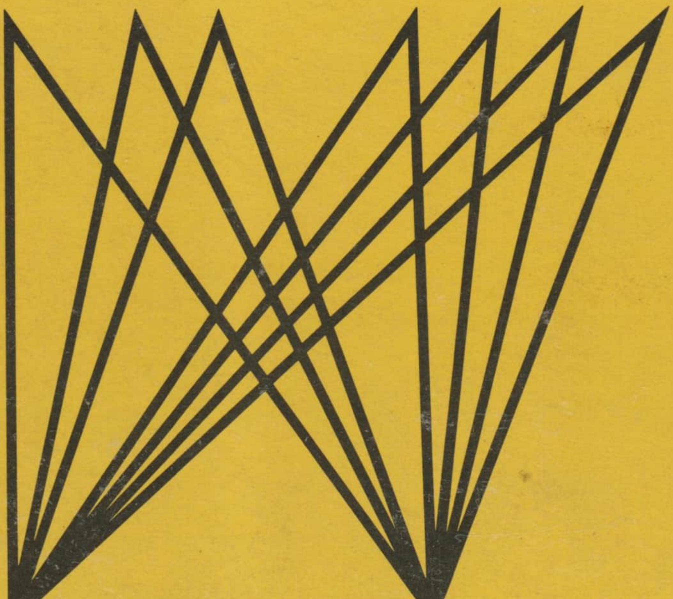
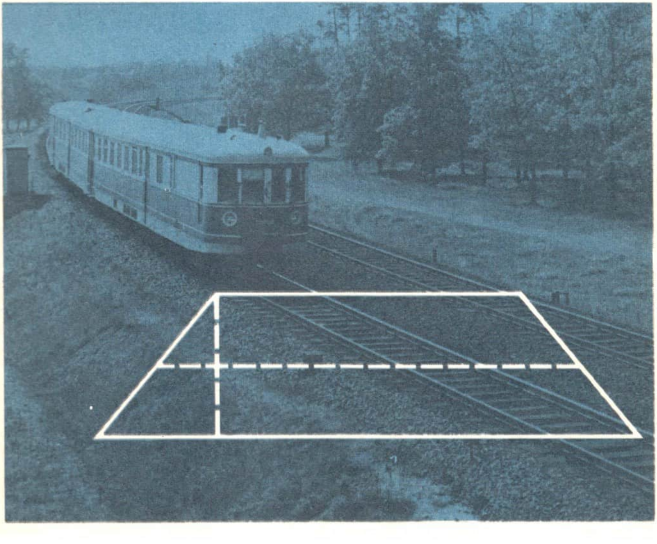
Mathematik 6



MATHEMATIK

Lehrbuch für Klasse 6

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1970



Autoren:

Dipl.-Math. Werner Tietz — Kapitel A, B und C
Dr. Rudolf Bittner — Kapitel D
Günter Fanghänel — Aufgabenteile a und c
Herbert Vockenberg — Aufgabenteil b
Jochen Kreusch, Rudolf Fritz — Aufgabenteil d

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt.

2. Auflage · Ausgabe 1969
Lizenz Nr. 203 · 1 000/70 (UN) · ES 11 G
Redaktion: Siegmar Kubicek, Heinz Junge
Zeichnungen: Heinz Grothmann, Rudolf Schultz-Debowski
Typografie: Wolfgang Lorenz
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden (III/9/1)
Gesetzt aus der Gill
Redaktionsschluß: 10. Februar 1969
Bestell-Nr. 00 06 03 - 2 · Preis: 2,30

Erläuterungen zur Arbeit mit dem Buch

Der Lehrstoff wurde in die Kapitel A, B, C und D aufgegliedert. Zu jedem Kapitel gehört ein Inhaltsverzeichnis.

Die Kapitel wurden wiederum in numerierte Lerneinheiten unterteilt.

Am Rand jeder Seite findest du eine farbige Marke. Diese Marken wiederholen sich auf dem Vorsatz. Sie sollen dir helfen, die einzelnen Kapitel schnell aufzufinden. Das Vorsatz enthält außerdem eine Übersicht über den Inhalt des Buches.

Innerhalb der einzelnen Lerneinheiten werden Beispiele, Aufträge und Merksätze durch folgende Zeichen besonders hervorgehoben:

■ Beispiele

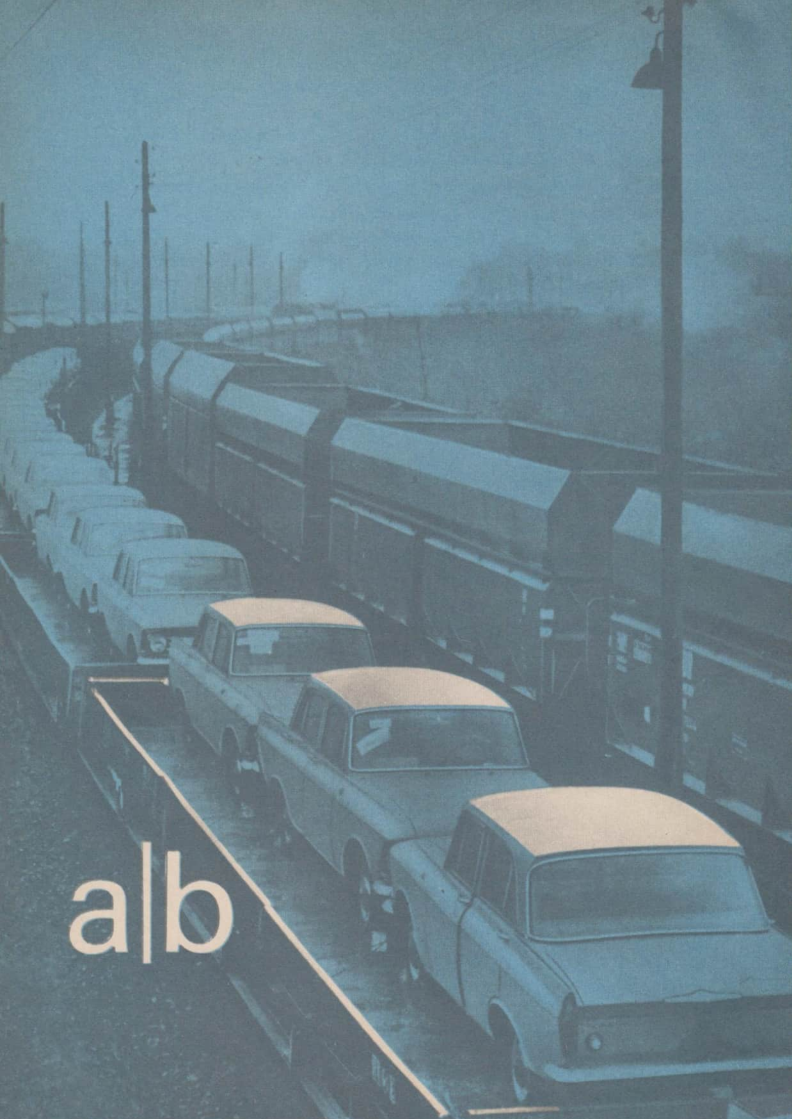
● Aufträge

▶ Merksätze

Beispiele, Aufträge und Merksätze sind numeriert.

Am Ende der Lerneinheiten findest du einen Hinweis darauf, welche Aufgaben zu dem soeben behandelten Stoff gehören. Die Aufgaben stehen dann in den Kapiteln a, b, c und d im zweiten Teil des Buches.

Wenn du einen bestimmten Begriff suchst, so schlägst du zuerst das Register am Schluß des Buches auf. Es enthält Stichwörter. Diese helfen dir, den gesuchten Begriff schneller zu finden.


a|b

A. Teilbarkeit natürlicher Zahlen

A

Wiederholung

1 Die Folge der natürlichen Zahlen

Wenn wir von 0 ausgehend fortlaufend die Zahl 1 addieren, so erhalten wir die **natürlichen Zahlen** 0, 1, 2, 3, ...
Zu jeder natürlichen Zahl a gibt es einen eindeutig bestimmten **Nachfolger** $a + 1$. Man nennt die Zahl a auch den **Vorgänger** von $a + 1$.
Zu jeder natürlichen Zahl a, ausgenommen die Zahl 0, gibt es einen eindeutig bestimmten Vorgänger $a - 1$.

$a - 1$	$a + 1$
Vorgänger von a,	Nachfolger von a
falls $a \neq 0$	

Es gibt zwar *eine erste* natürliche Zahl, die Zahl 0, aber *keine letzte* natürliche Zahl; denn zu jeder Zahl a kann man den Nachfolger $a + 1$ bilden.
Für die Darstellung dieser unendlich vielen Zahlen kommt man jedoch mit end-

lich vielen Zeichen aus. Im dekadischen Positionssystem sind dies die **Grundziffern** „0", „1", . . . , „9".
Die Zahl Achtzehntausendfünfhundertvierundzwanzig z. B. wird durch die Ziffer „18 524" dargestellt. Diese Ziffer enthält die Grundziffern „1", „2", „4", „5", „8". Den Stellenwert der einzelnen Grundziffern kann man in einer Tabelle übersichtlich darstellen.

10^4	10^3	10^2	10^1	
10 000	1 000	100	10	1
1	8	5	2	4

Aufgaben a 1 bis 4

2 Grundrechenoperationen mit natürlichen Zahlen

Addition	**Multiplikation**
uneingeschränkt ausführbar, d. h., zu beliebigen natürlichen Zahlen a und b gibt es *immer*	
die Summe $a + b$	das Produkt $a \cdot b$
Für *alle* natürlichen Zahlen a, b und c gilt	
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
(Kommutativität)	
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(Assoziativität)	
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivität)	
$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Subtraktion	**Division**
Umkehrung der	
Addition	*Multiplikation*
$x = b - a$ bedeutet $a + x = b$ oder $x + a = b$	$x = b : a$ $(a \neq 0)$ bedeutet $a \cdot x = b$ oder $x \cdot a = b$
nicht uneingeschränkt ausführbar	
Die Subtraktion natürlicher Zahlen ist nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend kleiner als der Minuend ist oder wenn beide gleich sind. Die Subtraktion natürlicher Zahlen ist *nicht* ausführbar, wenn der Subtrahend größer als der Minuend ist.	Die Division natürlicher Zahlen ist nur dann ausführbar, wenn es eine einzige solche Zahl x mit $a \cdot x = b$ gibt, d. h., wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist. Die Division durch 0 ist demnach nicht ausführbar.

Für *beliebige* Zahlen a gilt

$a - 0 = a$ $a - a = 0$	$a : 1 = a$ $\left.\begin{array}{l} a : a = 1 \\ 0 : a = 0 \end{array}\right\} (a \neq 0)$

Beachte!

$a - b = b - a$ **gilt *nur* für $a = b$**	$a : b = b : a$ **gilt *nur* für $a = b$, falls a und damit auch b von 0 verschieden ist.**

1 Es soll die Ausführbarkeit der Operationen in folgenden Fällen überprüft werden.

a) $x = 17 - 9$ bedeutet
$9 + x = 17$.
Die Subtraktion ist ausführbar, denn 9 ist kleiner als 17.
Es gilt: $x = 8$, denn
$9 + \mathbf{8} = 17$.

b) $x = 12 - 15$ bedeutet
$15 + x = 12$.
Die Subtraktion ist nicht ausführbar, denn 15 ist größer als 12.

c) $x = 35 : 7$ bedeutet
$7 \cdot x = 35$.
Die Division ist ausführbar, denn 35 ist ein Vielfaches von 7.
Es gilt: $x = 5$, denn
$7 \cdot \mathbf{5} = 35$.

d) $x = 81 : 13$ bedeutet
$13 \cdot x = 81$.
Die Division ist nicht ausführbar, denn 81 ist nicht Vielfaches von 13.

Die Division durch 0 ist deshalb nicht ausführbar, weil $a : 0$ für keine Zahl a ein eindeutig bestimmtes Ergebnis hätte.
Dazu betrachten wir folgende Beispiele, in denen der Dividend a einmal gleich 0 und einmal von 0 verschieden ist. Wir suchen in beiden Fällen ein eindeutig bestimmtes Ergebnis der Division.

2 a) $\boldsymbol{a \neq 0}$: $x = 5 : 0$ bedeutet $0 \cdot x = 5$.

Eine solche Zahl x gibt es aber nicht, da $0 \cdot x$ immer gleich 0 ist und daher nicht gleich 5 sein kann.
$5 : 0$ hätte also *überhaupt* kein Ergebnis.

b) $\boldsymbol{a = 0}$: $x = 0 : 0$ bedeutet $0 \cdot x = 0$.

Das gilt aber für *alle* natürlichen Zahlen.
$0 : 0$ hätte also *unendlich viele* Ergebnisse.

Aufgaben a 5 bis 29

3 Der Begriff der Definition

Wir haben schon häufig Zahlen miteinander verglichen. Dabei haben wir Wörter wie „größer", „kleiner", „Vielfaches" verwendet, ohne ausführlich zu erklären, was diese Wörter bedeuten sollen. In der Mathematik muß man aber wie in allen anderen Wissenschaften die Bedeutung aller benutzten Fachwörter genau kennen, da sonst Irrtümer und schwerwiegende Fehler vorkommen können. Das Wort „gerade" z. B. kann in verschiedenen Bedeutungen benutzt werden. Wir müssen also genau festlegen, was wir mit folgenden Feststellungen über bestimmte Zahlen, Punkte oder Körper meinen:

1) Die Zahl a ist gerade.
2) Die Verbindungslinie der Punkte A und B ist gerade.
3) Der Kegel ist gerade.

In Klasse 4 haben wir festgelegt, was wir unter einer *geraden Zahl* verstehen wollen. Wir sagen: Wir haben den Begriff „gerade Zahl" **definiert**. Eine solche Festlegung nennen wir eine **Definition**. Sie lautet in diesem Fall:

1 **DEFINITION: Eine natürliche *Zahl* heißt *gerade*, wenn sie durch 2 dividiert werden kann.**

Wir können auch die Zahl 0 durch 2 dividieren: $0 : 2 = 0$.
Das bedeutet nach Definition 1, daß 0 eine gerade Zahl ist.
Wir wollen nun mit Hilfe der Addition definieren, was es bedeutet, wenn wir sagen: Die natürliche Zahl a ist *kleiner als* die natürliche Zahl b.

2 **DEFINITION: Die natürliche Zahl a heißt *kleiner als* die natürliche Zahl b, wenn wir eine natürliche Zahl $x \neq 0$ finden können, so daß gilt:**
$a + x = b$.
Wir schreiben: $a < b$ (lies: „a ist kleiner als b").
Es ist üblich, für $a < b$ auch $b > a$ zu schreiben (lies: „b ist größer als a").

4 Definition der Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Ähnlich wie in Definition 2 können wir mit Hilfe der Multiplikation eine Beziehung zwischen natürlichen Zahlen a und b definieren, die etwas über die *Teilbarkeit* aussagt. Dabei wollen wir zunächst annehmen, daß die Zahlen a und b *beide* von Null verschieden sind.

3 **DEFINITION: Die natürliche Zahl a heißt *Teiler* der natürlichen Zahl b, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, so daß gilt:**
$a \cdot x = b$.
Ist a ein Teiler von b, so schreibt man dafür: $a \mid b$
(lies: „a ist Teiler von b" oder „a teilt b" oder „b ist durch a teilbar" oder „b ist ein Vielfaches von a").

Gibt es eine Zahl x für die Zahlen a und b, so daß $a \cdot x = b$ gilt, dann ist diese Zahl x ebenfalls ein Teiler von b. Die Zahl b ist dann sowohl Vielfaches von a als auch Vielfaches von x.

3 a) Es gilt $12 \mid 204$ (12 ist ein Teiler von 204).
Begründung: Es gibt eine natürliche Zahl x, für die $12 \cdot x = 204$ gilt, nämlich die Zahl 17.

b) Es gilt *nicht* $13 \mid 85$ (13 ist *nicht* Teiler von 85).
Begründung: Es gibt keine natürliche Zahl x, für die $13 \cdot x = 85$ gilt.

Aufgaben a 30 bis 34

5 Wahre und falsche Aussagen

In den uns bisher bekannten Definitionen haben wir bestimmten Zahlenarten oder Beziehungen zwischen Zahlen Namen gegeben.
So nennen wir Zahlen, die den Teiler 2 haben, „gerade Zahlen". Wir hätten sie jedoch ebensogut auch anders nennen können, z. B. „glatte Zahlen". Für die Wahl eines Namens oder anderer Festlegungen in einer Definition gibt es oft mehrere Möglichkeiten. Je nach Zweckmäßigkeit entscheidet man sich für eine davon. Es hat also keinen Sinn zu fragen, ob eine Definition falsch oder richtig ist. Man muß vielmehr fragen, ob sie zweckmäßig ist.
Anders ist es in folgenden Beispielen:
1) Die Zahl 7 ist gerade.
2) Jede Zahl ist gerade.
3) 0 ist die kleinste natürliche Zahl.
4) 5 ist der Nachfolger von 4.
Wir sagen: Die Feststellungen 1) und 2) sind **falsche Aussagen**, und 3) und 4) sind **wahre** (richtige) **Aussagen**.

1 Prüfe, welche Aussage wahr bzw. falsch ist! Begründe deine Entscheidung!
a) 30 ist gerade. b) $7 \mid 104$
c) 119 ist nur durch 1 und durch sich selbst teilbar.

Die **wahren Aussagen** in der Mathematik werden **Sätze** genannt.
Beachte die unterschiedliche Bedeutung des Wortes „Satz" in der Mathematik und in der Sprachlehre!

6 Der Beweis der Wahrheit einer Aussage

So wie in anderen Wissenschaften benutzt man auch in der Mathematik Aussagen, deren Wahrheit feststeht, um zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Dazu

muß man aber mit Sicherheit wissen, ob eine Aussage, aus der man Folgerungen ziehen möchte, wahr ist.
Um das für die Aussagen a), b) und c) im Auftrag 1 festzustellen, können wir überprüfen, ob die betreffenden Zahlen tatsächlich die behaupteten Eigenschaften besitzen.
Bei Aussage a) muß man nach Definition 1 feststellen, ob 30 durch 2 teilbar ist. Die Aussage b) überprüft man, indem man eine Zahl x sucht, für die $7 \cdot x = 104$ gilt, d. h., indem man probiert, ob die Division 104 : 7 ausführbar ist. Ob die Aussage c) wahr ist, erkennt man dadurch, daß man für alle Zahlen von 2 bis 11 nachprüft, ob sie Teiler von 119 sind.

Wenn wir auf eine geeignete Weise, z. B. wie bei den Aussagen a) bis c), nachgewiesen haben, daß eine Aussage wahr ist, sagen wir: Wir haben diese Aussage **bewiesen** oder einen **Beweis** dieser Aussage geführt.
Wir dürfen erst dann eine Aussage weiter verwenden und aus ihr Folgerungen ziehen, wenn sie bewiesen worden ist.
Bei der Feststellung der Wahrheit von Aussagen müssen wir uns vor unvorsichtigen Verallgemeinerungen hüten.
Wir setzen zum Beispiel in die Summe $x \cdot x + x + 11$ für x der Reihe nach die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ..., 9 ein.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x \cdot x + x + 11$	11	13	17	23	31	41	53	67	83	101

Aus der Tatsache, daß sich in allen Fällen eine Zahl ergibt, die nur zwei Teiler hat, nämlich 1 und sich selbst, dürfen wir aber keineswegs schließen, daß das für alle natürlichen Zahlen x gilt. Setzen wir nämlich die Zahl 10 für x ein, so erhalten wir für die Summe die Zahl 121, die außer den Teilern 1 und 121 noch den Teiler 11 hat.
Gleichzeitig erkennen wir aus diesem Beispiel, daß wir eine Aussage über *alle* natürlichen Zahlen nicht dadurch beweisen können, daß wir sie für eine Anzahl natürlicher Zahlen nachprüfen.

4 Es soll folgende Aussage bewiesen werden:

Jede natürliche Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie durch 4 teilbar ist.

Beweis: Wir benutzen bei den folgenden Überlegungen unsere Kenntnisse über die Teilbarkeit natürlicher Zahlen.

Wir betrachten irgendeine durch 4 teilbare Zahl a.

Nun wissen wir aber, daß es auf Grund von Definition 3 eine natürliche Zahl x gibt, so daß

$$4 \cdot x = a$$

gilt.

Dafür können wir auch schreiben:

$$2 \cdot 2 \cdot x = a.$$

Nun ist aber $2 \cdot x$ wieder eine natürliche Zahl. Wir nennen sie y. Benutzen wir diese Abkürzung in der letzten Gleichung, so ergibt sich

$$2 \cdot y = a.$$

Das heißt aber, daß a auch durch 2 teilbar ist.
Wir haben jetzt also die Gewißheit, daß die von uns getroffene Aussage wahr ist; denn a bedeutete eine beliebige, durch 4 teilbare Zahl. Für a können wir uns *jede* natürliche Zahl eingesetzt denken.
Wir können jetzt sagen: „Wir haben diese Aussage bewiesen" oder „Wir haben einen Beweis dieser Aussage geführt". Es ist üblich, am Schluß eines Beweises zu sagen: „. . . ., was zu beweisen war." (Schriftliche Abkürzung: „w. z. b. w.")

Wir können noch viele ähnliche Aussagen über die Teiler natürlicher Zahlen formulieren.

5 a) Wenn eine Zahl a durch 10 teilbar ist, so ist sie auch durch 2 teilbar.
b) Wenn eine Zahl a durch 10 teilbar ist, so ist sie auch durch 2 und durch 5 teilbar.
c) Wenn eine Zahl a durch 2 teilbar ist, so ist sie auch durch 10 teilbar.
d) Wenn eine Zahl a durch 2 und durch 5 teilbar ist, so ist sie auch durch 10 teilbar.
e) Wenn eine Zahl a durch 5 und durch 10 teilbar ist, so ist sie auch durch 50 teilbar.

2 Stelle fest, welche der Aussagen wahr bzw. falsch ist! Begründe deine Behauptung bzw. gib Gegenbeispiele an!

Zusammenfassung:
Wir müssen zwischen einer **Definition** und einem **Satz** unterscheiden.
Eine Definition ist eine Festlegung. Sie wird oft nach Zweckmäßigkeit getroffen. Man kann von einer Definition nicht sagen, daß sie wahr oder falsch ist.
Ein **Satz** ist eine **wahre Aussage**.
Die Wahrheit eines Satzes muß durch einen **Beweis** nachgewiesen werden.

7 Zusammengesetzte Zahlen und Primzahlen

3 Stelle fest, ob folgendes gilt!
$3 \mid 3$; $321 \mid 321$; $1 \mid 8$; $1 \mid 15$; $15 \mid 1$

4 **SATZ: Für jede natürliche Zahl $a \neq 0$ gilt:**
$a \mid a$ und $1 \mid a$.

A

Begründungen: $a \mid a$, denn $a \cdot 1 = a$;
$1 \mid a$, denn $1 \cdot a = a$.

Wenn wir von den Teilern einer Zahl sprechen, wollen wir von jetzt an diese Zahl selbst und die Zahl 1 stets mit zu den Teilern rechnen.
Satz 4 besagt, daß jede natürliche Zahl $a \neq 0$ sich selbst und die Zahl 1 als Teiler besitzt. Es gibt aber natürliche Zahlen, die darüber hinaus noch weitere Zahlen als Teiler haben. Andererseits gibt es natürliche Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind.

6 a) Die Zahl 12 hat die Teiler 1; 2; 3; 4; 6; 12
b) Die Zahl 13 hat nur die Teiler 1 und 13.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zusätzliche Teiler				2		2;3		2;4	3	2;5
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
zusätzliche Teiler		2;3 4;6		2;7	3;5	2;4 8		2;3 6;9		2;5 10

A 1

5 **DEFINITION: Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist und die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt *Primzahl*.**

(4) Führe die Tabelle im Bild A 1 für die natürlichen Zahlen bis 50 fort!

Es gibt *unendlich viele* Primzahlen.

Alle anderen natürlichen Zahlen nennt man auch **zusammengesetzte Zahlen**.

Unter den Teilern einer Zahl treten stets auch Primzahlen auf.

7 a) Die Zahl 30 hat die Teiler 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30. Davon sind 2; 3; 5 Primzahlen.
b) Die Zahl 13, eine Primzahl, hat die Teiler 1 und 13. Davon ist nur 13 eine Primzahl.

Wir stellen jetzt die Frage, ob 0 ein Vielfaches von 4 sein kann.

Wir stellen fest: 0 ist ein Vielfaches von 4 bzw. 4 ist ein Teiler von 0, denn es gilt: $4 \cdot 0 = 0$.

(5) Prüfe, ob folgendes gilt:
$16 \mid 0$; $1 \mid 0$; $9 \mid 0$!

Wir wollen jetzt die Beziehung $a \mid b$ für den Fall $b = 0$ definieren. Die Gleichung in der Definition 3 nimmt dann die Form $a \cdot x = 0$ an.

6 **SATZ: Für jede natürliche Zahl a gilt: $a \mid 0$.**

Wenn wir auch das Nullfache einer Zahl ein „Viel"faches nennen, können wir auch hier sagen: 0 ist ein Vielfaches von a.

Aufgaben a 35 bis 40

Zusammenfassung:

$a < b$ (a ist kleiner als b)	$a \mid b$ (a teilt b)
bedeutet:	
Es gibt eine natürliche Zahl $x \neq 0$, so daß $a + x = b$ gilt.	Es gibt eine natürliche Zahl x, so daß $a \cdot x = b$ gilt.

Für jede natürliche Zahl a gilt:
$a \mid a$, denn $a \cdot 1 = a$,
$a \mid 0$, denn $a \cdot 0 = 0$,
$1 \mid a$, denn $1 \cdot a = a$.

Gilt $a > 1$ und ist a nur durch 1 und durch sich selbst teilbar, so heißt a *Primzahl*.

8 Mengen

Um Zusammenhänge zwischen der Teilbarkeit verschiedener Zahlen und auch zwischen anderen Eigenschaften natürlicher Zahlen übersichtlich darstellen zu können, ist es vorteilhaft, alle solche natürlichen Zahlen, die eine *gemeinsame* Eigenschaft besitzen, auszuwählen und zu einer Gesamtheit zusammenzufassen. Aber nicht nur Zahlen können wir zusammenfassen, sondern oft ist es nützlich, auch Gesamtheiten anderer Objekte mit gemeinsamen Eigenschaften zu betrachten.
Eine solche Gesamtheit heißt **Menge**. Die Objekte, die zu einer Menge zusammengefaßt sind, heißen **Elemente** dieser Menge.

8 Beispiele für Mengen sind:
(1) Die Menge aller der Schüler einer Klasse, die im Jahre 1957 geboren sind
(2) Die Menge aller geraden Zahlen zwischen 67 und 74
(3) Die Menge aller Lastkraftwagen eines Kraftverkehrsbetriebes
(4) Die Menge aller geraden Primzahlen
(5) Die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen
(6) Die Menge der Punkte eines bestimmten Kreises

Wir müssen zwischen der Bedeutung des Wortes „Menge" in der Mathematik und der Bedeutung desselben Wortes in der Umgangssprache unterscheiden. In der Umgangssprache benutzt man es häufig an Stelle des Wortes „viel".
Beachte den Unterschied!

a) In unserer Schulbücherei haben wir eine Menge Bücher.
b) Die Menge der Mathematikbücher in unserer Schulbücherei

Zur Bezeichnung von Mengen wollen wir große (lat.) Buchstaben verwenden, an die wir mitunter noch Zeichen zur Unterscheidung anschreiben. Dazu verwendet man meist kleine tiefgestellte Ziffern. Die Mengen im Beispiel 8 wollen wir in der entsprechenden Reihenfolge mit $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ bezeichnen.

9 Im Beispiel 8 haben die Mengen M_1, M_2, M_3 und M_4 endlich viele Elemente, die Mengen M_5 und M_6 unendlich viele Elemente.

Um festzulegen, welche Objekte als Elemente zu einer bestimmten Menge gehören sollen, kann man in vielen Fällen die Elemente dieser Menge aufzählen. Wenn man diese Aufzählung niederschreibt, schließt man die Zeichen für die Elemente in geschweifte Klammern ein.

10 a) $M_2 = \{68, 70, 72\}$ Diese Menge enthält drei Elemente
b) $M_4 = \{2\}$ Diese Menge enthält als einziges Element die einzige gerade Primzahl.

Oft ist diese Art, eine Menge anzugeben, umständlich, da die Menge zu viele Elemente enthält, oder gar unmöglich, da zur Menge unendlich viele Elemente gehören. Dann gibt man in Worten oder mathematischen Symbolen die Eigenschaften an, die allen Elementen der betreffenden Menge gemeinsam sind.

11 M_5 ist die Menge aller der Zahlen a, für die man eine Zahl x finden kann, so daß $3 \cdot x = a$ gilt.

Im folgenden werden wir nur noch Mengen von Zahlen betrachten.
Um auszudrücken, daß eine Zahl a Element einer Menge M ist, schreibt man $a \in M$ (lies: „a ist Element von M").

12 $70 \in M_2$; $2 \in M_4$; $6 \in M_5$; $99 \in M_5$

Aufgaben a 41 bis 44

9 Die Teilbarkeit von Summen und Differenzen

Wenn wir die Teiler zweier gegebener natürlicher Zahlen b und c kennen, so können wir auch etwas über die Teilbarkeit der Summe $b + c$ aussagen.
Wir wählen $b = 8$ und $c = 12$ und damit die Summe $b + c = 20$.
Für die Zahlen $a = 1, 2, \ldots, 12$ ergibt sich folgende Tabelle:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a \mid b$	ja	ja	nein	ja	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein
$a \mid c$	ja	ja	ja	ja	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$a \mid b + c$	ja	ja	nein	ja	ja	nein	nein	nein	nein	ja	nein	nein

Aus dieser Tabelle können wir erkennen, daß die Zahlen, die *sowohl* zur Menge der Teiler von b *als auch* zur Menge der Teiler von c gehören, auch Teiler der Summe $b + c$ sind.

(6) Überprüfe in der gleichen Weise die Teiler von $b = 28$, $c = 35$ und $b + c = 63$!

Die für die Zahlen des Beispiels getroffene Feststellung gilt für alle natürlichen Zahlen. Es läßt sich nämlich für beliebige Zahlen a, b und c beweisen:

7 **SATZ: Wenn a ein Teiler sowohl von b als auch von c ist, so ist a auch ein Teiler der Summe $b + c$.**

Beachte: Ist a ein Teiler der Summe $b + c$, so ist a nicht unbedingt auch Teiler von b und Teiler von c.
Beispielsweise ist 13 ein Teiler von $12 + 14 = 26$, aber weder ein Teiler von 12 noch ein Teiler von 14.

Ist die Subtraktion $b - c$ ausführbar, so gilt ein entsprechender Satz auch für die Differenz zweier Zahlen b und c.

8 **SATZ: Wenn a ein Teiler sowohl von b als auch von c ist, so ist a auch ein Teiler der Differenz $b - c$.**
Dabei darf c nicht größer als b sein, da wir sonst die Differenz $b - c$ nicht bilden können.

Aufgaben a 45 und 46

10 Die Teilbarkeit von Produkten

Wir können auch aus der Teilbarkeit zweier natürlicher Zahlen auf die Teilbarkeit ihres Produktes schließen.
Wir betrachten wiederum wie in der Lerneinheit 9 die Zahlen $b = 8$ und $c = 12$.
Ihr Produkt ist $b \cdot c = 96$.
Für die Zahlen $a = 1, 2, 3, \ldots, 12$ ergibt sich folgende Tabelle:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a \mid b$	ja	ja	nein	ja	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein
$a \mid c$	ja	ja	ja	ja	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$a \mid b \cdot c$	ja	ja	ja	ja	nein	ja	nein	ja	nein	nein	nein	ja

Auch hier kann man beweisen, daß für beliebige natürliche Zahlen a, b und c gilt:

9 **SATZ: Wenn a entweder ein Teiler von b oder ein Teiler von c oder ein Teiler von beiden ist, so ist a auch ein Teiler des Produktes $b \cdot c$.**

Wenn wir also wissen, daß a ein Teiler von b ist, so wissen wir damit auch, daß jedes Produkt, das den Faktor b enthält, ebenfalls durch a teilbar ist.

Aufgaben a 47 und 48

A

Zusammenfassung:
Für beliebige natürliche Zahlen a, b und c gilt:
1) Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, so $a \mid b + c$ sowie
$a \mid b - c$, falls die Differenz $b - c$ existiert.
2) Wenn $a \mid b$ oder $a \mid c$, so $a \mid b \cdot c$.

11 Teilbarkeit durch 10 und 5

Wenn wir die Frage beantworten wollen, ob eine natürliche Zahl a zur Menge der Teiler einer natürlichen Zahl b gehört, müssen wir untersuchen, ob es eine natürliche Zahl x gibt, für die $a \cdot x = b$ gilt.
Dazu versuchen wir, diese Zahl x zu ermitteln, indem wir die Division $b : a$ ($a \neq 0$) auf Ausführbarkeit prüfen. Erhalten wir einen Quotienten, so wissen wir, daß es eine solche Zahl x gibt, sie ist nämlich gerade gleich diesem Quotienten.
Wir können aber auch oftmals feststellen, ob es eine solche Zahl x gibt, ohne daß wir sie ausrechnen. Dazu dienen uns besonders bei größeren Zahlen **Sätze über die Teilbarkeit.**
Wir werden Sätze für die Teiler $a = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ kennenlernen. Wir wollen sie aber nicht alle beweisen. Die angeführten Beispiele sind keine Beweise!

Alle durch 10 teilbaren Zahlen b lassen sich in der Form $10 \cdot x = b$ darstellen.

(7) Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...	20
b	10	20							...	200

Wie für diese Beispiele gilt für alle natürlichen Zahlen:

10 **SATZ: Alle Zahlen, deren Ziffern auf „0" enden, sind durch 10 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 10 teilbar.**

(8) Stelle fest, welche Zahlen durch 100, 1000 usw. teilbar sind!

Alle durch 5 teilbaren Zahlen b lassen sich in der Form $5 \cdot x = b$ darstellen.

(9) Bilde die Fünffachen der Zahlen 1 bis 20!

So wie in diesen Beispielen gilt für alle natürlichen Zahlen:

11 **SATZ: Alle Zahlen, deren Ziffern auf „0" oder „5" enden, sind durch 5 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 5 teilbar.**

Aufgaben a 49 bis 52

12 Teilbarkeit durch 2, 4 und 8

Wir können leicht nachprüfen, daß die Zahlen 0, 2, 4, 6, 8 und 10 durch 2 teilbar sind.
Außerdem ist jedes Vielfache von 10 durch 2 teilbar; denn jedes Vielfache von 10 ist ein Produkt $10 \cdot x$. Da der Faktor 10 durch 2 teilbar ist, ist nach Satz 9 auch das ganze Produkt durch 2 teilbar.
Da nun jede Zahl als Summe eines Vielfachen von 10 und einer der Zahlen 0, 1, ..., 9 dargestellt werden kann, brauchen wir nur die Teilbarkeit der Einer zu untersuchen.

13 a) 96 ist durch 2 teilbar.

$96 = 90 + 6$; 90 ist als Vielfaches von 10 durch 2 teilbar. 6 ist nach unserer Überprüfung auch durch 2 teilbar, also ist nach Satz 7 auch $90 + 6$ durch 2 teilbar.

b) 1 035 ist *nicht* durch 2 teilbar.

$1\,035 = 1\,030 + 5$; 1 030 ist als Vielfaches von 10 durch 2 teilbar. Wäre 1 035 auch durch 2 teilbar, so müßte nach Satz 8 auch $1\,035 - 1\,030 = 5$ durch 2 teilbar sein. Das ist aber nicht der Fall, also ist 1 035 *nicht* durch 2 teilbar.

12 **SATZ: Alle Zahlen, deren Ziffern auf „0", „2", „4", „6" oder „8" enden, sind durch 2 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 2 teilbar.**

Da wir die durch 2 teilbaren Zahlen gerade Zahlen genannt haben, besagt dieser Satz, daß die geraden Zahlen stets eine der Endziffern „0", „2", „4", „6" oder „8" besitzen.

(10) Bilde die Vierfachen der Zahlen 1 bis 25!

Ist a eine durch 4 teilbare Zahl, so endet die Ziffer von a auf „0", „2", „4", „6" oder „8". Es sind aber nicht alle geraden Zahlen durch 4 teilbar. So ist z. B. 36 durch 4 teilbar, aber nicht 26 und 86. Ebenso ist 20 durch 4 teilbar, aber nicht 70 und 90.
Jedes Vielfache von 100 ist durch 4 teilbar. Es ist nämlich 4 ein Teiler von 100 und damit nach Satz 9 auch ein Teiler aller Vielfachen von 100. Wir brauchen also bei einer Zahl, die größer als 100 ist, nur die aus den letzten beiden Grundziffern dargestellte Zahl auf Teilbarkeit durch 4 zu untersuchen.

14 Die Zahl 87 748 ist durch 4 teilbar, weil 87 700 als Vielfaches von 100 und auch 48 und daher nach Satz 7 auch ihre Summe 87 748 durch 4 teilbar sind. Die Zahl 87 778 ist nicht durch 4 teilbar, weil zwar 87 700 durch 4 teilbar ist, nicht aber 78.

13 **SATZ: Alle Zahlen, bei denen die letzten beiden Grundziffern eine durch 4 teilbare Zahl darstellen, sind durch 4 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 4 teilbar.**

A

Ebenso ergibt sich der Satz für die Teilbarkeit durch 8.

14 **SATZ: Alle Zahlen, bei denen die letzten drei Grundziffern eine durch 8 teilbare Zahl darstellen, sind durch 8 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 8 teilbar.**

15 a) Die Zahl 6 748 512 ist durch 8 teilbar, weil 512 durch 8 teilbar ist.
b) Die Zahl 6 748 532 ist *nicht* durch 8 teilbar, weil 532 nicht durch 8 teilbar ist.

Aufgaben a 53 bis 60

13 Teilbarkeit durch 9, 3 und 6

Bei der Division durch 9 mit Rest lassen die Zahlen 10; 100; 1 000; 10 000 usw. den Rest 1.

$$\begin{aligned} 10 &= 9 \cdot 1 + 1 \\ 100 &= 9 \cdot 11 + 1 \\ 1\,000 &= 9 \cdot 111 + 1 \\ 10\,000 &= 9 \cdot 1\,111 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dividieren wir nun Vielfache von 10; 100; 1 000 usw. mit Rest durch 9, so bleiben die gleichen Vielfachen von 1 als Rest.

$$\begin{aligned} 30 &= 9 \cdot 3 + 3 \\ 700 &= 9 \cdot 77 + 7 \\ 5\,000 &= 9 \cdot 555 + 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

16 Es soll festgestellt werden, ob die Zahl 7 146 durch 9 teilbar ist. Um diese Frage zu beantworten, zerlegen wir die gegebene Zahl folgendermaßen:

$$7\,146 = 7\,000 + 100 + 40 + 6$$

$$\begin{aligned} 7\,000 &= 9 \cdot 777 + 7 \\ 100 &= 9 \cdot 11 + 1 \\ 40 &= 9 \cdot 4 + 4 \\ 6 &= 9 \cdot 0 + 6 \\ \hline 7\,146 &= 9 \cdot 792 + 18 \end{aligned}$$

Nun bilden wir auf beiden Seiten die Summen und erhalten:

Die Summe 18 der Reste ist eine durch 9 teilbare Zahl. Ebenso ist $9 \cdot 792$ durch 9 teilbar, wie es die Form $9 \cdot x$ dieses Produktes zeigt. Damit ist aber auch die Summe $9 \cdot 792 + 18 = 7\,146$ durch 9 teilbar.

Die Teilbarkeit einer beliebigen Zahl durch 9 hängt nur davon ab, ob die Summe der Reste durch 9 teilbar ist. Diese Reste werden aber auch von den Grundziffern der gegebenen Zahl dargestellt, ihre Summe nennen wir **Quersumme**. Die Quersumme von 7 146 ist also $7 + 1 + 4 + 6 = 18$.

15 **SATZ: Alle Zahlen, deren *Quersumme* durch 9 teilbar ist, sind durch 9 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 9 teilbar.**

Ebenso wie bei der Division mit Rest durch 9 lassen die Zahlen 10; 100; 1 000 usw. auch bei der Division mit Rest durch 3 den Rest 1.

Durch die gleiche Überlegung, wie sie im Beispiel 16 durchgeführt wurde, finden wir einen Satz für die Teilbarkeit einer Zahl durch 3.

16 **SATZ: Alle Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 3 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 3 teilbar.**

Alle durch 6 teilbaren Zahlen b lassen sich in der Form $6 \cdot x = b$ darstellen. Das ist dasselbe wie $2 \cdot 3 \cdot x = b$. Diese Zahlen sind also sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar. Umgekehrt läßt sich aber auch jede natürliche Zahl b, die durch 2 und durch 3 teilbar ist, in der Form

$$2 \cdot 3 \cdot x = b$$

darstellen. Es gibt also dann eine natürliche Zahl x, so daß gilt:

$$6 \cdot x = b.$$

Durch Zusammenfassen der Sätze für die Teilbarkeit durch 2 und durch 3 ergibt sich ein Satz für die Teilbarkeit einer Zahl durch 6.

17 **SATZ: Alle Zahlen, die gerade sind und deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 6 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 6 teilbar.**

Aufgaben a 61 bis 72

14 Beziehungen zwischen Mengen

Wie wir wissen, ist jede Zahl, die durch 4 teilbar ist, auch durch 2 teilbar. Wenn wir nun die Menge aller durch 4 teilbaren Zahlen mit M_4 und die Menge aller durch 2 teilbaren Zahlen mit M_2 bezeichnen, so können wir sagen:

Jede Zahl a, die Element von M_4 ist, ist auch Element von M_2, d. h.:
Wenn $a \in M_4$, so $a \in M_2$.

$$M_4 = \{0, \quad 4, \quad 8, \quad 12, \quad 16, \quad 20, \ldots\}$$

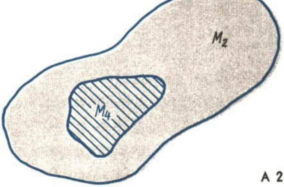
$$M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots\}$$

Umgekehrt gibt es aber Zahlen in M_2, die *nicht* Element von M_4 sind. Das können wir mit den Worten „nicht jede durch 2 teilbare Zahl ist auch durch 4 teilbar" feststellen.

Wir sagen: M_4 ist eine **Teilmenge** von M_2 und schreiben dafür:

$$M_4 \subset M_2 \quad \text{(lies: } M_4 \text{ ist Teilmenge von } M_2\text{).}$$

Bild A 2 veranschaulicht diese Beziehung zwischen den Mengen M_4 und M_2.
In ihm sind die Mengen als Flächen dargestellt, von denen die eine Teilfläche der anderen ist. Die Form und die Größe dieser Flächen kann beliebig gewählt werden, wenn nur diejenige Fläche, die die *Teilmenge* M_4 von M_2 veranschaulicht, *ganz innerhalb* der Fläche liegt, die die *Menge* M_2 darstellt.



A 2

A

(11) Veranschauliche durch Diagramme die Beziehungen zwischen folgenden Mengen!

a) Menge der durch 3 teilbaren Zahlen; Menge der durch 9 teilbaren Zahlen
b) Menge der durch 3 teilbaren Zahlen; Menge der durch 6 teilbaren Zahlen
c) Menge der durch 2 teilbaren Zahlen; Menge der durch 6 teilbaren Zahlen

17 Es soll die Menge M aller ungeraden Zahlen, die zwischen 40 und 45 liegen, und die Menge N aller Primzahlen zwischen 40 und 45 gebildet werden.

$M = \{41, 43\}$
$N = \{41, 43\}$

Wir stellen fest, daß M und N dieselben Elemente enthalten. Wir sagen: „Die Mengen M und N *sind gleich*", und schreiben:

$M = N$.

Bei der Gleichheit von Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge ihrer Elemente an. So ist z. B. $\{2, 7, 9\}$ dieselbe Menge wie $\{7, 2, 9\}$.

Aufgaben a 73 bis 78

Gemeinsame Vielfache — gemeinsame Teiler

15 Zerlegen natürlicher Zahlen in Primfaktoren

Wenn wir eine Zahl in Faktoren zerlegen, die sämtlich Primzahlen sind, so sprechen wir von einer **Zerlegung in Primfaktoren**.

Bei der Zerlegung in Primfaktoren *beginnen* wir am besten *mit der kleinsten Primzahl* unter den Teilern dieser Zahl.

Zerlegung in Primfaktoren

$$\begin{aligned} 42 &= 2 \cdot 21 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \\ \hline 42 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 72 &= 2 \cdot 36 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 18 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline 72 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

A 3

18 Es soll die Zahl 315 in Primfaktoren zerlegt werden.
Da 315 ungerade ist, enthält 315 nicht den Teiler 2. An der Quersumme 9 erkennen wir aber, daß 315 durch 3 teilbar ist. Die Zahl 3 ist also in diesem Fall die kleinste Primzahl unter den Teilern dieser Zahl.

$$
\begin{aligned}
315 &= 3 \cdot 105 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 35 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\
\hline
315 &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7
\end{aligned}
$$

Ähnlich wie bei der Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren können wir auch Zahlen in Summanden, die alle Primzahlen sind, zerlegen. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten:

a) $18 = 5 + 13 = 7 + 11$

b) $30 = 11 + 19 = 7 + 23$

$= 2 + 5 + 5 + 7 + 11$

Im Gegensatz dazu gilt für die Zerlegung in Primfaktoren der folgende Satz:

Jede natürliche Zahl läßt sich nur auf eine einzige Art in Primfaktoren zerlegen.

Dabei wollen wir von der Reihenfolge, in der die Primfaktoren aufgeschrieben werden, absehen.

Aufgaben a 79 bis 82

16 Primfaktorenzerlegung in Potenzschreibweise

Aus der Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren können wir alle Primzahlen in der Menge ihrer Teiler sofort ablesen; denn das sind ja gerade die in der Zerlegung auftretenden Primzahlen.

Wir können diese Primzahlen zu einer Menge zusammenfassen.

19 a) Menge der Primzahlen unter den Teilern von 42: $\{2, 3, 7\}$

b) Menge der Primzahlen unter den Teilern von 72: $\{2, 3\}$

c) Menge der Primzahlen unter den Teilern von 315: $\{3, 5, 7\}$

Ermittlung der Teiler

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$		
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	$= 2 \cdot 36$	2 und 36
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	$= 4 \cdot 18$	4 und 18
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	$= 8 \cdot 9$	8 und 9
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	$= 24 \cdot 3$	24 und 3
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	$= 12 \cdot 6$	12 und 6

A

Wir können durch die Primfaktorenzerlegung einer Zahl aber nicht nur die Primzahlen unter ihren Teilern feststellen, sondern auch ermitteln, welche weiteren Teiler diese Zahl hat, indem wir auf alle möglichen Arten die Primfaktoren zu Produkten zusammenfassen.

20 Es sollen die Teiler der Zahl 72 ermittelt werden (Bild A 4). Die übrigen, noch möglichen derartigen Zusammenfassungen ergeben keine neuen Teiler. Außer den gefundenen Teilern hat 72 natürlich noch die Teiler 1 und 72.
Die Menge der Primzahlen unter den Teilern von 72 ist also eine Teilmenge der Menge *aller* Teiler dieser Zahl.

Bei der Zerlegung in Primfaktoren können gleiche Primzahlen auch mehrmals als Faktoren auftreten. Ein Produkt mit gleichen Faktoren können wir in abgekürzter Form schreiben.

21 a) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ (lies: zwei hoch drei)
b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ (lies: drei hoch vier)

In dieser Form geschriebene Produkte heißen **Potenzen**. Die kleine hochgesetzte Zahl heißt **Exponent**. Die untenstehende Zahl heißt **Basis**. Der Exponent gibt an, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist.

Mit Hilfe der **Potenzschreibweise** können wir die Primfaktorenzerlegungen kürzer schreiben.

22 a) $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ b) $72 = 2^3 \cdot 3^2$ c) $432 = 2^4 \cdot 3^3$

Aufgaben a 83 bis 88

17 Gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache

Eine natürliche Zahl kann Teiler auch von zwei oder von mehr als zwei natürlichen Zahlen sein.

23 a) 4 ist Teiler von 20, denn $20 = 4 \cdot 5$, also $4 \mid 20$.
4 ist Teiler von 32, denn $32 = 4 \cdot 8$, also $4 \mid 32$.
Außer den Zahlen 20 und 32 gibt es noch andere Zahlen, die den Teiler 4 besitzen, z. B. 4, 16, 80, 104.
b) Die Zahl 7 ist Teiler z. B. von 21, 35, 63, 147, 4711.

Eine natürliche Zahl, die Teiler von zwei oder von mehr als zwei Zahlen ist, heißt *gemeinsamer Teiler* dieser Zahlen.

Da die Zahl 1 Teiler einer *jeden* Zahl ist, ist sie auch stets gemeinsamer Teiler zweier beliebiger Zahlen. Wir wollen sie deshalb bei der Aufzählung gemeinsamer Teiler nicht aufführen.

Natürliche Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen zueinander *teilerfremd*.

Eine natürliche Zahl kann Vielfaches auch von zwei oder von mehr als zwei natürlichen Zahlen sein.

24 Die Zahl 72 ist Vielfaches der Zahl 6; denn es gilt:

$72 = 12 \cdot 6$

Die Zahl 72 ist aber auch Vielfaches der Zahl 8, denn es gilt:

$72 = 9 \cdot 8$

Außer der Zahl 72 gibt es noch weitere Vielfache der Zahlen 6 und 8, z. B.: 96; 240; 24; 120.

12 Gib weitere Vielfache von 6 und 8 an! Wieviel Vielfache dieser Zahlen gibt es?

Eine natürliche Zahl, die Vielfaches von zwei oder von mehr als zwei natürlichen Zahlen ist, heißt *gemeinsames Vielfaches* dieser Zahlen.

Da die Zahl 0 Vielfaches (nämlich das Nullfache) von *jeder* Zahl ist, ist die Zahl 0 auch gemeinsames Vielfaches von 6 und 8. Die Zahl 0 ist also stets gemeinsames Vielfaches zweier beliebiger Zahlen. Daher wollen wir bei der Bildung gemeinsamer Vielfacher die 0 nicht berücksichtigen.

Aufgaben a 89 bis 94

18 Das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.)

Unter allen gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 6 und 8 gibt es ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches**, nämlich die Zahl 24. Es gibt zwar noch kleinere Vielfache von 6 und auch kleinere Vielfache von 8, aber kein kleineres gemeinsames Vielfaches.

In den folgenden Tabellen erkennen wir die Vielfachen und das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 6 und 8.

Vielfache von 6	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10	11	**12**	13	14
Vielfache von 8	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14

Vielfache von 6	15	16	17	**18**	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Vielfache von 8	15	**16**	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Wir können auch gemeinsame Vielfache von mehr als zwei Zahlen bilden.

25 Es sollen gemeinsame Vielfache von 4, 9 und 10 ermittelt werden.

a) $180 = 45 \cdot 4 = 20 \cdot 9 = 18 \cdot 10$

b) $360 = 90 \cdot 4 = 40 \cdot 9 = 36 \cdot 10$

c) $720 = 180 \cdot 4 = 80 \cdot 9 = 72 \cdot 10$

Auch hier gibt es beliebig viele gemeinsame Vielfache; denn jedes Vielfache von 180 ist wieder gemeinsames Vielfaches von 4, 9 und 10.

Für die Zahlen 4, 9 und 10 ist 180 das kleinste von allen gemeinsamen Vielfachen.

18 **DEFINITION: Das *kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.)* gegebener natürlicher Zahlen ist die kleinste von Null verschiedene Zahl, die durch alle gegebenen Zahlen teilbar ist.**

Aufgaben a 95 und 96

19 Ermitteln des k. g. V.

Das Produkt gegebener Zahlen ist stets ein gemeinsames Vielfaches dieser Zahlen, aber meistens nicht das kleinste gemeinsame Vielfache.
Ein gemeinsames Vielfaches von 6 und 8 ist z. B. $6 \cdot 8 = 48$, das k. g. V. aber ist 24.

<table>
<tr><th colspan="2">So ermitteln wir das k. g. V. mehrerer Zahlen!</th></tr>
<tr><td>1. Schritt: Zerlege die gegebenen Zahlen in Primfaktoren!</td><td>$6 = 2 \cdot 3$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$</td></tr>
<tr><td>2. Schritt: Schreibe die Produkte in Potenzschreibweise!</td><td>$6 = 2 \cdot 3 \quad = 2 \cdot 3$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$</td></tr>
<tr><td>3. Schritt: Schreibe von den Potenzen mit gleicher Basis jeweils die mit dem größten Exponenten heraus!</td><td>$6 = 2 \cdot 3 \quad = 2 \cdot 3$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
$2^3 \cdot 3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Primfaktoren, die nur einfach und nicht als Potenzen auftreten, werden in jeder Spalte einmal ausgewählt.)
Da die Zahl 8 im k. g. V. als Faktor enthalten sein muß, müssen wir 2^3 für das Bilden des k. g. V. auswählen.
Weiterhin muß aber auch die Zahl 6 im k. g. V. als Faktor enthalten sein, d. h., das k. g. V. muß die Faktoren 2 und 3 enthalten. Der Faktor 2 ist schon in der bereits ausgewählten Potenz 2^3 enthalten. Deshalb brauchen wir nur noch den Faktor 3 zu berücksichtigen.</td></tr>
<tr><td>4. Schritt: Bilde das Produkt der ausgewählten Potenzen!</td><td>$6 = 2 \cdot 3 \quad = 2 \cdot 3$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
k. g. V. $\quad 2^3 \cdot 3 = 24$</td></tr>
</table>

Dieses Verfahren ist besonders zweckmäßig, wenn man das k. g. V. größerer Zahlen berechnen will.

26 Es soll das k. g. V. von 840; 126 und 225 ermittelt werden.

$$\begin{aligned}
840 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\
126 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \qquad = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \\
225 &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \qquad = 3^2 \cdot 5^2 \\
\text{k. g. V.:} &\quad 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12\,600
\end{aligned}$$

Die Zahl 12 600 ist ein gemeinsames Vielfaches der gegebenen Zahlen. 12 600 ist aber auch das kleinste gemeinsame Vielfache. Würden wir auch nur einen Primfaktor fortlassen, so wäre die gefundene Zahl nicht mehr ein gemeinsames Vielfaches der gegebenen Zahlen. Streichen wir aus der Zahl 12 600 z. B. einen Faktor 2, so ist die Potenz 2^3 und damit die Zahl 840 nicht mehr als Faktor in der Zahl 12 600 enthalten.

Beim Kürzen von Brüchen müssen wir solche Zahlen finden, durch die Zähler und Nenner teilbar sind. Diese Zahlen müssen also gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner sein.

27 Es soll der Bruch $\frac{56}{84}$ gekürzt werden.
Dazu suchen wir alle gemeinsamen Teiler von 56 und 84.

Teiler von 56	1; 2; 4; 7; 8; 14; **28**; 56
Teiler von 84	1; 2; 3; 4; 6; 7; 12; 14; 21; **28**; 42; 84
Gemeinsame Teiler	2; 4; 7; 14; **28**

Damit haben wir die Zahlen gefunden, durch die wir $\frac{56}{84}$ kürzen können.

$\frac{56}{84}$ kürzen durch 2: $\frac{28}{42}$

$\frac{56}{84}$ kürzen durch 4: $\frac{14}{21}$

$\frac{56}{84}$ kürzen durch 7: $\frac{8}{12}$

$\frac{56}{84}$ kürzen durch 14: $\frac{4}{6}$

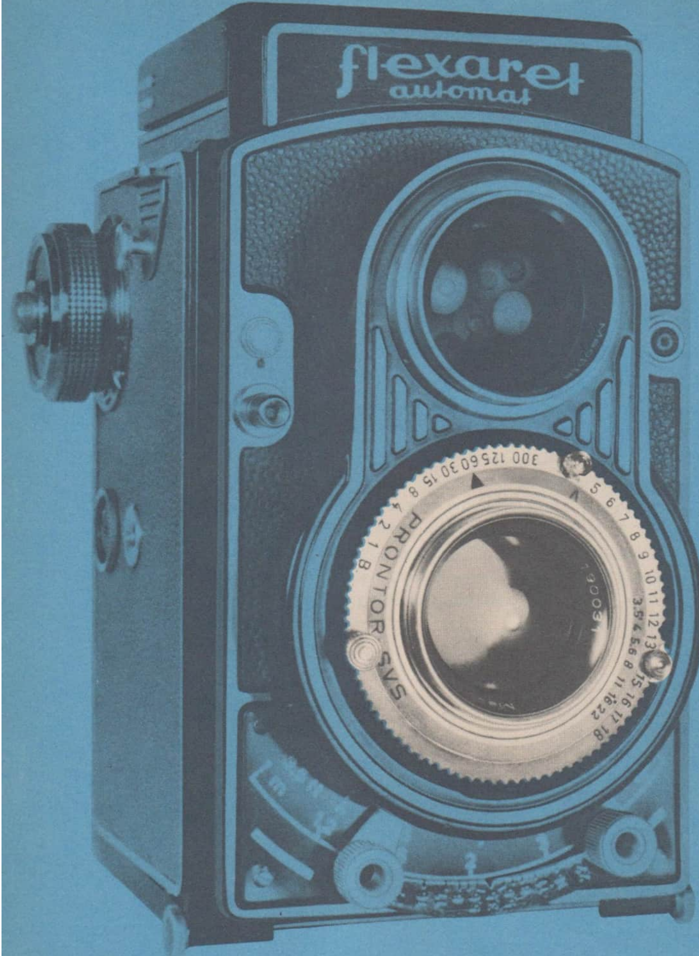
$\frac{56}{84}$ kürzen durch 28: $\frac{2}{3}$

Unter allen gemeinsamen Teilern von 56 und 84 ist die Zahl 28 der **größte gemeinsame Teiler**.

Wir können sagen:
Der *größte gemeinsame Teiler* (*g. g. T.*) gegebener natürlicher Zahlen ist die größte Zahl, die alle gegebenen Zahlen teilt.

Wenn wir einen Bruch soweit wie möglich kürzen wollen, um im Zähler und Nenner möglichst kleine Zahlen zu erhalten, müssen wir den gegebenen Bruch durch den g.g.T. von Zähler und Nenner kürzen. Im gekürzten Bruch sind dann Zähler und Nenner zueinander teilerfremd.
Zum Ermitteln des g. g. T. gegebener Zahlen brauchen wir nicht alle gemeinsamen Teiler dieser Zahlen aufzusuchen. Ähnlich wie bei der Berechnung des k. g. V. können wir nämlich auch den g. g. T. mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung finden.

Aufgaben a 97 bis 104



$\frac{1}{60}$ s · Blende 16

B. Gebrochene Zahlen

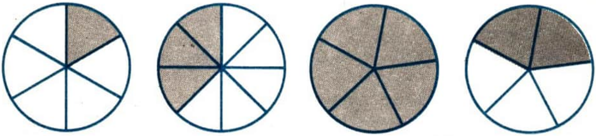
Wiederholung

1 Der Bruchbegriff

Um Bruchteile von Ganzen angeben zu können, haben wir aus den natürlichen Zahlen Brüche gebildet.

1 **DEFINITION: Ein in der Form „$\frac{a}{b}$" geschriebenes Paar natürlicher Zahlen *a* und *b* ($b \neq 0$) heißt (gemeiner) *Bruch*. Die Zahl *a* heißt *Zähler*, die Zahl *b* *Nenner* des Bruches.**

Der Nenner eines Bruches gibt an, in wieviel gleiche Teile ein Ganzes geteilt wurde. Der Zähler gibt an, wieviel solcher Teile durch den Bruch gegeben sind.



$\frac{1}{6}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{5}$

B 1

B

1 Brüche, bei denen der Zähler kleiner als der Nenner ist, heißen **echte** Brüche. Alle anderen Brüche heißen **unechte** Brüche.

(1) Gib Beispiele für unechte Brüche an!

2 **DEFINITION: Man *erweitert* einen Bruch mit einer von 0 verschiedenen natürlichen Zahl, indem man Zähler *und* Nenner dieses Bruches mit dieser Zahl multipliziert.**
Man *kürzt* einen Bruch durch eine von 0 verschiedene natürliche Zahl, indem man Zähler *und* Nenner dieses Bruches durch diese Zahl dividiert.

Jeder Bruch kann mit einer beliebigen von 1 verschiedenen Zahl erweitert werden. Aber nur solche Brüche, deren Zähler und Nenner nicht teilerfremd sind, können durch eine von 1 verschiedene Zahl gekürzt werden.

Aufgaben b 1 bis 4

2 Gebrochene Zahlen

Um festzustellen, ob zwei gegebene Brüche durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, benutzen wir folgenden Satz

3 **SATZ: Wenn für Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ und $d \neq 0$)**
$a \cdot d = b \cdot c$ gilt,
so gehen sie durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervor.
Gilt jedoch $a \cdot d \neq b \cdot c$,
so gehen sie nicht durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervor.

2

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$a \cdot d$	$b \cdot c$
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{10}$	20	20
$\frac{9}{3}$	$\frac{6}{2}$	18	18
$\frac{5}{1}$	$\frac{20}{4}$	20	20

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$a \cdot d$	$b \cdot c$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	14	12
$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	40	35
$\frac{18}{5}$	$\frac{9}{2}$	36	45

Alle Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, fassen wir zu einer Klasse zusammen.

4 **DEFINITION: Alle Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, bilden eine Klasse. Jede solche Klasse heißt *gebrochene Zahl.***

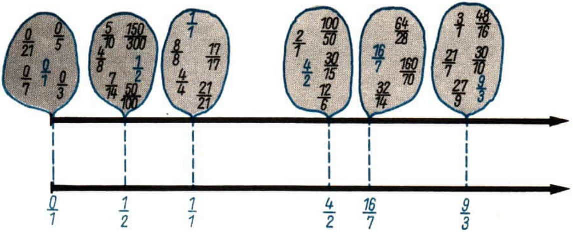
Wenn wir z. B. von der „gebrochenen Zahl $\frac{1}{2}$" sprechen, so meinen wir also diejenige Klasse von Brüchen, in der u. a. der Bruch $\frac{1}{2}$, aber auch die Brüche $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ usw. liegen.

Sprechen wir von dem „Bruch $\frac{1}{2}$", so meinen wir nur das aus den natürlichen Zahlen 1 und 2 gebildete geordnete Paar.

Die verschiedenen Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ geben dieselbe gebrochene Zahl an, also dieselbe Klasse von Brüchen. Wir können deshalb schreiben: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Häufig wird zur Angabe einer gebrochenen Zahl derjenige Bruch benutzt, dessen Zähler und Nenner teilerfremd sind.

Das Kürzen oder Erweitern eines Bruches bedeutet, daß man von diesem Bruch zu einem anderen Bruch aus derselben Klasse übergeht, d. h. dieselbe gebrochene Zahl durch einen anderen Bruch angibt (Bild B 2).



B 2

Bezeichnen wir die Menge der gebrochenen Zahlen etwa mit R^*, so gilt z. B.:

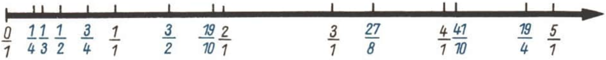
$$\frac{1}{3} \in R^*; \quad \frac{0}{7} \in R^*.$$

Um gebrochene Zahlen an einem Zahlenstrahl darzustellen, gehen wir folgendermaßen vor:

Wir tragen vom Anfangspunkt eines Strahls aus eine Strecke mit beliebiger Länge ab (Einheitsstrecke). An den Anfangs- bzw. Endpunkt dieser Strecke schreiben wir die Brüche $\frac{0}{1}$ bzw. $\frac{1}{1}$ zur Bezeichnung der entsprechenden gebrochenen Zahlen. Von dem Endpunkt der Einheitsstrecke ausgehend, tragen wir Strecken mit derselben Länge fortlaufend ab und schreiben an die erhaltenen Punkte der Reihe nach die Brüche $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, usw. (Bild B 3). Durch Abtragen von Bruchteilen der Einheitsstrecke finden wir entsprechend die Punkte, die beliebigen anderen gebrochenen Zahlen zugeordnet sind. Dadurch wird jeder gebrochenen Zahl ein Punkt des Strahls zugeordnet.

B 3

Im Bild B 4 sind nur solche Brüche zur Angabe der entsprechenden gebrochenen Zahlen benutzt, bei denen Zähler und Nenner teilerfremd sind.



B 4

Aufgaben b 5 bis 10

3 Dezimalbrüche

Brüche, die die Zahl 10 oder eine Potenz 10^n ($n \in N$, $n > 1$) als Nenner besitzen, nennen wir **Zehnerbrüche**. Diese Zehnerbrüche können wir auch als Dezimalbrüche schreiben, indem wir die Stellentafel des dekadischen Positionssystems nach rechts erweitern.

	10^3	10^2	10^1	1	$\frac{1}{10^1}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	
$\frac{5}{10}$				0	5			0,5
$\frac{50}{100}$				0	5	0		0,50
$\frac{136}{1000}$				0	1	3	6	0,136
$\frac{12\,758}{100}$		1	2	7	5	8		127,58

Wir können also solche gebrochene Zahlen, die sich durch Zehnerbrüche angeben lassen, auch durch Dezimalbrüche angeben. Brüche mit gleichen Nennern heißen **gleichnamig**. Die Stellen eines Dezimalbruches hinter dem Komma heißen Dezimalstellen. Gleichnamige Dezimalbrüche haben die gleiche Anzahl von Dezimalstellen.

Aufgaben b 11 bis 14

Ordnung gebrochener Zahlen

4 Vergleichen gebrochener Zahlen

Wir haben die natürlichen Zahlen durch die Kleiner-als-Beziehung geordnet. Nun wollen wir auch die gebrochenen Zahlen ordnen und dadurch einen Vergleich zweier gebrochener Zahlen miteinander möglich machen.
Dabei richten wir uns nach der Darstellung der gebrochenen Zahlen am Zahlenstrahl. Wie bei den natürlichen Zahlen soll auch jetzt wieder von zwei

verschiedenen gebrochenen Zahlen diejenige *kleiner* genannt werden, der der auf dem Zahlenstrahl *weiter links* liegende Punkt zugeordnet ist.
Wir sagen kürzer: Von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen soll diejenige die kleinere sein, die auf dem Zahlenstrahl links von der anderen liegt.

2 Stelle an einem Zahlenstrahl die folgenden gebrochenen Zahlen dar!

a) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{10}{3}$ b) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{10}{4}$; $\frac{16}{4}$

Aus dem Verfahren zur Darstellung gebrochener Zahlen am Zahlenstrahl ergibt sich, daß von zwei durch *gleichnamige* Brüche angegebenen gebrochenen Zahlen nach unserer Festlegung diejenige *kleiner* ist, deren Bruch den *kleineren* Zähler hat.

Es gilt also:

4 a) $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$; $\frac{5}{3} < \frac{6}{3}$; $\frac{6}{3} < \frac{10}{3}$; kürzer: $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{5}{3} < \frac{6}{3} < \frac{10}{3}$
b) $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} < \frac{6}{4}$; $\frac{6}{4} < \frac{10}{4}$; $\frac{10}{4} < \frac{16}{4}$; kürzer: $\frac{1}{4} < \frac{3}{4} < \frac{6}{4} < \frac{10}{4} < \frac{16}{4}$

Für je zwei gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$ aus dem Beispiel 4, für die $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ gilt, gilt auch $a \cdot b < b \cdot c$.

