierende Transformation von F in F'' kann aber nur eine Drehstreckung sein, da nur bei Transformationen durch Drehstreckungen entsprechende Seiten von F und F'' im allgemeinen nicht parallel laufen.

Eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation ist entweder eine Drehstreckung oder eine Parallelverschiebung.

Die gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen umfassen die **gleichsinnige Kongruenz,** da sie Verschiebungen und Drehungen enthalten, und die **gleichsinnige Ähnlichkeit** durch Hinzunahme der Streckungen zu den Verschiebungen und Drehungen.

Die Anschauung zeigt: Zwei Drehstreckungen oder eine Drehstreckung und eine Verschiebung (und umgekehrt) oder zwei Verschiebungen, je nacheinander ausgeführt, überführen eine ebene Figur F stets in eine gleichsinnig-ähnliche Figur F''. Zu zwei nacheinander ausgeführten Transformationen durch Drehstreckung oder Verschiebung gibt es also stets eine resultierende Drehstreckung oder Verschiebung, die F direkt in F'' überführt.

Zu jeder Transformation durch Drehstreckung oder Verschiebung gibt es die inverse Transformation. Zur Schar der Transformationen durch Drehstreckung und Verschiebung gehört die identische Drehstreckung ($\varphi = 0$; $k = +1$) und die identische Verschiebung ($\mathfrak{a} = 0$).

Die Drehstreckungen und Parallelverschiebungen bilden eine Gruppe, die Gruppe der gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen.

5. Die ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen

Spiegelt man eine Figur F an einer Achse g und unterwirft anschließend das Spiegelbild F' der Streckung von einem Punkt O der Achse aus (Abb. 157), so ist die resultierende Transformation, die F in F'' überführt, eine **ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation,** eine **Streckspiegelung.** Eine Streckspiegelung kann man auch ausführen, indem man an eine Streckung vom Punkt O aus eine Spiegelung an einer durch O gehenden Achse anschließt.

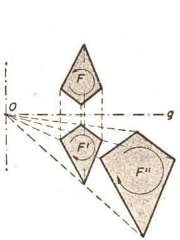


Abb. 157. Streckspiegelung

Die ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen für sich bilden (ebenso wie die ungleichsinnig-kongruenten Transformationen) keine Gruppe. Führt man nämlich an einer Figur F z. B. zwei Streckspiegelungen nacheinander aus (Abb. 158), so erhält man ein zum Original F gleichsinnig-ähnliches Bild F''. Die resultierende Transformation zu zwei ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen ist keine ungleichsinnige, sondern eine gleichsinnige Ähnlichkeitstransformation. In Abb. 158 ist sie eine Streckung vom Zentrum O_3 aus.

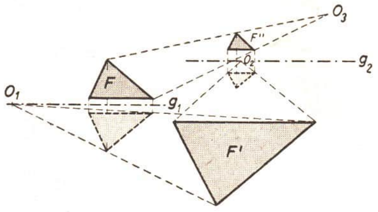


Abb. 158

6. Die Hauptgruppe der Ähnlichkeitstransformationen

Die ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen (Streckspiegelungen) und die gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen (Drehstreckungen und Parallelverschiebungen) bilden zusammen eine Gruppe, die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen.

Diese Gruppe heißt die **Hauptgruppe der Ähnlichkeitstransformationen.**

Aufgaben

I. Kongruente Transformationen

1. Verschiebe eine Figur F in ihrer Ebene **a)** um den Vektor $\mathfrak{a}_1$, **b)** um den Vektor $\mathfrak{a}_2$, **c)** nacheinander um die Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Welche Bilder entstehen (Abb. 135 und 141)?
2. Durch welche geometrische Transformation lassen sich zwei gleichliegend-kongruente Figuren F und F' derselben Ebene stets zur Deckung bringen?
3. Drehe eine ebene Figur F um ein Zentrum O um den Winkel φ **a)** von 60°, **b)** von 90°, **c)** von 150°, **d)** von 210°. Welche Bilder entstehen (Abb. 136)?
4. Durch welche geometrische Transformation lassen sich zwei gleichsinnig-kongruente Figuren F und F' derselben Ebene stets zur Deckung bringen? Führe die Transformation durch!
5. Drehe eine ebene Figur F um ein Zentrum O um 180°. In welcher Beziehung stehen Original F und Bild F' zueinander (Abb. 137)?
6. Durch welche geometrische Transformation lassen sich zwei gleichsinnig-kongruente Figuren derselben Ebene, deren entsprechende Strecken ungleichsinnig-parallel sind, ineinander überführen?
7. Zeichne dreistrahlig-, vierstrahlig-, fünfstrahlig-, sechsstrahlig-symmetrische Figuren (Abb. 138)!
8. Wie nennt man zweistrahlig-symmetrische Figuren?
9. Zeichne zentrisch-symmetrische Figuren (Abb. 139)!
10. Welches ist die resultierende Transformation zu zwei hintereinander auszuführenden Drehungen einer ebenen Figur F um ein Zentrum O um **a)** 30° und 60°, **b)** 90° und 90°, **c)** 90° und — 90°, **d)** 180° und 180° (Abb. 140)?
11. Welches ist die inverse Transformation zur Drehung einer ebenen Figur F um ein Zentrum O um den Winkel **a)** 30°, **b)** 90°, **c)** 180°?
12. Welche Drehung unter allen Drehungen einer ebenen Figur F um ein Zentrum O um einen Winkel φ ist die identische Transformation?
13. Erläutere durch Zeichnungen, daß die Schar der Transformationen durch Drehung einer Figur F um einen festen Punkt O eine Transformationsgruppe bildet!

14. Erläutere durch Zeichnungen, daß die Schar der Transformationen durch Parallelverschiebung einer ebenen Figur F eine Transformationsgruppe bildet!

15. Stelle die Transformationen der Bewegungsgruppe zusammen! Warum liefern alle Transformationen dieser Gruppe gleichsinnig-kongruente Bilder?

16. Welche Bilder einer Figur F erhält man durch eine Transformation der Bewegungsgruppe, wenn die Bewegung **a)** aus einer Parallelverschiebung, **b)** aus einer Drehung um einen festen Punkt O, **c)** aus einer Drehung und einer Parallelverschiebung besteht?

17. Überführe zwei beliebige gleichsinnig-kongruente Figuren F und F' derselben Ebene durch geometrische Transformationen ineinander! Welche Fälle können auftreten? Welche Transformationen gehören zu diesen Fällen?

18. Spiegele eine beliebige ebene Figur F **a)** an einer Geraden g_1, **b)** an einer zu g_1 parallelen Geraden g_2, **c)** an einer zu g_1 senkrechten Geraden g_3, **d)** an einer beliebigen Geraden g_4. Welche Bilder ergeben sich in den vier Fällen?

19. Zeichne achsensymmetrische Figuren mit ihren Symmetrieachsen (Abb. 145)?

20. Spiegele ein beliebiges Dreieck F durch nacheinander ausgeführte Transformationen
a) an zwei zueinander parallelen Achsen g_1 und g_2,
b) an zwei zueinander senkrechten Achsen g_1 und g_2,
c) an zwei beliebigen, sich schneidenden Achsen g_1 und g_2 derselben Ebene.
Durch welche resultierenden Transformationen lassen sich F und F'' in den drei Fällen ineinander überführen (Abb. 146)?

21. Gegeben sind zwei kongruente Dreiecke F und F' derselben Ebene.
a) F und F' sind gleichsinnig-kongruent und entsprechende Strecken von F und F' gleichsinnig-parallel (oder F und F' sind gleichliegend-kongruent).
b) F und F' sind gleichsinnig-kongruent, entsprechende Strecken ungleichsinnig-parallel.
c) F und F' sind gleichsinnig-kongruent, entsprechende Strecken nicht parallel.
d) F und F' sind ungleichsinnig-kongruent.
Durch welche geometrische Transformation wird in jedem Fall F in F' und F' in F übergeführt? Zeichnerische Ausführung der Transformationen!
Anleitung zu d): Konstruiere zuerst die Achse g der Spiegelung bzw. Schubspiegelung! Wie verläuft g zu den Verbindungslinien entsprechender Punkte (Abb. 144 und 147)?

22. Warum bilden **a)** die Transformationen durch Spiegelung an verschiedenen Achsen (Abb. 146), **b)** die Umlegungen jede für sich keine Transformationsgruppe?

23. Stelle sämtliche Möglichkeiten der Überführung einer ebenen Figur F in ein kongruentes Bild F' derselben Ebene zusammen! Führe die Transformationen zeichnerisch durch!

24. Zwei Transformationen A und B einer Figur F kann man nacheinander in der Reihenfolge AB oder BA ausführen. Zeige an Beispielen aus der Gruppe der Bewegungen und Umlegungen, daß für zwei nacheinander auszuführende Transformationen A und B die Transformation AB im allgemeinen nicht zu demselben Ergebnis wie die Transformation BA führt. Das kommutative Gesetz[1]) oder Vertauschungsgesetz $AB = BA$ gilt im allgemeinen nicht für geometrische Transformationen!

Beispiele: **a)** A: Verschiebung um $\mathfrak{a}_1$, B: Verschiebung um $\mathfrak{a}_2$ (Abb. 141); **b)** A: Drehung um O um φ_1, B: Drehung um O um φ_2 (Abb. 140); **c)** A: Verschiebung um $\mathfrak{a}$, B: Drehung um O um 90°; **d)** A: Verschiebung um $\mathfrak{a}$, B: Spiegelung an g_1, ($g_1 \perp \mathfrak{a}$); **e)** A: Drehung um O um 90°, B: Spiegelung an g_1, (g_1 geht durch O). (Zu d und e vergleiche Abb. 146!)

25. Drei nacheinander auszuführende Transformationen A, B und C einer Figur F kann man als Transformation $(AB)C$ und als Transformation $A(BC)$ durchführen. Zeige an Beispielen aus der Gruppe der Bewegungen und Umlegungen, daß für drei nacheinander auszuführende Transformationen A, B und C die Transformation $(AB)C$ zu demselben

1) commutare (lat.) heißt vertauschen.

Ergebnis wie die Transformation $A(BC)$ führt. Das assoziative Gesetz[1]) oder Verbindungsgesetz $(AB)C = A(BC)$ gilt für geometrische Transformationen!

Beispiele für A und B wie in Aufgabe 24, a bis e, dazu: **a)** C: Verschiebung um $\mathfrak{b}$; **b)** C: Drehung um O um α; **c)** C: Drehung um O um $-90°$; **d)** C: Spiegelung an g_2, $(g_2 \parallel g_1)$; **e)** C: Spiegelung an g_2, (g_2 geht durch O und $g_2 \perp g_1$). (Zu d und e vergleiche Abb. 146!)

II. *Ähnlichkeitstransformationen*

26. Strecke eine ebene Figur F vom Zentrum O aus im Maßstab

a) $k = \frac{2}{1}$, **b)** $k = \frac{1}{2}$, **c)** $k = \frac{1}{1}$, **d)** $k = -\frac{2}{1}$, **e)** $k = -\frac{1}{2}$, **f)** $k = -\frac{1}{1}$!

Welche Bilder entstehen in den Fällen a, b, c (Abb. 148) und d, e, f (Abb. 149)?

27. Durch welche Transformationen kann man zwei ähnlich-liegende Figuren F und F' derselben Ebene ineinander überführen? Führe die Transformationen zeichnerisch durch!

Maßstab für F': **a)** $k = +\frac{2}{1}$ **b)** $k = +1$ **c)** $k = +\frac{1}{2}$

d) $k = -\frac{2}{1}$ **e)** $k = -1$ **f)** $k = -\frac{1}{2}$

28. Überführe eine ebene Figur F durch zwei nacheinander auszuführende Streckungen vom gleichen Streckungszentrum O aus mit den Maßstäben k_1 und k_2 in ein Bild F''! Durch welche resultierende Transformation lassen sich die beiden Streckungen in den einzelnen Fällen ersetzen?

a) $k_1 = +\frac{2}{1}$ $k_2 = +\frac{3}{2}$ **b)** $k_1 = -\frac{2}{1}$ $k_2 = -\frac{3}{2}$ **c)** $k_1 = -\frac{2}{1}$ $k_2 = +\frac{3}{2}$

d) $k_1 = +\frac{2}{1}$ $k_2 = -\frac{3}{2}$ **e)** $k_1 = +\frac{2}{1}$ $k_2 = +\frac{1}{2}$ **f)** $k_1 = +\frac{1}{2}$ $b_2 = -\frac{2}{1}$

g) $k_1 = -\frac{1}{2}$ $k_2 = -\frac{2}{1}$ **h)** $k_1 = -1$ $k_2 = -1$ (Vgl. Abb. 150, 151, 152!)

29. Überführe eine ebene Figur F durch zwei nacheinander auszuführende Streckungen von verschiedenen Zentren O_1 und O_2 aus mit den Maßstäben k_1 und k_2 in ein Bild F''! Welche Bilder erhalten wir? Welcher Art ist die resultierende Transformation (Abb. 153, 154)?

a) $k_1 = +\frac{1}{2}$ $k_2 = +\frac{2}{1}$ **b)** $k_1 = +\frac{1}{2}$ $k_2 = +\frac{4}{1}$ **c)** $k_1 = -\frac{1}{2}$ $k_2 = +\frac{2}{1}$

d) $k_1 = -\frac{1}{2}$ $k_2 = +\frac{4}{1}$ **e)** $k_1 = -\frac{1}{2}$ $k_2 = -\frac{2}{1}$ **f)** $k_1 = -\frac{1}{2}$ $k_2 = -\frac{4}{1}$

30. Überführe eine ebene Figur F durch eine Drehstreckung vom Zentrum O aus um den Winkel φ im Maßstab k in ihr Bild F''! Welche Bilder F'' erhalten wir in den einzelnen Fällen? Wie liegen Figur F und Bild F'' zueinander (Abb. 155, 156)?

a) $\varphi = 90°$ $k = \frac{2}{1}$ **b)** $\varphi = 90°$ $k = \frac{1}{2}$ **c)** $\varphi = 180°$ $k = \frac{2}{1}$

d) $\varphi = 180°$ $k = \frac{1}{2}$ **e)** $\varphi = 90°$ $k = -\frac{2}{1}$ **f)** $\varphi = 90°$ $k = -\frac{1}{2}$

g) $\varphi = 180°$ $k = -\frac{2}{1}$ **h)** $\varphi = 180°$ $k = -\frac{1}{2}$ **i)** $\varphi = 90°$ $k = 1$

k) $\varphi = 180°$ $k = -1$ **l)** $\varphi = 0°$ $k = \frac{2}{1}$ **m)** $\varphi = 0°$ $k = 1$

31. Überführe zwei gleichsinnig-ähnliche Dreiecke F und F'' derselben Ebene durch eine geometrische Transformation ineinander! Welche Transformation leistet dieses in den einzelnen Fällen? Führe die Transformationen zeichnerisch durch!

a) F und F'' liegen ähnlich, der Maßstab von F'' ist $k = 1$,
b) F und F'' liegen ähnlich, der Maßstab von F'' ist $k = \frac{1}{2}$,
c) F und F'' sind gleichsinnig-ähnlich, entsprechende Strecken von F und F'' aber nicht parallel, der Maßstab von F'' ist $k = 1$.
d) Wie c, aber der Maßstab von F'' ist $k = \frac{1}{2}$

Anleitung zu c und d: Konstruiere zuerst das Zentrum O der Transformation aus zwei Paaren entsprechender Punkte A, A'' und B, B''!

---

1) associare (lat.) heißt miteinander verbinden.

32. Welche Transformation erhält man für eine ebene Figur F durch eine Drehstreckung von F um den Winkel $\varphi = 0°$ **a)** im Maßstab $k = 1$, **b)** im Maßstab $k = -1$?

33. Überführe ein Dreieck F durch eine Streckspiegelung im Maßstab **a)** $k = +\frac{2}{1}$, **b)** $k = \frac{1}{2}$, **c)** $k = -1$, **d)** $k = -\frac{1}{2}$, **e)** $k = +1$ in ein Bild F''! Welche Bilder erhält man?

34. Transformiere ein Dreieck F durch zwei nacheinander auszuführende Streckspiegelungen mit den Maßstäben $k_1 = \frac{2}{1}$ und $k_2 = \frac{1}{2}$ und parallelen Achsen g_1 und g_2! Welches Bild F'' erhält man (Abb. 158)?

35. Beweise, daß zwei ungleichsinnig-ähnliche Figuren F und F'' derselben Ebene, die nicht kongruent sind, sich stets durch eine Streckspiegelung ineinander überführen lassen!
Anleitung zum Beweis (Abb. 157): Zeige zuerst, daß es überhaupt eine ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation gibt, die F in F'' überführt! Zeige dann, daß diese ungleichsinnige Ähnlichkeitstransformation eine Streckspiegelung sein muß!

36. Warum bilden die ungleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen für sich keine Transformationsgruppe (Abb. 158)?

37. Durch welche Transformationen lassen sich zwei ähnliche Dreiecke F und F' derselben Ebene ineinander überführen? Stelle sämtliche möglichen Fälle zusammen und führe die Transformationen zeichnerisch durch!

38. Welche Transformation führt man bei Umzeichnung einer ebenen Figur mit dem Storchschnabel oder Pantographen aus? Welche bei Umzeichnung mit dem Proportionalzirkel?

39. Welche Transformation führt man bei Vergrößerung oder Verkleinerung einer Geländekarte nach dem Quadratnetzverfahren aus (Abschn. 27, Aufg. 19)?

III. Geometrische Transformationen von Funktionskurven

40. Stelle die Funktionen jeder folgenden Aufgabengruppe in einem gemeinsamen xy-Achsenkreuz geometrisch dar!
a) $y = x$; $y = x + 2$; $y = x - 2$ (vgl. Abb. 59);
b) $y = x^2$; $y = x^2 + 4$; $y = x^2 - 4$ (vgl. Abb. 14 und 22);
c) $y = x^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x + 3)^2$ (vgl. Abb. 16);
d) $y = x^2$; $y = (x - 1)^2$; $y = (x - 1)^2 - 4$; $y = (x - 1)^2 + 4$ (vgl. Abb. 28);
e) $y = 2x^2$; $y = 2 \cdot (x + 3)^2$; $y = 2 \cdot (x + 3)^2 - 4$ (vgl. Abb. 18);
f) $y = \pm\sqrt{x}$; $y = \pm\sqrt{x} + 2$; $y = \pm\sqrt{x} - 2$ (vgl. Abb. 61).
Durch welche geometrischen Transformationen lassen sich die Kurven jeder Aufgabengruppe ineinander überführen?

41. Zeichne die Kurven $x^2 - y^2 = 1$ und $y^2 - x^2 = 1$ in ein gemeinsames xy-Achsenkreuz. Durch welche geometrische Transformation lassen sich die Kurven ineinander überführen? (Vgl. Abschn. 21, Aufg. 6 und 11.)

42. Stelle die Funktionen jeder folgenden Aufgabengruppe in einem gemeinsamen Achsenkreuz zeichnerisch dar!
a) $y = x$ und $y = -x$ (vgl. Abb. 10); **b)** $y = x + 2$ und $y = -(x + 2)$;
c) $y = 2x$ und $y = -2x$ (vgl. Abb. 10); **d)** $y = 2x + 2$ und $y = -(2x + 2)$;
e) $y = x^2$ und $y = -x^2$; **f)** $y = (x - 3)^2$ und $y = -(x - 3)^2$;
g) $y = (x - 3)^2 + 2$ und $y = -(x - 3)^2 - 2$;
h) $y = 2x^2$ und $y = -2x^2$ (vgl. Abb. 18); **i)** $y = 2(x - 3)^2 + 4$ und $y = -2(x - 3)^2 - 4$;
k) $y = +\sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$ (vgl. Abb. 40 und 61).
Durch welche geometrischen Transformationen lassen sich die Kurven jeder Aufgabengruppe ineinander überführen?

43. Zeichne die Kurven $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 9$ und $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ in ein gemeinsames Achsenkreuz. Durch welche geometrischen Transformationen lassen sich die Kurven ineinander überführen? (Vgl. Abschn. 21, Aufg. 1, 4 und 5.)

29. Die mittlere Proportionale

a) Mittlere Proportionale und Quadratwurzel

Aus den Gleichungen $x^2 = 4 \cdot 16$ und $x^2 = a \cdot b$ (Produktengleichungen) lassen sich die Proportionen $4 : x = x : 16$ und $a : x = x : b$ bilden. In beiden Proportionen sind die Innenglieder gleich. Man nennt x die **mittlere Proportionale zu a und b** (4 und 16).

Aus den beiden Produktengleichungen folgt durch Wurzelziehen $x = \sqrt{4 \cdot 16}$ und $x = \sqrt{ab}$. In der Proportion $a : x = x : b$ ist die mittlere Proportionale x nur eine andere Darstellungsform der Quadratwurzel $x = \sqrt{ab}$. Wie kann man die mittlere Proportionale zu a und b geometrisch veranschaulichen?

b) Geometrische Darstellung der mittleren Proportionalen

1. Die mittlere Proportionale am rechtwinkligen Dreieck

Jedes rechtwinklige Dreieck ABC wird durch die Höhe zur Hypotenuse in zwei dem Ausgangsdreieck ähnliche Teildreiecke ACD und CBD zerlegt (Abb. 159). Entsprechende Seiten in den ähnlichen Dreiecken sind

$\triangle ABC$	$\triangle ACD$	$\triangle CBD$	
c	b	a	(Hypotenusen),
a	h	p	(Gegenseiten von α, kürzere Katheten),
b	q	h	(Gegenseiten von $90° - \alpha$, längere Katheten).

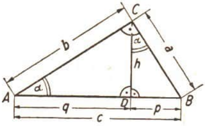


Abb. 159

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ergeben sich die folgenden Proportionen mit mittleren Proportionalen: $\boldsymbol{c : a = a : p}$, $\boldsymbol{c : b = b : q}$ und $\boldsymbol{q : h = h : p}$

oder $\boldsymbol{a = \sqrt{c \cdot p}}$, $\boldsymbol{b = \sqrt{c \cdot q}}$ und $\boldsymbol{h = \sqrt{p \cdot q}}$.

Kathetensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist jede Kathete mittlere Proportionale zur Hypotenuse und dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt.
Höhensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe mittlere Proportionale zu den Hypotenusenabschnitten.

Nach den beiden Sätzen läßt sich die mittlere Proportionale x zu den Größen a und b als Strecke von x cm Länge zu Strecken von a und b cm Länge am rechtwinkligen Dreieck geometrisch veranschaulichen (Abb. 160, in *a.* nach dem Kathetensatz, in *b.* nach dem Höhensatz).

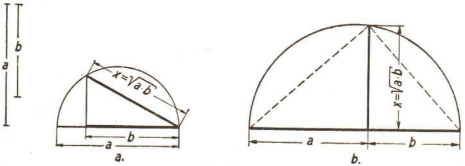


Abb. 160

2. Mittelwerte

Unter einem **Mittelwert m** zu zwei verschiedenen Größen a und b, $(a > b)$, versteht man einen Wert, der zwischen beiden Größen liegt. Ein Mittelwert m ist größer als der kleinere gegebene Wert b und kleiner als der größere gegebene Wert a, es ist

$$b < m < a.$$

Arithmetischer Mittelwert m_a. **Unter dem arithmetischen Mittel m_a zweier verschiedener Größen a und b versteht man den Durchschnittswert** $m_a = \frac{a+b}{2}$.

Eine geometrische Veranschaulichung des arithmetischen Mittels zu a und b findet sich in Abb. 161 a.

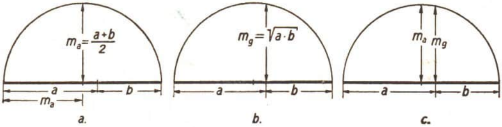


Abb. 161. Mittelwerte. a) Arithmetisches Mittel, b) geometrisches Mittel, c) arithmetisches und geometrisches Mittel

Geometrischer Mittelwert m_g. Die mittlere Proportionale zu den Größen a und b liegt in ihrem Zahlenwert zwischen den Größen a und b. Die mittlere Proportionale ist ein Mittelwert.

Unter dem geometrischen Mittel m_g zweier verschiedener Größen a und b versteht man die mittlere Proportionale zu a und b. $a : m_g = m_g : b$ oder $m_g = \sqrt{a \cdot b}$ (Abb. 161b).

Das arithmetische und das geometrische Mittel der Größen a und b $(a \neq b)$ sind stets voneinander verschieden. Ein Vergleich beider Mittel ist in den Aufgaben 8, 9, 10 durchgeführt. Das geometrische Mittel zweier Größen a und b $(a \neq b)$ ist stets kleiner als ihr arithmetisches Mittel (Abb. 161c).

3. Die mittlere Proportionale am Kreis

Zieht man von einem Punkt P außerhalb eines Kreises eine Sekante und eine der beiden Tangenten (Abb. 162), so nennt man PA und PB die Sekantenabschnitte, PT den Tangentenabschnitt.

Tangentensatz: Zieht man von einem Punkt außerhalb eines Kreises eine Sekante und eine Tangente, so ist der Tangentenabschnitt die mittlere Proportionale zu den Sekantenabschnitten.

Beweis (Abb. 162). Wir vergleichen $\triangle TPB$ mit $\triangle APT$.

Die beiden Dreiecke stimmen in zwei Winkeln überein; es ist $\sphericalangle TPB = \sphericalangle APT$ (er ist beiden Dreiecken gemeinsam) und $\sphericalangle TBP = \sphericalangle ATP$ (Umfangswinkel und Sehnentangentenwinkel über demselben Bogen $\overset{\frown}{TA}$). Also ist $\triangle TPB \sim \triangle APT$.

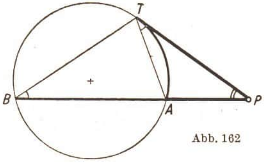


Abb. 162

Entsprechende Strecken in den ähnlichen Dreiecken sind PB und PT, PT und PA. Also besteht die Verhältnisgleichung $PB : PT = PT : PA$.

Der Zusammenhang zwischen der Darstellung der mittleren Proportionalen am Kreis und am rechtwinkligen Dreieck wird in Aufgabe 15 erläutert und bewiesen.

c) Teilung einer Strecke

1. Innere und äußere Teilung einer Strecke in einem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$

Liegt auf einer Strecke AB ein Teilpunkt C innerhalb der Endpunkte A und B, so spricht man von **innerer Teilung** der Strecke AB durch C. Liegt der Teilpunkt außerhalb der Endpunkte A und B, so spricht man von **äußerer Teilung** der Strecke AB durch D (Abb. 163). Die Streckenendpunkte heißen **Grundpunkte** A und B, im Gegensatz zu den **Teilpunkten** C und D.

Abb. 163

Zu jedem Teilpunkt gehören zwei **Teilabschnitte.** Jeder Teilabschnitt beginnt beim Teilpunkt und reicht bis zum Grundpunkt A bzw. B. Er wird in dieser Anordnung auch benannt. Die Teilabschnitte der inneren Teilung der Strecke AB sind CA und CB, der äußeren Teilung DA und DB.

Das Verhältnis der Teilabschnitte, die zu einem Punkt der Strecke AB gehören, heißt **Teilverhältnis** der Strecke. Bei innerer Teilung von AB ist das Teilverhältnis $\frac{CA}{CB}$, bei äußerer Teilung $\frac{DA}{DB}$.

Die innere und äußere Teilung einer Strecke AB in einem gegebenen Teilverhältnis $\frac{m}{n}$ ist in den Aufgaben 18 und 19 durchgeführt (siehe Abb. 168).

2. Stetige Teilung einer Strecke

Man kann eine Strecke AB innen so teilen, daß der größere Teilabschnitt mittlere Proportionale zur Grundstrecke und dem kleineren Teilabschnitt wird. Diese besondere innere Teilung heißt **stetige Teilung der Strecke AB.**

Aufgabe: Eine Strecke $AB = a$ ist stetig zu teilen.

Geometrische Lösung (Abb. 164): Der gesuchte größere Teilabschnitt CA sei gleich x, dann ist der kleinere Teilabschnitt $CB = a - x$. Es muß die Verhältnisgleichung $a : x = x : (a - x)$ bestehen. Errichtet man im Grundpunkt B auf der Strecke AB die Senkrechte, schlägt mit $BO = \frac{a}{2}$ um O den Kreis und zieht vom Grundpunkt A durch O die Sekante, so ist der Sekantenabschnitt AD der gesuchte Teilabschnitt x.

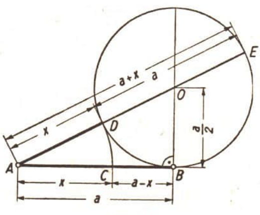


Abb. 164

Beweis: Nach dem Tangentensatz ist $\frac{EA}{AB} = \frac{AB}{AD}$ oder $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x}$.

Durch korrespondierende Subtraktion erhält man $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$.

Vertauscht man die Innen- und Außenglieder der Verhältnisgleichung miteinander, so erhält man die Proportion $a : x = x : (a - x)$.

Aufgaben

I. Mittlere Proportionale und Quadratwurzel

1. Wie groß ist die mittlere Proportionale zu den folgenden Zahlen:
a) 2 und 18, 4 und 9, **b)** 2 und 32, 4 und 16, 9 und 16, **c)** 1 und 2, **d)** 16 und 18, **e)** 8 und 9?
Berechne die irrationalen Wurzeln auf 3 Stellen genau (Rechenstab)! Die mittlere Proportionale x liegt stets zwischen den Werten a und b, $(a \neq b)$.

2. Wie groß ist die mittlere Proportionale zu den folgenden Strecken:
a) 1 cm und 9 cm, **b)** 4 cm und 9 cm, **c)** 1 cm und 2 cm, **d)** 2 cm und 4 cm?

II. Die mittlere Proportionale am rechtwinkligen Dreieck

3. Berechne und veranschauliche geometrisch die mittlere Proportionale zu **a)** 1 und 4, **b)** 1 und 2, **c)** 1 und 3, **d)** 1 und 6, **e)** 2 und 3, **f)** 1,5 und 4, **g)** a und b!

4. Löse die folgenden rein-quadratischen Gleichungen und veranschauliche sie geometrisch:
a) $x^2 = 4$ **b)** $x^2 = 2$ **c)** $x^2 = 3$ **d)** $x^2 = 6$
e) $x^2 = 4a^2$ **f)** $x^2 = 2a^2$ **g)** $x^2 = 3a^2$ **h)** $x^2 = a \cdot b$!

5. Stelle die folgenden irrationalen Wurzeln durch Strecken von x cm Länge geometrisch dar:
a) $x = \sqrt{2}$ **b)** $x = \sqrt{3}$ **c)** $x = \sqrt{6}$ **d)** $x = 2\sqrt{2}$
e) $x = 3\sqrt{2}$ **f)** $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **g)** $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$!

6. Durch welche Ähnlichkeitstransformationen lassen sich in Abb. 159 die ähnlichen Dreiecke ABC, ACD und CBD ineinander überführen? Welchen Umlaufssinn haben $\triangle ACD$ und $\triangle CBD$ im Vergleich zu $\triangle ABC$? Führe die Transformationen zeichnerisch durch!

7. Lehrsatz des Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten. $c^2 = a^2 + b^2$ (Abb. 159). Beweise den pythagoreischen Lehrsatz mit Hilfe des Kathetensatzes!

III. Mittelwerte

8. Berechne das arithmetische und das geometrische Mittel zu
a) 1 und 4 **b)** 4 und 9 **c)** 9 und 16 **d)** 16 und 18 **e)** 48 und 49 **f)** 8 und 9
g) 1 und 2 **h)** 1 und 3 **i)** 2 und 3 **k)** 1,5 und 4 **l)** 1,2 und 5 **m)** 1 und 6
n) a und b $(a \neq b)$!
Stelle beide Mittelwerte in einer Tafel zusammen! Begründe, daß beides Mittelwerte sind!
Anleitung (auf 3 Stellen genau, Rechenstab):

a	1	4	9	...	48	8	1	...	a
m_a	.	.	.	...	48,5	.	1,5	...	.
m_g	.	.	.	...	48,4	.	1,41	...	.
b	4	9	16	...	49	9	2	...	b

9. Stelle einige der arithmetischen und geometrischen Mittelwerte der Aufgabe 8 geometrisch dar (vgl. Abb. 161)!

10. Das geometrische Mittel zweier Größen a und b, $(a \neq b)$, ist stets kleiner als das arithmetische!

Anleitung zum rechnerischen Beweis:

Wir behaupten $m_g < m_a$. Wir setzen für m_g und m_a ihre Werte ein und erhalten $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, $(a \neq b)$.

Wir quadrieren die Ungleichung $ab < \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$,

multiplizieren beiderseits mit 4 $4ab < a^2 + 2ab + b^2$

und subtrahieren beiderseits $4ab$ $0 < a^2 - 2ab + b^2$.

Wir erhalten $0 < (a - b)^2$. Diese Ungleichung ist richtig, da $a \neq b$ ist.

Für den rechnerischen Beweis des obigen Satzes gehen wir von der letzten Formel als richtig erkannter Aussage aus und durchlaufen den angeführten Rechnungsgang rückwärts. — Stelle zusammen, wie man mit Ungleichungen rechnet!
Anleitung zum zeichnerischen Beweis in Abb. 161.

11. In welchem ausgearteten Fall werden arithmetisches und geometrisches Mittel einander gleich? Liegen dann noch Mittelwerte vor?

IV. Die mittlere Proportionale am Kreis

12. Sehnensatz. Zieht man durch einen Punkt innerhalb eines Kreises Sehnen, so sind die Produkte aus den Abschnitten jeder Sehne konstant. Beweis!

Anleitung (Abb. 165a): Beweise den Sehnensatz für zwei Sehnen! Welche Dreiecke im Kreis sind ähnlich? Warum? Bilde das Verhältnis entsprechender Seiten und die Produktengleichung! Durch welche Ähnlichkeitstransformation lassen sich die beiden Dreiecke ineinander überführen?

13. Sekantensatz. Zieht man durch einen Punkt außerhalb eines Kreises Sekanten, so sind die Produkte aus den Abschnitten jeder Sekante konstant. Beweis!

Anleitung (Abb. 165b): Beweise den Sekantensatz für 2 Sekanten! Welche Dreiecke sind ähnlich? Warum? Bilde das Verhältnis entsprechender Seiten und die Produktengleichung! Durch welche Ähnlichkeitstransformation lassen sich die beiden Dreiecke ineinander überführen?

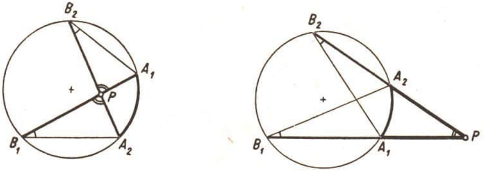


Abb. 165. a) Sehnensatz b) Sekantensatz

14. Beweise den Tangentensatz als Grenzfall des Sekantensatzes!

15. Zusammenhang zwischen der mittleren Proportionalen am Kreis und am rechtwinkligen Dreieck. Zeige, **a)** daß der Kathetensatz ein Sonderfall des Tangentensatzes, **b)** daß der Höhensatz ein Sonderfall des Sehnensatzes ist!

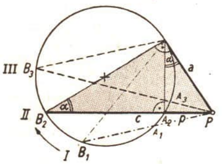


Abb. 166. Kathetensatz und Tangentensatz

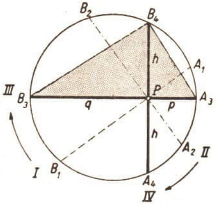


Abb. 167. Höhensatz und Sehnensatz

Anleitung. a) (Abb. 166): Drehe die Sekante I um P in die Sonderlage II!

b) (Abb. 167): Drehe die Sehnen I und II um P in die Sonderlagen III und IV!

V. Innere und äußere Teilung einer Strecke

16. Teile eine Strecke AB in **a)** 3, **b)** 5, **c)** 10 gleiche Teile! Welche Teilverhältnisse sind den einzelnen Teilpunkten zugeordnet?

17. Verlängere eine Strecke AB **a)** über A, **b)** über B einmal, zweimal, dreimal, viermal um sich selbst! Welche Teilverhältnisse gehören zu den Endpunkten der Verlängerungen?

18. Teile eine Strecke AB innen im Teilverhältnis **a)** $\frac{3}{2}$, **b)** $\frac{2}{3}$, **c)** $\frac{5}{3}$, **d)** $\frac{3}{5}$, **e)** $\frac{2}{1}$, **f)** $\frac{1}{2}$, **g)** $\frac{1}{1}$!

19. Teile eine Strecke AB außen im Teilverhältnis **a)** $\frac{3}{2}$, **b)** $\frac{2}{3}$, **c)** $\frac{5}{3}$, **d)** $\frac{3}{5}$, **e)** $\frac{2}{1}$, **f)** $\frac{1}{2}$ (Abb. 168)!

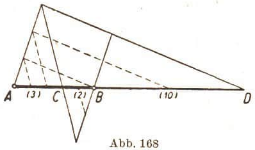


Abb. 168

20. Kann man eine Strecke AB außen im Teilverhältnis $\frac{1}{1}$ teilen?

21. Anwendung auf das Dreieck. Von den Winkelhalbierenden eines Dreiecks. Beweise den Lehrsatz des Apollonius[1]): Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten!

Anleitung zum Beweis (Abb. 169): Ziehe durch B die Parallele H_1K_1 zu AC! Dann sind H_1BC und K_1BC gleichschenklige Dreiecke, denn ihre Basiswinkel sind je gleich. Es ist also

$$H_1B = CB = a \quad \text{und} \quad K_1B = CB = a.$$

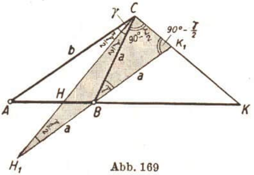


Abb. 169

VI. Stetige Teilung

22. Eine Strecke von **a)** 1 cm, **b)** 2 cm, **c)** 10 cm, **d)** a cm Länge ist stetig zu teilen! Berechne die Länge der Teilabschnitte!

1) Apollonius von Perga (Pamphylien) lebte um 210 v.d.Ztr. in Alexandria.

23. Zeige an Abb. 164, daß die Sekante $\overline{AE}$ durch D auch stetig geteilt wird!

Anleitung: Nach dem Tangentensatz ist (Abb. 164) $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x}$. Was bedeutet diese Proportion für die Sekante $\overline{AE}$ und ihren Teilpunkt D?

24. Zeige, daß die stetige Teilung einer Strecke a auch mit einem Kreis von beliebigem Durchmesser $2r$, $(2r > a)$, durchgeführt werden kann, wenn statt der Zentrale AE eine Sekante gewählt wird, deren Sehne gleich der stetig zu teilenden Strecke a ist!

Anleitung: Bedingung für die zeichnerische Lösung der stetigen Teilung einer Strecke a ist, daß der gewählte Kreisdurchmesser $2r \geqq a$ ist. Warum ist der Sonderfall $2r = a$ für die zeichnerische Ausführung der stetigen Teilung einer Strecke a der günstigste Fall?
Die stetige Teilung nennt man auch „goldenen Schnitt" (sectio divina oder aurea).

XI. Kreis und Kreisteilung

30. Regelmäßige Vielecke

a) Regelmäßige Vielecke und Kreis, strahlig-symmetrische Figuren

1. Das regelmäßige Sechseck

Lege an ein gleichseitiges Dreieck ABO ein kongruentes Dreieck so an, daß ihre Spitzen und ein Schenkel gemeinsam sind (Abb. 170)! Wie oft kann man das Anlegen wiederholen? Warum muß beim sechstenmal der zweite Schenkel des angelegten Dreiecks auf den ersten Schenkel des Ausgangsdreiecks fallen?

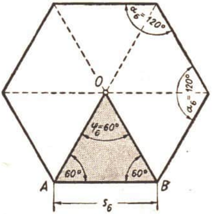


Abb. 170

Wie kann man durch Drehen des Ausgangsdreiecks ABO dieselbe Figur erhalten? Um welchen Punkt als Zentrum und um welchen Zentriwinkel φ muß man jedesmal drehen? Warum fällt bei der sechsten Drehung um $\varphi_6 = 60°$ der zweite Schenkel des gedrehten Dreiecks auf den Schenkel OA des Ausgangsdreiecks?

Das entstandene Vieleck besteht aus sechs gleichen Seiten s_6 und sechs gleichen Winkeln $\alpha_6 = 120°$. Es heißt **regelmäßiges Sechseck** mit der Seite s_6.

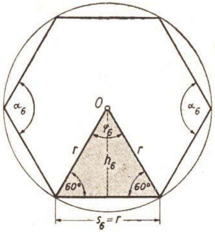


Abb. 171

Das regelmäßige Sechseck liegt **strahlig-symmetrisch** zum Symmetriezentrum O. Jede Drehung eines regelmäßigen Sechsecks um das Zentrum O um $\varphi_6 = \frac{360°}{6} = 60°$ bringt es mit sich selbst zur Deckung. Das regelmäßige Sechseck ist **sechsstrahlig-symmetrisch.** Um jedes regelmäßige Sechseck läßt sich ein Kreis beschreiben (Abb. 171).

Das gleichseitige Ausgangsdreieck ABO heißt **Bestimmungsdreieck** des regelmäßigen Sechsecks. Seine Seiten sind r, r und s_6.

Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem Radius seines Umkreises. $\boldsymbol{s_6 = r}$.

Die Winkel des Bestimmungsdreiecks sind der Zentriwinkel des regelmäßigen Sechsecks $\varphi_6 = \frac{360°}{6} = 60°$ und die beiden halben Innenwinkel des Sechsecks $\frac{\alpha_6}{2} = 60°$.

Aus einem regelmäßigen Sechseck erhält man durch Überschlagen der 2., 4., 6. Ecke das regelmäßige Dreieck $\left(\varphi_3 = 2\varphi_6 = \frac{360°}{3}\right)$, durch Halbieren der Zentriwinkel das regelmäßige Zwölfeck $\left(\varphi_{12} = \frac{\varphi_6}{2} = \frac{360°}{12}\right)$; 24-Eck $\left(\varphi_{24} = \frac{\varphi_{12}}{2} = \frac{360°}{24}\right)$; .... (Siehe Abb. 172.)

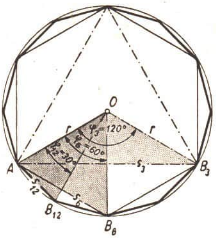


Abb. 172

2. Das regelmäßige Viereck

Wie oft kann man an ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABO ein kongruentes Dreieck unter Beibehaltung der Spitze anlegen, bis der eine Schenkel des angelegten Dreiecks auf das Ausgangsdreieck fällt (Abb. 173)? Wie kann man durch Drehen des Ausgangsdreiecks ABO dieselbe Figur erhalten? Um welchen Punkt als Zentrum und um welchen Zentriwinkel φ muß man jedesmal drehen? Wievielmal muß man insgesamt um den Winkel $\varphi_4 = \frac{360°}{4} = 90°$ drehen?

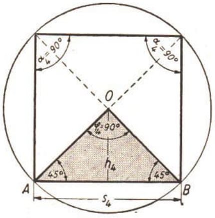


Abb. 173

Das entstandene Vieleck besteht aus vier gleichen Seiten s_4 und vier gleichen Winkeln $\alpha_4 = 90°$. Es heißt **regelmäßiges Viereck** oder Quadrat mit der Seite s_4. Das regelmäßige Viereck liegt strahlig-symmetrisch zum Zentrum O, es ist **vierstrahlig-symmetrisch.** Um jedes regelmäßige Viereck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Das Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Vierecks besteht aus den Seiten r, r, s_4 und den Winkeln $\varphi_4 = \frac{360°}{4} = \frac{4\,R}{4} = R$, $\frac{\alpha_4}{2} = 45°$ und $\frac{\alpha_4}{2} = 45°$. Die Seite des regelmäßigen Vierecks als Funktion seines Umkreisradius r ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$\boldsymbol{s_4 = f_4(r) = r\sqrt{2}}.$$

Aus einem regelmäßigen Viereck entstehen durch Halbieren der jeweiligen Zentriwinkel das regelmäßige

Achteck $\left(\varphi_8 = \frac{\varphi_4}{2} = \frac{360°}{8}\right)$;

16-Eck $\left(\varphi_{16} = \frac{\varphi_8}{2} = \frac{360°}{16}\right)$; ....

(Siehe Abb. 174.)

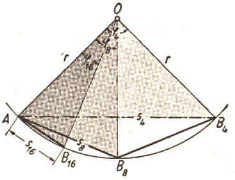


Abb. 174

3. Regelmäßige n-Ecke

Ein Vieleck mit gleichen Seiten s_n und gleichen Winkeln α_n heißt **regelmäßiges Vieleck** oder **regelmäßiges n-Eck.**

Um jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt dieses Umkreises ist das **Symmetriezentrum** O des Vielecks. Das Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen n-Ecks ist ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln r, der Basis s_n und dem Zentriwinkel $\varphi_n = \frac{360°}{n} = \frac{4\,R}{n}$ an der Spitze.

Die Summe der Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks ist gleich $(2n - 4)\,R$.

Beweis: In jedem Bestimmungsdreieck ist die Summe der Winkel gleich $2\,R$. Legt man n Bestimmungsdreiecke mit den Schenkeln aneinander, so erhält man als Winkelsumme $n \cdot 2\,R$ oder $2\,n\,R$. Hiervon entfallen $4\,R$ auf die Summe der n Mittelpunktswinkel, der Rest $(2\,n\,R - 4\,R)$ oder $(2\,n - 4)\,R$ auf die n Innenwinkel des n-Ecks.

Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks ist $\alpha_n = \frac{(2n-4)}{n}\,R$.

b) Ähnlichkeitslage regelmäßiger Vielecke

Regelmäßige Vielecke gleicher Eckenzahl sind stets ähnlich und lassen sich stets in Ähnlichkeitslage bringen.

c) Konstruktion regelmäßiger n-Ecke in einem Kreis

1. Zeichnung mit dem Winkelmesser, Näherungskonstruktionen

Legt man in einem Kreis mit dem Radius r gleichschenklige Dreiecke mit den Schenkeln r und den Winkeln an der Spitze $\varphi_9 = \frac{360°}{9} = 40°$, $\varphi_{15} = \frac{360°}{15} = 24°$, $\varphi_{18} = \frac{360°}{18} = 20°$ 9mal, 15mal, 18mal aneinander, oder dreht man in einem Kreis mit dem Radius r Bestimmungsdreiecke mit dem Mittelpunktswinkel $\varphi_n = \frac{360°}{n}$ $(n = 9, 15, 18)$ n-mal nacheinander um den Winkel φ_n, so erhält man regelmäßige 9-Ecke, 15-Ecke, 18-Ecke.

