

# LEHRBUCH DER MATHEMATIK

---

ZEHNTES SCHULJAHR

**LEHRBUCH**  
**DER**  
**MATHEMATIK**

**FÜR DIE OBERSCHULE**

**10. SCHULJAHR**

**3. Auflage**

**Mit 125 Abbildungen**



**VOLK UND WISSEN**  
**VOLKSEIGENER VERLAG**  
**BERLIN 1954**

Die vorliegende 3. Auflage stellt eine durchgesehene Neuauflage dar. Der Abschnitt *A. III. Die Koordinatengeometrie*, der Abschnitt *A. V. 14. Die Phaseneigenschaften der trigonometrischen Funktionen* sowie der Abschnitt *C. Geometrische Verwandtschaften* der 1. und 2. Auflage, 1. bis 80. Tausend, wurden gestrichen, da sie nach dem geltenden Lehrplan im zehnten Schuljahr nicht mehr behandelt werden.

Verfaßt von Dr. Werner Renneberg,  
Herbert Zummach und Dr. Gustav Beyrodt  
unter Mitarbeit von Johannes Reth

Zeichnungen: Kurt Dornbusch

Redaktionsschluß der 3. Auflage 1. Februar 1954

Bestell-Nr. 00 905 - 4 2,— DM · 81.—123. Tausend (DN) · Lizenz Nr. 203 · 1000 · P 00 54 11  
Satz: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/’8/203) · Auftrag Nr. 121  
Druck: (125) Greif Graphischer Großbetrieb, Berlin N 54

**A. Die trigonometrischen Funktionen**

I. Die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel .....	5
1. Die Tangensfunktion und die Sinusfunktion .....	5
2. Die Kosinusfunktion und die Kotangensfunktion .....	10
3. Der Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen .....	13
4. Das Rechnen mit den trigonometrischen Funktionen .....	18
II. Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel .....	31
5. Erweiterung des Erklärungsbereiches .....	31
6. Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks .....	39
III. Einführung in die Vektorrechnung .....	49
7. Vektoren und Skalare .....	49
8. Die Rechenarten 1. Stufe für Vektoren .....	52
9. Die Rechenarten 2. Stufe für Vektoren .....	57
IV. Fortsetzung der Lehre von den trigonometrischen Funktionen .....	63
10. Periodizität der trigonometrischen Funktionen .....	63
11. Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen .....	69
12. Goniometrie .....	75

**B. Zahlenfolgen**

V. Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen .....	81
13. Arithmetische Zahlenfolgen .....	81



14. Endliche geometrische Zahlenfolgen .....	93
15. Unendliche geometrische Zahlenfolgen .....	102
VI. Anwendung der endlichen geometrischen Zahlenfolgen ...	105
16. Zinseszinsrechnung .....	105
17. Anwendungen der Zinseszinsrechnung im Geldverkehr .....	107
Seiten- und Abbildungsvergleich .....	112

# A. Die trigonometrischen Funktionen

## I. Die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel

### 1. Die Tangensfunktion und die Sinusfunktion

#### a) Einführung der Tangensfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Versuche, die nachstehende Aufgabe mit den bisher behandelten mathematischen Hilfsmitteln zu lösen!

Ein Turm wirft auf eine waagerechte Ebene einen Schatten von der Länge  $l$ , während die Sonne unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Horizontallinie gesehen wird. Die Turmhöhe  $h$  ist aus der Schattenlänge  $l$  und dem Winkel  $\alpha$  zu bestimmen.

Die Bearbeitung technischer Probleme führt häufig zu Aufgaben, in denen Zusammenhänge zwischen Streckenlängen und Winkelgrößen auftreten. Ihre Lösung ist mit Hilfe der bisher behandelten geometrischen Konstruktionen oder durch Berechnungsverfahren möglich, deren mathematische Grundlagen in der **Trigonometrie**<sup>1)</sup> entwickelt werden.

Die Dreiecke  $ABC$ ,  $A_1B_1C$  und  $A_2B_2C$  sind bei  $C$  rechtwinklig und einander ähnlich (Abb. 1).

Entsprechende Winkel dieser Dreiecke sind gleich. Insbesondere ist

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CA_2B_2 = \alpha.$$

Ferner sind die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich. Das gilt z. B. für das Verhältnis der dem Winkel  $\alpha$  gegenüberliegenden Kathete, der **Gegenkathete**, zu der ihm anliegenden Kathete, der **Ankathete**:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C}{A_1C} = \frac{B_2C}{A_2C} = \frac{a}{b}.$$

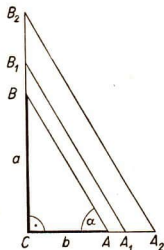


Abb. 1

Diese Betrachtungen gelten für alle ähnlichen, rechtwinkligen Dreiecke.

**Ergebnis:** Im rechtwinkligen Dreieck bestimmt ein Winkel eindeutig das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete.

Umgekehrt ist im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel durch das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete eindeutig bestimmt.

1) Trigonometrie bedeutet Dreiecksberechnung.

Die bei  $C$  rechtwinkligen Dreiecke  $AB_1C$ ,  $AB_2C$ ,  $AB_3C$  stimmen in der Kathete  $b$  überein (Abb. 2). Der Winkel mit dem Scheitel  $A$  nimmt zu, wenn man vom Dreieck  $AB_1C$  zum Dreieck  $AB_2C$  und von diesem zum Dreieck  $AB_3C$  übergeht. Es gilt dann die Ungleichung

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3.$$

Mit dem Winkel wächst die zugehörige Gegenkathete, wenn sich die Ankathete nicht ändert. Da die Ankathete  $b$  des Winkels  $\alpha_n$ , ( $n = 1; 2; 3$ ), konstant bleibt, wächst mit dem Winkel auch das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete; es ist

$$\frac{a_1}{b} < \frac{a_2}{b} < \frac{a_3}{b}.$$

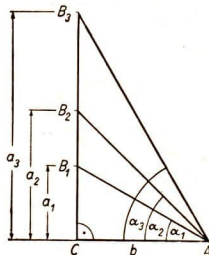


Abb. 2

Allgemein gilt: Wenn im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel wächst, so wächst auch der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete.

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der Gegenkathete eines Winkels zur Ankathete eine Funktion dieses Winkels. Umgekehrt hängt der Winkel von dem Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete ab. Diese Abhängigkeit läßt sich durch keine der bisher bekannten Funktionen ausdrücken. Man führt für sie einen neuen Begriff und ein neues Symbol ein.

**Erklärung 1:** Im rechtwinkligen Dreieck nennt man den Quotienten aus der Gegenkathete und der Ankathete eines Winkels den Tangens<sup>1)</sup> dieses Winkels.

Der Tangens wird durch das Symbol  $\text{tg}$  bezeichnet. Man schreibt

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

und spricht für  $\text{tg } \alpha$ : Tangens von Alpha oder auch Tangens Alpha.

Die Funktion, welche die Abhängigkeit des Quotienten „Gegenkathete durch Ankathete“ vom Winkel ausdrückt, nennt man nach Erklärung 1 die **Tangensfunktion**. Das Symbol  $\text{tg}$  wird dabei als Funktionszeichen benutzt.

Bezeichnet man den Winkel als unabhängige Veränderliche mit  $x$  und den Wert des veränderlichen Quotienten mit  $y$ , so erhält man die Funktion

$$y = f(x) = \text{tg } x.$$

Die Werte der Tangensfunktion lassen sich nur für wenige Winkel mit den Mitteln berechnen, die wir bisher kennengelernt haben; für die meisten Winkel benötigt man dazu die Hilfsmittel der höheren Mathematik.

In der Ausgangsaufgabe ist  $\frac{h}{l} = \text{tg } \alpha$ ; durch Auflösung nach  $h$  erhält man

$$h = l \cdot \text{tg } \alpha.$$

Um die Größe  $h$  zu berechnen, die sich für bestimmte Werte von  $l$  und  $\alpha$  ergibt, wird eine Tabelle benötigt, in der den Winkeln  $\alpha$  die Funktionswerte  $\text{tg } \alpha$  zugeordnet sind.

1) tangere (lat.) heißt berühren.

## b) Einführung der Sinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck

**Erklärung 2:** Im rechtwinkligen Dreieck nennt man den Quotienten aus der Gegenkathete eines Winkels und der Hypotenuse den Sinus<sup>1)</sup> dieses Winkels (Abb. 3).

Der Sinus wird durch das Zeichen  $\sin$  wiedergegeben. Man schreibt

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

und spricht für  $\sin \alpha$ : Sinus von Alpha oder auch Sinus Alpha.

Das Seitenverhältnis „Gegenkathete zu Hypotenuse“ wächst, wenn der Winkel wächst. Die Funktion, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, läßt sich ebenso wie die Tangensfunktion nicht algebraisch darstellen. Man nennt sie nach der Erklärung 2 die **Sinusfunktion**. Als Funktionszeichen benutzt man das Symbol  $\sin$ .

Bezeichnet man den Winkel als unabhängige Veränderliche mit  $x$  und den Wert des Quotienten „Gegenkathete durch Hypotenuse“ als abhängige Veränderliche mit  $y$ , so erhält man die Funktion

$$y = f(x) = \sin x.$$

Die Werte der Sinusfunktion lassen sich, abgesehen von speziellen Fällen, ebensowenig wie die der Tangensfunktion in einfacher Weise berechnen.

Die Funktionswerte  $y = f(x) = \operatorname{tg} x$  und  $y = f(x) = \sin x$  sind, entsprechend der Erklärung der Funktionen am rechtwinkligen Dreieck, unbenannte Zahlen.

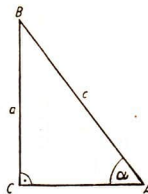


Abb. 3

## e) Die Sinusfunktion am Einheitskreis

Es sei ein rechtwinkliges  $uv$ -Koordinatensystem gegeben (Abb. 4).

Ein Winkel  $x$  entsteht dadurch, daß man einen Strahl um seinen Anfangspunkt  $O(0;0)$  von der positiven  $u$ -Achse als Ausgangslage aus dreht. Als positiven Drehsinn legt man fest, daß die positive  $u$ -Achse durch Drehung um  $90^\circ$  in die positive  $v$ -Achse übergeführt wird. Um  $O$  sei der Kreis mit dem Radius  $r$  gezeichnet. Der bewegliche Schenkel des Winkels  $x$  schneide den Kreis in  $P(u;v)$ .

Man fällt das Lot von  $P$  auf die  $u$ -Achse; der Fußpunkt sei  $Q$ . Das Dreieck  $OQP$  ist rechtwinklig. Nach der Erklärung 2 ist in diesem Dreieck

$$\sin x = \frac{PQ}{OP} = \frac{v}{r}.$$

Dabei ist der Radius  $r$  in derselben Einheit zu messen wie die Ordinate  $v$ .

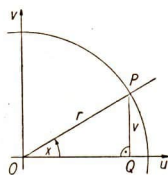


Abb 4

1) sinus (lat.) heißt Bogen, Rundung.

Ergebnis: Das Verhältnis der Ordinate eines auf der Peripherie beweglichen Punktes  $P$  zum Radius des Kreises ist gleich dem Sinus des Winkels  $x$ .

Wird um  $O$  der Kreis mit dem Radius 1 gezeichnet (Abb. 5), den man den Einheitskreis nennt, so geht die letzte Gleichung über in

$$\sin x = \frac{v}{1} = v.$$

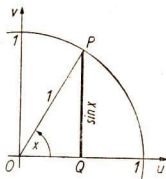


Abb. 5

Ergebnis: Die Ordinate  $v$  eines auf dem Einheitskreis beweglichen Punktes  $P$  stellt den Sinus des Winkels  $x$  geometrisch dar.

Wichtig ist, daß das  $uv$ -Koordinatensystem hier wie im folgenden aus zwei Zahlengeraden mit gleicher Teilung besteht. Die Ordinate veranschaulicht also eine Zahl in ähnlicher Weise wie bei den geometrischen Darstellungen der früher behandelten Funktionen. Die vorstehende Darlegung hat nur für spitze Winkel  $x$  Gültigkeit.

Aus der Abb. 5 können wir ablesen, wie der Funktionswert  $y = \sin x$  sich ändert, wenn der Winkel  $x$  sich ändert. Verfolge, ausgehend von dem in der Abbildung dargestellten Winkel  $x$ , die Änderung des Sinus,

1. wenn der Winkel  $x$  abnimmt und schließlich den Wert  $0^\circ$  erreicht,
2. wenn der Winkel  $x$  zunimmt und schließlich den Wert  $90^\circ$  erreicht!

Für die Winkel  $0^\circ$  und  $90^\circ$  versagt die Erklärung 2. Die Sinusfunktion ist an diesen beiden Stellen nicht erklärt. Wir wollen sie aber auch hier sinnvoll definieren.

Aus der Abb. 5 erkennen wir, daß

die Ordinate des Punktes  $P$  gleich 0 wird, wenn der Winkel  $x$  gleich  $0^\circ$  wird,

die Ordinate des Punktes  $P$  gleich 1 wird, wenn der Winkel  $x$  gleich  $90^\circ$  wird.

Daher müssen wir notwendigerweise festsetzen:

$$\sin 0^\circ = 0,$$

$$\sin 90^\circ = 1.$$

#### d) Die Tangensfunktion am Einheitskreis

Wir legen im Punkt  $A(1; 0)$  die Tangente an den Einheitskreis des  $uv$ -Koordinatensystems (Abb. 6). Der den Winkel  $x$  erzeugende Strahl schneidet die Tangente in  $R$ . Im rechtwinkligen Dreieck  $OAR$  ist dann

$$\operatorname{tg} x = \frac{AR}{OA} = \frac{AR}{1} = AR.$$

Ergebnis: Der Abschnitt  $AR$  auf der Tangente im Punkt  $A$  des Einheitskreises stellt den Tangens des Winkels  $x$  geometrisch dar.

Diese geometrische Deutung läßt die Bezeichnung Tangens für das Seitenverhältnis „Gegenkathete zu Ankathete“ im rechtwinkligen Dreieck verständlich werden.

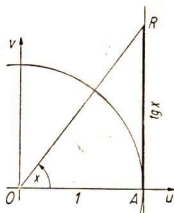


Abb. 6

Aus der Abb. 6 entnehmen wir, wie die Tangensfunktion sich ändert, wenn der Winkel von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  wächst. Für die Winkel  $0^\circ$  und  $90^\circ$  selbst gilt die Erklärung 1 nicht. Wenn der Winkel  $x$  sich dem Wert  $0^\circ$  nähert, schrumpft der Tangentenabschnitt  $AR$  auf den Wert 0 zusammen. Wir setzen daher fest:

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0.$$

Wenn der Winkel  $x$  sich dem Wert  $90^\circ$  nähert, wächst der Abschnitt  $AR$  und damit die Funktion  $y = \operatorname{tg} x$  über alle Grenzen. Ihr Verhalten ist vergleichbar dem der Funktion  $y = \frac{1}{x}$ , wenn  $x$  in dieser sich dem Wert 0 nähert. Für  $x = 90^\circ$  ist die Tangensfunktion nicht erklärt, das Zeichen  $\operatorname{tg} x$  verliert für diesen Wert seinen Sinn.

## Aufgaben

### I. Die Tangensfunktion

1. Zeichne zwei rechtwinklige Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_2B_2C_2$  mit den Winkeln  $\alpha_1 = \alpha_2 = 55^\circ$  und mit den Katheten  $b_1 = 4$  cm bzw.  $b_2 = 6$  cm! Miß in beiden Fällen die Gegenkathete  $a_1$  bzw.  $a_2$  des Winkels  $\alpha$  und bestimme die Quotienten  $\frac{a_1}{b_1}$  und  $\frac{a_2}{b_2}$ ! Warum sind beide gleich?
2. Mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre ist zu beweisen, daß in rechtwinkligen Dreiecken, die in einem Winkel, etwa  $\alpha$ , übereinstimmen, der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete dieses Winkels  $\alpha$  unabhängig von der Länge der Katheten ist.
3. Zeichne rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln  $\alpha = 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; \dots; 80^\circ$ ! Miß in jedem die Katheten  $a$  und  $b$  in der gleichen Maßeinheit und bilde jedesmal das Verhältnis  $y = a : b$ ! Trage die gefundenen Werte in eine Wertetafel ein! Kommt es auf die Größe der Dreiecke an? Überlege, wie man einerseits möglichst wenig Linien benötigt und andererseits die Verhältnisse  $a : b$  leicht vergleichen kann!
4. Der Anstieg einer geradlinigen Bahnlinie beträgt  $1 : 40$ . Bestimme den Steigungswinkel aus dem Steigungsdreieck! Wie kann man das Verhältnis der Erhebung zur waagerechten Strecke in bezug auf den Steigungswinkel ausdrücken? An Bahnstrecken stehen Pfähle mit wegweiserähnlichen Armen. Auf diesen sind die Steigung und die Entfernung, für die sie gilt, angegeben (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, Seite 145, Aufgabe 37, Abb. 106).
5. Welchen Wert hat  $\operatorname{tg} \alpha$  ( $\operatorname{tg} \beta$ ) eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten
  - a)  $a = 3$  und  $b = 4$ ;
  - b)  $a = 1$  und  $b = 1$ ;
  - c)  $a$  und  $b$ ?
6. Zeichne die Winkel, für die der Tangens die folgenden Werte annimmt:
  - a)  $\frac{1}{2}$ ;
  - b)  $\frac{2}{3}$ ;
  - c) 2;
  - d) 2,5;
  - e)  $\sqrt{3}$ ! Miß die Winkel!

### II. Die Sinusfunktion

7. Zeichne mehrere rechtwinklige Dreiecke, die in einem spitzen Winkel übereinstimmen! Bestimme in ihnen das Verhältnis der Gegenkathete dieses Winkels zur Hypotenuse und vergleiche die einzelnen Ergebnisse miteinander! Wie ändert sich das Verhältnis, wenn sich der Winkel ändert?
8. Welchen Wert hat  $\sin \alpha$  ( $\sin \beta$ ) in einem rechtwinkligen Dreieck
  - a) mit der Hypotenuse 13 und den Katheten  $a = 5$  und  $b = 12$ ,
  - b) mit der Hypotenuse 2 und den Katheten  $a = 1$  und  $b = \sqrt{3}$ ,
  - c) mit der Hypotenuse  $c$  und den Katheten  $a$  und  $b$ ?
9. Zeichne die Winkel, für die der Sinus die folgenden Werte annimmt: a)  $\frac{1}{4}$ ; b)  $\frac{2}{3}$ ; c) 0,1; d) 0,3; e) 0,5; f) 0,9! Miß die Winkel! Warum ist 1,1 als Sinuswert nicht möglich?



### III. Die Sinusfunktion und die Tangensfunktion am Einheitskreis

10. Zeichne rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln  $\beta = 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; \dots; 80^\circ$  und miß das Verhältnis  $y = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ ! Trage die Ergebnisse einschließlich der Werte für  $0^\circ$  und  $90^\circ$  in eine Wertetafel ein!

Anleitung: Zweckmäßig gibt man allen Dreiecken gleiche Hypotenusen und legt sie so aufeinander, daß der Punkt  $B$  allen Dreiecken gemeinsam ist und daß die Ankatheten der Winkel  $\beta$  auf dem gleichen von  $B$  ausgehenden Strahl liegen. Auf welcher Kurve befinden sich die Dreieckspunkte  $A$ ? Wählt man die Hypotenuse gleich 1 dm, so kann man  $y$  auf zwei Dezimalstellen genau bestimmen und die dritte Dezimalstelle schätzen (Millimeterpapier!).

11. Führe die Betrachtung der Sinusfunktion, die am Einheitskreis erfolgt ist, allgemein an einem Kreis mit dem Radius  $r$  durch! Aus dem Ergebnis ist der Spezialfall des Einheitskreises zu gewinnen.
12. In einem Kreis mit dem Radius  $r$  ist eine Sehne von der Länge  $l$  mit dem zugehörigen Zentriwinkel  $\alpha$  gezeichnet. Das Lot vom Kreismittelpunkt auf die Sehne halbiert Zentriwinkel und Sehne.
- Stelle die Funktion auf, welche die Beziehung zwischen halbem Zentriwinkel, halber Sehne und Kreisradius ausdrückt!
  - Wie groß ist in einem Kreis vom Durchmesser 7 cm die Sehne zum Zentriwinkel  $20^\circ; 80^\circ; 140^\circ$ ? — Benutze zur Bestimmung die Tafel aus Aufgabe 10!

## 2. Die Kosinusfunktion und die Kotangensfunktion

### a) Einführung der Kosinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  stellt das Seitenverhältnis  $b : c$  den Sinus des Winkels  $\beta$  dar. Man kann jedoch das Seitenverhältnis  $b : c$  auch in Beziehung zum Winkel  $\alpha$  setzen. Für den Winkel  $\alpha$  bedeutet  $b : c$  das Verhältnis „Ankathete zu Hypotenuse“ (Abb. 7).

**Erklärung 3:** Im rechtwinkligen Dreieck nennt man den Quotienten aus der Ankathete eines Winkels und der Hypotenuse den Kosinus dieses Winkels.

Der Kosinus wird durch das Symbol  $\cos$  bezeichnet. Es ist

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Die im rechtwinkligen Dreieck durch das Verhältnis „Ankathete zu Hypotenuse“ erklärte Funktion  $y = f(x)$  eines Winkels  $x$  heißt **Kosinusfunktion**.

Man schreibt

$$y = f(x) = \cos x.$$

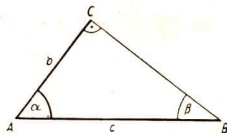


Abb. 7

### b) Einführung der Kotangensfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Als viertes Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck betrachten wir das Verhältnis der Ankathete eines Winkels zur Gegenkathete dieses Winkels.

**Erklärung 4:** Im rechtwinkligen Dreieck nennt man den Quotienten aus der Ankathete und der Gegenkathete eines Winkels den **Kotangens** dieses Winkels (Abb. 8).

Der Kotangens wird durch das Zeichen  $\text{ctg}$  abgekürzt.

Für den Winkel  $\alpha$  ist

$$\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a}.$$

Die im rechtwinkligen Dreieck durch das Verhältnis „Ankathete zu Gegenkathete“ erklärte Funktion  $y$  eines Winkels  $x$  heißt **Kotangensfunktion**; man schreibt

$$y = f(x) = \text{ctg } x.$$

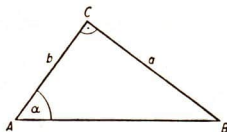


Abb. 8

### e) Die Kosinusfunktion am Einheitskreis

Im rechtwinkligen Dreieck  $OQP$  (Abb. 9) ist nach der Erklärung 3

$$\cos x = \frac{OQ}{OP} = \frac{u}{1} = u.$$

Ergebnis: Die Abszisse  $u$  eines auf dem Einheitskreis beweglichen Punktes  $P$  stellt den Kosinus des Winkels  $x$  geometrisch dar.

Verfolge, ausgehend vom Winkel  $x$  in Abb. 9, die Änderung des Funktionswertes  $\cos x$ ,

1. wenn der Winkel bis zu  $0^\circ$  abnimmt,
2. wenn der Winkel bis zu  $90^\circ$  zunimmt!

Für die Winkel  $0^\circ$  und  $90^\circ$  ist die Funktion  $y = f(x) = \cos x$  nicht erklärt. Da die Abszisse des Punktes  $P$  für diese Winkel 1 bzw. 0 ist, setzen wir fest

$$\cos 0^\circ = 1,$$

$$\cos 90^\circ = 0.$$

**Zusammenfassung:** Die Funktionen  $\cos x$  und  $\sin x$ , die im rechtwinkligen Dreieck erklärt sind, erscheinen im I. Quadranten des Einheitskreises als Koordinaten des Schnittpunktes zwischen dem beweglichen Schenkel des Winkels  $x$  und dem Kreis (Abb. 5 und 9).

### d) Die Kotangensfunktion am Einheitskreis

Im Punkt  $B(0; 1)$  legen wir die Tangente an den Einheitskreis des  $uv$ -Koordinatensystems (Abb. 10). Der bewegliche Schenkel des Winkels  $x$  schneidet die Tangente in  $T$ . Das Dreieck  $OTB$  ist rechtwinklig, und es ist  $\sphericalangle OTB = x$ . Aus welchem Satz folgt dies? Nach der Erklärung 4 ist

$$\text{ctg } x = \frac{BT}{OB} = \frac{BT}{1} = BT.$$

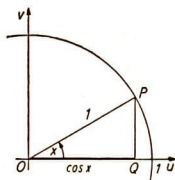


Abb. 9

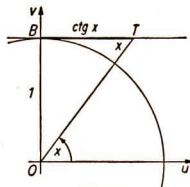


Abb. 10



Ergebnis: Der Abschnitt  $BT$  auf der Tangente im Punkte  $B$  des Einheitskreises stellt den Kotangens des Winkels  $x$  geometrisch dar.

Aus Abb. 10 lesen wir die Änderung der Kotangensfunktion ab, wenn der Winkel  $x$  sich ändert. Für die Werte  $x = 0^\circ$  und  $x = 90^\circ$  ist die Funktion  $\text{ctg } x$  nicht erklärt. Für  $x = 90^\circ$  wird der Tangentenabschnitt  $BT$  gleich Null. Wir setzen daher fest:

$$\text{ctg } 90^\circ = 0.$$

Nähert sich der Winkel  $x$  dem Wert  $0^\circ$ , so wächst der Tangentenabschnitt  $BT$  und damit die Funktion  $y = \text{ctg } x$  über alle Grenzen. Für  $x = 0^\circ$  existiert die Funktion  $y = \text{ctg } x$  nicht.

## Aufgaben

### I. Die Kosinusfunktion

1. Miß den Kosinus der folgenden Winkel: **a)**  $22,5^\circ$ ; **b)**  $45^\circ$ ; **c)**  $67,5^\circ$ !
2. Konstruiere den Winkel  $\alpha$ , für den  $\cos \alpha$  den Wert  
**a)**  $0,2$ ; **b)**  $0,9$ ; **c)**  $\frac{7}{15}$ ; **d)**  $\frac{3}{4}$ ; **e)**  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  hat!
3. Zeichne über dem Durchmesser eines Halbkreises Dreiecke, deren Spitzen auf der Peripherie liegen! Wie ändert sich **a)** die Gegenkathete, **b)** die Ankathete eines der spitzen Winkel des Dreiecks, wenn dieser, bei kleinen Winkeln angefangen, zunimmt? Ziehe daraus Schlüsse, wie sich der Sinus (Kosinus) mit dem Winkel ändert!  
Für welches rechtwinklige Dreieck ist  $\sin \alpha = \cos \alpha$ ?
4. Zeichne über dem Durchmesser eines Halbkreises zwei symmetrisch zueinander liegende Dreiecke, deren Spitzen auf der Peripherie liegen! Stelle alle möglichen Funktionsbeziehungen für den Sinus und den Kosinus der spitzen Winkel der beiden Dreiecke ( $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ) auf! Prüfe die Zusammenstellung auf Vollständigkeit!

### II. Die Kotangensfunktion

5. Miß im rechtwinkligen Dreieck die Katheten und bestimme **a)**  $\text{ctg } 15^\circ$ ; **b)**  $\text{ctg } 75^\circ$ !
6. Wie groß ist der Kotangens der folgenden Winkel: **a)**  $20^\circ$ ; **b)**  $40^\circ$ ; **c)**  $60^\circ$ ; **d)**  $80^\circ$ ?  
Anleitung: Benutze die Ergebnisse der Aufgabe 3 auf Seite 9! — Welcher Zusammenhang ergibt sich zwischen der Tangens- und der Kotangensfunktion?
7. Konstruiere den Winkel  $\alpha$ , für den  $\text{ctg } \alpha$  den Wert **a)**  $4$ ; **b)**  $2,5$ ; **c)**  $\sqrt{3}$ ; **d)**  $0,8$ ; **e)**  $\frac{1}{3}$  hat!

### III. Die Kosinusfunktion und die Kotangensfunktion am Einheitskreis

8. Zeichne den I. Quadranten eines Einheitskreises ( $r = 1$  Längeneinheit, zweckmäßig  $1$  dm)! Trage die Winkel  $10^\circ$ ;  $20^\circ$ ; ...;  $80^\circ$  ein und entnimm aus der Zeichnung die Kosinuswerte der Winkel! Kosinusfunktion und Sinusfunktion haben gleiche Funktionswerte; diese sind aber anderen Winkeln zugeordnet. Welcher Zusammenhang ergibt sich daraus für die Funktionen  $y = f(x) = \sin x$  und  $y = f(x) = \cos x$ ?
9. Zeichne die Werte der Kotangensfunktion am Einheitskreis für die Winkel  $10^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $50^\circ$ ;  $70^\circ$  und miß ihre Größe!
10. Stelle eine dreistellige Tafel der Tangens- und Kotangensfunktion zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  von  $10^\circ$  zu  $10^\circ$  auf! Schätze den Wert der dritten Dezimale!

11. Anstatt die trigonometrischen Funktionen zuerst am rechtwinkligen Dreieck zu erklären und sie dann auf den Kreis zu übertragen, kann man sie auch von vornherein am Kreis erklären (siehe Abb. 11) und dann auf beliebige rechtwinklige Dreiecke anwenden.

- Stelle die vier Erklärungen zusammen!
- Beweise, daß der Abschnitt  $AR$  auf der Tangente an den Einheitskreis (Abb. 6)  $\operatorname{tg} x$  darstellt!
- Führe den entsprechenden Beweis (Abb. 10) für den Kotangens!
- Beweise, daß die für rechtwinklige Dreiecke aufgestellten Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln gelten, wenn die am Kreise erklärten Winkelfunktionen verwendet werden!

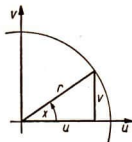


Abb. 11

### 3. Der Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen

#### a) Zusammenstellung der trigonometrischen Funktionen

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$  stellen die Seitenverhältnisse  $a : b$ ,  $a : c$ ,  $b : c$ ,  $b : a$  die trigonometrischen Funktionen  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  des Winkels  $\alpha$  dar.

Die vier im vorstehenden erklärten Seitenverhältnisse nennt man **trigonometrische Funktionen**. Sie heißen auch **Winkelfunktionen** oder **goniometrische Funktionen**<sup>1)</sup>. Wegen ihres Zusammenhanges mit dem Kreis werden sie auch als **Kreisfunktionen** bezeichnet.

Die Bedeutung der trigonometrischen Funktionen für das rechtwinklige Dreieck gibt die folgende Zusammenstellung an:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \text{Sinus}; \quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \text{Kosinus};$$

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \text{Tangens}; \quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \text{Kotangens}.$$

Aus der Zusammenstellung entnehmen wir, daß die Seitenverhältnisse von Tangens und Kotangens für denselben Winkel  $x$  zueinander reziprok sind. Die Tangens- und die Kotangensfunktion eines Winkels haben reziproke Werte. Für die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion eines Winkels gilt eine derartige einfache Beziehung nicht.

#### b) Geometrische Darstellung der trigonometrischen Funktionen

Um die Sinusfunktion  $y = f(x) = \sin x$  in einem  $xy$ -Achsenkreuz geometrisch zu veranschaulichen, hat man im  $xy$ -Koordinatensystem als Abszissen die Winkel  $x$ , ( $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ ), und als Ordinaten die zugehörigen Funktionswerte  $y$  einzuzeichnen. Es ist zweckmäßig, auf der Abszissenachse als Einheit die Länge desjenigen Bogens zu wählen, den der Zentriwinkel  $1^\circ$  auf der Peripherie des Einheitskreises ausschneidet. Man rollt dazu den vierten Teil des Einheitskreises auf der positiven  $x$ -Achse vom Ursprung  $O$  aus ab und teilt die so gefundene Strecke in 90 gleiche Teile.

1) Goniometrie bedeutet Winkelmessung.

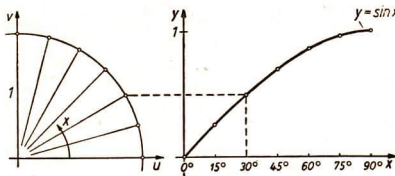


Abb. 12

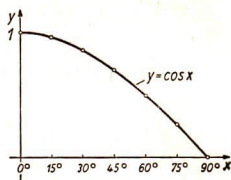


Abb. 14

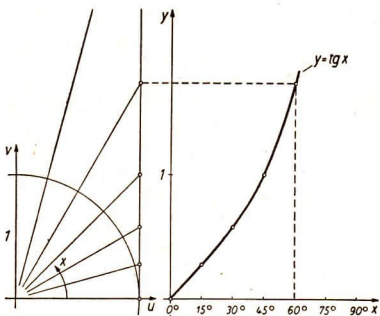


Abb. 13

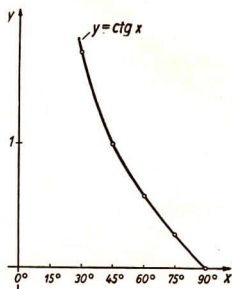


Abb. 15

Um ein Bild der Funktion zu zeichnen, reicht es praktisch aus, wenn man den rechten Winkel im Einheitskreis in sechs gleiche Teile teilt und die zu jedem Winkel von  $15^\circ$  gehörende Bogenlänge näherungsweise durch die Sehne ersetzt. In Abb. 12 ist auf diese Weise die Kurve der Funktion  $y = \sin x$  gezeichnet. Wie findet man zeichnerisch für einen gegebenen Winkel den zugehörigen Kurvenpunkt?

Abb. 12 zeigt, daß die Sinusfunktion im Bereich  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$  eine wachsende Funktion ist.

Die geometrische Darstellung der Funktion  $y = f(x) = \operatorname{tg} x$  erhält man in ähnlicher Weise wie die der Sinusfunktion (Abb. 13). Auch die Tangensfunktion ist im Bereich  $0^\circ \leq x < 90^\circ$  eine wachsende Funktion. Der Kurvenverlauf zeigt anschaulich, daß die Funktion für  $x = 90^\circ$  nicht existiert.

Den Verlauf der Kosinusfunktion zeigt Abb. 14, den der Kotangensfunktion Abb. 15. Die Kosinusfunktion ist im Bereich  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$  eine fallende Funktion. Dasselbe gilt für die Kotangensfunktion im Bereich  $0^\circ < x \leq 90^\circ$ . Diese existiert jedoch nicht für  $x = 0^\circ$ .

## c) Grundformeln für die Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen

Dividiert man in der Zusammenstellung des Abschnitts a) die erste Gleichung durch die zweite bzw. die zweite durch die erste, so erhält man die Beziehungen

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\text{Sinus}}{\text{Kosinus}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{\text{Kosinus}}{\text{Sinus}}.$$

Hieraus ergeben sich für denselben Winkel  $x$  die Grundformeln

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (1)$$

und

$$\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}. \quad (2)$$

Sprich diese Beziehungen in Worten aus! — Für welchen Winkelwert hat die Formel (1), für welchen die Formel (2) keine Gültigkeit?

Durch Multiplikation der Gleichungen (1) und (2) findet man

$$\text{tg } x \cdot \text{ctg } x = 1. \quad (3)$$

Löse die Gleichung nach  $\text{tg } x$  bzw. nach  $\text{ctg } x$  auf! — Sprich die sich ergebenden Beziehungen in Worten aus!

Im Dreieck  $OPP$  (Abb. 16) ist nach dem Satz des Pythagoras

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

Man schreibt vereinfacht  $\sin^2 x$  (sprich: Sinus Quadrat  $x$ ) und  $\cos^2 x$  (sprich: Kosinus Quadrat  $x$ ) an Stelle von  $(\sin x)^2$  und  $(\cos x)^2$  und erhält so

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (4)$$

Sprich den durch die Gleichung (4) vermittelten Zusammenhang zwischen der Sinus- und der Kosinusfunktion für denselben Winkel  $x$  in Worten aus! Löse die Gleichung nach  $\sin x$  bzw. nach  $\cos x$  auf!

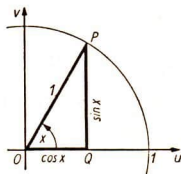


Abb. 16

Auf Grund der Gleichungen für die trigonometrischen Funktionen gelten im rechtwinkligen Dreieck die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} a : c &= \sin \alpha = \cos \beta, & a : b &= \text{tg } \alpha = \text{ctg } \beta, \\ b : c &= \cos \alpha = \sin \beta, & b : a &= \text{ctg } \alpha = \text{tg } \beta. \end{aligned}$$

Da  $\beta = 90^\circ - \alpha$  ist, ergibt sich aus diesen Gleichungen, wenn man für den beliebigen Winkel  $\alpha$  die Veränderliche  $x$  setzt, das Formelsystem

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos (90^\circ - x), & \text{tg } x &= \text{ctg } (90^\circ - x), \\ \cos x &= \sin (90^\circ - x), & \text{ctg } x &= \text{tg } (90^\circ - x). \end{aligned} \quad (5)$$

Durch die Formeln in der zweiten Zeile werden die Namen Kosinus und Kotangens verständlich: complementi sinus (abgekürzt cosinus) bedeutet Sinus des Komplementwinkels, complementi tangens (abgekürzt cotangens) bedeutet Tangens des Komplementwinkels. Die Kosinus- bzw. die Kotangensfunktion nennt man die **Kofunktionen** zur Sinus- bzw. zur Tangensfunktion und umgekehrt.

Die Grundformeln (5) können wir folgendermaßen zusammenfassen:

**Die Funktion eines Winkels ist gleich der Kofunktion seines Komplementwinkels.**

## Aufgaben

## I. Berechnung spezieller Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen

Aus dem Einheitskreis kann man die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen entnehmen. Bei diesem zeichnerischen Verfahren sind der Genauigkeit jedoch Grenzen gesetzt. Im folgenden sollen zu einigen bestimmten Winkeln die genauen Funktionswerte berechnet werden.

- Berechne die Werte der vier trigonometrischen Funktionen für die Winkel  $30^\circ$ ;  $45^\circ$  und  $60^\circ$ !  
Anleitung: Benutze das gleichseitige bzw. das gleichschenklige-rechtwinklige Dreieck!
- Stelle die in der Aufgabe 1 berechneten Funktionswerte nebst den Werten für  $0^\circ$  und  $90^\circ$  in Tabellenform zusammen!

## II. Geometrische Darstellung der trigonometrischen Funktionen

- Zeichne die Kurven der Sinus- und der Kosinusfunktion in ein und dasselbe  $xy$ -Achsenkreuz! Spiegele die Kurven an der Parallelen zur  $y$ -Achse durch den Punkt  $x = 45^\circ$ ! Zeichne dazu entweder **a)** nur das Funktionsbild einer der beiden Funktionen oder **b)** beide Funktionen lediglich im Bereich von  $0^\circ$  bis  $45^\circ$  und vervollständige die Zeichnungen durch Spiegelung!
- Bestimme durch Interpolation an der Sinus- bzw. Kosinuskurve  
**a)**  $\sin 5^\circ$ ; **b)**  $\sin 78^\circ$ ; **c)**  $\cos 25^\circ$ ; **d)**  $\cos 62^\circ$ !
- Entnimm aus der geometrischen Darstellung  
**a)** der Funktion  $y = \sin x$  den Winkel, dessen Sinus den Wert 0,35 (0,70),  
**b)** der Funktion  $y = \cos x$  den Winkel, dessen Kosinus den Wert 0,40 (0,125) hat!
- Zeichne die Kurven der Tangens- und Kotangensfunktion in dasselbe  $xy$ -Achsenkreuz! Untersuche die Symmetrieeigenschaften der Funktionskurven! Welche Vereinfachungen ergeben sich daraus für die Anlage einer gemeinsamen Tafel der Tangens- und Kotangensfunktion?
- Beschreibe und vergleiche den Verlauf der Sinus- und der Tangensfunktion im Bereich von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$ ! Untersuche, welche Punkte die beiden Funktionskurven gemeinsam haben!
- Bestimme durch Interpolation an der Tangens- bzw. Kotangenskurve  
**a)**  $\operatorname{tg} 73^\circ$ ; **b)**  $\operatorname{tg} 11^\circ$ ; **c)**  $\operatorname{ctg} 39^\circ$ ; **d)**  $\operatorname{ctg} 66^\circ$ !
- Entnimm aus der geometrischen Darstellung  
**a)** der Funktion  $y = \operatorname{tg} x$  den Winkel, dessen Tangens den Wert 1,50 (0,50),  
**b)** der Funktion  $y = \operatorname{ctg} x$  den Winkel, dessen Kotangens den Wert 2,10 (0,83) hat!

## III. Grundformeln für die Zusammenhänge trigonometrischer Funktionen

- Gegeben sind die folgenden Werte der Sinusfunktion:  
**a)**  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ; **b)**  $\sin \beta = \frac{1}{2}$ ; **c)**  $\sin \gamma = \frac{3}{4}$ .  
Welche Werte haben die anderen trigonometrischen Funktionen der Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  bzw.  $\gamma$ ?
- Gegeben sind die folgenden Werte der Kotangensfunktion:  
**a)**  $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$ ; **b)**  $\operatorname{ctg} \beta = 1$ ; **c)**  $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{4}$ .  
Berechne die Werte der anderen trigonometrischen Funktionen von  $\alpha$ ,  $\beta$  bzw.  $\gamma$ !
- Leite aus den nachstehenden Werten der Sinus- und der Tangensfunktion die entsprechenden Werte der Kofunktionen ab!

$x$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
$y = f(x) = \sin x$	0	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
$y = f(x) = \operatorname{tg} x$	0	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	—



13. Beweise die Formeln a)  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  und b)  $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ !

14. Bestimme aus den Funktionen 1.  $y = \sin x$ ; 2.  $y = \cos x$ ; 3.  $y = \operatorname{tg} x$ ; 4.  $y = \operatorname{ctg} x$  jeweils die drei anderen trigonometrischen Funktionen a) auf rechnerischem, b) auf geometrischem Wege!

Anleitung zu b): Benutze ähnliche Dreiecke (Abb. 17)!

15. Berechne die Werte der drei anderen trigonometrischen Funktionen mit Benutzung der Tabelle aus Aufgabe 14 für

a)  $\sin \alpha = \frac{10}{11}$ ; b)  $\cos \beta = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ; c)  $\operatorname{tg} \gamma = 3$ ; d)  $\operatorname{ctg} \delta = 2 - \sqrt{3}$ !

16. Vereinfache die nachstehenden Ausdrücke:

a)  $\cos x \cdot \operatorname{tg} x$ ; b)  $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$ !

17. Sprich den Inhalt folgender Formeln in Worten aus:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}!$$

Welchen Zusammenhang vermitteln diese Beziehungen?

a) Beweise die Formeln geometrisch!

Anleitung: In Abb. 18a und b ist zunächst zu zeigen, warum einzelne Strecken die angesriebene Bedeutung haben. Danach sind die Formeln aus den Abbildungen abzuleiten. Beachte ähnliche Dreiecke!

b) Löse die Formeln nach  $\sin \frac{x}{2}$  bzw.  $\cos \frac{x}{2}$  auf!

18. Stelle den Tangens (Kotangens) eines Winkels  $x$  durch trigonometrische Funktionen des halben Winkels dar!

19. Stelle den Tangens (Kotangens) des halben Winkels durch trigonometrische Funktionen des vollen Winkels  $x$  dar!

20. Benutze die Formeln der Aufgaben 17 und 19, um die Werte der vier trigonometrischen Funktionen für die Winkel  $15^\circ$  und  $22,5^\circ$  zu berechnen! Vergleiche, soweit möglich, die Ergebnisse früherer Messungen mit den berechneten Werten (Aufgaben 1 und 5 von Seite 12)!

21. Berechne die trigonometrischen Funktionen der folgenden Winkel: a)  $18^\circ$ ; b)  $36^\circ$ ; c)  $72^\circ$ ; d)  $54^\circ$ ! Anleitung: Gehe von dem Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Zehnecks aus!