5 a) $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$ und $2 \cdot 3 < 3 \cdot 5$

b) $\frac{6}{4} < \frac{10}{4}$ und $6 \cdot 4 < 4 \cdot 10$

Wir legen daher die Ordnung für gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, die durch Brüche mit beliebigen Nennern $b \neq 0$ und $d \neq 0$ angegeben sind, folgendermaßen fest:

5 **DEFINITION:**
$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Wenn } a \cdot d < b \cdot c, \textbf{ so soll gelten } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ \textbf{Wenn } a \cdot d > b \cdot c, \textbf{ so soll gelten } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \\ \textbf{Wenn } a \cdot d = b \cdot c, \textbf{ so soll gelten } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \end{array}\right\} \begin{array}{l} b \neq 0, \\ d \neq 0 \end{array}$$

6 a) $\frac{5}{8} < \frac{7}{8}$, denn $5 \cdot 8 < 8 \cdot 7$ $(40 < 56)$
b) $\frac{7}{11} < \frac{9}{13}$, denn $7 \cdot 13 < 11 \cdot 9$ $(91 < 99)$
c) $\frac{5}{3} > \frac{3}{5}$, denn $5 \cdot 5 > 3 \cdot 3$ $(25 > 9)$
d) $\frac{17}{3} = \frac{68}{12}$, denn $17 \cdot 12 = 3 \cdot 68$ $(204 = 204)$

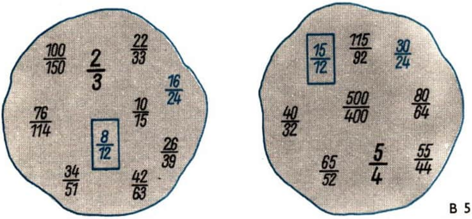
Durch Definition 5 haben wir den Vergleich gebrochener Zahlen also auf den Vergleich natürlicher Zahlen zurückgeführt.
Für zwei beliebige gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gilt immer nur einer der drei Fälle: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Aufgaben b 15 bis 18

5 Der Hauptnenner

Wir können gebrochene Zahlen erst dann addieren oder voneinander subtrahieren, wenn sie durch gleichnamige Brüche angegeben sind.
Es ist immer möglich, gegebene gebrochene Zahlen durch gleichnamige Brüche anzugeben.

7 $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{4}$ sollen durch gleichnamige Brüche angegeben werden.
Die gegebenen Klassen im Bild B 5 enthalten auch Brüche, die jeweils die gleichen Nenner haben. Zu den Brüchen $\frac{8}{12}$ und $\frac{15}{12}$ gehen wir dadurch über, daß wir $\frac{2}{3}$ mit 4 und $\frac{5}{4}$ mit 3 erweitern. Darüber hinaus gibt es beliebig viele weitere Brüche aus diesen Klassen mit gleichen Nennern, z. B.: $\frac{16}{24}$ und $\frac{30}{24}$; $\frac{24}{36}$ und $\frac{45}{36}$; $\frac{32}{48}$ und $\frac{60}{48}$.
Unter diesen Nennern gibt es jeweils einen kleinsten. Das ist das k. g. V. der Nenner der gegebenen Brüche.



B 5

6 **DEFINITION: Das k. g. V. der Nenner gegebener Brüche heißt der *Hauptnenner* (HN) dieser Brüche.**

Das Bild B 6 veranschaulicht diesen Sachverhalt für drei gegebene Brüche.

Der Hauptnenner von $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{7}{8}$ ist 24.											
$\frac{3}{4}$ =	$\frac{6}{8}$ =	$\frac{9}{12}$ =	$\frac{12}{16}$ =	$\frac{15}{20}$ =	$\boxed{\frac{18}{24}}$ =	$\frac{21}{28}$ =	$\frac{24}{32}$ =	$\frac{27}{36}$ =	$\frac{30}{40}$ =	$\frac{33}{44}$ =	$\frac{36}{48}$
$\frac{1}{6}$ =	$\frac{2}{12}$ =	$\frac{3}{18}$ =	$\boxed{\frac{4}{24}}$ =	$\frac{5}{30}$ =	$\frac{6}{36}$ =	$\frac{7}{42}$ =	$\frac{8}{48}$ =	$\frac{9}{54}$ =	$\frac{10}{60}$ =	$\frac{11}{66}$ =	$\frac{12}{72}$
$\frac{7}{8}$ =	$\frac{14}{16}$ =	$\boxed{\frac{21}{24}}$ =	$\frac{28}{32}$ =	$\frac{35}{40}$ =	$\frac{42}{48}$ =	$\frac{49}{56}$ =	$\frac{56}{64}$ =	$\frac{63}{72}$ =	$\frac{70}{80}$ =	$\frac{77}{88}$ =	$\frac{84}{96}$

B 6

Will man Brüche gleichnamig machen, so ist es meist zweckmäßig, sie auf den Hauptnenner, d. h. auf den kleinsten gemeinsamen Nenner, zu bringen.

8 Die Brüche $\frac{7}{20}$, $\frac{25}{24}$ und $\frac{11}{60}$ sollen gleichnamig gemacht werden.

Ermitteln des *Hauptnenners*:

	Erweiterungsfaktoren:	
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \quad = 2^2 \quad \cdot 5$	$2 \cdot 3 = 6$	$\frac{7}{20} = \frac{42}{120}$
$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$	5	$\frac{25}{24} = \frac{125}{120}$
$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	2	$\frac{11}{60} = \frac{22}{120}$
HN: $\quad 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$		

Mitunter lassen sich Brüche auch durch Kürzen gleichnamig machen.

9 Die Brüche $\frac{15}{50}$, $\frac{21}{30}$ und $\frac{72}{40}$ sollen gleichnamig gemacht werden.

$\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$ (gekürzt durch 5)

$\frac{21}{30} = \frac{7}{10}$ (gekürzt durch 3)

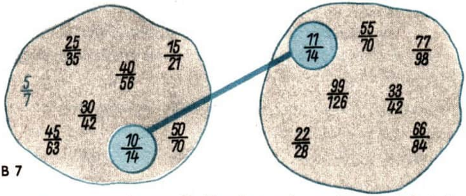
$\frac{72}{40} = \frac{18}{10}$ (gekürzt durch 4)

Aufgaben b 19 bis 28

6 Gebrochene Zahlen und natürliche Zahlen

Wie wir wissen, können wir uns beim Vergleichen gebrochener Zahlen, die durch gleichnamige Brüche dargestellt sind, auf das Vergleichen der Zähler dieser Brüche beschränken. Wir können daher beim Vergleichen gebrochener Zahlen auch wie im folgenden Beispiel vorgehen.

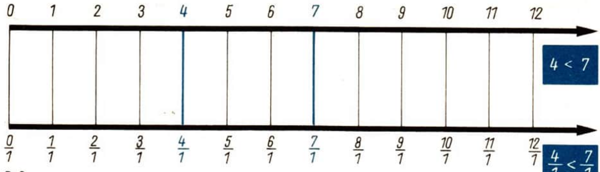
10 Es sollen $\frac{5}{7}$ und $\frac{11}{14}$ miteinander verglichen werden.
Der Hauptnenner beider Brüche ist 14.
Wir gehen in der Klasse des ersten Bruches zu dem Bruch mit dem Nenner 14 über (Bild B 7).
Nun vergleichen wir $\frac{10}{14}$ und $\frac{11}{14}$ miteinander und stellen fest: $\frac{10}{14} < \frac{11}{14}$.



B 7

Wir wollen nun diejenigen gebrochenen Zahlen betrachten, die durch Brüche mit dem Hauptnenner 1 darstellbar sind. Dazu vergleichen wir einen Zahlenstrahl, auf dem die natürlichen Zahlen veranschaulicht sind, mit einem Zahlenstrahl, der die gebrochenen Zahlen veranschaulicht.

Jeder gebrochenen Zahl, die sich durch einen Bruch mit dem Nenner 1 angeben läßt, entspricht eine natürliche Zahl und umgekehrt. Dabei ist der gebrochenen Zahl $\frac{a}{1}$ die natürliche Zahl a zugeordnet. Diese gebrochenen Zahlen verhalten sich beim Vergleichen wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen (Bild B8).



B 8

B

11

Gebrochene Zahlen	$\frac{0}{1} < \frac{5}{1}$	$\frac{2}{1} < \frac{3}{1}$	$\frac{4}{1} < \frac{8}{1}$	$\frac{6}{1} > \frac{0}{1}$	$\frac{7}{1} > \frac{5}{1}$
Natürliche Zahlen	$0 < 5$	$2 < 3$	$4 < 8$	$6 > 0$	$7 > 5$

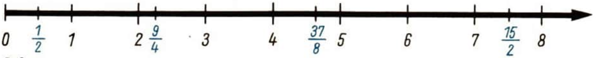
Wenn wir gebrochene Zahlen miteinander vergleichen, können wir deshalb von jetzt an z. B.

4 statt $\frac{4}{1}$, $\quad 2 < \frac{5}{2}$ statt $\frac{2}{1} < \frac{5}{2}$ $\quad$ oder $\quad 0 < \frac{1}{100}$ statt $\frac{0}{1} < \frac{1}{100}$

schreiben.

7 **SATZ: Beim Vergleichen verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 angeben lassen, wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen.**

Nach Satz 7 können die natürlichen Zahlen und die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen beim Vergleichen gegenseitig ersetzt werden (Bild B 9).



B 9

Gebrochene Zahlen, die sich durch echte Brüche angeben lassen, heißen **echt** gebrochene Zahlen. Gebrochene Zahlen, die sich durch unechte Brüche angeben lassen, heißen **unecht** gebrochene Zahlen. Alle echt gebrochenen Zahlen sind kleiner als alle unecht gebrochenen Zahlen, denn die echt gebrochenen Zahlen sind kleiner als 1, und die unecht gebrochenen Zahlen sind größer als 1 oder gleich 1.

Gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung vergleichen wir, indem wir die Dezimalbrüche zunächst gleichnamig machen und dann diese ohne Berücksichtigung des Kommas wie natürliche Zahlen vergleichen.

12 Es sind zu vergleichen:

a) 12,4 und 13,38
Gleichnamig machen:
12,40 und 13,38
Es gilt: $12{,}40 < 13{,}38$, d. h.
$\frac{1\,240}{100} < \frac{1\,338}{100}$;
denn $1\,240 < 1\,338$,
also $12{,}4 < 13{,}38$.

b) 7,08 und 7,3
Gleichnamig machen:
7,08 und 7,30
Es gilt: $7{,}08 < 7{,}30$, d. h.
$\frac{708}{100} < \frac{730}{100}$;
denn $708 < 730$,
also $7{,}08 < 7{,}3$.

Aufgaben b 29 bis 58

Zusammenfassung:

Gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ($b \neq 0$, $d \neq 0$) können verglichen werden,

a) indem man die Produkte $a \cdot d$ und $b \cdot c$ vergleicht,

b) indem man sie durch gleichnamige Brüche darstellt und deren Zähler vergleicht.

Gebrochene Zahlen, die durch Dezimalbrüche gegeben sind, werden gleichnamig gemacht und ohne Berücksichtigung des Kommas wie natürliche Zahlen verglichen.

Von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegt auf dem Zahlenstrahl die kleinere links von der größeren.

Alle gebrochenen Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 angeben lassen, können beim Vergleichen durch natürliche Zahlen ersetzt werden.

Die Zahl 0 ist die kleinste gebrochene Zahl.

Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen

7 Die Addition gebrochener Zahlen

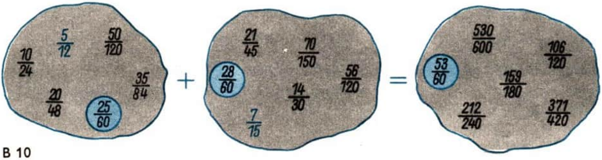
Die Addition gebrochener Zahlen wird durch die folgende Definition auf die Addition natürlicher Zahlen zurückgeführt.

8 **DEFINITION: Gebrochene Zahlen werden addiert, indem man zu ihrer Angabe gleichnamige Brüche wählt und nur deren Zähler addiert. Den gemeinsamen Nenner behält man bei.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad (b \neq 0)$$

13 $\frac{5}{12} + \frac{7}{15} = \frac{25}{60} + \frac{28}{60} = \frac{25+28}{60} = \frac{53}{60}$

Das Bild B 10 veranschaulicht dieses Beispiel.



B 10

Im Bereich der gebrochenen Zahlen ist die Addition *stets* ausführbar, da wir gebrochene Zahlen stets mit gleichnamigen Brüchen angeben und die im Zähler stehenden natürlichen Zahlen stets addieren können.

Brüche mit dem Nenner 0 stellen *keine* gebrochenen Zahlen dar. Würde z. B. $\frac{5}{0}$ eine gebrochene Zahl darstellen, so wäre die Forderung sinnvoll, auch die

Summe $\frac{3}{4} + \frac{5}{0}$ zu berechnen. Dazu müßten wir die Erweiterung von Brüchen mit Null zulassen, da wir diese Brüche nicht anders gleichnamig machen könnten. Der „Hauptnenner" wäre nämlich Null. Wenn wir aber mit Null erweitern dürften, könnten wir alle Brüche auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen. Dann würden alle Brüche in derselben Klasse wie der Bruch $\frac{0}{0}$ liegen. Es gäbe also nur eine einzige gebrochene Zahl. Das ist aber sinnlos und steht auch im Widerspruch zu unserer praktischen Erfahrung.

Wie im Bereich der natürlichen Zahlen gelten für die Addition gebrochener Zahlen folgende Sätze, die wir nur durch Beispiele erläutern, aber nicht beweisen.

B

9 **SATZ: In einer Summe gebrochener Zahlen mit zwei Summanden sind die Summanden vertauschbar.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \qquad (b \neq 0,\ d \neq 0) \qquad \textbf{(Kommutativität der Addition)}$$

14 $$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{15}{24} + \frac{14}{24} = \frac{15+14}{24} = \frac{14+15}{24} = \frac{14}{24} + \frac{15}{24} = \frac{7}{12} + \frac{5}{8}$$

10 **SATZ: Die Reihenfolge von zwei Additionen gebrochener Zahlen ist beliebig.**

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \qquad (b \neq 0,\ d \neq 0,\ f \neq 0)$$

(Assoziativität der Addition)

15 $$\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\right) + \frac{7}{8} = \frac{3+5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{(3+5)+7}{8} = \frac{3+(5+7)}{8} = \frac{3}{8} + \frac{5+7}{8} = \frac{3}{8} + \left(\frac{5}{8} + \frac{7}{8}\right)$$

Aufgaben b 59 bis 74

8 Die Subtraktion gebrochener Zahlen

Die Subtraktion gebrochener Zahlen legen wir so fest, daß sie wie bei den natürlichen Zahlen die Umkehrung der Addition ist.

11 **DEFINITION: Gebrochene Zahlen werden subtrahiert, indem man zu ihrer Angabe gleichnamige Brüche wählt und nur deren Zähler subtrahiert. Den gemeinsamen Nenner behält man bei.**

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \qquad (b \neq 0)$$

Die Subtraktion gebrochener Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$ ist *nur* ausführbar, wenn die Subtraktion der natürlichen Zahlen a und c ausführbar ist, also wenn c nicht größer als a ist. Das bedeutet aber, daß auch bei den gebrochenen Zahlen der Subtrahend $\frac{c}{b}$ nicht größer als der Minuend $\frac{a}{b}$ sein darf.

16 a) $\frac{8}{9} - \frac{2}{9} = \frac{8-2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{11}{4} - \frac{7}{10} = \frac{55}{20} - \frac{14}{20} = \frac{55-14}{20} = \frac{41}{20}$

c) $\frac{10}{13} - \frac{7}{9}$ *nicht* ausführbar, da $\frac{10}{13} < \frac{7}{9}$ $(10 \cdot 9 < 13 \cdot 7)$.

Das zeigt sich auch, falls wir zu rechnen beginnen:

$\frac{10}{13} - \frac{7}{9} = \frac{90}{117} - \frac{91}{117} = \frac{90-91}{117}$ (90 — 91 ist nicht ausführbar).

Auf Grund der Definition 11 ist auch im Bereich der gebrochenen Zahlen die *Subtraktion* die *Umkehrung der Addition*, wie das folgende Beispiel zeigt.

17 Wir überprüfen die Aussage:

$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ bedeutet dasselbe wie $\frac{x}{y} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$.

Nun ist $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$, also $\frac{x}{y} = \frac{5}{12}$.

Setzen wir $\frac{5}{12}$ für $\frac{x}{y}$ als Summanden ein, so erhalten wir

$\frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Also bedeutet auch die Subtraktion gebrochener Zahlen, wie im Bereich der natürlichen Zahlen, die Bestimmung des zweiten Summanden aus der Summe und einem gegebenen Summanden.

Aufgaben b 75 bis 86

9 Addieren und Subtrahieren gebrochener Zahlen in verschiedenen Darstellungen

Auch wenn die gebrochenen Zahlen in Form von Dezimalbrüchen gegeben sind, können wir die Addition und die Subtraktion gebrochener Zahlen auf die entsprechenden Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen zurückführen. Das Rechnen mit gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchform wollen wir künftig auch kürzer „Rechnen mit Dezimalbrüchen" nennen.

18 Es soll folgende Summe berechnet werden.

$0{,}5 + 1{,}25 + 0{,}018$ — Wir machen zunächst gleichnamig:

$0{,}5\,00 + 1{,}25\,0 + 0{,}018$ — Gehen wir nun zu Zehnerbrüchen über, so erhalten wir:

$$\frac{500}{1\,000} + \frac{1\,250}{1\,000} + \frac{18}{1\,000} = \frac{500 + 1\,250 + 18}{1\,000}.$$

Die Addition der natürlichen Zahlen im Zähler können wir schriftlich ausführen:

$$\begin{array}{r} 500 \\ 1\,250 \\ +\quad 18 \\ \hline 1\,768 \end{array}$$

Wir erhalten also $\frac{1768}{1000} = 1{,}768$.

Zum gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir die gleichnamigen Dezimalbrüche untereinander schreiben und diese wie natürliche Zahlen addieren:

$$\begin{array}{r} 0{,}500 \\ 1{,}250 \\ +\ 0{,}018 \\ \hline 1{,}768 \end{array}$$

Da Nullen beim Addieren keinen Einfluß auf die Teilsummen haben, können wir auch schreiben:

$$\begin{array}{l} 0{,}5 \\ 1{,}25 \\ +\ 0{,}018 \\ \hline 1{,}768 \end{array}$$

Wenn wir Dezimalbrüche addieren wollen, schreiben wir die Summanden so untereinander, daß *Stellen mit dem gleichen Stellenwert* jeweils untereinander stehen. Das bedeutet, daß *Komma unter Komma* stehen muß. Wir addieren stellenweise wie bei den natürlichen Zahlen. Im Ergebnis setzen wir das Komma zwischen dieselben Stellen wie in den Summanden.

Bei der Subtraktion von Dezimalbrüchen verfahren wir wie bei der Addition:

19 a) $34{,}56 - 13{,}478$

$$\begin{array}{r} 34{,}560 \\ -\ 13{,}478 \\ \hline 21{,}082 \end{array}$$

b) $164{,}7 - 65{,}321 - 12{,}05$

$$\begin{array}{r} 164{,}700 \\ -\ \ 65{,}321 \\ -\ \ 12{,}050 \\ \hline 87{,}329 \end{array}$$

Manchmal sollen gebrochene Zahlen addiert werden, von denen einige durch gemeine Brüche, andere durch Dezimalbrüche gegeben sind.

20 a) $\frac{2}{5} + 3{,}87 + \frac{9}{8} + 0{,}004$

Hier können wir alle auftretenden gemeinen Brüche als Dezimalbrüche schreiben.

$$\begin{array}{r} 0{,}4 \\ 3{,}87 \\ 1{,}125 \\ +\ 0{,}004 \\ \hline 5{,}399 \end{array}$$

b) $13{,}4 + \frac{7}{3} + \frac{4}{5} + 2{,}8$

Hier können wir *nicht* alle gemeinen Brüche als Dezimalbrüche schreiben. Der Bruch $\frac{7}{3}$ liegt nämlich in einer Klasse, in der keine Zehnerbrüche enthalten sind.

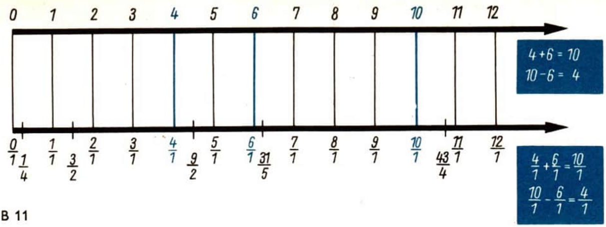
Deshalb schreiben wir umgekehrt die Dezimalbrüche als gemeine Brüche.

$$13{,}4 + \frac{7}{3} + \frac{4}{5} + 2{,}8 = \frac{134}{10} + \frac{7}{3} + \frac{4}{5} + \frac{28}{10}$$

$$= \frac{402 + 70 + 24 + 84}{30} = \frac{580}{30}$$

$$13{,}4 + \frac{7}{3} + \frac{4}{5} + 2{,}8 = \frac{58}{3}$$

Gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 angeben lassen, verhalten sich bei der Addition und bei der Subtraktion wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen (Bild B 11).

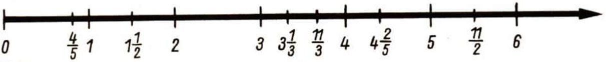


B 11

Gebrochene Zahlen	$\frac{1}{1} + \frac{6}{1} = \frac{7}{1}$	$\frac{9}{1} + \frac{12}{1} = \frac{21}{1}$	$\frac{42}{1} - \frac{27}{1} = \frac{15}{1}$
Natürliche Zahlen	$1 + 6 = 7$	$9 + 12 = 21$	$42 - 27 = 15$

12 **SATZ: Bei der Addition und bei der Subtraktion verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen.**

Auf Grund von Satz 12 können die natürlichen Zahlen und die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen beim Addieren und Subtrahieren gegenseitig ersetzt werden (Bild B 12).



B 12

Unecht gebrochene Zahlen werden in der Praxis manchmal als sogenannte „gemischte Zahlen" geschrieben.

$5\frac{2}{3}$ (lies: „Fünf zwei Drittel") bedeutet $5 + \frac{2}{3}$. Es gilt also:

$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{5}{1} + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$.

Durch gemischte Zahlen vermeidet man unnötig große Zähler. Außerdem kann man gebrochene Zahlen in dieser Schreibweise leichter vergleichen. So erkennt man sofort, daß z. B. $14\frac{17}{67}$ zwischen 14 und 15 liegt. In der Darstellung $\frac{955}{67}$ derselben Zahl erkennt man dies nicht ohne weiteres.
Die gemischten Zahlen sind keine neue Art von Zahlen. Es handelt sich vielmehr um eine andere Schreibweise gebrochener Zahlen.

21 a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{12}$

b) $7\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5}$ Überschlag: $8 + 6 = 14$

$$7\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5} = 12 + \frac{15+16}{20}$$
$$= 12 + \frac{31}{20}$$
$$= 13\frac{11}{20}$$

22 $7\frac{5}{12} - 3\frac{11}{20} = \frac{89}{12} - \frac{71}{20}$

$= \frac{445}{60} - \frac{213}{60}$

$= \frac{232}{60}$

Aufgaben b 87 bis 114

Zusammenfassung:
Um gebrochene Zahlen zu addieren bzw. zu subtrahieren, stellt man sie durch gleichnamige Brüche dar und addiert bzw. subtrahiert deren Zähler. Der gemeinsame Nenner wird beibehalten. Die Subtraktion ist nur ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist.
Gebrochene Zahlen, die durch Dezimalbrüche gegeben sind, werden unter Berücksichtigung der Stellenwerte (Komma unter Komma) wie natürliche Zahlen addiert bzw. subtrahiert.
Die Addition gebrochener Zahlen ist kommutativ und assoziativ.
Gebrochene Zahlen, die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbar sind, können bei der Addition und bei der Subtraktion durch natürliche Zahlen ersetzt werden.

B

Multiplikation und Division gebrochener Zahlen

10 Die Multiplikation gebrochener Zahlen

Beim Vergleichen, Addieren und Subtrahieren verhalten sich die gebrochenen Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 angeben lassen, wie die natürlichen Zahlen. Mit ihnen konnten wir also beim Vergleichen, Addieren und Subtrahieren wie mit natürlichen Zahlen umgehen.
Wir wollen nun die Multiplikation so festlegen, daß sich diese gebrochenen Zahlen auch wieder durch die natürlichen Zahlen ersetzen lassen.
Die gebrochenen Zahlen $\frac{4}{1}$ und $\frac{5}{1}$ sollen multipliziert werden.

$\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{x}{y}$

Da $4 \cdot 5 = 20$ gilt, setzen wir fest: $\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{20}{1}$.

Nach diesem Beispiel kann man zunächst denken, daß sich für die Multiplikation eine ähnliche Regel ergibt wie für die Addition. Das Ergebnis $\frac{20}{1}$ können wir ja dadurch erhalten, daß wir die Zähler der gegebenen Brüche multiplizieren und den gemeinsamen Nenner 1 beibehalten.
Wir können aber die gegebenen gebrochenen Zahlen z. B. auch durch die Brüche $\frac{8}{2}$ und $\frac{10}{2}$ angeben. Multiplizieren wir nach der vermuteten Regel, so erhalten wir: $\frac{8}{2} \cdot \frac{10}{2} = \frac{80}{2}$.
Der Bruch $\frac{80}{2}$ gibt aber nicht dieselbe gebrochene Zahl wie der Bruch $\frac{20}{1}$ an. Daher ist die vermutete Multiplikationsregel *nicht* verwendbar.

Nun können wir aber das Ergebnis $\frac{20}{1}$ aus $\frac{4}{1}$ und $\frac{5}{1}$ auch dadurch erhalten, daß wir sowohl die Zähler als auch die Nenner miteinander multiplizieren. Gehen wir jetzt zu anderen Darstellungen der gegebenen Zahl über, so erhalten wir auf diese Art stets dasselbe Ergebnis.

23 $\frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 1} = \frac{20}{1}$ $\qquad \frac{20}{5} \cdot \frac{25}{5} = \frac{20 \cdot 25}{5 \cdot 5} = \frac{500}{25} = \frac{20}{1}$

$\frac{8}{2} \cdot \frac{10}{2} = \frac{8 \cdot 10}{2 \cdot 2} = \frac{80}{4} = \frac{20}{1}$ $\qquad \frac{12}{3} \cdot \frac{35}{7} = \frac{12 \cdot 35}{3 \cdot 7} = \frac{420}{21} = \frac{20}{1}$

Wir setzen deshalb fest:

13 **DEFINITION: Gebrochene Zahlen werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner der darstellenden Brüche multipliziert.**

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b \neq 0, d \neq 0)$

(3) Zeige, daß auf Grund der Definition 13 die Multiplikation gebrochener Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist!

Es ist zweckmäßig, vor dem Ausrechnen der Produkte so weit wie möglich zu kürzen.
Gemischte Zahlen wandeln wir vor dem Multiplizieren in unechte Brüche um.

24 a) $\frac{56}{9} \cdot \frac{15}{8} = \frac{56 \cdot 15}{9 \cdot 8} = \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{35}{3}$

b) $7\frac{4}{5} \cdot 1\frac{8}{13} = \frac{39}{5} \cdot \frac{21}{13} = \frac{39 \cdot 21}{5 \cdot 13} = \frac{3 \cdot 21}{5 \cdot 1} = \frac{63}{5}$

Aufgaben b 115 bis 134

11 Multiplizieren gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung

Um eine praktische Regel für die Multiplikation von Dezimalbrüchen zu gewinnen, gehen wir zu Zehnerbrüchen über.

25 a) $4{,}6 \cdot 2{,}7 = \frac{46 \cdot 27}{10 \cdot 10} = \frac{46 \cdot 27}{100} = \frac{1242}{100} = 12{,}42$

b) $0{,}721 \cdot 0{,}308 = \frac{721}{1000} \cdot \frac{308}{1000} = \frac{721 \cdot 308}{1000000} = 0{,}222068$

c) $17{,}31 \cdot 29 = \frac{1731}{100} \cdot \frac{29}{1} = \frac{1731 \cdot 29}{100} = \frac{50199}{100} = 501{,}99$

Diese Beispiele weisen einen Weg für eine bequeme Methode:

14 **SATZ: Man multipliziert Dezimalbrüche miteinander, indem man sie zunächst ohne Rücksicht auf das Komma wie natürliche Zahlen multipliziert. Das Komma setzt man so, daß das Ergebnis so viel Dezimalstellen hat wie die beiden Faktoren zusammen.**

Auf diese Weise vereinfachen sich die drei Rechnungen im Beispiel 25.

$$\begin{array}{r} a)\ \ 4{,}6 \cdot 2{,}7 \\ \hline 92 \\ 322 \\ \hline 12{,}42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} b)\ \ 0{,}721 \cdot 0{,}308 \\ \hline 2163 \\ 5768 \\ \hline 0{,}222068 \end{array} \qquad \begin{array}{r} c)\ \ 17{,}31 \cdot 29 \\ \hline 3462 \\ 15579 \\ \hline 501{,}99 \end{array}$$

Wenn wir nach der Multiplikation das Komma setzen wollen, so müssen wir manchmal vor das Ergebnis noch Nullen schreiben, um die richtige Anzahl von Dezimalstellen zu erhalten.

B

26. $\begin{array}{r} 0{,}051 \cdot 0{,}003 \\ \hline 0{,}000153 \end{array}$

Dagegen können wir Nullen fortlassen, die hinter der letzten von Null verschiedenen Dezimalstelle stehen. Das bedeutet nichts anderes, als daß das Endergebnis gekürzt wird.

(4) Begründe das, indem du das Produkt $8{,}64 \cdot 14{,}5$ berechnest!
Kürze das Ergebnis!

Besonders einfach ist die Multiplikation von Dezimalbrüchen mit 10; 100; 1 000 usw.

$$\begin{array}{lrcrcr} 3{,}78 \cdot & 10 & = & 37{,}80 & = & 37{,}8 \\ 3{,}78 \cdot & 100 & = & 378{,}00 & = & 378 \\ 3{,}78 \cdot & 1\,000 & = & 3\,780{,}00 & = & 3\,780 \\ 3{,}78 \cdot & 10\,000 & = & 37\,800{,}00 & = & 37\,800 \end{array}$$

15 **SATZ: Man multipliziert einen Dezimalbruch mit 10, 100, 1000, ..., indem man das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts versetzt.**

Aufgaben b 135 bis 138

12 Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz

Wir haben die Multiplikation gebrochener Zahlen so festgelegt, daß die folgenden Sätze gelten. Wir wollen diese Sätze hier nicht beweisen, sondern nur an Beispielen erläutern.

16 **SATZ: Bei der Multiplikation verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen.**

Auf Grund von Satz 16 können die natürlichen Zahlen und die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen beim Multiplizieren gegenseitig ersetzt werden.
Im folgenden Beispiel wird 3 durch $\frac{3}{1}$ ersetzt.

27 $\frac{7}{5} \cdot 3 = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{21}{5}$; kürzer $\frac{7}{5} \cdot 3 = \frac{7 \cdot 3}{5} = \frac{21}{5}$

Ebenso wie im Bereich der natürlichen Zahlen gelten auch im Bereich der gebrochenen Zahlen die Kommutativität und die Assoziativität der Multiplikation sowie die Distributivität für die Multiplikation einer Summe.
Den Beweis dieser Behauptung wollen wir hier nicht führen.

17 **SATZ: In einem Produkt gebrochener Zahlen mit zwei Faktoren können die Faktoren vertauscht werden.**

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ **(Kommutativität der Multiplikation)**

28 a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}$

b) $7{,}5 \cdot 0{,}13 = \frac{75}{10} \cdot \frac{13}{100} = \frac{13}{100} \cdot \frac{75}{10} = 0{,}13 \cdot 7{,}5$

18 **SATZ: Die Reihenfolge von zwei Multiplikationen gebrochener Zahlen ist beliebig.**

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$$

(Assoziativität der Multiplikation)

29 a) $\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{9}{7} = \frac{(5 \cdot 4) \cdot 9}{(2 \cdot 3) \cdot 7} = \frac{5 \cdot (4 \cdot 9)}{2 \cdot (3 \cdot 7)}$

$\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{9}{7} = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{7}\right)$

b) $(8{,}3 \cdot 12{,}4) \cdot 0{,}25 = \left(\frac{83}{10} \cdot \frac{124}{10}\right) \cdot \frac{25}{100}$

$= \frac{83}{10} \cdot \left(\frac{124}{10} \cdot \frac{25}{100}\right)$

$(8{,}3 \cdot 12{,}4) \cdot 0{,}25 = 8{,}3 \cdot (12{,}4 \cdot 0{,}25)$

19 **SATZ:** $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$ **(Distributivität)**

30 $\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9}$

Zum Nachweis rechnen wir die beiden Seiten aus:

$\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right) = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{36}{45} + \frac{10}{45}\right)$

$= \frac{7}{3} \cdot \frac{46}{45}$

$\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}\right) = \frac{322}{135}$

$\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{28}{15} + \frac{14}{27}$

$= \frac{252}{135} + \frac{70}{135}$

$\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{322}{135}$

20 **SATZ: Es gilt für beliebige gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$:**

$\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$ **und** $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$

31 $\frac{5}{9} \cdot 0 = \frac{5}{9} \cdot \frac{0}{1} = \frac{5 \cdot 0}{9 \cdot 1} = \frac{0}{9} = 0$

$\frac{5}{9} \cdot 1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5 \cdot 1}{9 \cdot 1} = \frac{5}{9}$

Aufgaben b 139 und 140

Zusammenfassung:
Gebrochene Zahlen, die durch gemeine Brüche gegeben sind, werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner der Brüche multipliziert.
Gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung multipliziert man wie natürliche Zahlen. Das Produkt hat so viel Dezimalstellen wie beide Faktoren zusammen.
Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist uneingeschränkt ausführbar.
Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist kommutativ und assoziativ. Multiplikation und Addition sind durch das Distributivgesetz verbunden.
Gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 angeben lassen, können bei der Multiplikation durch natürliche Zahlen ersetzt werden.

B

13 Die Division gebrochener Zahlen

Vertauschen wir in einem Bruch, dessen Zähler ungleich Null ist, Zähler und Nenner, so erhalten wir wieder einen Bruch. Jeder der beiden Brüche stellt eine gebrochene Zahl dar, die ungleich Null ist.

32 $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{1}$ und $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{7}$ und $\frac{7}{7}$

21 **DEFINITION: Ist $\frac{a}{b}$ eine von Null verschiedene gebrochene Zahl (also $a \neq 0$ und $b \neq 0$), so heißt die gebrochene Zahl $\frac{b}{a}$ das *Reziproke* der gebrochenen Zahl $\frac{a}{b}$.**

22 **SATZ: Das Produkt aus einer beliebigen von Null verschiedenen gebrochenen Zahl und ihrem Reziproken ist gleich 1.**

Beweis: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

Die Division im Bereich der gebrochenen Zahlen soll wieder die Umkehrung der Multiplikation in diesem Bereich sein.

Es sollen also $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ und $\frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ dasselbe bedeuten.

33 Es soll der Quotient $\frac{x}{y} = \frac{5}{11} : \frac{2}{3}$ berechnet werden.

$\frac{x}{y} = \frac{5}{11} : \frac{2}{3}$ bedeutet $\frac{x}{y} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{11}$.

Wir müssen also die Zahl finden, die mit $\frac{2}{3}$ multipliziert $\frac{5}{11}$ ergibt.
Da das Produkt einer jeden gebrochenen Zahl außer Null mit ihrem Reziproken gleich 1 ist, ist $\frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2}$ die gesuchte Zahl.

$$\left(\frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{11} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{11} \cdot 1 = \frac{5}{11}$$

Es gilt also $\frac{x}{y} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2}$.

Aus $\frac{x}{y} = \frac{5}{11} : \frac{2}{3}$ und $\frac{x}{y} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2}$ folgt $\frac{5}{11} : \frac{2}{3} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{2}$.

Wie in diesem Beispiel setzen wir allgemein fest:

23 **DEFINITION: Gebrochene Zahlen werden dividiert, indem man den Dividenden mit dem Reziproken des Divisors multipliziert.**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0)$$

Gemischte Zahlen schreiben wir vor dem Dividieren als unechte Brüche.

34 a) $\frac{8}{3} : \frac{5}{9} = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{8 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{8 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{24}{5}$

b) $4\frac{1}{4} : 6\frac{4}{5} = \frac{17}{4} : \frac{34}{5} = \frac{17}{4} \cdot \frac{5}{34} = \frac{17 \cdot 5}{4 \cdot 34} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8}$

Aufgaben b 141 bis 154

14 Ausführbarkeit der Division gebrochener Zahlen

24 **SATZ: Bei der Division verhalten sich gebrochene Zahlen, die man durch Brüche mit dem Nenner 1 angeben kann, wie die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen.**

Auf Grund von Satz 24 können die natürlichen Zahlen und die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen beim Dividieren gegenseitig ersetzt werden.

35 a) $\frac{7}{5} : 3 = \frac{7}{5} : \frac{3}{1} = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$; kürzer $\frac{7}{5} : 3 = \frac{7}{5 \cdot 3} = \frac{7}{15}$

b) $12 : \frac{36}{13} = \frac{12}{1} : \frac{36}{13} = \frac{12}{1} \cdot \frac{13}{36} = \frac{13}{3}$; kürzer $12 : \frac{36}{13} = \frac{12 \cdot 13}{36}$
$= \frac{13}{3}$

c) $0 : \frac{2}{3} = \frac{0}{1} : \frac{2}{3} = \frac{0}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Für jede gebrochene Zahl $\frac{a}{b} \neq 0$ gilt, ebenso wie im Beispiel 35 c, $0 : \frac{a}{b} = 0$.

Durch die Definition 23 wird im Bereich der gebrochenen Zahlen jede Division auf eine Multiplikation zurückgeführt. Da aber die Multiplikation gebrochener Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist, können wir jetzt jede Divisionsaufgabe (mit Ausnahme der Division durch Null) lösen. Es gilt also allgemein:

25 **SATZ: Im Bereich der gebrochenen Zahlen ist die Division mit Ausnahme der Division durch Null uneingeschränkt ausführbar.**

Durch die Zahl Null können wir ebenso wie bei den natürlichen Zahlen nicht dividieren.

36 a) Der Dividend ist *ungleich* 0.

$\frac{x}{y} = \frac{2}{5} : 0$; das bedeutet $\frac{x}{y} \cdot 0 = \frac{2}{5}$. Eine solche gebrochene Zahl $\frac{x}{y}$ gibt es aber *nicht*.

b) Der Dividend ist *gleich* 0.

$\frac{x}{y} = 0 : 0$; das bedeutet $\frac{x}{y} \cdot 0 = 0$. Das gilt aber für *alle* gebrochenen Zahlen.

15 Die natürlichen Zahlen als Teilbereich der gebrochenen Zahlen

Die gebrochenen Zahlen, die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbar sind, verhalten sich beim Vergleichen und bei allen Rechenoperationen wie natürliche Zahlen. Deshalb können wir diese gebrochenen Zahlen durch die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen ersetzen. Umgekehrt können wir auch alle natürlichen Zahlen durch die entsprechenden gebrochenen Zahlen ersetzen.

37 a) $\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{50}{10} = 5 = \frac{125}{25}$ b) $2 < \frac{8}{2}$; $\frac{10}{5} < 4$; $2 < 4$; $\frac{20}{10} < \frac{12}{3}$

c) $\frac{3}{2} < \frac{7}{1}$; $1\frac{1}{2} < 7$; $\frac{15}{10} < \frac{70}{10}$

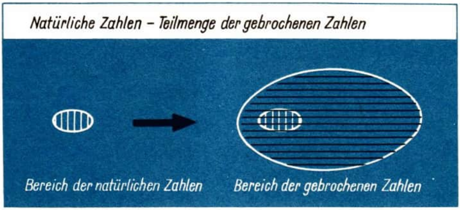
d) $\frac{3}{5} + \frac{6}{1} = \frac{3}{5} + \frac{18}{3} = \frac{3}{5} + 6$ e) $\frac{15}{3} - \frac{12}{4} = 5 - \frac{6}{2} = \frac{30}{6} - 3 = 5 - 3$

f) $\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{1} = 6 \cdot \frac{40}{8} = 6 \cdot 5$ g) $\frac{90}{1} : \frac{36}{2} = 90 : 18 = \frac{180}{2} : \frac{72}{4}$

4 Suche in allen Beispielen noch andere jeweils gleichwertige Schreibweisen!

Nach dem Ersetzen eines Teils der gebrochenen Zahlen durch die ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen können wir sagen (Bild B 13):

Die natürlichen Zahlen bilden einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen.



B 13

Nun können wir jede Division natürlicher Zahlen auch als Division gebrochener Zahlen schreiben.

38 $3 : 8 = \frac{3}{1} : \frac{8}{1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$; also $3 : 8 = \frac{3}{8}$

Damit ist jede Division natürlicher Zahlen (außer die Division durch Null) innerhalb des Bereichs der gebrochenen Zahlen ausführbar.
Oder umgekehrt: Jeder Bruch kann als Quotient natürlicher Zahlen geschrieben werden.
Es gilt also für beliebige natürliche Zahlen a und b ($b \neq 0$):

$$\boxed{\frac{a}{b} = a : b \ (b \neq 0)}$$

Da wir einen Bruch beliebig erweitern oder kürzen können, dürfen wir auch stets in einem Quotienten den Dividenden und den Divisor mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl dividieren.

B

39 a) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{20}{30}$ und $2 : 3 = 4 : 6 = 6 : 9 = 20 : 30$

b) $\frac{24}{6} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1}$ und $24 : 6 = 12 : 3 = 4 : 1 = 4$

Die gebrochenen Zahlen bilden also einen Bereich, in dem wir uneingeschränkt addieren, multiplizieren und dividieren (außer durch 0) dürfen, ganz gleich, ob dabei Zahlen auftreten, die aus dem Teilbereich der natürlichen Zahlen stammen oder nicht. Ebenso wie im Bereich der natürlichen Zahlen können wir aber gebrochene Zahlen nur dann subtrahieren, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist.

16 Die Dichtheit des Bereichs der gebrochenen Zahlen

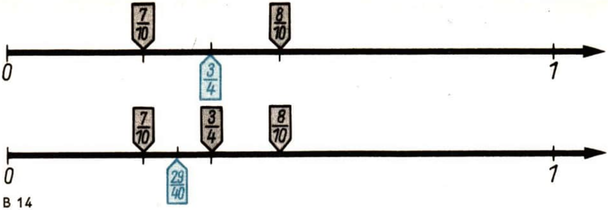
Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger. Zwischen einer natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger liegt keine weitere natürliche Zahl.
Jedoch gilt:
Keine gebrochene Zahl hat einen Nachfolger.

40 Die Zahl $\frac{7}{10}$ hat keinen Nachfolger.
So kann z. B. $\frac{8}{10}$ nicht Nachfolger von $\frac{7}{10}$ sein; denn wir können Zahlen ermitteln, die zwischen $\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{10}$ liegen. Wir bilden z. B. das arithmetische Mittel von $\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{10}$:

$$\left(\frac{7}{10} + \frac{8}{10}\right) : 2 = \frac{15}{10} : 2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Es gilt: $\frac{7}{10} < \frac{3}{4}$ $(7 \cdot 4 < 10 \cdot 3)$ und $\frac{3}{4} < \frac{8}{10}$ $(3 \cdot 10 < 4 \cdot 8)$,
also: $\frac{7}{10} < \frac{3}{4} < \frac{8}{10}$ (Bild B 14).

Nun könnten wir das arithmetische Mittel von $\frac{7}{10}$ und $\frac{3}{4}$ bilden, um zu zeigen, daß auch $\frac{3}{4}$ nicht Nachfolger von $\frac{7}{10}$ ist.
Auf diese Weise können wir für jede beliebige gebrochene Zahl, die größer als $\frac{7}{10}$ ist, nachweisen, daß sie nicht Nachfolger von $\frac{7}{10}$ ist. Das bedeutet, daß $\frac{7}{10}$ keine gebrochene Zahl als Nachfolger hat.



B 14

Wenn wir mit der Berechnung der arithmetischen Mittel genügend lange fortfahren, können wir zeigen, daß zwischen $\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{10}$ beliebig viele gebrochene Zahlen „eingeschoben" sind.
Das gilt nicht nur für $\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{10}$, sondern für zwei beliebige gebrochene Zahlen. Wir sagen dazu: Die gebrochenen Zahlen liegen **überall dicht**.

17 Variable für gebrochene Zahlen

Bisher haben wir kleine Buchstaben als Variable für natürliche Zahlen verwendet, d. h., der Grundbereich der Zahlen, die wir für die Variablen einsetzen konnten, war der Bereich der natürlichen Zahlen. Damit wollten wir deutlich zeigen, daß die Brüche aus *zwei* natürlichen Zahlen, dem Zähler und dem Nenner, bestehen. Das hatte jedoch den Nachteil, daß die Eigenschaften der Rechenoperationen nur sehr unübersichtlich mit Hilfe von Variablen aufgeschrieben werden konnten.
Wir wollen deshalb jetzt Buchstaben als *Variable für gebrochene Zahlen* verwenden, d. h., an Stelle der Variablen „*a*", „*b*", „*c*", „*x*", „*y*", „*z*" usw. können wir jetzt die Zeichen für gebrochene Zahlen wie „$\frac{3}{4}$" oder „0,3" schreiben. Meist sagt man dafür kürzer:

Für die Variablen können wir jetzt gebrochene Zahlen einsetzen.

Der Grundbereich der Variablen ist also der Bereich der gebrochenen Zahlen, der den Bereich der natürlichen Zahlen als Teilbereich umfaßt.

41

a	b	$a + b$	$a : b$	$a < b$
$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{2} + \frac{5}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$	$\frac{7}{2} : \frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 5} = \frac{21}{5}$	nein
0,3	$\frac{1}{4}$	$0{,}3 + \frac{1}{4} = 0{,}55$ $= \frac{11}{20}$	$0{,}3 : \frac{1}{4} = 0{,}3 \cdot \frac{4}{1}$ $= 1{,}2$	nein
$\frac{8}{100}$	8	$\frac{8}{100} + 8 = \frac{808}{100}$ $= 8{,}08$	$\frac{8}{100} : 8 = \frac{8}{100} \cdot \frac{1}{8}$ $= \frac{1}{100}$	ja

Die Eigenschaften der Rechenoperationen können wir nun folgendermaßen formulieren.

Für beliebige gebrochene Zahlen a, b, c gilt:

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Wir hatten festgestellt:
Wir können an Stelle von Brüchen auch Quotienten aus natürlichen Zahlen mit einem Divisionsdoppelpunkt schreiben, z. B. $\frac{5}{7} = 5 : 7$.
Diese Tatsache hatten wir unter Verwendung von Variablen für natürliche Zahlen formuliert.
Wir setzen nun fest: Für *beliebige gebrochene* Zahlen a und b ($b \neq 0$) soll gelten:
$\frac{a}{b} = a : b$.

42 $a = \frac{7}{2}$; $b = \frac{5}{6}$ $\qquad \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{2} : \frac{5}{6} = \frac{21}{5}$

Es ist üblich, auch jetzt „$\frac{a}{b}$" einen Bruch zu nennen, obwohl es sich im allgemeinen nicht um Paare *natürlicher* Zahlen handelt, da „a" und „b" ja Variable für *gebrochene* Zahlen sind. Oft spricht man auch von einem „Doppelbruch". Man muß *unbedingt* das Gleichheitszeichnen neben denjenigen Bruchstrich setzen, der a und b trennt (Hauptbruchstrich), da sonst Fehler entstehen, wenn Zähler und Nenner nicht beide natürliche Zahlen sind.

43 $a = \frac{7}{2}$; $b = 4$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{7}{2}}{4} = \frac{7}{2} : 4 = \frac{7}{8}$$

Dagegen: $\dfrac{7}{\frac{2}{4}} = 7 : \frac{2}{4} = 7 \cdot \frac{4}{2} = 14$ $\qquad$ Hier gilt: $a = 7$; $b = \frac{2}{4}$.

Da wir für beliebige gebrochene Zahlen a und b ($b \neq 0$) den Bruchstrich in $\frac{a}{b}$ durch das Divisionszeichen „:" ersetzen können, bedeutet die Erweiterung des Bruches $\frac{a}{b}$ mit einer gebrochenen Zahl, daß Dividend und Divisor in $a : b$ mit derselben Zahl multipliziert werden.

44 a) $7 : 4 = 14 : 8 = 70 : 40$ $\qquad$ b) $13{,}753 : 21{,}45 = 137{,}53 : 214{,}5 = 1\,375{,}3 : 2145$

Den Satz: „Keine gebrochene Zahl hat einen Nachfolger" können wir nunmehr mit Hilfe der Variablen für gebrochene Zahlen und unter Verwendung des Zeichens „R^*" für die Menge der gebrochenen Zahlen auch folgendermaßen formulieren:

Gilt $a \in R^*$ und $b \in R^*$ und $a < b$, so gibt es stets mindestens ein c mit $c \in R^*$ und $a < c < b$.

Wir sagen auch: Die gebrochene Zahl c **liegt zwischen** den gebrochenen Zahlen a und b.

Aufgaben b 155 bis 178

18 Dividieren gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung

Ähnlich wie bei der Multiplikation können wir auch bei der Division von gebrochenen Zahlen eine bequeme Regel anwenden, falls die gebrochenen Zahlen als Dezimalbrüche gegeben sind.
Die folgenden Beispiele zeigen, wie wir bei der Division von Dezimalbrüchen vorgehen müssen. Dabei betrachten wir zunächst nur Fälle, in denen der Divisor eine natürliche Zahl ist.

B

45 a) $296{,}48 : 17$ Überschlag: $300 : 20 = 15$

$$296{,}48 : 17 = \frac{29\,648}{100} : \frac{17}{1} = \frac{29\,648}{100 \cdot 17}$$

Den letzten Bruch kürzen wir durch 17:

$$296{,}48 : 17 = \frac{29\,648 : 17}{100} = \frac{1\,744}{100} = 17{,}44.$$

Schriftliche Rechnung

ohne Komma

$29\,648 : 17 = 1\,744$
126
74
68
0

mit Komma

$296{,}48 : 17 = 17{,}44$
126
74
68
0

b) $17{,}5 : 4$ Überschlag: $16 : 4 = 4$

$$17{,}5 : 4 = \frac{175}{10} : \frac{4}{1} = \frac{175}{10 \cdot 4}$$

Wir können den letzten Bruch nicht durch 4 kürzen, da 175 nicht durch 4 teilbar ist. Deshalb erweitern wir zunächst mit 100 und kürzen dann durch 4:

$$17{,}5 : 4 = \frac{17\,500 : 4}{1\,000} = \frac{4\,375}{1\,000} = 4{,}375.$$

Schriftliche Rechnung

ohne Komma

$17\,500 : 4 = 4\,375$
15
30
20
0

mit Komma

$17{,}500 : 4 = 4{,}375$
15
30
20
0

Wir können diese Division auch ausführen, ohne den Dezimalbruch vorher zu erweitern, d. h., ohne im Dezimalbruch die Nullen anzufügen. Es genügt, die Nullen bei den entsprechenden Teildivisionen zu schreiben.

$17{,}5 : 4 = 4{,}375$
$\underline{16}$
 15
 $\underline{12}$
  30 ←
  $\underline{28}$
   20 ←
   $\underline{20}$
    0

Wenn der Dividend ebenfalls eine natürliche Zahl ist, können wir ebenso wie im Beispiel 46 verfahren; denn eine natürliche Zahl können wir auch als Dezimalbruch schreiben, dessen Dezimalstellen alle gleich Null sind.

46 $13 = 13{,}0 = 13{,}00 = 13{,}000$ usw.

$13 : 8$

$$13 : 8 = \frac{13}{1} : \frac{8}{1} = \frac{13}{1 \cdot 8} = \frac{13000}{1000 \cdot 8} = \frac{13000 : 8}{1000} = \frac{1625}{1000} = 1{,}625$$

Schriftliche Rechnung

ohne Komma	mit Komma
$13\,000 : 8 = 1\,625$	$13 : 8 = 1{,}625$
50	50 ←
20	20 ←
40	40 ←
0	0

Bei der Division eines Dezimalbruches durch einen Dezimalbruch multiplizieren wir den Dividenden und den Divisor mit 10, 100, ..., so daß das Komma im Divisor beseitigt wird.

47 a) $5{,}25 : 1{,}5$ Überschlag: $6 : 2 = 3$

Wir multiplizieren den Dividenden und den Divisor mit 10:

$5{,}25 : 1{,}5 = 52{,}5 : 15.$

Jetzt können wir wie im Beispiel 45 b weiterrechnen.

$52{,}5 : 15 = 3{,}5$
 75
  0

b) $4{,}97 : 12{,}425$ Überschlag: $5 : 10 = 0{,}5$

Wir multiplizieren den Dividenden und den Divisor mit 1 000:

$4\,970 : 12\,425 = 0{,}4$
$\underline{49\,700}$
   0

Man dividiert einen Dezimalbruch durch einen Dezimalbruch wie folgt:

(1) Man beseitigt zunächst das Komma im Divisor, indem man Dividend und Divisor mit 10, 100, ... multipliziert.

(2) Man dividiert nun den Dividenden wie eine natürliche Zahl.
(3) Im Quotienten wird das Komma gesetzt, wenn die Einer des Dividenden dividiert worden sind.

Besonders einfach ist die Division durch 10, 100, 1000 usw.

$426{,}4 : 10 = 42{,}64$
$426{,}4 : 100 = 4{,}264$
$426{,}4 : 1000 = 0{,}4264$
$426{,}4 : 10000 = 0{,}04264$

Man dividiert durch 10, 100, 1000, . . ., indem man das Komma im Dezimalbruch um 1, 2, 3, . . . Stellen nach links versetzt.

Aufgaben b 179 und 180

Gemeine Brüche und Dezimalbrüche

19 Endliche und unendliche Dezimalbrüche

Wie wir wissen, können wir Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen in Zehnerbrüche übergehen, auch als Dezimalbrüche schreiben.

48 a) $\frac{3}{8}$ ist als Dezimalbruch zu schreiben.

$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$

b) $\frac{113}{40}$ ist als Dezimalbruch zu schreiben.

$\frac{113}{40} = \frac{2825}{1000} = 2{,}825$

Wir können für solche Brüche die Dezimalbruchdarstellung auch dadurch erhalten, daß wir die Brüche als Quotienten schreiben und diese nach den Regeln für die Division von Dezimalbrüchen ausrechnen.

$\frac{3}{8} = 3 : 8$

$3 : 8 = 0{,}375$
30
60
40
0

$\frac{113}{40} = 113 : 40$

$113 : 40 = 2{,}825$
330
100
200
0

Auch Brüche, die sich nicht zu Zehnerbrüchen erweitern lassen, können wir als Quotienten schreiben, z. B.: $\frac{2}{9} = 2 : 9$. Wir versuchen, diese Division auszuführen:

$\frac{2}{9} = 2 : 9$

$2 : 9 = 0{,}22\ldots$
20
20
2
⋮

Dieses Verfahren bricht im Gegensatz zu den früheren Beispielen nie ab, denn wir erhalten bei jeder folgenden Teildivision den Rest 2. Daher ergibt sich immer wieder die Ziffer 2 in den folgenden Dezimalstellen. Die drei Punkte hinter der letzten geschriebenen 2 sollen dies andeuten.
Der Bruch $\frac{2}{9}$ läßt sich also nicht wie bisher in einen Dezimalbruch verwandeln. Durch die folgenden Ungleichungen können wir jedoch zeigen, wie man sich mit Dezimalbrüchen Schritt für Schritt der gebrochenen Zahl $\frac{2}{9}$ beliebig weit nähern kann.

$$0{,}2 = \frac{2}{10} < \frac{2}{9} < \frac{3}{10} = 0{,}3, \quad \text{da} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot 9 < 10 \cdot 2 \text{ und} \\ 2 \cdot 10 < 9 \cdot 3 \end{array}$$

B

Entsprechend kann man prüfen:

$$0{,}22 = \frac{22}{100} < \frac{2}{9} < \frac{23}{100} = 0{,}23$$

$$0{,}222 = \frac{222}{1\,000} < \frac{2}{9} < \frac{223}{1\,000} = 0{,}223$$

$$0{,}2222 = \frac{2\,222}{10\,000} < \frac{2}{9} < \frac{2\,223}{10\,000} = 0{,}2223$$

So können wir fortfahren und dabei feststellen, daß einerseits jeder Dezimalbruch, dessen Dezimalstellen alle gleich 2 sind, *immer* kleiner als $\frac{2}{9}$ ist, so viel Dezimalstellen wir auch berücksichtigen. Andererseits übertreffen wir jedesmal $\frac{2}{9}$, wenn wir die letzte Dezimalstelle auch nur um 1 von 2 auf 3 erhöhen.
Einerseits kann also $\frac{2}{9}$ nicht gleich einem Dezimalbruch sein, der *endlich* viele Dezimalstellen 2 besitzt. Andererseits kann $\frac{2}{9}$ auch nicht gleich einem Dezimalbruch sein, der auch nur eine einzige Dezimalstelle besitzt, die größer als 2 ist. Die gebrochene Zahl $\frac{2}{9}$ kann also erst durch *unendlich* viele Dezimalstellen, die *alle* gleich 2 sind, angegeben werden:
Damit haben wir gefunden:

$$\frac{2}{9} = 0{,}22\ldots$$

Wir wollen deshalb 0,22... auch als Dezimalbruch bezeichnen.

26 **DEFINITION: Ein Dezimalbruch, der entweder vor oder hinter dem Komma eine letzte von 0 verschiedene Stelle besitzt, heißt *endlicher Dezimalbruch*.**
Ein Dezimalbruch, der keine letzte von 0 verschiedene Stelle besitzt, heißt *unendlicher Dezimalbruch*.

Durch Anwendung des schriftlichen Divisionsverfahrens können wir nun *jeden* gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandeln.

49 a) $\frac{5}{12}$ ist als Dezimalbruch zu schreiben.

Es tritt immer wieder der Rest 8 auf. Daher erhalten wir einen unendlichen Dezimalbruch mit der stets wiederkehrenden Grundziffer 6 · $\frac{5}{12} = 0{,}4166\ldots$

$5 : 12 = 0{,}4166\ldots$
50
20
80
80
8
⋮

b) $\frac{117}{55}$ ist in einen Dezimalbruch zu verwandeln.

$117 : 55 = 2{,}12727\ldots$ $\qquad\qquad$ $\frac{117}{55} = 2{,}12727\ldots$
70
150
400
150
400
15
⋮

Führen wir weitere Teildivisionen aus, so treten abwechselnd immer wieder die Reste 15 und 40 auf. Das bedeutet, daß im Ergebnis in den weiteren Dezimalstellen fortlaufend die Ziffern 2 und 7 erscheinen.
In den letzten Beispielen sind die Ergebnisse unendliche Dezimalbrüche, in deren Dezimalstellen bestimmte Grundziffern oder Gruppen von Grundziffern immer wiederkehren. Diese sich wiederholenden Ziffern heißen **Perioden**.

27 **DEFINITION: Ein unendlicher Dezimalbruch, in dessen Dezimalstellen Perioden auftreten, heißt *periodischer Dezimalbruch*.**

Die Ergebnisse in den letzten Beispielen sind die periodischen Dezimalbrüche
0,22... mit der Periode 2;
0,4166... mit der Periode 6;
2,12727... mit der Periode 27.
Nach der Anzahl der Grundziffern in einer Periode spricht man von 1; 2; 3; ...; *n*-stelligen Perioden. So ist in den Dezimalbrüchen 0,22... und 0,4166... die Periode einstellig und im Dezimalbruch 2,12727... zweistellig.

Für periodische Dezimalbrüche gibt es eine abgekürzte Schreibweise. Man setzt über die Ziffern, die eine Periode bilden, einen waagerechten Strich.

50 Für 0,22... schreibt man $0{,}\overline{2}$ (lies: „Null – Komma – Zwei; Periode Zwei“).
Für 0,4166... schreibt man $0{,}41\overline{6}$ (lies: „Null – Komma – Vier – Eins – Sechs; Periode Sechs“).
Für 2,12727... schreibt man $2{,}1\overline{27}$ (lies: „Zwei – Komma – Eins – Zwei – Sieben; Periode Zwei – Sieben“).

Für 12,32534534... schreibt man $12{,}32\overline{534}$ (lies: „Zwölf – Komma – Drei – Zwei – Fünf – Drei – Vier; Periode Fünf – Drei – Vier").

Wir können nunmehr *jeden* gemeinen Bruch $\frac{a}{b}$, in dem Zähler und Nenner teilerfremd sind, durch Ausrechnen des Quotienten $a : b$ in einen Dezimalbruch umwandeln. Enthält der Nenner b nur die Primfaktoren 2 und 5 bzw. Potenzen dieser Zahlen, so erhalten wir einen endlichen, in allen anderen Fällen einen periodischen Dezimalbruch.

28 **SATZ: Jeder gebrochenen Zahl ist ein endlicher oder periodischer Dezimalbruch zugeordnet.**

Umgekehrt kann man jeden endlichen oder periodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch umwandeln.
Für die endlichen Dezimalbrüche haben wir dazu schon ein Verfahren kennengelernt. Auf die Umwandlung der periodischen Dezimalbrüche in gemeine Brüche wollen wir hier nicht näher eingehen.

29 **SATZ: Jedem endlichen oder periodischen Dezimalbruch ist eine bestimmte gebrochene Zahl zugeordnet.**

Es gibt auch unendliche Dezimalbrüche, die nicht periodisch sind, z. B. 0,5005000500005... Diese stellen aber keine gebrochenen Zahlen dar.

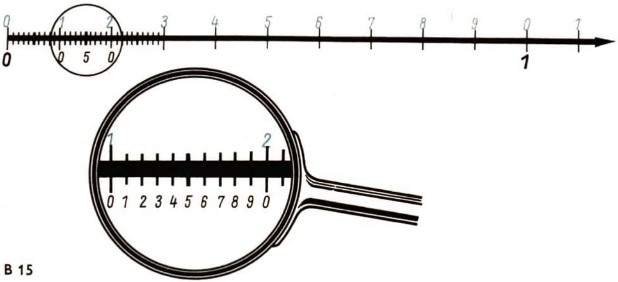
Aufgaben b 181 bis 188

20 Abbildung gebrochener Zahlen auf dem Zahlenstrahl

Bei der Abbildung der gebrochenen Zahlen auf dem Zahlenstrahl wird jeder Zahl ein Punkt des Zahlenstrahls zugeordnet. Wir können nun die Dezimalbrüche benutzen, um die Lage eines solchen Punktes auf dem Zahlenstrahl zu beschreiben.
Dazu denken wir uns jeden Abschnitt mit der Länge 1 zwischen zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen entsprechend unserem dekadischen Positionssystem in zehn gleich lange Teilstrecken geteilt, diese wiederum in jeweils zehn gleich lange Teile usw.
Die Länge der Teilstrecken beträgt also nach der ersten Teilung $\frac{1}{10}$, nach der zweiten Teilung $\frac{1}{100}$ der Einheitsstrecke usw. (Bild B 15).

Wir können diese Einteilung natürlich nur so weit tatsächlich aufzeichnen, wie es die Präzision unserer Zeichengeräte zuläßt. Nach jeder Teilung numerieren wir die entstandenen Teilstrecken jeweils von 0 bis 9 und schreiben die Nummer an den linken Endpunkt der betreffenden Teilstrecke (Bild B 15). Die natürliche Zahl vor dem Komma eines Dezimalbruchs und seine Dezimalstellen sollen nun der Reihe nach die Nummer derjenigen Strecke mit der Länge 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ...

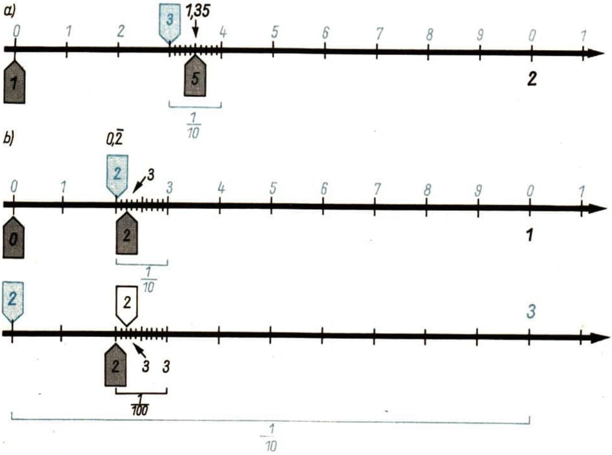
angeben, in der der betreffende Punkt liegt. Dabei liegt jede Teilstrecke innerhalb der durch die vorangegangene Nummer bezeichneten Strecke. Ist der Dezimalbruch endlich, so gibt er den auf dem linken Endpunkt derjenigen Teilstrecke liegenden Punkt an, dessen Nummer die letzte von 0 verschiedene Dezimalstelle ist.



B 15

Ist der Dezimalbruch periodisch, so werden die durch die Dezimalstellen angegebenen Teilstrecken immer kürzer, so daß wir den betreffenden Punkt mit immer größerer Genauigkeit eingrenzen können. Je mehr Stellen eines periodischen Dezimalbruchs wir also berücksichtigen, desto genauer können wir die diesem Punkt zugeordnete gebrochene Zahl angeben.

51 a) 1,35 (Bild B 16 a) b) $0,\overline{2}$ (Bild B 16 b)



21 Periodische Dezimalbrüche

Bisher haben wir nur solche Aufgaben gelöst, bei denen endliche Dezimalbrüche auftraten.

Treten in einer Aufgabe periodische Dezimalbrüche auf, so werden diese häufig gerundet.

Dadurch erhalten wir im allgemeinen nicht das genaue Ergebnis, sondern nur einen Näherungswert. Je mehr Stellen des periodischen Dezimalbruchs wir dabei berücksichtigen, desto besser ist der jeweilige Näherungswert für das genaue Ergebnis.

Auch beim Rechnen mit Dezimalbrüchen, die wir als Meßwerte erhalten haben, erhalten wir nie ein genaues Ergebnis; denn die Meßwerte sind stets mehr oder weniger ungenau. Es ist daher sinnlos, im Ergebnis mehr Stellen anzugeben, als der Ausgangswert mit der geringsten Stellenzahl hat.

52 a) Es soll das Produkt $2,\bar{3} \cdot 1,2$ berechnet werden.

Berechnung in Dezimalbruchschreibweise

Auf 2,3 gerundet:

$$\begin{array}{r} 2,3 \cdot 1,2 \\ \hline 23 \\ 46 \\ \hline 2,76 \end{array}$$

Wir runden auf 2,8; denn die 6 in der letzten Stelle täuscht eine nicht vorhandene Genauigkeit vor, wie die folgenden weiteren Näherungen zeigen.

Auf 2,33 gerundet:

$$\begin{array}{r} 2,33 \cdot 1,20 \\ \hline 233 \\ 4660 \\ \hline 2,7960 \end{array}$$

Runden auf 2,80

Auf 2,333 gerundet:

$$\begin{array}{r} 2,333 \cdot 1,200 \\ \hline 2333 \\ 466600 \\ \hline 2,799600 \end{array}$$

Runden auf 2,800

Berechnung durch Umwandeln in gemeine Brüche

Wie wir durch Division nachprüfen können, gilt:

$\frac{7}{3} = 2,\bar{3}$.