Diese Zeichnungsart regelmäßiger n-Ecke sind **Näherungskonstruktionen,** die unter Benutzung eines Winkelmessers hergestellt werden. Ihre Genauigkeit hängt von der Genauigkeit der Winkelmesserteilung und der Zeichnung ab.

2. Zeichnung mit Zirkel und Lineal, Kreisteilung

Gewisse regelmäßige Vielecke kann man in einem Kreise ohne Benutzung des Winkelmessers, allein durch **Teilung des Kreises** mit Zirkel und Lineal herstellen.

Die regelmäßigen Vielecke der Folge $3 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
Trägt man in einem Kreis den Kreisradius sechsmal nacheinander als Sehne ab, so erhält man ein regelmäßiges **Sechseck.** Aus diesem erhält man das regelmäßige **Dreieck** und das regelmäßige **12-Eck, 24-Eck, 48-Eck** usw. Auf diese Weise kann man die regelmäßigen Vielecke der **Folge $3 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,** durch Kreisteilung zeichnen.

Die regelmäßigen Vielecke der Folge $4 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
Verbindet man die Endpunkte zweier senkrecht aufeinanderstehender Durchmesser eines Kreises ($\varphi_n = \frac{360°}{4} = \varphi_4$), so erhält man ein regelmäßiges **Viereck,** aus diesem das regelmäßige **8-Eck, 16-Eck, 32-Eck** usw. Auf diese Weise lassen sich die regelmäßigen Vielecke der **Folge $4 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,** durch Kreisteilung zeichnen.

Die regelmäßigen Vielecke der Folge $5 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
In einen Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges **Zehneck** durch Kreisteilung zu zeichnen.

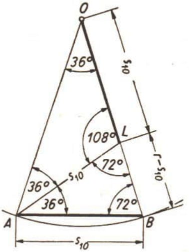


Abb. 175

Lösung (Abb. 175): Das Bestimmungsdreieck ABO des regelmäßigen Zehnecks ist ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln r, dem Zentriwinkel $\varphi_{10} = \frac{360°}{10} = 36°$ und den Basiswinkeln $\frac{180° - 36°}{2} = 72°$.
Zieht man im Bestimmungsdreieck die Winkelhalbierende AL des Basiswinkels OAB, so erhält man drei gleichschenklige Dreiecke (warum?),

	$\triangle\, OAB$,	$\triangle\, ABL$	und $\triangle\, LOA$
mit den Seiten	s_{10}, r, r	BL, s_{10}, s_{10}	r, s_{10}, s_{10}
und den Winkeln	36°, 72°, 72°	36°, 72°, 72°	108°, 36°, 36°.

Also ist $BL = r - s_{10}$.
Nun ist $\triangle\, OAB \sim \triangle\, ABL$ (Hauptähnlichkeitssatz). Es verhält sich also

$$OB : AB = AB : BL \quad \text{oder} \quad r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10}).$$

Die Zehneckseite s_{10} ist der größere Abschnitt des stetig geteilten Radius r.

Aus dem regelmäßigen Zehneck erhält man durch Überschlagen der 2., 4., 6., 8., 10. Ecke das regelmäßige **Fünfeck,** durch Halbieren der Zentriwinkel das regelmäßige **20-, 40-, 80-Eck** usw. Auf diese Weise lassen sich die regelmäßigen Vielecke der **Folge $5 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,** durch Kreisteilung zeichnen.

Die regelmäßigen Vielecke der Folge $15 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Subtrahiert man in einem Kreis die Zentriwinkel eines regelmäßigen Sechsecks und Zehnecks voneinander, so erhält man den Zentriwinkel und damit die Seite eines regelmäßigen **Fünfzehnecks.**

Beweis (Abb. 176):

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{4R}{6} - \frac{4R}{10} = \frac{4R}{15}$$

$$\varphi_6 - \varphi_{10} = \varphi_{15}$$

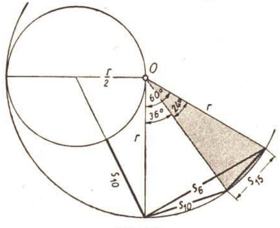


Abb. 176

Aus dem Fünfzehneck lassen sich durch Halbieren der Zentriwinkel das **30-Eck, 45-Eck** usw., d. h. die regelmäßigen Vielecke der 60
Folge $15 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, zeichnen.

Kreisteilung. Die bisherigen Kreisteilungskonstruktionen der regelmäßigen Vielecke waren bereits im griechischen Altertum bekannt. Gibt es außer den Folgen $3 \cdot 2^n$; $4 \cdot 2^n$; $5 \cdot 2^n$; $15 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, noch weitere Vielecksfolgen, die sich durch Kreisteilung mit Zirkel und Lineal ausführen lassen?

C.F. Gauß[1]) hat bewiesen, daß außer den Folgen der regelmäßigen 3-, 4-, 5-Ecke sich z. B. auch noch das **17-Eck,** das **257-Eck** und ihre Folgen $17 \cdot 2^n$, $257 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, daß ferner außer dem bereits bekannten $3 \cdot 5$- oder 15-Eck sich z. B. auch noch das **3 • 17-** oder 51-Eck, das **5 • 17-** oder 85-Eck und ihre Folgen durch Kreisteilung zeichnen lassen. Für das regelmäßige 17-Eck hat Gauß die Konstruktion durch Kreisteilung selbst angegeben.

Durch Kreisteilung mit Zirkel und Lineal lassen sich nicht zeichnen z.B. das regelmäßige 7-, 9-, 11-, 13-, 19-Eck und ihre Folgen.

Die Beweise dazu und die allgemeine Lösung des Problems der Kreisteilung lassen sich mit den Hilfsmitteln der Schulmathematik nicht durchführen.

d) Berechnung regelmäßiger n-Ecke in einem Kreis

Die Seiten der durch Kreisteilung konstruierbaren regelmäßigen Vielecke und damit ihre Umfänge und Flächen lassen sich aus dem Radius r ihres Umkreises algebraisch durch Ausdrücke berechnen, die nur Quadratwurzeln enthalten. Hier sollen nur einige einfache Beispiele durchgeführt werden (auf 3 Stellen genau).

1. Regelmäßige Vielecke der Folge $3 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Das regelmäßige Sechseck (Abb. 171). Es ist

$$\text{a) } s_6 = r; \quad \text{b) } h_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}; \quad \text{c) } u_6 = 3 \cdot 2r; \quad \text{d) } f_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot r^2 \approx 2{,}59\, r^2.$$

Das regelmäßige Zwölfeck (Abb. 177). $\triangle\, DAF$ ist rechtwinklig. Also ist

$$\text{a) } s_{12}^2 = (r - h_6) \cdot 2r \qquad \text{b) } h_{12} = \frac{1}{2}\, AF$$

$$s_{12}^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2r \qquad h_{12} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(r + h_6) \cdot 2r}$$

$$s_{12}^2 = r^2 \cdot (2 - \sqrt{3}) \qquad h_{12} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(r + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2r}$$

$$s_{12} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}; \qquad h_{12} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}};$$

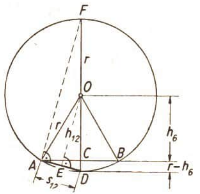


Abb. 177

$$\text{c) } u_{12} = 2r \cdot 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 3{,}10 \cdot 2r;$$

$$\text{d) } f_{12} = 3 \cdot r^2.$$

1) Carl Friedrich Gauß, geboren 1777 in Braunschweig, gestorben 1855 als Professor in Göttingen. Das Kreisteilungsproblem ist 1796 von Gauß gelöst worden.

2. Regelmäßige Vielecke der Folge $4 \cdot 2^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

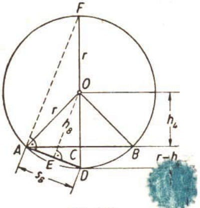


Abb. 178

Das regelmäßige Viereck (Abb. 173). Es ist

a) $s_4 = r\sqrt{2}$; b) $h_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$;

c) $u_4 = 2r \cdot 2\sqrt{2} \approx 2{,}82 \cdot 2r$; d) $f = 2r^2$.

Das regelmäßige Achteck (Abb. 178). $\triangle DAF$ ist rechtwinklig. Also ist

a) $s_8^2 = (r - h_4) \cdot 2r$ b) $h_8 = \frac{1}{2} AF$

$$s_8^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2r \qquad h_8 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(r + h_4) \cdot 2r}$$

$$s_8 = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}; \qquad h_8 = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}};$$

c) $u_8 = 2r \cdot 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 3{,}06 \cdot 2r$; d) $f_8 = r^2 \cdot 2\sqrt{2} \approx 2{,}82 \cdot r^2$.

3. Das regelmäßige Zehneck

Der größere Abschnitt des stetig geteilten Radius r ist die Seite des regelmäßigen Zehnecks, $s_{10} = r\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$ (vergleiche Abschn. 29, Aufg. 22). Aus diesem Wert errechnet man in gleicher Weise wie beim Zwölf- und Achteck Umfang und Fläche des regelmäßigen Zehnecks.

$$h_{10} = \frac{r}{4} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}; \quad u_{10} = 5r \cdot (\sqrt{5} - 1) \approx 3{,}09 \cdot 2r; \quad f_{10} = \frac{5r^2 \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \approx 2{,}93 \cdot r^2.$$

4. Zusammenstellung der regelmäßigen n-Ecke

n	s_n	u_n	f_n
$n = 4$	$r\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} \cdot 2r \approx 2{,}82 \cdot 2r$	$2 \cdot r^2 = 2 \cdot r^2$
$n = 6$	r	$3 \cdot 2r = 3 \cdot 2r$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 \approx 2{,}59 \cdot r^2$
$n = 8$	$r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot 2r \approx 3{,}06 \cdot 2r$	$2\sqrt{2} \cdot r^2 \approx 2{,}82 \cdot r^2$
$n = 10$	$r\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$	$\frac{5(\sqrt{5} - 1)}{2} \cdot 2r \approx 3{,}09 \cdot 2r$	$\frac{5 \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \cdot r^2 \approx 2{,}93 \cdot r^2$
$n = 12$	$r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot 2r \approx 3{,}10 \cdot 2r$	$3 \cdot r^2 = 3 \cdot r^2$

e) Ergebnisse der Kreisteilung

Ist einem Kreis mit dem Radius r ein regelmäßiges n-Eck einzubeschreiben, so läßt sich nur für die besprochenen Fälle ($n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20$ usw.) die Seite des n-Ecks aus dem Radius r **geometrisch** durch Kreisteilung mit Zirkel und Lineal **konstruieren** und **algebraisch** durch Ausdrücke **berechnen**, die nur Quadratwurzeln enthalten. Die geometrische Konstruktion eines regelmäßigen n-Ecks kann man auch so auffassen, daß sie die Möglichkeit gibt,

einen Winkel $\varphi_n = \frac{360°}{n} = \frac{4R}{n}$ durch Kreisteilung mit Zirkel und Lineal – also ohne Benutzung des Winkelmessers – zu zeichnen.

Die Seiten und Umfänge aller regelmäßigen Vielecke gleicher Eckenzahl hängen nur vom Radius r (Durchmesser $2r$) ihres Umkreises, ihre Flächen nur von r^2 ab. In Abb. 179 sind die Verhältnisse $y = \frac{u_n}{2r}$ und $y = \frac{f_n}{r^2}$ regelmäßiger n-Ecke in Abhängigkeit von der Eckenzahl n für $n = 4, 6, 8, 10, 12$ zeichnerisch dargestellt.

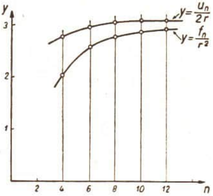


Abb. 179

Aufgaben

I. Das regelmäßige Sechseck

1. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck von der Seite $s_6 = 3$ cm!
Anleitung: Zeichne ein Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Sechsecks und a) lege dieses unter Beibehaltung der Spitze (Symmetriezentrum!) sechsmal aneinander, b) drehe dieses sechsmal um 60° um das Symmetriezentrum O (Abb. 170 und 171)!

2. Um ein regelmäßiges Sechseck von der Seite s_6 ist der Umkreis zu zeichnen!

3. Einem Kreis vom Radius $r = 3$ cm ist ein regelmäßiges Sechseck einzubeschreiben!

4. Berechne **a)** den Zentriwinkel φ_6, **b)** die Innenwinkel α_6 eines regelmäßigen Sechsecks!

5. Wie groß ist die Summe der Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks?

6. Einem Kreis vom Radius $r = 3$ cm ist ein regelmäßiges Sechseck **a)** einzubeschreiben (Ineck des Kreises, regelmäßiges Sehnensechseck), **b)** umzubeschreiben (Umeck des Kreises, regelmäßiges Tangentensechseck)! Wie liegen Ineck und zugehöriges Umeck zueinander? Wie groß sind die Seiten der regelmäßigen Sechsecke? (Abb. 180.)

7. Wie groß sind die Stücke der Bestimmungsdreiecke des einem Kreis mit dem Radius r **a)** einbeschriebenen, **b)** umbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks? Wie groß sind die Höhen?

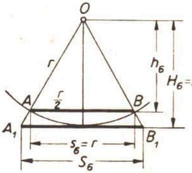


Abb. 180

8. Warum liegen einbeschriebenes und zugehöriges umbeschriebenes Sechseck der Aufgaben 6 und 7 ähnlich zueinander? Welches sind die Ähnlichkeitsstrahlen? Welches ist der Ähnlichkeitspunkt? Wie groß ist das Ähnlichkeitsverhältnis? Durch welche geometrische Transformation entsteht das Ineck aus dem Umeck und umgekehrt? Wie groß sind die Maßstäbe der Ähnlichkeitstransformationen?

9. Zeichne in einen Kreis mit dem Radius r ein regelmäßiges **a)** Sechseck, **b)** Dreieck, **c)** Zwölfeck, **d)** 24-Eck (Abb. 172)!

10. Berechne **a)** die Zentriwinkel, **b)** die Innenwinkel der regelmäßigen n-Ecke aus Aufgabe 9!

11. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges **a)** Sechseck, **b)** Dreieck, **c)** Zwölfeck umzubeschreiben! Durch welche geometrischen Transformationen entstehen die Umecke aus den zugehörigen Inecken des Kreises? Wie groß sind die Maßstäbe der Transformationen?

12. In der Technik benutzt man bei Sechskantstählen und Sechskantmuttern für das Verhältnis zwischen Schlüsselweite s und Eckenmaß e die folgenden Formeln (Abb. 65): Schlüsselweite gleich Eckenmaß mal 0,866, $s = 0{,}866\,e$, und Eckenmaß gleich Schlüsselweite durch 0,866, $e = \frac{s}{0{,}866}$ oder $e = 1{,}155\,s$. Begründe diese Formeln!

13. Zeichne in Kreise von 50 mm, 80 mm, 120 mm Durchmesser je ein regelmäßiges Sechseck! Berechne nach den Formeln der Aufgabe 12 die Schlüsselweite s und aus diesen wieder die Eckenmaße e! Vergleiche die errechneten Werte mit den Maßen der Zeichnungen!

II. Das regelmäßige Viereck

14. Zeichne ein regelmäßiges Viereck von der Seite $s_4 = 4$ cm (Abb. 173)!

15. Um ein regelmäßiges Viereck von der Seite s_4 ist der Umkreis zu zeichnen!

16. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges Viereck einzubeschreiben! Stelle die Viereckseite s_4 als Funktion des Radius r geometrisch dar ($y = s_4$; $x = r$)!

17. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges Viereck umzubeschreiben. Berechne und zeichne die Seite des umbeschriebenen Quadrats! Stelle die Viereckseite S_4 als Funktion des Radius r in einem rechtwinkligen Achsenkreuz zeichnerisch dar!

18. Warum liegen einbeschriebenes und zugehöriges umbeschriebenes Quadrat eines Kreises ähnlich? Welches sind die Ähnlichkeitsstrahlen? Welches ist der Ähnlichkeitspunkt? Wie groß ist das Ähnlichkeitsverhältnis? Durch welche geometrische Transformation entstehen beide auseinander? Welches ist der Maßstab der Transformation?

19. Wie verhalten sich **a)** die Umfänge, **b)** die Flächeninhalte der einem Kreis mit dem Radius r um- und einbeschriebenen regelmäßigen Vierecke und Sechsecke?

20. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges **a)** Viereck, **b)** Achteck, **c)** Sechzehneck einbeschrieben. Wie groß sind die Zentriwinkel und die Innenwinkel der Vielecke (Abb. 174)?

21. Berechne die Zentriwinkel eines einem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen **a)** Dreiecks, **b)** Vierecks, **c)** Sechsecks, **d)** Achtecks, **e)** Zwölfecks, **f)** 16-Ecks!

22. Ist jedes einem Kreis einbeschriebene Dreieck **a)** mit gleichen Seiten, **b)** mit gleichen Winkeln ein regelmäßiges Dreieck? Begründung (Symmetrieverhältnisse)!

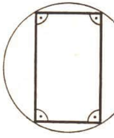


Abb. 181

23. Ist jedes einem Kreis einbeschriebene Viereck **a)** mit gleichen Seiten, **b)** mit gleichen Winkeln ein regelmäßiges Viereck (vgl. Abb. 181)? Begründung (Symmetrieverhältnisse)!

24. Ist jedes einem Kreis umbeschriebene Dreieck **a)** mit gleichen Seiten, **b)** mit gleichen Winkeln ein regelmäßiges Dreieck? Begründung!

25. Ist jedes einem Kreis umbeschriebene Viereck **a)** mit gleichen Seiten, **b)** mit gleichen Winkeln ein regelmäßiges Viereck (vgl. Abb. 182)? Begründung!

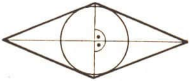


Abb. 182

III. Das regelmäßige Zehneck

26. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges Zehneck einzubeschreiben! Wie groß ist die Seite des regelmäßigen Zehnecks? Stelle die Zehneckseite s_{10} als Funktion von r in einem rechtwinkligen Achsenkreuz zeichnerisch dar! (Vgl. Abb. 175 und 176.)

27. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges **a)** Fünfeck, **b)** Zehneck, **c)** 20-Eck einzubeschreiben. Wie groß sind die Zentriwinkel der Vielecke?

IV. Das regelmäßige Fünfzehneck

28. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges Fünfzehneck einzubeschreiben (Abb. 176)!

29. Wie kann man in einen Kreis ein regelmäßiges **a)** 51-Eck, **b)** 85-Eck einbeschreiben? (Nur algebraisch!)

Anleitung: a) $\frac{1}{6} - \frac{5}{34} = \frac{1}{51}$ b) $\frac{1}{10} - \frac{3}{34} = \frac{1}{85}$

V. Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke mit dem Winkelmesser

30. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges **a)** Neuneck, **b)** Achtzehneck einzubeschreiben!

31. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges **a)** Siebeneck, **b)** Elfeck, **c)** Dreizehneck einzubeschreiben!

VI. Kreisteilung

32. Wie groß sind die Seiten, Umfänge und Flächeninhalte der einem Kreis mit dem Radius r einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecke?

33. Wie groß sind die Seiten, Umfänge und Flächeninhalte der einem Kreis mit dem Radius r einbeschriebenen regelmäßigen **a)** Zwölfecke, **b)** Dreiecke? (Vgl. Abb. 177.)

34. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges **a)** Viereck, **b)** Achteck einzubeschreiben. Wie groß sind Seite, Umfang und Flächeninhalt der Vielecke? (Vgl. Abb. 178.)

35. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges Zehneck einzubeschreiben! Wie groß sind Seite, Umfang und Flächeninhalt des Zehnecks?

36. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges n-Eck mit der Seite s_n einbeschrieben. Läßt sich aus r und s_n die Seite s_{2n} des einbeschriebenen $2n$-Ecks berechnen? Welche Formel ergibt sich für s_{2n} (Abb. 183)?

37. Berechne nach der Formel für s_{2n} die Seiten des einem Kreis mit dem Radius r einbeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks, 24-Ecks, 48-Ecks (auf 3 Stellen genau)!

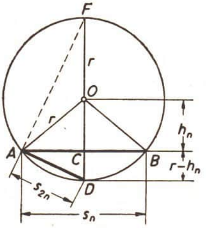


Abb. 183

31. Der Kreis

a) Ähnlichkeitslage von Kreisen

Zwei Kreise von verschiedenen Radien r_1 und r_2 liegen stets ähnlich. Ihre Flächeninhalte verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken, z. B. wie die Quadrate ihrer Radien. Es ist also

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{oder} \quad \frac{F_1}{r_1^2} = \frac{F_2}{r_2^2}.$$

Diese Verhältnisgleichung gilt für alle Kreise, es ist $\frac{F_1}{r_1^2} = \frac{F_2}{r_2^2} = \cdots = \frac{F}{r^2}$.

Der Verhältnisfaktor $\frac{F}{r^2}$ hat für alle Kreise denselben Zahlenwert. Man nennt ihn π.

Zur Berechnung der Zahl π ist die Bestimmung des Kreisinhalts F notwendig.

b) Bestimmung des Kreisinhalts durch Eingrenzung

1. Eingrenzung des Kreisinhalts mit regelmäßigen Vielecken

Wird einem Kreis mit dem Radius r ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben, so ist der Flächeninhalt des Zwölfecks $f_{12} = 3r^2$. Wird demselben Kreis ein regelmäßiges Viereck umbeschrieben, so ist der Flächeninhalt des Vierecks $F_4 = 4r^2$ (Abb. 184). Zwischen beiden Werten liegt der Flächeninhalt F des Kreises. Es ist

$$3r^2 < F < 4r^2$$

oder $$3 < \frac{F}{r^2} < 4.$$

Es ist $$3 < \pi < 4.$$

π liegt zwischen den ganzen Zahlen 3 und 4.

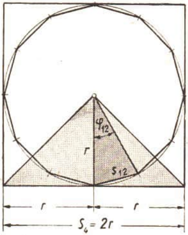


Abb. 184

2. Eingrenzung des Kreisinhalts mit Parallelstreifen

Teilung eines Viertelkreises durch Parallelstreifen.

Wir zeichnen einen Viertelkreis vom Radius $r = 5$ cm auf Millimeterpapier und teilen ihn in n gleich breite parallele Streifen (Abb. 185). Jeder Streifen hat die Breite $\Delta x = \frac{r}{n}$ (lies: Delta x gleich ...)[1]). In Abb. 185 ist n gleich 5 gewählt, jeder Streifen hat also die Breite $\Delta x = 1$ cm.

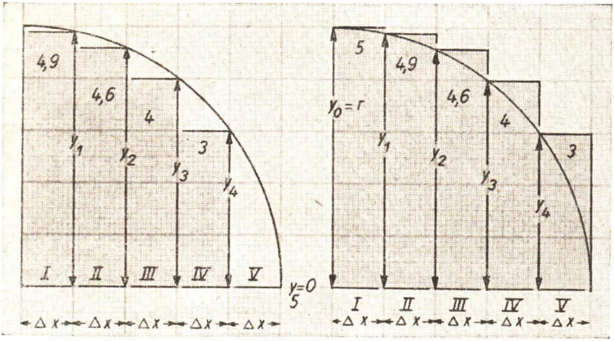


Abb. 185 a und b

---

1) Δ (groß Delta, gr.) bedeutet Differenz, Unterschied, endliche Änderung einer Größe.
Δx ist die Differenz zweier verschiedener Werte der Abszisse x, $\Delta x = (x_2 - x_1)$,
ΔF die Differenz zweier verschiedener Werte des Flächeninhalts F, $\Delta F = (F_2 - F_1)$,
ΔS die Differenz zweier verschiedener Werte der Summe S, $\Delta S = (S_2 - S_1)$.

Jeder Streifen des Viertelkreises wird nun durch das Rechteck, das gerade in den Streifen paßt (Innenrechteck des Streifens, Abb. 185 a), und durch das Rechteck, das gerade um den Streifen paßt (Außenrechteck des Streifens, Abb. 185 b), ersetzt.

Bilden wir für den Viertelkreis die Summe der Flächeninhalte aller Innenrechtecke (Untersumme S_i) und die Summe der Flächeninhalte aller Außenrechtecke (Obersumme S_a), so liefern die vierfachen Werte $F_i = 4\,S_i$ und $F_a = 4\,S_a$ eine **untere und eine obere Schranke für den Flächeninhalt F des Vollkreises.**

$$S_i < \frac{F}{4} < S_a,$$

$$4S_i < F < 4S_a,$$

$$F_i < F < F_a.$$

Auszählung der Flächeninhalte der Parallelstreifen für $n = 5$.

In Abb. 185 wird die Millimeterteilung zur Flächeninhaltsbestimmung benutzt, die Flächeninhalte der Streifenrechtecke werden ausgezählt. Da die Breitseiten der Rechtecke in allen Streifen gleich 1 cm sind, geben die Maßzahlen der Höhen — y_1, y_2, y_3, y_4 und $y_5 = 0$ für die Innenrechtecke, $y_0 = r$, y_1, y_2, y_3, y_4 für die Außenrechtecke — die Werte der Rechteckflächeninhalte in cm² an.

Für die fünf Parallelstreifen des Viertelkreises (Abb. 185 a und 185 b) ist

die Summe der Flächeninhalte der Innenrechtecke $S_i = 16{,}5$ cm² (Untersumme),

die Summe der Flächeninhalte der Außenrechtecke $S_a = 21{,}5$ cm² (Obersumme).

Aus S_i und S_a ergibt sich für den Flächeninhalt F des Vollkreises
als untere Schranke $F_i = 4\,S_i = 66$ cm², als obere Schranke $F_a = 4 S_a = 86$ cm².

Nun ist $$F_i < F < F_a,$$

also ist $$\frac{F_i}{r^2} < \frac{F}{r^2} < \frac{F_a}{r^2}.$$ Durch Einsetzen der Zahlenwerte

von F_i, F_a und r erhalten wir für $\frac{F}{r^2}$ die Eingrenzung

$$2{,}64 < \frac{F}{r^2} < 3{,}44 \qquad \text{(dritte Stelle unsicher).}$$

Erstes Ergebnis der Kreiseingrenzung: π liegt zwischen 2,6 und 3,4.

Das arithmetische Mittel beider Zahlenschranken liefert einen ersten Näherungswert für den Proportionalitätsfaktor π. $\pi \approx \frac{2{,}6 + 3{,}4}{2} = 3{,}0$.

Wir erhalten als **ersten Näherungswert für π** (auf 1 Stelle genau): **$\pi = 3$.**

Für diesen ersten Näherungswert werden die Streifen des Viertelkreises durch 5 parallelliegende, einbeschriebene Trapeze von 1 cm Breite, der Vollkreis wird durch ein einbeschriebenes unregelmäßiges 20-Eck ersetzt.

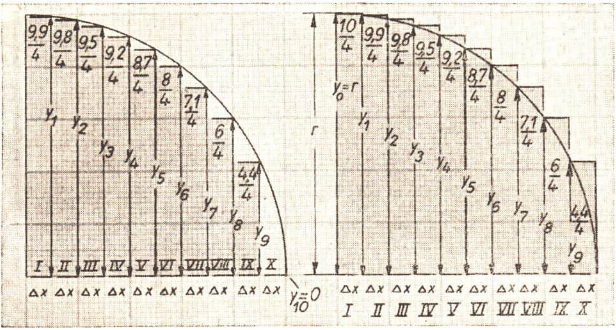


Abb. 186 a und b

Auszählung der Flächeninhalte der Parallelstreifen für $n = 10$.

Zur Gewinnung einer verbesserten Eingrenzung für den Kreisinhalt teilen wir den Viertelkreis vom Radius $r = 5$ cm in 10 gleich breite Streifen, wir machen $n = 10$. Jeder Streifen hat jetzt die Breite $\Delta x = 0{,}5$ cm.

Für die zehn Parallelstreifen des Viertelkreises (Abb. 186a und b) ist

die Summe der Flächeninhalte der Innenrechtecke $S_i = \frac{72{,}6}{4}$ cm² (Untersumme),

die Summe der Flächeninhalte der Außenrechtecke $S_a = \frac{82{,}6}{4}$ cm² (Obersumme).

Beide Summen unterscheiden sich um den Inhalt des größten Außenrechtecks. Es ist

$\Delta S = S_a - S_i = \Delta x \cdot y_0 = \frac{r \cdot r}{n} = \frac{r^2}{n}$, im vorliegenden Zahlenfall ist $\Delta S = \frac{10}{4}$ cm².

Für den Flächeninhalt F des Vollkreises erhält man als untere Schranke $F_i = 4\,S_i = 72{,}6$ cm², als obere Schranke $F_a = 4 S_a = 82{,}6$ cm².

Es ist wiederum $F_i < F < F_a$,

also ist $\frac{F_i}{r^2} < \frac{F}{r^2} < \frac{F_a}{r^2}$. Durch Einsetzen der Zahlenwerte

von F_i, F_a und r erhalten wir $2{,}904 < \frac{F}{r^2} < 3{,}304$ (vierte Stelle unsicher).

Zweites Ergebnis der Kreiseingrenzung: π liegt zwischen 2,90 und 3,30.

Das arithmetische Mittel beider Zahlenschranken liefert einen zweiten verbesserten Näherungswert für π.

$$\pi \approx \frac{2{,}90 + 3{,}30}{2} = 3{,}10.$$

Zweiter verbesserter Näherungswert für π (auf 2 Stellen genau): $\pi = 3{,}1$.

Für den zweiten Näherungswert werden die Streifen des Viertelkreises durch 10 parallelliegende, einbeschriebene Trapeze von 0,5 cm Breite (Trapezannäherung), der Vollkreis durch ein einbeschriebenes, unregelmäßiges 40-Eck (Vielecksannäherung) ersetzt.

Fehlerabschätzung. Der Fehler, den wir bei dieser Art der Eingrenzung für den Flächeninhalt des Viertelkreises machen, ist in jedem Fall kleiner als der Unterschied $\Delta S = \frac{r^2}{n}$ der beiden Rechtecksummen. Für den Flächeninhalt des Vollkreises ist der Fehler ΔF kleiner als $4 \cdot \Delta S$, es ist $\Delta F < \frac{4r^2}{n}$.

Für einen Kreis mit festem Radius r ist der Fehler ΔF in seiner Größenordnung nur abhängig von dem gewählten Zahlenwert für n. Durch genügend große Wahl von n kann man den Fehler unter jeden geforderten Betrag herabsetzen und den Kreisinhalt mit jeder geforderten Genauigkeit eingrenzen.

Eingrenzung des Kreisinhalts mit Parallelstreifen für $n = 20$.

Für einen Kreis mit dem festen Radius $r = 5$ cm ist bei $n = 10$ die Auswertung der Kreiseingrenzung durch Zeichnung und Auszählung an der Grenze ihrer Genauigkeit angelangt. Für $n = 20$ wollen wir daher die Flächeninhalte berechnen. Die Breitseiten der Annäherungsrechtecke sind $\Delta x = \frac{r}{n} = \frac{r}{20}$, (Abb. 187), ihre Höhen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ sind nach dem Höhensatz auf 4 Stellen genau:

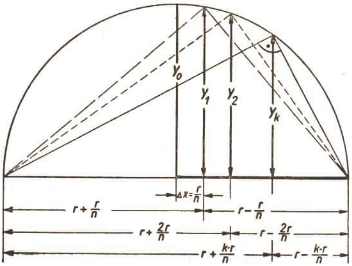


Abb. 187

$$y_0 = r \qquad = \frac{r}{20} \cdot 20,$$

$$y_1 = \sqrt{\left(r + \frac{r}{n}\right) \cdot \left(r - \frac{r}{n}\right)} = \frac{r}{n} \cdot \sqrt{(n+1) \cdot (n-1)} = \frac{r}{20}\sqrt{21 \cdot 19} = \frac{r}{20} \cdot 19{,}98\,,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$y_k = \frac{r}{n} \cdot \sqrt{(n+k) \cdot (n-k)} = \frac{r}{20} \cdot \sqrt{(20+k) \cdot (20-k)}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n),$$

$$y_n = \frac{r}{n} \cdot \sqrt{(n+n) \cdot (n-n)} = 0.$$

Aus Δx und y_k ergeben sich die Zahlenwerte für die Flächeninhalte der Annäherungsrechtecke (Aufg. 4).

Die bisherige Eingrenzung ersetzt die Parallelstreifen des Viertelkreises durch ihre Innen- und Außenrechtecke. Bei dieser Annäherung sind die Fehler für die erste Hälfte der Streifen gering, für die zweite Hälfte größer (siehe Abb. 186a und b). Zur Vermeidung der großen Fehler beschränken wir uns auf die erste Hälfte der Parallelstreifen und berechnen die Annäherung nicht für den Viertelkreis, sondern für den Kreisausschnitt AOC der Abb. 188. Wie groß ist der Kreisausschnitt AOC?

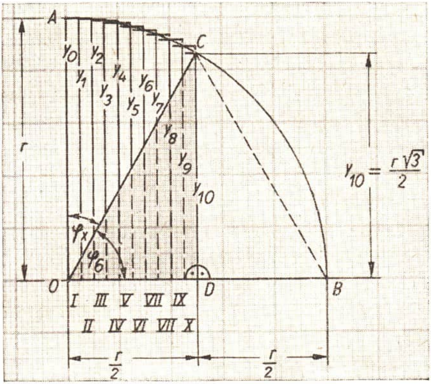


Abb. 188

Die Höhe $y_{10} = CD$ des 10. Streifens ist Mittelsenkrechte auf $OB = r$. $\triangle OBC$ ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite r, und Zentriwinkel COB ist $\varphi_6 = 60°$. Der Zentriwinkel φ_x des Kreisausschnitts AOC ist daher

$\varphi_x = \varphi_4 - \varphi_6$ oder $\frac{4R}{x} = \frac{4R}{4} - \frac{4R}{6} = \frac{4R}{12}$. Kreisausschnitt AOC ist ein Zwölftelkreis.

Für die Eingrenzung des Zwölftelkreises AOC gelten die folgenden Beziehungen:

Summe T_i der Innentrapeze = Summe S_i der 10 Innenrechtecke — Dreieck ODC,
Summe T_a der Außentrapeze = Summe S_a der 10 Außenrechtecke — Dreieck ODC.

Untersumme $T_i = S_i - \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{8}$, Obersumme $T_a = S_a - \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{8}$.

In Zahlenwerten $T_i = \frac{r^2}{400} \cdot (189{,}95 - 86{,}61)$, $T_a = \frac{r^2}{400} \cdot (192{,}63 - 86{,}61)$;

$$T_i = \frac{103{,}34\, r^2}{400}, \qquad T_a = \frac{106{,}02\, r^2}{400}.$$

Für den Flächeninhalt F des Vollkreises erhält man hieraus durch Multiplikation mit 12 als untere Schranke $F_i = 3{,}1002\, r^2$, als obere Schranke $F_a = 3{,}1806\, r^2$.

Es ist $F_i < F < F_a$,

also $\frac{F_i}{r^2} < \frac{F}{r^2} < \frac{F_a}{r^2}$. Durch Einsetzen der Werte von

F_i und F_a erhalten wir $3{,}1002 < \frac{F}{r^2} < 3{,}1806$ (fünfte Stelle unsicher).

Drittes Ergebnis der Kreiseingrenzung: π liegt zwischen 3,100 und 3,180.

Das arithmetische Mittel beider Zahlenschranken liefert einen dritten verbesserten Näherungswert für π. $\pi \approx \frac{3,100 + 3,180}{2} = 3,140.$

Dritter Näherungswert für π (auf 3 Stellen genau): $\pi = 3,14.$

Für den dritten Näherungswert werden die 10 Streifen des Zwölftelkreises durch einbeschriebene Trapeze (Trapezannäherung), der Vollkreis wird durch ein einbeschriebenes unregelmäßiges 120-Eck (Vielecksannäherung) ersetzt.

3. Die Zahl π

Durch das angegebene Eingrenzungsverfahren läßt sich die Zahl π des Kreises mit jeder geforderten Genauigkeit berechnen. π läßt sich nicht durch einen Bruch $\frac{p}{q}$, (p und q teilerfremde ganze Zahlen), darstellen, π ist keine rationale Zahl. **π ist eine Irrationalzahl, $\pi = 3,14\,159\ldots$.** Gute Näherungswerte für π sind auf 2 Dezimalstellen genau $\pi = 3,14$ und $\pi = 3\frac{1}{7}$, auf 4 Dezimalstellen $\pi = 3,1416$.

Der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r ist $F = \pi r^2$.

c) Der Kreisumfang

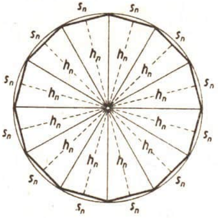


Abb. 189

Der Flächeninhalt eines Kreises läßt sich mit jeder geforderten Genauigkeit durch die Flächen einbeschriebener Vielecke von genügend hoher Eckenzahl ersetzen.

Wir ersetzen die Kreisfläche durch n aneinandergesetzte Bestimmungsdreiecke eines einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks (Grundseiten s_n, Höhen h_n, Abb. 189).

Die Fläche jedes Bestimmungsdreiecks ist $f = \frac{s_n \cdot h_n}{2}$,

die Fläche des n-Ecks ist also $f_n = n \cdot f = \frac{n \cdot s_n \cdot h_n}{2}$.

Hierin ist $n \cdot s_n$ der Umfang u_n des n-Ecks, also ist $f_n = \frac{1}{2} \cdot u_n \cdot h_n$.

Je größer wir n wählen, um so mehr nähert sich f_n dem Kreisinhalt F. Dabei nähern sich h_n immer mehr dem Kreisradius r und u_n immer mehr dem Kreisumfang u.

Der Kreisinhalt F ist also $F = \frac{1}{2} u r$

und der Kreisumfang $u = \frac{2F}{r} = \frac{2\pi r^2}{r} = 2\pi r.$

Der Umfang eines Kreises mit dem Radius r ist $u = 2\pi r$.

d) Kreissektor und Kreisbogen

Bei festem Radius r wird die Fläche eines Kreisausschnitts oder Kreissektors[1]) durch seinen Zentriwinkel φ bestimmt. Der Vollkreis ist ein Kreissektor mit dem

1) sector (lat.) heißt Ausschnitt. Man unterscheidet Kreissektor und Kugelsektor.

Zentriwinkel 360°, ein Halbkreis ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel 180°, ein Viertelkreis ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel 90° usw. (Abb. 190).

Die Flächen eines Kreissektors und des zugehörigen Vollkreises verhalten sich wie ihre Zentriwinkel.

$$\frac{F_s}{F} = \frac{\varphi}{360} \quad \text{oder} \quad \frac{F_s}{\pi r^2} = \frac{\varphi}{360}.$$

Hieraus läßt sich die Fläche F_s des Kreissektors berechnen, $F_s = \frac{\pi r^2 \varphi}{360}$.

Die Länge eines **Kreisbogens** b mit dem Zentriwinkel φ (Abb. 190) erhält man aus der Verhältnisgleichung

$$\frac{b}{u} = \frac{\varphi}{360} \quad \text{oder} \quad \frac{b}{2\pi r} = \frac{\varphi}{360}.$$

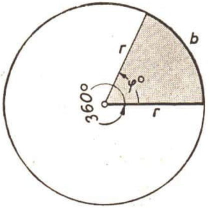


Abb. 190

Hieraus läßt sich die Länge des Kreisbogens b berechnen, $b = \frac{\pi r \varphi}{180}$.

Aus den Formeln für F_s und b folgt $\frac{F_s}{\pi r^2} = \frac{b}{2\pi r}$ oder $F_s = \frac{br}{2}$.

Der Flächeninhalt eines Kreissektors vom Radius r und dem Bogen b ist $F_s = \frac{br}{2}$.

Mit welcher Flächeninhaltsformel hat diese Formel Ähnlichkeit? Wie erklärt sich dies?

Aufgaben

I. Bestimmung des Kreisinhalts durch Eingrenzung

1. Einem Kreis mit dem Radius r ist **a)** ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben, **b)** ein regelmäßiges Viereck umbeschrieben. Wie groß sind die Flächeninhalte beider Vielecke? Zwischen welchen Schranken liegt der Flächeninhalt des Kreises? Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt der Proportionalitätsfaktor $\pi = \frac{F}{r^2}$ des Kreises?

2. Ein Viertelkreis vom Radius $r = 5$ cm ist auf Millimeterpapier gezeichnet. Er wird nach Abb. 185a und b in $n = 5$ gleich breite Parallelstreifen zerteilt, und jedem Streifen wird das Innenrechteck einbeschrieben und das Außenrechteck umbeschrieben. Die Flächeninhalte der Annäherungsrechtecke sind mit der Millimeterteilung auszuzählen.

a) Zwischen welchen Schranken liegt der Flächeninhalt S des Viertelkreises? Zwischen welchen Schranken liegt der Flächeninhalt F des Vollkreises? Zwischen welchen Zahlenwerten liegt der Verhältnisfaktor $\pi = \frac{F}{r^2}$ des Kreises?

b) Welchen ersten Näherungswert erhält man hieraus für π? Mit welcher Genauigkeit? Wodurch sind Viertelkreis und Vollkreis bei dieser Annäherung ersetzt?

c) Unterhalb welcher Schranke liegt der Fehler, den man bei dieser Annäherung für den Viertelkreis und für den Vollkreis macht?

3. Löse dieselbe Aufgabe für die Unterteilung $n = 10$ (Abb. 186a und b)!

4. Eingrenzung des Flächeninhalts eines Kreises mit dem Radius $r = 5$ cm durch gleich breite Parallelstreifen für die Unterteilung $n = 20$. (Abb. 187 und 188.)

a) Fehlerabschätzung. Unterhalb welcher Schranke liegt bei dieser Art der Eingrenzung der Fehler ΔF für den Vollkreis? Welche Beziehung besteht für ΔF für $n = 5, 10, 20$?

b) Berechne die Flächeninhalte der ersten 10 Annäherungsrechtecke des Viertelkreises!

c) Welche Zahlenwerte ergeben sich hieraus als untere und obere Schranke für die Eingrenzung der Flächeninhalte des Zwölftelkreises und des Vollkreises?

d) Welchen 3. Näherungswert erhalten wir daraus für die Zahl π des Kreises? Mit welcher Genauigkeit?

Anleitung zu b: Die Höhen der ersten 10 Annäherungsrechtecke sind auf 4 Stellen genau:

$$y_0 = \frac{r}{20} \cdot 20;\ y_1 = \frac{r}{20} \cdot 19{,}98;\ y_2 = \frac{r}{20} \cdot 19{,}90;\ y_3 = \frac{r}{20} \cdot 19{,}77;\ y_4 = \frac{r}{20} \cdot 19{,}60;\ y_5 = \frac{r}{20} \cdot 19{,}37;$$

$$y_6 = \frac{r}{20} \cdot 19{,}08;\ y_7 = \frac{r}{20}\ 18{,}74;\ y_8 = \frac{r}{20} \cdot 18{,}33;\ y_9 = \frac{r}{20} \cdot 17{,}86;\ y_{10} = \frac{r}{20} \cdot 17{,}32.$$

5. Untersuche die folgenden Näherungswerte der Zahl π auf ihre Güte:

a) auf 2 Dezimalstellen genau $\pi = 3{,}14$ (Rechenstab), $\pi = 3\frac{1}{7}$ und $\pi = 3\frac{10}{71}$ (Archimedes[1]));

b) auf 4 Dezimalstellen genau $\pi = 3{,}1416$ (Logarithmentafel)!

II. Der Flächeninhalt des Kreises

6. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius

a) $r = 1$ cm, **b)** $r = 2$ cm, **c)** $r = 5$ cm, **d)** $r = 10$ mm, **e)** $r = 7{,}5$ dm, **f)** $r = 12{,}5$ m?

7. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Einheitskreises ($r = 1$, gemessen in der gewählten Längeneinheit)?

8. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises vom Durchmesser

a) $d = 2$ cm, **b)** $d = 4$ cm, **c)** $d = 1$ cm, **d)** $d = 3$ dm, **e)** $d = 2$ m, **f)** $d = 10$ m, **g)** $d = 7{,}5$ m?

Anleitung: $F = \frac{\pi d^2}{4}$. Benutze zur Ausrechnung den Rechenstab!

9. „Quadratur des Kreises". Ein Einheitskreis ist in ein Quadrat zu verwandeln. Wie groß wird die Quadratseite, gemessen in der gewählten Längeneinheit?

10. Ein Kreis mit dem Radius r ist in ein Quadrat zu verwandeln. Wie groß wird die Quadratseite?

III. Der Kreisumfang

11. Wie groß ist der Umfang eines Kreises

a) mit dem Radius 1 cm, 2 cm, 5 cm, 7,5 cm, 1 dm, 1 m, 1 km, 5,5 mm?

b) mit dem Durchmesser 2 cm, 4 cm, 10 cm, 1 cm, 3 cm, 7,5 cm, 1 mm, 1 dm, 1 m?

Anleitung zu b: $u = \pi d$.

12. „Rektifikation des Kreises". Einen Kreis rektifizieren[2]) heißt: Eine Strecke bestimmen, deren Länge gleich dem Kreisumfang ist. Da π eine Irrationalzahl ist, ist die Rektifikation eines Kreises nur näherungsweise mit jeder gewünschten Genauigkeit möglich.

13. Ein Einheitskreis ist zu rektifizieren. Wie lang ist der Kreisbogen eines halben Einheitskreises, gemessen in der gewählten Längeneinheit?

14. Ein Kreis mit dem Radius **a)** 1 dm, **b)** 2 dm, **c)** 2 cm, **d)** 5 cm rollt auf einer Geraden. Wie lang ist die abgerollte Strecke bei einmaliger Umdrehung des Kreises?

---

1) Archimedes lebte von 287 bis 212 v. d. Ztr.; Syrakus.

2) rectus (lat.) heißt gerade, facere (lat.) machen; rektifizieren bedeutet geradestrecken.

15. Ein Kreis mit dem Radius $r_1 = 2$ cm rollt auf dem Umfang eines Kreises mit dem Radius $r_2 = 10$ cm. Wieviel volle Umdrehungen macht der rollende Kreis bei einem Umlauf um den großen Kreis? Erkläre die Zahnradübertragung in der Technik („Übersetzungsverhältnis")!