22. Gerät zum Bestimmen der Werte der trigonometrischen Funktionen (Abb. 19). Mit einem Deckblatt (Vollkreis mit Durchmesser) stellt man den Winkel  $x$  auf dem Grundblatt (Quadrat mit Quadrant) ein. Auf den Quadratseiten liest man  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  ( $0^\circ$  bis  $45^\circ$ ) und  $\operatorname{ctg} x$  ( $45^\circ$  bis  $90^\circ$ ) unmittelbar ab. Führe den Beweis! Wie findet man die Tangenswerte für Winkel zwischen  $45^\circ$  und  $90^\circ$  und die Kotangenswerte für Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$ ?

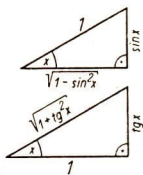


Abb. 17

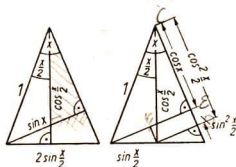


Abb. 18a

Abb. 18b

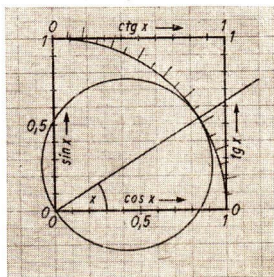


Abb. 19

#### 4. Das Rechnen mit den trigonometrischen Funktionen

Dreiecksaufgaben kann man rein geometrisch auf der Grundlage der Kongruenzsätze und unter Benutzung der geometrischen Örter durch Konstruktion mit Lineal und Zirkel lösen. Ein Geländedreieck, von dem drei Stücke in der Natur gemessen, die übrigen zu ermitteln sind, zeichnet man bei diesem Verfahren in einem bestimmten Maßstab verkleinert und entnimmt die gesuchten Größen maßstäblich der Zeichnung.

In der Praxis bevorzugt man jedoch die trigonometrische Methode, weil sie genauer ist als jedes zeichnerische Verfahren und durch Benutzung von Hilfsmitteln (Tafeln, Rechenschemata) weitgehend mechanisiert werden kann.

Die Werte der trigonometrischen Funktionen findet man in Tafeln. Im folgenden wird stets auf „Schülkes Tafeln“ Bezug genommen.

Wie man eine Tafel der trigonometrischen Funktionen aufstellt, d. h. wie man die Funktionswerte für beliebige Winkel  $x$  berechnet, kann erst später gezeigt werden. Die Werte der trigonometrischen Funktionen sind im allgemeinen Irrationalzahlen und ergeben sich deshalb als unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche. In „Schülkes Tafeln“ sind sie auf vier Stellen gerundet. Es gibt aber auch für besondere Zwecke fünf- und mehrstellige Tafeln. Die Anwendung der trigonometrischen Methode erfordert, daß man sowohl das Aufsuchen des Wertes  $y = f(x)$  einer trigonometrischen Funktion zu einem gegebenen Winkel  $x$  als auch das Aufschlagen des Winkels  $x$  zu einem bekannten Funktionswert  $y$  in der Tafel beherrscht.

##### a) Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$

In den Tafeln der Funktionen Sinus und Kosinus nutzt man die Tatsache aus, daß  $\cos x = \sin(90^\circ - x)$  ist. Der nebenstehende Auszug aus einer vierstelligen Tafel gibt die Sinuswerte von  $0^\circ$  bis  $10^\circ$  für volle Grade wieder. Sie bedeuten gleichzeitig die Werte der Funktion  $\cos x$  für Winkel  $x$  zwischen  $80^\circ$  und  $90^\circ$ .

Es gehören

die linksstehenden Winkel zur obenstehenden Funktion,

die rechtsstehenden Winkel zur untenstehenden Funktion.

$x$	$\sin x$	
$0^\circ$	0,0000	$90^\circ$
$1^\circ$	0,0175	$89^\circ$
$2^\circ$	0,0349	$88^\circ$
$3^\circ$	0,0523	$87^\circ$
$4^\circ$	0,0698	$86^\circ$
$5^\circ$	0,0872	$85^\circ$
$6^\circ$	0,1045	$84^\circ$
$7^\circ$	0,1219	$83^\circ$
$8^\circ$	0,1392	$82^\circ$
$9^\circ$	0,1564	$81^\circ$
$10^\circ$	0,1736	$80^\circ$
	$\cos x$	$x$

Suche in Schülkes Tafel 8 den wiedergegebenen Auszug auf! Die Tafel 8 enthält die Werte der Funktionen Sinus und Kosinus für volle und zehntel Grade. In den Zeilen stehen die Werte für die Zehntel ein und desselben Grades, in den Spalten die Werte für dasselbe Zehntel aufeinanderfolgender Grade.

Die Tafel 9 für Tangens und Kotangens ist entsprechend der für Sinus und Kosinus eingerichtet. Sie nutzt die Beziehung  $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90^\circ - x)$  aus.

**b) Aufsuchen des Winkels  $x$** 

Man sucht den gegebenen Funktionswert  $y = f(x)$  in der Sinus-/Kosinus- bzw. Tangens-/Kotangens-Tafel auf. Bei den Funktionen Sinus und Tangens liest man die vollen Grade für den Winkelwert  $x$  in der Zeile, in welcher der Funktionswert steht, links ab, bei Kosinus und Kotangens dagegen rechts. Die Zehntelgrade stehen im ersten Falle in den Spalten der Kopfleisten, im zweiten Falle in den Spalten der Fußleisten.

Beispiele:

$$\begin{array}{llll} \sin x = 0,4664 & \operatorname{tg} x = 0,7400 & \cos x = 0,2284 & \operatorname{ctg} x = 10,99 \\ x = 27,8^\circ & x = 36,5^\circ & x = 76,8^\circ & x = 5,2^\circ. \end{array}$$

Das Aufsuchen der Funktionswerte  $y = f(x)$  bei gegebenem Winkel  $x$  nennt man auch Hineingehen in die Tafel; das Ermitteln der Winkelwerte  $x$  bei gegebenem Funktionswert  $y = f(x)$  dagegen Herausgehen aus der Tafel.

**c) Aufsuchen der Funktionswerte  $y = f(x)$  mit Interpolieren**

Ist der Winkel mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad gegeben, so hat man zu interpolieren. Für das Interpolieren gelten bei dezimal geteiltem Grad dieselben Regeln wie beim Rechnen mit Logarithmen.

Beispiel:  $y = \sin 13,27^\circ$ .

Aus Tafel 8 entnimmt man  $\sin 13,20^\circ = 0,2284$ ,  
 $\sin 13,30^\circ = 0,2300$ .

Die Tafeldifferenz  $D$  beträgt also 16 Einheiten der 4. Dezimale und gehört zu einer Winkeldifferenz von 10 Hundertstelgrad. Ist  $n$  die Anzahl der Hundertstelgrade zwischen dem gegebenen Winkel ( $13,27^\circ$ ) und dem kleineren Winkel ( $13,20^\circ$ ), so besteht für den mit Eigendifferenz  $d$  bezeichneten Unterschied zwischen dem gesuchten Funktionswert und dem des kleineren Winkels, dem Tafelwert, in linearer Annäherung die Beziehung

$$\frac{n}{10} = \frac{d}{D}; \text{ sie ergibt } d = \frac{n}{10} \cdot D.$$

In unserem Beispiel wird  $d = \frac{7}{10} \cdot 16 = 11,2$  oder auf Ganze gerundet 11. Diese Anzahl Einheiten der 4. Dezimale fügt man zu 0,2284 hinzu und erhält

$$y = \sin 13,27^\circ = 0,2295.$$

Bei der Sinus- und der Tangensfunktion hat man die Eigendifferenz zum Tafelwert zu addieren, bei der Kosinus- und der Kotangensfunktion dagegen vom Tafelwert zu subtrahieren. Begründe dies!

**d) Aufsuchen des Winkels  $x$  mit Interpolieren**

Steht der gegebene Funktionswert nicht in der Tafel, so hat man beim Aufsuchen des Winkels zu interpolieren.

Beispiel:  $\operatorname{ctg} x = 0,0550$ .

Der gegebene Funktionswert liegt zwischen den Werten 0,0559 und 0,0542, zu denen die Winkel  $86,80^\circ$  und  $86,90^\circ$  gehören (Tafel 9). Die Tafeldifferenz  $D$  dieser



Funktionswerte beträgt hier 17 Einheiten ihrer 4. Dezimale und gehört zu einer Winkeldifferenz von 10 Hundertstelgrad. Wird als Eigendifferenz  $d$  der Unterschied zwischen dem gegebenen Funktionswert und dem Funktionswert des kleineren Winkels gebildet, so besteht für die Anzahl  $n$  der zu ihm gehörenden Hundertstelgrade in linearer Annäherung die Beziehung  $\frac{n}{10} = \frac{d}{D}$ ; sie ergibt  $n = d \cdot \frac{D}{10}$ . In unserem Beispiel ist  $d$  gleich 9 Einheiten der 4. Dezimale. Daraus ergibt sich  $n = 9 : 1,7 \approx 5,3$  oder auf Ganze gerundet 5. Die berechnete Anzahl der Hundertstelgrade addiert man zu  $86,80^\circ$  und erhält als Ergebnis  $\hat{x} = 86,85^\circ$ .

### e) Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen

Die meisten Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen in den Tafeln sind Näherungswerte auf vier geltende Ziffern. Multiplikationen und Divisionen mit ihnen werden umständlich. Um die Rechnung zu erleichtern, verwenden wir die Logarithmen der Winkelfunktionswerte, die in derselben Weise tabelliert sind wie die Funktionswerte selbst. Tafel 4 enthält die Logarithmen der Sinus- und der Kosinusfunktion, Tafel 5 die Logarithmen der Tangens- und der Kotangensfunktion in Abhängigkeit vom Winkel  $x$ . Die Funktionswerte  $y = f(x)$  selbst bezeichnet man in Funktionstafeln — zum Unterschied von ihren Logarithmen — gewöhnlich als die natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen.

Die Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen sind in gleicher Weise zu handhaben wie die Tafeln der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen. In der Tafel ist aus drucktechnischen Gründen zu allen Logarithmen mit negativer Kennzahl 10 addiert. Deshalb hat man beim Aufschlagen der Logarithmen von der Form  $9. \dots$ ;  $8. \dots$ ;  $7. \dots$ ; usw. die Zahl 10 zu subtrahieren und erhält  $0. \dots - 1$ ;  $0. \dots - 2$ ;  $0. \dots - 3$ ; usw. Umgekehrt ist zu einem gegebenen Logarithmus mit negativer Kennzahl vor dem Hineingehen in die Tafel die Zahl 10 zu addieren.

Beispiel:  $\lg \sin 23,3^\circ = 9.5972 - 10$   
 $= 0.5972 - 1.$

Infolge der dezimalen Teilung des Grades ist die Interpolation dieselbe wie beim Rechnen mit Logarithmen.

Aus Tafel 6 entnimmt man den Logarithmus-Sinus und den Logarithmus-Tangens für kleine Winkel mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad unmittelbar, durch Interpolation mit einer Genauigkeit von Tausendstelgrad.

## Aufgaben

### a) Übungen im Tafelrechnen

1. *Aufsuchen der Funktionswerte  $y = f(x)$ ; Hineingehen in die Funktionstafel*

☒ Suche für die folgenden Winkel die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion auf:

a)  $12^\circ$     b)  $84^\circ$     c)  $38,1^\circ$     d)  $27,3^\circ$     e)  $5,6^\circ$     f)  $77,7^\circ$

g)  $40,9^\circ$     h)  $69,0^\circ$     i)  $81,2^\circ$     k)  $6,4^\circ$     l)  $53,5^\circ$     m)  $11,8^\circ$ !

2. Bis zu welchem Winkel stimmen die Werte der Sinus- und der Tangensfunktion

a) auf vier Dezimalen, b) auf drei Dezimalen miteinander überein?

8. Suche für die folgenden Winkel die Werte der Tangens- und der Kotangensfunktion auf:

- a)  $21^\circ$     b)  $58^\circ$     c)  $0,5^\circ$     d)  $88,0^\circ$     e)  $56,1^\circ$     f)  $43,9^\circ$   
 g)  $68,8^\circ$     h)  $4,4^\circ$     i)  $15,6^\circ$     k)  $5,5^\circ$     l)  $32,3^\circ$     m)  $52,4^\circ!$

### II. Aufsuchen des Winkels $x$ ; Herausgehen aus der Funktionstafel

4. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Sinus den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0,2756$     b)  $y = 0,6157$     c)  $y = 0,8829$     d)  $y = 0,4787$   
 e)  $y = 0,2990$     f)  $y = 0,5105$     g)  $y = 0,0454$     h)  $y = 0,9921$   
 i)  $y = 0,1547$     k)  $y = 0,6858$     l)  $y = 0,7325$     m)  $y = 0,9724$

5. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Kosinus den in Aufgabe 4 a) bis m) angegebenen Wert  $y$  hat!

6. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Tangens den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0,0699$     b)  $y = 0,2679$     c)  $y = 1,483$     d)  $y = 0,9725$   
 e)  $y = 0,1495$     f)  $y = 0,4536$     g)  $y = 1,865$     h)  $y = 0,3115$   
 i)  $y = 2,592$     k)  $y = 3,420$     l)  $y = 5,730$     m)  $y = 0,00524$

7. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Kotangens den in Aufgabe 6 a) bis m) angegebenen Wert  $y$  hat!

### III. Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$ mit Interpolieren

Falls der Winkel  $x$  in sexagesimaler Teilung, d.h. in Grad, Minuten und Sekunden gegeben ist, rechne vor der Benutzung der Tafeln die Minuten ( $'$ ) und Sekunden ( $''$ ) in dezimale Teile eines Grades um! Für die Umwandlung von  $m'$  bzw.  $s''$  in Grad gelten folgende Formeln:

$$60' = 1^\circ \qquad 60'' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \qquad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

$$m' = \left(\frac{m}{60}\right)^\circ, \qquad s'' = \left(\frac{s}{3600}\right)^\circ.$$

Beispiel:  $17^\circ 13' 25''$  sind in Grad und Dezimalgrad zu verwandeln (auf 2 Dezimalstellen).

$$13' = \left(\frac{13}{60}\right)^\circ \approx 0,217^\circ, \qquad 25'' = \left(\frac{25}{3600}\right)^\circ \approx 0,007^\circ.$$

Ergebnis:  $17^\circ 13' 25'' \approx 17,22^\circ$ .

Zur Umrechnung kann man Tafel 1 benutzen. — Es gibt auch Tafeln der trigonometrischen Funktionen, denen die sexagesimale Teilung des Winkels zugrunde gelegt ist.

8. Verwandle die sexagesimale Teilung folgender Winkel in die dezimale (auf 2 Dezimalstellen):

- a)  $16^\circ 18'$     b)  $38^\circ 24'$     c)  $79^\circ 39'$     d)  $24^\circ 25'$     e)  $62^\circ 7'$   
 f)  $20^\circ 30' 30''$     g)  $54^\circ 3' 48''$     h)  $78^\circ 52' 33''$     i)  $0^\circ 5' 13''$     k)  $18^\circ 0' 43''!$

9. Rechne folgende Winkelangaben in Grad, Minuten und Sekunden um:

- a)  $27,1^\circ$     b)  $14,9^\circ$     c)  $28,5^\circ$     d)  $34,12^\circ$     e)  $50,08^\circ$   
 f)  $68,47^\circ$     g)  $73,57^\circ$     h)  $7,93^\circ$     i)  $40,28^\circ$     k)  $12,11^\circ!$

10. Suche die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion für die folgenden Winkel auf:

- a)  $22,75^\circ$     b)  $68,24^\circ$     c)  $34,77^\circ$     d)  $79,67^\circ$     e)  $57,18^\circ$   
 f)  $87,87^\circ$     g)  $15,21^\circ$     h)  $45,86^\circ$     i)  $60,31^\circ$     k)  $5,02^\circ$   
 l)  $78,43^\circ$     m)  $89,07^\circ$     n)  $13^\circ 40'$     o)  $41^\circ 24'$     p)  $4^\circ 29' 58''$   
 q)  $39^\circ 42' 33''$     r)  $52^\circ 4' 17''$     s)  $80^\circ 20' 41''$     t)  $44^\circ 42' 40''$     u)  $5^\circ 44' 20''!$

11. Suche die Werte der Tangens- und der Kotangensfunktion für die folgenden Winkel auf:

- a)  $40,05^\circ$       b)  $23,75^\circ$       c)  $77,88^\circ$       d)  $3,94^\circ$       e)  $17,65^\circ$   
 f)  $57,21^\circ$       g)  $68,23^\circ$       h)  $84,31^\circ$       i)  $25,33^\circ$       k)  $32,07^\circ$   
 l)  $4,16^\circ$       m)  $79,99^\circ$       n)  $22^\circ 30'$       o)  $57^\circ 44'$       p)  $44^\circ 50' 40''$   
 q)  $7^\circ 22' 17''$       r)  $0^\circ 45' 15''$       s)  $34^\circ 58' 7''$       t)  $71^\circ 34' 26''$       u)  $11^\circ 18' 25''$

12. Berechne im Bereich  $89,00^\circ \leq x \leq 89,10^\circ$  die Werte der Tangensfunktion für Hundertstelgrad durch lineare Interpolation (Tafel 9)! — Vergleiche die Ergebnisse mit den Werten der Tangensfunktion in der untenstehenden Tabelle! Diese sind einer genaueren Tafel entnommen. — Bilde die Differenzen zwischen den interpolierten und den in der Tabelle stehenden Funktionswerten! Beurteile die Möglichkeit, bei der Tangensfunktion linear zu interpolieren! Beachte auch die Ausführungen in Schülkes Tafeln, S. 2!

$x$	$89,00^\circ$	$,01^\circ$	$,02^\circ$	$,03^\circ$	$,04^\circ$	$,05^\circ$	$,06^\circ$	$,07^\circ$	$,08^\circ$	$,09^\circ$	$,10^\circ$
$\operatorname{tg} x$	57,29	57,87	58,46	59,06	59,68	60,31	60,95	61,60	62,27	62,96	63,66

13. Suche die folgenden Funktionswerte auf:

- a)  $\operatorname{tg} 87,88^\circ$       b)  $\operatorname{tg} 89,05^\circ$       c)  $\operatorname{ctg} 1,33^\circ$       d)  $\operatorname{ctg} 2,87^\circ$       e)  $\operatorname{ctg} 0,92^\circ$

An Stelle der Einteilung des rechten Winkels in 90 Teile (Altgrad) wird auch die in 100 Teile (Neugrad) gebraucht. 1 Neugrad ( $1^g$ ) ist also der 100. Teil des rechten Winkels.

Zur Umrechnung dienen die folgenden Beziehungen:

Neugrad in Altgrad

$$100^g = 90^\circ$$

$$1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$$

$$n^g = \frac{9}{10} \cdot n^\circ$$

Altgrad in Neugrad

$$90^\circ = 100^g$$

$$1^\circ = \left(\frac{10}{9}\right)^g$$

$$a^\circ = \frac{10}{9} \cdot a^g$$

Beispiele:

$$34,26^g = 0,9 \cdot 34,26^\circ \approx 30,83^\circ$$

$$86,58^\circ = \frac{10}{9} \cdot 86,58^g = 96,20^g$$

14. Verwandle in Altgrad:

- a)  $73^g$     b)  $90^g$     c)  $16^g$     d)  $24,5^g$     e)  $28,7^g$     f)  $37,8^g$     g)  $94,13^g$     h)  $49,98^g$     i)  $56,75^g$

15. Verwandle in Neugrad:

- a)  $60^\circ$     b)  $88^\circ$     c)  $12^\circ$     d)  $47,5^\circ$     e)  $26,6^\circ$     f)  $84,3^\circ$     g)  $72,15^\circ$     h)  $58,48^\circ$     i)  $33,04^\circ$

16. Suche die Werte der vier trigonometrischen Funktionen der folgenden Winkel auf:

- a)  $35^g$     b)  $94^g$     c)  $5,5^g$     d)  $38,42^g$

Benutze, soweit möglich, die Tafel 22!

#### IV. Aufsuchen des Winkels $x$ mit Interpolieren

17. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Sinus den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0,6407$     b)  $y = 0,4711$     c)  $y = 0,8308$     d)  $y = 0,6300$   
 e)  $y = 0,6070$     f)  $y = 0,00807$     g)  $y = 0,9773$     h)  $y = 0,0813$   
 i)  $y = 0,2376$     k)  $y = 0,5681$     l)  $y = 0,7779$     m)  $y = 0,0480$

18. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Kosinus den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0,1700$     b)  $y = 0,3473$     c)  $y = 0,9872$     d)  $y = 0,0037$   
 e)  $y = 0,0323$     f)  $y = 0,9999$     g)  $y = 0,2022$     h)  $y = 0,8975$   
 i)  $y = 0,3602$     k)  $y = 0,7350$     l)  $y = 0,4285$     m)  $y = 0,5087$

Rechne die gefundenen Winkel in sexagesimal geteilte Altgrad um!

19. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Tangens den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0,3259$     b)  $y = 0,6425$     c)  $y = 1,022$     d)  $y = 8,190$   
 e)  $y = 0,7420$     f)  $y = 0,6000$     g)  $y = 1,712$     h)  $y = 25,00$   
 i)  $y = 0,00536$     k)  $y = 2,000$     l)  $y = 0,5001$     m)  $y = 1,6107$

20. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Kotangens den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0,2510$     b)  $y = 0,4758$     c)  $y = 1,321$     d)  $y = 1,085$   
 e)  $y = 0,9980$     f)  $y = 0,0020$     g)  $y = 11,50$     h)  $y = 4,932$   
 i)  $y = 0,0280$     k)  $y = 0,6070$     l)  $y = 1,005$     m)  $y = 0,5000$

### V. Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen

21. Suche die Logarithmen der vier trigonometrischen Funktionen der in den Aufgaben 1, 3 und 8 bis 11 verzeichneten Winkel auf!

22. Schlage für die folgenden Winkel die Logarithmen der Sinus- und der Tangensfunktion auf:

- a)  $0,09^\circ$     b)  $0,902^\circ$     c)  $2,418^\circ$     d)  $4,935^\circ$     e)  $3,076^\circ$     f)  $1,234^\circ$ !

23. Suche für die folgenden Winkel die Logarithmen der Kosinus- und der Kotangensfunktion auf:

- a)  $85,238^\circ$     b)  $88,931^\circ$     c)  $87,045^\circ$     d)  $89,304^\circ$     e)  $86,753^\circ$     f)  $89,165^\circ$ !

24. Schlage in den entsprechenden Tafeln auf:

- a)  $\lg \sin 19,5^\circ$     b)  $\lg \sin 31,67^\circ$     c)  $\lg \sin 17^\circ 42'$     d)  $\lg \sin 93,5^\circ$   
 e)  $\lg \cos 73,92^\circ$     f)  $\lg \cos 37,57^\circ$     g)  $\lg \cos 45^\circ 22' 47''$     h)  $\lg \cos 24,7^\circ$   
 i)  $\lg \operatorname{tg} 21,28^\circ$     k)  $\lg \operatorname{tg} 50,68^\circ$     l)  $\lg \operatorname{tg} 87,55^\circ$     m)  $\lg \operatorname{tg} 47^\circ 33'$   
 n)  $\lg \operatorname{ctg} 38,95^\circ$     o)  $\lg \operatorname{ctg} 45,08^\circ$     p)  $\lg \operatorname{ctg} 2^\circ 5' 12''$     q)  $\lg \operatorname{ctg} 1,54^\circ$ !

25. Stelle die Funktionen a)  $y = \lg \sin x$ ; b)  $y = \lg \cos x$ ; c)  $y = \lg \operatorname{tg} x$ ; d)  $y = \lg \operatorname{ctg} x$  geometrisch dar!

Benutze dazu die Tafelwerte für  $x = 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ$ ! — Beschreibe den Verlauf jeder Funktion! Wie verlaufen die Funktionen in der Umgebung von  $x = 0^\circ$  und  $x = 90^\circ$ ? Gib an, für welche Winkel sich jede Funktion am stärksten, für welche am schwächsten ändert! Vergleiche die Ergebnisse mit den Differenzen aufeinanderfolgender Logarithmen! — Untersuche die Logarithmus-Tangens-Kurve und die Logarithmus-Kotangens-Kurve auf Symmetrie!

26. Welche Beziehungen bestehen zwischen

- a)  $\lg \operatorname{tg} x$  und  $\lg \operatorname{ctg} x$ ,    b)  $\lg \sin x$ ,  $\lg \cos x$  und  $\lg \operatorname{tg} x$ ,    c)  $\lg \sin x$ ,  $\lg \cos x$  und  $\lg \operatorname{ctg} x$ ?  
 Berechne mit Hilfe dieser Gleichungen in einigen selbstgewählten Beispielen den Funktionswert des Logarithmus-Tangens und Logarithmus-Kotangens aus den Funktionswerten für Logarithmus-Sinus und Logarithmus-Kosinus! — Gibt es eine entsprechende Beziehung auch zwischen  $\lg \sin x$  und  $\lg \cos x$ ?

27. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Logarithmus-Sinus den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0.6093 - 1$     b)  $y = 0.3775 - 1$     c)  $y = 0.5717 - 1$     d)  $y = 0.0135 - 1$   
 e)  $y = 0.9438 - 1$     f)  $y = 0.1437 - 1$     g)  $y = 0.7963 - 1$     h)  $y = 0.8101 - 1$   
 i)  $y = 0.4783 - 1$     k)  $y = 0.8583 - 1$     l)  $y = 0.7460 - 2$     m)  $y = 0.4920 - 3$

28. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Logarithmus-Kosinus den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0.5341 - 1$     b)  $y = 0.7230 - 1$     c)  $y = 0.9892 - 1$     d)  $y = 0.2700 - 1$   
 e)  $y = 0.9900 - 1$     f)  $y = 0.2356 - 1$     g)  $y = 0.6400 - 1$     h)  $y = 0.9995 - 1$   
 i)  $y = 0.6000 - 1$     k)  $y = 0.4840 - 1$     l)  $y = 0.8221 - 2$     m)  $y = 0.4459 - 2$

Rechne die gefundenen Winkel in die sexagesimale Teilung um!

29. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Logarithmus-Tangens den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0.1387$     b)  $y = 0.8003$     c)  $y = 0.6486 - 1$     d)  $y = 1.0944$   
 e)  $y = 0.8345 - 1$     f)  $y = 0.1479 - 1$     g)  $y = 0.1599$     h)  $y = 0.6190 - 1$   
 i)  $y = 0.8036 - 1$     k)  $y = 1.0200$     l)  $y = 0.2833 - 3$     m)  $y = 0.8960 - 2$

30. Schlage den Winkel  $x$  auf, dessen Logarithmus-Kotangens den Wert  $y$  hat!

- a)  $y = 0.9848 - 1$     b)  $y = 0.6129 - 1$     c)  $y = 0.2509$     d)  $y = 0.3688$   
 e)  $y = 0.1888$     f)  $y = 0.9800$     g)  $y = 0.2880$     h)  $y = 0.6971 - 1$   
 i)  $y = 1.6250$     k)  $y = 0.1064 - 1$     l)  $y = 0.3090 - 2$     m)  $y = 0.8293 - 2$

Rechne die gefundenen Winkel in Neugrad um!

### b) Anwendungen aus der Geometrie

31. In einem rechtwinkligen Dreieck (Abb. 20) sind gegeben

- a) die beiden Katheten:  $a = 12,7$  cm und  $b = 4,9$  cm;  
 $a = 54,85$  m und  $b = 74,54$  m;  
 b) eine Kathete und die Hypotenuse:  $a = 420$  m und  $c = 645$  m;  
 $b = 14,54$  cm und  $c = 29,08$  cm;  
 c) die Hypotenuse und ein Winkel:  $c = 125$  m und  $\alpha = 35,60^\circ$ ;  
 $c = 10,50$  cm und  $\beta = 40,30^\circ$ ;  
 d) eine Kathete und der ihr gegenüberliegende Winkel:  $a = 63$  mm und  $\alpha = 40,30^\circ$ ;  
 $b = 80,70$  m und  $\beta = 62,30^\circ$ .

Berechne die übrigen Stücke und den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks!

32. In einem rechtwinkligen Dreieck (Abb. 20) sind gegeben

- a)  $c = 18,50$  m,  $p = 4,20$  m;    b)  $c = 18,50$  m,  $h_c = 4,30$  m;  
 c)  $h_c = q = 3,5$  m;    d)  $h_c = 22,42$  m,  $b = 25,30$  m;  
 e)  $p = 18,18$  m,  $q = 3,88$  m.

Berechne die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks! Konstruiere das rechtwinklige Dreieck aus den gegebenen Stücken!

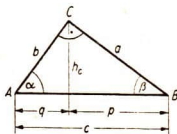


Abb. 20

33. In einem gleichschenkligen Dreieck (Abb. 21) sind gegeben

- a)  $c = 125$  m,  $h_c = 85$  m;    b)  $a = 3,70$  m,  $c = 2,50$  m;  
 c)  $c = 19,64$  cm,  $\gamma = 55,40^\circ$ ;    d)  $c = 75,92$  dm,  $\alpha = 52,62^\circ$ ;  
 e)  $h_c = 4,786$  m,  $\gamma = 32,10^\circ$ .

Berechne die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks! Konstruiere das Dreieck aus den gegebenen Stücken!

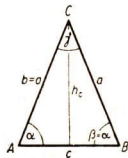


Abb. 21



34. Ein Rechteck wird durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.
- Berechne im Rechteck mit den Seiten  $a = 5,5$  m und  $b = 4,2$  m die Winkel, welche die Diagonalen mit den Rechteckseiten bilden, und den von beiden Diagonalen eingeschlossenen Winkel!
  - Von einem Rechteck ist die Diagonale  $e = 6,5$  m und der von beiden Diagonalen eingeschlossene Winkel  $\varepsilon = 55^\circ$  gegeben. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?
35. Ein Rhombus wird durch die beiden Diagonalen in vier rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Von einem Rhombus sind die Seite  $a = 12,5$  cm und der Winkel  $\alpha = 45^\circ$  gegeben. Berechne die beiden Diagonalen des Rhombus und seinen Flächeninhalt!

36. Das Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen  $n$ -Ecks ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel  $\gamma = \frac{4R}{n}$  an der Spitze.

- Einem Kreis vom Radius  $r = 1$  dm ist ein regelmäßiges  $n$ -Eck einbeschrieben. Wie groß sind seine Seite  $s_n$ , sein Umfang  $u_n$  und seine Fläche  $f_n$  für  $n = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$ ?
- Die Seite eines regelmäßigen  $n$ -Ecks sei  $s_n = 27$  cm. Bestimme die Radien des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Kreises für  $n = 3; 4; 5; \dots; 10$ !
- Einem Kreis vom Radius  $r = 1$  dm ist ein regelmäßiges  $n$ -Eck umbeschrieben. Wie groß sind seine Seite  $S_n$ , sein Umfang  $U_n$  und seine Fläche  $F_n$  für  $n = 3; 4; 5; \dots; 10$ ?
- Stelle in einem rechtwinkligen Achsenkreuz mit der Indexachse  $n$  als Abszissenachse die Größen  $s_n$  und  $S_n$ ,  $u_n$  und  $U_n$ ,  $f_n$  und  $F_n$  aus Aufgabe a) und c) in Abhängigkeit von  $n$  geometrisch dar!

37. a) Berechne die zu einem beliebigen Zentriwinkel  $\alpha$  gehörige Sehne  $s$ , den zugehörigen Kreisbogen  $\widehat{b}$  und die Pfeilhöhe  $h$  (Abstand der Bogenmitte von der Sehne) eines Einheitskreises ( $r = 1$ , Abb. 22) als Funktionen des Zentriwinkels und stelle diese Funktionen geometrisch dar!
- b) Wie lauten die analytischen Darstellungen für die Funktionen  $s(\alpha)$ ;  $\widehat{b}(\alpha)$  und  $h(\alpha)$  in einem Kreis mit dem Radius  $r$ ?
- c) Wie kann man die in technischen Tabellenbüchern enthaltenen Tafeln für die Werte  $s$ ,  $\widehat{b}$  und  $h$  der Aufgabe a) berechnen?

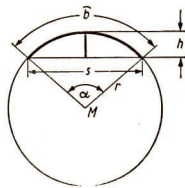


Abb. 22

38. Die Fläche eines Kreissegments über der Sehne  $s$ , das von dem Kreisbogen  $\widehat{b}$  begrenzt wird, berechnet man als Differenz aus dem Kreissektor zum Bogen  $\widehat{b}$  und dem gleichschenkligen Dreieck über der Sehne  $s$  als Basis, dessen Spitze im Kreismittelpunkt liegt.
- Wie groß ist die Fläche des Kreissegments zum Zentriwinkel  $\alpha = 54^\circ$  in einem Kreis mit dem Radius  $r = 1$  m?
  - Berechne die Pfeilhöhe  $h$  des Segments in Aufgabe a)!
  - Von einem Segment sind die Sehne  $s = 5,40$  m (Spannweite  $s$ ) und die Pfeilhöhe  $h = 0,50$  m (Bogenhöhe  $h$ ) gegeben. Berechne die Fläche des Kreissegments und den zugehörigen Zentriwinkel!
  - Stelle 1. den Sektor zum Bogen  $\widehat{b}$  eines Einheitskreises,  
2. den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks über der Sehne  $s$  als Basis, dessen Spitze im Mittelpunkt des Einheitskreises liegt,  
3. das Kreissegment über der Sehne  $s$ , das von dem Kreisbogen  $\widehat{b}$  begrenzt wird,  
als Funktionen des Zentriwinkels  $\alpha$  analytisch und geometrisch dar!

## c) Anwendungen aus der Physik

39. Am äußeren Ende eines Tragarms mit Zugstange hängt eine Last  $Q = 400 \text{ kp}$  (Abb. 23).

- Bestimme geometrisch in maßstäblicher Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Zugstange wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel  $\alpha = 30^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $60^\circ$  der Zugstange gegen den Tragarm!
- Berechne trigonometrisch die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

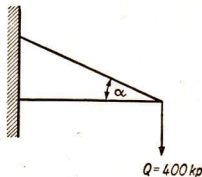


Abb. 23

40. Am Ende eines Tragarmes mit Stütze hängt eine Last von  $400 \text{ kp}$  (Abb. 24).

- Bestimme geometrisch in maßstäblicher Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Stütze wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel  $\alpha = 30^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $60^\circ$  der Stütze gegen den Tragarm!
- Berechne die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

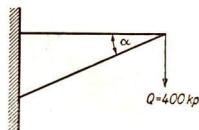


Abb. 24

41. Eine Kiste von  $96 \text{ kp}$  Gewicht soll auf einer unter  $25^\circ$  gegen die Horizontalebene geneigten Holzrampe hochgezogen werden.

- Bestimme trigonometrisch und geometrisch die Abhängigkeit des Hangabtriebs  $H$  und des Normdrucks  $N$  vom Neigungswinkel  $\alpha$  der Rampe!
- Berechne unter Berücksichtigung der Gleitreibung die Größe der erforderlichen Zugkraft! Die Reibungszahl für Holz auf Holz ist im Mittel  $\mu = 0,18$ .
- Berechne den Neigungswinkel  $\varrho$  der Rampe, bei welchem der Hangabtrieb  $H$  gleich der Reibung  $R$  wird (Reibungswinkel  $\varrho$ )!
- Zeige, daß der Tangens des Reibungswinkels  $\varrho$  gleich der Reibungszahl  $\mu$  ist!

## Das Reflexionsgesetz

42. Zwei Beobachter peilen von einem Schiff aus das Leuchtfeuer eines Leuchtturms an.

Der eine Beobachter sieht das Leuchtfeuer unter dem Höhenwinkel  $\alpha = 3,81^\circ$ . Aus dem nautischen Jahrbuch entnimmt er die Höhe des Leuchtfeuers zu  $h = 86 \text{ m}$  über Normalnull. Der andere beobachtet unabhängig davon das Leuchtfeuer gleichfalls unter dem Höhenwinkel  $\alpha = 3,81^\circ$  und das Spiegelbild des Leuchtfeuers im Wasser unter dem Tiefenwinkel  $\beta = 4,58^\circ$ . Beide Beobachter berechnen die Entfernung des Schiffes vom Leuchtturm. Die Augenhöhe beider Beobachter über dem Meeresspiegel beträgt  $8 \text{ m}$ .

43. Der Lichtzeiger eines Spiegelgalvanometers steht bei stromlosem Instrument senkrecht auf der Ebene einer  $1 \text{ m}$  vom Spiegel entfernten, in Zentimeter geteilten Skala von  $2 \text{ m}$  Gesamtlänge.

- Einem Strom von  $1 \cdot 10^{-6} \text{ A}$  entspricht ein Ausschlag von  $8 \text{ cm}$  auf der Skala. Um welchen Winkel hat sich 1. der Lichtzeiger; 2. der Galvanometerspiegel gedreht?
- Bestimme die Zeigerausschläge auf der Skala für  $2 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ ;  $3 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ ; ... und eiche die Skala in Ampere unter der Voraussetzung, daß die Winkelausschläge des Drehspiegels der Stromstärke proportional sind!
- Wie groß sind die den Stromstärken entsprechenden Ausschläge, wenn die Skala  $d = 2 \text{ m}$  vom Spiegel entfernt ist?

**Lichtbrechung**

Fallen Lichtstrahlen unter dem Winkel  $\alpha$  aus Luft in ein optisch dichteres Mittel ein, so werden sie von ihrer ursprünglichen Richtung zum Einfallslot hin derart gebrochen, daß das Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels  $\alpha$  zum Sinus des Brechungswinkels  $\beta$  gleich der Brechungszahl  $n$  des optischen Mittels gegenüber Luft ist.

Brechungsgesetz: 
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Bei umgekehrtem Strahlengang ist die Brechungszahl  $n' = \frac{1}{n}$ .

44. Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel  $\alpha = 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ; 90^\circ$  aus Luft in Wasser. Die Brechungszahl für den Übergang von Luft in Wasser ist  $n = \frac{4}{3}$ .

- a) Berechne die zugehörigen Brechungswinkel  $\beta$ !
- b) Stelle die einander zugeordneten Werte von Einfallswinkel und Brechungswinkel in einer Tafel zusammen!

45. Beim Durchgang durch eine planparallele Platte wird ein Lichtstrahl parallel verschoben.

- a) Wie groß ist die Parallelverschiebung, die ein Lichtstrahl durch eine planparallele Glasplatte von  $d = 10$  cm Dicke bei einem Einfallswinkel  $\alpha = 60^\circ$  erfährt, ( $n = \frac{3}{2}$ )?
- b) Bestimme den Gang des Lichtstrahls geometrisch!
- c) Stelle die Verschiebung des Lichtstrahls als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha$  geometrisch dar!

46. Auf ein Glasprisma, (Brechungszahl  $n = \frac{3}{2}$ ), dessen brechende Flächen einen Winkel  $\varepsilon = 60^\circ$  bilden, fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel  $\alpha_1 = 45^\circ$  ein (Abb. 25).

- a) Bestimme geometrisch den Gang des Lichtstrahls!
- b) Bestimme trigonometrisch die Gesamtablenkung  $\delta$  des Lichtstrahls!

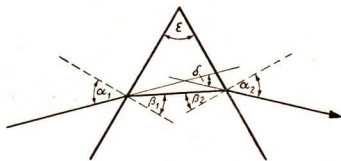


Abb. 25

47. Unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion versteht man denjenigen spitzen Einfallswinkel im optisch dichteren Mittel, für den der Brechungswinkel im optisch dünneren Mittel  $90^\circ$  wird. Wie groß ist der Grenzwinkel der totalen Reflexion für den Übergang von

- a) Wasser in Luft, ( $n' = \frac{3}{4}$ )?
- b) Glas in Luft, ( $n' = \frac{2}{3}$ )?

**d) Anwendungen aus der Technik**

48. Wie groß ist in dem Gewindeprofil des metrischen Gewindes DIN 13 der Flankenwinkel  $\alpha$ , wenn  $t = 0,8660 h$  ist (Abb. 26)?

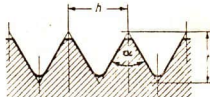


Abb. 26. Gewindeprofil

49. Die Achsen zweier Kegelräder stehen aufeinander senkrecht (Abb. 27). Ihre großen Durchmesser sind  $D_1 = 150$  mm (900 mm) und  $D_2 = 120$  mm (480 mm). Die Länge der ineinandergreifenden Zähne ist  $s = 30$  mm (150 mm).

- a) Welche Neigungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  bilden die Mantellinien der beiden Kegelstümpfe mit ihren Grundflächen?
- b) Wie groß sind die kleinen Durchmesser  $d_1$  und  $d_2$  der beiden Kegelräder?
- c) Wie hoch sind die beiden Kegelräder?
- d) Stelle die Kegelräder in einer maßstäblichen Zeichnung dar und löse die Aufgabe geometrisch!

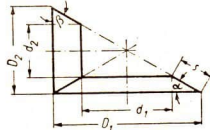


Abb. 27. Kegelräder (schematisch)



50. Kegelpapfen (konische Zapfen oder „Kegel“, technische Bezeichnungen für den Kegelstumpf) können auf einer Drehbank durch Schrägstellen des Oberteils am verschiebbaren Werkzeugschlitten — durch Schrägstellen des sogenannten Längssupports der Drehbank — hergestellt werden (Abb. 28; zur Vereinfachung wurde der Antrieb weggelassen, ebenso in Abb. 29).

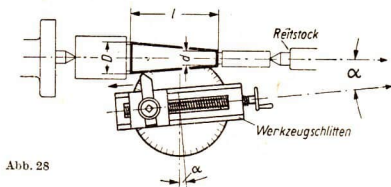


Abb. 28

In der Technik beim Kegeldrehen (eigentlich Kegelstumpfdrehen) gebräuchliche Bezeichnungen sind:

großer Kegeldurchmesser  $D$ ; kleiner Kegeldurchmesser  $d$ ; Kegellänge  $l$  (sämtlich in mm); Kegelwinkel  $\beta = 2\alpha$ ;

Verjüngung des Kegels im Durchmesser  $v = \frac{D-d}{l}$ ; Neigung des Kegels  $m = \frac{D-d}{2l}$ .

Ein Kegel  $1:k$  bedeutet einen Kegelstumpf von der Verjüngung  $v = \frac{1}{k}$ .

- Berechne den Einstellwinkel am Werkzeugschlitten der Drehbank, wenn der Kegelwinkel  $\beta = 2\alpha$  betragen soll!
- Wie groß muß der Einstellwinkel am Werkzeugschlitten sein, wenn  $D = 80$  mm (30 mm; 100 mm),  $d = 60$  mm (20 mm; 60 mm) und  $l = 100$  mm (120 mm; 90 mm) werden soll?
- Wie groß muß man den kleinen Durchmesser  $d$  eines  $l = 45$  mm langen konischen Zapfens wählen, wenn  $D = 25$  mm und die Neigung des Zapfens  $m = \frac{1}{10}$  betragen soll?

51. Kegel können auf Drehbänken auch durch seitliches Verstellen der Körnerspitze des Reitstocks um ein Stück  $e$  hergestellt werden (Abb. 29).

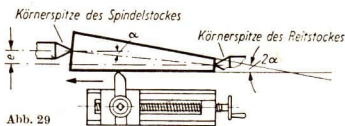


Abb. 29

- Wie groß wird die Verjüngung  $v$  eines Kegels, wenn die Reitstockspitze der Drehbank um  $e$  mm verschoben wird?
  - Drücke die Verschiebung  $e$  der Reitstockspitze als Funktion des Kegelwinkels  $\beta = 2\alpha$  aus (vgl. Abb. 29)!
  - Wie läßt sich die Verjüngung  $v$  des Kegelpapfens als Funktion des Kegelwinkels  $2\alpha$  darstellen?
  - Es soll ein Kegel mit den Maßen  $D = 65$  mm,  $l = 245$  mm und  $v = \frac{1}{20}$  gedreht werden. Wie groß werden  $d$  und  $\beta = 2\alpha$ ? Um welches Stück  $e$  muß die Körnerspitze des Reitstocks auf der Drehbank seitlich verstellt werden?
52. Kugellager. Um einen Kreiszyylinder vom Durchmesser  $D = 50$  mm sollen  $n = 20$  Kugeln so angeordnet werden, daß sie sich gegenseitig berühren.
- Wie groß muß der Kugeldurchmesser gewählt werden, wenn die Kugeln den Kreiszyylinder von außen berühren sollen?
  - Wie groß muß der Kugeldurchmesser gewählt werden, wenn die Kugeln einen Hohlzyylinder vom Durchmesser  $d$  von innen berühren sollen?
  - Berechne den Durchmesser der Kugeln, wenn der Abstand zweier aufeinanderfolgender Kugeln im Kugelkäfig  $a = 5$  mm betragen soll!
  - Stelle die einzelnen Kugellager in maßstäblichen Schnittzeichnungen dar!

