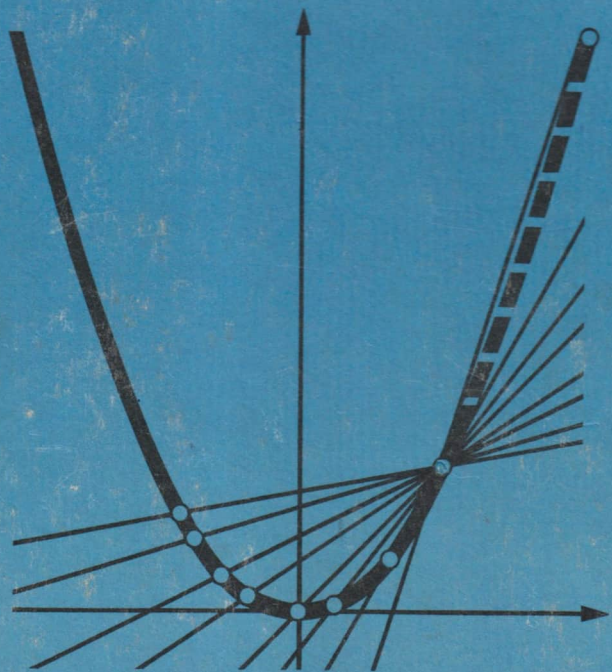


Mathematik 11



Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

Das **Randregister** auf dem Außenrand der Seiten dient dem bequemen und schnellen Auffinden der Kapitel. Auf dem Vorsatz finden Sie hierzu eine Übersicht über die einzelnen Kapitel.

Der Lehrteil gliedert sich in die Kapitel A bis E, der Aufgabenteil in die Kapitel a bis e. Dabei enthält zum Beispiel das Kapitel b die Aufgaben für das Kapitel B im Lehrteil.

Jedes **Kapitel** ist durch Zwischenüberschriften und durch eine fortlaufende Numerierung mit schwarzen halbfetten Ziffern in **Lerneinheiten** untergliedert.

Innerhalb der Lerneinheiten werden die **Beispiele, Übungen und Definitionen** durch folgende Marken gekennzeichnet:

- Beispiele,
- Übungen,
- ▶ Definitionen und Sätze.

Durch die Ziffern in den Marken werden auch die Übungen, Beispiele und Sätze numeriert. Sämtliche Numerierungen werden jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt. Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnen dann alle Numerierungen von neuem. Hinweise auf Lerneinheiten, Beispiele usw. werden im laufenden Text mit dem Buchstaben des betreffenden Kapitels angegeben.

Zum Beispiel:

Lerneinheit C 11 ist die Lerneinheit 11 des Kapitels C.

Beispiel D 5 ist das Beispiel 5 im Kapitel D.

Übung A 13 ist die Übung 13 im Kapitel A.

Die **Aufgaben** wurden folgendermaßen untergliedert:

Nebeneinanderstehende Aufgaben, wie zum Beispiel die Aufgaben a 87 und a 88, behandeln jeweils das gleiche mathematische Problem und sind im allgemeinen vom gleichen Schwierigkeitsgrad.

Mit kursiver Numerierung wurden **zusätzliche Aufgaben** gekennzeichnet, die sich auf manchen Seiten des Aufgabenteils befinden. Bei diesen Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad im allgemeinen höher als bei den normalen, halbfett numerierten Aufgaben.

**Vollständige Induktion;
Folgen**

A a

Grenzwerte

B b

**Einführung
in die Differentialrechnung**

C c

**Einführung
in die Integralrechnung**

D d

**Vektorrechnung
und analytische Geometrie**

E e

Register

Z

MATHEMATIK

Lehrbuch für die erweiterte Oberschule

Klasse 11



Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1970

Autoren:

Dr. Günter Lorenz, Dr. Günter Pietzsch — Kapitel A, a
Diplom-Math. Horst Lemke — Kapitel B, C, D
Günter Fanghänel — Kapitel b, c
Otto Kegel — Kapitel d
Dr. Brigitte Frank — Kapitel E, e
Werner Stoye — Seiten 201 und 202 (Anhang)

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt

2. Auflage

Ausgabe 1969

Lizenz Nr. 203 · 1000/70 (UN)

ES 11 G

Redaktion: Karlheinz Martin

Zeichnungen: Heinz Grothmann

Umschlag: Manfred Behrend

Typografie: Wolfgang Lorenz

Gesamtherstellung: Leipziger Druckhaus · Grafischer Großbetrieb · III/18/203
Gesetzt aus der Times

Redaktionsschluß: 31. Januar 1969

Bestell-Nr.: 00 11 51-2 Preis: 4,60

A. Vollständige Induktion, elementare Folgen

A

Seite

4 Aufbau der Zahlenbereiche, Schranken und Grenzen

Wiederholung des Aufbaus der Zahlenbereiche · Prinzip der Zahlenbereichserweiterungen · Schranken und Grenzen · Der Satz von der oberen (unteren) Grenze

12 Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Induktion und Deduktion · Induktive Definitionen · Binomialkoeffizienten · Der binomische Satz

27 Elementare Folgen

Begriff der Zahlenfolge · Monotonie, Schranken und Grenzen von Folgen · Arithmetische und geometrische Folgen · Partialsummen · Anwendungsbeispiele

Blendenzahlen und Verschlusszeiten an Fotoapparaten bilden Folgen, genauer sog. endliche geometrische Folgen. Sie sind derart aufeinander abgestimmt, daß der Übergang zur nächstgrößeren Blende beim gleichzeitigen Übergang zur nächstkleineren Belichtungszeit die gleiche Belichtung des Films gewährleistet.

Geometrische Folgen bilden in Form der sog. Vorzugs- oder Normzahlen die Grundlage für die Typisierung von Hauptabmessungen in der Technik und ermöglichen die Wahl zweckmäßiger Größenstufungen bei Drehzahlen, Vorschüben, Gewindedurchmessern u. dgl. mehr.



1 Zur Wiederholung des Aufbaus der Zahlenbereiche

In der Mathematik versteht man unter einer **Menge** die gedankliche Zusammenfassung wohlbestimmter und wohlunterschiedener Objekte der Realität oder des Denkens. Die Zugehörigkeit eines Objektes x zu einer Menge M drückt man aus: sprachlich durch „ x ist Element von M “, symbolisch durch „ $x \in M$ “. Trifft das nicht zu, so sagt man „ x ist nicht Element von M “ und schreibt „ $x \notin M$ “.

Gibt man eine Menge an, indem man ihre Elemente aufführt, so setzt man geschweifte Klammern. So kann man z. B. die Menge P_{10} aller Primzahlen, die nicht größer sind als 10, schreiben als $P_{10} = \{2; 3; 5; 7\}$, und es gilt u. a.

$$2 \in P_{10}, 3 \in P_{10}, 9 \notin P_{10}.$$

Es gibt Mengen, die nur ein Element enthalten, sogenannte **Eiermengen**, und eine Menge, die kein Element enthält, die **leere Menge**. So ist z. B. die Menge P_2 aller geraden Primzahlen eine Eiermenge; die Menge aller rationalen Zahlen x , für die $x^2 - 3 = 0$ gilt, ist die leere Menge.

Wenn alle Elemente einer Menge M_1 auch Elemente einer Menge M_2 sind, so sagt man, „ M_1 ist Teilmenge von M_2 “ und schreibt „ $M_1 \subseteq M_2$ “. Dabei werden zwei Fälle unterschieden.

a) M_2 hat noch weitere Elemente:

M_1 ist echte Teilmenge von M_2 , $M_1 \subset M_2$.

b) M_2 hat keine weiteren Elemente:

M_1 ist **unechte Teilmenge** von M_2 , M_1 ist gleich M_2 , $M_1 = M_2$.

So ist z. B. die Menge P_{10} eine Teilmenge der Menge Pr aller Primzahlen $P_{10} \subseteq Pr$, und zwar sogar eine echte Teilmenge: $P_{10} \subset Pr$.

Die Menge P_9 aller Primzahlen, die nicht größer sind als 9, ist eine Teilmenge von P_{10} : $P_9 \subseteq P_{10}$; und da 10 selbst keine Primzahl ist, ist sie unechte Teilmenge von P_{10} , identisch mit P_{10} : $P_9 = P_{10}$.

Ein **Zahlenbereich** ist eine Menge von Zahlen, in der eine Ordnung und gewisse Rechenoperationen erklärt sind. Ein Zahlenbereich kann andere Zahlenbereiche als Teilmengen enthalten (Bild A 1).

① *Bei der Betrachtung im Bild A 1 wurde der Bereich G der ganzen Zahlen nicht berücksichtigt. Entwerfen Sie eine entsprechende Übersicht für $N \subset G \subset R \subset P!$*

Der Bereich der reellen Zahlen wird schrittweise aufgebaut, indem der jeweils vorhandene Bereich erweitert wird. Dadurch können Unvollkommenheiten des zu erweiternden Bereichs, wie zum Beispiel

- unzureichendes Erfassen und Lösen praktischer Probleme,
- nicht uneingeschränkte Ausführbarkeit von Operationen,
- Lückenhaftigkeit der (rationalen) Zahlengeraden, d. h. Existenz von Strecken ohne Maßzahl,

beseitigt werden. Die folgende Tabelle gibt diesen Sachverhalt und die schrittweise Vervollkommnung im Falle der Erweiterung von N über R^* und R zu P wieder.

Zahlenbereich	Uneingeschränkt ausführbare Rechenoperationen	Geometrische Veranschaulichung
Natürliche Zahlen	Addition, Multiplikation	Zu jeder natürlichen Zahl gehört genau ein (isolierter) Punkt des Zahlenstrahls. Die Umkehrung gilt nicht.
Gebrochene Zahlen	Addition, Multiplikation, Division (Divisor $\neq 0$)	Zu jeder gebrochenen Zahl gehört genau ein Punkt des Zahlenstrahls. Die Umkehrung gilt nicht.
Rationale Zahlen	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (Divisor $\neq 0$)	Zu jeder rationalen Zahl gehört genau ein Punkt der Zahlengeraden. Die Umkehrung gilt nicht.
Reelle Zahlen	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (Divisor $\neq 0$)	Zu jeder reellen Zahl gehört genau ein Punkt der Zahlengeraden. Zu jedem Punkt der Zahlengeraden gehört genau eine reelle Zahl.

Auch der Bereich der reellen Zahlen hat noch Mängel: Nicht alle Gleichungen n -ten Grades haben Lösungen in P . So gibt es z. B. schon keine reellen Zahlen, die Gleichungen der Form $x^2 + q = 0$ mit $q > 0$ befriedigen; denn zu negativen Zahlen existieren keine Wurzeln im Bereich P . Dieser Mangel wird erst in einem Erweiterungsbereich von P behoben, dem Bereich der *komplexen Zahlen*.

Aufgaben a 1 bis 8

	<p>P: Bereich der reellen Zahlen</p> $\sqrt{2} \in P; \quad -7,5 \in P; \quad \frac{1}{2} \in P; \quad 2 \in P$
	<p>R: Bereich der rationalen Zahlen</p> $\sqrt{2} \notin R; \quad -7,5 \in R; \quad \frac{1}{2} \in R; \quad 2 \in R$ <p>R ist eine Teilmenge von P: $R \subseteq P$ R ist sogar echte Teilmenge von P: $R \subset P$</p>
	<p>R^*: Bereich der gebrochenen Zahlen</p> $\sqrt{2} \notin R^*; \quad -7,5 \notin R^*; \quad \frac{1}{2} \in R^*; \quad 2 \in R^*$ $R^* \subset R \subset P$
	<p>N: Bereich der natürlichen Zahlen</p> $\sqrt{2} \notin N; \quad -7,5 \notin N; \quad \frac{1}{2} \notin N; \quad 2 \in N$ $N \subset R^* \subset R \subset P$

A 1

2 Das Prinzip der Zahlenbereichserweiterungen

Die drei Erweiterungen von N zu R^* , von R^* zu R und von R zu P verliefen im wesentlichen sämtlich nach den gleichen (Schritten und) Prinzipien. Wir wollen sie uns an dem Beispiel $R^* \rightarrow R$ vergegenwärtigen.

Allgemein:

Ziel: Der Ausgangsbereich soll sich schließlich als Teilbereich des neuen Bereichs erweisen (vgl. 5). Im neuen Bereich soll ein gewisser Mangel des ursprünglichen Bereichs behoben sein.

1. Aus den Zahlen des vorhandenen Bereichs werden neue Objekte gebildet.

2. In der Menge dieser Objekte wird nach einer von Fall zu Fall wechselnden Vorschrift eine *Klasseneinteilung* vorgenommen, d. h. eine Einteilung derart, daß jedes Objekt in genau eine *Klasse* gehört. Die Objekte selbst werden auch als *Repräsentanten* der Klassen bezeichnet.

3. Diese Klassen werden als die *neuen Zahlen* definiert. Zur Bezeichnung einer solchen Zahl kann jeder Repräsentant der Klasse verwendet werden.

Gegebenenfalls werden für die neuen Zahlen auch neue, von einem ausgezeichneten Repräsentanten abgeleitete Bezeichnungen eingeführt.

4. *Ordnung* und *Rechenoperationen* werden für die neuen Zahlen mit Hilfe ihrer Repräsentanten und mittels Ordnung und Rechenoperationen des vorhandenen Bereichs erklärt: Die Operationszeichen und Zeichen für die Ordnungsrelation müssen (jedenfalls zunächst, vgl. 6.) von den entsprechenden Zeichen im Ausgangsbereich unterschieden werden.

Die Erklärungen müssen so erfolgen, daß die Ergebnisse der Rechenoperationen und des Größenvergleichs von den jeweils ge-

Beispiel:

Es soll gelten:

$$R^* \subset R$$

In R soll die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar sein.

Es werden alle *geordneten Paare* $[a; b]$ gebildet mit $a \in R^*$ und $b \in R^*$.

Zwei geordnete Paare $[a; b]$ und $[c; d]$ kommen genau dann in die gleiche Klasse, wenn gilt:

$$a + d = b + c.$$

So gehören z. B. $[3; 5]$ und $\left[\frac{9}{2}; \frac{13}{2}\right]$

zur gleichen Klasse; $\left[\frac{3}{4}; 0\right]$ ist Repräsentant einer anderen.

Jede derartige Klasse heißt *rationale Zahl*; das Paar $[a; b]$ repräsentiert die rationale Zahl $r[a; b]$.

In jeder Klasse gibt es genau ein Paar, in dem die 0 auftritt. Heißt dieses Paar $[a; 0]$ mit $a \neq 0$, so bezeichnen wir die rationale Zahl mit $+a$, heißt es $[0; a]$, so bezeichnen wir sie mit $-a$, und heißt es $[0; 0]$, so nennen wir die betreffende rationale Zahl ± 0 . So sind

z. B. $[3; 5]$ und $\left[\frac{9}{2}; \frac{13}{2}\right]$ Repräsentanten der rationalen Zahl -2 , $\left[10; \frac{37}{4}\right]$, $\left[\frac{3}{4}; 0\right]$ repräsentieren $+\frac{3}{4}$.

Def.: $r[a; b] \otimes r[c; d]$ genau dann, wenn $a + d < b + c$.

Def.:

$$r[a; b] \oplus r[c; d] = r[a + c; b + d].$$

Für die Subtraktion als Umkehroperation der Addition ergibt sich

$$r[a; b] \ominus r[c; d] = r[a + d; b + c].$$

Es sei z. B. $r_1 = -2$, $r_2 = +\frac{3}{4}$, also

$$r_1 = r[3; 5], \quad r_2 = r\left[10; \frac{37}{4}\right].$$

Wegen $3 + \frac{37}{4} < 5 + 10$ gilt

wählen Repräsentanten für die zu verknüpfenden oder zu vergleichenden Zahlen nicht abhängen.

$$-2 \otimes +\frac{3}{4}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} (-2) \oplus \left(+\frac{3}{4}\right) &= r \left[3 + 10; 5 + \frac{37}{4}\right] \\ &= r \left[13; \frac{57}{4}\right] = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-2) \ominus \left(+\frac{3}{4}\right) &= r \left[3 + \frac{37}{4}; 5 + 10\right] \\ &= r \left[\frac{49}{4}; 15\right] = -\frac{11}{4} \end{aligned}$$

Zum jeweils gleichen Ergebnis kommt man, wenn man für r_1 und r_2 andere Repräsentanten, etwa $\left[\frac{9}{2}; \frac{13}{2}\right]$ und $\left[\frac{3}{4}; 0\right]$, nimmt.

Entsprechendes gilt für Multiplikation und Division.

5. In dem neuen Bereich gibt es eine echte Teilmenge, deren Elemente sich den Zahlen des alten Bereichs eineindeutig zuordnen lassen unter Erhaltung von Ordnung und Operationen.

Alle rationalen Zahlen $+a$, d. h. alle rationalen Zahlen, die durch Paare $[a; 0]$ repräsentiert werden können, bilden zusammen mit ± 0 eine echte Teilmenge von R . Die Elemente dieser Teilmenge von R lassen sich durch $+a \leftrightarrow a$ bzw. $\pm 0 \leftrightarrow 0$ den Elementen von R^* eineindeutig zuordnen.

Dann gilt:

$+a \otimes +b$ genau dann, wenn $a < b$,
 $(+a) \oplus (+b) = +c$ genau dann, wenn $a + b = c$, und entsprechend für die anderen Operationen.

6. Die Existenz einer solchen Teilmenge berechtigt dazu, Ordnung und Operationen im neuen Bereich als Fortsetzung derjenigen des alten zu betrachten und den Teilbereich des neuen gegen den ursprünglichen Bereich auszutauschen. Erst dann kann man von einer Zahlenbereichserweiterung sprechen und sagen, daß der Ausgangsbereich ein echter Teilbereich des neuen ist.

Die rationalen Zahlen $+a$ werden durch die gebrochenen Zahlen a , die rationale Zahl ± 0 durch die gebrochene Zahl 0 ersetzt. Die Zeichen $\otimes, \oplus, \ominus, \dots$ werden durch $<, +, -, \dots$ ersetzt, und die Verwendung der gleichen Namen ist gerechtfertigt.

Es gilt: $R^* \subset R$.

Da die Subtraktion sich nur auf die in R unbeschränkt ausführbare Addition gründet (vgl. 4.), ist sie in R uneingeschränkt ausführbar.

②

Versuchen Sie, auch die Multiplikation rationaler Zahlen so zu definieren, daß sie „Fortsetzung“ der Multiplikation im Bereich der gebrochenen Zahlen ist! Untersuchen Sie daraufhin die Division als Umkehroperation der Multiplikation!

Aufgaben a 9 bis 15

3 Schranken und Grenzen

In der Tabelle auf Seite 5 war als einziger Unterschied zwischen den Bereichen R und P angegeben worden, daß durch die Elemente von R noch nicht jeder Punkt der Zahlengeraden eine Zahl zugeordnet erhält, wohl aber durch die Elemente von P .

Mit Hilfe zweier neuer Begriffe soll dieser Unterschied jetzt noch etwas näher untersucht werden. Dazu betrachten wir folgende Teilmengen von P :

Pr – Menge aller Primzahlen

G – Menge aller ganzen Zahlen

R^- – Menge aller negativen rationalen Zahlen

M_1 – Menge aller rationalen Zahlen r mit $0 \leq r \leq 1$

M_2 – Menge aller rationalen Zahlen r mit $0 < r < 1$

M_3 – Menge aller rationalen Zahlen $\frac{n}{n+1}$

M_4 – Menge aller rationalen Zahlen $\frac{n+1}{n}$

$(n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$

Kein Element von Pr ist kleiner als 2 und daher erst recht nicht kleiner als die Zahlen, die ihrerseits kleiner als 2 sind.

Man nennt die Zahl 2 und alle Zahlen, die kleiner als 2 sind, **untere Schranken** für Pr .

DEFINITION:

S ist eine **untere Schranke** der Menge $M =_{\text{Dr}}$ Für jedes $x \in M$ gilt: $S \leq x$.¹

Hat eine Menge eine² untere Schranke, so heißt sie **nach unten beschränkt**. Anderenfalls heißt sie **nach unten unbeschränkt**.

①

Auch die Menge M_4 ist nach unten beschränkt; untere Schranken sind z. B. 0 und 1. Ein Unterschied gegenüber Pr besteht darin, daß es keine untere Schranke gibt, die selbst Element von M_4 ist.

③

Untersuchen Sie auch die übrigen genannten Mengen auf ihre Beschränktheit nach unten! Begründen Sie bei den nach unten beschränkten Mengen für je zwei Zahlen, daß sie untere Schranken sind, und versuchen Sie, jeweils Schranken zu finden, die der Menge selbst angehören! Wieviel solcher Schranken kann es für jede Menge höchstens geben?

¹ Das Zeichen $=_{\text{Dr}}$ wird gelesen „bedeutet nach Definition“.

² Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß im mathematischen Sprachgebrauch „eine“ stets im Sinne von „mindestens eine“ benutzt wird. Daß aus der Existenz einer unteren Schranke die Existenz beliebig vieler weiterer Schranken folgt, ist für die Definition ohne Belang. Wäre „eine und keine weitere“ gemeint, so müßte es heißen „genau eine“.

2 **DEFINITION:** S ist eine obere Schranke von $M \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Für jedes } x \in M \text{ gilt: } x \leq S$.
 Hat eine Menge eine obere Schranke, so heißt sie *nach oben beschränkt*.
 Ist eine Menge nach oben und unten beschränkt (bzw. unbeschränkt), so sagt man auch kurz:
 Die Menge ist (beiderseitig) *beschränkt* (bzw. *unbeschränkt*).

Auch die leere Menge wird als beschränkt bezeichnet; für sie ist jede Zahl (untere und obere) Schranke.

2 R^+ ist nach oben unbeschränkt, denn es gibt beliebig große Primzahlen. Für R^- hingegen sind alle positiven Zahlen obere Schranken; R^- ist also nach oben beschränkt, hingegen nicht nach unten.

4 Nennen Sie von den angegebenen Mengen diejenigen, die nach oben beschränkt sind! Begründen Sie jeweils für zwei verschiedene Zahlen, daß sie obere Schranken dieser Mengen sind! Nennen Sie die Mengen, die beiderseits beschränkt sind!

5 Vergleichen Sie die Mengen M_1 und M_2 sowie M_3 und M_4 bezüglich ihrer Schranken!

4

Soll man für eine Menge eine untere Schranke angeben, so sucht man meist unwillkürlich nach einer möglichst großen. So wird bei M_4 meist die Zahl 1 als Schranke angegeben. Ganz entsprechend ist es bei den oberen Schranken; hier versucht man, eine kleinste zu finden. Für R^- ist das z. B. die Zahl 0. Eine solche kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke bezeichnet man als **obere** (bzw. **untere**) **Grenze**.

3 **DEFINITION:** Eine Zahl G ist $\left\{ \begin{array}{l} \text{obere Grenze} \\ \text{untere Grenze} \end{array} \right\}$ einer Menge M
 $\stackrel{\text{Def}}{=} G$ ist die $\left\{ \begin{array}{l} \text{kleinste aller oberen Schranken} \\ \text{größte aller unteren Schranken} \end{array} \right\}$ von M .

Eine Voraussetzung für die Existenz einer unteren (bzw. oberen) Grenze ist also die Beschränktheit der Menge nach unten (bzw. oben). Während sich für jede Menge mit einer Schranke beliebig viele weitere Schranken angeben lassen, kann jede Menge nur höchstens eine untere und höchstens eine obere Grenze haben.

3 Sowohl die Menge M_1 als auch die Menge M_2 haben als untere Grenze 0 und als obere Grenze 1. Während aber M_1 seine Grenzen selbst als Elemente enthält, ist dies bei M_2 nicht der Fall.

M_3 hat als untere Grenze $\frac{1}{2}$, als obere Grenze 1.

M_4 hat als untere Grenze 1, als obere Grenze 2.

Um zu zeigen, daß eine Zahl G obere Grenze einer Menge M ist, muß man zweierlei nachweisen: Erstens, daß G eine obere Schranke ist, und zweitens, daß jede noch so dicht unterhalb von G liegende Zahl G' keine obere Schranke mehr ist, d. h. von mindestens einem Element von M übertroffen wird. Auf derartige Nachweise für die Mengen M_1 bis M_4 wird an dieser Stelle verzichtet.

6 Welche Schritte sind für den Beweis, daß G untere Grenze ist, notwendig?

5 Der Satz von der oberen (unteren) Grenze

Auf Seite 9 Mitte wurde festgestellt, daß eine Menge höchstens dann eine obere Grenze haben kann, wenn sie nach oben beschränkt ist. Das führt zu der Frage, ob eine nach oben beschränkte Menge stets mindestens eine (und damit dann genau eine) obere Grenze hat, d. h., ob es unter all ihren oberen Schranken stets eine kleinste gibt.

- 4 Wir betrachten die Menge Q aller rationalen Zahlen, deren Quadrate kleiner als 2 sind:

$$x \in Q \text{ genau dann, wenn } x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 < 2.$$

Diese Menge ist gewiß nach oben beschränkt, etwa durch 1,5. Denn wegen $1,5^2 = 2,25 > 2$ müssen alle $x \in Q$ kleiner als 1,5 sein. Die Zahl 1,5 ist aber noch nicht obere Grenze, vielmehr gilt die

Behauptung: $\sqrt{2}$ ist obere Grenze für Q .

Beweis:

Es gilt $(\sqrt{2})^2 = 2 > x^2$ für alle $x \in Q$.

Da die Funktion $f(x) = x^2$ für positive x monoton wächst, gilt $x < \sqrt{2}$ für alle $x \in Q$, $\sqrt{2}$ ist also eine obere Schranke für Q .

Es bleibt zu zeigen, daß es keine kleinere obere Schranke gibt, daß also eine beliebige Zahl $G' < \sqrt{2}$ (sei sie rational oder irrational) keine obere Schranke sein kann:

Aus $G' < \sqrt{2}$ folgt, daß die beiden Dezimalbrüche für G' und $\sqrt{2}$ an irgendeiner Stelle erstmals voneinander abweichen, und zwar muß an dieser Stelle bei G' eine kleinere Ziffer als bei $\sqrt{2}$ stehen. Ersetzen wir dann bei $\sqrt{2}$ von der nächsten Stelle ab alle Ziffern durch Nullen, so erhalten wir eine rationale Zahl r mit

$$G' < r < \sqrt{2} \text{ und damit } r^2 < 2, \text{ also } r \in Q.$$

(Es sei z. B. $G' = 1,41421355976$; wegen $\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$ erhalten wir nach dem erläuterten Verfahren $r = 1,41421356$.)

G' wird also von einem Element aus Q übertroffen, kann also nicht obere Schranke von Q sein; mithin ist $\sqrt{2}$ die obere Grenze von Q , w. z. b. w.

- 7 *Bekanntlich liegt zwischen je zwei rationalen Zahlen stets (mindestens) eine weitere rationale Zahl. Die im Beispiel A 4 an G' und $\sqrt{2}$ durchgeführten Überlegungen lassen sich dahingehend verallgemeinern, daß sich auch zwischen einer reellen (d. h. rationalen oder irrationalen) Zahl s und einer irrationalen Zahl z stets (mindestens) eine rationale Zahl r befindet. Durchdenken Sie eine Beweisführung dafür, daß zwischen zwei reellen Zahlen stets eine Irrationalzahl liegt!*

Die Beweisführung im Beispiel A 4 zeigt gleichzeitig, daß es links von $\sqrt{2}$ keine größte rationale Zahl gibt, und ebenso gibt es rechts von $\sqrt{2}$ keine kleinste rationale Zahl. Damit ist aber Q eine nach oben beschränkte Menge rationaler Zahlen, die keine obere Grenze hätte, wenn der Bereich der rationalen Zahlen nicht zum Bereich der reellen Zahlen erweitert worden wäre.

- 8 *Ermitteln Sie die untere Grenze von Q !*

Entsprechendes gilt auch für die Beschränkung nach unten und die Existenz einer unteren Grenze. Allgemein hat jede Menge rationaler Zahlen, die eine

Irrationalzahl als obere (bzw. untere) Grenze hat, im Bereich der rationalen Zahlen keine obere (bzw. untere) Grenze.

SATZ: Es gibt Mengen rationaler Zahlen, die nach oben (unten) beschränkt sind, aber im Bereich der rationalen Zahlen keine obere (untere) Grenze haben.

6

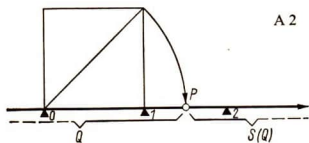
Nach diesen Erfahrungen mit dem Bereich der rationalen Zahlen könnte man es für möglich halten, daß es auch im Bereich der reellen Zahlen beschränkte Mengen ohne Grenzen gibt. Daß das nicht der Fall ist, besagt der wichtige **Satz von der oberen (unteren) Grenze**.

SATZ: Jede nichtleere, nach oben (unten) beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine obere (untere) Grenze.

Warum muß die leere Menge ausdrücklich ausgeschlossen werden?

Wir wollen diesen Satz hier nicht beweisen, ihn uns vielmehr nur veranschaulichen:

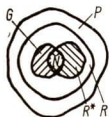
Trägt man eine nach oben beschränkte Menge M und die Menge $S(M)$ ihrer oberen Schranken auf der Zahlengeraden ab (im Bild A 2 ist dies für Q geschehen), so werden die beiden zugehörigen Punktmengen durch einen einzigen Punkt P getrennt. Da zu jedem Punkt der Zahlengeraden eine reelle Zahl gehört



A 2

(gerade das galt ja bei den rationalen Zahlen nicht!), ist diese Zahl die kleinste obere Schranke und damit die obere Grenze. Dabei ist es gleichgültig, ob diese Zahl Element der Menge M ist oder nicht, ob P also zu beiden Punktmengen gehört oder nur zu der der Schranken.

ZUSAMMENFASSUNG:



1. Der Bereich P der reellen Zahlen ist nach beiden Seiten unbeschränkt.
2. Die reellen Zahlen liegen dicht, d. h., zwischen je zwei reellen Zahlen liegt (mindestens) eine weitere.
3. In P hat jede nach oben (unten) beschränkte Menge eine obere (untere) Grenze.



1. Der Bereich R der rationalen Zahlen ist nach beiden Seiten unbeschränkt.
2. Die rationalen Zahlen liegen dicht.
3. In R hat nicht jede nach oben (unten) beschränkte Menge eine obere (untere) Grenze.



1. Der Bereich R^* der gebrochenen Zahlen ist nach oben unbeschränkt; sein kleinstes Element und damit untere Grenze ist 0.
2. Die gebrochenen Zahlen liegen dicht.
3. In R^* hat nicht jede nach oben (unten) beschränkte Menge eine obere (untere) Grenze.



1. Der Bereich G der ganzen Zahlen ist nach beiden Seiten unbeschränkt.
2. Jede ganze Zahl hat genau einen Nachfolger und genau einen Vorgänger. In G hat jede nichtleere nach oben (unten) beschränkte Menge ein größtes (kleinstes) Element.



1. Der Bereich N der natürlichen Zahlen ist nach oben unbeschränkt; sein kleinstes Element und damit untere Grenze ist 0.
2. Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger und mit Ausnahme der 0 auch genau einen Vorgänger.
3. In N hat jede nichtleere Menge ein kleinstes Element. Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge natürlicher Zahlen enthält eine größte.

Aufgaben a 24 bis 33

Beweisverfahren der vollständigen Induktion

7

Den Gegenstand der nächsten Lerneinheiten bildet ein wichtiges Beweisverfahren für Aussagen über natürliche Zahlen, dessen Grundlage das „Prinzip der vollständigen Induktion“ ist. Dieses Prinzip läßt sich aus einer Eigenschaft der natürlichen Zahlen ableiten, die in der Zusammenfassung am Ende der Lerneinheit A 6 als wesentliches Merkmal des Zahlenbereichs N herausgestellt wurde. Es ist der anscheinend selbstverständliche, aber dennoch letztlich unbewiesene Satz von der kleinsten Zahl. Wegen seiner Bedeutung soll er noch einmal deutlich als unbewiesener Grundsatz formuliert werden:

6 **GRUNDSATZ:** Jede (nichtleere) Menge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element.

10 Überlegen Sie, warum die leere Menge ausgeschlossen werden muß!

Mit diesem Grundsatz läßt sich beweisen der

7 **SATZ:** Es sei M eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften

- (1) $0 \in M$;
- (2) Wenn $k \in M$, so auch $k + 1 \in M$.

Dann enthält M alle natürlichen Zahlen, es gilt $M = N$.