16. Stelle für einen Kreis geometrisch dar:

a) den Umfang u als Funktion des Radius r, **b)** den Flächeninhalt F als Funktion des Radius r, **c)** den Umfang u und **d)** den Flächeninhalt F als Funktionen des Durchmessers d!

Welche Kurven erhält man?

17. a) Zeichne in einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck, zerschneide den Kreis in 6 gleiche Sektoren (I, II, . . ., VI) und lege diese wie in Abb. 191a aneinander! Halbiere den linken äußeren Kreissektor I (Abb. 191a, Ia und Ib) und lege die abgeschnittene Hälfte Ib an Sektor VI an! Welche Figur entsteht aus dem Sechseck? Welchen Flächeninhalt hat sie? Wie unterscheidet sich der Flächeninhalt des zerschnittenen Sechsecks von dem des Kreises?

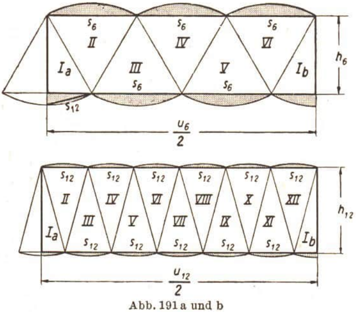


Abb. 191 a und b

b) Zeichne aus dem regelmäßigen Sechseck das dem Kreis einbeschriebene regelmäßige Zwölfeck und füge es in gleicher Weise wie das Sechseck aneinander (Abb. 191 b)! Welche Figur entsteht aus dem Zwölfeck? Welchen Flächeninhalt hat sie? Wie unterscheidet sich der Flächeninhalt des zerschnittenen Zwölfecks von dem des Kreises?

c) Gegen welche Werte streben bei fortgesetzter Teilung die Längsseiten der Rechtecke, ihre Höhen, ihre Flächeninhalte? Welche Beziehung ergibt sich daraus für den Kreis?

IV. Kreissektor und Kreisbogen

18. In einen Kreis mit dem Radius r sind die Zentriwinkel $\varphi = 180°$, $90°$, $60°$, $45°$, $30°$, $1°$ eingezeichnet.

a) Welchen Teil der ganzen Kreisfläche macht der zugehörige Kreissektor aus?

b) Welchen Teil des ganzen Kreisumfangs macht der zugehörige Kreisbogen aus?

19. Wie groß ist **1.** der Flächeninhalt eines Kreissektors, **2.** die Länge eines Kreisbogens vom Radius r und dem zugehörigen Zentriwinkel **a)** $\varphi = 180°$, **b)** $\varphi = 90°$, **c)** $\varphi = 60°$, **d)** $\varphi = 45°$, **e)** $\varphi = 30°$, **f)** $\varphi = 1°$, **g)** $\varphi = \alpha°$?

20. Wie groß sind im Einheitskreis **a)** der Flächeninhalt eines Kreissektors, **b)** die Länge eines Kreisbogens mit den zugehörigen Zentriwinkeln $\varphi = 360°$, $180°$, $90°$, $60°$, $30°$, $1°$, $\alpha°$?

21. Welche Zentriwinkel gehören zu den Kreisbögen **a)** $b = 2\pi$, **b)** $b = \pi$, **c)** $b = \frac{\pi}{2}$, **d)** $b = \frac{\pi}{3}$, **e)** $b = \frac{\pi}{4}$, **f)** $b = \frac{\pi}{6}$, **g)** $b = 1$, **h)** $b = 2$, **i)** $b = 3$ eines Einheitskreises?

22. Auf einer Geraden rollt eine Kreisscheibe vom Durchmesser $d = 10$ cm zu $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$ ihres Umfangs ab. Wie lang sind die abgerollten Kreisbögen?

V. Angewandte Aufgaben

23. Forme aus einem Draht von der Länge $u = 1{,}20$ m die nachfolgend genannten Figuren, berechne die Seitenlängen der Vielecke und ihre Flächeninhalte! Vergleiche die Inhalte der umfanggleichen Figuren miteinander! **a)** Gleichseitiges Dreieck, **b)** Quadrat, **c)** regelmäßiges Sechseck, **d)** regelmäßiges Achteck, **e)** Kreis.

24. Stelle den Umfang u und den Flächeninhalt F eines Kreises **a)** als Funktionen des Radius r, **b)** als Funktionen des Durchmessers d geometrisch dar! Zeichne die Kurven für u und die für F je in ein gemeinsames Achsenkreuz! Welche Kurven erhält man in jedem Achsenkreuz? $\pi = 3{,}14$.

25. a) Wieviel Meter länger würde der Erdäquator bei Vergrößerung des Erdradius um 1 m werden?

b) Wieviel Meter länger müßte der Erdradius gemacht werden, wenn der Erdäquator um 1 km länger werden soll?

c) Stelle für Aufgabe a die Verlängerung des Erdäquators als Funktion der Vergrößerung des Erdradius geometrisch dar!

d) Stelle für Aufgabe b die Vergrößerung des Erdradius als Funktion der geforderten Verlängerung des Erdäquators geometrisch dar!
Die Erde ist als Kugel anzunehmen ($r = 6\,370$ km). $\pi = 3{,}14$.

Anleitung: Lies aus den Kurven die Ergebnisse bei Vergrößerung des Erdradius um 1, 2, 3, . . ., 10 m bzw. bei Verlängerung des Erdäquators um 10, 20, 30, . . ., 100 m ab! Beide Funktionen sind unabhängig vom Kreisradius r!

26. Wir stellen uns vor, ein Mensch gehe auf dem Äquator um die Erde. Um wieviel ist der Weg, den sein Kopf in Augenhöhe zurücklegt, länger als der, den seine Füße beschreiben? Die Erde ist als Kugel anzunehmen, $r = 6\,370$ km; mittlere Entfernung des Kopfes in Augenhöhe von den Fußsohlen $x = 1{,}60$ m. $\pi = 3{,}14$.

27. Der Radius r eines Kreises wird um 1, 2, 3, . . ., 10 cm verlängert. Wie groß sind die Zunahmen des Kreisumfangs? Stelle diese Zunahmen als Kreise mit dem Radius x dar!

28. Aus Blechtafeln sollen Wellbleche geformt werden, deren Querschnitt sich aus aneinandergefügten Halbkreisen von gleichem Radius zusammensetzt (Trägerwellbleche).

a) Wie lang müssen die Blechtafeln genommen werden, wenn die Wellbleche 2 m lang werden sollen und der Durchmesser ihrer Halbkreise 4 cm (6 cm, 7 cm, 8 cm, 10 cm) beträgt?

b) Berechne die Länge x der Blechtafel, die man laufend für 1 m Wellblech braucht, wenn der Durchmesser der Halbwelle d cm beträgt! ($d = 4$ cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 10 cm.)

c) Welchen Einfluß hat der Durchmesser d der Halbwellen des Wellblechs auf die gesuchte Länge x der ebenen Blechtafel?

d) Vergleiche die für das Wellblech erforderliche Länge x der ebenen Blechtafel mit derjenigen, die erforderlich ist, um die Länge l des Wellblechs in einem Halbkreisbogen zu überspannen!

29. Zierformen, die in der Baukunst und im Kunsthandwerk verwendet werden, sind oft auf die Konstruktion regelmäßiger Vielecke und auf Kreiskonstruktionen zurückzuführen. Eine Zierform des romanischen Baustils ist der Dreipaß. Seine Konstruktion zeigt Abb. 192.

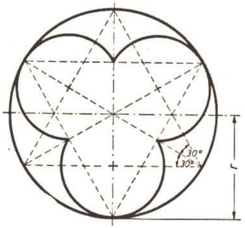


Abb. 192. Dreipaß

30. Ein in Zierfenstern oft verwendetes Muster ist das Fischblasenmuster Abb. 193.

a) Wieviel Meter Bleifassung sind in den Fenstern für die in Abb. 192 und 193 angegebenen Zierformen zu verwenden?

b) Wie groß ist der Flächeninhalt der einzelnen Felder? ($r = 50$ cm.)

31. Berechne die Bogenlängen und die Fläche eines normalen (nicht überhöhten) gotischen Spitzbogens mit den in Abb. 194 angegebenen Maßen!

32. Im Hoch- und Tiefbau werden kreisrunde Mauerteile häufig verwendet. Bei ihnen ist die äußere Länge der Mauer größer als die innere. Der Unterschied ist um so größer, je dicker die Mauer und je kleiner ihr Rundungsradius ist. Bei Verwendung normaler Mauerziegel der Abmessung 25 cm · 12 cm · 6,5 cm (DIN 105) kann eine Rundung der Mauer nur durch keilförmige Fugen erzielt werden. Die Stärke dieser Fugen soll an der Außenseite nicht größer als 2 cm, an der Innenseite nicht kleiner als 0,8 cm sein (DIN 1057). Welches ist der kleinste Rundungsradius, der mit Normalziegeln unter Einhaltung der obengenannten Fugenmaße erreicht werden kann? Mauerdicke 25 cm (1 Stein starke Wand).

Anleitung: Welche Verhältnisgleichungen bestehen, wenn die Ziegelsteine mit ihrer Längskante a) tangential, b) radial zur Rundung liegen?

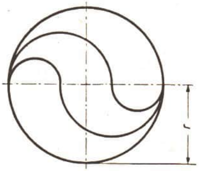


Abb. 193. Fischblase

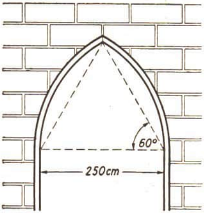


Abb. 194. Gotischer Spitzbogen

33. Um Mauern mit kleinerem Rundungsradius herzustellen, verwendet man Ringziegel, die außen und innen verschieden breit sind und sich runden Mauerteilen gut anpassen. Der Ringziegel Rz 2503 (DIN 1057) z. B. hat bei einer Länge von 25 cm eine äußere Breite von 16 cm und eine innere Breite von 10 cm.

a) Wie groß ist der Rundungsradius, der mit normalen Stoßfugen von 1 cm erreicht wird?

b) Wie groß ist der kleinste Rundungsradius, der ohne Überschreitung der zulässigen Fugenstärken (vgl. Aufg. 32) mit diesen Ziegeln gemauert werden kann?

34. Ein Handwerker berechnet den Umfang von Kreisscheiben nach einer Faustformel, indem er den Durchmesser der Kreisscheibe mit 3 multipliziert und zum erhaltenen Produkt 5% desselben addiert. Welchen Näherungswert von π benutzt er?

35. Wir sollen nachprüfen, ob ein Fahrradkilometerzähler bei einem wirksamen Raddurchmesser von 69 cm die zurückgelegte Wegstrecke richtig angibt, wenn das fünfzackige Rad des Zählers bei jeder Radumdrehung durch einen an einer Radspeiche angebrachten Dorn um eine Zacke weiter gedreht wird und 92 Umdrehungen des Zackenrades erforderlich sind, damit der Zähler 1 km mehr anzeigt.

a) Wie groß ist die bei einer Radumdrehung zurückgelegte Wegstrecke?

b) Wieviel m hat das Rad zurückgelegt bei 92 Umdrehungen des Zackenrades?

c) Wieviel Prozent beträgt der relative Fehler in der Anzeige des Kilometerzählers?

36. Ein Kraftwagen biegt an einer rechtwinkligen Straßenkreuzung nach rechts ein; das rechte Hinterrad beschreibt dabei einen Viertelkreis mit dem Radius 3,5 m. Der Kraftwagen hat eine Spurweite von 1,20 m.

a) Wie lang sind die von den Hinterrädern beim Einbiegen beschriebenen Kreisbögen?

b) Wie oft muß sich jedes der beiden Hinterräder auf seiner Kreisbahn drehen, wenn der Durchmesser der Hinterräder 60 cm beträgt?

c) Welchen Zweck hat das Differentialgetriebe der Hinterräder bei Hinterradantrieb eines Kraftwagens?

37. Welche Belastung kann **a)** eine Rundstahlstange von 30 mm Stärke, **b)** eine Rundstahlstange aus Flußstahl von 60 mm Durchmesser mit Sicherheit tragen, wenn die zulässige Druckbeanspruchung bei ruhender Last für *a* 1200 kp/cm², für *b* 1800 kp/cm² beträgt?

38. Eine Säule aus Grauguß hat einen Außendurchmesser von 120 mm und einen Innendurchmesser von 90 mm. Die von der Säule zu tragende Gesamtlast beträgt 72 000 kp.

a) Wie groß ist der Säulenquerschnitt?

b) Ist die der Säule zugemutete Druckbeanspruchung zulässig? (Zulässige Druckbeanspruchung für Grauguß ist 900 kp/cm².)

39. Das Verhältnis mehrerer Größen zueinander wird oft durch Kreissektoren geometrisch dargestellt. Benutze dieses Verfahren zur Veranschaulichung der Wärmebilanz eines Motors!

a) Für einen Zweitaktgasmotor sind die folgenden Verhältnisse ermittelt worden:

Im Kühlwasser werden	45%	der zugeführten Wärme abgeführt,
mit den Abgasen werden	30%	„ „ „ ausgestoßen,
in nutzbare mechanische Arbeit werden	25%	„ „ „ umgewandelt.

b) Stelle die Wärmebilanz des Motors durch Flächen von Vollkreisen dar!

40. Zur Überwölbung von Tür- und Fensteröffnungen werden in der Baukunst vielfach Bögen verwendet, z. B. Rundbogen, Spitzbogen, Segmentbogen (Flachbogen) und Korbbogen. Der Korbbogen ist aus 3 Kreisbögen zusammengesetzt und stellt eine Verbindung von Rund- und Segmentbogen dar. Er wächst aus dem Mauerwerk als Rundbogen heraus (Radius r, Abb. 195) und geht dann in einen flacheren Segmentbogen über (Radius R, in Abb. 195 ist $R = 3r$). Seine Stichhöhe h (Bogenhöhe) ist geringer als beim Rundbogen gleicher Spannweite s, aber größer als beim gleichweit gespannten Segmentbogen vom Radius R. Korbbögen haben äußerlich eine ellipsenähnliche Form, sind aber mit Ellipsen nicht zu verwechseln. Ihre Konstruktion ist mit Zirkel und Lineal ausführbar. Abb. 195 zeigt die Konstruktion eines Korbbogens.

a) Welche Bogenlänge hat die in Abb. 195 gezeichnete Korbbogenlinie?

b) Wie groß ist die von der Korbbogenlinie und ihrer Spannweite umschlossene Fläche? **c)** Wie ändern sich Form und Bogenlänge der Korbbogenlinie und die Fläche zwischen Korbbogenlinie und Spannweite, wenn s in 5 gleiche Teile geteilt und $r = \frac{s}{5}$ bzw. $R = 4r$ werden?

d) Leite aus Abb. 195 ein einfaches Verfahren zur Konstruktion von Korbbögen ab!

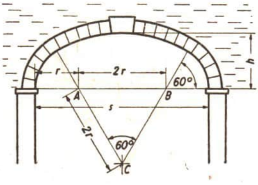


Abb. 195. Korbbogen

41. Die geradlinigen Bahnstrecken einer nach Normmaßen hergestellten Aschenlaufbahn sind beiderseitig durch Korbbögen geschlossen, die aus Kreisbögen mit den Radien $r = 24$ m und $R = 48$ m gebildet werden. Die Breite einer Bahn ist 1,25 m.

a) In welcher Entfernung voneinander sind die parallelen, geradlinigen Bahnstrecken anzulegen?

b) Wie lang müssen die parallelen Bahnstrecken werden, wenn die Gesamtlänge der inneren Laufbahn (in 30 cm Abstand von der Innenkante der Kampfbahn gemessen) nach internationaler Vereinbarung 400 m betragen soll?

c) Wie groß ist der Unterschied der inneren und äußeren Bahnlänge?

d) Wie groß ist der Flächeninhalt des von der Kampfbahn umschlossenen Feldes?

42. Die für Kanalisationen verwendeten Zementröhren haben einen eilinienförmigen inneren Querschnitt. Auch eine Eilinie ist aus Kreisbögen zusammengesetzt. Ihre Konstruktion ergibt sich aus Abb. 196. Der Oberteil der Eilinie ist ein Halbkreis um A mit dem Radius r. Daran schließen sich Kreisbögen mit dem Radius $3r$ an, deren Mittelpunkte B und C von der Symmetrieachse die Entfernung $2r$ haben und auf dem verlängerten Durchmesser des Halbkreises liegen. Der Mittelpunkt D des die Eilinie unten abschließenden Kreisbogens liegt auf der Symmetrieachse der Eilinie in der Entfernung $1\frac{1}{2}r$ unter dem Mittelpunkt A des Halbkreises; sein Radius ist $\frac{r}{2}$. Berechne auf 3 Stellen genau

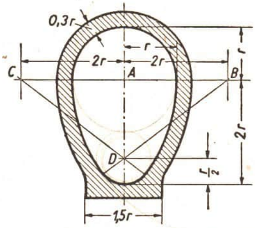


Abb. 196. Kanalisationsrohr mit eilinienförmigem Querschnitt

a) die Bogenlänge der Eilinie,

b) den Strömungsquerschnitt für drei genormte Größen (DIN 1 201):

1. lichte Breite $2r = 50$ cm, 2. lichte Breite $2r = 70$ cm, 3. lichte Breite $2r = 100$ cm!

Anleitung: Bestimme Winkel ABD durch Zeichnung und Ausmessung!

43. Triebräder von Lokomotiven. Die wichtigsten Lokomotivarten der Deutschen Reichsbahn haben die folgenden Triebraddurchmesser und Höchstgeschwindigkeiten:

Bezeichnung:	Triebraddurchmesser in m:	Höchstgeschwindigkeit in km/h:
2 C 1-Schnellzuglokomotive	2,00	120
2 C 2-Personenzuglokomotive	1,75	100
1 E-Güterzuglokomotive	1,40	70

a) Welche Strecke legt jede Lokomotive bei einer Triebradumdrehung zurück?

b) Wie oft drehen sich die Räder bei einer Fahrstrecke **1.** von der Länge einer Schiene (15 m, neuerdings 30 m), **2.** von 1000 m?

c) Rechne die Höchstgeschwindigkeit in m/s um und berechne, wie oft sich die Räder in einer Sekunde drehen müssen, um diese Geschwindigkeit innezuhalten!

44. Ein doppelgleisiger Eisenbahndamm beschreibt einen 540 m langen Kreisbogen mit einem Krümmungsradius von 600 m, bezogen auf die Mittelachse des Dammes.

a) Bestimme den zugehörigen Zentriwinkel durch Rechnung und Zeichnung!

b) Die Mittelachsen der beiden Gleise haben im Bogen einen Abstand von 1,90 m von der Mittelachse des Dammes. Um wieviel ist der Bogen des Außengleises länger als der des Innengleises?

45. Eine Autobahnstrecke ändert an einer Stelle ihre Richtung um 40°. Bei Planung der Strecke hat man zwischen den beiden Möglichkeiten zu entscheiden, den Krümmungsradius des Bogens entweder 800 m oder 1 200 m lang zu wählen (bezogen auf die Mittelachse der Bahn).

a) Bestimme für beide Werte des Radius die Bogenlängen durch Rechnung und Zeichnung!

b) Um wieviel ist in beiden Fällen die Außenkante der 12 m breiten Fahrbahn länger als die Innenkante?

46. Berechne den Umfang einer Riemenscheibe von

a) 25 cm, b) 40 cm, c) 50 cm, d) 240 cm Durchmesser!

47. Welchen Weg legt ein Punkt auf dem Rande einer Schmirgelscheibe von 35 cm Durchmesser bei einmaliger Umdrehung zurück? Welchen Weg in der Minute, wenn die Scheibe 850 Umdrehungen in der Minute macht?

48. Die Hinterräder eines Wagens haben 1,10 m Durchmesser, die Vorderräder 0,90 m Durchmesser. Die Eisenreifen zu den Rädern sind aus Flachstahl $50 \cdot 15$ mm.

a) Wie lang sind die Eisenbeschläge zuzuschneiden?

b) Wieviel Meter sind zum Beschlag der vier Räder erforderlich?

c) Wie groß ist das Gewicht des Beschlags, wenn 1 lfd. m des Flachstahls 5,89 kp wiegt?

49. Riemen- und Kettenübertragung. Bei einer Riemenübertragung hat die treibende Scheibe einen Durchmesser D, die getriebene einen Durchmesser d; der Achsabstand ist a.

a) Zeichne für die angegebenen Maße den Riemenantrieb in geeignetem Maßstab!

b) Berechne die Riemenlänge! (Entnimm fehlende Stücke der Zeichnung!)

c) Wie oft dreht sich die kleine Scheibe, wenn die große eine volle Umdrehung macht? Wie groß ist also die Übersetzung?

1. $D = 50$ cm, $d = 25$ cm, $a = 50$ cm; **2.** $D = 240$ cm, $d = 40$ cm, $a = 400$ cm.

50. Der Treibriemen einer Nähmaschine läuft über ein großes, durch eine Tretvorrichtung angetriebenes Treibrad und über ein kleines, vom Riemen angetriebenes Rad am Oberteil der Maschine. Jeder Umdrehung des kleinen Rades entspricht ein Stich der Maschine.

a) Miß an einer Nähmaschine die Durchmesser der beiden Räder und berechne daraus, wieviel Stiche die Maschine bei einer Umdrehung des Treibrades macht!

b) Miß außerdem den Abstand der Achsen, zeichne die Räder in geeignetem Maßstab und entnimm der Zeichnung die Riemenlänge!

51. Miß an einem Fahrrad folgende Größen: den Durchmesser des vollaufgepumpten Hinterrades, die Länge der Tretkurbel, die Durchmesser der beiden Kettenräder, den Achsabstand der beiden Kettenräder!

a) Welchen Weg legt das Fahrrad bei einer, bei zehn Umdrehungen des Hinterrades zurück? Wie oft dreht sich das Hinterrad auf einer Strecke von 100 m?

b) Zeichne die beiden Kettenräder in geeignetem Maßstab und stelle die Länge der Kette fest! Welche Übersetzung besteht zwischen den beiden Kettenrädern?

52. Seilscheiben. Der Durchmesser der Seilscheibe eines Förderturmes beträgt 6 m (5,8m; 5 m).

a) Wie oft dreht sie sich während einer Seilfahrt bei einer Teufe (Tiefe) von 408 m (575 m; 380 m)?

b) Wie oft dreht sie sich in einer Sekunde bei einer Fördergeschwindigkeit von 4 m/s (5,5 m/s; 7 m/s)?

53. Der Trog des Schiffshebewerkes Niederfinow im Land Brandenburg hängt an 256 Seilen, die zu je zweien über Seilscheiben von 3,5 m Durchmesser laufen.

a) Wie oft dreht sich eine Seilscheibe bei dem 35,71 m hohen Auf- oder Abstieg des Troges?

b) Um wieviel Grad dreht sie sich während einer Sekunde, wenn die ganze Bergfahrt 5 Min. dauert?

54. Kreisringe. Ergänze die folgende Tabelle für nahtlose Gasrohre (Angaben in mm)!

D	t	d	q	f
10	2			
13,25	2,25			
16,75	2,25			
21,25	2,75			

D	t	d	q	f
26,75	2,75			
33,5	3,25			
42,25	3,25			
48,25	3,5			

Erklärungen: D = Außendurchmesser, d = Innendurchmesser, t = Wanddicke, f = lichter Rohrquerschnitt, q = Wandquerschnitt

VI. Schätzen von Größenordnungen

55. Wieviel Menschen haben auf einer kreisrunden Fläche **a)** von 1 km, **b)** von 100 m Radius Platz, wenn man vier Personen auf 1 m² rechnet?

56. Der höchste Berg der Erde ist der Tschomolungma (Mount Everest) mit 8880 m, der höchste Berg Europas der Mont Blanc mit 4810 m. Wie hoch muß man bei einem Globus von einem Meter Durchmesser diese Berge machen, wenn das Relief nicht überhöht werden soll?

57. Drei Seen von **a)** 1 km, **b)** 4 km, **c)** 8 km Länge verlaufen in ihrer Richtung von Norden nach Süden. Wie groß ist die Herauswölbung der Seen in ihrer Mitte über der Ebene, die Nord- und Südufer verbindet?
Anleitung: Ist x die gemessene Länge des Sees in der Nord-Süd-Richtung, r der Erdradius (6370 km) und y die gesuchte Herauswölbung, so verhält sich $y : \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2} : 2r$ (Kreisbogen $\frac{x}{2}$ ersetzt durch Sehne $\frac{x}{2}$). Beachte die Zunahme der Werte für y! Stelle $y = f(x)$ zeichnerisch dar!

E. Geometrie der Lage

32. Harmonische Punkte und Strahlen

a) Das Teilverhältnis

1. Innere und äußere Teilung einer Strecke

Liegt auf einer Strecke AB ein Teilpunkt innerhalb der Grundpunkte A und B, so spricht man von **innerer Teilung der Strecke AB**, liegt er außerhalb der Grundpunkte A und B, so spricht man von **äußerer Teilung der Strecke AB** durch den Punkt. Zu jedem Teilpunkt gehören zwei **Teilabschnitte** (siehe Abb. 197 und 198). Die Teilabschnitte

der inneren Teilung der Strecke AB sind CA und CB,	der äußeren Teilung der Strecke AB DA und DB.

2. Das Teilverhältnis

Das Verhältnis der Teilabschnitte, die einem Punkt der Strecke AB zugeordnet sind, heißt **Teilverhältnis** der Strecke AB. Das Teilverhältnis der Strecke AB ist

bei innerer Teilung $\frac{CA}{CB}$,	bei äußerer Teilung $\frac{DA}{DB}$.

Vorzeichen des Teilverhältnisses. Jeder Teilabschnitt hat, vom Teilpunkt aus beginnend, eine bestimmte Richtung. Die Richtung einer Strecke wird analytisch

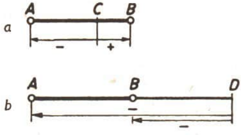


Abb. 197 a und b

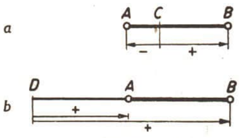


Abb. 198 a und b

durch ihr Vorzeichen gekennzeichnet. Entgegengesetzten Richtungen von Strecken entsprechen entgegengesetzte Vorzeichen. Abb. 197 und 198 zeigen, daß die Teilstrecken bei innerer Teilung von AB zueinander stets entgegengesetzte Richtungen, bei äußerer Teilung stets dieselbe Richtung haben. Das Teilverhältnis einer Strecke hat bei innerer Teilung negatives, bei äußerer Teilung positives Vorzeichen.

3. Verhalten des Teilverhältnisses bei Projektion

Zentralprojektion. Wir projizieren die innere und die äußere Teilung einer Strecke AB vom Punkt P aus auf eine beliebige Gerade (Abb. 199 und 200). P ist das

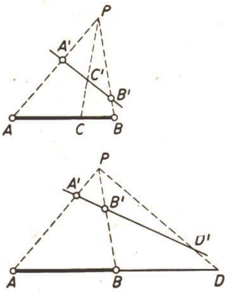


Abb. 199

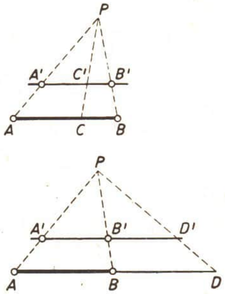


Abb. 200

Projektionszentrum, PA, PB, PC und PD sind die Projektionsstrahlen. Abb. 199 und 200 zeigen:

Bei Zentralprojektion wird das Teilverhältnis einer Strecke im allgemeinen verändert, nur bei parallelen Geraden bleibt es unverändert.

Die Erhaltung des Teilverhältnisses paralleler Geraden bei Zentralprojektion wird durch Anwendung des 2. Strahlensatzes auf Abb. 200 bewiesen.

Parallelprojektion. Rückt das Projektionszentrum P der Abb. 199 von AB immer weiter fort, so wird aus dem Büschel der Projektionsstrahlen eine Schar von Parallelen durch die Punkte A, B, C und D (Abb. 201). Die Zentralprojektion geht in Parallelprojektion über.

Bei Parallelprojektion bleibt das Teilverhältnis einer Strecke unverändert.

Der Beweis erfolgt durch Anwendung des 1. Strahlensatzes (Abb. 201).

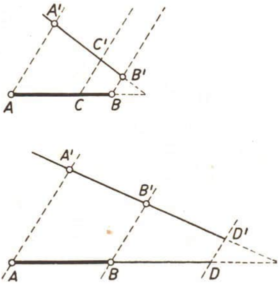


Abb. 201

b) Das Doppelverhältnis

1. Das Doppelverhältnis von 4 Punkten einer Punktreihe

Liegen auf einer Strecke AB zwei Teilpunkte C und D, so nennt man den Quotienten ihrer Teilverhältnisse das Doppelverhältnis der 4 Punkte. A und B bilden die **Grundpunkte**, C und D die **Teilpunkte der Strecke** (Abb. 202). Für das Doppelverhältnis der 4 Punkte $A, B; C, D$ schreibt man $$\boldsymbol{(A, B; C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}}.$$

Durch die Vorzeichen der Teilverhältnisse erhält das Doppelverhältnis ein bestimmtes Vorzeichen, und zwar positives Vorzeichen, wenn beide Teilpunkte gleichzeitig innerhalb oder außerhalb der Strecke AB liegen (Abb. 202a und b), negatives Vorzeichen, wenn ein Teilpunkt innerhalb, der andere aber außerhalb der Strecke AB liegt (Abb. 202c).

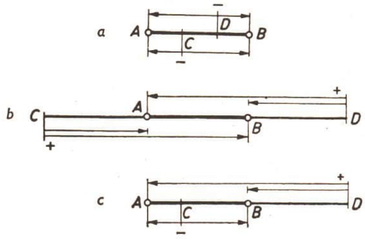


Abb. 202 a, b, c

2. Verhalten des Doppelverhältnisses bei Projektion

Die Punkte A, B und C, D in Abb. 202 sind 4 Punkte einer Punktreihe, sie bilden die Punktreihe $A, B; C, D$. Zur Punktreihe $A, B; C, D$ gehört das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$.

Projiziert man die Punktreihe $A, B; C, D$ vom Projektionszentrum P aus auf eine beliebige, zu AB nicht parallele Gerade (Abb. 203), so erhält man eine zweite Punktreihe $A', B'; C', D'$ mit dem Doppelverhältnis $(A', B'; C', D')$. In welcher Beziehung stehen die beiden Doppelverhältnisse $(A, B; C, D)$ und $(A' B'; C', D')$ zueinander? Ausmessung der Doppelverhältnisse der beiden Punktreihen ergibt

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

Bei Zentralprojektion bleibt das Doppelverhältnis von 4 Punkten einer Punktreihe unverändert.

Wir wollen diese wichtige Eigenschaft des Doppelverhältnisses beweisen. Wir ziehen durch B' die Parallele zu AD (Abb. 203). Bei Zentralprojektion bleiben die Teilverhältnisse paralleler Geraden unverändert; es ist

$$\frac{CA}{CB} = \frac{C''A''}{C''B'} \quad \text{und} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{D''A''}{D''B'}.$$

Die Division der Verhältnisgleichungen durcheinander ergibt

a) $(A, B; C, D) = (A'', B'; C'', D'')$.

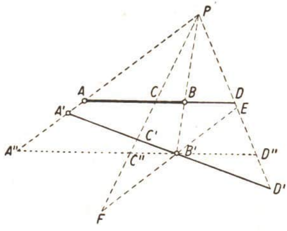


Abb.203

Wir ziehen weiterhin durch B' die Parallele zu PA. Dann ist nach den Strahlensätzen für das Strahlenbüschel

durch C'	durch D'	durch C''	durch D''
$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{A'P}{B'F}$,	$\frac{D'A'}{D'B'} = \frac{A'P}{B'E}$;	$\frac{C''A''}{C''B'} = \frac{A''P}{B'F}$,	$\frac{D''A''}{D''B'} = \frac{A''P}{B'E}$.

Die Division der Verhältnisgleichungen durcheinander ergibt

$$\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{B'E}{B'F}, \qquad \frac{C''A''}{C''B'} : \frac{D''A''}{D''B'} = \frac{B'E}{B'F}$$

oder $$(A', B'; C', D') = \frac{B'E}{B'F}, \qquad (A'', B'; C'', D') = \frac{B'E}{B'F}.$$

Also ist b) $(A', B'; C', D') = (A'', B'; C'', D'')$.

Aus a) und b) folgt $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

3. Das Doppelverhältnis von 4 Strahlen eines Büschels

Werden 4 Punkte $A, B; C, D$ einer Punktreihe von einem Projektionszentrum P aus projiziert, so entsteht ein Büschel von 4 Strahlen $P\ (A, B;\ C, D)$. P ist der Scheitel des Büschels, PA und PB sind die Grundstrahlen, PC und PD die Teilstrahlen des Büschels.

Unter dem Doppelverhältnis von 4 Strahlen eines Büschels versteht man das Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit irgendeiner Geraden, die nicht durch P geht.

Der Satz über das Doppelverhältnis von 4 Punkten einer Punktreihe läßt sich nach dieser Festsetzung auch folgendermaßen fassen:

Bei Zentralprojektion bleibt das Doppelverhältnis von 4 Strahlen eines Büschels unverändert.

c) Harmonische Teilung

1. Harmonische Teilung im bestimmten Verhältnis $\frac{m}{n}$

Die harmonische Punktreihe. Wir teilen eine Strecke AB innen und außen in demselben Verhältnis $\frac{3}{2}$ und bestimmen den Wert des Doppelverhältnisses:

$$(A, B; C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \left(-\frac{3}{2}\right) : \left(+\frac{3}{2}\right) = -1.$$

Wird eine Strecke innen und außen in demselben Verhältnis geteilt, so heißt die Strecke **harmonisch**[1]) geteilt. Es entsteht eine Punktreihe von 4 harmonischen Punkten oder eine **harmonische Punktreihe $A, B; C, D$.**

Der Wert des Doppelverhältnisses einer harmonischen Punktreihe ist gleich -1.

Allgemeiner Beweis (Abb. 204): Für jede harmonische Teilung ist

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} \qquad \text{oder} \qquad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = (A, B; C, D) = -1.$$

In Abb. 204 ist die Strecke AB harmonisch im Verhältnis $\frac{3}{2}$ geteilt. Wir vertauschen nun die Grundpunkte mit den Teilpunkten und berechnen die entstehenden Teilverhältnisse und das neue Doppelverhältnis. Es sind

1) harmonisch (gr.) heißt übereinstimmend, im Einklang miteinander. Hier bedeutet es innen und außen übereinstimmend oder in demselben Verhältnis geteilt.

die Teilverhältnisse

$$\frac{BC}{BD} = -\frac{1}{5} \text{ und } \frac{AC}{AD} = +\frac{1}{5},$$

das Doppelverhältnis ist

$$(C, D;\ B, A) = \frac{BC}{BD} : \frac{AC}{AD} = -1.$$

Die Grundpunkte A und B und die Teilpunkte C und D einer harmonischen Punktreihe heißen einander zugeordnete Punkte. Die Strecke AB wird durch die Teilpunkte C und D harmonisch geteilt, aber auch die Strecke CD durch die Grundpunkte B und A.

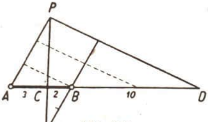


Abb. 204

Harmonische Punktreihe: Es ist

$$\mathbf{(A, B;\ C, D) = (C, D;\ B, A) = -1.}$$

Allgemeiner Beweis (Abb. 204): Die Strecke AB wird durch C und D harmonisch geteilt. Es ist $(A, B;\ C, D) = -1$ oder $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$.

Wir vertauschen die Innenglieder der Proportion und wechseln die Richtungen der Teilstrecken, d.h. aus CA wird $-AC$, aus CB wird $-BC$ usw. Wir erhalten

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD} \quad \text{oder} \quad \frac{BC}{BD} = -\frac{AC}{AD} \quad \text{oder} \quad (C, D;\ B, A) = -1.$$

Das harmonische Strahlenbüschel. Projiziert man eine harmonische Punktreihe $A, B;\ C, D$ vom Projektionszentrum P aus, so erhält man ein Büschel von 4 harmonischen Strahlen oder ein **harmonisches Strahlenbüschel $P\,(A, B;\ C, D)$.** Ein harmonisches Strahlenbüschel wird von jeder Geraden, die nicht durch den Scheitel des Büschels geht, in 4 harmonischen Punkten geschnitten. Der Beweis folgt aus der Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses von 4 Strahlen eines Büschels. Die Grundstrahlen PA und PB des harmonischen Büschels werden von den Teilstrahlen PC und PB harmonisch geteilt und umgekehrt. PA und PB einerseits und PC und PD andererseits heißen zugeordnete Strahlen des harmonischen Büschels $P\,(A, B;\ C, D)$.

Harmonisches Strahlenbüschel: Es ist $(A, B;\ C, D) = (C, D;\ B, A) = -1.$

2. Harmonische Teilung bei veränderlichem Teilverhältnis

Für die feste Grundstrecke AB einer harmonischen Punktreihe $A, B;\ C, D$ ist die Lage der Teilpunkte C und D vom gewählten Teilverhältnis abhängig und umgekehrt. Wir wollen die Lage der Teilpunkte C und D zu festen Grundpunkten A und B bei beweglichen Teilpunkten für eine harmonische Punktreihe und ein harmonisches Büschel untersuchen (Abb. 205).

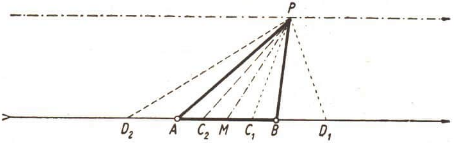


Abb. 205

Der innere Teilpunkt C einer harmonischen Punktreihe $A, B;\ C, D$ laufe vom festen Grundpunkt B über die Mitte M der Grundstrecke AB zum festen Grundpunkt A hin. Welche

Bewegung führt dabei der 4. zugeordnete harmonische Punkt D aus? Welche Teilverhältnisse gehören zu den einzelnen Teilpunktlagen?

Der innere Teilstrahl PC eines harmonischen Büschels $P(A,B;C,D)$ *drehe sich* vom Grundstrahl PB aus über den Mittelstrahl PM zum Grundstrahl PA hin. Welche *Bewegung* führt dabei der 4. zugeordnete harmonische Strahl PD aus? Welche Teilverhältnisse gehören zu den einzelnen Teilstrahllagen?

Rückt der innere Teilpunkt C einer harmonischen Punktreihe $A, B; C, D$ vom Grundpunkt B aus nach C_1, so wandert der zugehörige äußere Teilpunkt in entgegengesetzter Richtung von B aus nach D_1 (Abb. 205). Die zugehörigen Teilverhältnisse sind in ihrem absoluten Wert größer als 1, für C_1 und D_1 der Abb. 205 z. B. gleich $-\frac{3}{1}$ und $+\frac{3}{1}$. Rückt der innere Teilpunkt in die Mitte M der Grundstrecke, so wandert der äußere Teilpunkt auf AB ins Unendlich-Ferne, in den Fernpunkt von AB.

Dem Mittelpunkt der Grundstrecke AB einer harmonischen Punktreihe entspricht der Fernpunkt von AB als zugeordneter harmonischer Punkt.

Dem Mittelstrahl eines harmonischen Strahlenbüschels entspricht der Parallelstrahl zur Grundstrecke AB als zugeordneter harmonischer Strahl.

Das zur Mitte M zugehörige Teilverhältnis der Strecke AB ist $\frac{MA}{MB} = -1$.

Wandert bei äußerer Teilung der Grundstrecke AB der Teilpunkt D auf AB in den Fernpunkt, so werden die Teilstrecken DA und DB immer mehr einander gleich; das Teilverhältnis $\frac{DA}{DB}$ nähert sich in seinem Wert immer mehr $+1$, man schreibt

$$\frac{DA}{DB} \to +1 \left(\text{lies: } \frac{DA}{DB} \text{ strebt gegen } +1\right).$$

Rückt der innere Teilpunkt von M aus weiter zum Grundpunkt A hin, so wandert der äußere Teilpunkt von der entgegengesetzten Seite herankommend auf denselben Grundpunkt A zu. Die zugehörigen Teilverhältnisse sind in ihrem absoluten Wert kleiner als 1, für C_2 und D_2 in Abb. 205 z. B. gleich $-\frac{1}{3}$ und $+\frac{1}{3}$.

3. Harmonische Teilung im Dreieck (Abb. 206)

Zieht man in einem Dreieck ABC die Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels (z. B. γ) und seines Nebenwinkels, so erhält man ein *harmonisches* Strahlenbüschel $C\ (A,B;H,K)$.

Beweis (Abb. 206): Der Satz behauptet, daß im Dreieck ABC durch die beiden Winkelhalbierenden CH und CK die Punktreihe $A,B;\ H,K$ eine *harmonische* Punktreihe und das Büschel $C\ (A,B;\ H,K)$ ein *harmonisches* Strahlenbüschel werden.

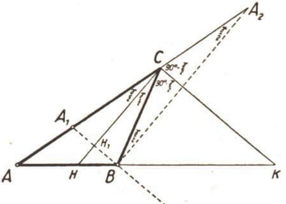


Abb. 206

Wir ziehen durch den Grundpunkt B der Punktreihe $A, B;\ H, K$ die Parallele zum äußeren Teilstrahl CK des Büschels. Wir machen also CK zum Parallelstrahl für die Punktreihe $A_1, B;\ H_1$, Fernpunkt. Soll das entstandene Büschel ein *harmonisches* Büschel sein, so muß der innere Teilstrahl CH_1 für diese Punktreihe *Mittelstrahl* sein. — Dieses ist der Fall, denn die Dreiecke BCH_1 und A_1CH_1 sind einander kongruent (*sww*). Dreieck A_1BC ist ein gleichschenkliges Dreieck und H_1 die Mitte von A_1B. Das Büschel $C\ (A, B; H, K)$ eines Dreiecks ist also ein harmonisches Strahlenbüschel.

Der Satz läßt sich auch folgendermaßen verallgemeinern:

Die Schenkel eines Dreieckswinkels und seine innere und äußere Winkelhalbierende bilden ein harmonisches Strahlenbüschel.

Zwei Strahlen eines Büschels und die Halbierungslinien ihrer Winkel bilden ein harmonisches Strahlenbüschel.

In welchem Verhältnis wird die Strecke AB eines Dreiecks durch die Teilpunkte H und K der Winkelhalbierenden harmonisch geteilt?
Wir ziehen in Abb. 206 noch BA_2 parallel HC. Dreieck CBA_2 ist auch gleichschenklig, denn seine Basiswinkel sind gleich. Es sind also $CA_1 = CB$ als Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks CBA_1 und $CA_2 = CB$ als Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks CBA_2. Nach dem ersten Strahlensatz verhält sich dann:
für den Strahlenausgangspunkt A und die Parallelen HC und BA_2

$\frac{HA}{HB} = \frac{CA}{CA_2} = \frac{CA}{CB}$, $\quad \frac{HA}{HB}$ ist aber das Teilverhältnis der inneren Teilung von AB,

für den Strahlenausgangspunkt A und die Parallelen KC und BA_1

$\frac{KA}{KB} = \frac{CA}{CA_1} = \frac{CA}{CB}$, $\quad \frac{KA}{KB}$ ist aber das Teilverhältnis der äußeren Teilung von AB.

Die Strecke AB des Dreiecks ist also harmonisch im **Verhältnis der anliegenden Seiten** geteilt. Wir haben den **Lehrsatz des Apollonius**[1]) gefunden:

Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite eines Dreiecks harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Welche Besonderheit besteht in der Lage der zugeordneten Strahlen dieses harmonischen Büschels eines Dreiecks zueinander?
Die zugeordneten Grundstrahlen CA und CB bilden miteinander den Dreieckswinkel γ, dessen Größe ändert sich mit den Seiten CA und CB. Der Winkel HCK zwischen den zugeordneten Teilstrahlen CH und CK des Büschels ist nach Abb. 206:

$$\sphericalangle HCK = \frac{\gamma}{2} + 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ.$$

Die zugeordneten Teilstrahlen CH und CK des harmonischen Büschels $C\ (A, B; H, K)$ eines Dreiecks stehen aufeinander senkrecht.

Der Kreis des Apollonius. Winkel HCK als rechter Winkel über der Hypotenuse HK ist Winkel im Halbkreis über HK (Satz des Thales). Die Spitze C eines Dreiecks ABC liegt also auf dem Kreis über HK, und alle Punkte C dieses Kreises haben von A und B dasselbe Entfernungsverhältnis $\frac{CA}{CB} = \frac{HA}{HB}$ bzw. $\frac{CA}{CB} = \frac{KA}{KB}$.

(Siehe Abb. 213 und Aufg. 19 bis 22.)

Der geometrische Ort für alle Punkte C, deren Entfernungen von zwei festen Punkten A und B ein gegebenes Verhältnis haben, ist der Kreis über der Strecke HK als Durchmesser. Hierbei teilen die Punkte H und K die Strecke AB harmonisch im gegebenen Verhältnis.

---

1) Apollonius von Perga (Pamphylien), neben Euklid und Archimedes der bedeutendste griechische Mathematiker, lebte um 210 v. d. Ztr. in Alexandria. Sein Hauptwerk behandelt die Kegelschnitte.

d) Vollständige geometrische Figuren

1. Geometrische Grundgebilde der Ebene

Die ebene Geometrie ist in ihrem Wesen Dreiecksgeometrie. Viele grundlegende Beziehungen und Sätze werden am Dreieck abgeleitet und dann durch Zusammensetzen von Dreiecken oder Zerlegen in Dreiecke auf andere Figuren – Vierecke, Parallelogramme, aber auch wieder Dreiecke – übertragen. Auch dort, wo man das Dreieck zuerst gar nicht vermutet, z. B. in der Lehre vom Kreis, tritt es in einer Sonderform auf. Wie kommt das Dreieck zu dieser beherrschenden Stellung in der Geometrie?

Strahlenbüschel und Punktreihe sind die geometrischen Grundgebilde der Ebene.

Träger eines Strahlenbüschels ist der Punkt P, durch den alle Strahlen des Büschels gehen (Abb. 207).

Träger einer Punktreihe ist die Gerade g, auf der alle Punkte der Reihe liegen (Abb. 207).

Aus Punkten und Geraden oder aus Strahlenbüscheln und Punktreihen werden abgegrenzte ebene Figuren, **vollständige geometrische Figuren** zusammengesetzt.