53. Ein Riementrieb besteht aus zwei Riemenscheiben mit den Durchmessern  $D = 50$  cm und  $d = 20$  cm bei einem Abstand  $a = 350$  cm zwischen treibender und getriebener Welle (Abb. 30).

- Berechne die Länge des Treibriemens bei offenem Riemen!
- Welche Näherungsformel kann man für die Treibriemenlänge angeben, wenn die Neigung des Treibriemens gegen die Verbindungslinie der beiden Wellen so klein ist, daß die zum Winkel  $\alpha$  gehörende Bogenlänge durch seinen Sinuswert und  $\cos \alpha$  durch 1 ersetzt werden kann?

c) Vergleiche die nach a) und b) berechneten Riemenlängen miteinander!

54. a) Berechne die Riemenlänge nach den Angaben in Aufgabe 53 für gekreuzten Riemen (Abb. 31)!

b) Wie lautet die Näherungsformel für gekreuzten Riemen?

c) Zeige, daß sich nach der unter a) abgeleiteten Formel die Riemenlänge gekreuzter Treibriemen bei Auswechslung der Riemenscheiben nicht ändert, wenn der Abstand  $a$  zwischen treibender und getriebener Welle und die Summe der Durchmesser der Riemenscheiben,  $D + d$ , (Summe der Radien der Riemenscheiben,  $R + r$ ), unverändert bleiben!

55. Eine Schraube ist selbsthemmend, wenn die parallel zur schiefen Ebene wirkende Reibungskraft  $R$  gleich oder größer als der Hangabtrieb  $H$  ist.

Wie hoch darf die Ganghöhe  $h$  einer Stahlschraube von  $D = 52$  mm Durchmesser im Höchstfall sein, damit die Schraube selbsthemmend ist? Der Reibungswinkel von Stahl auf Stahl (bei Öffnung) ist  $\varrho = 8,5^\circ$ .

56. Ein zylinderförmiger liegender Dampfkessel ist 1800 mm lang und besitzt einen lichten Durchmesser  $D = 1500$  mm. Der Kessel ist als Einflammrohrkessel mit glattem Flammrohr von 700 mm Durchmesser ausgeführt. Die Wasserstandslinie des Kessels liegt bei 1000 mm.

- Zeichne einen Querschnitt des Kessels und trage die Wasserstandslinie ein!
- Drücke für den gezeichneten Querschnitt die Sehnenlänge, die Bogenlänge und die Fläche des Kreissegments als Funktionen des Zentriwinkels aus, welcher einer Wasserstandshöhe  $h$  in diesem Querschnitt zugeordnet ist, und stelle die Funktionen geometrisch dar!
- Drücke die Verdampfungsfläche des Kessels ( $\text{m}^2$ ) als Funktion des Zentriwinkels aus und stelle die Funktion geometrisch dar!
- Berechne für die angegebenen Zahlenwerte die Verdampfungsfläche ( $\text{m}^2$ ) und den Wasserinhalt des Dampfkessels ( $\text{m}^3$ )!
- Berechne für die Wasserstandshöhen 1000 mm; 1100 mm; 1200 mm; 1300 mm; 1400 mm die zugehörigen Verdampfungsflächen ( $\text{m}^2$ ) und Wasserinhalte ( $\text{m}^3$ ) und stelle diese als Funktionen der Wasserstandshöhe geometrisch dar!

### e) Anwendungen aus verschiedenen Gebieten

57. Unter welchem Winkel steigt eine geradlinige Straße gleichmäßig an, wenn zwei Meßpunkte  $A$  und  $B$  auf ihr um 810 m voneinander entfernt liegen (in der Straßenmitte gemessen) und einen Höhenunterschied von 40,80 m gegeneinander aufweisen? Zeichne einen maßstäblichen Geländeschnitt durch die Straßenmitte und löse die Aufgabe auch geometrisch (vgl. Abb. 32)!

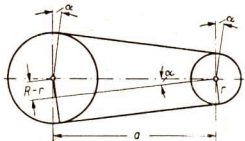


Abb. 30. Riementrieb mit offenem Riemen

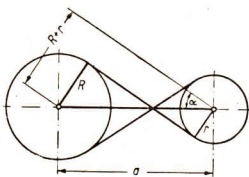


Abb. 31. Riementrieb mit gekreuztem Riemen



Abb. 32

58. Ein 23 m hoher Gittermast einer Hochspannungsleitung wirft in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten. Unter welchem Winkel fallen im Zeitpunkt der Beobachtung die Sonnenstrahlen ein?

Löse die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

59. **a)** Berechne den Radius des Breitenkreises, auf welchem der Schulort liegt!  
**b)** Welche (lineare) Bahngeschwindigkeit besitzt der Schulort infolge der Erdumdrehung?  
**c)** Wie groß ist die Entfernung zwischen dem Schulort und einem auf demselben Breitenkreis liegenden Ort, dessen Meridian sich von dem des Schulorts um  $1^\circ$  unterscheidet?  
**d)** Löse die Aufgabe **a)** auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

Die Erde ist näherungsweise als Kugel anzusehen;  $R = 6370$  km.

60. Welche Breitenausdehnung besitzt ein Körper, der einem Beobachter in der Entfernung  $d$  unter dem Schwinkel  $1^\circ$  erscheint?

**a)**  $d = 1$  m; **b)**  $d = 10$  m; **c)**  $d = 100$  m; **d)**  $d = 1$  km; **e)**  $d = 10$  km.

61. Die Entfernung Sonne—Erde beträgt im Mittel  $149 \cdot 10^6$  km; die Entfernung Erde—Mond  $384 \cdot 10^3$  km. Der scheinbare Durchmesser der Sonne ist rund  $32'$ , der des Mondes rund  $31'$ . Berechne den wahren Durchmesser der Sonne und des Mondes!

62. Unter der Horizontalparallaxe eines Gestirns versteht man den Schwinkel, unter welchem der Erdradius einem Beobachter vom Gestirn aus erscheinen würde. Berechne die Horizontalparallaxe des Mondes unter Benutzung der in Aufgabe 61 gegebenen Entfernungen (Erdradius  $R = 6370$  km)!

63. Ein elektrischer Leitungsmast wirft bei einer Sonnenhöhe von  $52,7^\circ$  in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten.

**a)** Wie groß ist die Höhe des Leitungsmastes über der Erde?  
**b)** Löse die Aufgabe auch geometrisch!

64. Um die Höhe einer Wolkendecke zu bestimmen, wird diese von dem Scheinwerfer einer meteorologischen Station lotrecht angestrahlt, so daß die Spitze des Lichtkegels an der Wolkendecke einen scharf begrenzten Lichtfleck erzeugt. Der Lichtfleck wird durch das Fernrohr eines in 300 m horizontaler Entfernung vom Scheinwerfer aufgestellten Theodoliten angepeilt und am Höhenkreis des Theodoliten ein Höhenwinkel  $\alpha = 70,4^\circ$  abgelesen. Wie hoch ist die Wolkendecke? Löse die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch!

65. Von einem Standpunkt  $P$  aus sieht man einen Turm unter dem Schwinkel  $\alpha = 29,82^\circ$ . Der Standpunkt  $P$  ist horizontal um  $d = 240$  m vom Turm entfernt und liegt um  $h = 19,40$  m höher als der Fuß des Turmes. Wie hoch ist der Turm?

Löse die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch!

66. Bestimme im Mittel die Mächtigkeit eines Kohlenflözes aus der durchbohrten Teufe  $t = 10,50$  m und dem sogenannten Einfallswinkel  $\beta = 63,4^\circ$  (Abb. 33)!

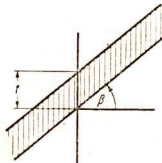


Abb. 33

67. In einem Braunkohlentagebau soll der Höhenunterschied zwischen dem ersten und dem zweiten Planum<sup>1)</sup> bestimmt werden (Abb. 34). Gemessen wurde der Neigungswinkel  $\beta = 48^\circ$ , die flache Länge des Flözes beträgt  $l = 25,70$  m.

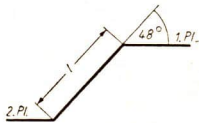


Abb. 34

1) Planum (lat.), das, künstlich hergestellte ebene Fläche, auch im Bauwesen.

## II. Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel

### 5. Erweiterung des Erklärungsbereiches

#### a) Erklärung der trigonometrischen Funktionen durch die Koordinaten eines Kreispunktes $P(u; v)$

Die Erklärungen der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck gelten nur für spitze Winkel. Für stumpfe und überstumpfe Winkel sind die Funktionen  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  und  $\operatorname{ctg} x$  zunächst nicht erklärt. Es bedarf besonderer Festsetzungen, was unter diesen Funktionen für Winkel zwischen  $90^\circ$  und  $360^\circ$  verstanden werden soll. Die Beziehungen, die für Winkel im I. Quadranten eines Kreises abgeleitet wurden, sind brauchbar, um die trigonometrischen Funktionen der Winkel in allen Quadranten zu erklären.

**Erklärung 5:** Unter dem Sinus eines Winkels  $x$  zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  versteht man das Verhältnis der Ordinate  $v$  des auf der Peripherie laufenden Punktes  $P$  zum Radius  $r$  des Kreises um  $O$  (Abb. 35).

$$\sin x = \frac{v}{r}, \quad (0^\circ \leq x \leq 360^\circ).$$

**Erklärung 6:** Unter dem Kosinus eines Winkels  $x$  zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  versteht man das Verhältnis der Abszisse  $u$  des auf der Peripherie laufenden Punktes  $P$  zum Radius  $r$  des Kreises um  $O$  (Abb. 36).

$$\cos x = \frac{u}{r}, \quad (0^\circ \leq x \leq 360^\circ).$$

**Erklärung 7:** Unter dem Tangens eines Winkels  $x$  zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$ , ausgenommen die Werte  $x = 90^\circ$  und  $x = 270^\circ$ , versteht man das Verhältnis der Ordinate  $v$  zur Abszisse  $u$  des auf der Peripherie laufenden Punktes  $P$  (Abb. 37a, b).

$$\operatorname{tg} x = \frac{v}{u}, \quad (0^\circ \leq x \leq 360^\circ, x \neq 90^\circ, x \neq 270^\circ).$$

Warum sind die Winkel  $x = 90^\circ$  und  $x = 270^\circ$  ausgenommen?

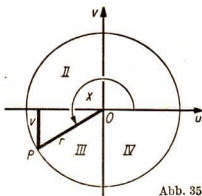


Abb. 35

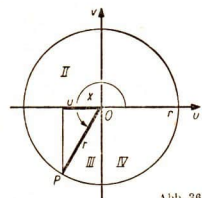


Abb. 36

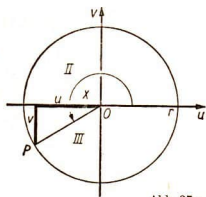


Abb. 37a

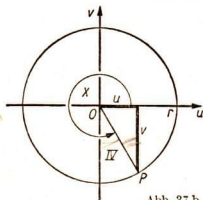


Abb. 37 b

**Erklärung 8:** Unter dem Kotangens eines Winkels  $x$  zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$ , ausgenommen die Werte  $x = 0^\circ$ ,  $x = 180^\circ$  und  $x = 360^\circ$ , versteht man das Verhältnis der Abszisse  $u$  zur Ordinate  $v$  des auf der Peripherie laufenden Punktes  $P$  (Abb. 38 a, b).

$$\text{ctg } x = \frac{u}{v}, \quad (0^\circ < x < 360^\circ, x \neq 180^\circ).$$

Warum sind die Winkel  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $360^\circ$  ausgenommen?

Der Radius  $r$  hat als absolute Größe kein Vorzeichen, aber  $u$  und  $v$  nehmen je nach dem Quadranten das positive oder negative Vorzeichen an. Die Vorzeichen von  $u$  und  $v$  bestimmen damit das Vorzeichen der Funktion für die Winkel dieses Quadranten. In der untenstehenden Tafel sind die Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen in den einzelnen Quadranten zusammengestellt. — Leite die Vorzeichen aus den Erklärungen der trigonometrischen Funktionen ab!

Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen

	I.	II.	III.	IV. Quadrant
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-

Die Erklärungen 5 bis 8 erweitern die Begriffe der trigonometrischen Funktionen auf beliebige Winkelwerte  $x$  unter  $360^\circ$ .

### b) Veranschaulichung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis

Im Einheitskreis ( $r = 1$ ) stellt die Ordinate des laufenden Punktes  $P$  den Sinus, die Abszisse den Kosinus des Winkels  $x$  dar (Abb. 39).

Tangens und Kotangens veranschaulicht man am Einheitskreis als Abschnitte auf den Tangenten in  $A$  bzw.  $B$  (Abb. 40 a und b). Liegt der Winkel  $x$  im

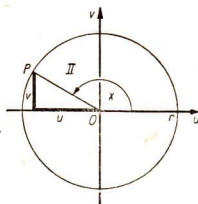


Abb. 38a

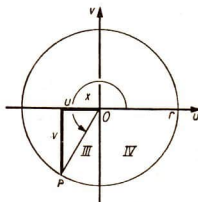


Abb. 38b

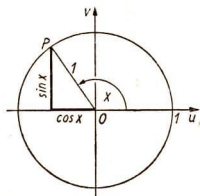


Abb. 39

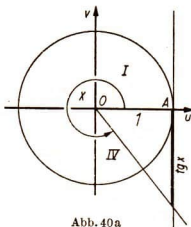


Abb. 40a

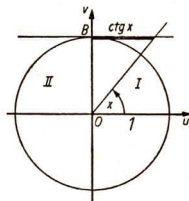


Abb. 40b



II. oder III. Quadranten, so schneidet der bewegliche Schenkel des Winkels  $x$  die Tangente in  $A$  nicht. Der den Tangens des Winkels  $x$  darstellende Abschnitt wird in diesem Fall von der Verlängerung des beweglichen Schenkels über den Scheitel  $O$  hinaus gebildet (Abb. 41). Dasselbe gilt für den Kotangens im III. und IV. Quadranten in bezug auf die Tangente in  $B$  (Abb. 42).

Welche Funktionswerte besitzen die trigonometrischen Funktionen für die Winkel  $x = 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ$  und  $360^\circ$ ? Für welche dieser Winkel ist ein Funktionswert der Tangens- und Kotangensfunktion nicht vorhanden?

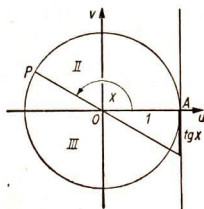


Abb. 41

### e) Beziehungen zwischen Funktionen von Winkeln verschiedener Quadranten (Quadrantenbeziehungen)

Es sei  $x$  ein spitzer Winkel. Dann liegen die Winkel  $(90^\circ + x)$  bzw.  $(180^\circ - x)$  im II.,  $(180^\circ + x)$  bzw.  $(270^\circ - x)$  im III. und  $(270^\circ + x)$  bzw.  $(360^\circ - x)$  im IV. Quadranten. Zwischen den Winkelfunktionen, die zu Winkeln in höheren Quadranten gehören, und den Winkelfunktionen des entsprechenden Winkels im ersten Quadranten gelten die folgenden Beziehungen:

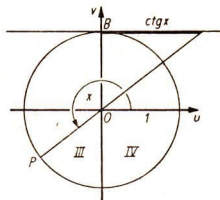


Abb. 42

$$\begin{array}{ll}
 \text{II. Quadrant} & \sin(90^\circ + x) = \cos x, & \text{tg}(90^\circ + x) = -\text{ctg } x, \\
 & \cos(90^\circ + x) = -\sin x, & \text{ctg}(90^\circ + x) = -\text{tg } x; \\
 & \sin(180^\circ - x) = \sin x, & \text{tg}(180^\circ - x) = -\text{tg } x, \\
 & \cos(180^\circ - x) = -\cos x, & \text{ctg}(180^\circ - x) = -\text{ctg } x;
 \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{III. Quadrant} & \sin(180^\circ + x) = -\sin x, & \text{tg}(180^\circ + x) = \text{tg } x, \\
 & \cos(180^\circ + x) = -\cos x, & \text{ctg}(180^\circ + x) = \text{ctg } x; \\
 & \sin(270^\circ - x) = -\cos x, & \text{tg}(270^\circ - x) = \text{ctg } x, \\
 & \cos(270^\circ - x) = -\sin x, & \text{ctg}(270^\circ - x) = \text{tg } x;
 \end{array} \quad (7)$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{IV. Quadrant} & \sin(270^\circ + x) = -\cos x, & \text{tg}(270^\circ + x) = -\text{ctg } x, \\
 & \cos(270^\circ + x) = \sin x, & \text{ctg}(270^\circ + x) = -\text{tg } x; \\
 & \sin(360^\circ - x) = -\sin x, & \text{tg}(360^\circ - x) = -\text{tg } x, \\
 & \cos(360^\circ - x) = \cos x, & \text{ctg}(360^\circ - x) = -\text{ctg } x.
 \end{array} \quad (8)$$

Beweise die Formeln geometrisch am Einheitskreis! Spiegele dazu den Winkel  $x$  des I. Quadranten der Reihe nach an der  $v$ -Achse, am Koordinatenursprung  $O$  und an der  $u$ -Achse! Führe diese geometrischen Transformationen durch Umklappen um die  $v$ - oder  $u$ -Achse bzw. durch Drehen um  $O$  praktisch durch!

Die Beziehungen (6) bis (8) führen die trigonometrischen Funktionen im II. bis IV. Quadranten auf die entsprechenden Funktionen im I. Quadranten zurück.

Beispiel für die Anwendung:

Es sei  $180^\circ < x < 270^\circ$ .

Man setzt  $x = 180^\circ + \bar{x}$ , ( $0^\circ < \bar{x} < 90^\circ$ ; für  $\bar{x}$  sprich:  $x$  quer).

Dann ist

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(180^\circ + \bar{x}) = -\sin \bar{x}; \\ \cos x &= \cos(180^\circ + \bar{x}) = -\cos \bar{x}; \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(180^\circ + \bar{x}) = +\operatorname{tg} \bar{x}; \\ \operatorname{ctg} x &= \operatorname{ctg}(180^\circ + \bar{x}) = +\operatorname{ctg} \bar{x}. \end{aligned}$$

Bei gegebener Funktion eines Winkels  $x$  und bekanntem Funktionswert findet man für den Winkel  $x$  stets zwei Lösungen.

Beispiel:  $\operatorname{tg} x = +0,8391$ .

Der Winkel  $x$  liegt im I. oder III. Quadranten.

Es ist  $x_1 = 40^\circ$  und  $x_2 = 220^\circ$ .

#### d) Die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel

Legt man auf dem Radius  $OP = r$  des Kreises um den Koordinatenanfangspunkt  $O$  als Richtung die von  $O$  nach  $P$  fest, so entsteht die gerichtete Strecke  $\overrightarrow{OP}$ , die man als Radiusvektor  $\mathbf{r}$  bezeichnet (Abb. 43). Die Richtung des Radiusvektors  $\mathbf{r}$  ist durch den Richtungswinkel  $x$  bestimmt, seine Länge durch die Strecke  $OP$ .

Wenn sich der Radiusvektor um seinen Anfangspunkt  $O$  dreht, so kann diese Drehung — je nach der Drehrichtung — im positiven oder im negativen Drehsinn erfolgen. Eine Drehung im positiven Sinne erfolgt gegen die Bewegung des Uhrzeigers (Gegenzeigerdrehung), eine Drehung im negativen Sinne mit der Uhrzeigerbewegung (Zeigerdrehung).

Dreht sich der Radiusvektor im positiven Sinne, so entstehen positive Winkel (z. B.  $+120^\circ$ ), im anderen Falle negative Winkel (z. B.  $-120^\circ$ , Abb. 44).

Für Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  werden die trigonometrischen Funktionen durch die Erklärungen 5 bis 8 definiert. — Die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel lassen sich auf die entsprechenden Funktionen positiver Winkel zurückführen. Es ist

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, & \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x, \\ \cos(-x) &= \cos x, & \operatorname{ctg}(-x) &= -\operatorname{ctg} x. \end{aligned} \quad (9)$$

Beweise die Quadrantenbeziehungen (9) geometrisch für spitze, stumpfe und überstumpfe negative Winkel am Einheitskreis! — Gelten die Formeln (1) bis (8) für negative Winkel?

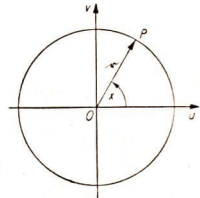


Abb. 43

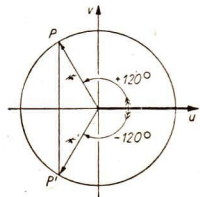


Abb. 44

Funktionen  $f(x)$ , die ihren Wert nicht ändern, wenn die unabhängige Veränderliche das Vorzeichen wechselt, heißen gerade Funktionen, Funktionen, die dabei das Vorzeichen wechseln, dagegen ungerade Funktionen.

Gerade Funktionen:

$$f(-x) = f(x).$$

Ungerade Funktionen:

$$f(-x) = -f(x).$$

Die Kosinusfunktion  $y = f(x) = \cos x$  ist eine gerade Funktion, die Sinusfunktion  $y = f(x) = \sin x$  dagegen eine ungerade Funktion. Deute diese Funktionseigenschaft geometrisch! Welche Symmetrieverhältnisse besitzt die Kosinuskurve  $y = \cos x$  zur  $y$ -Achse, welche die Sinuskurve  $y = \sin x$  zum Nullpunkt  $(0; 0)$ ? Zu welcher Funktionsgruppe gehören die Tangens- und die Kotangensfunktion?

### e) Positive und negative Winkel mit Beträgen über $360^\circ$

Dreht sich der Radiusvektor  $r$  im positiven oder im negativen Sinne, so werden nach einem vollen Umlauf Winkel erzeugt, deren absoluter Betrag größer als  $360^\circ$  ist, nach zwei Umläufen Winkel, deren absoluter Betrag größer als  $720^\circ$  ist, usw. (Abb. 45a, b).

Winkel, die sich um ganzzahlige Vielfache von  $360^\circ$  unterscheiden, heißen äquivalent.

Beispiel:

...;  $-1020^\circ$ ;  $-660^\circ$ ;  $-300^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $420^\circ$ ;  $780^\circ$ ; ...

Bezeichnet man den zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  liegenden Winkel  $\bar{x}$  als den Hauptwert, so läßt sich jeder beliebige Winkel durch die Gleichung darstellen

$$x = \bar{x} + k \cdot 360^\circ,$$

wobei  $k$  eine (positive oder negative) ganze Zahl ist.

Beispiel: Wenn  $x = -855^\circ$  ist, so ist

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -855^\circ - (-3) \cdot 360^\circ \\ &= -855^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 225^\circ. \end{aligned}$$

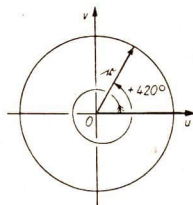


Abb. 45a

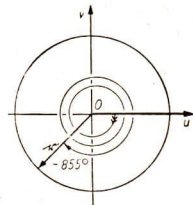


Abb. 45b

### f) Die trigonometrischen Funktionen für Winkel mit Beträgen über $360^\circ$

Die Erklärungen 5 bis 8 der trigonometrischen Funktionen dehnt man auch auf Winkel  $x$  über  $360^\circ$  aus. Dreht sich der Radiusvektor von einer beliebigen Ausgangslage aus im Einheitskreis, so hat sein Endpunkt  $P$  nach einem, zwei, drei usw. vollen Umläufen dieselben rechtwinkligen Koordinaten wie in dieser Ausgangslage. Daher haben die trigonometrischen Funktionen in den Intervallen<sup>1)</sup>  $360^\circ \dots 720^\circ$ ;  $720^\circ \dots 1080^\circ$  usw. dieselben Werte wie im Intervall  $0^\circ \dots 360^\circ$ . Entsprechendes gilt für negative Winkel. Veranschauliche einige Zahlenbeispiele durch geeignete Abbildungen!

1) intervallum (lat.) heißt Zwischenraum, Teilbereich.



Die trigonometrischen Funktionen eines beliebigen Winkels  $x$  lassen sich auf dieselbe Funktion des Hauptwertes  $\bar{x}$  des Winkels zurückführen. Es ist

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(\bar{x} + k \cdot 360^\circ) = \sin \bar{x}, \\ \cos x &= \cos(\bar{x} + k \cdot 360^\circ) = \cos \bar{x}, \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(\bar{x} + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{tg} \bar{x}, \\ \operatorname{ctg} x &= \operatorname{ctg}(\bar{x} + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{ctg} \bar{x},\end{aligned}$$

wobei  $k$  eine (positive oder negative) ganze Zahl ist. — Zeige, daß die Formeln (1) bis (4) auf Seite 15 für beliebige Winkel gelten!

Bei gegebener Funktion  $f(x)$ , ( $f = \sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$ ), und bekanntem Funktionswert findet man für den Winkel  $x$  zunächst die beiden Werte  $\bar{x}_1$  und  $\bar{x}_2$  zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  und durch Addition bzw. Subtraktion der ganzzahligen Vielfachen von  $360^\circ$  die äquivalenten Werte. Zu der gegebenen Funktion  $f(x)$  erhält man also die Winkel

$$\bar{x}_1 + k \cdot 360^\circ \text{ und } \bar{x}_2 + k \cdot 360^\circ, (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

Beispiele für die Anwendung:

$$1. \sin 3520^\circ = \sin(3520^\circ - 9 \cdot 360^\circ) = \sin 280^\circ = -\sin 80^\circ = -0,9848.$$

$$2. \operatorname{tg} x = 2,565; \bar{x}_1 = 68,7^\circ, \bar{x}_2 = 248,7^\circ.$$

Allgemeine Lösung:  $68,7^\circ + k \cdot 360^\circ$  und  $248,7^\circ + k \cdot 360^\circ$ , ( $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ),  
oder

$$68,7^\circ + k' \cdot 180^\circ, (k' = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

## Aufgaben

### 1. Erweiterung des Erklärungsgebietes

1. Beweise, daß die Formeln (1) bis (4) auf Seite 15 auch für die erweiterten Erklärungen der trigonometrischen Funktionen gelten!
2. In welchen Fällen sind beim praktischen Rechnen die von  $90^\circ$  bzw.  $270^\circ$  ausgehenden Quadrantenbeziehungen der Formeln (6) bis (8) den von  $180^\circ$  und  $360^\circ$  ausgehenden vorzuziehen? Benutze sie gegebenenfalls bei den späteren Aufgaben!
3. An die Stelle der (geometrischen) Erweiterung des Geltungsbereichs der trigonometrischen Funktionen nach den Erklärungen 5 bis 8 kann man die folgende (analytische) Begriffserweiterung setzen:

Die Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x; & \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x; & \operatorname{ctg} 2x &= \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}\end{aligned}$$

sind unter der Bedingung  $2x < 90^\circ$ , also  $x < 45^\circ$  bewiesen (vgl. Aufgaben 17 und 18 auf Seite 17). Nimmt man an, daß die vier Formeln auch für Winkel  $x$  zwischen  $45^\circ$  und  $90^\circ$  einen Sinn haben, so lassen sich die Werte der trigonometrischen Funktionen im II. Quadranten berechnen. Man sagt, man habe die Funktionen, die zunächst nur im Intervall  $0^\circ \dots 90^\circ$  erklärt waren, in

das Intervall  $90^\circ \dots 180^\circ$  analytisch fortgesetzt. Durch analytische Fortsetzung mit Hilfe der Doppelwinkelformeln gewinnt man schließlich weiter den Bereich  $180^\circ \dots 360^\circ$ .

a) Berechne mit den Doppelwinkelformeln, soweit möglich, die trigonometrischen Funktionen der Winkel  $120^\circ$ ;  $180^\circ$ ;  $150^\circ$  und  $100^\circ$ !

Anleitung zum 3. Zahlenbeispiel: Berechne zuerst  $f(75^\circ)$  aus  $f(15^\circ)$  mit Hilfe der Formeln (5) auf Seite 15 (vgl. Aufgabe 20 auf Seite 17)!

b) Berechne ebenso aus den unter a) gefundenen Werten die trigonometrischen Funktionen der Winkel  $240^\circ$ ;  $300^\circ$  und  $200^\circ$ !

c) Beweise mit den Doppelwinkelformeln die Formeln (1) bis (4) für die durch analytische Fortsetzung gewonnenen Bereiche!

## II. Beziehungen zwischen Funktionen von Winkeln verschiedener Quadranten (Quadrantenbeziehungen)

### 4. Bestimme

- |                                   |                                  |                                     |                                      |                                       |
|-----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\sin 135^\circ$               | b) $\sin 97^\circ$               | c) $\sin 113,5^\circ$               | d) $\sin 147,87^\circ$               | e) $\sin 173^\circ 25'$               |
| f) $\cos 150^\circ$               | g) $\cos 101^\circ$              | h) $\cos 129,6^\circ$               | i) $\cos 177,13^\circ$               | k) $\cos 155^\circ 37'$               |
| l) $\operatorname{tg} 120^\circ$  | m) $\operatorname{tg} 91^\circ$  | n) $\operatorname{tg} 145,7^\circ$  | o) $\operatorname{tg} 154,41^\circ$  | p) $\operatorname{tg} 93^\circ 50'$   |
| q) $\operatorname{ctg} 110^\circ$ | r) $\operatorname{ctg} 96^\circ$ | s) $\operatorname{ctg} 164,8^\circ$ | t) $\operatorname{ctg} 135,23^\circ$ | u) $\operatorname{ctg} 152^\circ 30'$ |

### 5. Welche Werte besitzen die vier trigonometrischen Funktionen für die Winkel

- |                   |                   |                   |                   |                         |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|
| a) $0^\circ$      | b) $90^\circ$     | c) $180^\circ$    | d) $270^\circ$    | e) $360^\circ$          |
| f) $200^\circ$    | g) $194,5^\circ$  | h) $265,35^\circ$ | i) $298,46^\circ$ | k) $354,63^\circ$       |
| l) $211,49^\circ$ | m) $315,32^\circ$ | n) $244,66^\circ$ | o) $327,76^\circ$ | p) $300^\circ 23' 15''$ |

6. Suche, soweit möglich, die Logarithmen der Beträge der trigonometrischen Funktionen aus den Aufgaben 4 und 5 in der Tafel auf!

7. Bestimme die Winkel  $x$  zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  zu den folgenden Funktionswerten  $f(x)$ !

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin x$	0	1	-0,5	0,3746	-0,7314	0,1500	-0,0728
$\cos x$	0	1	-1	0,7071	-0,9336	0,2358	-0,7005
$\operatorname{tg} x$	0	1	2	-3	-0,4452	0,9387	-0,0120
$\operatorname{ctg} x$	0	1	-3	-16,50	0,1700	-1,319	-2,439

8. Bestimme zu den nachstehenden Logarithmen der trigonometrischen Funktionen die zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  liegenden Winkel  $x$ !

Bemerkung: Eine in zwei senkrechte Striche eingeschlossene Größe  $a$ , also  $|a|$ , (sprich entweder: absoluter Betrag von  $a$  oder: Betrag von  $a$  oder:  $a$  absolut), bedeutet denjenigen der beiden Werte  $+a$  und  $-a$ , der nicht negativ ist.

Bei den Aufgaben 8b, d, f, h sowie bei den Aufgaben 12b, d, f, h und 18b, d, f sind die Werte der trigonometrischen Funktionen, zu denen die Logarithmen bestimmt werden sollen, negativ. Da aber Logarithmen negativer Zahlen nicht existieren, sind die absoluten Beträge der betreffenden trigonometrischen Funktionen angegeben.

- |  |  |
|--|--|
| a) $\lg \sin x = 0,8810 - 1$ , ( $\sin x > 0$ );                           | b) $\lg  \sin x  = 0,9750 - 2$ , ( $\sin x < 0$ );                           |
| c) $\lg \cos x = 0,9996 - 1$ , ( $\cos x > 0$ );                           | d) $\lg  \cos x  = 0,3075 - 1$ , ( $\cos x < 0$ );                           |
| e) $\lg \operatorname{tg} x = 0,2764 - 1$ , ( $\operatorname{tg} x > 0$ ); | f) $\lg  \operatorname{tg} x  = 0,9000 - 2$ , ( $\operatorname{tg} x < 0$ ); |
| g) $\lg \operatorname{ctg} x = 0,7718$ , ( $\operatorname{ctg} x > 0$ );   | h) $\lg  \operatorname{ctg} x  = 1,2700$ , ( $\operatorname{ctg} x < 0$ ).   |

## III. Die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel

9. Bestimme die Werte aller trigonometrischen Funktionen der folgenden Winkel:

- a)  $-30^\circ$       b)  $-18^\circ$       c)  $-135^\circ$       d)  $-83,4^\circ$       e)  $-90,45^\circ$   
 f)  $-174,77^\circ$       g)  $-214,92^\circ$       h)  $-282^\circ 12' 38''$       i)  $-393,27^\circ$ !

10. Suche die Logarithmen der Beträge zu den Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens für die in Aufgabe 9a) bis i) angeführten Winkel auf!

11. Bestimme zu den folgenden Funktionswerten  $f(x)$  die zwischen  $0^\circ$  und  $-360^\circ$  liegenden negativen Winkel!

	a)	b)	c)		a)	b)	c)
$\sin x$	-0,4848	-0,9024	0,0820		$\operatorname{tg} x$	-0,3759	-0,9935
$\cos x$	0,9635	0,3704	-0,8671		$\operatorname{ctg} x$	-191,0	-1,333
							2,877
							0,0107

12. Bestimme zu den folgenden Logarithmen der vier trigonometrischen Funktionen sowohl die positiven als auch die negativen Winkel!

- a)  $\lg \sin x = 0.5717 - 1$ , ( $\sin x > 0$ );      b)  $\lg |\sin x| = 0.1718 - 1$ , ( $\sin x < 0$ );  
 c)  $\lg \cos x = 0.9970 - 2$ , ( $\cos x > 0$ );      d)  $\lg |\cos x| = 0.4237 - 1$ , ( $\cos x < 0$ );  
 e)  $\lg \operatorname{tg} x = 0.3393$ , ( $\operatorname{tg} x > 0$ );      f)  $\lg |\operatorname{tg} x| = 1.0763$ , ( $\operatorname{tg} x < 0$ );  
 g)  $\lg \operatorname{ctg} x = 0.6506 - 1$ , ( $\operatorname{ctg} x > 0$ );      h)  $\lg |\operatorname{ctg} x| = 0.8411 - 2$ , ( $\operatorname{ctg} x < 0$ ).

IV. Die trigonometrischen Funktionen für Winkel mit Beträgen über  $360^\circ$ 

13. Gib zu den nächstehenden Winkeln die folgenden drei äquivalenten Winkel bei positivem und negativem Drehsinn an:

- a)  $50^\circ$       b)  $175^\circ$       c)  $335^\circ$       d)  $117,5^\circ$       e)  $-221,68^\circ$ !

14. Wie groß ist der Hauptwert der Winkel

- a)  $1200^\circ$       b)  $5180^\circ$       c)  $-320^\circ$       d)  $-1755^\circ$       e)  $-615^\circ 23'$ ?

15. Bestimme die Funktionswerte

- a)  $\sin 383^\circ$       b)  $\sin 773,2^\circ$       c)  $\sin (-640,56^\circ)$       d)  $\sin (-3620,78^\circ)$   
 e)  $\cos 421^\circ$       f)  $\cos 1527,3^\circ$       g)  $\cos (-704,64^\circ)$       h)  $\cos (-1083,92^\circ)$   
 i)  $\operatorname{tg} 8000^\circ$       k)  $\operatorname{tg} (-444,7^\circ)$       l)  $\operatorname{ctg} 992,25^\circ$       m)  $\operatorname{ctg} (-524,44^\circ)$ !

16. Suche die Logarithmen der Beträge der Funktionen aus den Aufgaben 15 a) bis m) auf!

17. Stelle sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen allgemein dar! Gib die auf die gefundenen Hauptwerte im positiven und negativen Drehsinn folgenden drei äquivalenten Winkel an!

- a)  $\sin x = 0,3223$       b)  $\sin x = 0,8440$       c)  $\cos x = 0,9018$       d)  $\cos x = -0,1382$   
 e)  $\operatorname{tg} x = -1,0835$       f)  $\operatorname{tg} x = 0,9045$       g)  $\operatorname{ctg} x = 0,00524$       h)  $\operatorname{ctg} x = -0,4109$

18. Welche Winkel ergeben sich als allgemeine Lösung aus den nächstehenden Logarithmen der trigonometrischen Funktionen?

- a)  $\lg \sin x = 0.4328 - 1$ , ( $\sin x > 0$ );      b)  $\lg |\sin x| = 0.6743 - 1$ , ( $\sin x < 0$ );  
 c)  $\lg \cos x = 0.1873 - 1$ , ( $\cos x > 0$ );      d)  $\lg |\cos x| = 0.8591 - 1$ , ( $\cos x < 0$ );  
 e)  $\lg \operatorname{tg} x = 0.4711 - 1$ , ( $\operatorname{tg} x > 0$ );      f)  $\lg |\operatorname{ctg} x| = 0.7220 - 2$ , ( $\operatorname{ctg} x < 0$ ).

## 6. Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks

Bisher haben wir die trigonometrische Methode auf Berechnungen im rechtwinkligen und im gleichschenkligen Dreieck angewandt. Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, die Berechnungen auch auf das schiefwinklige Dreieck auszudehnen.

### a) Der Sinussatz

Die Höhe  $h_c$  des Dreiecks  $ABC$  (Abb. 46a) läßt sich auf doppelte Weise ausdrücken, nämlich durch

$$h_c = a \sin \beta$$

und durch

$$h_c = b \sin \alpha.$$

Setzt man die Ausdrücke für  $h_c$  einander gleich, so ergibt sich

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

oder, als Proportion geschrieben,

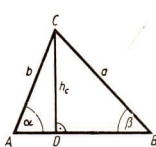


Abb. 46a

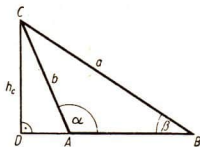


Abb. 46 b

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (10a)$$

Entsprechend findet man, wenn man die Höhe  $h_a$  bzw.  $h_b$  in das Dreieck einzeichnet,

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad (10b)$$

und

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}. \quad (10c)$$

Die Gleichungen (10b) und (10c) kann man auch aus (10a) erhalten, wenn man die Stücke am Dreieck zyklisch vertauscht. Man ordnet die Seiten und Winkel des Dreiecks auf einem Kreis so an, wie sie bei dem Umlaufen des Dreiecks aufeinander folgen (Abb. 47). Für jeden lateinischen bzw. griechischen Buchstaben der Formel (10a) hat man den lateinischen bzw. griechischen Buchstaben zu setzen, der auf ihn folgt, wenn man den Kreis im positiven Drehsinn durchläuft.

Ist einer der Dreieckswinkel stumpf, beispielsweise  $\alpha$ , so lautet die entsprechende Gleichung für die Höhe (Abb. 46 b)

$$h_c = b \sin (180^\circ - \alpha) = b \sin \alpha.$$

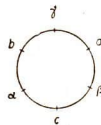


Abb. 47

Es ergibt sich wieder die Gleichung (10a).

Die Formeln (10) stellen den **Sinussatz** dar. Sprich den Satz in Worten aus! Man kann den Sinussatz auch als fortlaufende Proportion schreiben:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma. \quad (10d)$$

Da der Sinus im I. und II. Quadranten positiv ist, hat man bei der Berechnung eines Dreieckswinkels nach dem Sinussatz die Doppeldeutigkeit des Winkels zu berücksichtigen.

## b) Der Kosinussatz

Im Dreieck  $ABC$  (Abb. 48 a) gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$

und

$$h_c^2 = a^2 - p^2.$$

Gleichsetzen und Umdordnen ergibt

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2$$

oder, da  $p = c - q$  ist,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq.$$

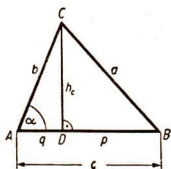


Abb. 48a

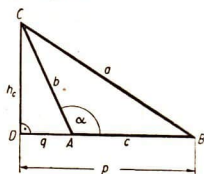


Abb. 48b

Der Höhenabschnitt  $q$  läßt sich durch eine Seite und eine Winkelfunktion ausdrücken:

$$q = b \cos \alpha.$$

Setzt man diesen Ausdruck für  $q$  in die vorige Formel ein, so erhält man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (11a)$$

Durch zyklische Vertauschung der Stücke am Dreieck ergeben sich die beiden weiteren Formeln

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad (11b)$$

und

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (11c)$$

Ist  $\alpha$  stumpf, so wird (Abb. 48b)

$$p = c + q,$$

und man berechnet

$$q = b \cos (180^\circ - \alpha) = -b \cos \alpha.$$

Es ergibt sich wie vorher die Gleichung (11a).

Die drei Formeln (11) stellen den **Kosinussatz** dar. Sprich seinen Inhalt in Worten aus!

Da der Kosinus im I. und II. Quadranten verschiedenes Vorzeichen hat, ist die Berechnung eines Dreieckswinkels nach dem Kosinussatz eindeutig.

Drückt man in der Gleichung

$$c = p + q$$

$p$  und  $q$  durch Seiten und Winkel aus, so erhält man

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha. \quad (12)$$

Die Gleichung (12) heißt der **Projektionssatz**. Gib die entsprechenden Formeln in bezug auf die Seiten  $a$  und  $b$  an!

## c) Übersicht zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks mit dem Sinus- und Kosinussatz

Mit Hilfe des Sinus- und des Kosinussatzes lassen sich alle Stücke eines Dreiecks berechnen, wenn drei voneinander unabhängige Stücke gegeben sind. Die folgende Übersicht zeigt die Verwendung der beiden Sätze:



Gegebene Stücke	Lösung
1. 1 Seite, 2 Winkel (wsw)	Sinussatz
2. 2 Seiten, 1 Winkel	Kosinussatz oder Kosinus- und Sinussatz Sinussatz
a) eingeschlossener Winkel (sws) b) gegenüberliegender Winkel (ssw)	
3. 3 Seiten (sss)	Kosinussatz oder Kosinus- und Sinussatz

Bei der Aufgabe 2 b) läßt sich nach dem Anwenden des Sinussatzes der Projektionssatz benutzen.

Suche bei jeder Aufgabe zunächst mit dem Sinussatz auszukommen und ziehe erst, wenn dies nicht zum Ziele führt, den Kosinussatz heran!

Bei jeder Aufgabe muß untersucht werden, ob und wieviele Lösungen vorhanden sind (Determination). Die Determination wird erleichtert, wenn man neben dem Rechengang die geometrische Konstruktion ausführt.

Die Berechnung der unbekanntenen Stücke des schiefwinkligen Dreiecks geschieht in der Regel logarithmisch. Wird dabei der Kosinussatz verwendet, so muß das logarithmische Rechnen unterbrochen werden. Bei Aufgaben der Gruppe 2 a) kann man die Anwendung des Kosinussatzes vermeiden, wenn man das Dreieck durch eine Höhe in rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

Führe die Rechnung allgemein durch!

#### d) Flächeninhalt eines Dreiecks

Ersetzt man in der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks,

$$F = \frac{1}{2} c h_c,$$

die Höhe  $h_c$  mit Hilfe der Beziehung  $h_c = b \sin \alpha$ , so erhält man

$$F = \frac{1}{2} b c \sin \alpha. \quad (13)$$

Leite aus der Formel die zwei weiteren durch zyklische Vertauschung der Stücke am Dreieck ab! Sprich die Formeln in Worten aus und gib ihre Bedeutung an!