Außerdem ist:

$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

Wir haben also zu rechnen:

$\frac{7}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{14}{5} = 2,8$.

B

b) Es sollen $1,\overline{09}$ und $1,8\overline{3}$ multipliziert werden.

Berechnung in Dezimalbruchschreibweise

Auf 1,1 und 1,8 gerundet:

$1,1 \cdot 1,8 = 1,98 \approx 2,0$

Auf 1,09 und 1,83 gerundet:

$1,09 \cdot 1,83 = 1,9947 \approx 1,99$

Auf 1,091 und 1,833 gerundet:

$1,091 \cdot 1,833 = 1,999803$
$\approx 2,000$

Berechnung durch Umwandeln in gemeine Brüche

Es gilt: $\frac{12}{11} = 1,\overline{09}$;

$\frac{11}{6} = 1,8\overline{3}$

$1,\overline{09} \cdot 1,8\overline{3} = \frac{12}{11} \cdot \frac{11}{6} = 2$

B

c) Es soll 5,7 durch 0,6 dividiert werden.

Berechnung in Dezimalbruchschreibweise

Auf 0,7 gerundet:

$$5,7 : 0,7 = 57 : 7 = 8,14 \approx 8$$

Auf 0,67 gerundet:

$$5,7 : 0,67 = 570 : 67 = 8,507 \approx 8,5$$

Auf 0,667 gerundet:

$$5,70 : 0,667 = 5\,700 : 667 = 8,5457 \approx 8,55$$

Auf 0,6667 gerundet:

$$5,700 : 0,6667 = 57\,000 : 6\,667 = 8,54957 \approx 8,550$$

Berechnung durch Umwandeln in gemeine Brüche

Es gilt:

$\frac{57}{10} = 5,7$; $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

$$5,7 : 0,\overline{6} = \frac{57}{10} : \frac{2}{3} = \frac{57}{10} \cdot \frac{3}{2} = \frac{171}{20} = 8,55.$$

Wenn man den Divisor rundet, so ergibt die Probe nur einen Näherungswert für den Dividenden.

(5) Führe die Probe für jede Division im Beispiel 52 c) durch!

Es kann auch der Fall eintreten, daß sich bei der Division endlicher Dezimalbrüche als Quotient ein periodischer Dezimalbruch ergibt. Dann geben wir die Periode an, falls ihre Stellenzahl nicht zu groß ist und wir sie deshalb nur mit großem Rechenaufwand ermitteln können, oder wir runden das Ergebnis auf die der geforderten Genauigkeit entsprechende Stellenzahl.

53 a) 234,36 : 19,8

Beseitigung des Kommas im Divisor ergibt:

$2\,343{,}6 : 198 = 11{,}8\overline{36}$
198
363
198
1656
1584
720 ←
594
1260
1188
720 ←
⋮

Von hier an wechseln die Reste 72 und 126 ständig, so daß wir die Periode 36 erhalten.

B

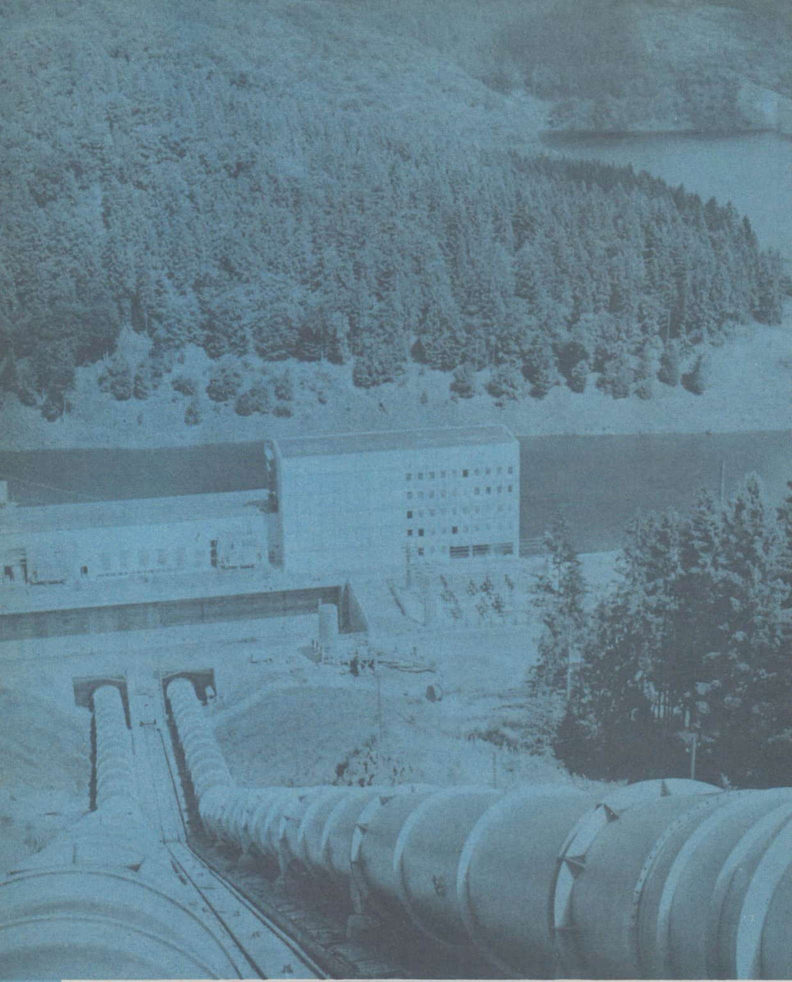
b) 711,56 : 94

Bei dieser Division ergibt sich ein periodischer Dezimalbruch, dessen Periode in der dritten Dezimalstelle beginnt und 33 Stellen hat. Wir wollen daher das Ergebnis mit derselben Anzahl der Dezimalstellen wie im Dividenden angeben, nämlich zwei. Dazu berechnen wir drei Dezimalstellen und runden dann.

$711{,}56 : 94 = 7{,}569$
658
535
470
656
564
920
846
74

Wir erhalten $711{,}56 : 94 \approx 7{,}57$.

Aufgaben b 189 bis 244



80 m³ Wasser je Sekunde

C. Einführung in die Gleichungslehre; Proportionen

C

Einführung in die Gleichungslehre

1 Terme, Gleichungen, Ungleichungen

Beim schriftlichen Ausführen von Rechnungen verwenden wir Schriftzeichen, mit denen wir Zahlen bezeichnen. So benutzen wir *Ziffern*, wenn wir eine *bestimmte Zahl* bezeichnen wollen, und *Buchstaben*, die Variablen, wenn wir die betreffende Zahl noch *beliebig* aus einem gegebenen Bereich wählen können.

Beim Bilden von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten gebrauchen wir ferner die Zeichen „+", „—", „·" und „:", die man *Operations*- oder *Rechenzeichen* nennt.
Ziffern, Variable und Zusammensetzungen aus ihnen mit Hilfe der Rechenzeichen bezeichnen wir als **Terme**.

1 Terme sind z. B.:
„3"; „a"; „375"; „$\frac{7}{8}$"; „$2{,}7 + x$"; „$\frac{x}{y}$"; „$\frac{a+b}{2}$"; „$(6-4):8$".

Beim Lösen von Aufgaben treten ständig Ausdrücke auf, in denen zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

2 a) $5 + 7 = 12$ b) $4 + x = 5{,}5$ c) $\frac{5}{6} \cdot 8 = \frac{20}{3}$ d) $3 \cdot x = 21$

1 **DEFINITION: Ausdrücke, in denen zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind, heißen *Gleichungen*. Die Terme heißen *linke* bzw. *rechte Seite der Gleichung*.**

Neben den Gleichungen kennen wir auch Ausdrücke, in denen zwei Terme durch eines der Zeichen „$<$“ oder „$>$“ verbunden sind.

3 a) $5 + 3 < 12$ b) $4 + x < 5{,}5$ c) $\frac{5}{6} \cdot 8 > \frac{10}{3}$ d) $3 \cdot x > 18$

2 **DEFINITION: Ausdrücke, in denen zwei Terme entweder durch das Kleiner-als-Zeichen oder durch das Größer-als-Zeichen verbunden sind, heißen *Ungleichungen*. Die Terme heißen *linke* bzw. *rechte Seite der Ungleichung*.**

Bei der Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: In der Gleichung bzw. Ungleichung kommt *keine Variable* vor.

4 a) $5 + 7 = 12$ b) $5 = 7$
$5 + 3 < 12$ $1{,}5 > 2$

C

2. Fall: In der Gleichung bzw. Ungleichung kommt *eine Variable* vor.

5 a) $4 + x = 5{,}5$ b) $3 \cdot x = 21$
$\frac{5}{2} - x < 1{,}5$ $0{,}9 \cdot x > 2$

In Gleichungen und Ungleichungen können auch mehr als nur eine Variable auftreten.

Aufgaben c 1 bis 6

2 Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen

Gleichungen oder Ungleichungen, in denen keine Variable auftritt, sind entweder wahre oder falsche Aussagen. So sind die Gleichung und die Ungleichung im Beispiel 4 a) wahre Aussagen, im Beispiel 4 b) falsche Aussagen.

Von Gleichungen oder Ungleichungen mit Variablen können wir weder sagen, daß sie wahr sind, noch daß sie falsch sind. Sie sind keine Aussagen. Wenn wir aber an Stelle der Variablen Ziffern schreiben, so entstehen entweder wahre oder falsche Aussagen. Wir wollen wieder kürzer sagen, daß wir für die Variablen Zahlen einsetzen.

6 a) Wir setzen in die Gleichungen $4 + x = 5{,}5$ und $3 \cdot x = 21$ für x Zahlen ein.

x	$4 + x = 5{,}5$		$3 \cdot x = 21$	
0	$4 + 0 = 5{,}5$	falsch	$3 \cdot 0 = 21$	falsch
$\frac{1}{2}$	$4 + \frac{1}{2} = 5{,}5$	falsch	$3 \cdot \frac{1}{2} = 21$	falsch
1,5	$4 + 1{,}5 = 5{,}5$	wahr	$3 \cdot 1{,}5 = 21$	falsch
7	$4 + 7 = 5{,}5$	falsch	$3 \cdot 7 = 21$	wahr

b) Wir setzen in die Ungleichungen $\frac{5}{2} - x < 1{,}5$ und $0{,}9 \cdot x > 2$ für x Zahlen ein.

x	$\frac{5}{2} - x < 1{,}5$		$0{,}9 \cdot x > 2$	
0	$\frac{5}{2} - 0 < 1{,}5$	falsch	$0{,}9 \cdot 0 > 2$	falsch
1	$\frac{5}{2} - 1 < 1{,}5$	falsch	$0{,}9 \cdot 1 > 2$	falsch
2	$\frac{5}{2} - 2 < 1{,}5$	wahr	$0{,}9 \cdot 2 > 2$	falsch
2,5	$\frac{5}{2} - 2{,}5 < 1{,}5$	wahr	$0{,}9 \cdot 2{,}5 > 2$	wahr

3 **DEFINITION: Wird eine Gleichung oder eine Ungleichung durch das Einsetzen einer Zahl zu einer wahren Aussage, so sagt man: Diese Zahl *erfüllt* die betreffende Gleichung oder Ungleichung.**

(1) Welche gebrochenen Zahlen x erfüllen folgende Gleichungen?

a) $2x = 6$ b) $\frac{1}{2}x = 5$ c) $2x + 1 = 5$ d) $9x = 6$

Gib gebrochene Zahlen x an, die folgende Ungleichungen erfüllen!

e) $x < 2$ f) $3x < 15$ g) $2{,}5x + 0{,}1 < 2{,}6$

Manche Gleichungen bzw. Ungleichungen werden von *keiner* Zahl, andere von *nur einer* Zahl und wieder andere von *mehreren* Zahlen erfüllt.

4 **DEFINITION: Eine Gleichung bzw. Ungleichung mit einer Variablen lösen bedeutet, *alle* Zahlen zu finden, die die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung *erfüllen*. Jede solche Zahl heißt eine *Lösung* der gegebenen Gleichung oder Ungleichung.**
Die Menge *aller* Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung heißt deren *Lösungsmenge*.

Wenn wir die Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung bestimmen wollen, müssen wir wissen, aus welchem Bereich wir Zahlen für die Variablen einsetzen dürfen, d. h., es muß der **Grundbereich der Variablen** festgelegt sein. Die Anzahl der Lösungen einer Gleichung oder Ungleichung kann nämlich bei verschiedenen Grundbereichen unterschiedlich sein.

Wenn wir beim Einsetzen von Zahlen für eine Variable z. B. die Einschränkung vornehmen, daß nur natürliche Zahlen eingesetzt werden dürfen, so ergibt sich häufig der Fall, daß die Gleichung keine Lösung hat.

7 Welche natürliche Zahl x erfüllt die Gleichung $3x = 4$?
Es gibt keine natürliche Zahl, die mit 3 multipliziert 4 ergibt. Die Gleichung ist im Bereich der natürlichen Zahlen *nicht* lösbar.

C

Im Bereich der gebrochenen Zahlen dagegen hat die Gleichung die Lösung $\frac{4}{3}$.

(2) Prüfe die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen auf Lösbarkeit! Gib im Falle der Lösbarkeit die jeweiligen Lösungsmengen an! Beachte den jeweils angegebenen Grundbereich!

a) $2 + x < 8$ $\quad(x \in N)$
b) $5 \cdot x = 19$ $\quad(x \in N)$
c) $5 \cdot x = 19$ $\quad(x \in R^*)$
d) $17 > 5 \cdot x + 20$ $\quad(x \in N)$
e) $17 > 5 \cdot x + 20$ $\quad(x \in R^*)$

Damit wir in jedem Fall von der Lösungsmenge einer Gleichung oder Ungleichung sprechen können, sagen wir auch, daß die Lösungsmenge einer unlösbaren Gleichung bzw. Ungleichung *kein* Element enthält, oder auch, daß sie *leer* ist. So sind z. B. die Lösungsmengen im Auftrag 2 b), d) und e) leer. In jedem dieser Fälle handelt es sich um dieselbe Menge. Wir geben ihr einen besonderen Namen.

5 **DEFINITION: Die Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge*. Sie wird mit „∅" bezeichnet.**

Aufgaben c 7 bis 24

3 Lösen von Gleichungen der Form „$a \cdot x = b$" $(a \neq 0)$

C

Die Lösung einer Gleichung kann man in einfachen Fällen durch *Probieren* finden. In den meisten Fällen ist dieses Verfahren jedoch sehr umständlich. So wird man beispielsweise die Lösung der Gleichung

$$\frac{5}{29}x - 37{,}11 = 85{,}9$$

kaum durch Probieren finden. Die Lösung ist nämlich 713,458.

(3) Setze in die Gleichung

$$\frac{5}{29}x - 37{,}11 = 85{,}9$$

für x die Zahl 713,458 ein und überprüfe die Aussage!

Das Ermitteln der Lösung einer Gleichung ist besonders einfach, wenn auf der einen Seite nur die Variable und auf der anderen Seite ein Term ohne Variable steht.

8 a) $x = \frac{7}{3}$

Wir erkennen sofort, daß $\frac{7}{3}$ die Lösung dieser Gleichung ist. Durch Einsetzen ergibt sich nämlich die wahre Aussage: $\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$.

b) $x = \frac{4 \cdot 5}{12}$

Wir können den Bruch kürzen: $\frac{4 \cdot 5}{12} = \frac{5}{3}$.

Durch Einsetzen der Zahl $\frac{5}{3}$ ergibt sich die wahre Aussage: $\frac{5}{3} = \frac{4 \cdot 5}{12}$.

Aus jeder gegebenen lösbaren Gleichung läßt sich nun durch Umformen eine Gleichung der Form „$x = c$" oder „$c = x$" gewinnen, die dieselbe Lösung wie die ursprünglich gegebene Gleichung hat. Dieses Umformen bezeichnet man als *Auflösen* der Gleichung *nach der* betreffenden *Variablen* oder als *Isolieren der*

Variablen. Diese Variable ist oft der Buchstabe „x", aber auch andere Buchstaben, wie „y", „z", „s", „t", „u", „v", „w", werden verwendet.

Wir wollen Gleichungen der Form „$a \cdot x = b$" ($a \neq 0$) durch Umformen nach der Variablen „x" auflösen.

9 Die Gleichung $5 \cdot x = 35$ soll nach „x" aufgelöst werden.
Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, ist die Gleichung
(1) $5 \cdot x = 35$ gleichbedeutend mit der Gleichung
(2) $x = 35 : 5$.
Wir erhalten Gleichung (2) aus Gleichung (1), indem wir in dieser beide Seiten durch 5 dividieren oder, was dasselbe ist, mit $\frac{1}{5}$ multiplizieren. Wir schreiben am Ende der Gleichung hinter einem senkrechten Strich auf, welche Rechenoperation mit *beiden* Seiten der Gleichung auszuführen ist.

$$\begin{aligned} 5 \cdot x &= 35 \quad | :5 \\ (5 \cdot x) : 5 &= 35 : 5 \\ x &= 7 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} 5 \cdot x &= 35 \quad | \cdot \tfrac{1}{5} \\ \tfrac{1}{5} \cdot 5 \cdot x &= \tfrac{1}{5} \cdot 35 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Jetzt können wir aus der letzten Gleichung sofort ablesen, daß die Zahl 7 Lösung der gegebenen Gleichung ist, denn $7 = 7$ ist eine wahre Aussage. Deshalb betrachten wir die gegebene Gleichung als gelöst, wenn wir sie auf diese Form gebracht haben.
Wenn wir uns beim Umformen aber verrechnet haben, dann ist die Lösung der Endgleichung im allgemeinen nicht Lösung der gegebenen Gleichung. Wir setzen daher die aus der Endgleichung abgelesene Lösung stets noch einmal in die gegebene Gleichung ein, um eine Kontrolle unserer Rechnung durchzuführen: $5 \cdot 7 = 35$.

Wir sagen: Wir machen die **Probe**.
Wir erhalten auch hier eine wahre Aussage, also ist die Zahl 7 tatsächlich Lösung der gegebenen Gleichung.

10 Es sollen die folgenden Gleichungen gelöst werden.

a) $\frac{3}{4} \cdot y = 0{,}3$

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4} \cdot y &= 0{,}3 \quad | : \tfrac{3}{4} \\ (\tfrac{3}{4} \cdot y) : \tfrac{3}{4} &= 0{,}3 : \tfrac{3}{4} \\ \tfrac{3}{4} \cdot y \cdot \tfrac{4}{3} &= 0{,}3 \cdot \tfrac{4}{3} \\ y &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Probe: $\frac{3}{4} \cdot 0{,}4 = 0{,}3$
$3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$
$0{,}3 = 0{,}3$

$\frac{3}{4} \cdot 0{,}4 = 0{,}3$ ist eine wahre Aussage.

Die Lösung der gegebenen Gleichung ist also die Zahl 0,4.

b) $0{,}6\,t = 0{,}75$

$$\begin{aligned} 0{,}6\,t &= 0{,}75 \quad | :0{,}6 \\ t &= 0{,}75 : 0{,}6 \\ t &= 1{,}25 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:
$0{,}75 : 0{,}6 = 7{,}5 : 6 = 1{,}25$
15
30
0

Probe:
$0{,}6 \cdot 1{,}25 = 0{,}75$
$0{,}75 = 0{,}75$

c) $\frac{v}{3} = \frac{1}{9}$

$\frac{v}{3} = \frac{1}{9} \quad | \cdot 3$

$v = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Probe:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

Wir haben in den Beispielen 9 und 10 gesehen:
Beim Lösen von Gleichungen können wir beide Seiten der jeweils gegebenen Gleichung mit derselben gebrochenen Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl (ungleich Null) dividieren.
Im Bereich der gebrochenen Zahlen kann jede Division durch eine Zahl a ($a \neq 0$) als Multiplikation mit $\frac{1}{a}$ aufgefaßt werden. Andererseits kann jede Multiplikation mit einer Zahl b ($b \neq 0$) als Division durch $\frac{1}{b}$ aufgefaßt werden. Daher können wir sagen:

Wir lösen eine Gleichung $a \cdot x = b$ ($a \neq 0$):

(1) Wir dividieren beide Seiten dieser Gleichung durch a.

(2) Wir erhalten dann $x = b : a$ oder, anders geschrieben, $x = \frac{b}{a}$.

Aufgaben c 25 bis 28

4 Lösen von Gleichungen der Form „$\frac{a}{x} = b$“ ($a \neq 0$; $b \neq 0$)

C

Mit den in der Lerneinheit 3 verwendeten Rechenoperationen können wir auch Gleichungen der Form „$\frac{a}{x} = b$“ lösen. In solchen Gleichungen steht die Variable, nach der aufgelöst werden soll, im Nenner eines Bruches. Die gebrochenen Zahlen a und b sollen dabei stets ungleich 0 sein. Daraus folgt, daß auch die Lösungen solcher Gleichungen ungleich 0 sein müssen.

11 Es soll die Gleichung $\frac{3}{x} = 7$ gelöst werden.
Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit x, d. h. mit derselben gebrochenen Zahl, und erhalten dadurch eine Gleichung der Art, wie wir sie in der Lerneinheit 3 gelöst haben.

12 a) $\frac{0{,}17}{x} = 5 \quad | \cdot x$

$0{,}17 = 5 \cdot x \quad | : 5$

$0{,}034 = x$

$x = 0{,}034$

Nebenrechnungen:

$0{,}17 : 5 = 0{,}034$

17

20

$0{,}17 : 0{,}034 = 170 : 34 = 5$

0

Probe:

$\frac{0{,}17}{0{,}034} = 5$

$5 = 5$

b) $\frac{4}{5} : x = \frac{5}{4} \quad | \cdot x$

$\frac{4}{5} = \frac{5}{4} \cdot x \quad | : \frac{5}{4}$

$\frac{4}{5} : \frac{5}{4} = x$

$\frac{16}{25} = x$

$x = \frac{16}{25}$

Probe:

$\frac{4}{5} : \frac{16}{25} = \frac{5}{4}$

$\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{16} = \frac{5}{4}$

$\frac{1}{1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

Wir lösen eine Gleichung $\frac{a}{x} = b \quad (a \neq 0;\ b \neq 0)$:

(1) Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit x.

(2) Wir dividieren dann beide Seiten der entstandenen Gleichung $a = b \cdot x$ durch b.

(3) Wir erhalten dann die Gleichung $x = \frac{a}{b}$ oder, anders geschrieben, $x = a : b$.

Wenn wir die Lösung einer Gleichung ermittelt haben, führen wir in jedem Falle die Probe durch, indem wir die Lösung in die Ausgangsgleichung einsetzen. Dadurch vermeiden wir Rechenfehler.

So lösen wir Gleichungen wie $\frac{3}{x} = 7$!	
Multipliziere beide Seiten mit x!	$\frac{3}{x} = 7 \quad \vert \cdot x$ $3 = 7 \cdot x$
Vertausche die Seiten!	$7 \cdot x = 3$
Dividiere beide Seiten durch 7!	$7 \cdot x = 3 \quad \vert : 7$ $x = \frac{3}{7}$
Mache die Probe!	$\frac{3}{\frac{3}{7}} = 7$ $3 \cdot \frac{7}{3} = 7$ $7 = 7$

Aufgaben c 29 bis 32

Proportionalität und Verhältnisgleichungen

5 Zahlenfolgen

Bei wissenschaftlichen Untersuchungen werden häufig Messungen vorgenommen. Wir kennen solche Messungen auch aus dem Physikunterricht. Dort haben wir z. B., um das Verhalten des Wassers bei Erwärmung kennenzulernen, in regelmäßigen Zeitabständen Temperaturmessungen vorgenommen. Um die Meßergebnisse besser auswerten zu können, ordnet man sie übersichtlich in Form einer Tabelle an.
Wenn wir die Einzelmessungen numerieren, erhalten wir eine Tabelle, die etwa folgendermaßen aussehen kann:

Laufende Nummer der Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatur in °C	49,1	56,7	62,3	70,4	80,0	88,2	94,5	98,3	100,0	100,0

Durch diese Meßreihe wird jeder Nummer einer Messung, d. h. jeder natürlichen Zahl von 1 bis 10, eine gebrochene Zahl als Maßzahl der betreffenden Temperatur zugeordnet. Dabei sind die Meßwerte, also die zugeordneten Zahlen, nicht unbedingt *auch* natürliche Zahlen. Das richtet sich nach der jeweiligen Meßgenauigkeit.

Um uns mathematische Kenntnisse anzueignen, die wir bei der Auswertung solcher Meßreihen benötigen, wollen wir zunächst von physikalischen o. ä. Anwendungen absehen. Wir betrachten also nur *Zahlen* und ordnen stets jede dieser Zahlen wie in der Tabelle oben den natürlichen Zahlen zu.

13 a) Jeder natürlichen Zahl n ($n > 0$) soll ihre Hälfte zugeordnet werden.

Natürliche Zahl (n)	1	2	3	4	5	6	7	...
Hälfte der natürlichen Zahl ($\frac{1}{2} \cdot n$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2} = 3$	$\frac{7}{2}$	...

Wir können selbstverständlich nicht alle natürlichen Zahlen und auch nicht alle ihnen zugeordneten Zahlen aufschreiben.

b) Jeder natürlichen Zahl n von 1 bis 12 soll die Zahl zugeordnet werden, die man erhält, wenn man die betreffende natürliche Zahl von 20 subtrahiert.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$20 - n$	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8

In jedem der Beispiele 13 a) und b) haben alle Zahlen in der unteren Tabellenzeile eine Nummer, nämlich gerade diejenige natürliche Zahl, der sie jeweils zugeordnet sind. Wenn wir die zugeordneten Zahlen in der Reihenfolge ihrer Numerierung aufschreiben, so erhalten wir eine **Zahlenfolge**. Jede Zahl einer Zahlenfolge heißt **Glied** dieser Zahlenfolge. Die **Nummer** eines Gliedes ist diejenige natürliche Zahl, der dieses Glied zugeordnet ist.

14 Aus den Tabellen im Beispiel 13 entnehmen wir die folgenden Zahlenfolgen.

a) $\frac{1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{5}{2}; \frac{6}{2}; \frac{7}{2}; \ldots$

$\frac{5}{2}$ ist das Glied mit der Nummer 5. Zur Nummer 13 gehört das Glied $\frac{13}{2}$.

b) 19; 18; 17; 16; 15; 14; 13; 12; 11; 10; 9; 8

19 ist das Glied mit der Nummer 1. Zur Nummer 3 gehört das Glied 17.

In der Mathematik spricht man meist nur dann von Zahlenfolgen, wenn *jeder* natürlichen Zahl eine Zahl zugeordnet ist, wenn es also kein letztes Glied in der Zahlenfolge gibt. Um eine solche Zahlenfolge handelt es sich im Beispiel 14a). Auch die Dezimalstellen eines periodischen Dezimalbruchs bilden z. B. eine solche Zahlenfolge. Wir wollen aber auch bei einer endlichen Anzahl von Gliedern, wie im Beispiel 14 b), von Zahlenfolgen sprechen.

Aufgaben c 33 bis 40

C

6 Zueinander proportionale Zahlenfolgen

Wir wollen *Zahlenfolgen* miteinander vergleichen, indem wir jeweils die *einander entsprechenden Glieder* der Zahlenfolgen miteinander vergleichen. Dabei sollen diejenigen Glieder einander entsprechen, die innerhalb der Zahlenfolgen die gleiche Nummer haben.

15 a) 1. Folge: 5; 10; 15; 20; 25; 30
| | | | | |
2. Folge: 7; 13; 19; 25; 31; 37

b) 1. Folge: 2; 4; 6; 8; 10; 12
| | | | | |
2. Folge: 4; 8; 12; 16; 20; 24

Beim Vergleichen stellen wir fest:
In beiden Beispielen ist jedes Glied der zweiten Folge größer als das entsprechende Glied der ersten Folge.
Im Beispiel b) erhalten wir jedes Glied der zweiten Folge durch Multiplikation des entsprechenden Gliedes der ersten Folge mit 2. Oder umgekehrt: Jedes Glied der ersten Folge ergibt sich durch Multiplikation des entsprechenden Gliedes der zweiten Folge mit $\frac{1}{2}$.
Das ist bei den Folgen im Beispiel 15 a) nicht der Fall.
Der Beziehung zwischen den beiden Folgen im Beispiel 15 b) geben wir den Namen **Proportionalität**.

6 **DEFINITION: *Zahlenfolgen* heißen *zueinander proportional*, wenn sich jedes Glied der einen Folge aus dem entsprechenden Glied der anderen Folge durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor ergibt. Dieser Faktor heißt *Proportionalitätsfaktor*.**

Um festzustellen, ob zwei Zahlenfolgen zueinander proportional sind, bilden wir die Quotienten je zweier entsprechender Glieder. Sind diese Quotienten alle einander gleich, so sind die Zahlenfolgen zueinander proportional.

4 Stelle fest, welche der gegebenen Folgen zueinander proportional sind! Gib den Proportionalitätsfaktor an!

a) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 und
8; 9; 10; 11; 12; 13; 14

b) $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{5}$; 0,2; $\frac{7}{2}$; 4; 10 und
$\frac{7}{24}$; $\frac{7}{10}$; 0,175; $\frac{49}{16}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{35}{4}$

Aufgaben c 41 bis 58

7 Zueinander proportionale Größen

Zueinander proportionale Zahlenfolgen treten sehr häufig in der Technik und in den Naturwissenschaften auf.

16 Eine automatische Taktstraße bearbeitet eine bestimmte Art von Werkstücken (Bild C 1). Jeweils nach einer Stunde sind bei ununterbrochenem Einsatz der Taktstraße 30 Werkstücke fertig. Die folgende Tabelle gibt an, wieviel Werkstücke bei diesem Dauerbetrieb jeweils nach 1, 2, 3, ... Stunden fertig sind.

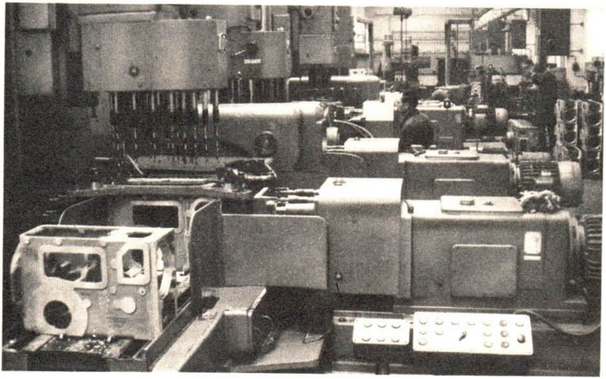
C

Arbeitszeit t (in h)	1	2	3	4	5	6	7	8
bearbeitete Werkstücke n (in Stück)	30	60	90	120	150	180	210	240

In dieser Tabelle stehen zwei Folgen von Maßzahlen zweier Größen. Jeder Maßzahl der einen Größe ist die entsprechende Maßzahl der anderen Größe zugeordnet. Zum Beispiel ist der Maßzahl 5 (in h) die Stückzahl 150 zugeordnet. Aus der Tabelle entnehmen wir: Die Anzahl der in einer bestimmten Zeit bearbeiteten Werkstücke kann durch Multiplikation der Arbeitszeit mit dem Faktor 30 berechnet werden. Das geht jedoch nur, weil die Arbeitsweise der Maschine regelmäßig ist. Wenn dagegen die Taktstraße ab und zu angehalten werden muß und sie demzufolge nicht in jeder Stunde die gleiche Anzahl von Werkstücken bearbeitet, so können wir nicht die Anzahl der bearbeiteten Werkstücke berechnen. Die folgende Tabelle gibt einen solchen Verlauf wieder.

Arbeitszeit t (in h)	1	2	3	4	5	6	7	8
bearbeitete Werkstücke n (in Stück)	30	58	72	118	150	193	205	220

C



C 1

Bei einem regelmäßigen Arbeitsprozeß der Taktstraße können wir die Anzahl der Werkstücke nach der Gleichung $n = 30 \cdot t$ berechnen, d. h., die Folge der Maßzahlen für die Arbeitszeit und die Folge der Maßzahlen für die verrichtete Arbeit sind zueinander proportional.

Für 7 Stunden ergibt sich beispielsweise: $n = 30 \cdot 7$,
$n = 210$,
also 210 Werkstücke.

Sind je zwei beliebig ausgewählte Folgen von einander zugeordneten Maßzahlen zweier Größen stets mit dem gleichen (Proportionalitäts)faktor proportional, so heißen diese *Größen zueinander proportional.*

Als Zeichen für die Proportionalität verwenden wir das Symbol „∼" (lies: „proportional zu").

17 a) Die Anzahl der produzierten Werkstücke n ist proportional zur Arbeitszeit t:
$n \sim t$.

b) Die Entlohnung p eines Genossenschaftsbauern ist proportional zur Anzahl der verrichteten Arbeitseinheiten n:
$p \sim n$.

c) Die Masse m eines Körpers ist proportional zum Volumen V:
$m \sim V$.

Mit Hilfe der Proportionalitätsfaktoren können wir diese Proportionalitäten auch als Gleichungen schreiben:

a) $n = 30 \cdot t$ Der Proportionalitätsfaktor 30 ist die Anzahl der Werkstücke in 1 h.

b) $p = k \cdot n$ Der Proportionalitätsfaktor k ist die Entlohnung für 1 Arbeitseinheit.

c) $m = \gamma \cdot V$ Der Proportionalitätsfaktor γ gibt die Masse von 1 Volumeneinheit an, d. h., γ ist die Dichte.

Aufgaben c 59 und 60

C

8 Das rechtwinklige Koordinatensystem

Je zwei einander entsprechende Glieder zweier Zahlenfolgen bilden ein **Zahlenpaar**. So bilden die im Beispiel 15 jeweils übereinander stehenden Zahlen solche Zahlenpaare.
Wenn festgelegt wird, welche Zahl eines Zahlenpaares als erste genannt werden soll, so nennen wir ein solches Zahlenpaar **geordnet**.

18 Es sollen aus den Elementen von M und N alle möglichen geordneten Paare $(x; y)$ gebildet werden, wobei $x \in M$ und $y \in N$ gilt.

$M = \{2; \frac{1}{2}; 0{,}7\}$ Geordnete Paare: $(2; 1{,}5)$; $(2; 9)$; $(\frac{1}{2}; 1{,}5)$; $(\frac{1}{2}; 9)$; $(0{,}7; 1{,}5)$; $(0{,}7; 9)$
$N = \{1{,}5; 9\}$

Wir können geordnete Paare auch in Tabellen anordnen.

19 Es sollen die geordneten Paare aus Beispiel 18 in Tabellenform aufgeschrieben werden.

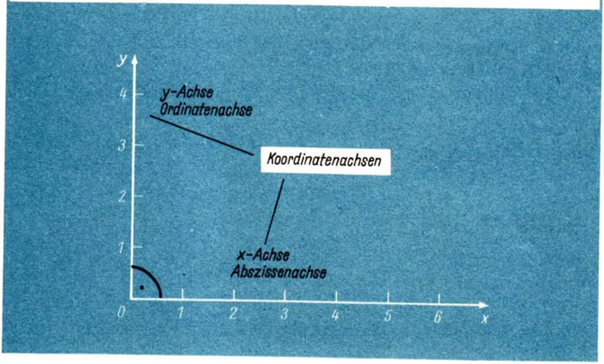
x	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,7	0,7
y	1,5	9	1,5	9	1,5	9

Ähnlich wie wir die gebrochenen Zahlen durch Punkte auf einem Teil einer Geraden, nämlich auf einem Zahlenstrahl, dargestellt haben, können wir auch *geordnete Zahlenpaare* durch Punkte in einem Teil der Zeichenebene graphisch darstellen.

Dazu zeichnen wir zwei senkrecht aufeinander stehende Zahlenstrahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt *O*. Diese beiden Zahlenstrahlen nennen wir ein **rechtwinkliges Koordinatensystem**. Jeder der beiden Strahlen heißt **Koordinatenachse**. Die Achsen bezeichnen wir häufig mit „*x*" und „*y*". Die mit „*x*" bezeichnete Koordinatenachse heißt **Abszissenachse**, die mit „*y*" bezeichnete **Ordinatenachse** (Bild C 2).

C 2

Rechtwinkliges Koordinatensystem



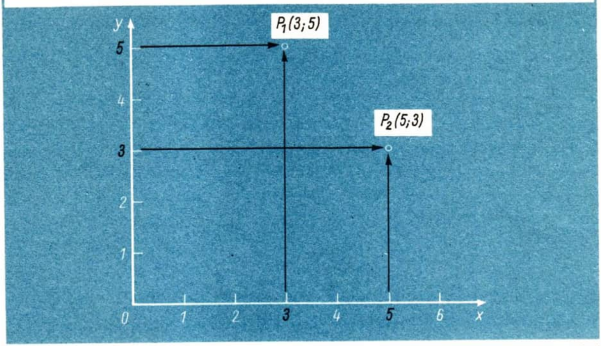
Um nun ein geordnetes Zahlenpaar $(x; y)$ in einem Koordinatensystem darzustellen, markieren wir auf der Abszissenachse die erste Zahl und auf der Ordinatenachse die zweite Zahl des Paares durch je einen Punkt. In jedem dieser beiden Punkte errichten wir die Senkrechte auf der betreffenden Achse. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten ist dann die graphische Darstellung des betreffenden geordneten Zahlenpaares. Diesen Schnittpunkt bezeichnen wir mit $\boldsymbol{P(x; y)}$.

Wir nennen die Zahlen x und y die **Koordinaten des Punktes** $\boldsymbol{P(x; y)}$. Die Zahl x heißt **Abszisse des Punktes *P***, und die Zahl y heißt **Ordinate des Punktes *P***.

20 Es sollen die geordneten Zahlenpaare (3; 5) und (5; 3) in einem Koordinatensystem veranschaulicht werden (Bild C 3).
Die Abszisse des Punktes P_1 ist 3, seine Ordinate 5.
Die Abszisse des Punktes P_2 ist 5, seine Ordinate 3.

5 Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt *O* der Achsen?

Veranschaulichen von Zahlenpaaren im Koordinatensystem



C 3

Aufgaben c 61 bis 70

C

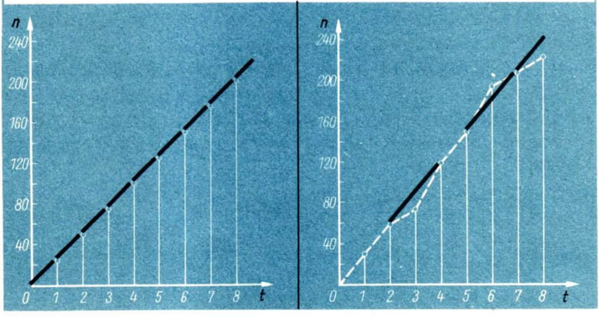
9 Darstellen von Proportionalitäten im Koordinatensystem

Der Zusammenhang, in dem zwei Größen stehen, läßt sich in einem Koordinatensystem graphisch darstellen. Dazu wählen wir für jede der beiden Größen eine Achse, bezeichnen diese mit der entsprechenden Variablen und tragen die

C 4

C 5

Zusammenhang zwischen Arbeitszeit und Arbeitsergebnis



Paare einander entsprechender Maßzahlen als Punkte in das Koordinatensystem ein. Dabei ist es mitunter günstig, auf beiden Achsen verschieden große Einheitsstrecken zu wählen.

21 Es soll der Zusammenhang zwischen Arbeitszeit und verrichteter Arbeit aus Beispiel 16 graphisch dargestellt werden.
Alle Punkte der graphischen Darstellung dieser Proportionalität liegen auf einer gemeinsamen Geraden, die durch den Anfangspunkt O geht (Bild C 4). Das trifft für die graphischen Darstellungen aller Proportionalitäten zu. Den Beweis für diese Behauptung können wir erst später führen. Liegt keine Proportionalität vor, so liegen die Punkte der graphischen Darstellung auch nicht auf einer solchen Geraden (Bild C 5).

Aufgaben c 71 bis 76

10 Direkte und umgekehrte Proportionalität

Wir untersuchen die Zahlenfolgen

(I) $5;\ 10;\ 15;\ 20;\ 25;\ 30$ und

(II) $2;\ 1;\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{3}$

auf Proportionalität. Dazu müssen wir feststellen, ob sich jedes Glied der einen Folge aus dem entsprechenden Glied der anderen Folge durch Multiplikation mit demselben Faktor ergibt. Es gilt aber z. B.:

$$2 = \frac{2}{5} \cdot 5 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{40} \cdot 20.$$

Die ersten und die vierten Glieder gehen also durch Multiplikation mit *verschiedenen* Faktoren auseinander hervor. Ohne noch weitere Glieder untersuchen zu müssen, wissen wir damit, daß die beiden Folgen *nicht* proportional zueinander sind.
Nun ändern wir die Folge (I) ab, indem wir alle ihre Glieder durch deren Reziproke ersetzen.

(Ia) $\frac{1}{5};\ \frac{1}{10};\ \frac{1}{15};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{25};\ \frac{1}{30}$

(II) $2;\ 1;\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{3}$

Jetzt gehen die Glieder der Folge (II) aus den entsprechenden Gliedern der Folge (Ia) durch Multiplikation mit einem *einheitlichen* Faktor, nämlich mit 10, hervor. Die Folgen (Ia) und (II) sind also zueinander proportional.
Wir können auch die Folge (II) durch Übergang zu den Reziproken ihrer Glieder abändern.

(I) $5;\ 10;\ 15;\ 20;\ 25;\ 30$

(IIa) $\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ \frac{5}{2};\ 3$

Die Folgen (I) und (IIa) sind ebenfalls zueinander proportional, da sich die Glieder der Folge (IIa) aus den entsprechenden der Folge (I) durch Multiplikation mit $\frac{1}{10}$ ergeben.

Diese Beziehung zwischen den ursprünglichen Folgen (I) und (II) nennt man **umgekehrte Proportionalität.**

7 **DEFINITION: Zwei *Zahlenfolgen* heißen zueinander *umgekehrt proportional*, wenn sich jedes Glied der einen Folge aus dem Reziproken des entsprechenden Gliedes der anderen Folge durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor ergibt.**

Im Unterschied zur umgekehrten Proportionalität nennt man die von uns zuerst untersuchte Proportionalität auch **direkte Proportionalität.**
Um festzustellen, ob zwei Zahlenfolgen zueinander umgekehrt proportional sind, bilden wir die Produkte je zweier entsprechender Zahlen. Sind dann diese Produkte alle einander gleich, so sind die beiden Zahlenfolgen zueinander umgekehrt proportional.

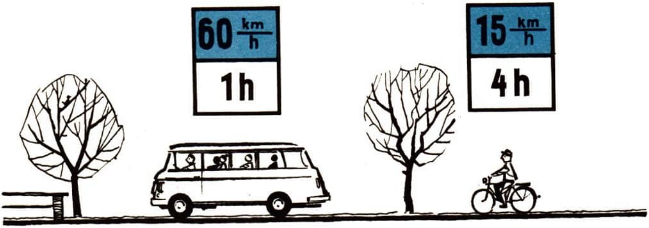
Aufgaben c 77 bis 80

11 Zueinander umgekehrt proportionale Größen

Ebenso wie die direkte tritt auch die umgekehrte Proportionalität häufig in der Praxis auf.

8 **DEFINITION: Zwei *Größen* heißen zueinander *umgekehrt proportional*, wenn je zwei beliebig ausgewählte Folgen von einander zugeordneten Maßzahlen mit dem gleichen Faktor umgekehrt proportional sind.**

22 Zwei Städte liegen 60 km voneinander entfernt. Legt man diese Entfernung mit einem Omnibus zurück, der mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, so benötigt man 1 h für diese Strecke. Fährt man auf einem Moped und hält die Geschwindigkeit $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ein, so benötigt man 2 h. Ein Radfahrer würde bei der Geschwindigkeit $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sogar 4 h benötigen.

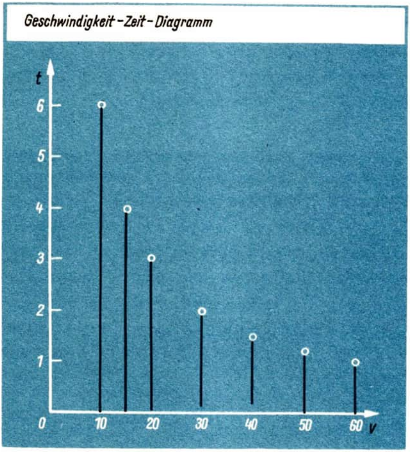


Die folgende Tabelle gibt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit an, die man benötigt, um die Strecke von 60 km zurückzulegen.

Geschwindigkeit v (in $\frac{km}{h}$)	10	15	20	30	40	50	60
Zeit t (in h)	6	4	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

Wir ergänzen nun die Tabelle durch die Reziproken der Maßzahlen für die Geschwindigkeit.

Geschwindigkeit v (in $\frac{km}{h}$)	10	15	20	30	40	50	60
Reziprokes der Geschwindigkeit $\frac{1}{v}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{60}$
Zeit t (in h)	6	4	3	2	1,5	1,2	1



C 6

Jetzt gehen die Maßzahlen der Zeit in der dritten Zeile durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor aus den Reziproken der Maßzahlen für die Geschwindigkeit hervor. Es gilt also:

$$t \sim \frac{1}{v}.$$

Die Zeit und die Geschwindigkeit sind also zueinander umgekehrt proportional. Der Proportionalitätsfaktor 60 ist die Maßzahl der zurückgelegten Entfernung. Bezeichnen wir ihn mit s, so erhalten wir:

$$t = s \cdot \frac{1}{v} \quad \text{oder} \quad t = \frac{s}{v}.$$

Durch die graphische Darstellung der umgekehrten Proportionalität erhält man Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Das Bild C 6 zeigt das Diagramm für den Sachverhalt im Beispiel 22.

12 Verhältnisse von Größen

Der durchschnittliche Ernteertrag an Weizen betrug in der DDR im Jahre 1963 rund 30 dt je Hektar, 1965 aber rund 36 dt je Hektar. Wir wollen die Erträge vergleichen.

Dazu können wir die Differenz der Zahlen bilden, die die Erträge angeben. Wir stellen fest: 1965 wurden je Hektar 6 dt mehr geerntet als im Jahre 1963.

Wir können aber auch den Quotienten der beiden Zahlen bilden und erhalten dann $\frac{30}{36}$, anders geschrieben $30:36$. Diesen Quotienten können wir kürzen: $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$. Wir sagen: Die Erträge der Jahre 1963 und 1965 verhalten sich wie 5 zu 6. Den Quotienten $\frac{5}{6}$ bzw. $5:6$ (lies: „5 zu 6") nennen wir das **Verhältnis** dieser Erträge.

23 Beim 100-m-Lauf legte ein Schüler die Strecke in 12 s zurück. Bei normalem Wanderschritt benötigt man für 1 km durchschnittlich 12 min. In welchem Verhältnis stehen die Zeiten, die beim Kurzstreckenlauf und beim Wandern für 100 m benötigt werden? Beim Wandern benötigt man für 100 m Strecke 1,2 min.
Wir rechnen in gleiche Einheiten um (1,2 min = 72 s) und bilden das Verhältnis $\frac{12}{72} = \frac{1}{6}$.
Die beiden Zeiten verhalten sich wie $1:6$.

24 a) Es soll das Verhältnis der Zahlen 5,6 und 8,4 angegeben werden.
$5{,}6 : 8{,}4 = \frac{5{,}6}{8{,}4} = \frac{56}{84} = \frac{2}{3} = 2:3$

b) Es soll das Verhältnis der Zahlen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$ angegeben werden.
$\frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 4:5 = 0{,}8$

Zwei Größenangaben können miteinander verglichen werden, indem man den Quotienten ihrer Maßzahlen bildet. Diesen Quotienten nennt man auch das *Verhältnis* dieser Zahlen. Dabei müssen Zahlenangaben für ein und dieselbe Größe in der gleichen Einheit verwendet werden.

Es ist üblich, die Verhältnisse mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen anzugeben. Verhältnisse sind als Quotienten gebrochener Zahlen selbst gebrochene Zahlen. Sie können also auch als Dezimalzahlen geschrieben werden.

Aufgaben c 81 und 82

13 Verhältnisse bei zueinander direkt proportionalen Folgen

Um weitere Eigenschaften zueinander proportionaler Größen herauszufinden, betrachten wir noch einmal die beiden Tabellen aus dem Beispiel 16.

t (Arbeitszeit in h)	1	2	3	4	5	6	7	8
n (Anzahl der Werkstücke)	30	60	90	120	150	180	210	240

t (Arbeitszeit in h)	1	2	3	4	5	6	7	8
n (Anzahl der Werkstücke)	30	58	72	118	150	193	205	220

Wenn wir in der ersten Tabelle in jeder Spalte die Verhältnisse aus der Anzahl der bearbeiteten Werkstücke und der Anzahl der erforderlichen Arbeitsstunden bilden, so erhalten wir:

$$\frac{30}{1} = 30$$
$$\frac{60}{2} = 30$$
$$\vdots$$
$$\frac{240}{8} = 30$$

Wir wollen nun verschiedene Glieder innerhalb jeder der beiden Zahlenfolgen miteinander vergleichen.

In der ersten Tabelle bilden wir dazu Verhältnisse aus zwei Zahlen der ersten Zeile und den ihnen zugeordneten Zahlen der zweiten Zeile:

a) $\frac{2}{4}$ und $\frac{60}{120}$; b) $\frac{8}{5}$ und $\frac{240}{150}$.

t (Arbeitszeit in h)	1	2	3	4	5	6	7	8
n (Anzahl der Werkstücke)	30	60	90	120	150	180	210	240

In beiden Fällen gehen die Verhältnisse durch Erweitern bzw. Kürzen auseinander hervor, so daß wir das Gleichheitszeichen setzen können.

a) $\frac{2}{4} = \frac{60}{120}$ b) $\frac{8}{5} = \frac{240}{150}$

(6) Bilde auf die gleiche Weise weitere Verhältnisse!

Bei zueinander proportionalen Größen ist das Verhältnis aus zwei beliebigen Maßzahlen der einen Größe gleich dem Verhältnis der entsprechenden Maßzahlen der anderen Größe. Daraus geht hervor:

Wenn die Maßzahlen der ersten Größe verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ... werden, so werden auch die zugeordneten Maßzahlen der zweiten Größe verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ...

Ebenso gilt:

Wenn die Maßzahlen der ersten Größe halbiert, gedrittelt, geviertelt, ... werden, so werden auch die zugeordneten Maßzahlen der zweiten Größe halbiert, gedrittelt, geviertelt, ...

Wir sagen auch:

Die Maßzahlen der beiden Größen *wachsen* bzw. *fallen* im gleichen Verhältnis.

Es genügt *nicht*, wenn wir feststellen: „Proportionalität liegt vor, wenn gilt: ‚Je größer die eine Maßzahl, desto größer auch die zugeordnete Maßzahl.'"

Weise das nach, indem du die zweite Tabelle im Beispiel 16 überprüfst!

Aufgaben c 83 bis 88

14 Verhältnisse bei zueinander umgekehrt proportionalen Folgen

Ebenso wie wir in der Lerneinheit 13 zueinander direkt proportionale Größen untersucht haben, wollen wir das jetzt mit zueinander umgekehrt proportionalen Größen tun. Dazu benutzen wir die Tabelle aus dem Beispiel 22.

v (Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$)	10	20	30	40	50	60
t (Zeit in h)	6	3	2	1,5	1,2	1

Bilden wir wieder wie in der Lerneinheit 13 Verhältnisse aus den Maßzahlen der zweiten Größe und den zugehörigen Maßzahlen der ersten Größe, so können wir feststellen, daß sie alle verschieden sind.

$\frac{6}{10} = \frac{36}{60}$; $\frac{3}{20} = \frac{9}{60}$; $\frac{2}{30} = \frac{4}{60}$

Es gilt nicht $t \sim v$.

Wie in der Lerneinheit 13 bilden wir nun Verhältnisse zweier Zahlen der ersten Folge und der ihnen zugeordneten Zahlen der zweiten Folge.

a) $\frac{10}{30}$ und $\frac{6}{2}$ b) $\frac{60}{50}$ und $\frac{1}{1,2}$

a) b)

v (Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$)	10	20	30	40	50	60
t (Zeit in h)	6	3	2	1,5	1,2	1

Je größer die Geschwindigkeit ist, desto weniger Zeit wird benötigt.
Die Verhältnisse einander entsprechender Zahlen sind in diesem Falle also nicht gleich. Kehren wir aber in einem der beiden Verhältnisse die Reihenfolge der Glieder um, so erhalten wir:

a) $\frac{10}{30}$ und $\frac{2}{6}$ b) $\frac{60}{50}$ und $\frac{1,2}{1}$

Jetzt sind die Verhältnisse gleich, und wir können schreiben:

a) $\frac{10}{30} = \frac{2}{6}$ b) $\frac{60}{50} = \frac{1,2}{1}$

Bilden wir statt der Verhältnisse der einander zugeordneten Maßzahlen deren Produkte, so erhalten wir:

$6 \cdot 10 = 3 \cdot 20 = 2 \cdot 30 = 1,5 \cdot 40 = 1,2 \cdot 50 = 1 \cdot 60 = 60.$

Alle diese Produkte sind gleich dem Proportionalitätsfaktor $s = 60$. Das hätten wir auch an der Gleichung $t = s \cdot \frac{1}{v}$ erkennen können. Multiplizieren wir nämlich beide Seiten dieser Gleichung mit v, so ergibt sich: $t \cdot v = s$.

Daher nennen wir zueinander umgekehrt proportionale Größen auch *produktgleich*.

Will man prüfen, ob zwei Größen zueinander umgekehrt proportional sind, darf man sich nicht auf die Feststellung beschränken: „Je größer die Maßzahl der einen Größe ist, desto kleiner ist die Maßzahl der anderen Größe."

25 Im Klassenschrank lag ursprünglich ein Vorrat von 50 Heften. Je nach Bedarf wurden davon Hefte an Schüler ausgegeben.

Anzahl der Hefte im Schrank	45	40	30	26	21	15	10
Anzahl der ausgegebenen Hefte	5	10	20	24	29	35	40

Auch hier gilt: Je größer die Anzahl der ausgegebenen Hefte ist, desto kleiner ist die Anzahl der Hefte im Schrank.

(7) Prüfe selbst nach, ob im Beispiel 25 umgekehrte Proportionalität vorliegt, indem du die Produkte der jeweils zugeordneten Zahlen bildest!

Aus der Produktgleichheit zweier zueinander umgekehrt proportionaler Größen folgt:

Werden die Maßzahlen der einen Größe auf das Doppelte, Dreifache, Vierfache usw. vergrößert, so werden die zugeordneten Maßzahlen der anderen Größe auf die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel usw. verkleinert.

15 Anwendungen zur direkten und umgekehrten Proportionalität

C

Bei der Untersuchung von Anwendungsbeispielen werden wir künftig zwei Fälle unterscheiden:

(1) Wir *wissen bereits*, daß bei dem betreffenden Sachverhalt Proportionalität vorliegt (vgl. Beispiel 16), oder wir nehmen Proportionalität zur Vereinfachung an (vgl. Beispiel 26).

(2) Wir müssen einen Sachverhalt *erst* daraufhin *überprüfen*, ob Proportionalität vorliegt (vgl. Beispiel 27). Dieser Notwendigkeit werden wir auch häufig im Physikunterricht begegnen.

26 Ein PKW fährt eine längere Strecke auf der Autobahn. Seine Geschwindigkeit ist nahezu gleichbleibend (konstant) und beträgt $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jeder Maßzahl der ersten Größe (Fahrzeit) ist genau eine Maßzahl der zweiten Größe (zurückgelegte Strecke) zugeordnet. Wenn wir gleichbleibende Geschwindigkeit voraussetzen (in Wirklichkeit handelt es sich dabei nur um einen Durchschnittswert), besteht Proportionalität zwischen der zurückgelegten Strecke s und der hierfür erforderlichen Zeit t: $s \sim t$.

Der Proportionalitätsfaktor ist gleich 90. Damit wird die Proportionalität durch die Gleichung $s = 90 \cdot t$ ausgedrückt. Wir erkennen, daß der Proportionalitätsfaktor gleich der Maßzahl der Geschwindigkeit ist, wenn man sie in Kilometer je Stunde mißt. Messen wir dagegen die Geschwindigkeit in Kilometer je Minute, so wird die Proportionalität wegen $\frac{90}{60}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 1{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$ durch die Gleichung $s = 1{,}5 \cdot t$ angegeben.

Wir sehen, daß zwei verschiedene Gleichungen denselben physikalischen Sachverhalt beschreiben. Damit nun keine Mißverständnisse entstehen, werden in der Physik und in der Technik die Proportionalitätsfaktoren mit den jeweiligen Einheiten angegeben. In diesem Beispiel ist dann der Proportionalitätsfaktor gleich $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ oder $1{,}5 \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Das bedeutet, daß die Zeit in der ersten Gleichung in Stunden und in der zweiten Gleichung in Minuten zu messen ist.

27 Bei einem Versuch wurde eine Schraubenfeder aus Stahl gedehnt. Und zwar wurde die Feder schrittweise stärker belastet und dabei jeweils die Verlängerung gegenüber der unbelasteten Feder gemessen.
Es ergab sich die folgende Tabelle.

Belastung F (in p)	50	100	150	200	300	400
Verlängerung l (in cm)	1,5	3,0	4,6	6,1	9,2	13,1

Jeder Maßzahl der ersten Größe (Belastung) ist genau eine Maßzahl der zweiten Größe (Verlängerung) zugeordnet.
Wir prüfen, ob Proportionalität vorliegt:
Wir bilden die Verhältnisse $\frac{F}{l}$ aus einander zugeordneten Maßzahlen.

$\frac{50}{1{,}5} \approx 33{,}3 \approx 33$ $\quad \frac{150}{4{,}6} \approx 32{,}6 \approx 33$ $\quad \frac{300}{9{,}2} \approx 32{,}6 \approx 33$

$\frac{100}{3{,}0} \approx 33{,}3 \approx 33$ $\quad \frac{200}{6{,}1} \approx 32{,}8 \approx 33$ $\quad \frac{400}{13{,}1} \approx 30{,}5$

Im Bereich bis 300 p liegt Proportionalität vor. Der Proportionalitätsfaktor beträgt mit der entsprechenden Einheit etwa $33 \frac{\text{p}}{\text{cm}}$ und besagt, daß sich die Feder durch jede zusätzliche Belastung mit 33 p jeweils um 1 cm verlängert.
Die Abweichungen, die bei der Bildung der Verhältnisse im Bereich von 50 p bis 300 p auftreten, sind auf Meßungenauigkeiten zurückzuführen. Mit 400 p wurde die Schraubenfeder offensichtlich überbelastet. Die Feder dehnte sich übermäßig aus.
Für den Bereich von 50 p bis 300 p folgt:

$$F \sim l.$$

Unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors $33 \frac{\text{p}}{\text{cm}}$ gilt für diesen Bereich:

$$F = 33 \cdot l.$$

Zusammenfassung:

Vergleich der direkten und umgekehrten Proportionalität

Direkte Proportionalität

a	1	2	3	3,5	10	$\frac{25}{2}$
b	6	12	18	21	60	75

Je *größer* die Werte von a sind, desto *größer* sind die Werte von b.

Umgekehrte Proportionalität

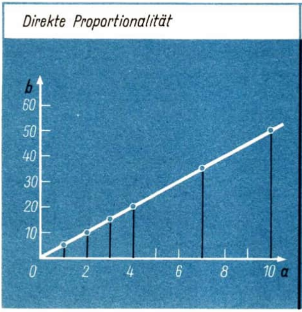
x	$\frac{1}{2}$	1	2	5	7,5	10
y	18	9	4,5	$\frac{9}{5}$	1,2	0,9

Je *größer* die Werte von x sind, desto *kleiner* sind die Werte von y.

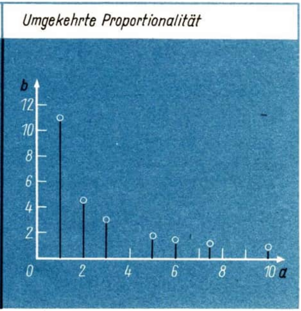
C

Werden die Werte von a verdoppelt, verdreifacht usw., so werden auch die entsprechenden Werte von b verdoppelt, verdreifacht usw.	Werden die Werte von x verdoppelt, verdreifacht usw., so werden die entsprechenden Werte von y halbiert, gedrittelt usw.
Werden die Werte von a halbiert, gedrittelt usw., so werden auch die entsprechenden Werte von b halbiert, gedrittelt usw.	Werden die Werte von x halbiert, gedrittelt usw., so werden die entsprechenden Werte von y verdoppelt, verdreifacht usw.
Die Werte von b ergeben sich aus den entsprechenden Werten von a durch Multiplikation mit k.	Die Werte von y ergeben sich aus den Reziproken der entsprechenden Werte von x durch Multiplikation mit c.
$b \sim a$ $b = k \cdot a$	$y \sim \frac{1}{x}$ $y = c \cdot \frac{1}{x}$
Beispiel: $k = 6$	Beispiel: $c = 9$
Die *Verhältnisse* einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor k.	Die *Produkte* einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor c.
$\frac{b}{a} = k$	$x \cdot y = c$
Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von a ist gleich dem Verhältnis der zugeordneten Werte von b.	Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von x ist gleich dem reziproken Verhältnis der zugeordneten Werte von y.
Beispiel: $\frac{2}{10} = \frac{12}{60}$	Beispiel: $\frac{2}{10} = \frac{0{,}9}{4{,}5}$
Grafische Darstellung	
Alle Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden.	Es liegen immer nur zwei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden.

C 7



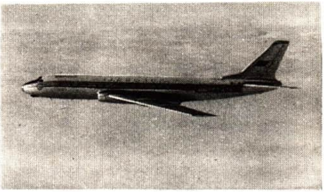
C 8



16 Verhältnisgleichungen

Das Turbinen-Propeller-Flugzeug IL 18 hat eine Reisegeschwindigkeit von $600 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, das Düsenverkehrsflugzeug TU 104 eine Reisegeschwindigkeit von $800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (Bild C 9 und Bild C 10).

C 9



C 10

Beide Geschwindigkeiten verhalten sich wie 800 : 600. Wir kürzen und erhalten:

$$\frac{800}{600} = \frac{120}{90} = \frac{60}{45} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}.$$

Entsprechend können wir auch erweitern:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{24}{18} = \frac{40}{30} = \frac{80}{60} = \frac{180}{135} = \dots$$

Wir erhalten eine Kette gleicher Verhältnisse. Aus ihr wollen wir zwei beliebige herausgreifen, etwa $\frac{120}{90}$ und $\frac{4}{3}$.
Dann gilt folgende Gleichung:

$$\frac{120}{90} = \frac{4}{3}.$$

Wir lesen: „120 (verhält sich) zu 90 wie 4 zu 3."
Eine solche Gleichung wird **Verhältnisgleichung** (oder *Proportion*) genannt.
Die Verhältnisgleichung

$$\frac{120}{90} = \frac{4}{3} \quad \text{oder in anderer Schreibweise} \quad 120 : 90 = 4 : 3$$

ist eine wahre Aussage; denn beide Seiten dieser Gleichung stellen dieselbe gebrochene Zahl dar.
Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung mit dem Produkt $90 \cdot 3$ multiplizieren, erhalten wir wieder eine wahre Aussage.

$$\frac{120 \cdot 90 \cdot 3}{90} = \frac{90 \cdot 3 \cdot 4}{3}$$
$$120 \cdot 3 = 90 \cdot 4.$$

8 Prüfe, ob die folgenden Verhältnisgleichungen wahre Aussagen sind!

a) $3 : 4 = 6 : 8$ b) $10 : 2 = 8 : 5$ c) $\frac{3}{5} = \frac{15}{50}$ d) $\frac{60}{12} = \frac{75}{15}$

Stellen zwei Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ $\left(\frac{a}{b} \text{ und } \frac{c}{d}\right)$ $(b, d \neq 0)$ dieselbe gebrochene Zahl dar, so gilt die Verhältnisgleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \textbf{bzw.} \quad a : b = c : d.$$

29 a) Es ist die Verhältnisgleichung $\frac{x}{3} = \frac{8}{6}$ bzw. $x : 3 = 8 : 6$ zu lösen.

So lösen wir die Verhältnisgleichung $\frac{x}{3} = \frac{8}{6}$!	
Dividiere beide Seiten durch den Faktor der Variablen!	$\frac{1}{3} \cdot x = \frac{8}{6} \quad \vert : \frac{1}{3}$ $x = \frac{3 \cdot 8}{6}$
Vereinfache die Lösung!	$x = \frac{24}{6}$ $x = 4$
Mache die Probe!	$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$

b) Es ist die Verhältnisgleichung $\frac{6}{x} = \frac{18}{3}$ bzw. $6 : x = 18 : 3$ zu lösen.

So lösen wir die Verhältnisgleichung $\frac{6}{x} = \frac{18}{3}$!	
Multipliziere beide Seiten mit x!	$\frac{6}{x} = \frac{18}{3} \quad \vert \cdot x$
Dividiere beide Seiten durch den Faktor der Variablen!	$6 = \frac{18}{3} \cdot x \quad \vert : \frac{18}{3}$ $1 = x$
Vertausche die Seiten!	$x = 1$
Mache die Probe!	$\frac{6}{1} = \frac{18}{3}$

Aufgaben c 89 bis 96

C

17 Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen (direkte Proportionalität)

Zwischen den beiden Größen Arbeitszeit t und Anzahl der Werkstücke n im Beispiel 16 bestand im Falle gleichbleibender Arbeitsweise der Maschinen Proportionalität. Aus der zugehörigen Tabelle konnten wir entnehmen, daß das Verhältnis zweier beliebiger einander entsprechender Werte von n und t stets gleich 30 war. Es galt also stets $n : t = 30$. Wenn wir dieses Verhältnis, also den Proportionalitätsfaktor, kennen, dann können wir für jede beliebig gegebene Arbeitszeit t die zugehörige Anzahl n der Werkstücke berechnen.

30 Wieviel Werkstücke werden in 5,5 h bearbeitet?
Ansatz: Die gesuchte Anzahl von Werkstücken soll n sein.
Dann gilt: $n : 5{,}5 = 30$.
Wir lösen diese Gleichung.

$$n : 5{,}5 = 30 \qquad \vert \cdot 5{,}5$$
$$n = 30 \cdot 5{,}5$$
$$n = 165$$

Antwort: In 5,5 h werden 165 Werkstücke bearbeitet.

Wenn wir schon vorher wissen, daß zwei Größen zueinander proportional sind, dann benötigen wir keine größere Tabelle, um den Proportionalitätsfaktor zu ermitteln. Dazu genügen dann schon zwei einander entsprechende Maßzahlen der beiden Größen.

31 Angenommen, es werden 210 Werkstücke in 7 h bearbeitet.
Wieviel Werkstücke werden in 5,5 h bearbeitet?
Aus der Erfahrung wissen wir: Arbeitszeit und Produktionsergebnis sind bei kontinuierlicher Arbeit zueinander proportional; denn bei doppelter (dreifacher) Arbeitszeit wird doppelt (dreifach) soviel geschafft.