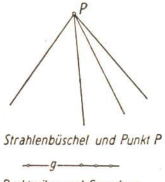


Abb. 207

2. Das vollständige Dreieck und Dreiseit

Das vollständige Dreieck. Aus einem Punkt oder einer Geraden gewinnt man keine abgegrenzte geometrische Figur, auch nicht aus zwei Punkten oder zwei Geraden. Bei drei verschiedenen Punkten A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, läßt sich von jedem Punkt ein Büschel von zwei Strahlen zu den beiden andern Punkten ziehen. Die Punkte heißen die Ecken des entstehenden vollständigen Dreiecks, ihre Verbindungsgeraden seine Seiten (Abb. 208).

Das vollständige Dreiseit. Bei drei verschiedenen Geraden a, b, c, die nicht durch einen Punkt gehen, lassen sich je zwei Gerade in einem gemeinsamen Punkt zum Schnitt bringen. Die Geraden heißen die Seiten des entstehenden vollständigen Dreiseits, ihre Schnittpunkte seine Ecken (Abb. 208).

Wir vergleichen Dreieck, vollständiges Dreieck und vollständiges Dreiseit miteinander (Abb. 208). Das vollständige Dreiseit ist trotz seiner anderen Entstehungsweise dieselbe Figur wie das vollständige Dreieck. **Dreieck und Dreiseit sind die einfachsten vollständigen Figuren der Ebene.** Das Dreieck, das vollständige Dreieck und das vollständige Dreiseit stimmen miteinander überein. Alle drei Figuren haben 3 Ecken und 3 Seiten.

Diese Übereinstimmung und die damit zusammenhängende Eigenschaft des Dreiecks als statisch fester Figur erklären die beherrschende Stellung des Dreiecks in der ebenen Geometrie.

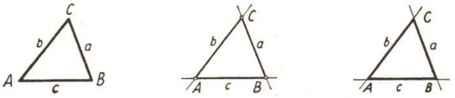


Abb. 208. Dreieck — vollständiges Dreieck — vollständiges Dreiseit

3. Das vollständige Viereck und Vierseit

Das vollständige Viereck. Bei vier verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, von denen je drei nicht eine Punktreihe bilden, läßt sich von jedem Punkt aus ein Büschel von drei Strahlen zu den drei andern Punkten ziehen. Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 werden die Ecken eines vollständigen Vierecks, ihre sämtlichen Verbindungsgeraden seine Seiten. Das vollständige Viereck hat 4 Ecken und 6 Seiten (Abb. 209).

Das vollständige Vierseit. Von vier verschiedenen Geraden a_1, a_2, a_3, a_4, von denen je drei nicht ein Büschel bilden, lassen sich je zwei in einem gemeinsamen Punkt zum Schnitt bringen. Die Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 werden die Seiten eines voll-

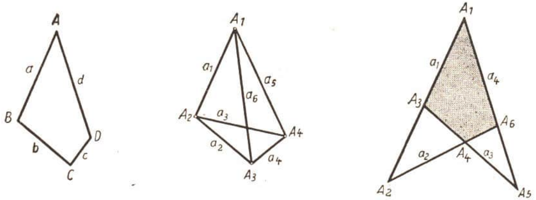


Abb. 209. Viereck — vollständiges Viereck — vollständiges Vierseit

ständigen Vierseits, ihre sämtlichen Schnittpunkte seine Ecken. Das vollständige Vierseit hat 4 Seiten und 6 Ecken (Abb. 209).

Abb. 209 zeigt zum Vergleich ein Viereck, ein vollständiges Viereck und ein vollständiges Vierseit. Viereck und Vierseit stimmen nicht miteinander überein, sie stehen aber in enger geometrischer Beziehung zueinander.

4. Dualität beim vollständigen Viereck und Vierseit

Das vollständige Vierseit. Ein vollständiges Vierseit (Abb. 210 b) können wir uns aus zwei Teilen zusammengesetzt denken: Der „Rumpf" des Vierseits ist das Viereck $A_1A_3A_4A_6$; an diesem sitzen, den „Beinen" vergleichbar, die beiden dreieckigen Ansätze $A_3A_2A_4$ und $A_6A_5A_4$. Die Ecke A_1 ist das „Haupt" des Vierseits.

Die vier Seiten des Vierseits sind a_1, a_2, a_3, a_4. Die Ecken des Vierseits gehören als Gegenpunkte paarweise zusammen. Das erste Gegenpunktpaar besteht aus der Hauptecke A_1 und ihrer Gegenecke A_4; A_2 und A_5 heißen die Außenecken, A_3 und A_6 die Nebenecken des Vierseits.

Die Verbindungsgeraden der zusammengehörigen Ecken heißen die drei **Diagonalen** des Vierseits, die Hauptdiagonale d_1, die Außendiagonale d_2 und die Nebendiagonale d_3. Die drei Diagonalen schneiden sich in den **Diagonalpunkten** H, I, K des Vierseits.

Das vollständige Viereck. Die vier Ecken des Vierecks sind A_1, A_2, A_3, A_4 (Abb. 210a). Die Seiten des Vierecks gehören als Gegenseiten paarweise zusammen, a_1 und a_4, a_2 und a_5, a_3 und a_6. Die Schnittpunkte zusammengehöriger Gegenseiten heißen die **Diagonalpunkte** D_1, D_2 und D_3, deren Verbindungslinien die **Diagonallinien** D_1D_2, D_1D_3 und D_2D_3 des vollständigen Vierecks.

Dualität. Wir stellen die entsprechenden Stücke der beiden Figuren zusammen.

Vollständiges Viereck:	Vollständiges Vierseit:
4 Ecken A_1, A_2, A_3, A_4,	4 Seiten a_1, a_2, a_3, a_4,
6 Seiten $a_1, a_4;\ a_2, a_5;\ a_3, a_6$,	6 Ecken $A_1, A_4;\ A_2, A_5;\ A_3, A_6$,
3 Diagonalpunkte D_1, D_2, D_3,	3 Diagonalen d_1, d_2, d_3,
3 Diagonallinien D_1D_2, D_1D_3, D_2D_3.	3 Diagonalpunkte H, J, K.

Welche wechselseitigen geometrischen Beziehungen bestehen zwischen entsprechenden geometrischen Gebilden des Vierecks und Vierseits?

Jeder Diagonalpunkt eines vollständigen Vierecks trägt 4 harmonische Strahlen: die durch den Diagonalpunkt gehenden Seiten und Diagonallinien.

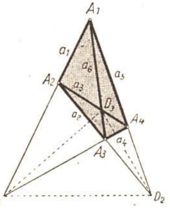
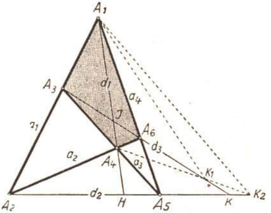


Abb. 210. a) Vollständiges Viereck

Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits trägt 4 harmonische Punkte: die auf der Diagonale liegenden Ecken und Diagonalpunkte.



b) Vollständiges Vierseit

Beweis für das vollständige Vierseit (indirekter Beweis; Abb. 210b): Wir nehmen an, auf der Diagonalen d_2 gehöre zu den drei Punkten $A_2, A_5; H$ als vierter zugeordneter harmonischer Punkt nicht K, sondern K_2. Dann wäre $A_4(A_2, A_5;\ H, K_2)$ ein harmonisches Strahlenbüschel, aber auch $A_4(A_3, A_6; I, K_1)$ müßte ein harmonisches Büschel sein [Scheitelbüschel zu $A_4(A_2, A_5;\ H, K_2)$].

Für den Scheitel A_1 müßten damit zu den drei gemeinsamen Strahlen A_1A_2, A_1H und A_1A_5 zwei verschiedene harmonische Büschel desselben Teilverhältnisses gehören, das Büschel $A_1(A_2, A_5; H, K_2)$ und das Büschel $A_1(A_3, A_6; I, K_1)$. Zu drei Strahlen eines harmonischen Büschels gibt es aber stets nur einen 4. harmonischen Strahl. Unsere Annahme ist also nicht möglich. Der 4. zugeordnete harmonische Punkt zu $A_2, A_5; H$ muß K sein, und K_1 und K_2 müssen im gemeinsamen Punkt K zusammenfallen; es muß $A_1K_1 \equiv A_1K_2 \equiv A_1K$ sein.

Die Diagonalen d_1, d_2 und d_3 des Vierseits tragen also die drei harmonischen Punktreihen $A_1, A_4;\ I, H,\ \ A_2, A_5;\ H, K$ und $A_3, A_6;\ I, K$.

Der Beweis für das vollständige Viereck ergibt sich durch Projektion der vier harmonischen Punkte jeder Diagonalen in Abb. 210b vom gegenüberliegenden Diagonalpunkt aus und Übertragung der entstehenden harmonischen Büschel von Abb. 210b auf Abb. 210a.

Ähnliche geometrische Wechselseitigkeitsbeziehungen sind in der Ebene auch noch beim Kreis, ferner in entsprechender Weise im Raum vorhanden; man nennt sie **Dualität.**

e) Maßgeometrie und Geometrie der Lage

Es gibt zwei Arten der Betrachtung und Behandlung geometrischer Gebilde. Bei der ersten Behandlungsart untersuchen wir die Größen der gegebenen geometrischen Figur im Zusammenhang mit ihrer Gestalt, z.B. die Summe der Winkel eines Dreiecks, die Größe der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, den Flächeninhalt eines Vierecks usw. Bei der zweiten Art sehen wir von der Größe der geometrischen Figuren ab, betrachten nur ihre Gestalt, vor allem aber die gegenseitige Lage der geometrischen Gebilde.

Die erste Behandlungsart umfaßt die **Maßgeometrie.** In ihr wird gemessen und gerechnet. Sie wendet die Rechenverfahren der Arithmetik auf geometrische Fragestellungen an. Sie erfaßt die geometrischen Probleme analytisch.

In der **Geometrie der Lage** wird nichts gemessen, es wird höchstens Gleichheit oder Ungleichheit festgestellt. Bei ihr liegt die Fragestellung in der Erörterung und Festlegung der Lage entsprechender Gebilde zueinander, in Wechselseitigkeitsbeziehungen der Lage, wie sie in den Beispielen dieses Abschnittes ihren Ausdruck finden. Die Bedeutung des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Punktreihe oder vier Strahlen eines Büschels besteht darin, daß es die Brücke von der Geometrie der Lage zur Maßgeometrie schlägt.

Aufgaben

I. Das Teilverhältnis

1. Teile eine Strecke AB **a)** in vier, **b)** in zehn gleiche Teile! Welche Teilverhältnisse (Vorzeichen und Zahlenwert) sind den einzelnen Teilpunkten zugeordnet?

2. Verlängere eine Strecke AB **a)** über B, **b)** über A einmal, zweimal, dreimal, viermal um sich selbst! Welche Teilverhältnisse (Vorzeichen und Zahlenwert) gehören zu den Endpunkten der Verlängerungen?

3. Zeichne die Teilpunkte einer Strecke AB für die folgenden Teilverhältnisse: $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{1}$, $+\frac{1}{3}$, $+\frac{3}{1}$, $-\frac{2}{3}$, $+\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{2}{1}$, $-\frac{1}{1}$!

II. Das Doppelverhältnis

4. Eine Strecke AB ist in den Verhältnissen $-\frac{1}{1}$ und $+\frac{2}{1}$ geteilt. Zeichne die Teilpunkte C und D, bestimme das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$.

5. Eine Strecke AB ist innen und außen in demselben Verhältnis $\frac{2}{1}$ zu teilen. Wie groß ist das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$?

6. Eine Strecke AB ist in den Verhältnissen **a)** $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{2}{1}$, **b)** $+\frac{1}{2}$ und $+\frac{2}{1}$ geteilt. Zeichne die Teilpunkte und bestimme die Doppelverhältnisse!

7. Welche Lage haben die Teilpunkte C und D einer Strecke AB zueinander, wenn das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$ gleich $+1$ ist?

8. Vertausche in Aufgabe 5 die Grundpunkte und die Teilpunkte miteinander und stelle den Wert des entstehenden Doppelverhältnisses fest! Ist $(A, B; C, D)$ gleich $(C, D; A, B)$?

III. Harmonische Teilung

9. Teile die Strecke AB harmonisch im Verhältnis a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{m}{n}$! Bestimme die Werte der Doppelverhältnisse!

10. Zu drei Punkten einer harmonischen Punktreihe ist der vierte zugeordnete harmonische Punkt zu finden (vgl. Abb. 211)!

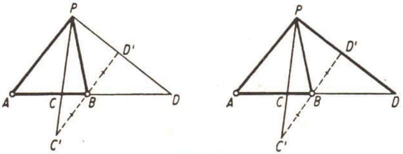


Abb. 211

11. Die Strecke AB ist harmonisch im Verhältnis $\frac{1}{2}$ geteilt. Vertausche die Grundpunkte mit den Teilpunkten und berechne die entstehenden Teilverhältnisse und das entstehende Doppelverhältnis (vgl. Abb. 204).

12. Gegeben sind drei Punkte E, F, G einer harmonischen Punktreihe. Zeichne den zugeordneten Punkt a) zu E, b) zu F, c) zu G!

 Anleitung zu Aufgabe c: Welches ist die Grundstrecke in Aufgabe c? Was für ein Punkt der harmonischen Punktreihe wird G? Wie liegt Teilpunkt G zur Grundstrecke EF? Wie muß der zugeordnete Teilpunkt H zur Grundstrecke EF liegen?
 Ausführung der Zeichnung: Lege die Parallele stets durch einen der Grundpunkte (Abb. 211).

13. Gegeben sind drei Strahlen PE, PF, PG eines harmonischen Büschels. Zeichne den zugeordneten Strahl zu a) PE, b) PF, c) PG!

14. Folgende Sätze sind zu begründen:

 a) Zu drei Punkten einer harmonischen Punktreihe gibt es nur einen vierten harmonischen Punkt (Abb. 211).

 b) Zu drei Strahlen eines harmonischen Büschels gibt es nur einen vierten harmonischen Strahl (Abb. 211).

 c) Schneiden vier Strahlen eines Büschels eine Gerade in vier harmonischen Punkten, so schneiden sie jede andere Gerade in vier harmonischen Punkten.

15. Wie läßt sich die Grundkonstruktion der harmonischen Teilung einer Strecke AB in Abb. 204 und 211 auch mit Hilfe der Sätze über die harmonische Punktreihe begründen?
 Anleitung: Durch B laufen zwei harmonische Punktreihen: $A, B; C, D$ und $D', C'; B$, Fernpunkt.

16. Bestimme auf der Seitenhalbierenden AM eines Dreiecks ABC den 4. harmonischen Punkt D zu den Grundpunkten A und M und zum Schwerpunkt S als innerem Teilpunkt! Wie liegen die Geraden CD und BD zu den Dreiecksseiten? Welche harmonischen Punktreihen und Büschel entstehen?

17. Wo liegt auf der Diagonalen BD eines Parallelogramms $ABCD$, deren Mitte G ist, der 4. harmonische Punkt zu den Grundpunkten B und D und dem Teilpunkt G? Welche harmonischen Punktreihen und Büschel entstehen (Abb. 215)?

18. Nebenbüschel und Scheitelbüschel. Beweise die folgenden beiden Sätze:

 a) Die Verlängerung eines Randstrahls eines harmonischen Büschels und die drei andern Strahlen bilden wiederum ein harmonisches Strahlenbüschel, ein Nebenbüschel zum ersten (Abb. 212a).

b) Ein Randstrahl eines harmonischen Büschels und die Verlängerungen der drei anderen Strahlen bilden wiederum ein harmonisches Strahlenbüschel, ein Scheitelbüschel zum ersten (Abb. 212 b). — Erkläre die Bezeichnungen „Randstrahl eines Büschels, Nebenbüschel, Scheitelbüschel“! Welche Winkel bilden entsprechende Strahlen beider Büschel miteinander?

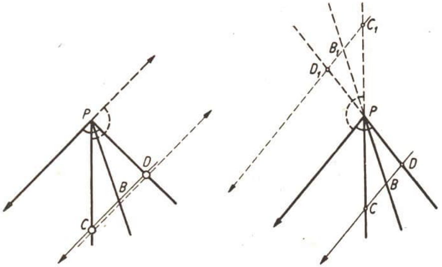


Abb. 212. a) Nebenbüschel, b) Scheitelbüschel

19. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Ziehe von C die Seitenhalbierende $CM = s_c$ und die Parallele zu AB! A, B; M, Fernpunkt ist eine harmonische Punktreihe und C (A, B; M, Fernpunkt) ein harmonisches Strahlenbüschel des Dreiecks. Beweis! Wie groß ist das Teilverhältnis?

20. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Ziehe von A die Seitenhalbierende AM (Schwerpunkt S) und verlängere AM um sich selbst bis D! Ziehe von C die Strahlen CS und CD! $A, M; S, D$ ist eine harmonische Punktreihe und $C(A, M; S, D)$ ein harmonisches Strahlenbüschel des Dreiecks. Beweis! Wie groß ist das Teilverhältnis?

21. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Ziehe von C die Winkelhalbierende CH des Dreieckswinkels γ und die Winkelhalbierende CK des Nebenwinkels $(180° - \gamma)$. $A, B; H, K$ ist eine harmonische Punktreihe und $C(A, B;\ H, K)$ ein harmonisches Strahlenbüschel des Dreiecks. Beweis! Wie groß ist das Teilverhältnis? Wie liegen die Teilstrahlen CH und CK zueinander?

22. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Teile die Grundstrecke AB durch die Teilpunkte H und K harmonisch im Verhältnis $b : a$ der anliegenden Seiten des Dreiecks. Welche Dreieckslinien sind die Teilstrahlen CH und CK des harmonischen Strahlenbüschels $C(A, B;\ H, K)$? Wie liegen die Teilstrahlen CH und CK zueinander?

23. Stehen die Teilstrahlen in den Aufgaben 19 und 20 im allgemeinen senkrecht aufeinander? In welchem Sonderfall? Welche andere Dreieckslinie ist dann gleichzeitig die Seitenhalbierende s_c des Dreiecks?

IV. Kreis des Apollonius

24. Gegeben ist die Strecke AB eines Dreiecks ABC. Wo liegen alle Punkte C des Dreiecks, deren Entfernungen von A und B das Verhältnis $\frac{5}{3}$ haben?

Anleitung (Abb. 213): 1. Zeichne zuerst zu AB mehrere Einzelpunkte $C_1, C_2, C_3, \ldots$ der geforderten Eigenschaft! Wähle dazu willkürlich Maßstäbe $m_1, m_2, m_3, \ldots$ und schlage mit $5m_1$ und $3m_1$, $5m_2$ und $3m_2$, $5m_3$ und $3m_3, \ldots$ um A und B Kreise! 2. Teile die Grundstrecke AB harmonisch im Verhältnis $\frac{5}{3}$, die Teilpunkte seien H und K, und zeichne über HK den Kreis des Apollonius!

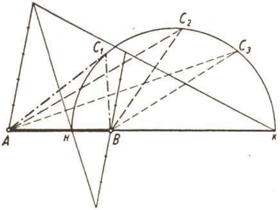


Abb. 213

25. Welche Gestalt nimmt der Kreis des Apollonius an, wenn das geforderte Seitenverhältnis $\frac{1}{1}$ ist? Welche Gestalt hat dann das Dreieck?

26. Drei Punkte A, B, C liegen in gerader Linie. Wo liegen alle Punkte, von denen aus die Strecken AB und BC unter gleichen Winkeln erscheinen? **a)** $AB \neq BC$, **b)** $AB = BC$.

Anleitung zu a: 1. Zeichne zuerst zu A, B, C mehrere Einzelpunkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ der geforderten Eigenschaft! Zeichne dazu auf durchsichtiges Papier beliebige Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ und ihre inneren Winkelhalbierenden und verschiebe die Winkel über den Punkten A, B und C so lange, bis jedesmal ihre Schenkel und die Winkelhalbierende durch A, C und B gehen! Die Scheitel $P_1, P_2, P_3, \ldots$ dieser Winkel sind Einzelpunkte der geforderten Eigenschaft.

2. Teile die Grundstrecke AC außen im Verhältnis $\frac{BA}{BC}$, äußerer Teilpunkt sei D! Zeichne über BD den Kreis des Apollonius!

Anleitung zu b: 1. Verfahre wie bei a. 2. B ist jetzt die Mitte der Grundstrecke AC. Wo liegt der äußere Teilpunkt D? In welche Linie artet der Kreis des Apollonius aus?

27. Zeichne ein Dreieck aus

a) $c, a:b, \beta$ **b)** $c, a:b, h_c$ **c)** $c, a:b, r$ **d)** $c, a:b, w_\gamma$ **e)** $c, a:b, \gamma$!

V. Das vollständige Viereck und Vierseit

28. Zeichne vollständige Vierseite, ihre Diagonalen und Diagonalpunkte (Abb. 210 b)! Zeichnungsanleitung: Zur zweckmäßigen Zeichnung eines Vierseits fängt man mit der Hauptecke A_1 an, zieht von ihr die beiden Außenseiten zu den Außenecken A_2 und A_5 und von diesen nach passender Wahl der Nebenecken A_3 und A_6 die noch fehlenden Nebenseiten.

29. Zeichne zu drei gegebenen Punkten $A, B; H$ einer Punktreihe nur mit Hilfe des Lineals den 4. harmonischen Punkt (Abb. 214 a)!

30. Zeichne zu drei gegebenen Strahlen eines Büschels nur mit Hilfe des Lineals den 4. harmonischen Strahl (Abb. 214 b)!

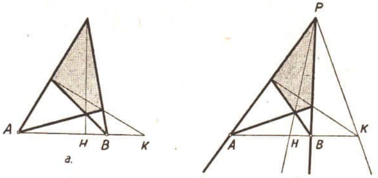


Abb. 214

31. Projiziert man das Parallelogramm $ABCD$ (Abb. 215) von einem Raumpunkt P aus auf eine gegen seine Fläche geneigte Bildebene ε, so erhält man bei passender Wahl von P und ε ein vollständiges Viereck bzw. Vierseit als Bild. Stelle für Parallelogramm und Viereck und für Parallelogramm und Vierseit die einander entsprechenden harmonischen Punktreihen und Strahlenbüschel nach Abb. 215 zusammen!

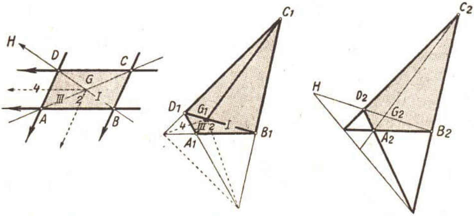


Abb. 215. Parallelogramm Viereck Vierseit

F. Abbildung durch Parallelprojektion

XII. Stereometrie und darstellende Geometrie

33. Parallelprojektion

Die **Stereometrie**[1]) beschäftigt sich mit räumlichen geometrischen Gebilden, mit Körpern. Da man sich Modelle von Raumgebilden nicht in allen Fällen schaffen kann, ist es notwendig, diese räumlichen Gegenstände auf eine Ebene abzubilden. Geometrische Gebilde mit drei Dimensionen müssen in einer Zeichenebene mit zwei Dimensionen dargestellt werden. Diese Aufgabe löst die **darstellende Geometrie.**

a) Abbildung von Körpern durch Projektion

1. Zentralprojektion

Jede durch Strahlen bewirkte Abbildung eines räumlichen oder ebenen Gegenstandes auf eine Zeichenebene heißt **Projektion** (vgl. Abschn. 27). Geschieht die Abbildung von einem Punkt O aus, so heißt die Projektionsart **Zentralprojektion.** O ist das **Projektionszentrum,** die Strahlen von O zu entsprechenden Punkten des Gegenstandes und seines Bildes sind die **Projektionsstrahlen.** Die Zeichenebene heißt **Bildebene oder Bildtafel** ε. Der dem **Raumpunkt** P entsprechende **Bildpunkt** wird mit P' bezeichnet. Zentralprojektion liegt z. B. beim Schattenwurf bei künstlicher Beleuchtung vor.

2. Parallelprojektion

Rückt das Projektionszentrum O vom abzubildenden Gegenstand immer weiter fort, so werden die Projektionsstrahlen schließlich einander parallel: Die Zentralprojektion geht in **Parallelprojektion** über. **Bei Parallelprojektion laufen alle Projektionsstrahlen zueinander parallel.** Parallelprojektion liegt z. B. beim Schattenwurf bei Sonnenbeleuchtung vor.

3. Grundeigenschaften der Abbildung durch Parallelprojektion

Bei Zentral- und Parallelprojektion werden **Punkte als Punkte, Gerade als Gerade und Strecken als Strecken** abgebildet, wenn die Geraden oder Strecken nicht zufällig in Richtung eines Projektionsstrahls verlaufen (vgl. Abb. 199, 200, 201).

Bei Abbildung durch Parallelprojektion bleiben parallele Gerade parallel (Abb. 216) **und die Teilverhältnisse von Strecken unverändert** (vgl. Abschn. 32).

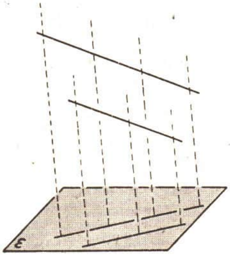


Abb. 216

---

1) stereos (gr.) heißt körperlich.

Liegt im Sonderfall eine ebene Figur F parallel zur Bildtafel ε, so liefert die Abbildung durch Parallelprojektion ein **kongruentes** Bild F' des Gegenstandes F (Abb. 217, Parallelverschiebung der Figur F im Raum! Vgl. Abschn. 27 und 28).

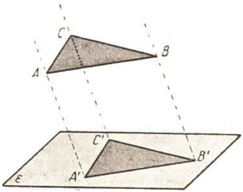


Abb. 217

4. Arten der Parallelprojektion

Nach dem Winkel φ, unter welchem die Projektionsstrahlen die Bildebene ε treffen, unterscheidet man

senkrechte Parallelprojektion, es ist $\varphi = 90°$ (Abb. 218),

und **schräge Parallelprojektion,** es ist $\varphi \neq 90°$ (Abb. 219).

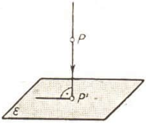


Abb. 218

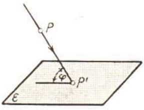


Abb. 219

b) Senkrechte Parallelprojektion, $\varphi = 90°$

1. Senkrechte Eintafelprojektion

Projiziert man einen räumlichen Gegenstand senkrecht auf eine Bildtafel ε, so erhält man eine **senkrechte Eintafelprojektion** des Gegenstandes als Bild. Die Bildebene ε nennt man dann auch **Grundebene** ε.

Je nach der Lage der Grundebene ε zum abzubildenden Körper unterscheidet man

Grundriß („Draufsicht"): die Bildebene ε liegt **waagerecht unter** dem Körper,
Aufriß („Vorderansicht"): die Bildebene ε liegt **lotrecht hinter** dem Körper
und **Seitenriß** („Seitenansicht"): die Bildebene ε liegt **lotrecht neben** dem Körper.

In Abb. 220 ist der Grundriß eines dreiseitigen Prismas oder eines Keils dargestellt. Die Schneide des Keils ist der Bildtafel zugekehrt und ihr parallel. Die sichtbaren Kanten des Bildes werden als Vollinien stark ausgezogen, die für den Beschauer unsichtbaren Kanten des Körpers werden als Strichlinien schwächer dargestellt (vgl. Aufg. 10).

Aus einem Riß kann man die Höhe der Bildpunkte über der Grundebene nicht ersehen, durch einen Riß ist ein räumlicher Gegenstand in seinen Maßen nicht bestimmt. Vergleiche dazu die Aufgaben 7 bis 15!

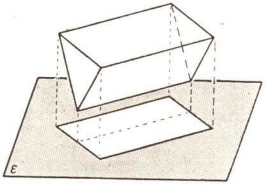


Abb. 220

2. Zweitafelverfahren

Zur Bestimmung eines Körpers entwirft man von diesem neben seinem Bild als **Grundriß** durch senkrechte Parallelprojektion des Körpers auf eine lotrechte Bildtafel noch ein zweites Bild als **Aufriß. Die Koppelung zweier senkrechter Eintafelprojektionen desselben Körpers in Grund- und Aufriß nennt man Zweitafelverfahren.**

Die waagerechte Bildtafel heißt **Grundrißtafel ε_1**, die lotrechte Bildtafel heißt **Aufrißtafel ε_2** (Abb. 221). Die Schnittgerade beider Bildtafeln heißt **Bildachse.** Man klappt

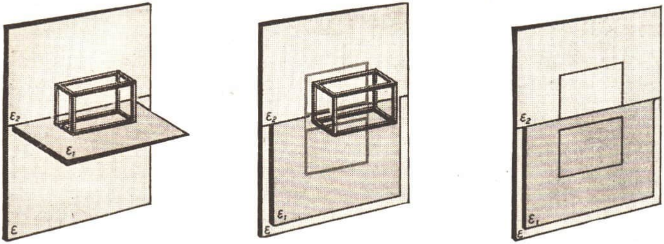


Abb. 221. Zweitafelverfahren; ε_1 = Grundrißebene, ε_2 = Aufrißebene

ferner die Grundrißtafel ε_1 aus ihrer waagerechten Lage um die Bildachse nach unten um, so daß Grundrißebene ε_1 und Aufrißebene ε_2 eine einzige Zeichenebene ε bilden (Abb. 221 und 222).

Das Bild eines Raumpunktes $\boldsymbol{P}$ wird im Grundriß durch einen oben angesetzten Strich mit $\boldsymbol{P'}$, im Aufriß durch zwei oben angesetzte Striche mit $\boldsymbol{P''}$ bezeichnet. In entsprechender Weise werden die Risse von Geraden und Strecken benannt.

Grundriß P' und Aufriß P'' eines Punktes P liegen in der Zeichenebene ε auf einer Senkrechten zur Bildachse, einer Ordnungslinie. Beweis in Abb. 222.

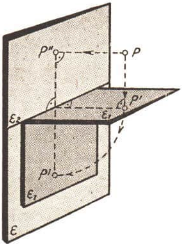


Abb. 222

Der Grundriß eines räumlichen Gegenstands gibt sein Bild in senkrechter Parallelprojektion bei lotrechter Blickrichtung („Ansicht von oben"!), der Aufriß bei waagerechter Blickrichtung („Ansicht von vorne"!) wieder. Aus der Kopplung von Grund- und Aufriß wird eine anschauliche Vorstellung von der Gestalt und Lage des Gegenstandes im Raum gewonnen.

c) Schräge Parallelprojektion, $\varphi \neq 90°$

Ist der Winkel φ der Projektionsstrahlen gegen eine lotrecht stehende Bildtafel ε nicht gleich 90°, so weist das durch **schräge Parallelprojektion** entstehende Bild des Körpers nicht mehr die zeichnerische Einfachheit wie bei senkrechter Parallelprojektion auf, aber es vermittelt dafür einen anschaulicheren Eindruck des räumlichen Gegenstandes. Das Bild eines Körpers in schräger Parallelprojektion läßt sich als Schattenbild deuten, das von dem Körper durch schräg einfallende Sonnenstrahlen auf einer lotrechten Bildtafel ε entworfen wird (Abb. 223). Meist denkt man sich bei dieser Abbildungsart die Sonnenstrahlen schräg von oben auf die lotrechte Bildtafel auffallend.

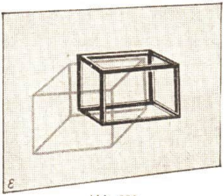


Abb. 223

1. Abbildungsregeln für schräge Parallelprojektion.

Ebenen des Körpers, die parallel zur Bildtafel liegen, heißen **Frontebenen.** Strecken in Frontebenen heißen **Frontstrecken.** Frontstrecken verlaufen parallel zur Bildtafel.

Strecken, die senkrecht zur Bildtafel stehen, heißen **Tiefenstrecken.**

a) Frontstrecken erscheinen im Bild in wahrer Größe und Richtung.

b) Tiefenstrecken werden im Bild auf denselben Winkel α gegen die Waagerechte geneigt und in demselben Verhältnis q verkleinert, ($q \leqq 1$).

α heißt der Verzerrungswinkel, q das Verzerrungsverhältnis, α und q die Verzerrung. Alle anderen Strecken des Gegenstandes werden im Bild in nicht so einfach zu bestimmender Weise verzerrt.

Beweis zu a: Frontstrecken liegen parallel zur Bildtafel. Sie liefern bei Abbildung durch Parallelprojektion kongruente Bilder (Parallelverschiebung im Raum).

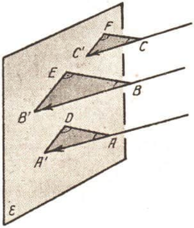


Abb. 224

Beweis zu b (Abb. 224): A, B, C seien drei beliebige Raumpunkte, A', B', C' ihre Bildpunkte bei Abbildung durch schräge Parallelprojektion. AD, BE und CF seien Tiefenstrecken von den Raumpunkten A, B und C auf die Bildebene ε; sie sind untereinander parallel. $A'D$, $B'E$ und $C'F$ sind die Bilder dieser Tiefenstrecken auf der Bildtafel; sie sind auch untereinander parallel, denn parallele Gerade bleiben bei Abbildung durch Parallelprojektion parallel.

Die Dreiecke $A'AD$, $B'BE$, $C'CF$ liegen ähnlich zueinander. Also sind $A'D$, $B'E$, $C'F$, und damit die Bilder aller Tiefenstrecken auf denselben Winkel α gegen die Waagerechte geneigt, und es verhält sich

$$\frac{A'D}{AD} = \frac{B'E}{BE} = \frac{C'E}{CE} = \cdots = \frac{\text{Bild der Tiefenstrecke}}{\text{Tiefenstrecke}} = q.$$

2. Verzerrung

Die Verzerrung (α, q) hängt von der Richtung der einfallenden Projektionsstrahlen ab. Für die geometrische Darstellung ebenflächiger Körper in schräger Parallelprojektion ist $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ am gebräuchlichsten. Bei dieser Verzerrung wird z. B. aus einem Quadrat mit zwei waagerechten Front- und zwei Tiefenstrecken im Bild ein Parallelogramm mit den Seiten a und $a \cdot q = \frac{a}{2}$, die rechten Winkel des Quadrats werden auf den Winkel $\alpha = 45°$ gegen die Waagerechte geneigt (Abb. 225).

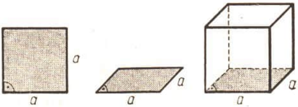


Abb. 225

Für ebenflächige Körper entspricht dieser Fall der Abbildung durch schräge Parallelprojektion am besten unserer Raumanschauung, er ist auch zeichnerisch am günstigsten. (Siehe die Aufgaben 19, 20.)

Aufgaben

I. Darstellung durch Projektion

1. Zeige, daß bei Abbildung durch Parallel- und Zentralprojektion **a)** Punkte als Punkte, **b)** Gerade als Gerade, **c)** Strecken als Strecken abgebildet werden, wenn die Geraden oder Strecken nicht zufällig in Richtung eines Projektionsstrahls verlaufen (vgl. Abb. 199. 200, 201)! In welcher Weise wird eine Gerade oder Strecke abgebildet, die in Richtung eines Projektionsstrahls verläuft?

2. Beweise, daß bei Abbildung durch Parallelprojektion die Teilverhältnisse von Strecken erhalten bleiben (Abb. 201)! Bei Abbildung durch Parallelprojektion bleibt Mitte einer Raumstrecke auch Mitte im Bild!

3. Zeige, daß bei Abbildung durch Parallelprojektion parallele Gerade parallele Bilder besitzen!

4. Welches sind die Grundeigenschaften der Abbildung durch Parallelprojektion?

5. Welches ist die Grundeigenschaft der Abbildung durch Zentralprojektion? Bleiben bei dieser Parallelität und die Teilverhältnisse von Strecken im allgemeinen auch erhalten?

6. Jede zur Bildtafel parallele ebene Figur F hat **a)** bei Abbildung durch Parallelprojektion ein kongruentes Bild F' (Abb. 217), **b)** bei Abbildung durch Zentralprojektion ein ähnliches Bild F' (Abb. 123, 125, 127). Liegt im Sonderfall eine ebene Figur F parallel zur Bildtafel ε, so wird **a)** bei Abbildung durch Parallelprojektion Kongruenz, **b)** bei Abbildung durch Zentralprojektion Ähnlichkeit als geometrische Verwandtschaft zwischen dem Original F und seinem Bild F' vermittelt. Welche räumlichen Transformationen überführen hierbei F in F'? In welchem Sonderfall bleiben bei Zentralprojektion Parallelität und die Teilverhältnisse von Strecken erhalten?

II. Senkrechte Eintafelprojektion

7. Zeichne Grundriß, Aufriß und Seitenriß eines Würfels
a) in „Parallelstellung“ (Abb. 226), **b)** in „Übereckstellung“ zur Aufrißebene (Abb. 227)!

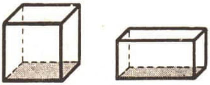


Abb. 226

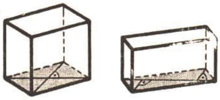


Abb. 227

8. Zeichne Grundriß, Aufriß und Seitenriß eines Quaders
a) in Parallelstellung (Abb. 226), **b)** in Übereckstellung zur Aufrißebene (Abb. 227)!

9. Zeichne ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma im Grundriß, im Aufriß und im Seitenriß!

10. Anleitung zur zeichnerischen Darstellung von Körpern. Verschiedenartige Linien verdeutlichen die zeichnerische Darstellung eines Körpers. Man unterscheidet folgende Stricharten und Strichdicken (DIN 15):

a) Vollinien. Sichtbare Kanten und Umrisse von Flächen und Körpern werden durch starke Vollinien dargestellt. Die Strichdicke richtet sich nach der geometrischen Bedeutung der Linien. Vorn liegende Kanten werden gewöhnlich stärker ausgezogen als weiter zurückliegende Kanten. Hilfslinien werden als feine Vollinien dargestellt.

b) Strichlinien. Unsichtbare (verdeckte) Kanten und Umrisse werden durch Strichlinien gekennzeichnet. Die Strichlinie ist dünner als die Vollinie. Der letzte Strich endet an der Körperkante.

c) Strichpunktlinien. Sie dienen als Mittellinien und geben die Achsen eines Körpers an. Um Verwechslungen mit Körperkanten zu vermeiden, werden Strichpunktlinien über den Rand des gezeichneten Körpers hinausgeführt. Fette Strichpunktlinien bezeichnen den Verlauf eines Schnittes durch einen dargestellten Körper.

11. Zeichne in geeignetem Maßstab Grundriß und Aufriß
a) eines Dammes von 20 m Länge, 3 m Höhe, Breite: unten 6 m, oben 4 m,
b) eines Satteldaches von 24 m Länge, 7 m Höhe und 8 m Breite,

c) einer Säule mit quadratischer Grundfläche von 60 cm Kantenlänge und mit 5 m Höhe,
d) eines Zeltes mit quadratischer Grundfläche von 1,40 m Kantenlänge und mit 1 m Höhe,
e) des Kastens eines Wagens von 3,5 m Länge, 1,5 m Höhe, Breite unten 1,2 m, oben 2 m!
Anleitung zum Maßstab: Bei der Wahl von Maßstäben für zeichnerische Darstellungen ist einheitlich zu verfahren; auch Maßstäbe sind genormt. Vergrößerungen: 2 : 1; 5 : 1; 10 : 1. Verkleinerungen: 1 : 2,5; 1 : 5; 1 : 10; 1 : 20; 1 : 50; 1 : 100; 1 : 200; 1 : 500; 1 : 1 000.

12. Zeichne in geeignetem Maßstab Grundriß, Aufriß und Seitenriß eines Güterwagens der Deutschen Reichsbahn für Schüttgüter! Längs- und Querschnitt des Wagens in Abb. 228, Maße in cm, etwas vereinfacht.

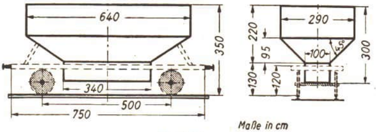


Abb. 228

III. Zweitafelverfahren; Grund- und Aufriß eines Körpers

13. Zeichne Grund- und Aufriß eines Würfels **a)** in Parallelstellung, **b)** in Übereckstellung zur Bildachse!

14. Zeichne Grund- und Aufriß eines Quaders **a)** in Parallelstellung, **b)** in Übereckstellung zur Bildachse!

15. Zeichne Grund- und Aufriß der folgenden Körper bei beliebiger Höhe: **a)** quadratische Säule, **b)** Sechskantsäule mit regelmäßiger Grundfläche, **c)** regelmäßiges dreiseitiges Prisma!

IV. Schräge Parallelprojektion

16. Zeichne das Bild eines Würfels in schräger Parallelprojektion bei Parallelstellung des Würfels zur lotrechten Bildebene für die folgenden Verzerrungen:
a) $\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{3}$ **b)** $\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{2}$
c) $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ **d)** $\alpha = 45°$, $q = \frac{2}{3}$ **e)** $\alpha = 45°$, $q = 1$
f) $\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{2}$ **g)** $\alpha = 60°$, $q = \frac{2}{3}$ **h)** $\alpha = 60°$, $q = 1$
i) $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{2}$!
Welcher Fall entspricht am besten unserer Raumanschauung von ebenflächigen Körpern? Welcher läßt sich am einfachsten zeichnen? Welcher Fall ist der gebräuchlichste?

17. Löse dieselbe Aufgabe für Übereckstellung eines Würfels zur lotrechten Bildebene (Abb. 227)!

18. Zeichne das Bild eines Quaders in schräger Parallelprojektion **a)** bei Parallelstellung, **b)** bei Übereckstellung des Körpers zur lotrechten Bildtafel (Verzerrung: $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$)! (Abb. 226 und 227, Anleitung zu Abb. 227 in Abb. 229.)

19. Zeichne das Bild eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas in schräger Parallelprojektion (Verzerrung $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$)! (Anleitung in Abb. 230.)

20. Zeichne das Bild einer regelmäßigen sechsseitigen Säule in schräger Parallelprojektion! (Anleitung in Abb. 231.)

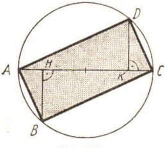


Abb. 229

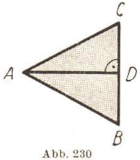


Abb. 230

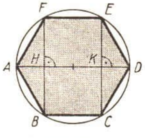


Abb. 231

21. Zeichne Grund- und Aufriß einer ansteigenden dreistufigen Treppe, deren Längsachse senkrecht zur Bildachse liegt; Stufenlänge 1,20 m, Stufenhöhe 20 cm, Stufenbreite 25 cm! Stelle die Treppe in schräger Parallelprojektion dar ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$)!

V. Angewandte Aufgaben

Dachformen mit ebenen Dachflächen sind (Abb. 232): a) Pultdach, b) Sägedach, c) Satteldach, d) Walmdach, e) Krüppelwalmdach, f) Mansardendach, g) Zeltdach. Die obere waagerechte Schnittkante benachbarter Dachebenen heißt First des Daches, aufsteigende Schnittkanten des Daches heißen Grate, die unteren waagerechten Ränder der Dachflächen, an denen die Regentraufen befestigt werden, heißen Traufkanten.

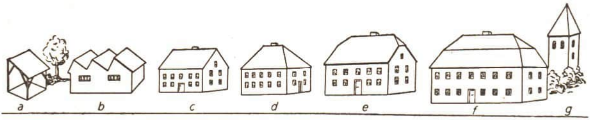


Abb. 232. Dächer: a) Pultdach, b) Sägedach, c) Satteldach, d) Walmdach, e) Krüppelwalmdach, f) Mansardendach, g) Zeltdach

22. Zeichne einen Schuppen nach Abb. 232a im Grund- und Aufriß!
Maße des Schuppens: Länge 5 m, Tiefe 3 m, Höhe vorn 3 m, hinten 4 m. Das Pultdach steht vorn 15 cm vor, an den Seiten 10 cm über. (Maßstab 1 : 100.)

23. Zeichne ein Bild des Schuppens in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$)!

24. Zeichne das in Abb. 232c dargestellte Haus im Grund- und Aufriß in passendem Maßstab! Maße des Hauses: Länge 12 m, Tiefe 9 m, Höhe der Traufkante 6,60 m, Höhe des Firstes 11 m über dem Erdboden. Die Traufkanten stehen um 0,30 m vor.

25. Zeichne ein Bild des Hauses in schräger Parallelprojektion!

26. Zeichne das Walmdach aus Abb. 232d **a)** im Grund- und Aufriß, **b)** in schräger Parallelprojektion! Maße des Walmdaches: Länge 12,80 m, Breite 9,50 m, Firstlänge 6,80 m, Firsthöhe 3 m. **c)** Wieviel laufende Meter Dachrinne werden gebraucht? **d)** Wie lang sind die Gratbalken? **e)** Wieviel „Biberschwänze" werden zur Bedachung benötigt, wenn ein Biberschwanz eine Fläche von $15 \cdot 15\ \text{cm}^2$ deckt und mit 5% Abfall gerechnet wird?

27. Ein Wohnhaus ist 12,70 m lang und 9,40 m tief. Es ist mit einem Krüppelwalmdach gedeckt (Abb. 232e). Die Traufenkanten liegen 6,60 m, der Dachfirst 11,40 m über dem Erdboden. Die Giebelwand ist 9,30 m hoch, der First 8 m lang. Die Dachtraufen stehen um 0,40 m vor. Zeichne in geeignetem Maßstab (ohne Einzeichnung der Fenster und Türen):

a) Grund- und Aufriß des Hauses,

b) ein Bild des Hauses in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{3}$)!

28. Zeichne in geeignetem Maßstab:

a) Grund- und Aufriß des Mansardendaches nach Abb. 233,

b) ein Bild des Daches in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{3}$)!

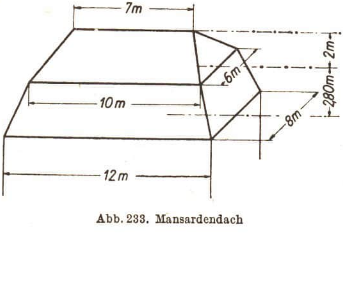


Abb. 233. Mansardendach

29. Zeichne einen ⊥-Profilstahl 30 · 30 · 4 von beliebiger Länge in geeignetem Maßstab **a)** im Grund- und Aufriß, **b)** in schräger Parallelprojektion, wenn **1.** der Fuß des Profils, **2.** der Steg des Profils parallel zur Aufrißebene liegt (vgl. Abb. 234, Maße in mm)!

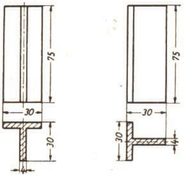


Abb. 234.