#### e) Weitere Methoden zur Dreiecksberechnung

##### 1. Mollweidesche Gleichungen

Auf der Verlängerung der Seite  $BC$  des Dreiecks  $ABC$  trägt man  $b$  von  $C$  bis  $D$  ab, so daß  $BD = a + b$  ist (Abb. 49). Das Dreieck  $ACD$  ist gleichschenkelig.

Nach dem Satz über die Außenwinkel im Dreieck findet man

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = \frac{\gamma}{2}.$$

Weiter ist im Dreieck  $ABD$

$$\sphericalangle BAD = \alpha + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

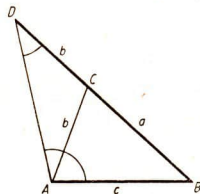


Abb. 49

Wendet man auf das Dreieck  $ABD$  den Sinussatz an, so erhält man

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Auf der Seite  $BC$  des Dreiecks  $ABC$  trägt man  $b$  von  $C$  bis  $E$  ab, so daß  $BE = a - b$  ist (Abb. 50). Das Dreieck  $AEC$  ist gleichschenkelig, und es gilt

$$\sphericalangle CAE = \sphericalangle AEC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Weiter ist im Dreieck  $ABE$

$$\sphericalangle EAB = \alpha - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

und

$$\sphericalangle AEB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Wendet man auf das Dreieck  $ABE$  den Sinussatz an, so erhält man

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Die Formeln

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} \quad (14)$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}} \quad (15)$$

heißen die **Mollweideschen**<sup>1)</sup> Gleichungen. Gib durch zyklische Vertauschung der Seiten bzw. Winkel die entsprechenden anderen Formeln an!

## 2. Tangensatz

Dividiert man Gleichung (14) durch Gleichung (15), so ergibt sich

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}. \quad (16)$$

Gib durch zyklische Vertauschung der Seiten bzw. Winkel die entsprechenden anderen Formeln an! Man bezeichnet die Formeln als den **Tangensatz**.

1) Karl Mollweide, Mathematiker und Astronom, 1774—1825, Leipzig

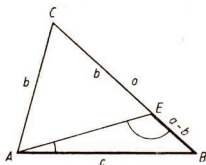


Abb. 50

**3. Halbwinkelsatz**

Quadriert man die Gleichungen (14) und (15) und addiert sie, so ergibt sich, weil  $\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1$  ist,

$$(a+b)^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + (a-b)^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = c^2.$$

In dieser Gleichung ersetzt man  $\sin^2 \frac{\gamma}{2}$  und  $\cos^2 \frac{\gamma}{2}$  mit Hilfe der Formeln

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} \quad \text{bzw.} \quad \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} \quad (\text{vgl. Aufgabe 13 auf Seite 17}) \quad \text{und erh\u00e4lt}$$

$$(a+b)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + (a-b)^2 = c^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}\right).$$

Daraus findet man

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2 - c^2} = \frac{[c + (a-b)] \cdot [c - (a-b)]}{[(a+b) + c] \cdot [(a+b) - c]}.$$

Setzt man  $a + b + c = 2s$ , so l\u00e4\u00dft sich die rechte Seite darstellen als

$$\frac{(2s-2b)(2s-2a)}{2s(2s-2c)} = \frac{(s-b)(s-a)}{s(s-c)},$$

und man erh\u00e4lt schlie\u00dflich

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \quad (17)$$

Gib durch zyklische Vertauschung der Seiten bzw. Winkel die entsprechenden Formeln f\u00fcr  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  und  $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$  an! Man bezeichnet die Formeln als den **Halbwinkelsatz**.

Die in diesem Abschnitt aufgestellten Mollweideschen Gleichungen und der Halbwinkelsatz erleichtern die logarithmische Berechnung der Winkel des schiefwinkligen Dreiecks, wenn die drei Seiten gegeben sind. Dagegen ist die Anwendung des Tangenssatzes zu empfehlen, wenn zwei Seiten eines Dreiecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt sind. Der f\u00fcr logarithmische Berechnungen wenig geeignete Kosinussatz wird damit entbehrlich.

**Aufgaben****I. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks mit Sinus- und Kosinussatz**

1. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel und kontrolliere die Ergebnisse, gegebenenfalls ma\u00dfst\u00e4blich verkleinert, durch die Konstruktion!

a)  $a = 4 \text{ cm}$   
 $\beta = 43^\circ$   
 $\gamma = 55^\circ$

b)  $a = 5,6 \text{ cm}$   
 $\beta = 83,8^\circ$   
 $\gamma = 26,5^\circ$

e)  $c = 1,46 \text{ m}$   
 $\alpha = 20,2^\circ$   
 $\beta = 74,3^\circ$

d)  $b = 8,5 \text{ cm}$   
 $\beta = 44,2^\circ$   
 $\gamma = 54,5^\circ$

e)  $c = 121,56 \text{ m}$   
 $\beta = 13,47^\circ$   
 $\gamma = 101,25^\circ$

f)  $b = 2,389 \text{ km}$   
 $\alpha = 39^\circ 17'$   
 $\beta = 68^\circ 28'$

g)  $a = 44,8 \text{ cm}$   
 $\alpha = 59^\circ 17'$   
 $\beta = 41^\circ 18'$

h)  $c = 64,9 \text{ m}$   
 $\alpha = 42^\circ 43'$   
 $\gamma = 102^\circ 19'$

2. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel und unterscheide, ob der gegebene Winkel der größeren oder der kleineren Seite gegenüberliegt!

a) $b = 3,8 \text{ cm}$ $c = 4,5 \text{ cm}$ $\gamma = 53,6^\circ$	b) $a = 35,75 \text{ m}$ $c = 26,48 \text{ m}$ $\alpha = 93,57^\circ$	c) $a = 7,0 \text{ cm}$ $b = 5,8 \text{ cm}$ $\beta = 43,7^\circ$	d) $a = 32,3 \text{ cm}$ $c = 36,6 \text{ cm}$ $\alpha = 55,7^\circ$
e) $a = 12,15 \text{ m}$ $b = 27,83 \text{ m}$ $\beta = 109,24^\circ$	f) $b = 4,3 \text{ cm}$ $c = 4,6 \text{ cm}$ $\gamma = 20^\circ 35'$	g) $a = 30,4 \text{ cm}$ $c = 27,8 \text{ cm}$ $\alpha = 67^\circ 23'$	h) $b = 24,9 \text{ m}$ $c = 17,2 \text{ m}$ $\beta = 117^\circ 4'$

Bei Dreiecksberechnungen erleichtert man sich die Rechenarbeit durch Verwendung eines Rechenschemas etwa nach folgendem Muster:

Dreiecksstücke		Formeln und Hauptrechnung	Logarithmische Nebenrechnung		
			num	lg	
Gegeben:	$a$ 10,32 m	$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$	8,48	0,9284	+
	$b$ 8,48 m		$\sin 65,05^\circ$	0,9575 — 1	
Gefunden:	$\alpha$ 65,05°	$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$	Zähler		—
	$\beta$		10,32		
	$\gamma$	180,00°	$\sin \beta$		
	$c$	$\alpha$ —	10,32		+
		$\beta$ —	$\sin \gamma$		
		$\gamma$	Zähler		—
			$\sin 65,05^\circ$		
			$c$		

Übertrage das Schema in das Heft und führe die Berechnung aus!

8. Lege ein Rechenschema nach Aufgabe 2 an und berechne die fehlenden Seiten und Winkel!

a) $a = 6,1 \text{ cm}$ $c = 4,7 \text{ cm}$ $\beta = 63,2^\circ$	b) $a = 123,5 \text{ m}$ $b = 134,2 \text{ m}$ $\gamma = 102,16^\circ$	c) $b = 17,18 \text{ m}$ $c = 13,85 \text{ m}$ $\alpha = 74,32^\circ$	d) $a = 245,9 \text{ m}$ $b = 392,5 \text{ m}$ $\gamma = 47^\circ 43'$
---	--	---	--

- 4 Berechne die Dreieckswinkel!

a) $a = 5,38 \text{ m}$ $b = 1,97 \text{ m}$ $c = 4,75 \text{ m}$	b) $a = 2,458 \text{ km}$ $b = 3,019 \text{ km}$ $c = 1,389 \text{ km}$	c) $a = 27,18 \text{ m}$ $b = 33,88 \text{ m}$ $c = 35,03 \text{ m}$	d) $a = 8,754 \text{ km}$ $b = 6,672 \text{ km}$ $c = 8,386 \text{ km}$
---	---	--	---

5. Beweise mit den Mitteln der Trigonometrie, daß die Winkelhalbierende im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten teilt (Lehrsatz des Apollonius; vgl. Lehrbuch der Mathematik für das 9. Schuljahr, Seite 177, Aufgabe 21)!

## II. Flächeninhalt eines Dreiecks

6. Leite die Formel

$$F = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}$$

für den Flächeninhalt eines Dreiecks ab! Wie heißen die Gleichungen, in denen die Seite  $a$  bzw.  $b$  verwendet wird? Sprich die Formeln in Worten aus und gib ihre Bedeutung an!

- 4 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, wenn die folgenden Stücke gegeben sind:

a) $a = 8,7 \text{ cm}$ $b = 7,1 \text{ cm}$ $\gamma = 44,6^\circ$	b) $a = 52,85 \text{ cm}$ $c = 75,23 \text{ cm}$ $\beta = 56,91^\circ$	c) $a = 34,76 \text{ m}$ $\beta = 59^\circ 10'$ $\gamma = 79^\circ 33'$	d) $b = 4,475 \text{ km}$ $\beta = 59,27^\circ$ $\gamma = 41,31^\circ$
--	--	---	--

8. Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke in den Aufgaben 2 a) bis d)!
9. Stelle die Dreiecksseiten durch den Umkreisradius  $r$  und den Sinus des gegenüberliegenden Winkels dar! Leite aus dem gefundenen Gleichungssystem den Sinussatz ab! Welches ist der Proportionalitätsfaktor im Sinussatz?  
Berechne die Seiten des Dreiecks, wenn  $\alpha = 81,91^\circ$ ,  $\beta = 41,54^\circ$  und  $r = 258,4$  cm gegeben sind!
10. Beweise, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks gegeben ist durch

$$F = 2 r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

und berechne aus den Winkeln  $\alpha = 56,79^\circ$  und  $\beta = 62,89^\circ$  sowie dem Umkreisradius  $r = 12$  cm den Flächeninhalt des Dreiecks!

11. Warum können die Strecken  $a = 8$  cm,  $b = 5$  cm und der Flächeninhalt  $F = 22$  cm<sup>2</sup> nicht Bestimmungsstücke eines Dreiecks sein?
- a) Begründe geometrisch, daß dies nicht möglich ist! — Anleitung: Untersuche die funktionale Abhängigkeit des Flächeninhaltes vom Winkel  $\gamma$ , wenn dieser von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  zunimmt!
- b) Wie zeigt sich beim trigonometrischen Lösungsverfahren, daß die Aufgabe keine Lösung hat?

### III. Weitere Methoden zur Dreiecksberechnung

12. Beweise an Hand von Abb. 51 a) die Mollweideschen Gleichungen, b) den Tangenssatz (Gaußscher Beweis)!

Anleitung:

- a) In Abb. 51 sind die Hilfsdreiecke  $ABD$  mit  $a+b$  und  $ABE$  mit  $a-b$  gezeichnet. Beweise, daß  $\sphericalangle DAE = R$ ,

$$\sphericalangle ADE = \frac{\gamma}{2}, \quad \sphericalangle EAB = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sphericalangle AEB = 2R - \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ ist!}$$

- b) Von  $B$  ist das Lot auf die Verlängerung von  $DA$  gefällt.

$$\text{Beweise, daß } \sphericalangle DBF = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \sphericalangle ABF = \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ ist!}$$

Gib  $\text{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$  und  $\text{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$  durch Verhältnisse von Strecken an und benutze weiter den Strahlensatz (Scheitel  $D$ )!

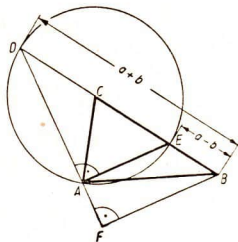


Abb. 51

13. Berechne die Seiten und Winkel des Dreiecks, von dem die folgenden Stücke gegeben sind!

- |   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| a) $a + b = 15,6$ cm<br>$\alpha = 78,1^\circ$<br>$\beta = 54,9^\circ$ | b) $b - c = 22,96$ m<br>$\alpha = 36,15^\circ$<br>$\beta = 113,32^\circ$ | c) $a = 25,7$ cm<br>$c = 18,3$ cm<br>$\beta = 45,5^\circ$                | d) $b = 32,8$ cm<br>$c = 36,4$ cm<br>$\alpha = 59,75^\circ$   |
| e) $b = 9,4$ cm<br>$a + c = 15,3$ cm<br>$\beta = 72,3^\circ$          | f) $b = 319,5$ m<br>$c - a = 48,2$ m<br>$\gamma - \alpha = 7,27^\circ$   | g) $a - b = 6,64$ cm<br>$\alpha = 52^\circ 8'$<br>$\beta = 47^\circ 39'$ | h) $b + c = 26,5$ cm<br>$r = 8$ cm<br>$\alpha = 66^\circ 48'$ |

14. Löse die Aufgaben 3 a) bis d) mit dem Tangenssatz! Vergleiche dieses Verfahren mit der Lösung durch den Kosinussatz!

15. Berechne die unbekannt Seiten und Winkel des Dreiecks, von dem folgende Bestimmungsstücke gegeben sind!

- |   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| a) $a = 3,2$ cm<br>$b = 32,5$ cm<br>$F = 398,1$ cm <sup>2</sup> | b) $b = 56,46$ m<br>$\gamma = 41,1^\circ$<br>$F = 511,8$ m <sup>2</sup> | c) $F = 8840$ cm <sup>2</sup><br>$\alpha = 76^\circ 12,3'$<br>$\beta = 83^\circ 17,9'$ | d) $a = 44,12$ cm<br>$b = 64,88$ cm<br>$r = 33,77$ cm |
|---|---|--|---|



e) $b = 85,15 \text{ m}$ $\alpha = 40,03^\circ$ $r = 49,14 \text{ m}$	f) $\alpha = 96,41^\circ$ $\beta = 26,33^\circ$ $r = 8,75 \text{ cm}$	g) $b = 28,17 \text{ cm}$ $c = 26,32 \text{ cm}$ $s_b = 26,98 \text{ cm}$	h) $b = 6,257 \text{ km}$ $w_\gamma = 4,319 \text{ km}$ $\alpha = 43^\circ 46' 46''$
i) $a = 3,104 \text{ km}$ $h_b = 3,029 \text{ km}$ $s_c = 2,621 \text{ km}$	k) $\alpha = 102,46^\circ$ $h_a = 2,804 \text{ km}$ $h_c = 3,666 \text{ km}$	l) $r = 13,48 \text{ cm}$ $h_a = 20,57 \text{ cm}$ $\alpha = 39,85^\circ$	m) $a = 41,05 \text{ m}$ $b = 47,35 \text{ m}$ $c = 52,81 \text{ m}$
n) $w_a = 32,2 \text{ cm}$ $c = 41,1 \text{ cm}$ $\alpha = 91,76^\circ$	o) $b = 28,04 \text{ m}$ $h_b = 23,97 \text{ m}$ $s_a = 26,17 \text{ m}$	p) $r = 87,28 \text{ m}$ $\alpha = 113^\circ 23' 25''$ $\beta = 19^\circ 19' 20''$	q) $F = 80,45 \text{ cm}^2$ $h_a = 11,9 \text{ cm}$ $\beta = 65^\circ 49,3'$

16. Leite den Halbwinkelsatz aus dem Kosinussatz ab!

Anleitung: Aus der Beziehung zwischen dem Kosinus des ganzen Winkels und dem Sinus und Kosinus des halben Winkels (Seite 17, Aufgabe 17) erhalten wir die Gleichungen

$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$  und  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ . Forme mit ihrer Hilfe den Kosinussatz um!

Es ergibt sich

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad a^2 = (b-c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

17. Beweise die Formel für den Inkreisradius  $\rho$ ,

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}!$$

Anleitung (Abb. 52):

- $s-a$ ,  $s-b$  und  $s-c$  sind die Abschnitte der Dreiecksseiten von den Ecken  $A$ ,  $B$  bzw.  $C$  bis zu den Berührungspunkten des Inkreises.
- $CG = CK = s$ . Beachte, daß  $AG = AH$ ,  $BK = BH$  und  $AH + HB = c$  ist!
- Stelle mit Hilfe des Strahlensatzes sowie der ähnlichen Dreiecke  $AOF$  und  $AGO_1$  zwei Gleichungen für  $\rho$  und  $\rho_1$  auf!

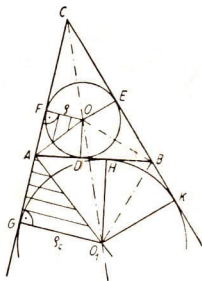


Abb. 52

18. Leite den Halbwinkelsatz aus Abb. 52 ab!

19. Beweise die Heronische Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}!$$

Sprich die Formel in Worten aus und gib ihre Bedeutung an!

20. Berechne den Radius des Inkreises der Dreiecke mit den Seiten

- a)  $a = 4,8 \text{ cm}$ ,  $b = 6,3 \text{ cm}$ ,  $c = 3,7 \text{ cm}$ ; b)  $a = 23,48 \text{ m}$ ,  $b = 44,44 \text{ m}$ ,  $c = 36,37 \text{ m}$

21. In einem schiefwinkligen Dreieck sind die Seiten  $a = 61,28 \text{ m}$ ,  $b = 98,64 \text{ m}$  und  $c = 143,19 \text{ m}$  gegeben. Berechne die Dreieckswinkel a) mit dem Kosinussatz, b) mit dem Halbwinkelsatz! Welches Verfahren ist in bezug auf die logarithmische Rechnung einfacher?

22. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten  $a = 2,7 \text{ cm}$ ,  $b = 4,3 \text{ cm}$  und  $c = 6,8 \text{ cm}$ ?

23. Löse die Aufgaben 4 a) bis d) mit dem Halbwinkelsatz!

24. Berechne Inkreisradius und Flächeninhalt des Dreiecks aus den in Aufgabe 15 m) gegebenen Stücken!

25. Stelle alle bisher bekannten Formeln für den Flächeninhalt des Dreiecks zusammen und gib ihre Bedeutung an!

## IV. Anwendungen zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks

## A. Aus der Nautik

Unter dem Kurs eines Schiffes versteht man seine Fahrtrichtung, angegeben durch den Winkel, den die Fahrtrichtung am Schiffsort mit der Nord-Süd-Richtung, dem Meridian, bildet.

26. Ein Schiff liegt auf Kurs

a) N  $45^\circ$  O; b) N  $45^\circ$  W; c) S  $60^\circ$  O; d) S  $60^\circ$  W; e) N  $30^\circ$  O; f) N  $30^\circ$  W.

In welcher Himmelsrichtung fährt das Schiff? Veranschauliche den Kurs geometrisch!

27. An der Küste eines Hafenortes ist eine horizontale Standlinie  $AB = 830$  m abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wird ein vorüberfahrendes Schiff zum gleichen Zeitpunkt angepeilt. Die Peilrichtungen bilden mit der Standlinie die Winkel  $\alpha = 86,40^\circ$  und  $\beta = 78,50^\circ$ .

a) In welcher Entfernung von  $A$  und  $B$  und in welchem Abstand von der Standlinie befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung?

b) Löse die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

28. Von einem Schiff aus peilt man gleichzeitig den Leuchtturm  $L$  in Richtung S  $55^\circ$  O und den Kirchturm  $K$  in Richtung S  $28^\circ$  W an. Die Entfernung  $KL$  beträgt nach der Seekarte  $33,2$  km und hat die Richtung N  $85^\circ$  O.

a) In welcher Entfernung von  $K$  und  $L$  befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung (in sm)?

b) Welchen Kurs muß das Schiff einhalten, wenn es im Abstand von  $4$  sm am Leuchtturm vorbeifahren soll?

c) Löse die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

Anleitung:  $1 \text{ sm} = 1,852 \text{ km}$ .

29. Ein Schiff steuert einen Kurs N  $45^\circ$  W bei einer Geschwindigkeit von  $9$  sm/h (oder  $9$  Knoten). Vom Schiffsort  $A$  aus peilt man einen Leuchtturm unter N  $23,4^\circ$  O. Nach  $90$  min peilt man vom Schiffsort  $B$  aus denselben Leuchtturm in Richtung N  $85,3^\circ$  O.

a) Wie weit ist das Schiff am Ort  $B$  vom Leuchtturm entfernt?

b) Welchen Abstand hat der Leuchtturm vom Schiffskurs?

c) Löse die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

## B. Aus der Physik und der Technik

30. Der Ausleger eines Krans (Abb. 53 a) hat gegen die Horizontalebene eine Neigung von  $40^\circ$ . Die Ebene der nach den vorderen, oberen Eckpunkten des Kranhauses führenden Spannseile ist gegen die Horizontalebene um  $25^\circ$  geneigt. Das Kranhaus ist  $4$  m hoch und  $4$  m breit (siehe Abb. 53 a, Seitenansicht; Abb. 53 b, Draufsicht).

a) Wie lang ist der Ausleger des Krans?

b) Wie lang sind die nach den vorderen Eckpunkten des Kranhauses führenden Spannseile?

c) Welchen Winkel schließen die Spannseile am Krankopf miteinander ein?

d) Welche Druckkräfte und welche Zugkräfte treten im Ausleger und in den Spannseilen auf, wenn der Kran am Auslegerkopf mit  $1000$  kp ( $2000$  kp;  $3000$  kp) belastet wird?

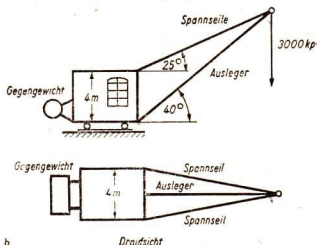


Abb. 53. Kran. a) Seitenansicht, b) Draufsicht

31. Die Schubstange eines Kurbelgetriebes ist 750 mm lang, der Kurbelradius ist  $r = 200$  mm (Abb. 54).

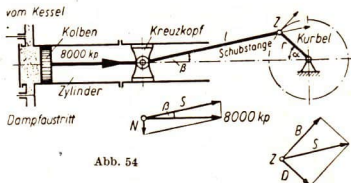


Abb. 54

- a) Wie groß ist die Ablenkung  $\beta$  der Schubstange, wenn die Kurbel sich um  $\alpha^\circ$  dreht?
- b) Berechne die zu den Winkeln  $\alpha = 0^\circ; 15^\circ; 30^\circ; \dots; 360^\circ$  gehörigen Winkel  $\beta$  und stelle  $\beta$  als Funktion von  $\alpha$  geometrisch dar!
- c) Für welche Drehwinkel  $\alpha$  erreicht die Ablenkung  $\beta$  der Schubstange ihre größten Werte?
- d) Welche Verschiebung des Pleuellkopfes entspricht den Kurbelstellungen  $\alpha = 0^\circ; 15^\circ; 30^\circ; \dots; 360^\circ$ ?
- e) Stelle die Verschiebung des Pleuellkopfes als Funktion des Winkels  $\alpha$  der Kurbeldrehung analytisch und geometrisch dar!
- f) Zerlege die von der Pleuellstange auf den Pleuellkopf übertragene Kraft  $P = 8000$  kp in ihre Komponenten  $S$  und  $N$ !  $S$  wirkt in Richtung der Schubstange,  $N$  senkrecht zur Gleitbahn des Pleuellkopfes bei den einzelnen Kurbelstellungen (siehe Abb. 54).
- g) Zerlege die auf den Pleuellzapfen  $Z$  wirkende Pleuellstangenkraft  $S$  in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten  $B$  und  $D$ !  $D$  stellt den Druck auf die Pleuellwelle dar,  $B$  ist die tangential zur Kreisbahn des Pleuellzapfens wirkende Bewegungskraft.
- h) Berechne die Größe der Komponentenkräfte  $S$  und  $B$  für die Kurbelstellungen  $\alpha = 0^\circ; 15^\circ; 30^\circ; \dots; 360^\circ$ !
- i) Stelle die Größe der treibenden Kraft  $B$  als Funktion des Winkels  $\alpha$  geometrisch dar!

32. In einem Bergwerk sind von demselben „Stoß“ (Wand) eines Schachtes aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende „Strecken“ (Gänge) vorgetrieben worden, deren Eingänge um 4 m voneinander entfernt liegen (Grundriß der Schachanlage siehe Abb. 55). Die erste Strecke ist 350 m lang und verläuft senkrecht zur Schachtwand. Die zweite Strecke ist 420 m lang und verläuft unter dem Winkel  $125^\circ$  gegen die Schachtwand. Die Enden beider Strecken sollen durch eine dritte Strecke miteinander verbunden werden.

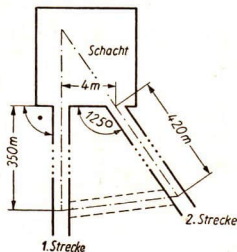


Abb. 55

Grundriß einer Schachanlage

- a) Wie lang wird die Verbindungsstrecke?
- b) In welchen Richtungen ist die Verbindungsstrecke von den beiden Streckenenden vorzutreiben, wenn sie von den Endpunkten aus gleichzeitig in Angriff genommen werden soll?
- c) Löse die Aufgabe geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!
33. Zwischen zwei durch einen Wald getrennten Orten  $A$  und  $B$  soll für eine Hochspannungsleitung eine Schneise geschlagen werden. Die Orte  $A$  und  $B$  liegen gleich hoch und sind von einem in gleicher Höhe liegenden Geländepunkt  $C$  aus beide sichtbar. Die Peilstrahlen  $CA$  und  $CB$  bilden miteinander den Winkel  $\gamma = 38,70^\circ$ . Die Entfernungen  $CA$  und  $CB$  werden zu 2,380 km und 3,450 km bestimmt.
- a) Wie groß ist die Horizontalentfernung  $AB$ ?
- b) In welchen Richtungen von  $A$  und von  $B$  aus ist die Schneise zu schlagen?
- c) Löse die Aufgabe geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

### III. Einführung in die Vektorrechnung

#### 7. Vektoren und Skalare

##### a) Begriffserklärungen

Im Abschnitt 5 hatten wir den Radiusvektor  $\vec{OP} = \vec{r}$  eingeführt. Der Vektor  $\vec{OP} = \vec{r}$  ist durch den Anfangspunkt  $O$ , die Länge  $OP$  und die Richtung der Strecke  $OP$ , d. h. durch den Richtungswinkel  $\varphi$ , ( $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ ), gegeben (Abb. 56). Man nennt die Länge  $OP$  den absoluten Betrag oder kurz den Betrag des Vektors  $\vec{r}$  und schreibt dafür  $|\vec{r}|$  oder  $r$ .

Vektoren werden mit deutschen, ihre Beträge mit den entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet. Gehen verschiedene Vektoren sämtlich von ein und demselben Punkte aus, so spricht man von Ortsvektoren. Man spricht von Radiusvektoren, wenn sie vom Koordinatenursprung ausgehen. Ein Beispiel eines Radiusvektors bildet der von der Sonne  $S$  nach der Erde  $E$  gezogene Leitstrahl (Abb. 57). In der Abbildung ist die elliptische Erdbahn näherungsweise als Kreis dargestellt. Der Durchmesser  $A_1A_2$  soll der großen Achse der Ellipse entsprechen, auf die man hier den Richtungswinkel  $\varphi$  bezieht.

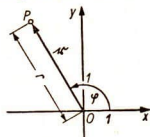


Abb. 56

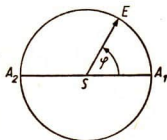


Abb. 57

Der Vektorbegriff soll nun allgemeiner gefaßt werden.

Man nennt jede gerichtete Strecke  $\vec{AB}$  mit dem Anfangspunkt  $A$  und dem Endpunkt  $B$  einen **Vektor**. Er läßt sich als Darstellung der Verschiebung auffassen, die den Punkt  $A$  in den Punkt  $B$  überführt (Abb. 58).

Wir betrachten zunächst nur Vektoren, die jeweils in der gleichen Ebene liegen. Liegt der Anfangspunkt eines Vektors  $\vec{v}$  nicht ausdrücklich fest, so kann man ihn parallel zu sich beliebig verschieben. Größe und Richtung ändern sich dabei nicht. Man spricht dann von **freien Vektoren** und unterscheidet diese von den **gebundenen Vektoren** mit festem Anfangspunkt (Abb. 59). Ein freier Vektor  $\vec{v}$  wird durch den Richtungswinkel  $\varphi$  und den Betrag  $v$  bestimmt.

Zwei freie Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  sind gleich, wenn sie nach Größe und Richtung dieselbe Verschiebung darstellen (Abb. 60).

Unter  $-\vec{v}$  versteht man den mit  $\vec{v}$  gleich langen, parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten Vektor (Abb. 61).

Allgemein versteht man unter Vektoren gerichtete Größen, die durch gerichtete Strecken dargestellt werden können. Beispiele für Vektoren aus der Physik (Mechanik) sind Kraft  $\vec{F}$  (oder auch  $\vec{R}$ ), Drehmoment  $\vec{M}$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , Beschleunigung  $\vec{b}$ .



Abb. 58

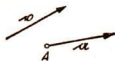


Abb. 59



Abb. 60



Abb. 61

Die Kraft  $\mathfrak{F}_1$ , deren Anfangspunkt mit dem Anfangspunkt einer zweiten Kraft,  $\mathfrak{F}_2$ , zusammenfällt, kann parallel zu sich selbst verschoben werden, bis ihr Anfangspunkt mit dem Endpunkt von  $\mathfrak{F}_2$  zusammenfällt (Kräfteparallelogramm). Entsprechendes gilt für  $\mathfrak{F}_2$ ,  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  sind freie Vektoren.

Eine Kraft, die an einem starren Körper angreift, kann nur in der Angriffslinie verschoben werden. Der Vektor  $r$ , der eine Kurbel darstellt, hat den Drehpunkt als festen Anfangspunkt.  $r$  ist ein gebundener Vektor.

Im Gegensatz zu Vektoren nennt man Zahlen, wie die Maßzahlen von Längen, von Winkeln u. dgl., Skalare<sup>1)</sup>. Man stellt Skalare, falls sie durch positive Zahlen gegeben sind, oft als Strecken dar, auf denen eine Richtung nicht festgelegt ist (Abb. 62). Sie lassen sich aber auch anders, beispielsweise durch Flächen, veranschaulichen.



Abb. 62

Allgemein versteht man unter Skalaren Größen ohne Richtung, zu deren vollständiger Bestimmung nur die Angabe einer einzigen Zahl notwendig ist.

Beispiele für Skalare aus der Physik sind Zeit  $t$ , Temperatur  $T$ , Dichte  $\rho$ , Arbeit  $A$ .

## b) Eindimensionale Vektoren

Eine gerichtete Strecke ist durch zwei Punkte, den Anfangspunkt und den Endpunkt, bestimmt. Man nennt derartige gerichtete Strecken, deren Anfangs- und Endpunkte sämtlich auf einer Geraden liegen, eindimensionale Vektoren. Im Gegensatz hierzu liegen bei zweidimensionalen Vektoren alle Anfangs- und Endpunkte in einer Ebene und bei dreidimensionalen Vektoren beliebig im Raume.

Ist die Gerade  $g$  orientiert, so kann die Richtung des eindimensionalen Vektors entweder gleich der Richtung der Geraden oder ihr entgegengesetzt sein. Ein freier eindimensionaler Vektor  $v$  ist daher durch seinen Betrag und durch sein Vorzeichen, das an die Stelle des Richtungswinkels tritt, bestimmt; das Pluszeichen entspricht der Richtung der orientierten Geraden, das Minuszeichen der entgegengesetzten Richtung (Abb. 63). In dem eindimensionalen  $x$ -Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt  $O$  auf einer Geraden, der  $x$ -Achse,



Abb. 63

kann man jedem Punkt  $A$  einen Vektor  $\vec{OA} = a$  zuordnen. Da aber jeder Punkt  $A$  der  $x$ -Achse das Bild einer reellen Zahl  $a$  ist, läßt sich eine reelle Zahl  $a$

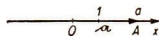


Abb. 64

auch durch den Vektor  $a = \vec{OA}$  auf der  $x$ -Achse (oder der Zahlengeraden) darstellen (Abb. 64). Einer Zahl  $a$  entspricht also der Punkt  $A$  und der Vektor  $a$ .

Die Maßzahl der Länge der Strecke  $OA$  ist gleich der Zahl  $a$ . Die Richtung des Vektors  $\vec{OA}$  entspricht dem Vorzeichen von  $a$ ;  $\vec{OA}$  weist in die Richtung der positiven oder negativen  $x$ -Achse, je nachdem  $a$  positiv oder negativ ist.

## c) Koordinaten und Komponenten eines zweidimensionalen Vektors

Man kann den Radiusvektor  $\vec{OP} = r$  durch die Koordinaten des Punktes  $P$  bestimmen. In bezug auf  $r$  nennt man diese die (rechtwinkligen) **Koordinaten des Radiusvektors**  $r$  und bezeichnet sie mit  $r_x$  und  $r_y$  (Abb. 65).

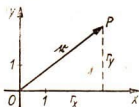


Abb. 65

1) scalae (lat.) heißt die Leiter.



Als reelle Zahlen lassen sich die Koordinaten  $r_x$  und  $r_y$  auf den Achsen auch als Vektoren darstellen. Man nennt sie die (rechtwinkligen) **Komponenten** des Vektors  $\vec{r}$  und bezeichnet sie mit  $\vec{r}_x$  und  $\vec{r}_y$  (Abb. 66). Die Komponenten sind die Projektionen des Vektors  $\vec{r}$  auf die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse. Sie sind ebenfalls geeignet, den Radiusvektor zu bestimmen. Verschiebt man die Komponente  $\vec{r}_y$  parallel zu sich selbst in die Lage  $P_x P$ , so gelangt man zum Endpunkt  $P$  des Radiusvektors  $\vec{r}$ , indem man  $\vec{r}_x$  und  $\vec{r}_y$  aneinandersetzt (Abb. 67).

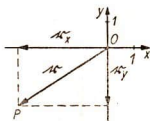


Abb. 66

Ein freier Vektor  $\vec{v}$  wird durch seine Komponenten  $v_x$  und  $v_y$  im rechtwinkligen Koordinatensystem bestimmt. Worin unterscheiden sich die Koordinaten eines Radiusvektors von den Beträgen seiner Komponenten? Was stellen die den rechtwinkligen Koordinaten  $x$ ,  $y$  eines Punktes  $P$  zugeordneten Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  in bezug auf den Radiusvektor  $\vec{r}$  desselben Punktes  $P$  dar?

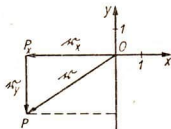


Abb. 67

## Aufgaben

### I. Vektoren und Skalare

1. Zeichne den Radiusvektor  $\vec{r}$  mit dem Endpunkt  $P$  und bestimme Richtungswinkel  $\varphi$  und Betrag  $r$  aus der Zeichnung sowie durch Rechnung!

a)  $P_1 (3; 4)$       b)  $P_2 (-2; 4,5)$       c)  $P_3 (-3; -1)$       d)  $P_4 (5; -2,7)$

2. Zeichne den Radiusvektor  $\vec{r}$  mit dem Richtungswinkel  $\varphi$  und dem Betrage  $r$  und bestimme seine Koordinaten aus der Zeichnung sowie durch Rechnung!

	a)	b)	c)	d)
$r$	4	3,5	6,2	5,3
$\varphi$	$50^\circ$	$225^\circ$	$165^\circ$	$323^\circ$

3. Zeichne den Radiusvektor  $\vec{r} (4,5; 110^\circ)$ ! Welchen Punkt  $P$  bestimmt er als Ortsvektor? Drehe ihn zuerst um  $80^\circ$ , dann weiter um  $100^\circ$ ! In welche Bildpunkte  $P_1$  und  $P_2$  geht  $P$  über?

### II. Eindimensionale Vektoren

4. Veranschauliche die Zahlen a) 4; b) 6,3; c) 5 geometrisch!
5. Stelle die folgenden reellen Zahlen als Vektoren dar:  
a) 4      b)  $-\frac{3}{2}$       c) 5,7      d)  $-2 \sqrt{3}$ !

### III. Koordinaten und Komponenten eines Vektors

6. Stelle die Sinus- und Kosinuswerte der folgenden Winkel als Komponenten des Radiusvektors  $\vec{r}$  im Einheitskreis ( $r=1$ ) dar:

a)  $30^\circ$       b)  $45^\circ$       c)  $120^\circ$       d)  $225^\circ$ !

Wie ändern sich Betrag und Richtung der Komponenten, wenn der Radiusvektor  $\vec{r}$  den Einheitskreis überstreicht?

7. Stelle die Tangens- und Kotangenswerte der folgenden Winkel als Vektoren auf den entsprechenden Tangenten an den Einheitskreis dar:

- a)  $22,5^\circ$       b)  $36^\circ$       c)  $105^\circ$       d)  $288^\circ$ !

8. Stelle die Koordinaten des Punktes  $P(x; y)$  als Vektoren dar! Gib Richtungswinkel und Betrag derjenigen Vektoren an, deren Komponenten sie bilden!

	a)	b)	c)	d)
$x$	3	-2	2,8	-1,5
$y$	2,5	6	-4,1	-3,5

9. Stelle die Verschiebung eines Punktes  $P$  nach dem Punkte  $P'$  als Vektor dar! Bestimme Richtungswinkel und Betrag sowie die Komponenten dieses Vektors!

- a)  $P_1(3; 2)$       b)  $P_2(1; 2,5)$       c)  $P_3(1,5; -2)$       d)  $P_4(-3; -2,7)$   
 $P_1'(7; 8)$        $P_2'(-3; 3)$        $P_3'(-2,3; -7)$        $P_4'(4; -5,8)$

10. Die durch den Vektor  $v$  dargestellte Verschiebung bildet den Punkt  $P$  auf den Punkt  $P'$  ab. Bestimme die Lage des Bildpunktes  $P'$  zeichnerisch und rechnerisch!

- a)  $P_1(-3; 2)$       b)  $P_2(-1,5; 4)$       c)  $P_3(-3; 1)$       d)  $P_4(2; -2,6)$   
 $v_1(5; 30^\circ)$        $v_2(6,5; 250^\circ)$        $v_3(7,2; 317^\circ)$        $v_4(3\sqrt{2}; 123,2^\circ)$

11. Zeichne den Vektor  $a$  mit dem Anfangspunkt  $A(3; -2)$ , dem Richtungswinkel  $\varphi = 80^\circ$  und dem Betrag  $a = 3$ ! Verschiebe ihn parallel zu sich selbst so, daß sein Anfangspunkt nach  $(-2; -3)$  kommt! Welche Koordinaten erhält sein Endpunkt?

12. Zeichne den Vektor  $-v$  zum gegebenen Vektor  $v$ ! Gib seinen Richtungswinkel und seinen Betrag sowie die Komponenten beider Vektoren an!

- a)  $v_1(3; 0^\circ)$       b)  $v_2(\sqrt{3}; 180^\circ)$       c)  $v_3(3,8; 120^\circ)$       d)  $v_4(4,3; 235^\circ)$

13. Was stellen die Polarkoordinaten des Endpunktes eines Radiusvektors in bezug auf diesen Vektor dar?

## 8. Die Rechenarten 1. Stufe für Vektoren

### a) Skalare Addition und Vektoraddition

Zwei Skalare addiert man in der Weise, daß man die Zahlen addiert, durch deren Angabe sie bestimmt sind.

Ein Beispiel für die skalare Addition aus der Mechanik bildet die Berechnung der Energie  $W$  eines Pendels als Summe der kinetischen und der potentiellen Energie:

$$W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}}.$$

Zwei (gleich oder entgegengesetzt gerichtete) **parallele Vektoren**  $a$  und  $b$  addiert man, indem man an den Endpunkt des Vektors  $a$  den Vektor  $b$  ansetzt. Derjenige Vektor  $c$ , der sich vom Anfangspunkt des Vektors  $a$  bis zum Endpunkt des Vektors  $b$  erstreckt, heißt die Summe der Vektoren  $a$  und  $b$ . (In der Abb. 68 ist der Vektor  $c$  parallel zu sich verschoben gezeichnet.)

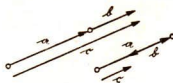


Abb. 68

**Erklärung.** Die Addition zweier beliebiger freier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  bedeutet die folgende Operation: Verschieben wir den Vektor  $\mathbf{b}$  parallel zu sich selbst, bis sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt des Vektors  $\mathbf{a}$  zusammenfällt, so heißt der Vektor  $\mathbf{c}$ , der sich vom Anfangspunkt des ersten nach dem Endpunkt des zweiten Vektors erstreckt, die **geometrische Summe** der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  oder kurz ihre **Summe** (Abb. 69). Es ist

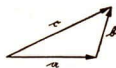


Abb. 69

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (18)$$

Wir können den Vektor  $\mathbf{b}$  auch so verschieben, daß die Anfangspunkte beider Vektoren zusammenfallen. Die Parallelverschiebung des Vektors  $\mathbf{b}$  ist zulässig, weil er als freier Vektor behandelt werden kann. Zeichnen wir aus  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  das Parallelogramm, so erscheint die Summe  $\mathbf{c}$  als Diagonale; ihre Richtung geht vom gemeinsamen Anfangspunkt der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aus (Abb. 70).

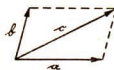


Abb. 70

Ein physikalisches Beispiel für die Vektoraddition ist die Zusammensetzung zweier in einem Punkte angreifender Kräfte  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  zu einer Resultanten  $\mathfrak{R}$  nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte (Abb. 71):

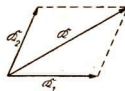


Abb. 71

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2.$$

Für das nach unserer Erklärung ausgeführte Verfahren gelten, wie wir im folgenden sehen werden, dieselben mathematischen Grundgesetze wie für die Addition von Zahlen. Daher sind die Bezeichnungen „Addition“ für die beschriebene Operation und „Summe“ für deren Ergebnis berechtigt.

## b) Grundgesetze der Vektoraddition

Die Summe von Vektoren besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\text{I. } \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \text{ ist ein eindeutig bestimmter Vektor.} \quad (19)$$

$$\text{II. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (20)$$

Wir nennen diese Eigenschaft das **kommutative Gesetz der Vektoraddition**. Erläutere es an Hand einer Zeichnung!

$$\text{III. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}. \quad (21)$$

Diese Eigenschaft wird als das **assoziative Gesetz der Vektoraddition** bezeichnet. Es wird durch die Abb. 72 veranschaulicht.

Aus II und III folgt, daß man in einer dreigliedrigen Summe die Summanden beliebig vertauschen darf. Man vereinbart nun, schlechthin  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$  zu schreiben. Es ist beispielsweise

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + (\mathbf{c} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{b}.$$

Stelle alle übrigen Anordnungen auf, die möglich sind!

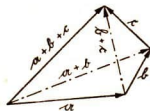


Abb. 72

## IV. Die Vektoraddition ist umkehrbar.

Unter der **Subtraktion** des Vektors  $a$  vom Vektor  $c$  versteht man die Addition des zum Subtrahenden  $a$  gleich langen, parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten Vektors  $-a$  zum Vektor  $c$ , also  $c + (-a)$  (Abb. 73).

Für den resultierenden Vektor  $b$  schreibt man

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a}. \quad (22)$$



Abb. 73

Sind von zwei Vektoren  $a$  und  $b$  die Richtungswinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  und die Beträge  $a$  und  $b$  bekannt, so berechnet man in dem aus  $a$ ,  $b$  und  $c = a + b$  gebildeten Dreieck (Abb. 74) den Betrag  $c$  sowie den Winkel  $\varphi^*$  zwischen  $c$  und beispielsweise  $a$ . Mit Hilfe von  $\varphi^*$  erhält man den Richtungswinkel  $\varphi$  des Vektors  $c$ . Es ist

nach dem Kosinussatz

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

nach dem Sinussatz

$$\sin \varphi^* = \frac{b}{c} \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Damit wird

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi^*.$$

Der Radiusvektor mit dem Anfangs- und Endpunkt in  $O$  hat den Betrag  $0$ . Sein Richtungswinkel ist unbestimmt. Er wird als Nullvektor bezeichnet.