Arbeitszeit t (in h)	5,5	7
Anzahl der bearbeiteten Werkstücke n	n	210

Wegen der Proportionalität ergibt sich die Verhältnisgleichung

$$\frac{n}{5,5} = \frac{210}{7} \quad \text{oder} \quad n : 5,5 = 210 : 7.$$

Die Zahl $\frac{210}{7}$ ist der Proportionalitätsfaktor.
Wir lösen die Gleichung.

$$\frac{n}{5,5} = \frac{210}{7} \qquad | \cdot 5,5$$

$$n = \frac{210}{7} \cdot 5,5$$

$$n = 165$$

Wir hätten aus der verkürzten Tabelle auch andere Verhältnisgleichungen aufstellen können, z. B.:

$$5,5 : n = 7 : 210; \quad 210 : 7 = n : 5,5; \quad n : 210 = 5,5 : 7.$$

Sie führen alle auf dieselbe Gleichung

$$7 \cdot n = 210 \cdot 5,5.$$

Daraus ergibt sich nach Division durch 7 die Gleichung

$$n = \frac{210}{7} \cdot 5,5.$$

32 Eine quaderförmige Platte aus Gußstahl von 45 mm Dicke hat eine Masse von 3,5 kg. Dabei ist die Masse der Platte zur Dicke proportional. Die Platte wird auf 40 mm Dicke abgehobelt. Wie groß ist dann ihre Masse?

Ansatz:

Dicke (in mm)	45	40
Masse (in kg)	3,5	x

Überschlag: Die Dicke wird etwa um $\frac{1}{10}$ von 45 mm verringert. Also nimmt auch die Masse um etwa $\frac{1}{10}$ von 3,500 kg ab

$$(3,5 - 0,35)\ \text{kg} = 3,15\ \text{kg}.$$

Verhältnisgleichung:

$$x : 40 = 3,5 : 4,5 \qquad | \cdot 40$$

$$x = \frac{3,5 \cdot 40}{45}$$

$$x = \frac{28}{9}$$

Antwortsatz: Die Platte wiegt nach dem Abhobeln 3,1 kg.

Aufgaben c 97 bis 116

C

18 Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen (umgekehrte Proportionalität)

Im Beispiel 22 wurden in der Tabelle die erforderlichen Zeiten zum Durchfahren einer Strecke von 60 km in Abhängigkeit von der gewählten Geschwindigkeit angegeben. Es bestand umgekehrte Proportionalität: $t \sim \frac{1}{v}$

Geschwindigkeit v (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$)	10	20	30	40	50	60
Zeit t (in h)	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

Der Proportionalitätsfaktor ist 60, also gilt:

$$t = 60 \cdot \frac{1}{v}.$$

Daraus folgt bei beiderseitiger Multiplikation mit v:

$$v \cdot t = 60,$$

d. h., das Produkt aus zwei einander zugeordneten Maßzahlen ist stets gleich dem Proportionalitätsfaktor 60.

Wir wollen nun die erforderliche Zeit t im Falle einer beliebigen anderen Geschwindigkeit berechnen.

Das Produkt aus der gegebenen Maßzahl der Geschwindigkeit und t muß wie bei den in der Tabelle im Beispiel 22 angegebenen Zahlen wieder 60 ergeben.

C

33 Welche Zeit benötigt ein Radfahrer für eine Strecke, der mit der Geschwindigkeit $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt?

Ansatz: $15 \cdot t = 60$

Wir lösen diese Gleichung. $15 \cdot t = 60 \quad |:15$

$$t = 4$$

Antwort: Der Radfahrer legt die Strecke von 60 km bei einer Geschwindigkeit von $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ in 4 h zurück.

Wenn wir schon vorher wissen, daß zwei Größen zueinander umgekehrt proportional sind, benötigen wir nur zwei zugeordnete Maßzahlen beider Größen. Diese beiden Maßzahlen reichen aus, um aus ihnen durch Multiplikation das einheitliche Produkt als Proportionalitätsfaktor zu ermitteln.

34 Angenommen, ein Radfahrer legt bei einer Geschwindigkeit von $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ die Entfernung zwischen zwei Städten in 5 h zurück. Wieviel Stunden benötigt ein anderer Radfahrer, der mit der Geschwindigkeit $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, für diese Strecke?

Aus der Erfahrung wissen wir: Geschwindigkeit und benötigte Zeit für eine bestimmte Strecke sind zueinander umgekehrt proportional; denn bei doppelter (dreifacher) Geschwindigkeit benötigt man nur die Hälfte (den dritten Teil) der Zeit.

Ansatz:

Geschwindigkeit v (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$)	12	20
Zeit t (in h)	5	t

Überschlag: Die Geschwindigkeit wird auf das etwa $1\frac{1}{2}$fache ($\frac{3}{2}$fache) erhöht. Also wird nur das etwa $\frac{2}{3}$fache der Zeit benötigt.

$$\frac{2}{3} \cdot 5 \approx 3$$

Lösung:

Wegen der Gleichheit der Produkte ergibt sich:

$$12 \cdot 5 = 20 \cdot t \qquad |:20$$

$$\frac{12 \cdot 5}{20} = t$$

$$t = 3$$

Antwortsatz: Der schnellere Radfahrer benötigt für diese Strecke nur 3 h.

Bemerkung: Wir haben in diesem Beispiel nicht ausgerechnet, wie groß die Entfernung ist. Das ist auch nicht erforderlich, wenn nicht danach gefragt wird.

Aufgaben c 115 bis 144

Aus der Geschichte der Zahlen und Rechenmethoden

Die ersten Zahlenschreibweisen und Rechenverfahren sind schon sehr alt. Wo immer die Menschen sich in Staaten zusammenschlossen, mußten sie zählen und rechnen lernen. Bei Ausgrabungen in Ägypten und in Mesopotamien, einem Gebiet, auf dem heute der Staat Irak liegt, fand man auf Papyrusrollen, Tontäfelchen und Inschriften an Wänden auch mathematische Aufzeichnungen. Diese waren in uns unbekannten Schriftzeichen verfaßt, die aber in mühevoller Arbeit entziffert werden konnten (Bild C 11). Auf diese Weise wurde bekannt, daß man schon vor ungefähr 4000 Jahren sehr gut mit Brüchen rechnen konnte. Das alte Griechenland, das im 4. Jahrhundert v. u. Z. die führende Stellung im Mittelmeergebiet einnahm, übernahm diese sehr frühen arithmetischen Kenntnisse und entwickelte sie bedeutend weiter. Aber bereits unter den Römern, die die Griechen besiegten und unterwarfen, trat ein Verfall ein. Im Mittelalter dann wurden besonders die Naturwissenschaften von der herrschenden christlichen Kirche mißachtet. Dagegen war der Stand der Naturwissenschaften

Bild C 11: Ausschnitt aus einer ägyptischen Lederrolle mit Bruchrechnung. Ungefähr 1700 v. u. Z. angefertigt.

und der Mathematik um diese Zeit in arabischen und asiatischen Ländern sehr viel höher als in Europa. Erst im 13. und 14. Jahrhundert begann auch in Europa die Mathematik wieder aufzublühen.

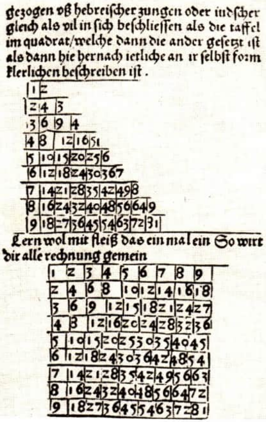
Durch die Ausdehnung des Handels und durch die Kreuzzüge lernte man die Schätze der arabischen Wissenschaft kennen. Die europäischen Völker übernahmen z. B. von den Arabern die Zeichen für die Ziffern (Bild C 12), die diese ihrerseits bei den Indern kennengelernt hatten.

Bild C 12: Das früheste Auftreten der arabischen Ziffern in Europa. Aus einem Manuskript, das im Jahre 976 in Spanien geschrieben wurde. Ein großer Teil Spaniens war damals von den Arabern besetzt.

55	LV	90	XC	4000	$IIII^{M}$
56	LVI	91	XCI	5000	V^{M}
57	LVII	92	XCII	6000	VI^{M}
58	LVIII	93	XCIII	7000	VII^{M}
59	LIX	94	XCIIII	8000	$VIII^{M}$
60	LX	95	XCV	9000	IX^{M}
61	LXI	96	XCVI	10000	X^{M}
62	LXII	97	XCVII	20000	XX^{M}
63	LXIII	98	XCVIII	30000	XXX^{M}
64	LXIIII	99	XCIX	1400	M CCCC
65	LXV	100	C		M $IIII^{C}$
65	LXVI	101	CI	1500	M V^{C}
67	LXVII	102	CII		M D
68	LXVIII	103	CIII	1514	M V^{C} XIIII
69	LXIX	104	CIIII	1600	M DC
70	LXX	105	CV		M VI^{C}
71	LXXI	106	CVI	1612	M VI^{C} XII
72	LXXII	107	CVII	1700	M DCC
73	LXXIII	108	CVIII		M VII^{C}
74	LXXIIII	109	CIX	1715	M VII^{C} XV
75	LXXV	110	CX	1800	M DCCC
75	LXXVI	111	CXI		M $VIII^{C}$
77	LXXVII	112	CXII	1820	M $VIII^{C}$ XX
78	LXXVIII	112	CXIII rc.	1900	M $VIIII^{C}$
79	LXXIX	200	CC		
80	LXXX	300	CCC		
81	LXXXI	400	CCCC		
82	LXXXII	500	V^{C}		
83	LXXXIII	600	VI^{C}		
84	LXXXIIII	700	VII^{C}		
85	LXXXV	800	$VIII^{C}$		
85	LXXXVI	900	IX^{C}		
87	LXXXVII	1000	M		
83	LXXXVIII	2000	II^{M}		
89	LXXXXI	3000	III^{M}		

Dem nach mag sin die baide zale durch ainander lernen erkennen vnd rechen.

Bild C 13: Eine Tafel zum Erlernen der Zahlenschreibweise mit den arabischen statt mit den römischen Zahlzeichen. Aus einem deutschen Rechenbuch vom Jahre 1524.



gezogen vß hebreischer zungen oder indischer gleich als vil in sich beschliessen als die taffel im quadrat/welche dann die ander gesetzt ist als dann hie hernach ietliche an ir selbst form klerlichen beschreiben ist.

1	2								
2	4	3							
3	6	9	4						
4	8	12	16	5					
5	10	15	20	25	6				
6	12	18	24	30	36	7			
7	14	21	28	35	42	49	8		
8	16	24	32	40	48	56	64	9	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Lern wol mit fleiß das ein mal ein So wirt dir alle rechnung gemein

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Bild C 14: Das Einmaleins in einem in Deutschland gedruckten Rechenbuch vom Jahre 1500. Achte auf das Sprüchlein „Lern wol mit fleiß das ein mal ein, So wirt dir alle rechnung gemein" (d. i. soviel wie leicht, zugänglich).

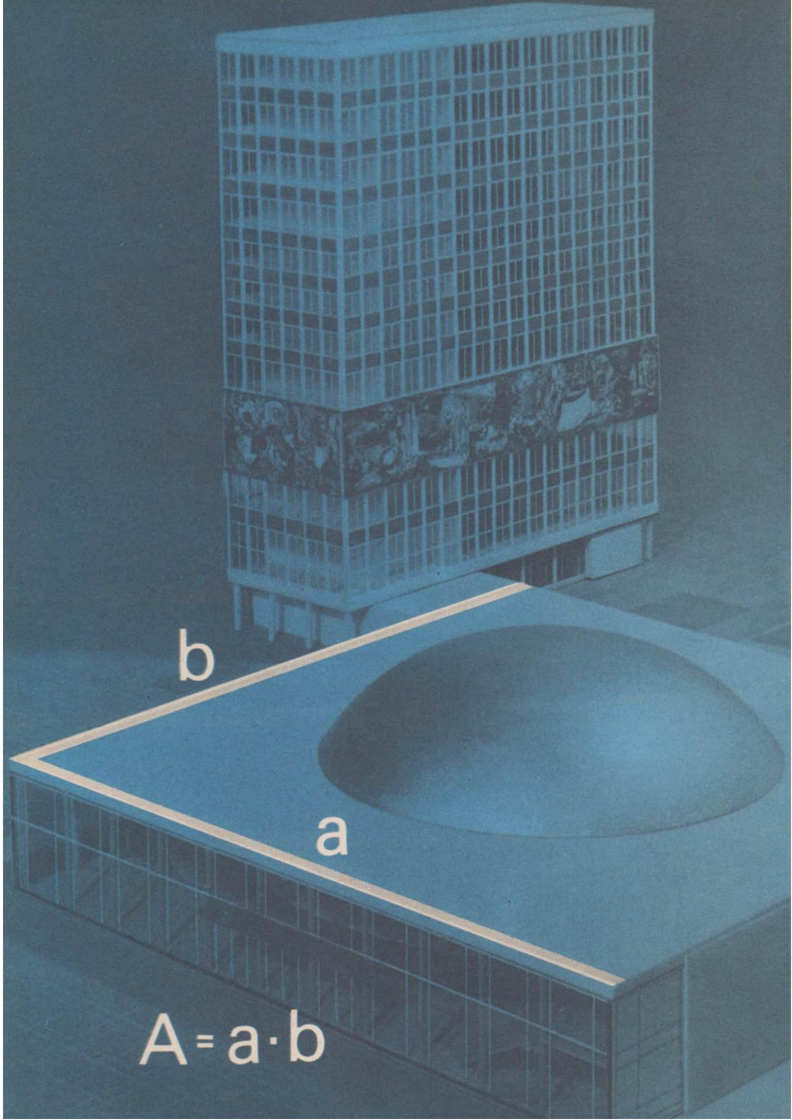
Wir nennen ja, wie Ihr wißt, unsere heutigen Ziffern arabische Ziffern. Nach und nach verdrängten die arabischen Ziffern die zum Rechnen sehr ungeeigneten römischen Zahlzeichen (Bild C 13).

Aber auch die teilweise überlieferten Schriften der Mathematiker des alten Griechenland wurden von den Wissenschaftlern wiederum studiert. Es war die Zeit der „Renaissance", die Zeit der „Wiedergeburt" antiker Errungenschaften.
Neue Anforderungen wurden auch an die mathematischen Fähigkeiten der Menschen gestellt. Viele mußten die damals für außerordentlich schwierig gehaltene Kunst des Rechnens erlernen. Es galt, die vielen verschiedenen Währungen der Länder und Städte, die unterschiedlichen Maßeinheiten für Gewicht, Weglängen, Flächeninhalte, Rauminhalte usw. ineinander umzurechnen, Zinsen mußten berechnet werden und vieles andere mehr. In dieser Zeit, also im 15. und 16. Jahrhundert, hat man Verfahren für verschiedene Rechenoperationen entwickelt, von denen Ihr einige schon kennt.

Bild C 15: Das Erlernen des Rechnens auf dem Rechentisch um **1514**.

Die Grundlage war natürlich auch damals schon das Einmaleins (Bild C 14). Gerechnet wurde anfangs hauptsächlich auf dem Rechenbrett oder Rechentisch (in lateinischer Sprache hieß er abacus), wobei man sogenannte Rechenpfennige auf verschiedenen Linien auflegte, die die verschiedenen Einheiten von Maß und Gewicht bezeichneten (Denkt an Eure Kinderrechenmaschine!) (Bild C 15). Diese Rechenmethode nannte man daher „Rechnen auf den Linien". Das schriftliche Rechnen mit den arabischen Ziffern nannte man dagegen „Rechnen auf (d. i. mit) den Federn" (Gänsekiel!). Die Regeln für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen, wie Ihr sie heute erlernt, wurden ebenfalls in dieser Zeit ausgearbeitet. Schließlich entwickelte man im 16. Jahrhundert auch die Darstellung der gebrochenen Zahlen mit Hilfe von Dezimalbrüchen. Bereits damals wurden auch die Zeichen „+" und „—" für die Addition bzw. Subtraktion eingeführt.

C


b
a
A = a · b

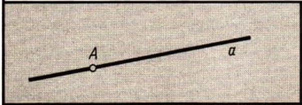
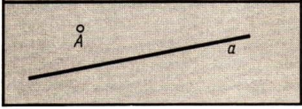
D. Planimetrie

D

Wiederholung

1 Ebene Figuren

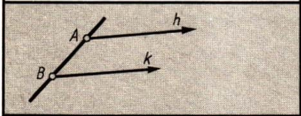
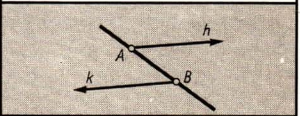
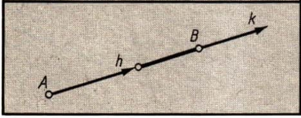
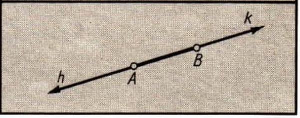
Die Planimetrie ist ein Teilgebiet der Geometrie. In der Planimetrie werden Punkte, Geraden und andere Figuren betrachtet, die in ein und derselben Ebene liegen (Bild D 1).

Beziehungen für Punkte und Geraden	
	*A liegt auf a.* *a geht durch A.*
	*A liegt nicht auf a.* *a geht nicht durch A.*

D 1

Durch zwei **Punkte** A und B geht genau eine **Gerade**. Wir bezeichnen sie als Gerade AB. Zwei Geraden sind entweder **zueinander parallel** oder sie **schneiden einander** in einem Punkt.
Zu jeder Geraden a gibt es durch jeden Punkt A außerhalb dieser Geraden genau eine Gerade b, die zu a parallel ist.
Von drei Punkten einer Geraden **liegt** genau einer **zwischen** den beiden anderen.
Jeder Punkt A einer Geraden a zerlegt diese Gerade in zwei **Strahlen**. Strahlen, die auf zueinander parallelen Geraden liegen, nennen wir auch zueinander parallel. Bei zueinander parallelen Strahlen unterscheiden wir Strahlen mit **gleichem Richtungssinn** und Strahlen mit **entgegengesetztem Richtungssinn** (Bild D 2).

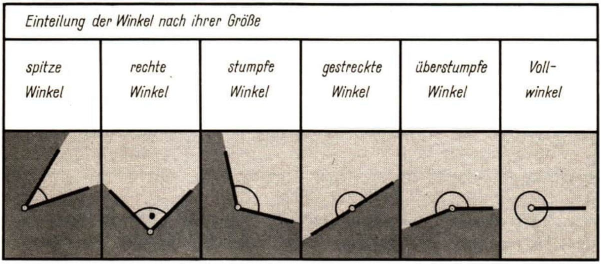
D 2

Gleich gerichtete Strahlen	*Entgegengesetzt gerichtete Strahlen*
	
	

Zwei Punkte A und B legen auf der Geraden AB die **Strecke** $\overline{AB}$ fest. Ihr gehören außer den Punkten A und B alle und nur die Punkte an, die auf der Geraden AB zwischen den Punkten A und B liegen.

Eine Strecke $\overline{AB}$ kann man auch mit $\overline{BA}$ bezeichnen. Wenn man aber festlegt, daß einer der beiden Punkte A bzw. B vor dem anderen kommt, so heißt die Strecke **orientiert**. Wir haben dann zwischen den orientierten Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overleftarrow{AB}$ zu unterscheiden.

Ein Paar von Strahlen h und k, die denselben Anfangspunkt A haben, nennen wir einen **Winkel**. Die Strahlen h und k heißen die **Schenkel**, der Punkt A heißt der **Scheitel** des Winkels, den wir mit Winkel (h, k) oder $\sphericalangle\ (h, k)$ bezeichnen. Einen Winkel mit dem Scheitel A und den Punkten B bzw. C auf seinen Schenkeln h bzw. k bezeichnen wir auch mit Winkel BAC bzw. $\sphericalangle\ BAC$. Liegen die Schenkel eines Winkels auf ein und derselben Geraden und fallen sie nicht zusammen, so sprechen wir von einem **gestreckten Winkel**.
Jedem Winkel können zwei Ebenenteile zugeordnet werden (Bild D 3). Manchmal ist es zweckmäßig, unter einem Winkel (h, k) das Strahlenpaar h und k einschließlich der Punkte eines der beiden Ebenenteile zu verstehen. Dann zeichnen wir in den betreffenden Ebenenteil einen Kreisbogen ein.



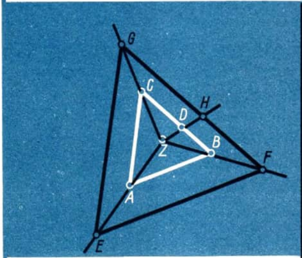
D 3

Einen Winkel (h, k) kann man auch mit (k, h) bezeichnen. Wenn man aber festlegt, daß einer der beiden Schenkel h bzw. k der erste sein soll, so heißt der Winkel **orientiert**. Wir haben dann zwischen den orientierten Winkeln $\overset{\curvearrowright}{(h, k)}$ und $\overset{\curvearrowleft}{(h, k)}$ zu unterscheiden. Die Orientierung eines Winkels kann man durch einen Kreisbogen mit Pfeilspitze kennzeichnen.
Erfolgt die Orientierung eines Winkels so, daß der Kreisbogen mit Pfeilspitze den entgegengesetzten Drehsinn eines Uhrzeigers angibt, so heißt der Winkel **positiv orientiert**, andernfalls **negativ orientiert**. Zwei Winkel heißen **gleich orientiert**, wenn sie entweder beide positiv orientiert oder beide negativ orientiert sind.

Aufgaben d 1 bis 14

Wir zeichnen von einem Punkt Z aus Strahlen, die durch die Punkte eines Dreiecks ABC gehen. Auf diesen Strahlen tragen wir von Z aus jeweils die Strecken mit der doppelten Länge der Strecken $\overline{ZA}$, $\overline{ZB}$, $\overline{ZC}$, $\overline{ZD}$ usw. ab. Wir erhalten die Punkte E, F, G, H usw. (Bild D 4). Auf diese Weise wird jedem Punkt des Dreiecks ABC ein Punkt der Ebene zugeordnet. Einige Paare der einander zugeordneten Punkte sind im Bild D 4 angegeben.

Eineindeutige Abbildungen

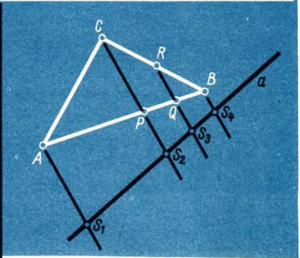


Originalpunkte:
A, B, C, D

Bildpunkte:
E, F, G, H

D 4

Eindeutige Abbildungen



Originalpunkte:
A, P, Q, B, R, C

Bildpunkte:
$S_1, S_2, S_3, S_4, S_3, S_2$

D 5

In unserem Beispiel wird jedem Punkt einer geometrischen Figur ein Punkt einer anderen geometrischen Figur zugeordnet. Wir sprechen von einer **Abbildung**.

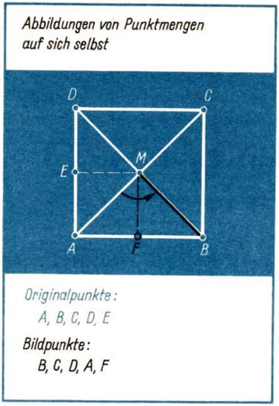
Bei Abbildungen unterscheiden wir **Originale** und **Bilder**. In unserem Beispiel ist jedem Originalpunkt P **genau ein** Punkt P' als Bildpunkt zugeordnet. Umgekehrt gehört zu jedem Bildpunkt P' genau ein Originalpunkt P. Eine solche Abbildung heißt **umkehrbar eindeutig** oder **eineindeutig**.

Wir zeichnen zueinander parallele Strahlen, die von den Punkten eines Dreiecks ABC ausgehen und die eine Gerade a schneiden. Jedem Punkt des Dreiecks ordnen wir den Schnittpunkt des von ihm ausgehenden Strahls mit der Geraden a zu. Einige Paare der auf diese Weise einander zugeordneten Punkte sind im Bild D 5 angegeben.

In diesem Beispiel ist zwar jedem Originalpunkt wiederum genau *ein* Punkt als Bildpunkt zugeordnet. Umgekehrt gibt es jedoch Bildpunkte, die zu *mehr als einem* Originalpunkt gehören. Eine solche Abbildung heißt **eindeutig**.

Wir zeichnen ein Quadrat *ABCD* und bestimmen das Bild des Quadrates bei einer Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen mit einem Drehwinkel von 90°. Durch die angegebene Abbildung ist jedem Punkt des Quadrates *ABCD* genau ein Punkt *desselben* Quadrates zugeordnet. Einige Paare der einander zugeordneten Punkte sind im Bild D 6 angegeben.

In diesem Beispiel ist durch die Abbildung jedem Punkt der gegebenen geometrischen Figur genau ein Punkt *derselben* geometrischen Figur als Bildpunkt zugeordnet. Wir sagen, daß die gegebene geometrische Figur **auf sich selbst** abgebildet wird.



Aufgaben d 15 und 16

D 6

3 Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen

Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen sind Beispiele für eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich selbst.

(1) Konstruiere das Bild eines Dreiecks *ABC* bei einer selbstgewählten Verschiebung!
Welche Eigenschaft besitzen die Geraden, die einander zugeordnete Original- und Bildpunkte verbinden?
Nenne weitere Eigenschaften von Verschiebungen!

1 **DEFINITION: Unter *Verschiebungen* versteht man eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich mit folgenden Eigenschaften:**

(1) Die Geraden AA' und BB', die die Originalpunkte A bzw. B mit den ihnen zugeordneten Bildpunkten A' bzw. B' verbinden, sind zueinander parallel.

(2) Die Strahlen AA' und BB' sind gleich orientiert.

(3) Die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ sind gleich lang.

(2) Was verstehst du unter der zu einer Verschiebung entgegengesetzten Verschiebung?
Begründe, daß es zu jeder Verschiebung eine entgegengesetzte gibt!

(3) Konstruiere das Bild eines Dreiecks bei einer selbstgewählten Drehung!
Nenne Eigenschaften von Drehungen!

DEFINITION: Unter *Drehungen* um einen Punkt M versteht man eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich mit folgenden Eigenschaften:

(1) Das Bild A' eines Punktes A (A verschieden von M) liegt auf dem Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}$.

(2) Die Winkel AMA' und BMB', die durch die Punkte A bzw. B und ihre Bilder A' bzw. B' bestimmt werden, sind gleich orientiert.

(3) Die Winkel AMA' und BMB' sind gleich groß.

(4) Der Punkt M wird auf sich selbst abgebildet.

(4) Was verstehst du unter der zu einer Drehung entgegengesetzten Drehung? Begründe, daß es zu jeder Drehung eine entgegengesetzte gibt!

(5) Konstruiere das Bild eines Dreiecks ABC bei einer Spiegelung an einer Geraden!
Nenne Eigenschaften von Spiegelungen!

DEFINITION: Unter *Spiegelungen* an Geraden a versteht man eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich mit folgenden Eigenschaften:

(1) Jeder Punkt A, der nicht der Geraden a angehört, liegt mit seinem Bildpunkt A' auf verschiedenen Seiten der Geraden a.

(2) Jede Gerade AA' schneidet die Gerade a in einem Punkt L unter einem rechten Winkel.

(3) Die Strecken $\overline{LA}$ und $\overline{LA'}$ sind gleich lang.

(4) Jeder Punkt der Geraden a wird auf sich selbst abgebildet.

(6) Welche Eigenschaften besitzen diejenigen Geraden bei der Spiegelung an einer Geraden a, die die Gerade a unter einem rechten Winkel schneiden?

Aufgaben d 17 und 18

4 Gemeinsame Eigenschaften von Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen

D

Es gibt Eigenschaften, die nur für Verschiebungen oder nur für Drehungen oder nur für Spiegelungen gelten. Es gibt aber auch Eigenschaften, die für alle genannten Abbildungen gemeinsam gelten.

(7) Zeichne!
a) eine Strecke; b) ein Dreieck; c) zwei zueinander parallele Geraden
Konstruiere jeweils das Bild bei einer Verschiebung, bei einer Drehung, bei einer Spiegelung!

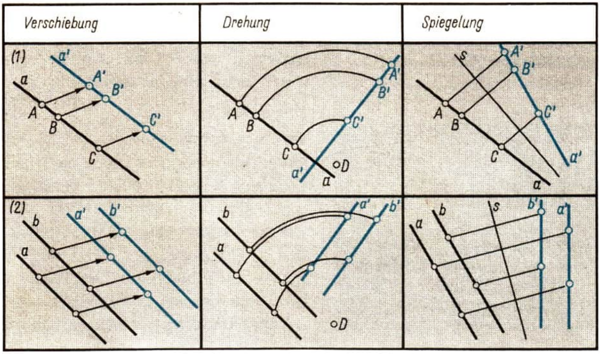
Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen haben u. a. folgende gemeinsame Eigenschaften:

(1) Das Bild einer Geraden ist stets wieder eine Gerade; Bild D 7 (1).

(2) Liegt ein Punkt A auf einer Geraden a, so liegt auch der Bildpunkt A' auf der Bildgeraden a'; Bild D 7 (1).

(3) Liegt ein Punkt B zwischen den Punkten A und C, so liegt auch der Bildpunkt B' zwischen den Bildpunkten A' und C'; Bild D 7 (1).

(4) Sind zwei Geraden zueinander parallel, so sind auch ihre Bilder zueinander parallel; Bild D 7 (2).



D 7

(8) Erläutere an Hand einer Zeichnung, daß die Nacheinanderausführung
a) zweier Verschiebungen durch eine *einzige* Verschiebung,
b) zweier Drehungen um ein und denselben Punkt M durch eine *einzige* Drehung um M
angegeben werden kann!

(9) Untersuche die Nacheinanderausführung zweier Spiegelungen
a) an ein und derselben Geraden,
b) an zwei Geraden, die einander schneiden,
c) an zwei Geraden, die zueinander parallel sind!

D

Bewegung und Kongruenz

5 Begriff der Bewegung

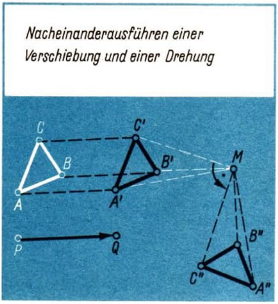
Je zwei Verschiebungen, zwei Drehungen bzw. zwei Spiegelungen können nacheinander ausgeführt werden. Man kann aber auch Verschiebungen und Drehungen oder Verschiebungen und Spiegelungen oder Drehungen und Spiegelungen in beliebiger Reihenfolge nacheinander ausführen.

1 Das Dreieck $A'B'C'$ ist das Bild des Dreiecks ABC bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$, das Dreieck $A''B''C''$ ist das Bild des Dreiecks $A'B'C'$ bei der Drehung um den Punkt M mit einem positiv orientierten rechten Winkel als Drehwinkel (Bild D 8).

Die Nacheinanderausführung der Verschiebung und der Drehung ergibt eine Abbildung, bei der das Dreieck $A''B''C''$ das Bild des Dreiecks ABC ist.

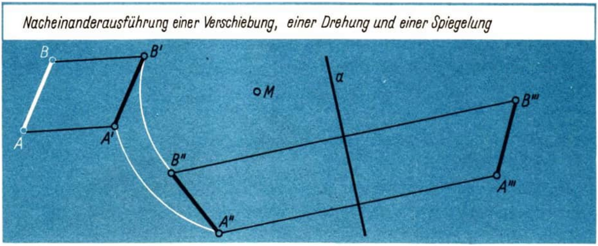
2 Wir ermitteln die Bilder zweier beliebiger Punkte A und B, die voneinander verschieden sind, indem wir nacheinander eine Verschiebung, eine Drehung und eine Spiegelung ausführen. Auf diese Weise erhalten wir die Bildpunkte A''' und B''', die ebenfalls voneinander verschieden sind (Bild D 9).

D 8



Wir stellen fest:

Bei jeder Nacheinanderausführung von Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen wird jedem Punkt P der Ebene genau ein Bildpunkt P' zugeordnet. Umgekehrt gehört zu jedem Bildpunkt P' genau ein Originalpunkt P. Führt man die genannten Abbildungen nacheinander aus, so wird also die Ebene ebenfalls umkehrbar eindeutig auf sich abgebildet.



D 9

4 **DEFINITION: Unter *Bewegungen* versteht man:**

(1) *Verschiebungen,*

(2) *Drehungen,*

(3) *Spiegelungen* und die

(4) *Abbildungen,* die man erhält, wenn man endlich viele Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen nacheinander ausführt.

Aufgaben d 19 bis 26

6 Eigenschaften von Bewegungen

(10) Wiederhole die in der Lerneinheit 4 genannten *gemeinsamen* Eigenschaften von Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen!
Was vermutest du?

5 **SATZ: Bei jeder Bewegung gilt:**

(1) Das Bild einer Geraden ist stets wieder eine Gerade.

(2) Liegt ein Punkt A auf einer Geraden a, so liegt auch der Bildpunkt A' auf der Bildgeraden a'.

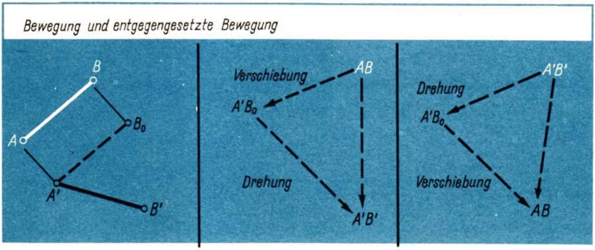
(3) Liegt ein Punkt B zwischen den Punkten A und C, so liegt auch der Bildpunkt B' zwischen den Bildpunkten A' und C'.

(4) Sind zwei Geraden zueinander parallel, so sind auch ihre Bilder zueinander parallel.

(11) Begründe die in Satz 5 genannten Eigenschaften, indem du die in Definition 4 aufgezählten Fälle untersuchst!

6 **SATZ: Zu jeder Bewegung gibt es eine entgegengesetzte Bewegung.**

3 Wir zeichnen das Bild $\overline{A'B'}$ der Strecke $\overline{AB}$ bei einer Bewegung, die sich aus einer Verschiebung und einer Drehung zusammensetzt. Umgekehrt ist dann die Strecke $\overline{AB}$ das Bild der Strecke $\overline{A'B'}$ bei der Nacheinanderausführung der entgegengesetzten Drehung und der entgegengesetzten Verschiebung (Bild D 10). Diese Abbildung ist nach Definition 4 ebenfalls eine Bewegung.



D 10

(12) Vergleiche bei einer Bewegung

a) die Länge einer Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge ihrer Bildstrecke $\overline{A'B'}$,

b) die Größe eines Winkels mit der Größe seines Bildes!

Was stellst du fest?

Aufgaben d 27 und 28

7 Begriff der Kongruenz

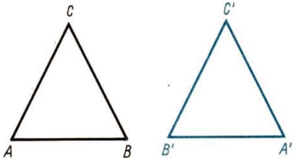
Bei Bewegungen ist das Bild einer Strecke (eines Winkels, eines Dreiecks usw.) wieder eine Strecke (ein Winkel, ein Dreieck usw.).

13 Zeichne ein Quadrat *ABCD* und ein Rechteck *EFGH*!
Ermittle ihre Bilder bei der Bewegung, die sich aus der Spiegelung an der Geraden *AB* und aus der Verschiebung $\overrightarrow{EF}$ zusammensetzt!
Vergleiche jeweils die Originalfigur mit ihrem Bild!

7 **DEFINITION: Geometrische Figuren heißen *kongruent* (deckungsgleich) genau dann, wenn es eine Bewegung gibt, die eine Figur auf die andere abbildet.**

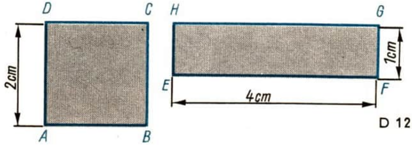
4 Sind zum Beispiel zwei Dreiecke *ABC* und *A'B'C'* kongruent, so schreiben wir: „$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$" (lies: „Dreieck *ABC* kongruent Dreieck *A'B'C'*").

a) Bild D 11 zeigt zwei Dreiecke *ABC* und *A'B'C'*. Sie sind kongruent, denn es gibt eine Bewegung, bei der das Dreieck *A'B'C'* das Bild des Dreiecks *ABC* ist. Diese Bewegung setzt sich aus einer Verschiebung und einer Spiegelung zusammen.



D 11

b) Bild D 12 zeigt das Quadrat *ABCD* und das Rechteck *EFGH*. Beide Figuren haben gleichen Flächeninhalt. Sie sind jedoch nicht kongruent, denn es gibt keine Bewegung, durch die das Quadrat *ABCD* auf das Rechteck *EFGH* abgebildet wird.



D 12

8 Strecken- und Winkelkongruenz

Sind zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ kongruent, so schreiben wir: „$\overline{AB} \cong \overline{CD}$".

Kongruente Strecken sind gleich lang.
Umgekehrt: Gleich lange Strecken sind kongruent.
Mit anderen Worten: Sind die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ nicht gleich lang, dann sind sie auch nicht kongruent.

Entweder ist dann $\overline{AB}$ kürzer oder länger als $\overline{CD}$. Wir schreiben dafür:
„$\overline{AB} < \overline{CD}$" (lies: „Die Strecke $\overline{AB}$ ist kleiner als die Strecke $\overline{CD}$")
oder:
„$\overline{AB} > \overline{CD}$" (lies: „Die Strecke $\overline{AB}$ ist größer als die Strecke $\overline{CD}$").

8 **SATZ: Für je zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gilt entweder**

$\overline{AB} < \overline{CD}$ oder
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ oder
$\overline{AB} > \overline{CD}$.

Sind zwei Winkel (h, k) und (l, m) kongruent, so schreiben wir:
„$\sphericalangle (h, k) \cong \sphericalangle (l, m)$" (lies: „Winkel (h, k) kongruent Winkel (l, m)").
Kongruente Winkel sind gleich groß.
Umgekehrt: Gleich große Winkel sind kongruent.
Mit anderen Worten: Sind die Winkel (h, k) und (l, m) nicht gleich groß, so sind sie auch nicht kongruent.
Entweder ist dann $\sphericalangle (h, k)$ kleiner oder größer als $\sphericalangle (l, m)$.
Wir schreiben dafür:
„$\sphericalangle (h, k) < \sphericalangle (l, m)$" (lies: „Der Winkel (h, k) ist kleiner als der Winkel (l, m)")
oder:
„$\sphericalangle (h, k) > \sphericalangle (l, m$") (lies: „Der Winkel (h, k) ist größer als der Winkel (l, m)").

9 **SATZ: Für je zwei Winkel (h, k) und (l, m) gilt entweder**

$\sphericalangle (h, k) < \sphericalangle (l, m)$ oder
$\sphericalangle (h, k) \cong \sphericalangle (l, m)$ oder
$\sphericalangle (h, k) > \sphericalangle (l, m)$.

Wir haben die Kongruenz nur für geometrische Figuren in ein und derselben Ebene erklärt. Den Begriff der Kongruenz kann man auch für geometrische Figuren im Raum erklären, wenn man von räumlichen Bewegungen ausgeht.

Aufgaben d 29 bis 34

D

Zusammenfassung:
Ebene **Bewegungen** sind eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich mit bestimmten Eigenschaften.
Bewegungen können nacheinander ausgeführt werden.
Zu jeder Bewegung gibt es eine entgegengesetzte Bewegung.
Wenn eine Figur durch eine Bewegung auf eine andere Figur abgebildet wird, so sind die beiden Figuren **kongruent**.
Umgekehrt gibt es zu zwei kongruenten Figuren stets eine Bewegung, bei der die eine das Bild der anderen ist.

9 Scheitelwinkel und Nebenwinkel

(14) Zeichne einen spitzen (rechten, stumpfen) Winkel ABC und bestimme sein Bild bei einer Drehung um B mit einem gestreckten Winkel als Drehwinkel! Erläutere dein Vorgehen!

Zwei Winkel mit gemeinsamem Scheitel, deren Schenkel jeweils eine Gerade bilden, heißen *Scheitelwinkel*. Jeder der beiden Winkel heißt der Scheitelwinkel des anderen.

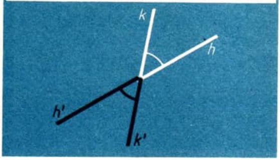
Allgemein gilt:

Sind zwei Winkel Scheitelwinkel, so ist der eine das Bild des anderen bei einer Drehung um den gemeinsamen Scheitel mit einem gestreckten Winkel als Drehwinkel (Bild D 13).

10 **SATZ: Scheitelwinkel sind kongruent.**

(15) Zeichne zwei Winkel, die einen Schenkel gemeinsam haben und deren andere Schenkel eine Gerade bilden!

Scheitelwinkel



D 13

Zwei Winkel, die einen Schenkel gemeinsam haben und deren andere Schenkel eine Gerade bilden, heißen *Nebenwinkel*. Jeder der beiden Winkel heißt ein Nebenwinkel des anderen.

D

11 **SATZ: Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.**

(16) a) Zeichne zwei Geraden, die einander schneiden! Stelle alle Winkelpaare zusammen, die Scheitelwinkel bzw. Nebenwinkel sind!

b) Zeichne einen Nebenwinkel je eines spitzen, stumpfen bzw. rechten Winkels! Vergleiche jeweils die beiden Nebenwinkel!

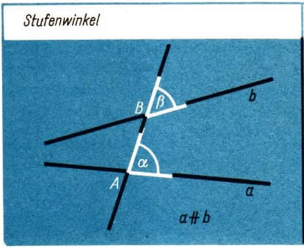
Ein Winkel ist ein **rechter** Winkel genau dann, wenn er einem seiner Nebenwinkel kongruent ist.

Aufgaben d 35 bis 46

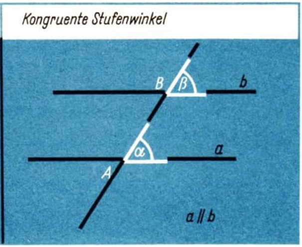
10 Stufenwinkel

Schneiden zwei Geraden einander, so entstehen Winkelpaare, die den Scheitel gemeinsam haben.
Schneidet eine Gerade zwei andere Geraden, so entstehen außerdem Winkelpaare, deren Winkel voneinander verschiedene Scheitel besitzen. Dabei darf die schneidende Gerade nicht durch den Schnittpunkt der geschnittenen Geraden gehen.

5 Die Schenkel der Winkel α und β, die auf der schneidenden Geraden AB liegen, sind gleich orientiert. Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf derselben Seite der Geraden AB (Bild D 14).



D 14



D 15

(17) Stelle alle Winkelpaare zusammen, die den im Beispiel 5 genannten Bedingungen genügen! (Bezeichne dazu die Winkel in geeigneter Weise!)

Zwei Winkel an geschnittenen Geraden heißen *Stufenwinkel*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzen:
(1) Sie haben verschiedene Scheitel.
(2) Die Schenkel auf der schneidenden Geraden sind gleich orientiert.
(3) Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf derselben Seite der schneidenden Geraden.

(18) Zeichne zwei zueinander parallele Geraden a und b, die von einer dritten Geraden c geschnitten werden!
Vergleiche jeweils zwei Stufenwinkel! Was vermutest du?

12 **SATZ: Sind zwei Winkel Stufenwinkel und**
sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel,
so sind die beiden Winkel kongruent.

In dem Satz 12 wird **vorausgesetzt**, daß zwei Winkel Stufenwinkel und die geschnittenen Geraden zueinander parallel sind. Unter diesen Voraussetzungen wird **behauptet**, daß die beiden Winkel kongruent sind. Wird eine Behauptung aufgestellt, so muß sie auch **bewiesen** werden. Zum **Beweis** werden bereits bekannte Eigenschaften oder Sätze bzw. Definitionen verwendet.

Beweis des Satzes 12: α und β seien zwei beliebige Stufenwinkel mit den Scheiteln A und B, die geschnittenen Geraden a und b zueinander parallel (Bild D 15).

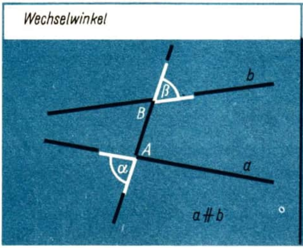
Bei der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ gilt:

(1) Die Gerade AB wird auf sich selbst abgebildet.
(2) Die Gerade b ist das Bild der Geraden a.
(3) Der Scheitel B ist das Bild des Scheitels A.
(4) Die Schenkel des Winkels β sind die Bilder der Schenkel des Winkels α.

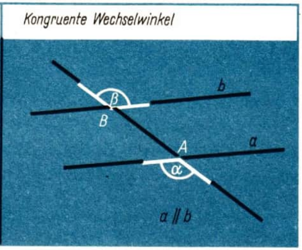
Der Winkel β ist also das Bild des Winkels α. Also gilt: $\alpha \cong \beta$, w. z. b. w.

11 Wechselwinkel

6 Die Schenkel der Winkel α und β, die auf der schneidenden Geraden AB liegen, sind entgegengesetzt orientiert. Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden AB (Bild D 16).



D 16



D 17

D

(19) Stelle alle Winkelpaare zusammen, die den im Beispiel 6 genannten Bedingungen genügen!

Zwei Winkel an geschnittenen Geraden heißen *Wechselwinkel*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzen:

(1) Sie haben verschiedene Scheitel.
(2) Die Schenkel auf der schneidenden Geraden sind entgegengesetzt orientiert.
(3) Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden.

13 **SATZ: Sind zwei Winkel Wechselwinkel und sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel, so sind die beiden Winkel kongruent.**

Beweis: α und β seien zwei beliebige Wechselwinkel mit den Scheiteln A und B. Die geschnittenen Geraden a und b seien zueinander parallel (Bild D 17). Dann ist β das Bild von α bei einer Bewegung, die sich

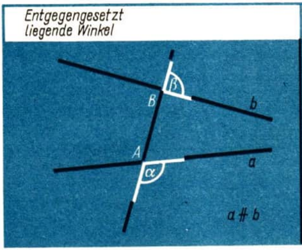
(1) aus der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ und

(2) aus einer Drehung um B mit einem gestreckten Winkel als Drehwinkel zusammensetzt.

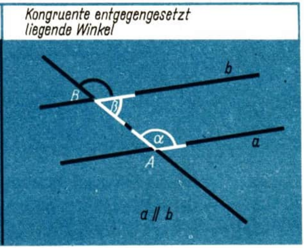
Also gilt: $\alpha \cong \beta$, w. z. b. w.

12 Entgegengesetzt liegende Winkel

Die Schenkel der Winkel α und β, die auf der schneidenden Geraden AB liegen, sind entgegengesetzt orientiert. Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf derselben Seite der Geraden AB (Bild D 18).



D 18



D 19

Zwei Winkel an geschnittenen Geraden heißen *entgegengesetzt liegende Winkel*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzen:

(1) Sie haben verschiedene Scheitel.

(2) Die Schenkel auf der schneidenden Geraden sind entgegengesetzt orientiert.

(3) Die Schenkel auf den geschnittenen Geraden liegen auf derselben Seite der schneidenden Geraden.

14 **SATZ: Sind zwei Winkel entgegengesetzt liegende Winkel und sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel, so betragen die beiden Winkel zusammen 180°.**

Beweis: α und β seien zwei beliebige entgegengesetzt liegende Winkel mit den Scheiteln A und B. Die geschnittenen Geraden a und b seien zueinander parallel (Bild D 19).

Bei der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ ist der Winkel γ das Bild des Winkels α. Der Winkel γ ist Nebenwinkel des Winkels β. Die Summe der Winkel γ und β beträgt 180°. Da γ und α kongruent und damit gleich groß sind, betragen auch die Winkel α und β zusammen 180°, w. z. b. w.

Aufgaben d 47 bis 50

13 Umkehrungen

In dem Satz

Wenn α ein rechter Winkel ist, dann ist α einem seiner Nebenwinkel kongruent

wird *vorausgesetzt*, daß α ein rechter Winkel ist, und *behauptet*, daß α einem seiner Nebenwinkel kongruent ist.

Wir *vertauschen* Voraussetzung und Behauptung und erhalten die

Umkehrung des Satzes:

Wenn α einem seiner Nebenwinkel kongruent ist, dann ist α ein rechter Winkel.

Wir können uns den Zusammenhang zwischen einem Satz und der Umkehrung des Satzes wie folgt veranschaulichen:

	Voraussetzung	*Behauptung*
SATZ	α ist ein rechter Winkel.	α ist einem seiner Nebenwinkel kongruent.
UMKEHRUNG	α ist einem seiner Nebenwinkel kongruent.	α ist ein rechter Winkel.

Der Satz 11 in der Lerneinheit 9 lautet:

Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.

Wir können ihn auch so formulieren:

Wenn α und β Nebenwinkel sind, dann beträgt ihre Summe 180°.

Die **Umkehrung dieses Satzes** lautet:

Wenn die Summe der Winkel α und β 180° beträgt, dann sind α und β Nebenwinkel.

	Voraussetzung	*Behauptung*
SATZ	α und β sind Nebenwinkel.	$\alpha + \beta = 180°$
UMKEHRUNG	$\alpha + \beta = 180°$	α und β sind Nebenwinkel.

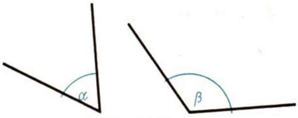
Die Umkehrung des Satzes 11 ist nicht wahr. Es gibt nämlich Winkel α und β, deren Summe zwar 180° beträgt, die aber keine Nebenwinkel sind (Bild D 20). Mit anderen Worten: Es gibt Winkel, für die die Umkehrung *nicht* zutrifft.

Die Umkehrung eines Satzes ist also nicht immer auch ein Satz. Deshalb muß stets überprüft werden, ob die Umkehrung eines Satzes gilt.

Es gibt Sätze mit *mehreren* Voraussetzungen. Zu solchen Sätzen gibt es *mehrere* Umkehrungen.

8 Es sollen Umkehrungen zu Satz 12 gebildet werden. Dieser lautet:

Sind zwei Winkel Stufenwinkel und sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel, so sind die beiden Winkel kongruent.



D 20

1. Umkehrung zu Satz 12:

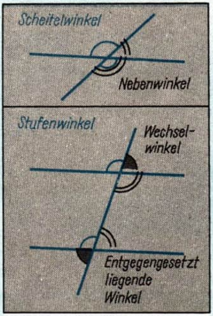
Sind zwei Winkel an geschnittenen Parallelen kongruent, so sind die beiden Winkel Stufenwinkel.
Diese Umkehrung trifft nicht zu.

2. Umkehrung zu Satz 12:

Sind zwei Stufenwinkel kongruent, so sind die geschnittenen Geraden zueinander parallel.
Diese Umkehrung, die für den Nachweis der Parallelität zweier Geraden verwendet werden kann, läßt sich beweisen. Auf den Beweis verzichten wir an dieser Stelle.

20 Wiederhole den Satz 14 und bilde Umkehrungen dieses Satzes! Welche Umkehrung trifft zu?

Zusammenfassung:
Schneiden zwei Geraden einander, entstehen **Scheitelwinkel** und **Nebenwinkel**.
Scheitelwinkel sind kongruent.
Nebenwinkel betragen zusammen 180°.
Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, so entstehen **Stufenwinkel, Wechselwinkel** und **entgegengesetzt liegende Winkel.**
An **geschnittenen Parallelen** sind Stufenwinkel und Wechselwinkel kongruent, entgegengesetzt liegende Winkel betragen zusammen 180°.



Dreiecke

14 Einteilung der Dreiecke

In einem Dreieck *ABC* seien die Winkel mit α, β, γ und die Seiten mit *a*, *b*, *c*, wie im Bild D 21, bezeichnet.

Wir sagen dann, daß

dem Winkel α die Seite a
dem Winkel β die Seite b
dem Winkel γ die Seite c

bzw. umgekehrt

der Seite a der Winkel α
der Seite b der Winkel β
der Seite c der Winkel γ

gegenüberliegen

und

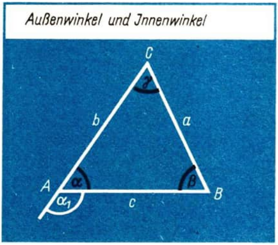
der Seite a die Winkel β und γ
der Seite b die Winkel α und γ
der Seite c die Winkel α und β

anliegen.

Wird in einem Dreieck ABC zum Beispiel die Seite b über den Eckpunkt A hinaus verlängert, so entsteht ein Nebenwinkel α_1 des Winkels α (Bild D 21). Dieser Nebenwinkel des Winkels α heißt **Außenwinkel** des Dreiecks ABC.

(21) Suche noch weitere Außenwinkel des Dreiecks ABC!

Die Winkel α, β und γ eines Dreiecks ABC nennt man auch seine **Innenwinkel**.



D 21

D 22

Die Menge aller gleichseitigen Dreiecke ist eine Teilmenge der Menge aller gleichschenkligen Dreiecke, d. h., jedes gleichseitige Dreieck ist auch gleichschenklig (Bild D 22).

(22) a) Bilde die Umkehrung des folgenden Satzes!
Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es auch gleichschenklig.
b) Untersuche, ob diese Umkehrung gilt!

Die Menge aller spitzwinkligen Dreiecke, die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke und die Menge aller stumpfwinkligen Dreiecke besitzen kein gemeinsames Element (Bild D 23).

D 23

Einteilung der Dreiecke nach Seiten		
unregelmäßig	*gleichschenklig*	*gleichseitig*
		
Seiten paarweise verschieden lang	*ein Paar gleich langer Seiten*	*alle Seiten gleich lang*

D 24

Einteilung der Dreiecke nach Winkeln		
spitzwinklig	*rechtwinklig*	*stumpfwinklig*
		
alle Winkel spitz	*ein rechter Winkel*	*ein stumpfer Winkel*

D 25

Aufgaben d 63 bis 66

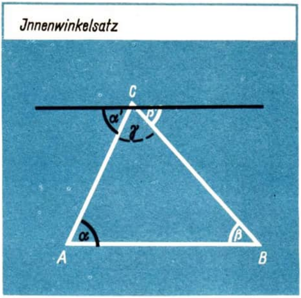
15 Satz über die Innenwinkel eines Dreiecks

(23) a) Zeichne ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck!
b) Miß in jedem Dreieck die Innenwinkel und bilde jeweils ihre Summe!
c) Vergleiche die Summen! Was vermutest du?

15 **SATZ: In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.**

Beweis: α, β und γ seien die Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ABC.

Durch C gibt es genau eine Parallele zur Geraden AB. Die zu α bzw. β gehörigen Wechselwinkel bezeichnen wir mit α' bzw. β' (Bild D 26).



D 26

Dann gilt: $\alpha' + \beta' + \gamma = 180°$ als gestreckter Winkel

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{array}\right\}$$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen

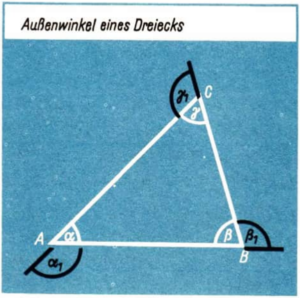
Daraus folgt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, w. z. b. w.

(24) Begründe, daß ein Dreieck höchstens einen rechten bzw. höchstens einen stumpfen Winkel haben kann!

Aufgaben d 67 und 68

16 Sätze über die Außenwinkel eines Dreiecks

Jedem Innenwinkel eines Dreiecks sind zwei Außenwinkel zugeordnet. Wenn wir von den drei Außenwinkeln eines Dreiecks sprechen, so sind Außenwinkel gemeint, die zu verschiedenen Innenwinkeln gehören (Bild D 27).



D 27

16 **SATZ: Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.**

Aus $\alpha + \alpha_1 = 180°$ als Nebenwinkel

und $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ Summe der Innenwinkel

folgt $\alpha + \alpha_1 = \alpha + \beta + \gamma$ und damit

$\alpha_1 = \beta + \gamma$, w. z. b. w.

25 Begründe die einzelnen Schritte dieses Beweises!

Aus Satz 16 folgt:
Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

17 **SATZ: In jedem Dreieck beträgt die Summe der Außenwinkel 360°.**

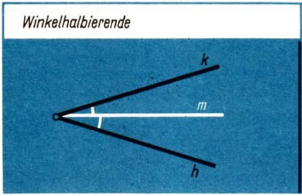
26 Beweise den Satz 17 mit Hilfe des Satzes 16!

Aufgaben d 69 bis 80

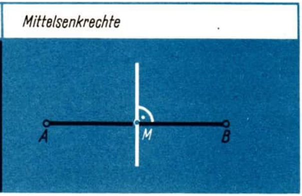
17 Symmetrieeigenschaften gleichschenkliger Dreiecke

Ein Strahl m heißt **Winkelhalbierende** des Winkels (h, k), wenn er folgende Eigenschaften besitzt (Bild D 28):

(1) Sein Anfangspunkt ist der Scheitel des Winkels.
(2) Er verläuft innerhalb des Winkels.
(3) Winkel (h, m) und Winkel (m, k) sind kongruent,
also $\sphericalangle (h, m) \cong \sphericalangle (m, k)$.



D 28



D 29

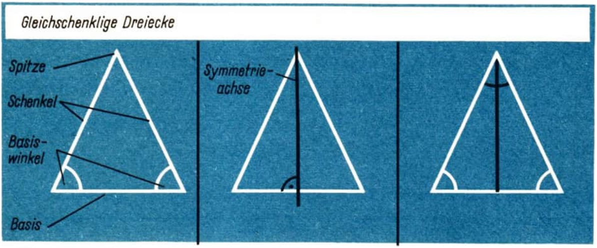
Ein Punkt M einer Strecke $\overline{AB}$ heißt **Mittelpunkt der Strecke,** wenn die Beziehung $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ gilt.
Die Senkrechte im Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ auf die Gerade AB heißt **Mittelsenkrechte der Strecke** (Bild D 29).

27 a) Begründe, daß die Gerade, auf der die Winkelhalbierende eines Winkels liegt, Symmetrieachse des Winkels ist!
b) Begründe, daß die Mittelsenkrechte einer Strecke Symmetrieachse der Strecke ist!

18 **SATZ: Jedes gleichschenklige Dreieck ist axialsymmetrisch.**

Wie man zeigen könnte, ist die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze, die zugleich Höhe auf die Basis ist, Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks.

(28) Begründe, daß die Basiswinkel eines beliebigen gleichschenkligen Dreiecks kongruent sind (Bild D 30)!



D 30

Satz 18 gilt auch für gleichseitige Dreiecke; denn jedes gleichseitige Dreieck ist zugleich ein gleichschenkliges Dreieck.
Da jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit den beiden anderen Seiten als Schenkel ist, gibt es in jedem gleichseitigen Dreieck drei Symmetrieachsen. Sie schneiden einander in einem Punkt (Bild D 31).

(29) Begründe, daß in jedem gleichseitigen Dreieck jeder Innenwinkel 60° beträgt!

D 31

Aufgaben d 81 bis 84

18 Seiten-Winkel-Beziehungen

(30) Zeichne ein unregelmäßiges Dreieck! Miß die Seiten und Winkel! Ordne die Seiten nach ihrer Länge! Ordne die Winkel nach ihrer Größe!

Was stellst du fest?

19 **SATZ: In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten auch der größere Winkel gegenüber.**

Ebenso gilt:

Umkehrung zu Satz 19: In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln auch die größere Seite gegenüber.

Auf die Beweise für Satz 19 und für seine Umkehrung verzichten wir an dieser Stelle.

(31) Begründe die folgenden Aussagen!

a) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, größer als jede der beiden anderen Seiten.

b) In jedem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck beträgt jeder der beiden Basiswinkel 45°.

19 Dreiecksungleichung

(32) Zeichne je ein beliebiges spitzwinkliges, rechtwinkliges und stumpfwinkliges Dreieck! Miß in jedem Dreieck die Seiten! Bilde für jedes Dreieck die Summen aus den Längen je zweier Seiten! Vergleiche sie jeweils mit der Länge der dritten Seite! Was vermutest du?

Sind a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks, so gelten folgende Ungleichungen:

$$a + b > c; \quad a + c > b; \quad b + c > a.$$

Also gilt:

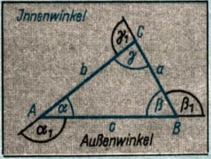
20 **SATZ: In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.**

Auch auf den Beweis des Satzes 20 verzichten wir an dieser Stelle. Die in diesem Satz angegebene Beziehung zwischen den Seiten eines Dreiecks heißt die **Dreiecksungleichung**.

(33) a) Ermittle die Differenz zweier Seiten eines spitzwinkligen, eines rechtwinkligen bzw. eines stumpfwinkligen Dreiecks!

b) Vergleiche jeweils die Differenz mit der dritten Seite! Was stellst du fest?

Aufgaben d 85 bis 90



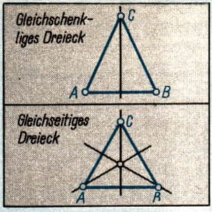
Zusammenfassung:

Dreiecke lassen sich sowohl nach ihren Winkeln als auch nach ihren Seiten einteilen.

Die Summe der **Innenwinkel** eines Dreiecks beträgt 180°.

Jeder **Außenwinkel** eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.

D



Der größeren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt auch der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.
Die Seiten eines Dreiecks genügen der **Dreiecksungleichung**.
Gleichschenklige Dreiecke sind **axialsymmetrisch**.

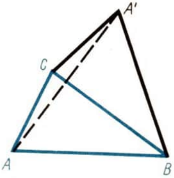
Kongruenz von Dreiecken

20 Anwendung des Kongruenzbegriffs auf Dreiecke

34 Wiederhole die Definition für die Kongruenz zweier geometrischer Figuren!

Zwei Dreiecke sind kongruent genau dann, wenn es eine Bewegung gibt, bei der das eine Dreieck das Bild des anderen ist.

9 Das Dreieck $A'BC$ ist das Bild eines Dreiecks ABC bei der Spiegelung an der Geraden BC (Bild D 32). Die Dreiecke ABC und $A'BC$ sind also kongruent. Wir schreiben: „$\triangle ABC \cong \triangle A'BC$".



D 32

35 Zeichne ein Dreieck ABC! Zeichne mit Hilfe von Transparentpapier ein Bild $A'B'C'$ dieses Dreiecks!

a) Gib eine Bewegung an, bei der das Dreieck $A'B'C'$ das Bild des Dreiecks ABC ist!
b) Schneide die Dreiecksfläche $A'B'C'$ aus! Lege sie auf die Dreiecksfläche ABC!

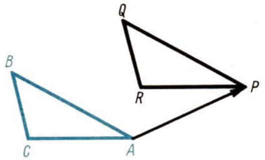
Aufgaben d 91 bis 94

21 Eigenschaften kongruenter Dreiecke

Die Kongruenz von Dreiecken ist eine Beziehung zwischen jeweils zwei Dreiecken. Wenn $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ist, so gibt es eine Bewegung, bei der das Dreieck PQR das Bild des Dreiecks ABC ist.

10 Es sei $\triangle ABC \cong \triangle PQR$. Das Dreieck PQR ist das Bild des Dreiecks ABC bei der Verschiebung $\overrightarrow{AP}$ (Bild D 33).

(36) Stelle in einer Tabelle für das Beispiel 10 die Paare der einander zugeordneten Eckpunkte, Seiten und Winkel zusammen!



D 33

Gibt es zu jeder Seite (zu jedem Winkel) eines Dreiecks ABC eine zu ihr kongruente Seite (einen zu ihm kongruenten Winkel) eines Dreiecks *PQR* und umgekehrt, so sagen wir, daß die beiden Dreiecke in den Seiten (in den Winkeln) **übereinstimmen**.

21 **SATZ: Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, dann stimmen sie in den Seiten und in den Winkeln überein.**

Ein Beweis dieses Satzes ergibt sich durch die Anwendung der Definition für die Kongruenz (Definition 7). Sind nämlich zwei Dreiecke kongruent, so gibt es eine Bewegung, bei der jeder Seite des Originaldreiecks genau eine Seite des Bilddreiecks und jedem Winkel des Originaldreiecks genau ein Winkel des Bilddreiecks zugeordnet ist. Die einander zugeordneten Seiten bzw. Winkel sind dann kongruent. Die beiden Dreiecke stimmen also in den Seiten und in den Winkeln überein.

Es gilt auch:

Umkehrung zu Satz 21: Wenn zwei Dreiecke in den Seiten und in den Winkeln übereinstimmen, dann sind die Dreiecke kongruent.

Um diesen Satz zu beweisen, müßte gezeigt werden, daß es auf Grund der in dem Satz genannten Voraussetzungen stets eine Bewegung gibt, bei der das eine Dreieck das Bild des anderen Dreiecks ist.

Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis.

In der Planimetrie hat man häufig die Kongruenz zweier Dreiecke nachzuweisen.

Wir haben dazu zwei Möglichkeiten:

1. Wir weisen nach, daß es eine Bewegung gibt, bei der das eine Dreieck das Bild des anderen ist.
2. Wir weisen nach, daß die Dreiecke in allen Seiten und in allen Winkeln übereinstimmen.

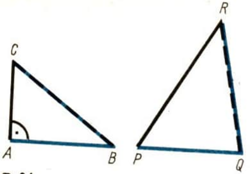
Das zweite Verfahren kann vereinfacht werden.

Zunächst überzeugen wir uns an Beispielen davon, daß zwei Dreiecke im allgemeinen nicht kongruent sind, wenn sie nur in

a) *einem* Stück bzw. b) *zwei* Stücken übereinstimmen.

Die drei Seiten und die drei Innenwinkel eines Dreiecks nennt man seine **Bestimmungsstücke**, kurz **Stücke**.

11 a) Die beiden Dreiecke *ABC* und *PQR* im Bild D 34 stimmen zwar in den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$ überein, sind jedoch nicht kongruent.

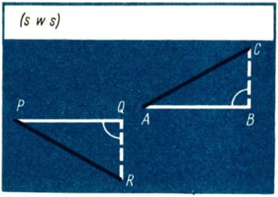


D 34

b) Die beiden Dreiecke *ABC* und *PQR* im Bild D 34 stimmen zwar einerseits in den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$ sowie andererseits in den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{QR}$ überein, sind jedoch nicht kongruent. Der Winkel *CAB* ist nämlich ein rechter Winkel und der Winkel *RPQ* ein spitzer Winkel.

Stimmen zwei Dreiecke in *drei* Stücken überein, so können sie kongruent sein. Diese Fälle wollen wir im folgenden untersuchen.

22 Kongruenzsätze (s w s) und (w s w)



D 35

Wir betrachten zunächst den Fall, daß zwei Dreiecke in *zwei Seiten* und dem *eingeschlossenen Winkel* übereinstimmen (Bild D 35). Diesen Fall bezeichnen wir mit **(s w s)**.

„Ein Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen“ bedeutet, daß die Seiten auf den Schenkeln des Winkels liegen.

22 **KONGRUENZSATZ (*s w s*): Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind kongruent.**

Damit wir sicher sind, daß der Kongruenzsatz (s w s) für alle möglichen Paare von Dreiecken zutrifft, die den Bedingungen (Voraussetzungen) des Satzes genügen, müssen wir ihn unabhängig von Beispielen beweisen. Wir zeigen dazu, daß es auf Grund der im Satz genannten Voraussetzungen eine Bewegung gibt, bei der das eine Dreieck das Bild des anderen ist.

D

Beweis des Kongruenzsatzes (*s w s*):

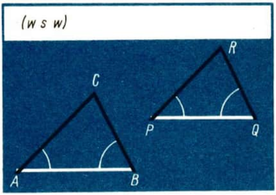
Für zwei beliebige Dreiecke *ABC* und *PQR* seien folgende Bedingungen erfüllt (Bild D 35):

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$; $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQR$; $\overline{BC} \cong \overline{QR}$.

1) Wegen $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQR$ gibt es eine Bewegung, bei der
   a) der Punkt *Q* das Bild des Punktes *B*,
   b) der Strahl *QP* das Bild des Strahls *BA* und
   c) der Strahl *QR* das Bild des Strahls *BC* ist.
2) Bei dieser Bewegung ist
   a) wegen $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ der Punkt *P* das Bild des Punktes *A* und
   b) wegen $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ der Punkt *R* das Bild des Punktes *C*.