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt, indem wir annehmen, es gäbe natürliche Zahlen, die nicht zu M gehören. Sie bilden dann die (nichtleere) Menge \bar{M} . Nach dem Grundsatz A 6 gibt es in \bar{M} ein kleinstes Element; es sei \bar{m} . Gewiß ist $\bar{m} \neq 0$, denn nach der Voraussetzung von Satz A 7 liegt 0 in M . Dann hat aber \bar{m} genau einen unmittelbaren Vorgänger $\bar{m} - 1$. $\bar{m} - 1$ kann nicht in \bar{M} liegen, weil \bar{m} das kleinste Element aus \bar{M} ist. $\bar{m} - 1$ kann aber auch nicht in M liegen, da sein Nachfolger \bar{m} nach Voraussetzung von Satz A 7 dann auch in M liegen müßte. Der Vorgänger von \bar{m} wäre also eine natürliche Zahl, die weder in M noch in \bar{M} läge. Das ist aber nicht möglich; wir müssen also unsere Annahme fallen lassen, daß es eine natürliche Zahl gibt, die nicht zu M gehört.

11 Zu betrachten sind die Aussageformen

$$H_1(n): n < n^2,$$

$$H_2(n): 2n = 3n,$$

$$H_3(n): 4 \text{ ist ein Teiler von } 2n,$$

$$H_4(n): 2^n < 2^{n+1}.$$

$M_i (i = 1, \dots, 4)$ sei die Menge derjenigen natürlichen Zahlen k , für die $H_i(k)$ wahr ist. \bar{M}_i sei die Menge derjenigen natürlichen Zahlen k , für die $H_i(k)$ falsch ist.

Bestimmen Sie die acht Mengen M_i und \bar{M}_i , und ermitteln Sie für jede die kleinste Zahl!

Von besonderer Wichtigkeit sind gewiß solche Aussageformen $H(n)$, die für alle natürlichen Zahlen gelten, für die also die Aussage

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $H(n)$

wahr ist.

Das sind offenbar gerade diejenigen $H(n)$, für die \bar{M} leer ist, d. h. für die $M = N$ ist. Demzufolge kann man den Nachweis der Gültigkeit für alle n führen, indem man zeigt, daß M die beiden Bedingungen aus Satz A 7 erfüllt.

8 Prinzip der vollständigen Induktion

Die Aussage „Für alle natürlichen Zahlen n gilt $H(n)$ “ ist wahr, wenn folgendes gilt:

1. $H(n)$ ist richtig für $n = 0$
2. Aus der Gültigkeit von $H(n)$ für $n = k$ folgt stets die Gültigkeit für $n = k + 1$. Dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl.

Für den Beweis der Aussage „Für alle natürlichen Zahlen n gilt $H(n)$ “ durch vollständige Induktion sind also zunächst zwei Beweisschritte notwendig.

1. **Induktionsanfang:** Man zeigt, daß $H(0)$ gilt.
2. **Induktionsschritt:** Man zeigt, daß aus der Richtigkeit von $H(k)$ (**Induktionsvoraussetzung**) die Richtigkeit von $H(k + 1)$ (**Induktionsbehauptung**) folgt.

Dabei müssen die Schlüsse so erfolgen, daß sie an kein spezielles k gebunden sind, d. h. daß man sich für k jede beliebige natürliche Zahl eingesetzt denken darf.

Unter Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion kann man dann die Gültigkeit von $H(n)$ für alle n folgern.

Manchmal ist es üblich, den Induktionsschritt ohne Verwendung eines neuen Symbols k direkt mit n auszuführen. Daher trägt der Beweis durch vollständige Induktion auch den Namen **Schluß von n auf $n + 1$** .

5 Es ist nachzuweisen, daß die Summe der natürlichen Zahlen von 0 bis n stets $\frac{n(n+1)}{2}$ beträgt. Zu beweisen ist also die Aussage

$$\text{Für alle natürlichen } n \text{ gilt } 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 0 \text{ ist die Formel richtig: } 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}.$$

2. Induktionsschritt: Es wird nun gezeigt, daß für jedes natürliche k aus der Richtigkeit der Formel für $n = k$ ihre Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt.

Induktionsvoraussetzung: Die Formel sei für $n = k$ richtig, also

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Induktionsbehauptung: Die Formel gilt auch für $n = k + 1$, also

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Beweis der Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung: Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\boxed{0 + 1 + 2 + \dots + k} + (k+1) = \boxed{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1).$$

Der Term auf der rechten Seite wird umgeformt:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Das ist aber gerade die in der Induktionsbehauptung aufgestellte Formel, und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt wegen des Induktionsanfangs die behauptete Formel für alle natürlichen Zahlen n .

8

- 12 a) Erläutern Sie, inwiefern innerhalb des Beweises durch vollständige Induktion gewissermaßen nochmals ein Beweis steckt!
 b) Nehmen Sie Stellung zu folgendem Einwand gegen das Beweisverfahren der vollständigen Induktion: „Beim Beweis wird die Behauptung benutzt“!

Beim Beweis durch vollständige Induktion, vor allem auch bei seiner Formulierung, muß man sich vor einem groben logischen Fehler hüten, der den in Übung A 12 unter b) genannten Einwand zu Recht bestehen ließe: Man beachte, daß der **Induktionsschritt** lautet:

Für beliebiges k gilt: Aus $H(k)$ folgt $H(k+1)$.

Er heißt **nicht** etwa:

Aus [$H(k)$ gilt für beliebiges k] folgt $H(k+1)$.

In diesem Falle wäre nämlich die „Induktionsvoraussetzung“ $[H(k)$ für beliebiges $k]$ bereits gleichbedeutend mit der zu beweisenden Aussage, und die Induktionsbehauptung brauchte gar nicht mehr bewiesen zu werden – was für „beliebiges“ k gilt, gilt natürlich auch für $k + 1$.

Dieser Tatsache muß man sich stets bewußt sein, auch wenn man den Beweis durch vollständige Induktion in verhältnismäßig kurzer Form niederschreibt.

- 6 Für alle natürlichen Zahlen n gilt $2^n > n$.

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

Für $n = 0$ gilt die Aussage: $2^0 > 0$.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $2^k > k$

Induktionsbehauptung: $2^{k+1} > k + 1$

Beweis der Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung: Es ist $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$; also gilt nach Induktionsvoraussetzung $2^{k+1} > 2k$. Wegen $2k = k + k \geq k + 1$ für $k > 0$ gilt dann $2^{k+1} > k + 1$.

Da der Induktionsschritt aber nur für $k > 0$ durchgeführt wurde, kann der Fall $n = 0$ nicht als Anfang genommen werden. Es ist also nachträglich noch $n = 1$ zu betrachten: $2^1 = 2 > 1$. Erst damit ist die behauptete Formel für alle natürlichen Zahlen bewiesen.

- 13 Erläutern Sie, warum die folgende Beweisführung im Induktionsschritt unzulässig ist:

Aus $2^{k+1} > k + 1$ ($k \geq 1$)

folgt $2 \cdot 2^k > k + 1$,

also $2^k + 2^k > k + 1$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $2^k > k$, und da $2^k > 1$ ist, ist der Beweis erbracht.

Liegt der Induktionsanfang nicht bei 0, sondern erst bei einer anderen natürlichen Zahl $n_1 > 0$, so ist nach dem Induktionsschritt der betreffende Satz auch nur für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_1$ nachgewiesen. Solche Fälle treten auf, wenn die betreffende Aussage für $n < n_1$ falsch oder sinnlos ist.

Nicht immer muß beim Beweis einer Aussage über natürliche Zahlen das Verfahren der vollständigen Induktion angewandt werden, es gibt sogar Fälle, in denen das Verfahren überhaupt nicht anwendbar ist.

- 14 Führen Sie zwei Beweise – einen davon mittels vollständiger Induktion – für die Aussage: $n^2 - 1$ ist für jedes ungerade natürliche n durch 8 teilbar.

9

Die Beispiele aus den Lerneinheiten A 7 und A 8 haben deutlich gemacht: Soll das Beweisverfahren der vollständigen Induktion angewandt werden, so muß die zu beweisende Aussage als Vermutung bereits vorliegen. Eine solche Vermutung gewinnt man meist durch Untersuchen einiger Spezialfälle.

7

Gesucht ist eine Formel für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, also $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, mit $n > 0$.

Um die Formel erst einmal vermuten zu können, betrachten wir nacheinander einige Spezialfälle:

$$n = 1: \quad 1 = 1 (= 1^2),$$

$$n = 2: \quad 1 + 3 = 4 (= 2^2),$$

$$n = 3: \quad 1 + 3 + 5 = 9 (= 3^2),$$

$$n = 4: \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 (= 4^2).$$

Daraus vermuten wir allgemein:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \text{ für alle natürlichen } n > 0.$$

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

Für $n = 1$ ist die Formel gewiß richtig. Wir haben sie ja durch Verallgemeinerung aus Einzelfällen erhalten, in denen der Fall $n = 1$ enthalten war.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$

Induktionsbehauptung: $1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$

Beweis der Induktionsbehauptung:

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\boxed{1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)} + (2k + 1) = \boxed{k^2} + (2k + 1).$$

Es ist aber gerade $k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Damit ist die Induktionsbehauptung und folglich auch die vermutete Formel bewiesen.

Hat man allerdings durch Untersuchung von Einzelfällen eine falsche Vermutung gewonnen, so wird dieser Fehler durch einen Beweisversuch häufig offenkundig.

8

Gesucht ist eine Formel für die Summe der Potenzen von 2, also

$$s_n = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n,$$

$$n = 0: s_0 = 1, \quad n = 1: s_1 = 3.$$

Voreilig wird vermutet, daß $s_n = 2n + 1$ gilt.

Es wird der Versuch unternommen, diese Beziehung durch vollständige Induktion zu beweisen.

1. Induktionsanfang: Gesichert durch die Anfangsbetrachtung.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2k + 1.$

Induktionsbehauptung: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k+1} = 2k + 3.$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$\boxed{2^0 + 2^1 + \dots + 2^k} + 2^{k+1} = \boxed{2k + 1} + 2^{k+1}.$$

Diese Folgerung stimmt aber nur dann mit der Induktionsbehauptung überein, wenn $2^{k+1} = 2$ ist. Das ist aber nur für $k = 0$ der Fall. Die Tatsache, daß aus der (angenommenen) Richtigkeit der vermuteten Formel für $k \neq 0$ ihre Unrichtigkeit für $k + 1$ folgt, zeigt, daß die Formel nicht für alle n gilt.¹

15

Ermitteln Sie durch Untersuchung weiterer Fälle ($n = 2; n = 3$) die zutreffende Formel für s_n , und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion!

Aufgaben a 34 bis 45

10 Induktion und Deduktion

Die Bezeichnung „vollständige Induktion“ legt die Frage nahe, ob es auch eine unvollständige Induktion gibt. Dazu betrachten wir die folgenden Beispiele:

9

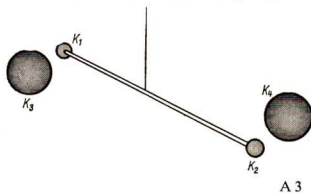
a) JOHANNES KEPLER² beobachtete lange Zeit die Bewegungen der (damals bekannten) Planeten, verarbeitete diese Beobachtungen in Berechnungen und schloß daraus u. a.:

„Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.“

b) ISAAC NEWTON³ folgerte aus den KEPLERSchen Gesetzen und Beobachtungen über das Fallen von Körpern auf der Erde das Gravitationsgesetz:

„Zwei (beliebige) Körper ziehen sich mit einer Kraft an, die ihren Massen proportional und dem Quadrat ihrer Entfernung indirekt proportional ist.“
(Daraus ergeben sich die KEPLERSchen Gesetze, wenn man als Körper speziell Sonne und Planeten betrachtet.)

c) HENRY CAVENDISH⁴ bestimmte den Proportionalitätsfaktor, die sogenannte Gravitationskonstante (Bild A 3): Er befestigte an einem Draht einen Stab mit den Körpern K_1 und K_2 , näherte ihnen die Körper K_3 und K_4 und maß die Verdrehung des Drahtes. Seinem Versuch lag also der Schluß zugrunde:



„Wenn sich zwei beliebige Körper anziehen, dann müssen es auch die Körper K_1 und K_3 bzw. K_2 und K_4 in einer entsprechenden Versuchsanordnung tun.“

d) Anfang des 19. Jahrhunderts beobachtete man, daß die Bewegungen des Planeten Uranus nicht so verliefen, wie man es auf Grund der Gesetze erwartete. Man schloß:

„Nach dem Gravitationsgesetz müssen diese Unregelmäßigkeiten von einem noch unbekanntem Planeten verursacht werden.“
Der Franzose LEVERRIER⁵ berechnete aus den Abweichungen des Uranus die Bahnelemente des angenommenen Planeten, und der deutsche Astro-

¹ Allerdings folgt auf diese Weise nicht, daß die Formel für alle von 0 und 1 verschiedenen n falsch ist.
² JOHANNES KEPLER (1571 bis 1630), deutscher Astronom
³ ISAAC NEWTON (1643 bis 1727), englischer Naturforscher
⁴ HENRY CAVENDISH (1731 bis 1810), englischer Chemiker und Physiker
⁵ URBAIN JEAN JOSEPH LEVERRIER (1811 bis 1877), französischer Astronom

nom GALLE¹ fand ihn am berechneten Ort. Der Planet erhielt den Namen Neptun.

Ein Vergleich der vier Schlüsse, der hier freilich nicht in Einzelheiten gehen kann und daher etwas ungenau bleiben muß, zeigt:

KEPLER schloß von Einzelbeobachtungen auf Gesetze, die nicht nur für die beobachteten Fälle gelten, sondern für *alle* gleichgearteten, ohne daß darüber im einzelnen Tatsachenmaterial vorlag. Die Schlußweise NEWTONS ist ganz entsprechend vom Einzelnen, Besonderen zum Allgemeinen, Umfassenderen (wenn auch sein Ausgangsmaterial bereits allgemeiner Natur war).

Derartige Schlüsse nennt man **induktiv**; KEPLER und NEWTON gewannen ihre Aussagen also durch **Induktion**².

In c) und d) dagegen wurde das (allgemeine) Gravitationsgesetz auf Einzelfälle angewandt. Der Schluß erfolgte also in umgekehrter Richtung. Beide Aussagen wurden durch **Deduktion**³ gewonnen, das Vorgehen war **deduktiv**.

16 Überlegen Sie, wie Sie in früheren Schuljahren die folgenden Aussagen gewonnen haben und ob die entsprechenden Schlüsse induktiv oder deduktiv waren:

a) Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt

$$a + b = b + a.$$

b) Wenn zwei Dreiecke in drei Seiten übereinstimmen, so sind sie kongruent.

c) Im gleichseitigen Dreieck beträgt jeder Innenwinkel 60° .

d) Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

e) Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist entweder Primzahl oder besitzt eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Darstellung als Produkt von Primzahlen.

Auch bisher haben wir schon des öfteren sowohl induktiv als auch deduktiv geschlossen:

10 Im Beispiel A 7 sahen wir, daß die gesuchte Summe für $n = 0, 1, 2, 3$ die Werte 1, 4, 9, 16 hat, und schlossen von diesen Einzelfällen – also induktiv – auf alle Fälle:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Beim Beweis von Satz A 7 schlossen wir aus der Tatsache, daß jede (nichtleere) Menge natürlicher Zahlen eine kleinste enthält, darauf, daß auch die spezielle Menge \bar{M} ein kleinstes Element hat – also deduktiv.

Wie steht es nun mit der Wahrheit der durch Induktion bzw. Deduktion gewonnenen Aussagen? Mit Sicherheit läßt sich sagen:

9 Von wahren Aussagen gelangt man durch deduktives Schließen stets wieder zu wahren Aussagen.

Diese Erkenntnis liegt dem sogenannten **logischen Beweis** zugrunde und macht gerade ihn so überzeugend. Anders ist es bei der Induktion. Auch wenn die Ausgangssätze als wahr erkannt sind, ist die Gültigkeit der auf induktivem Wege erschlossenen Aussagen nicht völlig verbürgt. Es wohnt ihnen nur eine mehr oder minder große Wahrscheinlichkeit inne.

¹ JOHANN GOTTFRIED GALLE (1812 bis 1910)

² inducere (lat.), hineinführen

³ deducere (lat.), herabführen, ableiten



Welches Zutrauen man einer induktiv erschlossenen Aussage entgegenbringt, hängt weitgehend davon ab, ob das Ausgangsmaterial vielseitig und charakteristisch ist. Andererseits wird die Aussage wesentlich erhärtet, wenn sich deduktive Folgerungen aus ihr durch die Praxis bestätigen lassen. So wurde durch den Versuch von CAVENDISH das Gravitationsgesetz gestützt, an dem schon seit langem niemand mehr zweifelte. Deshalb wurde es ja auch nicht verworfen als ihm die Praxis in Form der Uranusbewegungen scheinbar widersprach, sondern führte im Gegenteil zu neuen Entdeckungen.

Induktives Schließen ist nicht die einzige Form, in den Wissenschaften zu neuen Vermutungen und Hypothesen zu kommen. Wenn man z. B. aus der Erkenntnis, daß bei allen regelmäßigen Vielecken der Umfang proportional zur bestimmenden Seite ist, zu der Vermutung gelangt, daß der Umfang des Kreises proportional zum Radius ist, so liegt ein Analogieschluß vor. In allen diesen Fällen (Induktion, Analogie u. a.) spricht man vom **reduktiven¹ Schließen**. Demgegenüber spricht man in allgemeinerem Sinn von Deduktion auch immer dann, wenn logische Schlußregeln zur Anwendung kommen. Das oben beschriebene Vorgehen vom Allgemeinen zum Besonderen ist also in diesem Sinne ein spezielles deduktives Verfahren. Bei (in weiterem Sinne) deduktiv erschlossenen Aussagen ist die Wahrheit in dem Maße verbürgt, in dem sie für die Ausgangssätze verbürgt ist. Sind diese reductiv gewonnen, so gilt das oben Gesagte; sind sie ebenfalls deduktiv gewonnen, so tritt eine abermalige Vorverlegung auf usw. Jedes deduktive Schließen muß seinen Ausgangspunkt aber schließlich bei Sätzen haben, die ihrerseits nicht deduktiv erschlossen, sondern, meist auf Grund mehr oder weniger weitgehender Abstraktionen, aus der Erfahrung gewonnen worden sind. Das bedeutet, daß auch das deduktive Schließen seine Wurzeln letztlich in der Realität hat.

Induktion ist also stets unvollständig und daher unzuverlässig, weil man dabei von Einzelfällen auf die Gesamtheit schließt. Sie könnte allenfalls dann vollständig und damit zuverlässig sein, wenn die Einzelfälle die Gesamtheit erschöpfen. Wenn man z. B. feststellt, daß sich die Brüche $\frac{1}{10}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{10}{1}$ nicht kürzen lassen und dann sagt, daß alle Brüche $\frac{p}{q}$ mit natürlichen $p, q \neq 0$ und $p + q = 11$ unkürzbar sind, so ist auch das ein Übergang von (allen) Einzelfällen zur Gesamtheit. Ein solcher Schluß ist aber relativ uninteressant.

Beim Verfahren der vollständigen Induktion wird nun aber nicht so vorgegangen. Vielmehr schließt man auf die Gesamtheit der Fälle mit Hilfe bewiesener Sätze (Satz A 7 bzw. Prinzip der vollständigen Induktion), wendet einen für alle Aussagen bewiesenen Satz auf eine spezielle Aussage an.

11 **Das Verfahren der vollständigen Induktion ist ein deduktives Verfahren.**

Sein Name ist also eigentlich irreführend, hat sich aber in der Mathematik allgemein eingebürgert. Eine gewisse Rechtfertigung für diese Bezeichnung kann man auch darin sehen, daß mittels vollständiger Induktion häufig eine durch Induktion gewonnene Vermutung bewiesen und damit der Induktionsschluß gewissermaßen vervollständigt und abgeschlossen wird.

Aufgaben a 46 bis 53

¹ *reducere* (lat.), zurückführen. – Es sei bemerkt, daß reductives und deduktives Schließen in vielen Fällen der Erkenntnisgewinnung nicht scharf voneinander zu trennen sind.

11 Induktive Definitionen

In engem Zusammenhang mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion stehen die **induktiven Definitionen**, auch **rekursive¹ Definitionen** genannt. Durch induktive Definitionen können Funktionen f erklärt werden, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist: $f(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Auch hier gibt es durch Festlegen von $f(0)$ einen Anfang und ferner einen „Schritt von n auf $n + 1$ “, indem man den Funktionswert $f(k + 1)$ festlegt mit Hilfe des Funktionswertes $f(k)$.

Dieses Verfahren der induktiven Definition soll uns zunächst zur Einführung einer besonders wichtigen zahlentheoretischen Funktion, der **Fakultätsfunktion**, dienen:

12

DEFINITION von $f(n) = n!$ ($n \in \mathbb{N}$):

Die Funktion, die aus allen Paaren $[n; n!]$ besteht², ist diejenige Funktion f , für die gilt:

- (1) $f(0) = 1$ (Rekursionsanfang)
- (2) $f(k + 1) = (k + 1)f(k)$ für alle natürlichen k (Rekursionsschritt)

11

Der Funktionswert $f(5) = 5!$ ist zu berechnen:

$$\begin{aligned}5! &= 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120.\end{aligned}$$

Die induktive Erklärung der Funktion $f(n) = n!$ ist gerechtfertigt, weil man zeigen kann:

Es gibt genau eine Funktion f , die den Gleichungen (1) und (2) genügt. Auf den Beweis dieser Tatsache (ebenfalls auf der Grundlage des Prinzips der vollständigen Induktion) kann hier nicht näher eingegangen werden.

Der Definition A 12 kann man auch eine Kurzform geben:

$$0! = 1; \quad (n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

17

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen $n > 0$ gilt:

$$s_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$

12

Die Verwendung des Symbols $n!$ geht auf LEONHARD EULER³ zurück als „Abkürzung“ für das Produkt der natürlichen Zahlen 1 bis n , also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n.$$

Eine solche Erklärung erfordert freilich eine gesonderte Definition von $0! = 1$ und $1! = 1$.

Verglichen mit der induktiven Definition erscheint eine solche Erklärung auch weniger präzise, lediglich als Übertragung eines bei festen natürlichen Zahlen berechtigten Vorgehens auf die Variable n . Sie bietet damit auch keine so verlässliche Grundlage für Beweise wie etwa in Übung A 17.

¹ recurrere (lat.), zurücklaufen

² $n!$ (lies „ n -Fakultät“)

³ LEONHARD EULER (1707 bis 1783), Schweizer Mathematiker

Ganz ähnlich verhält es sich aber auch mit der uns bisher allein bekannten Erklärung der n -ten Potenz reeller Zahlen a für natürliche Zahlen $n \geq 2$ als Produkt von n gleichen Faktoren a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Und schließlich bildet diese Erklärung ja die Grundlage für die Erklärung der Potenzen mit ganzen, rationalen und letztlich sogar beliebigen reellen Exponenten. Auch diese relativ unbefriedigende Erklärung der Potenz kann aber durch eine rekursive Definition ersetzt werden.

13 DEFINITION von $f(n) = a^n$ ($a \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}$):

Für jedes reelle $a \neq 0$ ist die Funktion, die aus allen Paaren $[n; a^n]$ besteht, diejenige Funktion, für die gilt:

$$\begin{aligned} f(0) &= a^0 = 1 & 0^n &= 0 \text{ für alle } n > 0. \\ f(n+1) &= a^{n+1} = a \cdot a^n \end{aligned}$$

18 Warum muß der Fall 0^0 aus der allgemeinen Definition ausgeschlossen werden?

Mit Hilfe der rekursiven Definition der Potenz können nun auch die Potenzgesetze für natürliche Exponenten exakt bewiesen werden, deren Gültigkeit bisher lediglich durch Ausrechnen für gewisse Spezialfälle (beispielsweise $a^5 \cdot b^5 = (a \cdot b)^5$) gezeigt wurde.

19 Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n , daß für alle reellen Zahlen $a, b, a \neq 0, b \neq 0$, gilt

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n, \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n. \end{aligned}$$

Auch die Potenzgesetze, in denen zwei – nicht notwendig verschiedene – Exponenten n und m auftreten, können durch vollständige Induktion bewiesen werden:

12 Zu beweisen ist, daß für alle reellen Zahlen $a \neq 0$ und für alle natürlichen Zahlen n, m gilt

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

1. **Induktionsanfang:** $(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$, da mit $a \neq 0$ auch für alle natürlichen m gilt $a^m \neq 0$.

2. **Induktionsschritt:**

Induktionsvoraussetzung: $(a^m)^k = a^{m \cdot k}$

Induktionsbehauptung: $(a^m)^{k+1} = a^{m(k+1)}$

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$\begin{aligned} (a^m)^{k+1} &= a^m \cdot (a^m)^k && \text{(lt. Definition der Potenz; Rekursionsschritt)} \\ &= a^m \cdot a^{m \cdot k} && \text{(lt. Induktionsvoraussetzung)} \end{aligned}$$

Um zur Induktionsbehauptung zu gelangen, benötigt man jetzt das Gesetz über die Multiplikation von Potenzen mit gleichen Basen, damit man $a^m \cdot a^{mk} = a^{m+mk}$ schreiben darf.

20

- a) Beweisen Sie das im Beispiel A 12 benötigte Potenzgesetz, und vervollständigen Sie damit den Beweis!
 b) Versuchen Sie, den Beweis von $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ auch durch vollständige Induktion über m durchzuführen!

Aufgaben a 54 bis 62

A

13 Das Summenzeichen

In den Beweisen, die in den Lerneinheiten A 7 bis 9 mittels vollständiger Induktion geführt wurden, ging es häufig um Summen. Zur bequemen Schreibweise solcher Summen hat EULER das Zeichen \sum eingeführt¹, dessen Benutzung nicht nur der Kürze dient, sondern auch für die eindeutige Festlegung der betreffenden Summen vorteilhaft ist.

Die Summe $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$ (Beispiel A 8) würde mit Hilfe dieses Zeichens geschrieben als $\sum_{k=0}^n 2^k$ (gelesen: Summe 2^k über alle k von 0 bis n).

Die bewiesene Formel im Beispiel A 6

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

lautet in dieser Schreibweise:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Auf die an sich notwendige Einführung des Summenzeichens mittels einer induktiven Definition soll hier verzichtet werden.

21

Welche der folgenden Terme stellen jeweils die gleiche Zahl dar?

- a) $\sum_{k=1}^8 k$, $\sum_{k=1}^7 (k+8)$, $1 + \sum_{k=2}^8 k$, $\sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=5}^8 k$,
 b) $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=2}^{11} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=2}^{11} \frac{1}{n-1}$, $\sum_{m=0}^9 \frac{1}{m+1}$,
 c) $\sum_{k=2}^5 2^{k-1}$, $\sum_{i=1}^4 2^i$, $\sum_{n=0}^3 2^n$, $2 \sum_{k=0}^3 2^k$.

13

Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ und alle reellen a, b ($a \neq b$) ist $a^n - b^n$ durch $a - b$ ohne Rest teilbar:

$$(a^n - b^n) : (a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Wir schreiben die Behauptung in der Form

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1}.$$

¹ Das Zeichen Σ ist der griechische Großbuchstabe „Sigma“. Es entspricht dem S in der lateinischen Schrift.

1. **Induktionsanfang:** $n = 1$: $\frac{a-b}{a-b} = 1 = a^0 b^0 = \sum_{i=1}^1 a^{1-i} b^{i-1}$

2. **Induktionsschritt:**

Induktionsvoraussetzung: $\frac{a^k - b^k}{a-b} = \sum_{i=1}^k a^{k-i} b^{i-1}$

Induktionsbehauptung: $\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} = \sum_{i=1}^{k+1} a^{k+1-i} b^{i-1}$

Beweis der Induktionsbehauptung:

Es empfiehlt sich, von der rechten Seite der Induktionsbehauptung auszugehen, und diese unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung umzuformen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} a^{k+1-i} b^{i-1} &= a \cdot \sum_{i=1}^k a^{k-i} b^{i-1} + b^k = a \cdot \frac{a^k - b^k}{a-b} + b^k \\ &= \frac{a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}}{a-b} = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}. \end{aligned}$$

- 22 Für alle ungeraden n ist $a^n + b^n$ durch $a + b$ ohne Rest teilbar. Ermitteln Sie den Quotienten durch Untersuchen der Spezialfälle $n = 1; 3; 5$, und beweisen Sie den allgemeinen Sachverhalt durch vollständige Induktion!

Aufgaben a 63 bis 65

14 Binomalkoeffizienten

- 23 Formen Sie $(a + b)^n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ durch fortgesetztes Multiplizieren in eine Summe um! Geben Sie die Anzahl der Summanden in Abhängigkeit von n an, und lesen Sie ein Bildungsgesetz für die Exponenten ab! Entwickeln Sie aus den gefundenen Summen die entsprechenden Terme für $(a - b)^n$!
- 24 Stellen Sie für die Beispiele aus Übung A 23 die Koeffizienten in Form des PASCALSchen¹ Dreiecks dar! Erläutern Sie das zugrunde liegende Bildungsgesetz, und ergänzen Sie das Dreieck um weitere drei Zeilen!
- 25 a) Welchen Vorteil bietet das PASCALSche Dreieck gegenüber dem sukzessiven Ausmultiplizieren?
 b) Legen Sie dar, wie Sie nach beiden Methoden vorgehen müßten, um $(a + b)^{27}$ umzuformen!
 c) Beurteilen Sie das Vorgehen beim Aufstellen des PASCALSchen Dreiecks auf Grund Ihrer Erkenntnisse aus Lerneinheit A 10!

Die Ermittlung der n -ten Potenz eines Binoms $a + b$ nach dem PASCALSchen Dreieck bietet gegenüber dem sukzessiven Ausmultiplizieren zwar gewisse Vorteile; doch muß man auch hier zur Ermittlung der Koeffizienten von $(a + b)^n$ erst alle vorangegangenen Zeilen aufgestellt haben. Ein weiterer, wichtiger Mangel besteht jedoch darin, daß sowohl das PASCALSche Dreieck wie auch das Bildungsgesetz der Exponenten durch („unvollständige“) Induktion gewonnen wurden. Beide Mängel sollen jetzt behoben werden.

¹ BLAISE PASCAL (1623 bis 1662), französischer Mathematiker und Philosoph.

Zunächst benötigt man eine Darstellung der Koeffizienten, der sogenannten **Binomialkoeffizienten**, die nur von dem Exponenten n und der Stelle p abhängt, an der der betreffende Koeffizient steht; dabei gilt $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, und der Koeffizient von a^p habe die „Stelle 0^* “, also $0 \leq p \leq n$. Der Koeffizient, der bei $(a+b)^n$ an der Stelle p steht (also der Koeffizient des $(p+1)$ -ten Gliedes der Entwicklung), wird mit $\binom{n}{p}$, gelesen: „ n über p “, bezeichnet; so ist z. B. $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{5}{3} = 10$.

- (26) a) Drücken Sie mit Hilfe des Symbols $\binom{n}{p}$ die „Symmetrie“ innerhalb einer Zeile des PASCALSchen Dreiecks (d. h. bei gleichem n) aus!
 b) Drücken Sie das Verfahren der Koeffizientenbestimmung (Addition der beiden benachbarten Koeffizienten aus der darüberstehenden Zeile) durch eine Gleichung zwischen drei Binomialkoeffizienten aus!

14 Betrachten wir speziell $(a+b)^6$, so ergibt sich

$$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1; \quad \binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6; \quad \binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15; \quad \binom{6}{3} = 20.$$

Diese Koeffizienten lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$1 = \frac{6!}{0!6!}; \quad 6 = \frac{6!}{1!5!}; \quad 15 = \frac{6!}{2!4!}; \quad 20 = \frac{6!}{3!3!}.$$



DEFINITION:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, p \leq n$$

- (27) Überprüfen Sie auch für $n = 2, 3, 4, 5$, ob die Definition A 14 die Koeffizienten aus dem PASCALSchen Dreieck liefert!

Für die so erklärten Binomialkoeffizienten gelten auch die in Übung A 26 erkannten wichtigen Beziehungen:

$$(1) \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{und} \quad (2) \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \quad \text{für } n > p$$

Beweis für (2):

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \quad (\text{nach Def. A 14}) \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)p!(n-p-1)!} \\ &= \frac{(p+1)n! + (n-p)n!}{(p+1)p!(n-p)(n-p-1)!} \quad (\text{nach Def. A 12}) \\ &= \frac{(p+1+n-p)n!}{(p+1)!(n-p)!} \quad (\text{nach Def. A 12}) \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p+1))!} \quad (\text{nach Def. A 12}) \end{aligned}$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \quad (\text{nach Def. A 14})$$

28

Zeigen Sie, daß die Gültigkeit der Beziehung (I) für alle $n, p \in \mathbb{N}$ mit $p \leq n$ sofort aus Definition A 14 folgt!