Die Projektion der Summe zweier Vektoren auf eine Gerade  $g$  ist gleich der Summe der Projektionen der Vektoren auf  $g$  (Abb. 75):

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'. \quad (23)$$

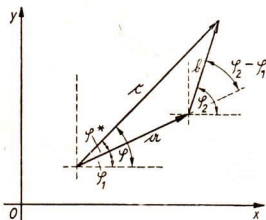


Abb. 74

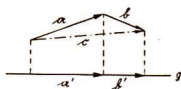


Abb. 75

c) Der Vektor  $m\mathbf{a}$ 

Aus der Addition gleichgerichteter Vektoren folgt die Erklärung der **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar**. Die Multiplikation eines Vektors mit einer positiven ganzen Zahl deutet wir ebenso wie in der Arithmetik das Produkt zweier Zahlen, das als Ergebnis der wiederholten Addition gleicher Summanden dargestellt wird. Ist  $a$  ein Vektor und  $m$  eine positive ganze Zahl, so versteht man unter dem Produkt  $ma$  die Summe von  $m$  Vektoren  $a$ , die sämtlich die gleiche Richtung wie  $a$  besitzen (Abb. 76). Wenn  $m$  eine negative ganze Zahl ist, hat der Vektor  $ma$  die entgegengesetzte Richtung wie  $a$ . Insbesondere ist  $(-1)a = -a$ .

Für einen beliebigen reellen Wert von  $m$  versteht man unter  $ma$  denjenigen bis auf eine Parallelverschiebung festgelegten Vektor, dessen Länge  $|m| \cdot |a|$  beträgt und dessen Richtung für  $m > 0$  gleich der von  $a$ , für  $m < 0$  entgegengesetzt der von  $a$  ist.

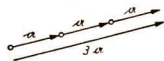


Abb. 76

Wir setzen fest, daß das Produkt  $a m$  denselben Vektor darstellt wie  $m a$ .

Ein Beispiel für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar liefert das Grundgesetz der Mechanik, das die Kraft mit der Beschleunigung verknüpft:

$$\mathfrak{K} = m \cdot \mathfrak{b}.$$

Dabei bedeuten  $\mathfrak{K}$  den Vektor der Kraft,  $\mathfrak{b}$  den Vektor der Beschleunigung und  $m$  die Masse als Skalar.

Aus der Erklärung des Produktes eines Vektors mit einem Skalar leitet sich eine wichtige **Darstellung für Vektoren** ab. Bezeichnet  $e$  denjenigen Vektor vom Betrag 1, der dieselbe Richtung wie  $a$  hat (Abb. 77), so läßt sich  $a$  darstellen als

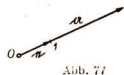


Abb. 77

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e} = a \mathbf{e}. \quad (24)$$

Man nennt  $e$  den **Einheitsvektor** in der Richtung von  $a$ .

Die Einheitsvektoren auf den Achsen eines rechtwinkligen  $xy$ -Koordinatensystems bezeichnet man mit  $i$  und  $j$ .  $i$  bedeutet also den Vektor vom Betrag 1, der in die positive  $x$ -Richtung zeigt,  $j$  den Vektor vom Betrag 1, der in die positive  $y$ -Richtung weist. Die Vektoren  $-i$  und  $-j$  haben daher die Richtungen der negativen  $x$ - bzw.  $y$ -Achse (Abb. 78).

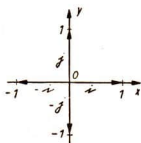


Abb. 78

Mit Hilfe der Einheitsvektoren  $i$  und  $j$  nehmen die Komponenten  $a_x$  und  $a_y$  eines Vektors  $a$  die Formen

$$a_x = a_x i, \quad a_y = a_y j$$

an, während der Vektor  $a$  als Summe seiner Komponenten dargestellt werden kann (Abb. 79):

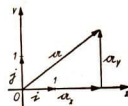


Abb. 79

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}. \quad (25)$$

## Aufgaben

1. Addiere die folgenden Radiusvektoren:

a)  $r_1(5; 0^\circ)$ ,  $r_2(2\frac{1}{2}; 30^\circ)$ ;      b)  $r_1(4\frac{2}{3}; 140^\circ)$ ,  $r_2(4\frac{1}{6}; 220^\circ)$ ;      c)  $r_1(2\frac{1}{3}; 330^\circ)$ ,  $r_2 = -r_1!$

2. Addiere die folgenden Vektoren! Bestimme Richtungswinkel und Betrag sowie die Komponenten der Summe aus der Zeichnung und durch Rechnung!

a)  $a(4,6; 0^\circ)$ ,  $b(3,8; 180^\circ)$ ;      b)  $a(2,9; 25^\circ)$ ,  $b(3,7; 85^\circ)$ ;  
 c)  $a(1; 90^\circ)$ ,  $b(1; 180^\circ)$ ;      d)  $a(2,8; 48^\circ)$ ,  $b(6,6; 193^\circ)$ ;  
 e)  $a(4,8; 12^\circ)$ ,  $b(1,9; 232^\circ)$ ,  $c(2\frac{1}{3}; 30^\circ)$ .

3. Bestimme einen Vektor  $c$  so, daß  $a + b + c$  der Nullvektor ist!

a)  $a_1(4; 35^\circ)$ ,  $b_1(6,6; 240^\circ)$       b)  $a_2(7,1; 327^\circ)$ ,  $b_2(2\sqrt{3}; 132,5^\circ)$ .

4. Stelle die folgenden Vektoren als Summe ihrer Komponenten dar:

a)  $a_1(3; 60^\circ)$ ,      b)  $a_2(4,5; 133^\circ)$ ,      c)  $a_3(\frac{1}{2}\sqrt{5}; 197^\circ)!$



5. Addiere die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , die durch ihre Komponenten  $a_x, a_y$  bzw.  $b_x, b_y$  gegeben sind, und bestimme die Komponenten der Summe!

	a)	b)	c)	d)	e)
$a_x$	2 i	4,5 i	-3,2 i	-4,1 i	-6,5 i
$a_y$	3 j	-2,6 j	5,0 j	-1,8 j	-3,5 j
$b_x$	2,8 i	-3,0 i	2,0 i	-2,5 i	4,6 i
$b_y$	1,3 j	5,2 j	-6,4 j	-6,0 j	4,4 j

6. Stelle die Seiten  $a, b$  und  $c$  des Dreiecks  $OPQ$  als Vektoren  $\vec{OP} = \mathbf{c}$ ,  $\vec{PQ} = \mathbf{a}$  und  $\vec{QO} = \mathbf{b}$  dar ( $O$  ist der Koordinatenursprung)! Welches ist ihre Summe? Verschiebe die drei Vektoren in den Anfangspunkt  $O$  und gib die Winkel an, die sie miteinander bilden, wenn  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  die Dreieckswinkel sind!
7. Welche Gleichung läßt erkennen, daß drei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  ein geschlossenes Dreieck mit einheitlichem Umlaufssinn bilden?
8. Bestimme Richtungswinkel und Betrag des Vektors  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ !
- a)  $\mathbf{a}$  ( $5; 0^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  ( $3,3; 0^\circ$ );      b)  $\mathbf{a}$  ( $3,5; 180^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  ( $5,6; 0^\circ$ );  
 c)  $\mathbf{a}$  ( $4,7; 330^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  ( $6,1; 260^\circ$ );      d)  $\mathbf{a}$  ( $2; 135^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  ( $6,6; 270^\circ$ ).
9. Bilde die Differenz  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aus Aufgabe 5a) bis e)!
10. Multipliziere den Vektor  $\mathbf{a}$  mit dem Skalar  $m$ !
- a)  $\mathbf{a}_1$  ( $2; 120^\circ$ ),  $m_1 = 3$       b)  $\mathbf{a}_2$  ( $3,7; 26^\circ$ ),  $m_2 = -1,7$
11. Stelle den Vektor  $\mathbf{v}$ , ( $v_x = 2,25$  i;  $v_y = -3,75$  j), mit Hilfe des Einheitsvektors in der Richtung von  $\mathbf{v}$  dar!
12. Am gemeinsamen Angriffspunkt  $O$  greifen die Kräfte  $\mathfrak{F}_1 = 750$  kp und  $\mathfrak{F}_2 = 1230$  kp an, die miteinander einen Winkel von  $53^\circ$  bilden. Wie groß ist die resultierende Kraft? Welchen Winkel bildet sie mit den einzelnen Komponenten?  
 Löse die Aufgabe a) geometrisch durch Vektoraddition, b) trigonometrisch!
13. Eine Kraft  $\mathfrak{R} = 280$  kp wird in zwei Komponenten zerlegt, deren Richtungen mit der Richtung von  $\mathfrak{R}$  die Winkel  $35^\circ$  und  $15^\circ$  bilden. Wie groß sind die Komponenten?  
 Löse die Aufgabe a) geometrisch, b) trigonometrisch!
14. Die Kraft  $\mathfrak{R} = 376$  kp ist in zwei Komponenten  $\mathfrak{F}_1 = 212$  kp und  $\mathfrak{F}_2 = 298$  kp zerlegt. Welche Winkel bilden die Komponenten mit der Kraft  $\mathfrak{R}$ ?  
 Löse die Aufgabe a) geometrisch durch Vektoraddition, b) trigonometrisch!
15. Ein Motorboot hat stromabwärts die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  ( $v_1 = 8,7$  m s $^{-1}$ ), stromaufwärts  $\mathbf{v}_2$  ( $v_2 = 6,3$  m s $^{-1}$ ). Bestimme die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_s$  des Stromes und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Bootes zeichnerisch!
16. Ein Fährboot überquert einen 108 m breiten Strom. Der Vektor der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  liegt in der Ebene des Wasserspiegels senkrecht zum Ufer und hat die Größe  $v = 1,8$  m s $^{-1}$ . Bis zur Landung wird das Boot 30 m stromabwärts getrieben. Bestimme den Vektor  $\mathbf{v}_s$  der Geschwindigkeit des Wassers zeichnerisch und rechnerisch!
17. Bestimme die resultierende Beschleunigung  $\mathbf{b}$ , die eine Masse  $m$  erfährt, wenn auf sie zwei Kräfte,  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$ , gleichzeitig wirken! Unabhängig voneinander würden sie der Masse die Beschleunigungen  $b_1$  ( $3,6$  cm s $^{-2}$ ;  $10^\circ$ ) bzw.  $b_2$  ( $4,2$  cm s $^{-2}$ ;  $75^\circ$ ) erteilen.

## 9. Die Rechenarten 2. Stufe für Vektoren

### a) Das Skalarprodukt (a b)

Im vorigen Abschnitt haben wir das Multiplizieren eines Vektors mit einem Skalar  $m$ , ( $m > 0$ , ganze Zahl), bei den Rechenarten 1. Stufe behandelt, weil das Produkt durch wiederholte Addition desselben Vektors entsteht. Für beliebige reelle  $m$  mußte definiert werden, was man unter  $ma$  zu verstehen hat. Das gleiche gilt für die Multiplikation zweier Vektoren. Bei der Anwendung der Vektoren, in erster Linie in der Physik, wird man auf Verknüpfungen geführt, die Eigenschaften von Produkten haben. Dabei zeigt sich auch, daß es zweckmäßig ist, zwei verschiedene Arten von Produkten zweier Vektoren einzuführen.

Wir gehen von einem Beispiel aus, das wir der Physik entnehmen.

Gegeben sei ein geradliniges Wegstück durch Länge und Richtung; es läßt sich durch den Vektor  $\vec{s}$  darstellen (Abb. 80). Auf einen Körper am Ausgangspunkt von  $\vec{s}$  wirke die konstante Kraft  $\vec{K}$ . Sie bilde mit  $\vec{s}$  den Winkel  $\gamma$ . Welche Arbeit  $A$  leistet die Kraft  $\vec{K}$ , wenn sie den Körper um die Strecke  $s = |\vec{s}|$  verschiebt?

Fällt die Richtung einer Kraft mit der Richtung des Weges, längs dessen sie wirkt, zusammen, so ist die Arbeit gleich dem Produkt aus dem Betrag dieser Kraft und dem Betrag des Weges.

Sind aber Krafrichtung und Wegrichtung verschieden, so wird nur von der in der Richtung des Weges  $\vec{s}$  wirkenden Komponente  $K_p$  der Kraft  $\vec{K}$  Arbeit geleistet. Ihre Größe ist

$$K_p = |\vec{K}| \cos \gamma = K \cos \gamma.$$

Damit finden wir für die gesuchte Arbeit

$$A = K s \cos \gamma.$$

Die Arbeit ist also gleich dem Produkt aus den Beträgen der beiden Vektoren  $\vec{K}$  und  $\vec{s}$  und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels  $\gamma$ . Es ist ein Skalar, der sich durch eine produktartige Verknüpfung der beiden Vektoren  $\vec{K}$  und  $\vec{s}$  ergibt. Man nennt dieses Produkt Skalarprodukt.

**Erklärung.** Unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  versteht man eine Zahl (Skalar), die gleich ist dem Produkt aus den Beträgen der beiden Vektoren und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels  $\gamma$  (Abb. 81 a und b). Es ist also

$$(\vec{a} \vec{b}) = ab \cos \gamma. \quad (26)$$

Man kennzeichnet das Skalarprodukt durch eine runde Klammer, schreibt  $(\vec{a} \vec{b})$  und spricht: Skalarprodukt aus  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . In dieser Schreibweise lautet die Formel für die Arbeit

$$A = (\vec{K} \vec{s}).$$

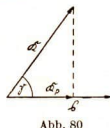


Abb. 80

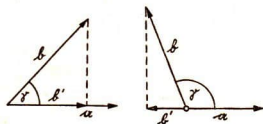


Abb. 81 a und b

Unter welcher Bedingung wird das Skalarprodukt positiv, unter welcher negativ? Wie läßt sich das Skalarprodukt geometrisch deuten?

Die durch unsere Erklärung festgelegte Verknüpfung zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist eindeutig. Aus der Definitionsgleichung folgt unmittelbar, daß für das Skalarprodukt das kommutative Gesetz

$$\text{gilt.} \quad (\mathbf{b}\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) \quad (27)$$

### b) Eigenschaften des Skalarproduktes ( $\mathbf{a}\mathbf{b}$ )

Für  $\gamma = 0^\circ$  wird  $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = ab \cdot \cos \gamma = ab \cdot 1 = ab$ ,

für  $\gamma = 180^\circ$  wird  $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = ab \cdot \cos \gamma = ab \cdot (-1) = -ab$ ;

für  $\gamma = 90^\circ$  ergibt sich  $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = ab \cdot \cos \gamma = ab \cdot 0 = 0$ .

Umgekehrt schließt man: Wenn  $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = 0$  ist, so muß entweder  $\mathbf{a} = 0$  oder  $\mathbf{b} = 0$  oder der von den beiden von Null verschiedenen Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  eingeschlossene Winkel  $\gamma = 90^\circ$ , d. h.  $\cos \gamma = 0$  sein.

Es ist also  $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = 0$  die Bedingung für die Orthogonalität<sup>1)</sup> der beiden von Null verschiedenen Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ . In dieser Eigenschaft unterscheidet sich das Skalarprodukt zweier Vektoren vom Produkt zweier Zahlen (Skalare). Es kann gleich Null werden, obwohl beide Faktoren von Null verschieden sind.

Die Projektion des Vektors  $\mathbf{b}$  auf die Richtung von  $\mathbf{a}$  ist ein Vektor  $\mathbf{b}'$  vom Betrage  $|\mathbf{b}| \cdot |\cos \gamma|$ . Je nachdem  $\gamma$  spitz oder stumpf ist, zeigt  $\mathbf{b}'$  in dieselbe oder in die entgegengesetzte Richtung wie  $\mathbf{a}$  (Abb. 81 a und b). Entsprechendes gilt für die Projektion  $\mathbf{a}'$  von  $\mathbf{a}$  auf  $\mathbf{b}$ . Es folgt, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gleich dem Skalarprodukt aus einem dieser Vektoren und der Projektion des anderen auf ihn ist, nämlich

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\mathbf{b}') = (\mathbf{b}\mathbf{a}'). \quad (28)$$

Die drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  mögen in derselben Ebene, der Zeichenebene, liegen. Es gilt dann das distributive Gesetz der skalaren Multiplikation:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\mathbf{c}). \quad (29)$$

Beweis:  $\mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{c}'$  und  $\mathbf{s}'$  seien die Projektionen von  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  auf  $\mathbf{a}$  (Abb. 82). Dann ist nach (28)

$$(\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})) = (\mathbf{a}\mathbf{s}) = (\mathbf{a}\mathbf{s}').$$

Ferner gilt auf Grund von (23)

$$\mathbf{s}' = \mathbf{b}' + \mathbf{c}'.$$

Da  $\mathbf{s}'$ ,  $\mathbf{b}'$  und  $\mathbf{c}'$  auf derselben Geraden liegen wie  $\mathbf{a}$ , darf man schreiben:

$$(\mathbf{a}\mathbf{s}') = (\mathbf{a}\mathbf{b}') + (\mathbf{a}\mathbf{c}').$$

Diese Beziehung läßt sich auf das distributive Gesetz der Arithmetik zurückführen, da  $(\mathbf{a}\mathbf{s}') = \pm a s'$ ,  $(\mathbf{a}\mathbf{b}') = \pm a b'$  und  $(\mathbf{a}\mathbf{c}') = \pm a c'$  ist. Setzt man für  $(\mathbf{a}\mathbf{s}')$ ,  $(\mathbf{a}\mathbf{b}')$  und  $(\mathbf{a}\mathbf{c}')$  nach (28)  $(\mathbf{a}\mathbf{s})$ ,  $(\mathbf{a}\mathbf{b})$  bzw.  $(\mathbf{a}\mathbf{c})$ , so folgt die Behauptung

$$(\mathbf{a}\mathbf{s}) = (\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\mathbf{c}). \quad (29)$$

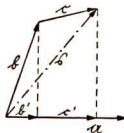


Abb. 82

1) orthogonal heißt rechtwinklig, senkrecht.

### c) Das Vektorprodukt $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$

Um die zweite produktartige Verknüpfung zweier Vektoren kennenzulernen, betrachten wir ein anderes Beispiel aus der Physik.

Gegeben sei eine Kraft  $\mathfrak{K}$ , die an einem Hebelarm  $\mathbf{r}$  angreift (Abb. 83).  $\mathbf{r}$  und  $\mathfrak{K}$  bilden miteinander den Winkel  $\gamma$ . Gesucht ist das Drehmoment  $\mathfrak{M}$  der Kraft  $\mathfrak{K}$ , bezogen auf den Drehpunkt  $O$ .

Das Drehmoment ist ein Vektor, da es außer der zahlenmäßigen Festlegung einer weiteren Angabe zur Bestimmung des Drehungssinnes bedarf. Man versteht unter dem Drehmoment der Kraft  $\mathfrak{K}$ , bezogen auf den Drehpunkt  $O$ , einen Vektor  $\mathfrak{M}$ , der auf der Zeichenebene senkrecht steht.

Wenn  $\mathbf{r}$  und  $\mathfrak{K}$  aufeinander senkrecht stehen, so ist der Betrag von  $\mathfrak{M}$  gleich dem Produkt der Beträge von  $\mathbf{r}$  und  $\mathfrak{K}$ . Bilden sie jedoch den Winkel  $\gamma$  miteinander, so ist nur die auf dem Hebelarm  $\mathbf{r}$  senkrecht stehende Komponente  $\mathfrak{K}_s$  der Kraft  $\mathfrak{K}$  wirksam. Ihre Größe ist

$$K_s = |\mathfrak{K}| \sin \gamma = K \cdot \sin \gamma.$$

Damit finden wir für den Betrag des Drehmomentes

$$M = rK \sin \gamma.$$

Die Richtung von  $\mathfrak{M}$  wird durch die folgende Festsetzung bestimmt:

Dreht man den Vektor  $\mathbf{r}$  um  $\gamma$  in die Richtung von  $\mathfrak{K}$ , so soll diese Drehung, in der Richtung von  $\mathfrak{M}$  gesehen, eine Rechtsschraubung sein. In der Abb. 83 steht  $\mathfrak{M}$  im Drehpunkt  $O$  senkrecht auf der Zeichenebene und weist nach oben.

Das Drehmoment ist also ein Vektor, der sich durch eine neue produktartige Verknüpfung der beiden Vektoren  $\mathfrak{K}$  und  $\mathbf{r}$  ergibt. Man nennt dieses Produkt das **Vektorprodukt**.

**Erklärung:** Unter dem **Vektorprodukt** zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  versteht man einen auf dem von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gebildeten Parallelogramm senkrecht stehenden Vektor  $\mathbf{p}$ . Sein Betrag ist gleich der Maßzahl des Flächeninhaltes des Parallelogramms.

Die Richtung von  $\mathbf{p}$  wird durch folgende Festsetzung bestimmt:

Dreht man den Vektor  $\mathbf{a}$ , den ersten Faktor, um den kleineren Winkel  $\gamma$  in die Richtung des Vektors  $\mathbf{b}$ , des zweiten Faktors, so soll diese Drehung zusammen mit einer Vorwärtsbewegung in der Richtung von  $\mathbf{p}$  eine Rechtsschraubung ergeben (Abb. 84). Man schreibt

$$\mathbf{p} = [\mathbf{a}\mathbf{b}]. \quad (30)$$

Man kennzeichnet das Vektorprodukt durch eine eckige Klammer, schreibt  $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$  und spricht: Vektorprodukt aus  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .

Die Länge des Vektors  $\mathbf{p}$  ist

$$p = ab \sin \gamma. \quad (31)$$

In dieser Schreibweise lautet die Formel für das Drehmoment

$$\mathfrak{M} = [\mathbf{r}\mathfrak{K}].$$

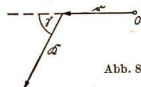


Abb. 83

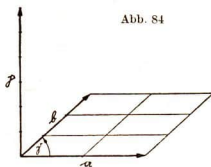


Abb. 84

d) Eigenschaften des Vektorproduktes  $[a b]$ 

Nach der Erklärung im vorigen Abschnitt ergibt sich aus den Vektoren  $a$  und  $b$  ein eindeutig bestimmter Vektor  $p$ . Im Vektorprodukt  $[a b]$  werden jetzt die Faktoren vertauscht. Der Vektor  $[b a]$  hat zwar den gleichen Betrag wie der Vektor  $[a b]$ , er zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung im Raume (Abb. 85).

Drehen wir nämlich  $b$  im entgegengesetzten Sinne in die Richtung von  $a$ , so kehrt sich dabei die Schraubenrichtung um. Somit gilt das **kommutative Gesetz** für Vektorprodukte **nicht**.

Für  $\gamma = 0^\circ$  und  $\gamma = 180^\circ$  wird  $[a b] = 0$ . Das Vektorprodukt ist also Null, wenn  $a$  und  $b$  zueinander parallel sind. Falls  $a$  und  $b$  nicht verschwinden, deutet die Gleichung  $[a b] = 0$  die Parallelität von  $a$  und  $b$  an. Ist  $\gamma = 90^\circ$ , so wird der Betrag von  $p$  gleich dem Produkt der Beträge von  $a$  und  $b$ . In welche Figuren geht in den drei Fällen das Parallelogramm über?

$b''$  sei die Komponente von  $b$  senkrecht zu  $a$  (Abb. 86).

Der Betrag von  $b''$  ist gleich  $b \sin \gamma$ ; er bedeutet geometrisch die Höhe in dem Parallelogramm aus  $a$  und  $b$  mit der Grundlinie  $a$ . Entsprechendes gilt für die Komponente  $a''$  von  $a$  senkrecht zu  $b$ . Es folgt, daß das Vektorprodukt zweier Vektoren  $a$  und  $b$  gleich dem Vektorprodukt aus einem dieser Vektoren und

der zu ihm senkrechten Komponente des anderen Vektors ist, nämlich

$$[a b] = [a b''] = [a'' b]. \quad (32)$$

Die drei Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  mögen in der Zeichenebene liegen (Abb. 87). Es gilt das **distributive Gesetz** der vektoriellen Multiplikation:

$$[a (b + c)] = [a b] + [a c]. \quad (33)$$

Beweis:

$b_1$ ,  $c_1$  und  $s_1$  seien die Projektionen der Vektoren  $b$ ,  $c$  und  $s = b + c$  auf die zu  $a$  senkrechte Gerade  $g$ . Nach (23) ist

$$s_1 = b_1 + c_1.$$

Die Vektorprodukte  $[a s_1] = s_2$ ,  $[a b_1] = b_2$  und  $[a c_1] = c_2$  sind Vektoren auf einer in  $O$  durch die Zeichenebene stoßenden, auf ihr senkrecht stehenden Geraden. Sie haben den  $a$ -fachen Betrag der Vektoren  $s_1$ ,  $b_1$  und  $c_1$ , und es ist

$$s_2 = b_2 + c_2.$$

Multipliziert man nämlich  $s_1 = b_1 + c_1$  mit  $a$ , so erhält man  $a s_1 = a b_1 + a c_1$  oder  $s_2 = b_2 + c_2$ .

Setzt man für  $s_2$ ,  $b_2$  und  $c_2$  die entsprechenden Vektorprodukte ein, so ergibt sich

$$[a s_1] = [a b_1] + [a c_1].$$

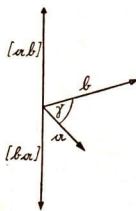


Abb. 85

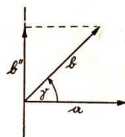


Abb. 86

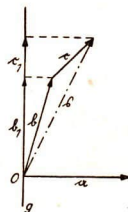


Abb. 87



Da an Stelle von  $[a\hat{s}_1]$ ,  $[a\hat{b}_1]$  und  $[a\hat{c}_1]$  nach (33)  $[a\hat{s}]$ ,  $[a\hat{b}]$  bzw.  $[a\hat{c}]$  treten können, so folgt die Behauptung

$$[a\hat{s}] = [a(\hat{b} + \hat{c})] = [a\hat{b}] + [a\hat{c}]. \quad (34)$$

Das Verknüpfen zweier Vektoren nach den Erklärungen in a) und c) wird Multiplizieren zweier Vektoren genannt, obwohl die in der Arithmetik für die Multiplikation geltenden Rechengesetze hier zum Teil nicht mehr gelten. Bei der durch die letzte Erklärung bestimmten Verknüpfung zweier Vektoren berechtigt im wesentlichen nur noch die Tatsache, daß das distributive Gesetz erhalten bleibt, diese als Produkt zu bezeichnen.

## Aufgaben

### I. Das Skalarprodukt ( $a\hat{b}$ )

1. Berechne die Skalarprodukte der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ !

- a)  $\mathbf{a}$  (3;  $30^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (4;  $45^\circ$ );      b)  $\mathbf{a}$  (3,5;  $93^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (2,6;  $60^\circ$ );  
 c)  $\mathbf{a}$  (6,1;  $195,5^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (4,7;  $60^\circ$ );      d)  $\mathbf{a}$  (1,7;  $233^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (2;  $320^\circ$ );  
 e)  $\mathbf{a}$  (2,5;  $200^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (2;  $290^\circ$ );      f)  $\mathbf{a}$  (3,2;  $140^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (2,3;  $240^\circ$ ).

2. Berechne die Skalarprodukte der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , die durch ihre Komponenten gegeben sind

	a)	b)	c)	d)	e)
$\mathbf{a}_x$	5 i	2,9 i	3,5 i	-2,2 i	1,5 i
$\mathbf{a}_y$	4 j	-1,6 j	4,8 j	1,8 j	-4,1 j
$\mathbf{b}_x$	3 i	6,2 i	-2,6 i	5,5 i	-3,7 i
$\mathbf{b}_y$	2 j	4,3 j	-6,4 j	-5,5 j	2,7 j

3. Wie hängt der Wert des Skalarproduktes ( $a\hat{b}$ )

a) vom Betrage  $a$  des Vektors  $\mathbf{a}$ , b) vom Richtungswinkel  $\varphi_1$  des Vektors  $\mathbf{a}$  ab, wenn die übrigen Bestimmungsstücke der beiden Vektoren konstant sind?

Veranschauliche die funktionalen Beziehungen für die folgenden Zahlenfälle geometrisch:

a)  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$ ,  $b = 3$

b) 1.  $a = 2$ ,  $\varphi_2 = 0^\circ$ ,  $b = 2,5$ ;      2.  $a = 1,5$ ,  $\varphi_2 = 45^\circ$ ,  $b = 2$ !

4. Unter dem (skalaren) Quadrat eines Vektors versteht man das Skalarprodukt aus diesem Vektor mit einem ihm nach Größe und Richtung gleichen Vektor.

Berechne  $a^2 = (a\mathbf{a})$ ,  $v^2$ ,  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$ !

5. Berechne die Skalarprodukte der Einheitsvektoren (ii), (jj), (ij) und (ji)!

6. Warum können drei Vektoren nicht skalar miteinander multipliziert werden?

7. Ist die skalare Multiplikation umkehrbar, d. h. gibt es eine Operation mit Vektoren, die der Division zweier Zahlen entspricht?

8. Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  mit Hilfe der Komponenten-darstellung!

9.  $\mathbf{v}$  sei ein Vektor. Welche mathematische Bedeutung haben (iv) und (jv)?
10. Vereinfache den Ausdruck  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$ !
11. Was bedeutet  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2(\mathbf{a}\mathbf{b}) + \mathbf{b}^2$  geometrisch?
12.  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  seien zwei Vektoren mit gemeinsamem Anfangspunkt,  $c$  sei die Länge der Verbindungsline ihrer Endpunkte. Beweise, daß  $2(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - c^2$  ist!
13. Beweise den Kosinussatz mit Hilfe der Vektorrechnung!
- Anleitung: Das Dreieck  $ABC$  faßt man als geschlossenen Vektorzug mit einheitlichem Umlaufsinne auf. Es ist  $\mathbf{c} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ . Quadriere diese Gleichung! Vergleiche den Beweis mit dem elementargeometrischen (Abschnitt 6b, Seite 40) in bezug auf Einfachheit und Allgemeingültigkeit!
14. Welche Arbeit  $A$  leistet die konstante Kraft  $\mathfrak{K}$ , um einen Körper um die Strecke  $s = |\hat{\mathbf{s}}|$  zu verschieben, wenn  $\mathfrak{K}$  mit  $\hat{\mathbf{s}}$  den Winkel  $\gamma$  bildet?
- a)  $\hat{\mathbf{s}}_1$  (3 m;  $60^\circ$ );  $K_1 = 2$  kp,  $\gamma_1 = 0^\circ$   
 b)  $\hat{\mathbf{s}}_2$  (87 cm;  $156^\circ$ );  $K_2 = 120$  p,  $\gamma_2 = 76^\circ$   
 c)  $\hat{\mathbf{s}}_3$  (1,7 m;  $345^\circ$ );  $K_3 = 3,5$  kp,  $\gamma_3 = 103,5^\circ$

## II. Das Vektorprodukt $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$

15. Bestimme die Vektorprodukte  $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$  und  $[\mathbf{b}\mathbf{a}]$  der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ !
- a)  $\mathbf{a}$  (5;  $135^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (4,2;  $270^\circ$ );    b)  $\mathbf{a}$  (4,2;  $270^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (7;  $300^\circ$ );  
 c)  $\mathbf{a}$  (4,5;  $90^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (2,4;  $90^\circ$ );    d)  $\mathbf{a}$  (4;  $275^\circ$ ),  $\mathbf{b}$  (4;  $95^\circ$ ).
16. Bilde die Vektorprodukte  $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$  und  $[\mathbf{b}\mathbf{a}]$  aus den in den Aufgaben 1 a) bis f) gegebenen Vektoren!
17. Berechne die Vektorprodukte der Einheitsvektoren  $[\mathbf{i}\mathbf{i}]$ ,  $[\mathbf{j}\mathbf{j}]$ ,  $[\mathbf{i}\mathbf{j}]$  und  $[\mathbf{j}\mathbf{i}]$ ! Der Einheitsvektor in Richtung des Vektors  $[\mathbf{i}\mathbf{j}]$  heißt  $\mathbf{k}$ .
18. Zeige, daß  $[\mathbf{a}(-\mathbf{b})] = -[\mathbf{a}\mathbf{b}]$  ist!
19. Bestimme  $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$  mit Hilfe der Komponentendarstellung der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ !
20. Bilde die Vektorprodukte  $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$  aus den in Aufgabe 2 a) bis e) gegebenen Vektoren!
21. Beweise die Formel  $[\mathbf{a}\mathbf{b}]^2 + (\mathbf{a}\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$ !
22. Beweise den Sinussatz mit Hilfe der Vektorrechnung!
- Anleitung: Das Dreieck  $ABC$  ist als geschlossener Vektorzug mit einheitlichem Umlaufsinne aufzufassen. Gehe etwa von dem Vektorprodukt  $[\mathbf{a}\mathbf{c}]$  aus, setze  $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  statt  $\mathbf{c}$  und wende das distributive Gesetz der vektoriellen Multiplikation an!
23. Bei einer Lokomotive werde die Kurbel durch den Vektor  $\mathbf{r}$  dargestellt. Von der Pleuelstange wird bei der Vorwärtsbewegung des Kolbens die Kraft  $\mathfrak{F}$ , bei der Rückwärtsbewegung des Kolbens die Kraft  $-\mathfrak{F}$  auf den Kreuzkopf ausgeübt. In Richtung der Pleuelstange wirkt die Komponente  $\mathfrak{S}$ . Bestimme die Drehmomente  $\mathfrak{M}$  der Kraft  $\mathfrak{S}$  für die Drehwinkel  $\alpha = 0^\circ; 15^\circ; 30^\circ; \dots; 360^\circ$  der Kurbel!
- Länge der Pleuelstange: 3500 mm; Kurbelradius:  $r = 350$  mm; Größe der Kraft  $\mathfrak{F}$ :  $P = 30000$  kp.
- Anleitung: Zeichne zuerst eine Figur (vgl. dazu Abb. 54, S. 48)!

## IV. Fortsetzung der Lehre von den trigonometrischen Funktionen

## 10. Periodizität der trigonometrischen Funktionen

## a) Das Bogenmaß eines Winkels

Bei der geometrischen Darstellung der trigonometrischen Funktionen hatten wir auf der Abszissenachse als Einheit des Winkels die Bogenlänge aufgetragen, die zum Zentriwinkel  $1^\circ$  des Einheitskreises gehört (vgl. Abb. 12). Damit hatten wir das Bogenmaß als neues Maß für einen Winkel eingeführt. Wir wollen dieses jetzt begründen.

Ein Zentriwinkel  $\alpha$  möge aus den konzentrischen Kreisen mit den Radien  $r_1, r_2, r_3$  die Bogenlängen  $b_1, b_2, b_3$  ausschneiden (Abb. 88). Dann gilt die fortlaufende Proportion

$$b_1 : b_2 : b_3 = r_1 : r_2 : r_3.$$

Der Beweis ergibt sich aus der Formel für die Bogenlänge  $b = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$ .

Das Verhältnis „Bogenlänge zu Radius“ ist für ein und denselben Zentriwinkel konstant.

Aus der Formel folgt weiter, daß das Verhältnis „Bogenlänge zu Radius“ dem Zentriwinkel  $\alpha$  proportional ist. (Wie lautet der Proportionalitätsfaktor?) Man kann daher dieses Verhältnis als Maß für den Winkel  $\alpha$  einführen.

Unter dem **Bogenmaß**  $\hat{\alpha}$  (sprich: Bogen Alpha) eines Winkels  $\alpha$  versteht man das Verhältnis der zugehörigen Bogenlänge zum Radius. Es ist

$$\hat{\alpha} = \frac{b}{r}.$$

Das Bogenmaß ist eine **reine Zahl**.

Besonders einfach wird die Erklärung für das Bogenmaß eines Winkels im Einheitskreis (Abb. 89). Hier ist

$$\hat{\alpha} = \frac{b}{1} = b,$$

d. h. der Winkel  $\alpha$  wird durch die Maßzahl der Bogenlänge auf dem Einheitskreis gemessen. Zu jedem Winkel gehört eine bestimmte positive oder negative reelle Zahl und umgekehrt. Die lineare Funktion  $f(\alpha) = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha^\circ$  nennt man **Arkus  $\alpha$** <sup>1)</sup>. Es ist

$$\hat{\alpha} = \text{arc } \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ;$$

sprich: Bogen Alpha gleich Arkus Alpha gleich ...

Zur Umrechnung des Gradmaßes eines Winkels in Bogenmaß und umgekehrt dienen die Formeln

$$\hat{\alpha} = \text{arc } \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha^\circ \quad \text{und} \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \text{arc } \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \hat{\alpha}. \quad (35a, b)$$

1) arcus (lat.) heißt Bogen.

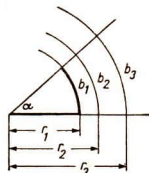


Abb. 88

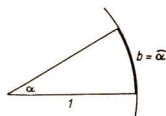


Abb. 89

Man kann sich zur Umwandlung der Tafel 7 und für kleine Winkel mittelbar der Tafel 6 in Schülkes Tafeln bedienen.

Als Einheit des Bogenmaßes nimmt man die Bogenlänge 1 auf dem Einheitskreis. Sie entspricht einem Winkel  $\alpha \approx 57,30^\circ$  im Gradmaß, denn es ist

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1 \approx 57,30^\circ.$$

Das Bogenmaß eines Winkels wird entsprechend der Umrechnungsformel (35a) zumeist als Bruchteil oder Vielfaches von  $\pi$  angegeben. Ein rechter Winkel hat das Bogenmaß  $x = \frac{\pi}{2}$ , ein Vollwinkel das Bogenmaß  $x = 2\pi$ .

Die griechischen Buchstaben  $\alpha, \dots$  sollen künftig den im Gradmaß gemessenen Wert des Winkels bedeuten, die lateinischen Buchstaben  $x, \dots$  werden zur Bezeichnung des Bogenmaßes verwendet. Bei Abweichungen von dieser Regel wird das Maß besonders angegeben.

Beispiele

Gradmaß:  $\alpha; \beta; \dots; x^\circ; a^\circ$ .      Bogenmaß:  $\hat{\alpha}; \hat{\beta}; \dots; x; a$ .

In der Elementargeometrie mißt man einen Winkel stets im Gradmaß. In der Trigonometrie benutzt man Winkelgrade bei praktischen Messungen und Rechnungen, bei allgemeinen Betrachtungen bevorzugt man das Bogenmaß. Die höhere Mathematik bedient sich ausschließlich des Bogenmaßes.

## b) Geometrische Darstellung der Sinus- und der Kosinusfunktion

Die Funktion  $y = f(x) = \sin x$  haben wir bisher nur im I. Quadranten, d. h. für Argumente<sup>1)</sup>  $x$  zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$ , geometrisch dargestellt. Auf Grund der Erklärung 5 und der Festsetzung, daß der Sinus für beliebige Winkel  $x$  den Funktionswert des zugehörigen Hauptwertes  $\bar{x}$  hat, läßt sich die Funktionskurve  $y = \sin x$  für alle Werte  $x$  geometrisch darstellen (Abb. 90).

Für die Zeichnung entnimmt man die Funktionswerte  $y = f(x)$  dem Einheitskreis als Ordinaten  $v = y = \sin x$  (Abb. 12). Das Bild der Funktion  $y = \sin x$  nennt man kurz eine Sinuskurve.

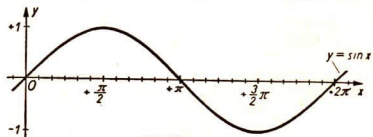


Abb. 90

Was die erste der Quadrantenbeziehungen im Abschnitt 5f analytisch wieder gab, zeigt die Kurve, die man sich nach beiden Seiten fortgesetzt zu denken hat, anschaulich. Im Bereich  $2\pi \dots 4\pi; 4\pi \dots 6\pi$  usw. und ebenso auf der negativen  $x$ -Achse im Bereich  $-2\pi \dots 0$  usw. wiederholen sich die Funktionswerte des Bereiches  $0 \dots 2\pi$ . Eine derartige Funktion nennt man eine **periodische** Funktion.

1) Argument bedeutet unabhängige Veränderliche einer Funktion, hier den Winkel  $x$ .

Perioden der Sinusfunktion sind beispielsweise  $2\pi$ ;  $4\pi$ ;  $6\pi$ ; ... und  $-2\pi$ ;  $-4\pi$ ;  $-6\pi$ ; ... Allgemein lassen sich die Perioden der Sinusfunktion zusammenfassen als

$$k \cdot 2\pi = 2k\pi, \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

Insbesondere ist  $2\pi$  die **kleinste Periode**. Im Bogenmaß geschrieben, findet die Periodizität der Sinusfunktion ihren Ausdruck in der Gleichung

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x. \quad (36)$$

Wichtig ist, daß die Formel (36) nicht nur für einen bestimmten Winkelwert  $x$ , sondern für alle Werte  $x$  gilt. Wodurch unterscheidet sie sich von der ersten der Quadrantenbeziehungen im Abschnitt 5f? Der Teilbereich  $0 \dots 2\pi$  enthält alle für die Sinusfunktion möglichen Werte.

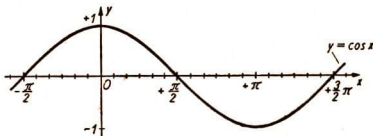


Abb. 91

In Abb. 91 ist die Funktion  $y = f(x) = \cos x$  geometrisch dargestellt.

Die Kosinusfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode  $2\pi$ . Es ist

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x. \quad (37)$$

Projizieren wir die Punkte der Sinuskurve mit den Abszissenwerten  $x = 0^\circ; 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; \dots; 90^\circ$  senkrecht auf die  $y$ -Achse des Achsenkreuzes und setzen wir an die Fußpunkte der Lote im Bereich  $0 \leq y \leq 1$  die zugehörigen Argumentwerte  $x = 0^\circ; 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; \dots; 90^\circ$ , so erhalten wir eine neue Form der geometrischen Darstellung der Funktion  $y = f(x) = \sin x$ , nämlich ihre geometrische Darstellung als **Funktionsskala**  $y = f(x) = \sin x$  oder als **Sinusskala** (Abb. 92a). Teilen wir eine Einheitslänge  $0 \dots 1$  in dieser Weise, lassen aber die Bezeichnung der Funktionswerte  $y = \sin x$  fort, so erhalten wir eine **Sinusteilung** der Einheit  $0 \dots 1$ . Eine solche Sinusteilung findet sich z. B. auf der Rückseite der Zunge eines Normalrechenstabes (Einheitslänge  $1 \triangleq 25 \text{ cm}$ ).

In Abb. 92b ist die Kosinusfunktion in entsprechender Weise als **Funktionsskala**  $y = f(x) = \cos x$  oder als **Kosinusskala** geometrisch dargestellt.

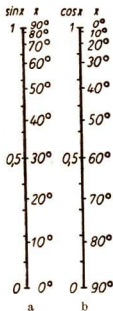


Abb. 92

### c) Geometrische Darstellung der Tangens- und der Kotangensfunktion

Die Funktion  $y = f(x) = \operatorname{tg} x$  wurde bisher nur im I. Quadranten gezeichnet. Auf Grund der Erweiterung des Tangensbegriffes durch die Erklärung 7 und der Erklärung der Tangenswerte beliebiger Winkel  $x$  als Funktionswerte des zugehörigen



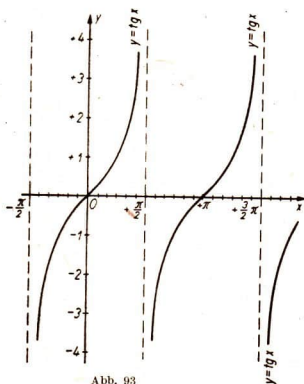


Abb. 93

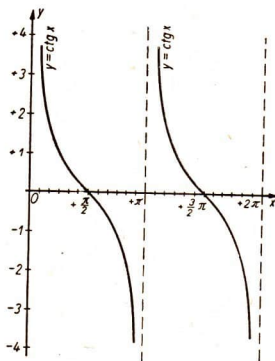


Abb. 94

Hauptwertes  $\bar{x}$  kann man die Funktion im ganzen  $x$ -Bereich mit Ausnahme der Stellen  $\frac{\pi}{2} \pm n\pi$  geometrisch darstellen (Abb. 93).