Das Dreieck PQR ist also Bild des Dreiecks ABC bei dieser Bewegung. Demnach gilt: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, w. z. b. w.

Für die beiden Dreiecke im Bild D 36 nehmen wir an, daß sie in *einer Seite* und den beiden *anliegenden Winkeln* übereinstimmen. Diesen Fall bezeichnen wir mit **(w s w)**.



D 36

23 **KONGRUENZSATZ (*w s w*): Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind kongruent.**

Beweis des Kongruenzsatzes (*w s w*):

Für zwei beliebige Dreiecke ABC und PQR seien folgende Bedingungen erfüllt (Bild D 36):

$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle RPQ$; $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$; $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQR$.

1) Wegen $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle RPQ$ gibt es eine Bewegung, bei der
   a) der Punkt P das Bild des Punktes A,
   b) der Strahl PQ das Bild des Strahls AB und
   c) der Strahl PR das Bild des Strahls AC ist.

2) Bei dieser Bewegung ist wegen $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ der Punkt Q das Bild des Punktes B.

3) Das Bild C' von C bei dieser Bewegung liegt auf dem Strahl PR. Aus $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQC'$ und der Voraussetzung $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle PQR$ ergibt sich $\sphericalangle PQC' \cong \sphericalangle PQR$. Daraus folgt $C' = R$.

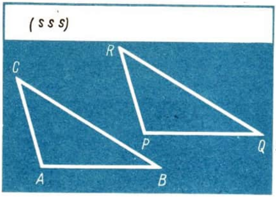
Das Dreieck PQR ist also das Bild des Dreiecks ABC bei dieser Bewegung. Demnach gilt: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, w. z. b. w.

37 a) Überprüfe, ob es bei der Kombination „2 Winkel; 1 Seite" weitere Möglichkeiten für die gegenseitige Lage der Seite und der beiden Winkel gibt!
b) Untersuche gegebenenfalls diese Möglichkeiten!
(Anleitung: Beachte dabei den Satz über die Summe der Innenwinkel!)

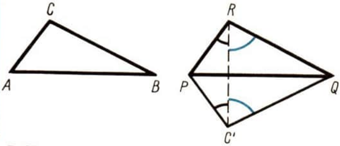
23 Kongruenzsätze (s s s) und (s s w)

Für die beiden Dreiecke im Bild D 37 nehmen wir an, daß sie in den *drei Seiten* übereinstimmen. Diesen Fall bezeichnen wir mit **(s s s)**.

24 **KONGRUENZSATZ (*s s s*): Zwei Dreiecke, die in den drei Seiten übereinstimmen, sind kongruent.**



D 37



D 38

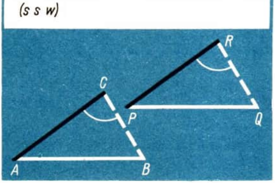
Beweis des Kongruenzsatzes (s s s):
Für zwei beliebige Dreiecke ABC und PQR seien folgende Bedingungen erfüllt (Bild D 38):

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$; $\overline{BC} \cong \overline{QR}$; $\overline{CA} \cong \overline{RP}$.

Außerdem sei $\overline{AB}$ die größte Seite im Dreieck ABC und damit auch $\overline{PQ}$ die größte Seite im Dreieck PQR. Dann sind aber die Dreieckswinkel, die den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{PQ}$ anliegen, spitze Winkel.

1) Wegen $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ gibt es eine Bewegung mit folgenden Eigenschaften:
   a) Der Punkt P ist das Bild des Punktes A,
   b) der Punk, Q ist das Bild des Punktes B,
   c) das Bild C' von C und der Punkt R liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden PQ (Bild D 38).
2) Die Dreiecke PRC' und QRC' sind jeweils gleichschenklig. Dann gilt einerseits $\sphericalangle PRC' \cong \sphericalangle PC'R$ und andererseits $\sphericalangle C'RQ \cong \sphericalangle RC'Q$. Daraus folgt $\sphericalangle PRQ \cong \sphericalangle PC'Q$.
3) Die Dreiecke PRQ und $PC'Q$ sind nach dem Kongruenzsatz (s w s) kongruent. Demnach gibt es eine zweite Bewegung, bei der das Dreieck PRQ das Bild des Dreiecks $PC'Q$ ist.
4) Bei der Bewegung unter 1) wird das Dreieck ABC auf das Dreieck PQC' abgebildet. Bei der Bewegung unter 3) wird das Dreieck PQC' auf das Dreieck PQR abgebildet.
   Das Dreieck PQR ist demnach das Bild des Dreiecks ABC bei der Nacheinanderausführung beider Bewegungen.

D 39



Folglich gilt:
$\triangle ABC \cong \triangle PQR$, w. z. b. w.

Für die beiden Dreiecke im Bild D 39 nehmen wir an, daß sie in *zwei Seiten* und dem *Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt*, übereinstimmen. Diesen Fall bezeichnen wir mit **(s s w)**. Für ihn gilt der folgende Satz, den wir nicht beweisen.

25 **KONGRUENZSATZ (*s s w*): Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen, sind kongruent.**

38 Zeige an je einem Beispiel, daß in den folgenden Fällen die beiden Dreiecke nicht kongruent zu sein brauchen!

a) Zwei Dreiecke stimmen in zwei Seiten und dem Winkel, der der kleineren Seite gegenüberliegt, überein.

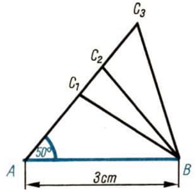
b) Zwei Dreiecke stimmen in den drei Winkeln überein.

24 Dreieckskonstruktionen

Unter der **Konstruktion** eines Dreiecks verstehen wir die Ermittlung seiner Eckpunkte mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus gegebenen Stücken. Eine Konstruktion heißt **eindeutig ausführbar**, wenn je zwei beliebige Dreiecke, die aus den gegebenen Stücken konstruiert werden können, kongruent sind.

12 Es ist ein Dreieck zu konstruieren, dessen Seite $\overline{AB}$ eine Länge von 3 cm und dessen Winkel α eine Größe von 50° haben soll.

Eine Konstruktion ist zwar ausführbar; sie ist jedoch nicht eindeutig ausführbar. Es gibt nämlich beliebig viele Dreiecke, die zwar den genannten Bedingungen genügen, aber nicht kongruent sind (Bild D 40).



D 40

Von praktischem Interesse sind diejenigen Dreieckskonstruktionen, die eindeutig ausführbar sind.

13 Es soll ein Dreieck *ABC* konstruiert werden. Gegeben seien die Seiten *a* und *b* und der Winkel γ (s w s).

Konstruktionsbeschreibung (Bild D 41):

(1) Wir zeichnen den Winkel γ mit dem Scheitel *C*.

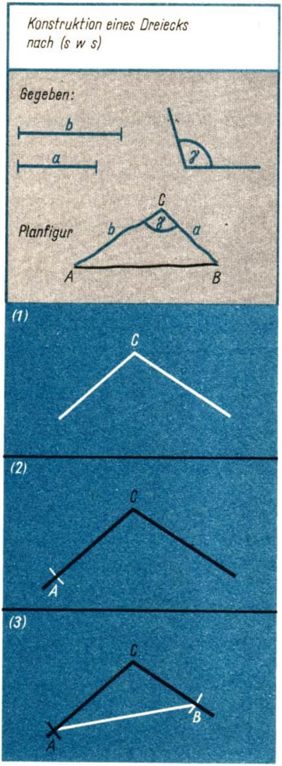
(2) Wir tragen von *C* aus auf einem Schenkel des Winkels die Strecke *b* ab und erhalten den Punkt *A*.

(3) Auf dem anderen Schenkel des Winkels γ tragen wir die Strecke *a* ab und erhalten den Punkt *B*.

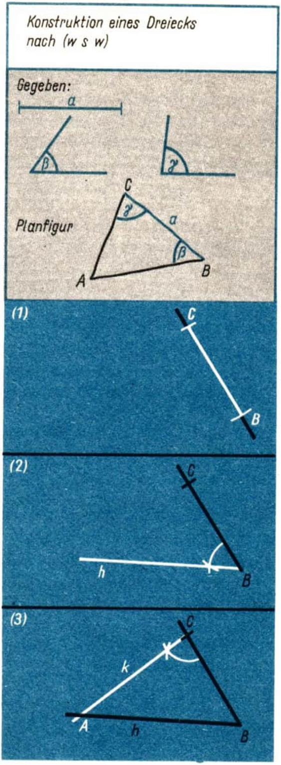
Das Dreieck *ABC* ist das gesuchte Dreieck.

Die Konstruktion des Dreiecks *ABC* ist aus den gegebenen Stücken auf Grund des Kongruenzsatzes (s w s) eindeutig ausführbar.

14 Es soll ein Dreieck *ABC* konstruiert werden. Gegeben seien die Seite *a* und die Winkel β und γ (w s w).



D 41

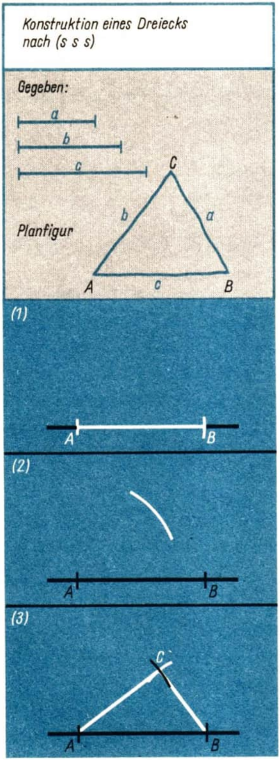


D 42

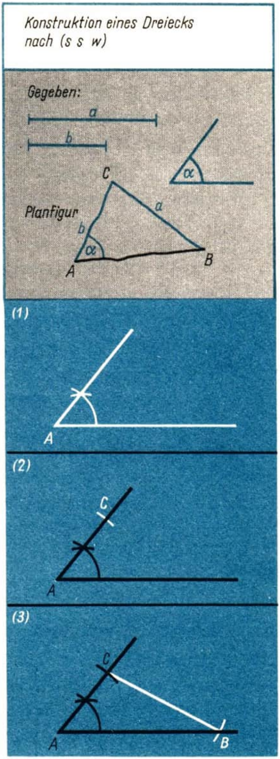
Konstruktionsbeschreibung (Bild D 42):

(1) Wir zeichnen die Strecke *a* und erhalten die Punkte *B* und *C*.
(2) In *B* tragen wir an den Strahl *BC* den Winkel β an. Wir erhalten den Strahl *h*.
(3) In *C* tragen wir an den Strahl *CB* den Winkel γ so an, daß der Strahl *k*, den wir erhalten, und der Strahl *h* auf derselben Seite der Geraden *BC* liegen. Der Schnittpunkt beider Strahlen ist der Punkt *A*.
(4) Das Dreieck *ABC* ist das gesuchte Dreieck.

Die Konstruktion ist auf Grund des Satzes über die Innenwinkel nur dann ausführbar, wenn die Summe der gegebenen Winkel kleiner als 180° ist. Dann ist



D 43



D 44

die Konstruktion auf Grund des Kongruenzsatzes (w s w) eindeutig ausführbar.

15 Es soll ein Dreieck *ABC* konstruiert werden. Gegeben seien die Seiten *a*, *b*, *c* (s s s).

Konstruktionsbeschreibung (Bild D 43):

(1) Wir zeichnen die Strecke *c* und erhalten die Punkte *A* und *B*.
(2) Wir zeichnen um *A* den Kreis mit dem Radius *b*.
(3) Wir zeichnen um *B* den Kreis mit dem Radius *a*. Falls die beiden Kreise einander schneiden, bezeichnen wir einen der beiden Schnittpunkte mit *C*.

Das Dreieck *ABC* ist das gesuchte Dreieck.

Die Konstruktion ist nur dann ausführbar, wenn die gegebenen Strecken der Dreiecksungleichung genügen. Dann ist aber die Konstruktion auf Grund des Kongruenzsatzes (s s s) eindeutig ausführbar.

16 Es soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Gegeben seien die Seiten a und b ($a > b$) und der Winkel α (s s w).

Konstruktionsbeschreibung (Bild D 44):

(1) Wir zeichnen den Winkel α mit dem Scheitel A.
(2) Wir tragen auf einem Schenkel des Winkels α von A aus die Strecke b ab und erhalten den Punkt C.
(3) Wir zeichnen um C den Kreis mit dem Radius a, der den anderen Schenkel des Winkels α im Punkte B schneidet.

Das Dreieck ABC ist das gesuchte Dreieck.

Die Konstruktion des Dreiecks ABC ist aus den gegebenen Stücken auf Grund des Kongruenzsatzes (s s w) eindeutig ausführbar, das heißt also, wenn a größer als b ist.

39 Konstruiere ein Dreieck aus $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm und Winkel $CAB = 75°$!

Sind zwei Seiten und ein Winkel, der der kleineren Seite gegenüberliegen soll, gegeben, so gibt es drei Fälle:

1. Fall: Wir erhalten *zwei verschiedene* Dreiecke.
2. Fall: Wir erhalten *ein eindeutig bestimmtes* Dreieck.
3. Fall: Wir erhalten *kein* Dreieck.

Welcher der drei Fälle jeweils zutrifft, richtet sich nach der Größe der einzelnen Stücke.

Aufgaben d 95 bis 114

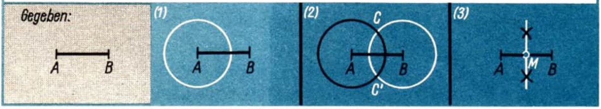
25 Geometrische Grundkonstruktionen

Neben den Dreieckskonstruktionen sind in der Planimetrie oft gegebene **Strecken bzw. Winkel** zu **halbieren**, in gegebenen Punkten von Geraden die **Senkrechten** zu **errichten** bzw. von gegebenen Punkten auf gegebene Geraden die **Lote** zu **fällen**. Diese Konstruktionsaufgaben nennen wir **geometrische Grundkonstruktionen**. Sie können ebenfalls mit Hilfe der Kongruenzsätze begründet werden.

Es soll die *Strecke* $\overline{AB}$ *halbiert* werden.

D 45

Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke



Konstruktionsbeschreibung (Bild D 45):

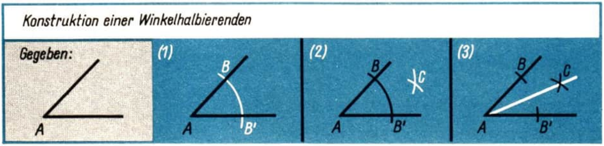
(1) Wir zeichnen um A einen Kreis mit einem Radius r, der größer als die halbe Länge der gegebenen Strecke sein muß.

(2) Wir zeichnen um B einen Kreis mit demselben Radius r. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind die Punkte C und C'.

(3) Die Gerade CC' schneidet die Gerade AB im Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.

Begründung: Die Dreiecke ACC' und BCC' [vgl. (3)] sind nach dem Kongruenzsatz (s s s) kongruent. Daraus folgt: $\sphericalangle ACC' \cong \sphericalangle BCC'$. Dann sind die Dreiecke ACM und BCM nach dem Kongruenzsatz (s w s) kongruent. Daraus folgt: $\overline{AM} \cong \overline{BM}$. Der Punkt M ist also der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

18 Es soll ein *Winkel halbiert* werden.



D 46

Konstruktionsbeschreibung (Bild D 46):

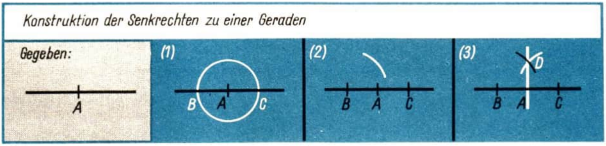
(1) Wir zeichnen um den Scheitel A einen Kreis mit einem beliebigen Radius r und erhalten auf den Schenkeln des Winkels die Punkte B bzw. B'.

(2) Wir zeichnen um B und um B' je einen Kreis mit dem Radius r $\left(r > \frac{\overline{BB'}}{2}\right)$. Die Kreise schneiden einander in einem Punkt, den wir mit C bezeichnen.

(3) Der Strahl AC ist die gesuchte Winkelhalbierende.

Begründung: Die Dreiecke ABC und $AB'C$ [vgl. (3)] sind nach dem Kongruenzsatz (s s s) kongruent. Daraus folgt: $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'AC$. Der Strahl AC ist also Winkelhalbierende des gegebenen Winkels.

19 Es soll eine *Senkrechte* in einem Punkt A einer Geraden *errichtet* werden.



D 47

Konstruktionsbeschreibung (Bild D 47):

(1) Wir zeichnen um A einen Kreis, der die Gerade in den Punkten B und C schneidet.

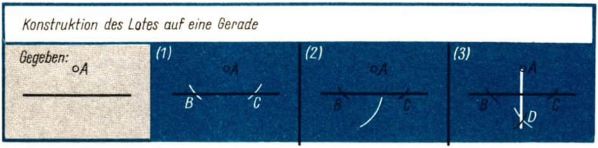
(2) Wir zeichnen um B einen Kreis mit einem Radius $r > \overline{AB}$.

(3) Wir zeichnen um C mit demselben Radius r einen Kreis und erhalten als Schnittpunkt beider Kreise den Punkt D. Die Gerade DA ist die Senkrechte auf der gegebenen Geraden im Punkte A.

Begründung: Die Dreiecke ABD und ACD sind nach dem Kongruenzsatz (s s s) kongruent. Da dann die Winkel BAD und CAD zueinander kongruente Nebenwinkel sind, ist jeder der beiden ein rechter Winkel. Die Gerade DA steht also im Punkt A senkrecht auf der gegebenen Geraden.

40 a) Beschreibe und begründe die Konstruktion des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade (Bild D 48)!

b) Zeichne einen Strahl l und einen Winkel (h, k)! Trage den Winkel an den Strahl l an! Begründe die Konstruktion!



D 48

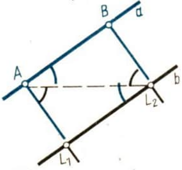
Aufgaben d 115 bis 132

26 Eigenschaften von Parallelen

41 Zeichne die Parallele zu einer Geraden a durch einen Punkt A, der nicht auf der Geraden a liegt! Wähle auf der Parallelen einen von A verschiedenen Punkt B und vergleiche die Abstände der Punkte A und B von der Geraden a!

26 **SATZ: Sind zwei Geraden zueinander parallel, dann haben alle Punkte der einen Geraden gleichen Abstand von der anderen Geraden.**

Beweis: Wir wählen zwei beliebige zueinander parallele Geraden a und b und auf a zwei beliebige Punkte A und B. Wir fällen von A und B die Lote auf b und bezeichnen ihre Fußpunkte mit L_1 bzw. L_2 (Bild D 49).
Dann sind die Dreiecke AL_1L_2 und L_2BA nach dem Kongruenzsatz (w s w) kongruent. Also gilt: $\overline{AL_1} \cong \overline{L_2B}$. Die Punkte A und B haben also von b denselben Abstand, w. z. b. w.



Die Parallele zu einer Geraden a durch einen Punkt A ist also eine Menge von Punkten, die alle den gleichen Abstand von a haben.

D 49

27 Eigenschaften von Mittelsenkrechten

42 a) Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$! Konstruiere ihre Mittelsenkrechte!
Wähle auf der Mittelsenkrechten einen beliebigen Punkt C! Miß seine Entfernungen von den Punkten A und B!
b) Wähle einen beliebigen Punkt D der Ebene, der nicht auf der Mittelsenkrechten liegt! Miß seine Entfernungen von den Punkten A und B!
c) Sprich deine Vermutung in einem Satz aus!

27 **SATZ: Wenn ein Punkt C auf der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$ liegt, dann sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ kongruent.**

Beweis: C sei ein beliebiger Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$. Der Mittelpunkt der Strecke sei M.
Die Dreiecke AMC und BMC sind nach dem Kongruenzsatz (s w s) kongruent.
Also gilt: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, w. z. b. w.
Diejenigen Punkte C der Ebene, die nicht auf der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$ liegen, haben von A und B verschiedene Entfernungen. Für sie gilt deshalb nicht die Kongruenz der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.
Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ ist also eine Menge von Punkten, die jeweils von A und B gleich weit entfernt sind.

43 Zeichne eine gemeinsame Senkrechte zweier zueinander paralleler Geraden a und b und bezeichne die Schnittpunkte mit A und B!
Konstruiere die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$!
Welche Eigenschaft besitzen die Punkte der Mittelsenkrechten?

28 **DEFINITION: Eine Gerade, deren Punkte von zwei zueinander parallelen Geraden denselben Abstand haben, nennt man *Mittelparallele* oder *Mittellinie* dieser parallelen Geraden.**

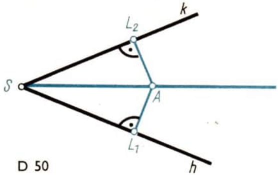
Aufgaben d 133 und 134

D

28 Eigenschaften von Winkelhalbierenden

44 a) Konstruiere die Winkelhalbierende eines Winkels (h, k)! Wähle einen beliebigen Punkt der Winkelhalbierenden! Miß seine Abstände von den Schenkeln des Winkels!
b) Wähle einen beliebigen Punkt der Ebene, der nicht auf der Winkelhalbierenden liegt! Miß seine Abstände von den Schenkeln des Winkels!
c) Sprich deine Vermutung in einem Satz aus!

29 **SATZ: Wenn ein Punkt auf der Winkelhalbierenden eines Winkels liegt, dann hat er von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand.**



D 50

Beweis: A sei ein beliebiger Punkt der Winkelhalbierenden eines Winkels (h, k) mit dem Scheitel S. Die Fußpunkte der Lote von A auf die Schenkel seien L_1 und L_2 (Bild D 50).

Die Dreiecke L_1AS und L_2AS sind kongruent, denn dieser Fall läßt sich auf den Kongruenzsatz (w s w) zurückführen. Folglich sind die Strecken $\overline{AL_1}$ und $\overline{AL_2}$ kongruent. Der Punkt A hat also von den Schenkeln denselben Abstand, w. z. b. w.

(45) Wie lautet die Umkehrung zu Satz 29? Begründe sie!

Diejenigen Punkte der Ebene, die nicht auf der Winkelhalbierenden eines Winkels liegen, haben nicht gleichen Abstand von den Schenkeln des Winkels.

29 Besondere Linien im Dreieck

(1) *Mittelsenkrechte des Dreiecks*

Die Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c der Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC nennt man die **Mittelsenkrechten des Dreiecks**.

30 **SATZ: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

Beweis: Wir nehmen an, daß der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten a und b eines beliebigen Dreiecks ABC der Punkt M sei (Bild D 51).

Dann gilt einerseits $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ und andererseits $\overline{MC} \cong \overline{AM}$. Daraus folgt: $\overline{BM} \cong \overline{AM}$. Der Punkt M ist also von den Punkten A und B gleich weit entfernt und liegt deshalb auch auf der Mittelsenkrechten der Seite c. Mit anderen Worten: Die Mittelsenkrechte von c geht ebenfalls durch M. Die Mittelsenkrechten schneiden also einander im Punkt M, w. z. b. w.

(2) *Höhen des Dreiecks*

Die Lote h_a, h_b, h_c von den Eckpunkten eines Dreiecks ABC auf die gegenüberliegenden Seiten a, b, c oder deren Verlängerungen nennt man die **Höhen des Dreiecks**. Die Fußpunkte dieser Lote heißen die **Höhenfußpunkte** (Bild D 52). Unter der Länge einer Höhe verstehen wir den Abstand des betreffenden Eckpunktes von der gegenüberliegenden Seite.

31 **SATZ: Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

Der Satz 31 könnte mit Hilfe von Satz 30 bewiesen werden.

(3) *Seitenhalbierende des Dreiecks*

Die Geraden s_a, s_b, s_c durch die Eckpunkte eines Dreiecks ABC und die Mittelpunkte der jeweils gegenüberliegenden Seiten a, b, c nennt man die **Seitenhalbierenden des Dreiecks** (Bild D 53).

32 **SATZ: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

Den Satz 32 können wir mit den bisherigen Kenntnissen noch nicht beweisen.

Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines jeden Dreiecks liegt stets innerhalb der zugehörigen Dreiecksfläche. Er heißt der Schwerpunkt des Dreiecks.

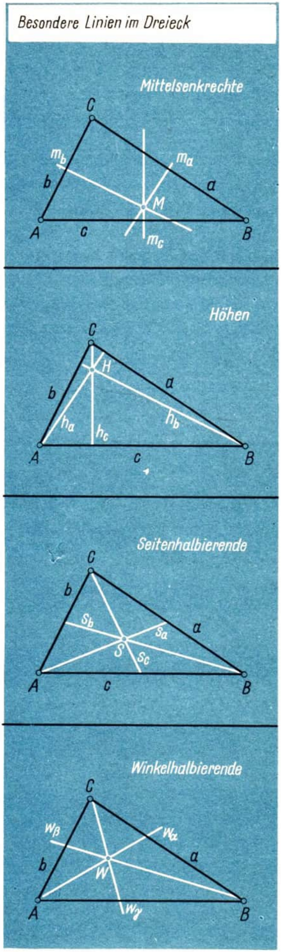
(4) *Winkelhalbierende des Dreiecks*

Die Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ der Innenwinkel α, β, γ eines Dreiecks ABC nennt man die **Winkelhalbierenden** des Dreiecks (Bild D 54).

33 **SATZ: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

Beweis: W sei der Schnittpunkt von w_α und w_β eines beliebigen Dreiecks ABC.

Dann hat W einerseits von den Seiten b und c sowie andererseits von den Seiten a und c denselben Abstand. Also hat W auch von den Seiten a und b denselben Abstand. Dann liegt W aber auch auf w_γ. Die Winkelhalbierenden schneiden einander also in einem Punkt,
w. z. b. w.



D 51, D 52, D 53, D 54

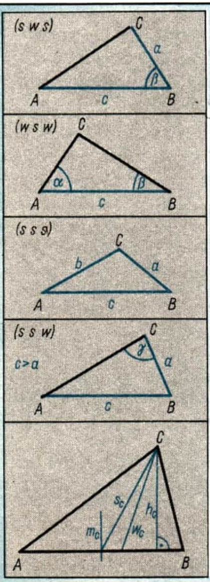
Aufgaben d 135 und 136

30 Dreieckskonstruktionen mit Hilfe von Teildreiecken

Zur Konstruktion von Dreiecken können neben Seiten und Winkeln auch ihre Höhen, Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden bzw. Mittelsenkrechten gegeben sein. Wir konstruieren dann zuerst *Teildreiecke.*

20 Es soll ein Dreieck ABC aus der Seite $\overline{AC} = 4$ cm, der Höhe $h_c = 3$ cm und der Seite $\overline{AB} = 6$ cm konstruiert werden.
Den Höhenfußpunkt bezeichnen wir mit D. Für das Teildreieck ADC sind zwei Seiten und der Winkel, der der größeren gegenüberliegt, gegeben. Die Konstruktion erfolgt nach dem Kongruenzsatz (s s w) entsprechend der Konstruktionsbeschreibung im Beispiel 16. Sie ist eindeutig ausführbar.
Der Punkt B liegt erstens auf dem Strahl AD und zweitens auf dem Kreis um A mit dem Radius $r = 6$ cm. Das Dreieck ABC ist das gesuchte Dreieck.

Aufgaben d 137 bis 144



Zusammenfassung:

Zwei Dreiecke sind **kongruent**, wenn sie

a) in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel **(s w s)** oder

b) in 1 Seite und den beiden anliegenden Winkeln **(w s w)** oder

c) in den 3 Seiten **(s s s)** oder

d) in 2 Seiten und dem Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt **(s s w)**,

übereinstimmen.

Jedes Dreieck läßt sich eindeutig **konstruieren,** wenn die gegebenen Stücke einem der Fälle a) bis d) entsprechen.

Die **geometrischen Grundkonstruktionen,**
Halbieren einer Strecke,
Halbieren eines Winkels,
Errichten der Senkrechten in einem Punkt einer Geraden,
Fällen des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade,
können mit Hilfe der Kongruenzsätze begründet werden.

Die Punkte einer jeden von zwei zueinander parallelen Geraden haben von der anderen denselben **Abstand.**

Vierecke und Vielecke

31 Vierecke, Winkelsumme im Viereck

Drei Punkte *A*, *B* und *C*, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, können nur auf *eine* Weise durch drei Strecken miteinander verbunden werden.

46 a) Wähle in der Ebene vier Punkte *A*, *B*, *C* und *D*, von denen je drei nicht auf ein und derselben Geraden liegen!

b) Zeige durch Beispiele, daß es verschiedene Möglichkeiten gibt, diese Punkte durch vier Strecken miteinander zu verbinden!

34 **DEFINITION: Unter einem *Viereck ABCD* versteht man eine Punktmenge mit folgenden Eigenschaften:**

(1) Von den Punkten *A*, *B*, *C*, *D* liegen je drei nicht auf ein und derselben Geraden.

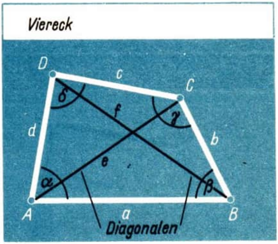
(2) Der Punktmenge gehören genau die Punkte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ an.
Diese Strecken heißen die *Seiten des Vierecks*.

Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ heißen **Diagonalen des Vierecks *ABCD***. Ein Viereck, in dem beide Diagonalen innerhalb der Vierecksfläche liegen, heißt konvex. Wir betrachten nur konvexe Vierecke. Je zwei Seiten eines Vierecks, die keinen gemeinsamen Eckpunkt haben, nennen wir **Gegenseiten**. Je zwei Seiten mit einem gemeinsamen Eckpunkt heißen **benachbart**.

Wie bei den Dreiecken unterscheiden wir auch bei den Vierecken **Innenwinkel** und **Außenwinkel**. Je zwei Innenwinkel eines Vierecks, deren Scheitel Endpunkte ein und derselben Diagonalen sind, heißen **Gegenwinkel**. Je zwei Innenwinkel eines Vierecks, deren Scheitel Endpunkte ein und derselben Seite sind, heißen **benachbart**. Die Seiten, Diagonalen und Innenwinkel eines Vierecks sowie die Winkel, die von je einer Seite und einer Diagonalen mit einem gemeinsamen Eckpunkt bestimmt werden, nennt man die **Stücke des Vierecks**.

Werden die Eckpunkte eines Vierecks mit *A*, *B*, *C* und *D* bezeichnet, so bezeichnen wir die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ auch mit *a*, *b*, *c*, *d*, die Diagonalen $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ mit *e*, *f* sowie die Innenwinkel mit den Scheiteln *A*, *B*, *C* und *D* mit α, β, γ, δ (Bild D 55).

D 55



Eine Diagonale zerlegt ein Viereck in zwei Dreiecke. Für die Konstruktion eines dieser beiden Dreiecke werden drei geeignete Stücke, für das andere

Dreieck dann nur noch zwei geeignete Stücke benötigt. Ein Viereck läßt sich also aus *fünf* geeigneten Stücken konstruieren. Unter den fünf gegebenen Stücken muß mindestens eine Seite oder Diagonale sein.

21 Es ist ein Viereck $ABCD$ aus den Seiten a, b, c, d und dem Winkel α zu konstruieren.
Die Seiten a und d sowie der Winkel α bestimmen das Dreieck ABD. Die Konstruktion dieses Dreiecks erfolgt entsprechend dem Beispiel 13 auf Seite 119. Der Punkt C liegt erstens auf dem Kreis um B mit dem Radius b und zweitens auf dem Kreis um D mit dem Radius c.

47 a) Konstruiere ein Viereck aus $a = 3{,}0$ cm; $d = 3{,}5$ cm; $\alpha = 62°$; $\beta = 73°$ und $e = 5{,}0$ cm!
b) Miß die beiden anderen Innenwinkel!
c) Bilde die Summe der Innenwinkel des Vierecks!

35 **SATZ: Die Summe der Innenwinkel eines Vierecks beträgt 360°.**

Beweis: Wir wählen ein beliebiges Viereck $ABCD$. Die Diagonale $\overline{AC}$ zerlegt das Viereck in die Dreiecke ABC und ACD.
Die Summe der Innenwinkel jedes der beiden Dreiecke beträgt 180°. Die Winkel der beiden Dreiecke bilden zusammen die Innenwinkel des Vierecks; ihre Summe beträgt also: $180° + 180° = 360°$, w. z. b. w.

Aufgaben d 145 bis 148

32 Trapeze

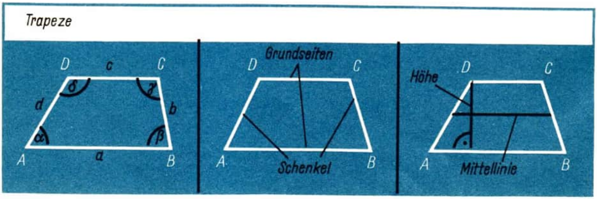
Wir untersuchen nun verschiedene Teilmengen der Menge aller konvexen Vierecke.

36 **DEFINITION: Jedes konvexe Viereck mit einem Paar zueinander paralleler Gegenseiten heißt *Trapez*.**

D

Besitzt ein Trapez genau ein Paar zueinander paralleler Gegenseiten, so heißen sie seine **Grundseiten**. Die beiden anderen (nicht parallelen) Gegenseiten

D 56



werden **Schenkel des Trapezes** genannt. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Schenkel heißt die **Mittellinie im Trapez**. Das Lot von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Grundseite oder deren Verlängerung nennt man **Höhe im Trapez**. Ihre Länge ist gleich dem Abstand dieses Eckpunktes von der gegenüberliegenden Grundseite (Bild D 56).

(48) Begründe die folgende Aussage!
Ein Trapez läßt sich bereits aus *vier* geeigneten Stücken eindeutig konstruieren.

(49) a) Wiederhole die Sätze über die Winkel an geschnittenen Parallelen!
b) Beweise den folgenden Satz!
Die Innenwinkel eines Trapezes, die ein und demselben Schenkel anliegen, betragen zusammen 180°!

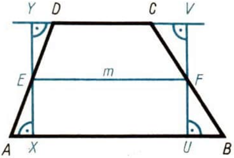
Aufgaben d 149 und 150

33 Die Mittellinie im Trapez

(50) a) Konstruiere in einem Trapez die Mittelpunkte der Schenkel!
b) Zeichne die Mittellinie!
c) Welche Eigenschaft besitzt die Mittellinie in einem Trapez?

37 **SATZ: In jedem Trapez ist die Mittellinie parallel zu den Grundseiten.**

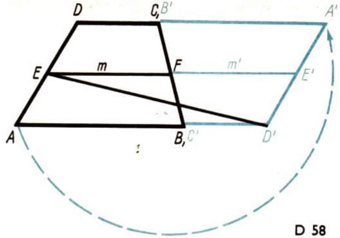
Beweis: E und F seien die Mittelpunkte der Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ in einem beliebigen Trapez $ABCD$ (Bild D 57). Wir errichten in E und F die Senkrechten auf der Geraden EF und bezeichnen ihre Schnittpunkte mit den Geraden AB und CD entsprechend Bild D 57 mit X, Y, U bzw. V.



D 57

1) Die Dreiecke AXE und DYE sind nach dem Kongruenzsatz (w s w) kongruent. Daraus folgt: $\overline{XE} \cong \overline{YE}$. Entsprechend folgt: $\overline{UF} \cong \overline{VF}$.
2) Bei der Spiegelung an EF ist also Y das Bild von X und V das Bild von U. Demnach sind die Winkel EXU und EYV kongruent. Da sie außerdem als entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen zusammen 180° betragen, ist jeder von ihnen ein rechter.
3) Aus der Kongruenz der Stufenwinkel XEF und XYV an den geschnittenen Geraden EF und CD folgt die Parallelität der Geraden EF und CD. Entsprechend ergibt sich die Parallelität der Geraden EF und AB, w. z. b. w.

38 **SATZ: In jedem Trapez ist die Mittellinie halb so lang wie die Summe der beiden Grundseiten.**



D 58

Beweis: Wir wählen ein beliebiges Trapez $ABCD$ mit den Grundseiten a und c sowie mit der Mittellinie $m = \overline{EF}$. Das Trapez $A'B'C'D'$ sei das Bild des Trapezes $ABCD$ bei der Drehung um F mit einem positiv orientierten Drehwinkel von 180°. Der Bildpunkt E' liegt auf der Geraden EF, der Bildpunkt D' auf der Geraden AB (Bild D 58).

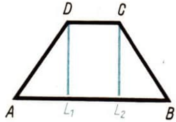
Die Dreiecke EAD' und $D'E'E$ sind kongruent. Damit ergibt sich die Beziehung $\overline{EE'} \cong \overline{AD'}$. Wegen $\overline{EE'} = m + m'$ und $\overline{AD'} = a + c'$ erhalten wir
$m + m' = a + c'$.

Wegen $m' = m$ und $c' = c$ gilt also:

$2 \cdot m = a + c$ oder $m = \frac{a+c}{2}$, w. z. b. w.

34 Gleichschenklige Trapeze

Gleichschenklig heißt ein Trapez mit genau einem Paar paralleler Gegenseiten, dessen Schenkel gleich lang sind.



D 59

D

(51) Begründe die folgende Aussage!

Ein gleichschenkliges Trapez läßt sich bereits aus *drei* geeigneten Stücken konstruieren.

39 **SATZ: In jedem gleichschenkligen Trapez sind die Winkel, die ein und derselben Grundseite anliegen, kongruent.**

Beweis: Wir wählen ein beliebiges gleichschenkliges Trapez $ABCD$, dessen Grundseite $\overline{AB}$ größer als die Grundseite $\overline{CD}$ sei. Die Fußpunkte der Lote von D und C auf die Seite $\overline{AB}$ bezeichnen wir mit L_1 bzw. L_2 (Bild D 59).

Dann sind die Dreiecke AL_1D und BL_2C nach dem Kongruenzsatz (s s w) kongruent. Damit ergibt sich die Kongruenz der Winkel DAB und CBA. Die Kongruenz der Winkel ADC und BCD folgt aus der Kongruenz der Winkel ADL_1 und BCL_2, w. z. b. w.

(52) Beweise, daß die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Grundseiten eines gleichschenkligen Trapezes seine Symmetrieachse ist!

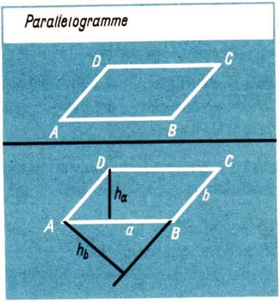
Aufgaben d 151 bis 158

35 Parallelogramme

40 **DEFINITION: Jedes Viereck mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten heißt *Parallelogramm*.**

D 60

D 61



Demnach ist jedes Parallelogramm ein Trapez, aber nicht umgekehrt jedes Trapez ein Parallelogramm.
Die Menge aller Parallelogramme ist in der Menge aller Trapeze enthalten (Bild D 60).
Das Lot von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung heißt eine zu dieser Seite gehörende **Höhe im Parallelogramm**. Ihre Länge ist gleich dem Abstand des Eckpunktes von der gegenüberliegenden Seite (Bild D 61).

(53) Begründe die folgende Aussage!
Ein Parallelogramm läßt sich aus *drei* geeigneten Stücken konstruieren.

(54) a) Konstruiere ein Parallelogramm aus $a = 5$ cm; $d = 3$ cm und $\alpha = 70°$!
b) Beschreibe die Konstruktion!

41 **SATZ: Wenn ein konvexes Viereck ein Parallelogramm ist, dann sind in diesem Viereck jeweils die Gegenseiten gleich lang.**

Beweis: Wir wählen ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$.
Da dann $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ gilt, sind einerseits die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie andererseits die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ kongruent und damit gleich lang, w. z. b. w.

Es gilt auch die folgende Umkehrung, die wir ohne Beweis anführen.

Umkehrung zu Satz 41: Wenn in einem konvexen Viereck jeweils die Gegenseiten gleich lang sind, dann ist es ein Parallelogramm.

42 **SATZ: Wenn ein konvexes Viereck ein Parallelogramm ist, dann halbieren die Diagonalen einander.**

Beweis: Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms mit M.
Dann sind die Dreiecke AMB und CDM kongruent. Folglich sind einerseits die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{CM}$ und andererseits die Strecken $\overline{BM}$ und $\overline{DM}$ kongruent und damit gleich lang, w. z. b. w.

Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms heißt der **Mittelpunkt des Parallelogramms.**

55 Begründe die folgende Umkehrung zu Satz 42!
Wenn in einem konvexen Viereck die Diagonalen einander halbieren, dann ist es ein Parallelogramm.

43 **SATZ: Wenn ein konvexes Viereck ein Parallelogramm ist, dann sind jeweils die Gegenwinkel gleich groß.**

56 a) Beweise Satz 43!
b) Formuliere die Umkehrung zu Satz 43!
c) Beweise, daß diese Umkehrung eine wahre Aussage ist!

Aufgaben d 159 bis 162

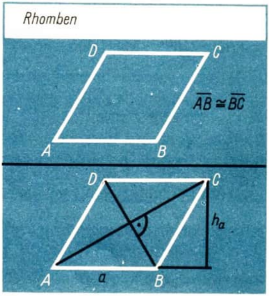
36 Rhomben

44 **DEFINITION: Jedes Parallelogramm mit einem Paar gleich langer benachbarter Seiten heißt *Rhombus*.**

57 Begründe, daß zur Konstruktion von Rhomben jeweils *zwei* geeignete Stücke genügen (Bild D 62)!

45 **SATZ: Wenn ein Parallelogramm ein Rhombus ist, dann stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.**

D 62



Beweis: Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Diagonalen in einem beliebigen Rhombus *ABCD* mit *M*.
Da dann die Dreiecke *ABM* und *ADM* kongruent sind, sind die Winkel *AMB* und *AMD* kongruente Nebenwinkel. Jeder dieser Winkel ist also ein rechter. Die Diagonalen stehen demnach senkrecht aufeinander, w. z. b. w.

Es gilt auch die folgende Umkehrung.

Umkehrung zu Satz 45: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinanderstehen, dann ist es ein Rhombus.

58 Beweise die Umkehrung zu Satz 45!

Aufgaben d 163 und 164

37 Rechtecke und Quadrate

46 **DEFINITION: Jedes Parallelogramm mit einem rechten Winkel heißt *Rechteck*.**

47 **SATZ: Wenn ein Parallelogramm ein Rechteck ist, dann gilt:**
(1) Die Gegenseiten sind gleich lang.
(2) Die Diagonalen halbieren einander.
(3) Alle Winkel sind rechte Winkel.
(4) Die Diagonalen sind gleich lang.

59 a) Beweise Teil (4) des Satzes 47!
b) Formuliere die Umkehrung zu Teil (4) des Satzes 47!
c) Beweise, daß diese Umkehrung eine wahre Aussage ist!

48 **DEFINITION: Jedes Parallelogramm mit einem rechten Winkel und einem Paar gleich langer benachbarter Seiten heißt *Quadrat*.**

Jedes Quadrat ist also sowohl ein Rechteck als auch ein Rhombus.

60 a) Stelle Sätze zusammen, die für jedes Quadrat gelten!
b) Bilde die Umkehrungen dieser Sätze und begründe sie!

38 Drachenvierecke

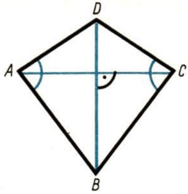
49 **DEFINITION: Jedes konvexe Viereck mit zwei Paaren benachbarter gleich langer Seiten heißt *Drachenviereck*.**

61 a) Wieviel geeignete Stücke benötigt man zur Konstruktion eines Drachenvierecks?
b) Begründe, daß Rhomben und Quadrate spezielle Drachenvierecke sind!

D

50 **SATZ: Jedes Drachenviereck besitzt eine Symmetrieachse.**

Beweis: Wir wählen ein beliebiges Drachenviereck $ABCD$ mit $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ und $\overline{DA} \cong \overline{DC}$ (Bild D 63). Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AC}$ geht dann sowohl durch B als auch durch D. Demnach ist die Diagonale $\overline{BD}$ des Drachenvierecks gemeinsame Symmetrieachse der beiden gleichschenkligen Dreiecke ACB und ACD und damit auch Symmetrieachse des Drachenvierecks $ABCD$, w. z. b. w.



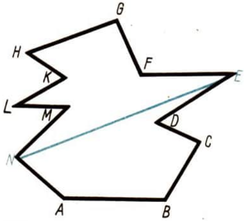
D 63

51 **SATZ: In jedem Drachenviereck stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.**

Auf den Beweis des Satzes 51 wollen wir an dieser Stelle verzichten.

Aufgaben d 165 und 166

39 Vielecke



D 64

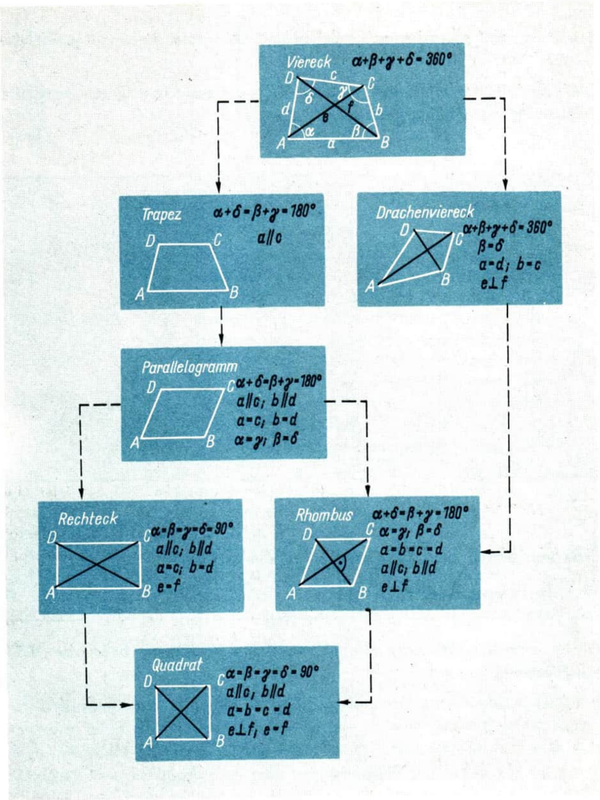
Ein *Vieleck* oder *n-Eck* $ABC \ldots MN$ ist eine ebene Figur mit den Eckpunkten A, B, C, …, M und N. Je drei aufeinanderfolgende Eckpunkte liegen nicht auf ein und derselben Geraden.
Dem Vieleck gehören alle und nur die Punkte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, …, $\overline{MN}$, $\overline{NA}$ an. Diese Strecken heißen die *Seiten des Vielecks.*

D

Dreiecke und Vierecke sind spezielle Vielecke oder n-Ecke. Mit anderen Worten: Die Menge der Dreiecke und Vierecke ist eine (echte) Teilmenge aller Vielecke.
Je zwei Eckpunkte, die nicht Endpunkte ein und derselben Seite sind, bestimmen eine **Diagonale des Vielecks** (Bild D 64). Vielecke können nach der Anzahl ihrer Eckpunkte bezeichnet werden. Man nennt z. B. ein Vieleck mit sieben Eckpunkten ein *Siebeneck*.

62 a) Zeichne ein konvexes Sechseck mit allen seinen Diagonalen! Wieviel Diagonalen sind es?
b) Überlege, wieviel Diagonalen ein konvexes n-Eck besitzt!

Übersicht über die Arten der Vierecke



Jedes Vieleck, dessen Seiten gleich lang und dessen Winkel gleich groß sind, heißt **regelmäßiges Vieleck**.

(63) Begründe, daß gleichseitige Dreiecke und Quadrate regelmäßige Vielecke sind!

Die Konstruktion (konvexer) Vielecke kann auf die Konstruktion geeigneter *Teildreiecke* zurückgeführt werden.

Aufgaben d 167 und 168

Zusammenfassung:

In jedem **Viereck** beträgt die Winkelsumme 360°.
In jedem **Trapez** gibt es ein Paar zueinander paralleler Gegenseiten.
Die **Mittellinie** verläuft parallel zu den **Grundseiten**.
Sie ist halb so lang wie die Summe der Länge der Grundseiten.
In jedem **Parallelogramm** sind jeweils die **Gegenseiten** zueinander parallel und gleich lang.
Gegenwinkel sind gleich groß.
Die **Diagonalen** halbieren einander.
In jedem **Rhombus** stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.
In jedem **Rechteck** sind die Diagonalen gleich lang.
Jedes **Quadrat** besitzt alle genannten Eigenschaften.

Flächeninhalt und Umfang von Vielecken

40 Inhalt von Rechtecksflächen

D

Wir unterscheiden zwischen einem **Vieleck** und der von ihm begrenzten **Vielecksfläche**.

Eine Rechtecksfläche wird gemessen, indem sie mit einer **Flächeneinheit** verglichen wird. Die Zahl, die angibt, wieviel Flächeneinheiten (oder geeignete Bruchteile von ihr) die betreffende Fläche enthält, heißt die **Maßzahl** dieser Fläche bei der gegebenen Flächeneinheit oder ihr **Inhalt**. Hat eine Rechtecksfläche beispielsweise einen Inhalt von 50 cm², so schreiben wir: „$\boldsymbol{A = 50\ \mathrm{cm}^2}$".

22 Eine Rechtecksfläche $ABCD$ enthalte 12 Flächeneinheiten (bezüglich der Einheit 1 cm²). Ihr Inhalt beträgt 12 cm². Wir schreiben: „$A = 12\ \mathrm{cm}^2$".

Bezeichnet man die Längen zweier benachbarter Seiten eines Rechtecks mit g und h, so läßt sich der Inhalt der Rechtecksfläche aus den Seitenlängen wie folgt berechnen: $\boldsymbol{A = g \cdot h}$.

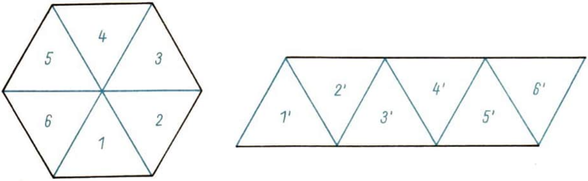
Aufgaben d 169 bis 172

41 Flächengleichheit

Flächengleich heißen zwei Flächen mit folgenden Eigenschaften:
(1) Sie sind kongruent oder
(2) sie können in paarweise kongruente Teilflächen zerlegt werden oder
(3) sie lassen sich durch paarweise kongruente Teilflächen zu kongruenten Flächen ergänzen.

Sind zwei Flächen A_1 und A_2 flächengleich, so haben sie gleichen Inhalt.
Wir schreiben: „$A_1 = A_2$".

64 Begründe, daß die beiden Flächen im Bild D 65 flächengleich sind!



D 65

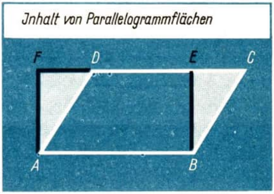
42 Flächeninhalt von Parallelogrammen

65 a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$!
b) Fälle von den Endpunkten der Seite $\overline{AB}$ die Lote auf die Gegenseite oder deren Verlängerung!
c) Untersuche die auf diese Weise entstehenden Figuren auf Flächengleichheit!

Wir nennen die Seite $\overline{AB}$ des Parallelogramms $ABCD$ im Auftrag 65 **Grundseite** der zugehörigen Parallelogrammfläche. Als Grundseite kann jede Seite gewählt werden.

SATZ: *Jede Parallelogrammfläche ist flächengleich einer Rechtecksfläche, die als Seiten eine Seite und die zugehörige Höhe der Parallelogrammfläche hat.*

Beweis: Wir wählen ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ mit der Grundseite $\overline{AB}$ und fällen von B und A die Lote auf die Gerade CD. Wir bezeichnen die Fußpunkte der Lote mit F bzw. E. Nur der Punkt E liege zwischen den Punkten C und D (Bild D 66).



D 66

Die Flächen $ABCD$ und $ABEF$ haben die Teilfläche $ABED$ gemeinsam: Die Teilflächen BCE und ADF sind kongruent. Die beiden Flächen $ABCD$ und $ABEF$ sind also flächengleich, w. z. b. w.
Die Fälle, in denen die gegenseitige Lage der Punkte anders gewählt wird, lassen sich ebenfalls beweisen.

Um unsere Aussagen zu vereinfachen, wollen wir vereinbaren, im folgenden an Stelle von „Parallelogrammfläche", „Dreiecksfläche" usw. kurz von „Parallelogramm", „Dreieck" usw. zu sprechen.

Bezeichnet man die Länge der gewählten Grundseite eines Parallelogramms mit g und die Länge der zugehörigen Höhe mit h, so läßt sich der Flächeninhalt des Parallelogramms nach dem vorhergehenden Satz wie folgt berechnen:
$\boldsymbol{A = g \cdot h}$.

52 **SATZ: Der Flächeninhalt A eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus den Längen einer Seite und der zugehörigen Höhe.**
$\mathbf{A = g \cdot h}$

(66) Begründe den folgenden Satz!

Parallelogramme mit gleich langen Grundseiten und gleich langen Höhen auf diesen Seiten sind flächengleich.

Aufgaben d 173 bis 180

43 Flächeninhalt von Dreiecken

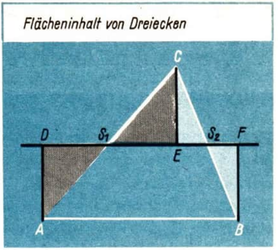
(67) a) Zeichne ein Dreieck ABC!
Zeichne durch den Mittelpunkt von $\overline{AC}$ die Parallele zur Geraden AB! Fälle die Lote von A, B und C auf die Parallele! Bezeichne ihre Fußpunkte mit D, E und F!
b) Untersuche die Beziehungen zwischen den entstehenden Teilflächen!

Wir nennen die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC im Auftrag 67 **Grundseite des Dreiecks**. Als Grundseite kann jede Dreiecksseite gewählt werden.

SATZ: *Jedes Dreieck ist flächengleich einem Rechteck mit einer Seite und der zugehörigen halben Höhe des Dreiecks als Rechtecksseiten.*

Beweis: Wir wählen ein beliebiges Dreieck ABC mit der Grundseite $\overline{AB}$ und fällen von A, B und C die Lote auf die Parallele zur Geraden AB durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$. Wir bezeichnen die Fußpunkte der Lote mit D, E und F sowie die Schnittpunkte der Parallelen mit dem Dreieck mit S_1 und S_2.
Der Punkt E liege zwischen den Punkten S_1 und S_2, die ihrerseits zwischen den Punkten D und F liegen mögen (Bild D 67).

Das Dreieck und das Rechteck haben die Teilfläche ABS_1S_2 gemeinsam.
Aus $\triangle CS_1E \cong \triangle AS_1D$ und $\triangle CS_2E \cong \triangle BS_2F$ ergibt sich dann die Flächengleichheit des Dreiecks und des Rechtecks, w. z. b. w.
Die Fälle, in denen die gegenseitige Lage der Punkte D, E, F, S_1 und S_2 anders gewählt wird, lassen sich ebenfalls beweisen.



D 67

Bezeichnet man die Länge der gewählten Grundseite eines Dreiecks mit g und die Länge der zugehörigen Höhe mit h, so läßt sich der Flächeninhalt des Dreiecks nach dem vorhergehenden Satz wie folgt berechnen:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}.$$

53 **SATZ: Der Flächeninhalt A eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus den Längen einer Seite und der zugehörigen Höhe.**

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

(68) Begründe den folgenden Satz!
Dreiecke mit gleich langen Grundseiten und gleich langen Höhen auf diesen Seiten sind flächengleich.

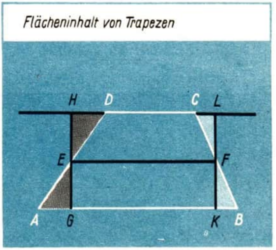
Aufgaben d 181 bis 188

44 Flächeninhalt von Trapezen

(69) a) Zeichne ein Trapez $ABCD$ und fälle von den Mittelpunkten E bzw. F seiner Schenkel die Lote auf die Grundseiten!
b) Untersuche die Beziehungen zwischen den auf diese Weise entstehenden Flächen!

SATZ: *Jedes Trapez ist flächengleich einem Rechteck mit der Mittellinie und der Höhe des Trapezes als Rechtecksseiten.*

Beweis: Wir wählen ein beliebiges Trapez $ABCD$ mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Die Seite $\overline{AB}$ sei länger als die Seite $\overline{CD}$.
Wir fällen von den Mittelpunkten E bzw. F der Schenkel die Lote auf die Grund-



D 68

D

seiten bzw. deren Verlängerung und bezeichnen die Fußpunkte mit G und H bzw. K und L (Bild D 68).
Die Flächen $ABCD$ und $GKLH$ haben die Teilfläche $GKFCDE$ gemeinsam.
Aus $\triangle AGE \cong \triangle DHE$ und $\triangle BKF \cong \triangle CLF$ ergibt sich dann die Flächengleichheit der Trapez- und der Rechtecksfläche, w. z. b. w.

Bezeichnet man die Länge der Mittellinie im Trapez mit m und die der Höhe mit h, so läßt sich der Inhalt der Trapezfläche nach dem vorhergehenden Satz wie folgt berechnen: $\boldsymbol{A = m \cdot h}$.
Da die Länge der Mittellinie in einem Trapez gleich der halben Summe aus den Längen der Grundseiten ist, ergibt sich für den Inhalt eines Trapezes mit den Grundseiten a und c folgende Beziehung: $A = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$.

54 **SATZ: Der Flächeninhalt A eines Trapezes ist gleich dem halben Produkt aus der Summe der Längen der Grundseiten und der Länge der Höhe.** $A = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$

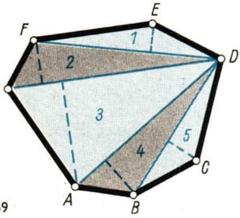
70 Begründe den folgenden Satz!
Trapeze mit gleich langen Mittellinien und gleich langen Höhen sind flächengleich.

Aufgaben d 189 bis 192, 195 und 196

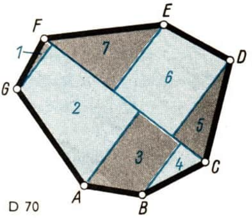
45 Flächeninhalt von Vielecken

Die Berechnung des Flächeninhalts eines beliebigen Vielecks kann entweder auf die Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken **(Dreiecksmethode)** oder auf die Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken und Trapezen **(Trapezmethode)** zurückgeführt werden.

23 Der Flächeninhalt eines Siebenecks soll nach der Dreiecksmethode ermittelt werden (Bild D 69).
Wir zerlegen das Siebeneck durch Diagonalen in die Dreiecke 1 bis 5, berechnen deren Flächeninhalte und bilden die Summe. Ist A der Flächeninhalt des Siebenecks und sind A_1 bis A_5 die Flächeninhalte der Dreiecke 1 bis 5, so gilt:
$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$.



D 69



D 70

24 Der Flächeninhalt des Siebenecks aus Beispiel 23 soll nach der Trapezmethode ermittelt werden (Bild D 70).
Wir zerlegen das Siebeneck durch eine geeignete Diagonale in zwei Teilflächen. Von den Eckpunkten des Siebenecks, die nicht Endpunkte der Diagonalen sind, fällen wir die Lote auf die Diagonale. Wir erhalten vier (rechtwinklige) Dreiecke und drei Trapeze. Ist A der Flächeninhalt des Siebenecks und sind A_1 bis A_7 die Flächeninhalte der Teilflächen 1 bis 7, so gilt:
$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7$.

In der Praxis wird die Trapezmethode häufig bevorzugt, da hierbei weniger Einzelmessungen erforderlich sind als bei der Dreiecksmethode.

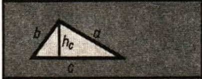
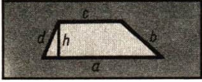
Aufgaben d 193 und 194

46 Umfang von Vielecken

Der Umfang eines Vielecks ergibt sich aus der Summe der einzelnen Seitenlängen.

Ist ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c gegeben und soll der Umfang u des Dreiecks berechnet werden, so addieren wir die Längen der drei Seiten.
Wir schreiben dafür: „$u = a + b + c$".
Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sei c, ein Schenkel sei a. Der Umfang ergibt sich dann aus der Länge der Basis und dem Doppelten der Länge eines Schenkels: $u = c + 2 \cdot a$. Der Umfang u eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ist $u = 3 \cdot a$.

Aufgaben d 197 bis 210

Flächen	Jnhalte	Umfänge
	$A = a \cdot b$	$u = 2 \cdot (a + b)$
	$A = a \cdot h_a$	$u = 2 \cdot (a + b)$
	$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$	$u = a + b + c$
	$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$	$u = a + b + c + d$

Aus der Geschichte der Geometrie

Wenn Ihr Euch mit Strecken, Winkeln, Dreiecken, Flächen oder Körpern beschäftigt, so treibt Ihr Geometrie. Das Wort „Geometrie" ist schon sehr alt. Schon vor 2500 Jahren bezeichneten die griechischen Gelehrten diesen Teil der Mathematik mit „Geometrie".

Wörtlich übersetzt heißt Geometrie soviel wie „Erdvermessung, Feldvermessung" (diese Wissenschaft nennen wir heute Geodäsie). Damit weist das Wort „Geometrie" auf den Ursprung der Mathematik hin. Die Griechen wußten, daß die Geometrie aus praktischen Bedürfnissen hervorgegangen ist. Sie hatten selbst aus Ägypten und Mesopotamien geometrische Kenntnisse übernommen. In Ägypten überschwemmte der Nil sehr oft die Felder und spülte die Grenzmarkierungen weg. Wenn das Hochwasser zurückgegangen war, mußten die Felder neu vermessen und abgesteckt werden. Hierzu benötigte man geometrische Kenntnisse und feldmesserische Methoden. Schon vor etwa 4000 Jahren konnte man Dreiecke, Vierecke und verschiedene Körper berechnen. In Mesopotamien gab es ebenfalls weiterentwickelte geometrische Kenntnisse, allerdings konnten sie auch dort nur von ganz wenigen Menschen ausgeübt werden.

Man fand in den Ruinen der alten Städte unter anderem geometrische „Lehrbücher", Felderpläne, Grundrisse von Städten und Anleitungen zur Flächenberechnung von Feldern, Segeln und noch vieles andere.

Die griechischen Gelehrten haben ungefähr um 500 v. u. Z. aus der Vielzahl der geometrischen Einzelkenntnisse eine wirkliche Wissenschaft geschaffen. Es wurde definiert, was unter Strecke, Trapez, Parallelogramm, Flächeninhalt, Kongruenz, Quader, Kegel usw. zu verstehen sei, und man ging dazu über, Lehrsätze aufzustellen und zu beweisen.

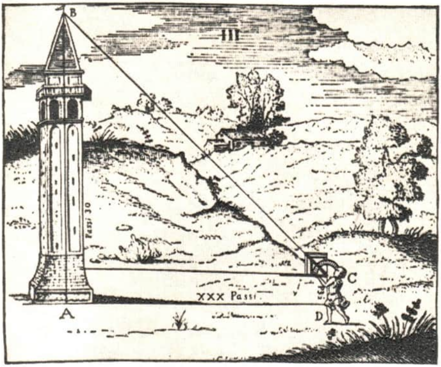
Einer der berühmtesten Mathematiker heißt EUKLEIDES. Er lebte etwa von 365 bis 300 v. u. Z. und verfaßte eine ausführliche Darstellung der Mathematik seiner Zeit, darunter auch der Geometrie. Dieses Werk hieß *Elemente*. Es ist ein recht schwieriges Buch, und es gibt für Euch noch viel von dem zu lernen, was schon EUKLEIDES wußte.

Dieses Buch ist viele Jahrhunderte immer wieder durch Abschreiben vervielfältigt worden, weil es als Leitfaden der Geometrieausbildung diente. So kommt es, daß der Text der *Elemente* erhalten geblieben ist.

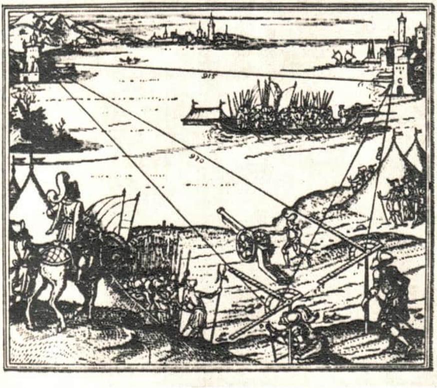
Dieses berühmteste mathematische Lehrbuch hat, wie andere Mathematikbücher jener Zeit, die unruhigen Jahrhunderte, die nach dem Niedergang des alten Griechenland folgten, überstanden.

Als man sich in der Renaissance auf die antiken Errungenschaften besann, erlebte auch dieses Buch eine „Wiedergeburt". Es war eine aufregende Zeit. Buchdruck und Schußwaffen setzten sich durch, die Bauern wehrten sich gegen die Unterdrückung durch die Feudalherren, Amerika und viele andere ferne Länder wurden entdeckt, unbekannte Tier- und Pflanzenarten lernte man kennen.

Im 15. und 16. Jahrhundert wurden viele Maschinen erfunden und neue technische Verfahren entdeckt. Auch die Mathematik wurde vor viele neue praktische Probleme gestellt. Insbesondere mußten bessere Verfahren der Vermessung gefunden werden. Sie wurden für militärische Zwecke, z. B. beim Richten der Geschütze und beim Bau von Befestigungen, aber auch bei der Orientierung auf hoher See und bei der Erschließung der neu entdeckten Länder benötigt (Bilder D 71 und D 72).



D 71: Bestimmung der Höhe eines Turmes mit dem Quadranten.



D 72: Vermessungswesen beim Militär (1607).
Beachte die Verwendung der Meßlatten!

Die Geometrie hat sich daher gerade im 15. und 16. Jahrhundert rasch weiterentwickelt. Eine gegen früher weitaus größere Anzahl von Menschen benötigte gute geometrisch-mathematische Kenntnisse, so z. B. Kapitäne, Astronomen, Ingenieure, Feldmesser, Architekten, Markscheider. Mit Hilfe des Buchdrucks konnten die dringend benötigten alten und neuen mathematischen Kenntnisse genügend rasch verbreitet werden.

a

Aufgaben

a) Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Gib von den folgenden Zahlen jeweils den Nachfolger und den Vorgänger an!

1. 7; 23; 458; 20 000; 45 831 769

2. 5; 17; 376; 40 000; 47 832 679

Schreibe die folgenden Zahlen im dekadischen Positionssystem!

3. a) Viermillionendreihundert-achtundzwanzigtausend-sechshunderteinunddreißig
   b) Sechsmilliardenviermillionen-fünfunddreißigtausend-dreiundachtzig

4. a) Dreimillionensechshundert-dreiundvierzigtausend-dreihunderteinundzwanzig
   b) Dreimilliardensiebenmillionen-achtundzwanzigtausend-vierundfünfzig

5. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft!

Setze dann in die freien Spalten das richtige Zeichen ($<$, $>$, $=$) bzw. für x und y passende Zahlen ein! Gibt es keine passende Zahl für y, so setze in die beiden letzten Spalten einen Strich!

a		b	$a + b = x$	$a + y = b$	$y = b - a$
30		63			
52		52			
32		18			
73		72			
456		546			
0		13			

6. Welche Zahl muß man jeweils zu 76 addieren, um 79 (92, 103, 117, 123) zu erhalten?

7. Welche Zahl muß man jeweils zu 53 addieren, um 59 (72, 102, 127, 101) zu erhalten?

8. Addiert man zu einer Zahl 47, so erhält man 55 (72, 83, 92, 109).
   Wie heißt jeweils diese Zahl?

9. Addiert man zu einer Zahl 39, so erhält man 57 (66, 75, 96, 113).
   Wie heißt jeweils diese Zahl?

Ermittle x so, daß jede Gleichung erfüllt wird! Stelle x als Differenz dar!