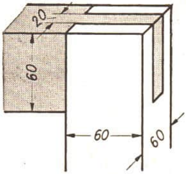


Abb. 235. Zapfen mit Schlitz

30. Um eine einfache Rahmenverbindung herzustellen, verwendet man den einfachen Schlitz (Abb. 235). Die waagerecht liegenden Querstücke werden mit einem Zapfen, die aufrechtstehenden Rahmenhölzer mit einem Schlitz versehen. Die Dicke des Zapfens bzw. Schlitzes beträgt ein Drittel der Holzdicke. Fertige eine Werkzeichnung für eine Rahmenverbindung an: Grund- und Aufriß von Zapfen und Schlitz mit eingetragenen Maßen!
Anleitung zur Maßeintragung: Maße werden in der Regel in mm angegeben. Wird davon abgewichen, so ist hinter die Maßzahl die Maßeinheit zu schreiben. Die Maßzahlen sollen von vorn oder von rechts zu lesen sein.

34. Ebenflächige Körper: Würfel, Prisma, Pyramide

a) Der Würfel

Ein Körper, der durch sechs gleiche Quadrate begrenzt wird, heißt ein Würfel.

Der Würfel ist ein regelmäßiger Körper. An jeder Ecke des Körpers stoßen drei gleiche regelmäßige Vierecke (Quadrate) zusammen. Der Würfel besitzt acht Ecken, sechs Flächen (Quadrate) und zwölf gleich lange Kanten.
Als Raumeinheit benutzt man den Einheitswürfel; dies ist ein Würfel von der Kantenlänge 1, gemessen in der jeweils gewählten Längeneinheit.
Die Raummaßeinheit ist das Kubikmeter[1]) m^3. 1 m^3 ist der Rauminhalt eines Würfels von 1 m Kantenlänge. Zur Bestimmung großer Rauminhalte verwendet man Vielfache des Kubikmeters, zur Bestimmung kleiner Rauminhalte Teile des Kubikmeters, z. B. dm^3, cm^3, mm^3.
In den Sätzen und Formeln der Stereometrie unterbleibt die Angabe der Längen-, Flächen- und Raumeinheiten. Die Sätze sind unabhängig von der Wahl der Einheiten. Zu beachten ist, daß für die Berechnung von Flächeninhalten und Rauminhalten die zugrunde liegenden Längeneinheiten die gleichen sein müssen (vgl. z. B. Aufg. 20).

1. Geometrische Darstellung eines Würfels

Abbildung eines Würfels durch Parallelprojektion. In Abb. 236 und 237 sind die Bilder eines Würfels in senkrechter Parallelprojektion im Zweitafelverfahren (als Grund- und Aufriß) und in schräger Parallelprojektion (Verzerrung $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) geometrisch dargestellt.

1) cubus (lat.) heißt der Würfel.

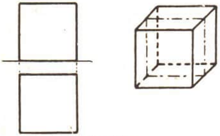


Abb. 236

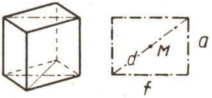


Abb. 237

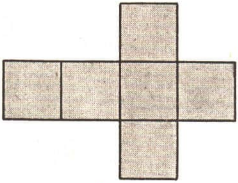


Abb. 238

Abwicklung eines Würfels in die Ebene. Die Abwicklung eines Würfels in die Ebene setzt sich aus Grund- und Deckfläche und den Mantelflächen des Würfels in ihrer wahren Größe zusammen.
Grund- und Deckfläche entnimmt man in wahrer Größe dem Grundriß, die Mantelflächen dem Grundriß und Aufriß (Abb. 238). Aus der Abwicklung des Körpers läßt sich durch Zusammenfalten ein Flächenmodell des Würfels herstellen.

2. Räumliche Transformationen, Symmetrie im Raum

a) Parallelverschiebung im Raum. Jede Parallelverschiebung eines Raumgebildes R überführt R in ein gleichliegend-kongruentes Gebilde R'.

b) Drehung um eine feste Achse. Jede Drehung eines Raumgebildes R um eine feste Achse überführt R in ein gleichsinnig-kongruentes Gebilde R'.
Parallelverschiebungen und Drehungen im Raum faßt man als Bewegungen im Raum zusammen.

Symmetrieachsen eines Würfels. Verbindet man die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Würfelflächen durch eine Gerade und dreht den Würfel um diese Verbindungsgerade als Körperachse um die Winkel $\varphi = 90°$, $2\varphi = 180°$, $3\varphi = 270°$ und $4\varphi = 360°$, so kommt der Würfel bei jeder Drehung mit sich selbst zur Deckung. Die Drehachse nennt man eine **Symmetrieachse** des Würfels. Ein Würfel hat drei solche vierzähligen Symmetrieachsen. Bei einer vollen Umdrehung des Würfels um eine Symmetrieachse kommt der Würfel viermal – bei $\varphi = 90°$, $2\varphi = 180°$, $3\varphi = 270°$ und $4\varphi = 360°$ – mit sich selbst zur Deckung.

Zentrische Symmetrie im Raum, zentrische Symmetrie eines Würfels. Ein Körper heißt **zentrisch-symmetrisch** zu einem Punkt M, wenn man jedem Punkt P des Körpers einen Punkt P' desselben Körpers so zuordnen kann, daß die Verbindungsgerade PP' durch M geht und MP gleich $-MP'$ ist. Das Symmetriezentrum heißt der **Mittelpunkt des Körpers.**
Ein Würfel ist zentrisch-symmetrisch zum Schnittpunkt M seiner drei Symmetrieachsen. M ist der Mittelpunkt des Würfels (Abb. 237).

c) Räumliche Spiegelung oder Spiegelung an einer Ebene. An die Stelle der Spiegelung einer ebenen Figur F an einer Achse (ebenen Spiegelung von F) tritt im Raum die Spiegelung eines Raumgebildes R an einer Ebene (räumliche Spiegelung von R). Zwei Raumgebilde R und R' liegen symmetrisch zu einer Ebene, wenn sie durch Spiegelung an dieser Ebene auseinander hervorgehen: Die Abstände entsprechender Punkte P und P' von der Symmetrieebene sind gleich lang, aber entgegengesetzt gerichtet, es ist $PD = - P'D$; die Abstände liegen auf einer Geraden PP'. Alle entsprechenden Stücke des Raumgebildes R und seines Spiegelgebildes R' sind gleich, die Gebilde R und R' lassen sich aber nicht durch eine Bewegung im Raum (Parallelverschiebung und Drehung im Raum), sondern nur durch eine **Spiegelung an der Symmetrieebene** miteinander zur Deckung bringen. Die Raumgebilde R und R' sind spiegelbildlich-kongruent.

Symmetrieebenen eines Würfels. Eine Schnittebene heißt **Symmetrieebene eines Körpers,** wenn der Körper durch Spiegelung an dieser Ebene mit sich selbst zur Deckung kommt. Ein Würfel hat zwei Arten von Symmetrieebenen: drei Symmetrieebenen durch die Mitten von vier parallelen Würfelkanten (Mittelschnitte des Würfels) und sechs Symmetrieebenen durch zwei gegenüberliegende parallele Würfelkanten und die verbindenden Flächendiagonalen (Diagonalschnitte des Würfels).

d) Schnitte eines Würfels. Durch einen Würfel lassen sich zwei Arten von Symmetrieschnitten legen, **Mittelschnitte** (siehe Abb. 236) und **Diagonalschnitte.** Abb. 237 zeigt einen Diagonalschnitt eines Würfels in wahrer Größe, in ihm liegen die Flächendiagonale f und die Körperdiagonale d.

3. Berechnung des Würfels

Der Rauminhalt eines Würfels mit der Kante a ist $V = a^3$, seine Oberfläche $O = 6\,a^2$.

b) Das Prisma

Ein Körper, der durch kongruente Vielecke als Grund- und Deckfläche und durch Parallelogramme als Seitenflächen begrenzt wird, heißt Prisma.
Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt **Höhe h** des Prismas.

Man teilt die Prismen ein:

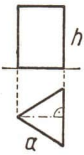
1. nach den Grundflächen in drei-, vier-, fünf-, ..., n-seitige Prismen – ihre Grundflächen sind Drei-, Vier-, Fünf-, ..., n-Ecke – und in regelmäßige oder unregelmäßige Prismen – ihre Grundflächen sind regelmäßige oder unregelmäßige n-Ecke;

2. nach der Lage der Seitenkanten zur Grundfläche in gerade oder schiefe Prismen – die Seitenkanten stehen senkrecht oder schief auf der Grundfläche.

Prismen nennt man je nach ihrer Form und ihrer Verwendung Säulen, Balken, Träger, Keile, Quader. Ein Quader ist ein gerades vierseitiges Prisma mit rechteckiger Grundfläche. Was für ein Prisma ist ein Würfel?

1. Geometrische Darstellung von Prismen

In Abb. 239 ist ein gerades, regelmäßiges dreiseitiges Prisma, in Abb. 240 ein Quader, in Abb. 241 ein gerades, regelmäßiges sechsseitiges Prisma im Grund- und Aufriß und



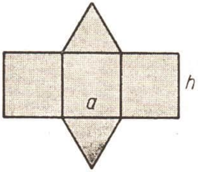


Abb. 239

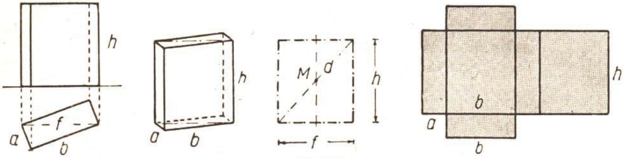


Abb. 240

in schräger Parallelprojektion geometrisch dargestellt. Daneben sind die **Abwicklungen** der Körper in die Ebene gezeichnet. Für diese entnimmt man Grund- und Deckflächen der Körper in wahrer Größe den Grundrissen; die wahre Größe der rechteckigen Seitenflächen ergibt sich aus dem Grundriß (Längskanten der Seitenflächen) und dem Aufriß (Höhen der Seitenflächen). Aus den Abwicklungen lassen sich **Flächenmodelle** der Körper zusammenfalten.

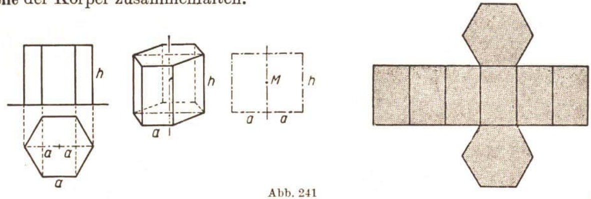


Abb. 241

Symmetrieeigenschaften gerader Prismen. Ein *Quader* hat drei zweizählige Symmetrieachsen; nach Drehungen um diese Achsen um die Winkel $\varphi = 180°$ und $2\varphi = 360°$ kommt der Körper mit sich selbst zur Deckung. Ein Quader ist zentrisch-symmetrisch zum Schnittpunkt M seiner drei Symmetrieachsen; M ist der Mittelpunkt des Quaders (Abb. 240). Durch einen Quader lassen sich drei Symmetrieebenen legen, diese schneiden einander in den drei Symmetrieachsen des Körpers. Ein *regelmäßiges* dreiseitiges Prisma hat eine dreizählige Symmetrieachse; Drehungen um 120°, 240°, 360° um diese Achse bringen das Prisma mit sich selbst zur Deckung. Ein *regelmäßiges* sechsseitiges Prisma hat eine sechszählige Symmetrieachse.

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundfläche und der Deckfläche eines *regelmäßigen* Prismas nennt man die **Achse des Körpers.** Jeder Schnitt durch eine Seitenkante und die Körperachse heißt **Achsenschnitt** des Körpers. Ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma hat drei, ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma sechs untereinander kongruente Achsenschnitte.

Ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma besitzt keinen Mittelpunkt. Ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma hat einen Mittelpunkt, den gemeinsamen Mittelpunkt M aller seiner Achsenschnitte (Abb. 241); das regelmäßige sechsseitige Prisma ist zentrisch-symmetrisch zum Punkt M.

Schnitte gerader Prismen. In Abb. 240 ist ein *Diagonalschnitt* eines Quaders, in Abb. 239 und 241 sind *Achsenschnitte* eines regelmäßigen dreiseitigen und eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas in wahrer Größe dargestellt. Erkläre die Streckenbezeichnungen der Schnitte.

2. Berechnung gerader Prismen

Der **Rauminhalt** eines Quaders ist $V_Q = G_Q \cdot h$,
wobei G_Q die Quadergrundfläche und h die zugehörige Quaderhöhe ist.
Jeder Quader läßt sich durch einen Diagonalschnitt in zwei inhaltsgleiche gerade Prismen mit kongruenten rechtwinkligen Dreiecken als Grundflächen und gleicher Höhe h zerlegen (Abb. 240). Der Rauminhalt V_P jedes dieser rechtwinkligen dreiseitigen Prismen ist

$$V_P = \tfrac{1}{2}\, V_Q = \tfrac{1}{2}\, G_Q \cdot h,$$
$$= G_P \cdot h,$$

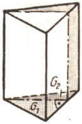


Abb. 242

wobei G_P die Grundflächen der rechtwinkligen dreiseitigen Prismen und h die gemeinsame Prismenhöhe sind.
Jedes beliebige dreiseitige Prisma läßt sich aber in zwei dreiseitige Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken G_1 und G_2 als Grundflächen und gleicher Höhe h zerlegen (Abb. 242). Der Rauminhalt V_3 des beliebigen dreiseitigen Prismas in Abb. 242 ist also

$$V_3 = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h = (G_1 + G_2) \cdot h = G \cdot h.$$

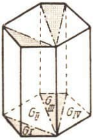


Abb. 243

Hierin ist G die Grundfläche des beliebigen dreiseitigen Prismas und h die Prismenhöhe.
Jedes beliebige n-seitige Prisma läßt sich in $(n-2)$ dreiseitige Prismen zerlegen (Abb. 243). Der Rauminhalt V_n des n-seitigen Prismas ist daher

$$V_n = G_{\mathrm{I}} \cdot h + G_{\mathrm{II}} \cdot h + G_{\mathrm{III}} \cdot h + G_{\mathrm{IV}} \cdot h + \cdots + G_{n-2} \cdot h,$$
$$= (G_{\mathrm{I}} + G_{\mathrm{II}} + G_{\mathrm{III}} + G_{\mathrm{IV}} + \cdots + G_{n-2}) \cdot h,$$
$$= G \cdot h.$$

Der Rauminhalt eines geraden Prismas mit der Grundfläche G und der Höhe h ist $V = G \cdot h$.

Die **Oberfläche** eines geraden n-seitigen Prismas setzt sich aus den Flächeninhalten der Grundfläche, der Deckfläche und der n rechteckigen Seitenflächen zusammen. Sie kann mit Hilfe der Flächeninhaltsformeln berechnet werden.

c) Der Lehrsatz des Cavalieri

Körper kann man sich in dünne parallele Schichten zerlegt denken (Abb. 244 a). Verschiebt man die Schichten gleichmäßig gegeneinander, z. B. mit einem Lineal, so erhält man einen „Treppenkörper" von gleichem Rauminhalt wie der Ausgangskörper (Abb. 244 b). Denkt man sich die Schichten immer dünner, so nähert sich die Form des Treppenkörpers der Form einer schiefen Säule von gleicher Grundfläche und Höhe, ohne daß der Rauminhalt sich ändert. Bei sehr vielen, sehr dünnen Schichten kann man sich den Treppenkörper schließlich durch eine schiefe Säule von gleichem Rauminhalt wie die gerade ersetzt denken.

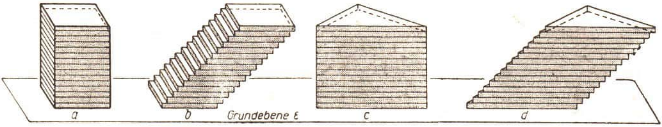


Abb. 244

Wählt man für die Grundfläche des Ausgangskörpers eine inhaltsgleiche Fläche anderer Form (Abb. 244 c), so erhält man nach dem Verschieben in gleicher Weise wie vorher ein schiefes Prisma von gleichem Rauminhalt wie das gerade (Abb. 244 d). Sämtliche vier Körper der Abb. 244 besitzen also gleichen Rauminhalt. Diese Schlußfolgerung ist allgemein in dem **Lehrsatz von Cavalieri**[1]) zusammengefaßt:

Lassen sich Körper so auf eine Grundebene stellen, daß sie durch jede Parallelebene zur Grundebene in inhaltsgleichen Flächen geschnitten werden, so sind die Rauminhalte der Körper gleich.

Der Lehrsatz des Cavalieri läßt sich vollständig nur mit Hilfsmitteln der höheren Mathematik, der Integralrechnung, beweisen.

Die Formel für den Rauminhalt gerader Prismen gilt also auch für den Rauminhalt schiefer Prismen, allgemein für jedes Prisma.

Der Rauminhalt eines Prismas mit der Grundfläche G und der Höhe h ist $V = G \cdot h$.

Prismen mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleichen Rauminhalt.

d) Die Pyramide

Ein Körper, der ein n-Eck als Grundfläche und n in einem Punkt S zusammenstoßende Dreiecke als Seitenflächen hat, heißt eine **n-seitige Pyramide.** Der Punkt S heißt die **Spitze** der Pyramide. Das Lot von der Spitze S auf die Grundfläche heißt die **Höhe h** der Pyramide (siehe Abb. 245 bis 248). Sind die Seitenkanten gleich lang, so heißt die Pyramide gerade. Ist die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck, so heißt die Pyramide regelmäßig.

1. Geometrische Darstellung von Pyramiden

Im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion sind in Abb. 245 eine gerade, regelmäßige dreiseitige Pyramide, deren Seitenkante gleich der Grundkante ist, oder ein **Tetraeder**[2]), in Abb. 246 eine gerade, regelmäßige vierseitige Doppelpyramide mit gleicher Seitenkante wie die Grundkante oder ein **Oktaeder**[3]) und in Abb. 247 eine gerade, regelmäßige sechsseitige **Pyramide** geometrisch dargestellt.
In den Abbildungen 245 bis 247 sind gleichfalls die Abwicklungen

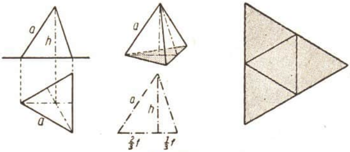


Abb. 245

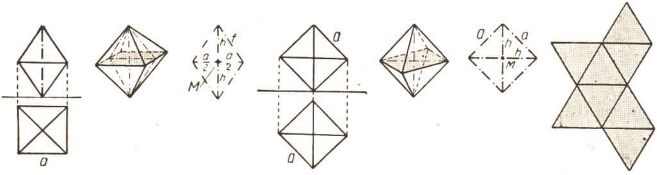


Abb. 246

1) B. Cavalieri, 1598?—1647, Bologna.
2) Tetraeder (gr.) heißt (regelmäßiges) Vierflach. 3) Oktaeder (gr.) heißt (regelmäßiges) Achtflach.

der Körper in die Ebene gezeichnet. Aus den Abwicklungen lassen sich Flächenmodelle der Körper zusammenfalten.

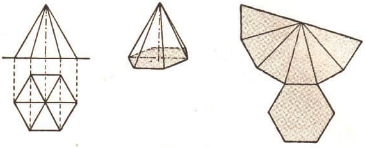


Abb. 247

Symmetrieeigenschaften gerader regelmäßiger Pyramiden. Die Verbindungslinie der Spitze einer geraden regelmäßigen Pyramide mit dem Mittelpunkt ihrer Grundfläche heißt die **Achse** der regelmäßigen Pyramide. Die Körperhöhe einer geraden regelmäßigen Pyramide ist gleichzeitig Achse des Körpers. Jeder Schnitt durch eine Seitenkante und die Körperachse liefert einen **Achsenschnitt** der regelmäßigen Pyramide.

Dreht man ein Tetraeder um eine seiner Achsen (Abb. 245), so kommt der Körper bei Drehungen um die Winkel $\varphi = 120°$, $2\varphi = 240°$, $3\varphi = 360°$ mit sich selbst zur Deckung. Ein Tetraeder hat vier dreizählige Symmetrieachsen. Ein Tetraeder hat sechs Symmetrieebenen. Diese sind je durch eine Tetraederkante und durch die beiden Seitenhalbierenden von den Endpunkten dieser Kante nach der Mitte der gegenüberliegenden Kante bestimmt. Jede Symmetrieebene des Tetraeders ist gleichzeitig ein Achsenschnitt. Ein Tetraeder ist kein zentrisch-symmetrischer Körper.

Dreht man ein Oktaeder um eine seiner Achsen (Abb. 246), so kommt der Körper bei Drehungen um die Winkel $\varphi = 90°$, $2\varphi = 180°$, $3\varphi = 270°$, $4\varphi = 360°$ mit sich selbst zur Deckung. Ein Oktaeder besitzt drei vierzählige Symmetrieachsen. Ein Oktaeder ist zentrisch-symmetrisch. Durch jede Achse eines Oktaeders gehen zwei Paare von Symmetrieebenen, nämlich zwei Mittelschnitte durch die Mitten zweier gegenüberliegender Kanten der zugehörigen Grundfläche des Oktaeders und zwei Diagonalschnitte (Achsenschnitte) durch eine der beiden anderen Achsen.

An Schnitten sind in den einzelnen Abbildungen dargestellt: für das Tetraeder ein Diagonalschnitt (Abb. 245), für das Oktaeder ein Mittelschnitt (Höhenschnitt) und ein Diagonalschnitt (Seitenkantenschnitt, Abb. 246), für die sechsseitige Pyramide ein Diagonalschnitt (Abb. 247).

2. Berechnung von Pyramiden

Stellt man zwei Pyramiden von verschiedener Gestalt, aber inhaltsgleichen Grundflächen G und gleichen Höhen h auf eine Grundebene ε und schneidet beide Körper durch eine zur Grundebene parallele Ebene in beliebigem Abstand x von den Spitzen ($x < h$), so bestehen die beiden Verhältnisgleichungen (Abb. 248)

$$\frac{F_1}{G} = \frac{x^2}{h^2} \quad \text{und} \quad \frac{F_2}{G} = \frac{x^2}{h^2}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$F_1 = F_2.$$

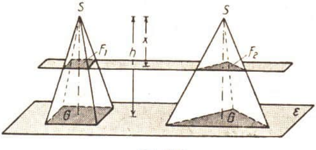


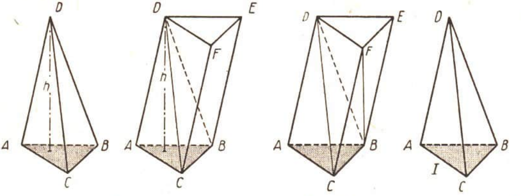
Abb. 248

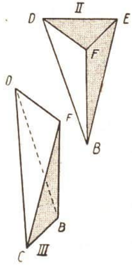
Die beiden Pyramiden werden durch jede Parallelebene zur Grundebene in inhaltsgleichen Flächen F_1 und F_2 geschnitten. Nach dem Cavalierischen Lehrsatz sind also ihre Rauminhalte gleich.

Pyramiden von inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleichen Rauminhalt.

Zur Berechnung des Rauminhalts einer dreiseitigen Pyramide ergänzt man die Pyramide zu einem dreiseitigen Prisma (Abb. 249a). Dessen Rauminhalt ist

$$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h.$$





a Abb. 249 b

Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei rauminhaltsgleiche Pyramiden zerlegen.

Beweis (Abb. 249b): Pyramide I (Spitze D, Grundfläche ABC; abgekürzt $D(ABC)$) und Pyramide II oder $B(DEF)$ haben gleiche Rauminhalte, denn beide Pyramiden haben inhaltsgleiche Grundflächen und gleiche Höhen. Es ist

$$V_{\text{I}} = V_{\text{II}}.$$

Pyramide II $D(BEF)$ und Pyramide III $D(FCB)$ haben auch gleiche Rauminhalte, denn sie haben inhaltsgleiche Grundflächen ($\triangle BEF \cong \triangle FCB$) und dieselbe Höhe (beide Pyramiden ergeben zusammengesetzt die vierseitige Pyramide $D(CBEF)$). Es ist

$$V_{\text{II}} = V_{\text{III}}.$$

Alle drei Pyramiden sind demnach untereinander rauminhaltsgleich:

$$V_{\text{I}} = V_{\text{II}} = V_{\text{III}}.$$

Die Rauminhalte aller drei Pyramiden zusammen sind gleich dem Rauminhalt $G \cdot h$ des dreiseitigen Prismas.

$$V_{\text{I}} + V_{\text{II}} + V_{\text{III}} = G \cdot h$$

oder $\quad 3\,V_{\text{I}} = G \cdot h.$

Also ist der Rauminhalt der dreiseitigen Pyramide I mit der Grundfläche G und der Höhe h

$$V_{\text{I}} = \tfrac{1}{3}\,G \cdot h.$$

Jede n-seitige Pyramide läßt sich in $(n-2)$ dreiseitige Pyramiden von verschiedenen

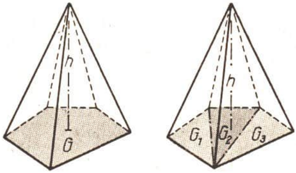


Abb. 250

Grundflächen $G_1, G_2, \ldots, G_{n-2}$, aber derselben Höhe h zerlegen (Abb. 250). Deren Rauminhalte sind $V_1 = \frac{1}{3} G_1 \cdot h$, $V_2 = \frac{1}{3} G_2 \cdot h$, $\cdots$, $V_{n-2} = \frac{1}{3} G_{n-2} \cdot h$. Der Rauminhalt der n-seitigen Pyramide ist also:

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3} G_1 \cdot h + \tfrac{1}{3} G_2 \cdot h + \cdots + \tfrac{1}{3} G_{n-2} \cdot h, \\ &= \tfrac{1}{3} (G_1 + G_2 + \cdots + G_{n-2}) \cdot h, \\ &= \tfrac{1}{3} G \cdot h. \end{aligned}$$

Der Rauminhalt einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h ist $V = \frac{1}{3} G h$.

Aufgaben

I. Der Würfel

1. Wieviel Flächen stoßen an jeder Ecke eines Würfels zusammen? Welche Form hat jede Würfelfläche?

2. Wieviel Kanten stoßen an jeder Ecke eines Würfels zusammen? Unter welchen Winkeln stoßen sie zusammen und wie lang sind die Kanten?

3. Wieviel Ecken, Flächen und Kanten hat ein Würfel?

4. Begründe, daß der Würfel ein regelmäßiger Körper ist, und zwar ein regelmäßiges Sechsflach oder Hexaeder.

5. In welcher Maßeinheit mißt man das Volumen eines Würfels **a)** von 4 cm, **b)** von 3 dm, **c)** von 2 m Kantenlänge? Wie kann man die Rauminhalte der Würfel bestimmen? Wie groß sind die Rauminhalte? Wie muß man die Einheitswürfel wählen, um einen Würfel von **d)** 2,1 cm, **e)** 2,01 cm, **f)** 2,01 dm Kantenlänge auszufüllen? Wie groß sind die Rauminhalte der Würfel?

6. Stelle einen Würfel, der in Parallelstellung zur Aufrißtafel steht (Abb. 236),
a) im Grund- und Aufriß (Zweitafelverfahren),
b) in schräger Parallelprojektion (Verzerrung $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) geometrisch dar!
Zeichne einen Mittelschnitt in beide Projektionsdarstellungen und für sich in wahrer Größe!

7. a) Stelle die Symmetrieeigenschaften eines Würfels zusammen! Welche Symmetrieachsen hat ein Würfel? Drehe Würfelmodelle um eine Symmetrieachse! Zeichne die Symmetrieachsen im Schrägbild eines Würfels ein! Zu welchem Punkt ist ein Würfel zentrischsymmetrisch? Welche Symmetrieebenen hat ein Würfel? Zeige ihren Verlauf an Würfelmodellen! Zeichne sie in Schrägbilder eines Würfels ein!

b) Zeichne Mittel- und Diagonalschnitte eines Würfels!

c) Welche Raumgebilde R' entstehen 1. durch Parallelverschiebung eines Würfels R; 2. durch Drehung des Würfels R um eine Symmetrieachse um 90°, 180°, 270°, 360°, 30°, 45°, 60°; 3. durch Spiegelung von R an einer Symmetrieebene? Welche geometrischen Verwandtschaften bestehen zwischen R und R'?

8. Stelle einen Würfel, der in Übereckstellung zur Aufrißtafel steht, im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion geometrisch dar! Wie verläuft ein Diagonalschnitt des Würfels in beiden Projektionen? Zeichne einen Diagonalschnitt in wahrer Größe! (Abb. 237).

9. Wie groß sind die Flächendiagonale f und die Körperdiagonale d eines Würfels mit der Kante a (Abb. 237)? ($a = 2$ cm; 3 cm; 75 cm; 1,20 m)

10. Aus der Abwicklung eines Würfels in die Ebene ist **a)** ein Flächenmodell, **b)** ein Kantenmodell des Würfels herzustellen. Welches Schattenbild gibt das Kantenmodell des Würfels im Sonnenlicht auf einer lotrechten Bildtafel? (Abb. 238.)

11. Gegeben ist ein Würfel von der Kantenlänge $a = 6$ cm (10 cm; 1,5 cm; 2,5 cm; 2,5 dm).
a) Wie groß ist sein Rauminhalt in cm³? **b)** Wie groß ist sein Rauminhalt in Litern?
c) Zeichne die Abwicklung eines Würfels in die Ebene. Wie groß ist seine Oberfläche in cm²?

12. Stelle in demselben Achsenkreuz geometrisch dar:
a) die Körperdiagonale d, **b)** die Oberfläche O, **c)** den Rauminhalt V eines Würfels als Funktionen der Würfelkante x! Welche Kurven ergeben sich?

13. Gibt es Würfel, für welche die Maßzahl der Oberfläche gleich der Maßzahl des Volumens ist? Warum ist es falsch zu sagen: Bei diesen Würfeln ist „der Rauminhalt gleich der Oberfläche"?

14. „Verdoppelung des Würfels". Wie lang muß man die Kante eines Würfels machen, damit sein Rauminhalt doppelt so groß wie der eines Würfels von 1 cm Kantenlänge wird? Läßt sich die Kante des gesuchten Würfels mit Zirkel und Lineal als Strecke geometrisch darstellen?

15. Vergleiche die folgenden drei geometrischen Probleme miteinander:
a) Rektifikation des Einheitskreises (Abschn. 31, Aufgabe 12, 13),
b) Quadratur des Einheitskreises (Abschn. 31, Aufgabe 9),
c) Verdoppelung des Einheitswürfels.

II. Das Prisma

16. Stelle ein gerades, regelmäßiges dreiseitiges Prisma **a)** im Grund- und Aufriß, **b)** in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) geometrisch dar! Zeichne die Abwicklung des Prismas in die Ebene und einen Diagonalschnitt des Prismas (Abb. 239)!

17. Die Abwicklung des dreiseitigen Prismas der Aufgabe 16 ist zu einem Flächenmodell des Körpers zusammenzufalten. Wie kann man aus der Abwicklung auch ein Kantenmodell des Körpers herstellen? Zeige am Modell eines geraden, regelmäßigen dreiseitigen Prismas seine Symmetrieeigenschaften: Körperachse, Symmetrieachsen, Symmetrieebenen, Achsenschnitte!

18. Zeichne einen Diagonalschnitt des dreiseitigen Prismas aus Aufgabe 16
a) in seine Darstellung in schräger Parallelprojektion ein, **b)** in wahrer Größe als Schnittfigur! Erscheint der Diagonalschnitt im Projektionsbild in wahrer Größe? Wie groß sind die Seiten des Diagonalschnitts? Wie verläuft die Achse des Körpers im Diagonalschnitt?

19. Ein Quader ist **a)** im Grund- und Aufriß, **b)** in schräger Parallelprojektion geometrisch darzustellen. Wie verläuft sein Diagonalschnitt? Zeichne diesen in wahrer Größe! Zeichne die Abwicklung des Quaders in die Ebene und falte sie zu einem Flächenmodell des Körpers zusammen (Abb. 240)! Zeige am Modell eines Quaders seine Symmetrieeigenschaften! Besitzt jeder Quader einen Mittelpunkt?

20. Wie lang sind Flächendiagonale, Körperdiagonale, Oberfläche und Rauminhalt eines Quaders mit den Seitenkanten a, b und c?

a)	$a = 6$ cm,	$b = 4$ cm,	$c = 5$ cm
b)	$a = 2{,}5$ dm,	$b = 1{,}2$ dm,	$c = 80$ cm
c)	$a = 3{,}74$ dm,	$b = 5{,}28$ dm,	$c = 8{,}42$ dm
d)	$a = 38$ mm,	$b = 4{,}5$ cm,	$c = 1{,}2$ dm

21. Ein gerades regelmäßiges **a)** vierseitiges, **b)** sechsseitiges Prisma ist in Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion geometrisch darzustellen. Wie verläuft ein Achsenschnitt jedes Körpers? Zeichne diesen in wahrer Größe! Welche Symmetrieverhältnisse haben die Körper? Zeichne die Abwicklung der Körper in die Ebene und stelle Flächenmodelle der Körper her (Abb. 241)!

22. **a)** Wieviel Liter Wasser faßt ein prismatischer, in seiner Grundfläche rechteckiger Behälter aus 1,5 mm-Stahlblech, der 2,50 m lang, 1,25 m breit und 1,25 m hoch ist?
b) Wieviel m^2 Blech sind für den Behälter notwendig (oben offen)?
c) Wie groß ist das Gewicht des Behälters (1 m^2 Blech wiegt 12 kp)?

23. Die Grundkante eines geraden, regelmäßigen dreiseitigen Prismas ist $a = 4$ cm, seine Höhe $h = 20$ cm. Wie groß sind Rauminhalt und Oberfläche des Prismas?

24. Der Rauminhalt eines geraden, regelmäßigen sechsseitigen Prismas von der Höhe $h = 36$ m ist $V = 875$ m³. Wie groß sind Grundkante und Oberfläche?

25. Die Oberfläche eines geraden, regelmäßigen achtseitigen Prismas ist $O = 7\,400$ m², der Durchmesser des Umkreises der Grundfläche $2r = 18{,}5$ m. Wie groß ist der Rauminhalt des Prismas?

26. Aus einer geraden, regelmäßigen sechsseitigen Säule mit der Grundkante a und der Höhe h ist die größte dreiseitige Säule von gleicher Höhe herzustellen. Wie groß sind deren Grundkante und Rauminhalt?

27. Aus einer geraden, regelmäßigen dreiseitigen Säule mit der Grundkante a und der Höhe h ist die größte quadratische Säule von gleicher Höhe herzustellen. Wie groß sind deren Grundkante und Rauminhalt?

28. Wieviel Ecken, Flächen und Kanten haben **a)** eine regelmäßige dreiseitige, **b)** eine regelmäßige vierseitige, **c)** eine regelmäßige sechsseitige, **d)** eine regelmäßige achtseitige, **e)** eine regelmäßige n-seitige Säule? Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen! Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Anzahlen der Ecken und Flächen und der Anzahl der Kanten prismatischer Körper?

Anleitung für e).

Anzahl der Ecken: $2n$. Warum?

Anzahl der Flächen: n Seitenflächen und Grund- und Deckfläche, also $(n + 2)$ Flächen.

Kantenzählung nach den Ecken: Jede Ecke des Körpers trägt 3 Kanten, $2n$ Ecken also $3 \cdot 2n$ Kanten. Hierbei ist jede Kante zweimal gezählt, da jede Kante zwei Ecken verbindet. Also ist die Anzahl der Kanten gleich $3 \cdot n$.

Kantenzählung nach den Flächen: Jede Seitenfläche des Körpers wird von 4 Kanten begrenzt, n Seitenflächen also von $4n$ Kanten; Grund- und Deckfläche zusammen werden von $2n$ Kanten begrenzt. Sämtliche Flächen des Körpers besitzen also zusammen $6n$ Kanten. Hierbei ist jede Kante zweimal gezählt, da jede Kante zwei Flächen begrenzt. Also ist die Anzahl der Kanten gleich $3n$.

Zusammenstellung.

n-seitige Säule	Anzahl der Ecken	Anzahl der Flächen	Anzahl der Kanten
$n = 3$	.	.	.
$n = 4$	.	.	.
$n = 6$	.	.	.
$n = 8$	.	.	.
n	$2n$	$n + 2$	$3n$

$$2n \quad + \quad n + 2 \quad = \quad 3n \quad + \quad 2$$

d.h. Anzahl der Ecken + Anzahl der Flächen = Anzahl der Kanten + 2

(Eulerscher Satz) $E + F = K + 2$

III. Lehrsatz des Cavalieri

29. Schneide aus einer Papptafel 20 kongruente Rechtecke, schichte sie senkrecht aufeinander und stecke durch die Mittelpunkte aller Rechtecke eine Stricknadel!

a) Welchen Körper erhält man bei senkrechtem Aufschichten der Rechtecke?

b) Welcher Körper entsteht, wenn die Stricknadel (Achse des Körpers) schief zur Grundebene gestellt wird? Welche Bewegung führt man dabei mit jeder Schicht aus?

c) Wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper?

30. Stelle aus gleich dicken Papptafeln in gleicher Weise **a)** 20 kongruente Dreiecke, **b)** 20 Quadrate, **c)** 20 regelmäßige Sechsecke von gleichen Flächeninhalten wie die Rechtecke her! Welche Körper erhält man durch senkrechte Aufschichtung? Welche Körper entstehen, wenn die Achsen der Körper schief zur Grundebene gestellt werden? Welche Bewegung führt man dabei mit jeder Schicht aus? Was läßt sich über die Rauminhalte aller Prismen von inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen aussagen?

31. Begründe die Formel für den Rauminhalt eines Prismas $V = G \cdot h$! Was versteht man unter der Höhe eines Prismas? Ändert sich die Höhe, wenn aus dem geraden Prisma durch gleichmäßige Parallelverschiebung seiner Schichten gegeneinander schließlich ein schiefes Prisma wird?

32. Ein Stück Stahl hat die in Abb. 251 wiedergegebene Gestalt (Maße in mm). Wie berechnet man am einfachsten seinen Rauminhalt?

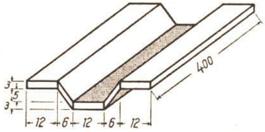


Abb. 251

IV. Die Pyramide

33. Zerlege ein gerades, regelmäßiges dreiseitiges Prisma von einer Ecke aus in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden (Modell! Siehe Aufg. 34)! Stelle das Prisma, seine Zerlegung und die drei Pyramiden in schräger Parallelprojektion geometrisch dar (vgl. Abb. 249 b)! (Zur Erzielung einer übersichtlichen Figur ist als Verzerrung $\alpha = 120°$, $q = \frac{1}{2}$ zu nehmen.)

34. Zeichne die Abwicklungen des Prismas und der drei Pyramiden aus Aufg. 33 in die Ebene und stelle Flächenmodelle der vier Körper her! Veranschauliche mit den Körpermodellen

a) die Gleichheit der Rauminhalte der drei Teilpyramiden,

b) die Zusammensetzung der drei Pyramiden zum Prisma!

35. Die Kanten einer geraden quadratischen Pyramide haben sämtlich dieselbe Länge a. Stelle die Pyramide in schräger Parallelprojektion

a) bei Parallelstellung zur lotrechten Bildebene ($\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{2}$),

b) bei Übereckstellung zur lotrechten Bildebene ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) geometrisch dar!

Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt des Körpers ($a = 4$ cm)?

36. Stelle ein Oktaeder mit der Grundkante a in schräger Parallelprojektion **a)** bei Parallelstellung, **b)** bei Übereckstellung zur lotrechten Bildebene geometrisch dar (Abb. 246)!

37. Zeichne einen Mittelschnitt und einen Diagonalschnitt eines Oktaeders mit der Seitenkante a! Welche Schnittfiguren entstehen, wie groß sind die Seiten und Diagonalen der Schnittfiguren? Warum nennt man den Mittelschnitt eines Oktaeders auch Höhen- oder Rhombenschnitt und den Diagonalschnitt auch Seitenkantenschnitt oder Quadratschnitt?

38. Wie groß sind Höhe, Rauminhalt und Oberfläche eines Oktaeders mit der Grundkante a?

39. Das Oktaeder ist ein regelmäßiges Polyeder oder Vielflach. Von welchen und von wieviel kongruenten regelmäßigen n-Ecken ist es begrenzt? Wieviel regelmäßige n-Ecke stoßen an jeder Ecke des Körpers zusammen?

40. Stelle ein Tetraeder in schräger Parallelprojektion geometrisch dar (Abb. 245)!

41. Zeichne einen Achsenschnitt eines Tetraeders! Wie groß sind die Seiten und die Höhe der Schnittfigur?

42. Wie groß sind Höhe, Rauminhalt und Oberfläche eines Tetraeders mit der Grundkante a?

43. Das Tetraeder ist ein regelmäßiges Polyeder. Von welchen und von wieviel kongruenten regelmäßigen n-Ecken ist es begrenzt? Wieviel regelmäßige n-Ecke stoßen an jeder Ecke zusammen?

44. Zeichne die Abwicklungen **a)** eines Oktaeders, **b)** eines Tetraeders in die Ebene! Stelle daraus Flächenmodelle beider Körper her!

45. Wieviel Ecken, Flächen, Kanten haben Tetraeder, Oktaeder, Würfel?
Anleitung. Zusammenstellung:

Regelmäßige Polyeder	Jede Ecke trägt	Anzahl der Ecken	Anzahl der Flächen	Anzahl der Kanten
Tetraeder	3 regelmäßige Dreiecke	.	.	.
Oktaeder	4 regelmäßige Dreiecke	.	.	.
Würfel	3 regelmäßige Vierecke (Quadrate)	.	.	12

Auch für diese Körper finden wir den Eulerschen Polyedersatz bestätigt:

Anzahl der Ecken + Anzahl der Flächen = Anzahl der Kanten + 2.

46. Stelle eine gerade, regelmäßige sechsseitige Pyramide im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) geometrisch dar! Zeichne einen Achsenschnitt der Pyramide in wahrer Größe und die Abwicklung der Pyramide in die Ebene (Abb. 247)!

47. Wie groß ist der Rauminhalt einer geraden, regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h ($a = 4$ cm, $h = 5$ cm)?

48. Wieviel Ecken, Flächen und Kanten haben **a)** eine regelmäßige dreiseitige, **b)** eine regelmäßige vierseitige, **c)** eine regelmäßige sechsseitige, **d)** eine regelmäßige achtseitige, **e)** eine regelmäßige n-seitige Pyramide? Welcher zahlenmäßige Zusammenhang besteht zwischen den Anzahlen der Ecken und Flächen und der Anzahl der Kanten?

Anleitung für e:
Anzahl der Ecken: $n + 1$.
Anzahl der Flächen: $n + 1$.
Anzahl der Kanten: Kantenzählung nach den Ecken. Jede Ecke der Pyramidengrundfläche trägt drei Kanten, n Ecken also $3n$ Kanten. Die Spitze der Pyramide trägt n Kanten. Insgesamt also $(3n + n)$ oder $4n$ Kanten. Hierbei ist jede Kante zweimal gezählt, da jede Kante zwei Ecken verbindet. Also ist die Anzahl der Kanten gleich $2n$.
Kantenzählung nach den Flächen. Jede Seitenfläche der Pyramide wird von drei Kanten begrenzt, n Seitenflächen also von $3n$ Kanten. Die Grundfläche wird von n Kanten begrenzt. Insgesamt also $3n + n$ oder $4n$ Kanten. Hierbei ist jede Kante zweimal gezählt, da jede Kante zwei Flächen begrenzt. Also ist die Anzahl der Kanten gleich $2n$.

Zusammenstellung:

n-seitige Pyramide	Anzahl der Ecken	Anzahl der Flächen	Anzahl der Kanten
$n = 3$	.	.	.
$n = 4$	.	.	.
$n = 6$	.	.	.
$n = 8$	.	.	.
n	$n + 1$	$n + 1$	$2n$

$$n + 1 + n + 1 = 2n + 2$$

Eulerscher Polyedersatz $E + F = K + 2.$

Gelten die Ergebnisse auch für nicht-regelmäßige Pyramiden?

49. Wieviel Ecken, Flächen und Kanten haben eine regelmäßige **a)** dreiseitige, **b)** vierseitige, **c)** sechsseitige, **d)** achtseitige, **e)** n-seitige Doppelpyramide mit gemeinsamer Grundfläche?

V. Angewandte Aufgaben

50. Ein Stahlwürfel hat eine Kantenlänge von 74 mm. Wieviel wiegt er?

51. Wie groß sind die Kanten von Würfeln, die alle das gleiche Gewicht 500 p haben, aber aus verschiedenem Material bestehen: **a)** Holz (Eiche, trocken), **b)** Aluminium, **c)** Stahl, **d)** Messing, **e)** Blei?

Anleitung: Die Wichte von Eichenholz, trocken, ist 0,9 p/cm³, von Messing 8,6 p/cm³. Die Wichte von Aluminium, Stahl und Blei entnehme man Tabellen (Logarithmentafel).

52. Wieviel wiegen die folgenden Vierkant-Stabstähle (Quadratstähle):

a) 1 m □-Stahl 6 mm, **b)** 1 m □-Stahl 12 mm,
c) 20 m □-Stahl 18 mm, **d)** 17,5 m □-Stahl 13 mm,
e) 25 m □-Stahl 25 mm, **f)** 16,25 m □-Stahl 30 mm?

Anleitung: Mache zu jeder Aufgabe zunächst stets einen Überschlag ($\gamma \approx 8$ p/cm³)! Berechne im Überschlag zuerst das Gewicht für 1 m Quadratstahl, da dieses das Schätzen und damit die Übersicht erleichtert!

53. Wieviel wiegen die folgenden Flachstähle:

a) 1 m ▭-Stahl 25 · 4, **b)** 17 m ▭-Stahl 50 · 8,
c) 9,50 m ▭-Stahl 30 · 5, **d)** 60 m ▭-Stahl 60 · 10?

Die Angaben für die Querschnitte der Flachstähle sind sämtlich in mm gemessen!

54. Zur Gewichtsberechnung von winkligen Profilstählen denkt man sich diese in Flachstähle von gleicher Länge und flächengleichem Querschnitt verwandelt. Warum ist dies zulässig? Beispiele (sämtliche Angaben in mm):

a) L-Stahl (lies: Winkelstahl) 60 · 60 · 10 ist gleich ▭-Stahl 110 · 10,
b) ⊥-Stahl (lies: T-Stahl) 20 · 20 · 3 ist gleich ▭-Stahl 37 · 3.