Wir erkennen, daß auch die Tangensfunktion eine **periodische** Funktion ist. Perioden von  $\text{tg } x$  sind beispielsweise

$$\pi; 2\pi; 3\pi; \dots \text{ und } -\pi; -2\pi; -3\pi; \dots$$

Im Gegensatz zur Sinus- und Kosinusfunktion wiederholen sich bei der Funktion  $y = f(x) = \text{tg } x$  die Funktionswerte  $y$  bereits nach einem Zuwachs des Argumentes um  $\pi$ . Die Tangensfunktion hat also die (kleinste) Periode  $\pi$ . Es ist, wenn  $k$  eine ganze Zahl bedeutet, ( $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ),

$$\text{tg}(x + k\pi) = \text{tg } x. \quad (38)$$

Abb. 94 stellt die Kurve der Funktion  $y = \text{ctg } x$  dar.

Die Kotangensfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode  $\pi$ . Es ist

$$\text{ctg}(x + k\pi) = \text{ctg } x. \quad (39)$$

Wie aus den geometrischen Darstellungen der trigonometrischen Funktionen hervorgeht, gehört zu jeder reellen Zahl  $x$  (als Winkel  $x$  im Bogenmaß) eine bestimmte reelle Zahl  $y$  aus dem Bereich  $-1 \leq y \leq +1$  als Funktionswert der Sinus- bzw. Kosinusfunktion. Zu jeder reellen Zahl  $x$  mit Ausnahme der Stellen  $\frac{\pi}{2} \pm n\pi$  bzw.  $\pm n\pi$  gehört eine bestimmte reelle Zahl  $y$  als Funktionswert der Tangens- bzw. Kotangensfunktion.

## Aufgaben

## 1. Das Bogenmaß eines Winkels

✗ Rechne die folgenden im Gradmaß gegebenen Winkel in Bogenmaß um:

- a)  $1^\circ$       b)  $0,1^\circ$       c)  $0,01^\circ$       d)  $1'$       e)  $1''$       f)  $45^\circ$   
 g)  $120^\circ$       h)  $75^\circ$       i)  $300^\circ$       k)  $-180^\circ$       l)  $900^\circ$       m)  $32^\circ$   
 n)  $67,5^\circ$       o)  $102,7^\circ$       p)  $256,58^\circ$       q)  $318,04^\circ$       r)  $-177,42^\circ$       s)  $1125,17^\circ$ !

2. Rechne die folgenden im Bogenmaß gegebenen Winkel in Gradmaß um:

- a)  $\frac{\pi}{3}$       b)  $\frac{\pi}{5}$       c)  $\frac{\pi}{10}$       d)  $\frac{\pi}{15}$       e)  $\frac{\pi}{30}$       f)  $\frac{\pi}{180}$   
 g)  $\frac{3}{2}\pi$       h)  $\frac{3}{4}\pi$       i)  $\frac{7}{8}\pi$       k)  $\frac{\pi}{12}$       l)  $2,5\pi$       m)  $37\pi$   
 n)  $1,13\pi$       o)  $0,1$       p)  $0,01$       q)  $2$       r)  $1,5$       s)  $3,04$   
 t)  $-\pi$       u)  $-\frac{2}{3}\pi$       v)  $-3$       w)  $-0,703$       x)  $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$       y)  $12!$

3. Berechne die Bogenlängen auf einem Kreis mit dem Radius  $r = 5$  cm für die Zentriwinkel

- a)  $36,3^\circ$       b)  $117,45^\circ$       c)  $255,58^\circ$ !

4. Berechne die Bogenlänge zum Zentriwinkel  $1^\circ$  auf einem Kreis mit dem Radius

- a)  $r = 1$  cm      b)  $r = 2$  cm      c)  $r = 4$  cm!

5. Bis zu welchen Winkeln stimmen die Zahlenwerte von  $\arcsin x$

- a) mit denen von  $\sin x$ ,      b) mit denen von  $\operatorname{tg} x$   
 bis auf 3 Dezimalstellen überein?

6. Nach Schülke-Tafel 6 lassen sich die Sinus- und die Tangenswerte von Winkeln zwischen  $0^\circ$  und  $4,99^\circ$  bestimmen. Man format unter Verwendung der für kleine Winkel gültigen Beziehung  $\sin x \approx \arcsin x$  um. Zu beachten ist weiter, daß  $\arcsin x$  dem Winkel  $x$  (im Gradmaß!) proportional ist. Bestimme die folgenden Funktionswerte:

- a)  $\sin 0,0001^\circ$       b)  $\sin 0,0018^\circ$       c)  $\sin 0,000094^\circ$       d)  $\sin 1''$   
 e)  $\operatorname{tg} 0,0001^\circ$       f)  $\operatorname{tg} 0,000313^\circ$       g)  $\operatorname{tg} 0,0000847^\circ$       h)  $\operatorname{tg} 0,5''$ !

7. Bestimme die Winkel  $x$  zu den nachstehenden Funktionswerten:

- a)  $\sin x = 0,0000238$       b)  $\sin x = 3,76 \cdot 10^{-6}$       c)  $\sin x = 8,24 \cdot 10^{-7}$   
 d)  $\operatorname{tg} x = 0,0000104$       e)  $\operatorname{tg} x = 4,43 \cdot 10^{-6}$       f)  $\operatorname{tg} x = 9,83 \cdot 10^{-7}$ !

8. Bestimme die folgenden Funktionswerte:

- a)  $\sin \frac{\pi}{3}$       b)  $\sin \frac{3}{8}\pi$       c)  $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$       d)  $\sin 1$       e)  $\sin 0,43$   
 f)  $\sin(-1,87)$       g)  $\sin 2,163$       h)  $\cos \frac{\pi}{4}$       i)  $\cos \frac{4}{3}\pi$       k)  $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$   
 l)  $\cos 1,31\pi$       m)  $\cos 0,5$       n)  $\cos(-1)$       o)  $\cos 2,897$       p)  $\cos(-2,17)!$

9. Bestimme die folgenden Funktionswerte:

- a)  $\operatorname{tg} \pi$       b)  $\operatorname{tg} \frac{2}{7}\pi$       c)  $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{20}\right)$       d)  $\operatorname{tg} 0,7$       e)  $\operatorname{tg}(-1,2)$   
 f)  $\operatorname{tg} 5,943$       g)  $\operatorname{tg} 1,052$       h)  $\operatorname{ctg}(-\pi)$       i)  $\operatorname{ctg} \frac{2}{5}\pi$       k)  $\operatorname{ctg} 1,8\pi$   
 l)  $\operatorname{ctg} 0,05$       m)  $\operatorname{ctg} \sqrt{2}$       n)  $\operatorname{ctg} 3$       o)  $\operatorname{ctg}(-1,32)$       p)  $\operatorname{ctg}(-0,48\pi)!$

10. Suche die Logarithmen der Beträge der folgenden Funktionswerte auf:

- a)  $\sin \frac{5}{9} \pi$       b)  $\sin 0,1 \pi$       ~~c)  $\sin 6,1$~~       d)  $\cos i \frac{3}{4} \pi$       e)  $\cos (-2,4)$   
 f)  $\cos 3,515$       g)  $\operatorname{tg} \frac{13}{20} \pi$       ~~h)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{100}$~~       i)  $\operatorname{ctg} 5,5$       k)  $\operatorname{ctg} (-0,724)!$

11. Gib die Winkel  $x$  zu den folgenden Funktionswerten im Bogenmaß an:

- a)  $\sin x = 0,9511$       b)  $\sin x = 0,6428$       c)  $\sin x = 0,9736$   
~~d)  $\sin x = -0,1951$~~       e)  $\sin x = 3,23 \cdot 10^{-6}$       f)  $\cos x = \frac{1}{2} \sqrt{2}$   
 g)  $\cos x = 0,4067$       h)  $\cos x = -0,8805$       ~~i)  $\cos x = 0,2190$~~   
 k)  $\operatorname{tg} x = 1$       l)  $\operatorname{tg} x = 0,7265$       m)  $\operatorname{tg} x = -3,630$   
 n)  $\operatorname{tg} x = -0,5924$       o)  $\operatorname{tg} x = 5,18 \cdot 10^{-5}$       p)  $\operatorname{ctg} x = 0$   
 q)  $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$       r)  $\operatorname{ctg} x = 2,762$       s)  $\operatorname{ctg} x = -0,5080!$

12. Welche Winkel  $x$ , im Bogenmaß gemessen, ergeben sich aus den folgenden Logarithmen der trigonometrischen Funktionen:

- a)  $\lg \sin x = 0,8495 - 1$ , ( $\sin x > 0$ )      b)  $\lg \sin x = 0,7990 - 3$ , ( $\sin x > 0$ )  
 c)  $\lg \sin x = 0,5686 - 6$ , ( $\sin x > 0$ )      d)  $\lg \cos x = 0,9730 - 1$ , ( $\cos x > 0$ )  
 e)  $\lg |\cos x| = 0,8026 - 1$ , ( $\cos x < 0$ )      ~~f)  $\lg \cos x = 0,9278 - 1$ , ( $\cos x > 0$ )~~  
~~g)  $\lg \operatorname{tg} x = 0,0762$ , ( $\operatorname{tg} x > 0$ )~~      h)  $\lg \operatorname{tg} x = 0,8699 - 2$ , ( $\operatorname{tg} x > 0$ )  
 i)  $\lg |\operatorname{ctg} x| = 0,0456$ , ( $\operatorname{ctg} x < 0$ )      k)  $\lg \operatorname{ctg} x = 0,7741 - 1$ , ( $\operatorname{ctg} x > 0$ )

## II. Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen

13. Untersuche die Symmetrieverhältnisse (Achsensymmetrie und zentrische Symmetrie) bei den Kurven der trigonometrischen Funktionen in den folgenden Bereichen:

- a)  $0 \dots 2\pi$       b)  $0 \dots \pi$       c)  $-\frac{\pi}{2} \dots +\frac{\pi}{2}!$

14. Unter Benutzung der Formeln (1) und (2) ist zu zeigen, daß die Tangens- und die Kotangensfunktion die Periode  $\pi$  besitzen!

15. Bestimme die folgenden Funktionswerte:

- a)  $\sin 5\pi$       b)  $\sin 7\frac{3}{8}\pi$       c)  $\sin (-15,4\pi)$       d)  $\sin 10,5$   
~~e)  $\cos (-3\pi)$~~       f)  $\cos 2\frac{1}{2}\pi$       g)  $\cos 100\pi$       h)  $\cos 6,53$   
~~i)  $\operatorname{tg} \frac{3}{2}\pi$~~       k)  $\operatorname{tg} 1,7\pi$       l)  $\operatorname{tg} (-2\frac{1}{12}\pi)$       m)  $\operatorname{tg} 3,487$   
 n)  $\operatorname{ctg} (-\frac{10}{9}\pi)$       o)  $\operatorname{ctg} 14\pi$       p)  $\operatorname{ctg} 14$       q)  $\operatorname{ctg} (-3,206)!$

16. Suche die Logarithmen zu den Beträgen der Funktionen der Aufgaben 15 a) bis q)!

17. Gib die allgemeinen Lösungen für die folgenden Funktionswerte im Bogenmaß an:

- a)  $\sin x = \frac{1}{2} \sqrt{3}$       b)  $\sin x = -\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$       ~~c)  $\sin x = 0,5052$~~   
 d)  $\cos x = \frac{1}{2} \sqrt{2}$       e)  $\cos x = -\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$       ~~f)  $\cos x = 0,9340$~~   
 g)  $\operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}$       h)  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \sqrt{3}$       ~~i)  $\operatorname{tg} x = 5,823$~~   
 k)  $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$       l)  $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} - 2$       ~~m)  $\operatorname{ctg} x = 0,1341!$~~

18. Gib die allgemeinen Lösungen zu den folgenden Logarithmen der trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß an:

- |  |  |
|--|--|
| a) $\lg \sin x = 0.7859 - 3, (\sin x > 0)$                             | b) $\lg  \sin x  = 0.9750 - 1, (\sin x < 0)$                         |
| c) $\lg \cos x = 0.8436 - 2, (\cos x > 0)$                             | d) $\lg  \cos x  = 0.8436 - 1, (\cos x < 0)$                         |
| e) $\lg \operatorname{tg} x = 0.4189 - 1, (\operatorname{tg} x > 0)$   | f) $\lg  \operatorname{tg} x  = 0.7732, (\operatorname{tg} x < 0)$   |
| g) $\lg \operatorname{ctg} x = 0.5066 - 1, (\operatorname{ctg} x > 0)$ | h) $\lg  \operatorname{ctg} x  = 1.1178, (\operatorname{ctg} x < 0)$ |

### III. Sinus- und Kosinusskala

19. Stelle die Funktion  $\sin x$  in einem rechtwinkligen  $xy$ -Achsenkreuz geometrisch dar, dessen  $x$ -Achse eine Sinusteilung und dessen  $y$ -Achse eine gleichmäßige Teilung trägt! Man nennt diese Darstellung eine Verstreckung der Sinuskurve. Diese Darstellung ist beim Interpolieren vorteilhafter verwendbar als die übliche Darstellung der Sinusfunktion in einem  $xy$ -Achsenkreuz, bei dem beide Achsen gleichmäßig geteilt sind.

20. Stelle die Funktion  $\cos x$  in einem rechtwinkligen  $xy$ -Achsenkreuz dar, dessen  $x$ -Achse eine Sinusteilung von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  und dessen  $y$ -Achse eine gleichmäßige Teilung trägt!

## 11. Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

### a) Sinus- und Kosinusfunktion einer Winkelsumme $x + y$

Folgende Aufgabe sei gestellt: Gegeben sind die Werte der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion für zwei Argumente  $x$  und  $y$ . Es sollen die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion der Summe der Argumente,  $\sin(x + y)$  bzw.  $\cos(x + y)$ , durch die Sinus- und Kosinuswerte der Einzelargumente  $\sin x, \sin y, \cos x$  und  $\cos y$  dargestellt werden.

Lösung: Die Aufgabe werde zunächst unter der Bedingung gelöst, daß die (positiven) Winkel  $x$  und  $y$  im I. oder II. Quadranten liegen, ihre Summe aber kleiner als  $\pi$  bleibt.  $x$  und  $y$  seien Winkel eines schiefwinkligen Dreiecks. Nach dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck ist dann der dritte Winkel  $\pi - (x + y) = z$ . Im Projektionssatz, Formel 12 auf Seite 40,

$$\begin{aligned} b &= c \cos x + a \cos z, \\ c &= a \cos y + b \cos x, \end{aligned}$$

können wir nach dem Sinussatz  $a$  durch  $k \cdot \sin x$ ,  $b$  durch  $k \cdot \sin y$ ,  $c$  durch  $k \cdot \sin z$  ersetzen. Dies ergibt, da der Proportionalitätsfaktor  $k$  durch Dividieren wegfällt,

$$\begin{aligned} \sin y &= \sin z \cos x + \sin x \cos z, \\ \sin z &= \sin x \cos y + \sin y \cos x. \end{aligned} \tag{40}$$

Mit Benutzung der Quadrantenrelation  $\sin(\pi - u) = \sin u$  ergibt sich aus der zweiten Gleichung von (40)

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \tag{41}$$

Eine entsprechende Formel läßt sich für den Kosinus der Winkelsumme  $x + y$  ableiten. Aus der ersten Gleichung von (40) berechnen wir zunächst  $\sin x \cos z$ ,

$$\begin{aligned} \sin x \cos z &= \sin y - \sin z \cos x \\ &= \sin y - \cos x (\sin x \cos y + \sin y \cos x) \\ &= -\cos x \sin x \cos y + \sin y (1 - \cos^2 x) \\ &= -\cos x \sin x \cos y + \sin y \sin^2 x. \end{aligned}$$

Dividieren wir beide Seiten durch  $\sin x$ , so ergibt sich

$$\cos z = -\cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Ersetzen wir den Winkel  $z$  durch  $\pi - (x + y)$ , so erhalten wir

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \quad (42)$$

Die Formeln (41) und (42) bilden die **Additionstheoreme** der Sinus- und der Kosinusfunktion. Das zu ihrer Ableitung benutzte Verfahren heißt „Dreiecksmethode“.

Wenn wir in den Formeln (41) und (42)  $x$  statt  $y$  schreiben, so bekommen wir die **Doppelwinkelformeln**

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x. \end{aligned} \quad (43)$$

Diese Formeln können wir auch als **Halbwinkelformeln** schreiben, wenn wir  $2x$  durch  $x$ , also  $x$  durch  $\frac{x}{2}$  ersetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme und der Doppelwinkelformeln leiten wir die Formeln für die Sinus- und Kosinusfunktion des dreifachen Winkels ab. Es ist

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\ &= \sin x \cos^2 x - \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x \\ &= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 3 \sin^3 x - \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \\ \cos 3x &= \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \end{aligned}$$

#### b) Erweiterung des Gültigkeitsbereiches für die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion

Die Winkel  $x$  und  $y$  seien positiv und kleiner als  $\pi$ , die Summe  $x + y$  aber größer als  $\pi$ . Um die Formeln (41) und (42) anwenden zu können, setzen wir

$$x' = \pi - x, \quad y' = \pi - y.$$

Dann wird

$$x' + y' = 2\pi - x - y < \pi.$$

Für  $x'$  und  $y'$  sind die Bedingungen erfüllt, unter denen die Gleichungen (41) und (42) bewiesen sind. Wir können daher schreiben:

$$\begin{aligned} \sin(2\pi - x - y) &= \sin(\pi - x) \cos(\pi - y) + \cos(\pi - x) \sin(\pi - y) \\ \cos(2\pi - x - y) &= \cos(\pi - x) \cos(\pi - y) - \sin(\pi - x) \sin(\pi - y). \end{aligned}$$



Auf Grund bestehender Quadrantenrelationen setzen wir

$$\begin{array}{ll} \sin(2\pi - x - y) = -\sin(x + y), & \cos(2\pi - x - y) = \cos(x + y) \\ \sin(\pi - x) = \sin x, & \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - y) = \sin y, & \cos(\pi - y) = -\cos y \end{array}$$

und erhalten wieder die Formeln (41) und (42).

**Beweis der Allgemeingültigkeit der Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion:**

Man kann eine ganze Zahl  $k$  immer so bestimmen, daß  $x + k\pi$  zwischen 0 und  $\pi$  liegt. Ist beispielsweise  $x = \frac{10\pi}{3}$ , so liegt  $x - 3\pi = \frac{\pi}{3}$  zwischen 0 und  $\pi$ . Wie groß ist in diesem Falle  $k$ ? Welchem Winkel im Gradmaß entspricht  $\frac{10\pi}{3}$ ?

Für jedes beliebige  $x$  und jedes  $y$  zwischen 0 und  $\pi$  gilt also

$$\begin{array}{l} \sin(x + y + k\pi) = \sin(x + k\pi) \cos y + \cos(x + k\pi) \sin y \\ \cos(x + y + k\pi) = \cos(x + k\pi) \cos y - \sin(x + k\pi) \sin y. \end{array} \quad (45)$$

Ist  $k$  eine gerade Zahl, so setzen wir  $k = 2k'$  und erhalten wegen der Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion

$$\begin{array}{l} \sin(x + y + k\pi) = \sin(x + y + 2k'\pi) = \sin(x + y) \\ \cos(x + y + k\pi) = \cos(x + y + 2k'\pi) = \cos(x + y) \\ \sin(x + k\pi) = \sin(x + 2k'\pi) = \sin x \\ \cos(x + k\pi) = \cos(x + 2k'\pi) = \cos x. \end{array}$$

Ist  $k$  eine ungerade Zahl, so setzen wir  $k = 2k' + 1$  und erhalten

$$\begin{array}{l} \sin(x + y + k\pi) = \sin(x + y + \pi + 2k'\pi) = \sin(x + y + \pi) = -\sin(x + y) \\ \cos(x + y + k\pi) = \cos(x + y + \pi + 2k'\pi) = \cos(x + y + \pi) = -\cos(x + y) \\ \sin(x + k\pi) = \sin(x + \pi + 2k'\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x \\ \cos(x + k\pi) = \cos(x + \pi + 2k'\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x. \end{array}$$

In beiden Fällen ergeben sich aus den Gleichungen (45) wiederum die Formeln (41) und (42). Nach dem gleichen Prinzip beweisen wir die Gültigkeit der Additionstheoreme für alle  $x$  und alle  $y$ . Führe die Rechnung durch und begründe die einzelnen Schritte!

Die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion gelten für zwei beliebige (positive oder negative) Winkel  $x$  und  $y$ . Wir können daher  $y$  durch  $-y$  ersetzen und erhalten

$$\begin{array}{l} \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \end{array} \quad (46)$$

Welche Beziehungen sind in diesen Gleichungen ausgesprochen? Welche Relationen sind bei ihrer Herleitung zu benutzen?

**Zusammenstellung der Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktion:**

$$\begin{array}{l} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \end{array} \quad (I)$$

**c) Summe und Differenz zweier Sinus- bzw. Kosinusfunktionen**

Während der vorige Abschnitt von Funktionen der Winkelsummen und Winkeldifferenzen handelte, sollen jetzt Formeln für die Summen und die Differenzen der Winkelfunktionen zusammengestellt werden. Diese ergeben sich als Folgerungen aus den Additionstheoremen (I).

Wenn wir die Gleichung (41) oder (42) und eine der Gleichungen des Systems (46) addieren bzw. subtrahieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin(x+y) + \sin(x-y) &= 2 \sin x \cos y \\ \sin(x+y) - \sin(x-y) &= 2 \cos x \sin y \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2 \cos x \cos y \\ \cos(x+y) - \cos(x-y) &= -2 \sin x \sin y.\end{aligned}\tag{II}$$

Schreiben wir  $x'$  und  $y'$  anstatt  $x$  bzw.  $y$  und setzen wir

$$\begin{aligned}x' + y' &= x \\ \text{und } x' - y' &= y,\end{aligned}$$

so entstehen aus dem System (II) die Gleichungen

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.\end{aligned}\tag{III}$$

Welche Beziehungen werden durch das Formelsystem (III) ausgesprochen?

**d) Die Additionstheoreme der Tangens- und der Kotangensfunktion**

Die Additionstheoreme der Tangensfunktion und der Kotangensfunktion finden wir als Folgerungen aus den Additionstheoremen der Sinus- und der Kosinusfunktion. Dividieren wir die Gleichung (41) durch die Gleichung (42), so ergibt sich

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Wenn wir Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite durch das Produkt  $\cos x \cos y$  dividieren und berücksichtigen, daß der Quotient von Sinus und Kosinus ein und desselben Winkels den Tangens dieses Winkels ergibt, so erhalten wir

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.\tag{47}$$

Dividieren wir die Gleichung (42) durch die Gleichung (41) und formen wir entsprechend um, so ergibt sich

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}.\tag{48}$$

Führe die Rechnung durch!

Setzen wir in den Gleichungen (47) und (48) —  $y$  an Stelle von  $y$ , so erhalten wir als Formeln für Tangens und Kotangens der Winkeldifferenz

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x-y) &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\ \operatorname{ctg}(x-y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}.\end{aligned}$$

Welche Relationen wurden dabei benutzt?

Zusammenstellung der Additionstheoreme für die Tangens- und Kotangensfunktion:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\ \operatorname{ctg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.\end{aligned}\quad (\text{IV})$$

## Aufgaben

### I. Sinus- und Kosinusfunktion

1. Leite die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion am Einheitskreis ab („Einheitskreismethode“):

Anleitung: Zeichne spezielle Figuren für die folgenden Fälle:

- $x + y$  im I. Quadranten (Abb. 95),
- $x, y$  im I.,  $x + y$  im II. Quadranten,
- $x$  oder  $y$  und  $x + y$  im II. Quadranten!

2. Leite die Formeln für  $\sin(x-y)$  und  $\cos(x-y)$  nach der Einheitskreismethode ab (Abb. 96)!

3. Leite die Formeln für  $\sin(x-y)$  und  $\cos(x-y)$  nach der Dreiecksmethode ab (Abb. 97)!

4. Leite aus Abb. 98 das Additionstheorem der Sinusfunktion ab!

Anleitung: Gehe davon aus, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke  $PAC$  und  $PBC$  gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks  $PAB$  ist, und benutze, um Winkel einzuführen, entsprechende Formeln für den Flächeninhalt!

5. Zeichne eine entsprechende Figur wie die der vorigen Aufgabe für den Fall, daß ein Winkel stumpf ist, und leite daraus die Additionsformel der Sinusfunktion ab!

6. Leite die Formel für  $\sin(\alpha - \beta)$  aus einer Figur ab, welche der der Aufgabe 4 entspricht!

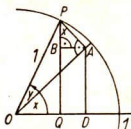


Abb. 95

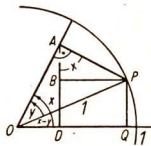


Abb. 96



Abb. 97

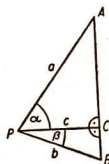


Abb. 98

7. Bestimme das Additionstheorem der Kosinusfunktion aus dem der Sinusfunktion unter Verwendung der Quadrantenbeziehung  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ !
8. Stelle die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion als reine Beziehungen zwischen Sinus- bzw. Kosinusfunktionen dar!
9. Leite die Formeln  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$  und  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$  aus dem Additionstheorem (II) ab!
10. Berechne  $\sin(x+y)$  und  $\sin(x-y)$  aus  $\sin x$  und  $\sin y$ !
- a)  $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$     b)  $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$     c)  $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$     d)  $\sin x = 0,8$   
 $\sin y = \frac{1}{2}$      $\sin y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$      $\sin y = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$      $\sin y = 0,3$
11. Berechne  $\cos(x+y)$  und  $\cos(x-y)$  aus  $\cos x$  und  $\cos y$ !
- a)  $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$     b)  $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$     c)  $\cos x = -\frac{1}{4}$     d)  $\cos x = -0,2$   
 $\cos y = \frac{1}{2}$      $\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$      $\cos y = \frac{3}{4}$      $\cos y = 0,9$
12. Leite die Mollweideschen Gleichungen aus dem Sinussatz ab!

### II. Tangens- und Kotangensfunktion

13. Leite aus den Formeln für  $\sin(x-y)$  und  $\cos(x-y)$  die Tangens- und Kotangensfunktion der Winkeldifferenz ab!
14. Bestimme das Additionstheorem der Kotangensfunktion aus dem der Tangensfunktion!
15. Berechne  $\operatorname{tg}(x+y)$  und  $\operatorname{tg}(x-y)$  aus  $\operatorname{tg} x$  und  $\operatorname{tg} y$ !
- a)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$     b)  $\operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}$     c)  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$     d)  $\operatorname{tg} x = 3$   
 $\operatorname{tg} y = 1$      $\operatorname{tg} y = \frac{1}{3}\sqrt{3}$      $\operatorname{tg} y = -1$      $\operatorname{tg} y = 2$
16. Berechne  $\operatorname{ctg}(x+y)$  und  $\operatorname{ctg}(x-y)$  aus  $\operatorname{ctg} x$  und  $\operatorname{ctg} y$ !
- a)  $\operatorname{ctg} x = 1$     b)  $\operatorname{ctg} x = -1$     c)  $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} - 2$     d)  $\operatorname{ctg} x = -10$   
 $\operatorname{ctg} y = 2 + \sqrt{3}$      $\operatorname{ctg} y = \sqrt{3}$      $\operatorname{ctg} y = \frac{1}{2}$      $\operatorname{ctg} y = 4$
17. Leite Formeln für  $\operatorname{tg} 2x$  und  $\operatorname{ctg} 2x$  ab!

## 12. Goniometrie

### a) Goniometrische Formeln

Als **Trigonometrie** wurde bisher der Zweig der Mathematik bezeichnet, mit dessen Hilfe man aus Zahlenangaben für die Größen einzelner Seiten und Winkel eines Dreiecks die übrigen Stücke berechnet. Demgegenüber wird die Lehre von Eigenschaften und Zusammenhängen trigonometrischer Funktionen, die nicht in unmittelbarer Beziehung zur Dreiecksberechnung stehen und ohne Beschränkung der Winkelgröße gelten, auch **Goniometrie** genannt. Gewöhnlich wird beides unter dem Begriff **Trigonometrie** zusammengefaßt; man versteht darunter allgemein die Lehre von den trigonometrischen Funktionen. Sie schließt sowohl die

Untersuchung der rein mathematischen Beziehungen der trigonometrischen Funktionen (Goniometrie) als auch deren Anwendung bei der Berechnung des Dreiecks, Vierecks usw. ein.

Die wichtigsten goniometrischen Formeln haben wir bereits abgeleitet. Es gehören dazu:

- die Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens ein und desselben Winkels,
- die Quadrantenbeziehungen,
- die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen positiver und negativer Winkel,
- die Formeln, welche die Periodizität angeben,
- die Additionstheoreme und
- die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen des zweifachen, dreifachen usw. Winkels und solchen des einfachen Winkels.

Stelle alle im Text und in den Aufgaben aufgetretenen goniometrischen Formeln zusammen!

### b) Goniometrische Gleichungen

Bestimmungsgleichungen, welche die Unbekannte  $x$  im Argument trigonometrischer Funktionen enthalten, heißen goniometrische Gleichungen. Zu ihrer Lösung stehen zwei Verfahren zur Verfügung.

#### Zeichnerische Lösung

In einfachen Fällen, z. B. für die goniometrische Gleichung

$$\sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) - 1,5 = 0,$$

stellt man die als Summanden auftretenden Funktionen  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  usw. geometrisch dar und zeichnet dazu die Funktion  $y = u + v$ . Die  $y$ -Werte werden rechnerisch durch algebraische Addition oder geometrisch durch Addition bzw. Subtraktion der Ordinaten zum gleichen Wert  $x$  gefunden. Die resultierende Funktion  $y = f(x) = u + v$  stellt die Überlagerung der Funktionskurven  $u$  und  $v$  dar. Man bestimmt die Nullstellen der Funktion  $y = f(x) = u(x) + v(x)$  und hat damit die Lösungen der gegebenen goniometrischen Gleichung (siehe das 1. Beispiel zum Typ 3 goniometrischer Gleichungen).

#### Rechnerische Lösung

Man formt die Bestimmungsgleichung, z. B. die goniometrische Gleichung  $\sin(x + \frac{1}{12}\pi) \cdot \cos(x - \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$ , mit Hilfe goniometrischer Formeln um (siehe das 2. Beispiel zum Typ 3 goniometrischer Gleichungen). Ziel ist, eine Gleichung mit nur einer trigonometrischen Funktion  $f(x)$  des unbekanntes Argumentes  $x$  zu erhalten. Dabei steht  $f$  als Funktionszeichen für eine der trigonometrischen Funktionen,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$  oder  $\operatorname{ctg}$ . Die Gleichung verwandelt man durch die Substitution  $f(x) = z$  in eine algebraische Gleichung für  $z$ , die nach  $z$  aufgelöst wird. Aus  $f(x) = z$  findet man die Werte für den Winkel  $x$ .



Wir unterscheiden folgende vier Typen goniometrischer Gleichungen:

**Typ 1.** Bestimmungsgleichungen, die nur eine trigonometrische Funktion des Argumentes  $x$  enthalten.

Beispiel:  $\sin^2 x - 0,25 = 0$ .

Bei der rechnerischen Lösung setzt man  $f(x) = z$ , löst die Gleichung nach  $z$  auf und findet aus den errechneten  $z$ -Werten die Winkelwerte  $x$ .

**Typ 2.** Bestimmungsgleichungen, die mehrere trigonometrische Funktionen des Argumentes  $x$  enthalten.

Von diesem Typ soll die Bestimmungsgleichung  $a \sin x + b \cos x + c = 0$  näher behandelt werden.

Die Gleichung wird für spezielle Werte  $a$ ,  $b$  und  $c$  zeichnerisch oder rechnerisch gelöst. Da  $\sin x$  und  $\cos x$  Zahlen zwischen  $-1$  und  $+1$  sein müssen, ist die Gleichung nicht für alle Werte  $a$ ,  $b$  und  $c$  lösbar.

Es seien die folgenden Lösungsverfahren genannt:

1.  $\sin x$  und  $\cos x$  müssen sowohl die Gleichung  $a \sin x + b \cos x + c = 0$  als auch gleichzeitig die Gleichung  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  erfüllen. Daraus ergibt sich ein zeichnerisches Lösungsverfahren. Setzen wir  $\sin x = v$  und  $\cos x = u$ , so lassen sich  $u$  und  $v$  als Schnittpunkte der Geraden  $av + bu + c = 0$  mit dem Einheitskreis  $u^2 + v^2 = 1$  in einem  $uv$ -Achsenkreuz bestimmen.
2. Setzt man  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  und  $\sin x = z$ , so erhält man eine Wurzelgleichung, die auf eine quadratische Gleichung für  $z$  führt.
3. Die quadratische Gleichung umgeht man, wenn man einen Hilfswinkel  $\kappa$  durch die Gleichung

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \kappa = \frac{\sin \kappa}{\cos \kappa}, \quad (0^\circ < \kappa < 90^\circ),$$

einführt. Man erhält dann

$$\sin x + \frac{\sin \kappa \cos x}{\cos \kappa} = -\frac{c}{a} \quad \text{oder} \quad \sin(x + \kappa) = \frac{-c \cdot \cos \kappa}{a}.$$

Bei einer Diskussion der Gleichung  $a \sin x + b \cos x + c = 0$  kommt es darauf an festzustellen, für welche Werte  $a$ ,  $b$  und  $c$  sie überhaupt lösbar ist.

Aus den angeführten Lösungsmethoden findet man die Beziehungen zwischen den Konstanten als Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung.

**Typ 3.** Bestimmungsgleichungen, die trigonometrische Funktionen verschiedener Argumente, aber mit einer Unbekannten enthalten.

Bei der rechnerischen Methode formt man zuerst mit Hilfe der Additionstheoreme so um, daß man eine Gleichung vom Typ 1 erhält, und verfährt dann, wie bei diesem angegeben.

1. Beispiel:  $\sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) - 1,5 = 0$ .

**Zeichnerische Lösung**

Die zugehörige Funktion ist  $y = f(x) = \sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) - 1,5$ . Man überlagert einander die Funktionskurven  $u = \sin x$  und  $v = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$  und ver-

schiebt die resultierende Kurve  $\bar{y} = u + v$  parallel zur  $y$ -Achse um  $-1,5$ . Die Schnittpunkte der transformierten Kurve  $y = \bar{y} - 1,5 = u + v - 1,5$  mit der  $x$ -Achse (oder der Geraden  $y = 0$ ) ergeben die Lösungen der Bestimmungsgleichung  $\sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) - 1,5 = 0$ .

Zeichnerisch einfacher ist es jedoch, die resultierende Kurve  $\bar{y}$  fest stehen zu lassen und ihre Schnittpunkte mit der Parallelen zur  $x$ -Achse  $y = +1,5$  zu bestimmen, d. h. das  $xy$ -Achsenkreuz parallel zu sich in der  $y$ -Richtung um  $+1,5$  bei feststehender Funktionskurve zu verschieben (Abb. 99).

Führe die Parallelverschiebung der Kurve  $\bar{y} = f_1(\bar{x})$  bei feststehendem Achsenkreuz und die Parallelverschiebung des Achsenkreuzes bei feststehender Funktionskurve praktisch durch! Warum sind beide Verfahren gleichwertig?

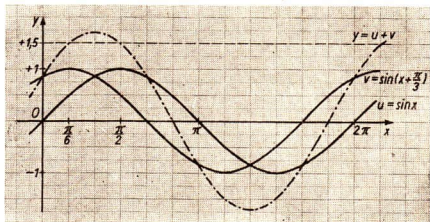


Abb. 99

2. Beispiel:  $\sin(x + \frac{1}{12}\pi) \cdot \cos(x - \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$ .

Rechnerische Lösung

Man setzt  $x + \frac{1}{12}\pi = \frac{u+v}{2}$  und  $x - \frac{1}{4}\pi = \frac{u-v}{2}$ .

Daraus folgt  $u = 2x - \frac{1}{6}\pi$ ,  $v = \frac{1}{3}\pi$ .

Unter Benutzung der Formeln (III) erhält man

$$\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) + \sin \frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$$

oder

$$\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2x_1 - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\pi$$

$$2x_2 - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

$$x_2 = \frac{5}{12}\pi.$$

Proben:  $\sin \frac{1}{3}\pi \cdot \cos 0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\sin \frac{1}{2}\pi \cdot \cos \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Sonderfälle dieses Typs sind Bestimmungsgleichungen, welche trigonometrische Funktionen des doppelten oder dreifachen Argumentes neben solchen des einfachen enthalten.

Man benutzt in diesem Falle beim rechnerischen Lösungsverfahren zur Umformung die Doppelwinkelformeln bzw. diejenigen Formeln, die die trigonometrischen Funktionen des dreifachen Argumentes auf solche des einfachen zurückführen.

**Typ 4.** Systeme goniometrischer Gleichungen mit zwei Unbekannten  $x$  und  $y$ .

Beispiel:  $x + y = \frac{1}{3}\pi$ ,  $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{2}{3}$ .

Unter Anwendung goniometrischer Formeln sucht man beim rechnerischen Verfahren zunächst eine Unbekannte durch die andere zu ersetzen, so daß man eine goniometrische Gleichung mit einer Unbekannten erhält. Diese wird dann weiter so umgeformt, daß eine Gleichung vom Typ 1 entsteht.

## Aufgaben

### I. Goniometrische Formeln

1. Beweise die folgenden Formeln:

$$\text{a) } \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \text{b) } \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} !$$

2. Beweise die folgenden Formeln:

$$\text{a) } \sin(30^\circ + \alpha) = \cos \alpha - \sin(30^\circ - \alpha) \quad \text{b) } \cos(30^\circ + \alpha) = \cos(30^\circ - \alpha) - \sin \alpha !$$

Zeige, daß man mit Hilfe dieser Formeln aus den Sinus- und Kosinuswerten der Winkel bis zu  $30^\circ$  die Sinus- und Kosinuswerte aller größeren (spitzen) Winkel finden kann!

3. Beweise die Formeln

$$\text{a) } \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha), \quad \text{b) } \operatorname{tg}(30^\circ + 2\alpha) = \frac{1}{2}[\operatorname{ctg}(30^\circ - \alpha) - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha)]!$$

4. Beweise die nachstehenden Formeln:

$$\text{a) } \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x = \sin(x + y) \cdot \sin(x - y)$$

$$\text{b) } \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x = \cos(x + y) \cdot \cos(x - y)!$$

### II. Goniometrische Gleichungen mit einer Funktion des Argumentes $x$

5. Löse die im Text gegebenen beiden ersten Beispiele zeichnerisch oder rechnerisch!

6. Welche Winkel genügen den folgenden Gleichungen:

$$\text{a) } \sin^2 x = 0,84, \quad \text{b) } \cos^2 x = \frac{1}{3}, \quad \text{c) } \operatorname{tg}^2 x = 3, \quad \text{d) } \operatorname{ctg}^2 x = 1,5?$$

### III. Goniometrische Gleichungen mit mehreren Funktionen des Argumentes $x$ . Die Bestimmungsgleichung $a \sin x + b \cos x + c = 0$

7. Löse die goniometrische Gleichung  $(1 + \sin \alpha) \cos \alpha - \frac{10}{9} = 0$  durch eine Zeichnung!

Anleitung: Forme das Produkt zunächst in eine Summe trigonometrischer Funktionen um!

8. Zeichne die Funktion  $y = f(x) = \sin x + \cos x + c$  für  $c = 0$ ! Für welche Werte von  $c$  besitzt die Funktion a) zwei Nullstellen, b) eine Nullstelle, c) keine Nullstelle im Bereich  $0 \leq x < 2\pi$ ?

9. Zeichne die Funktion  $y = \sin x - \cos x + c$  für  $c = 0$  und untersuche wie vorher die Abhängigkeit der Zahl der Nullstellen vom Wert  $c$ !

10. Löse die folgenden Gleichungen zeichnerisch und rechnerisch:

$$\text{a) } 3 \sin x - 4 \cos x = 0 \quad \text{b) } \sin x = -2 \cos x!$$

11. Löse die Gleichung  $a \sin x + b \cos x + c = 0$  für die folgenden Sonderfälle:

$$\text{a) } a = c \quad \text{b) } b = c \quad \text{c) } a = -c \quad \text{d) } b = -c!$$

Untersuche, für welche Wertebereiche der Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Gleichung lösbar ist!

12. Untersuche, welchen Einfluß eine Veränderung der Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$  in der Funktion  $y = f(x) = a \sin x + b \cos x + c$  auf Gestalt und Lage der Funktionskurve  $y = f(x)$  ausübt, wenn man von dem Sonderfall der Aufgabe 8 ausgeht! Welche Hinweise ergeben sich daraus für die Lösbarkeit der zugehörigen Bestimmungsgleichung

$$f(x) = a \sin x + b \cos x + c = 0$$

in Abhängigkeit von den Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$ ?

Anleitung: Betrachte zuerst die Veränderung in der Gestalt der Kurve, wenn  $a$ , von 1 ausgehend, wächst! In welchen Bereichen darf  $c$  liegen, damit die Gleichung lösbar ist? Wie ändert sich die Kurve, wenn  $a$  von 1 bis 0 abnimmt? Berücksichtige auch negative Werte von  $a$ ! Führe die Untersuchung ebenso für  $b$  durch!

13. Führe die Diskussion der Gleichung  $a \sin x + b \cos x + c = 0$  nach dem zeichnerischen Lösungsverfahren durch (Methode 1 des Textes)! Welche Bedingungen für  $a$ ,  $b$  und  $c$  leiten sich aus der Forderung ab, daß die Gerade den Kreis **a**) in zwei Punkten schneidet, **b**) in einem Punkte berührt, **c**) verfehlt?

14. Löse die folgenden Gleichungen zeichnerisch:

**a**)  $2 \cos x + \frac{1}{3} \sin x - 1 = 0$       **b**)  $\sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0$ !

15. Stelle in der Gleichung  $a \sin x + b \cos x + c = 0$

**a**) die Kosinusfunktion durch die Sinusfunktion, **b**) die Sinusfunktion durch die Kosinusfunktion dar und diskutiere die sich ergebende Gleichung (Methode 2 des Textes)! Vergleiche das Ergebnis mit der Lösung der Aufgabe 13!

16. Diskutiere die Gleichung  $a \sin x + b \cos x + c = 0$  unter Benutzung eines Hilfswinkels  $\alpha$ , der durch die Gleichung  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$  eingeführt wird (Methode 3 des Textes)!

17. Diskutiere die Gleichung  $a \sin x + b \cos x + c = 0$  unter Verwendung eines Hilfswinkels  $\bar{\alpha}$ , der durch die Beziehung  $\operatorname{ctg} \bar{\alpha} = \frac{a}{b}$  eingeführt wird!

18. Löse die folgenden Gleichungen:

**a**)  $\sin x + 1,75 \cos x - 1,574 = 0$       **b**)  $5 \sin x + 4 \cos x = 6,25$   
**c**)  $\sin x - 0,75 \cos x - 0,49 = 0$       **d**)  $3 \sin x = 1 + 4 \cos x$ !