10. a) $90 + x = 100$
b) $87 + x = 123$
c) $211 + x = 213$

11. a) $80 + x = 100$
b) $22 + x = 101$
c) $314 + x = 315$

12. a) $x + 14 = 73$
b) $x + 287 = 1\,009$
c) $x + 12 = 12$

13. a) $x + 43 = 60$
b) $x + 533 = 2\,530$
c) $14 + x = 14$

Überprüfe die Lösbarkeit der folgenden Aufgaben!
Gib die Zahl für x an, falls die Aufgabe lösbar ist!

14. a) $x = 25 - 13$
b) $x = 34 - 41$
c) $x = 852 - 852$
d) $x = 3\,562 - 3\,652$

15. a) $x = 35 - 17$
b) $x = 768 - 768$
c) $x = 37 - 44$
d) $x = 4\,781 - 4\,871$

16. a) $x = 91 : 7$
b) $x = 28 : 5$
c) $x = 137 : 9$
d) $x = 56 : 336$

17. a) $x = 91 : 13$
b) $x = 26 : 7$
c) $x = 143 : 9$
d) $x = 47 : 235$

Für welche Gleichungen gibt es Zahlen x, die diese Gleichungen erfüllen? Stelle gegebenenfalls diese Zahlen als Differenzen dar!

18. a) $99 + x = 101$
b) $x + 91 = 19$
c) $x + 27 = 27$

19. a) $133 + x = 140$
b) $x + 193 = 141$
c) $22 + x = 22$

Ermittle x so, daß jede Gleichung erfüllt wird! Stelle x als Quotient dar!

20. a) $5 \cdot x = 120$
b) $16 \cdot x = 1\,440$

21. a) $6 \cdot x = 750$
b) $13 \cdot x = 6\,500$

22. a) $x \cdot 13 = 1\,040$
b) $x \cdot 5 = 0$

23. a) $x \cdot 14 = 1\,120$
b) $1 \cdot x = 27$

Ordne die folgenden Zahlen nach der Größe! Beginne mit der kleinsten Zahl!

24. 13; 7; 856; 7 999; 0; 8 001

25. 15; 6; 789; 798; 0; 5 999; 6 001

Setze zwischen die folgenden Zahlen die richtigen Zeichen ($<$, $>$, $=$)!

26. 3 und 12; 143 und 141; 7 482 und 32 160; 0 und 80; 432 und 423

27. 5 und 15; 138 und 136; 7 999 und 12 310; 60 und 0; 587 und 578

Wähle von den folgenden Zahlenpaaren $[a; b]$ alle diejenigen aus, für die $a < b$ $(a = b)$ gilt!

28. [3, 5]; [12, 4]; [75, 15]; [5, 26]; [36, 36]; [20, 10]

29. [4, 8]; [80, 16]; [24, 24]; [30, 15]; [4, 14]; [13, 19]

a

Stelle fest, ob a ein Teiler von b ist! Trifft dies zu, so stelle b in der Form $a \cdot x$ dar!

30.

a	5	3	3	90
b	45	18	12	18
a	8	9	5	5
b	56	36	72	165
a	9	11	15	18
b	172	154	180	312

31.

a	5	3	3	70
b	35	15	18	14
a	7	9	6	5
b	56	45	36	135
a	11	9	13	18
b	187	216	169	314

32. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie! Setze dabei für x passende Zahlen ein! Gibt es keine solche Zahl, so setze einen Strich!

a	b	$a \cdot b$	$a \mid b$ $\binom{\text{ja}}{\text{nein}}$	$a \cdot x = b$	$x \mid b$ $\binom{\text{ja}}{\text{nein}}$
9	72	648	ja	$9 \cdot 8 = 72$	ja
1	13				
22	9				
17	17				
9	144				
27	9				

Stelle fest, ob folgendes gilt! Begründe deine Feststellungen!

33. a) $3 \mid 39$ b) $4 \mid 86$ c) $1 \mid 17$
d) $17 \mid 1$ e) $17 \mid 17$ f) $19 \mid 157$

34. a) $3 \mid 42$ b) $4 \mid 82$ c) $1 \mid 19$
d) $19 \mid 1$ e) $19 \mid 19$ f) $17 \mid 136$

Ermittle alle Teiler von jeder der folgenden Zahlen! Unterstreiche jeweils die Primzahlen!

35. 12; 18; 14; 64; 48; 84; 90; 92; 240; 160; 360; 210

36. 15; 24; 21; 72; 63; 96; 80; 98; 180; 150; 480; 720

Schreibe alle Primzahlen auf, die zwischen den folgenden Zahlen liegen!

37. a) 0 und 20 b) 20 und 30
c) 40 und 50 d) 60 und 70
e) 80 und 90 f) 100 und 110

38. a) 10 und 20 b) 30 und 40
c) 50 und 60 d) 70 und 80
e) 90 und 100 f) 110 und 120

Wieviel verschiedene Primzahlen sind unter den Teilern von jeder der folgenden Zahlen? Bilde von jeder Zahl die Summe der Teiler!

39. 6; 47; 63; 144; 64; 101

40. 18; 43; 28; 324; 81; 103

Bilde folgende Mengen und zähle ihre Elemente auf!

41. a) Menge der durch 8 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100
b) Menge der durch 9 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100

42. a) Menge der durch 4 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 100
b) Menge der Primzahlen zwischen 1 und 100

Ermittle von den folgenden Zahlen jeweils die Menge aller Teiler und die Menge aller Primzahlen unter den Teilern!

43. 24; 462; 650; 858; 665

44. 48; 231; 510; 1 122; 805

Stelle fest, ob folgendes gilt! Begründe deine Feststellungen!

45. a) $7|28 + 35$ b) $2|18 + 11$ c) $3|48 - 21$ d) $5|35 + 13$

46. a) $7|21 + 28$ b) $2|16 + 13$ c) $3|51 - 36$ d) $5|48 + 25$

47. a) $7|28 \cdot 41$ b) $5|8 \cdot 4$ c) $3|51 \cdot 26$ d) $6|9 \cdot 8$

48. a) $7|35 \cdot 31$ b) $5|9 \cdot 6$ c) $3|57 \cdot 28$ d) $6|15 \cdot 4$

Untersuche, welche der folgenden Zahlen durch 10 teilbar sind! Schreibe diese Zahlen in der Form $b = 10 \cdot x$!

49. 25 036; 8 300; 174 802; 53 460; 94 300; 60 000; 84 206; 0

50. 34 610; 7 436; 186 104; 48 200; 76 200; 400 000; 53 604; 0

Stelle fest, welche der folgenden Zahlen durch 5 teilbar sind! Schreibe diese Zahlen in der Form $a = 5 \cdot x$!

51. 17 375; 39 706; 40 250; 97 874; 66 555; 125 973; 306 025; 2 458

52. 29 604; 16 825; 39 750; 228 977; 98 734; 33 555; 1 728; 204 015

53. Nenne fünf dreistellige Zahlen, die
a) durch 2 teilbar,
b) nicht durch 2 teilbar sind!

54. Nenne fünf vierstellige Zahlen, die
a) durch 2 teilbar,
b) nicht durch 2 teilbar sind!

55. Welche der folgenden Zahlen sind durch 4 teilbar?
Schreibe diese Zahlen in der Form $a = 4 \cdot x$!

48; 42; 724; 5 032; 37 952; 524 598; 24 607 348

56. Welche der folgenden Zahlen sind durch 8 teilbar?
Schreibe diese Zahlen in der Form $a = 8 \cdot y$!

36; 54; 916; 3 056; 43 752; 346 978; 26 305 188

57. Nenne fünf sechsstellige Zahlen, die durch 8 teilbar sind!

58. Nenne fünf sechsstellige Zahlen, die durch 4 teilbar sind!

59. Nenne fünf sechsstellige Zahlen, die nicht durch 8, aber durch 4 teilbar sind!

60. Nenne fünf sechsstellige Zahlen, die nicht durch 4, aber durch 2 teilbar sind!

Gegeben seien die folgenden Zahlen:

61. 24 036; 311 201; 20 088; 26 743; 987 644; 8 213 421; 539 820; 9 864 291; 37 415 214; 874 854

62. 31 046; 221 602; 40 023; 43 189; 879 464; 2 831 214; 398 520; 6 849 912; 74 153 241; 485 478

a) Bilde die Quersummen dieser Zahlen!
b) Welche der Zahlen sind durch 9 teilbar? Schreibe sie in der Form $a = 9 \cdot x$!
c) Welche der Zahlen sind durch 3 teilbar? Schreibe sie in der Form $a = 3 \cdot y$!

a

Untersuche, welche der folgenden Zahlen durch 6 teilbar sind!
Schreibe diese Zahlen in der Form $a = 6 \cdot x$!

63. 756; 2 847; 9 462; 5 344; 378 961; 214 872; 7 392; 30 462

64. 576; 4 287; 9 552; 3 454; 387 691; 212 784; 9 732; 30 624

Gib jeweils fünf natürliche Zahlen an, die folgende Bedingungen erfüllen!

65. a) $n > 1\,000$; $9|n$
b) $n > 100$; $3|n$ und 9 nicht Teiler von n
c) $n > 1\,000$; $6|n$

66. a) $n > 10\,000$; $3|n$
b) $n > 100\,000$; 3 nicht Teiler von n
c) $n > 1\,000$; $4|n$

Untersuche mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, ob die folgenden Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 8, 9 oder 10 teilbar sind!

67. 3 678; 14 586; 67 924; 23 456 100; 8 896 500; 7 653 000

68. 7 638; 41 586; 76 924; 32 265 300; 9 985 500; 6 852 000

Überprüfe die folgenden Aussagen auf ihre Wahrheit!

69. a) $13|221$ b) $15|130$ c) $17|263$

70. a) $17|221$ b) $18|150$ c) $19|293$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

71. a) Wenn eine Zahl durch 8 teilbar ist, so ist sie auch durch 4 teilbar.
b) Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, so ist sie auch durch 8 teilbar.
c) Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, so ist sie auch durch 3 teilbar.
d) Wenn eine Zahl durch 5 teilbar ist, so ist sie auch durch 10 teilbar.

72. a) Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist sie auch durch 3 teilbar.
b) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist sie auch durch 9 teilbar.
c) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist sie auch durch 6 teilbar.
d) Wenn eine gerade Zahl durch 3 teilbar ist, so ist sie auch durch 6 teilbar.

Bilde folgende Teilmengen M der natürlichen Zahlen von 1 bis 50!

73. a) M_1: Die Teilmenge aller durch 3 teilbaren Zahlen
b) M_2: Die Teilmenge aller durch 6 teilbaren Zahlen
c) Veranschauliche die Beziehungen zwischen N und M_1 bzw. M_2 durch Diagramme!

74. a) M_1: Die Teilmenge aller durch 2 teilbaren Zahlen
b) M_2: Die Teilmenge aller durch 5 teilbaren Zahlen
c) Veranschauliche die Beziehungen zwischen N und M_1 bzw. M_2 durch Diagramme!

Veranschauliche durch Diagramme die Beziehungen zwischen den folgenden Mengen!

75. Menge der natürlichen Zahlen; Menge der durch 3 teilbaren Zahlen; Menge der durch 9 teilbaren Zahlen

76. Menge der natürlichen Zahlen; Menge der durch 4 teilbaren Zahlen; Menge der durch 8 teilbaren Zahlen

77. Gegeben sei die Menge der durch 4 teilbaren Zahlen zwischen 1 und 70.

78. Gegeben sei die Menge der durch 3 teilbaren Zahlen zwischen 0 und 60.

a) Ordne die Elemente dieser Menge nach der Größe!
b) Bilde von dieser Menge Teilmengen, indem du jeweils jedes 2., jedes 3., jedes 4. Element auswählst!
c) Was läßt sich über diese Teilmengen aussagen?

a

Zerlege die folgenden Zahlen in Primfaktoren!

79. 25; 42; 48; 50; 81; 121; 152; 240; 440; 625; 840; 960

80. 16; 28; 36; 54; 81; 100; 225; 306; 504; 720; 900; 1000

Zerlege die folgenden Zahlen in Primfaktoren! Gehe dabei jeweils von zwei verschiedenen Ausgangszerlegungen aus und vergleiche die Ergebnisse!

81. 120; 160; 200; 150

82. 180; 320; 220; 80

Ermittle durch Zerlegen in Primfaktoren die Teiler folgender Zahlen!

83. 180; 256; 372; 2 200

84. 120; 128; 348; 1 400

Schreibe die folgenden Produkte als Potenzen!

85. a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
c) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
d) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

86. a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
c) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$
d) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

Rechne die folgenden Potenzen aus!

87. 2^3; 5^3; 8^3; 4^5; 10^4

88. 2^4; 3^4; 10^5; 6^3; 7^2

Ermittle in den folgenden Aufgaben die gemeinsamen Teiler!
Gib an, welcher von ihnen der größte ist!

89. a) 12 und 18 b) 21 und 28
c) 72 und 63 d) 80 und 64

90. a) 60 und 45 b) 20 und 24
c) 42 und 56 d) 120 und 96

91. a) 12, 18 und 40 b) 16, 36 und 52
c) 24, 28, 36 und 84

92. a) 26, 25 und 130 b) 48, 84 und 150
c) 44, 56, 63 und 112

Schreibe von den folgenden Zahlenpaaren [*a*, *b*] diejenigen heraus, bei denen *a* und *b* zueinander teilerfremd sind!

93. [8; 22], [41; 164], [19; 58], [21; 63], [256; 105]

94. [19; 82], [23; 47], [11; 143], [36; 105], [243; 140]

Ermittle das k. g. V. von folgenden Zahlen!

95. a) 4 und 6 b) 9 und 12
c) 4 und 5 d) 24 und 27
e) 25 und 35 f) 60 und 80
g) 18 und 48 h) 4, 9, 24

96. a) 4 und 10 b) 12 und 15
c) 2 und 11 d) 14 und 35
e) 27 und 36 f) 20 und 45
g) 40 und 60 h) 7, 12, 21

a

Ermittle durch Zerlegen in Primfaktoren das k. g. V. der folgenden Zahlen!

97. a) 6, 8, 10, 12; 12, 15, 18, 24
b) 187, 44, 102; 221, 26, 6

98. a) 6, 9, 12, 15; 12, 16, 20, 24
b) 143, 78, 44; 221, 34, 6

In der folgenden Tabelle steht in der ersten Zeile jeweils das k. g.V. zweier Zahlen *a* und *b*. Ermittle die kleinste Zahl, die für *b* möglich ist!

99.

k. g. V.	24	105	180
a	6	15	90
b			

100.

k. g. V.	36	105	180
a	12	21	60
b			

Ermittle durch Zerlegen in Primfaktoren alle gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen!

101. a) 28, 119, 63 b) 36, 72, 81, 126

102. a) 35, 112, 56 b) 24, 48, 16, 128

Ermittle durch Zerlegen in Primfaktoren den g. g. T. der folgenden Zahlen!

103. a) 100, 125, 180 b) 700, 750, 875
c) 5 083, 11 339, 1 955

104. a) 225, 250, 324 b) 350, 910, 875
c) 4 301, 13 464, 4 625

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Gib eine Darstellung für *a* an!

1. a) *a* sei Element der Menge der geraden Zahlen.
b) *a* sei Element der Menge der durch 3 teilbaren Zahlen.

2. a) *a* sei Element der Menge der durch 5 teilbaren Zahlen.
b) *a* sei Element der Menge der ungeraden Zahlen.

Stelle fest, ob folgendes gilt! Begründe deine Feststellungen!

3. a) $4|30 + 14$ **b)** $9|63 - 18$
c) $18|54 \cdot 43$ **d)** $13|39 \cdot 41$

4. a) $4|10 + 18$ **b)** $9|81 - 27$
c) $17|51 \cdot 37$ **d)** $13|52 \cdot 43$

Welche der folgenden Produkte sind durch 10 teilbar?

Versuche, die Entscheidung zu treffen, ohne die Produkte auszurechnen! Überlege, welche Primzahlen unter den Teilern des Produktes sein müssen, wenn es durch 10 teilbar sein soll!

5. $24 \cdot 36$; $24 \cdot 15$; $356 \cdot 17$; $4\,328 \cdot 15$;
$2\,001 \cdot 375$; $553 \cdot 1\,266$; $7 \cdot 420$; $0 \cdot 23$

6. $12 \cdot 48$; $16 \cdot 25$; $428 \cdot 19$; $3\,422 \cdot 305$;
$3\,001 \cdot 225$; $427 \cdot 1\,844$; $9 \cdot 310$; $47 \cdot 0$

Untersuche mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, ob die folgenden Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 8, 9 oder 10 teilbar sind!

7. 7 690; 33 872; 7 683 500; 7 653 300;
977 648; 54 897 225

8. 6 970; 15 694; 3 856 700; 7 835 500;
779 648; 45 789 135

Beweise die folgenden Sätze!

9. a) Die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen ist durch 3 teilbar!
b) Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

10. a) Das Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist durch 6 teilbar!
b) Die Summe zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

Ermittle das k. g. V. von folgenden Zahlen!

11. a) 5 und 8 b) 24, 36, 48
c) 40, 24, 15 d) 27, 36, 54

12. a) 3 und 8 b) 8, 24, 30
c) 63, 18, 14 d) 21, 56, 35

Kürze die folgenden Brüche, bis Zähler und Nenner jeweils teilerfremd sind!

13. a) $\frac{4}{6}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{48}{72}$
b) $\frac{225}{250}$; $\frac{240}{360}$; $\frac{270}{360}$; $\frac{27}{999}$

14. a) $\frac{8}{12}$; $\frac{12}{15}$; $\frac{18}{45}$; $\frac{54}{60}$
b) $\frac{216}{240}$; $\frac{250}{375}$; $\frac{300}{450}$; $\frac{66}{440}$

b) Gebrochene Zahlen

Kürze die folgenden Brüche so weit wie möglich!

1. a) $\frac{15}{25}$ b) $\frac{64}{56}$ c) $\frac{87}{111}$
d) $\frac{1\,000}{300}$ e) $\frac{7}{15}$ f) $\frac{70}{150}$
g) $\frac{123}{321}$ h) $\frac{5 \cdot 370}{37 \cdot 50}$ i) $\frac{17 \cdot 3 \cdot 9}{6 \cdot 51 \cdot 15}$

2. a) $\frac{12}{16}$ b) $\frac{70}{35}$ c) $\frac{513}{864}$
d) $\frac{105}{75}$ e) $\frac{11}{36}$ f) $\frac{130}{65}$
g) $\frac{504}{405}$ h) $\frac{7 \cdot 80}{8 \cdot 70}$ i) $\frac{18 \cdot 8 \cdot 37}{185 \cdot 72}$

Erweitere die folgenden Brüche so, daß ihr Nenner 48 wird! Welche Aufgaben sind nicht lösbar?

3. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{11}{12}$ c) $\frac{6}{7}$
d) $\frac{1}{32}$ e) $\frac{25}{24}$ f) $\frac{7}{96}$

4. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{9}{8}$ c) $\frac{8}{9}$
d) $\frac{48}{6}$ e) $\frac{7}{4}$ f) $\frac{101}{480}$

Ermittle in den folgenden Paaren von Brüchen die Zahl x ($x \in N$) so, daß die Brüche durch Kürzen auseinander hervorgehen! Gib die natürliche Zahl an, mit der jeweils gekürzt worden ist! Welche Aufgaben sind nicht lösbar?

5. a) $\frac{10}{30}$ und $\frac{1}{x}$ b) $\frac{16}{64}$ und $\frac{x}{8}$
c) $\frac{35}{91}$ und $\frac{x}{13}$ d) $\frac{9}{x}$ und $\frac{999}{111}$
e) $\frac{21}{28}$ und $\frac{11}{x}$ f) $\frac{x}{11}$ und $\frac{5}{121}$

6. a) $\frac{75}{125}$ und $\frac{3}{x}$ b) $\frac{34}{2}$ und $\frac{17}{x}$
c) $\frac{x}{5}$ und $\frac{75}{125}$ d) $\frac{x}{12}$ und $\frac{100}{60}$
e) $\frac{x}{12}$ und $\frac{5}{132}$ f) $\frac{12}{x}$ und $\frac{132}{72}$

Stelle fest, ob die folgenden Paare von Brüchen jeweils in derselben Klasse liegen!

7. a) $\frac{7}{11}$ und $\frac{49}{77}$ b) $\frac{5}{3}$ und $\frac{50}{32}$
c) $\frac{3}{17}$ und $\frac{300}{170}$ d) $\frac{0}{7}$ und $\frac{10}{70}$
e) $\frac{22}{23}$ und $\frac{84}{92}$ f) $\frac{15}{16}$ und $\frac{80}{75}$

8. a) $\frac{16}{23}$ und $\frac{80}{115}$ b) $\frac{27}{31}$ und $\frac{62}{54}$
c) $\frac{0}{13}$ und $\frac{0}{30}$ d) $\frac{5}{8}$ und $\frac{30}{48}$
e) $\frac{21}{24}$ und $\frac{35}{40}$ f) $\frac{17}{21}$ und $\frac{34}{43}$

Welche der folgenden Brüche liegen jeweils in derselben Klasse?

9. a) $\frac{5}{4}, \frac{0}{2}, \frac{15}{12}, \frac{50}{45}, \frac{55}{44}$
b) $\frac{7}{1}, \frac{21}{3}, \frac{63}{8}, \frac{1}{7}, \frac{77}{11}$
c) $\frac{12}{15}, \frac{16}{25}, \frac{25}{20}, \frac{8}{30}, \frac{132}{165}$

10. a) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{12}{16}, \frac{12}{15}, \frac{36}{48}$
b) $\frac{5}{1}, \frac{20}{15}, \frac{40}{8}, \frac{55}{11}, \frac{0}{100}$
c) $\frac{9}{12}, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{12}{16}, \frac{99}{132}$

Stelle die folgenden Brüche als Dezimalbrüche dar!

11. a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{3}{100}$ c) $\frac{7}{10\,000}$
d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{3}{5}$ f) $\frac{12}{8}$
g) $\frac{32}{50}$ h) $\frac{7}{40}$ i) $\frac{21}{20}$

b

12. a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{7}{1\,000}$ c) $\frac{2}{1\,000\,000}$
d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{11}{25}$
g) $\frac{9}{40}$ h) $\frac{3}{20}$ i) $\frac{17}{200}$

Stelle die folgenden Dezimalbrüche als gemeine Brüche dar, deren Zähler und Nenner zueinander teilerfremd sind!

13. a) 0,25 b) 0,72 c) 0,111
d) 2,7 e) 15,5 f) 0,77
g) 0,002 h) 4,05 i) 2,75

14. a) 0,4 b) 0,75 c) 0,325
d) 3,5 e) 8,4 f) 0,024
g) 0,015 h) 1,024 i) 0,0016

Stelle fest, ob durch die folgenden Paare gemeiner Bruch – Dezimalbruch jeweils dieselbe gebrochene Zahl dargestellt wird!

15. a) $\frac{7}{25}$ und 0,28 b) $\frac{3}{40}$ und 0,06
c) $\frac{11}{5}$ und 2,2 d) $\frac{13}{8}$ und 1,625
e) $\frac{1}{7}$ und 0,7 f) $\frac{3}{8}$ und 0,375

16. a) $\frac{8}{50}$ und 0,16 b) $\frac{7}{8}$ und 0,875
c) $\frac{6}{30}$ und 0,25 d) $\frac{14}{35}$ und 0,4
e) $\frac{5}{2}$ und 2,5 f) $\frac{1}{6}$ und 1,6

Zeichne einen Zahlenstrahl und trage auf ihm die in den folgenden Aufgaben gegebenen gemeinen Brüche und Dezimalbrüche ein!

17. a) Aufgabe **9** b) Aufgabe **15**

18. a) Aufgabe **10** b) Aufgabe **16**

Mache die folgenden Brüche gleichnamig!

19. a) $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{4}$ b) $\frac{8}{11}$ und $\frac{55}{77}$
c) $\frac{7}{16}$ und $\frac{3}{64}$ d) $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$

20. a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{6}{7}$ b) $\frac{2}{9}$ und $\frac{8}{36}$
c) $\frac{5}{12}$ und $\frac{7}{60}$ d) $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{1}$

21. a) $\frac{15}{36}$ und $\frac{11}{24}$ b) $\frac{1}{7}$ und $\frac{7}{1}$
c) $\frac{11}{12}$ und $\frac{12}{13}$ d) $\frac{0}{5}$ und $\frac{3}{35}$

22. a) $\frac{3}{24}$ und $\frac{2}{16}$ b) $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{3}$
c) $\frac{14}{15}$ und $\frac{15}{14}$ d) $\frac{0}{6}$ und $\frac{7}{45}$

23. a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$
b) $\frac{1}{5}, \frac{3}{15}, \frac{7}{35}$ und $\frac{10}{50}$

24. a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$
b) $\frac{3}{10}, \frac{4}{100}, \frac{5}{1\,000}$ und $\frac{6}{10\,000}$

25. a) $\frac{7}{15}, \frac{11}{60}, \frac{13}{45}$ und $\frac{9}{50}$
b) $\frac{2}{7}, \frac{1}{5}, \frac{7}{20}, \frac{6}{35}$ und $\frac{1}{14}$

26. a) $\frac{5}{12}, \frac{7}{36}, \frac{5}{48}$ und $\frac{11}{120}$
b) $\frac{27}{26}, \frac{11}{65}, \frac{5}{52}, \frac{17}{130}$ und $\frac{5}{13}$

27. a) 0,8 und 0,75 b) 0,12 und 0,2
c) 0,215 und 0,3
d) 5,4; 1,82; 0,007 und 3,0

28. a) 0,6 und 0,64 b) 0,15 und 0,5
c) 0,4 und 0,444
d) 8,2; 15,25; 0,0007 und 4,7

Vergleiche die folgenden Paare gebrochener Zahlen! Begründe die Ergebnisse!

29. a) $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$ b) $\frac{9}{12}$ und $\frac{7}{12}$
c) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{15}$ und $\frac{0}{12}$
e) $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{7}$

30. a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ b) $\frac{11}{15}$ und $\frac{13}{15}$
c) $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{10}$
e) $\frac{0}{6}$ und $\frac{0}{7}$ f) $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$

31. a) $\frac{7}{10}$ und $\frac{2}{9}$ b) $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$
c) $\frac{7}{20}$ und $\frac{11}{30}$ d) $\frac{0}{18}$ und $\frac{0}{24}$

32. a) $\frac{7}{15}$ und $\frac{3}{4}$ b) $\frac{13}{15}$ und $\frac{7}{10}$
c) $\frac{8}{30}$ und $\frac{0}{20}$ d) $\frac{15}{36}$ und $\frac{11}{24}$

Stelle fest, welche der folgenden gebrochenen Zahlen kleiner als $\frac{1}{1}$ und welche größer als $\frac{1}{1}$ oder gleich $\frac{1}{1}$ sind!

33. $\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{6}{6}, \frac{10}{9}$

34. $\frac{8}{3}, \frac{1}{5}, \frac{9}{9}, \frac{11}{4}, \frac{3}{2}$

Vergleiche die folgenden Paare gebrochener Zahlen miteinander!

35. a) 0,38 und 0,37 b) 0,4 und 0,05
c) 0,045 und 0,4
d) 0,00485 und 0,0005

36. a) 0,71 und 0,72 b) 0,07 und 0,6
c) 0,125 und 0,215
d) 0,0007 und 0,69

Vergleiche folgende gebrochene Zahlen miteinander, indem du jeweils den Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelst!

37. a) $\frac{7}{30}$ und 0,25 b) 0,6 und $\frac{4}{5}$
c) 0,95 und $\frac{4}{5}$ d) 2,55 und $\frac{11}{4}$
e) $\frac{3}{11}$ und 0,255 f) 0,99 und $\frac{136}{137}$

38. a) $\frac{9}{10}$ und 0,91 b) $\frac{4}{8}$ und 0,375
c) $\frac{1}{5}$ und 0,125 d) $\frac{7}{9}$ und 0,77
e) 0,66 und $\frac{12}{19}$ f) 0,98 und $\frac{72}{75}$

Vergleiche folgende gebrochene Zahlen miteinander, indem du jeweils den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelst!

39. a) $\frac{7}{8}$ und 0,9 b) $\frac{3}{2}$ und 1,49
c) $\frac{9}{16}$ und 0,58 d) 0,237 und $\frac{19}{80}$

40. a) $\frac{3}{4}$ und 0,76 b) $\frac{11}{20}$ und 0,54
c) 1,007 und $\frac{17}{16}$ d) 0,48 und $\frac{12}{25}$

Ordne die folgenden Zahlen nach der Größe! Beginne jeweils mit der kleinsten Zahl!

41. a) $\frac{27}{37}, \frac{16}{37}, \frac{14}{37}, \frac{25}{37}, \frac{6}{37}$
b) $\frac{5}{13}, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, \frac{5}{11}, \frac{5}{23}$
c) $\frac{1}{8}, \frac{3}{7}, \frac{5}{4}, \frac{0}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{5}$

42. a) $\frac{13}{37}, \frac{12}{37}, \frac{5}{37}, \frac{0}{37}, \frac{29}{37}$
b) $\frac{11}{5}, \frac{11}{7}, \frac{11}{31}, \frac{11}{22}, \frac{11}{11}$
c) $\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{9}, \frac{7}{10}, \frac{8}{12}, \frac{8}{9}, \frac{12}{1}$

b

43. a) $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{17}{16}$, $\frac{7}{6}$
b) $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{13}{7}$, $\frac{9}{2}$
c) $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{0}{30}$, $\frac{98}{100}$, $\frac{42}{150}$

44. a) $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{101}{100}$
b) $\frac{11}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{19}{3}$, $\frac{41}{7}$, $\frac{15}{1}$
c) $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{50}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{0}{75}$, $\frac{1}{15}$

45. a) 0,284; 0,079; 0,987; 0,015
b) 0,021; 0,54; 0,054; 0,21
c) 0,0007; 0,7; 0,007; 0,07

46. a) 0,045; 0,054; 0,0082; 0,00037
b) 0,004; 0,040; 0,400; 0,0004
c) 0,528; 0,285; 0,0825; 0,00852

Ordne die folgenden Zahlen nach der Größe! Beginne jeweils mit der größten Zahl!

b

47. a) $\frac{14}{43}$, $\frac{41}{43}$, $\frac{13}{43}$, $\frac{31}{43}$, $\frac{25}{43}$
b) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{1}$
c) $\frac{97}{136}$, $\frac{41}{68}$, $\frac{11}{17}$, $\frac{59}{85}$, $\frac{21}{34}$

48. a) $\frac{15}{51}$, $\frac{19}{51}$, $\frac{51}{51}$, $\frac{91}{51}$, $\frac{37}{51}$
b) $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{21}$, $\frac{7}{17}$
c) $\frac{6}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{6}$

49. a) 0,278; 0,0785; 0,00875; 0,782
b) 2,81; 8,21; 21,8; 12,8; 18,2

50. a) 0,0481; 0,00184; 0,0841; 0,0814
b) 3,41; 34,1; 4,31; 43,1; 13,4

Gib jeweils fünf gebrochene Zahlen an, die zwischen den folgenden Zahlen liegen! Gibt es jeweils noch weitere solcher Zahlen?

51. a) $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{7}$ b) $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{5}$
c) $\frac{11}{13}$ und $\frac{12}{13}$ d) $\frac{8}{11}$ und $\frac{11}{8}$
e) 0,42 und 0,43 f) 0,7 und 0,9

52. a) $\frac{3}{8}$ und $\frac{4}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$
c) $\frac{5}{9}$ und $\frac{6}{9}$ d) $\frac{11}{13}$ und $\frac{13}{11}$
e) 0,38 und 0,83 f) 0,11 und 0,12

Für welche x ($x \in N$) gelten folgende Ungleichungen?

53. a) $\frac{3}{5} < \frac{x}{5} < \frac{8}{5}$ b) $\frac{3}{8} < \frac{x}{8} < \frac{3}{2}$

54. a) $\frac{2}{9} < \frac{x}{9} < \frac{7}{9}$ b) $\frac{5}{6} < \frac{x}{6} < \frac{5}{3}$

55. a) $\frac{4}{7} < \frac{x}{3} < \frac{5}{8}$ b) $\frac{3}{5} < \frac{4}{x} < \frac{5}{3}$ $(x \neq 0)$

56. a) $\frac{9}{11} < \frac{x}{2} < \frac{8}{9}$ b) $\frac{4}{7} < \frac{5}{x} < \frac{3}{4}$ $(x \neq 0)$

57. Denke dir eine gebrochene Zahl, die als gemeiner Bruch dargestellt ist! Der Zähler soll größer als Null, der Nenner soll größer als 1 sein.

a) Vergrößere den Zähler um 1 und lasse den Nenner unverändert!
b) Vergrößere den Nenner um 1 und lasse den Zähler unverändert!
c) Vergrößere Zähler *und* Nenner jeweils um 1!
d) Verkleinere den Zähler um 1 und lasse den Nenner unverändert!
e) Verkleinere den Nenner um 1 und lasse den Zähler unverändert!
f) Verkleinere Zähler *und* Nenner um 1!

In allen sechs Fällen erhältst du wieder eine gebrochene Zahl. Vergleiche diese gebrochenen Zahlen mit der gedachten Zahl!

58. Wenn man bei einem gemeinen Bruch Zähler (ungleich 0) und Nenner vertauscht, so erhält man einen Bruch, der im allgemeinen nicht zu derselben Klasse gemeiner Brüche wie der ursprüngliche gehört.
Nenne Beispiele dafür, daß nach Vertauschen von Zähler und Nenner eines gemeinen Bruches trotzdem dieselbe gebrochene Zahl dargestellt ist!

Berechne und kürze so weit wie möglich!

59. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{4}{5}+\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{6}+\frac{5}{18}$ d) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{12}+\frac{5}{8}$ f) $\frac{3}{7}+\frac{1}{3}$

60. a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4}+\frac{7}{10}$ d) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ e) $\frac{5}{6}+\frac{5}{21}$ f) $\frac{4}{7}+\frac{1}{4}$

61. a) $\frac{3}{8}+\frac{7}{16}$ b) $\frac{1}{4}+\frac{5}{20}$ c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$ d) $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{4}+\frac{7}{10}$ f) $\frac{3}{10}+\frac{11}{30}$

62. a) $\frac{2}{9}+\frac{5}{18}$ b) $\frac{1}{5}+\frac{4}{20}$ c) $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$ d) $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$ e) $\frac{2}{7}+\frac{4}{11}$ f) $\frac{7}{10}+\frac{1}{20}$

63. a) $\frac{34}{35}+\frac{24}{25}$ b) $\frac{1}{120}+\frac{1}{12}$ c) $\frac{3}{8}+\frac{13}{64}$ d) $\frac{7}{51}+\frac{6}{34}$

64. a) $\frac{39}{40}+\frac{49}{50}$ b) $\frac{1}{110}+\frac{1}{11}$ c) $\frac{2}{9}+\frac{27}{81}$ d) $\frac{2}{65}+\frac{4}{39}$

65. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{1}+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{7}{10}$

66. a) $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}+\frac{2}{2}+\frac{3}{1}$ c) $\frac{9}{10}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{8}+\frac{9}{11}+\frac{1}{4}$

67. a) $\frac{11}{15}+\frac{18}{25}+\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{9}{10}+\frac{11}{18}$ c) $\frac{8}{7}+\frac{7}{8}+\frac{55}{56}$ d) $\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{9}$

68. a) $\frac{11}{24}+\frac{17}{36}+\frac{7}{9}$ b) $\frac{11}{24}+\frac{19}{32}+\frac{27}{40}$ c) $\frac{6}{7}+\frac{7}{6}+\frac{41}{42}$ d) $\frac{2}{4}+\frac{4}{6}+\frac{6}{8}$

69. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{7}{15}+\frac{9}{20}+\frac{5}{8}+\frac{9}{10}$
b) $\frac{4}{5}+\frac{3}{10}+\frac{5}{12}+\frac{19}{30}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$

70. a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$
b) $\frac{4}{7}+\frac{1}{6}+\frac{9}{14}+\frac{5}{12}+\frac{16}{21}+\frac{1}{3}+\frac{7}{8}$

Berechne x ($x \in N$; wenn x im Nenner, $x \neq 0$) in den folgenden Aufgaben!

71. a) $\frac{3}{5}+\frac{x}{5}=\frac{7}{5}$ b) $\frac{1}{11}+\frac{x}{11}=\frac{1}{11}$ c) $\frac{3}{7}+\frac{x}{7}=\frac{2}{1}$ d) $\frac{5}{14}+\frac{x}{14}=\frac{1}{2}$ e) $\frac{x}{28}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ f) $\frac{12}{x}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

72. a) $\frac{2}{7}+\frac{x}{7}=\frac{5}{7}$ b) $\frac{7}{13}+\frac{x}{13}=\frac{8}{13}$ c) $\frac{x}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}$ d) $\frac{5}{12}+\frac{x}{12}=\frac{3}{4}$ e) $\frac{x}{5}+\frac{1}{4}=\frac{17}{20}$ f) $\frac{5}{x}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

73. a) $\frac{3}{7}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ b) $\frac{17}{51}+\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{8}{15}+\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$ d) $\frac{11}{24}+\frac{x}{5}=\frac{2}{3}$

74. a) $\frac{8}{17}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ b) $\frac{19}{76}+\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{16}+\frac{x}{3}=\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{18}+\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

Berechne und kürze so weit wie möglich!

75. a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{10}-\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{8}-\frac{3}{12}$ f) $\frac{4}{15}-\frac{1}{5}$

76. a) $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{8}-\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}-\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{6}-\frac{3}{8}$ f) $\frac{5}{16}-\frac{1}{4}$

77. a) $\frac{11}{12}-\frac{5}{6}$ b) $\frac{7}{18}-\frac{5}{12}$ c) $\frac{5}{12}-\frac{7}{18}$ d) $\frac{4}{27}-\frac{5}{36}$ e) $\frac{115}{120}-\frac{81}{90}$ f) $\frac{10}{11}-\frac{11}{13}$

78. a) $\frac{13}{14}-\frac{6}{7}$ b) $\frac{11}{20}-\frac{8}{15}$ c) $\frac{8}{15}-\frac{11}{20}$ d) $\frac{21}{54}-\frac{19}{48}$ e) $\frac{12}{13}-\frac{10}{11}$ f) $\frac{12}{13}-\frac{15}{17}$

79. a) $\frac{29}{60}-\frac{12}{48}$ b) $\frac{15}{63}-\frac{17}{81}$ c) $\frac{35}{91}-\frac{25}{65}$ d) $\frac{11}{36}-\frac{12}{33}$

80. a) $\frac{150}{24}-\frac{200}{32}$ b) $\frac{200}{32}-\frac{150}{24}$ c) $\frac{19}{75}-\frac{11}{45}$ d) $\frac{35}{45}-\frac{28}{36}$

81. a) $\frac{21}{12}-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}$
b) $\frac{39}{18}-\frac{50}{45}-\frac{11}{36}-\frac{81}{90}$
c) $\frac{5}{12}-\frac{3}{8}-\frac{1}{32}-\frac{1}{96}$

82. a) $\frac{31}{15}-\frac{7}{5}-\frac{1}{3}$
b) $\frac{17}{66}-\frac{3}{44}-\frac{2}{33}-\frac{7}{55}$
c) $\frac{7}{15}-\frac{3}{8}-\frac{1}{60}-\frac{3}{40}$

b

Ermittle in den folgenden Aufgaben x ($x \in N$; wenn x im Nenner, $x \neq 0$)!

83. a) $\frac{5}{8} - \frac{x}{8} = \frac{3}{8}$ b) $\frac{7}{13} - \frac{x}{13} = \frac{7}{13}$
c) $\frac{11}{14} - \frac{x}{7} = \frac{5}{14}$ d) $\frac{x}{36} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

84. a) $\frac{5}{9} - \frac{x}{9} = \frac{2}{9}$ b) $\frac{8}{11} - \frac{x}{11} = \frac{0}{11}$
c) $\frac{13}{15} - \frac{x}{5} = \frac{1}{15}$ d) $\frac{17}{21} - \frac{x}{17} = \frac{17}{21}$

85. a) $\frac{x}{27} - \frac{2}{9} = \frac{0}{11}$ b) $\frac{18}{25} - \frac{15}{x} = \frac{3}{4}$
c) $\frac{5}{18} - \frac{x}{15} = \frac{13}{90}$ d) $\frac{12}{x} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$

86. a) $\frac{x}{39} - \frac{7}{13} = \frac{1}{13}$ b) $\frac{15}{17} - \frac{2}{x} = \frac{9}{10}$
c) $\frac{8}{x} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ d) $\frac{13}{24} - \frac{x}{3} = \frac{15}{72}$

Berechne! Gib die Summe auch als gemeinen Bruch an!

87. a) $0,3 + 0,77 + 1,82$
b) $0,7 + 0,89 + 11,2 + 7,23$
c) $1,39 + 0,094 + 27,2 + 0,801 + 0,309$
d) $18,28 + 19,72 + 0,43 + 5,55 + 10,02$
e) $0,021 + 0,0021 + 0,21 + 0,00021$

88. a) $0,7 + 0,33 + 1,98$
b) $0,93 + 9,712 + 4,3 + 0,2 + 0,1$
c) $12,19 + 11,2 + 0,002 + 0,77 + 11,01$
d) $0,041 + 13,82 + 0,55 + 7,22$
e) $0,17 + 0,00017 + 0,017 + 0,0017 + 1,7$

Berechne!

89. a) $2,88 - 0,33 - 1,47$
b) $0,044 - 0,013 - 0,009 - 0,018$
c) $23,8 - 20,9 - 2,09 - 0,209$

90. a) $3,07 - 0,98 - 2,07$
b) $0,0098 - 0,0002 - 0,0076 - 0,001$
c) $33,4 - 28,7 - 2,87 - 0,287$

91. a) $2,074 - 1,382 - 0,377 - 0,298$
b) $15,008 - 7,403 - 0,0201 - 3,004$
c) $2700,4 - 328,9 - 1\,999,8 - 32,07$

92. a) $1,021 - 0,8074 - 0,0928 - 0,1$
b) $11,003 - 2,807 - 5,041 - 3,027$
c) $2\,500,8 - 1\,328,7 - 13,5 - 1\,111,1$

Gib die Summe als gemeinen Bruch an, der sich nicht weiter kürzen läßt!

93. a) $\frac{3}{7} + 0,7$ b) $\frac{9}{2} + 3,68$
c) $0,9 + \frac{2}{3}$ d) $0,6 + \frac{2}{3}$
e) $12,7 + \frac{8}{3} + \frac{4}{5}$
f) $\frac{7}{12} + 0,35 + 0,45 + \frac{9}{20}$

94. a) $1,9 + \frac{7}{25}$ b) $\frac{461}{50} + 2,6$
c) $\frac{11}{3} + 0,89$ d) $0,39 + \frac{11}{13}$
e) $\frac{9}{7} + 11,5 + \frac{3}{2}$
f) $\frac{2}{15} + 1,47 + 3,24 + \frac{1}{2}$

Verwandle den Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch und berechne!

95. a) $0,8 - \frac{7}{10}$ b) $0,92 - \frac{4}{5}$
c) $\frac{13}{15} - 0,7$ d) $\frac{7}{20} - 0,85$

96. a) $0,6 - \frac{3}{10}$ b) $0,68 - \frac{3}{4}$
c) $\frac{11}{12} - 0,9$ d) $\frac{23}{25} - 0,92$

Schreibe als gemischte Zahl!

97. a) $\frac{17}{5}$ b) $\frac{6}{4}$ c) $\frac{91}{18}$
d) $\frac{27}{2}$ e) $\frac{58}{19}$ f) $\frac{112}{55}$

98. a) $\frac{13}{7}$ b) $\frac{8}{6}$ c) $\frac{73}{37}$
d) $\frac{31}{3}$ e) $\frac{81}{18}$ f) $\frac{257}{127}$

b

Schreibe die folgenden Zahlen als gemeine Brüche, die sich nicht mehr kürzen lassen!

99. a) $4\frac{3}{5}$ b) $2\frac{1}{3}$ c) $6\frac{2}{4}$ d) $5\frac{9}{15}$ e) $11\frac{1}{10}$ f) $8\frac{38}{57}$

100. a) $2\frac{1}{7}$ b) $8\frac{2}{3}$ c) $5\frac{1}{8}$ d) $7\frac{24}{54}$ e) $9\frac{8}{9}$ f) $10\frac{69}{92}$

Berechne!

101. a) $2\frac{3}{4} + 7\frac{3}{4}$ b) $1\frac{9}{10} + 9\frac{1}{10}$ c) $5\frac{3}{8} + 2\frac{1}{4}$ d) $10\frac{7}{9} + 3\frac{3}{4}$

102. a) $3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{5}$ b) $4\frac{2}{7} + 5\frac{5}{7}$ c) $6\frac{1}{9} + 3\frac{4}{5}$ d) $5\frac{1}{4} + 2\frac{3}{7}$

103. a) $3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{6}$ b) $11\frac{7}{8} - 1\frac{3}{4}$ c) $5\frac{11}{13} - 2\frac{25}{26}$ d) $7\frac{1}{12} - 6\frac{1}{4}$

104. a) $5\frac{1}{4} - 4\frac{1}{6}$ b) $13\frac{4}{5} - 10\frac{7}{10}$ c) $8\frac{10}{11} - \frac{100}{33}$ d) $6\frac{2}{15} - 3\frac{3}{5}$

105. Die Summe zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{47}{60}$. Der eine Summand sei
a) $\frac{23}{60}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{8}{36}$ d) $\frac{4}{15}$ e) $\frac{11}{40}$
Wie groß ist der andere Summand?

106. Die Differenz zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{3}{4}$. Der Minuend sei
a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{17}{13}$ e) $\frac{11}{13}$
Wie groß ist der Subtrahend?

107. Ermittle die Zahl, die um
a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{3}{10}$ e) $\frac{11}{4}$
größer als $\frac{11}{12}$ ist!

108. Ermittle die Zahl, die um
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{8}$ e) $\frac{11}{5}$
kleiner als $\frac{5}{2}$ ist!

109. Ein Schüler, der sich zu Hause für den Unterricht auf den nächsten Tag vorbereitet, beschäftigt sich $\frac{3}{4}$ h mit Deutsch, $\frac{1}{2}$ h mit Mathematik und $\frac{1}{4}$ h mit Geschichte. Wie viele Minuten war er insgesamt beschäftigt?

110. Auf einem Felsen (43,4 m über dem Meeresspiegel) wurde ein Leuchtturm gebaut. In einer Höhe von 22,5 m vom Fußpunkt des Leuchtturmes befindet sich ein Scheinwerfer. Wie hoch liegt dieser Scheinwerfer über dem Meeresspiegel?

111. Zwei Wanderer laufen einander von zwei Orten aus entgegen. Der erste legt die Entfernung zwischen den beiden Orten in 8 h, der zweite in 6 h zurück. Um welchen Teil der gesamten Strecke nähern sie sich einander in 1 h?

112. Zwei Radfahrer starten von einem Ort aus gleichzeitig. Der erste erreicht das gemeinsame Ziel in 9 h, der zweite in 6 h! Um welchen Teil der gesamten Strecke ist der zweite Radfahrer nach 1 h dem ersten voraus?

113. Fünf Eisenbahnwaggons sind mit Steinkohle beladen. Die Tabelle gibt die einzelnen Ladungen an.

Waggon	1	2	3	4	5
t	15,75	12,09	18,78	14,65	14,82

114. Die Fischfangflotte unserer Republik konnte ihre Fangergebnisse ständig erhöhen. Die Tabelle enthält Zahlenangaben in Tausend t.

1950	1960	1965	1967
26,6	106,8	219,9	279,7

a) Wieviel Tonnen beträgt die Ladung der fünf Waggons zusammen?
b) Wieviel Tonnen hat der Waggon mit der größten Ladung mehr geladen als jeder der anderen Waggons?

a) Wieviel Tausend Tonnen Fisch wurden in jedem der angegebenen Jahre mehr gefangen als 1950?
b) Stelle die Fangergebnisse graphisch dar!

Berechne!

115. a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3}$ c) $\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{1}$ e) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}$ f) $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{7}$

116. a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}$ f) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$

b

117. a) $\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{11}\cdot\frac{12}{11}$ c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{4}\cdot\frac{5}{5}$ e) $\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{4}$ f) $\frac{8}{15}\cdot\frac{15}{8}$

118. a) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{7}$ b) $\frac{4}{13}\cdot\frac{14}{13}$ c) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$ d) $\frac{7}{7}\cdot\frac{3}{3}$ e) $\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{6}$ f) $\frac{11}{13}\cdot\frac{13}{11}$

119. a) $\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{11}\cdot\frac{9}{13}$ c) $\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{2}$ d) $\frac{8}{8}\cdot\frac{9}{9}$ e) $\frac{11}{17}\cdot\frac{16}{17}$ f) $\frac{3}{5}\cdot\frac{0}{2}$

120. a) $\frac{5}{8}\cdot\frac{11}{3}$ b) $\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{17}$ c) $\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{3}$ d) $\frac{7}{7}\cdot\frac{11}{11}$ e) $\frac{0}{3}\cdot\frac{11}{28}$ f) $\frac{2}{19}\cdot\frac{18}{19}$

Kürze so weit wie möglich, bevor du multiplizierst!

121. a) $\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{18}\cdot\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{7}\cdot\frac{17}{51}$ d) $\frac{13}{27}\cdot\frac{9}{26}$ e) $\frac{16}{7}\cdot\frac{28}{64}$ f) $\frac{5}{14}\cdot\frac{70}{55}$

122. a) $\frac{9}{12}\cdot\frac{96}{81}$ b) $\frac{11}{33}\cdot\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{16}{64}$ d) $\frac{15}{26}\cdot\frac{65}{75}$ e) $\frac{15}{8}\cdot\frac{22}{100}$ f) $\frac{35}{48}\cdot\frac{36}{25}$

123. a) $\frac{7}{3}\cdot 5\frac{1}{4}$ b) $\frac{12}{18}\cdot 1\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{11}$

124. a) $\frac{11}{18}\cdot 3\frac{3}{5}$ b) $\frac{17}{24}\cdot 5\frac{20}{34}$ c) $3\frac{2}{4}\cdot\frac{20}{21}$

Ermittle in den folgenden Gleichungen x bzw. y ($x, y \in N$; $y \neq 0$)!

125. a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{x}{4}=\frac{21}{20}$ b) $\frac{4}{7}\cdot\frac{x}{3}=\frac{19}{21}$ c) $\frac{8}{11}\cdot\frac{x}{8}=\frac{2}{1}$ d) $\frac{9}{8}\cdot\frac{x}{4}=\frac{9}{8}$

126. a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{4}=\frac{10}{12}$ b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{x}{4}=\frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{9}\cdot\frac{x}{7}=\frac{5}{1}$ d) $\frac{5}{6}\cdot\frac{x}{3}=\frac{5}{6}$

127. a) $\frac{x}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{0}{2}$ b) $\frac{x}{17}\cdot\frac{34}{3}=\frac{5}{6}$ c) $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{y}=\frac{12}{15}$ d) $\frac{5}{y}\cdot\frac{11}{4}=\frac{5}{2}$

128. a) $\frac{x}{15}\cdot\frac{75}{7}=\frac{9}{14}$ b) $\frac{x}{3}\cdot\frac{7}{8}=\frac{0}{11}$ c) $\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{y}=\frac{7}{7}$ d) $\frac{8}{y}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

Ermittle in den folgenden Gleichungen einige Lösungen für x und y ($x, y \in N$; $y \neq 0$), darunter immer die, in denen x und y zueinander teilerfremd sind!

129. a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{y}=\frac{15}{8}$ b) $\frac{5}{8}\cdot\frac{x}{y}=\frac{0}{3}$ c) $\frac{x}{y}\cdot\frac{5}{2}=\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{8}\cdot\frac{x}{y}=\frac{3}{8}$

130. a) $\frac{5}{7}\cdot\frac{x}{y}=\frac{20}{21}$ b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{y}=\frac{3}{8}$ c) $\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{y}=\frac{0}{11}$ d) $\frac{8}{11}\cdot\frac{x}{y}=\frac{8}{11}$

Berechne!

131. a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}$ c) $\frac{13}{37}\cdot\frac{0}{11}\cdot\frac{28}{29}$ d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$

132. a) $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{3}{8}$ c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$ d) $\frac{8}{51}\cdot\frac{15}{17}\cdot\frac{0}{31}$

Berechne und kontrolliere das Ergebnis!

133. a) $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{7}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)$ c) $\frac{8}{11}\cdot\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{8}\right)$ d) $\frac{17}{91}\cdot\left(\frac{12}{30}-\frac{4}{10}\right)$

134. a) $\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{11}{4}+\frac{1}{5}\right)$ b) $\frac{8}{5}\cdot\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\right)$ c) $\frac{5}{13}\cdot\left(\frac{54}{20}-\frac{1}{10}\right)$ d) $\frac{11}{13}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)$

Gib das Produkt sowohl als Dezimalbruch als auch als möglichst weit gekürzten gemeinen Bruch an!

135. a) $0{,}3 \cdot 0{,}5$ b) $0{,}7 \cdot 0{,}15$ c) $0{,}12 \cdot 0{,}12$ d) $0{,}125 \cdot 0{,}5$

136. a) $0{,}4 \cdot 0{,}7$ b) $0{,}6 \cdot 0{,}18$ c) $0{,}15 \cdot 0{,}15$ d) $0{,}125 \cdot 0{,}8$

137. a) $0{,}36 \cdot 0{,}75$ b) $0{,}75 \cdot 1{,}2$ c) $33{,}2 \cdot 0{,}072$ d) $0{,}0038 \cdot 11{,}2$

138. a) $0{,}24 \cdot 0{,}25$ b) $0{,}85 \cdot 1{,}4$ c) $15{,}7 \cdot 0{,}018$ d) $0{,}0084 \cdot 13{,}7$

139. a) $0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8$ b) $0{,}12 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}05$ c) $1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1$ d) $81{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 4{,}5$ e) $0{,}01 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}01$ f) $0{,}1 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}01$

140. a) $0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5$ b) $0{,}15 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}07$ c) $17{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}04$ d) $74{,}4 \cdot 0{,}68 \cdot 2{,}1$ e) $0{,}2 \cdot 2{,}0 \cdot 0{,}02$ f) $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2$

b

Bilde das Reziproke folgender gebrochener Zahlen!

141. a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{4}{1}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{16}$ f) $\frac{15}{15}$

142. a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{1}$ e) $\frac{7}{5}$ f) $\frac{3}{3}$

Berechne und kontrolliere das Ergebnis!

143. a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6} : \frac{11}{12}$ c) $\frac{11}{12} : \frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ e) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ f) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$

144. a) $\frac{1}{5} : \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{8} : \frac{9}{12}$ c) $\frac{9}{12} : \frac{1}{8}$ d) $\frac{4}{7} : \frac{1}{8}$ e) $\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$ f) $\frac{3}{4} : \frac{3}{4}$

145. a) $\frac{0}{56} : \frac{3}{8}$ b) $\frac{28}{56} : \frac{7}{8}$ c) $\frac{19}{72} : \frac{38}{36}$ d) $\frac{81}{13} : \frac{18}{31}$ e) $\frac{45}{23} : \frac{9}{46}$ f) $\frac{97}{16} : \frac{35}{24}$

146. a) $\frac{18}{54} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{11}{15} : \frac{44}{45}$ c) $\frac{13}{64} : \frac{169}{8}$ d) $\frac{51}{37} : \frac{17}{74}$ e) $\frac{26}{55} : \frac{65}{77}$ f) $\frac{0}{4} : \frac{3}{8}$

147. a) $\frac{63}{18} : \frac{54}{21}$ b) $\frac{63}{54} : \frac{18}{21}$ c) $\frac{63}{54} : \frac{21}{18}$ d) $\frac{112}{77} : \frac{28}{33}$ e) $4\frac{3}{5} : \frac{46}{15}$ f) $5\frac{4}{7} : \frac{39}{13}$

148. a) $\frac{63}{32} : \frac{56}{36}$ b) $\frac{63}{56} : \frac{32}{36}$ c) $\frac{63}{56} : \frac{36}{32}$ d) $\frac{420}{66} : \frac{84}{96}$ e) $2\frac{3}{4} : \frac{22}{7}$ f) $6\frac{3}{5} : \frac{22}{10}$

Ermittle in den folgenden Gleichungen x bzw. y ($x, y \in N$, $y \neq 0$)!

149. a) $\frac{2}{3} : \frac{x}{5} = \frac{10}{21}$ b) $\frac{5}{4} : \frac{3}{y} = \frac{25}{12}$ c) $\frac{x}{10} : \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$ d) $\frac{4}{y} : \frac{5}{21} = \frac{13}{5}$

150. a) $\frac{3}{5} : \frac{x}{2} = \frac{6}{25}$ b) $\frac{7}{3} : \frac{5}{y} = \frac{14}{15}$ c) $\frac{x}{12} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{y} : \frac{9}{10} = \frac{2}{3}$

Ermittle in den folgenden Gleichungen einige Lösungen für x und y ($x, y \in N$, $y \neq 0$), darunter immer die, in denen x und y zueinander teilerfremd sind!

151. a) $\frac{4}{7} : \frac{x}{y} = \frac{8}{21}$ b) $\frac{5}{3} : \frac{x}{y} = \frac{25}{12}$ c) $\frac{x}{y} : \frac{5}{3} = \frac{25}{12}$ d) $\frac{x}{y} : \frac{7}{17} = \frac{2}{1}$

152. a) $\frac{3}{11} : \frac{x}{y} = \frac{9}{22}$ b) $\frac{9}{8} : \frac{x}{y} = \frac{27}{12}$ c) $\frac{x}{y} : \frac{9}{8} = \frac{27}{12}$ d) $\frac{x}{y} : \frac{11}{13} = \frac{1}{2}$

Schreibe den berechneten Quotienten als Dezimalbruch und als so weit wie möglich gekürzten gemeinen Bruch!

153. a) $3 : 4$ b) $7 : 8$ c) $15 : 12$ d) $76 : 80$ e) $55 : 88$ f) $88 : 55$

154. a) $7 : 5$ b) $5 : 2$ c) $18 : 15$ d) $75 : 120$ e) $48 : 60$ f) $60 : 48$

Berechne! Gib durch einen waagerechten Strich an, welche Aufgabe nicht lösbar ist!

155.

a	b	$a+b$	$a-b$	$b-a$	$a \cdot b$	$a:b$	$b:a$	$a \cdot a$	$b \cdot b$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$								
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$								
$\frac{11}{5}$	$\frac{7}{3}$								
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$								
$\frac{7}{20}$	$\frac{4}{15}$								

b

Berechne aus den folgenden Zahlenangaben jeweils nacheinander!

$a+b$; $b+a$; $a+b+c$; $a-b$; $b-c$; $a \cdot b$; $a \cdot c$; $a \cdot b \cdot c$; $a:b$; $a:c$; $(a+b) \cdot c$; $(a-b) \cdot c$; $a+b \cdot c$; $a-b \cdot c$

156. a) $a = \frac{3}{4}$; $b = \frac{7}{8}$; $c = \frac{1}{3}$
b) $a = \frac{7}{12}$; $b = \frac{2}{5}$; $c = \frac{2}{15}$
c) $a = \frac{2}{7}$; $b = \frac{5}{21}$; $c = \frac{3}{14}$

157. a) $a = \frac{5}{6}$; $b = \frac{5}{8}$; $c = \frac{2}{3}$
b) $a = \frac{5}{12}$; $b = \frac{8}{15}$; $c = \frac{7}{10}$
c) $a = \frac{4}{9}$; $b = \frac{5}{36}$; $c = \frac{7}{18}$

Berechne!

158. a) $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$ b) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{5}}$ c) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$

159. a) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$ c) $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}$

160. a) $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{12}{21}}$ b) $\dfrac{\frac{15}{16}}{\frac{16}{15}}$ c) $\dfrac{\frac{8}{11}}{\frac{4}{33}}$

161. a) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{20}{32}}$ b) $\dfrac{\frac{12}{13}}{\frac{12}{39}}$ c) $\dfrac{\frac{5}{7}}{\frac{10}{77}}$

Gib mindestens drei Zahlen für x ($x \in R^*$) an, für die folgende Ungleichungen gelten!

162. a) $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{12} < x < \frac{8}{12}$
c) $\frac{17}{2} > x > \frac{5}{3}$ d) $\frac{11}{5} < x < \frac{11}{3}$
e) $5\frac{1}{3} > x > \frac{5}{3}$ f) $\frac{1}{7} > x > \frac{1}{12}$

163. a) $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$
c) $\frac{15}{4} < x < \frac{9}{2}$ d) $\frac{25}{7} > x > \frac{24}{9}$
e) $6\frac{3}{4} > x > \frac{6}{4}$ f) $\frac{1}{6} > x > \frac{1}{11}$

Ermittle in den folgenden Aufgaben x ($x \in R^*$)!

164. a) $\frac{1}{2} + x = \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2} - x = \frac{2}{3}$
c) $x + \frac{5}{9} = \frac{3}{4}$ d) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

165. a) $\frac{2}{3} + x = \frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3} - x = \frac{3}{4}$
c) $x - \frac{7}{8} = \frac{15}{16}$ d) $x - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}$

166. a) $\frac{3}{5} \cdot x = \frac{6}{15}$ b) $x \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$
c) $\frac{5}{3} : x = \frac{2}{7}$ d) $x : \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$

167. a) $\frac{5}{8} \cdot x = \frac{35}{24}$ b) $x \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$
c) $\frac{4}{7} : x = \frac{5}{3}$ d) $x : \frac{1}{2} = \frac{15}{16}$

Das Produkt zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{7}{12}$. Der eine Faktor sei

168. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{12}$; d) $\frac{7}{20}$.

169. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\frac{4}{15}$; d) $\frac{13}{30}$.

Wie groß ist jeweils der andere Faktor?

170. Der Quotient zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{3}{4}$. Der Dividend sei

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{5}{8}$.

Wie groß ist der Divisor?

171. Der Quotient zweier gebrochener Zahlen sei $\frac{7}{8}$. Der Divisor sei

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{7}{4}$; e) $\frac{14}{5}$.

Wie ist groß ist der Dividend?

172. Das Produkt zweier gebrochener Zahlen sei

a) kleiner b) gleich c) größer

als der eine Faktor. Was läßt sich jeweils über den anderen Faktor aussagen?

173. Der Quotient zweier gebrochener Zahlen sei

a) kleiner b) gleich c) größer

als der Dividend bzw. der Divisor. Was läßt sich jeweils über den Divisor bzw. den Dividenden aussagen?

b

174. Dividiere 12 nacheinander durch 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{12}$!

Lege folgende Tabelle an! Trage alle Ergebnisse ein! Vergleiche die Folgen der Divisoren und der Quotienten miteinander!

Divisor	12	...	$\frac{1}{12}$
Quotient	1	...	144

In den folgenden Gleichungen sind x, y und z gebrochene Zahlen.

175. $x + y = z$

176. $x - y = z$

Bilde Aufgaben mit jeweils

a) $x > 1$ und $y < 1$ b) $x < 1$ und $y < 1$ c) $x < 1$ und $y > 1$ d) $x < 1$ und $z > 1$
e) $x < 1$ und $z < 1$ f) $y > 1$ und $z < 1$ g) $x > 1$ und $z < 1$ h) $y > 1$ und $z < 1$!

Berechne jeweils die dritte Zahl z bzw. y bzw. x! Einige Aufgaben sind nicht lösbar. Begründe jeweils die Nichtlösbarkeit!

In den folgenden Gleichungen sind r, s und t gebrochene Zahlen.

177. $r : s = t$

178. $r \cdot s = t$

Bilde Aufgaben mit jeweils

a) $r < 1$ und $s < 1$ b) $r > 1$ und $s > 1$ c) $r > 1$ und $s < 1$ d) $r < 1$ und $s > 1$
e) $r < 1$ und $t > 1$ f) $r > 1$ und $t < 1$ g) $s < 1$ und $t < 1$ h) $s > 1$ und $t < 1$!

Berechne jeweils die dritte Zahl t bzw. s bzw. r!

179. a) 0,4 : 0,2 b) 7,5 : 0,5
c) 13,2 : 3,3 d) 0,77 : 7,7
e) 0,28 : 0,07 f) 1,35 : 4,5

180. a) 0,7 : 0,35 b) 11,4 : 0,4
c) 0,84 : 0,12 d) 0,84 : 1,2
e) 0,054 : 0,72 f) 2,88 : 1,2

Gib an, welche Art von Dezimalbruch jeweils vorliegt!

181. a) 0,75 b) $0{,}7\overline{5}$ c) 0,8181
d) 0,30300300003... e) $0{,}\overline{8}$

182. a) 0,43 b) $0{,}4\overline{3}$ c) 0,5252
d) 0,002020020002... e) 0,5

183. a) $0{,}4\overline{31}$ b) $0{,}9444$ c) $0{,}9\overline{4}$
d) $0{,}\overline{538}$ e) $0{,}5\overline{38}$ f) $0{,}53\overline{8}$

184. a) $0{,}5\overline{28}$ b) $0{,}7222$ c) $0{,}7\overline{2}$
d) $0{,}\overline{721}$ e) $0{,}72\overline{1}$ f) $0{,}7\overline{21}$

Wiederhole die Regeln für das Runden von natürlichen Zahlen! Runde folgende Dezimalbrüche jeweils nacheinander auf drei Stellen, auf zwei Stellen, auf eine Stelle nach dem Komma!

185. a) $0{,}4567$ b) $0{,}3864$ c) $0{,}3\overline{47}$
d) $0{,}32\overline{8}$ e) $0{,}\overline{5}$ f) $0{,}\overline{47}$

186. a) $0{,}2753$ b) $0{,}7756$ c) $0{,}4\overline{56}$
d) $0{,}21\overline{7}$ e) $0{,}\overline{9}$ f) $0{,}\overline{53}$

187. a) $0{,}37\overline{28}$ b) $0{,}54\overline{57}$
c) $0{,}280\overline{47}$ d) $2{,}51\overline{05}$

188. a) $0{,}\overline{5043}$ b) $0{,}\overline{2774}$
c) $3{,}02\overline{305}$ d) $0{,}470\overline{28}$

Löse schriftlich! Runde das Ergebnis sinnvoll!

189. a) $0{,}28 : 0{,}35$ b) $0{,}28 : 0{,}42$
c) $8{,}44 : 1{,}22$ d) $5{,}2 : 0{,}39$
e) $3{,}77 : 0{,}14$ f) $52{,}7 : 0{,}023$

190. a) $0{,}72 : 0{,}45$ b) $0{,}72 : 0{,}14$
c) $6{,}28 : 5{,}12$ d) $17{,}5 : 2{,}8$
e) $17{,}24 : 15{,}2$ f) $0{,}047 : 0{,}33$

Berechne und kürze das Ergebnis so weit wie möglich!