Aufgaben a 66 bis 76

A

15 Der binomische Satz

Die endgültige Bestätigung dafür, daß die gemäß Definition A 14 erklärten Zahlen $\binom{n}{p}$ auch wirklich die in der Entwicklung von $(a+b)^n$ an der Stelle p stehenden Koeffizienten, also die Binomialkoeffizienten, sind, liefert freilich erst der Beweis des sogenannten **binomischen Satzes**.

15

Binomischer Satz:

Für alle reellen a, b sowie für alle natürlichen n gilt¹

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

oder unter Verwendung des Summenzeichens

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Beweis durch vollständige Induktion (Lerneinheit A 8):

1. Induktionsanfang:

Wegen $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ gilt der Satz für $n=0$.

2. Induktionsschritt: Es wird gezeigt, daß für beliebiges natürliches k aus der Richtigkeit der Formel für $n=k$ die Richtigkeit für $n=k+1$ folgt.

Induktionsvoraussetzung:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + \binom{k}{k} b^k.$$

Induktionsbehauptung:

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \dots + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}.$$

Beweis der Induktionsbehauptung:

Es ist $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$. Deshalb multiplizieren wir in der Induktionsvoraussetzung auf beiden Seiten mit $(a+b)$. Dabei ordnen wir die Glieder so an, daß die durch Multiplikation mit a entstandenen vorangehen und gleiche $a^l b^j$ untereinanderstehen:

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \dots + \binom{k}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k} a b^k \\ &\quad + \binom{k}{0} a^k b + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1}. \end{aligned}$$

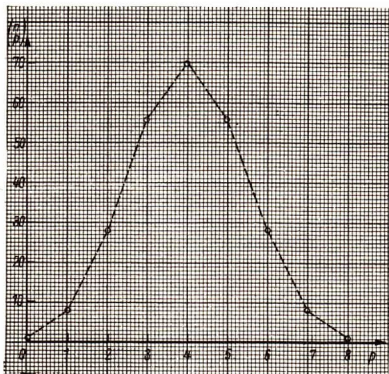
¹ Hier bedeutet $a^0 = b^0 = 1$ auch für den Fall, daß $a=0$ oder $b=0$ ist. Diese Festsetzung gilt jedoch nicht allgemein.

Die Induktionsbehauptung ergibt sich daraus durch fortgesetztes Anwenden der Beziehung $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$ und Berücksichtigung von $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ und $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k}$.

Also gilt der Satz für alle natürlichen n .

- 29 Formulieren Sie den Beweis unter ständiger Benutzung des Summenzeichens!

Stellt man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{p}$ für $(a+b)^8$ graphisch dar, wobei auf der Abszissenachse p aufgetragen wird, so ergibt sich das Bild A 4.



A 4

- 30 Stellen Sie entsprechend die Binomialkoeffizienten für $(a+b)^9$, $(a+b)^{10}$ und $(a+b)^{11}$ dar! Nehmen Sie Stellung zum Verbinden der erhaltenen Punkte in der graphischen Darstellung!

- 15 Es ist $3,97^7$ auf drei geltende Dezimalstellen genau zu berechnen. Das kann mittels des binomischen Satzes nach $3,97^7 = (4 - 0,03)^7$ geschehen. Zweckmäßigerweise werden die einzelnen Glieder der Entwicklung zunächst auf fünf Dezimalstellen genau berechnet, um das Endergebnis auch in dem Fall auf drei Dezimalstellen genau runden zu können, in dem sich in der vierten Dezimalstelle eine 5 ergeben würde.

Wie es beim Arbeiten mit Näherungswerten üblich ist, wird statt \approx das Gleichheitszeichen verwandt, sobald die Abweichung unter der geforderten Genauigkeit liegt.

$$\begin{aligned}
 3,97^7 &= (4 - 0,03)^7 \\
 &= \binom{7}{0} 4^7 - \binom{7}{1} 4^6 \cdot 0,03 + \binom{7}{2} 4^5 \cdot 0,03^2 - \binom{7}{3} 4^4 \cdot 0,03^3 \\
 &\quad + \binom{7}{4} 4^3 \cdot 0,03^4 - \binom{7}{5} 4^2 \cdot 0,03^5 + \binom{7}{6} 4 \cdot 0,03^6 - \binom{7}{7} 0,03^7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 16384 - 7 \cdot 4096 \cdot 0,03 + 21 \cdot 1024 \cdot 0,009 \\
 &\quad - 35 \cdot 256 \cdot 0,000027 + 35 \cdot 64 \cdot 0,00000081 \\
 &\quad - 21 \cdot 16 \cdot 0,0000000243
 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist es überflüssig, weitere Glieder zu berechnen, da sie keinen Beitrag mehr zur fünften Dezimalstelle liefern.

$$\begin{aligned}
 3,97^7 &= 16384 + 1024 \cdot 0,0189 + 64 \cdot 0,00002853 \\
 &\quad - (4096 \cdot 0,21 + 256 \cdot 0,000945 + 16 \cdot 0,0000005103) \\
 &= 16403,35541 - 860,40193 \\
 &= 15542,953
 \end{aligned}$$

Man beachte: Falls 3,97 selbst als Näherungswert mit drei geltenden Ziffern anzusehen ist (beispielsweise auf Grund einer Messung), sind für $3,97^7$ auch nur drei Ziffern zuverlässig, also $3,97^7 = 1,55 \cdot 10^5$.

Aufgaben a 77 bis 86

Elementare Folgen

16 Der Begriff „Zahlenfolge“

Eine zentrale Stellung in der gesamten Mathematik nehmen die Funktionen ein. Sie treten immer dann auf, wenn **zwischen verschiedenen Objekten** (z. B. in Wissenschaft und Technik) **eine eindeutige Zuordnung** besteht oder hergestellt wird.

Eine Funktion ist eine Menge geordneter Paare $[x; y]$, die man erhält, wenn jedem Element x einer Menge X genau ein Element y einer Menge Y zugeordnet wird.

Die Menge X heißt Definitionsbereich der Funktion f . Alle Elemente von Y , die in den Paaren $[x; y]$ auftreten, bilden den Wertevorrat von f .

31 Bei welchen der folgenden Mengen geordneter Paare handelt es sich um Funktionen? Bestimmen Sie bei diesen Definitionsbereich und Wertevorrat!

- a) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in N, y \in N$ und $x + y = 6$,
- b) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in N$ und $y = 7x + 3$,
- c) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in N, 0 \leq x \leq 10, y \in N$ und $y > x$,
- d) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in G$ und $y = x^2$,
- e) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in G$ und $x = y^2$,
- f) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in R$ und $y = \frac{1}{x}$,
- g) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in P$ und $y = \sqrt[3]{5 - x^2}$,
- h) Menge aller $[x; y]$ mit $x \in P, y \in G$ und $x - 1 < y \leq x$.

Eine Teilmenge aller Funktionen sind die Folgen.

16 DEFINITION: Eine Folge ist eine Funktion $[k; f(k)]$, deren Definitionsbereich eine Menge natürlicher Zahlen ist. Die Elemente $f(k)$ des Wertevorrats heißen *Glieder* der Folge, und statt $f(k)$ schreibt man a_k . Die ganze Folge wird häufig durch (a_k) symbolisiert.

Je nachdem, ob der Definitionsbereich unendlich viele oder nur endlich viele natürliche Zahlen enthält, spricht man von einer **unendlichen** oder **endlichen Folge**. Sind auch die Elemente des Wertebereichs Zahlen, so handelt es sich um eine **Zahlenfolge**.

A

16 a) Die Funktion **a**) in Übung A 31 ist eine endliche Zahlenfolge:

$$a_0 = 6; a_1 = 5; a_2 = 4; a_3 = 3; a_4 = 2; a_5 = 1; a_6 = 0$$

$$(a_k) = (6 - k), k = 0; 1; 2; \dots; 6$$

b) Die Funktion **b**) in Übung A 31 ist eine (unendliche) Zahlenfolge:

$$a_0 = 3; a_1 = 10; a_2 = 17; \dots; a_k = 7k + 3; \dots$$

Sie kann auch in der Form

$$(a_k) = (7k + 3), k \in \mathbb{N} \text{ geschrieben werden.}$$

32 Schreiben Sie entsprechend die Zahlenfolgen, die aus den Funktionen der Beispiele **c**) bis **h**) in Übung A 31 entstehen, wenn man den Definitionsbereich auf natürliche Zahlen einschränkt!

Die Vorschrift, nach der zu jedem Wert der unabhängigen Variablen x aus dem Definitionsbereich der zugehörige Wert y der abhängigen Variablen festgelegt ist, wird bei Funktionen häufig in Form einer Gleichung $y = f(x)$ gegeben. Bei Zahlenfolgen spricht man hier auch von einer **expliziten Bildungsvorschrift**; in ihr wird durch eine Gleichung angegeben, wie man das Glied a_k , häufig als **allgemeines Glied** bezeichnet, aus der natürlichen Zahl k erhält.

17 a) Die Folge

$$0; 1; 4; 9; 16; \dots; k^2; \dots$$

kann durch die explizite Bildungsvorschrift

$$(1) \quad (a_k) \text{ mit } a_k = k^2 \text{ und } k \in \mathbb{N}$$

charakterisiert werden. Dies geschieht häufig auch in der Form

$$(2) \quad (a_k) = (k^2) \text{ mit } k \text{ natürlich.}$$

b) Die Folge

$$2; -10; 17; \dots; (-1)^k(7k + 3); \dots$$

kann geschrieben werden als

$$(a_k) \text{ mit } a_k = (-1)^k(7k + 3) \text{ und } k \in \mathbb{N}$$

oder

$$(a_k) = ((-1)^k(7k + 3)), k \in \mathbb{N} \quad (\nearrow \text{Beispiel A 16 b}).$$

Da es bei der Betrachtung von Zahlenfolgen vor allem auf die Glieder und deren Aufeinanderfolge ankommt, ist die Wahl des Definitionsbereiches in gewissem Sinne eine Frage der Zweckmäßigkeit. So meint man häufig,

$$(3) \quad (a_k) = ((k - 1)^2) \text{ mit } k > 0$$

stelle dieselbe Folge dar wie (1) und (2) im Beispiel A 17a, obwohl die entsprechenden Paarmengen nicht identisch sind. Die eine enthält z. B. $[2; 4]$, die andere $[2; 1]$, und zwischen ihnen besteht, strenggenommen, derselbe Unterschied wie zwischen den Funktionen $y = x^2$ und $y = (x - 1)^2$.

Wo keine Irrtümer möglich sind, werden Angaben wie „ $k \in \mathbb{N}$ “ oder „ $k > 0$ “

meist weggelassen. Bei endlichen (n -gliedrigen) Folgen tritt an ihre Stelle eine Angabe wie „ $k = 1; 2; \dots; n$ “. Meist wird als Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null gewählt; dann hat das erste Glied die Bezeichnung a_1 . Auch im folgenden soll i. a. so verfahren werden; auf einen Beginn mit a_0 wird durch den ausdrücklichen Zusatz $k \geq 0$ oder $k \in \mathbb{N}$ hingewiesen.

Statt k werden als „laufender Index“ häufig auch andere Buchstaben, besonders n , verwandt. Ebenso benutzt man auch statt a andere Buchstaben, insbesondere dann, wenn man mehrere Folgen $(a_k), (b_k), \dots$ untersucht.

Die explizite Bildungsvorschrift mittels eines allgemeinen Gliedes legt eine Folge eindeutig fest. Bei endlichen Folgen kann man auf sie verzichten, wenn man sämtliche Glieder angibt. Bei unendlichen Folgen hingegen ist die Angabe des allgemeinen Gliedes – mit Formeln oder auch in Worten – unbedingt notwendig, denn endlich viele Glieder können stets auf unendliche viele Weisen zu einer unendlichen Folge ergänzt werden. So ist beispielsweise die Angabe $(a_k) = 1; 2; 3; \dots$ eigentlich nicht ausreichend; denn alle Glieder a_k mit $k > 3$ sind unbekannt. Wie man auch die Folge fortsetzt, stets gibt es ein Polynom¹ in k als Bildungsgesetz, dessen Ermittlung allerdings in der Schule nicht behandelt wird. Ist mit $(a_k) = 1; 2; 3; \dots$ die Folge der natürlichen Zahlen $k > 0$ gemeint, so muß die Angabe

$$(a_k) = 1; 2; 3; \dots; k; \dots \text{ oder } (a_k) \text{ mit } a_k = k \text{ oder } (a_k) = (k)$$

lauten. Als Beispiel für die unendlich vielen anderen Folgen mit dem Anfangsstück $1; 2; 3$ sei hier nur die Folge

$$(a_k) = (k^3 - 6k^2 + 12k - 6)$$

genannt.

- 33 a) Bestätigen Sie, daß $1; 2; 3$ die Glieder $a_1; a_2; a_3$ der Folge

$$(a_k) = (k^3 - 6k^2 + 12k - 6) = ((k-2)^3 + 2)$$

sind, und ermitteln Sie auch die Glieder a_4 und a_5 !

- b) Erläutern Sie, warum aus der Tatsache, daß zu jeder vorgegebenen endlichen Folge ein Polynom als Bildungsgesetz existiert, folgt, daß es sogar unendlich viele verschiedene solcher Bildungsvorschriften gibt!

Es ist also eigentlich unzulässig, die (eindeutige) Fortsetzung einer Folge zu verlangen, von der endlich viele Glieder gegeben sind, bzw. die Aufstellung der expliziten Bildungsvorschrift zu fordern, weil diese nicht eindeutig bestimmt ist. Wenn trotzdem bei Übungen und in Aufgaben zu Übungszwecken eine solche Forderung erhoben wird, muß man sich dieser Sachlage stets bewußt sein. Es handelt sich dabei um Folgen, bei denen eine relativ „einfache“ Bildungsvorschrift leicht durch Probieren zu finden ist.

- 34 Versuchen Sie, für die nachstehenden Zahlenfolgen eine explizite Bildungsvorschrift zu ermitteln, und berechnen Sie demgemäß die jeweils folgenden fünf Glieder!

a) $0; -2; -4; -6; \dots$ c) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

b) $-7; -3; 1; 5; \dots$ d) $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$

¹ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ mit reellen a_i (und $a_n \neq 0$) heißt „Polynom (n -ten Grades) in x “.

- e) $1; 2; 4; 8; 16; \dots$ k) $1, 1; 0, 9; 1, 01; 0, 99; 1, 001; \dots$
- f) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \frac{1}{25}; \dots$ l) $\sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; \dots$
- g) $-\frac{1}{8}; -\frac{4}{27}; -\frac{9}{64}; -\frac{16}{125}; \dots$ m) $5; \frac{9}{2}; \frac{37}{9}; \frac{19}{5}; \frac{39}{11}; \dots$
- h) $-3; 6; -9; 12; -15; 18; \dots$ n) $0; \frac{1}{2}; \frac{4}{6}; \frac{9}{24}; \frac{16}{120}; \frac{25}{720}; \dots$
- i) $1; \frac{19}{21}; \frac{18}{22}; \dots$

17

Neben der Festlegung einer Folge durch eine explizite Bildungsvorschrift gibt es auch die Möglichkeit einer **rekursiven Bildungsvorschrift**, also der induktiven Definition der Funktion f in $a_k = f(k)$ (vgl. Lerneinheit A 11). Hier muß außer dem Anfangsglied a_1 angegeben werden, wie man jedes Glied a_{k+1} aus seinem Vorgänger a_k (bzw. anderen vorangehenden Gliedern) erhält.

- 18 a) Die rekursive Bildungsvorschrift

$$a_1 = 3; a_{k+1} = a_k + k$$

liefert die Folge

$$3; 4; 6; 9; 13; 18; \dots$$

- b) Die Folge $a_k = 1; 2; 3; \dots$ (Seite 29) hätte auch fortgesetzt werden können zu

$$a_k = 1; 2; 3; 5; 8; 13; \dots$$

mit der rekursiven Bildungsvorschrift

$$a_1 = 1; a_2 = 2; a_{k+2} = a_{k+1} + a_k.$$

Der Nachweis, daß eine rekursive und eine explizite Bildungsvorschrift die gleiche Zahlenfolge darstellen, läßt sich mittels vollständiger Induktion führen.

- 19 Die rekursive Bildungsvorschrift

$$a_1 = 2; a_{k+1} = a_k + (2k + 1)$$

und die explizite Bildungsvorschrift

$$(b_n) = (n^2 + 1)$$

liefern die gleiche Zahlenfolge, beginnend mit

$$2; 5; 10; 17; \dots$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

$$b_1 = 1^2 + 1 = 2 = a_1$$

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $b_k = k^2 + 1 = a_k$

Induktionsbehauptung: $b_{k+1} = (k+1)^2 + 1 = a_{k+1}$

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$b_{k+1} = (k+1)^2 + 1 = k^2 + 2k + 2 = (k^2 + 1) + (2k + 1) = a_{k+1}$$

Beide Bildungsvorschriften stellen also dieselbe Folge dar.

- 35 Geben Sie eine rekursive Bildungsvorschrift für die Folge e in Übung A 34 an! Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, daß diese rekursive Bildungsvorschrift gleichwertig mit der von Ihnen in Übung A 34 angegebenen expliziten ist!

Aufgaben a 87 bis 96

18 Monotonie, Schranken und Grenzen von Folgen

- 36 Untersuchen Sie die Funktionen aus Übung A 31 auf Monotonie, und geben Sie gegebenenfalls Monotonieintervalle an!

Da Folgen spezielle Funktionen sind, lassen sich auch die Eigenschaften von Funktionen speziell für Folgen aussprechen.

17

DEFINITION:

Eine Zahlenfolge (a_k) heißt monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\} =_{\text{Dr}} \text{Für jedes } k \text{ gilt } \left\{ \begin{array}{l} a_k < a_{k+1} \\ a_k > a_{k+1} \end{array} \right.$

Neben dieser, mitunter auch als „streng“ bezeichneten, Monotonie wird auch von einer „**Monotonie im weiteren Sinn**“ gesprochen, wenn $a_k < a_{k+1}$ abgeschwächt ist zu $a_k \leq a_{k+1}$ bzw. $a_k > a_{k+1}$ zu $a_k \geq a_{k+1}$ für alle k .

Eine Zahlenfolge (a_k) mit $a_k = a_{k+1}$ für alle k bezeichnet man als **konstante Zahlenfolge**. Sie läßt sich auch in der Form $(a_k) = (c)$ (mit reellem c) angeben und ist im weiteren Sinne monoton, und zwar sowohl wachsend als auch fallend.

20

Zur Untersuchung von (a_k) auf Monotonie betrachten wir jeweils die Differenz $a_{k+1} - a_k$.

- a) Die Folge (a_k) mit $a_1 = 3$ und $a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k$ fällt monoton:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2} a_k - a_k = -\frac{1}{2} a_k < 0,$$

denn alle Folgenglieder a_k sind als Produkt positiver Zahlen selbst positiv. $a_{k+1} - a_k < 0$ ist aber gleichbedeutend mit $a_k > a_{k+1}$.
Damit ist (a_k) natürlich erst recht monoton fallend im weiteren Sinn.

- b) Die Folge $(k^3 - 3k^2 + 2k)$ ist im weiteren Sinne monoton wachsend. Zum Beweis ist zu untersuchen, ob für jedes k gilt $a_k \leq a_{k+1}$, d. h. $a_{k+1} - a_k \geq 0$. Das ist aber der Fall:

$$a_{k+1} = (k+1)^3 - 3(k+1)^2 + 2(k+1) = k^3 - k$$

$$a_k = k^3 - 3k^2 + 2k$$

$$a_{k+1} - a_k = 3k^2 - 3k = 3k(k-1)$$

Für $k = 0$ und $k = 1$ ergibt sich $a_{k+1} - a_k = 0$; für $k > 1$ ist $a_{k+1} - a_k$ als Produkt positiver Zahlen selbst positiv. Also gilt $a_{k+1} - a_k \geq 0$ für jedes k .

- e) Die Folge $\left((-1)^k \frac{1}{k}\right)$ ist nicht monoton im weiteren Sinn und damit erst recht nicht (streng) monoton:

Für jedes gerade k gilt $a_k > 0 > a_{k+1}$,
für jedes ungerade k gilt $a_k < 0 < a_{k+1}$.

37) Untersuchen Sie die Folgen aus Übung A 34 auf Monotonie!

So, wie Funktionen oftmals nur in gewissen Intervallen ihres Definitionsbereiches das gleiche Monotonieverhalten zeigen, so können Folgen erst von einer gewissen Stelle ab monoton wachsen bzw. fallen.

- 21) a) Die Folge $(k^3 - 3k^2 + 2k)$ (Beispiel A 20) ist von der Stelle $k = 2$ ab monoton wachsend.

- b) Die Folge $(9k - k^2)$ ist für $k \geq 5$ monoton fallend.

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= 9(k+1) - (k+1)^2 - (9k - k^2) \\ &= (-k^2 + 7k + 8) - (9k - k^2) = 8 - 2k \end{aligned}$$

Damit ist $a_{k+1} - a_k < 0$ genau dann, wenn $2k > 8$ ist, also für alle $k \geq 5$. Zum gleichen Ergebnis kommt man durch folgende Überlegung:

Die Funktion $y = 9x - x^2$ hat als Bild eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(4,5; 20,25)$. Sie ist im Intervall $4,5 \leq x < \infty$ monoton fallend, also ist auch die Folge $(9k - k^2)$ monoton fallend für $k \geq 5$.

19

In den Lerneinheiten A 3 und A 4 wurde über Schranken und Grenzen von Mengen gesprochen. Da die Glieder einer Zahlenfolge eine Menge bilden, lassen sich diese beiden Begriffe auch auf Zahlenfolgen anwenden, und statt von „Schranken für die Glieder einer Folge“ spricht man kurz von „Schranken für eine Folge“.

18) DEFINITION: S heißt $\left\{ \begin{array}{l} \text{untere Schranke} \\ \text{obere Schranke} \end{array} \right\}$ einer Folge (a_k) =_{Dr} Für jedes k gilt $\left\{ \begin{array}{l} S \leq a_k \\ S \geq a_k \end{array} \right.$

Hat eine Folge eine untere (obere) Schranke, so heißt sie **nach unten (oben) beschränkt**. Man nennt eine Folge **beschränkt** (unbeschränkt), wenn sie nach beiden Seiten (keiner Seite) beschränkt ist.

19) DEFINITION: G heißt $\left\{ \begin{array}{l} \text{untere Grenze} \\ \text{obere Grenze} \end{array} \right\}$ einer Folge (a_k)
=_{Dr} G ist die $\left\{ \begin{array}{l} \text{größte aller unteren} \\ \text{kleinste aller oberen} \end{array} \right\}$ Schranken von (a_k) .

Jede (auch im weiteren Sinn) monoton wachsende Folge ist nach unten beschränkt. Kein Glied ist kleiner als das erste, das somit untere Grenze ist. Entsprechendes gilt für die obere Grenze monoton fallender Folgen. Interessanter ist die Frage nach oberen Schranken und oberer Grenze monoton wachsender Folgen, bzw. nach unteren Schranken und unterer Grenze monoton fallender Folgen.

- 22 Die Folge $\left(\frac{1}{k}\right)$ ist auf Monotonie, Beschränktheit und Grenzen zu untersuchen. Die Folge fällt monoton, denn es gilt

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k+1)}{k(k+1)} = -\frac{1}{k(k+1)} < 0$$

für alle $k > 0$.

Damit ist die Folge nach oben beschränkt, und $a_1 = 1$ ist obere Grenze. Da die Glieder alle positiv sind, ist (a_k) auch nach unten beschränkt, und zwar sind alle negativen Zahlen und 0 untere Schranken. Wir zeigen jetzt durch einen indirekten Beweis, daß 0 die größte aller unteren Schranken, also untere Grenze ist. Dazu ist nachzuweisen, daß jede noch so kleine positive Zahl ε keine untere Schranke ist. Angenommen, es gäbe eine Zahl $\varepsilon > 0$, die untere Schranke ist. Nach den Überlegungen von Lerneinheit A 5 (/ Beispiel A 4 und Übung A 7) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, das ε rational ist, also

$$\varepsilon = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N}; p \neq 0; q \neq 0).$$

Demnach wäre $\frac{p}{q} < \frac{1}{k}$ für jedes k .

Für $k = q + 1$ ergibt sich aber $\frac{p}{q} \geq \frac{1}{q} > \frac{1}{q+1} = \frac{1}{k}$.

Für $k = q + 1$ (und wegen der Monotonie von (a_k) für alle größeren k) gilt also $a_k = \frac{1}{k} < \frac{p}{q} = \varepsilon$, d. h. die Annahme, $\varepsilon > 0$ wäre untere Schranke, muß fallengelassen werden. Damit ist die Behauptung bewiesen.

- 23 Die Elemente der in den Lerneinheiten A 3 und A 4 untersuchten Mengen M_3 und M_4 sind die Glieder der Folgen $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ bzw. $\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. In Beispiel A 3 wurden die Grenzen von M_3 und M_4 angegeben; auf einen Beweis wurde dort verzichtet. Jetzt soll nachgewiesen werden, daß die Folge $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ die untere Grenze $\frac{1}{2}$ und die obere Grenze 1 hat.

a) $a_1 = \frac{1}{2}$ ist das kleinste Glied von (a_n) und damit untere Grenze. Diese Aussage beweisen wir, indem wir zeigen, daß $\frac{n}{n+1}$ eine um so größere Zahl liefert, je größer n ist:

Behauptung: $\frac{n}{n+1} < \frac{n+m}{n+m+1}$ für alle natürlichen Zahlen $n \neq 0, m \neq 0$

Beweis: $n(n+m+1) = n^2 + nm + n$

$$(n+1)(n+m) = n^2 + nm + n + m$$

Also ist $n(n+m+1) < (n+1)(n+m)$ und damit

$$(1) \quad \frac{n}{n+1} < \frac{n+m}{n+m+1}$$

- b) Obere Grenze von (a_n) ist 1. Die Schrankeneigenschaft von 1 ergibt sich aus $n < n+1$ und damit $\frac{n}{n+1} = a_n < 1$ für alle n . Es bleibt nur noch nachzuweisen, daß jede Zahl $G' < 1$ keine obere Schranke von (a_n) ist. Bei der Beweisführung können wir – wie in Beispiel A 22 – G' als rational voraussetzen.

Behauptung: Zu beliebigem rationalem $G' < 1$ gibt es ein Glied a_m von (a_n) mit $a_m > G'$.

Beweis: $G' = \frac{p}{q}$; p eine ganze Zahl, $0 < q \in \mathbb{N}$, $p < q$

$$p < q \text{ ist gleichbedeutend mit } p \leq q - 1$$

$$\text{Also } G' = \frac{p}{q} \leq \frac{q-1}{q} < \frac{q}{q+1} = a_q \in (a_n)$$

[wegen (1) in a].

Mit a_q haben wir also ein solches Glied, das G' übertrifft, gefunden.

- 38 a) Beweisen Sie entsprechend, daß $\left(\frac{n+1}{1}\right)$ die untere Grenze 1 und die obere Grenze 2 hat!
- b) Benutzen Sie die Ergebnisse von Beispiel A 22 und Übung 38a, um für die Folgen

$$\left((-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}\right) \text{ und } \left(\frac{n+1}{2n}\right) \text{ die Grenzen anzugeben!}$$

Als spezielle Funktionen können Zahlenfolgen auch graphisch dargestellt werden. Da der Definitionsbereich eine Teilmenge von \mathbb{N} ist, ergeben sich als Funktionsbilder Mengen isolierter Punkte. (Man vergleiche die Darstellung der endlichen Folge (a_p) mit $a_p = \binom{8}{p}$ im Bild A 4 der Lerneinheit A 15!)

- 39 Stellen Sie Folgen aus Übung A 34 in Achsenkreuzen mit geeignet gewählten Einheiten graphisch dar! (Dabei kann gegebenenfalls für mehrere Folgen das gleiche Achsenkreuz benutzt werden.)
Wie äußert sich die ein- oder beidseitige Beschränktheit einer Folge in der graphischen Darstellung?

Aufgaben A 97 bis 103

20 Arithmetische und geometrische Folgen

Unter den monotonen Folgen, die nur nach einer Seite beschränkt sind, sind besonders einfach diejenigen, bei denen sich alle Glieder von ihren unmittelbaren Vorgängern um ein und dieselbe Zahl, die Differenz d , unterscheiden.

20 **DEFINITION:** Eine Folge (a_k) heißt *arithmetische Folge* genau dann, wenn es eine feste (d. h. von k unabhängige) Zahl d gibt, so daß für jedes k gilt: $a_{k+1} = a_k + d$.

Jede Einmaleinsfolge, jede konstante Folge und die Folge der natürlichen Zahlen selbst sind solche Folgen.

- 40 a) Stellen Sie fest, welche der Folgen in Übung A 34 arithmetische Folgen sind!
 b) Begründen Sie den Namen „arithmetische Folge“ mit Hilfe des Begriffs „arithmetisches Mittel“!

Obwohl die Definition A 20 eine Rekursionsgleichung enthält, braucht man bei arithmetischen Folgen zur Bestimmung von a_{k+1} nicht a_k zu kennen.

21 **Arithmetische Folgen sind Folgen (a_k) mit $a_k = a_1 + (k - 1)d$**

- 41 a) Beweisen Sie, daß diese Erklärung die gleichen Folgen erfaßt wie die Definition A 20!
 b) Wie ändert sich die Beziehung $a_k = a_1 + (k - 1)d$, wenn das erste Glied mit a_0 bezeichnet wird?

Eine arithmetische Folge ist demnach eindeutig festgelegt durch eines ihrer Paare $[m; a_m]$ und die Differenz d oder durch zwei ihrer Paare $[m; a_m]$ und $[n; a_n]$, ($m \neq n$).

Von ähnlicher Einfachheit sind die geometrischen Folgen. Bei ihnen ist der **Quotient q** zweier aufeinanderfolgender Glieder stets der gleiche.

22 **DEFINITION:** Eine Folge (a_k) heißt *geometrische Folge* genau dann, wenn es eine feste Zahl $q \neq 0$ gibt, so daß für alle k gilt: $a_{k+1} = a_k \cdot q$ ($a_1 \neq 0$).

- 42 a) Geben Sie die geometrischen Folgen aus Übung A 34 an!
 b) Begründen Sie den Namen „geometrische Folge“ mit Hilfe des Begriffs „geometrisches Mittel“!

23 **Geometrische Folgen sind Folgen (a_k) mit $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ ($a_1 \neq 0; q \neq 0$)**

- 43 a) Beweisen Sie, daß diese Erklärung mit der Definition A 22 gleichwertig ist!
 b) Wie ändert sich die Beziehung $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$, wenn das erste Glied der Folge mit a_0 bezeichnet wird?

Während bei arithmetischen Folgen die Frage nach Monotonie und Beschränktheit relativ uninteressant ist, trifft das für geometrische Folgen nicht zu. Sie können, je nachdem welche Werte a_1 und q haben, recht unterschiedliches Verhalten zeigen.

24 In der Folge $(2^{k-1}) = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; \dots\}$ (e aus Übung A 34) ist $a_1 = 1$ und $q = 2$. Sie wächst monoton und ist nach oben unbeschränkt.

24 **SATZ:** Eine geometrische Folge (a_k) mit $a_1 > 0$ und $q > 1$ wächst monoton und ist nach oben unbeschränkt.

Beweis:

a) Wegen $q > 1$ ist $a_k = a_k \cdot 1 < a_k \cdot q = a_{k+1}$.

- b) Angenommen, die Folge hat eine obere Schranke S , d. h., es gelte
 $a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \leq S$ für alle k .
 Dann müßte auch gelten $\lg a_1 + (k-1) \lg q \leq \lg S$ und wegen $\lg q > 0$

$$k \leq \frac{\lg S - \lg a_1 + \lg q}{\lg q}.$$

Das bedeutet aber, daß die Folge (k) der natürlichen Zahlen $\neq 0$ beschränkt sein müßte; die Annahme ist also falsch.

25 **SATZ:** Eine geometrische Folge (a_k) mit $a_1 > 0$ und $0 < q < 1$ fällt monoton und hat 0 als untere Grenze.