#### IV. Goniometrische Gleichungen mit Funktionen verschiedener Argumente, aber mit einer Unbekannten

19. Löse die folgenden Gleichungen zeichnerisch und rechnerisch:

**a**)  $\sin(x^\circ + 54^\circ) - \sin(x^\circ - 12^\circ) - 0,5933 = 0$   
**b**)  $\cos(x^\circ - 18^\circ) + \cos(x^\circ - 78^\circ) - 1,5 = 0$   
**c**)  $\sin(x^\circ + 7^\circ) + \cos(x^\circ - 67^\circ) - 1,6 = 0$   
**d**)  $\sin(x - \frac{1}{12}\pi) - \sin(x - \frac{1}{4}\pi) - 0,5176 = 0$ !

20. Welche Winkel genügen den nachstehenden Gleichungen:

**a**)  $\sin(x^\circ + 10^\circ) \cdot \sin(x^\circ - 40^\circ) = 0,75$       **b**)  $\cos(x^\circ + 20^\circ) \cdot \cos(x^\circ - 55^\circ) = 0,4918$   
**c**)  $\sin(x - \frac{1}{6}\pi) \cdot \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0,5$       **d**)  $\cos(x + \frac{1}{12}\pi) \cdot \sin(x - \frac{1}{12}\pi) = 0,1834$ ?

21. Löse die folgenden Gleichungen:

**a**)  $\sin 2x = \cos x$       **b**)  $\sin 2x = 1,1 \cos x$       **c**)  $\cos 2x = \frac{2}{3} \cos x$   
**d**)  $\sin 2x = \operatorname{tg} x$       **e**)  $\operatorname{tg} 2x = 3 \sin x$       **f**)  $5 \cos 2x = 4 \sin x$ !

22. Löse die folgenden Gleichungen:

a)  $4 \cos^2 x - \sin^2 x = 1,5 \sin 2x$

b)  $\sin 2x + \frac{3}{2}(\sin x + \cos x) = 0$

c)  $\sin x - \cos x = 1,18 \sin 2x$

d)  $2\sqrt{3} \sin 2x - 16 \sin^2 x + 1 = 0!$

23. Löse die nachstehenden Gleichungen:

a)  $\sin 3x - 2 \sin x = 0$

b)  $\sin 3x = \frac{3}{2} \sin x$

c)  $\cos x = -\cos 3x$

d)  $5 \sin 3x = 7 \sin 2x$

e)  $4 \sin x \sin 3x = 1$

f)  $2 \sin 2x = 3 \cos 3x!$

24. Löse die nachstehenden Gleichungen:

a)  $\frac{3(\operatorname{ctg} x - 1)}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} = 5(\cos x - \sin x)$

b)  $\frac{12}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 5 \cos 2x (\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x)!$

#### V. Goniometrische Gleichungen mit zwei Unbekannten

25. Löse das Beispiel zu Typ 4 des Textes!

26. Welche Winkel genügen den beiden Gleichungen?

a)  $\sin x^\circ + \sin y^\circ = 0,7272; x^\circ + y^\circ = 43^\circ$

b)  $\cos x^\circ - \cos y^\circ = 0,675; x^\circ - y^\circ = 59,93^\circ$

c)  $\operatorname{tg} x^\circ + \operatorname{tg} y^\circ = 2,75; x^\circ + y^\circ = 102,75^\circ$

d)  $\operatorname{ctg} y^\circ - \operatorname{ctg} x^\circ = 0,91; x^\circ - y^\circ = 23,1^\circ$

27. Welche Winkel genügen den beiden Gleichungen?

a)  $\sin x^\circ : \sin y^\circ = 5 : 4; x^\circ + y^\circ = 60^\circ$

b)  $\sin y^\circ : \sin x^\circ = 3 : 4; x^\circ - y^\circ = 6,38^\circ$

c)  $\operatorname{tg} x^\circ \cdot \operatorname{tg} y^\circ = 1,41; x^\circ + y^\circ = 93,25^\circ$

d)  $\operatorname{ctg} x^\circ : \operatorname{ctg} y^\circ = 11 : 20; x^\circ - y^\circ = 16,16^\circ$



## B. Zahlenfolgen

### V. Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen

#### 13. Arithmetische Zahlenfolgen

##### a) Zahlenfolgen, allgemeine Eigenschaften

Eine Menge von Zahlen, die nach einer bestimmten Vorschrift gebildet sind, nennt man eine Zahlenfolge. So ergeben die positiven ganzen Zahlen

$$1; 2; 3; \dots; (n-1); n; (n+1); \dots \quad (49)$$

eine Zahlenfolge. Andere Zahlenfolgen sind z. B. die ungeraden positiven Zahlen

$$1; 3; 5; \dots; (2n-3); (2n-1); (2n+1); \dots, \quad (50)$$

die reziproken Werte der positiven ganzen Zahlen

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n-1}; \frac{1}{n}; \frac{1}{n+1}; \dots, \quad (51)$$

die Quadratzahlen

$$1; 4; 9; 16; \dots; (n-1)^2; n^2; (n+1)^2; \dots \quad (52)$$

oder auch die Konstanten  $k$ , etwa für  $k=3$ ,

$$3; 3; 3; \dots \quad (53)$$

Wir stellen also fest:

Läßt sich auf Grund einer bestimmten Vorschrift (eines Bildungsgesetzes) aus einer Zahl  $x_1$  eine zweite Zahl  $x_2$ , aus dieser eine dritte Zahl  $x_3$  usw. entwickeln, so bilden die Zahlen  $x_1; x_2; x_3; \dots$  in dieser, den natürlichen Zahlen entsprechenden Anordnung eine Zahlenfolge.

Die einzelnen Zahlen  $x_1; x_2; x_3; \dots$  heißen die Glieder der Folge.

Die Zahlenfolge ist endlich, wenn die Bildung der Zahlen nach einer bestimmten Anzahl von Gliedern abbricht, sie ist unendlich, wenn sie nicht abbricht, wenn also jeder natürlichen Zahl  $n$  eine bestimmte Zahl  $x_n$  entspricht.

Eine endliche Folge bezeichnen wir mit  $(x_n) = (x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$ , eine unendliche Folge mit  $(x_n) = (x_1; x_2; x_3; \dots; x_n; \dots)$  oder kurz mit  $(x_n) = (x_1; x_2; x_3; \dots)$ .

Das Bildungsgesetz einer Folge stellen wir durch das allgemeine Glied  $x_n$  dar; für die positiven ganzen Zahlen ist

$$x_n = n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (49a)$$

für die ungeraden positiven Zahlen

$$x_n = (2n - 1), \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (50a)$$

für die reziproken Werte der positiven ganzen Zahlen

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (51a)$$

für die Quadratzahlen

$$x_n = n^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (52a)$$

für die Konstanten  $k$ , also etwa für  $k = 3$

$$x_n = 3, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (53a)$$

Zahlenfolgen können geometrisch veranschaulicht werden, indem die einzelnen Glieder auf einem Strahl  $x_n$  abgetragen werden. Wir erkennen als Bild der Zahlenfolge (49) die Punkte, die den ganzen Zahlen  $1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots$  auf dem Zahlenstrahl  $x_n$  zugeordnet sind (Abb. 100a). Die Größe der Glieder nimmt mit wachsendem  $n$  zu. Ein Bild der unendlichen Zahlenfolge (51) ist in Abb. 100b dargestellt. Die Größe der Glieder nimmt mit wachsendem  $n$  ab. Ein Bild der Zahlenfolge (53) gibt die Abb. 100c wieder. Bei jedem  $n$  ist die Größe des zugehörigen Gliedes gleich 3.

Eine Folge heißt wachsend, wenn stets  $x_n < x_{n+1}$ , dagegen fallend, wenn  $x_n > x_{n+1}$ .

Es ist zu erkennen, daß die Folgen (49), (50) und (52) wachsen, die Folge (51) dagegen fällt. Diese Tatsache verdeutlichen die Abb. 100a und b.

Eine Folge heißt konstant, wenn alle Glieder denselben Wert  $k$  besitzen. Dies trifft für die Folge (53) zu, wie die Abb. 100c zeigt.

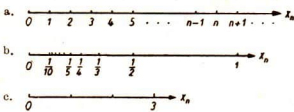


Abb. 100

## b) Arithmetische Zahlenfolgen erster Ordnung

### 1. Die Zahlenfolge $1; 3; 5; \dots; 13$

Gegeben sei die Zahlenfolge

$$(x_n) = 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13.$$

Wir bilden die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Glieder, also

$$3 - 1 = 2; \quad 5 - 3 = 2; \quad \dots; \quad 13 - 11 = 2$$

und der Reihe nach die Teilsummen

$$1 + 3 = 4; \quad 1 + 3 + 5 = 9; \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16; \quad \dots$$

sowie die Summe der Glieder

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49.$$

Wir stellen fest: Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge besitzt den festen Wert 2, die Teilsummen sind Quadratzahlen, und die Summe der Glieder hat den Wert 49.

Eine Veranschaulichung der Glieder dieser Folge, der Differenzen aufeinanderfolgender Glieder und der Summen der Glieder können wir finden, indem wir der Achse der Indizes ( $n = 1, 2, 3, \dots, 7$ ) eine Achse der Glieder  $x_n$ , der Differenzen  $d_n$  und der Summen der Glieder  $s_n$ , die wir mit  $s_n$  bezeichnen, zuordnen.

Abb. 101 gibt eine Veranschaulichung der Zahlenfolge und verdeutlicht das Bildungsgesetz. Die Glieder der Folge liegen auf einer als Strichlinie gezeichneten Geraden.

Auf dieser bezeichnen nur einzelne Punkte die Glieder der arithmetischen Folge. Abb. 102 gibt eine Veranschaulichung der Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Glieder. Dabei ordnen wir die Differenz dem Glied mit dem niederen Index zu. Es ergeben sich Punkte, die sämtlich den Abstand  $d = 2$  von der Achse  $n$  besitzen. Sie sind, um anzudeuten, daß es sich um die Differenzen einer Zahlenfolge handelt, durch eine Strichlinie miteinander verbunden.

Abb. 103 zeigt eine Veranschaulichung der Teilsummen der Zahlenfolge. Es ist zu erkennen, daß die Summe der Glieder stets Quadratzahlen sind. Sie liegen auf der als Strichlinie gezeichneten Parabel.

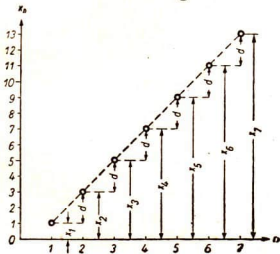


Abb. 101

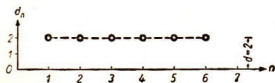


Abb. 102

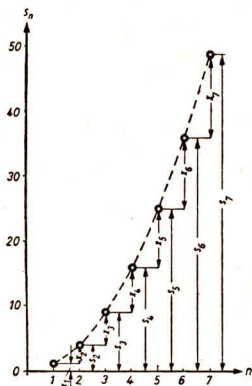


Abb. 103

## 2. Die Zahlenfolge $a; a + d; a + 2d; \dots; a + (n - 1)d$

Bilden wir, vom Anfangsglied  $x_1 = a$  ausgehend, eine Zahlenfolge mit der konstanten Differenz  $d$  für zwei aufeinanderfolgende Glieder, so erhalten wir die Folge

$$x_1 = a; \quad x_2 = a + d; \quad x_3 = a + 2d; \quad \dots; \quad x_n = a + (n - 1)d;$$

das Bildungsgesetz der Folge ist

$$x_n = a + (n - 1)d, \quad (n = 1; 2; 3 \dots; n). \quad (54)$$

Eine Zahlenfolge dieser Art nennt man eine arithmetische Zahlenfolge erster Ordnung.

**Erklärung:** Eine Zahlenfolge  $(x_n)$ , bei der die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder stets denselben Wert besitzt, heißt eine arithmetische Folge erster Ordnung.

Eine arithmetische Folge  $(x_n)$ , wie wir sie zunächst betrachten, ist durch ihr Anfangsglied  $x_1 = a$  und durch die konstante Differenz  $x_n - x_{n-1} = d$  bestimmt.

Eine arithmetische Folge können wir aber auch vom Endglied ausgehend darstellen. Bezeichnen wir dieses mit  $z$ , so erhalten wir die Zahlenfolge

$$x_n = z; \quad x_{n-1} = z - d; \quad x_{n-2} = z - 2d; \quad \dots; \quad x_1 = z - (n-1)d.$$

Die Summe einer arithmetischen Folge haben wir zunächst durch Addieren der Glieder gefunden. Bei großer Gliederzahl ist dieses Verfahren jedoch umständlich. Bezeichnen wir die Summe mit  $s_n$ , in dem Ausgangsbeispiel mit  $s_7$ , und schreiben wir die Summe in auf- und absteigender Folge der Glieder untereinander, so erhalten wir

$$\begin{aligned} s_7 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 \text{ bzw.} \\ s_7 &= 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \end{aligned}$$

und beim Addieren

$$\begin{aligned} 2 s_7 &= 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 \\ &= 7 \cdot 14 \end{aligned}$$

oder

$$s_7 = \frac{7 \cdot 14}{2} = 49.$$

Allgemein finden wir

$$\begin{aligned} s_n &= a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d] \\ s_n &= z + (z - d) + (z - 2d) + \dots + [z - (n-2)d] + [z - (n-1)d] \\ 2 s_n &= (a + z) + (a + z) + (a + z) + \dots + (a + z) + (a + z) \\ &= n(a + z) \end{aligned}$$

und damit

$$s_n = \frac{n(a + z)}{2}. \quad (55 a)$$

Setzen wir  $z = a + (n-1)d$ , so wird

$$s_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} = na + \frac{n(n-1)d}{2}. \quad (55 b)$$

Damit ist die Summe einer arithmetischen Folge ebenfalls bestimmt.

Multiplizieren wir die rechte Seite in Gleichung (55 b) aus und ordnen nach fallenden Potenzen von  $n$ , so erhalten wir

$$s_n = n^2 \frac{d}{2} + n \frac{2a-d}{2}.$$

Wir erkennen, daß jede Summe einer arithmetischen Folge erster Ordnung durch eine quadratische Funktion von  $n$  darstellbar ist, die jedoch nur für die positiven ganzzahligen Werte  $n$  erklärt ist.

## e) Differenzenfolgen und arithmetische Folgen höherer Ordnung

Aus der Folge der Quadrat- und der Kubikzahlen ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) bilden wir die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder nach folgendem Schema:

$n$	$x_n$	$\Delta^1 x_n$	$\Delta^2 x_n$
0	0		
		1	
1	1		2
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		2
		9	
5	25		2
		11	
6	36		

$n$	$x_n$	$\Delta^1 x_n$	$\Delta^2 x_n$	$\Delta^3 x_n$
0	0			
		1		
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		6
5	125		30	
		91		
6	216			

Die Folgen  $(\Delta^1 x_n)$ ,  $(\Delta^2 x_n)$  bzw.  $(\Delta^3 x_n)^1$  nennt man die erste, zweite bzw. dritte **Differenzenfolge** der gegebenen ursprünglichen Zahlenfolge ( $x_n$ ). Dabei bedeuten

$$\Delta^1 x_n = x_{n+1} - x_n, \quad \Delta^2 x_n = \Delta^1 x_{n+1} - \Delta^1 x_n \quad \text{und} \quad \Delta^3 x_n = \Delta^2 x_{n+1} - \Delta^2 x_n.$$

Wir erkennen, daß bei der Folge der Quadratzahlen die zweite, bei der Folge der Kubikzahlen die dritte Differenz konstant ist. Die Folge der Quadratzahlen wird als eine **arithmetische Folge zweiter Ordnung**, die der Kubikzahlen als eine **arithmetische Folge dritter Ordnung** bezeichnet.

Die Entstehung der Differenzenfolgen aus der Ausgangsfolge verdeutlichen die Abb. 104a und b sowie 105a und b.

In den Abb. 104a und 105a tragen die nach rechts weisenden Achsen die Glieder  $x_n$  der Zahlenfolgen ( $x_n$ ), die nach oben führenden die der Folgen  $(\Delta^1 x_n)$ , die nach links zeigenden die der Folgen  $(\Delta^2 x_n)$  und die nach unten die der Folge  $(\Delta^3 x_n)$ . Die Werte der Differenzenfolgen sind jeweils dem niederen Index der vorhergehenden Folge zugeordnet.

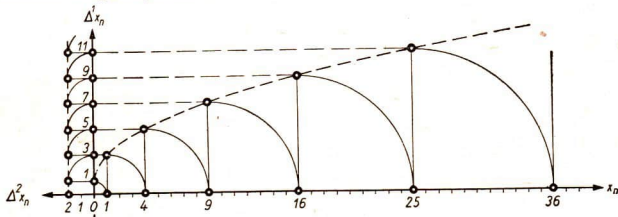


Abb. 104a

1) Sprich: „Delta eins  $x_n$ , Delta zwei  $x_n$ , Delta drei  $x_n \dots$ “; vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, Seite 131!



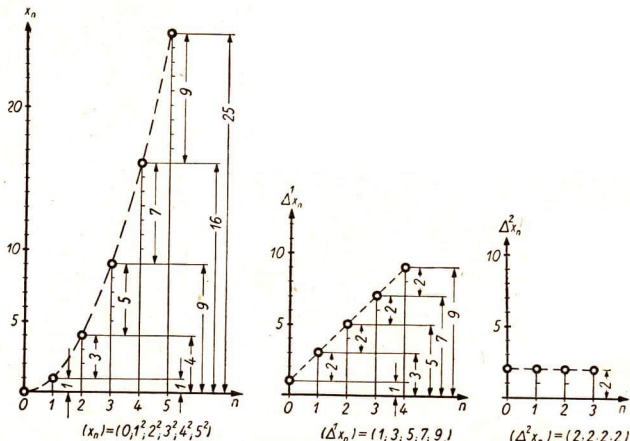


Abb. 104 b

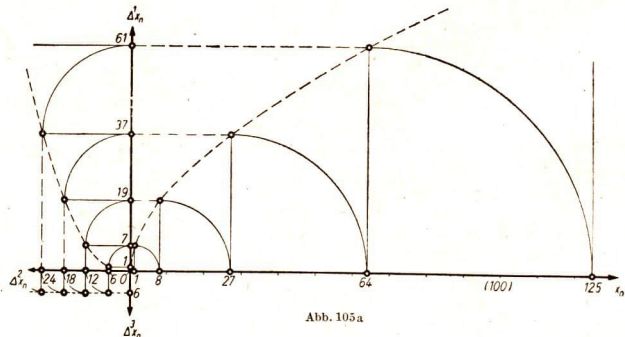


Abb. 105 a

In den Abb. 104 b bzw. 105 b sind der Index-Achse  $n$  die Glieder der Zahlenfolgen  $(x_n)$ ,  $(\Delta^1 x_n)$ ,  $(\Delta^2 x_n)$  bzw.  $(x_n)$ ,  $(\Delta^1 x_n)$ ,  $(\Delta^2 x_n)$ ,  $(\Delta^3 x_n)$  zugeordnet.

$(\Delta^m x_n)$  ist die  $m$ -te Differenzenfolge von  $(x_n)$ . Ist diese konstant, so sagt man auch,  $(x_n)$  ist eine arithmetische Folge  $m$ -ter Ordnung. Abb. 104 b zeigt die Folgen  $(n^2)$ ,  $(2n+1)$  und  $(2)$ , Abb. 105 b die Folgen  $(n^3)$ ,  $(3n^2+3n+1)$ ,  $(6n+6)$  und  $(6)$ . Dabei sind die Differenzenfolgen ebenfalls dem niederen Index  $n$  zugeordnet.

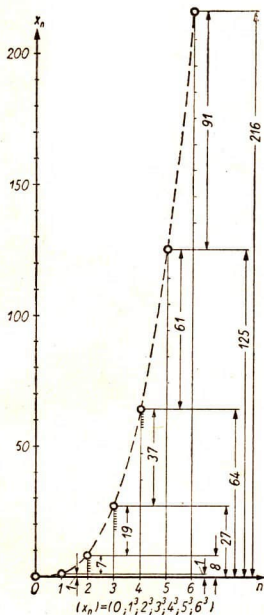
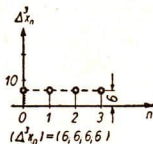
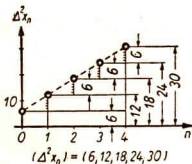
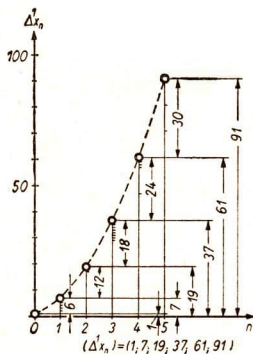


Abb. 105 b

(Bei der Betrachtung dieser Abbildung ist zu beachten, daß die vier Abbildungsteile nebeneinanderstehen müßten, so wie es die Abb. 104 b zeigt.)



Den Zusammenhang der Folgen erkennen wir an dem nachstehenden Zahlenbeispiel. Es ist für Abb. 104 b z. B.

$$\begin{aligned} \Delta^1 x_4 &= 5^2 - 4^2 = (4+1)^2 - 4^2 \\ &= 16 + 8 + 1 - 16 = 8 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9 \end{aligned}$$

und  $\Delta^2 x_3 = 9 - 7 = 2.$



und somit die Summe  $s$  der  $n$  ersten Quadratzahlen

$$s = \frac{1}{3} \left( n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n \right) \\ = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Die Summe der  $n$  ersten Quadratzahlen ist eine Funktion dritten Grades von  $n$ , die jedoch nur für positive ganzzahlige Werte von  $n$  erklärt ist.

Wir bilden für die Zahlenfolge zweiter Ordnung

$$0; 9; 22; 39; 60; 85,$$

deren Glieder aus der quadratischen Funktion  $y = 2x^2 + 3x - 5$  für  $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  berechnet sind, die Folge der Teilsummen

$$0; 9; 31; 70; 130; 215.$$

Wir erkennen, daß in der Folge der Teilsummen die 3. Differenzen konstant sind, daß sie also eine Zahlenfolge dritter Ordnung ist. Ihr Bildungsgesetz können wir als

$$x_n = \frac{2}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 - \frac{19}{6}n$$

finden, also eine Funktion dritten Grades von  $n$  für die ganzzahligen positiven Werte von  $n$ .

Allgemein gilt: Ist  $(x_n)$  eine arithmetische Zahlenfolge  $m$ -ter Ordnung und ist die Zahlenfolge  $(s_n)$  dadurch erklärt, daß

$$s_1 = x_1; \quad s_2 = x_1 + x_2; \quad \dots; \quad s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

ist, so wird  $(s_n)$  als die zur Folge  $(x_n)$  zugehörige Summenfolge bezeichnet. Es ist zu erkennen, daß die erste Differenzenfolge von  $(s_n)$  die ursprüngliche Folge  $(x_n)$  ist. Damit ist die Summenfolge einer arithmetischen Zahlenfolge  $m$ -ter Ordnung von der  $(m+1)$ -ten Ordnung.

## Aufgaben

### I. Zahlenfolgen

1. Stelle die Zahlenfolgen auf, deren allgemeines Glied

$$\text{a) } x_n = -n, \quad \text{b) } x_n = \frac{n+1}{n}, \quad \text{c) } x_n = \frac{n-1+n}{2}, \quad \text{d) } x_n = \frac{1}{2n} \text{ ist!}$$

2. Veranschauliche die Zahlenfolgen

$$\text{a) } (x_n) = 1; 2; 3; \dots; 8 \quad \text{b) } (x_n) = 1; 3; 5; \dots \\ \text{c) } (x_n) = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \quad \text{d) } (x_n) = 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \dots!$$

Anleitung: Wähle zu a) und b) als Einheit 1 cm, zu c) und d) 10 cm!

3. Prüfe an Hand a) bestimmter Glieder, b) des allgemeinen Gliedes, welche der Folgen in Aufgabe 1 und 2 wachsen und welche fallen!

4. Veranschauliche die konstanten Zahlenfolgen mit dem allgemeinen Glied a)  $x_n = 3$ , b)  $x_n = 5$ !

## II. Arithmetische Zahlenfolgen

5. Veranschauliche die ersten 5 Glieder der arithmetischen Folgen und deren Summen, wenn a)  $x_1 = 3, d = \frac{1}{2}$ , b)  $x_1 = 1, d = 3$ , c)  $x_1 = 13, d = -2$  ist! Verbinde die gefundenen Punkte durch Strichlinien!

Anleitung: Wähle die Form nach Abb. 101 bzw. 103!

6. Stahlträger von der Form  $\overline{\text{I}}$  (sprich: Doppel-Te; Bezeichnung  $\overline{\text{I}}$ , Abb. 106) haben nach DIN 1025, Blatt 1, die in der untenstehenden Tabelle genannten Abmessungen.

Prüfe, ob die Abmessungen arithmetische Folgen darstellen! Gib die Differenzen der Abmessungen an!

Veranschauliche den Verlauf der Abmessungen!

Prüfe, ob Querschnitt und Gewicht arithmetische Folgen sind! Stelle Querschnitt  $F$  und Gewicht  $G$  als Funktionen der Höhe  $h$  dar!

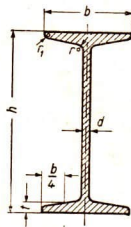


Abb. 106

Bezeichnung	Abmessungen mm						Querschnitt cm <sup>2</sup> $F$	Gewicht kp/m $G$
	$h$	$b$	$d$	$t$	$r$	$r_1$		
8	80	42	3,9	5,9	3,9	2,3	7,58	5,95
10	100	50	4,5	6,8	4,5	2,7	10,6	8,32
12	120	58	5,1	7,7	5,1	3,1	14,2	11,2
14	140	66	5,7	8,6	5,7	3,4	18,3	14,4
16	160	74	6,3	9,5	6,3	3,8	22,8	17,9
18	180	82	6,9	10,4	6,9	4,1	27,9	21,9
20	200	90	7,5	11,3	7,5	4,5	33,5	26,3
22	220	98	8,1	12,2	8,1	4,9	39,6	31,1
24	240	106	8,7	13,1	8,7	5,2	46,1	36,2
26	260	113	9,4	14,1	9,4	5,6	53,4	41,9
28	280	119	10,1	15,2	10,1	6,1	61,1	48,0
30	300	125	10,8	16,2	10,8	6,5	69,1	54,2
32	320	131	11,5	17,3	11,5	6,9	77,8	61,1
34	340	137	12,2	18,3	12,2	7,3	86,8	68,1
36	360	143	13,0	19,5	13,0	7,8	97,1	76,2
38	380	149	13,7	20,5	13,7	8,2	107	84,0
40	400	155	14,4	21,6	14,4	8,6	118	92,6
42 $\frac{1}{2}$	425	163	15,3	23,0	15,3	9,2	132	104
45	450	170	16,2	24,3	16,2	9,7	147	115
47 $\frac{1}{2}$	475	178	17,1	25,6	17,1	10,3	163	128
50	500	185	18,0	27,0	18,0	10,8	180	141
55	550	200	19,0	30,0	19,0	11,9	213	167
60	600	215	21,6	32,4	21,6	13,0	254	199

7. Von einer arithmetischen Folge sind gegeben:

a)  $x_7 = 65$  und  $x_8 = 72$ , b)  $x_3 = 35$  und  $x_4 = 46$ , c)  $x_5 = 38$  und  $x_6 = 27$ .

Wie groß ist die Differenz  $d$ , das Anfangsglied  $x_1$ , und wie heißt das allgemeine Glied  $x_n$ ?



8. Von einer arithmetischen Folge sind gegeben:

a)  $x_5 = 20$  und  $x_{11} = 44$ , b)  $x_{10} = 39$  und  $x_{14} = 24$ .

Gesucht sind die Differenz  $d$ , das Anfangsglied  $x_1$  und das Glied  $x_{25}$ .

Anleitung: Bilde die Differenz der Glieder in allgemeiner Form und berechne daraus die Differenz  $d$ !

9. Es sind gegeben  $x_n + x_{12} = 47$  und  $x_7 + x_{15} = 57$ . Gesucht sind die Differenz, das Anfangsglied und das Glied  $x_{25}$ .

Anleitung: Stelle die Summen durch das allgemeine Glied dar! Dies führt auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

10. Gegeben sind die Summen  $x_5 + x_{11} = 58$ ,  $x_6 + x_{14} = 40$ . Bestimme  $x_1$  und  $x_{20}$ !

Anleitung: Vergleiche Aufgabe 9!

~~11.~~ Es sind gegeben:

	<del>a)</del>	b)	c)	d)	e)	f)
$x_1$	10	16	25	$\frac{3}{4}$	120	0
$x_n$	80	676	35	$\frac{4}{3}$	15	— 6
$d$	5	11	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	— 7	— $\frac{2}{3}$
$n$	15	61	16	8	16	10
$s_n$	675	21106	480	$\frac{25}{3}$	1080	— 30

Wähle aus einer der Spalten a) bis f) drei Werte und berechne für jede einzelne Spalte die fehlenden!

12. Von den Größen  $x_1$ ,  $x_n$ ,  $d$ ,  $n$  und  $s_n$  müssen drei gegeben sein, um die Folge zu bestimmen.

a) Stelle sämtliche möglichen Aufgabengruppen zusammen! Wieviel sind dies?

b) Stelle die Formeln für die Lösungen dieser Aufgabengruppen auf!

13. Sind drei Zahlenwerte, durch die eine arithmetische Folge bestimmt ist, frei wählbar?

Welche Bedingungen bestehen für  $n$ ?

14. Gegeben sind  $x_1$ ,  $x_n$  und  $s_n$ . Zeige, daß  $d$  ein Bruch mit dem Zähler  $x_n - x_1$  und  $n$  ein Bruch mit dem Nenner  $x_1 + x_n$  ist!

15. Bestimme die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100! Carl Friedrich Gauß (geb. 1777 in Braunschweig, gestorben als Professor der Astronomie 1855 in Göttingen) soll bereits als Neunjähriger eine solche Aufgabe selbständig gelöst haben. Als die Aufgabe gestellt war, erkannte er sofort, daß die Summe der Glieder, die gleich weit vom Anfang und Ende der Folge entfernt sind, einen bestimmten Wert ergibt. Beispiel:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

Fasse, den Klammern entsprechend, zusammen!

16. Es sei  $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n; \dots$  eine arithmetische Folge. Zeige, daß  $x_1; x_3; x_5; \dots; x_{2n-1}; \dots$  und  $x_1; x_5; x_9; \dots; x_{4n+1}; \dots$  ebenfalls arithmetische Folgen sind! Wie groß sind die Differenzen dieser Folgen?

17. a) Zeige, daß die  $y$ -Werte, die durch die Funktion  $y = 2x + 3$  den ganzzahligen Werten  $x = 1, 2, 3, \dots$  zugeordnet werden, eine arithmetische Folge bilden!

b) Zeige dies für die lineare Funktion  $y = mx + b$ !

Bildet eine Folge von  $x$ -Werten eine arithmetische Folge, so gilt dies auch für die zugehörige Folge einer linearen Funktion  $y = f(x)$ .

Anleitung: Setze  $x = a_1 + (n-1)d$  in die Funktionsgleichung ein!

18. Welche linearen Funktionen führen die nachstehenden Folgen  $(x_n)$  in  $(y_n)$  über:

a)  $(x_n) = (1; 3; 5; 7; \dots)$  in  $(y_n) = (4; 8; 12; 16; \dots)$ ,

b)  $(x_n) = (2; 6; 10; 14; \dots)$  in  $(y_n) = (30; 25; 20; 15; \dots)$ ,

c)  $(x_n) = (1; 2; 3; 4; \dots)$  in  $(y_n) = (3; 3\frac{1}{2}; 4; 4\frac{1}{2}; \dots)$ ,

d)  $(x_n) = (1; 3; 5; 7; \dots)$  in  $(y_n) = (6; 5\frac{3}{4}; 5\frac{1}{2}; 5\frac{1}{4}; \dots)$ ?

Anleitung: Stelle die Bildungsgesetze von  $x$  und  $y$  auf, berechne dann aus  $y = mx + b$  die Größen  $m$  und  $b$ !

19. In Abb. 107 sind die Funktionswerte  $y_1, y_2, y_3 \dots$  Glieder der arithmetischen Folge  $y = mx + b$ . Zeige, daß aus der Abbildung unmittelbar  $2s_n = n(y_1 + y_n)$  abgelesen werden kann!

Anleitung: Betrachte in Richtung von  $x_1$  nach  $x_n$  und dann in entgegengesetzter Richtung die beiden zentrisch-symmetrisch liegenden Trapeze!

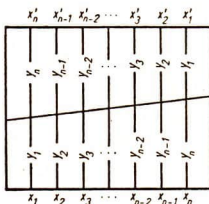


Abb. 107

### III. Angewandte Aufgaben

20. Eine Uhr schlägt nur die vollen Stunden. Wieviel Schläge erfolgen in 12 Stunden?

21. Eine Turmuhr schlägt die Stundenzahl und zu den vollen Stunden viermal, nach einer viertel Stunde einmal, nach einer halben Stunde zweimal, nach einer dreiviertel Stunde dreimal. Wievielmals schlägt die Uhr in 24 Stunden?

22. In einem Schaufenster sind Konservendosen in der gleichen Anordnung wie in Abb. 108 aufgestellt. In der untersten Reihe wurden 20 Dosen gezählt. Wieviel sind es insgesamt?

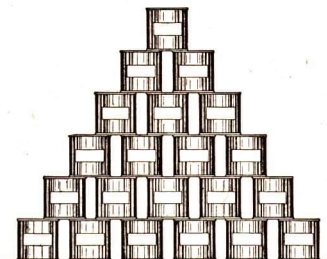


Abb. 108

23. Der Seilkorb einer Förderanlage ist eine Winde mit einer schmalen, zylindrischen Trommel von der Breite des Förderbandes mit rechteckigem Querschnitt. An ihm hängt der Förderkorb. Bei Drehung des Seilkorbes wird das Förderband in übereinanderliegenden Lagen auf den Seilkorb gewickelt.

a) Wie groß ist die Zahl der übereinanderliegenden Windungen bei hochgezogenem Förderkorb, wenn die Dicke des Förderbandes  $d = 3$  cm, der Halbmesser des Seilkorbes  $r = 1$  m und die Schachttiefe 400 m beträgt?

b) Die Förderanlage besteht aus zwei Seilkörben und einer gemeinsamen Welle. Die Förderbänder mit den Förderkörben hängen auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Welle in den Schacht hinunter, so daß der volle Korb oben anlangt, wenn der leere die Sohle des Schachtes erreicht. Wo begegnen sich der abwärts und der aufwärts gehende Förderkorb?

Bei der geringen Dicke des Förderbandes kann in der Aufgabe die kleine Abweichung der aufgewickelten einzelnen Seillagen von der Kreisform unberücksichtigt bleiben. Es soll auch von der Dehnung abgesehen werden.

### IV. Differenzenfolgen und arithmetische Folgen höherer Ordnung

24. Gegeben ist die Zahlenfolge  $(x_n) = 1; 3; 9; 19; 33; 51$  mit dem Bildungsgesetz  $x_n = 2n^2 - 4n + 3$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), d. h.  $x_n = an^2 + bn + c$ , wenn  $a = 2$ ,  $b = -4$ ,  $c = 3$  ist. Ordne jedem Index  $n$  den Wert des Gliedes in einem  $(n; x_n)$ -Systeme zu und bilde geometrisch alle Differenzenfolgen! Vergleiche dazu Abb. 104a!

25. Gegeben ist die Zahlenfolge  $(x_n) = -4; -\frac{7}{2}; 0; \frac{19}{2}; 28; \frac{117}{2}; \dots; x_n = \frac{1}{2}n^3 - 4$  oder  $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 0, d = -4$  in  $x_n = an^3 + bn^2 + cn + d, (n = 0, 1, 2, \dots)$ . Stelle der Aufgabe 24 entsprechend die Differenzenfolgen dar!

26. Bestimme unter Verwendung der Differenzen die Werte der Funktion

a)  $y = 3x^2 - 2x + 5,$     b)  $y = 2x^2 + 3x - 5,$

wenn  $x$  die ganzzahligen Werte von  $-5$  bis  $+5$  durchläuft!

Anleitung: Bilde von den Werten  $x = -1, 0, +1$  ausgehend die Differenzen nach dem Schema und erweitere nach oben und unten bis zu den verlangten Werten! Das Schema gilt für die Aufgabe a)!

$x$	$y$	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$
-1	10		
		-5	
0	5		6
		1	
1	6		

27. Bestimme die Werte von  $y = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$  für die ganzzahligen  $x$ -Werte von  $-6$  bis  $+6$  nach dem in Aufgabe 26 gezeigten Verfahren!

28. Bestimme nach einem anderen Verfahren die Werte

a) von  $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$  für die ganzzahligen  $x$ -Werte von  $-5$  bis  $+5$ ;

b) von  $y = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$  für die ganzzahligen  $x$ -Werte von  $-6$  bis  $+6$ !

Anleitung: Schreibe für  $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$

den Ausdruck  $y = x(x^2 - 2x - 3) + 4,$

schließlich  $y = x[x(x-2) - 3] + 4$

und setze  $x - 2 = z_1, xz_1 - 3 = z_2, y = xz_2 + 4!$

## 14. Endliche geometrische Zahlenfolgen

a) Die Zahlenfolge  $1; 2; 4; \dots; 32$

Gegeben ist die Zahlenfolge

$$(x_n) = 1; 2; 4; 8; 16; 32.$$

Wir bilden die Quotienten je zweier aufeinanderfolgender Glieder, also

$$2:1 = 2; 4:2 = 2; \dots; 32:16 = 2,$$

die Teilsummen

$$1 + 2 = 3; 1 + 2 + 4 = 7; 1 + 2 + 4 + 8 = 15; 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

sowie die Summe

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

Wir stellen fest: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder besitzt stets den Wert 2, die Summe der Glieder besitzt den Wert 63.

Abb. 109 veranschaulicht die Zahlenfolge, Abb. 145 den Quotienten und Abb. 111 die Teilsummen.

Abb. 109 läßt zwar die Größe der einzelnen Glieder erkennen, jedoch kann man das Bildungsgesetz, nach dem sich aus einem vorhergehenden Glied das nächste entwickeln läßt, geometrisch nicht erkennen. Die Endpunkte der Glieder liegen auf einer als Strichlinie dargestellten Kurve, und zwar auf einer Exponentialkurve, denn für jedes  $n$  gilt  $x_n = 2^{n-1}$ .

Mit Hilfe des Strahlensatzes lassen sich jedoch die Glieder der Zahlenfolge ( $x_n$ ) = 1; 2; 4; ...; 32 konstruieren. Wir tragen von einem Punkte  $O$  aus die Strecken 1 und 2 bis  $A$  bzw.  $C$  ab (Abb. 112). In  $A$  und  $C$  errichten wir je eine Senkrechte und tragen auf der Senkrechten von  $A$  aus die Strecke  $AA_1 = 1$  ab. Verbinden wir  $O$  mit  $A_1$ , so ergibt sich auf der Senkrechten in  $C$  der Punkt  $B_1$ . Die Parallele zu  $AC$  durch  $B_1$  schneidet  $AA_1$  in  $A_2$ . Es ist also  $AA_2 = CB_1$ . Die weitere Konstruktion ergibt sich aus der Abbildung. Es verhält sich dann

$$AA_2 : AA_1 = OC : OA = 2 : 1$$

$$AA_3 : AA_2 = 2 : 1 \text{ usw.}$$

Die Abb. 112 gibt damit einen Weg an, wie die Glieder der Zahlenfolge mit dem Bildungsgesetz  $x_n = 2^{n-1}$  konstruiert werden können.

Konstruieren wir eine Folge von ähnlichen Dreiecken nach Abb. 113, deren Katheten sich wie 2:1 verhalten, so finden wir geometrisch die Glieder der gegebenen Zahlenfolge. Wir erkennen, daß sich

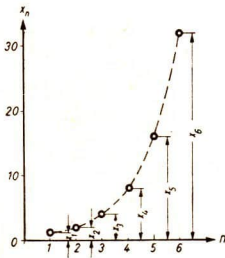
$$D_1D : OD = D_2E_1 : D_1E_1 = D_3E_2 : D_2E_2 = \dots = 2 : 1$$

verhalten. Es ist

$$OD = x_1; D_1E_1 = x_2; D_2E_2 = x_3; D_3E_3 = x_4.$$

Abb. 113 zeigt damit einen anderen Weg, die Glieder der Zahlenfolge mit dem Bildungsgesetz  $x_n = 2^{n-1}$  zu konstruieren.

Aus derselben Abbildung ist ferner zu ersehen, wie man durch Projektion der Glieder auf eine Parallele zu  $OD$ , die Achse  $s_n$ , die Teilsummen finden kann.



In halblogarithmischem Papier, bei dem die lineare Teilung in der Indexachse liegt, ist das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder der gegebenen Zahlenfolge erkennbar (Abb. 114). Die Glieder der Zahlenfolge liegen auf der zur Geradengestreckten Exponentialkurve  $x_n = 2^{n-1}$ , also auf der Geraden  $\lg x_n = (n-1) \lg 2$ , die als Strichlinie gezeichnet ist.

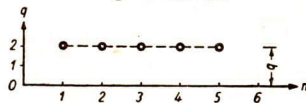


Abb. 110

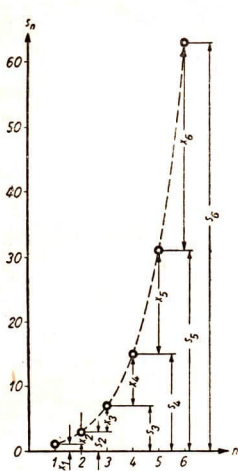


Abb. 111

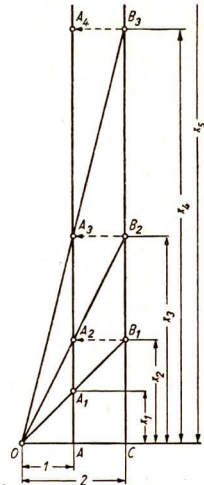


Abb. 112

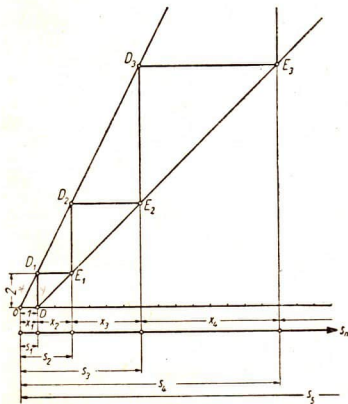


Abb. 113

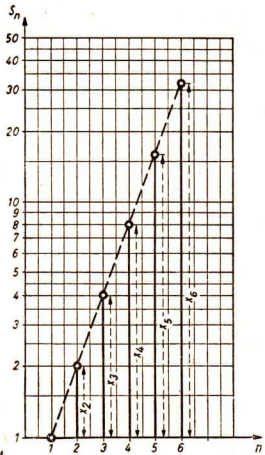


Abb. 114



b) Die Zahlenfolge  $a; aq; aq^2; \dots; aq^{n-1}$

Bilden wir eine Zahlenfolge mit dem Anfangsglied  $a$  und dem Quotienten  $q$  zweier aufeinanderfolgender Glieder, ( $q > 0$ ), so erhalten wir die Folge

$$(x_n) = a; aq; aq^2; aq^3; \dots; aq^{n-1},$$

die  $n$  Glieder umfaßt, deren Bildungsgesetz

$$x_n = aq^{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (56)$$

ist. Eine Zahlenfolge dieser Art nennt man eine geometrische Folge.

**Erklärung:** Eine Zahlenfolge  $(x_n)$ , bei der der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder stets denselben Wert besitzt, heißt eine geometrische Folge

Aus Gleichung (56), dem Bildungsgesetz der Glieder  $x_n$  der geometrischen Folge, erkennen wir, daß dieses der Exponentialfunktion

$$y = aq^{x-1}$$

für alle ganzzahligen  $x$ -Werte entspricht. Diese Funktion hatten wir in der Form  $y = a^x$  kennengelernt (vgl. Lehrbuch der Mathematik, 9. Schuljahr, Seite 100). Beachte, daß in diesen beiden Gleichungen die Größe  $a$  verschiedene Bedeutung besitzt!