191. a) $\frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{7}{15}$ b) $2 - \frac{3}{4} - \frac{4}{3}$
c) $3 + \frac{7}{12} - 2\frac{5}{6} - \frac{7}{30}$
d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$
e) $9\frac{1}{7} - 5 - 3\frac{3}{4} + \frac{13}{14} - \frac{27}{28}$

192. a) $\frac{4}{7} + \frac{3}{2} - \frac{8}{11}$ b) $5 - 3\frac{3}{4} - \frac{5}{4}$
c) $8 - \frac{8}{3} - 2\frac{1}{5} - 3$
d) $\frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$
e) $8\frac{3}{4} - 7 - 2\frac{1}{5} + \frac{17}{10} - \frac{14}{15}$

Berechne schriftlich!

193. a) $15{,}72 - 3 + 0{,}82 - 11{,}97$
b) $357{,}4 + 37 - 35{,}74 - 21{,}8$
c) $91{,}724 - 2{,}587 + 1{,}723 - 91{,}724$
d) $200 - 0{,}45 - 0{,}045 - 45 - 4{,}5$

194. a) $17{,}03 - 5{,}87 - 11 + 0{,}24$
b) $583{,}7 - 11 - 235{,}42 - 350{,}71$
c) $100 - 0{,}025 - 0{,}25 - 2{,}5 - 25$
d) $63{,}004 - 23{,}97 - 18{,}4 - 15{,}03$

Berechne jeweils das arithmetische Mittel!

195. a) 12; 13; 14; 15
b) 0,42; 0,24; 0,35; 0,53
c) 0,0100; 0,1000; 0,0010; 0,0001
d) 42,7; 42,6; 42,7; 42,7; 42,8
e) 1,071; 1,068; 1,070; 1,068; 1,068

196. a) 17; 18; 19; 20
b) 0,82; 0,28; 0,31; 0,13
c) 0,2500; 0,0250; 0,0025; 0,00025
d) 18,7; 18,8; 18,6; 18,7; 18,7
e) 2,408; 2,410; 2,409; 2,408; 2,410

Ermittle x ($x \in R^*$) so, daß Zähler und Nenner zueinander teilerfremd sind!

197. a) $\frac{1}{2} + x = \frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{5} + x = \frac{3}{10}$
c) $\frac{1}{7} + x = 1$ d) $\frac{3}{4} + x = \frac{11}{12}$

198. a) $\frac{1}{3} + x = \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4} + x = \frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{3} + x = \frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{12} + x = \frac{2}{3}$

199. a) $x + \frac{3}{7} = \frac{2}{5}$ b) $x + \frac{11}{15} = 1\frac{1}{5}$
c) $\frac{5}{13} - x = \frac{2}{13}$ d) $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

200. a) $x + \frac{7}{12} = 1\frac{1}{4}$ b) $x + \frac{7}{12} = \frac{11}{20}$
c) $\frac{3}{5} - x = \frac{1}{3}$ d) $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

Berechne und kürze das Ergebnis so weit wie möglich!

201. a) $\frac{3}{4} \cdot 5$ b) $\frac{2}{3} \cdot 6$ c) $\frac{13}{16} \cdot 8$ d) $7 \cdot \frac{5}{21}$ e) $4 \cdot \frac{3}{15}$ f) $11 \cdot \frac{25}{55}$ g) $2\frac{1}{3} \cdot 6$ h) $3\frac{1}{5} \cdot 10$ i) $12 \cdot \frac{7}{4}$

202. a) $\frac{1}{5} \cdot 7$ b) $\frac{4}{7} \cdot 3$ c) $\frac{3}{5} \cdot 15$ d) $4 \cdot \frac{3}{16}$ e) $5 \cdot \frac{4}{15}$ f) $9 \cdot \frac{14}{63}$ g) $3\frac{3}{4} \cdot 8$ h) $2\frac{2}{3} \cdot 8$ i) $15 \cdot \frac{3}{5}$

203. a) $\frac{3}{4} : 6$ b) $6 : \frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{5} : 2$ d) $5 : \frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2} : 5$ f) $1 : \frac{5}{2}$

204. a) $\frac{4}{5} : 20$ b) $20 : \frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{7} : 3$ d) $4 : \frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{3} : 4$ f) $1 : \frac{4}{3}$

205. a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{2}$ b) $\dfrac{4}{\frac{7}{8}}$ c) $\dfrac{4}{\frac{8}{7}}$ d) $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$ e) $\dfrac{\frac{1}{2}}{3}$ f) $\dfrac{\frac{5}{12}}{5}$

206. a) $\dfrac{\frac{7}{11}}{2}$ b) $\dfrac{5}{\frac{3}{4}}$ c) $\dfrac{5}{\frac{4}{3}}$ d) $\dfrac{3}{\frac{2}{1}}$ e) $\dfrac{\frac{3}{2}}{1}$ f) $\dfrac{\frac{7}{9}}{7}$

207. a) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{8} \cdot 6 \cdot \frac{4}{15}$ c) $\left(\frac{5}{8} : \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{12}$ d) $\frac{5}{8} : \left(\frac{3}{4} : \frac{5}{12}\right)$ e) $\left(\frac{3}{4} : 5\right) : \frac{9}{10}$ f) $\frac{3}{4} : \left(5 : \frac{9}{10}\right)$ g) $\left(24 : \frac{6}{5}\right) : \frac{4}{3}$ h) $24 : \left(\frac{6}{5} : \frac{4}{3}\right)$

208. a) $\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{21}{20}$ b) $\frac{5}{12} \cdot 8 \cdot \frac{9}{25}$ c) $\left(\frac{4}{7} : \frac{8}{3}\right) : \frac{7}{6}$ d) $\frac{4}{7} : \left(\frac{8}{3} : \frac{7}{6}\right)$ e) $\left(\frac{5}{6} : 7\right) : \frac{20}{21}$ f) $\frac{5}{6} : \left(7 : \frac{20}{21}\right)$ g) $\left(36 : \frac{9}{4}\right) : \frac{8}{3}$ h) $35 : \left(\frac{9}{4} : \frac{8}{3}\right)$

Berechne schriftlich und runde das Ergebnis sinnvoll!

209. a) $15{,}2 \cdot 14{,}8 \cdot 5{,}3$ b) $4{,}02 \cdot 5{,}4 \cdot 6$ c) $4{,}02 \cdot 5{,}40 \cdot 6{,}00$ d) $3{,}217 \cdot 4{,}028 \cdot 5{,}304$

210. a) $12{,}8 \cdot 13{,}2 \cdot 4{,}7$ b) $5{,}03 \cdot 4{,}4 \cdot 8$ c) $5{,}03 \cdot 4{,}40 \cdot 8{,}00$ d) $8{,}042 \cdot 4{,}021 \cdot 2{,}010$

211. a) $(3{,}288 : 4{,}11) : 2{,}00$ b) $3{,}288 : (4{,}11 : 2{,}00)$ c) $(24{,}3 : 8{,}1) : 3{,}0$ d) $24{,}3 : (8{,}1 : 3{,}0)$

212. a) $(2{,}877 : 4{,}11) : 3{,}50$ b) $2{,}877 : (4{,}11 : 3{,}50)$ c) $(36{,}0 : 7{,}2) : 5{,}0$ d) $36{,}0 : (7{,}2 : 5{,}0)$

Stelle für die folgenden Aufgaben fest, ob es sich jeweils um eine Summe, eine Differenz, ein Produkt oder einen Quotienten gebrochener Zahlen handelt!
Berechne und kürze so weit wie möglich!

213. a) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) \cdot \frac{5}{3}$ b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}$ c) $\left(\frac{7}{5} + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{15}{43}$ d) $\left(\frac{4}{7} + \frac{1}{14}\right) \cdot 1\frac{5}{9}$

214. a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{5}$ b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{5}$ c) $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{18}{13}$ d) $\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{18}\right) \cdot 1\frac{1}{17}$

215. a) $\left(\frac{7}{11} - \frac{2}{11}\right) \cdot \frac{23}{25}$ b) $\left(\frac{8}{3} - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{12}{17}$ c) $\left(\frac{8}{13} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{5}$ d) $\left(\frac{13}{11} - \frac{11}{13}\right) \cdot 5\frac{1}{3}$

216. a) $\left(\frac{4}{7} - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{35}{25}$ b) $\left(\frac{7}{4} - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{20}{27}$ c) $\left(\frac{5}{7} - \frac{7}{5}\right) \cdot 5\frac{1}{4}$ d) $\left(3\frac{2}{5} - \frac{8}{15}\right) \cdot \frac{15}{43}$

217. a) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{11}{5} - \frac{5}{11}\right)$ b) $\frac{5}{2} \cdot \frac{11}{5} - \frac{5}{11}$ c) $\frac{3}{4} \cdot \left(2 - \frac{2}{5}\right)$ d) $\frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{2}{5}$ e) $2\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{8}{3} - 2\right)$ f) $2\frac{3}{7} \cdot \frac{8}{3} - 2$

218. a) $\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right)$ b) $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{3} \cdot \left(4 - \frac{7}{4}\right)$ d) $\frac{5}{3} \cdot 4 - \frac{7}{4}$ e) $4\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{11}{2} - 5\right)$ f) $4\frac{1}{5} \cdot \frac{11}{2} - 5$

219. a) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$ b) $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$
c) $\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{8}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}$

220. a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)$ b) $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}$
c) $\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$

221. a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{7}{12}$ b) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{19}{15}}$
c) $\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{12}\right):\frac{62}{81}$ d) $\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{1}{14}}{\frac{9}{14}}$

222. a) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{5}{6}$ b) $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}{\frac{17}{12}}$
c) $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right):\frac{13}{18}$ d) $\dfrac{\frac{7}{5}+\frac{3}{4}}{\frac{86}{75}}$

223. a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right):\frac{2}{15}$ b) $\dfrac{4\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{7}$
c) $\left(\frac{8}{13}-\frac{2}{3}\right):\frac{39}{26}$ d) $\dfrac{5-\frac{3}{7}}{8}$

224. a) $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right):\frac{3}{25}$ b) $\dfrac{5\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{5}$
c) $\left(\frac{11}{9}-\frac{9}{11}\right):\frac{20}{33}$ d) $\dfrac{6-\frac{2}{5}}{7}$

225. a) $\left(\frac{18}{3}-4\right):\frac{11}{20}$ b) $\dfrac{7-\frac{15}{4}}{\frac{39}{17}}$
c) $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}:\frac{2}{15}$ d) $\frac{15}{4}:2-\frac{4}{7}$

226. a) $\left(\frac{13}{2}-6\right):\frac{17}{19}$ b) $\dfrac{\frac{19}{2}-8}{\frac{27}{16}}$
c) $\frac{5}{4}-\frac{3}{15}:\frac{1}{5}$ d) $\frac{11}{8}:5-\frac{9}{4}$

227. a) $5-\frac{3}{4}:\frac{15}{16}$ b) $\frac{3}{4}:\frac{15}{16}-5$
c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$
e) $\dfrac{\frac{9}{4}-\frac{4}{9}}{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}$ f) $\frac{9}{4}-\frac{4}{9}:\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$

228. a) $4-\frac{2}{3}:\frac{8}{27}$ b) $\frac{2}{3}:\frac{8}{27}-4$
c) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)$ d) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}:\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$
e) $\dfrac{\frac{4}{9}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$ f) $\frac{9}{4}-\frac{4}{9}:\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

229. a) $\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{11}{8}\right):\frac{11}{6}$ b) $\frac{5}{3}:\left(\frac{11}{8}\cdot\frac{11}{6}\right)$
c) $\left(\frac{5}{3}:\frac{11}{8}\right)\cdot\frac{11}{6}$ d) $\dfrac{2\cdot\frac{3}{5}}{\frac{4}{15}}$

230. a) $\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}\right):\frac{6}{7}$ b) $\frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{8}:\frac{6}{7}\right)$
c) $\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{6}{7}$ d) $\dfrac{3\cdot\frac{1}{4}}{\frac{9}{16}}$

231. a) $\left(\frac{3}{5}:6\right)\cdot\frac{15}{4}$ b) $\frac{3}{5}:\left(6\cdot\frac{15}{4}\right)$
c) $\dfrac{\frac{4}{7}\cdot\frac{21}{12}}{5}$ d) $\frac{4}{7}\cdot\dfrac{\frac{21}{12}}{5}$

232. a) $\left(\frac{4}{5}:8\right)\cdot\frac{10}{3}$ b) $\frac{4}{5}:\left(8\cdot\frac{10}{3}\right)$
c) $\dfrac{\frac{3}{8}\cdot\frac{24}{9}}{6}$ d) $\frac{3}{8}\cdot\dfrac{\frac{24}{9}}{6}$

Berechne schriftlich und runde sinnvoll!

233. a) $5{,}28\cdot 3{,}17-11{,}28$
b) $5{,}28\cdot(3{,}17-11{,}28)$
c) $5{,}28\cdot(3{,}17-1{,}28)$
d) $\frac{17{,}13}{5{,}42}+4{,}55$ e) $\frac{17{,}13+4{,}55}{5{,}42}$
f) $\frac{17{,}13}{5{,}42+4{,}55}$

234. a) $6{,}37\cdot 2{,}74-12{,}43$
b) $6{,}37\cdot(2{,}74-12{,}43)$
c) $6{,}37\cdot(2{,}74-2{,}43)$
d) $\frac{25{,}98}{6{,}32}+5{,}62$ e) $\frac{25{,}98+5{,}62}{6{,}32}$
f) $\frac{25{,}98}{6{,}32+5{,}62}$

235. a) $3{,}28\cdot 4{,}21+17{,}21\cdot 2{,}08$
b) $3{,}28\cdot(4{,}21+17{,}21)\cdot 2{,}08$

236. a) $5{,}34\cdot 2{,}07+11{,}03\cdot 4{,}2$
b) $5{,}34\cdot(2{,}07+11{,}03)\cdot 4{,}2$

c) $\frac{5{,}28}{4{,}33} + \frac{7{,}08}{5{,}44}$ d) $\frac{5{,}28 + 7{,}08}{4{,}33 + 5{,}44}$

e) $\frac{5{,}28 : (4{,}33 + 7{,}08)}{5{,}44}$

c) $\frac{8{,}44}{5{,}07} + \frac{11{,}07}{4{,}54}$ d) $\frac{8{,}44 + 11{,}07}{5{,}07 + 4{,}54}$

e) $\frac{8{,}44 : (5{,}07 + 11{,}07)}{4{,}54}$

237. Denke dir eine gebrochene Zahl $a > 1$!
Bilde $\frac{a}{a-1}$! Dann erhältst du eine zweite gebrochene Zahl b.
Bilde $a + b$ und $a \cdot b$! Vergleiche $a + b$ mit $a \cdot b$!

238. Denke dir eine gebrochene Zahl a! Bilde daraus eine zweite gebrochene Zahl b, indem du den Zähler von a beibehältst und als neuen Nenner die Summe aus Zähler und Nenner von a wählst! Vergleiche die Differenz von a und b mit dem Produkt von a und b!

b

239. Eine Rasenfläche von 5 800 m² Größe soll erneuert werden. Wieviel Kilogramm Grassamen werden dafür benötigt, wenn man für 1 Ar 1,85 kg braucht?

240. Eine Tischtennisplatte hat etwa die folgenden Maße: Länge 2,74 m, Breite 1,53 m. Wie groß ist die Spielfläche? Runde sinnvoll!

241. Ein rechteckiges Weizenfeld ist 823 m lang und 437 m breit. Proben haben ergeben, daß auf diesem Feld mit einem durchschnittlichen Hektarertrag von 47,8 dt gerechnet werden kann. Wie hoch ist der voraussichtliche Gesamtertrag?

242. Ein volkseigener Erfassungs- und Aufkaufbetrieb hatte in der ersten Oktoberwoche die folgenden Kartoffeleingänge und -ausgänge:

Tag	Eingänge in dt	Ausgänge in dt	Bestand in dt
	—	—	116,0
1. 10. 19..	173,2	195,1	
2. 10. 19..	199,1	207,1	
3. 10. 19..	223,4	232,3	
4. 10. 19..	182,5	178,9	
5. 10. 19..	248,9	227,7	
6. 10. 19..	234,5	219,2	

a) Wie groß war der Bestand am Ende eines jeden Tages?
b) Wie hoch waren insgesamt die Kartoffeleingänge und die Kartoffelausgänge?
c) Wieviel Dezitonnen Kartoffeln wurden durchschnittlich jeden Tag ein- und ausgeliefert?

243. Die Arbeitsbreite einer Mähmaschine mit Traktor beträgt 2,1 m. Welche Fläche ernten drei Mähmaschinen mit Traktor in 6 Stunden Arbeit ab, wenn die Durchschnittsgeschwindigkeit des Traktors $4{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt? (Runde das Ergebnis auf eine Genauigkeit von 1 ha!)

244. In der folgenden Übersicht wird die landwirtschaftliche Nutzfläche, die von den LPG bewirtschaftet wird, der Anzahl wichtiger Maschinen gegenübergestellt.
Auf wieviel Hektar kam in den einzelnen Jahren je eine Mähmaschine? (Rechne auf eine Dezimalstelle genau!)

	1960	1962	1964	1967
Landwirtschaftliche Nutzfläche	5 408 780 ha	5 473 115 ha	5 459 080 ha	5 450 159 ha
Traktoren	43 170	53 205	101 806	118 371
Mähdrescher	3 241	4 146	11 213	15 878
Kartoffelvollerntemaschinen	3 228	3 266	5 352	7 516

b

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Mache die folgenden Brüche gleichnamig!

1. a) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{13}{15}$ und $\frac{7}{10}$
c) $\frac{7}{120}$ und $\frac{1}{12}$ **d)** $\frac{5}{18}$ und $\frac{8}{27}$
e) $\frac{5}{33}, \frac{9}{66}, \frac{12}{110}, \frac{15}{99}$ und $\frac{1}{55}$
f) 0,024; 0,1754; 0,3 und 0,57

2. a) $\frac{1}{15}$ und $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{8}{20}$ und $\frac{2}{15}$
c) $\frac{8}{15}$ und $\frac{8}{150}$ **d)** $\frac{3}{16}$ und $\frac{5}{72}$
e) $\frac{3}{45}, \frac{17}{18}, \frac{21}{72}, \frac{100}{180}$ und $\frac{7}{36}$
f) 0,001; 0,4782; 0,1 und 0,25

Vergleiche die folgenden Paare gebrochener Zahlen miteinander!

3. a) $\frac{5}{17}$ und $\frac{15}{51}$ **b)** $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{11}$
c) 0,007 und 0,06
d) 0,628 und 0,63

4. a) $\frac{5}{4}$ und $\frac{25}{20}$ **b)** $\frac{5}{7}$ und $\frac{7}{9}$
c) 0,01 und 0,002
d) 0,0527 und 0,123

5. a) $\frac{11}{9}$ und 1,24 **b)** 0,004 und $\frac{1}{240}$
c) 0,076 und $\frac{3}{40}$ **d)** 0,5 und $\frac{3}{8}$

6. a) 1,36 und $\frac{5}{4}$ **b)** 0,005 und $\frac{1}{250}$
c) 0,2374 und $\frac{19}{80}$ **d)** 0,41 und $\frac{13}{32}$

Für welche x ($x \in N$, wenn x im Nenner, $x \neq 0$) gelten folgende Ungleichungen?

7. a) $\frac{5}{13} < \frac{x}{2} < \frac{13}{5}$
b) $\frac{11}{15} < \frac{7}{x} < \frac{15}{11}$

8. a) $\frac{8}{11} < \frac{x}{4} < \frac{11}{8}$
b) $\frac{11}{13} < \frac{9}{x} < \frac{13}{11}$

Berechne und kürze so weit wie möglich!

9. a) $\frac{3}{8} + \frac{7}{12} + \frac{11}{20}$ **b)** $\frac{11}{15} + \frac{7}{5} + \frac{8}{21}$
c) $\frac{11}{45} + \frac{7}{12} + \frac{19}{30} + \frac{3}{10} + \frac{5}{6} + \frac{13}{15}$
d) $\frac{11}{16} + \frac{7}{12} + \frac{5}{8} + \frac{17}{24} + \frac{111}{60}$
e) $\frac{67}{144} - \frac{1}{12} - \frac{11}{60}$ **f)** $\frac{53}{50} - \frac{9}{10} - \frac{1}{15} - \frac{7}{75}$

10. a) $\frac{5}{12} + \frac{4}{9} + \frac{3}{8}$ **b)** $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{7}$
c) $\frac{5}{16} + \frac{5}{8} + \frac{31}{48} + \frac{8}{15} + \frac{3}{5} + \frac{11}{12} + \frac{11}{24}$
d) $\frac{7}{15} + \frac{8}{75} + \frac{4}{25} + \frac{11}{45} + \frac{161}{150} + \frac{23}{50}$
e) $\frac{70}{130} - \frac{25}{91} - \frac{3}{26}$ **f)** $\frac{101}{28} - \frac{203}{70} - \frac{9}{14} - \frac{2}{35}$

Berechne!

11. a) 132,7 + 18,54 + 11,41 + 125,8
b) 154,1 − 15,4 − 1,5 − 0,1
c) 0,05824 − 0,00528 − 0,04516

12. a) 114,73 + 97,27 + 101,01 + 20,02
b) 98,7 − 9,87 − 0,98 − 0,09
c) 0,08208 − 0,00987 − 0,07102

13. a) $\frac{5}{6} + 1{,}7$ b) $0{,}9 + \frac{43}{12}$ c) $0{,}725 - \frac{5}{8}$ d) $\frac{7}{12} - 0{,}581$

14. a) $\frac{32}{9} + 8{,}436$ b) $2{,}439 + \frac{3}{8}$ c) $0{,}875 - \frac{7}{16}$ d) $\frac{21}{11} - 1{,}9$

15. Um wieviel ist die Summe der Zahlen $\frac{5}{2}$ und $\frac{11}{8}$ größer als ihre Differenz?

16. Um wieviel ist die Differenz der Zahlen 3,75 und $\frac{3}{2}$ kleiner als ihre Summe?

Berechne!

17. a) $\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{24}{35}$ b) $\frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7}$ c) $\frac{115}{16} : \frac{92}{12}$ d) $\frac{500}{255} : \frac{300}{85}$

18. a) $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{70}{48}$ b) $\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{5}$ c) $\frac{500}{144} : \frac{200}{72}$ d) $\frac{1\,000}{17} : \frac{125}{51}$

19. Berechne! Gib durch einen waagerechten Strich an, welche Aufgabe nicht lösbar ist!

r	s	$r+s$	$r-s$	$s-r$	$s \cdot r$	$r : s$	$s : r$	$r \cdot r$	$s \cdot s$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$								
$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$								
$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{2}$								
$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{10}$								
$\frac{18}{25}$	$\frac{3}{8}$								

Ermittle in den folgenden Aufgaben x ($x \in R^*$)!

20. a) $\frac{5}{6} + x = \frac{3}{2}$ b) $\frac{7}{8} - x = \frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{7} \cdot x = \frac{1}{2}$ d) $x \cdot \frac{5}{6} = \frac{6}{5}$

21. a) $\frac{6}{7} + x = \frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{6} - x = \frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{7} \cdot x = \frac{2}{3}$ d) $x \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$

22. Nenne Paare gebrochener Zahlen, deren Produkt ebenso groß wie ihr Quotient ist! Berechne und kontrolliere die Ergebnisse!

23. a) 21,6 : 2,4 b) 1,36 : 0,17 c) 0,592 : 0,05 d) 14,6 : 0,4

24. a) 15,4 : 1,4 b) 4,65 : 0,15 c) 0,571 : 0,08 d) 25,2 : 0,25

Forme folgende gemeine Brüche in Dezimalbrüche um! Gib jeweils an, welche Art von Dezimalbruch vorliegt!

25. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{6}$ c) $\frac{3}{6}$ d) $\frac{4}{6}$ e) $\frac{11}{8}$ f) $\frac{8}{11}$ g) $\frac{15}{24}$ h) $\frac{24}{15}$ i) $\frac{50}{33}$ k) $\frac{35}{14}$ l) $\frac{10}{18}$ m) $\frac{54}{12}$

26. a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{2}{12}$ c) $\frac{3}{12}$ d) $\frac{4}{12}$ e) $\frac{7}{4}$ f) $\frac{4}{7}$ g) $\frac{45}{36}$ h) $\frac{36}{45}$ i) $\frac{17}{9}$ k) $\frac{18}{81}$ l) $\frac{87}{18}$ m) $\frac{8}{18}$

Löse schriftlich! Runde das Ergebnis sinnvoll!

27. a) $52{,}8 : 13{,}2$ b) $500{,}1 : 0{,}203$ c) $800{,}4 : 20$ d) $1{,}08 : 0{,}041$

28. a) $48{,}4 : 1{,}21$ b) $702{,}3 : 15$ c) $1\,000{,}2 : 0{,}021$ d) $3{,}04 : 0{,}202$

Ermittle x ($x \in R^*$) so, daß Zähler und Nenner zueinander teilerfremd sind!

29. a) $x + \frac{5}{2} = \frac{11}{4}$ b) $x + \frac{3}{8} = \frac{13}{20}$ c) $x - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ d) $\frac{12}{25} - x = \frac{1}{2}$

30. a) $x + \frac{5}{8} = \frac{8}{5}$ b) $x + \frac{3}{7} = 2$ c) $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ d) $\frac{14}{57} - x = \frac{1}{4}$

Berechne und kürze das Ergebnis so weit wie möglich!

31. a) $\dfrac{5}{\frac{3}{1}}$ b) $\dfrac{\frac{5}{3}}{1}$ c) $\dfrac{5}{\frac{12}{5}}$ d) $20 \cdot \frac{17}{36} \cdot \frac{9}{34}$ e) $\frac{13}{15} \cdot \frac{2}{7} \cdot 105$

32. a) $\dfrac{1}{\frac{3}{4}}$ b) $\dfrac{\frac{1}{3}}{4}$ c) $\dfrac{7}{\frac{9}{7}}$ d) $15 \cdot \frac{26}{55} \cdot \frac{11}{13}$ e) $\frac{11}{12} \cdot \frac{8}{9} \cdot 108$

33. a) $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{11}{8} \cdot \frac{11}{6}}$ b) $2 \cdot \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{15}}$ c) $\left(\frac{3}{8} : \frac{9}{32}\right) \cdot 8$ d) $\frac{3}{8} : \left(\frac{9}{32} \cdot 8\right)$

34. a) $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{6}{7}}$ b) $3 \cdot \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{16}}$ c) $\left(\frac{5}{7} : \frac{15}{28}\right) \cdot 4$ d) $\frac{5}{7} : \left(\frac{15}{28} \cdot 4\right)$

35. Das Produkt aus drei gebrochenen Zahlen sei gleich einem der drei Faktoren. Was kannst du über die beiden anderen Faktoren aussagen?

36. Denke dir zwei gebrochene Zahlen r und s mit $r < s$!
Bilde

a) $r + s$ b) $r - s$ c) $s - r$ d) $r \cdot s$ e) $\frac{r}{s}$ f) $\frac{s}{r}$!

Mindestens eine dieser sechs Aufgaben ist nicht lösbar. Welche dieser Aufgaben ist nicht lösbar, wenn genau eine nicht lösbar ist?

Können auch zwei dieser sechs Aufgaben nicht lösbar sein?

Können auch drei dieser sechs Aufgaben nicht lösbar sein?

c) Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität

Setze zwischen die folgenden Terme die richtigen Zeichen ($<$; $>$ oder $=$)!

1. a) $5 + 4 < 11$ b) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \quad \frac{34}{12}$

2. a) $4 + 3 < 13$ b) $\frac{5}{2} + \frac{2}{3} \quad \frac{38}{12}$

3. a) $2\frac{7}{5} - 1\frac{3}{8} \quad \frac{36}{7} - \frac{16}{5}$
b) $2{,}38 + 0{,}4 \quad 1{,}41 + 1{,}07$

4. a) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} \quad \frac{27}{5} - \frac{22}{7}$
b) $1{,}83 + 0{,}5 > 1{,}14 + 1{,}07$

Setze zwischen die folgenden Terme die richtigen Zeichen ($>$, $<$ oder $=$), wenn für x der Reihe nach jeweils die Zahlen 1; 3; $\frac{2}{3}$; 0,2 eingesetzt werden!

5. a) $2 + x \quad 2{,}7$ b) $x - \frac{1}{5} \quad \frac{4}{5}$ c) $\frac{6}{5}x \quad \frac{4}{5}$

6. a) $3 + x \quad 3{,}9$ b) $x - \frac{1}{7} \quad \frac{6}{7}$ c) $\frac{9}{4}x \quad \frac{3}{2}$

Welche Zahlen x erfüllen die folgenden Gleichungen?

7. a) $2 + x = 4$ b) $3 \cdot x = 7$ c) $x - \frac{7}{3} = \frac{3}{5}$ d) $\frac{3}{5}x = \frac{2}{3}$

8. a) $3 + x = 5$ b) $2 \cdot x = 9$ c) $x - \frac{3}{5} = \frac{7}{3}$ d) $\frac{2}{3}x = \frac{3}{5}$

Setze in die folgenden Gleichungen für x nacheinander die Zahlen 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 4; 7; $\frac{1}{6}$; 1,2; 0,4 ein und stelle fest, ob dadurch eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

9. a) $3x = 12$ b) $\frac{1}{2}x = 2$ c) $4{,}9 + x = 6{,}1$ d) $\frac{3}{2}x = 0{,}6$

10. a) $4x = 8$ b) $\frac{1}{4}x = 1$ c) $5{,}1 + x = 6{,}3$ d) $\frac{3}{4}x = 0{,}3$

Setze in die folgenden Ungleichungen für a nacheinander die Zahlen $\frac{3}{4}$; 1; 0; $\frac{1}{5}$; 1,5; $\frac{7}{3}$; 3; $\frac{9}{4}$ ein und stelle fest, ob dadurch eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

11. a) $a > 1$ b) $a + 1 < 3{,}5$ c) $\frac{2}{3}a < 1$ d) $3a > 2{,}25$

12. a) $a > 2$ b) $a + 1 < 3{,}0$ c) $\frac{4}{3}a < 1{,}5$ d) $2a > 1{,}5$

Welche Zahlen x erfüllen die folgenden Ungleichungen? Gib mindestens je 3 Zahlen an!

13. a) $x < 1$ b) $3x + 2 > 5$ c) $2x + \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ d) $0{,}3x > 1{,}44$

14. a) $x < \frac{1}{2}$ b) $2x + 3 > 5$ c) $3x + \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ d) $0{,}4x > 1{,}36$

Prüfe die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen auf ihre Lösbarkeit im angegebenen Grundbereich! Gib die Lösungsmengen an!

15. a) $3x = 7;\ x \in N$ b) $3x = 7;\ x \in R^*$

16. a) $2x = 5;\ x \in N$ b) $2x = 5;\ x \in R^*$

17. a) $\frac{2}{3}x = \frac{12}{9};\ x \in N$ b) $3x = \frac{4}{7};\ x \in R^*$

18. a) $\frac{3}{4}x = \frac{27}{12};\ x \in N$ b) $4x = \frac{3}{7};\ x \in R^*$

19. a) $x - 3 = 1;\ x \in R^*$ b) $x + 3 = 1;\ x \in R^*$

20. a) $x - 4 = 2;\ x \in R^*$ b) $x + 4 = 2;\ x \in R^*$

21. a) $12 > 3x;\ x \in N$ b) $3x < 2;\ x \in N$

22. a) $12 > 4x;\ x \in N$ b) $4x < 3;\ x \in N$

23. a) $3x < 2;\ x \in R^*$ b) $\frac{3}{4}x > 1{,}7;\ x \in R^*$

24. a) $4x < 3;\ x \in R^*$ b) $\frac{2}{5}x > 1{,}3;\ x \in R^*$

Löse die folgenden Gleichungen!

25. a) $4x = 12$ b) $7a = \frac{49}{2}$ c) $0{,}25z = 24$ d) $2{,}7x = 21{,}6$ e) $\frac{x}{2} = 38$ f) $\frac{x}{2{,}1} = 0{,}15$

26. a) $3x = 9$ b) $9b = \frac{63}{2}$ c) $0{,}5w = 48$ d) $2{,}3x = 18{,}4$ e) $\frac{x}{4} = 19$ f) $\frac{x}{6{,}3} = 0{,}05$

Stelle je drei Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ auf, die folgende Lösungen haben!

27. a) $x = 2$ b) $x = \frac{3}{4}$ c) $x = \frac{5}{13}$

28. a) $x = 3$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $x = \frac{7}{17}$

Löse die folgenden Gleichungen!

29. a) $\frac{4}{x} = 2$ b) $\frac{0,4}{x} = 1,2$ c) $\frac{4}{3} : x = \frac{3}{2}$ d) $0,72 = 0,28 : x$

30. a) $\frac{6}{x} = 3$ b) $\frac{0,5}{x} = 1,5$ c) $\frac{2}{3} : x = \frac{3}{4}$ d) $0,54 = 0,21 : x$

Stelle je drei Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$ auf, die folgende Lösungen haben!

31. a) $x = 3$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $x = \frac{7}{17}$

32. a) $x = 2$ b) $x = \frac{3}{4}$ c) $x = \frac{5}{13}$

Gib von den nachstehend gekennzeichneten Zahlenfolgen jeweils die ersten acht Glieder sowie das 10., 12. und 15. Glied an!

33. Jeder natürlichen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.

34. Jeder natürlichen Zahl wird ihr Dreifaches zugeordnet.

35. Jeder natürlichen Zahl wird die Zahl zugeordnet, die man erhält, wenn man sie mit $\frac{3}{2}$ multipliziert.

36. Jeder natürlichen Zahl wird die Zahl zugeordnet, die man erhält, wenn man sie mit $\frac{2}{3}$ multipliziert.

37. Jeder natürlichen Zahl wird ihr Dreifaches, vermindert um 2,5, zugeordnet.

38. Jeder natürlichen Zahl wird ihr Doppeltes, vermindert um 1,5, zugeordnet.

39. Jeder natürlichen Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet.

40. Jeder natürlichen Zahl wird ihre dritte Potenz zugeordnet.

Stelle fest, ob die unter jeweils I und II genannten Zahlenfolgen proportional sind!
Begründe deine Feststellungen!
Gib den jeweiligen Proportionalitätsfaktor an!

41. I 1; 2; 3; 4; 5; 6
II 3; 6; 9; 12; 15; 18

42. I 1; 2; 3; 4; 5; 6
II 4; 8; 12; 16; 20; 24

43. I 2; 4; 6; 8; 10; 12
II 3; 5; 7; 9; 11; 13

44. I 1; 3; 5; 7; 9; 11
II 2; 4; 6; 8; 10; 12

45. I 48; 42; 36; 30; 24; 18
II 24; 21; 18; 15; 12; 9

46. I 46; 40; 34; 28; 22; 16
II 23; 20; 17; 14; 11; 8

47. I 3; 5; 7; 9; 11
II 2; $\frac{10}{3}$; $\frac{14}{3}$; 6; $\frac{22}{3}$

48. I 2; 5; 8; 11; 14
II 3; $\frac{15}{2}$; 12; $\frac{33}{2}$; 21

49. I $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{13}{11}$
II $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{9}{11}$; $\frac{11}{13}$

50. I $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{11}{10}$
II $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{10}{11}$

Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie! Stelle jeweils fest, ob Proportionalität vorliegt!

51.

I	x	1	2	3	4	5	6
II	$\frac{2}{3}x$						

52.

I	x	1	2	3	4	5	6
II	$\frac{3}{4}x$						

53.

I	p	2	4	6	8	10	12
II	$p-\frac{3}{2}$						

54.

I	p	1	3	5	7	9	11
II	$p-\frac{1}{2}$						

Gegeben ist eine Zahlenfolge und ein Proportionalitätsfaktor k. Schreibe jeweils zu der gegebenen Zahlenfolge die zu ihr proportionale auf!

55. $\frac{7}{5}$; 2; $\frac{16}{3}$; 6; 8,2

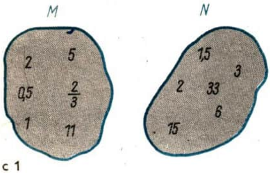
a) $k = 3$ b) $k = \frac{2}{5}$

56. 3; $\frac{9}{4}$; $\frac{17}{5}$; 8; 9,3

a) $k = 4$ b) $k = \frac{3}{5}$

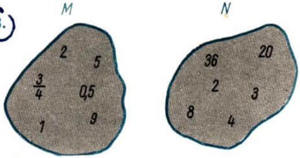
Elemente der Menge N sollen den Elementen der Menge M jeweils so zugeordnet werden, daß Proportionalität entsteht (Bilder c 1 und c 2). Gib den jeweiligen Proportionalitätsfaktor an!

57.



c 1

58.



c 2

Die Anzahl der von einem Automaten produzierten Werkstücke ist proportional zur Arbeitszeit.
Die Zeit werde in Stunden gemessen. Den Proportionalitätsfaktor bezeichnen wir mit k.

59. $k = 43$

60. $k = 47$

a) Wieviel Werkstücke werden in 3; 8; 7,5; 15; 24 Stunden produziert?

b) Stelle die Gleichung für den Zusammenhang zwischen der Anzahl der produzierten Werkstücke und der Zeit (gemessen in Stunden) auf!

c) Wie heißt die Gleichung, wenn die Zeit in Minuten gemessen wird?

Bilde alle möglichen geordneten Zahlenpaare $(x; y)$, wenn x Element der Menge M und y Element der Menge N ist!

61. $M = \left\{3;\ 0{,}4;\ \frac{2}{3}\right\}$ $N = \left\{2;\ \frac{1}{2}\right\}$

62. $M = \left\{2;\ 0{,}8;\ \frac{3}{4}\right\}$ $N = \left\{3;\ \frac{1}{3}\right\}$

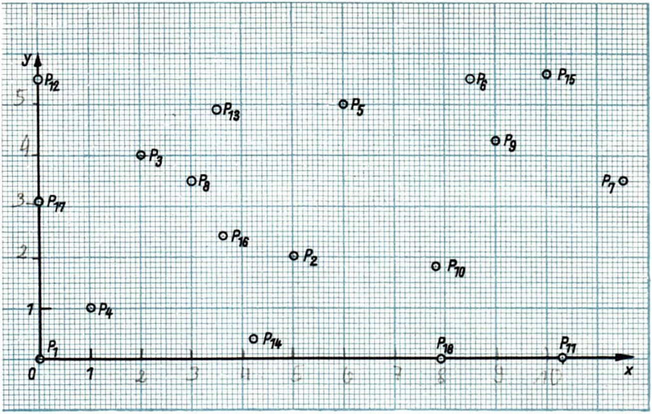
63. $M = \left\{\frac{3}{4};\ 7\right\}$ $N = \left\{0{,}3;\ 1;\ \frac{17}{5}\right\}$

64. $M = \left\{\frac{2}{3};\ 6\right\}$ $N = \left\{0{,}6;\ 1;\ \frac{19}{5}\right\}$

65. Stelle die ermittelten Zahlenpaare in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar!

66. Gib für einige der im Bild c 3 dargestellten Punkte die Abszisse und die Ordinate an!

C



c 3

67. Suche die Punkte mit ungeraden Zahlen (z. B. P_1, P_3) heraus!

68. Suche die Punkte mit geraden Zahlen (z. B. P_2, P_4) heraus!

69. Die Punkte P_1, P_2 und P_3 sollen auf der x-Achse liegen. Ihre Abszissen heißen 2; $\frac{3}{2}$ und $\frac{17}{3}$.
   a) Wie heißen ihre Ordinaten?
   b) Zeichne diese Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem!

70. Die Punkte P_1, P_2 und P_3 sollen auf der y-Achse liegen. Ihre Ordinaten heißen 2; $\frac{3}{2}$ und $\frac{17}{3}$.
   a) Wie heißen ihre Abszissen?

Stelle jeweils den Zusammenhang zwischen den Zahlenfolgen I und II in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar!
Ermittle für die zueinander proportionalen Zahlenfolgen den Proportionalitätsfaktor!

71. a) I 1; 2; 3; 4; 5; 6
   II 3; 6; 9; 12; 15; 18
   b) I 2; 3,5; 5; 6,5; 8
   II 3; 5,25; 7,5; 9,75; 12
   c) I 2; 4; 6; 8; 10
   II 18; 9; 6; 4,5; 3,6

72. a) I 1; 2; 3; 4; 5; 6
   II 2; 4; 6; 8; 10; 12
   b) I 2; 4,5; 7; 9,5; 12
   II 3; 6,75; 10,5; 14,25; 18
   c) I 2; 4; 6; 8; 10
   II 12; 6; 4; 3; 2,4

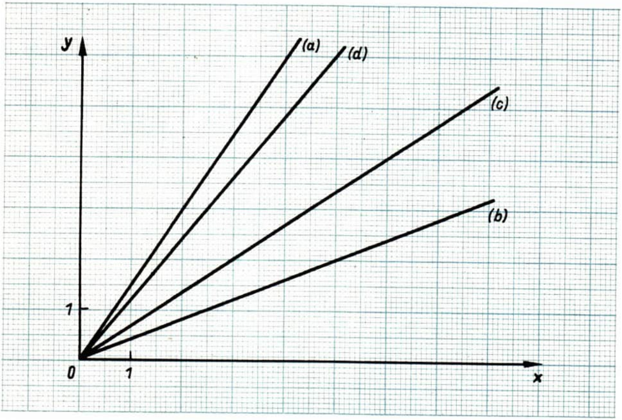
Im Bild c 4 ist durch die Strahlen *(a)*, *(b)*, *(c)*, *(d)* der Zusammenhang je zweier zueinander proportionaler Zahlenfolgen dargestellt.

73. a) Gib für den Strahl *(a)* von jeder Zahlenfolge fünf Glieder an und ermittle den Proportionalitätsfaktor!

74. a) Gib für den Strahl *(c)* von jeder Zahlenfolge fünf Glieder an und ermittle den Proportionalitätsfaktor!

b) Führe die gleichen Schritte für den Strahl *(b)* aus!

b) Führe die gleichen Schritte für den Strahl *(d)* aus!

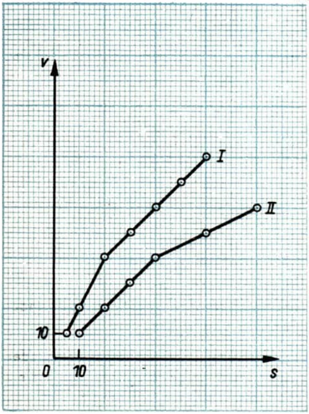


c 4

In den Bildern c 5 und c 6 sind jeweils für zwei verschiedene Sachverhalte die Zusammenhänge graphisch dargestellt. In welchem Fall liegt Proportionalität vor, in welchem nicht? Bestätige deine Antwort auch rechnerisch, indem du aus den graphischen Darstellungen zusammengehörige Zahlenpaare abliest und diese Zahlenfolgen untersuchst!

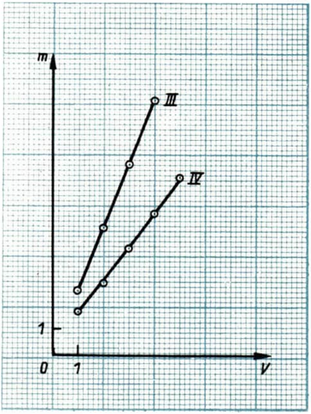
75.

c 5



76.

c 6



C

Untersuche, ob die nächstehenden Zahlenfolgen zueinander proportional oder zueinander umgekehrt proportional sind!

77. a) I $5;\ 4;\ 2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}1$
II $0{,}2;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 10$

b) I $2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 20$
II $0{,}25;\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{12};\ \frac{1}{16};\ 0{,}05;\ \frac{1}{40};\ \frac{1}{60};\ \frac{1}{200}$

c) I $3;\ 7;\ 12;\ 18;\ 20$
II $1;\ \frac{7}{3};\ 4;\ 6;\ \frac{20}{3}$

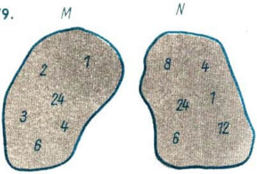
78. a) I $5;\ 4;\ 2;\ 1;\ 0{,}4;\ 0{,}2$
II $0{,}4;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 5;\ 10$

b) I $2;\ 6;\ 10;\ 20;\ 40;\ 60$
II $0{,}25;\ \frac{1}{12};\ 0{,}05;\ \frac{1}{40};\ \frac{1}{80};\ \frac{1}{120};\ \frac{1}{160};\ \frac{1}{200}$

c) I $5;\ 9;\ 15;\ 24;\ 30$
II $1;\ \frac{9}{5};\ 3;\ \frac{24}{5};\ 6$

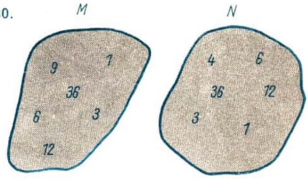
Ordne die Elemente der Mengen M und N einander so zu, daß die Zahlenmengen zueinander umgekehrt proportional sind (Bilder c 7 und c 8)!

79.



c 7

80.



c 8

Bilde das Verhältnis der folgenden Zahlen!

81. a) 6 und 4 b) $\frac{4}{7}$ und $\frac{5}{7}$
c) $\frac{34}{12}$ und $\frac{17}{3}$ d) 0,72 und 0,48

82. a) 4 und 6 b) $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$
c) $\frac{39}{16}$ und $\frac{13}{4}$ d) 0,84 und 0,36

Die folgende Tabelle gibt den Kraftstoffverbrauch in Kilogramm je Stunde für Motoren in Abhängigkeit von deren Leistung an.

83.

Leistung (in PS)	5	10	25	50	100
Kraftstoffverbrauch (in kg je h)	1,6	3,0	7,0	13,0	25,0

84.

Leistung (in PS)	4	8	20	40	80
Kraftstoffverbrauch (in kg je h)	1,2	2,0	4,5	8	15

a) Wie ändert sich der Kraftstoffverbrauch mit der Leistung des Motors?

b) Ist der Kraftstoffverbrauch der Leistung des Motors proportional?

Stelle mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors für die folgenden zueinander proportionalen Größen eine Wertetabelle auf! Fertige zu jedem Beispiel eine graphische Darstellung an!

85. Saatgutmenge bei Mais und Größe des bestellten Feldes; Proportionalitätsfaktor: 25 kg Mais je 1 ha des Feldes.

86. „Schußzahl" beim Weben und Länge des gewebten Stoffes; Proportionalitätsfaktor: 2 200 „Schuß" je 1 m Stoff.

Fertige geeignete Wertetabellen an und berechne jeweils das Verhältnis einander entsprechender Zahlen!

87. Eine Gruppe Junger Pioniere legt auf einer Wanderung in $\frac{3}{4}$ h eine Strecke von 3,3 km zurück.

88. Der Fahrpreis für 1 km beträgt bei der Deutschen Reichsbahn in der 2. Klasse 8 Pf und in der ersten Klasse 11,6 Pf.

Prüfe, ob die folgenden Verhältnisgleichungen wahre Aussagen sind!

89. a) $\frac{3}{4} : 1 = 1\frac{1}{2} : 2$ b) $\frac{2,4}{1,5} = \frac{2,1}{1,4}$ c) $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{1}{5} : \frac{3}{10}$

90. a) $\frac{3,3}{0,11} = \frac{3}{0,1}$ b) $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ c) $10 : 1,2 = 25 : 3$

Löse die folgenden Verhältnisgleichungen!

91. a) $x : 15 = 4 : 12$ b) $\frac{8}{x} = \frac{24}{3}$

92. a) $\frac{x}{12} = \frac{5}{15}$ b) $6 : x = 18 : 3$

93. a) $8 : 1 = 2 : x$ b) $\frac{5}{8} : x = \frac{5}{28} : \frac{8}{63}$

94. a) $4 : 9 = x : 36$ b) $\frac{3}{7} : x = \frac{3}{15} : \frac{7}{40}$

95. a) $x : \frac{10}{7} = \frac{18}{15} : \frac{4}{3}$ b) $\frac{9}{2} : \frac{9}{7} = x : \frac{5}{7}$

96. a) $x : \frac{9}{7} = \frac{16}{3} : \frac{4}{3}$ b) $\frac{5}{2} : \frac{5}{7} = x : \frac{9}{7}$

97. Für viele Zweitaktmotoren werden Benzin und Öl im Verhältnis 33 : 1 gemischt.

98. Für einige Zweitaktmotoren werden Benzin und Öl im Verhältnis 25 : 1 gemischt.

a) Wieviel Liter Benzin muß man in Aufgabe 97 (bzw. 98) mit 1,5 l Öl mischen?

b) Wieviel Liter Öl muß man in Aufgabe 97 (bzw. 98) mit 120 l Benzin mischen?

99. Welchen Höhenunterschied überwindet eine Treppe, deren Stufen eine Höhe von 15 cm und eine Breite von 35 cm haben, bei einer waagerechten Entfernung von 2,45 m?

100. Welchen Höhenunterschied überwindet eine Treppe, deren Stufen eine Höhe von 18 cm und eine Breite von 30 cm haben, bei einer waagerechten Entfernung von 2,70 m?

101. 55 kWh Elektroenergie kosten 4,40 M. Wieviel Mark kosten 75 kWh?

102. 72 m³ Stadtgas kosten 11,52 M. Wieviel Mark kosten 106 m³ Stadtgas?

103. Für 800 Hefte benötigt man 68,8 kg Papier. Wieviel Kilogramm Papier werden für 1 200 Hefte verbraucht?

104. 15 l Petroleum wiegen 12,3 kg. Wie groß ist die Masse von 35 l Petroleum?

In 100 m³ Luft sind 21 m³ Sauerstoff enthalten. Wieviel Kubikmeter Sauerstoff sind in einem Raum mit folgenden Abmessungen (Länge l, Breite b, Höhe h) enthalten?

105. $l = 10$ m, $b = 8$ m, $h = 3{,}25$ m

106. $l = 10$ m, $b = 6$ m, $h = 2{,}75$ m

Fertige für die folgenden Aufgaben graphische Darstellungen an (Millimeterpapier)! Ermittle die gesuchten Größen jeweils graphisch!

107. 35 dt Siebbrandkohle kosten 94,50 M. Wieviel Mark kosten 20 dt? Wieviel Dezitonnen erhält man für 54 M?

108. 150 dt Rüben ergeben 25 dt Zucker. Wieviel Dezitonnen Zucker ergeben 60 dt Rüben? Wieviel Dezitonnen Rüben ergeben 15 dt Zucker?

Aus 5 dt Leinsamen können 165 kg Öl gewonnen werden.

109. Ermittle die erforderliche Leinsamenmenge für 3 dt Öl!

110. Ermittle die erforderliche Leinsamenmenge für 2 dt Öl!

111. Ein Arbeiter erhält einen Zeitlohn von 2,70 M je Stunde. Wie hoch ist sein Lohn für eine 40stündige Arbeit? Wie lange hat er für 13,50 M Lohn gearbeitet?

112. Ein Autorennfahrer fährt bei einer bestimmten Durchschnittsgeschwindigkeit eine Strecke von 400 km in $2\frac{1}{2}$ h. Wie lang ist die Fahrtstrecke bei 2 h? Ermittle die Fahrzeit für 450 m!

C

Ein Verkehrsflugzeug mit Kolbenmotoren legt 500 km in 90 min zurück. Das sowjetische Düsenverkehrsflugzeug TU 104 benötigt für die gleiche Strecke 40 min. Ermittle für jedes der beiden Flugzeuge die Flugzeit für folgende Strecken!

113. a) 300 km b) 600 km c) 1 000 km

114. a) 500 km b) 800 km c) 900 km

Welche Strecke legt jedes Flugzeug in folgenden Flugstunden zurück?

115. a) 3 h b) 5 h c) 8 h

116. a) 2 h b) 4 h c) 6 h

In den folgenden Beispielen für umgekehrte Proportionalität ist mit Hilfe des gegebenen konstanten Produktes eine Wertetabelle für die genannten Größen aufzustellen. Gib diesen Größen dabei richtige Benennungen!

117. Anzahl der Tiere und Liegefläche je Tier in einem Rinderstall; konstantes Produkt: 180 m² Stallgröße.

118. Geschwindigkeit und Fahrzeit eines Kraftwagens; konstantes Produkt: 36 km Fahrtstrecke.

In den folgenden Aufgaben sind die Größen jeweils zueinander umgekehrt proportional. Stelle jedesmal eine Wertetabelle auf und bestimme das konstante Produkt! Gib dem Produkt nach Möglichkeit auch eine sachliche Deutung!

119. Fassungsvermögen eines LKW und Anzahl der Fahrten beim Abtransport von Schutt: Bei 1,75 m³ Fassungsvermögen sind 16 Fahrten nötig.

120. Anzahl der laufenden Drehmaschinen und Arbeitszeit für eine bestimmte Produktionsauflage: Wenn 3 Drehmaschinen laufen, benötigt man 60 h.

121. Abstand und Anzahl der Pflanzen für eine bestimmte Beetumrandung: Bei einem Abstand von 10 cm braucht man 160 Stück.

122. Breite und Anzahl der Bretter zur Herstellung einer bestimmten Bretterwand: Bei 20 cm breiten Brettern benötigt man 36 Stück.

123. Futterverbrauch je Tag und Anzahl der Futtertage bei einer bestimmten Silogröße: Bei einem Tagesverbrauch von 8 dt reicht der Vorrat für 200 Tage.

124. Treibstoffverbrauch eines Motors je Betriebsstunde und Anzahl der Betriebsstunden bei einem bestimmten Tankinhalt: Bei einem Verbrauch von 3 kg je h reicht der Tankinhalt 120 h.

Mehrere Rechtecke mit den Seiten a und b haben jeweils den gleichen Flächeninhalt A. Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

125.

$A = 12\ m^2$	
Länge der Seite a (in m)	Länge der Seite b (in m)
1	
2	
3	
4	
6	
8	
10	
12	

126.

$A = 18\ m^2$	
Länge der Seite a (in m)	Länge der Seite b (in m)
1	
2	
3	
6	
9	
12	
15	
18	

a) Welche Beziehung besteht zwischen den Maßzahlen von a und b?

b) Formuliere diese Beziehung in Form einer Gleichung!

Bei einer Kundgebung ist eine Kolonne, die in Zwölferreihen marschiert, etwa 120 m lang. Welche Länge hätte sie bei folgender Marschordnung?

127. a) Sechserreihen
b) Zehnerreihen

128. a) Reihen zu 18
b) Dreierreihen

129. 5 Schüler graben im Schulgarten eine Versuchsfläche in 12 h um. In welcher Zeit schaffen bei gleicher Durchschnittsleistung die gleiche Arbeit

a) 6 Schüler
b) 10 Schüler
c) 4 Schüler
d) 8 Schüler?

130. 4 Schüler graben die Hälfte des Schulgartens in insgesamt 18 h um. Die andere Hälfte des Gartens soll in

a) 8 h b) 9 h
c) 6 h d) 12 h

umgegraben sein. Wieviel Schüler müssen bei gleicher Durchschnittsleistung graben?

C

131. In welcher Zeit durchfährt ein Radfahrer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von

a) $12\,\frac{km}{h}$ b) $15\,\frac{km}{h}$ c) $20\,\frac{km}{h}$

eine Strecke von 11 km?

132. Wieviel Zeit benötigt ein Motorradfahrer bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von

a) $60\,\frac{km}{h}$ b) $80\,\frac{km}{h}$ c) $40\,\frac{km}{h}$

für eine Strecke von 11 km?

133. Ein Personenkraftwagen verbraucht auf einer Fahrt von 100 km im Durchschnitt 8,5 l Benzin. Wie groß ist bei diesem durchschnittlichen Verbrauch der Verbrauch an Benzin auf einer Fahrt von

a) 140 km b) 70 km c) 170 km?

134. Ein Radfahrer fährt von Halle nach Sangerhausen im Durchschnitt

a) 14,4 km b) 18 km c) 20 km

in 1 h. Um 15 Uhr war er 3,6 km hinter Halle. Wann kann er jeweils in Sangerhausen eintreffen (Entfernung zwischen beiden Städten 50,4 km)?

135. Ein Mähdrescher vom Typ E 175 mäht eine Fläche von 2,2 ha in $5\frac{1}{2}$ h.

a) Welche Fläche mäht er im Durchschnitt in 1 h?

b) Wie lange braucht er, um eine Fläche von 1 ha zu mähen?

136. Ein Mähdrescher vom Typ E 512 mäht eine Fläche von 3 ha in $2\frac{1}{2}$ h.

a) Welche Fläche mäht er im Durchschnitt in 1 h?

b) Wie lange braucht er, um eine Fläche von 1 ha zu mähen?

C

137. Ein Hektar Zuckerrüben muß in der Wachstumszeit mindestens 4 000 000 l Wasser bekommen. Wieviel Liter Niederschläge je Quadratmeter sind das?

138. Die durchschnittliche Niederschlagsmenge betrug im Jahre 1967 für Magdeburg 543 l je Quadratmeter. Wieviel Liter Niederschläge erhielt eine Fläche von 1 ha?

139. Ein Gestüt ist mit 63 Pferden besetzt, sein Futtervorrat reicht für 72 Tage. 9 Pferde werden verkauft. Wie lange reicht jetzt der Futtervorrat?

140. Ein Gestüt ist mit 35 Pferden besetzt, sein Futtervorrat reicht für 36 Tage. 5 Pferde werden verkauft. Wie lange reicht jetzt der Futtervorrat?

141. Beim Handmelken rechnet man mit 0,8 kg Milch je Minute.

142. Aus 20 l Milch läßt sich 1,1 kg Butter erzeugen.

a) Wieviel Kilogramm Milch melken 3 Melker in $\frac{3}{4}$ h?

b) In welcher Zeit werden 12 kg Milch von 3 Melkern gemolken?

a) Wieviel Kilogramm Butter kann man aus 78 l Milch erzeugen?

b) Wieviel Liter Milch benötigt man, um 3 kg Butter zu erzeugen?

143. Eine Brigade von 9 Monteuren erfüllte einen Arbeitsauftrag in 46 h.

a) In welcher Zeit kann der Auftrag bei gleicher Durchschnittsleistung von 15 Monteuren erledigt werden?

b) Welche Zeit würden bei gleicher Durchschnittsleistung 7 Monteure dafür benötigen?

c) Wieviel Arbeitsstunden werden eingespart, wenn 8 Monteure den Auftrag ebenfalls in 46 h erledigen?

144. Mit 12 gleichartigen Drehmaschinen kann eine Serie von Kleinmaschinenteilen in 22 h gefertigt werden.

a) Wieviel Stunden dauert die Fertigung, wenn 2 Drehmaschinen wegen notwendiger Reparaturen für diesen Auftrag ausfallen?

b) Um wieviel Stunden verschiebt sich der Abschluß der Fertigung?

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

C

Prüfe die folgenden Gleichungen auf ihre Lösbarkeit im Grundbereich! Gib die Lösungsmengen an!

1. a) $0{,}3x + 1{,}42 = 2{,}82;\quad x \in N$
b) $0{,}2x - 1{,}2 = 1{,}3;\quad x \in R^*$

2. a) $0{,}3x + 1{,}34 = 2{,}44;\quad x \in N$
b) $0{,}2x - 1{,}4 = 1{,}5;\quad x \in R^*$

Gib jeweils alle geraden Zahlen an, die die folgenden Ungleichungen erfüllen!
Gib jeweils alle natürlichen Zahlen an, die die Ungleichungen erfüllen!
Vergleiche jeweils die beiden Mengen!

3. a) $2 + x < 14$ **b)** $3x - 1 < 19$

4. a) $4 + x < 16$ **b)** $2x - 3 < 11$

Löse die folgenden Gleichungen!

5. a) $14c = 154$ **b)** $2x = \frac{10}{3}$ **c)** $\frac{x}{0{,}25} = 8$ **d)** $\frac{x}{35} = \frac{3}{21}$

6. a) $13c = 143$ **b)** $4x = \frac{20}{3}$ **c)** $\frac{x}{0{,}5} = 4$ **d)** $\frac{x}{15} = \frac{4}{12}$

7. a) $\frac{2}{x} = \frac{1}{3}$ **b)** $\frac{\frac{7}{3}}{x} = \frac{5{,}2}{2{,}6}$

8. a) $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\frac{7}{3}}{x} = \frac{5{,}8}{2{,}9}$

Durch welche Zahlen muß man die folgende Tabelle ergänzen, damit zwei zueinander proportionale Zahlenfolgen entstehen?

9.

I	2,5	$\frac{18}{7}$		5	$\frac{85}{12}$	
II	0,5		0,64	1		2,02

10.

I	1,6	$\frac{13}{5}$		4	$\frac{76}{3}$	
II	0,4		0,37	1		2,02

11. Die Ordinaten der Punkte P_1; P_2; P_3 und P_4 heißen a.

a) Wähle beliebige Abszissen und zeichne die Punkte für die Fälle $a = 3$ und $a = \frac{17}{4}$!

b) Was läßt sich über die Lage der Punkte aussagen?

12. Die Abszissen der Punkte P_1; P_2; P_3 und P_4 heißen a.

a) Wähle beliebige Ordinaten und zeichne die Punkte für die Fälle $a = 3$ und $a = \frac{17}{4}$!

b) Was läßt sich über die Lage der Punkte aussagen?

Ermittle den Proportionalitätsfaktor!

13. I $\frac{2}{5}$; 1; $\frac{8}{5}$; $\frac{11}{5}$; $\frac{14}{5}$

II 1; $\frac{5}{2}$; 4; $\frac{11}{2}$; 7

14. I $\frac{3}{5}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{12}{5}$; 3

II $\frac{3}{2}$; 3; $\frac{9}{2}$; 6; $\frac{15}{2}$

Bilde je drei Paare von Zahlen mit folgenden Verhältnissen!

15. a) 2 : 3 **b)** 7 **c)** 0,4

16. a) 3 : 2 **b)** 5 **c)** 0,3

Stelle mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors für die folgenden zueinander proportionalen Größen eine Wertetabelle auf! Fertige zu jedem Beispiel eine graphische Darstellung an!

17. Kubikmeter gefördertes Wasser und Pumpzeit einer Pumpe; Proportionalitätsfaktor: 9,8 m^3 Wasser je Sekunde Pumpzeit.

18. Menge des 1967 in der DDR produzierten Roheisens; Proportionalitätsfaktor: 7,1 Tausend Tonnen je Tag.

C

Löse die folgenden Verhältnisgleichungen!

19. a) $\frac{3}{7} = \frac{x}{21}$ **b)** $5{,}2 : 6{,}2 = \frac{7}{3} : x$

20. a) $\frac{6}{1} = \frac{3}{x}$ **b)** $4{,}8 : 2{,}4 = \frac{5}{7} : x$

Stelle auf drei verschiedenen Landkarten mit den Maßstäben 1 : 10 000; 1 : 50 000 und 1 : 100 000 bei folgenden Entfernungen in der Natur die entsprechenden Streckenlängen auf den Karten fest!

21. a) 1 km **b)** 600 m **c)** 850 m

22. a) 100 m **b)** 800 m **c)** 500 m

Der Maßstab einer Landkarte sei 1 : 25000. Wie groß sind die Entfernungen in der Natur, denen auf der Karte folgende Streckenlängen entsprechen?

23. a) 2 cm **b)** 5 cm **c)** 3,5 cm

24. a) 3 cm **b)** 4 cm **c)** 2,5 cm

Gib für die folgenden natürlichen Zahlen in Tabellen jeweils alle Möglichkeiten an, die betreffende Zahl als Produkt aus zwei natürlichen Zahlen zu schreiben! Welchen Zusammenhang zwischen den Faktoren kannst du aus der Tabelle ablesen?

25. a) 396 **b)** 256 **c)** 800

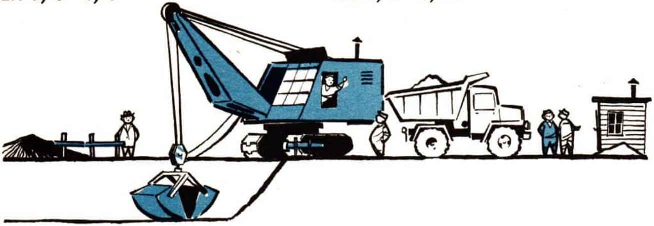
26. a) 252 **b)** 888 **c)** 400

Für einen Neubau wird eine Baugrube für das Fundament von einem Bagger ausgehoben. Das Erdreich wird durch Lastkraftwagen ohne Hänger abgefahren. Nachdem 10 Fahrzeuge insgesamt 48 h lang gefahren sind, ist etwa die Hälfte der Grube ausgehoben. In wieviel Stunden ist der Rest abgefahren, wenn man für die zweite Hälfte die folgenden

Anzahlen von Lastkraftwagen mit Hängern einsetzt (LKW und Hänger mögen jeweils die gleiche Ladefähigkeit haben)?

27. a) 6 b) 8

28. a) 4 b) 12



29. In der DDR wurden im Jahre 1967 durchschnittlich je Kopf der Bevölkerung 220 Eier verbraucht.

a) Wieviel Eier wurden in der Hauptstadt Berlin (1 080 754 Einwohner) unter Beachtung dieses Durchschnitts verbraucht?

b) Wieviel Eier wurden im Bezirk Halle (1 933 300 Einwohner) unter Beachtung dieses Durchschnitts verbraucht?

30. In der DDR lebten 1967 rund 17 000 000 Einwohner.

a) Die Anzahl der Ärzte betrug 22 735. Wieviel Ärzte kommen auf 10 000 Einwohner?

b) Die Anzahl der Zahnärzte betrug 6 753.
Wieviel Zahnärzte kommen auf 10 000 Einwohner?

C

31. 1967 gab es in der DDR durchschnittlich 60 Fernsehempfänger je 100 Haushalte.

a) Wieviel Fernsehempfänger gab es bei Zugrundelegung dieses Durchschnitts im Bezirk Leipzig (rund 619 000 Haushalte)?

b) Wieviel Haushalte kommen bei Zugrundelegung dieses Durchschnitts auf 1 000 Fernsehempfänger?

32. 1967 gab es in der DDR durchschnittlich 37,8 Kühlschränke je 100 Haushalte.

a) Wieviel Kühlschränke gab es bei Zugrundelegung dieses Durchschnitts in der Hauptstadt Berlin (rund 492 000 Haushalte)?

b) Wieviel Haushalte kommen bei Zugrundelegung dieses Durchschnitts auf 1 000 Kühlschränke?

d) Planimetrie

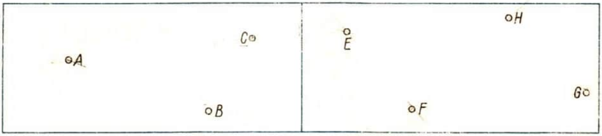
1. a) Zeichne eine Gerade *AB*!
b) Zeichne einen Strahl *AB*!
c) Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$!

2. a) Zeichne eine Gerade *EF*!
b) Zeichne einen Strahl *EF*!
c) Zeichne eine Strecke $\overline{EF}$!

Übertrage die folgenden Bilder in dein Heft!

3. a) Verbinde im Bild d 1 jeweils 2 Punkte durch eine Gerade!
b) Wieviel Geraden kannst du ziehen?
c) Bezeichne jede Gerade!

4. a) Verbinde im Bild d 2 jeweils 2 Punkte durch eine Gerade!
b) Wieviel Geraden kannst du ziehen?
c) Bezeichne jede Gerade!



d 1 d 2

Zeichne folgende Strecken!

5. a) $\overline{RS} = 5{,}8$ cm
b) $\overline{CD} = 7{,}2$ cm
c) $\overline{KL} = 1{,}3$ dm

6. a) $\overline{GH} = 4{,}7$ cm
b) $\overline{ST} = 8{,}3$ cm
c) $\overline{BC} = 1{,}2$ dm

7. Zeichne auf einer Geraden *EF*
a) zwei gleich gerichtete Strahlen *EK* und *FL*,
b) zwei entgegengesetzt gerichtete Strahlen *ER* und *FS*!