Vergleiche Abschn. 24, Aufgabe 43 und Abb. 92 und 93!

55. Wieviel wiegen die folgenden Profilstähle:
gleichschenkliger Winkelstahl: **a)** 20 m L-Stahl 60 · 60 · 10, **b)** 25,75 m L-Stahl 25 · 25 · 5,
ungleichschenkliger Winkelstahl: **c)** 18 m L-Stahl 30 · 60 · 5; 10 m L-Stahl 40 · 80 · 8,
hochstegiger T-Stahl: **d)** 17,5 m ⊥-Stahl 30 · 30 · 4; 12 m ⊥-Stahl 80 · 80 · 9,
breitfüßiger T-Stahl: **e)** 65,75 m ⊥-Stahl 60 · 30 · 5,5; 5 m ⊥-Stahl 100 · 50 · 8,5?

56. Beim Bauen wird als Faustregel für Materialverbrauch gerechnet, daß man für 1 m³ Mauerwerk aus Mauersteinen im Normalformat 400 Mauersteine und 280 l Mörtel verbraucht. Prüfe die Richtigkeit dieser Faustregel nach!

Anleitung: Die Maße für einen Mauerstein im Normalformat sind 25 · 12 · 6,5 cm³. Die Stärke der Stoßfugen (lotrecht stehend) beträgt in normalem Mauerwerk 1 cm, die Stärke der Lagerfugen (waagerecht liegend) 1,2 cm.

57. Eine zwei Stein starke Ziegelmauer von 8 m Höhe über einer Toreinfahrt soll durch einen Eisenträger von 4 m Stützweite abgefangen werden. Die Ziegelmauer ist beiderseits 1,5 cm dick mit Putz versehen.

a) Wieviel wiegt das Mauerwerk (Wichte $\gamma = 1{,}8$ p/cm³)?
b) Wieviel wiegt der Putz, wenn 1 m² Wandputz, 1 cm dick, 17 kp wiegt?
c) Welche Gesamtlast ruht auf dem Eisenträger?

Anleitung: Eine zwei Stein starke Mauerwand hat die folgende Dicke:

$$d \text{ in cm} = 25 \text{ cm} + 1 \text{ cm (Stoßfuge)} + 25 \text{ cm} = 51 \text{ cm}.$$

58. Vierkant- und Sechskantstabstähle, deren Querschnitte Quadrate bzw. regelmäßige Sechsecke sind, werden nach DIN 176 mit den Schlüsselweiten $s = 6$ mm; 8 mm; 10 mm; 15 mm; 20 mm hergestellt. Wieviel wiegt ein Meter jeder Stahlsorte (vgl. Abb. 65)?

59. Ein Kanal von trapezförmigem Querschnitt ist oben 4,5 m, an der Sohle 3 m breit und 2 m tief. Das Wasser fließt mit einer Geschwindigkeit von 0,7 m/s bei einer Tiefe von 1,10 m. Wieviel Kubikmeter Wasser liefert der Kanal in der Sekunde?

60. Das Traufenviereck eines Turmes von quadratischem Querschnitt ist ein Quadrat von 5 m Kantenlänge. Der Turm soll ein Zeltdach von 8 m Höhe erhalten (Abb. 232 g).

a) Stelle das Turmdach im Grundriß und Aufriß und in schräger Parallelprojektion dar! (Maßstab 1 : 200, Verzerrung $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$.)

b) Bestimme aus der Zeichnung und durch Rechnung die Länge der Gratbalken!

c) Wieviel Quadratmeter Blech sind zur Bedachung des Turmes erforderlich unter Berücksichtigung eines Zuschlags von 5% der errechneten Fläche für Überlappung?

d) Wie groß ist der vom Turmdach umschlossene Raum?

61. Die Achse eines schiefen Prismas mit quadratischer Grundfläche (Grundkante a) und der Höhe h ist unter dem Winkel β gegen seine Grundfläche geneigt ($a = 6$ cm, $h = 5$ cm, $\beta = 45°$).

a) Wie groß ist der Rauminhalt des schiefen Prismas?

b) Zeichne Grund- und Aufriß des Prismas!

c) Zeichne ein Bild des Prismas in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{2}$)!

d) Zeichne die Abwicklung des Prismas und stelle ein Flächenmodell des Körpers her!

e) Wie groß ist die Oberfläche des schiefen Prismas?

35. Die regelmäßigen Polyeder

a) Die körperliche Ecke

Von einem Punkte S des Raumes mögen n Strahlen ausgehen, von denen keine drei in einer Ebene liegen. Durch je zwei aufeinanderfolgende Strahlen wird ein Ebenenstück bestimmt. Vom Punkt S des Raumes gehen also auch n Ebenenstücke aus. Das aus den n Strahlen und den n Ebenenstücken zusammengesetzte Raumgebilde heißt eine **n-seitige körperliche Ecke.**

Der den Strahlen und Ebenenstücken gemeinsame Punkt S heißt der **Scheitel** der Ecke; die Strahlen bilden die **Kanten,** die Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Kanten bilden die **Seiten** der Ecke. Jede n-seitige körperliche Ecke trägt n Kanten und n Seiten.

Wir beschränken uns im folgenden auf konvexe[1]) körperliche Ecken. Körperliche Ecken, die ganz auf einer Seite eines jeden Ebenenstücks liegen, heißen **konvexe körperliche Ecken. Bei konvexen körperlichen Ecken sind alle Seiten kleiner als $2R$.**

Die Summe der Seiten einer konvexen körperlichen Ecke ist kleiner als $4R$.

Der Beweis dieses Satzes ist in den Aufgaben 6 bis 8 gegeben.

Körperliche Ecken, die vollständig miteinander übereinstimmen, heißen **kongruent.**

b) Der Eulersche Satz

1. Der Eulersche Satz für ebene Vielecksnetze

Vielecke ohne einspringende ebene Ecken heißen konvexe Vielecke. Bei konvexen Vielecken sind alle Innenwinkel kleiner als $2R$ (vgl. Aufgabe 11).

Eine beliebige Anzahl konvexer Vielecke sei lückenlos zu einem ebenen Vielecksnetz zusammengesetzt (Abb. 252). Die Anzahl der Ecken dieses Netzes sei E, die der Vieleckskanten K, die der Vielecksflächen F. Dann gilt der Eulersche Satz für ebene Vielecksnetze:

$$E + F = K + 1.$$

---

1) convex (lat.) heißt sich herauswölbend, gewölbt.

Beweis (Abb. 252):

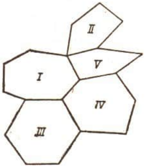


Abb. 252.
Ebenes Vielecksnetz

Vieleck I allein besitze n_1 Ecken und n_1 Kanten. Für Vieleck I ist $E_1 = n_1$, $F_1 = 1$ und $K_1 = n_1$. Für Vieleck I gilt der Satz $E + F = K + 1$.

Vieleck II hängt mit einer Ecke am Ausgangsnetz I. Vieleck II bringt n_2 Ecken, 1 Vieleck, $n_2 + 1$ Kanten zum bisherigen Netz I hinzu, es ist $E_2 = n_2$, $F_2 = 1$ und $K_2 = n_2 + 1$. Für Netz I + II gilt der Satz $E + F = K + 1$.

Vieleck III hängt mit zwei Ecken oder einer Kante am bisherigen Netz I + II. Vieleck III bringt n_3 Ecken, 1 Vieleck, $n_3 + 1$ Kanten zum bisherigen Netz I + II hinzu, es ist $E_3 = n_3$, $F_3 = 1$ und $K_3 = n_3 + 1$. Für Netz I + II + III gilt der Satz $E + F = K + 1$.

Vieleck IV hängt mit drei Ecken oder zwei Kanten am bisherigen Netz. Vieleck IV bringt n_4 Ecken, 1 Vieleck, $n_4 + 1$ Kanten zum bisherigen Netz I + II + III hinzu, es ist $E_4 = n_4$, $F_4 = 1$ und $K_4 = n_4 + 1$. Für Netz I + II + III + IV gilt der Satz $E + F = K + 1$.

Beim Hinzufügen eines jeden neuen Vielecks ist stets der Zuwachs an Ecken und Flächen gleich dem Zuwachs an Kanten. Also gilt der Eulersche Satz allgemein für jedes ebene Netz konvexer Vielecke.

2. Der Eulersche Satz für konvexe Polyeder oder Eulersche Polyedersatz

Ein Körper, der von ebenen Flächen begrenzt wird, heißt **Polyeder**[1]). Polyeder, die ganz auf einer Seite jeder ihrer Begrenzungsebenen liegen, heißen konvexe Polyeder. Konvexe Polyeder besitzen nur konvexe Ecken.

Eulerscher Polyedersatz. Ist E die Anzahl der Ecken, F die der Flächen, K die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, so ist

$$E + F = K + 2.$$

Beweis: Wir stellen das gegebene Polyeder so, daß keine seiner Flächen zu einer Bildtafel ε senkrecht verläuft und bilden es durch senkrechte Parallelprojektion auf diese Bildtafel ab. Im Bild verschwindet dann keine Ecke, Fläche oder Kante des Polyeders. Wir erhalten zwei im Körperumriß zusammenhängende, übereinanderliegende ebene Vielecksnetze I und II (siehe z. B. Abb. 253 für einen Würfel).

Der Umriß beider Netze ist ein konvexes Vieleck, für ihn ist $E_u = K_u$.

Für jedes Vielecksnetz gilt der Eulersche Satz, es ist

$$E_{\mathrm{I}} + F_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}} + 1 \quad \text{und} \quad E_{\mathrm{II}} + F_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{II}} + 1.$$

Also ist $E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}} \quad + F_{\mathrm{I}} + F_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{I}} + K_{\mathrm{II}} \quad + 2.$

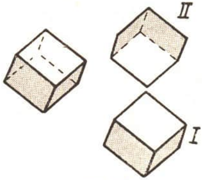


Abb. 253

In dieser Gleichung sind die Ecken und Kanten des Umrisses zweimal gezählt, nämlich für jedes Vielecksnetz einmal.

1) Polyeder (gr.) heißt Vielflach, ebenflächiger Körper.

Nun ist $E_u = K_u$.

Also ist $E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}} - E_u + F_{\mathrm{I}} + F_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{I}} + K_{\mathrm{II}} - K_u + 2$. Dieses heißt für das Polyeder: $E + F = K + 2$.

3. Der Eulersche Satz

Der Eulersche Satz $E+F=K+1$ gilt nicht nur für ebene Vielecksnetze, sondern für alle ebenen und räumlichen **offenen Vielecksnetze,** d.h. Vielecksnetze, welche ein Polyeder nicht allseitig begrenzen. Der Beweis ist in 2. enthalten.

Der Eulersche Polyedersatz $E+F=K+2$ gilt für alle **geschlossenen Vielecksnetze** konvexer Polyeder.

Beide Sätze zusammen lassen sich in die Form bringen:

$$\boldsymbol{E + F - K = I.}$$

Hierin hat die Zahl I (Invariante I) für alle offenen Vielecksnetze den Wert **1,** für die geschlossenen Vielecksnetze aller konvexen Polyeder den Wert **2.**

Der Eulersche Satz läßt sich für nicht-konvexe Körper verallgemeinern; I hat dann unter Umständen einen anderen Zahlenwert als 2 (siehe Aufgabe 15).

c) Die regelmäßigen Polyeder

Ein Polyeder, das von kongruenten regelmäßigen Vielecken begrenzt wird und kongruente regelmäßige Ecken besitzt, heißt ein **regelmäßiges Polyeder.**

Es gibt viele regelmäßige Vielecke. Gibt es auch viele regelmäßige Polyeder?

1. Die regelmäßigen Polyeder

An jeder Ecke eines regelmäßigen Polyeders müssen mindestens drei regelmäßige Vielecke zusammenstoßen. Ferner muß die Summe der Seiten jeder Polyederecke kleiner als $4R$ sein. Ein regelmäßiges Polyeder kann daher nur von den folgenden regelmäßigen Vielecken begrenzt sein:

a) von regelmäßigen **Dreiecken.** Dann sind die Seiten jeder Ecke je gleich **60°.**
An jeder Ecke können zusammenstoßen:

3 regelmäßige Dreiecke, denn es ist $3 \cdot 60° < 4R$, oder
4 regelmäßige Dreiecke, denn es ist $4 \cdot 60° < 4R$, oder
5 regelmäßige Dreiecke, denn es ist $5 \cdot 60° < 4R$.

6 regelmäßige Dreiecke können an einer Ecke nicht zusammenstoßen, denn $6 \cdot 60°$ ist nicht kleiner als $4R$, sondern gleich $4R$.

b) von regelmäßigen **Vierecken.** Dann sind die Seiten jeder Ecke je gleich **90°.**
An jeder Ecke können **3** regelmäßige Vierecke zusammenstoßen, denn es ist $3 \cdot 90° < 4R$.

4 regelmäßige Vierecke können an einer Ecke nicht zusammenstoßen, denn $4 \cdot 90°$ ist nicht kleiner als $4R$.

c) von regelmäßigen **Fünfecken.** Dann sind die Seiten jeder Ecke je gleich $\frac{6R}{5}$ oder **108°.**
An jeder Ecke können **3** regelmäßige Fünfecke zusammenstoßen, denn es ist $3 \cdot 108° < 4R$.

Regelmäßige Sechsecke, erst recht regelmäßige Sieben-, Acht-, ...-Ecke können als Flächen regelmäßiger Polyeder überhaupt nicht auftreten, denn schon für Sechsecke erhielte man als Summe der Seiten einer dreiseitigen Ecke $3 \cdot 120° = 4R$!

Es gibt nur fünf regelmäßige Polyeder.

2. Die Bestimmung der fünf regelmäßigen Polyeder

Wie sehen die fünf regelmäßigen Polyeder aus? Dazu müssen wir die 3 Unbekannten E, F, K für jeden Einzelfall durch drei Gleichungen bestimmen.

a) **Dreieckige** Flächen (gleichseitige Dreiecke).

Dreiseitige Ecken. An jeder Ecke stoßen **3** gleichseitige Dreiecke zusammen.

Nach dem Eulerschen Polyedersatz ist $E+F=K+2$ (1. Gleichung).

Kantenzählung nach den Ecken: Jede Ecke trägt 3 Kanten, E Ecken des Körpers tragen $3E$ Kanten. Hierbei ist jede Kante doppelt gezählt, denn sie verbindet 2 Ecken. Es ist also $2K = 3E$ (2. Gleichung).

Kantenzählung nach den Flächen: Jede Fläche wird von 3 Kanten begrenzt, F Flächen von $3F$ Kanten. Hierbei ist jede Kante doppelt gezählt, denn sie begrenzt 2 Flächen. Es ist also $2K = 3F$ (3. Gleichung).

Die drei linearen Gleichungen ergeben $\boldsymbol{E=4,\quad F=4,\quad K=6.}$

Der erste regelmäßige Körper besitzt 4 regelmäßige Dreiecksflächen, 4 dreiseitige Ecken und 6 gleich lange Kanten; er heißt ein **Tetraeder**[1]) (Abb. 245).

Vierseitige Ecken. An jeder Ecke stoßen **4** gleichseitige Dreiecke zusammen. Es gelten die folgenden drei linearen Gleichungen:

Nach dem Eulerschen Polyedersatz ist $E+F=K+2$ (1. Gleichung),

Kantenzählung nach den Ecken $2K = 4E$ (2. Gleichung),

Kantenzählung nach den Flächen $2K = 3F$ (3. Gleichung).

Die drei linearen Gleichungen ergeben $\boldsymbol{E=6,\quad F=8,\quad K=12.}$

Der zweite regelmäßige Körper besitzt 8 regelmäßige Dreiecksflächen, 6 vierseitige Ecken und 12 gleich lange Kanten; er heißt ein **Oktaeder**[1]) (Abb. 246).

Fünfseitige Ecken. An jeder Ecke stoßen **5** gleichseitige Dreiecke zusammen.

Nach dem Eulerschen Polyedersatz ist

$$E+F=K+2 \quad \text{(1. Gleichung)},$$

Kantenzählung nach den Ecken

$$2K=5E \quad \text{(2. Gleichung)},$$

Kantenzählung nach den Flächen

$$2K = 3F \quad \text{(3. Gleichung)}.$$

Die drei linearen Gleichungen ergeben

$$\boldsymbol{E=12,\quad F=20,\quad K=30.}$$

Der dritte regelmäßige Körper besitzt 20 regelmäßige Dreiecksflächen, 12 fünfseitige Ecken und 30 gleich lange Kanten, er heißt ein **Ikosaeder**[1]) (Abb. 254).

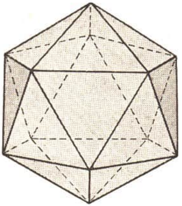


Abb. 254. Ikosaeder

---

1) Tetra-eder (gr.) heißt Vier-flach; Okta-eder Acht-flach; Ikosa-eder Zwanzig-flach.

b) **Viereckige** Flächen (Quadrate).

Dreiseitige Ecken. An jeder Ecke stoßen **3** Quadrate zusammen.
Nach dem Eulerschen Polyedersatz ist $E + F = K + 2$ (1. Gleichung),
Kantenzählung nach den Ecken $2K = 3E$ (2. Gleichung),
Kantenzählung nach den Flächen $2K = 4F$ (3. Gleichung).
Also ist $\boldsymbol{E = 8,\; F = 6,\; K = 12}$.

Der vierte regelmäßige Körper besitzt 6 Quadratflächen, 8 vierseitige Ecken und 12 gleich lange Kanten, er heißt ein **Hexaeder**[1]) oder **Würfel.**

c) **Fünfeckige** Flächen (regelmäßige Fünfecke).

Dreiseitige Ecken. An jeder Ecke stoßen **3** regelmäßige Fünfecke zusammen.
Nach dem Eulerschen Polyedersatz ist

$E + F = K + 2$ (1. Gleichung),

Kantenzählung nach den Ecken

$2K = 3E$ (2. Gleichung),

Kantenzählung nach den Flächen

$2K = 5F$ (3. Gleichung).

Also ist $\boldsymbol{E = 20,\; F = 12,\; K = 30}$.

Der fünfte regelmäßige Körper besitzt 12 regelmäßige Fünfecksflächen, 20 dreiseitige Ecken und 30 gleich lange Kanten, er heißt ein **Dodekaeder**[1]) (Abb. 255).

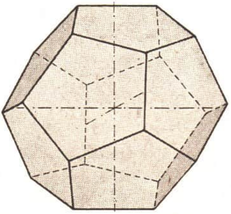


Abb. 255. Dodekaeder

3. Übersicht über die regelmäßigen Polyeder

Die regelmäßigen Polyeder	Art der begrenzenden Flächen	Jede Ecke trägt		Anzahl der Ecken	Anzahl der Flächen	Anzahl der Kanten
Tetraeder	Gleichseitige Dreiecke	3 Flächen	3 Kanten	4	4	6
Hexaeder (Würfel)	Quadrate	3 „	3 „	8	6	je 12
Oktaeder	Gleichseitige Dreiecke	4 „	4 „	6	8	
Dodekaeder	Regelmäßige Fünfecke	3 „	3 „	20	12	je 30
Ikosaeder	Gleichseitige Dreiecke	5 „	5 „	12	20	

4. Geometrische Darstellung der regelmäßigen Polyeder

Die geometrische Darstellung der regelmäßigen Polyeder und die geometrischen Zusammenhänge der fünf regelmäßigen Körper untereinander werden in den Aufgaben 20 bis 33 behandelt.

Aufgaben

I. Die körperliche Ecke

1. Beschreibe **a)** die Ecken eines regelmäßigen Dreiecks, Vierecks, Fünfecks usw.: Ebene Ecken! **b)** die Ecken eines Würfels, Tetraeders, Oktaeders, einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide usw.: Körperliche Ecken!

---

1) Hexa-eder (gr.) heißt Sechs-flach; Dodeka-eder Zwölf-flach; Poly-eder Viel-flach.

2. Welches ist die Mindestanzahl der Seiten und der Kanten einer körperlichen Ecke?

3. Gib für einen Würfel, ein Tetraeder, ein Oktaeder und eine regelmäßige sechsseitige Pyramide **a)** die Anzahl der Seiten und Kanten jeder Ecke, **b)** die Größe der einzelnen Seiten an!

4. Gib Beispiele für Körper mit einspringenden Ecken! Einspringende Ecken heißen nicht-konvexe Ecken, die Körper heißen nicht-konvexe Körper.

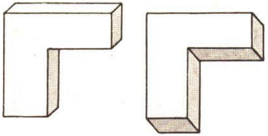


Abb. 256. Nicht-konvexe Polyeder

Anleitung: Setze z. B. zwei Streichholzschachteln nach Abb. 256 aneinander! Die Seiten der beiden einspringenden dreiseitigen Ecken des entstehenden nicht-konvexen Körpers sind 270°, 90°, 90°.

5. Sind alle Ecken **a)** eines Würfels, Tetraeders, Oktaeders; **b)** einer regelmäßigen vierseitigen, sechsseitigen, achtseitigen Pyramide untereinander kongruent?

Anleitung: Ecken, die vollständig miteinander übereinstimmen, heißen kongruent.
a) Wieviel Seiten und Kanten gehen von jeder Ecke der Körper aus? Wie groß sind die Seiten jeder Ecke? b) Wieviel Seiten und Kanten gehen von der Spitze einer Pyramide als körperlicher Ecke, wieviel Seiten und Kanten von einer Ecke ihrer Grundfläche aus?

6. Falte die folgenden konvexen Ecken: **a)** eine regelmäßige dreiseitige Ecke, **b)** eine regelmäßige vierseitige Ecke, **c)** eine regelmäßige sechsseitige Ecke! Unterhalb welches Winkelbetrages muß die Summe der Seiten einer konvexen körperlichen Ecke stets liegen?

7. Falte eine **a)** dreiseitige, **b)** vierseitige, **c)** sechsseitige, konvexe körperliche Ecke! Unterhalb welches Winkelbetrages muß die Summe der Seiten jeder Ecke liegen?

8. Welche obere Grenze hat die Summe der Seiten einer n-seitigen, konvexen körperlichen Ecke?

9. Eine dreiseitige Ecke hat die Seiten **a)** 140° und 140°, **b)** 120° und 120°, **c)** 108° und 108°, **d)** 90° und 90°, **e)** 60° und 60°. Zwischen welchen Schranken liegt die dritte Seite? Für welche Fälle sind regelmäßige dreiseitige Ecken möglich? Falte diese regelmäßigen Ecken als Raummodelle!

Anleitung: 60° ist der Innenwinkel eines regelmäßigen (gleichseitigen) Dreiecks, 90° eines regelmäßigen Vierecks (Quadrats), 108° eines regelmäßigen Fünfecks, 120° eines regelmäßigen Sechsecks, 140° eines regelmäßigen Neunecks (vgl. Abschn. 30).

10. Welche geraden Pyramiden mit regelmäßiger Grundfläche können an der Spitze Winkel von **a)** 108°, **b)** 90°, **c)** 60° haben?

II. Der Eulersche Satz

11. Wie groß sind die Innenwinkel der folgenden konvexen Vielecke:
a) eines regelmäßigen Dreiecks (gleichseitigen Dreiecks), **b)** eines regelmäßigen Vierecks (Quadrats),
c) eines regelmäßigen Fünfecks, **d)** regelmäßigen Sechsecks, **e)** regelmäßigen n-Ecks?

12. Wie groß sind die Seiten und Winkel der nicht-konvexen Vielecke in Abb. 257? Zeichne weitere nicht-konvexe Vielecke!

13. Müssen alle regelmäßigen Vielecke konvexe Vielecke sein? Beweis!

14. Nenne konvexe Polyeder!

15. Zeichne nicht-konvexe Polyeder (vgl. Abb. 256 und 258)!

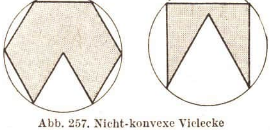


Abb. 257. Nicht-konvexe Vielecke

16. Stelle die bisher gefundenen Einzelergebnisse für den Eulerschen Polyedersatz bei konvexen Körpern zusammen (vgl. Abschn. 34, Aufg. 28; 45; 48; 49)!

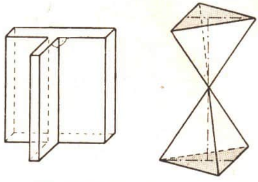


Abb. 258. Nicht-konvexe Polyeder

III. Die regelmäßigen Polyeder

17. Ist ein Tetraeder ein regelmäßiges Polyeder? Begründung!

18. Ist ein Doppeltetraeder mit gemeinsamer Grundfläche ein regelmäßiges Polyeder (Abb. 259)? Zeichne die Abwicklung des Körpers und stelle daraus ein Flächenmodell des Körpers her!

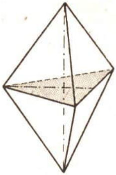


Abb. 259. Doppeltetraeder mit gemeinsamer Grundfläche

19. Sind Würfel und Oktaeder regelmäßige Polyeder? Begründung!

20. Zeichne die Abwicklung eines Ikosaeders in die Ebene und stelle daraus ein Flächenmodell des Körpers her! Welche Symmetrieachsen und Symmetrieebenen besitzt das Ikosaeder (Abb. 254)?

Anleitung in Abb. 260: Je fünf an einer Ecke zusammenstoßende gleichseitige Dreiecke bilden eine gerade, regelmäßige fünfseitige Pyramide mit offener Grundfläche. Zeige am Flächenmodell des Körpers die 12 mit ihren Seitenflächen ineinandergreifenden fünfseitigen Pyramiden!

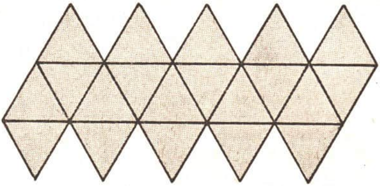


Abb. 260. Abwicklung des Ikosaeders

21. Verfahre in der gleichen Weise mit einem Dodekaeder. (Abb. 255)!

Anleitung in Abb. 261: Wähle für die „untere regelmäßige fünfseitige Schale" aus 6 regelmäßigen Fünfecken eine andere Farbe als für die „obere fünfseitige Schale"! Setze beide Schalen mit den ein räumliches Zehneck bildenden freien Kanten aneinander!

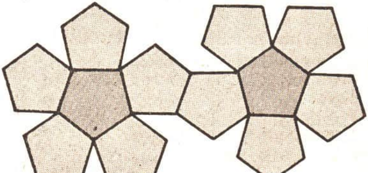


Abb. 261. Abwicklung des Dodekaeders

22. Zeichne das Bild
a) eines Ikosaeders,
b) eines Dodekaeders
in schräger Parallelprojektion!

Anleitung: Wähle als Verzerrungen a) $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{5}$; b) $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{3}$ (Abb. 254 und 255)!

23. Einem Würfel von gegebener Grundkante w ist ein Tetraeder einzubeschreiben. Wie groß ist die Tetraederkante t?

Anleitung (Abb. 262): Das Tetraeder hat halb soviel Ecken wie der Würfel, nämlich 4!

24. Einem Würfel von gegebener Grundkante w ist ein Oktaeder einzubeschreiben. Wie groß ist die Oktaederkante o?

Anleitung (Abb. 263): Das Oktaeder hat soviel Ecken wie der Würfel Flächen, nämlich 6!

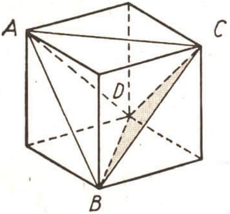


Abb. 262. Würfel und Tetraeder

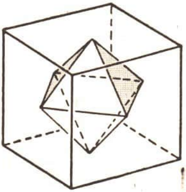


Abb. 263. Würfel und Oktaeder

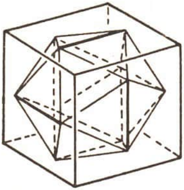


Abb. 264. Würfel und Ikosaeder

25. Einem Würfel von gegebener Grundkante w ist ein Ikosaeder einzubeschreiben. Zeichne das Bild der beiden ineinanderliegenden Körper in schräger Parallelprojektion!

Anleitung in Abb. 264: Das Ikosaeder hat doppelt soviel Ecken wie der Würfel Flächen, nämlich 12 Ecken. Je 2 Ecken des Ikosaeders (und damit 6 seiner Kanten) liegen in den Würfelquadraten. Ein Ikosaeder läßt sich daher „in eine würfelförmige Kiste so verpacken, daß es in dieser unbeweglich liegt". Die Ikosaederkante i ist der größere Abschnitt der stetig geteilten Würfelkante w.

26. Einem Würfel mit der Grundkante w ist ein Dodekaeder einzubeschreiben.

Ausführung in Abb. 265: Das Dodekaeder hat 20 Ecken. Davon liegen 12 Ecken (und damit 6 Kanten) des Dodekaeders auf dem umbeschriebenen Würfel des Dodekaeders; die übrigen 8 Ecken des Dodekaeders sind die Eckpunkte des dem Dodekaeder einbeschriebenen Würfels von der Kantenlänge $(w - d)$. Außen- und Innenwürfel des Dodekaeders liegen ähnlich. Beide Würfel haben denselben Mittelpunkt. Die Dodekaederkante d ist der kleinere Abschnitt der stetig geteilten Würfelkante w. Auch das Dodekaeder läßt sich „in eine würfelförmige Kiste so verpacken, daß es unbeweglich liegt".

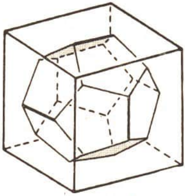


Abb. 265. Würfel und Dodekaeder

27. Einem Oktaeder mit der Grundkante o ist ein Würfel einzubeschreiben. Zeichne ein Bild der beiden ineinanderliegenden Körper in schräger Parallelprojektion! Wie groß ist die Würfelkante?

Anleitung: Der Würfel hat soviel Ecken wie das Oktaeder Flächen, nämlich 8.

28. Die Mittelpunkte der Flächen **a)** eines Würfels, **b)** eines Oktaeders sind die Ecken **a)** eines Oktaeders, **b)** eines Würfels. Beweis! Stelle jeden Körper mit dem ihm einbeschriebenen in schräger Parallelprojektion zeichnerisch dar!

29. Die Mittelpunkte der Flächen **a)** eines Ikosaeders, **b)** eines Dodekaeders sind die Ecken **a)** eines Dodekaeders, **b)** eines Ikosaeders. Beweis! Stelle jeden Körper mit dem ihm einbeschriebenen in schräger Parallelprojektion zeichnerisch dar!

Anleitung: Zeichne in die Bilder der Körper aus Aufgabe 22 die einbeschriebenen Körper! Zum Beweis: a) Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen jeder regelmäßigen fünfseitigen Pyramide eines Ikosaeders, so erhält man stets ein regelmäßiges Fünfeck! b) Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen jeder regelmäßigen „fünfseitigen Schale" des Dodekaeders, so erhält man stets eine regelmäßige fünfseitige Pyramide (ohne Grundfläche)! — Ikosaeder und Dodekaeder sind regelmäßige Polyeder! Vergleiche die Anzahl der Ecken und Flächen beim Ikosaeder und Dodekaeder!

IV. Vermischte Aufgaben über die regelmäßigen Körper

30. Einem Würfel mit der Grundkante w ist ein Tetraeder einbeschrieben. Wie verhalten sich **a)** die Grundkanten, **b)** die Oberflächen, **c)** die Rauminhalte der beiden Körper?
Anleitung: Zeichne zur Berechnung einen Diagonalschnitt der ineinanderliegenden Körper!

31. Einem Oktaeder mit der Grundkante o ist je ein Würfel umbeschrieben und einbeschrieben. Wie verhalten sich **a)** die Grundkanten, **b)** die Oberflächen, **c)** die Rauminhalte der drei Körper?

Anleitung: Zeichne zur Berechnung Mittelschnitte und Diagonalschnitte der drei ineinanderliegenden Körper. Wie groß sind die einzelnen Strecken jeder Schnittfigur?

32. Einem Tetraeder mit der Grundkante t ist ein Oktaeder einzubeschreiben. Wie verhalten sich **a)** die Grundkanten, **b)** die Oberflächen, **c)** die Rauminhalte der beiden Körper?
Anleitung in Abb. 266: Das Oktaeder hat soviel Ecken wie das Tetraeder Kanten, nämlich 6! Wie liegen die Oktaederflächen zu den Tetraederflächen? Zeichne einen Diagonalschnitt des Tetraeders; welcher Schnitt des einbeschriebenen Oktaeders liegt in diesem Diagonalschnitt des Tetraeders?

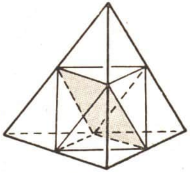


Abb. 266.
Tetraeder und Oktaeder

36. Die Ellipse als Bild des Kreises in Parallelprojektion

a) Abbildung eines Kreises durch Parallelprojektion

Eine kreisförmige Pappscheibe liegt in einer waagerechten Ebene. Ihre Bilder im Grund- und Aufriß sind in Abb. 267 dargestellt. Welche Form hat das Schattenbild der Kreisscheibe im Sonnenlicht auf einer lotrechten Bildebene?
Ein Kreis liegt in einer waagerechten Ebene. Seine Bilder in senkrechter Parallelprojektion im Grund- und Aufriß sind in Abb. 267 dargestellt. Welche Form hat das Bild des Kreises in schräger Parallelprojektion?

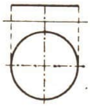


Abb. 267

b) Die Ellipse als Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion

Bei Abbildung durch schräge Parallelprojektion erscheinen Frontstrecken im Bild in wahrer Größe und Richtung, werden Tiefenstrecken im Bild auf denselben Winkel α gegen die Waagerechte geneigt und in demselben Verhältnis q verkleinert.

Für die Abbildung des gegebenen Kreises (Abb. 268 und 269) sind AB und sämtliche Parallelen zu AB Frontstrecken, sie erscheinen im Bild in wahrer Größe und Richtung. CD und sämtliche Parallelen zu CD dagegen sind Tiefenstrecken, sie werden im Bild sämtlich auf den Winkel α gegen die Waagerechte geneigt und im Verhältnis q verkürzt.

Das Bild des Kreises in schräger Parallelprojektion ist in Abb. 268 für die Verzerrung $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$, in Abb. 269 für die Verzerrung $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ gezeichnet.

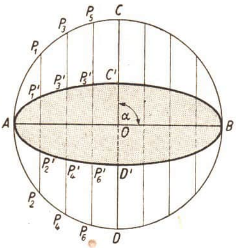


Abb. 268

Das Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion heißt Ellipse.

Die Abb. 268 und 269 lassen sich auch deuten als Drehung des Kreises um die Achse AB aus lotrechter Stellung in waagerechte Lage und Abbildung dieses Kreises durch schräge Parallelprojektion auf eine lotrechte Bildtafel.

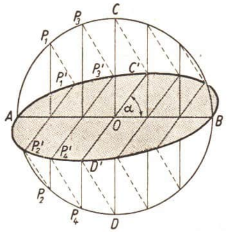


Abb. 269

Die Ellipse ist eine geschlossene Kurve. Der Mittelpunkt des Kreises wird bei Abbildung durch schräge Parallelprojektion **Mittelpunkt der Ellipse,** Durchmesser des Kreises werden **Durchmesser der Ellipse** (z. B. Durchmesser AB des Kreises wird Durchmesser AB der Ellipse, CD wird $C'D'$, Abb. 268, 269 und 270).

Zwei aufeinander senkrechte Durchmesser des Kreises sind z. B. AB und CD, ihre Bilder AB und $C'D'$ heißen **konjugierte**[1]) **Durchmesser der Ellipse.** Konjugierte Durchmesser einer Ellipse stehen im allgemeinen nicht senkrecht aufeinander (z. B. AB und $C'D'$ in Abb. 269 und 270).

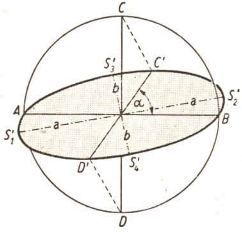


Abb. 270

Von allen konjugierten Durchmesserpaaren einer Ellipse ist ein Paar extrem, d. h. der eine Durchmesser erreicht den größtmöglichen, der konjugierte Durchmesser den kleinstmöglichen Wert. Nur dieses Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse steht senkrecht aufeinander ($S_1'S_2'$ und $S_3'S_4'$ in Abb. 270, vgl. Aufg. 6). Das senkrecht aufeinanderstehende extreme Paar konjugierter Durchmesser einer Ellipse bildet die **Achsen der Ellipse.** Die große Achse heißt **Hauptachse,** ihre Länge bezeichnet man mit $2a$; die kleine Achse heißt **Nebenachse,** ihre Länge bezeichnet man mit $2b$ (Abb. 270: $S_1'S_2' = 2a$, $S_3'S_4' = 2b$).

Die Ellipse ist eine zentrisch-symmetrische Kurve. Drehung der Ellipse um ihren Mittelpunkt O als Symmetriezentrum um 180° bringt die Kurve mit sich selbst

---

1) conjugare (lat.) heißt zusammenknüpfen, verknüpfen, zuordnen.

zur Deckung. In Abb 270 liegen z. B. die Punkte C' und D', S_3' und S_4', A und B, S_1' und S_2' symmetrisch zum Zentrum O.
Die Ellipse ist auch eine achsensymmetrische Kurve; sie liegt symmetrisch zur Haupt- und zur Nebenachse. Spiegelung der Ellipse an der Hauptachse $2a$ oder an der Nebenachse $2b$ bringt die Kurve mit sich selbst zur Deckung. Auch Umklappen der Ellipse um die Haupt- oder um die Nebenachse bringt diese Deckung mit sich selbst hervor. In Abb. 270 liegen z. B. die Punkte S_3' und S_4' symmetrisch zur Hauptachse $2a$, S_1' und S_2' symmetrisch zur Nebenachse $2b$.

c) Zeichnung der Ellipse als Kreisbild

1. Zeichnung der Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser, ($\alpha \neq 90°$)

Zu jedem konjugierten Durchmesserpaar gehört eine Ellipse (siehe Aufg. 7).
Die Zeichnung der Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser AB und $C'D'$, ($\alpha \neq 90°$, $q < 1$), ist in Abb. 271 dargestellt. Sämtliche Abbildungsdreiecke $PP'Q$ liegen ähnlich zueinander, für sämtliche Abbildungsdreiecke ist

$$\frac{P'Q}{PQ} = q.$$

Beachte, daß Kreis und Ellipse sich überschneiden (vgl. auch Aufg. 8)!

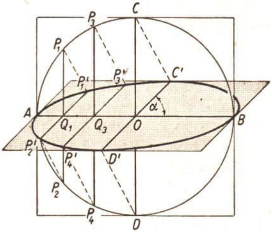


Abb. 271

2. Zeichnung der Ellipse aus den Achsen, ($\alpha = 90°$)

Bei Abbildung mit der Verzerrung $\alpha = 90°$, $q < 1$ stehen die beiden konjugierten Durchmesser der Ellipse senkrecht aufeinander. Die Ellipse ist dann aus den beiden Achsen, der Hauptachse mit der Länge $2a$ und der Nebenachse mit der Länge $2b$, zu zeichnen.

1. Lösung: Für die Verzerrung $\alpha = 90°$, $q < 1$ sind sämtliche Tiefenstrecken QP des Kreises nur im Verhältnis q zu verkürzen (Abb. 268 für $q = \frac{1}{3}$).

2. Lösung: Zeichnet man um O einen Hilfskreis mit der halben Nebenachse $b = aq$ als Radius und verbindet den abzubildenden Kreispunkt P mit O (Abb. 272), so liegt der Bildpunkt P' der Ellipse auf der Senkrechten von P auf die Hauptachse $2a$ (Frontstrecken bleiben erhalten!) und auf der Parallelen durch R zur Hauptachse $2a$ (Tiefenstrecken werden verkürzt!).

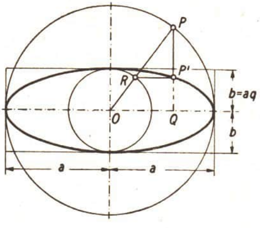


Abb. 272

Beweis: Nach dem 1. Strahlensatz ist $\frac{P'Q}{PQ} = \frac{RO}{PO} = \frac{b}{a} = \frac{aq}{a} = q.$

Für den Verzerrungswinkel $\alpha = 90°$ überschneiden sich Kreis und Ellipse nicht. Warum nicht (Aufgabe 9)?

Aufgaben

I. Abbildung eines Kreises durch senkrechte Parallelprojektion in Grund- und Aufriß

1. Zeichne Grund- und Aufriß eines Kreises **a)** in waagerechter, **b)** in lotrechter Lage!

II. Abbildung eines Kreises durch schräge Parallelprojektion

2. Zeichne das Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion für die folgenden Verzerrungen:

a) $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{2}$ **b)** $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$ **c)** $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{4}$!

Anleitung (Abb. 268): Die Punkte A, B und C', D' nennt man die Scheitel der Ellipse. A und B heißen die Hauptscheitel, C' und D' die Nebenscheitel der Ellipse. In den Hauptscheiteln ist die Ellipse am stärksten gekrümmt, in den Nebenscheiteln am wenigsten. Achte auf die Rundung der Ellipse an den Hauptscheiteln!

3. Zeichne das Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion für die folgenden Verzerrungen:

a) $\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{2}$ **b)** $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ **c)** $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{3}$ **d)** $\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{3}$!

Anleitung (Abb. 269): Zeichnung vieler Ellipsenpunkte erhöht praktisch nicht die Genauigkeit der Zeichnung! — Die Ellipsen überschneiden in den Hauptscheiteln den Kreis. Achte auf die Rundung der Ellipse an den Hauptscheiteln!

4. Stelle die Symmetrieeigenschaften der Ellipse zusammen! Welche geometrischen Transformationen überführen die Ellipse in sich?

Anleitung: Warum nennt man die Länge der Hauptachse einer Ellipse $2a$, der Nebenachse $2b$? Wie liegen die Hauptscheitel der Ellipse zueinander, wie die Nebenscheitel? Zeichne Ellipsenpunkte, die symmetrisch zum Mittelpunkt O, zur Hauptachse $2a$, zur Nebenachse $2b$ liegen! Führe die Transformationen mit einer Pappschablone praktisch durch!

5. Zeichne Paare aufeinander senkrechter Durchmesser eines Kreises! Die Bilder jedes senkrechten Kreisdurchmesserpaares in schräger Parallelprojektion heißen konjugierte Durchmesser der Ellipse. Stehen konjugierte Durchmesser der Ellipse im allgemeinen senkrecht aufeinander (Abb. 269 und 270)?

6. Drehe ein senkrechtes Kreisdurchmesserpaar um den Kreismittelpunkt O um 90°!

a) In welcher Weise drehen sich bei Abbildung des Kreises in schräger Parallelprojektion die konjugierten Durchmesser der Ellipse im Ellipsenbild mit? Welchen Winkel bilden die konjugierten Durchmesser miteinander am Anfang der Drehung, welchen am Ende?

b) In welchem Sonderfall stehen auch die konjugierten Durchmesser einer Ellipse aufeinander senkrecht? Wie nennt man dieses besondere Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse?

Anleitung in Abb. 270: Die Anfangslage der aufeinander senkrechten Kreisdurchmesser ist AB und CD. Die Anfangslage der abgebildeten konjugierten Durchmesser der Ellipse ist AB und $C'D'$. a) Das Kreisdurchmesserpaar drehe sich gleichmäßig um O um $+ 90°$; AB wird in DC, CD in AB übergeführt. Die konjugierten Durchmesser der Ellipse als Bilder des Kreisdurchmesserpaares drehen sich dabei ungleichmäßig um O; AB wird in $D'C'$ durch Drehung um α, $(\alpha < 90°)$; $C'D'$ in AB durch Drehung um $180° - \alpha$, $(180° - \alpha > 90°)$, übergeführt. Der Winkel zwischen den konjugierten Durchmessern der Ellipse ist am Anfang der Drehung α (in Abb. 270 ist $\alpha = 45°$), am Ende der Drehung $180° - \alpha$ (in Abb. 270 ist $180° - \alpha = 135°$).

b) Zwischen Anfangs- und Endstellung muß eine Stellung liegen, in welcher der Winkel zwischen den konjugierten Durchmessern der Ellipse gleich 90° ist. Dies ist in der Symmetrielage der Durchmesser zur Kurve der Fall. Dieses konjugierte Durchmesserpaar der Ellipse ist extrem, es sind die Achsen der Ellipse!

III. Die Ellipse als Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion

7. Begründe den Satz: Zu jedem konjugierten Durchmesserpaar gehört eine Ellipse!
Anleitung (Abb. 270): Laß Durchmesser AB konstant und verändere den konjugierten Durchmesser $C'D'$, ($C'D' < AB$), a) in seiner Länge bei gleichbleibender Richtung, (α konstant, q veränderlich), b) in seiner Richtung bei gleichbleibender Länge, (α veränderlich, q konstant). Jedem Fall entspricht ein Bild des Kreises mit dem Durchmesser AB in schräger Parallelprojektion bei wechselnden Verzerrungen.

8. Zeichne eine Ellipse als Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion aus einem Paar konjugierter Durchmesser für die Verzerrungen **a)** $\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{2}$; **b)** $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{3}$; **c)** $\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{3}$!
Anleitung (Abb. 271): Was wird bei der Abbildung durch schräge Parallelprojektion aus dem umbeschriebenen Quadrat des Kreises im Ellipsenbild?

9. Zeichne eine Ellipse als Bild eines Kreises in schräger Parallelprojektion aus den Achsen für die Verzerrung $\alpha = 90°$ und **a)** $q = \frac{1}{2}$, **b)** $q = \frac{1}{3}$, **c)** $q = \frac{1}{4}$!
Anleitung (Abb. 268 und 272): Was wird in diesem Fall der Abbildung aus dem umbeschriebenen Quadrat des Kreises im Ellipsenbild? Können sich Kreis und Ellipse überschneiden?

10. Wo liegen die Teilpunkte 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, ..., 180° einer Kreislinie bei Abbildung durch schräge Parallelprojektion mit der Verzerrung **a)** $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$, **b)** $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ (Abb. 273)?