Beweis:

- a) Wegen $0 < q < 1$ ist $a_k = a_k \cdot 1 > a_k \cdot q = a_{k+1}$.
 b) 0 ist untere Schranke, da alle a_k positiv sind als Produkte positiver Zahlen. Angenommen, es gäbe eine untere Schranke $\varepsilon > 0$, also
 $0 < \varepsilon \leq a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ für alle k .
 Dann müßte auch gelten $\lg \varepsilon - \lg a_1 \leq (k-1) \lg q$ und damit

$$\frac{\lg \varepsilon - \lg a_1 + \lg q}{\lg q} \geq k$$
 wegen $\lg q < 0$.

Das ist aber ebenfalls ein Widerspruch zur Unbeschränktheit der Folge (k) der von Null verschiedenen natürlichen Zahlen.

44 *Durchdenken Sie das Verhalten geometrischer Folgen für die anderen sechs Fälle, die sich durch Kombination der Möglichkeiten $a_1 > 0$, $a_1 < 0$, $q < -1$, $-1 < q < 0$, $0 < q < 1$ und $q > 1$ ergeben!*

Aufgaben a 104 bis 109

21 Partialsummen

In den Lerneinheiten A 7 bis A 9 waren häufig Summen zu bestimmen, so im Beispiel A 7

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1).$$

In allen derartigen Fällen kann man die Summanden auch als die Glieder a_1, a_2, \dots, a_n einer n -gliedrigen Folge auffassen.

Mitunter nennt man eine solche endliche Folge auch einen **Abschnitt** der (unendlichen) Folge (a_k) ($k \in \mathbb{N}$; $k > 0$). Die Summe selbst heißt eine Partialsumme¹ dieser Folge (a_k).

26 **DEFINITION:** $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ heißt *n-te Partialsumme* der Folge (a_k); sie hat n Summanden (Glieder).

25 Die Partialsumme s_{11} der Folge (2^{k-1}) ist zu berechnen. Nach Übung A 17 ist

$$s_{11} = \sum_{k=1}^{11} 2^{k-1} = 2^{11} - 1 = 2047.$$

¹ pars (lat.), - Teil

Für gewisse Folgen, u. a. für alle arithmetischen und geometrischen Folgen, lassen sich allgemeine Formeln für die Partialsummen angeben. Schreibt man z. B. die Partialsumme s_5 einer arithmetischen Folge in der Form

$$s_5 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d),$$

so läßt diese sich umformen zu

$$s_5 = 5a_1 + (1 + 2 + 3 + 4)d = 5a_1 + 10d.$$

Daraus läßt sich verallgemeinern zu $s_n = n \cdot a_1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) \cdot d$

27 **SATZ:** Für jede arithmetische Folge $(a_k) = (a_1 + (k-1)d)$ gilt

$$(1) \quad s_n = \sum_{k=1}^n a_k = n \cdot a_1 + \frac{(n-1)n}{2} d.$$

Beweis:

Induktionsanfang: $s_1 = 1 \cdot a_1 + \frac{0 \cdot 1}{2} d = a_1$

Induktionsvoraussetzung: $s_k = ka_1 + \frac{(k-1)k}{2} d$

Induktionsbehauptung: $s_{k+1} = (k+1)a_1 + \frac{k(k+1)}{2} d$

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + a_{k+1} = ka_1 + \frac{(k-1)k}{2} d + a_1 + kd \\ &= (k+1)a_1 + \frac{(k-1)k + 2k}{2} d \\ &= (k+1)a_1 + \frac{k(k+1)}{2} d \end{aligned}$$

Wir nutzen $a_n = a_1 + (n-1)d$ aus und formen um zu

$$(1a) \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

- 45 a) Führen Sie diese Umformung aus!
 b) Der neunjährige GAUSS¹ soll die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 durch das Produkt $50 \cdot 101$ ermittelt haben. Welcher der beiden Formeln entspricht sein Vorgehen?
 c) Wie ändern sich die beiden Darstellungen von s_n , wenn das erste Glied der Folge mit a_0 bezeichnet wird, s_n also $n + 1$ Summanden hat?

¹ CARL FRIEDRICH GAUSS, 1777 bis 1855

Für die Summe s_5 einer geometrischen Folge kann man analog vorgehen:

$$\begin{aligned} s_5 &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 \\ &= a_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

[nach Beispiel A 13 für $a = q$; $n = 5$; $b = 1$ gilt:

$$(q^5 - 1) : (q - 1) = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1]$$

Allerdings muß hier $q \neq 1$ vorausgesetzt werden; doch ist der Fall $q = 1$ ohnehin uninteressant; für ihn ist $s_5 = 5a_1$. Daraus läßt sich verallgemeinern:

28 **SATZ:** Für jede geometrische Folge $(a_k) = (a_1q^{k-1})$ mit $q \neq 1$ gilt

$$(2) \quad s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- 46 a) Beweisen Sie diesen Sachverhalt durch vollständige Induktion!
 b) Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen man zweckmäßigerweise die erste bzw. die zweite Form zur Berechnung benutzen wird!

- 47 a) Leiten Sie die Beziehung

$$(2a) \quad s_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

aus der Beziehung (2) im Satz A 28 her!

- b) Wie ändern sich die beiden Darstellungen von s_n , wenn das erste Glied der Folge mit a_0 bezeichnet wird?

Auch für andere als arithmetische und geometrische Folgen lassen sich zuweilen Partialsummenformeln aufstellen.

- 26 Zu ermitteln ist eine Partialsummenformel für die Folge (a_k) der Quadratzahlen:
 $(a_k) = (k^2)$, ($k \geq 0$).

Betrachtet man die bisher auf Partialsummen untersuchten Folgen, so wird deutlich: Ist die explizite Bildungsvorschrift von (a_k) linear in k , so ist die Darstellung der Summe quadratisch in k (bzw. n). Dies gilt auch für die Beispiele (und Aufgaben) in den Lerneinheiten A 7 bis A 9:

$$(a_k) = (k) \quad s_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{1}{2}(n^2 + n) \quad (\nearrow \text{Beispiel A 5})$$

$$(a_k) = (2k - 1) \quad s_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2 \quad (\nearrow \text{Beispiel A 7})$$

Das legt für $s_n = \sum_{k=0}^n k^2$ die Vermutung nahe, es handle sich um ein Polynom dritten Grades in n . Deshalb setzen wir an:

$$s_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Die Werte $s_0 = 0$; $s_1 = 1$; $s_2 = 5$; $s_3 = 14$ liefern ein System von vier linearen Gleichungen in den Variablen a, b, c, d :

$$\begin{aligned} 0 &= d \\ 1 &= a + b + c + d \\ 5 &= 8a + 4b + 2c + d \\ 14 &= 27a + 9b + 3c + d \end{aligned}$$

Daraus kann man a , b , c , und d ermitteln. Formt man das so erhaltene Polynom um, gewinnt unsere Vermutung die Form

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

- 48) a) Zeigen Sie, daß die Lösung des angegebenen Gleichungssystems auf den Term $\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ führt!
 b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß dieser Term tatsächlich die Partialsummen s_n der Folge (k^2) darstellt, die Beziehung also allgemeingültig ist!

- 49) Gewinnen Sie in analoger Weise die Partialsummenformel

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \text{ für die Folge der Kubikzahlen!}$$

Man vergleiche diese Summe mit $\sum_{k=1}^n k$.

Aufgaben a 110 bis 120

23 Anwendungsbeispiele

Arithmetische und geometrische Folgen treten bei vielen Problemen in Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft auf. Bei ihrer Lösung beachte man die Wahl von $k = 0$ oder $k = 1$ als Anfang je nach Zweckmäßigkeit.

- 27) 220 m Papier (Stärke 0,2 mm) werden auf eine Rolle mit dem Radius 7,5 cm gewickelt.

- a) Wieviel Lagen ergeben sich?
 b) Welchen Durchmesser hat die Rolle zum Schluß?

Lösungsüberlegung:

Offenbar ergibt sich die Gesamtlänge von 220 m = 220000 mm als Summe der Kreisumfänge u_k in den einzelnen Lagen. Sie bilden wegen

$$u_{k+1} = 2\pi(r_k + 0,2) = 2\pi r_k + 0,4\pi = u_k + 0,4\pi$$

eine arithmetische Folge (u_k). Die Radien r_k bilden ebenfalls eine arithmetische Folge, deren n -tes Glied die Hälfte des endgültigen Durchmessers ist.

a) (u_k)

Gegeben: $u_1 = 2\pi \cdot 75$

$$d_u = 0,4\pi$$

$$s_n = 220000$$

Gesucht: n

b) (r_k)

Gegeben: $r_1 = 75$

$$d_r = 0,2$$

$$n \text{ (nach Lösung von a)}$$

Gesucht: $2r_n$

Lösung:

a) Aus $s_n = \sum_{k=1}^n u_k = n \cdot u_1 + \frac{(n-1)n}{2} \cdot d_u$

ergibt sich durch Einsetzen eine quadratische Gleichung in n :

$$220000 = n \cdot 150\pi + n^2 \cdot 0,2\pi - n \cdot 0,2\pi$$

mit der positiven Lösung $n \approx 326$.

- b) Aus $r_n = r_1 + (n - 1) d_r$ ergibt sich durch Einsetzen

$$2r_{326} = 2 \cdot (75 + 325 \cdot 0,2) = 280$$

Ergebnis:

Es ergeben sich also 326 Lagen, und die Rolle hat schließlich 28 cm Durchmesser.

- ⑤ Überlegen Sie, welche vereinfachende Annahme bei der Lösung dieser Aufgabe gemacht wurde!

24

- ② Das Bild A 5 zeigt im Schnitt eine Rotationskapselpumpe. An den Saugstutzen S wird der Rezipient mit einem Volumen von 3000 cm^3 angeschlossen. Durch den exzentrischen Vollzylinder Z können je Drehung 200 cm^3 Luft zum Druckstutzen D befördert werden.

- a) Wie groß ist der Druck im Rezipienten nach 5 und nach 10 Umdrehungen, wenn der ursprüngliche Druck 1000 mb beträgt?
 b) Wieviel Minuten muß die Pumpe bei 50 Umdrehungen je Minute laufen, um einen Druck von 10^{-6} mb zu erreichen?

Lösungsüberlegung:

Nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE ist (unter der Annahme konstanter Temperatur) das Produkt von Druck p und zugehörigem Volumen V konstant. Demnach gilt für den Anfangsdruck p_0 und den Druck p_1 nach der ersten Umdrehung

$$p_1 \cdot 3200 = p_0 \cdot 3000$$

$$p_1 = p_0 \cdot \frac{15}{16}$$

und allgemein $p_{k+1} = p_k \cdot \frac{15}{16}$

Demzufolge ergibt sich eine geometrische Folge (p_k).

Gegeben: $p_0 = 1000$

Gesucht: a) p_5 ; p_{10}

$$q = \frac{15}{16}$$

b) $t = \frac{n}{50}$ mit $p_n = 10^{-6}$

Lösung:

- a) Aus $p_n = p_0 \cdot q^n$ ergibt sich durch Einsetzen

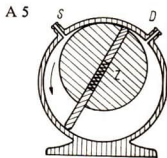
$$p_5 = 1000 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^5$$

$$p_5 = 724$$

$$p_{10} = 1000 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{10}$$

$$p_{10} = 525$$

- b) Aus $p_n = 1000 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^n = 10^{-6}$ ergibt sich durch Umformen



$$\left(\frac{15}{16}\right)^n = 10^{-9}$$

$$n \cdot \lg\left(\frac{15}{16}\right) = -9$$

$$n = \frac{9}{\lg 16 - \lg 15} = 321$$

$$t = \frac{321}{50} \approx 6,4$$

Ergebnis:

Nach 5 Umdrehungen beträgt der Druck 724 mb, nach 10 Umdrehungen 525 mb, und die Pumpe muß 6,4 min laufen, damit im Rezipienten ein Druck von 10^{-6} mb herrscht.

29 Innerhalb einer Planperiode von 5 Jahren soll das jährliche Milchaufkommen von anfänglich 900 kg je ha landwirtschaftlicher Nutzfläche auf 1125 kg je ha LN gesteigert werden.

Wie hoch ist das jährliche Aufkommen im vierten Jahr, wenn eine gleichbleibende prozentuale Jahressteigerung angenommen wird?

Lösungsüberlegung:

Eine prozentuale Jahressteigerung um $p\%$ bedeutet von Jahr zu Jahr einen Zuwachs von G auf $G + G \cdot \frac{p}{100} = G\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Ist der Ausgangswert G_0 , so ergibt sich

$$\text{nach einem Jahr } G_1 = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

$$\text{nach zwei Jahren } G_2 = G_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2,$$

$$\text{nach drei Jahren } G_3 = G_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \text{ usw.},$$

$$\text{allgemein nach } n \text{ Jahren } G_n = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Es handelt sich also um eine geometrische Folge (G_n) mit dem Quotienten

$$q = 1 + \frac{p}{100}.$$

Gegeben: $G_0 = 900$

Gesucht: $G_4 (= G_0 \cdot q^4)$

$$G_5 = 1125 (= G_0 q^5)$$

Lösung: $G_5 = G_0 \cdot q^5$; $q^5 = \frac{G_5}{G_0}$; $q = \left(\frac{G_5}{G_0}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$G_4 = G_0 \cdot q^4 = G_0 \cdot \left(\frac{G_5}{G_0}\right)^{\frac{4}{5}}$$

$$\lg G_4 = \lg G_0 + \frac{4}{5} (\lg G_5 - \lg G_0)$$

$$\lg G_4 = \lg 900 + \frac{4}{5}(\lg 1125 - \lg 900)$$

$$\lg G_4 = 2,9542 + \frac{4}{5}(3,0512 - 2,9542)$$

$$= 2,9542 + 0,0776 = 3,0218$$

$$G_4 = 1051$$

Ergebnis:

Bei Annahme gleichbleibender prozentualer Jahressteigerung beträgt das jährliche Milchaufkommen im vierten Jahr etwa 1050 l je ha LN.

- 51 a) *Ermitteln Sie den Prozentsatz p der jährlichen Steigerung!*
b) *Wie groß wäre bei weiterer gleichbleibender Steigerung das Milchaufkommen nach 5 weiteren Jahren?*

Aufgaben a 121 bis 132

B. Grenzwerte

Seite

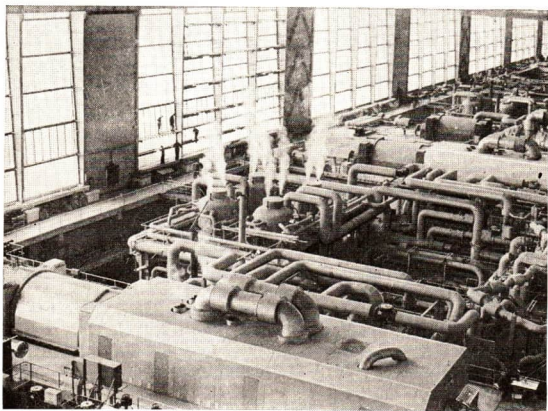
44 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Einleitende Beispiele · Konvergente Zahlenfolgen · Divergente Zahlenfolgen · Sätze über konvergente Zahlenfolgen · Teilfolgen konvergenter Zahlenfolgen · Konvergenzverhalten monotoner Folgen; geometrische Folgen · Reihen · Geometrische Reihen · Periodische Dezimalbrüche als Reihen

63 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Grenzwerte von Funktionen · Grenzwertsätze für Funktionen · Stetige Funktionen · Stetigkeit in einem Intervall · Sätze über stetige Funktionen

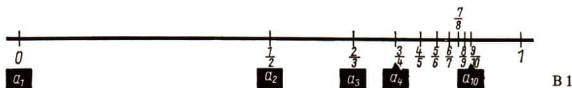
Mächtige Kesselanlagen liefern den Dampf für die Turbinen der Wärmekraftwerke. Bei der Projektierung müssen die erforderlichen Dampfmengen, ihre Temperatur und ihr Druck in Rechnung gestellt werden. Für den Betriebsdruck ist eine obere Grenze festgelegt, die nicht überschritten werden darf. Mit Meßgeräten wird, wie hier im modernen Kraftwerk Vetschau, die Einhaltung der Kennziffern ständig überprüft.



1 Einleitende Beispiele

- 1 Gegeben sei die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{n-1}{n}$ ($n > 0$), also die Folge

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$



(Bild B 1). Diese Folge wächst monoton, d. h., für jede natürliche Zahl n mit $n > 0$ ist $a_n < a_{n+1}$ bzw.

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \quad (n > 0).$$

Diese Ungleichung ist aber für $n \neq 0$ mit der Ungleichung

$$n^2 - 1 < n^2$$

äquivalent. Da die letzte Ungleichung von jeder natürlichen Zahl erfüllt wird, gilt für jede natürliche Zahl n mit $n > 0$

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1},$$

d. h., die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ wächst monoton.

Die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ ist nach oben beschränkt, denn für jede natürliche Zahl n mit $n > 0$ gilt

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Folglich ist 1 eine obere Schranke der Folge.

Da die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ nach oben beschränkt ist und monoton wächst, „nähern“ sich ihre Glieder mit wachsendem n „immer mehr“ der Zahl 1. Was meinen wir aber mit dieser wenig präzisen Redeweise „die Glieder der Folge nähern sich mit wachsendem n immer mehr der Zahl 1“?

Das soll heißen: Wenn ε eine noch so kleine positive Zahl ist (also $1 - \varepsilon$ eine Zahl, die nur wenig kleiner ist als 1), so gibt es doch stets ein Glied der Folge, das größer als $1 - \varepsilon$ ist. Da die Folge monoton wächst, sind auch alle folgenden Glieder größer als $1 - \varepsilon$. Alle diese Glieder liegen demnach innerhalb des Intervalls $(1 - \varepsilon; 1)$.

Wir wollen zeigen, daß diese Eigenschaft für jede positive Zahl ε gilt, auch wenn sie noch so klein ist.

Wählt man $\varepsilon = \frac{1}{10}$, so ist bereits das Glied $a_{11} = \frac{10}{11}$ größer als $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$. Folglich liegen alle Glieder a_n der Zahlenfolge mit $n > 10$ innerhalb des Intervalls $(0,9; 1)$. Außerhalb liegen nur die Glieder $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, \dots, a_{10} = \frac{9}{10}$ (Bild B 1).

Ist $\varepsilon = \frac{1}{100}$, so ist das kleinste Glied der Zahlenfolge, das größer als $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$ ist, das Glied mit der Nummer 101.

$(a_{101} = \frac{100}{101}, \frac{100}{101} > \frac{99}{100})$. Alle Glieder a_n mit $n > 100$ liegen innerhalb des Intervalls $(0,99; 1)$. Dann liegen aber nur endlich viele Glieder, nämlich 100, außerhalb des Intervalls $(0,99; 1)$.

Wir wählen jetzt $\varepsilon = \frac{1}{500}$ und fragen, für welche n die Glieder a_n der Zahlenfolge innerhalb des Intervalls $(1 - \frac{1}{500}; 1)$ liegen. Wir haben also festzustellen, für welche n die Ungleichung

$$\frac{n-1}{n} > 1 - \frac{1}{500}$$

gilt. Wegen $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ ist diese Ungleichung äquivalent mit

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{500}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle n mit $n > 500$. Das heißt: Alle Glieder a_n der Zahlenfolge mit $n > 500$ liegen innerhalb des Intervalls $(1 - \frac{1}{500}; 1)$. Außerhalb dieses Intervalls liegen nur wieder endlich viele Glieder, nämlich 500.

Unsere bisherigen Betrachtungen zeigen, daß es für einige positive Zahlen ε jeweils eine natürliche Zahl n_1 derart gibt, daß für alle folgenden natürlichen Zahlen die Glieder a_n der Zahlenfolge innerhalb des Intervalls $(1 - \varepsilon; 1)$ liegen.

$$\text{Für } \varepsilon = \frac{1}{10} \quad \text{ist } n_1 = 10 = \frac{1}{\frac{1}{10}}.$$

$$\text{Für } \varepsilon = \frac{1}{100} \quad \text{ist } n_1 = 100 = \frac{1}{\frac{1}{100}}.$$

$$\text{Für } \varepsilon = \frac{1}{500} \quad \text{ist } n_1 = 500 = \frac{1}{\frac{1}{500}}.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Aussage für jedes positive ε gilt, d. h., daß es zu *jedem* positiven ε eine natürliche Zahl n_1 derart gibt, daß für alle natürlichen Zahlen $n > n_1$ die Glieder a_n der gegebenen Folge $(\frac{n-1}{n})$ innerhalb des Intervalls $(1 - \varepsilon; 1)$ liegen.

Anmerkung: Wenn wir beweisen wollen, daß eine gewisse Aussage für **jedes positive** ε zutrifft, müssen wir zeigen, daß diese Aussage für **ein beliebiges positives** ε zutrifft.

Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ erhalten wir die gesuchte Zahl n_1 als die kleinste natürliche Zahl, die gleich oder größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist. Ist nämlich ε eine beliebige positive Zahl, so liegen nur die Glieder a_n der Zahlenfolge im Intervall $(1 - \varepsilon; 1)$, für die die Ungleichung $a_n > 1 - \varepsilon$ bzw.

$$\frac{n-1}{n} > 1 - \varepsilon$$

erfüllt ist. Diese Ungleichung ist aber mit den folgenden äquivalent:

$$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Also gilt für alle n mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\frac{n-1}{n} > 1 - \varepsilon.$$

Für jedes gegebene positive ε gibt es also eine natürliche Zahl n_1 (nämlich die kleinste natürliche Zahl, die gleich oder größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist) derart, daß für alle n mit $n > n_1$ die Glieder a_n der Zahlenfolge innerhalb des Intervalls $(1 - \varepsilon, 1)$ liegen. Nur für endlich viele n ($n \leq n_1$) liegen die Glieder a_n außerhalb des Intervalls $(1 - \varepsilon; 1)$.

Anmerkung: Wenn eine gewisse Aussage für **alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen** gilt, so wollen wir sagen, daß die betreffende Aussage für **fast alle natürlichen Zahlen** gilt. Wenn eine gewisse Aussage über natürliche Zahlen nur für **endlich** viele natürliche Zahlen *nicht* gilt, so gibt es unter diesen endlich vielen Zahlen stets eine größte Zahl n_1 , für die die betreffende Aussage *nicht* gilt. Eine gegebene Aussage über natürliche Zahlen gilt also für fast alle natürlichen Zahlen, wenn es eine natürliche Zahl n_1 gibt, so daß die Aussage für alle natürlichen Zahlen n mit $n > n_1$ gilt.

So gilt beispielsweise: Fast alle natürlichen Zahlen sind größer als 10^{25} .

Somit können wir das Ergebnis der Überlegungen im Beispiel B 1 auch folgendermaßen formulieren:

Nach Wahl einer beliebigen positiven Zahl ε gilt für fast alle natürlichen Zahlen n $a_n \in (1 - \varepsilon; 1)$.

- ① Bestimmen Sie, für welche n die Glieder a_n der Zahlenfolge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ innerhalb des Intervalls **a)** $\left(1 - \frac{1}{10^3}; 1\right)$, **b)** $\left(1 - \frac{1}{10^9}; 1\right)$ liegen!

Aus den Betrachtungen im Beispiel B 1 geht hervor, daß die Zahl 1 die kleinste obere Schranke, also die obere Grenze der Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ ist.

Wir können die auf Seite 32 gegebene Definition für die obere Grenze einer Folge (Def. A 19) auch folgendermaßen formulieren:

G ist die obere Grenze von $(a_n) =_{\text{DF}}$

1. Für alle n gilt: $a_n \leq G$.
2. Für jede positive Zahl ε gibt es eine natürliche Zahl n mit $a_n > G - \varepsilon$.

2

② Gegeben ist die Zahlenfolge

$$1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \frac{7}{12}, \dots, \frac{n+1}{2n}, \dots$$

Zeigen Sie, daß diese Zahlenfolge monoton fällt!

② Die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{2n}$ hat die obere Grenze 1 und die untere Grenze $\frac{1}{2}$ (s. Übung A 38 b, S. 34). Da für alle natürlichen Zahlen n ($n > 0$)

$$\frac{1}{2} < \frac{n+1}{2n} \leq 1$$

gilt, liegen alle Glieder a_n der Zahlenfolge im Intervall $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Wir wählen wieder eine beliebige positive Zahl ε und zeigen, daß für fast alle n gilt

$$a_n \in \left\langle \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \varepsilon \right\rangle.$$

Für jede natürliche Zahl n ($n > 0$) ist

$$\frac{1}{2} < \frac{n+1}{2n}.$$

Wir haben also nur noch festzustellen, für welche n die Ungleichung

$$\frac{n+1}{2n} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

erfüllt ist. Diese Ungleichung ist aber mit den folgenden äquivalent

$$n+1 < n+2\varepsilon n$$

$$1 < 2\varepsilon n$$

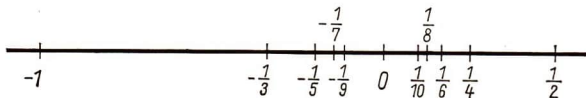
$$n > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Ist also ε eine beliebige positive Zahl, so liegen alle Folgenglieder a_n , für die $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ gilt, innerhalb des Intervalls $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \varepsilon \right\rangle$. Das sind aber wiederum fast alle Glieder der Zahlenfolge, da es nur endlich viele natürliche Zahlen n mit $n \leq \frac{1}{2\varepsilon}$ gibt.

3 Die Zahlenfolge

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$$

hat die untere Grenze -1 und die obere Grenze $\frac{1}{2}$ (Bild B 2). Die Glieder der Zahlenfolge nähern sich mit wachsendem n , „von beiden Seiten“ der Zahl 0 . Damit meinen wir, daß bei jedem $\varepsilon > 0$ für fast alle n gilt $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.



B 2

Ist z. B. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so erkennt man, daß alle Folgenglieder außer $a_1 = -1$ und $a_2 = \frac{1}{2}$ im Intervall $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ liegen.

Außerhalb des Intervalls $(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10})$ z. B. liegen nur die Glieder $a_1 = -1$ bis $a_{10} = \frac{1}{10}$.

Ist nun ε eine beliebige positive Zahl, so muß für alle Glieder a_n , die im Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ liegen, gelten

$$-\varepsilon < (-1)^n \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| < \varepsilon.$$

Nun ist $\left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$, und es gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$ genau dann, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Das heißt: Ist ε eine beliebige positive Zahl, so liegen alle Glieder a_n mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (und das sind fast alle) im Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

DEFINITION: Ist ε eine positive reelle Zahl, so versteht man unter der ε -Umgebung¹ einer Zahl x_0 (geschrieben „ $U_\varepsilon(x_0)$ “) das Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

$U_\varepsilon(x_0)$ ist also die Menge derjenigen Zahlen x , für die die Ungleichung

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad |x - x_0| < \varepsilon$$

erfüllt ist (Bild B 3).

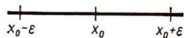
Für die in den Beispielen betrachteten Zahlenfolgen erhalten wir demnach:

Bei jedem positiven ε gilt für fast alle n

bei der Zahlenfolge $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right): \quad a_n \in U_\varepsilon(1),$

bei der Zahlenfolge $(a_n) = \left(\frac{n+1}{2n}\right): \quad a_n \in U_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right),$

bei der Zahlenfolge $(a_n) = \left((-1)^n \frac{1}{n}\right): \quad a_n \in U_\varepsilon(0).$



B 3

¹ An Stelle von „ ε -Umgebung“ sagen wir oft kürzer „Umgebung“.

Anmerkung: Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ heißt das Intervall $(1 - \varepsilon; 1]$ eine **linksseitige Umgebung** von 1 und das Intervall $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ eine **rechtsseitige Umgebung** von $\frac{1}{2}$.

Aufgaben b 1 bis 3

3 Konvergente Zahlenfolgen

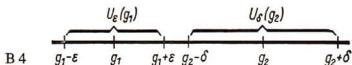
DEFINITIONEN:

Die Zahlenfolge (a_n) hat die Zahl g als **Grenzwert** $=_{\text{Df}}$ Bei jedem positiven ε gilt für fast alle n : $a_n \in U_\varepsilon(g)$, (d. h.: für fast alle n ist $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$, bzw. $|a_n - g| < \varepsilon$).

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **konvergent**, wenn es eine Zahl g gibt, so daß g Grenzwert von (a_n) ist.

Mit Definition B 2 gleichwertig ist auch:

Die Zahlenfolge (a_n) hat die Zahl g als Grenzwert $=_{\text{Df}}$ Bei jedem positiven ε gilt nur für endlich viele n : $a_n \notin U_\varepsilon(g)$.



Aus der Definition B 2 geht unmittelbar hervor, daß eine Zahlenfolge nicht zwei verschiedene Grenzwerte haben kann. Hätte nämlich die konvergente Zahlenfolge (a_n) die beiden voneinander verschiedenen Grenzwerte g_1 und g_2 , so könnte man stets eine ε -Umgebung von g_1 und eine δ -Umgebung von g_2 finden, die keine gemeinsamen Elemente haben (Bild B 4). (Man wähle etwa

$\varepsilon = \delta = \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$). Ist nun g_1 Grenzwert von (a_n) , so gibt es nur endlich viele natürliche Zahlen n mit $a_n \notin U_\varepsilon(g_1)$. Dann gibt es auch **nur** endlich viele natürliche Zahlen n mit $a_n \in U_\delta(g_2)$. Folglich kann g_2 nicht Grenzwert der Zahlenfolge sein. **Der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge ist also eindeutig bestimmt.**

Hat die Zahlenfolge (a_n) den Grenzwert g , so schreibt man

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g} \quad (\text{gelesen: limes}^1 a_n \text{ für } n \text{ gegen unendlich gleich } g.)$$

Man sagt dann auch: Die Folge (a_n) **konvergiert** gegen g . Die Folgen in den Beispielen B 1, B 2 und B 3:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right), \left(\frac{n+1}{2n}\right) \quad \text{und} \quad \left((-1)^n \frac{1}{n}\right),$$

sind konvergent, und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Eine Zahlenfolge mit dem Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.

¹ limes (lat.), Grenze

Aus der Definition B 2 folgt, daß jede *konstante Folge* (a_n) , bei der also für jedes n gilt $a_n = c$, konvergent ist, denn hier liegen außerhalb *jeder* ε -Umgebung von c nur endlich viele Glieder (nämlich gar keine). Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

- 4 Die Zahlenfolge $\left(\frac{4n}{2n+3}\right)$ hat den Grenzwert 2.

Nach Definition B 2 haben wir zu zeigen:

Ist ε eine beliebige positive Zahl, so gilt für fast alle n

$$\left| \frac{4n}{2n+3} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Nun ist

$$\left| \frac{4n}{2n+3} - 2 \right| = \left| \frac{4n - 4n - 6}{2n+3} \right| = \frac{6}{2n+3}.$$

Die Ungleichung

$$\frac{6}{2n+3} < \varepsilon$$

ist mit den folgenden äquivalent:

$$\frac{2n+3}{6} > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$2n+3 > \frac{6}{\varepsilon},$$

$$n > \frac{1}{2} \left(\frac{6}{\varepsilon} - 3 \right).$$

Da es nur endlich viele natürliche Zahlen n mit $n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{\varepsilon} - 3 \right)$ gibt, gilt also für fast alle n [nämlich für alle n mit $n > n_1$, wobei als n_1 die kleinste natürliche Zahl genommen wird, die gleich oder größer als $\frac{1}{2} \left(\frac{6}{\varepsilon} - 3 \right)$ ist]:

$$\left| \frac{4n}{2n+3} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, gelten diese Betrachtungen für jede positive Zahl ε . Folglich ist die Zahl 2 der Grenzwert der gegebenen Folge.

- 3 a) Zeigen Sie, daß die Zahlenfolge $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ den Grenzwert 1 hat!

b) Zeigen Sie, daß die Zahlenfolgen $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(-\frac{1}{n}\right)$ und $\left(\frac{10^5}{n}\right)$ Nullfolgen sind!

Wir nehmen an, die Folge (a_n) habe den Grenzwert g . Betrachten wir eine beliebige ε -Umgebung von g , so muß also für fast alle n gelten:

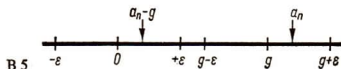
$$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon.$$

Dann gilt aber auch für fast alle n :

$$-\varepsilon < a_n - g < +\varepsilon.$$

Das bedeutet: Liegt a_n in einer ε -Umgebung von g , dann liegt $a_n - g$ in der entsprechenden ε -Umgebung von 0 (Bild B 5). Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ gilt also für fast alle n :

$$a_n - g \in U_\varepsilon(0).$$



Da ε beliebig gewählt war, gelten diese Betrachtungen für jede ε -Umgebung von g bzw. von 0.

Ergebnis:

Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, so ist $(a_n - g)$ eine Nullfolge.