8. Zeichne auf einer Geraden *PQ*
a) zwei gleich gerichtete Strahlen *PU* und *QV*,
b) zwei entgegengesetzt gerichtete Strahlen *PA* und *QB*!

9. Gegeben seien zwei zueinander parallele Geraden *AB* und *CD*.
a) Zeichne die gleich gerichteten Strahlen *BK* und *CL*!
b) Zeichne die entgegengesetzt gerichteten Strahlen *BR* und *CS*!

10. Gegeben seien zwei zueinander parallele Geraden *EF* und *GH*.
a) Zeichne die gleich gerichteten Strahlen *EK* und *HL*!
b) Zeichne die entgegengesetzt gerichteten Strahlen *ER* und *GS*!

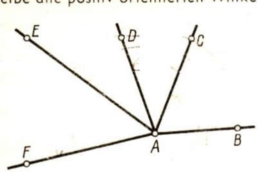
Zeichne folgende Winkel!

11. a) $\sphericalangle\,(e, f) = 78°$
b) Winkel $RST = 118°$
c) $\alpha = 152°$, $\beta = 41°$

12. a) $\sphericalangle\,(g, h) = 108°$
b) Winkel $ABC = 74°$
c) $\gamma = 37°$, $\delta = 156°$

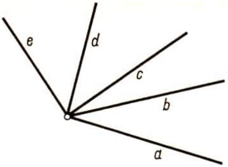
Schreibe alle positiv orientierten Winkel auf!

13.



d 3

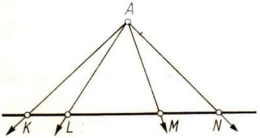
14.



d 4

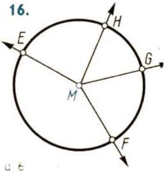
Sind folgende Abbildungen eindeutig oder umkehrbar eindeutig?

15.



d 5

16.



d 6

17. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 3,0 cm.

a) Führe die Verschiebung $\overrightarrow{AC}$ mit der Verschiebungsweite 4,5 cm durch!

b) Drehe das Quadrat um den Punkt B um den Drehwinkel $\alpha = 100°$!

c) Spiegele das Quadrat an einer Geraden g, die parallel zur Geraden BD durch den Punkt A geht!

18. Gegeben sei ein Dreieck EFG mit einem rechten Winkel bei E.

a) Führe die Verschiebung $\overrightarrow{EF}$ mit der Verschiebungsweite 4,0 cm durch!

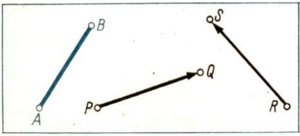
b) Drehe das Dreieck um den Punkt E um den Drehwinkel $\delta = 110°$!

c) Spiegele das Dreieck an einer Geraden h, die parallel zur Geraden FG durch den Punkt E geht!

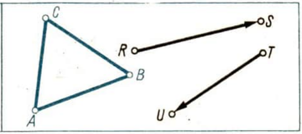
19. Führe für die Strecke $\overline{AB}$ die Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ und für die Strecke $\overline{A'B'}$ die Verschiebung $\overrightarrow{RS}$ durch (Bild d 7)!

20. Führe für das Dreieck ABC die Verschiebung $\overrightarrow{RS}$ und für das Dreieck $A'B'C'$ die Verschiebung $\overrightarrow{TU}$ durch (Bild d 8)!

d 7



d 8



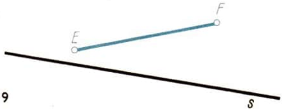
d

21. Drehe die Strecke $\overline{CD} = 2{,}8$ cm um den Punkt C mit einem Drehwinkel $\alpha = 35°$ und die Strecke $\overline{C'D'}$ um den Punkt C' mit einem Drehwinkel $\beta = 50°$!

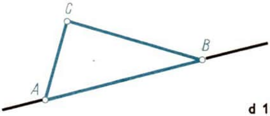
22. Drehe das gleichseitige Dreieck EFG ($s = 3$ cm) um den Punkt E mit einem Drehwinkel $\gamma = 65°$ und das Dreieck $E'F'G'$ um den Punkt E' mit einem Drehwinkel $\delta = 105°$!

23. Spiegele die Strecke $\overline{EF}$ an der Geraden s (Bild d 9)!

24. Spiegele das Dreieck ABC an der Geraden AB (Bild d 10)!



d 9



d 10

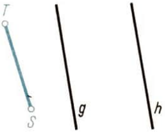
Spiegele nacheinander!

25. a) Strecke $\overline{ST}$ an der Geraden g

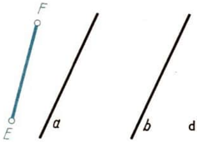
b) Bildstrecke $\overline{S'T'}$ an der zu g parallelen Geraden h (Bild d 11)

26. a) Strecke $\overline{EF}$ an der Geraden a

b) Bildstrecke $\overline{E'F'}$ an der zur Geraden a parallelen Geraden b (Bild d 12)



d 11



d 12

27. Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit 4,2 cm Länge und 2,3 cm Breite!

a) Spiegele dieses Rechteck an der Geraden BC!

b) Führe für das Rechteck $A'B'C'D'$ die Verschiebung $\overrightarrow{D'A'}$ mit der Verschiebungsweite 5,0 cm durch!

c) Drehe das Rechteck $A''B''C''D''$ um den Punkt B'' um einen Winkel von 120°!

d) Vergleiche bei Ausgangsfigur und Endfigur Streckenlängen und Winkelgrößen!

28. Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit 1,5 cm Länge und 3,8 cm Breite!

a) Drehe dieses Rechteck um den Punkt C um einen Winkel von 110°!

b) Führe für das Rechteck $A'B'C'D'$ die Verschiebung $\overrightarrow{B'A'}$ mit der Verschiebungsweite 3,0 cm durch!

c) Spiegele das Rechteck $A''B''C''D''$ an der Geraden $D''A''$!

d) Vergleiche bei Ausgangsfigur und Endfigur Streckenlängen und Winkelgrößen!

d

Zeichne ohne Winkelmesser!

29. a) zwei kongruente Winkel (a, b) und (c, d)

30. a) zwei kongruente Winkel (e, f) und (g, h)

b) zwei Winkel, für die gilt:
$\sphericalangle(g, h) < \sphericalangle(k, l)$

b) zwei Winkel, für die gilt:
$\sphericalangle(p, q) > \sphericalangle(r, s)$

Gib an, welche Beziehungen ($>$, $\cong$, $<$) zwischen folgenden Winkelpaaren bestehen!

31. Im Bild d 13

a) $\sphericalangle(a, b)$ und $\sphericalangle(c, d)$

b) $\sphericalangle(c, d)$ und $\sphericalangle(e, f)$

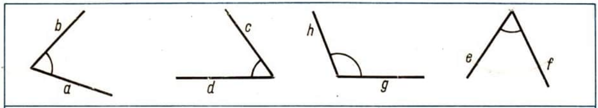
c) $\sphericalangle(c, d)$ und $\sphericalangle(g, h)$

32. Im Bild d 14

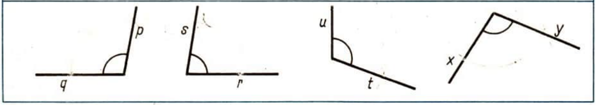
a) $\sphericalangle(p, q)$ und $\sphericalangle(r, s)$

b) $\sphericalangle(p, q)$ und $\sphericalangle(t, u)$

c) $\sphericalangle(p, q)$ und $\sphericalangle(x, y)$



d 13



d 14

Zeichne folgende Winkel!

33. a) $\alpha = 34°$ b) $\gamma = 96°$
c) $\beta = 134°$ d) $\delta = 84°$

34. a) $\alpha = 41°$ b) $\gamma = 82°$
c) $\beta = 142°$ d) $\delta = 98°$

35. Ein Winkel eines Nebenwinkelpaares sei stumpf. Was für ein Winkel ist der andere?

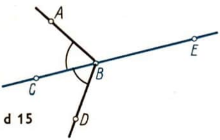
36. Ein Winkel eines Nebenwinkelpaares sei ein rechter. Was für ein Winkel ist der andere?

37. Ein Winkel eines Nebenwinkelpaares sei viermal so groß wie der andere. Gib die Größe jedes dieser Winkel an!

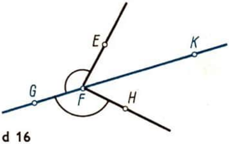
38. Ein Winkel eines Nebenwinkelpaares sei fünfmal so groß wie der andere. Gib die Größe jedes dieser Winkel an!

39. Im Bild d 15 gelte:
$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle CBD$.
Sprich über die Winkel *ABE* und *DBE*!

40. Im Bild d 16 gelte:
$\sphericalangle EFG \cong \sphericalangle GFH$.
Sprich über die Winkel *EFK* und *HFK*!



d 15



d 16

41. Von den zwei Winkeln α und β eines Nebenwinkelpaares sei der Winkel α bekannt.

a) Zeichne α! b) Konstruiere und miß β! c) Berechne β!

d

Übertrage folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

α	15°	28°	45°	74°	90°	115°	142°	165°
β gemessen								
β berechnet								

42. Zwei Geraden schneiden einander und bilden die Winkel α, β, γ und δ. Winkel α sei gegeben.

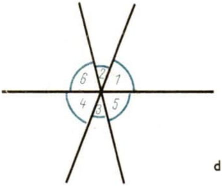
a) Zeichne! b) Berechne die übrigen Winkel für jedes α!

Übertrage folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

α	20°	38°	65°	90°	122°	135°	160°
β							
γ							
δ							

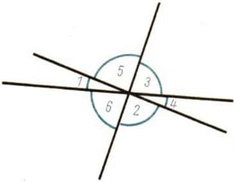
Die folgenden Bilder zeigen jeweils drei Geraden mit gemeinsamem Schnittpunkt. Schreibe alle Scheitelwinkelpaare auf! Welche Winkel ergeben zusammen 180°? Miß alle Winkel und überprüfe deine Antworten!

43.



d 17

44.



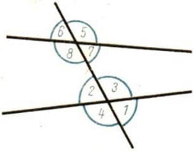
d 18

45. Drehe einen Winkel von 38° um seinen Scheitelpunkt um 180°! Was stellst du fest?

46. Spiegele einen Winkel von 90° an einem seiner Schenkel. Was stellst du fest?

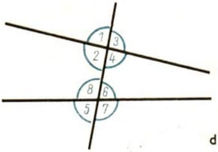
Stelle alle Stufenwinkelpaare, alle Wechselwinkelpaare, alle Paare entgegengesetzt liegender Winkel zusammen!

47.



d 19

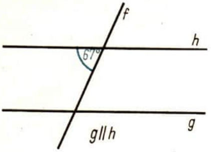
48.



d 20

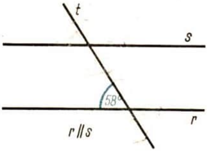
Bezeichne und berechne alle übrigen Winkel!

49.



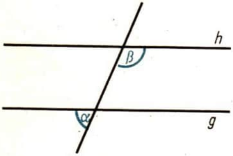
d 21

50.



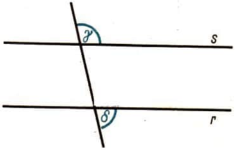
d 22

51. In Bild d 23 seien $\alpha = 68^\circ$ und $\beta = 112^\circ$. Mache eine Aussage über die Geraden g und h!



d 23

52. In Bild d 24 seien $\gamma = 104^\circ$ und $\delta = 76^\circ$. Mache eine Aussage über die Geraden r und s!



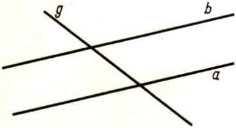
d 24

53. Zwei Geraden e und f schneiden einander unter einem Winkel von 50°. Zeichne eine Parallele zu der Geraden e (Winkelmesser)!

54. Zwei Geraden a und b schneiden einander unter einem Winkel von 110°. Zeichne eine Parallele zu der Geraden a (Winkelmesser)!

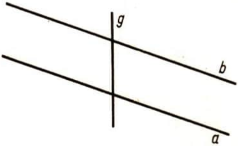
Die Geraden a und b werden durch eine dritte Gerade g geschnitten. Wie kannst du durch Winkelmessung die Parallelität der Geraden a und b feststellen?

55.



d 25

56.



d 26

Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC! Zeichne die Parallele zu AB durch den Punkt C!

57. Kennzeichne Stufenwinkel!

58. Kennzeichne Wechselwinkel!

Überprüfe, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

59. a) Haben zwei Winkel einen Schenkel gemeinsam, so sind sie Nebenwinkel.

60. a) Haben zwei Winkel den Scheitelpunkt gemeinsam, so sind sie Scheitelwinkel.

b) Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, so entstehen Stufenwinkel.

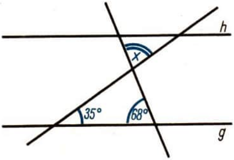
c) Ist die Summe zweier entgegengesetzt liegender Winkel größer als 180°, so sind die geschnittenen Geraden nicht zueinander parallel.

b) Werden zwei zueinander parallele Geraden von einer dritten geschnitten, so entstehen Wechselwinkel.

c) Sind zwei Stufenwinkel gleich groß, so sind die geschnittenen Geraden nicht zueinander parallel.

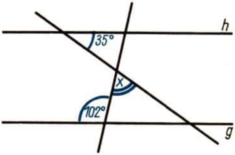
Die Geraden g und h seien parallel. Ermittle den Winkel x! Gib deine Überlegungen an!

61.



d 27

62.



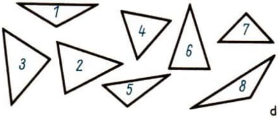
d 28

63. Im Bild d 29 sind 8 Dreiecke dargestellt. Teile sie ein

a) nach den Winkeln,

b) nach den Seiten!

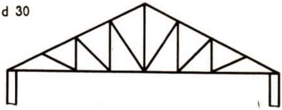
(Nimm den Zirkel zur Überprüfung der Seitenlängen zu Hilfe!)



d 29

64. Das Bild d 30 stellt einen Dachbinder dar, wie er häufig in Lagerhäusern und Scheunen verwendet wird. Was für Dreiecke treten bei diesem Dachbinder auf? Bezeichne die Dreiecke und stelle eine Tabelle nach Seiten (nach Winkeln) zusammen!

d 30



Überprüfe, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!

65. a) Ein rechtwinkliges Dreieck hat zwei spitze Winkel.

b) Wenn ein Dreieck unregelmäßig ist, so ist es stumpfwinklig.

c) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es nicht gleichschenklig.

66. a) Ein stumpfwinkliges Dreieck hat zwei spitze Winkel.

b) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, so ist es spitzwinklig.

c) Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist es nicht stumpfwinklig.

Berechne in Dreiecken mit den Innenwinkeln α, β, γ jeweils den dritten Innenwinkel!

67. a) $\alpha = 57°$; $\beta = 75°$

b) $\beta = 23°$; $\gamma = 109°$

c) $\alpha = 90°$; $\gamma = 43°$

d) $\gamma = 38°$; $\beta = 46°$

68. a) $\alpha = 84°$; $\beta = 48°$

b) $\alpha = 27°$; $\gamma = 104°$

c) $\beta = 52°$; $\alpha = 90°$

d) $\beta = 66°$; $\gamma = 17°$

Berechne die drei Außenwinkel, wenn zwei Innenwinkel bekannt sind!

69. a) $\alpha = 42°$; $\gamma = 83°$
b) $\beta = 77°$; $\gamma = 59°$
c) $\alpha = 21°$; $\beta = 113°$
d) $\beta = 17°$; $\alpha = 36°$

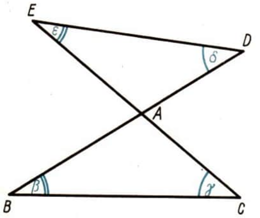
70. a) $\beta = 45°$; $\gamma = 78°$
b) $\gamma = 86°$; $\alpha = 57°$
c) $\alpha = 24°$; $\beta = 115°$
d) $\alpha = 39°$; $\gamma = 14°$

71. In einem rechtwinkligen Dreieck sei einem der spitzen Winkel der Außenwinkel von 141° zugeordnet. Wie groß ist jeder der beiden spitzen Innenwinkel?

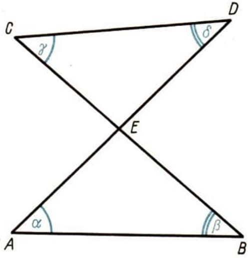
72. In einem rechtwinkligen Dreieck sei einem der spitzen Winkel der Außenwinkel von 127° zugeordnet. Wie groß ist jeder der beiden spitzen Innenwinkel?

73. In Bild d 31 gelte: $\gamma \cong \delta$.
Beweise, daß $\beta \cong \varepsilon$!

74. In Bild d 32 gelte: $\alpha \cong \gamma$.
Beweise, daß $\beta \cong \delta$!



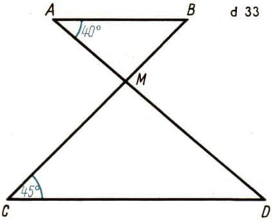
d 31



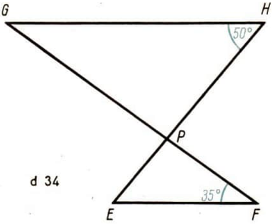
d 32

75. In Bild d 33 seien die Geraden *AB* und *CD* parallel. Ermittle den Winkel BMD!

76. In Bild d 34 seien die Geraden *EF* und *GH* parallel. Ermittle den Winkel GPE!



d 33



d 34

77. Die Summe zweier Außenwinkel eines Dreiecks betrage 258°. Wie groß ist der Innenwinkel, der keinem der beiden Außenwinkel anliegt?

78. Die Summe zweier Außenwinkel eines Dreiecks betrage 237°. Wie groß ist der Innenwinkel, der keinem der beiden Außenwinkel anliegt?

d

Einer der Außenwinkel eines Dreiecks sei

79. spitz.

80. stumpf.

Was für Winkel sind dann die übrigen Außenwinkel des Dreiecks? Begründe deine Antwort!

81. Kann ein Außenwinkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ein rechter, ein spitzer, ein stumpfer Winkel sein?

82. Kann ein Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ein rechter, ein spitzer, ein stumpfer Winkel sein?

83. Gib die Größe der Außenwinkel eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks an!

84. Die Außenwinkel eines Dreiecks betragen alle 120°. Was für ein Dreieck ist das?

Berechne jeweils die übrigen Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks!

85. a) Basiswinkel: 76°
b) Basiswinkel: 29°
c) Winkel an der Spitze: 44°
d) Winkel an der Spitze: 108°

86. a) Basiswinkel: 58°
b) Basiswinkel: 33°
c) Winkel an der Spitze: 28°
d) Winkel an der Spitze: 122°

Überlege, ob aus den folgenden Strecken Dreiecke konstruiert werden können!

87. a) $a = 8$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm
b) $a = 6$ cm; $b = 6$ cm; $c = 6$ cm
c) $a = 5$ cm; $b = 9$ cm; $c = 3$ cm

88. a) $a = 7$ cm; $b = 3$ cm; $c = 8$ cm
b) $a = 4$ cm; $b = 9$ cm; $c = 3$ cm
c) $a = 6$ cm; $b = 5$ cm; $c = 4$ cm

89. Übertrage folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

Dreieckswinkel			Seitenbeziehungen			Art des Dreiecks	
α	β	γ	$a \gtreqless b$	$a \gtreqless c$	$b \gtreqless c$	nach Winkeln	nach Seiten
72°	65°						
	75°	30°					
31°		59°					
							gleichseitig
	100°						gleichschenklig
56°				$a = c$			

90. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft! Setze an die freien Stellen solche Streckenlängen, die die Dreiecksungleichung erfüllen!

Dreiecksseiten			Kontrolle durch Dreiecksungleichung		
a	b	c	$a + b > c$	$a + c > b$	$b + c > a$
9,2 cm	7,5 cm				
3,8 cm		3,8 cm			
	1,5 cm	8,7 cm			

91. Zeichne ein Dreieck MNO mit einem stumpfen Winkel bei N! Spiegele dieses Dreieck an der Geraden MN!
Vergleiche die Dreiecke MNO und MNO' miteinander!

92. Zeichne ein Dreieck XYZ mit einem rechten Winkel bei Y! Spiegele dieses Dreieck an der Geraden XY!
Vergleiche die Dreiecke XYZ und XYZ' miteinander!

93. Zeichne ein beliebiges Quadrat $ABCD$!

94. Zeichne ein beliebiges Rechteck $EFGH$!

Zeichne beide Diagonalen ein! Vergleiche die entstandenen Dreiecke miteinander! Begründe deine Aussage!

Konstruiere Dreiecke ABC, die in folgenden Stücken übereinstimmen! Wieviel Lösungen erhältst du?

95. a) Seite $c = 5{,}4$ cm
b) Seite $a = 4{,}5$ cm; Winkel $\beta = 55°$

96. a) Winkel $\beta = 65°$
b) Seite $a = 4{,}8$ cm; Seite $b = 4{,}2$ cm

Konstruiere Dreiecke ABC aus folgenden Stücken! Miß die Winkel und kontrolliere die Winkelsumme! Gib die Arten der konstruierten Dreiecke an!

97. $a = 5{,}7$ cm; $c = 4{,}9$ cm; $\beta = 73°$

98. $b = 7{,}2$ cm; $c = 6{,}8$ cm; $\alpha = 85°$

99. $\gamma = 90°$; $a = 4{,}5$ cm; $b = 60$ mm

100. $a = 77$ mm; $\beta = 90°$; $c = 5{,}3$ cm

Konstruiere Dreiecke ABC aus folgenden Stücken! Gib die Arten der konstruierten Dreiecke an! Überlege, wie groß die fehlenden Winkel sind! Miß und vergleiche!

101. a) $a = 5{,}2$ cm; $b = 5{,}2$ cm; $\gamma = 75°$
b) $b = 4{,}4$ cm; $c = 4{,}4$ cm; $\alpha = 90°$
c) $a = 3{,}8$ cm; $c = 3{,}8$ cm; $\alpha = 60°$

102. a) $b = 45$ mm; $c = 45$ mm; $\alpha = 82°$
b) $a = 6{,}3$ cm; $b = 6{,}3$ cm; $\gamma = 90°$
c) $a = 5{,}8$ cm; $c = 5{,}8$ cm; $\gamma = 60°$

103. a) $a = 5{,}2$ cm; $\beta = 64°$; $\gamma = 56°$
b) $b = 4{,}8$ cm; $\alpha = 46°$; $\beta = 96°$
c) $b = 7{,}6$ cm; $\gamma = 45°$; $\beta = 90°$

104. a) $a = 3{,}6$ cm; $\alpha = 92°$; $\beta = 48°$
b) $b = 6{,}1$ cm; $\beta = 60°$; $\gamma = 60°$
c) $a = 7{,}2$ cm; $\alpha = 40°$; $\beta = 100°$

Läßt sich ein Dreieck ABC aus folgenden Stücken konstruieren?

105. $a = 7{,}0$ cm; $\alpha = 73°$; $\beta = 115°$

106. $b = 6{,}8$ cm; $\beta = 86°$; $\gamma = 98°$

Konstruiere Dreiecke KLM aus folgenden Stücken!

107. a) $k = 4{,}5$ cm; $l = 6{,}1$ cm; $m = 5{,}3$ cm
b) $k = 33$ mm; $l = 22$ mm; $m = 44$ mm
c) $k = 5{,}0$ cm; $l = 13{,}0$ cm; $m = 12{,}0$ cm

108. a) $k = 6{,}3$ cm; $l = 5{,}2$ cm; $m = 7{,}2$ cm
b) $k = 4{,}5$ cm; $l = 6{,}0$ cm; $m = 4{,}5$ cm
c) $k = 24$ mm; $l = 40$ mm; $m = 32$ mm

d

Konstruiere gleichseitige Dreiecke mit folgenden Seitenlängen!

109. a) $s = 2{,}4$ cm b) $s = 55$ mm

110. a) $s = 4{,}9$ cm b) $s = 1$ dm

Konstruiere gleichschenklige Dreiecke XYZ aus folgenden Stücken!

111. a) $x = 3{,}6$ cm; $y = z = 5{,}1$ cm
b) $y = 6{,}4$ cm; $x = z = 4{,}8$ cm
c) $z = 5{,}0$ cm; $x = y = 6{,}5$ cm

112. a) $x = 2{,}8$ cm; $y = z = 4{,}2$ cm
b) $y = 5{,}7$ cm; $x = z = 4{,}3$ cm
c) $z = 6{,}0$ cm; $x = y = 5{,}0$ cm

Konstruiere Dreiecke ABC aus folgenden Stücken!

113. a) $a = 70$ mm; $c = 55$ mm; $\alpha = 90°$
b) $a = 3{,}9$ cm; $b = 3{,}9$ cm; $\beta = 65°$
c) $b = 6{,}4$ cm; $c = 7{,}2$ cm; $\beta = 66°$

114. a) $a = 65$ mm; $b = 75$ mm; $\beta = 48°$
b) $b = 4{,}4$ cm; $c = 4{,}4$ cm; $\beta = 55°$
c) $a = 6{,}1$ cm; $b = 7{,}3$ cm; $\alpha = 90°$

Halbiere die folgenden Strecken!
Ermittle zunächst jeweils den Mittelpunkt der Strecke durch Schätzen!
Konstruiere, miß nach und vergleiche mit dem Ergebnis des Schätzens!
Beschreibe die Konstruktion!

115. $a = 4{,}3$ cm; $b = 2{,}4$ cm; $c = 70$ mm

116. $a = 4{,}7$ cm; $b = 5{,}8$ cm; $c = 66$ mm

Teile die folgenden Strecken der Reihe nach in 2, 4, 8 gleiche Teile!

117. Strecke $\overline{AB} = 12{,}9$ cm

118. Strecke $\overline{CD} = 14{,}3$ cm

Zeichne folgende Winkel und konstruiere jeweils die Winkelhalbierende!

119. a) $\alpha = 58°$ b) $\beta = 130°$
c) $\gamma = 90°$ d) $\delta = 157°$

120. a) $\alpha = 64°$ b) $\beta = 150°$
c) $\gamma = 180°$ d) $\delta = 113°$

Zeichne folgende Strecken und konstruiere jeweils die Mittelsenkrechte!

121. a) $\overline{AB} = 3{,}9$ cm b) $\overline{CD} = 7{,}5$ cm
c) $\overline{RS} = 9{,}7$ cm d) $\overline{KL} = 5{,}8$ cm

122. a) $\overline{AB} = 4{,}3$ cm b) $\overline{EF} = 8{,}1$ cm
c) $\overline{GH} = 5{,}5$ cm d) $\overline{ST} = 9{,}9$ cm

123. Zeichne ein Paar Nebenwinkel!

124. Zeichne ein Paar Scheitelwinkel!

Halbiere beide Winkel! Was für einen Winkel schließen die beiden Winkelhalbierenden miteinander ein? Beweise deine Aussage!

125. Zeichne einen gestreckten Winkel!
Halbiere ihn!
Wie groß sind die entstandenen Winkel?
Halbiere die entstandenen Winkel und miß jedes Mal nach!

126. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit einer Seitenlänge von 7,5 cm!
Halbiere den Winkel α!
Wie groß sind die entstandenen Winkel?
Halbiere die entstandenen Winkel und miß jedes Mal nach!

d

Zeichne mit Hilfe eines Winkelmessers die folgenden Winkel!

127. $\alpha = 74°$; $\beta = 52°$

128. $\beta = 112°$; $\gamma = 58°$

Konstruiere mit Hilfe von Zirkel und Lineal!

a) Winkel $\alpha + \beta$ b) Winkel $\alpha - \beta$

a) Winkel $\beta + \gamma$ b) Winkel $\beta - \gamma$

129. Zeichne ein beliebiges Rechteck *EFGH*! Zeichne die Diagonale $\overline{EG}$ ein! Fälle von den Punkten *F* und *H* jeweils das Lot auf $\overline{EG}$!

130. Zeichne ein beliebiges Viereck *ABCD*! Zeichne die Diagonale $\overline{BD}$ ein! Fälle von den Punkten *A* und *C* jeweils das Lot auf $\overline{BD}$!

Konstruiere Rechtecke *ABCD* aus folgenden Stücken!

131. a) $a = 2{,}7$ cm; $b = 4{,}5$ cm
b) $a = 35$ mm; $b = 32$ mm
c) $a = 5{,}0$ cm; $e = 6{,}5$ cm

132. a) $a = 3{,}3$ cm; $b = 5{,}6$ cm
b) $a = 44$ mm; $b = 33$ mm
c) $a = 7{,}2$ cm; $f = 8{,}1$ cm

133. Zeichne zwei beliebige zueinander parallele Geraden *a* und *b*! Konstruiere dazu die Mittellinie *m*!

134. Zeichne ein beliebiges Rechteck *ABCD*! Konstruiere die Mittellinien!

135. Zeichne je vier beliebige spitzwinklige, stumpfwinklige, gleichschenklige Dreiecke *ABC*!

136. Zeichne je vier beliebige spitzwinklige, rechtwinklige, gleichseitige Dreiecke *ABC*!

Konstruiere in je ein Dreieck der verschiedenen Dreiecksarten alle Winkelhalbierenden, in das jeweils zweite Dreieck alle Seitenhalbierenden, in das jeweils dritte Dreieck alle Mittelsenkrechten und in das jeweils vierte Dreieck alle Höhen!
Vergleiche die Lage dieser besonderen Linien in den Dreiecken!

Konstruiere Dreiecke *ABC* aus folgenden Stücken!

137. $b = 6{,}4$ cm; $\alpha = 54°$; $h_b = 5{,}2$ cm

138. $a = 5{,}8$ cm; $\beta = 66°$; $h_a = 5{,}2$ cm

139. $a = 3{,}3$ cm; $b = 4{,}4$ cm; $h_c = 2{,}9$ cm

140. $c = 4{,}7$ cm; $b = 5{,}3$ cm; $h_a = 4{,}4$ cm

141. Eine LPG hat eine dreieckige Pferdekoppel. Eine Seite wurde mit 125 m gemessen. Ihr gegenüberliegender Eckpunkt ist der Scheitel eines Winkels von 84°. Eine andere Seite ist 96 m lang.

Konstruiere das Bild dieser Koppel im Maßstab 1 : 1 000!
Miß die Winkel!

142. Drei Straßen schließen ein Wiesenstück *ABC* einer LPG ein. Der Straßenabschnitt $\overline{AB}$ hat eine Länge von 1,4 km, desgleichen der Abschnitt $\overline{AC}$. Der Straßenabschnitt $\overline{BC}$ hat eine Länge von 0,7 km.

Konstruiere das Dreieck, das von den Straßen gebildet wird, im Maßstab 1 : 20 000! Miß die Winkel!

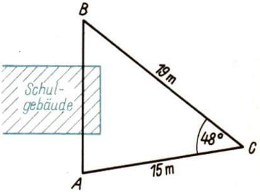
d

Es soll die Entfernung zwischen zwei Punkten gemessen werden, zwischen denen sich ein Gebäude befindet. Von einem dritten Punkt werden die Entfernung zu den beiden Punkten und der Winkel gemessen, unter dem die beiden Punkte angepeilt werden.

143. Entnimm dem Bild d 35 die Maße, zeichne das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab und ermittle die Länge von $\overline{AB}$!

144. Suche im Gelände zwei Punkte, zwischen denen ein Hindernis liegt!

Ermittle die Entfernung zwischen den beiden Punkten!



d 35

Konstruiere Vierecke $ABCD$ aus folgenden Stücken!

145. a) $a = 4{,}8$ cm; $d = 4{,}0$ cm; $\alpha = 75°$; $\beta = 85°$; $\delta = 100°$

b) $b = 4{,}2$ cm; $e = 5{,}5$ cm; $\beta = 82°$; $\gamma = 105°$; $\alpha = 80°$

146. a) $b = 4{,}8$ cm; $c = 4{,}0$ cm; $\gamma = 65°$; $\delta = 125°$; $\beta = 95°$

b) $a = 4{,}2$ cm; $f = 5{,}5$ cm; $\alpha = 105°$; $\beta = 90°$; $\delta = 85°$

147. $c = 3{,}5$ cm; $e = 5{,}0$ cm; $f = 5{,}8$ cm; $\gamma = 95°$; $\delta = 112°$

148. $d = 3{,}3$ cm; $e = 5{,}8$ cm; $f = 5{,}5$ cm; $\alpha = 92°$; $\delta = 99°$

Konstruiere Trapeze $ABCD$ ($AB \parallel CD$) aus folgenden Stücken!

149. a) $a = 6{,}1$ cm; $\beta = 63°$; $\alpha = 90°$; $b = 4{,}2$ cm

b) $c = 8{,}8$ cm; $h = 3{,}2$ cm; $\alpha = 95°$; $\beta = 125°$

c) $a = 4{,}6$ cm; $e = 6{,}0$ cm; $\beta = 100°$; $c = 9{,}5$ cm

150. a) $a = 7{,}3$ cm; $\beta = 90°$; $\alpha = 61°$; $d = 4{,}0$ cm

b) $c = 8{,}0$ cm; $h = 3{,}6$ cm; $\gamma = 75°$; $\delta = 80°$

c) $a = 5{,}5$ cm; $f = 5{,}9$ cm; $\alpha = 102°$; $c = 7{,}3$ cm

Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) aus folgenden Stücken! Begründe, daß die Konstruktion eindeutig ausführbar ist!

151. $a = 5{,}6$ cm; $h = 2{,}8$ cm; $\beta = 72°$

152. $a = 5{,}2$ cm; $h = 3{,}0$ cm; $e = 4{,}5$ cm

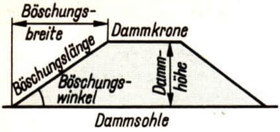
153. Für den Bau eines Dammes ist eine Zeichnung herzustellen. Es sind die folgenden Stücke bekannt: Dammsohle 13 m, Dammkrone 4 m, Dammhöhe 3,4 m (Bild d 36).

Fertige die Konstruktion in einem geeigneten Maßstab an! (Bedenke: Die Höhe kann überall eingezeichnet werden!)

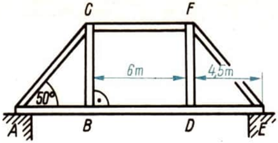
154. Das Bild d 37 zeigt die Balkenkonstruktion an einer Brücke.

Entnimm der Zeichnung die Maße und führe die Konstruktion aus!

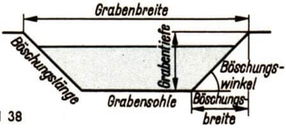
Welche Figuren erkennst du an der Zeichnung?



d 36



d 37



d 38

Gräben und Kanäle haben im allgemeinen als Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez (Bild d 38). Fertige für folgende Kanalbauten die Konstruktionszeichnungen an! Beschreibe die Konstruktion!

155. Grabenbreite 5,4 m
Grabentiefe 2,6 m
Böschungslänge 3,2 m

156. Grabensohle 3,2 m
Grabentiefe 2,2 m
Böschungswinkel 28°

Konstruiere ein rechtwinkliges Trapez $ABCD$ ($AD \parallel BC$) aus folgenden Stücken! Konstruiere die Mittellinie! Berechne ihre Länge, miß nach und vergleiche!

157. $a = 3{,}7$ cm; $\beta = 90°$;
$b = 4{,}3$ cm; $d = 5{,}5$ cm

158. $b = 6{,}3$ cm; $\beta = 90°$;
$e = 7{,}0$ cm; $d = 3{,}7$ cm

Im Parallelogramm $ABCD$ sei jeweils der folgende Winkel bekannt. Berechne in jedem Fall die übrigen Winkel!

159. a) $\alpha = 68°$ b) $\beta = 74°$
c) $\gamma = 118°$ d) $\delta = 60°$

160. a) $\alpha = 124°$ b) $\beta = 95°$
c) $\gamma = 75°$ d) $\delta = 45°$

Konstruiere Parallelogramme $ABCD$ aus folgenden Stücken!

161. a) $a = 5{,}8$ cm; $b = 3{,}6$ cm; $e = 4{,}5$ cm
b) $a = 2{,}4$ cm; $b = 4{,}8$ cm; $\beta = 74°$
c) $b = 2{,}5$ cm; $e = 4{,}8$ cm; $\beta = 98°$

162. a) $a = 2{,}7$ cm; $b = 5{,}5$ cm; $f = 4{,}5$ cm
b) $a = 3{,}6$ cm; $d = 2{,}6$ cm; $\beta = 110°$
c) $d = 2{,}8$ cm; $f = 4{,}5$ cm; $\alpha = 78°$

Konstruiere Rhomben $ABCD$ aus folgenden Stücken!

163. a) $a = 4{,}6$ cm; $\beta = 64°$
b) $e = 5{,}0$ cm; $f = 3{,}6$ cm
c) $c = 5{,}4$ cm; $\gamma = 120°$
d) $a = 3{,}7$ cm; $e = 6{,}0$ cm

164. a) $a = 4{,}4$ cm; $\alpha = 74°$
b) $e = 5{,}2$ cm; $f = 2{,}8$ cm
c) $b = 8{,}2$ cm; $\beta = 130°$
d) $f = 8{,}6$ cm; $a = 5{,}0$ cm

d

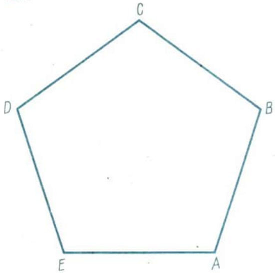
Konstruiere Drachenvierecke *ABCD* aus folgenden Stücken!

165. a) $a = 2{,}2$ cm; $b = 3{,}6$ cm; $\beta = 145°$
b) $a = 6{,}1$ cm; $b = 2{,}8$ cm; $e = 7{,}0$ cm
c) $e = 10{,}2$ cm; $\alpha = 124°$; $\gamma = 42°$

166. a) $a = 2{,}5$ cm; $b = 4{,}2$ cm; $\alpha = 76°$
b) $c = 1{,}8$ cm; $d = 4{,}2$ cm; $e = 5{,}0$ cm
c) $e = 9{,}5$ cm; $\alpha = 38°$; $\gamma = 112°$

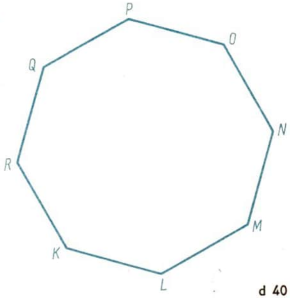
Übertrage die folgenden regelmäßigen Vielecke in dein Heft!
Errichte auf allen Seiten die Mittelsenkrechte! Verbinde den Schnittpunkt S aller Mittelsenkrechten mit den Eckpunkten des Vielecks! Was stellst du fest? Begründe deine Aussagen!
Berechne die Innenwinkel der entstandenen Dreiecke!

167.



d 39

168.



d 40

Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

169.

Flächeninhalt des Rechtecks (A)	Länge der Seite *a*	Länge der Seite *b*
	56 cm	0,2 m
52 a	130 dm	
360 ha		0,4 km
	72 mm	1 dm

170.

Flächeninhalt des Rechtecks (A)	Länge der Seite *a*	Länge der Seite *b*
	42 cm	2,1 dm
63 a		210 cm
104 ha	0,21 km	
	640 mm	10,2 cm

171. Eine quaderförmige Transportkiste ist 1,2 m lang, 75 cm breit und 60 cm hoch. Boden und Seitenwände werden, um Beschädigungen des Transportgutes zu vermeiden, vollständig mit starkem Papier ausgekleidet. Wieviel Quadratmeter Papier werden insgesamt für 20 solcher Kisten benötigt?

172. Die Verpackung eines Fernsehgerätes ist aus Wellpappe und hat folgende Maße:
Länge: 0,65 m; Breite: 35 cm;
Höhe: 5 dm.
Wieviel Quadratmeter Pappe werden insgesamt für die Verpackung von 30 Fernsehgeräten benötigt?

Konstruiere ein Parallelogramm *ABCD* aus folgenden Stücken!
Verwandle das Parallelogramm in ein flächengleiches Rechteck gleicher Höhe und Grundseitenlänge!
Beweise die Flächengleichheit mit Hilfe der Kongruenzsätze!

173. $a = 5{,}2$ cm; $h_a = 2{,}8$ cm; $\alpha = 68°$

174. $a = 6{,}1$ cm; $h_a = 3{,}2$ cm; $\alpha = 108°$

Konstruiere das Rechteck *ABCD* aus folgenden Stücken!
Verwandle dieses Rechteck in ein flächengleiches Parallelogramm gleicher Höhe und Grundseitenlänge!

175. Rechteck: $a = 6{,}2$ cm; $e = 7{,}2$ cm
Parallelogramm: $b = 4{,}5$ cm

176. Rechteck: $a = 5{,}4$ cm; $f = 6{,}3$ cm
Parallelogramm: $b = 4{,}2$ cm

Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

177.

Flächeninhalt des Parallelogramms (A)	Länge der Grundseite (g)	Länge der Höhe (h_g)
	2,7 cm	0,9 cm
	$1\frac{3}{4}$ m	$2\frac{1}{2}$ m
	240 m	0,2 km
340 ha	0,17 km	
0,42 a		10,5 dm

178.

Flächeninhalt des Parallelogramms (A)	Länge der Grundseite (g)	Länge der Höhe (h_g)
	3,1 cm	0,8 cm
	$1\frac{1}{2}$ m	$3\frac{1}{4}$ m
	270 m	0,3 km
510 ha	1,7 km	
0,46 a		11,5 dm

Berechne die Flächeninhalte folgender Parallelogramme!

179. a) $a = 37{,}3$ cm; $h_a = 41{,}5$ cm
b) $c = 6{,}5$ m; $h_a = 2{,}7$ m
c) $d = 11{,}4$ km; $h_d = 0{,}9$ km

180. a) $a = 9{,}5$ cm; $h_a = 5{,}2$ cm
b) $d = 11{,}6$ m; $h_b = 10{,}4$ m
c) $b = 0{,}95$ dm; $h_b = 0{,}62$ dm

Konstruiere ein Dreieck *ABC* aus folgenden Stücken!
Verwandle das Dreieck in ein flächengleiches Rechteck gleicher Grundseitenlänge!
Beweise die Flächengleichheit mit Hilfe der Kongruenzsätze!

181. $c = 5{,}1$ cm; $\alpha = 38°$; $\beta = 72°$

182. $a = 4{,}8$ cm; $b = 4{,}5$ cm; $\alpha = 74°$

Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

183.

Flächeninhalt des Dreiecks (A)	Länge einer Seite (g)	Länge der zugehörigen Höhe (h_g)
	1,7 m	0,8 m
	31,6 cm	60,4 cm
46 dm²	20 cm	
10,2 ha		0,3 km

184.

Flächeninhalt des Dreiecks (A)	Länge einer Seite (g)	Länge der zugehörigen Höhe (h_g)
	2,4 dm	0,8 m
	$2\frac{1}{2}$ m	$1\frac{1}{4}$ m
24 a	240 dm	
0,3 ha		0,075 km

d

Berechne die Flächeninhalte folgender Dreiecke!

185. a) $a = 4{,}5$ cm; $h_a = 2{,}8$ cm
b) $b = 8{,}6$ cm; $h_b = 22$ dm

186. a) $a = 19{,}8$ cm; $h_a = 14{,}1$ cm
b) $b = 21{,}6$ m; $h_b = 43$ dm

Unter welcher Bedingung gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC folgende Formel?

187. $A = \frac{a \cdot b}{2}$

188. $A = \frac{b \cdot c}{2}$

Konstruiere ein rechtwinkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) aus folgenden Stücken!
Verwandle das Trapez in ein flächengleiches Rechteck gleicher Höhe!
Beweise die Flächengleichheit mit Hilfe der Kongruenzsätze!

189. $a = 6{,}5$ cm; $h = 3{,}2$ cm; $c = 2{,}9$ cm

190. $a = 6{,}3$ cm; $h = 3{,}0$ cm; $e = 5{,}1$ cm

Übertrage die folgenden Tabellen für Trapeze ($AB \parallel CD$) in dein Heft und ergänze sie!

191.

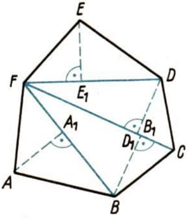
Seite a	Seite c	Mittellinie m	Höhe h	Flächeninhalt A
2,2 cm	3,8 cm		5,5 cm	
21 m	13 m		10,2 m	
3,5 dm	2,7 dm		1,4 dm	
3,6 km	750 m		0,8 km	
44 m	22 m	33 m	12 m	
102 cm		88 cm		440 cm²

192.

Seite a	Seite c	Mittellinie m	Höhe h	Flächeninhalt A
6,5 cm	4,3 cm		2,1 cm	
44 m	21 m		11,4 m	
2,3 dm	3,3 dm		1,2 dm	
1,2 km	850 m		0,4 km	
	35 m	28 m	16 m	
12 cm		16 cm		240 cm²

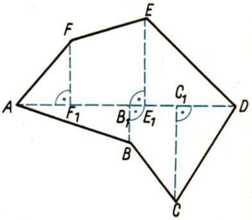
Ermittle den Flächeninhalt der Vielecke in den folgenden Bildern (Maßstab 1 : 100)!

193.



d 41

194.



d 42

195. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Deiches, dessen Sohle 44 m, dessen Krone 16 m und dessen Höhe 11 m beträgt?

196. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Kanals, der oben 13,80 m, unten 10,40 m breit und der 3,80 m tief ist?

Berechne die Umfänge folgender Parallelogramme!

197. a) $a = 2{,}7$ m; $b = 3{,}1$ m
b) $b = 60$ cm; $c = 40$ cm
c) $c = 11{,}2$ km; $d = 10{,}6$ km

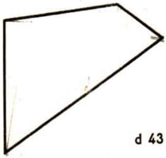
198. a) $a = 3{,}5$ m; $b = 2{,}8$ m
b) $b = 50$ cm; $c = 60$ cm
c) $c = 20{,}7$ km; $d = 11{,}8$ km

Berechne die Umfänge folgender Dreiecke!

199. a) $a = 2{,}7$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $c = 4{,}6$ cm
b) $a = 3{,}5$ m; $b = 41$ dm; $c = 420$ cm
c) $a = b = 6$ cm; $c = 10$ cm
d) $a = b = c = 4{,}6$ cm

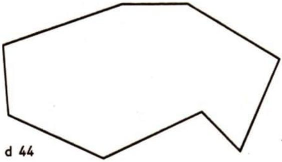
200. a) $a = 3{,}2$ cm; $b = 4{,}5$ cm; $c = 4{,}1$ cm
b) $a = 6{,}1$ cm; $b = 0{,}21$ dm; $c = 42$ mm
c) $a = c = 6{,}7$ m; $b = 5{,}8$ m
d) $a = b = c = 55{,}6$ mm

201. Bild d 43 zeigt den Grundriß eines Gartens im Maßstab 1 : 1000!
a) Berechne den Flächeninhalt in Ar nach der Dreiecksmethode!
b) Der Garten soll einen Zaun aus Maschendraht erhalten. Wieviel Meter Maschendraht sind zu bestellen?



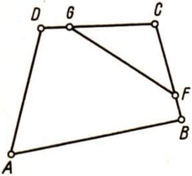
d 43

202. Bild d 44 zeigt den Grundriß eines neu anzulegenden Parks im Maßstab 1 : 10 000!
a) Berechne den Flächeninhalt in Hektar nach der Trapezmethode!
b) Am äußeren Rand entlang soll eine Hecke gepflanzt werden. Wieviel Meter Hecke ergibt das?



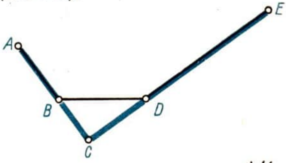
d 44

203. Welches der im Bild d 45 dargestellten Vielecke *ABCD* und *ABFGD* hat den größeren Umfang? Begründe!



d 45

204. Beweise, daß der Streckenzug *ABDE* kürzer als der Streckenzug *ACE* ist (Bild d 46)!



d 46

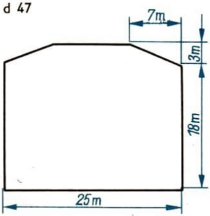
d

205. Bild d 47 zeigt die Giebelseite eines Hauses. Die Wand besteht aus Holz und muß neu mit Ölfarbe gestrichen werden.

a) Berechne den Flächeninhalt der Giebelseite!

b) Wieviel Mark kostet der Anstrich, wenn man einschließlich aller Nebenarbeiten für das Quadratmeter 2,45 M rechnen muß?

d 47

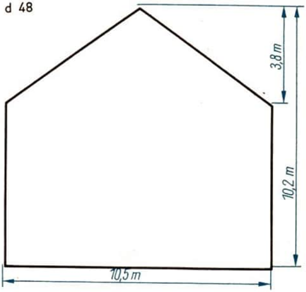


206. Bild d 48 zeigt die Giebelseite eines Hauses.

a) Berechne den Flächeninhalt der Giebelseite!

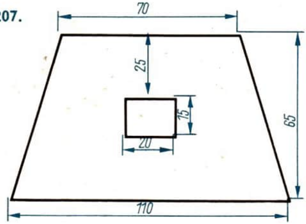
b) Wieviel Mark kostet das Verputzen dieser Fläche, wenn je Quadratmeter 4,50 M berechnet werden?

d 48



Berechne die Flächeninhalte der in den folgenden Bildern angegebenen Bleche (Maße in Millimetern)!

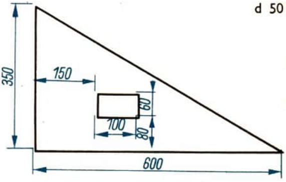
207.



d 49

208.

d 50



209. Eine dreieckige Weidefläche (Seite 310 m; zugehörige Höhe 185 m) wird mit 8,7 dt Kunstdünger bestreut.

a) Entwirf eine Skizze!

b) Berechne den Flächeninhalt in Hektar!

c) Wieviel Dezitonnen Dünger wurden je Hektar gestreut?

210. Von einem Feld wurden 192 dt Kartoffeln geerntet. Das Feld ist dreieckig, eine Seite ist 160 m lang, die gegenüberliegende Ecke ist 120 m von dieser Strecke entfernt.

a) Entwirf eine Skizze!

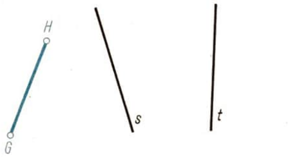
b) Berechne den Flächeninhalt!

c) Berechne den Hektarertrag!

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

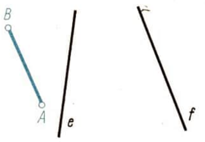
Spiegele nacheinander!

1. Strecke $\overline{GH}$ an den Geraden s und t (Bild d 51).



d 51

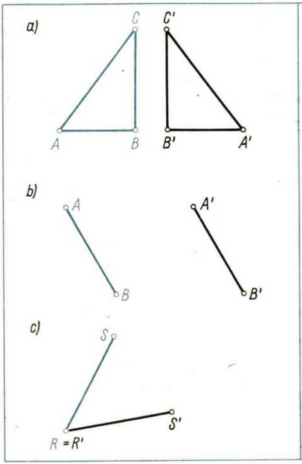
2. Strecke $\overline{AB}$ an den Geraden e und f (Bild d 52).



d 52

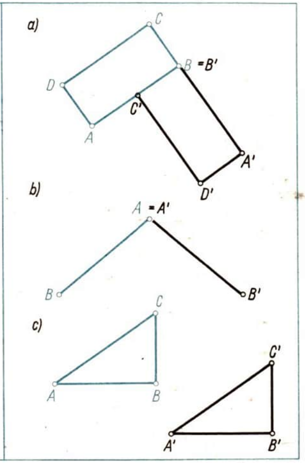
Die folgenden Bilder zeigen jeweils Original und Bild eines geometrischen Gebildes. Nenne die zugehörige Bewegung! Begründe deine Antwort!

3.



d 53

4.

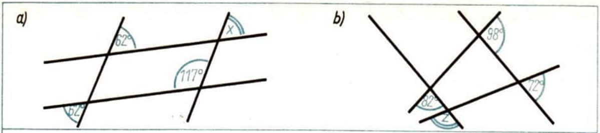


d 54

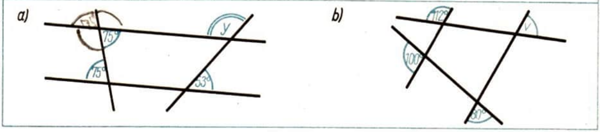
Ermittle in den Bildern d 55 und d 56 die Größe folgender Winkel!

5. a) Winkel x **b)** Winkel z

6. a) Winkel y **b)** Winkel v



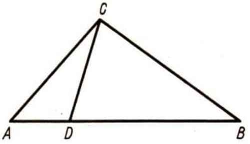
d 55



d 56

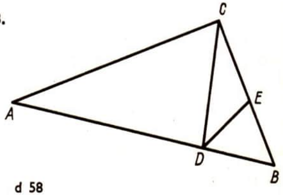
Führe alle dargestellten Dreiecke auf!

7.



d 57

8.



d 58

Berechne alle Innen- und Außenwinkel der folgenden Dreiecke ABC!

9. Innenwinkel $\gamma = 46°$
Außenwinkel $\beta_1 = 73°$

10. Innenwinkel $\beta = 38°$
Außenwinkel $\alpha_1 = 81°$

Wie groß sind die Außenwinkel eines Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel α, β, γ sich wie folgt verhalten?

11. $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 5$

12. $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$

d

Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC!

13. Konstruiere die drei Winkelhalbierenden!

14. Konstruiere die drei Mittelsenkrechten!

Überlege, ob aus den folgenden Strecken Dreiecke konstruiert werden können!

15. a) $a = 2$ cm; $b = 3$ cm; $c = 4$ cm
b) $a = 3$ cm; $b = 7$ cm; $c = 4$ cm

16. a) $a = 3$ cm; $b = 3$ cm; $c = 5$ cm
b) $a = 2$ cm; $b = 8$ cm; $c = 5$ cm

Konstruiere Dreiecke ABC aus folgenden Stücken!
Gib die Arten der konstruierten Dreiecke an!
Überlege, wie groß die fehlenden Winkel sind! Miß und vergleiche!

17. a) $b = 3{,}6$ cm; $\alpha = 115°$; $c = 4{,}1$ cm
b) $c = 6{,}4$ cm; $\alpha = 60°$; $\beta = 60°$

18. a) $\gamma = 102°$; $a = 3{,}2$ cm; $b = 5{,}1$ cm
b) $c = 5{,}8$ cm; $\alpha = 55°$; $\beta = 62°$

19. a) $b = 5{,}7$ cm; $c = 5{,}2$ cm; $\beta = 72°$
b) $a = 35$ mm; $b = 78$ mm; $c = 40$ mm

20. a) $a = 10{,}5$ cm; $c = 8{,}2$ cm; $\alpha = 72°$
b) $a = 0{,}55$ dm; $b = 0{,}3$ dm; $c = 0{,}9$ dm

21. Zeichne ein beliebiges Quadrat *ABCD*!

22. Zeichne ein beliebiges Rechteck *ABCD*!

Halbiere die Seiten! Bezeichne die Mittelpunkte der Seiten mit *M*, *N*, *O* und *P*! Verbinde *M* mit *N*, *N* mit *O*, ...! Was kannst du über die entstandenen Dreiecke sagen? Begründe deine Aussagen!

Konstruiere mit Hilfe von Zirkel und Lineal die folgenden Winkel!

23. a) 45° **b)** 22,5° **c)** 67,5°

24. a) 135° **b)** 22,5° **c)** 112,5°

Zeichne ein beliebiges gleichseitiges Dreieck *ABC*! Fälle das Lot von *C* auf *c*!

25. Sprich über die Eigenschaften dieser besonderen Linie in diesem Dreieck!

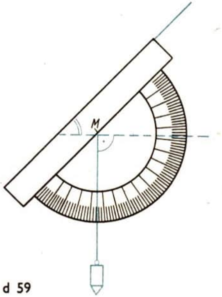
26. Lege auf dieser besonderen Linie den Punkt *D* beliebig fest! Verbinde ihn mit *A* und *B*! Sprich über das Dreieck *ABD*! Begründe deine Aussagen!

Konstruiere Dreiecke *ABC* aus folgenden Stücken!

27. $b = 4{,}8$ cm; $a = 5{,}6$ cm; $h_a = 4{,}0$ cm

28. $a = 4{,}2$ cm; $b = 5.4$ cm; $h_b = 3{,}3$ cm

Stelle den im Bild d 59 dargestellten Winkelpeiler aus einem Winkelmesser und einem Lot her!
Mit diesem Gerät kann man zum Beispiel den Winkel messen, den die Peilrichtung zu einer Turmspitze mit der waagerechten Richtung einschließt.
Miß auf diese Weise den Winkel zur waagerechten Richtung von folgenden Gegenständen!



d 59

29. a) Obere Kante eines Fensters
b) Spitze eines Turmes

30. a) Spitze eines Telegrafenmastes
b) Spitze eines hohen Baumes

Konstruiere Vierecke *ABCD* aus folgenden Stücken!

31. a) $a = 4{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $e = 5{,}0$ cm; $f = 6{,}3$ cm; $\alpha = 72°$
b) $a = 7{,}0$ cm; $h = 3{,}9$ cm; $\alpha = 55°$; $\beta = 90°$; $AB \parallel CD$

32. a) $b = 4{,}5$ cm; $c = 3{,}5$ cm; $e = 5{,}0$ cm; $f = 6{,}5$ cm; $\delta = 75°$
b) $a = 7{,}5$ cm; $h = 4{,}2$ cm; $\alpha = 90°$; $\beta = 58°$; $AB \parallel CD$

33. Ein rechteckiges Feld ist 105 m lang und 210 m breit. Ein danebenliegendes rechteckiges Feld hat die gleiche Länge, aber nur $\frac{2}{3}$ der Breite des Nachbarfeldes. Zwischen beiden Feldern führt ein 3 m breiter Fahrweg entlang.

a) Wieviel Hektar Flächeninhalt hat das erste Feld?

b) Wieviel Hektar Flächeninhalt hat das zweite Feld?

c) Wieviel Hektar Gesamtfläche erhält man, wenn der Fahrweg mit umgepflügt wird?

34. Ein rechteckiges Gartengrundstück ist 42 m lang und 25 m breit. Ein danebenliegendes, ebenfalls rechteckiges, ungenutztes Gelände hat die gleiche Länge, ist aber um die Hälfte breiter als das erste. Dazwischen führt ein 2 m breiter Wiesenweg entlang.

a) Wieviel Ar Flächeninhalt hat das Gartengrundstück?

b) Wieviel Ar Flächeninhalt hat das ungenutzte Gelände?

c) Wieviel Ar könnten insgesamt genutzt werden, wenn das ungenutzte Gelände und der Wiesenweg zum Gartengrundstück hinzu kämen?

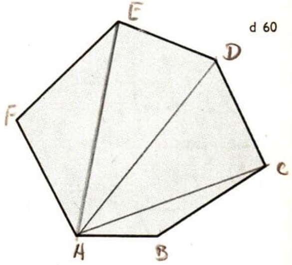
35. Bild d 60 zeigt den Grundriß einer Weide im Maßstab 1 : 1000.

a) Gib die wahre Länge der Seiten in Metern an!

b) Berechne den Flächeninhalt in Hektar!

c) Wieviel Meter elektrischer Weidezaun werden gebraucht, wenn er zweimal gespannt werden soll?

d 60



d

Bildnachweis:

Bild C 11: Reproduktion aus: B. L. van der Waerden: *Science awakening.* Groningen 1954, S. 32; Bild C 12: Reproduktion aus: D. E. Smith: *History of Mathematics.* Vol. II. New York [II] 1958, S. 75; Bild C 13: Reproduktion aus: K. Menninger: *Zahlwort und Ziffer.* 2. Aufl. Göttingen 1958, S. 101; Bild C 14: Reproduktion aus: D. E. Smith: *Rara arithmetica.* Boston/London 1908, S. 37; Bild C 15: Reproduktion aus dem Original: J. Köbel: *Rechenbüchlein.* Augsburg 1514; Bild D 71: Reproduktion aus: O. Fabrio: *L'Uso delle Squadra Mobile.* Trent 1752; Bild D 72: Reproduktion aus: D. E. Smith: *History of Mathematics.* Vol. I. New York, [II] 1958, S. 361; Bilder auf Seiten 70, 180: Zentralbild; Bilder auf Seite 83: Heinz A. F. Schmidt; Innentitel: Zentrale Bildstelle der Deutschen Reichsbahn; Kapitelbild A, C, D und Rückentitel: Zentralbild; Kapitelbild B: Rolf Vetter.

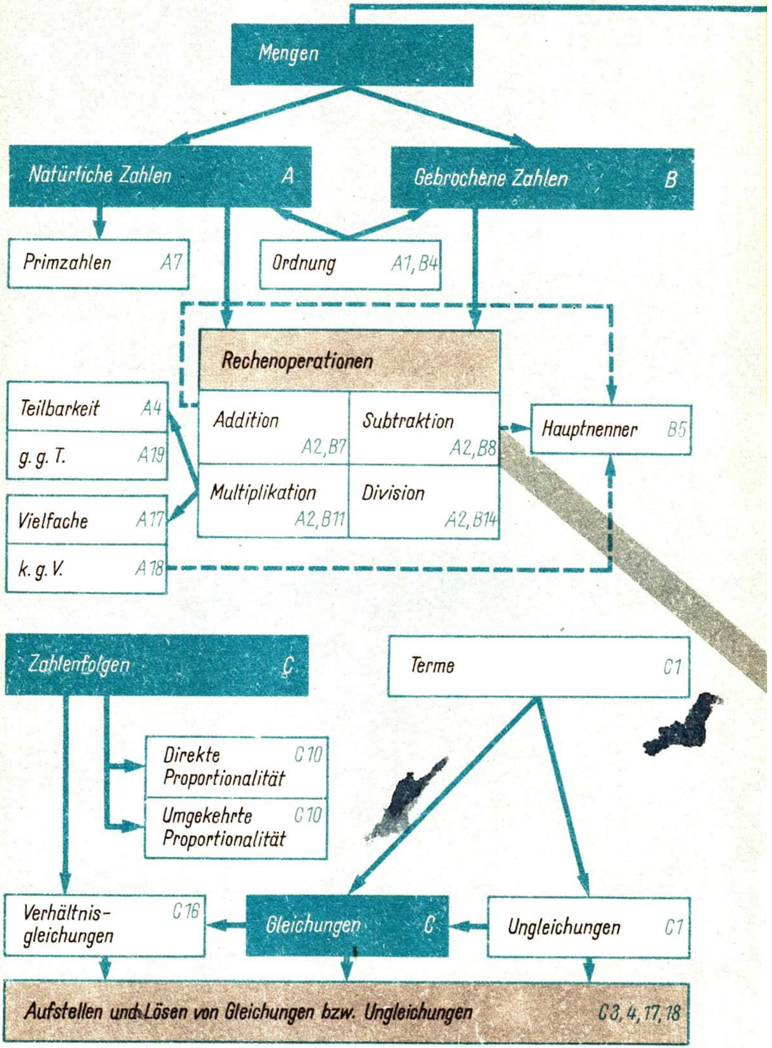
Register

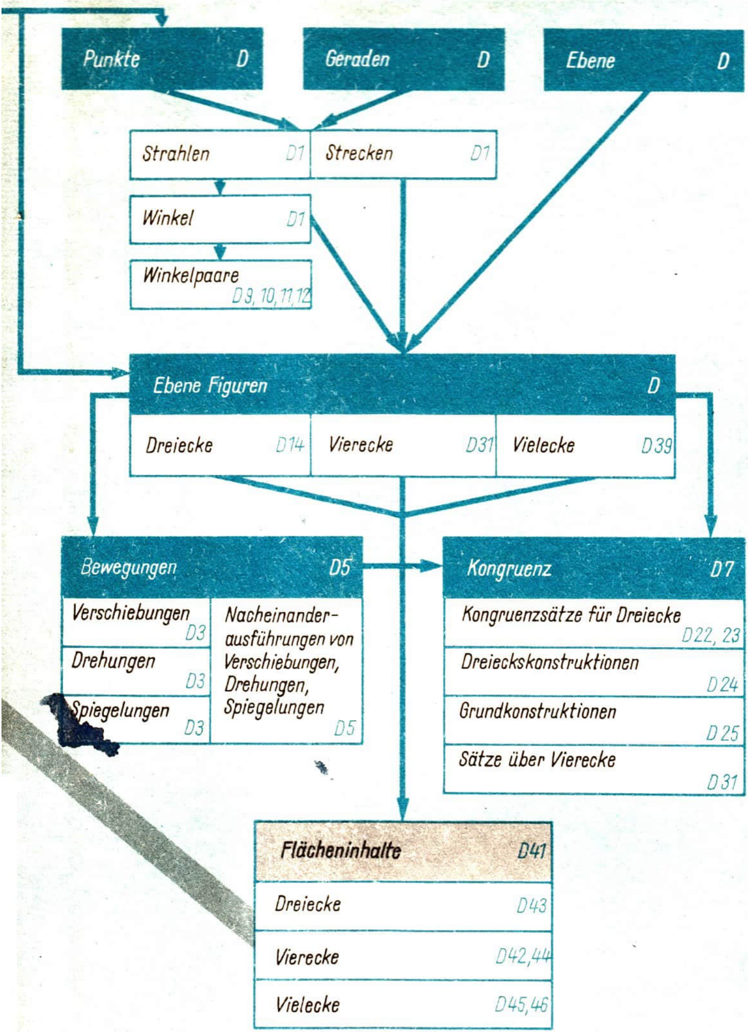
Wie findest du was?

Angenommen, du willst wissen, was eine Quersumme ist. Du suchst das Stichwort und findest „Quersumme **A** 18 (▷ 15, ▷ 16, ▷ 17)". Der Buchstabe A sagt dir, daß du die Information im Kapitel A findest. Du suchst mit Hilfe der Marken auf der rechten Seite das Kapitel A und schlägst die Seite 18 auf. Mit der Angabe (▷ 15, ▷ 16, ▷ 17) erhältst du gleich einen Hinweis auf Definitionen oder Sätze, die mit diesem Stichwort in Zusammenhang stehen.

A B C D R

R


Mengen
Natürliche Zahlen A
Gebrochene Zahlen B
Primzahlen A7
Ordnung A1, B4
Rechenoperationen
Addition A2, B7
Subtraktion A2, B8
Multiplikation A2, B11
Division A2, B14
Teilbarkeit A4
g. g. T. A19
Vielfache A17
k. g. V. A18
Hauptnenner B5
Zahlenfolgen C
Terme C1
Direkte Proportionalität C10
Umgekehrte Proportionalität C10
Verhältnisgleichungen C16
Gleichungen C
Ungleichungen C1
Aufstellen und Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen C3, 4, 17, 18



Punkte D
Geraden D
Ebene D
Strahlen D1
Strecken D1
Winkel D1
Winkelpaare D9, 10, 11, 12
Ebene Figuren D
Dreiecke D14
Vierecke D31
Vielecke D39
Bewegungen D5
Verschiebungen D3
Drehungen D3
Spiegelungen D3
Nacheinanderausführungen von Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen D5
Kongruenz D7
Kongruenzsätze für Dreiecke D22, 23
Dreieckskonstruktionen D24
Grundkonstruktionen D25
Sätze über Vierecke D31
Flächeninhalte D41
Dreiecke D43
Vierecke D42, 44
Vielecke D45, 46

00 06 03 - 2 · 2,30