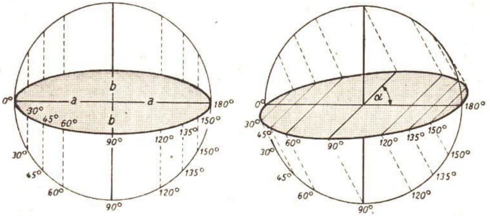


Abb. 273

37. Drehkörper: Gerader Zylinder und gerader Kegel

a) Der Zylinder

1. Der gerade Zylinder als Drehkörper

Dreht man ein Rechteck von den Seiten $2r$ und s um eine Symmetrieachse, so entsteht ein **gerader Zylinder** (Abb. 274). Die Drehachse wird **Körperachse.** Die Seite s (parallel der Achse) erzeugt bei der Drehung die krumme **Mantelfläche** des Zylinders als Drehfläche, die Seiten $2r$ (senkrecht zur Achse) erzeugen die kreisförmige **Grundfläche** und die kreisförmige **Deckfläche** des Zylinders. Die Fläche des Rechtecks erzeugt den **Zylinderkörper** als Drehkörper. s ist eine **Mantellinie** des Zylinders; sie ist gleich der **Höhe** h des Zylinders.

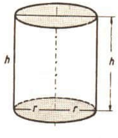


Abb. 274

Die Körperachse ist eine **Symmetrieachse** des Zylinders, jede Drehung des Körpers um sie bringt diesen mit sich selbst zur Deckung. Jede Ebene durch die Zylinder-

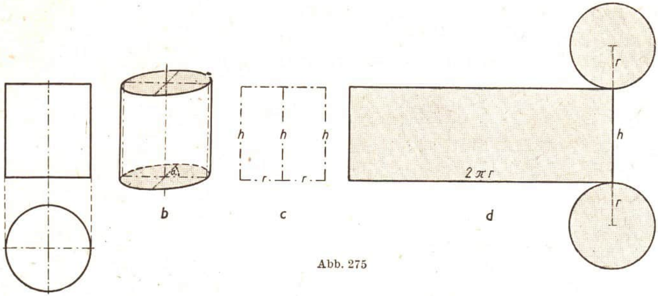


Abb. 275

achse ist Symmetrieebene des Zylinders. Jeder ebene Schnitt durch die Körperachse ergibt einen **Achsenschnitt** des Zylinders als Schnittfigur. Jeder Achsenschnitt eines geraden Zylinders ist ein Rechteck mit der Mantellinie $s = h$ und dem Grundkreisdurchmesser $2r$ als Seiten (Abb. 275c).
Jeder Zylinder ist zentrisch-symmetrisch zum gemeinsamen Mittelpunkt M aller seiner Achsenschnitte. Jeder Zylinder hat einen Mittelpunkt M.
Die krumme Mantelfläche eines geraden Zylinders ist **in die Ebene abwickelbar.** Der abgewickelte Zylindermantel ist ein Rechteck mit den Seiten h und $2\pi r$. In Abb. 275d ist die Abwicklung eines geraden Zylinders in die Ebene gezeichnet, aus ihr läßt sich ein Flächenmodell des Körpers herstellen.

2. Geometrische Darstellung eines geraden Zylinders

In Abb. 275a ist ein gerader Zylinder im Grund- und Aufriß geometrisch dargestellt. Abb. 274 zeigt das Bild eines geraden Zylinders in schräger Parallelprojektion für die Verzerrung $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$, Abb. 275b für $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$.

3. Berechnung des Zylinders

Rauminhalt des Zylinders. Wir vergleichen einen geraden Zylinder mit einem quadratischen Prisma gleichen Grundflächeninhalts πr^2 und gleicher Höhe h (Abb. 276, Aufg. 9). Beide Körper werden durch jede Parallelebene zur Grundebene ε in inhaltsgleichen Flächen geschnitten. Nach dem Cavalierischen Lehrsatz sind ihre Rauminhalte gleich, es ist

$$V = G \cdot h.$$

Der Rauminhalt eines Zylinders ist $V = \pi r^2 \cdot h$.

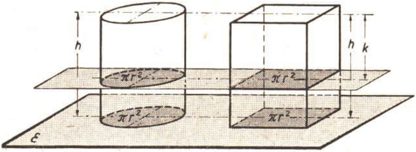


Abb. 276

Mantelfläche und Oberfläche des geraden Zylinders (Abb. 275d).

Der Mantel eines geraden Zylinders ist $M = 2\pi r h$, seine Oberfläche $O = 2\pi r h + 2\pi r^2$. Hierin ist r der Grundkreisradius und h die Höhe des Zylinders.

Gerade und schiefe Zylinder. Die bisherigen Ergebnisse sind für gerade Zylinder abgeleitet worden. Bei geraden Zylindern steht die Zylinderachse senkrecht auf der Zylindergrundfläche. Steht die Zylinderachse schief zur Zylindergrundfläche, so erhält man einen schiefen Zylinder (Abb. 277). Die Formel für den Rauminhalt V eines Zylinders gilt auch für schiefe Zylinder. Gib eine Begründung dafür (Abb. 277)! Die Formeln für den Mantel M und die Oberfläche O eines geraden Zylinders gelten nicht für schiefe Zylinder.

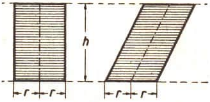


Abb. 277

Die betrachteten Zylinder sind Kreiszylinder. Es gibt noch weitere Zylinder, z. B. elliptische Zylinder (Aufgabe 48).

b) Der Kegel

1. Der gerade Kegel als Drehkörper

Dreht man ein gleichschenkliges Dreieck von der Basis $2r$, den Schenkeln s und der Höhe h um seine Symmetrieachse, so entsteht ein **gerader Kegel** (Abb. 278). Die Drehachse wird **Körperachse** des Kegels. Die Schenkel s des Dreiecks erzeugen bei der Drehung die krumme **Mantelfläche** des Kegels, die Basis $2r$ erzeugt die **Grundfläche** des Kegels oder seinen **Grundkreis.** Die Fläche des Dreiecks erzeugt den **Kegelkörper** als Drehkörper. s ist eine **Mantellinie** des Kegels, S seine **Spitze,** h die **Höhe** des Kegels.

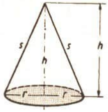


Abb. 278

Die Körperachse ist die **Symmetrieachse** des Kegels. Jede Drehung um sie bringt den Körper mit sich selbst zur Deckung. Jede Ebene durch die Kegelachse ist eine Symmetrieebene, jeder ebene Schnitt durch die Kegelachse ergibt einen **Achsenschnitt** des Kegels. Jeder Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $2r$, den Schenkeln s (Mantellinie des Kegels) und der Höhe h.

Die krumme Mantelfläche eines geraden Kegels ist **in die Ebene abwickelbar.** Der abgewickelte Kegelmantel ist ein Kreissektor mit dem Radius s und der Bogenlänge $b = 2\pi r$ (Abb. 279d). Die Abwicklung eines geraden Kegels in die Ebene ist in Abb. 279d gezeichnet; aus ihr läßt sich ein Flächenmodell des Körpers herstellen.

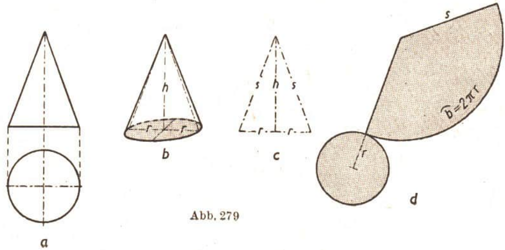


Abb. 279

2. Geometrische Darstellung eines geraden Kegels

In den Abb. 278 und 279 a, b sind die Bilder eines geraden Kegels im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion für die Verzerrungswinkel $\alpha = 90°$ und $\alpha = 45°$ dargestellt.

3. Berechnung des Kegels

Rauminhalt des Kegels. Wir vergleichen einen geraden Kegel mit einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide gleichen Grundflächeninhalts πr^2 und gleicher Höhe h (Abb. 280; Aufg. 22). Beide Körper werden durch jede Parallelebene zur Grundebene ε in inhaltsgleichen Flächen geschnitten, nach dem Cavalierischen Lehrsatz sind ihre Rauminhalte gleich, es ist

$$V = \tfrac{1}{3} G \cdot h.$$

Der Rauminhalt eines Kegels ist

$$V = \tfrac{1}{3} \pi r^2 \cdot h.$$

Hierin ist r der Grundkreisradius und h die Höhe des Kegels.

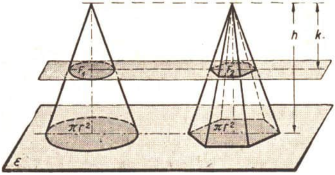


Abb. 280

Mantelfläche und Oberfläche des geraden Kegels (Abb. 279 d).

Der Mantel eines geraden Kegels ist $M = \dfrac{b \cdot s}{2} = \pi r s$, seine Oberfläche $O = \pi r s + \pi r^2$.

Hierin ist r der Grundkreisradius und s die Mantellinie des Kegels.

Gerade und schiefe Kegel. Die bisherigen Ergebnisse sind für gerade Kegel abgeleitet worden. Bei geraden Kegeln steht die Kegelachse senkrecht auf der Kegelgrundfläche. Steht die Kegelachse schief zur Kegelgrundfläche, so erhält man einen schiefen Kegel (Abb. 281). Die Formel für den Rauminhalt V eines Kegels gilt auch für schiefe Kegel. Gib eine Begründung dafür! Die Formeln für die Mantelfläche M und die Oberfläche O eines geraden Kegels gelten nicht für schiefe Kegel.
Die betrachteten Kegel sind Kreiskegel.

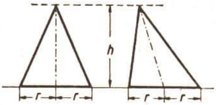


Abb. 281

Aufgaben

I. Der Zylinder

1. Schneide aus Pappe Rechtecke verschiedener Form und Größe und drehe die Rechtecke um eine Symmetrieachse! Welche Drehkörper entstehen?

2. Wie kann man auf der Drehbank einen zylindrischen Körper herstellen? Welche Symmetrieeigenschaften hat ein gerader Zylinder?

3. Stelle Zylinder von quadratischem Achsenschnitt durch Drehung her! Wie verhalten sich Grundkreisradius und Höhe zueinander?

4. Stelle einen lotrecht stehenden Zylinder a) mit rechteckigem, b) mit quadratischem Achsenschnitt im Grund- und Aufriß geometrisch dar!

5. Zeichne das Bild eines Zylinders mit rechteckigem bzw. quadratischem Achsenschnitt in schräger Parallelprojektion für die folgenden Verzerrungen:

a) $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{2}$ b) $\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$

c) $\alpha = 30°$, $q = \frac{1}{2}$ d) $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ e) $\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{3}$!

Welche Darstellungen entsprechen am meisten unserer Raumanschauung von Drehkörpern? Welche sind zeichnerisch am einfachsten (Abb. 274 und 275 b)?

6. Zeichne die Abwicklung eines geraden Zylinders a) von rechteckigem, b) von quadratischem Achsenschnitt in die Ebene und stelle Modelle der Zylinder her! Wie sehen die abgewickelten Mantelflächen der Zylinder aus?

7. Zeichne auf die abgewickelte Mantelfläche eines geraden Zylinders a) von rechteckigem, b) von quadratischem Achsenschnitt eine Schar von Mantellinien und senkrecht dazu eine zweite Schar paralleler Gerader! Was ergeben die beiden Parallelenscharen auf dem aufgewickelten Zylindermantel? Bleibt der rechtwinklige Schnitt der beiden Kurvenscharen bei Aufwicklung des Mantels erhalten?

8. Zeichne auf die Mantelfläche eines geraden, lotrecht stehenden Kreiszylinders eine Schar von Höhenlinien und eine Schar von Fallinien! Beide Scharen schneiden sich auf jeder Fläche rechtwinklig. Was ergeben beide Kurvenscharen bei Abwicklung des Zylindermantels in die Ebene?

9. Ein gerader Kreiszylinder vom Grundkreisradius r und der Höhe h und eine gerade quadratische Säule haben gleiche Grundflächeninhalte und gleiche Höhen. Wir stellen beide Körper auf eine Grundebene ε (Abb. 276).

a) Wie groß ist die Grundkante der quadratischen Säule?

b) Wie verhalten sich die Schnittflächen beim Schnitt beider Körper in gleicher Höhe parallel zur Grundebene? Wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper?

10. Berechne Rauminhalt, Mantel und Oberfläche eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r!

11. Die Achse eines schiefen Kreiszylinders vom Grundkreisradius r und der Höhe h ist unter 45° gegen die Grundfläche geneigt.

a) Zeichne einen Achsenschnitt, Grund- und Aufriß und ein Bild des Körpers in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$)! b) Wie groß ist der Rauminhalt des schiefen Zylinders?

12. Die in der Technik benutzten Formeln für den Rauminhalt und den Mantel eines geraden Zylinders benutzen an Stelle des Grundkreisradius r oft den leichter meßbaren Durchmesser $d = 2r$. Wie heißen dann die Formeln für V, M und O des geraden Zylinders?

13. Stelle Höhe, Mantel und Rauminhalt eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt als Funktionen a) des Grundkreisradius, b) des Grundkreisdurchmessers analytisch und zeichnerisch in gemeinsamen Achsenkreuzen dar!

II. Der Kegel

14. Schneide aus Pappe gleichschenklige Dreiecke verschiedener Form und Größe und drehe die Dreiecke um ihre Symmetrieachse! Welche Körper entstehen?

15. Wie kann man auf der Drehbank einen kegelförmigen Körper herstellen? Welche Symmetrieeigenschaften hat ein gerader Kegel?

16. Stelle Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt durch Drehung her! Wie drücken sich Mantellinie s und Höhe h dieser Kegel durch ihren Grundkreisradius r analytisch aus?

17. Stelle einen lotrecht stehenden Kegel **a)** mit gleichschenkligem ($s = 3r$), **b)** mit gleichseitigem Achsenschnitt im Grund- und Aufriß geometrisch dar!

18. Zeichne die Bilder der geraden Kegel aus Aufgabe 17 in schräger Parallelprojektion für die folgenden Verzerrungen:

a) $\alpha = 90°; q = \frac{1}{2}$ **b)** $\alpha = 90°; q = \frac{1}{3}$

c) $\alpha = 30°; q = \frac{1}{2}$ **d)** $\alpha = 45°; q = \frac{1}{2}$ **e)** $\alpha = 60°; q = \frac{1}{3}$!

Welche Darstellungen entsprechen am meisten unserer Raumanschauung von Drehkörpern? Welche sind zeichnerisch am einfachsten?

19. Zeichne die Abwicklungen der Kegel aus Aufgabe 17 in die Ebene und stelle Modelle der Körper her! Wie sehen die abgewickelten Mantelflächen der Kegel aus?

20. Zeichne auf den abgewickelten Mantel eines geraden Kegels, **a)** dessen Höhe, **b)** dessen Mantellinie gleich dem Grundkreisdurchmesser ist, je eine Schar von Mantellinien und eine Schar von Kreisbögen um die Kegelspitze S! Beide Linienscharen schneiden einander rechtwinklig (warum?). Was ergeben die beiden Linienscharen auf den aufgewickelten Kegelmänteln? Bleibt der rechtwinklige Schnitt der beiden Kurvenscharen bei Aufwicklung der Mäntel erhalten?

21. Zeichne auf die Mantelfläche eines geraden Kegels eine Schar von Höhenlinien und eine Schar von Fallinien! Beide Scharen schneiden sich auf jeder Fläche rechtwinklig. Was ergeben beide Kurvenscharen bei Abwicklung des Kegelmantels in die Ebene?

22. Ein gerader Kreiskegel vom Grundkreisradius r und der Höhe h und eine gerade sechsseitige Säule haben gleiche Grundflächeninhalte und gleiche Höhen. Wir stellen beide Körper auf eine Grundebene ε (Abb. 280).

a) Wie groß ist die Grundkante der sechsseitigen Säule?

b) Wie verhalten sich die Schnittflächen beim Schnitt beider Körper in gleicher Höhe parallel zur Grundebene?

c) Wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper?

23. Berechne Rauminhalt, Mantel und Oberfläche

a) eines Kegels mit gleichseitigem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r,

b) eines geraden Kegels mit der Höhe $h = r$!

24. Die Achsenschnitte dreier Kegel von gleichen Grundflächen sind **a)** ein gleichseitiges, **b)** ein gleichschenkliges, **c)** ein ungleichseitiges Dreieck. Zeichne die Grund- und Aufrisse und die Bilder der Kegel in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$)! Welche Kegel sind gerade, welches sind schiefe Kegel? Wie groß ist der Rauminhalt des schiefen Kegels?

25. Die in der Technik benutzten Formeln für den Rauminhalt und den Mantel eines geraden Kegels enthalten an Stelle des Grundkreisradius r oft den leichter meßbaren Durchmesser $d = 2r$. Wie heißen dann die Formeln für V, M und O des geraden Kegels?

26. Stelle Höhe, Mantel und Rauminhalt eines Kegels von gleichseitigem Achsenschnitt als Funktionen

a) des Grundkreisradius r, **b)** des Grundkreisdurchmessers d

analytisch und geometrisch in einem gemeinsamen Achsenkreuz dar!

III. Vermischte Aufgaben

27. Einem Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r ist eine regelmäßige **a)** dreiseitige, **b)** vierseitige, **c)** sechsseitige Pyramide gleicher Höhe einbeschrieben. Wie groß sind die Grundkanten und Rauminhalte der Pyramiden? Wie verhalten sich die Rauminhalte des Kegels und der Pyramiden?

Anleitung: Zeichne die beiden ineinanderliegenden Körper in zweckmäßiger Lage im Grund- und Aufriß und in einem für die Berechnung zweckmäßigen Schnitt!

28. Einem Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r ist eine regelmäßige **a)** dreiseitige, **b)** vierseitige, **c)** sechsseitige Pyramide gleicher Höhe umbeschrieben. Wie groß sind die Grundkanten und Rauminhalte der Pyramiden? Wie verhalten sich die Rauminhalte des Kegels und der Pyramiden?

29. Einem Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt und dem Grundkreisradius r ist ein Zylinder von quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben. Wie groß sind Grundkreisradius (ϱ) und Rauminhalt des Zylinders? Wie verhalten sich die Rauminhalte von Kegel und Zylinder?

Anleitung: Stelle die beiden ineinanderliegenden Körper im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$) geometrisch dar! Zeichne einen Achsenschnitt der beiden ineinanderliegenden Körper!

30. Einem Oktaeder mit der Grundkante a ist **a)** ein Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt, **b)** ein gerader symmetrischer Doppelkegel mit gemeinsamer Spitze und gleichseitigem Achsenschnitt einbeschrieben. Wie groß sind Grundkreisradius und Rauminhalt der einbeschriebenen Körper? Wie verhalten sich die Rauminhalte der ineinanderliegenden Körper?

31. Einem Tetraeder mit der Grundkante a ist ein Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben. Wie groß sind Grundkreisradius und Rauminhalt des Zylinders? Wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper?

IV. Angewandte Aufgaben

32. Ein zylindrisches Standglas soll als Meßzylinder geeicht werden. Der Boden des Standglases ist eben, sein lichter Durchmesser beträgt 26 mm.

a) Wie hängt der Inhalt der Zylinderfüllung vom Bodenabstand des Flüssigkeitsspiegels ab?

b) Stelle diese Abhängigkeit geometrisch dar und entnimm dem Funktionsbild die Teilung des Zylinders für 5, 10, 15, ..., 100 cm^2!

c) Zeichne ein Bild des Meßzylinders mit Teilung im Aufriß!

33. Ein Gasrohr aus Grauguß von $2\frac{3}{4}$ mm Wanddicke hat einen lichten Durchmesser von $\frac{3}{4}$ Zoll ($\frac{3}{4}''$). Wieviel wiegt ein Meter Gasrohr?

Anleitung: 1 Zoll = 25,4 mm.

34. Wieviel wiegt eine 850 mm lange Stahlwelle vom Durchmesser 125 mm?

35. In der Technik bestimmt man das Gewicht eines laufenden Meters Rundstahl oft durch die Faustformel $G \approx 612\, d^2$, wobei d in cm eingesetzt wird und das Ergebnis in p berechnet ist. Für Überschlagsrechnungen rundet man 612 auf 600. Begründe die Richtigkeit dieser Faustformel!

36. Wieviel wiegen die folgenden Rundstähle:

a) 1 m ○-Stahl 30 mm Durchmesser **b)** 75 m ○-Stahl 35 mm Durchmesser

c) 6,75 m ○-Stahl 45 mm Durchmesser?

37. Lokomotivkessel. Kessel der wichtigsten Lokomotivarten der Deutschen Reichsbahn (Abb. 282). Zwischen der Feuerbuchse und der Rauchkammer liegt der Hauptteil der Kesselanlage, der zylindrische Kessel. Er ist in seinem oberen Teil von Rauchrohren, im unteren Teil von Heizrohren durchzogen.

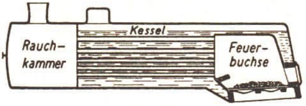


Abb. 282.
Längsschnitt eines Lokomotivkessels, vereinfacht

Bezeichnung der Lokomotiven	Sämtliche Maßangaben in cm							
	Kessel-		Heizrohre			Rauchrohre		
	Länge	Durchmesser	Anzahl	Durchmesser		Anzahl	Durchmesser	
				innen	außen		innen	außen
2 C 1-Schnellzuglok	580	190	129	4,9	5,4	43	13,5	14,3
2 C 2-Personenzuglok	470	180	155	4,5	5,0	41	12,5	13,3
1 E-Güterzuglok	580	190	127	4,9	5,4	43	13,5	14,3

Berechne **a)** den Wasserinhalt des Kessels unter der Annahme, daß drei Viertel des zylindrischen Kesselteils mit Wasser, der restliche Raum mit Dampf gefüllt sind,
b) die Heizfläche (Summe der Oberflächen sämtlicher Heiz- und Rauchrohre)!

38. Dampfzylinder der gleichen Lokomotiven wie in Aufgabe 37:

Bezeichnung der Lokomotiven	Zylinder-Durchmesser cm	Hublänge cm
2 C 1	66	66
2 C 2	60	66
1 E	72	66

Gib den Hubraum für jeden Zylinder an!

39. Wasserschlösser. Zum Ausgleich plötzlich auftretender Druckschwankungen sind in die Druckwasserleitungen des Pumpspeicherwerkes Niederwartha bei Dresden zwei Stahlblechzylinder als Wasserschlösser eingebaut. Ihre Durchmesser betragen 17 m, ihre Höhen 35 m.

a) Wieviel m^3 Wasser fassen beide Behälter?

b) Wieviel m^2 Stahlblech sind zu ihrem Bau verwendet worden?

40. Nahtlose Stahlrohre für hohe Drucke werden aus einem Stück gezogen.

a) Wie lang muß ein Stahlblock von quadratischem Querschnitt ($200 \cdot 200\ mm^2$) sein, wenn man aus ihm ein 12 m langes Stahlrohr mit einem lichten Durchmesser von 150 mm und einer Wanddicke von 4 mm ziehen will?

b) Aus einem 50 cm langen Stahlblock mit quadratischem Querschnitt ($200 \cdot 200\ mm^2$) wird ein Stahlrohr mit einer Wanddicke von 5 mm und einem lichten Durchmesser von 120 mm gezogen. Wie lang wird es?

41. Ein Einflammrohr-Dampfkessel ist 450 cm lang und hat einen Durchmesser von 150 cm. Der Durchmesser des Flammrohres beträgt 75 cm und ist aus Stahlblech von 7 mm Stärke gefertigt.

a) Wie groß ist die Heizfläche des Flammrohres?

b) Wie groß ist die für das Flammrohr benötigte Menge Stahlblech und sein Gewicht, wenn für Nieten und Laschen ein Zuschlag von 15% gerechnet wird?

c) Um wieviel vergrößert sich die Heizfläche des Flammrohres, wenn an Stelle von glattem Stahlblech gewelltes Stahlblech verwendet wird (vgl. Abschn. 31, Aufgabe 28)?

d) Zeichne den Dampfkessel in einem Längsschnitt und einem Querschnitt!

42. Eine Boje hat die Form eines Doppelkegels mit gemeinsamer Grundfläche. Ihre Gesamthöhe ist 1,50 m, der Durchmesser der gemeinsamen Kegelgrundfläche ist 0,60 m.

a) Wieviel m² Stahlblech werden zu ihrer Herstellung gebraucht (ohne Berücksichtigung der Schweißnähte)?

b) Wie schwer ist die Boje, wenn sie aus Stahlblech von 3 mm Stärke hergestellt ist?

c) Mit welchem Gewicht muß die Boje belastet werden, damit sie zur Hälfte unter Wasser tauchend schwimmt (Wichte von Meerwasser $\gamma = 1{,}02\ \mathrm{p/cm^3}$)?

d) Stelle die Boje im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{4}$) geometrisch dar!

43. Aus einem 75 mm langen runden Messingstab von 20 mm Durchmesser soll ein Senklot hergestellt werden, das die Form einer Walze mit zwei aufgesetzten Kegeln hat. An einem Ende des Messingstabes wird ein Kegel von 20 mm, am andern ein solcher von 5 mm Höhe abgedreht.

a) Wie groß ist der Rauminhalt des Senklotes?

b) Wieviel Abfall entsteht beim Abdrehen der Kegel?

c) Wieviel wiegt das Senklot (Wichte von Messing $\gamma = 8{,}8\ \mathrm{p/cm^3}$)?

d) Zeichne das Senklot in einem Längsschnitt und einem Querschnitt!

44. Ein Silo hat die Form eines Hohlzylinders mit aufgesetztem Kegel. Seine Gesamthöhe beträgt 8 m. Die Höhe des Zylinders ist $\frac{3}{5}$ der Gesamthöhe, sein innerer Durchmesser 4,80 m.

a) Wie groß ist das Fassungsvermögen des Silos?

b) Wieviel m² Blech wurden zu seiner Herstellung verbraucht?

c) Wie groß ist sein Gewicht, wenn 5 mm dickes Zinkblech verwendet wurde, von dem 1 m² 35,9 kp wiegt?

45. Wie groß ist der lichte Durchmesser einer Kapillare, die nach Einfüllung eines 8 cm langen Quecksilberfadens ein Mehrgewicht von 0,268 p aufweist? (Die Wichte des Quecksilbers bei 18° ist $\gamma = 13{,}551\ \mathrm{p/cm^3}$.)

46. Um einen genormten Glastrichter mit Filtrierpapier auszulegen, faltet man einen Kreis (Radius r) aus Filtrierpapier zweimal rechtwinklig, so daß das Papier die Gestalt eines Viertelkreises annimmt, und wölbt das zusammengefaltete Papier zu einem Kegel auf.

a) Welchen Durchmesser hat der Grundkreis des Kegels?

b) Welche Gestalt hat ein Achsenschnitt des Kegels?

c) Welche Gestalt und welchen Öffnungswinkel haben genormte Glastrichter?

d) Wie groß ist das Fassungsvermögen genormter Trichter mit einer Trichterweite von 4,5 cm; 7 cm; 10 cm; 15 cm; 25 cm bei einer Füllung?

e) Als Fassungsvermögen dieser Trichter werden 20 cm³; 75 cm³; 225 cm³; 750 cm³; 3,5 l angegeben. Wie groß sind die relativen Fehler dieser Angaben in Prozenten?

47. Genormte Kochtöpfe aus Aluminium haben nach den DIN-Vorschriften u. a. folgende Abmessungen:

		Flache Form			Hohe Form		
Durchmesser (innen)	d cm	22	24	26	22	24	26
Höhe (außen)	h cm	14	15	16	18,5	20	21,5
Wanddicke	s mm	2,1	2,1	2,2	2,1	2,1	2,2
Angegebener Inhalt	V in l	5,25	6,75	8,5	7	9	11,5

Berechne den Rauminhalt der Gefäße auf 3 Stellen genau! Wie groß ist der relative Fehler der angegebenen Rauminhalte in Prozenten?

48. Eine Gießkanne hat die Form eines geraden Zylinders mit elliptischer Grundfläche, eines elliptischen Zylinders. Die Achsen der elliptischen Grundfläche sind $2a = 24$ cm und $2b = 18$ cm; die Höhe der Gießkanne ist 24 cm (innen gemessen). Ihre Wanddicke ist 3 mm. Ihr Fassungsvermögen ist mit 8 l angegeben.

a) Wie groß ist das Fassungsvermögen der Gießkanne auf 3 Stellen genau?

b) Wie groß ist der relative Fehler des angegebenen Fassungsvermögens in Prozenten?

Anleitung: Der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$ ist $F = \pi ab$.

49. Fässer und Tonnen. Den Rauminhalt von Fässern und Tonnen berechnet man mit guter Annäherung wie den eines Zylinders gleicher Höhe mit mittlerem Faßdurchmesser d_m (Keplersche Faßregel[1]), Abb. 283).

Unter dem mittleren Durchmesser eines Fasses oder einer Tonne versteht man das arithmetische Mittel zwischen dem Bodenkreisdurchmesser d_1 und zwei Spundkreisdurchmessern d_2,

$$d_m = \frac{d_1 + d_2 + d_2}{3} = \frac{d_1 + 2d_2}{3}.$$

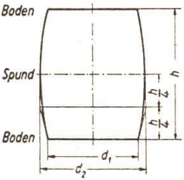


Abb. 283.
Längsschnitt eines Fasses

a) Begründe die Formel für den mittleren Durchmesser d_m eines Fasses!

b) Zeige, daß der mittlere Durchmesser eines Fasses auch $d_m = d_1 + \frac{2}{3}(d_2 - d_1)$ ist!

c) Zeige, daß der mittlere Radius eines Fasses $r_m = \frac{r_1 + 2r_2}{3}$ oder $r_m = r_1 + \frac{2 \cdot (r_2 - r_1)}{3}$ ist!

d) Leite die Näherungsformel für den Rauminhalt eines Fasses ab:

$$V_F \approx \pi r_m{}^2 \cdot h \quad \text{oder} \quad V_F \approx \frac{\pi}{4} d_m{}^2 \cdot h!$$

50. Wieviel Liter fassen die folgenden Fässer:

Spunddurchmesser d_2	**a)** 80 cm	**b)** 55 cm	**c)** 52 cm	**d)** 35 cm
Bodendurchmesser d_1	70 cm	47 cm	40 cm	28 cm
Höhe h	100 cm	90 cm	66 cm	55 cm

Die Wanddicke der Fässer ist durchweg 2 cm.

1) Johannes Kepler, 1571—1630, Astronom, Graz, Prag, Linz, Ulm, Regensburg. (Nova stereometria doliorum vinariorum, 1619.)

38. Körperstümpfe

a) Körperstümpfe

Schneidet man einen Körper oberhalb seiner Grundfläche durch eine Ebene, so zerfällt der Vollkörper in zwei Teile, den Körper**stumpf** und den **Ergänzungs**körper dieses Stumpfes. Ein Körperstumpf heißt *gerade*, wenn der zugehörige Vollkörper gerade ist.

b) Pyramidenstumpf

Schneidet man eine gerade Pyramide durch eine zur Grundfläche *parallele* Ebene, so zerfällt sie in einen **Pyramidenstumpf** und die Ergänzungspyramide dieses Stumpfes. Die zur Grundfläche parallele Schnittfläche heißt **Deckfläche** des Stumpfes. Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt **Höhe h** des Stumpfes.

1. Geometrische Darstellung eines Pyramidenstumpfes

In Abb. 284 ist ein quadratischer Pyramidenstumpf im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion und die Abwicklung des Stumpfes in die Ebene geometrisch dargestellt. Die Abwicklung läßt sich zu einem Flächenmodell des Körpers zusammenfalten.

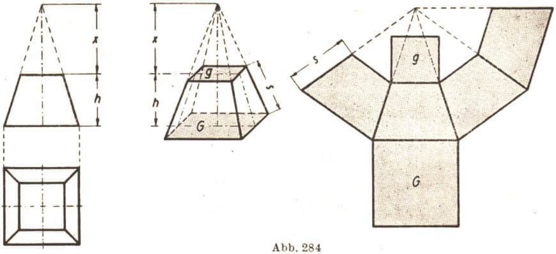


Abb. 284

2. Berechnung des Rauminhalts eines Pyramidenstumpfes

Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes ist (Abb. 284)

$$V = \tfrac{1}{3}G \cdot (h + x) - \tfrac{1}{3}g \cdot x,$$
$$V = \tfrac{1}{3}Gh + \tfrac{1}{3}x \cdot (G - g).$$

Die Höhe x der Ergänzungspyramide müssen wir nun anderweitig berechnen und ihren Wert einsetzen. Es verhält sich

$$\frac{G}{g} = \frac{(h+x)^2}{x^2}$$

oder

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} = \frac{h+x}{x}.$$

Durch korrespondierende Subtraktion oder durch Ausmultiplizieren und Ausklammern von x erhalten wir

$$\frac{\sqrt{G}-\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{h}{x},$$

$$x = \frac{h \cdot \sqrt{g}}{(\sqrt{G}-\sqrt{g})}.$$

Wir machen den Nenner rational, $x = \dfrac{h \cdot \sqrt{g} \cdot (\sqrt{G}+\sqrt{g})}{G-g}$.

Diesen Wert von x setzen wir in die Gleichung für V ein und erhalten

$$V = \frac{1}{3}\,Gh + \frac{1}{3}\,h\sqrt{g} \cdot (\sqrt{G}+\sqrt{g}) = \frac{h}{3}\,(G + \sqrt{Gg} + g).$$

Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes ist $\boldsymbol{V = \dfrac{h}{3}\,(G + \sqrt{Gg} + g)}$.

$V = \frac{h}{6}(G + g + 4M)$

c) Kegelstumpf

Schneidet man einen Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so zerfällt der Vollkegel in einen **Kegelstumpf** und den Ergänzungskegel dieses Stumpfes. Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt **Höhe** $\boldsymbol{h}$ des Kegelstumpfes. Der Teil der Mantellinie eines geraden Kegels zwischen Grund- und Deckfläche heißt Mantellinie s des geraden Kegelstumpfes.

1. Geometrische Darstellung eines Kegelstumpfes

In Abb. 285 ist ein gerader Kegelstumpf mit dem Grundflächenradius r, dem Deckflächenradius ϱ und der Höhe h im Grund- und Aufriß und in schräger Parallelprojektion geometrisch dargestellt.
Der **Achsenschnitt** eines geraden Kegelstumpfes ist ein gleichseitiges Trapez mit den parallelen Seiten $2r$ und 2ϱ und der Höhe h. Dreht man das Trapez um seine Achse, so wird der Kegelstumpf als Drehkörper erzeugt. Bei der Drehung erzeugt die Mantellinie s die **krumme Mantelfläche** des Kegelstumpfes als Drehfläche, der Radius r die

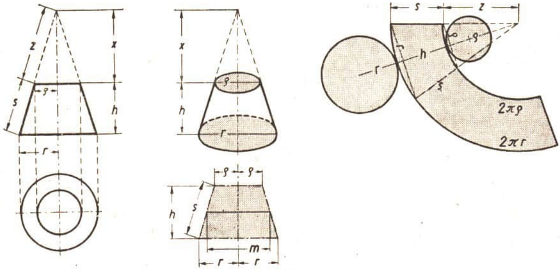


Abb. 285

Grundfläche, der Radius ϱ die Deckfläche (Abb. 285). Die krumme Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes ist **in die Ebene abwickelbar.** Der abgewickelte Kegelstumpfmantel ist ein **Kreisringstück** mit den Radien z und $s + z$, der Breite s und den Bogenlängen $2\pi\varrho$ und $2\pi r$ (Abb. 285).

Aus der Abwicklung läßt sich ein Flächenmodell des Kegelstumpfes herstellen.

2. Berechnung des Kegelstumpfes

Das Volumen des Kegelstumpfes ist (Abb. 285)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (h + x) - \frac{1}{3}\pi\varrho^2 x = \frac{\pi \cdot [r^2 h + x \cdot (r^2 - \varrho^2)]}{3}.$$

Wie beim Pyramidenstumpf müssen wir die Höhe x des Ergänzungskegels anderweitig berechnen und einsetzen.

In ähnlichen Dreiecken ist (Abb. 285) $\frac{x}{\varrho} = \frac{h}{r - \varrho}$,

$$x = \frac{\varrho \cdot h}{(r - \varrho)}.$$

Setzen wir diesen Wert von x in die Gleichung für V ein, so erhalten wir

$$V = \frac{\pi \cdot [r^2 h + \varrho h \cdot (r + \varrho)]}{3} = \frac{\pi h \cdot (r^2 + r\varrho + \varrho^2)}{3}.$$

Der Rauminhalt eines Kegelstumpfes ist $\boldsymbol{V = \frac{\pi h \cdot (r^2 + r\varrho + \varrho^2)}{3}}$.

Hierin sind r und ϱ die Radien der Grund- und der Deckfläche und h die Höhe des Kegelstumpfes.

Man kann den Kegelstumpf vergleichen mit einem Pyramidenstumpf von gleichem Grundflächeninhalt $G = \pi r^2$, gleichem Deckflächeninhalt $g = \pi\varrho^2$ und gleicher Höhe h (Abb. 280). Die Rauminhalte beider Körper sind nach dem Cavalierischen Lehrsatz gleich. Der Rauminhalt des Kegelstumpfes ist

$$V = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{Gg} + g\right) = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r\varrho + \varrho^2).$$

Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes ist (Abb. 285)

$$M = \pi r \cdot (s + z) - \pi\varrho \cdot z,$$
$$= \pi \cdot [rs + z(r - \varrho)].$$

In ähnlichen Dreiecken ist $\frac{z}{\varrho} = \frac{s}{r - \varrho}$,

$$z = \frac{\varrho \cdot s}{r - \varrho}.$$

Also ist $M = \pi(rs + \varrho s)$

$$= \pi s(r + \varrho).$$

Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes ist $\boldsymbol{M = \pi s(r + \varrho)}$.

Hierin sind r und ϱ die Radien und s die Mantellinie des geraden Kegelstumpfes.

Aufgaben

I. Pyramidenstumpf

1. Stelle einen quadratischen Pyramidenstumpf **a)** im Grund- und Aufriß, **b)** in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) geometrisch dar (Abb. 284)!

2. Zeichne einen Mittelschnitt und einen Diagonalschnitt des quadratischen Pyramidenstumpfes aus Aufgabe 1!

3. Zeichne die Abwicklung des quadratischen Pyramidenstumpfes aus Aufgabe 1 in die Ebene und falte sie zu einem Flächenmodell des Körpers zusammen (Abb. 284)!

4. In der Technik wird der Rauminhalt von Pyramidenstümpfen oft durch die Näherungsformel berechnet

$$V_{St} \approx G_m \cdot h.$$

Hierin ist G_m die mittlere Grundfläche, $G_m = \frac{G+g}{2}$. Unter welchen Bedingungen ist diese Näherungsformel mit guter Annäherung zulässig? Welche geometrische Bedeutung hat die Näherungsformel?

Anleitung:

Es soll werden $$\frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g) \approx \left(\frac{G+g}{2}\right) \cdot h,$$

$$2G + 2\sqrt{Gg} + 2g \approx 3G + 3g.$$

Es muß sein $$\sqrt{Gg} \approx \frac{G+g}{2}.$$

Wenn G und g wenig voneinander verschieden sind, ist $\sqrt{Gg} \approx \frac{G+g}{2}$ (geometrisches Mittel $\approx$ arithmetisches Mittel; vgl. „Mittelwerte" in Abschn. 29 und Abb. 161).

II. Kegelstumpf

5. Drehe **a)** ein Rechteck, **b)** ein Quadrat, **c)** ein gleichschenkliges Dreieck, **d)** ein gleichseitiges Dreieck, **e)** ein gleichschenkliges Trapez je um eine Symmetrieachse! Welche Drehkörper entstehen durch Drehung der erzeugenden Flächen? Welche Symmetrieverhältnisse bestehen bei den einzelnen Drehkörpern? Welche Drehflächen entstehen durch Drehung der erzeugenden „Mantellinien"? Zeichne Achsenschnitte der Drehkörper und benenne ihre Seiten (r, ϱ, s, h)! Welche geometrischen Zusammenhänge bestehen zwischen den Seiten der Achsenschnitte jedes einzelnen Körpers?

6. Stelle einen geraden Kegelstumpf **a)** im Grund- und Aufriß, **b)** in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{3}$) geometrisch dar (vgl. Abb. 285)!

7. Zeichne einen Achsenschnitt des Kegelstumpfes aus Aufgabe 6! Wie groß sind die einzelnen Strecken des Achsenschnitts?

8. Zeichne die Abwicklung des Kegelstumpfes aus Aufgabe 6 und stelle ein Flächenmodell des Stumpfes daraus her!

9. In der Technik wird für den Rauminhalt eines Kegelstumpfes oft die Näherungsformel benutzt:

$$V_{\mathrm{St}} \approx F_m \cdot h.$$

Hierin ist F_m die mittlere Grundfläche des Kegelstumpfes, sie wird aus dem mittleren Durchmesser m errechnet; es ist $F_m = \frac{\pi m^2}{4}$, wo $m = \frac{2r + 2\varrho}{2} = r + \varrho$ ist. Unter welchen Bedingungen ist die Näherungsformel mit guter Annäherung zulässig? Welche geometrische Bedeutung hat der mittlere Durchmesser m im Achsenschnitt des Kegelstumpfes (Abb. 285)? Welche geometrische Bedeutung hat die Näherungsformel?

10. Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes läßt sich auch durch die Formel ausdrücken

$$M = \pi m s.$$

Hierin ist m der mittlere Durchmesser des Kegelstumpfes. Ableitung der Formel! Welche geometrische Bedeutung hat diese Formel? Die Formel $M = \pi m s$ ist keine Näherungsformel!

11. In einem geraden Kegelstumpf mit dem Grundkreisradius r ist der Deckkreisradius gleich dem halben, seine Höhe gleich dem ganzen Grundkreisradius. Stelle **a)** die Mantellinie, **b)** den Mantel, **c)** den Rauminhalt als Funktionen von r analytisch und geometrisch dar!

III. Vermischte Aufgaben

12. Ein Wassereimer hat den oberen Durchmesser 28,5 cm, den unteren Durchmesser 19,5 cm und die Höhe (innen gemessen) 25,5 cm. Sein Fassungsvermögen ist mit 11 l angegeben. Wie groß ist das Fassungsvermögen des Eimers (ohne Berücksichtigung der Wanddicke)

a) nach der genauen Formel für das Kegelstumpfvolumen,

b) nach der Näherungsformel für das Kegelstumpfvolumen (auf 3 Stellen genau)?

c) Wie groß ist der relative Fehler des angegebenen Fassungsvermögens in Prozenten?

13. Eine Milchkanne hat unten die Form eines Hohlzylinders ($d = 30$ cm, $h = 20$ cm), verengt sich dann kegelstumpfartig bei einer Mantellinie von 10 cm auf einen Durchmesser von 18 cm und endigt in einen zylinderförmigen Aufsatz von 10 cm Höhe. Ihr Fassungsvermögen ist mit 20 l angegeben. Wieviel Liter faßt die Milchkanne (auf 3 Stellen genau)? Wie groß ist der relative Fehler des angegebenen Fassungsvermögens in Prozenten?

14. Ein Hochofen hat die in Abb. 287 angegebenen Maße. Wie groß ist der nutzbare Rauminhalt des Hochofens, der sich aus den Rauminhalten des Gestells, der Rast und des Schachtes zusammensetzt (auf 3 Stellen genau)?

15. Die Durchmesser eines Baumstammes (ohne Rinde) sind 48 cm und 38 cm, der Stamm ist 10 m lang.

a) Wieviel Festmeter Holz liefert der Baumstamm nach der genauen Formel und nach der Näherungsformel für das Kegelstumpfvolumen?

b) Wieviel Prozent beträgt der relative Fehler der Näherungslösung (auf 3 Stellen genau)?

16. Ein Baumstamm von 6 m Länge hat einen oberen Umfang von 2,50 m und einen unteren Umfang von 3,20 m (ohne Rinde). Wieviel Festmeter Holz liefert er (auf 3 Stellen genau)?

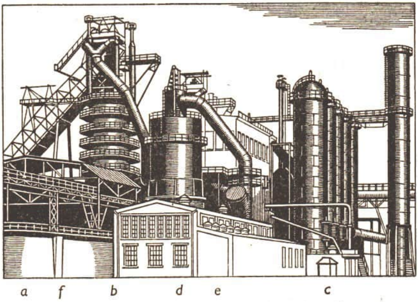


Abb. 286. Gesamtanordnung eines Hochofenwerkes
a) Schrägaufzug, b) Hochofen, c) Winderhitzer, d) Staubsack,
e) Elektr. Gaseinzug, f) Gießhütte

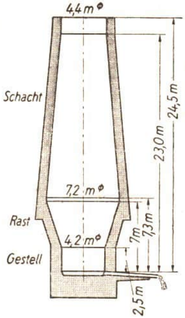


Abb. 287. Hochofen

39. Die Kugel

a) Die Kugel als Drehkörper

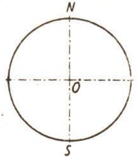


Abb. 288

Dreht man einen Kreis um eine Achse NS (Abb. 288), so erzeugt die Kreisfläche einen **Kugelkörper** als Drehkörper und die Kreislinie die **Kugeloberfläche** als Drehfläche. Der Kreismittelpunkt wird Kugelmittelpunkt O, sämtliche Kreisradien r werden Kugelradien r.

Die Kugel ist der geometrische Ort für alle Punkte im Raum, die von einem festen Punkt, dem Kugelmittelpunkt, gleiche Entfernung haben.

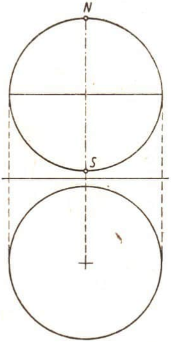
Die Kugel ist zentrisch-symmetrisch zum Kugelmittelpunkt O. Jede Sehne durch den Mittelpunkt nennt man einen **Durchmesser** der Kugel. Jeder Durchmesser ist **Symmetrieachse** der Kugel. Jede Drehung um eine Kugelachse überführt die Kugel in sich. Jede Ebene durch den Kugelmittelpunkt ist **Symmetrieebene** der Kugel, Spiegelung an ihr ergibt wieder die Kugel.

Jede Ebene durch den Kugelmittelpunkt schneidet die Kugel in einem größten Kugelkreis, einem **Großkreis** der Kugel mit dem Radius r. Jeder Großkreis ist ein **Achsenschnitt** der Kugel.