Entsprechend überlegt man sich, daß gilt:

Ist $(a_n - g)$ eine Nullfolge, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Somit erhält man:

Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ genau dann, wenn $(a_n - g)$ eine Nullfolge ist.

Aufgaben b 4 bis 7

4 Divergente Zahlenfolgen

DEFINITION: Jede nicht konvergente Zahlenfolge heißt *divergent*.

Die Zahlenfolge $f(n) = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ ist divergent. Die Zahlenfolge hat die obere Grenze 1 und die untere Grenze -1 (Übung A 38, Seite 34). Ihre ersten Glieder sind:

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, -\frac{8}{9}, \dots$$

Alle Glieder dieser Zahlenfolge mit ungeradzahligem (geradzahligem) n sind positiv (negativ). Die Beträge der Glieder nehmen monoton zu.

In jeder ε -Umgebung sowohl von 1 als auch von -1 liegen jeweils unendlich viele Glieder der Folge. Ist ε eine beliebige positive Zahl, so gilt nämlich für alle

$$(1) \text{ ungeraden } n \text{ mit } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1: a_n \in U_\varepsilon(1),$$

$$(2) \text{ geraden } n \text{ mit } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1: a_n \in U_\varepsilon(-1).$$

Keine der Zahlen $+1$ und -1 ist demnach Grenzwert der Zahlenfolge. Aus unseren Betrachtungen geht ferner hervor, daß es auch zwischen $+1$ und -1 keine Zahl geben kann, die Grenzwert der Folge ist. Ebenso gibt es auch keine Zahl g mit $|g| > 1$, die Grenzwert der Folge ist.

4 Beweisen Sie die Aussagen (1) und (2)!

5 Auch die monoton wachsende Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = 2^n$ ist divergent. Diese Zahlenfolge ist nach oben nicht beschränkt, d. h.: Für jede noch so große Zahl K gibt es natürliche Zahlen n derart, daß $2^n > K$ ist. Ist K eine beliebige positive Zahl, so ist $2^n > K$ genau dann, wenn $n \cdot \lg 2 > \lg K$.

Also sind alle Glieder a_n der Zahlenfolge mit $n > \frac{\lg K}{\lg 2}$ größer als K . Da es nur endlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die $2^n \leq K$ ist $(n \leq \frac{\lg K}{\lg 2})$, gilt:

Für fast alle n ist $2^n > K$. Das gilt für jede Zahl K , auch wenn sie noch so groß ist. Demnach gibt es keine Zahl g derart, daß bei einem beliebigen $\varepsilon > 0$ nur für endlich viele n gilt: $a_n \notin U_\varepsilon(g)$.

6 DEFINITION: Die Zahlenfolge (a_n) $\left\{ \begin{array}{l} \text{wächst} \\ \text{fällt} \end{array} \right\}$ unbeschränkt $=_{Dr}$ Bei jedem positiven K gilt für fast alle n $\left\{ \begin{array}{l} a_n > K, \\ a_n < -K. \end{array} \right\}$

Wächst bzw. fällt (a_n) unbeschränkt, so sagt man auch, daß (a_n) gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$ **divergiert** und schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Es ist zu beachten, daß $+\infty$ und $-\infty$ keine Zahlen sind. Die Schreibweise „ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ “ soll nur bedeuten, daß die Folge (a_n) unbeschränkt wächst. Statt „ $+\infty$ “ schreibt man auch kürzer „ ∞ “.

5 Zeigen Sie, daß die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ divergent ist!

Aufgaben b 8 und 9

5 Sätze über konvergente Zahlenfolgen

7 SATZ: Der Grenzwert g einer konvergenten Zahlenfolge (a_n) , die nur positive Glieder hat, ist nicht negativ.
Der Grenzwert g einer konvergenten Zahlenfolge (a_n) , die nur negative Glieder hat, ist nicht positiv.

Beweis für den zuerst genannten Fall: Die Zahlenfolge (a_n) sei eine konvergente Folge, die nur positive Glieder hat. Wir zeigen, daß der Grenzwert von (a_n) nicht negativ sein kann. Wir nehmen an, es sei $g < 0$ und wählen ein $\varepsilon > 0$ mit $g + \varepsilon < 0$.

(Ein solches ε existiert stets; wir nehmen z. B. $\varepsilon = \frac{1}{2}|g|$.)

Damit hätten wir eine ε -Umgebung von g derart, daß für kein n gilt: $a_n \in U_\varepsilon(g)$ im Widerspruch zur Definition des Grenzwertes. Folglich kann g nicht negativ sein,
w. z. b. w.

8 SATZ: Ist der Grenzwert g einer konvergenten Zahlenfolge (a_n) $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$, so gilt für fast alle n : $\left\{ \begin{array}{l} a_n > 0 \\ a_n < 0 \end{array} \right\}$.

Beweis für den zuerst genannten Fall: Die Zahlenfolge (a_n) sei eine Folge mit positivem Grenzwert g . Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ mit $g - \varepsilon > 0$. Nach Definition des Grenzwertes gibt es nur endlich viele n , so daß $a_n \notin U_\varepsilon(g)$. Dann gibt es auch nur endlich viele n mit $a_n \leq 0$. Das heißt aber: Für fast alle n ist $a_n > 0$,
w. z. b. w.

6 Teilfolgen konvergenter Zahlenfolgen

Gegeben sei die Zahlenfolge

$$(1) \quad a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots, a_n = \frac{1}{n}, \dots$$

Es sei (m_n) die Folge der Quadratzahlen. Betrachten wir nur die Glieder von (1), deren Nummer eine Quadratzahl ist, so erhalten wir die Folge

$$(2) \quad a_{m_1} = a'_1 = 1, a_{m_2} = a'_2 = \frac{1}{4}, a_{m_3} = a'_3 = \frac{1}{9}, \dots, a_{m_n} = a'_n = \frac{1}{n^2}, \dots$$

DEFINITION: Ist (a_n) eine beliebige Zahlenfolge und (m_n) eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so nennt man die Folge $(a_{m_n}) = (a'_n)$ eine *Teilfolge* der Zahlenfolge (a_n) .

Die Zahlenfolge $(\frac{1}{n^2})$ ist also eine Teilfolge der Zahlenfolge $(\frac{1}{n})$. Die Zahlenfolge $(\frac{1}{n})$ ist eine Nullfolge. Auch die Zahlenfolge $(\frac{1}{n^2})$ ist eine Nullfolge, denn es gilt der

SATZ: Jede Teilfolge (a'_n) einer konvergenten Folge (a_n) ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert wie (a_n) .

Beweis: Die Zahlenfolge (a_n) habe den Grenzwert g . Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele natürliche Zahlen n mit $a_n \notin U_\varepsilon(g)$. Dann gilt erst recht: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele natürliche Zahlen n mit $a'_n \notin U_\varepsilon(g)$, denn bei der Auswahl der Folge (a'_n) aus der Folge (a_n) kann die Anzahl der Glieder, die außerhalb von $U_\varepsilon(g)$ liegen, höchstens geringer werden. Folglich hat (a'_n) ebenfalls den Grenzwert g ,
w. z. b. w.

Nach Satz B 10 ist jede Teilfolge einer Nullfolge wiederum eine Nullfolge. Da

$$\left(\frac{1}{n}\right) \text{ Nullfolge ist, sind beispielsweise auch die Zahlenfolgen } \left(\frac{1}{5n}\right), \left(\frac{1}{n^3}\right), \left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ (} k \text{ eine natürliche Zahl), } \left(\frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{1}{10^n}\right), \left(\frac{1}{n!}\right)$$

als Teilfolgen von $(\frac{1}{n})$ Nullfolgen.

Die Folge $(\frac{1}{n^2})$ „konvergiert schneller“ als die Folge $(\frac{1}{n})$.

Das soll heißen: Bei jedem ε mit $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ ist die Zahl der Glieder, die außerhalb von $U_\varepsilon(0)$ liegen bei der Folge $(\frac{1}{n})$ größer als bei der Folge $(\frac{1}{n^2})$. Ist beispielsweise $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$, so liegen außerhalb von $U_\varepsilon(0)$

bei der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ alle Glieder a_n mit $n \leq 10^4$

bei der Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alle Glieder a_n mit $n \leq 10^2$.

7 Konvergenzverhalten monotoner Folgen; geometrische Folgen

B Die Frage, ob eine gegebene Zahlenfolge (a_n) konvergiert oder nicht, ist im allgemeinen sehr schwer zu beantworten. Noch komplizierter ist im allgemeinen die Bestimmung des Grenzwertes einer konvergenten Folge. Wir haben deswegen (und werden das auch weiterhin tun) nur sehr einfache Beispiele betrachtet. Relativ einfach ist bei *monotonen Folgen* zu entscheiden, ob sie konvergieren oder nicht.

11 **SATZ:** Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Zahlenfolge (a_n) konvergiert gegen ihre obere Grenze. Die obere Grenze ist nicht Glied der Folge.

Beweis: Da (a_n) nach Voraussetzung nach oben beschränkt ist, existiert nach Satz A 5 (↗ Seite 11) die obere Grenze g der Folge. Wir haben zu beweisen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ ist, und daß es kein n mit $a_n = g$ gibt. Da g obere Grenze von (a_n) ist, gilt:

(1) Für alle n ist $a_n \leq g$.

(2) Ist ε eine beliebige positive Zahl, so gibt es wenigstens eine natürliche Zahl N mit $a_N > g - \varepsilon$.

Da (a_n) monoton wächst, ist dann aber

$$g - \varepsilon < a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \dots < g.$$

Man sieht also: Fast die gesamte Folge (a_n) liegt im Intervall $(g - \varepsilon, g)$. Mit anderen Worten: Bei jedem $\varepsilon > 0$ gilt für fast alle n : $a_n \in U_\varepsilon(g)$. Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g.$$

Da (a_n) monoton wächst, gibt es keine Zahl m mit $a_m = g$, denn sonst wäre $a_n > g$ für alle $n > m$ im Widerspruch zu (1).

Damit ist der Satz B 11 bewiesen.

Analog beweist man den folgenden

12 **SATZ:** Jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge (a_n) konvergiert gegen ihre untere Grenze.

Jede beschränkte monotone Folge ist also konvergent. Eine Folge, die zwar beschränkt, aber nicht monoton ist, braucht nicht konvergent zu sein, wie das Beispiel B 5 zeigt.

Die beiden Sätze B 11 und 12 sichern zwar die *Existenz* des Grenzwertes einer nach oben bzw. nach unten beschränkten monoton wachsenden bzw. monoton fallenden Folge, liefern aber keine Hilfsmittel zur effektiven Berechnung der Grenzwerte.

6 *Begründen Sie: Jede nach oben bzw. nach unten nicht beschränkte monoton wachsende bzw. monoton fallende Folge (a_n) divergiert gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$!*

7 Im Kapitel A wurde gezeigt (\nearrow Satz A 25, Seite 36), daß jede geometrische Folge (q^n) mit $0 < q < 1$ monoton fällt und 0 als untere Grenze hat. Aus Satz B 12 folgt dann, daß alle diese Folgen Nullfolgen sind. Ferner wurde gezeigt, daß jede geometrische Folge (q^n) mit $q > 1$ monoton wächst und nach oben unbeschränkt ist. Also wachsen alle diese Folgen unbeschränkt (\nearrow Übung B 6).

So gilt beispielsweise: Alle Folgen

$$(0,9^n), (0,99^n), (0,999^n), \dots$$

sind Nullfolgen, und alle Folgen

$$(1,1^n), (1,01^n), (1,001^n), \dots$$

divergieren mit wachsendem n gegen ∞ .

Die zuerst genannten Folgen konvergieren relativ langsam, d. h., bei einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ist die Anzahl der Glieder, die außerhalb der ε -Umgebung von 0 liegen, relativ groß. Je weniger sich q von 1 unterscheidet, desto langsamer konvergiert die Folge (q^n) mit $0 < q < 1$.

- 7 a) Ermitteln Sie, für welche n die Glieder der Folgen $(0,9^n)$ und $(0,99^n)$ außerhalb von $U_\varepsilon(0)$ liegen, wenn $\varepsilon = 10^{-3}$ ist!
 b) Es sind näherungsweise die Glieder der Folge $(0,999^n)$ für $n = 10$, $n = 10^2$, $n = 10^3$ und $n = 10^4$ zu berechnen.
 c) Für welche n gilt: $1,01^n > 10^5$?

Ist $q = 0$, so ist die Folge (q^n) eine Nullfolge. Für $q = 1$ erhalten wir die konstante Folge (1) mit dem Grenzwert 1. Man kann sich leicht überlegen, daß auch alle Folgen (q^n) mit $-1 < q < 0$ Nullfolgen sind, denn die Folgen $(|q|^n)$ sind für $-1 < q < 0$ Nullfolgen. Ferner sind alle Folgen (q^n) mit $q \leq -1$ divergent. Diese Ergebnisse und die aus dem Beispiel B 7 fassen wir in dem folgenden Satz zusammen.

SATZ: Die geometrischen Folgen (q^n) sind für $-1 < q \leq 1$ konvergent und für $q > 1$ und $q \leq -1$ divergent.

- 8 *Beweisen Sie: Ist (a_n) eine Nullfolge, die nur positive (negative) Glieder hat, so wächst (fällt) die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ unbeschränkt!*

8

Aus den Zahlenfolgen

$$(1) \quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots \quad \text{und}$$

$$(2) \quad 1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \frac{7}{12}, \dots, \frac{n+1}{2n}, \dots$$

erhalten wir durch Addition der Glieder mit jeweils gleichem Index die Folge

$$(3) \quad 1, \frac{5}{4}, \frac{8}{6}, \frac{11}{8}, \frac{14}{10}, \frac{17}{12}, \dots, \frac{3n-1}{2n}, \dots$$

Die Zahlenfolgen (1) und (2) sind konvergent. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (\nearrow \text{Seite 49, unten})$$

Wir zeigen, daß auch die Folge (3) konvergent ist und den Grenzwert $\frac{3}{2}$ hat. Dazu weisen wir nach, daß die Folge

$$\left(\frac{3n-1}{2n} - \frac{3}{2} \right) = \left(\frac{3n-1}{2n} - \frac{3n}{2n} \right) = \left(-\frac{1}{2n} \right)$$

eine Nullfolge ist. Die Folge $\left(-\frac{1}{n} \right)$ ist eine Nullfolge (\nearrow Übung B 3 b, Seite 50).

Dann ist auch die Folge $\left(-\frac{1}{2n} \right)$ als Teilfolge von $\left(-\frac{1}{n} \right)$ eine Nullfolge. Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n} = \frac{3}{2}.$$

Man erhält offenbar den Grenzwert der Folge (3), indem man die Grenzwerte der Folgen (1) und (2) addiert.

13

SATZ: Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, so konvergiert auch $(a_n + b_n)$, und es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Beweis: Es sei

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Ferner sei ε eine beliebige positive Zahl. Dann ist aber auch $\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon'$ eine positive Zahl.

Nach der Definition des Grenzwertes einer Folge gilt dann für fast alle n wegen (1): $a_n \in U_{\varepsilon'}(a)$ und wegen (2): $b_n \in U_{\varepsilon'}(b)$.

Das heißt aber:

Bei einem beliebigen $\varepsilon > 0$ gibt es natürliche Zahlen n_1 und n_2 derart, daß gilt:

$$\left. \begin{array}{l} (3) \quad \text{für alle } n > n_1 \text{ ist } a - \varepsilon' < a_n < a + \varepsilon' \\ (4) \quad \text{für alle } n > n_2 \text{ ist } b - \varepsilon' < b_n < b + \varepsilon' \end{array} \right\} \text{ mit } \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es sei nun n^* die größere der beiden Zahlen n_1 und n_2 . Dann erhält man wegen (3) und (4):

Bei einem beliebigen $\varepsilon > 0$ gilt für alle $n > n^*$

$$a + b - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon \quad (\varepsilon = 2\varepsilon').$$

Das heißt:

Bei einem beliebigen $\varepsilon > 0$ gilt für *fast alle* n

$$a_n + b_n \in U_{\varepsilon}(a + b).$$

Die Folge $(a_n + b_n)$ ist also konvergent und hat den Grenzwert $a + b$,

w. z. b. w.

Der folgende Satz wird hier ohne Beweis mitgeteilt:

14

SATZ: Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, so konvergiert auch

(1) $(a_n - b_n)$, und es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$,

(2) $(a_n \cdot b_n)$, und es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(3) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ [$b_n \neq 0$ für alle n , (b_n) keine Nullfolge]¹, und es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

9

Mit Hilfe der Sätze B 13 und B 14 lassen sich die Grenzwerte gewisser Folgen relativ einfach berechnen.

8 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 5 \cdot 0 = 0$,

denn $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ist eine Nullfolge, und die konstante Folge (5) hat den Grenzwert 5.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = 3$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 5}{5n^2 - 7n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{5 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{5}$

Beachte: Für $n > 0$ ist $\frac{3n^2 + 2n - 5}{5n^2 - 7n + 1} = \frac{\frac{3n^2 + 2n - 5}{n^2}}{\frac{5n^2 - 7n + 1}{n^2}} = \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{5 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}}$

9 Es ist durch vollständige Induktion zu beweisen: Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, so ist auch (a_n^m) (m eine natürliche Zahl) konvergent, und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = a^m$.

Aufgaben b 10 bis 21

10 Reihen

In der Lerneinheit A 21 haben wir bei einigen speziellen Folgen *Partialsommen* gebildet. Ist z. B. die geometrische Folge

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

gegeben, so erhalten wir für jede natürliche Zahl n eine solche Partialsumme, nämlich

¹ Von diesen Voraussetzungen ist nur wesentlich, daß (b_n) keine Nullfolge ist. Ist $b \neq 0$, so gilt ja für fast alle n : $b_n \neq 0$. Die eventuell vorhandenen endlich vielen Glieder b_n mit $b_n = 0$ haben auf das Konvergenzverhalten der Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ keinen Einfluß.

$$s_n = \sum_{v=1}^n aq^{v-1} = a \frac{1-q^n}{1-q}.$$

9 Gegeben sei jetzt die Nullfolge

$$(1) \quad \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots$$

Wir bilden der Reihe nach die Partialsummen

$$s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

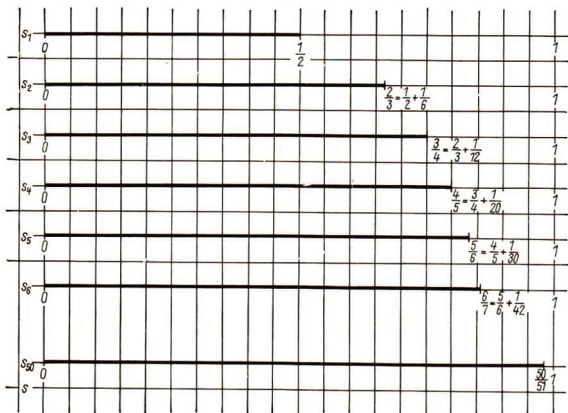
$$s_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

$$s_5 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$$

⋮

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$



B 6

Das Bild B 6 zeigt eine geometrische Veranschaulichung für die ersten 6 Partialsummen und die Partialsumme s_{50} . Je mehr Glieder der gegebenen Folge wir in der angegebenen Weise addieren, um so weniger unterscheidet sich die be-

treffende Summe von der Zahl 1. Wir können demnach die Zahl 1 mit jeder gewünschten Genauigkeit durch solche Partialsummen annähern.

Da wir für jede natürliche Zahl n eine eindeutig bestimmte Partialsumme s_n erhalten, bilden die Zahlen

$$s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{2}{3}, s_3 = \frac{3}{4}, s_4 = \frac{4}{5}, \dots, s_n = \frac{n}{n+1}, \dots$$

eine neue Zahlenfolge (s_n) , die wir die **Folge der Partialsummen** der gegebenen Folge $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ nennen. Dabei entsteht jedes Glied dieser Folge aus dem vorhergehenden durch Addition einer bestimmten Zahl der Folge (1), denn es ist $s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, und für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ gilt:

$$s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Die Folge (s_n) ist konvergent, denn es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Den Grenzwert der Folge (s_n) nennt man die Summe der Glieder der Folge (1). Beachten Sie ganz besonders, daß es sich hier um einen völlig neuen Begriff handelt, der nichts mit der in der Arithmetik definierten Addition von reellen Zahlen zu tun hat, denn es ist unmöglich, unendlich viele Zahlen zu addieren!

Man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+1)} = 1$$

und nennt

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

eine **Reihe**. Die Zahl $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ heißt die **Summe dieser Reihe**.

⑩ *Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für jedes n folgende Gleichung gilt!*

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Man erhält nun zu *jeder* gegebenen Zahlenfolge (a_n) durch fortgesetzte Addition der Glieder dieser Folge eine eindeutig bestimmte Folge von Partialsummen

$$(s_n) = \left(\sum_{v=1}^n a_v \right),$$

für die man, auch wenn sie nicht konvergent ist, schreibt

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{v=1}^{\infty} a_v.$$

DEFINITION: Ist (a_n) eine Zahlenfolge, so versteht man unter der *Reihe*

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

die *Folge der Partialsummen* $(s_n) = \left(\sum_{v=1}^n a_v \right)$.

Die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ heißt dann und nur dann *konvergent*, wenn die Folge (s_n) konvergiert.

Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, so heißt s die *Summe* der Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ und man schreibt

$$s = \sum_{v=1}^{\infty} a_v = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Wir benutzen also das Symbol „ $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ “ in zwei Bedeutungen: Einmal bezeichnet es die Reihe, also die zu der Folge (a_n) gehörende Folge der Partialsummen $\left(\sum_{v=1}^n a_v \right)$, zum anderen bezeichnet es die Summe dieser Reihe, also den **Grenzwert der Folge** $\left(\sum_{v=1}^n a_v \right)$. Ist die Reihe nicht konvergent, so hat das Symbol „ $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ “ nur die zuerst genannte Bedeutung.

⑪ Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^{v-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

konvergiert!

⑩ Die Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

konvergiert nicht, da die Folge der Partialsummen

$$1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

keinen Grenzwert hat.

Aufgaben b 22 bis 24

11 Geometrische Reihen

Ist die geometrische Zahlenfolge

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

gegeben, so erhält man durch Bildung der Partialsummen

$$s_1 = a$$

$$s_2 = a + aq$$

$$s_3 = a + aq + aq^2$$

⋮

$$\vdots$$

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

$$\vdots$$

die geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} aq^{\nu-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

ist konvergent (\nearrow Übung B 11).

16

SATZ: Die geometrische Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} aq^{\nu-1}$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist. Die Summe der konvergenten geometrischen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} aq^{\nu-1}$ ist

$$s = \frac{a}{1-q}$$

Beweis: Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} aq^{\nu-1}$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(s_n) = \left(\sum_{\nu=1}^n aq^{\nu-1} \right)$ konvergiert. Für $q \neq 1$ ist

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} (1-q^n).$$

Ist $|q| < 1$, so konvergiert die Folge (q^n) . Dann konvergiert aber auch die Folge (s_n) . Ist die Folge (q^n) nicht konvergent ($|q| > 1$ oder $q = -1$), so kann auch die Folge (s_n) nicht konvergieren.

Für $q = 1$ ist $(s_n) = (na)$ offensichtlich nicht konvergent. Damit erhalten wir:

$\sum_{\nu=1}^{\infty} aq^{\nu-1}$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist.

Ist $|q| < 1$, so ist (q^n) eine Nullfolge, und man erhält

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a}{1-q} (1-q^n) \right] = \frac{a}{1-q}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

11

Die geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\nu-1}} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$$

konvergiert, da $q = \frac{1}{3} < 1$ ist. Ihre Summe ist

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

B

12. Periodische Dezimalbrüche als Reihen

Gegeben sei die geometrische Reihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{3}{10^v} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

Da $q = \frac{1}{10} < 1$ ist, konvergiert die Reihe. Ihre Summe ist

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{3}{10^v}$ ist nur eine andere Schreibweise für den periodischen

Dezimalbruch $0,\bar{3} = 0,333 \dots$. Die Zahl $\frac{1}{3}$, die durch den periodischen Dezimalbruch $0,\bar{3}$ dargestellt wird, ist die Summe dieser Reihe bzw. der Grenzwert der Folge

$$0,3; 0,33; 0,333; \dots$$

Wir haben somit ein Verfahren kennengelernt, mit dessen Hilfe periodische Dezimalbrüche in gemeine Brüche umgewandelt werden können. Bricht man $0,\bar{3}$ nach der n -ten Stelle ab, so entsteht ein Fehler, den wir mit r_n bezeichnen. Dann ist

$$\frac{1}{3} = \left[\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} \right] + r_n,$$

also

$$r_n = \frac{1}{3} - \left[\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} \right]$$

$$r_n = \frac{1}{3} - \left[\frac{3}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \right) \right]$$

Wir berechnen die Summe $\sum_{v=0}^{n-1} \frac{1}{10^v}$ mit Hilfe der Formel $s_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{3} - \left[\frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \right] = \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^n} \end{aligned}$$

Die Folge (r_n) mit $r_n = \frac{1}{3 \cdot 10^n}$ konvergiert gegen Null, d. h., je mehr Stellen des unendlichen Dezimalbruches $0,\bar{3}$ wir berücksichtigen, desto geringer wird der Fehler des Näherungswertes.

- 12 Der periodische Dezimalbruch $0,35\overline{27}$ soll in einen gemeinen Bruch umgewandelt werden.

$$\begin{aligned}
 0,35\overline{27} &= \frac{35}{10^2} + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + \dots + \frac{27}{10^{2n}} + \dots & \left(q = \frac{1}{10^2} \right) \\
 &= \frac{35}{10^2} + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{27}{10^{2v}} \\
 0,35\overline{27} &= \frac{35}{10^2} + \frac{\frac{27}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{35}{10^2} + \frac{\frac{27}{10^4}}{\frac{99}{10^2}} \\
 &= \frac{35}{10^2} + \frac{27}{99 \cdot 10^2} = \frac{35}{10^2} + \frac{3}{11 \cdot 10^2} = \frac{35 \cdot 11 + 3}{11 \cdot 10^2} = \frac{97}{275}
 \end{aligned}$$

Aufgaben b 25 bis 44

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

B

13 Grenzwerte von Funktionen

Wir kennen bereits Funktionen, die an gewissen Stellen nicht definiert sind. Ist f eine Funktion, die in einer Umgebung der Stelle x_0 mit Ausnahme dieser Stelle selbst definiert ist, so möchte man doch wissen, wie sich die Funktionswerte von f bei Annäherung an die Stelle x_0 verhalten. Dazu betrachtet man eine Folge (x_n) von Zahlen aus dem Definitionsbereich von f mit dem Grenzwert x_0 . Zu jeder Zahl x_n einer solchen Folge gibt es genau eine Zahl y_n aus dem Wertevorrat von f mit $[x_n; y_n] \in f$. Demnach ist jeder Folge (x_n) , deren Glieder alle zum Definitionsbereich von f gehören und von x_0 verschieden sind, eindeutig eine Folge $(y_n) = (f(x_n))$ zugeordnet. Durchläuft also x die Folge (x_n) , so durchläuft $f(x)$ die Folge $(f(x_n))$. Mit Hilfe solcher Folgen $(f(x_n))$ können wir das Verhalten der Funktion f in einer Umgebung von x_0 charakterisieren.

- 13 Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{und} \quad g(x) = 2^{\frac{1}{x-1}},$$

die beide an der Stelle 1 nicht definiert sind. Wir wollen untersuchen, wie sich diese Funktionen bei Annäherung an die Stelle 1 verhalten. Dazu betrachten wir eine Folge (x_n) mit $\lim x_n = 1$, aber $x_n \neq 1$ für alle n , z. B. die Folge $(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Die Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die Folge

$$(f(x_n))$$

$$(g(x_n))$$

mit

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 1}{1 - \frac{1}{n} - 1}$$

$$= \frac{-\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n}} = 2 - \frac{1}{n}.$$

mit

$$g(x_n) = 2^{\frac{1}{x_n - 1}} = 2^{\frac{1}{1 - \frac{1}{n} - 1}}$$

$$= 2^{-\frac{1}{n}} = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}.$$

Die Folge $(f(x_n))$ ist konvergent, denn es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Die Folge $(g(x_n))$ ist konvergent, denn es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Wir betrachten nun die Folge (x'_n) mit $x'_n = 1 + \frac{1}{n}$, die ebenfalls den Grenzwert 1 besitzt.

Die zu (x'_n) gehörende Folge der Funktionswerte ist

$$(f(x'_n))$$

mit

$$f(x'_n) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = 2 + \frac{1}{n}.$$

$$(g(x'_n))$$

mit

$$g(x'_n) = 2^{\frac{1}{1 + \frac{1}{n} - 1}} = 2^n.$$

Die Folge $(f(x'_n))$ ist konvergent, denn es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

Man erhält den gleichen Grenzwert wie bei der Folge $(f(x_n))$.

Die Folge $(g(x'_n))$ ist divergent, denn es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

Man erhält eine unbeschränkt wachsende Folge.

Da sich die Funktionen f und g bei Annäherung an die Stelle 1 völlig unterschiedlich verhalten, je nachdem die Annäherung von rechts oder von links erfolgt, sollen die weiteren Untersuchungen getrennt geführt werden.

Es sei jetzt (x_n) eine beliebige gegen 1 konvergierende Folge, deren Glieder alle größer als 1 sind. Die Folge der zugehörigen Funktionswerte bei der Funktion g ist die Folge $(g(x_n))$ mit

$$g(x_n) = 2^{\frac{1}{x_n - 1}}.$$

Nun ist nach Voraussetzung $(x_n - 1)$ eine Nullfolge, die nur positive Glieder hat. Folglich ist $\left(\frac{1}{x_n - 1}\right)$ eine unbeschränkt wachsende Folge. Das heißt: Ist K eine beliebige positive Zahl, so gilt für fast alle n

$$\frac{1}{x_n - 1} > K.$$

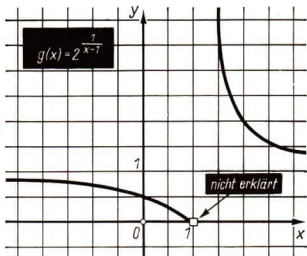
Da nun stets $2^x > x$ ist, gilt:

$$\text{Für fast alle } n \text{ ist } 2^{\frac{1}{x_n-1}} > \frac{1}{x_n-1} > K.$$

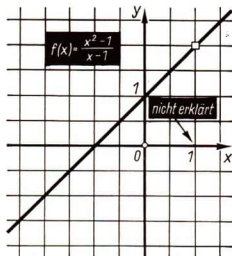
Also wächst die Folge $\left(2^{\frac{1}{x_n-1}}\right)$ ebenfalls unbeschränkt. Damit haben wir:
 Für jede gegen 1 konvergierende Folge (x_n) mit $x_n > 1$ für alle n wächst die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(g(x_n))$ unbeschränkt.

Entsprechend zeigt man:

Für jede gegen 1 konvergierende Folge (x_n) mit $x_n < 1$ für alle n konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(g(x_n))$ gegen 0.



B 7



B 8

Das Bild B 7 zeigt das Bild von $g(x) = \frac{1}{2^{x-1}}$ in einer Umgebung der Stelle 1.

Es sei jetzt (x_n) eine ganz beliebige gegen 1 konvergierende Folge von Zahlen aus dem Definitionsbereich von f . Die durch (x_n) eindeutig bestimmte Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die Folge $(f(x_n))$ mit

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{(x_n + 1)(x_n - 1)}{x_n - 1} = x_n + 1 \quad (x_n \neq 1).$$

Demnach ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = 2.$$

Damit haben wir:

Für jede gegen 1 konvergierende Folge (x_n) , deren Glieder dem Definitionsbereich von f angehören, konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen 2.

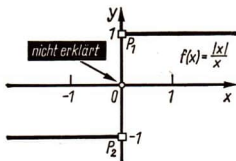
Das Bild B 8 zeigt das Bild der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Die Funktion f stimmt für alle x mit $x \neq 1$ mit der Funktion h mit $h(x) = x + 1$ überein. Die Funktionen f und h sind aber nicht identisch. Da f an der Stelle 1 nicht definiert ist, enthält f nicht das Paar $[1; 2]$, das aber zur Funktion h gehört. Der Punkt $P_0(1; 2)$ ist also kein Punkt des Bildes von f .

14 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{|x|}{x},$$

die an der Stelle 0 nicht definiert ist.

Für alle x mit $\begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$ ist $\begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -1. \end{cases}$



B 9

Das Bild B 9 zeigt das Bild der Funktion f . Die Punkte $P_1(0; 1)$ und $P_2(0; -1)$ gehören nicht zum Bild dieser Funktion. Für jede Nullfolge (x_n) , die nur aus positiven bzw. negativen Gliedern besteht, konvergiert die Folge $(f(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte gegen 1 bzw. gegen -1 .