Logarithmieren wir die einzelnen Glieder der geometrischen Folge

$$a; aq; aq^2; \dots; aq^{n-1},$$

so erhalten wir die Folge

$$\lg a; \lg a + \lg q; \lg a + 2 \lg q; \dots; \lg a + (n-1) \lg q.$$

Diese ist eine arithmetische Folge erster Ordnung.

Denken wir uns diese Folge in einem gleichmäßig geteilten Netz dargestellt, so erkennen wir, daß diese Folge durch Punkte veranschaulicht wird, die auf einer Geraden mit dem Anstieg  $\lg q$  liegen.

Das entsprechende Ergebnis zeigt die Darstellung der Glieder der geometrischen Folge in halblogarithmischem Papier (vgl. Abb. 114).

Die Summe der  $n$  Glieder einer geometrischen Folge ist

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

Um ihren Wert zu bestimmen, ohne daß die Glieder einzeln addiert werden müssen, wollen wir diese Summe mit  $q$  multiplizieren. Es ergibt sich

$$s_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Die Differenz der Summen beider Folgen liefert

$$\begin{aligned} s_n q - s_n &= -a && + aq^n \\ s_n (q - 1) &= a(q^n - 1) \end{aligned}$$

und damit

$$s_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \neq 1. \quad (57)$$

Für  $q = 1$  geht der Quotient  $\frac{q^n - 1}{q - 1}$  für jedes  $n$  in die Form  $\frac{0}{0}$  über. Die Summenformel (57) verliert ihren Sinn. Trotzdem ist  $s_n$  für endliche Werte von  $n$  bestimmbar.

Wir wenden das in Abb. 113 dargestellte Verfahren auf endliche geometrische Folgen an, wenn

$$q > 1, \quad q = 1, \quad 0 < q < 1$$

ist, und projizieren die Summen dieser Folgen auf eine zur Waagerechten parallele Achse  $s_n$ .

Wir erkennen:

Ist  $q > 1$ , so wachsen die Glieder mit fortschreitendem  $n$ . Die Strecken, zwischen denen die Glieder liegen, laufen auseinander (Abb. 115). Wir sprechen von einer wachsenden geometrischen Folge. Ihre Summe ist

$$s_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ist  $q = 1$ , so bleibt die Größe der Glieder unverändert. Die geometrische Folge ist in eine konstante Folge ausgeartet. Die Strecken, zwischen denen die Glieder liegen, sind einander parallel (Abb. 116). Es ergibt sich

$$s_n = na.$$

Ist  $0 < q < 1$ , so nehmen die Glieder mit fortschreitendem  $n$  ab. Die Strecken, zwischen denen die Glieder liegen, laufen aufeinander zu (Abb. 117). Wir sprechen von einer fallenden geometrischen Folge. Die Gleichung (57) schreiben wir in der Form

$$s_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (58)$$

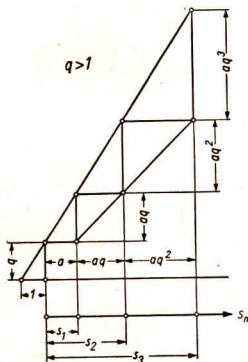


Abb. 115

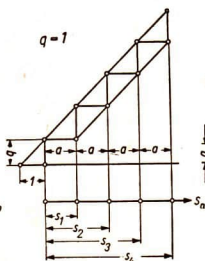


Abb. 116.

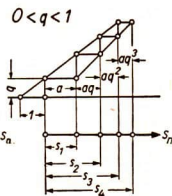


Abb. 117



11. An einer Maschine sollen zwischen den Drehzahlen  $n_a = 450 \text{ min}^{-1}$  und  $n_e = 1400 \text{ min}^{-1}$  vier Zwischenstufen mit konstanten Stufensprüngen eingeschaltet werden. Welche Drehzahlen ergeben sich für das zu konstruierende Getriebe?
- In welcher allgemeinen Form läßt sich die Endstufe des Getriebes ( $n_e$ ) ausdrücken, wenn man die Anfangsstufe mit  $n_a$ , den konstanten Stufensprung mit  $q$  und die Anzahl der Stufen mit  $z$  bezeichnet?
  - Berechne aus der gewonnenen Gleichung die Größe des Stufensprungs!
  - Stelle die in a) gewonnene Funktion von  $q$  geometrisch dar! Welcher Art ist die Funktion?
  - Logarithmiere die in a) gewonnene Gleichung! Welcher Art ist die Funktion, die den Logarithmus der Endstufe als Funktion der Stufenzahl darstellt?
  - Stelle diese Funktion in einfach-logarithmischem Papier geometrisch dar! Welcher Art ist die Kurve?
  - Zeichne die Funktion für die gegebenen Werte  
 $n_a = 450 \text{ min}^{-1}$ ,  $n_e = 1400 \text{ min}^{-1}$  und  $z = 5$ !
  - Bestimme aus dem geometrischen Bild die zu den einzelnen Stufen gehörigen Drehzahlen  $n_1, n_2, n_3, n_4$ !
  - Überprüfe die geometrische Lösung durch Rechnung!
12. Übertrage von der unteren Teilung des logarithmischen Rechenstabes die zwischen den Zahlen 25 und 75 liegende Strecke auf Millimeterpapier und teile sie in fünf gleiche Teile!
- Bestimme die den Teilpunkten auf dem Rechenstab zugeordneten Numeri!
  - Bilde die Quotienten je zweier aufeinanderfolgender Zahlen der Zahlenfolge!
  - Beweise allgemein, daß zu den Teilpunkten, die durch die gleichmäßige Teilung einer zwischen den Zahlen  $a$  und  $b$  auf dem Rechenstab liegenden Strecke in  $n$  gleiche Teile entstehen, eine geometrische Zahlenfolge gehört!
13. Wende das in Aufgabe 12 entwickelte und begründete Verfahren zur Lösung der Aufgabe 11 an! Anleitung: Übertrage die zwischen den Zahlen 450 und 1400 auf dem Rechenstab liegende Strecke auf Millimeterpapier und teile sie in fünf gleiche Teile! Bestimme die den Teilpunkten auf dem Rechenstab entsprechenden Zahlenwerte und vergleiche sie mit den Ergebnissen aus Aufgabe 11!
14. Eine Drehbank kann mit den Drehzahlen 35, 45, 56, 71, 90, 112, 140, 180, 224, 280, 355 und  $450 \text{ min}^{-1}$  laufen. Untersuche, ob diese Folge eine geometrische Folge ist! Anleitung: Bestimme die Quotienten je zweier aufeinanderfolgender Glieder mit dem Rechenstab und bestimme den Mittelwert der Quotienten!
15. Beim Dreh-, Bohr- und Schleifdurchmesser 100 mm betragen die Schnittgeschwindigkeiten  $v$
- |     |     |     |     |     |    |    |    |           |
|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|-----------|
| 3,5 | 4,4 | 5,7 | 6,9 | 8,8 | 11 | 14 | 18 | 22 m/min, |
|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|-----------|
- die Umdrehungen  $n$
- |    |    |    |    |    |    |    |    |                      |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----------------------|
| 11 | 14 | 18 | 22 | 28 | 36 | 45 | 56 | 71 $\text{min}^{-1}$ |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----------------------|
- und beim Vorschub<sup>1)</sup>  $s = 0,1 \text{ mm}$ , bezogen auf eine Umdrehung, die Arbeitszeiten  $t$  für 100 mm Länge des Arbeitsstückes
- |    |    |    |    |    |    |    |    |         |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---------|
| 88 | 71 | 56 | 45 | 36 | 28 | 22 | 17 | 14 min. |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---------|
- Untersuche, ob diese Folgen geometrische Folgen sind!

1) Vorschub ist die Bewegung eines Arbeitsstückes gegenüber dem feststehenden Teil der Werkzeugmaschine bzw. des Werkzeugs oder umgekehrt.

16. Die Bedürfnisse der Technik (Drehzahlen an Werkzeugmaschinen, Durchmesser von Werkstücken, metrische Nummern von Garnen<sup>1)</sup> u. a.) erfordern eine geometrische Unterteilung der Stufensprünge im Zehnersystem. Diese ist durch die Normzahlreihe R 10 (DIN 323), eine geometrische Folge mit dem Quotienten

$$\sqrt[10]{10},$$

gegeben. Abgeleitet sind die Normzahlreihen R 5 (Wurzelexponent 5), R 20 (Wurzelexponent 20) und R 40 (Wurzelexponent 40) mit dem Radikanden 10. Berechne für die Normzahlreihe R 10 die Werte zwischen 1 und 10! Nach Multiplikation mit 10, 100 usf. gelten diese Werte in den folgenden Zehnerstufen. (In der Praxis wird mit gerundeten Werten gearbeitet — vgl. Aufgaben 11, 14, 15.)

Anleitung: Berechne die Wurzel logarithmisch und die Normzahlwerte auf die ersten vier geltenden Ziffern!

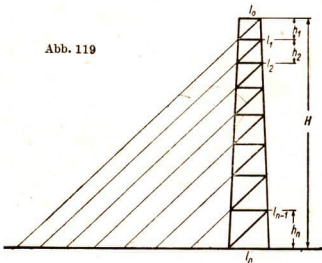
17. In DIN 3 sind u. a. folgende Durchmesser genormt:

100, 105, 110, 120, **125**, 130, 140, 150, **160**, 170, 180, 190, **200**, 210, 220, 240, **250**, 260, 280, 300, **315**, 330, 355, 380, **400**, 420, 450, 480, **500**, 530, 560, 600, **630**, 670, 710, 750, **800**, 850, 900, 950, **1000**.

Welcher Normzahlreihe sind die fettgedruckten Werte entnommen? Wie heißen sie genau? Welches sind die Zahlen der Reihe R 5?

18. Ein Gittermast einer elektrischen Hochspannungsleitung hat die Form einer geraden, quadratischen, abgestumpften Pyramide, deren Seitenflächen durch Stahlgitter gebildet werden, die die Form gleichschenkliger Trapeze haben (Abb. 119). Jede dieser Seitenflächen ist durch horizontale Stahlschienen so in Felder unterteilt, daß die diagonalen Versteifungen dieser Felder parallel laufen. Die Höhe einer Seitenfläche ist gleich  $h$  m, die oberste Parallele  $l_0$  m, die unterste  $l_n$  m.

Abb. 119



- Beweise allgemein, daß die parallelen Strecken  $l_0, l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  eine geometrische Folge bilden!
- Beweise, daß auch die Abstände  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$  der parallelen Strecken ebenso wie die Seitenlängen der einzelnen Felder eine geometrische Zahlenfolge mit gleichem Stufensprung bilden wie die  $l$ -Reihe!
- Durch welchen allgemeinen Ausdruck ist die Gesamtlänge aller horizontalen Versteifungen einer Seitenfläche darstellbar?
- Berechne die Summe der Höhen der einzelnen Felder!
- Durch welche Strecken werden in der Abbildung die Summen aller horizontalen Versteifungen, aller Diagonalstützen und aller Höhen dargestellt?
- Berechne den konstanten Stufensprung  $q$ , wenn die Längen  $l_0 = 1$  m und  $l_n = 4$  m gegeben sind und die Zahl der Felder  $n = 10$  beträgt!
- Berechne mit dem ermittelten Wert von  $q$  die Längen der einzelnen horizontalen Versteifungen, der Höhen der einzelnen Felder und die Längen der einzelnen Diagonalstützen!

1) Metrische Nummer (Kurzzeichen Nm) gibt an, wieviel Kilometer (Meter) eines Garnes 1 kp (1 p) wiegen. Beispiel: Nm 28 bedeutet, 28 km Garn wiegen 1 kp.



19. In einer Kompressoranlage führt die Kompressionspumpe dem Kompressor, dessen Volumen  $V_0 \text{ cm}^3$  beträgt, bei jedem Hub die Luftmenge  $v \text{ cm}^3$  zu. Der Anfangsdruck im Kompressor sei 1 at. Die Kompressionswärme werde abgeführt.

- Wie groß ist die Luftmenge im Kompressor nach 1, 2, 3, ...,  $n$  Umdrehungen des die Pumpe treibenden Elektromotors?
- Berechne den Druck nach 1000 Umdrehungen für einen Kompressor, der ein Volumen von 25 l hat, wenn die bei einem Hub dem Kompressor zugeführte Luftmenge  $80 \text{ cm}^3$  bei 1 at beträgt!
- Wie groß ist der Druck  $p_n$  im Kompressor nach 1 min, wenn die Drehzahl des Motors  $n \text{ min}^{-1}$  beträgt?

20. Abb. 120 zeigt im Schnitt eine Rotationskapselpumpe. An den konischen Stützen  $K$  wird der Rezipient mit dem Volumen  $V \text{ cm}^3$  angeschlossen. Durch Drehung des exzentrischen Vollzylinders  $Z$  wird bei jeder Umdrehung zwischen den durch eine Druckfeder  $F$  an den Zylinder angepreßten Schieber  $S$  und dem Gehäuse  $G$  eine Luftmenge  $v \text{ cm}^3$  abgeschlossen und durch  $A$  nach außen befördert. Das Pumpengehäuse steht in einem Behälter unter Ölabschluß.

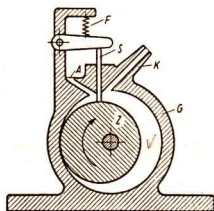


Abb. 120

- Wie groß ist nach einer einmaligen Umdrehung dem Mariotteschen Gesetz entsprechend der Luftdruck im Rezipienten, wenn der ursprüngliche Luftdruck 760 Torr war, der Rezipient das Volumen  $V = 3000 \text{ cm}^3$  hat und  $v = 200 \text{ cm}^3$  beträgt?
- Wie groß ist der Verdünnungsfaktor bei einer Umdrehung?
- Bestimme den Luftdruck im Rezipienten nach 1, 2, 3, ...,  $n$  Umdrehungen!
- Wie verhalten sich die Luftdrucke im Rezipienten nach 1, 2, 3, ...,  $n$  Umdrehungen?
- Auf welchen Druck sinkt der Luftdruck im Rezipienten in 1 min, wenn der die Pumpe treibende Motor 180 Umdrehungen je Minute macht und das Übersetzungsverhältnis der Riemenscheiben 4:1 beträgt?

21. Bei der gleichschwebend temperierten Stimmung haben die Töne

c    cis    d    dis    e    f    fis    g    gis    a    ais    h    c

die relativen Schwingungszahlen

$$q^0 = 1 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^3 \quad q^4 \quad q^5 \quad q^6 \quad q^7 \quad q^8 \quad q^9 \quad q^{10} \quad q^{11} \quad q^{12} = 2.$$

Wie groß ist das Intervall zwischen zwei Tönen?

Untersuche die Unterschiede zwischen der reinen und der temperierten Stimmung für die Quinte (3:2), die Quarte (4:3), die Sexte (5:3) und die große Terz (5:4)!

22. Teile mit Hilfe der Konstruktion der Glieder einer fallenden geometrischen Folge (vgl. Abb. 115) das Griffbrett einer Laute mit der Saitenlänge von 624 mm nach der gleichschwebend temperierten Stimmung (Maßstab 1:2, vgl. Aufg. 21)!

23. Auf einem Photoapparat mit der Brennweite 10,5 cm sind die relativen Öffnungen  $F: 4,5; 5,6; 8; 11; 16; 22; 32$  angegeben. Die Wahl der nächstkleineren Blende erfordert etwa die doppelte Belichtungszeit der vorhergehenden. Für Blende  $F: 8$  ist mit einem Belichtungsmesser für einen Film DIN 17 eine Belichtungszeit von  $\frac{1}{100} \text{ s}$  bestimmt worden.

- Welche Belichtungszeiten sind für die angegebenen Blenden erforderlich?
- Der Verschluss läßt 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{25}$ ,  $\frac{1}{50}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{250} \text{ s}$  als Belichtungszeiten zu. Welche Blenden können verwendet werden?





In Gleichung (58) war die Summe einer fallenden geometrischen Folge durch

$$s_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - a \cdot \frac{q^n}{1 - q}$$

bestimmt worden. Ist nun  $0 < q < 1$ , so wird  $q^n$  mit wachsendem Exponenten kleiner und kleiner und nähert sich dem Werte 0. Es ergibt sich dann

$$s = \frac{a}{1 - q}. \quad (59)$$

$s$  wird als Grenzwert der Teilsummen  $s_n$  bezeichnet. Unter  $s$  verstehen wir die Summe einer fallenden unendlichen geometrischen Folge.

Abb. 122 zeigt die fallende geometrische Folge mit dem Anfangsglied  $x_1 = 0,8$  und dem Quotienten  $q = 0,5$ , also die Werte

$x_1 = 0,8; x_2 = 0,4; x_3 = 0,2; x_4 = 0,1; x_5 = 0,05; x_6 = 0,025; x_7 = 0,0125; \dots$

In Abb. 123 sind die Teilsummen mit den Werten

$s_1 = 0,8; s_2 = 1,2; s_3 = 1,4; s_4 = 1,5; s_5 = 1,55; s_6 = 1,575; s_7 = 1,5875; \dots$

veranschaulicht. Mit wachsendem Index wird der Wert der Teilsumme immer größer und nähert sich dem Zahlenwert 1,6; dabei wird der Wert der einzelnen Glieder immer kleiner und nähert sich dem Zahlenwert 0.

Mit dem Index  $n=7$  ist die Genauigkeitsgrenze in den Abb. 122 und 123 erreicht.

Eine andere fallende geometrische Folge verdeutlicht z.B. die Folge mit dem Anfangsglied  $x_1 = 0,3$  und dem Quotienten  $q = 0,1$ . Es ist

$x_1 = 0,3; x_2 = 0,03; x_3 = 0,003; \dots$

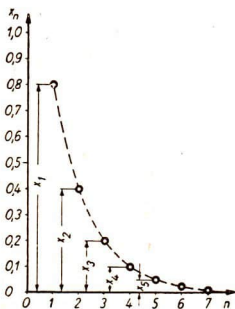


Abb. 122

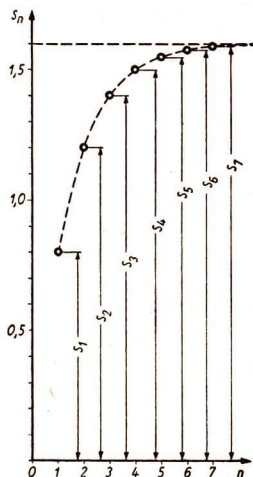


Abb. 123

Als Teilsummen ergeben sich

$$s_1 = 0,3; s_2 = 0,33; s_3 = 0,333; \dots; s_n = 0,333333 \dots$$

Mit wachsender Gliederzahl wächst der Wert der Teilsummen.  $s_n$  ist aber, wie groß auch  $n$  gewählt werden mag, stets größer als 0,3 und kleiner als 0,4.

Wird auf vier Dezimalstellen genau gerechnet, so zeigen die Teilsummen von  $s_4$  an keine Unterschiede mehr. Wird eine größere Genauigkeit gefordert, so tritt diese Tatsache später ein, bleibt aber immer bestehen.

Für  $x_1 = 0,3$  und  $q = 0,1$  folgt

$$s = \frac{0,3}{1 - 0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3},$$

d. h. der Grenzwert ist  $\frac{1}{3}$ .

### Aufgaben

- Veranschauliche die unendlichen geometrischen Zahlenfolgen  
 a)  $x_1 = 2, q = 1,5$ ;    b)  $x_1 = 4, q = 0,5$     in geeigneter Weise!
- Konstruiere a) nach Abb. 121, b) nach Abb. 123 die Summe der unendlichen geometrischen Folge  $x_1 = 2, q = \frac{1}{2}$  und deren Grenzwerte! Projiziere bei Konstruktion nach Abb. 121 die Teilsummen auf eine zur Waagerechten parallele Achse!
- Berechne die Summen der unendlichen geometrischen Folgen mit den allgemeinen Gliedern  
 a)  $\frac{1}{2^n}$ ;    b)  $\frac{1}{5^n}$ ;    c)  $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ !  
 Veranschauliche die Konvergenz! Welche der Folgen konvergiert am stärksten? Nach wieviel Gliedern ist die Summe auf vier Stellen genau berechnet?  
 Anleitung: Das Restglied  $R_n = \frac{a q^n}{1 - q}$  muß kleiner sein als die Hälfte der vierten Stelle!  
 ( $R_n < 1 : 20000$ )
- Zeige, daß die Stufen  
 a) des dekadischen Zahlensystems,  
 b) des Zweier-Zahlensystems,  
 c) des Fünfer-Zahlensystems Glieder von geometrischen Zahlenfolgen sind!
- Wie groß ist die Summe der unendlichen geometrischen Folge mit dem Anfangswert  $a = 3$  und dem Quotienten 0,1?  
 Schreibe die Summe als gemischte Zahl! Bilde Teilsummen!
- Jeder periodische Dezimalbruch stellt die Summe einer geometrischen Folge dar. Bilde die Summen von a)  $a = 0,37, q = 0,01$ ; b)  $a = 0,159, q = 0,001$ !  
 Kann man aus der Ableitung die Regel für die Umwandlung eines periodischen Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch erkennen?
- Jeder gemischtperiodische Dezimalbruch läßt sich in die Summe  $s = a + b + bq + bq^2 + \dots$  umwandeln. Berechne den Wert, wenn  
 a)  $a = 0,2, b = 0,03, q = 0,01$ ;    b)  $a = 0,41, b = 0,006, q = 0,1$  ist!
- Ein Tennisball springt  $h_1 = 1,50$  m hoch, wenn man ihn aus der Höhe  $h = 2,50$  m auf eine harte Unterlage frei fallen läßt. Wie hoch springt er nach dem zweiten Aufschlagen? Wann kommt der Ball zur Ruhe? Welche Strecke legt er insgesamt zurück?

## VI. Anwendung der endlichen geometrischen Zahlenfolgen

## 16. Zinseszinsrechnung

## a) Begriff des Zinseszinses

Auf Sparkassenkonten eingezahlte Gelder werden je nach der Kündigungszeit mit einem Zinsfuß  $p = 3, 3\frac{3}{4}$  oder  $4\%$  im Jahr verzinst. Bleibt der Sparbetrag während eines Jahres unverändert, so wird er am Ende des Jahres um die Zinsen vermehrt. Der vermehrte Betrag gilt für das folgende Jahr als zinsbringend. Die Fortsetzung dieses Verfahrens, bei dem Zinsen, die zu dem vorhergehenden Betrag hinzugerechnet sind, wieder Zinsen bringen, führt zum Begriff Zinseszins.

## b) Ableitung der Zinseszinsformel

Wir bezeichnen einen zinsbringenden Betrag am Anfang des ersten Jahres, d. h. zum Zeitpunkt 0, mit  $k_0$ , seinen Wert am Ende des ersten Jahres mit  $k_1$ . Dieser Zeitpunkt stimmt mit dem Beginn des zweiten Jahres überein, so daß  $k_1$  gleichzeitig den Wert des Betrages am Anfang des zweiten Jahres darstellt, wie dies Abb. 124 erläutert. Die Werte am Ende des zweiten, dritten usw. Jahres bezeichnen wir mit  $k_2, k_3, \dots, k_n$ . Ist der Zinsfuß  $p$ , dann ergibt sich aus der einfachen Verzinsung jeweils für ein Jahr die nachstehende Aufstellung:

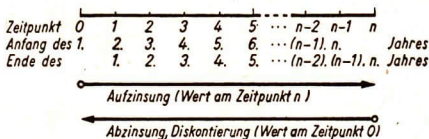


Abb. 124

Zins-termin Ende des Jahres	Anfangs-kapital	Zins des laufenden Jahres	Summe von Anfangskapital und Zins			Endkapital zurückgeführt auf Anfangskapital
			unmittelbar	vereinfacht	$1 + \frac{p}{100} = r$ eingesetzt	
1	$k_0$	$k_0 \frac{p}{100}$	$k_0 + k_0 \frac{p}{100}$	$k_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$k_0 r = k_1$	$k_0 r$
2	$k_1$	$k_1 \frac{p}{100}$	$k_1 + k_1 \frac{p}{100}$	$k_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$k_1 r = k_2$	$k_0 r^2$
3	$k_2$	$k_2 \frac{p}{100}$	$k_2 + k_2 \frac{p}{100}$	$k_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$k_2 r = k_3$	$k_0 r^3$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
n	$k_{n-1}$	$k_{n-1} \frac{p}{100}$	$k_{n-1} + k_{n-1} \frac{p}{100}$	$k_{n-1} \left(1 + \frac{p}{100}\right)$	$k_{n-1} r = k_n$	$k_0 r^n$

Der Faktor  $1 + \frac{p}{100} = r$ , mit dem in jedem Jahr das zinspflichtige Kapital multipliziert wird, heißt der Aufzinsungsfaktor.

Aus der letzten Spalte der Aufstellung erkennen wir, daß bei der Berechnung von Zinseszinsen die Werte für das Kapital am Ende der einzelnen Zinsabschnitte Glieder einer wachsenden endlichen geometrischen Zahlenfolge mit dem Anfangsglied  $k_0$  und dem Quotienten  $r = 1 + \frac{p}{100}$  sind. Der letzte Wert der Endkapitalspalte gibt die Zinseszinsformel

$$k_n = k_0 \cdot r^n. \quad (60)$$

In dieser Gleichung wird  $k_0$  als der Anfangs- oder Barwert des Kapitals,  $k_n$  als der Endwert,  $r = 1 + \frac{p}{100}$  als der Aufzinsungsfaktor und  $n$  als die Zahl der Aufzinsungsabschnitte oder die Zeit bezeichnet.

Von den vier Größen der Zinseszinsformel müssen drei gegeben sein, wenn die vierte berechnet werden soll.

Die Frage nach dem Bar- oder Anfangswert wird beantwortet durch

$$k_0 = \frac{k_n}{r^n} = k_n v^n, \quad (61)$$

wenn für den reziproken Wert des Aufzinsungsfaktors die Größe  $v = \frac{1}{r}$  gesetzt wird.  $v$  wird als Abzinsungs- oder Diskontierungsfaktor bezeichnet. Da  $0 < v < 1$  ist, bilden die Barwerte eine fallende endliche Zahlenfolge.

**Merke:**

**Aufzinsen heißt Endwert des Kapitals berechnen!**  
**Abzinsen heißt Barwert des Kapitals berechnen!**

Gehe bei Berechnungen stets von den Gleichungen (60) oder (61) aus!

### e) Zinseszinstabellen

Sparkassen und andere Kreditinstitute benutzen zur Berechnung Zinseszinstabellen, die der in der Logarithmentafel enthaltenen Zinseszinstafel ähneln. Schülkes Tafeln enthalten die Aufzinsungs- und Abzinsungsfaktoren auf die ersten vier geltenden Ziffern für wenige Zinsfüße. Das Tabellenbuch zur Wirtschaftsmathematik<sup>1)</sup> enthält die Faktoren für eine größere Anzahl von Zinsfüßen auf sechs Stellen genau. In der Praxis werden vielfach Tafelwerte benutzt, die die Faktoren auf acht Stellen genau angeben.

Wir benutzen die Tafelwerte von Schülkes Tafeln oder berechnen die Werte mit Hilfe von Logarithmen. Vierstellige Logarithmentafeln enthalten die Logarithmen der Aufzinsungsfaktoren fünfstellig, fünfstellige dagegen sechsstellig.

<sup>1)</sup> Beyrodt-Reißner, Tabellenbuch zur Wirtschaftsmathematik, 2., verbesserte Auflage, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1952, Bestell-Nr. 9110.



## Aufgaben

1.	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
$k_0$	5000	4200	3225	2500	1575	7250	2325	DM
$p$	4	3,5	3	5	4,5	2,5	3,5	%
$n$	20	40	60	32	16	38	27	Jahre
$k_n$	10955	16628	19000	11912	3185	23718	5886	DM

Berechne mit Hilfe der Zinseszinstafel bzw. logarithmisch 1) den Endwert, 2) den Anfangswert, 3) den Zinsfuß, 4) die Zeit, wenn jeweils die anderen Werte gegeben sind!

Anleitung: Benutze bei der Berechnung von Aufzinsungsfaktoren die fünfstelligen Logarithmen in Schülkes Tafeln!

2. Welches Kapital wächst in 25 Jahren bei  $4\frac{1}{2}\%$  Zinseszins auf DM 16325,— an?

3. In welcher Zeit wächst ein Kapital von 2500 DM auf 6300 DM bei 4% Zinseszins an?

Anleitung: Bestimme aus der Exponentialgleichung (60) durch Logarithmieren den Wert von  $n$ ! Der Wert  $n = 23,56$  bedeutet, daß in 23 Jahren der Betrag 6300 noch nicht erreicht, in 24 Jahren aber überschritten ist. In der praktischen Anwendung der Zinseszinsrechnung wird meist vereinbart, daß Zinseszinsen nur für volle Jahre gelten. Innerhalb eines jeden Jahres wird mit einfachen Zinsen gerechnet.

4. In welcher Zeit verdoppelt (verdreifacht, vervierfacht) sich ein Betrag bei 2%; 3%;  $3\frac{1}{2}\%$ ; 4% und 5% Zinseszins? Deute jedes Ergebnis in einer Ungleichung!

Anleitung: Benutze möglichst die Zinseszinstafel!

5. In welcher Zeit wachsen 2756 DM auf 8127 DM bei 2% Zinseszins an?

6. Warum streckt sich die Zinseszinskurve in halblogarithmischem Papier zur Geraden?

7. Der in Festmetern angegebene Waldbestand wächst während eines verhältnismäßig großen Zeitraumes angenähert nach der Zinseszinsformel. Diese Faustregel gilt nicht für einen sehr jungen und einen sehr alten Bestand. Ein Waldbestand ist mit 4 Millionen Festmetern geschätzt. Der jährliche Zuwachs beträgt 3%. Wie groß ist der Bestand nach 10 Jahren, wenn in der Zwischenzeit nichts geschlagen wird?

## 17. Anwendungen der Zinseszinsrechnung im Geldverkehr

## a) Der Begriff der Zeitrente

Als Zeitrente wird eine Folge von Zahlungen bezeichnet, die in regelmäßigen Zeitabschnitten während einer von vornherein vereinbarten Dauer geleistet werden. Die einzelnen Zahlungen heißen Raten der Zeitrente. Die Raten werden meist ganzjährig nachschüssig, d. h. am Ende der regelmäßigen Zeitabschnitte, dagegen selten vorschüssig, d. h. jeweils am Anfang, in gleicher oder in gesetzmäßig veränderlicher Höhe geleistet.

## b) Der Endwert der nachschüssigen Zeitrente als Summe einer geometrischen Folge

Den Endwert (Schlußwert) der jährlichen Zeitrente mit dem Rentenbetrage 1 bezeichnen wir mit  $s_{\overline{n}|}$  (sprich: Endwert der nachschüssigen Zeitrente 1 auf  $n$  Jahre). Dabei bedeutet  $n$  die Laufzeit der Zeitrente und  $s$  das Symbol für den Endwert bei nachschüssiger Zahlungsweise.

Handelt es sich um die Jahresrate  $R$ , so ist der Endwert dieser Zeitrente  $R$ mal so groß wie der entsprechende Wert für die Einheit.



Zur Erleichterung der Berechnungsveranschaulichen wir die Zahlungsbedingungen und den Bezugspunkt, für den der Wert der Zeitrente berechnet werden soll, an einer Zeitskala (Abb. 125).

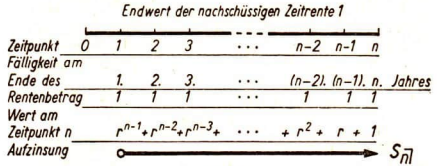


Abb. 125

Aus Abb. 125 ergibt sich, daß die Raten der

Zeitrente 1 selbst eine konstante endliche Folge darstellen. Wird jede einzelne Zahlung mit Zinseszins auf den Zeitpunkt  $n$  aufgezinst, so erhalten wir die in der folgenden Aufstellung gegebenen Werte:

Ende des ... Jahres	Wert des							Endwert
	1.	2.	3.	...	( $n-2$ )-ten	( $n-1$ )-ten	$n$ -ten	
	Rentenbetrages							
1.	1							
2.	$r$	1						
3.	$r^2$	$r$	1					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				
( $n-2$ )-ten	$r^{n-3}$	$r^{n-4}$	$r^{n-5}$		1			
( $n-1$ )-ten	$r^{n-2}$	$r^{n-3}$	$r^{n-4}$		$r$	1		
$n$ -ten	$r^{n-1}$	$r^{n-2}$	$r^{n-3}$		$r^2$	$r$	1	$S_n$

Die Werte in der letzten Zeile bilden eine endliche geometrische Folge mit dem Anfangsglied 1 und dem Quotienten  $r$ , so daß der Endwert der nachschüssigen, auf  $n$  Jahre beschränkten Zeitrente 1 gleich der Summe dieser Folge ist. Es ist

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{r^n - 1}{r - 1} \tag{62}$$

c) Der Barwert der nachschüssigen Zeitrente

Den Barwert (Anfangswert) der nachschüssigen, auf  $n$  Jahre beschränkten Zeitrente 1 bezeichnen wir mit  $a_n$  (sprich: Barwert der nachschüssigen Zeitrente 1 auf  $n$  Jahre).  $a$  ist das Symbol für den Barwert bei nachschüssiger Zahlungsweise. Diskontieren wir den Endwert  $S_n$  auf den Zeitpunkt 0, d. h. dividieren wir nach dem Zinseszinsgesetz durch  $r^n$ , so erhalten wir den Barwert der auf  $n$  Jahre beschränkten nachschüssigen Zeitrente 1. Es ist

$$a_n = \frac{S_n}{r^n} = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \tag{63}$$

## d) Abgeleitete Werte

Sind abgeleitete Werte zu berechnen, so gehen wir stets auf die Grundformeln (62) oder (63) zurück und lösen diese nach der gesuchten Größe auf.

Berechnen wir z. B. die Zeit, in der die nachschüssige Zeitrente 1 bei 4 % Zinseszins den Endwert 15 besitzt, so gehen wir von der Gleichung (62) aus, erhalten aus

$$15 = \frac{1,04^n - 1}{0,04}$$

die Exponentialgleichung

$$1,04^n = 1 + 15 \cdot 0,04 = 1,6$$

und nach dem Logarithmieren

$$n \cdot \lg 1,04 = \lg 1,6$$

oder

$$n = \frac{\lg 1,6}{\lg 1,04} = \frac{0,2041}{0,01703}$$

Den Wert dieses Quotienten bestimmen wir entweder durch Division oder mit Hilfe einer logarithmischen Nebenrechnung.

Die Laufzeit der Zeitrente beträgt 11,98 Jahre. Die Rente muß, wenn sie 12 Jahre laufen soll, um ein Geringes kleiner als 1 sein.

## e) Der Tilgungsplan eines Darlehens

Hypotheken werden vielfach in der Form von Tilgungsdarlehen gegeben.

Beispiel: Eine Hypothek über 10000 DM wird mit  $4\frac{1}{2}\%$  verzinst und mit 1 % des ursprünglichen Betrages getilgt. Die Jahresleistung, die Zins- und Tilgungsbeträge umfaßt, wird als Annuität<sup>1)</sup> bezeichnet. Die Annuität bleibt während der Tilgungsdauer unverändert. Den Tilgungsverlauf verdeutlicht der nachstehende Tilgungsplan:

Jahr	Schuld am Anfang des Jahres	Annuität	Zinsbetrag	Tilgungs- betrag	Schuld am Ende des Jahres
1	10000,00	550,00	450,00	100,00	9900,00
2	9900,00	550,00	445,50	104,50	9795,50
3	9795,50	550,00	440,80	109,20	9686,30
4	9686,30	550,00	435,88	114,12	9572,18
5	9572,18	550,00	430,75	119,25	9452,93
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Aus diesem Anfang ist zu erkennen, daß der Tilgungsplan elementar zu berechnen ist, wenn die Annuität bekannt ist. Weiter stellen wir fest, daß mit der fortschreitenden Tilgung der Zinsbetrag abnimmt, der Tilgungsbetrag dagegen wächst, die Hypothekenschuld sich also in zunehmendem Maße vermindert.

1) annus (lat.) heißt das Jahr.

Bezeichnen wir die Annuität mit  $A$ , den Schuldbestand zu Beginn der Tilgung mit  $S$ , den am Ende des 1., 2., 3., ... Jahres mit  $S_1, S_2, S_3, \dots$  und die Tilgungsbeträge, die am Ende des 1., 2., 3., ... Jahres geleistet werden, mit  $T_1, T_2, T_3, \dots$ , so wird

$$\begin{aligned} T_1 &= A - S \cdot \frac{p}{100} & \text{und} & & S_1 &= S - T_1 \\ T_2 &= A - S_1 \cdot \frac{p}{100} & & & S_2 &= S_1 - T_2 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ T_k &= A - S_{k-1} \cdot \frac{p}{100} & & & S_k &= S_{k-1} - T_k. \end{aligned} \quad (64, 65)$$

Setzen wir in

$$T_{k+1} = A - S_k \cdot \frac{p}{100}$$

den Wert von  $S_k$  ein, so folgt

$$T_{k+1} = A - S_{k-1} \cdot \frac{p}{100} + T_k \cdot \frac{p}{100}$$

und, da der erste Teil der rechten Seite gleich  $T_k$  ist (vgl. 64),

$$T_{k+1} = T_k + T_k \cdot \frac{p}{100} = T_k \cdot r. \quad (66)$$

Setzen wir für  $k$  der Reihe nach 1, 2, 3, ..., so folgt

$$T_2 = T_1 r; \quad T_3 = T_2 r = T_1 r^2; \quad T_4 = T_3 r = T_1 r^3; \quad \dots; \quad T_k = T_1 r^{k-1}. \quad (67)$$

Die Gleichungen (67) lassen erkennen, daß die Tilgungsbeträge Glieder einer geometrischen Folge sind.

Für das Ausgangsbeispiel ist der Tilgungsbetrag des 10. Jahres

$$T_{10} = 100 \cdot 1,045^9 = 148,60 \text{ DM.}$$

Die Summe der Tilgungsraten der  $k$  ersten Jahre ist die Summe der durch die Gleichungen (67) gegebenen geometrischen Folge. Es ist

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_k = T_1 (1 + r + r^2 + \dots + r^{k-1}) = T_1 \cdot s_k. \quad (68)$$

Addiert man die Gleichungen (65)

$$\begin{aligned} S_1 &= S & - & T_1 \\ S_2 &= S_1 & - & T_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ S_k &= S_{k-1} & - & T_k, \end{aligned}$$

so folgt für den Schuldwert am Ende des  $k$ -ten Jahres

$$S_k = S - (T_1 + T_2 + \dots + T_k)$$

und unter Benutzung von Gleichung (68)

$$S_k = S - T_1 \cdot s_k. \quad (69a)$$

Der Schuldrest am Ende des 10. Jahres ist in unserem Ausgangsbeispiel

$$S_{10} = 10000 - 100 s_{\overline{10}|} = 10000 - 1229 = 8771 \text{ DM.}$$

Wenn die Schuld nach  $n$  Jahren getilgt sein soll, so wird  $S_n = 0$  und somit

$$0 = S - T_1 \cdot s_{\overline{n}|} \quad (69 \text{ b})$$

oder auf Grund von (62) 
$$T_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = S.$$

Aus dieser Bestimmungsgleichung für  $n$  entsteht zunächst

$$r^n = \frac{S}{T_1} (r - 1) + 1$$

und nach dem Logarithmieren

$$n = \frac{\lg \left[ \frac{S}{T_1} (r - 1) + 1 \right]}{\lg r}.$$

In unserem Beispiel wird  $n \approx 38,72$ ; die Hypothek ist also am Ende des 39. Jahres getilgt.

### Aufgaben

1. Zeige, daß  $\frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = v \frac{1 - v^n}{1 - v}$  ist! Beachte:  $v = \frac{1}{r}$ !
2. Löse  $s_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$  nach  $n$  auf!
3. Ein Betrag von 2500 DM wird 25 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres um 250 DM vermehrt. Wie hoch ist der Wert am Ende **a)** des 15., **b)** des 25. Jahres bei 4% Zinseszins?  
Anleitung: Stelle an der Zeitskala die Einzahlungen dar und beziehe die Berechnung auf den Endzeitpunkt! Rechne mit Tabelle und logarithmisch!
4. Eine Hypothek von 8000 DM wird mit 4% jährlich verzinst und **a)** mit 1%, **b)** mit 6% getilgt. Nach wieviel Jahren ist die Tilgung beendet?  
Anleitung: Stelle die Entwicklung an der Zeitskala dar! Berechne die Werte der Leistungen von Schuldner und Gläubiger für den Endzeitpunkt! Löse nach  $n$  auf!  
Was bedeutet das Ergebnis?
5. Stelle zur Aufgabe 4 die beiden Tilgungspläne für die ersten 5 Jahre auf! Berechne die entsprechenden Zeilen der Tilgungspläne für das 11., 21., 31., 41. und die beiden letzten Jahre bzw. vom 11. Jahre an!  
Anleitung: Benutze die Gleichungen (69) und (67)!
6. Löse die Aufgaben 4 und 5 bei 4% Zinsen und 2% Tilgung, gerechnet vom ursprünglichen Betrag!
7. Die Annuität eines Tilgungsdarlehens beträgt 5%. Berechne die Tilgungsdauer **a)** bei 3%, **b)** bei  $3\frac{1}{2}\%$  und **c)** bei 4% Zinseszins!
8. Veranschauliche die Entwicklung der Zinsen und der Tilgungsbeträge in halblogarithmischem Papier für eine Annuität von 5% bei einem Zinsfuß **a)** von 3%, **b)** von 4%!  
Anleitung: Benutze als Zeitskala die linear geteilte Achse!

## Seiten- und Abbildungsvergleich

Durch die Streichung der Abschnitte *A. III. Die Koordinatengeometrie, A. V. 14. Die Phaseneigenschaften der trigonometrischen Funktionen und C. Geometrische Verwandtschaften* ergaben sich in der vorliegenden Auflage Änderungen der Seitenzahlen und der Abbildungsnummern gegenüber dem 1. bis 80. Tausend. Um eine Nebeneinanderbenutzung der verschiedenen Auflagen zu ermöglichen, werden im folgenden die entsprechenden Seitenzahlen und Abbildungsnummern der verschiedenen Auflagen gegenüber gestellt.

### I. Seitenzahlen

Auflage		Auflage		Auflage		Auflage	
1. und 2.	3.	1. und 2.	3.	1. und 2.	3.	1. und 2.	3.
1 bis 48	unveränd.	85	64	112	80	128	96
49 bis 69	gestr.	86	65	113	81	129	97
70	49	87	66	114	82	130	98
71	50	88	67	115	83	131	99
72	51	89	68	116	84	132	100
73	52	90	69	117	85	133	101
74	53	91	70	118	86	134	102
75	54	92	71	119	87	135	103
76	55	93	72	120	88	136	104
77	56	94	73	121	89	137	105
78	57	95/96	74	122	90	138	106
79	58	97 bis 106	gestr.	123	91	139	107
80	59	107	75	124	92	140	108
81	60	108	76	125	93	141	109
82	61	109	77	126	94	142	110
83	62	110	78	127	95	143	111
84	63	111	79				

### II. Abbildungsnummern

Auflage		Auflage		Auflage		Auflage	
1. und 2.	3.	1. und 2.	3.	1. und 2.	3.	1. und 2.	3.
1 bis 55	unveränd.	95	73	113	91	143	108
56 bis 77	gestr.	96	74	114	92	144	109
78	56	97	75	115	93	145	110
79	57	98	76	116	94	146	111
80	58	99	77	117	95	147	112
81	59	100	78	118	96	148	113
82	60	101	79	119	97	149	114
83	61	102	80	120	98	150	115
84	62	103	81	121 bis 133	gestr.	151	116
85	63	104	82	134	99	152	117
86	64	105	83	135	100	153	118
87	65	106	84	136	101	154	119
88	66	107	85	137	102	155	120
89	67	108	86	138	103	156	121
90	68	109	87	139	104	157	122
91	69	110	88	140	105	158	123
92	70	111	89	141	106	159	124
93	71	112	90	142	107	160	125
94	72						