Die Endpunkte einer Kugelachse nennt man **Pole N und S** der Kugel. Die Bezeichnung rührt von der Erdkugel[1]) her (Nordpol N und Südpol S). Der zu einer Kugelachse senkrechte Großkreis (Symmetrieschnitt) heißt **Äquator.**

b) Geometrische Darstellung einer Kugel

In Abb. 289a sind Grund- und Aufriß einer Kugel mit lotrecht stehender Kugelachse NS dargestellt. In Abb. 289b ist ein Kugelbild mit geneigter Kugelachse NS in senkrechter Parallelprojektion auf eine Aufrißebene ε_2 und in Abb. 289c ein Kugelbild mit lotrecht stehender Kugelachse NS in schräger Parallelprojektion (Verzerrung $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) gezeichnet. Für Abbildungen in senkrechter Parallelprojektion ist der Kugelumriß ein Kreis mit dem Kugelradius r (Abb. 289a und b),



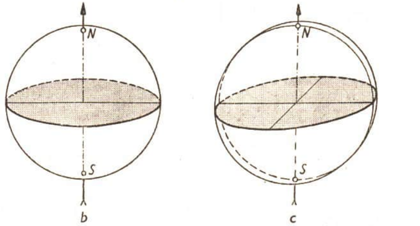


Abb. 289. Abbildung einer Kugel. a und b: durch senkrechte, c durch schräge Parallelprojektion

1) Die Abplattung der Erde ist so gering $\left(\approx \frac{1}{300}\right)$, daß sie in verkleinerten Zeichnungen der Erdkugel nicht bemerkbar ist. Sie beträgt z. B. für eine gezeichnete Erdkugel von 10 cm Radius annähernd 0,03 cm oder $\frac{3}{10}$ mm!

für Abbildungen in schräger Parallelprojektion eine Ellipse mit der Hauptachse $2a > 2r$ und der Nebenachse $2b = 2r$ (Abb. 289c).
Das Bild der Kugel in schräger Parallelprojektion (Abb. 289c) erscheint uns verzerrt, da wir gewohnt sind, den Kugelumriß als Kreis zu sehen. Die gebräuchlichste Abbildung einer Kugel ist daher ihre Abbildung durch senkrechte Parallelprojektion, sie ist auch zeichnerisch die einfachste geometrische Darstellung einer Kugel. Sobald der Äquator einer Kugel im Bild als Ellipse und nicht als Gerade erscheint, liegen die Bilder der Pole bei senkrechter und schräger Parallelprojektion nicht mehr auf dem Kugelumriß (siehe Abb. 289 b und c).
Die krumme Kugeloberfläche ist **nicht in die Ebene abwickelbar.** Man kann daher kein wirklichkeitstreues Abbild der Kugeloberfläche und der Figuren auf ihr in der Ebene entwerfen.

c) Berechnung der Kugel

1. Berechnung der Rauminhalte einer Halbkugel und einer Kugel

Eingrenzung des Halbkugelvolumens. Wird einer Halbkugel vom Radius r ein Zylinder gleicher Grundfläche und Höhe umbeschrieben und ein Kegel gleicher Grundfläche und Höhe einbeschrieben, so ist das Halbkugelvolumen V_H größer als das Kegel-, aber kleiner als das Zylindervolumen (Achsenschnitte der Körper in Abb. 290). Es ist

$$\frac{\pi r^3}{3} < V_H < \frac{3\pi r^3}{3}.$$

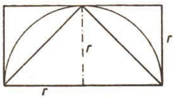


Abb. 290

Das Halbkugelvolumen liegt zwischen $\frac{1}{3}\pi r^3$ und $\frac{3}{3}\pi r^3$.
Um den Rauminhalt der Halbkugel zu bestimmen, suchen wir einen Körper R von gleicher Grundfläche und Höhe wie die Halbkugel, dessen Parallelschnitte zur Grundfläche denselben Flächeninhalt haben wie die entsprechenden Schnittflächen der Halbkugel und dessen Rauminhalt wir mit den bisherigen Formeln berechnen können. Auf die Halbkugel und diesen Körper R wenden wir dann den Cavalierischen Lehrsatz an.

Halbkugel und inhaltsgleicher Restkörper R. Die Schnittfläche eines ebenen Schnitts durch die Halbkugel, parallel zur Halbkugelgrundfläche im Abstand z von dieser, ist ein Kreis mit dem Radius ϱ (Abb. 291), seine Fläche ist

$$F = \pi\varrho^2.$$

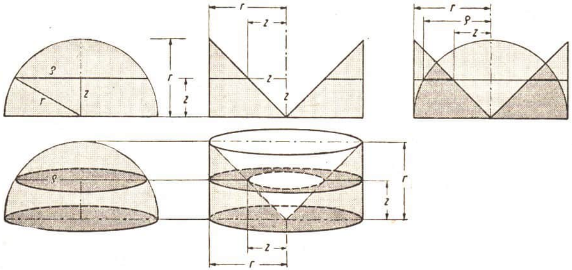


Abb. 291. Halbkugel und Restkörper

Hierin ist $\varrho^2 = r^2 - z^2$ (pythagoreischer Lehrsatz),

also ist $F = \pi (r^2 - z^2) = \pi r^2 - \pi z^2$.

Dieser Ausdruck für F stellt geometrisch die Fläche eines **Kreisrings** mit den Radien r und z dar. Solche Kreisringe entstehen als Schnittflächen in jeder Höhe z, wenn man den umbeschriebenen Zylinder einer Halbkugel (Schnittkreis πr^2) durch einen mit der Spitze nach unten liegenden Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe (Schnittkreis πz^2) aushöhlt (siehe Abb. 291). Ein derartiger ausgehöhlter Körper heißt ein **Restkörper *R*.**

Die Halbkugel und der betrachtete Restkörper R besitzen in jeder Höhe z Schnittflächen verschiedener Form, aber gleichen Flächeninhalts, die beiden Körper sind nach dem Cavalierischen Lehrsatz rauminhaltsgleich. Es ist

$$V_{\mathrm{H}} = V_{\mathrm{R}}.$$

Der Rauminhalt des Restkörpers läßt sich berechnen, er ist

$$V_{\mathrm{R}} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Also ist der Rauminhalt der Halbkugel

$$V_{\mathrm{H}} = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Der Rauminhalt einer Kugel vom Radius r ist $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

2. Berechnung der Kugeloberfläche

Wird einer Kugel ein beliebiger konvexer Körper mit n ebenen Flächen umbeschrieben und werden alle Ecken des Körpers mit dem Kugelmittelpunkt verbunden, so entstehen n Pyramiden, die alle gleiche Höhe r haben. Ihre Rauminhalte sind

$$V_1 = \tfrac{1}{3} G_1 \cdot r, \quad V_2 = \tfrac{1}{3} G_2 \cdot r, \quad \ldots, \quad V_n = \tfrac{1}{3} G_n \cdot r.$$

Die Summe ihrer Rauminhalte ist

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \tfrac{1}{3}(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) \cdot r.$$

Vergrößert man n immer mehr, so nähert sich die Summe der Grundflächen immer mehr der Kugeloberfläche O und die Summe der Rauminhalte immer mehr dem Kugelvolumen $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Es ist also $$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot O \cdot r,$$

oder $$O = 4\pi r^2.$$

Die Oberfläche einer Kugel vom Radius r ist $O = 4\pi r^2$.

Das durchgeführte Verfahren zur Berechnung des Rauminhalts einer Kugel stammt von Archimedes[1]).

1) Archimedes, von etwa 287 bis 212 v.d. Ztr., Syrakus (vgl. auch die Berechnung eines guten Näherungswertes für die Zahl π durch Angabe einer oberen und unteren Schranke, $3\frac{10}{70} < \pi < 3\frac{10}{71}$, in Abschn. 31, Aufgabe 5).

Aufgaben

I. Geometrische Darstellung einer Kugel

1. Drehe eine kreisförmige Pappscheibe um einen Durchmesser NS als Achse! Welchen Körper erzeugt die Kreisfläche bei der Drehung? Welche Fläche erzeugt die Kreislinie bei der Drehung?

2. Beweise die folgenden Sätze durch Drehen eines Kreises um eine Achse NS:

a) Schneidet eine Ebene eine Kugel, so ist die Schnittfigur der Ebene mit der Kugel ein Kreis.

b) Jede Ebene durch den Kugelmittelpunkt ist eine Symmetrieebene der Kugel.

c) Die Schnittfigur einer Symmetrieebene mit einer Kugel ist ein Großkreis!

3. Beweise: Schneiden zwei Kugeln einander, so ist die Schnittfigur der beiden Kugeln ein Kreis! Anleitung: Laß zwei sich schneidende Kreise um ihre Zentrale als Drehachse sich drehen! Welche Körper erzeugen die beiden Kreisflächen bei der Drehung? Welche Schnittfigur erzeugt die gemeinsame Sehne beider Kreise bei der Drehung?

4. Beweise: Zwei verschiedene Großkreise einer Kugel halbieren sich stets! Anleitung: Laß den einen Großkreis um den gemeinsamen Durchmesser der beiden Großkreise sich drehen!

5. Beweise: Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r ist der Großkreisbogen durch diese Punkte! Großkreise auf einer Kugelfläche entsprechen geraden Linien in der Ebene! Anleitung: Jede Ebene durch die beiden Kugelpunkte P_1 und P_2 schneidet die Kugel in einem Kreis vom Radius $\varrho \leqq r$. Welcher von allen möglichen Kreisbögen mit dem Radius $\varrho \leqq r$ durch zwei feste Punkte P_1 und P_2 hat die kürzeste Bogenlänge?

6. Stelle eine Kugel mit lotrechter Kugelachse NS in senkrechter Parallelprojektion im Grund- und Aufriß dar und zeichne ihr Bild in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$)! Beachte die Lage der Pole N und S im Aufriß und in der Abbildung durch schräge Parallelprojektion (Abb. 289a und c)!

7. Abwickelbare und nicht-abwickelbare krumme Flächen.

a) Stelle die krummen Flächen zusammen, die in die Ebene abwickelbar sind! Welche Formen haben die Abwicklungen dieser krummen Flächen in die Ebene? In welcher Weise werden diese abwickelbaren krummen Flächen als Drehflächen erzeugt (Geradenflächen)?

b) Die krumme Kugelfläche ist nicht in die Ebene abwickelbar. In welcher Weise wird die Kugelfläche als Drehfläche erzeugt?

8. a) Zeichne auf die Mäntel eines lotrecht stehenden geraden Kreiszylinders und eines lotrecht stehenden geraden Kreiskegels ein Netz sich senkrecht schneidender Höhenlinien und Fallinien! Welche Kurven entstehen auf den Mantelflächen der Körper?

b) Zeichne ein Netz von Höhenlinien und Fallinien auf die Oberfläche einer Kugel! Welche Kurven entstehen auf der Kugelfläche?

9. Bilde das Gradnetz der nördlichen Erdhälfte von 30° zu 30° durch senkrechte Parallelprojektion ab (Abb. 292)!

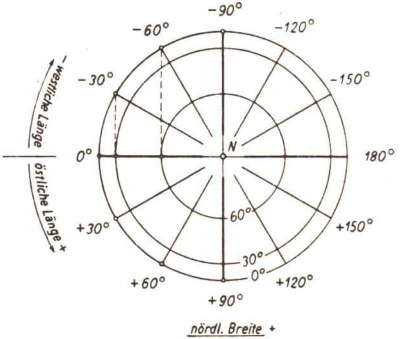


Abb. 292

10. Bilde das Gradnetz der östlichen Erdhälfte von 30° zu 30° durch senkrechte Parallelprojektion (Abb. 293)!

11. Diese Abbildungen je einer halben Erdoberfläche durch senkrechte Parallelprojektion auf eine waagerechte Bildebene (Aufg. 9) oder eine lotrechte Bildebene (Aufg. 10) nennt man orthographische[1]) Projektionen der Erdkugel. Bleiben bei Abbildung durch orthographische Projektion Flächen in ihrer Größe und Gestalt und Winkel in ihrer Größe im Bild erhalten, sind Erdkarten in orthographischer Projektion flächentreu und winkeltreu?

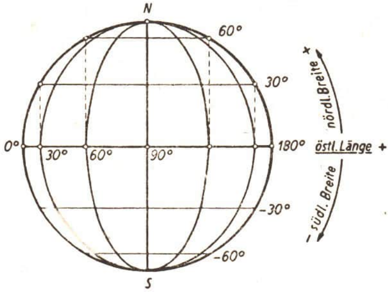


Abb. 293

II. Berechnung der Kugel

12. Zeichne die Abwicklung des Restkörpers R aus Abb. 291 in die Ebene und stelle daraus ein Flächenmodell des Restkörpers her!

13. Die in der Technik benutzten Formeln für den Rauminhalt und die Oberfläche einer Kugel enthalten an Stelle des Kugelradius r oft den leichter meßbaren Kugeldurchmesser $d = 2r$. Wie heißen dann die Formeln für V und O der Kugel?

14. Stelle Oberfläche und Rauminhalt einer Kugel als Funktionen **a)** des Kugelradius r, **b)** des Kugeldurchmessers $d = 2r$ analytisch und geometrisch dar!

15. Bei Überschlagsrechnungen rundet man in der Technik den Rauminhalt einer Kugel vom Durchmesser d oft auf $V \approx \frac{1}{2}d^3$. Begründe diese Näherungsformel!

16. Vergleiche die Oberfläche einer Kugel mit dem Mantel des ihr umbeschriebenen Zylinders!

17. Vergleiche den Mantel einer Halbkugel **a)** mit dem Mantel des ihr umbeschriebenen Zylinders, **b)** mit dem Mantel des umbeschriebenen Kegelstumpfes, der die Halbkugel im Begrenzungskreis seiner mittleren Grundfläche F_m berührt (vgl. Abschn. 38, Aufg. 9 und Abb. 294)!

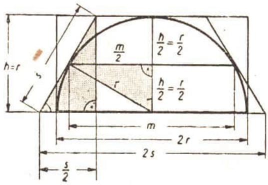


Abb. 294

18. Ein Zylinder, eine Halbkugel und ein Kegel haben gleiche Grundflächen und Höhen. Wie verhalten sich **a)** die Rauminhalte, **b)** die Mäntel, **c)** die Oberflächen der drei Körper („Archimedische Körper")?

19. Ein Zylinder, eine Kugel und ein Kegel haben gleiche Radien und gleiche Höhen. Wie verhalten sich die Rauminhalte der drei Körper?

---

1) orthographisch (gr.) heißt senkrecht gezeichnet; eine orthographische Projektion ist eine senkrechte Parallelprojektion.

III. In- und Umkugel von Körpern

20. Wie groß sind Radius und Rauminhalt **1)** der einbeschriebenen, **2)** der umbeschriebenen Kugel **a)** eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt, **b)** eines Kegels mit gleichseitigem Achsenschnitt und je dem Grundkreisradius r? Wie verhalten sich die Rauminhalte der ineinanderliegenden Körper?

Anleitung: Zeichne Achsenschnitte der ineinanderliegenden Körper!

21. Wie groß sind Radius und Rauminhalt **1)** der einbeschriebenen, **2)** der umbeschriebenen Kugel **a)** eines Würfels, **b)** eines Tetraeders, **c)** eines Oktaeders je mit der Grundkante a? Wie verhalten sich die Rauminhalte der ineinanderliegenden Körper?

IV. Angewandte Aufgaben

22. Wie groß ist das Gewicht einer Kugel aus Grauguß von 200 mm Durchmesser?

23. Eine Boje aus Stahlblech soll Kugelform erhalten und 150 kp wiegen. Wie groß müssen Durchmesser und Wanddicke gewählt werden, wenn die Boje im Meerwasser zur Hälfte eintauchen soll (mittlere Wichte von Meerwasser $\gamma = 1{,}02$ kp/dm^3)?

24. Zum Vorwärmen der in einen Hochofen gepreßten Frischluft dienen 3 bis 5 Winderhitzer (Abb. 286 und 295). In diesen geben die aus dem Hochofen kommenden Abgase (Gichtgase) ihre Wärme an ein Schamottegitterwerk ab. Heißluft von einer Temperatur bis 800° wird dann dem Hochofen zugeführt. Abb. 295 zeigt einen Winderhitzer im Längs- und Querschnitt.

a) Wie groß ist der gesamte Hohlraum des Winderhitzers?

b) Wie groß ist der für Wärmespeicherung ausnutzbare Raum des Winderhitzers?

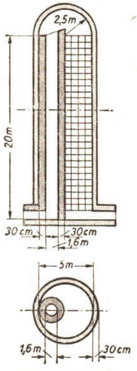


Abb. 295. Winderhitzer

25. Genormte Rundkolben aus Glas (Kugelform mit Hals) haben nach den DIN-Vorschriften u. a. die folgenden Durchmesser: 9 cm, 10,5 cm, 12 cm. Ihr Kochinhalt wird mit 300 cm^3, 500 cm^3, 750 cm^3 angegeben.

a) Wie groß ist der wirkliche Rauminhalt der Rundkolben?

b) Welcher Teil des Rauminhaltes (in Prozenten) bleibt bei obiger Inhaltsangabe ungefüllt (auf 3 Stellen genau)?

26. Moderne Gasbehälter werden als Hochdruck-Kugelgasbehälter oder als Kolbengasbehälter ausgeführt. Kugelgasbehälter haben kugelförmige Gestalt, in ihnen kann das Gas unter hohem Druck stark zusammengepreßt werden. Im Kolbengasbehälter (Abb. 296, Längsschnitt) wird das Gas unten seitlich eingeführt und hebt dabei den kuppelförmigen Abschlußkolben, der genau in die Bodenwölbung des Behälters paßt.

a) Wie groß ist das Fassungsvermögen eines Hochdruck-Kugelgasbehälters von 21,3 m Durchmesser? Auf wieviel Atmosphären wird das Gas in ihm zusammengepreßt, wenn sein nutzbarer Rauminhalt mit 25 000 m^3 angegeben ist?

b) Wie groß ist das nutzbare Fassungsvermögen des Kolbengasbehälters aus Abb. 296?

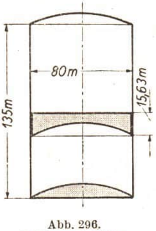


Abb. 296.
Kolbengasbehälter

Überschlagsrechnungen: Erst schätzen, dann berechnen (auf 2 Stellen genau)!

27. Bei einer Planung kann ein Gasbehälter von 1 000 m^3 Fassungsvermögen als Kugelgasbehälter oder als Kolbengasbehälter ausgeführt werden.

a) Wieviel m^2 Stahlblech braucht man schätzungsweise für jede Ausführung, wenn für den nutzbaren Raum des Kolbengasbehälters seine Höhe zum Durchmesser im Verhältnis 3 : 2 stehen soll und wenn für den Kolben der nutzbaren Höhe noch $\frac{1}{8}$ zuzuschlagen ist?

b) Wieviel m^2 Stahlblech würde man brauchen, wenn der Gasbehälter als Würfel ausgeführt werden sollte?

28. Kann ein Mensch eine Korkkugel von 1 m Radius aufheben? (Wichte des Korks $\gamma = 0{,}2\ \text{p/cm}^3 = 200\ \text{kp/m}^3$.)

29. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn wir die Erde als Kugel mit dem Radius $r = 6370$ km ansehen?

30. Wie groß sind die Massen der folgenden Himmelskörper:

a) Erde (Radius $r = 6\,370$ km; mittlere Dichte 5,55 g/cm^3);

b) Mond (Radius $r = 1\,738$ km; Dichte 3,3 g/cm^3);

c) Sonne (Radius $r = 695\,300$ km; Dichte 1,4 g/cm^3)?

Anleitung: Schreibe die gegebenen Größen mit abgetrennten Zehnerpotenzen, schätze zuerst und rechne dann aus!

40. Kugelteile

a) Kugelteile als Drehkörper

1. Drehkörper: Kugelsegment und Kugelsektor

Dreht man ein Kreissegment (Kreisabschnitt) von der Höhe h und dem zugehörigen Kreisradius r um seine Achse, so entsteht ein **Kugelsegment** (Kugelabschnitt) von der Höhe h und dem zugehörigen Kugelradius r (Abb. 297).

Dreht man einen Kreissektor (Kreisausschnitt) von der Höhe h und dem Kreisradius r um seine Achse, so entsteht ein **Kugelsektor** (Kugelausschnitt) mit dem Kugelradius r (Abb. 298).

Ein Kugelsektor setzt sich aus dem **zugehörigen Kugelsegment** von der Höhe h und dem **Ergänzungskegel** zusammen, der den Schnittkreis des Kugelsegments zur Grundfläche und den Kugelmittelpunkt zur Spitze hat. Unter der **Höhe eines Kugelsektors** versteht man die Höhe h des zugehörigen Kugelsegments. Kugelsegment und Kugelsektor bezeichnet man als **Kugelteile.**

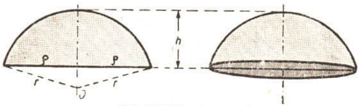


Abb. 297. Kugelsegment

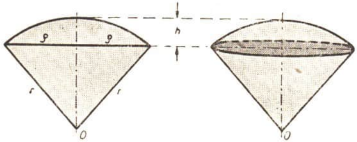


Abb. 298. Kugelsektor

2. Drehflächen: Kugelkappe

Bei der Drehung eines Kreissegments um seine Achse erzeugt der Bogen des Kreissegments die Mantelfläche, die Sehne den Schnittkreis des Kugelsegments. Die krumme Mantelfläche eines Kugelsegments nennt man **Kugelkappe** (Abb. 297). Die Oberfläche eines Kugelsegments setzt sich aus seiner Kugelkappe (**krumme** Mantelfläche des Kugelsegments) und seinem Schnittkreis (**ebene** Grundfläche des Kugelsegments) zusammen.

b) Berechnung der Rauminhalte der Kugelteile

1. Rauminhalt eines Kugelsegments

Die Überlegungen von Abschn. 39c gelten nicht nur für eine Halbkugel, sondern auch für ein Kugelsegment von der Höhe h, $(h < r)$. Es ist also

Rauminhalt eines Kugelsegments = Rauminhalt des zugehörigen Restkörpers.

Der Restkörper besteht in diesem Fall aus einem Zylinder vom Grundkreisradius r und der Höhe h, der durch einen umgekehrt liegenden Kegel**stumpf** mit dem Grundkreisradius r, dem Deckkreisradius $z = r - h$ und der Höhe h ausgehöhlt wird (siehe Abb. 291). Es ist also

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rauminhalt des}\\ \text{Kugelsegments}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Rauminhalt des}\\ \text{Zylinders}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{Rauminhalt des}\\ \text{Kegelstumpfs.}\end{array}\right.$$

$$V_{\text{Segment}} = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2\right],$$

$$= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Der Rauminhalt eines Kugelsegments ist $\boldsymbol{V_{\text{Segment}} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)}$.

Hierin ist r der Kugelradius und h die Segmenthöhe.

2. Rauminhalt eines Kugelsektors

Ein Kugelsektor setzt sich aus dem zugehörigen Kugelsegment und dem Ergänzungskegel zusammen (Abb. 298). Es gilt also für die Rauminhalte der drei Körper:

Kugelsektor = Kugelsegment + Ergänzungskegel,

$$V_{\text{Sektor}} = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3} + \frac{\pi \varrho^2(r - h)}{3}.$$

Im Kreis mit dem Radius r ist nach dem Sehnensatz $\varrho^2 = h(2r - h)$.

Also ist $$V_{\text{Sektor}} = \frac{\pi h}{3}\cdot\left[h\cdot(3r - h) + (2r - h)(r - h)\right] = \frac{2\pi}{3} r^2 h.$$

Der Rauminhalt eines Kugelsektors ist $\boldsymbol{V_{\text{Sektor}} = \frac{2\pi}{3} r^2 h}$.

Hierin ist r der Kugelradius und h die zugehörige Segmenthöhe.

3. Kugelsegment und Kugelsektor von beliebiger Höhe h, $(0 < h \leqq 2r)$

Bei den Ableitungen für die Rauminhalte eines Kugelsegments und eines Kugelsektors hatten wir $h < r$ vorausgesetzt. Die Formeln gelten auch für $h \geqq r$, allgemein für $0 < h \leqq 2r$.

Beweis für den Rauminhalt V' eines Kugelsegments mit der Höhe h', $(r \leqq h' \leqq 2r)$:

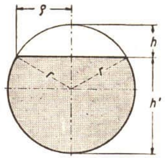


Abb. 299

Es ist (Abb. 299) $V' = \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3}$.

Hierin ist $h = 2r - h'$. Also ist

$$V' = \frac{\pi}{3} \cdot [4r^3 - (2r - h')^2 \cdot (r + h')] = \frac{\pi h'^2 \cdot (3r - h')}{3}.$$

Beweis für den Rauminhalt V'' eines Kugelsektors mit der Höhe h', $(r \leqq h' \leqq 2r)$:

Es ist (Abb. 299) $V'' = \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi r^2 \cdot (2r - h)}{3}$. Hierin ist $2r - h = h'$.

Also ist $$V'' = \frac{2\pi r^2 h'}{3}.$$

Eine Halbkugel ist ein Kugelsegment bzw. Kugelsektor mit der Höhe $h = r$.

$$V' = \frac{\pi r^2 \cdot (3r - r)}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}; \quad V'' = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Eine Vollkugel ist ein Kugelsegment bzw. Kugelsektor mit der Höhe $h = 2r$.

$$V' = \frac{4\pi r^2 \cdot (3r - 2r)}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}; \quad V'' = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Wie groß werden in diesen Sonderfällen die Ergänzungskegel?

c) Berechnung der Flächen der Kugelteile

1. Kugelkappe

Die Oberfläche eines Kugelsektors setzt sich aus seiner Kugelkappe und dem Mantel des Ergänzungskegels zusammen.
Der Flächeninhalt einer Kugelkappe K läßt sich aus dem zugehörigen Kugelsektor in derselben Weise wie die Kugeloberfläche aus dem Kugelkörper berechnen. Vergleiche dazu Abschn. 39 c!

$$V_{\text{Sektor}} = \frac{1}{3} K \cdot r,$$

$$\frac{2\pi r^2 h}{3} = \frac{K \cdot r}{3},$$

$$K = 2\pi r h.$$

Die Fläche einer Kugelkappe ist $\boldsymbol{K = 2\pi r h}$.

Hierin ist r der Kugelradius und h die zugehörige Kappenhöhe.

2. Kugelzone

Der ringförmige Teil der Kugeloberfläche zwischen zwei parallelen Schnittkreisen einer Kugel heißt eine **Kugelzone** (Abb. 300). Der Abstand der beiden Parallelkreise heißt **Höhe h** der Kugelzone. Die Fläche einer Kugelzone Z läßt sich als Differenz zweier Kugelkappen von den Höhen $(x+h)$ und x berechnen. Es ist $Z = 2\pi r(x+h) - 2\pi r x = 2\pi r h$.

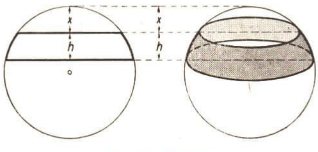


Abb. 300. Kugelzone

Die Fläche einer Kugelzone ist $Z = 2\pi r h$.

Hierin ist r der Kugelradius und h die zugehörige Zonenhöhe.

Kugelkappe und Kugelzone haben gleiche Flächenformeln,

$$K = 2\pi r h \quad \text{und} \quad Z = 2\pi r h.$$

Was bedeutet h in jeder Formel? Bei welchem Körper findet sich die gleiche Flächenformel? Welche Körper haben Kugelkappen mit den Höhen $h = r$ bzw. $h = 2r$?

Aufgaben

I. Kugelteile als Drehkörper

1. Drehe **a)** ein Kreissegment, **b)** einen Kreissektor um ihre Achsen! Welche Drehkörper und Drehflächen werden erzeugt (Abb. 297 und 298)?
2. Stelle **a)** ein Kugelsegment, **b)** einen Kugelsektor im Grund- und Aufriß dar und zeichne Bilder beider Körper in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 90°$, $q = \frac{1}{4}$)!
3. Wie groß sind **a)** die Fläche des Schnittkreises eines Kugelsegments, **b)** die Mantelfläche des Ergänzungskegels eines Kugelsektors von den Höhen $h = r$ und dem Kugelradius r?
4. Wie groß werden **a)** die Fläche des Schnittkreises eines Kugelsegments, **b)** die Mantelfläche des Ergänzungskegels eines Kugelsektors von den Höhen h und dem Kugelradius r, wenn h gleich $2r$ wird?

II. Flächenvergleichung und Kartenkunde

5. Die Formeln für die Flächen einer Kugelkappe von der Höhe h und einer Kugelzone von gleicher Höhe h sind $K = 2\pi r h$ und $Z = 2\pi r h$; für dieselbe Kugel ist $K = Z = 2\pi r h$. Welche geometrische Folgerung ergibt sich aus dieser Gleichheit von K und Z (Abb. 301)?

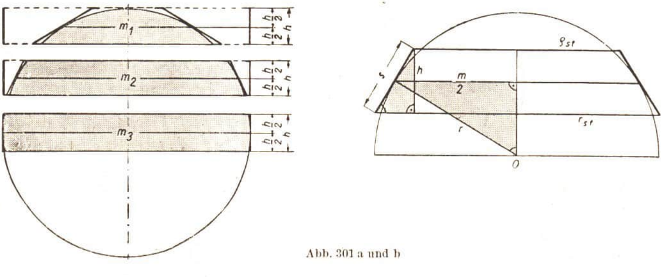


Abb. 301 a und b

6. Legt man um eine Kugelzone (Kugelkappe) von der Höhe h und dem Radius r **a)** einen Zylinder vom Grundkreisradius r und der Höhe h, **b)** einen Kegelstumpf von der Höhe h, dessen Mantel die Kugelzone (Kugelkappe) in der Kreislinie seiner mittleren Grundfläche berührt (siehe Abb. 301), so haben Kugelzone (Kugelkappe), Kegelstumpf und Zylinder inhaltsgleiche Mantelflächen. Beweis (Abb. 301 b)!

III. Berechnung von Kugelteilen

7. Stelle für eine Einheitskugel ($r = 1$, gemessen in der gewählten Längeneinheit) **a)** den Rauminhalt eines Kugelsektors, **b)** den Rauminhalt eines Kugelsegments als Funktionen der Höhe h in einem gemeinsamen Achsenkreuz geometrisch dar!
Anleitung: Betrachteter Bereich $0 \leqq h \leqq 2$. Welche Punkte haben beide Kurven gemeinsam?

8. Stelle für eine Einheitskugel ($r = 1$) **a)** die Fläche einer Kugelkappe, **b)** die Mantelfläche des Ergänzungskegels als Funktionen der Höhe h in einem gemeinsamen Achsenkreuz geometrisch dar!

9. Für welchen Sektor einer Kugel mit dem Radius r ist seine Kugelkappe flächengleich dem Mantel seines Ergänzungskegels?

10. Eine Halbkugel ist durch eine Ebene parallel zur Grundfläche so zu schneiden, daß die abgeschnittene Kugelkappe zur verbleibenden Kugelzone sich wie **a)** 1 : 1, **b)** 1 : 2, **c)** 1 : 4 verhält. Wie sind die einzelnen Schnitte zu legen?

IV. Angewandte Aufgaben

11. Eine Kugel vom Radius r wird durch eine punktförmige Lichtquelle beleuchtet, die in der Entfernung a vom Kugelmittelpunkt steht ($r = 40$ cm, $a = 100$ cm, Abb. 302).

a) Welchen Teil der Kugelfläche beleuchtet die Lichtquelle?

b) Wie groß ist der beleuchtete, wie groß der beschattete Teil der Kugelfläche?

c) Welcher Bruchteil der gesamten Kugelfläche wird beleuchtet?

d) In welcher Entfernung vom Kugelmittelpunkt muß die Lichtquelle stehen, damit sie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{n}$ der Kugelfläche beleuchtet?

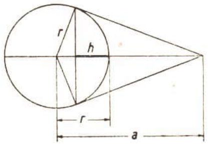


Abb. 302

12. Stelle für eine Einheitskugel ($r = 1$) die Höhe h der beleuchteten Kugelkappe aus Aufgabe 11 (Abb. 302) als Funktion der Entfernung a der Lichtquelle vom Kugelmittelpunkt analytisch und geometrisch dar! Wann wird $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ der Kugelfläche beleuchtet?

13. Eine Kugel vom Radius r wird von einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet, deren Entfernung vom Kugelmittelpunkt n-mal so groß ist wie der Kugelradius r.

a) Wie groß ist die Höhe der beleuchteten Kugelkappe und die beleuchtete Fläche selbst?

b) In welchem Verhältnis steht der beleuchtete Teil der Kugelfläche zur gesamten Kugelfläche?

c) Wie groß wird dieses Verhältnis für $n = 1, 2, 3, \ldots, 10, 100, 1\,000, \ldots$?

14. Wie groß ist der Teil der Erdoberfläche, den man aus einem Flugzeug in **a)** 1 000 m, **b)** 7 000 m Höhe überblicken kann?

15. Wie groß ist der von der Sonne beleuchtete Teil der Erdoberfläche, wenn man die Sonne als punktförmige Lichtquelle ansieht? (Die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde ist der Tafel der astronomischen Konstanten in der Logarithmentafel zu entnehmen.)

16. Welcher Bruchteil der von der Sonne ausgestrahlten Gesamtlichtmenge fällt auf die Erde, wenn man die Sonne als punktförmige Lichtquelle und die Erde als Kugel auffaßt (auf 3 Stellen genau)?

Anleitung in Abb. 303. Abb. 303 ist nicht maßstabgerecht gezeichnet!

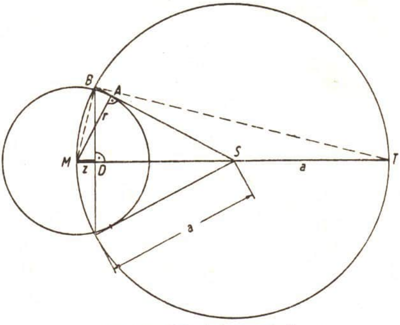


Abb. 303. (Erde stark vergrößert)

17. Im Volk und Wissen Verlag Berlin/Leipzig ist ein Modellbogen zum Selbstbau eines Globus im Maßstab 1 : 50 000 000 erschienen. Hierbei wird die Kugelfläche des Globus durch ein 72-Flach ersetzt, das aus 12 aneinandergesetzten kongruenten Streifen nach Abb. 304 (Maße in mm) gebildet wird.

a) Berechne den Radius des Modells aus der Seite des regelmäßigen Zwölfecks, welches dem Äquator einbeschrieben ist.

b) Wie groß würde der Radius eines Globus vom angegebenen Maßstab werden?

c) Wie groß ist der relative Fehler des Modellradius gegenüber dem nach b berechneten wirklichen Globusradius?

d) Wie groß ist die Oberfläche des Modells?

e) Wie groß wäre die Oberfläche eines Globus als Kugel mit einem Radius nach b?

f) Wie groß ist der relative Fehler der Fläche des Modells gegenüber der nach e berechneten wirklichen Kugelfläche (in Prozenten, auf 3 Stellen genau)?

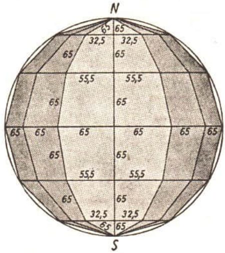


Abb.304. Maßstab 1 : 6

41. Affine Abbildungen

Zwei große Gebiete der Geometrie haben uns bisher beschäftigt, die Lehre von der **Kongruenz** und die Lehre von der **Ähnlichkeit.** Diese wurden ergänzt durch die zugehörigen Gruppen geometrischer **Transformationen,** die **Gruppe der kongruenten Transformationen** (Bewegungen und Umlegungen) und die **Hauptgruppe der Ähnlichkeitstransformationen.**

Für räumliche Gebilde traten **Abbildungen** der Raumgebilde auf eine Bildebene ε durch **senkrechte** und **schräge Parallelprojektion** hinzu. Bei beiden Abbildungsarten werden die Winkel des Originals im Bild im allgemeinen verändert, die Abbildungen durch Parallelprojektion können also nicht zu den ähnlichen Abbildungen gehören.

Wir haben uns daher nun mit einer **Gruppe von Abbildungen und Transformationen** zu beschäftigen, welche – ähnlich wie die Hauptgruppe der Ähnlichkeitstransformationen die Gruppe der kongruenten Transformationen umschließt – ihrerseits die Gruppe der ähnlichen Abbildungen als Sonderfall umfassen wird. Die eine Haupteigenschaft der Abbildung durch Parallelprojektion haben wir kennengelernt: Parallele Gerade bleiben im Bild parallel! Diese Art von Abbildungen nennt man daher parallelverwandte oder **affine Abbildungen**[1]. Die Lehre von der **Affinität** wird daher als nächstes Gebiet der Geometrie im 10. Schuljahr behandelt werden.

---

1) affinis (lat.) heißt verwandt, affinitas (lat.) Verwandtschaft. Hier bedeutet affin parallelverwandt und Affinität Parallelverwandtschaft.

Anhang: Nomogramme zur quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Nomogramme sind Rechentafeln zur zeichnerischen Lösung analytischer Aufgaben. Nomogramme zur quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ haben den Zweck, aus ihnen Näherungslösungen für x bei gegebenen Koeffizienten p und q abzulesen.

a) Rechentafel (Netztafel) zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

1. Faßt man in der Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ den Koeffizienten p als unabhängige Veränderliche und q als abhängige Veränderliche auf und entwickelt für festes x q als Funktion von p, so erhält man die Funktion

$$q = q(p) = -xp - x^2.$$

Für feste Zahlenwerte von x, also für $x = x_n = c$, stellt $q = q(p) = -cp - c^2$ die Gleichung einer geraden Linie in einem pq-Achsenkreuz vom Anstieg $m = -c$ und dem q-Abschnitt $n = -c^2$ dar.

Setzt man in der Gleichung $q = -xp - x^2$ für x nacheinander die Zahlenwerte $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und $x = 0, -1, -2, \ldots$ ein und stellt die zugehörigen geraden Linien in einem rechtwinkligen pq-Achsenkreuz dar (Abb.305), so erhält man eine Schar gerader Linien $x = c$, $(c = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ im pq-Netz; man erhält eine Netz- oder Rechentafel zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Den Werten p und q einer quadratischen Gleichung ist im Achsenfeld ein Punkt $(p; q)$ zugeordnet, dessen x-Werte sich in der Netztafel ablesen lassen.

2. Beispiele:

a) Zur quadratischen Gleichung $x^2 + 6x + 8 = 0$ gehört der Punkt $(6; 8)$ im pq-Achsenkreuz. Dieser liegt in der Netztafel auf den Netzgeraden $x_1 = -2$ und $x_2 = -4$. Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind $x_1 = -2$ und $x_2 = -4$ (2 verschiedene reelle Wurzeln).

b) Zur quadratischen Gleichung $x^2 - 4{,}5x - 9 = 0$ gehört der Punkt $(-4{,}5; -9)$ im pq-Achsenkreuz. Dieser liegt in der Netztafel auf den Netzgeraden $x_1 = -1{,}5$ und $x_2 = +6$. Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind $x_1 = -1{,}5$ und $x_2 = +6$ (2 verschiedene reelle Wurzeln).

c) Zur quadratischen Gleichung $x^2 - 5x + 3 = 0$ gehört der Punkt $(-5; +3)$ im pq-Achsenkreuz. Dieser besitzt die x-Werte $x_1 \approx 4{,}3$ und $x_2 \approx 0{,}7$. Näherungs-

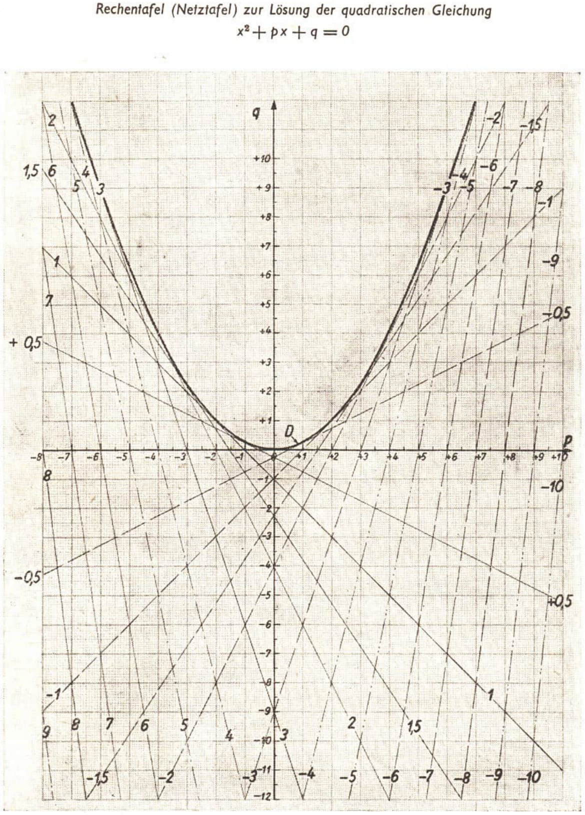


Abb. 305. Rechentafel (Netztafel) zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

lösungen der quadratischen Gleichung sind $x_1 = 4{,}3$ und $x_2 = 0{,}7$ (2 verschiedene reelle Wurzeln).

d) Zur quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 4 = 0$ gehört der Punkt $(-4; +4)$ im pq-Achsenkreuz. Dieser liegt nur auf der Netzgeraden $x_1 = x_2 = 2$. Die Lösungen der quadratischen Gleichungen sind $x_1 = x_2 = 2$ (2 gleiche reelle Wurzeln oder 1 Doppelwurzel).

e) Zur quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 5 = 0$ gehört der Punkt $(-4; +5)$ im pq-Achsenkreuz. Dieser liegt nicht mehr innerhalb der Geradenschar, er liefert keine Lösungswerte für x. Die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 5 = 0$ hat keine reellen Lösungen.

3. Von der Geradenschar $x = c$ wird eine Parabel mit der Gleichung $\frac{p^2}{4} - q = 0$ umhüllt. Man nennt diese Kurve die Diskriminantenkurve D der quadratischen Gleichung. Liegt der Lösungspunkt $(p; q)$ der quadratischen Gleichung

unterhalb der Diskriminantenkurve D, so ist $\frac{p^2}{4} - q > 0$; die quadratische Gleichung hat 2 verschiedene reelle Wurzeln;

auf der Diskriminantenkurve D, so ist $\frac{p^2}{4} - q = 0$; die quadratische Gleichung hat 2 gleiche reelle Wurzeln oder eine Doppelwurzel;

oberhalb der Diskriminantenkurve D, so ist $\frac{p^2}{4} - q < 0$; die quadratische Gleichung hat keine reellen Wurzeln.

Vgl. dazu Abschn. 11, Seite 44 und 45.

b) Fluchtlinientafel zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

1. In Abb. 306 fluchtet man auf der p- und der q-Skala die gegebenen Zahlenwerte p und q der quadratischen Gleichung durch eine gerade Linie ein. Die Schnittpunkte dieser Fluchtlinie mit der x-Kurve ergeben die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

2. Beispiele:

a) Fluchtet man für die quadratische Gleichung $x^2 + 6x + 8 = 0$ die Punkte $p = 6$ und $q = 8$ der p- und der q-Skala mit einem Lineal ein, so schneidet die Fluchtlinie durch diese Punkte die x-Kurve in den Werten $x_1 = -2$ und $x_2 = -4$ (Abb. 306). Diese Werte sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + 6x + 8 = 0$.

b) bis e) Führe die Beispiele b bis e aus Teil **a)** entsprechend durch.

3. Wie kann man an der Fluchtlinientafel die Bedeutung der Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q$ für die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ geometrisch veranschaulichen?
Drehe dazu eine Fluchtlinie um den Punkt $p = 1$ für $q = 0, 1, 2, \ldots$; um $p = 2$ für $q = 1, 2, 3, \ldots$; um $p = 3$ für $q = 2, 3, 4, \ldots$; um $p = 4$ für $q = 3, 4, 5, \ldots$!

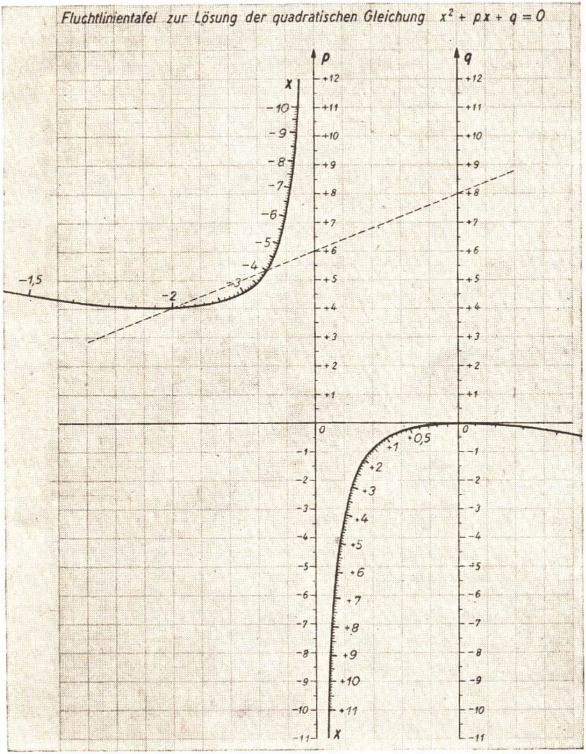


Abb. 306. Fluchtlinientafel zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Welche Lösungen für x ergeben sich bei jeder Drehung?

Ist $\frac{p^2}{4} - q$

- > 0, so schneidet die Fluchtlinie die x-Kurve zweimal; die quadratische Gleichung hat 2 verschiedene reelle Wurzeln für x.
- $= 0$, so berührt die Fluchtlinie die x-Kurve; die quadratische Gleichung hat 2 gleiche reelle Wurzeln oder 1 Doppelwurzel für x.
- < 0, so meidet die Fluchtlinie die x-Kurve; die quadratische Gleichung hat keine reellen Wurzeln für x.

c) Lösungsverfahren für große Zahlenwerte von p und q

Besitzen die Koeffizienten p und q der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zu große Zahlenwerte, z.B. $x^2 + 15x - 450 = 0$, so ersetzt man x durch eine neue Unbekannte z, z.B. nach der Beziehung $x = 10z$.

Dann wird $$100z^2 + 150z - 450 = 0.$$

Die Normalform ist $$z^2 + 1{,}5z - 4{,}5 = 0.$$

Als Lösungen der quadratischen Gleichung für z finden wir in der Netz- oder der Fluchtlinientafel die Werte $z_1 = +1{,}5$ und $z_2 = -3$.

Also ist $$x_1 = 15 \quad \text{und} \quad x_2 = -30.$$