Wählen wir die Folge (x_n) mit $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, so erhalten wir als Folge der zugehörigen

Funktionswerte die divergente Folge

$$-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

- 12 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f(x) = x^0$ bei Annäherung an die Stelle 0!

Aufgabe b 45

14

17

DEFINITION: Die Funktion f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g (geschrieben: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g = \text{Df}$)

- (1) f ist in einer Umgebung von x_0 (evtl. unter Ausschluß der Stelle x_0) definiert.
 (2) Für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) ($x_n \neq x_0$ für alle n), deren Glieder dieser Umgebung angehören, konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen g .

Hat die Funktion f an der Stelle x_0 den Grenzwert g , so bedeutet das anschaulich, daß das Bild von f sowohl von links als auch von rechts in den Punkt $(x_0; g)$ einmündet, ganz unabhängig davon, ob f an der Stelle x_0 definiert ist oder nicht.

15

- a) Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ hat an der Stelle 1 den Grenzwert 2 (/ Beispiel B 13), d. h., es ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

- b) Die Funktion $g(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ hat an der Stelle 1 keinen Grenzwert (/ Beispiel B 13). Auch die Funktion $f(x) = \frac{|x|}{x}$ hat an der Stelle 0 keinen Grenzwert.

- c) Die Funktion $f(x) = x^2$ hat an der Stelle 2 den Grenzwert 4. Ist nämlich (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ und $x_n \neq 2$ für alle n , so gilt für die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(f(x_n)) = (x_n^2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2 = 4, \text{ und folglich ist } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Aus der Existenz des Funktionswertes $f(x_0)$ darf man keineswegs folgern, daß auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und mit $f(x_0)$ übereinstimmt, wenn das auch bei den meisten Funktionen, die wir kennen, zutrifft. So hat aber beispielsweise die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 2 \\ 5 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, während ihr Funktionswert an dieser Stelle $f(2) = 5$ ist.

d) Jede für alle x definierte konstante Funktion $f(x) = c$ hat an der beliebigen Stelle x_0 den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c.$$

e) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) hat an der Stelle 0 keinen Grenzwert. Ist nämlich (x_n) eine beliebige Nullfolge, die nur positive (negative) Glieder hat, so ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ eine unbeschränkt wachsende (fallende) Folge.

f) Die Funktion $f(x) = x^0$ hat an der Stelle 0 den Grenzwert 1 (Übung B 12), es ist also

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^0 = 1.$$

13) Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion a) $f(x) = x$, b) $f(x) = 5x$ an einer beliebigen Stelle x_0 !

Aufgaben b 46 bis 48

16) Die Funktion

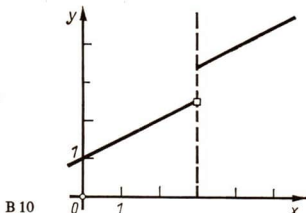
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 3 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

(Bild B 10) hat an der Stelle 3 keinen Grenzwert. Betrachten wir nämlich eine beliebige gegen 3 konvergierende Folge (x_n) , deren Glieder alle größer bzw. kleiner sind als 3, so gilt für die Folge $(f(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}x_n + 1 \right) = \frac{5}{2}$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}x_n + 2 \right) = \frac{7}{2}.$$



B 10

Wir erhalten also bei dieser Funktion je einen Grenzwert bei Annäherung an die Stelle 3 von links bzw. von rechts, die aber nicht übereinstimmen. Man nennt die Zahl $\frac{5}{2}$ den linksseitigen

Grenzwert der Funktion f und die Zahl $\frac{7}{2}$ den rechtsseitigen Grenzwert der Funktion f an der Stelle 3 und schreibt

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{5}{2} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{7}{2}.$$

Für die Funktion $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ($x \neq 0$) gilt (Beispiel B 14):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

B

15 Grenzwertsätze für Funktionen

Die Funktion $u(x) = x^2$ hat an der Stelle 2 den Grenzwert 4 (Beispiel B 15c). Die Funktion $v(x) = 5x$ hat an der Stelle 2 den Grenzwert 10 (Übung B 13b). Hat auch die Funktion $y = x^2 + 5x$ an der Stelle 2 einen Grenzwert? Ist (x_n) eine beliebige Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \quad \text{und} \quad x_n \neq 2 \quad \text{für alle } n,$$

so ist $(y_n) = (x_n^2 + 5x_n)$ die Folge der zugehörigen Funktionswerte. Nach Voraussetzung ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 4 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 5x_n = 10.$$

Folglich gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 5x_n = 14.$$

Also ist

$$\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5x) = 14.$$

18 **SATZ:** Ist $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g_1$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = g_2$, so existiert an der Stelle x_0 auch der Grenzwert der Funktion

(1) $s(x) = u(x) + v(x)$, und es ist $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x) + v(x)] = g_1 + g_2$,

(2) $d(x) = u(x) - v(x)$, und es ist $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x) - v(x)] = g_1 - g_2$,

(3) $p(x) = u(x) \cdot v(x)$, und es ist $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x) \cdot v(x)] = g_1 \cdot g_2$,

(4) $q(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $[v(x) \neq 0]$, und es ist $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{g_1}{g_2}$, falls $g_2 \neq 0$.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen B 13 und B 14. Aus $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g_1$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = g_2$ folgt, daß eine Umgebung U von x_0 existiert, in der u und v definiert sind, und daß für jede Folge (x_n) mit

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ und $x_n \neq x_0$ für alle n und alle $x_n \in U$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = g_1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n) = g_2.$$

Es sei (x_n) eine beliebige Folge, die der Bedingung (1) genügt. Die Folge der zugehörigen Funktionswerte der Funktion $s = u + v$ ist

$$(s(x_n)) = (u(x_n) + v(x_n)).$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n) = g_1 + g_2.$$

Also ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) + v(x)) = g_1 + g_2.$$

Analog erhält man die Aussagen für die Funktionen d , p und q .

17

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 2x - 7) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 2} x - 7 \\ &= 8 - 12 + 4 - 7 = -7 \end{aligned}$$

$$\text{(Beachte: } \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 \cdot x)\text{)}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$\text{Es ist } \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \text{ für alle } x \neq 1.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x}{x^2 + 8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 5}{x + 8} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x - 5)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x + 8)} = -\frac{5}{8}$$

$$\text{(Beachte: Für } x \neq 0 \text{ ist } \frac{x^2 - 5x}{x^2 + 8x} = \frac{x - 5}{x + 8}\text{)}$$

$$\text{d) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

Aufgaben b 49 bis 51

16 Stetige Funktionen

Das Vorhandensein des Grenzwertes einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist unabhängig davon, ob die Funktion f an dieser Stelle definiert ist oder nicht. Das liegt daran, daß bei der Definition des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ der eventuell existierende Funktionswert $f(x_0)$ nicht verwendet wird. Das Beispiel B 15c (\nearrow S. 66) zeigt, daß der Grenzwert der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle 2 mit dem Funktionswert $f(2)$ übereinstimmt. Funktionen, bei denen der Grenzwert an einer beliebigen Stelle x_0 mit dem dort existierenden Funktionswert übereinstimmt, sind für die Mathematik und ihre Anwendungen von besonderer Bedeutung.

DEFINITION: Die Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig =_{DF}

(1) f ist an der Stelle x_0 definiert, (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert, (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

B

Ist eine der drei Bedingungen dieser Definition nicht erfüllt, so heißt f an der Stelle x_0 **unstetig**.

18

a) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist an der Stelle 2 stetig, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 = f(2).$$

b) Die lineare Funktion $f(x) = x$ ist für jedes x stetig (Übung B 13a).

c) Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist an der Stelle 1 nicht stetig, da sie an dieser Stelle nicht definiert ist. Nun existiert aber der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ (Beispiel B 15a). Wir bilden eine neue Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

die an der Stelle 1 stetig ist. Diese Funktion g stimmt mit der oben erwähnten Funktion h mit $h(x) = x + 1$ (Seite 65) überein. Man spricht in diesem Falle von einer **hebbaeren Unstetigkeit** der Funktion f .

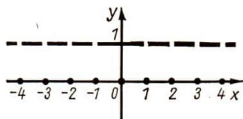
d) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 3 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$ ist an der Stelle 3 nicht stetig,

da der Grenzwert an dieser Stelle nicht existiert (Beispiel B 16).

e) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) ist an der Stelle 0 nicht stetig, da sie an dieser Stelle nicht definiert ist. Bei Annäherung an die Stelle 0 wachsen bzw. fallen die Funktionswerte unbeschränkt.

f) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \text{ ganzzahlig} \\ 1, & \text{wenn } x \text{ nicht ganzzahlig} \end{cases}$

(Bild B 11) hat unendlich viele Unstetigkeitsstellen. Für jede ganze Zahl x_0 gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \neq 0 = f(x_0)$.



B 11

14

Zeigen Sie, daß die Funktion

a) $y = |x|$ an der Stelle 0 stetig,

b) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 3 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$ an der Stelle 3 nicht stetig ist!

Aufgabe b 52

17 Stetigkeit in einem Intervall

Ändert man die Definition B 19 ab, indem man nur die Existenz des links- bzw. rechtsseitigen Grenzwertes von f an der Stelle x_0 fordert, so spricht man von **links-** bzw. **rechtsseitiger Stetigkeit an der Stelle x_0** , wenn f an der Stelle x_0 definiert ist und wenn gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

So ist beispielsweise die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 3 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$ an der Stelle 3

rechtsseitig stetig, denn es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \frac{7}{2} = f(3),$$

nicht linksseitig stetig, denn es ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \frac{5}{2} \neq f(3).$$

20 **DEFINITION:** Eine Funktion f ist in einem Intervall I stetig $=_{\text{Df}}$ f ist für jedes x aus I stetig.¹

21 **DEFINITION:** Eine Funktion f ist stetig $=_{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich stetig.

So sind beispielsweise alle konstanten Funktionen ($f(x) = c$ für jedes x) und auch die lineare Funktion $f(x) = x$ stetige Funktionen. Auch die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist eine stetige Funktion, denn für jedes $x_0 \neq 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0).$$

Ist eine Funktion an einer Stelle x_0 unstetig, so ist ihr Bild an dieser Stelle unterbrochen. Ist f jedoch in einem endlichen Intervall stetig, so kann man ihr Bild für dieses Intervall in einem Zuge – also ohne abzusetzen – zeichnen. Selbstverständlich kann diese Plausibilitätsbetrachtung nicht als Ersatz für die Definition der Stetigkeit betrachtet werden.

18 Sätze über stetige Funktionen

22 **SATZ:** Sind die Funktionen u und v in x_0 stetig, so sind auch die Funktionen

$$s(x) = u(x) + v(x), \quad d(x) = u(x) - v(x),$$

$$p(x) = u(x) \cdot v(x), \quad q(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{mit } v(x_0) \neq 0$$

in x_0 stetig. (Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Satz B 18.)

Wenn die Funktionen u und v in x_0 stetig sind, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = v(x_0).$$

Dann ist aber beispielsweise

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) + v(x)) = u(x_0) + v(x_0) = s(x_0).$$

Aus ist s in x_0 stetig. Analog folgt die Stetigkeit für die Funktionen d , p und q in x_0 .

¹ Ist $I = \langle a, b \rangle$ ein abgeschlossenes Intervall ($a < b$), so soll f in a rechtsseitig und in b linksseitig stetig sein.

Die Funktion $f_1(x) = x$ ist für jedes x stetig. Jede konstante Funktion ist ebenfalls für jedes x stetig. Daher sind auch die Funktionen

$$f_2(x) = cx; \quad f_3(x) = x^2 = x \cdot x; \quad f_4(x) = x^3 = x^2 \cdot x$$

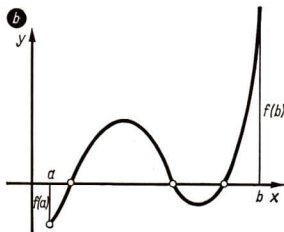
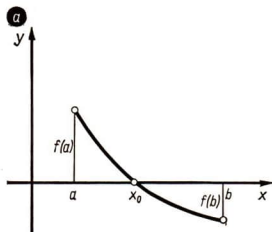
für jedes x stetig. Ebenso ist die Funktion $f_5(x) = x^3 - 5x + 1$ für jedes x stetig.

Aufgabe b 53

19

23

SATZ: Ist f eine in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion und haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so hat f in (a, b) (mindestens) eine Nullstelle, d. h., es existiert eine Zahl x_0 mit $a < x_0 < b$ und $f(x_0) = 0$ (Bild B 12).



B 12

Beweis:

Vorbemerkung: Aus dem Satz B 8 erhält man für Funktionen den folgenden Satz:

(*) Existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und ist $\begin{cases} g > 0 \\ g < 0 \end{cases}$, so gibt es eine Umgebung von x_0 derart, daß für alle $x \neq x_0$ aus dieser Umgebung gilt: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$.

Aus diesem Satz folgt für stetige Funktionen der Satz:

(**) Ist f in x_0 stetig und gilt $\begin{cases} f(x_0) > 0 \\ f(x_0) < 0 \end{cases}$, so gibt es eine Umgebung von x_0 derart, daß für jedes x aus dieser Umgebung gilt: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes B 23:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ ($a < b$, Bild B 12). Es sei M die Menge derjenigen Zahlen x aus $\langle a, b \rangle$ mit $f(x) > 0$. Diese Menge ist nicht leer, denn es gilt $f(a) > 0$. Übrigens gibt es wegen der Stetigkeit von f in $\langle a, b \rangle$ nach Satz (**) zu a benachbarte Zahlen $x > a$ mit $f(x) > 0$. Da $f(b) < 0$ ist, ist b eine obere Schranke von M . Nach Satz A 5 (\nearrow Seite 11) existiert für die nichtleere nach oben beschränkte Menge M die obere Grenze g ($a < g < b$). Wir zeigen, daß diese Zahl g Nullstelle von f ist. Da g die obere Grenze von M ist, gilt

(1) Für jedes $x \in M$ ist $x \leq g$,

(2) Jede Umgebung von g enthält wenigstens eine Zahl aus M .

Wäre nun $f(g) > 0$, so gäbe es nach Satz (**) eine Umgebung von g derart, daß für alle x aus dieser Umgebung $f(x) > 0$ gilt. Dann enthielte die Menge M aber noch Zahlen x mit $x > g$ im Widerspruch zu (1).

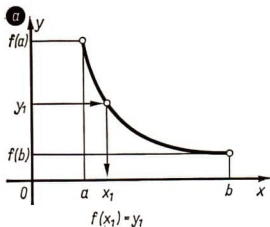
Wäre $f(g) < 0$, so gäbe es nach Satz (**) eine Umgebung von g derart, daß für alle x aus dieser Umgebung $f(x) < 0$ gilt. Da M nur solche Zahlen x enthält, für die $f(x) > 0$ ist, hätten wir eine Umgebung von g , die keine Zahl aus M enthält im Widerspruch zu (2).

Folglich gilt: $f(g) = 0$, d. h., die Funktion f hat im Intervall (a, b) eine Nullstelle.

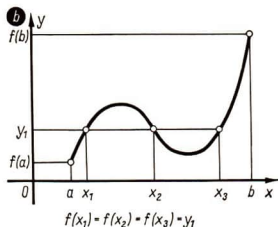
- 20 Die Funktion $f(x) = x^3 - 5x + 1$ ist stetig. Es ist $f(0,2) = 0,008$ und $f(0,3) = -0,473$. Folglich hat f im Intervall $(0, 2; 0,3)$ eine Nullstelle.

Eine Verallgemeinerung des Satzes B 23 ist der **Zwischenwertsatz**:

- 24 Ist f eine in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion und ist $f(a) \neq f(b)$, so gilt: Für jedes y mit $f(a) < y < f(b)$ oder $f(a) > y > f(b)$ existiert ein x aus (a, b) mit $f(x) = y$ (Bild B 13).



B 13



Man sagt dafür auch:

Ist f in $\langle a, b \rangle$ stetig und ist $f(a) \neq f(b)$, so nimmt f jeden zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegenden Wert an mindestens einer Stelle des Intervalls (a, b) an.

- 21 a) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist stetig. Wir betrachten das Intervall $\langle 0, b \rangle$ (b eine beliebige positive reelle Zahl). Es ist $f(0) = 0 \neq b^2 = f(b)$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz zu jeder reellen Zahl y mit $0 < y < b^2$ eine Zahl x aus $(0, b)$ mit $x^2 = y$. Es ist dies die Zahl $x = \sqrt{y}$.

- b) Bei der Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 3 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$ sind alle Zahlen y mit $\frac{5}{2} \leq y < \frac{7}{2}$ nicht Funktionswerte der Funktion. Diese Funktion ist ja auch an der Stelle 3 nicht stetig (Bild B 10).

Aufgabe b 54

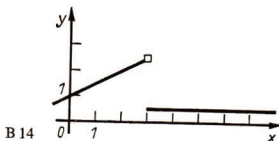
20

Ist der Wertevorrat einer in einem Intervall I definierten Funktion f beschränkt, d. h., gibt es Zahlen m und M derart, daß für alle x aus I gilt $m \leq f(x) \leq M$, so sagen wir kürzer: f ist im Intervall I beschränkt. Ist eine Funktion f in einem Intervall I beschränkt, so existiert nach Satz A 5 (Seite 11) für die Menge ihrer Funktionswerte in diesem Intervall sowohl die obere als auch die untere Grenze. Obere bzw. untere Grenze der Funktion brauchen aber nicht Funktionswerte von f in I zu sein, d. h., f braucht im Intervall I keinen größten bzw. kleinsten Funktionswert zu haben. Gibt es jedoch ein $x_0 \in I$, so daß $f(x_0)$ die

obere (untere) Grenze von f in I ist, so heißt $f(x_0)$ **Maximum (Minimum)**¹ von f in I . So ist beispielsweise die Funktion $f(x) = x$ im offenen Intervall $(1; 2)$ beschränkt. Die obere bzw. untere Grenze ihrer Funktionswerte für dieses Intervall ist 2 bzw. 1. Die Zahlen 2 und 1 sind nicht Funktionswerte von $f(x) = x$ im Intervall $(1; 2)$. Mit anderen Worten: $f(x) = x$ hat im Intervall $(1; 2)$ keinen kleinsten und keinen größten Funktionswert.

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 3 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

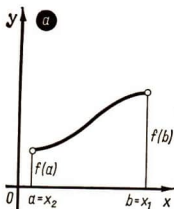


(Bild B 14) ist im Intervall $\langle 0; 5 \rangle$ beschränkt. Die untere Grenze von f im Intervall $\langle 0; 5 \rangle$ ist $\frac{1}{2}$, die obere Grenze $\frac{5}{2}$. Die Zahl $\frac{5}{2}$ ist aber nicht Funktionswert von f in $\langle 0; 5 \rangle$. f hat also im Intervall $\langle 0; 5 \rangle$ ein Minimum, aber kein Maximum.

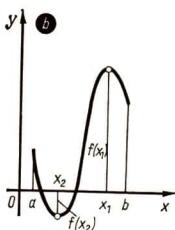
Für stetige Funktionen gilt jedoch folgender Satz:

25

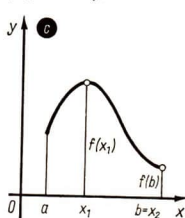
SATZ: Der Wertevorrat einer in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktion f ist beschränkt. Obere und untere Grenze des Wertevorrates sind stets Funktionswerte von f in $\langle a, b \rangle$ (Bild B 15).



$f(a)$ ist Minimum
 $f(b)$ ist Maximum



$f(x_2)$ ist Minimum
 $f(x_1)$ ist Maximum



$f(x_1)$ ist Maximum
 $f(b)$ ist Minimum

B 15

Auf den Beweis dieses Satzes verzichten wir.

Wir können diesen Satz auch folgendermaßen formulieren: Eine in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion f hat in $\langle a, b \rangle$ stets ein Maximum und ein Minimum.

Die Abgeschlossenheit des Intervalls $\langle a, b \rangle$ ist notwendig für die Gültigkeit des Satzes B 25. So ist beispielsweise die Funktion $y = \frac{1}{x}$ in $(0; 1)$ stetig, sie ist dort jedoch nicht beschränkt. Die Funktion $y = x$ ist in $(0; 1)$ stetig und beschränkt, jedoch hat sie in diesem Intervall weder ein Maximum noch ein Minimum (s. o.).

15

Ermitteln Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $y = x^2 - 4x + 1$ im Intervall $\langle 0; 5 \rangle$!

Aufgabe b 55

¹ maximum (lat.), das größte; minimum (lat.), das kleinste.

C.

Einführung in die Differentialrechnung

Seite

76 Ableitung einer Funktion

Anstieg einer Geraden (– einer Kurve in einem Punkt) · Zwei physikalische Probleme · Differenzierbarkeit · Ermittlung der 1. Ableitung · Stetigkeit und Differenzierbarkeit · Ableitung einer Summe, eines Produktes, eines Quotienten, der Potenzfunktionen $y = x^n$ (n ganz) · Ableitungen höherer Ordnung

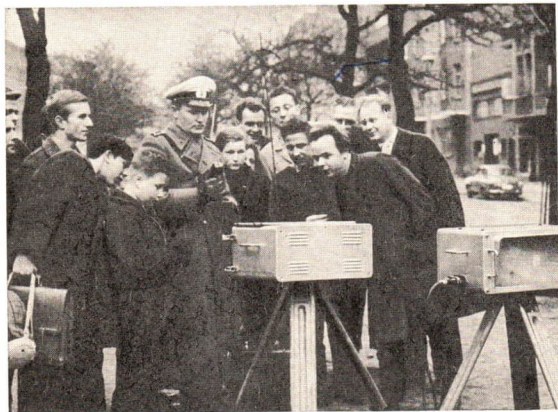
91 Rationale Funktionen

Differentiation der rat. Funktionen · Nullstellen · Zerlegen ganzer rationaler Funktionen in Linearfaktoren · Berechnung von Nullstellen · Grenzwerte von Funktionen · Verhalten im Unendlichen · Pole

107 Kurvenuntersuchungen; Extremwertaufgaben

Lokales monotonen Verhalten · Der Satz von ROLLE · Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung · Lokale Extrema · Hinreichende Kriterien · Lokale Konvexität und Konkavität · Kurvendiskussionen · Untersuchung einer gebrochenen rationalen Funktion · Extremwertaufgaben

Die Volkspolizei führt Geschwindigkeitskontrollen mit Hilfe von Radargeräten durch, wobei die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs zu einem Zeitpunkt ermittelt werden kann. Dagegen liefert die Messung der für eine bestimmte Strecke Δs benötigten Zeit Δt und die anschließende Errechnung des Quotienten $\Delta s : \Delta t$ nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit in der Zeitdifferenz Δt , denn die Bewegung eines Autos ist ungleichmäßig.

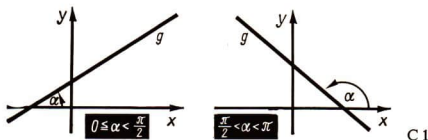


1 Anstieg einer Geraden

- ① Welche Bedeutung hat der Parameter m in der Gleichung $y = mx + b$? Wie verlaufen die Bilder der betreffenden Funktionen für $m \cong 0$?

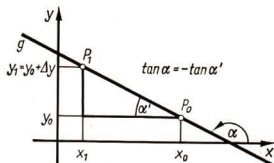
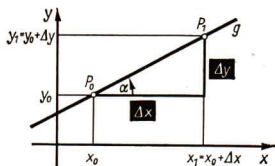
Unter dem *Anstieg* m einer Geraden g , die nicht mit der y -Achse parallel ist, versteht man den Tangens des Neigungswinkels (Bild C 1) dieser Geraden:

$$m = \tan \alpha.$$



Jede Gerade ist durch zwei ihrer Punkte, die nicht identisch sind, eindeutig bestimmt. Sind $P_0(x_0; y_0)$ und $P_1(x_1; y_1)$ ($x_0 \neq x_1$) zwei beliebige Punkte einer Geraden g , so ist deren Anstieg (Bild C 2):

$$m = \tan \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



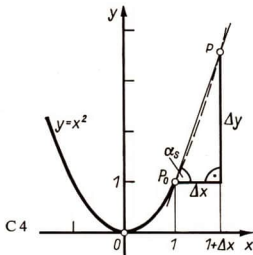
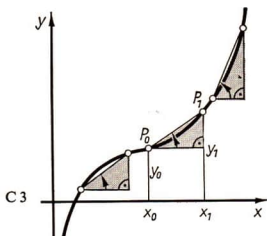
C 2

- ② Gegeben sei das Bild der Funktion $f(x) = x^2$. Berechnen Sie die Anstiege derjenigen Geraden, die durch die Punkte $P_0(1; f(1))$ und $P(1 + \Delta x; f(1 + \Delta x))$ mit $\Delta x = \pm 1; \pm 0,1; \pm 0,01; \pm 0,001$ gegeben sind!

Aufgaben c 1 bis 5

2 Anstieg einer Kurve in einem Punkt

Ist das Bild einer nicht linearen Funktion gegeben (Bild C 3), so kann man nicht mehr von *dem* Anstieg dieser Kurve sprechen.



Wir können zwar für zwei beliebig herausgegriffene Kurvenpunkte $P_0(x_0; y_0)$ und $P_1(x_1; y_1)$ mit Hilfe des Quotienten $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ den sogenannten **mittleren Anstieg** der Kurve im Intervall $\langle x_0, x_1 \rangle$, (der gleich dem Anstieg der Geraden durch P_0 und P_1 ist), berechnen, jedoch ändert sich dieser mittlere Anstieg von Intervall zu Intervall. Außerdem liefert er nur ein sehr ungenaues Bild von dem Verlauf der Kurve in dem betreffenden Intervall. Man müßte die herausgegriffenen Kurvenpunkte schon relativ dicht beieinander liegend wählen, um annähernd brauchbare Aussagen über den Verlauf der Kurve in dem betreffenden Intervall machen zu können. Es erhebt sich nun die Frage, ob man wenigstens von dem Anstieg der Kurve *in einem gegebenen Punkt* sprechen kann. Wie sollte dann aber dieser Anstieg definiert werden? Diese Frage soll hier beantwortet werden.

Jede der in Übung C 2 gegebenen Geraden P_0P ist eine Sekante der Parabel $y = x^2$ (im Bild C 4 für $\Delta x = 1$), deren Anstieg m_s wir wie folgt berechnen können:

$$\begin{aligned} m_s = \tan \alpha_s &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \frac{2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

Offenbar erhalten wir für jedes $\Delta x \neq 0$ genau eine Sekante der Parabel $y = x^2$ durch die Punkte $P_0(1; 1)$ und $P(1 + \Delta x; (1 + \Delta x)^2)$ (Bild C 5). Zu jeder dieser Sekanten, d. h. zu jedem $\Delta x \neq 0$ gehört ein eindeutig bestimmter Anstieg m_s . Die Menge D der geordneten Paare $[\Delta x; m_s]$ ($\Delta x \neq 0$) ist also eine Funktion. Diese Funktion D ist für $\Delta x = 0$ nicht definiert. Es existiert aber der Grenzwert von D an der Stelle $\Delta x = 0$, denn für $\Delta x \neq 0$ gilt

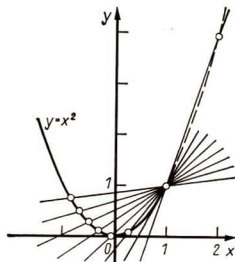
$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = D(\Delta x) = \frac{2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

und folglich

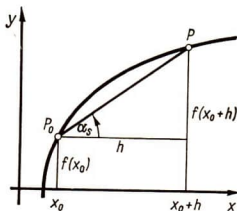
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} D(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

Welche Bedeutung hat nun dieser Grenzwert für den Verlauf der Parabel $y = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$?

- 3 Zeichnen Sie die Parabel $y = x^2$ und die Gerade durch den Punkt $P_0(1; 1)$ mit dem Anstieg $m = 2$! Überzeugen Sie sich durch Rechnung davon, daß die gezeichnete Gerade die Parabel im Punkt $P_0(1; 1)$ berührt! (Anleitung: Die Gerade, die durch den Punkt $P_0(1; 1)$ geht und deren Anstieg $m = 2$ ist, hat die Gleichung $y = 2x - 1$.)



C 5



C 6

Wir wollen nun die aufgeworfene Frage nach der Bedeutung des Grenzwertes $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} D(\Delta x)$ beantworten. Es sei das Bild einer beliebigen Funktion f , die in einem Intervall (a, b) stetig ist, gegeben.

Für jedes $h \neq 0^1$ ist durch die Kurvenpunkte

$$P_0(x_0; f(x_0)) \text{ und } P(x_0 + h; f(x_0 + h)) \quad (a < x_0 < b, a < x_0 + h < b)$$

genau eine Sekante der Kurve gegeben. Das Bild C 6 veranschaulicht dies für ein festes $h > 0$.

Für den Anstieg m_s jeder dieser Sekanten gilt

$$m_s = \tan \alpha_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

m_s ist der mittlere Anstieg der Kurve im Intervall $\langle x_0, x_0 + h \rangle$ ($h > 0$) bzw. im Intervall $\langle x_0 + h, x_0 \rangle$ ($h < 0$).

DEFINITION: Für $h \neq 0$ nennt man die Zahl

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

den zu h gehörigen *Differenzenquotienten* der Funktion f an der Stelle x_0 .²

Bei festgehaltenem x_0 ist die Menge D , die alle geordneten Paare $[h; m_s]$ ($h \neq 0, a < x_0 < b, a < x_0 + h < b$) und nur diese enthält, eine Funktion. Existiert für diese Funktion D der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} D(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m_t,$$

so nennen wir m_t den **Anstieg der gegebenen Kurve an der Stelle x_0** . Die Gerade durch P_0 mit dem Anstieg m_t heißt die **Tangente** an die Kurve im

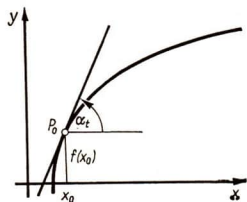
¹ Statt „ Δx “ schreibt man häufig kürzer „ h “.

² Wir setzen natürlich voraus, daß f im Intervall $\langle x_0, x_0 + h \rangle$ bzw. im Intervall $\langle x_0 + h, x_0 \rangle$ definiert ist.

Punkt P_0 (Bild C 7). Ist α_t der Neigungswinkel der Tangente, so gilt also $m_t = \tan \alpha_t$.

Mit Hilfe der Tangente können wir den Verlauf der Kurve an der betrachteten Stelle x_0 beschreiben. Während eine Sekante den Verlauf der Kurve im Intervall $\langle x_0, x_0 + h \rangle$ bzw. im Intervall $\langle x_0 + h, x_0 \rangle$ nur annähernd beschreibt, charakterisiert die Tangente den lokalen Verlauf der Kurve an der Stelle x_0 . Je größer beispielsweise der Anstieg der Kurve an der Stelle x_0 ist, desto steiler verläuft die Kurve in einer Umgebung dieser Stelle.

Demnach hat die Parabel $y = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ den Anstieg 2, bzw. die Gerade durch $P_0(1; 1)$ mit dem Anstieg 2 ist die Tangente an die Parabel an der Stelle $x_0 = 1$.



C 7

- ④ Wie ist in der Elementargeometrie eine Tangente an einen gegebenen Kreis definiert? Warum ist diese Definition für beliebige Kurven unbrauchbar?

Aufgaben c 6 bis 9



3 Zwei physikalische Probleme

Bei gewissen physikalischen Bewegungsvorgängen ist es notwendig, für jeden beliebigen Zeitpunkt die augenblickliche Geschwindigkeit des bewegten Körpers zu kennen. Was versteht man nun aber unter der *Augenblicksgeschwindigkeit* eines bewegten Körpers? Wir wollen hier der Einfachheit halber nur geradlinige Bewegungen betrachten. Erfolgt die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v , so ist unsere Frage beantwortet. Dann ist nämlich diese konstante Geschwindigkeit v auch die Augenblicksgeschwindigkeit. Bewegt sich der Körper nicht mit konstanter Geschwindigkeit, so kann man für ein Zeitintervall $\langle t_1, t_2 \rangle$ bzw. $\langle t_2, t_1 \rangle$ eine *mittlere Geschwindigkeit*

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

angeben, wobei s_1 und s_2 die zu den Zeitpunkten (Bild C 8) t_1 bzw. t_2 zurückgelegten Wege (gemessen von einem Anfangspunkt 0, an dem sich der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet) sind. Welche momentane Geschwindigkeit hat der Körper aber zum Zeitpunkt t_1 ?

Der Zusammenhang zwischen t und s sei durch die Funktion

$$s = f(t); \quad (t \geq 0)$$



C 8

(z. B. $s = f(t) = \frac{g}{2} t^2$) gegeben. Bei gegebenem t_1 ist die Menge der Paare $[\Delta t; \bar{v}]$ ($\Delta t \neq 0$) eine Funktion. Als Augenblicksgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 definieren wir den Grenzwert, falls er existiert:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = v(t_1).$$

- 1 Ist $s = f(t) = \frac{g}{2} t^2$ ($t \geq 0$), so erhält man die Augenblicksgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 folgendermaßen:

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{g}{2} [(t_1 + \Delta t)^2 - t_1^2]}{\Delta t} \quad (\Delta t \neq 0)$$

$$= \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t_1 \Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_1 + \Delta t) = \frac{g}{2} 2t_1 = gt_1.$$

(Dieses Ergebnis erhält man auch aus der Formel $v = at$ für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung.)

- 2 In einer Spule tritt eine *Induktionsspannung* auf, wenn sich der magnetische Fluß Φ innerhalb der Spule ändert. Der magnetische Fluß möge sich in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ um $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ ändern. Diese zeitliche Änderung werde durch die Funktion $\Phi = f(t)$ beschrieben. Hat die Spule nur eine Windung, so erhält man während der Zeit Δt die mittlere Spannung

$$\bar{U}_i = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = - \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} \quad (\Delta t \neq 0)$$

Die Augenblicksspannung zum Zeitpunkt t_1 wird definiert als der Grenzwert

$$U_i = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

vorausgesetzt, daß dieser Grenzwert existiert.

Aufgaben c 10 bis 13

4 Differenzierbarkeit einer Funktion

Die betrachteten Beispiele zeigen, daß wir mit Hilfe von Grenzwerten gewisser Differenzenquotienten das lokale Verhalten gewisser Funktionen beschreiben können. Begriffe wie „Anstieg einer Kurve“, „Augenblicksgeschwindigkeit“ und noch viele andere (z. B. „Wachstumsgeschwindigkeit eines Organismus“ oder „chemische Reaktionsgeschwindigkeit“ zu einem festen Zeitpunkt) werden durch solche Grenzwerte definiert. Es erscheint daher gerechtfertigt, von der konkreten Aufgabenstellung in den betrachteten Beispielen zu abstrahieren und das mathematische Problem, das in allen Beispielen das gleiche ist, weiterzuverfolgen. Dieses mathematische Problem läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

1. Gegeben ist eine Funktion f , die in einer Umgebung von x_0 definiert ist.¹
2. Bei festgehaltenem x_0 ist die Menge D , die aus allen geordneten Paaren $[h; D(h)]$ mit $D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ und nur aus diesen besteht,² eine Funktion, die in einer Umgebung von $h = 0$ mit Ausnahme dieser Stelle selbst definiert ist.³

¹ In den physikalischen Beispielen war das Argument mit „ t “ bezeichnet und die feste Stelle, an der die Funktion untersucht wurde, mit „ t_1 “.

² In den physikalischen Beispielen hatten wir „ Δt “ an Stelle von „ h “ geschrieben.

³ Da f in einer Umgebung von x_0 definiert ist, existiert stets eine Umgebung von $h = 0$, in der D definiert ist.

3. Wir fragen nach der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \rightarrow 0} D(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

DEFINITION: Die Funktion f ist an der Stelle x_0 *differenzierbar* $=_{\text{Dt}}$

(1) f ist in einer Umgebung von x_0 definiert.

(2) Der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

Dieser mit $f'(x_0)$ bezeichnete Grenzwert heißt die **1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0** .

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Die geometrische Bedeutung der 1. Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ergibt sich aus der Lerneinheit C 2 (Bild C 7). Jeder Differenzenquotient

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ($h \neq 0$) bestimmt den Anstieg einer Sekante, und zwar

derjenigen, die durch $P_0(x_0; f(x_0))$ und $P(x_0 + h; f(x_0 + h))$ festgelegt ist.

$f'(x_0)$ ist der Anstieg der *Tangente* an die Kurve im Punkt P_0 . Die Definition der Tangente an eine Kurve im Punkt P_0 können wir unter Verwendung der Definition 2 folgendermaßen formulieren:

Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann heißt die Gerade durch den Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$, deren Anstieg gleich der 1. Ableitung $f'(x_0)$ ist, die *Tangente an die Kurve* (an das Bild der Funktion) *im Punkt P_0* .

Existiert also die 1. Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 , so existiert auch stets die Tangente an die entsprechende Kurve an der Stelle x_0 .

Die 1. Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 nennt man auch den **Differentialquotienten** dieser Funktion an der Stelle x_0 . Als Bezeichnungen für die 1. Ableitung an der Stelle x_0 sind gebräuchlich:

$$f'(x_0) \text{ oder } y'|_{x=x_0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \text{ oder } \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

Oft ist es zweckmäßig, an Stelle der Funktion

$$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h \neq 0)$$

mit der Funktion

$$D^*(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \neq x_0)$$

zu arbeiten, die man erhält, wenn man $x_0 + h = x$, also $h = x - x_0$ setzt. Dann ist

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3 Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ ist $f'(1) = 2$.

5 Zeigen Sie, daß für jedes x_0 gilt:

a) Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x$ an der Stelle x_0 ist $f'(x_0) = 1$.

b) Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 ist $f'(x_0) = 2x_0$.

5 Ermittlung der 1. Ableitung

- 4 Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 7$ an der Stelle $x_0 = -1,5$ ist zu ermitteln.

Lösung:

1) Aufstellen des Differenzenquotienten:

Es ist

$$\begin{aligned}f(x_0) &= x_0^2 - 5x_0 + 7 \\f(x_0 + h) &= (x_0 + h)^2 - 5(x_0 + h) + 7 \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0 + h)^2 - 5(x_0 + h) + 7 - (x_0^2 - 5x_0 + 7)}{h} \quad (h \neq 0)\end{aligned}$$

2) Geeignete Umformung des Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 5x_0 - 5h + 7 - x_0^2 + 5x_0 - 7}{h} \\ &= \frac{2x_0h + h^2 - 5h}{h} = 2x_0 + h - 5\end{aligned}$$

3) Bestimmung des Grenzwertes des Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h - 5) \\ f'(x_0) &= 2x_0 - 5\end{aligned}$$

Ergebnis: Für $x_0 = -1,5$ erhält man $f'(-1,5) = -8$.

- 5 Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, ($x \neq 0$) an der Stelle $x_0 = \sqrt{2}$ ist zu ermitteln.

Lösung:

$$1) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} \quad (h \neq 0, x_0 + h \neq 0)$$

$$\begin{aligned}2) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{x_0 - (x_0 + h)}{x_0(x_0 + h)h} = -\frac{h}{x_0(x_0 + h)h} \\ &= -\frac{1}{x_0(x_0 + h)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x_0(x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0^2} \\ f'(x_0) &= -\frac{1}{x_0^2}\end{aligned}$$

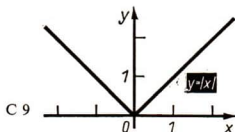
Ergebnis: Für $x_0 = \sqrt{2}$ erhält man $f'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$.

- 6 Die Funktion $f(x) = |x|$ (Bild C 9) ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Für $h \neq 0$ und $x_0 = 0$ gilt:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & \text{für } h > 0 \\ -\frac{h}{h} = -1 & \text{für } h < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \begin{cases} 1 & \text{für } h > 0 \\ -1 & \text{für } h < 0. \end{cases}$$

Für die Funktion $D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ($h \neq 0$) existieren an der Stelle 0 nur der links- und der rechtsseitige Grenzwert. Da beide voneinander verschieden sind, hat die Funktion D an der Stelle $h = 0$ keinen Grenzwert. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist daher an der Stelle 0 nicht differenzierbar.



Fordert man in der Definition C 2 nur die Existenz des rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwerts

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

so heißt f in x_0 rechtsseitig bzw. linksseitig differenzierbar.

Der entsprechende Grenzwert heißt die rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von f an der Stelle x_0 .

Dabei braucht man nur voraussetzen, daß f in x_0 und in einer rechtsseitigen bzw. linksseitigen Umgebung von x_0 definiert ist.

Demnach ist die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 sowohl rechtsseitig als auch linksseitig differenzierbar.

Die Beispiele C 4 und C 5 zeigen, daß

$$\text{die Funktion } f(x) = x^2 - 5x + 7 \quad \text{für jedes } x$$

und die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für jedes x mit $x \neq 0$ differenzierbar ist.

DEFINITION: Die Funktion f ist in dem Intervall (a, b) differenzierbar $=_{Df} f$ ist für jedes x aus (a, b) differenzierbar.¹

Ist f eine im Intervall (a, b) differenzierbare Funktion, so ist die Menge f' aller geordneten Paare $[x; f'(x)]$ mit $x \in (a, b)$ eine Funktion. Diese Funktion f' heißt die **1. Ableitung von f in (a, b)** . Man schreibt dann auch

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad [x \in (a, b), x+h \in (a, b), h \neq 0].$$

DEFINITION: Die **1. Ableitung der Funktion f** ist diejenige Funktion f' , für die gilt:

(1) Der Definitionsbereich von f' ist die Menge aller x , für die f differenzierbar ist.

(2) Für jedes x aus dem Definitionsbereich von f' gilt: $f'(x)$ ist die **1. Ableitung von f an der Stelle x** .

¹ Die Differenzierbarkeit in einem abgeschlossenen Intervall setzt an den Intervallenden die Existenz der entsprechenden einseitigen Ableitungen voraus.

Demnach ist die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 7$ die Funktion $f'(x) = 2x - 5$ (↗Beispiel C 4, Seite 82) und die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, ($x \neq 0$) die Funktion $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ($x \neq 0$) (↗Beispiel C 5, Seite 82).
An Stelle von „die Ableitung einer Funktion f bilden“ sagt man auch „die Funktion f ableiten“ oder „die Funktion f differenzieren“.

- ⑥ Welchen Anstieg hat die Parabel $y = x^2 - 5x + 7$ an der Stelle $\frac{5}{2}$? Deuten Sie das Ergebnis geometrisch!

Aufgaben c 14 bis 20

6 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

5 **SATZ:** Für jede Funktion f gilt: Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis: Es sei f eine beliebige Funktion, die an der Stelle x_0 differenzierbar ist, d. h., für diese Funktion f existiert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Wir haben zu zeigen, daß f an der Stelle x_0 stetig ist.
Für $h \neq 0$ gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Dann ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Folglich gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) = 0, \text{ also}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Diese Gleichung besagt aber, daß f an der Stelle x_0 stetig ist. Setzt man nämlich in Definition B 19 (↗Seite 69): $x = x_0 + h$ ($h \neq 0$), so ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ äquivalent mit $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$.

Der Satz C 5 ist im allgemeinen nicht umkehrbar, d. h., aus der Stetigkeit folgt im allgemeinen nicht die Differenzierbarkeit. So ist beispielsweise die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 zwar stetig (↗Übung B 14, Seite 70) aber nicht differenzierbar (↗Beispiel C 6, Seite 82).

Die Stetigkeit (einer Funktion f an der Stelle x_0) ist deshalb keine *hinreichende* Bedingung für die Differenzierbarkeit (von f in x_0).

Der Satz C 5 ist äquivalent mit:

Für jede Funktion f gilt: Ist f in x_0 nicht stetig, so ist f in x_0 nicht differenzierbar.

Die Stetigkeit (von f an der Stelle x_0) ist demnach eine *notwendige* Bedingung für die Differenzierbarkeit (von f in x_0) (↗Anhang, Seite 199).

ZUSAMMENFASSUNG:

Eine Funktion f heißt		
an der Stelle x_0 stetig,	an der Stelle x_0 differenzierbar,	im Intervall (a, b) differenzierbar,
genau dann, wenn gilt		
(1) f ist in einer Umgebung von x_0 definiert, (2) der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert, (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.	(1) f ist in einer Umgebung von x_0 definiert, (2) der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert. Die 1. Ableitung von f an der Stelle x_0 ist die Zahl $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	f ist für jedes x im Intervall $a < x < b$ differenzierbar. Die 1. Ableitung von f im Intervall (a, b) ist die Funktion f' , die alle ge- ordneten Paare $[x; f'(x)]$ mit $x \in (a, b)$ enthält.
Die Stetigkeit von f an der Stelle x_0 ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Differenzierbarkeit von f in x_0 .		

C

7 Ableitung einer Summe

Differentiationsregeln ermöglichen es, die Ableitungen gewisser Funktionen aus schon bekannten Ableitungen einfacherer Funktionen zu berechnen.

6 **SATZ:** Jede in einem Intervall¹ (a, b) konstante Funktion $f(x) = c$ ist in (a, b) differenzierbar, und es gilt für jedes x aus (a, b) : $f'(x) = 0$.

7 *Beweisen Sie den Satz C 6, und deuten Sie ihn geometrisch!*

7 **SATZ:** Sind die Funktionen u und v in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion s mit $s(x) = u(x) + v(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt:

$$s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Beweis: Nach Voraussetzung existieren

$$u'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad v'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} &= \frac{u(x_0 + h) + v(x_0 + h) - u(x_0) - v(x_0)}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

¹ Das Intervall (a, b) kann auch die ganze x -Achse sein.

Nach Satz B 18 ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \\ = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = s'(x_0)$, d. h., die Funktion s ist in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0), \quad \text{w. z. b. w.}$$

- 7 Die Funktionen $u(x) = x^2$ und $v(x) = x$ sind für jedes x differenzierbar; es ist $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = 1$ (Übung C 5, Seite 81). Dann ist auch die Funktion $s(x) = x^2 + x$ für jedes x differenzierbar, und es gilt

$$s'(x) = 2x + 1.$$

Ist u eine im Intervall (a, b) differenzierbare Funktion, so sind nach Satz C 6 und Satz C 7 auch alle Funktionen

$$f(x) = u(x) + c \quad (c \text{ beliebig reell})$$

in (a, b) differenzierbar, und es gilt für jedes x aus (a, b)

$$f'(x) = u'(x).$$

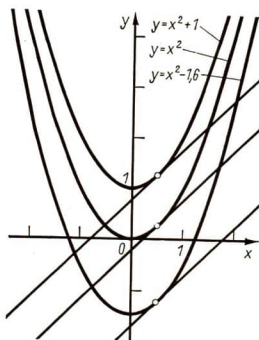
Funktionen, die sich nur um eine *additive Konstante* unterscheiden, haben also gleiche Ableitungen. Das bedeutet geometrisch (Bild C 10), daß die Bilder solcher Funktionen an einer beliebigen Stelle x_0 parallele Tangenten haben. Das ist auch anschaulich klar, denn die Bilder von Funktionen, die sich um eine additive Konstante unterscheiden, gehen durch Verschiebung längs der y -Achse auseinander hervor. Aus Satz C 7 erhält man durch vollständige Induktion den

8 **SATZ:** Sind die Funktionen f_1, f_2, \dots, f_n in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

in x_0 differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^n f'_i(x_0).$$



C 10

Aufgabe c 21

8 Ableitung eines Produktes

SATZ: Sind die Funktionen u und v in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion p mit $p(x) = u(x) \cdot v(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt: $p'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$.

Beweis: Es ist

$$\frac{p(x_0 + h) - p(x_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h) \cdot v(x_0 + h) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{h}$$

Dieser Differenzenquotient muß so umgeformt werden, daß wir die Differenzenquotienten der Funktionen u und v erhalten. Das erreichen wir, indem wir im Zähler das Produkt $u(x_0) \cdot v(x_0 + h)$ addieren und subtrahieren:

$$\begin{aligned} \frac{p(x_0 + h) - p(x_0)}{h} &= \frac{u(x_0 + h)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0 + h) + u(x_0)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} v(x_0 + h) + u(x_0) \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = u'(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} = v'(x_0).$$

Da die Funktion v in x_0 differenzierbar ist, ist sie dort auch stetig. Also ist $\lim_{h \rightarrow 0} v(x_0 + h) = v(x_0)$.

Nach Satz B 18 existiert dann auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x_0 + h) - p(x_0)}{h} = p'(x_0),$$

und es ist $p'(x_0) = u'(x_0) v(x_0) + u(x_0) v'(x_0)$, w. z. b. w.

8 Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 = x^2 \cdot x$ soll ermittelt werden. Man erhält: $f'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$.

8 Ermitteln Sie die 1. Ableitung der Funktionen $y = x^4$ und $y = x^5$!

Aus Satz C 9 erhält man unter Verwendung von Satz C 6 als Spezialfall den

10 **SATZ:** Ist v eine in x_0 differenzierbare Funktion, so ist auch die Funktion p mit $p(x) = c \cdot v(x)$ (c eine beliebige Konstante) in x_0 differenzierbar, und es ist:

$$p'(x_0) = c \cdot v'(x_0).$$

9 Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 7$ ist zu ermitteln. Nach Satz C 8 bestimmen wir die Ableitungen der Funktionen

$$u(x) = x^2, \quad v(x) = -5x \quad \text{und} \quad w(x) = 7.$$

Es ist $u'(x) = 2x$, $v'(x) = -5 \cdot 1$ (Satz C 10) und $w'(x) = 0$.

Also $f'(x) = 2x - 5$ (Beispiel C 4, Seite 82).

Aufgaben c 22 und 23

9 Ableitung eines Quotienten

SATZ: Sind die Funktionen u und v in x_0 differenzierbar und ist $v(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion $q = \frac{u}{v}$ mit $q(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt:

$$q'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Beweis: Es ist

$$(1) \quad \frac{q(x_0 + h) - q(x_0)}{h} = \frac{\frac{u(x_0 + h)}{v(x_0 + h)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h}.$$

Nach Voraussetzung ist v in x_0 differenzierbar und damit in x_0 stetig ($\lim_{h \rightarrow 0} v(x_0 + h) = v(x_0)$). Wegen $v(x_0) \neq 0$ existiert daher eine Umgebung von x_0 , so daß für alle x dieser Umgebung $v(x) \neq 0$ gilt. Somit ist (1) in einer Umgebung von $h = 0$ mit Ausnahme dieser Stelle selbst definiert. Durch Umformen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{q(x_0 + h) - q(x_0)}{h} &= \frac{u(x_0 + h) v(x_0) - v(x_0 + h) u(x_0)}{v(x_0 + h) v(x_0) h} \\ &= \frac{u(x_0 + h) v(x_0) - u(x_0) v(x_0) + u(x_0) v(x_0) - v(x_0 + h) u(x_0)}{v(x_0 + h) v(x_0) h} \\ &= \frac{1}{v(x_0 + h) v(x_0)} \left[\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} v(x_0) - u(x_0) \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \right] \end{aligned}$$

Nach Satz B 18 existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x_0 + h) - q(x_0)}{h} = q'(x_0), \text{ und es ist}$$

$$q'(x_0) = \frac{u'(x_0) v(x_0) - u(x_0) v'(x_0)}{v^2(x_0)}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Insbesondere folgt aus Satz C 11 für die 1. Ableitung der Funktion

$$q(x) = \frac{1}{v(x)}$$

an der Stelle x_0 :

$$q'(x_0) = - \frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

10 a) Von der Funktion $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 1}$ soll die 1. Ableitung gebildet werden:

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - (3x - 5) 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 10x + 3}{(x^2 + 1)^2}.$$

b) Von der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$) soll die 1. Ableitung gebildet werden.

$$f'(x) = - \frac{2x}{x^4} = - \frac{2}{x^3} \quad (x \neq 0)$$

ZUSAMMENFASSUNG

Die Regeln für die Differentiation einer Konstanten, einer Summe, eines Produktes und eines Quotienten (7 Sätze C 6, 7, 9, 10, 11) merkt man sich in folgender Kurzform:

$$(c)' = 0, \quad (c \text{ eine Konstante})$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(cv)' = cv' \quad (c \text{ eine Konstante})$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Selbstverständlich gelten sie nur für solche Argumente, für die die Funktionen u und v differenzierbar sind.

Aufgabe c 24

10 Ableitung der Potenzfunktionen $y = x^n$ (n ganzzahlig)

Aus den bisher betrachteten Beispielen entnehmen wir:

$$(x)' = 1 \quad (x^{-1})' = -x^{-2} \quad (x \neq 0)$$

$$(x^2)' = 2x \quad (x^{-2})' = -2x^{-3} \quad (x \neq 0)$$

$$(x^3)' = 3x^2.$$

SATZ: Die Potenzfunktionen $y = x^n$ mit ganzzahligen Exponenten sind für jedes x aus ihrem Definitionsbereich differenzierbar, und es gilt:

$$(x^0)' = 0$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \neq 0; \quad x \neq 0, \text{ falls } n < 0)$$

Beweis:

1) Die Funktion $y = x^0 = 1$ hat nach Satz C 6 für jedes x die Ableitung $y' = 0$.

Wir definieren die Funktion $f(x) = x^0$ auch an der Stelle 0, indem wir setzen $f(0) = 1$ (7 Beispiel B 15f).

2) Für natürliche Exponenten $n \geq 1$ beweisen wir den Satz C 12 durch vollständige Induktion über n .

a) Der Satz C 12 gilt für $n = 1$, denn

$y = x^1$ ist für jedes x differenzierbar, und es gilt

$$y' = 1 = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 \quad (\text{7 Übung C 5, Seite 81}).$$

b) Unter der Voraussetzung, daß der Satz C 12 bereits für einen beliebigen Exponenten n mit $n \geq 1$ gilt, zeigen wir, daß er dann auch für den Exponenten $n + 1$ gilt. Wir haben also zu zeigen:

Wenn für jedes x gilt: $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n \geq 1$),
so gilt auch für jedes x : $(x^{n+1})' = (n + 1)x^n$.

Aus

$$y = x^{n+1} = x^n \cdot x$$

folgt für jedes x

$$\begin{aligned}y' &= (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 \\ &= nx^n + x^n \\ &= (n+1)x^n.\end{aligned}$$

Folglich gilt der Satz C 12 für alle natürlichen Exponenten n mit $n \geq 1$.

3) Es sei $n = -m$ ($m > 0$).

Dann erhält man für die Funktion

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m} \quad (x \neq 0)$$

als Ableitung

$$y' = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \quad (x \neq 0) \quad \text{bzw.} \quad y' = -mx^{-m-1},$$

womit der Satz C 12 auch für alle negativen ganzzahligen Exponenten bewiesen ist.

Aufgaben c 25 bis 32

C

11 Ableitungen höherer Ordnung

Die 1. Ableitung f' einer Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt:

- (1) f' existiert nicht nur an der Stelle x_0 , sondern auch in einer Umgebung von x_0 ,
- (2) der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$ existiert.

Man nennt diesen Grenzwert die **Ableitung zweiter Ordnung** oder kurz die **2. Ableitung** der ursprünglichen Funktion f an der Stelle x_0 und bezeichnet ihn mit

$$f''(x_0) \quad \text{oder} \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

gelesen: „ f zwei Strich von x_0 “ bzw. „ d zwei y nach dx Quadrat an der Stelle x_0 “.

Ist die 1. Ableitung f' einer Funktion f differenzierbar,¹ so nennt man die 1. Ableitung von f' die **zweite Ableitung** oder den **zweiten Differentialquotienten** der ursprünglichen Funktion f und schreibt:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Allgemein kann man für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ die **Ableitung n -ter Ordnung** oder kurz die **n -te Ableitung** einer Funktion f durch:

$$(*) \quad y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))'$$

¹ Für jedes x aus (a, b) oder für jedes x des Definitionsbereiches von f .

definieren, vorausgesetzt, daß die Funktion f und ihre Ableitungen bis zur $(n - 1)$ -ten Ordnung differenzierbar sind.

Für $n = 3$ schreibt man: $y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$. Für Ableitungen mit einer Ordnung $n \geq 4$ verwendet man die in der Gleichung (*) schon benutzte Schreibweise, also z. B. $y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4}$ usw.

11 Die Funktion $f(x) = 4x^5 - 7x^4 + 8x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$ soll wiederholt differenziert werden, bis man eine Ableitung $f^{(n)}$ erhält, bei der für jedes x gilt: $f^{(n)}(x) = 0$.¹

$$f'(x) = 20x^4 - 28x^3 + 24x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$$

$$f''(x) = 80x^3 - 84x^2 + 48x - 2\sqrt{2}$$

$$f'''(x) = 240x^2 - 168x + 48$$

$$f^{(4)}(x) = 480x - 168$$

$$f^{(5)}(x) = 480$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

Aufgabe c 33

C

Rationale Funktionen

12 Definition der rationalen Funktionen

Die einfachsten Funktionen, die für jede reelle Zahl x definiert sind, sind die *konstanten Funktionen* und die sogenannte *identische Funktion* i , bei der für jedes x gilt: $i(x) = x$. Aus diesen Funktionen erhalten wir mit Hilfe der Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation z. B. folgende Funktionen:

die linearen Funktionen $y = mx + b$,

die quadratischen Funktionen $y = ax^2 + bx + c$,

die Potenzfunktionen $y = x^n$ (n eine natürliche Zahl).

Lassen wir noch die Division zu, so erhalten wir auch

die Potenzfunktionen $y = \frac{1}{x^n}$ ($x \neq 0$, n eine natürliche Zahl).

13

DEFINITION: Die Funktion f ist eine *ganze rationale Funktion* =_{Dr} Es gibt eine natürliche Zahl n und reelle Zahlen a_0, a_1, \dots, a_n mit $a_n \neq 0$ derart, daß für jedes x aus dem Definitionsbereich von f gilt²:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^\nu.$$

¹ In diesem Falle sagt man: „ $f^{(n)}$ verschwindet identisch“. Man beachte, daß es Funktionen gibt, die nicht beliebig oft differenzierbar sind.

² Der Definitionsbereich soll – wenn keine Einschränkung erfolgt – stets die Menge der reellen Zahlen sein.

Man kann beweisen, daß es für eine ganze rationale Funktion genau eine solche Darstellung gibt. Demnach sind zwei ganze rationale Funktionen

$$f(x) = \sum_{v=0}^n a_v x^v \text{ und } g(x) = \sum_{v=0}^m b_v x^v \text{ genau dann gleich, wenn gilt } n = m \text{ und } a_v = b_v \text{ für } v = 0, 1, \dots, n.$$

Man nennt die reellen Zahlen $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$ die **Koeffizienten** und die natürliche Zahl n den **Grad der ganzen rationalen Funktion** f . Wie man unmittelbar erkennt, erhält man jede ganze rationale Funktion in endlich vielen Schritten aus konstanten Funktionen und der identischen Funktion mit Hilfe der Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation. Lineare bzw. quadratische Funktionen sind ganze rationale Funktionen ersten bzw. zweiten Grades. Konstante Funktionen $y = c (c \neq 0)$ sind ganze rationale Funktionen mit dem Grad Null. Ganze rationale Funktionen sind z. B. die Funktionen

$$(1) \quad y = 5x^6 - \frac{3}{7}x^3 + \sqrt{2}x^2 + x - 7 \text{ und}$$

$$(2) \quad y = (3x^2 + 4x)^2 (x + 1) - 3(x - \sqrt[3]{5})^3 + 1.$$

Die Funktion (2) hat, wie man sich durch Ausrechnen der Klammern überzeugen kann, den Grad 5.

Nennen wir auch noch die Funktion f , bei der für jedes x gilt: $f(x) = 0$, eine ganze rationale Funktion (dieser Funktion wird kein Grad zugeordnet), so sind mit u und v stets auch $u + v$, $u - v$ und $u \cdot v$ ganze rationale Funktionen. So ist beispielsweise die Summe bzw. das Produkt der Funktionen

$$u(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7$$

und

$$v(x) = -2x^3 + x - 1,$$

die Funktion

$$s(x) = 5x^2 + x - 8$$

bzw. die Funktion

$$p(x) = -4x^6 - 10x^5 + 2x^4 + 17x^3 - 5x^2 - 7x + 7.$$

Hat u den Grad n und v den Grad m , so hat die Funktion $u \cdot v$ den Grad $m + n$.

14

DEFINITION: Die Funktion f ist eine *rationale Funktion* =_{Dr} Es gibt zwei ganze rationale Funktionen

$$u(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ und}$$

$$v(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0)$$

derart, daß für jedes x aus dem Definitionsbereich von f mit $v(x) \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}.$$

Rationale Funktionen sind beispielsweise die Funktionen

$$(1) \quad y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$(2) \quad y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1),$$

$$(3) \quad y = \frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}.$$

Nach der Definition C 14 ist dann auch jede ganze rationale Funktion eine rationale Funktion. Rationale Funktionen, die nicht ganz-rational sind, heißen **gebrochene rationale Funktionen**. Die gebrochene rationale Funktion

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

heißt echt (unecht) gebrochen, wenn der Grad von u kleiner

(nicht kleiner) als der Grad von v ist.

Die Funktion (3) ist eine ganze rationale Funktion, denn es gilt für jedes x :

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1} = x^2 - 3x + 4.$$

Die bereits früher behandelten Funktionen $y = \sqrt{x}$, $y = a^x$, $y = \log_a x$ und die trigonometrischen Funktionen sind keine rationalen Funktionen.

13 Differentiation der rationalen Funktionen

9 Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktionen

$$\text{a) } y = 3x^5 - 4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 1, \quad \text{b) } y = (4x^2 - 5)^3, \quad \text{c) } y = \frac{x^2 - 3x - 5}{x^2 + 1}!$$

Die konstanten Funktionen und die Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten sind an jeder Stelle x differenzierbar. Dann ist auch (nach den Sätzen C 6, 8, 10 und 12) jede ganze rationale Funktion für jedes x differenzierbar. Ist

$$(1) \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{v=0}^n a_v x^v$$

eine ganze rationale Funktion n -ten Grades ($n \geq 1$, $a_n \neq 0$), so ist ihre 1. Ableitung

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 = \sum_{v=1}^n v a_v x^{v-1}$$

eine ganze rationale Funktion $(n-1)$ -ten Grades. Infolgedessen existieren auch alle Ableitungen höherer Ordnung für jedes x .

Da jede ganze rationale Funktion für jedes x differenzierbar ist, ist sie (nach Satz C 5) auch an jeder Stelle x stetig.

Die 1. Ableitung der in Übung C 9b gegebenen Funktion läßt sich einfacher ermitteln, wenn wir den folgenden Satz verwenden.

15 **SATZ:** Ist die Funktion g in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = [g(x)]^n$ (n eine natürliche Zahl, $n \geq 1$) in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$f'(x_0) = n [g(x_0)]^{n-1} g'(x_0).$$

Kurzform:

$$(g^n)' = n \cdot g^{n-1} \cdot g'$$



Beweis: Es sei g eine in x_0 differenzierbare Funktion. Wir zeigen durch vollständige Induktion über n , daß dann auch jede Funktion $f(x) = [g(x)]^n$ in x_0 differenzierbar ist.

a) Ist $n = 1$, so gilt $f'(x_0) = g'(x_0) = 1 \cdot [g(x_0)]^{1-1} \cdot g'(x_0)$.

Wir vereinbaren (/ Hinweis auf Seite 89 im Beweis unter 1), daß für *jedes* x aus dem Definitionsbereich von g gelten soll: $[g(x)]^0 = 1$.

b) Wir haben zu zeigen:

Gilt für eine beliebige natürliche Zahl n mit $n \geq 1$ für die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = [g(x)]^n$ an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = n[g(x_0)]^{n-1} g'(x_0),$$

so ist die 1. Ableitung der Funktion $f_1(x) = [g(x)]^{n+1}$ an der Stelle x_0

$$f_1'(x_0) = (n + 1) [g(x_0)]^n g'(x_0).$$

Nun ist

$$f_1(x) = [g(x)]^{n+1} = [g(x)]^n \cdot g(x).$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme und der Voraussetzung (g ist in x_0 differenzierbar) erhält man (nach Satz C 9):

$$\begin{aligned} f_1'(x_0) &= n[g(x_0)]^{n-1} g'(x_0) \cdot g(x_0) + [g(x_0)]^n \cdot g'(x_0) \\ &= n[g(x_0)]^n g'(x_0) + [g(x_0)]^n g'(x_0) \\ &= (n + 1) [g(x_0)]^n \cdot g'(x_0), \end{aligned} \quad \text{w. z. b. w.}$$

12 Die 1. Ableitung der Funktion $y = (4x^2 - 5)^3$ ist zu ermitteln. Nach Satz C 15 erhalten wir:

$$y' = 3(4x^2 - 5)^2 \cdot 8x = 24x(4x^2 - 5)^2.$$

Da jede ganze rationale Funktion für jedes x differenzierbar ist, erhält man unter Verwendung des Satzes C 11, daß jede rationale Funktion

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (b_m \neq 0)$$

für jedes x mit $v(x) \neq 0$ differenzierbar ist und infolgedessen auch für jedes x ihres Definitionsbereiches stetig ist. **Ableitungen rationaler Funktionen sind stets wieder rationale Funktionen.**

13 Die ersten beiden Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x + 3)^2} \quad (x \neq -3)$$

sind zu ermitteln.

Man erhält

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 1)(x + 3)^2 - (x^2 + x + 1) \cdot 2(x + 3)}{(x + 3)^4} \\ &= \frac{(x + 3)[(2x + 1)(x + 3) - 2(x^2 + x + 1)]}{(x + 3)^4} = \frac{(x + 3)(5x + 1)}{(x + 3)^4}. \end{aligned}$$

Für $x \neq -3$ ist

$$f'(x) = \frac{5x + 1}{(x + 3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{5(x+3)^3 - (5x+1) \cdot 3(x+3)^2}{(x+3)^6}$$

$$= \frac{(x+3)^2 [5(x+3) - 3(5x+1)]}{(x+3)^6} = \frac{(x+3)^2 (-10x+12)}{(x+3)^6}$$

Für $x \neq -3$ ist

$$f''(x) = \frac{-10x+12}{(x+3)^4}$$

Aufgaben c 34 bis 45

14 Nullstellen rationaler Funktionen

- ⑩ Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $y = 3x^2 - \frac{1}{2}x - 1$, und zerlegen Sie $3x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ in Linearfaktoren!

▶ **DEFINITION:** x_0 ist Nullstelle der rationalen Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ =_{Dr} Es ist $u(x_0) = 0$ und $v(x_0) \neq 0$.

Demnach hat die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x-1}{x^2+1}$ die Nullstelle $x_0 = 1$, denn es ist $u(1) = 0$ und $v(1) \neq 0$.

Nach Definition C 16 genügt es, sich auf die Berechnung der Nullstellen ganzer rationaler Funktionen zu beschränken. Neben der uns schon bekannten Berechnung der Nullstellen linearer und quadratischer Funktionen können wir auch für spezielle ganze rationale Funktionen höheren Grades die Nullstellen relativ einfach berechnen.

- ⑭ Es sind die Nullstellen der Funktion $y = x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{5}x$ zu berechnen. Die Nullstellen der gegebenen Funktion sind die Lösungen der Gleichung

$$(1) \quad x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{5}x = 0.$$

Diese Gleichung ist äquivalent mit

$$(2) \quad x \left(x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} \right) = 0.$$

Aus (2) folgt

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0.$$

Die Gleichung $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0$ hat die Lösungen $\frac{3}{5}$ und -1 . Folglich hat die Gleichung (1) die Lösungen, also die gegebene Funktion die Nullstellen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_3 = -1.$$

15 Es sind die Nullstellen der Funktion $y = x^4 - 11x^2 + 18$ zu berechnen. Wir setzen $x^2 = z$ und lösen zunächst die quadratische Gleichung

$$(1) \quad z^2 - 11z + 18 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $z = 9$ und $z = 2$. Mit $x^2 = z$ erhalten wir die Gleichungen $x^2 = 9$ und $x^2 = 2$. Die Lösungen der Gleichung (1) sind dann diejenigen Zahlen x , für die

$$x^2 = 9 \quad \text{oder} \quad x^2 = 2$$

gilt. Somit erhalten wir als Lösungen:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = \sqrt{2}, \quad x_4 = -\sqrt{2}.$$

Ergebnis: Die Funktion $y = x^4 - 11x^2 + 18$ hat die Nullstellen

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = \sqrt{2}, \quad x_4 = -\sqrt{2}.$$

Uns ist bereits bekannt:

Sind x_1 und x_2 die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + px + q$, so gilt

$$f(x) = x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

d. h., die gegebene Funktion f ist das Produkt der linearen Funktionen

$$u(x) = x - x_1 \quad \text{und} \quad v(x) = x - x_2.$$

Auch bei den in den Beispielen C 14 und 15 gegebenen Funktionen existiert eine Zerlegung in Linearfaktoren. Für die Funktion

$$y = x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{5}x = x \left(x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} \right)$$

gilt wegen

$$x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = \left(x - \frac{3}{5} \right) (x + 1)$$

$$y = x \left(x - \frac{3}{5} \right) (x + 1).$$

Für die Funktion $y = x^4 - 11x^2 + 18$ erhalten wir wegen

$$z^2 - 11z + 18 = (z - 9)(z - 2) \quad \text{bzw.} \quad x^4 - 11x^2 + 18 = (x^2 - 9)(x^2 - 2)$$

die Darstellung

$$y = (x + 3)(x - 3)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Aufgaben c 46 bis 49

15 Zerlegung ganzer rationaler Funktionen in Linearfaktoren

17 **SATZ:** x_1 ist eine Nullstelle der ganzen rationalen Funktion f genau dann, wenn es eine ganze rationale Funktion f_1 gibt, so daß für jedes x gilt: $f(x) = (x - x_1)f_1(x)$.

Beweis:

a) Gibt es eine ganze rationale Funktion f_1 derart, daß für jedes x gilt

$$f(x) = (x - x_1)f_1(x),$$

so ist x_1 Nullstelle von f , denn es ist

$$f(x_1) = (x_1 - x_1) \cdot f_1(x_1) = 0.$$

b) Es sei x_1 eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

d. h., es ist

$$(1) \quad f(x_1) = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = 0.$$

Wir haben zu zeigen, daß es eine ganze rationale Funktion f_1 gibt, so daß für jedes x gilt

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x).$$

Es sei x_0 ein beliebiges Argument mit dem Funktionswert

$$(2) \quad f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0.$$

Durch Subtrahieren von (2) und (1) erhält man

$$(3) \quad f(x_0) = a_n (x_0^n - x_1^n) + a_{n-1} (x_0^{n-1} - x_1^{n-1}) + \dots + a_2 (x_0^2 - x_1^2) + a_1 (x_0 - x_1).$$

Im Kapitel A wurde auf Seite 22 gezeigt, daß für jede natürliche Zahl n und beliebige reelle Zahlen a und b gilt:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Folglich ist

$$x_0^n - x_1^n = (x_0 - x_1)(x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_1 + \dots + x_0x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$$

$$x_0^{n-1} - x_1^{n-1} = (x_0 - x_1)(x_0^{n-2} + x_0^{n-3}x_1 + \dots + x_0x_1^{n-3} + x_1^{n-2})$$

$$\vdots$$

$$x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1).$$

Damit erhält man aus (3):

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_n(x_0 - x_1)(x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_1 + \dots + x_0x_1^{n-2} + x_1^{n-1}) \\ &\quad + a_{n-1}(x_0 - x_1)(x_0^{n-2} + x_0^{n-3}x_1 + \dots + x_0x_1^{n-3} + x_1^{n-2}) \\ &\quad + \dots + a_2(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) + a_1(x_0 - x_1) \end{aligned}$$

$$f(x_0) = (x_0 - x_1)[a_n x_0^{n-1} + (a_n x_1 + a_{n-1}) x_0^{n-2} + \dots + (a_n x_1^{n-2} + a_{n-1} x_1^{n-3} + \dots + a_2) x_0 + (a_n x_1^{n-1} + a_{n-1} x_1^{n-2} + \dots + a_2 x_1 + a_1)].$$

Da wir ein beliebiges Argument x_0 gewählt hatten, gelten diese Betrachtungen für jedes x , d. h., für jedes x ist:

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x)$$

mit

$$f_1(x) = a_n x^{n-1} + (a_n x_1 + a_{n-1}) x^{n-2} + \dots + (a_n x_1^{n-1} + \dots + a_2 x_1 + a_1).$$

Nun ist f_1 eine ganze rationale Funktion, so daß die Existenz einer Funktion f_1 mit den verlangten Eigenschaften nachgewiesen ist.

Der Beweis hat außerdem gezeigt: Ist f eine ganze rationale Funktion n -ten Grades, so hat die Funktion f_1 den Grad $n - 1$, denn der Koeffizient von x^{n-1} in der Gleichung von f_1 ist a_n , und nach Voraussetzung war $a_n \neq 0$.

Durch mehrmalige Anwendung des Satzes C 17 erhält man folgende Verallgemeinerung:

18

SATZ: Sind die voneinander verschiedenen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_m Nullstellen der ganzen rationalen Funktion f , so gibt es eine ganze rationale Funktion f_m derart, daß für jedes x gilt:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) f_m(x).$$

Aus Satz C 18 folgt



SATZ: Jede ganze rationale Funktion n -ten Grades hat höchstens n voneinander verschiedene Nullstellen.

SATZ: Hat eine ganze rationale Funktion f vom Grad n genau n Nullstellen, so läßt sie sich als Produkt aus n Linearfaktoren darstellen.

Sind also x_1, x_2, \dots, x_n Nullstellen der Funktion

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

so gilt

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Man nennt x_1 eine k -fache Nullstelle der ganzen rationalen Funktion f genau dann, wenn es eine ganze rationale Funktion f_1 gibt, so daß für jedes x gilt

$$f(x) = (x - x_1)^k f_1(x) \quad \text{mit} \quad f_1(x_1) \neq 0.$$

Aufgaben c 50 bis 52

16 Berechnung von Nullstellen ganzer rationaler Funktionen

Die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

sind die Lösungen der Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Für solche Gleichungen gibt es nur für $n \leq 4$ allgemeine Lösungsformeln. Gleichungen höheren Grades werden, abgesehen von Spezialfällen, mit Hilfe gewisser Näherungsverfahren gelöst.¹ Solche Näherungsverfahren lernen wir, obwohl sie für die Praxis außerordentlich wichtig sind, hier nicht kennen. Mit Hilfe des Satzes B 23 können wir in den meisten Fällen Intervalle berechnen, in denen die Nullstellen einer gegebenen ganzen rationalen Funktion liegen (✓ Beispiel B 20). Durch Berechnung von genügend vielen Funktionswerten kann man so immer bessere Näherungswerte für die Nullstellen finden.

Wir wollen bei unseren weiteren Betrachtungen der Einfachheit halber nur solche Gleichungen dritten und höheren Grades auswählen, die wenigstens eine ganzzahlige Lösung haben, so daß wir diese relativ einfach unter Hinzuziehung des Satzes B 23 durch Probieren ermitteln können.

16

Die Funktion $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ hat drei reelle Nullstellen. Diese Nullstellen sind zu ermitteln.

Lösung: Man findet durch Probieren, daß $x_1 = 1$ eine Nullstelle von f ist, denn es gilt $f(1) = 0$. Nach Satz C 17 gibt es eine quadratische Funktion g , so daß für jedes x gilt:

$$(1) \quad f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = (x - 1)g(x).$$

¹ Bei dem heutigen Stand der Rechentechnik werden auch Gleichungen 3. und 4. Grades in den meisten Fällen mit Hilfe solcher Näherungsverfahren gelöst.

Wir können nun versuchen, noch weitere Nullstellen von f durch Probieren zu finden. Wäre uns die Funktion g bekannt, so könnten wir die restlichen Nullstellen aber ohne Schwierigkeiten ausrechnen. Für den Koeffizienten a_2 des quadratischen Gliedes der Funktion g muß gelten: $a_2 = 1$. Demnach gibt es reelle Zahlen a_1 und a_0 , so daß gilt

$$g(x) = x^2 + a_1x + a_0.$$

Dann gilt also für jedes x :

$$\begin{aligned}(x-1)g(x) &= (x-1)(x^2 + a_1x + a_0) \\ &= x^3 + (a_1-1)x^2 + (a_0-a_1)x - a_0.\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$$

erhält man

$$a_1 - 1 = \frac{1}{2}, \text{ also } a_1 = \frac{3}{2}, \text{ und}$$

$$a_0 - a_1 = -\frac{5}{2}, \text{ also } a_0 = -1.$$

Folglich ist

$$g(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - 1.$$

Die quadratische Gleichung $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$ hat die Lösungen $x = \frac{1}{2}$ und $x = -2$. Somit hat die Funktion $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ die Nullstellen:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -2.$$

Man kann die Funktion g auch mit dem folgenden bereits bekannten Algorithmus berechnen:

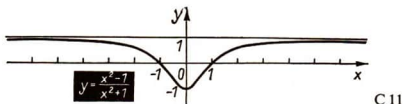
$$\begin{array}{r} (x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1) : (x-1) = x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x \\ \underline{ \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x} \\ \phantom{\frac{3}{2}x^2 - } -x + 1 \\ \underline{ \phantom{\frac{3}{2}x^2 - } -x + 1} \\ \phantom{\frac{3}{2}x^2 - } 0 \end{array}$$

⑪ Lösen Sie die Gleichung $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = 0!$

Aufgaben c 53 und 54

17 Grenzwerte von Funktionen bei unbeschränkt wachsendem (fallendem) Argument

Das Bild C 11 zeigt das Bild der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Es ist zu erkennen, daß sich das Bild der Funktion mit wachsendem (fallendem) x an die Gerade $y = 1$ anschmiegt. Diese Gerade wird aber von der Kurve nicht erreicht, denn für jedes x gilt $x^2 - 1 < x^2 + 1$ und folglich $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1$.



Was meinen wir nun aber damit, wenn wir sagen, das Bild der Funktion nähere sich der Geraden $y = 1$? Um das zu erklären, betrachten wir z. B. die unbeschränkt wachsende Folge (x_n) mit $x_n = 10^n$ ($n \geq 0$). Die Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die Folge $(f(x_n))$ mit

$$f(x_n) = \frac{10^{2n} - 1}{10^{2n} + 1} = \frac{1 - \frac{1}{10^{2n}}}{1 + \frac{1}{10^{2n}}}$$

Die Folge $\left(\frac{1}{10^{2n}}\right)$ ist als geometrische Folge, deren Quotient $q = \frac{1}{10^2} < 1$ ist, eine Nullfolge. Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{10^{2n}}}{1 + \frac{1}{10^{2n}}} = 1.$$

Nimmt man die Folge (x_n^*) mit $x_n^* = -10^n$, so erhält man entsprechend

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) = 1.$$

- ⑫ *Beweisen Sie: Ist (a_n) eine unbeschränkt wachsende (fallende) Folge, so ist $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ eine Nullfolge¹.*

Es sei nun (x_n) eine beliebige unbeschränkt wachsende Folge. Wir bilden die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(f(x_n))$ mit

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n^2 + 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{x_n}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{x_n}\right)^2}$$

¹ Da (a_n) unbeschränkt wächst (fällt), können höchstens endlich viele Glieder der Folge Null sein; diese bleiben unberücksichtigt.

Nach Übung C 12 ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ eine Nullfolge. Dann ist auch $\left(\left(\frac{1}{x_n}\right)^2\right)$ eine Nullfolge, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1.$$

Entsprechendes gilt für eine beliebige unbeschränkt fallende Folge.

21

DEFINITION: Die Funktion f hat bei unbeschränkt wachsendem x den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g = \text{Dr}$

(1) Es gibt ein Argument x_0 derart, daß f für jedes x mit $x \geq x_0$ definiert ist.

(2) Für jede unbeschränkt wachsende Folge (x_n) ($x_n \geq x_0$ für alle n) konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen g .

Entsprechend definiert man den Grenzwert einer Funktion bei unbeschränkt fallendem x .

Für die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ gilt also

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1,$$

wofür man kürzer schreibt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.

Damit erhalten wir eine Präzisierung für die oben gebrauchte Formulierung: Das Bild der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ schmiegt sich mit wachsendem bzw. fallendem x der Geraden $y = 1$ an. Wir nennen die Gerade $y = 1$ eine Asymptote dieser Kurve.

18

17 Es ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ($x \neq 0$).

Nach Übung C 12 gilt für jede unbeschränkt wachsende und für jede unbeschränkt fallende Folge (x_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

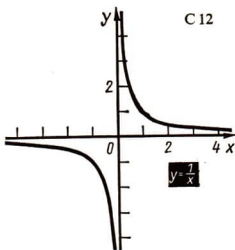
Damit ist die Behauptung bereits bewiesen.

18 Für jede Funktion $f(x) = \frac{a}{x^m}$ ($x \neq 0$, a reell, m eine natürliche Zahl, $m \geq 1$) gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

(x_n) sei eine beliebige unbeschränkt wachsende (fallende) Zahlenfolge. Die Folge der zugehörigen Funktionswerte ist $(f(x_n))$ mit

$$(x_n) = \frac{a}{x_n^m} = a \left(\frac{1}{x_n}\right)^m.$$



Nach Übung C 12 ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ eine Nullfolge. Dann ist auch $\left(\frac{1}{x_n}\right)^m$ eine Nullfolge. Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \cdot 0 = 0.$$

Da die Folge (x_n) beliebig gewählt war, gelten diese Betrachtungen für jede unbeschränkt wachsende (fallende) Folge. Also ist, wie behauptet, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a}{x^m} = 0$.

- 19 Die Funktion $f(x) = x^3$ hat bei unbeschränkt wachsendem (fallendem) x keinen Grenzwert. Ist nämlich (x_n) eine beliebige unbeschränkt wachsende Folge, so wächst auch die Folge (x_n^3) unbeschränkt. Folglich gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = +\infty.$$

Entsprechend folgt für eine beliebige unbeschränkt fallende Folge (x_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty.$$

In diesem Falle schreiben wir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

oder kürzer

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty.$$

- 13 Begründen Sie, daß für alle Funktionen $f(x) = x^m$ ($m \geq 1$, m eine natürliche Zahl) gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^m = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^m = \begin{cases} +\infty, & \text{wenn } m \text{ gerade,} \\ -\infty, & \text{wenn } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für die in Definition C 21 definierten Grenzwerte gelten ebenfalls die im Satz B 18 (/Seite 68) formulierten Grenzwertsätze.

- 20 Das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 7}{5x^2 + x - 8}$ für $x \rightarrow \pm \infty$ ist zu untersuchen. Für $x \neq 0$ ist

$$f(x) = \frac{x^2 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x^2 \left(5 + \frac{1}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}{5 + \frac{1}{x} - \frac{8}{x^2}}.$$

Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(5 + \frac{1}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = \frac{3}{5}.$$

Soll das Verhalten einer gegebenen Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$ untersucht werden, so sagt man auch kürzer: Das Verhalten der Funktion im Unendlichen ist zu untersuchen.

19 Verhalten der rationalen Funktionen im Unendlichen

1. Ganze rationale Funktionen

Für jede ganze rationale Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

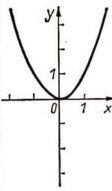
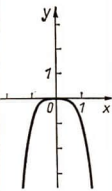
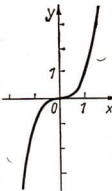
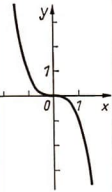
gilt für $x \neq 0$

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Nun ist

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n.$$

Das Verhalten der Funktion f im Unendlichen hängt also nur von dem Verhalten der Funktion $g(x) = x^n$ und dem Vorzeichen von a_n ab.

n	gerade		ungerade	
	$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Beispiel	$y = x^2$ 	$y = -x^4$ 	$y = x^3$ 	$y = -x^3$ 

2. Gebrochene rationale Funktionen

Für jede gebrochene rationale Funktion

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0)$$

gilt für $x \neq 0$

$$(*) \quad f(x) = \frac{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)}{x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m} \right)} = \frac{x^n u(x)}{x^m v(x)}$$

mit

$$u(x) = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \quad \text{und}$$

C

$$v(x) = b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}.$$

Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = a_n \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = b_m$$

a) $m = n$

Für $x \neq 0$ erhält man aus Gleichung (*):

$$f(x) = \frac{x^n u(x)}{x^n v(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad \text{also} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}.$$

Geometrische Deutung: Die Gerade $y = \frac{a_n}{b_m}$ ist Asymptote des Bildes der Funktion (\nearrow Bild C 11).

b) $n < m$:

Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{u(x)}{x^{m-n}v(x)} = \frac{1}{x^{m-n}} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}. \quad (m - n > 0).$$

Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^{m-n}} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = 0 \cdot \frac{a_n}{b_m} = 0.$$

Geometrische Deutung: Die x -Achse ist Asymptote des Bildes der Funktion (vgl. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^2}$).

c) $n > m$:

$$\text{Für } x \neq 0 \text{ gilt } f(x) = x^{n-m} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} \quad (n - m > 0).$$

Man erhält

$\frac{a_n}{b_m}$	$n - m$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
$\frac{a_n}{b_m} > 0$	gerade ungerade	$+\infty$ $+\infty$	$+\infty$ $-\infty$
$\frac{a_n}{b_m} < 0$	gerade ungerade	$-\infty$ $-\infty$	$-\infty$ $+\infty$

21 Das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x + 4}$ ($x \neq -4$) im Unendlichen ist zu untersuchen.

Für jedes x mit $x \neq 0$ und $x \neq -4$ gilt

$$\frac{x^2 + 2x - 5}{x + 4} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{4}{x}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}}.$$

Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \infty.$$

Wir können das Verhalten der gegebenen Funktion im Unendlichen noch genauer charakterisieren. Es gilt nämlich für jedes $x \neq -4$

$$\frac{x^2 + 2x - 5}{x + 4} = x - 2 + \frac{3}{x + 4}.$$

Dieses Ergebnis findet man, indem man die Summe $x^2 + 2x - 5$ durch die Summe $x + 4$ mit Rest dividiert. Folglich ist

$$f(x) = g(x) + r(x)$$

mit $g(x) = x - 2$ und $r(x) = \frac{3}{x + 4}$.

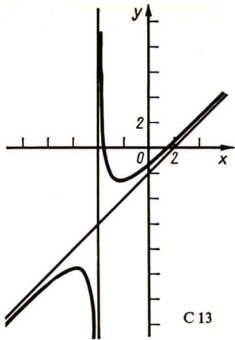
Da r eine echt gebrochene rationale Funktion ist, erhält man wegen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Das bedeutet: Für sehr große $|x|$ gilt

$$f(x) \approx x - 2.$$

Oder: Die Gerade $g(x) = x - 2$ ist Asymptote des Bildes der Funktion f (Bild C 13).



Aufgabe c 55

20 Pole rationaler Funktionen

- 14 Beschreiben Sie das Verhalten der Funktionen $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{x^2}$ in einer Umgebung der Stelle 0!

22 DEFINITION: x_0 ist ein *Pol* der rationalen Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ =_{Dr} Es ist $v(x_0) = 0$ und $u(x_0) \neq 0$.

- 22 Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1}$ hat an der Stelle 1 einen Pol. Wie verhalten sich die Funktionswerte von f bei Annäherung an diese Stelle?
Die Wertetafel

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	1,5	1,1	1,01	1,001
y	-1	-2	-10	-100	-1000	2	10	100	1000

zeigt, daß die Funktionswerte bei Annäherung an die Stelle 1 von rechts (links) offenbar unbeschränkt wachsen (fallen).

- 15 Untersuchen Sie das Verhalten der Folgen $(f(x_n)) = \left(\frac{1}{x_n - 1}\right)$, wenn

a) $x_n = 1 + \frac{1}{10^n}$, b) $x_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ ist!

Es sei nun (x_n) eine beliebige gegen 1 konvergierende Zahlenfolge, deren Glieder alle größer als 1 sind. Die Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die Folge $(f(x_n))$ mit $f(x_n) = \frac{1}{x_n - 1}$.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ist $(x_n - 1)$ eine Nullfolge. Diese Nullfolge enthält nach Voraussetzung nur positive Glieder. Dann wächst aber die Folge $\left(\frac{1}{x_n - 1}\right)$ unbeschränkt. Da (x_n) beliebig gewählt war, gelten diese Betrachtungen für jede gegen 1 konvergierende Folge, deren Glieder sämtlich größer als 1 sind. Man schreibt dafür

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x - 1} = \infty.$$

Entsprechend kann man zeigen, daß für jede gegen 1 konvergierende Folge (x_n) , deren Glieder alle kleiner als 1 sind, die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(f(x_n))$ unbeschränkt fällt. Dafür schreibt man

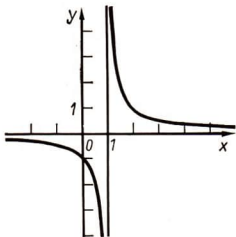
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x - 1} = -\infty.$$

Das Bild der Funktion $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ schmiegt sich (Bild C 14) bei Annäherung an die Stelle 1 der Geraden $x = 1$ an, d. h., die Gerade $x = 1$ ist eine Asymptote der Kurve.

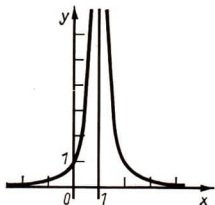
23. Untersucht man das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$, die an der Stelle 1 auch einen Pol hat (Bild C 15), in einer Umgebung dieser Stelle, so erhält man

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{(x - 1)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty.$$

Aufgabe c 56



C 14



C 15

16. Zeigen Sie entsprechend:

1. Für jede Funktion $f(x) = \frac{1}{x - x_0}$ ($x \neq x_0$) gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty.$$

2. Für jede Funktion $f(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2}$ ($x \neq x_0$) gilt:

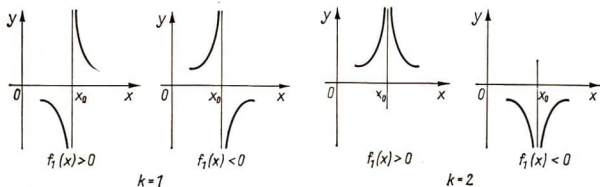
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty.$$

Ist $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ eine beliebige rationale Funktion, bei der v eine einfache bzw. zweifache Nullstelle x_0 mit $u(x_0) \neq 0$ hat, so gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)}{(x - x_0)^k v_1(x)} = \frac{1}{(x - x_0)^k} \cdot \frac{u(x)}{v_1(x)} \quad (x \neq x_0; k = 1, 2)$$

mit $u(x_0) \neq 0$ und $v_1(x_0) \neq 0$. Das Verhalten der Funktionen $g(x) = \frac{1}{(x - x_0)^k}$ ($x \neq x_0; k = 1, 2$) in einer Umgebung der Stelle x_0 kennen wir schon (Übung C 16). Damit kennen wir aber auch das Verhalten der Funktion f in einer Umgebung der Stelle x_0 , denn wir brauchen ja nur für jedes x mit $x \neq x_0$ den Funktionswert der gegebenen Funktion g mit dem betreffenden Funktionswert der Funktion $f_1(x) = \frac{u(x)}{v_1(x)}$ zu multiplizieren. Ist also $u(x_0) \neq 0$ und $v_1(x_0) \neq 0$, so gilt (wegen der Stetigkeit der Funktionen u und v_1) für jedes x mit $x \neq x_0$ in einer Umgebung von x_0 auch $f_1(x) \neq 0$, und wir erhalten die im Bild C 16 angeführten Möglichkeiten.

Hat die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ an der Stelle x_0 einen Pol, so kann man bereits aus den Vorzeichen der Funktionswerte $f(x_0 - \varepsilon)$ und $f(x_0 + \varepsilon)$ (wobei ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist) entnehmen, welche von diesen vier Möglichkeiten vorliegt. Ist x_0 eine zweifache Nullstelle der Funktion v und $u(x_0) \neq 0$, so sagen wir: f hat an der Stelle x_0 einen Pol zweiter Ordnung.



C 16



Kurvenuntersuchungen; Extremwertaufgaben

21 Lokales monotones Verhalten von Funktionen

Folgende Definition ist uns bereits bekannt: Eine Funktion f heißt in einem Intervall I , das zum Definitionsbereich von f gehört, monoton wachsend bzw. fallend genau dann, wenn für beliebige Argumente x_1 und x_2 aus diesem Inter-

vall mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$. So ist beispielsweise die Funktion $y = x^2$ für $x \leq 0$ monoton fallend und für $x \geq 0$ monoton wachsend.

Aus der Definition der Monotonie einer Funktion in einem Intervall folgt: Ist eine Funktion f in einem Intervall I monoton und x_0 eine beliebige Stelle in I , so ist f auch in jeder Umgebung von x_0 , die ganz in I liegt, monoton.

Hier soll nun der Zusammenhang zwischen dem **lokalen** Verhalten einer Funktion f und ihrer 1. Ableitung f' genauer untersucht werden.

23

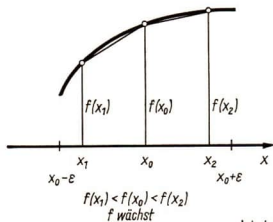
DEFINITION: Die Funktion f ist an der Stelle x_0 **lokal monoton** $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\} =_{\text{Dr}}$

1. f ist in einer Umgebung von x_0 definiert.

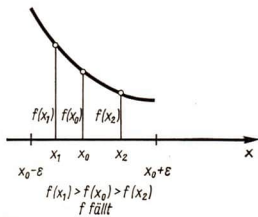
2. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für jedes x gilt:

$$\text{wenn } x_0 - \varepsilon < x < x_0, \text{ so } \begin{cases} f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

$$\text{wenn } x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \text{ so } \begin{cases} f(x) > f(x_0) \\ f(x) < f(x_0) \end{cases}$$



C 17a



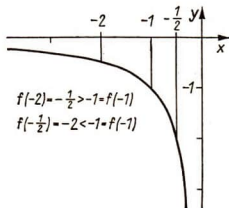
C 17b

Nach dieser Definition ist die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle 0 lokal monoton wachsend, denn für alle $x < 0$ gilt $f(x) < f(0)$ und für alle $x > 0$ gilt $f(x) > f(0)$. Das in Definition C 23 genannte ε kann also hier beliebig groß sein. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist sogar für jedes x lokal monoton wachsend. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) ist an der Stelle $x_0 = -1$ lokal monoton fallend (Bild C 18), denn für jedes x mit $x < -1$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x} > -1 = f(-1)$$

und für jedes x mit $-1 < x < 0$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x} < -1 = f(-1).$$



C 18

Folglich gibt es ein $\varepsilon > 0$ (man wähle etwa $\varepsilon = \frac{1}{2}$) derart, daß für jedes x gilt:

$$\text{wenn } -1 - \varepsilon < x < -1, \text{ so } f(x) > f(-1),$$

$$\text{wenn } -1 < x < -1 + \varepsilon, \text{ so } f(x) < f(-1),$$

d. h. aber, f ist an der Stelle $x_0 = -1$ lokal monoton fallend. Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ ist sogar für jedes } x \neq 0 \text{ lokal monoton fallend.}$$

Aus der Definition C 23 folgt: f ist an der Stelle x_0 lokal monoton wachsend genau dann, wenn die Differenzen $f(x) - f(x_0)$ und $x - x_0$ für jedes $x \neq x_0$ aus dem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ das gleiche Vorzeichen haben, d. h., wenn für jedes $x \neq x_0$ aus diesem Intervall gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0. \quad (\text{Bild C 17a})$$

Das bedeutet geometrisch, daß in einer gewissen Umgebung von x_0 alle Sekanten durch den Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ einen positiven Anstieg haben. Entsprechend erhält man: f ist an der Stelle x_0 lokal monoton fallend genau dann, wenn für jedes $x \neq x_0$ aus dem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

22 Lokale Monotonie und 1. Ableitung

Gegeben sei eine beliebige Funktion f , die an der Stelle x_0

- (1) lokal monoton wachsend und
- (2) differenzierbar ist.

Wegen (1) gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes x aus dem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $x \neq x_0$ gilt:

$$D(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Wegen (2) existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} D(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Da alle Funktionswerte der Funktion D im Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ($x \neq x_0$) positiv sind, kann der nach Voraussetzung existierende Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x)$ nicht negativ sein.¹ Folglich gilt $f'(x_0) \geq 0$.

Entsprechend erhält man für eine an der Stelle x_0 lokal monoton fallende und differenzierbare Funktion f : $f'(x_0) \leq 0$. Damit haben wir den

24

SATZ: Wenn eine Funktion f in x_0 lokal monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ und in x_0 differenzierbar ist, so gilt $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{array} \right\}$.

¹ Aus dem Satz B 7 für Zahlenfolgen folgt für Funktionen folgender Satz:

Existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und gibt es eine Umgebung von x_0 derart, daß für alle $x \neq x_0$ aus dieser Umgebung $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) gilt, so ist $g \geq 0$ ($g \leq 0$).



Ist eine Funktion in einem Intervall (a, b) monoton wachsend (fallend), so ist sie an jeder Stelle x_0 aus diesem Intervall **lokal** monoton wachsend (fallend). Aus Satz C 24 folgt also:

Wenn eine Funktion f in (a, b) monoton $\left. \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ und in (a, b) differenzierbar ist, so gilt für jedes x aus diesem Intervall $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{array} \right\}$.

23

Wir fragen nun danach, was wir über das lokale Verhalten einer Funktion f an einer Stelle x_0 aussagen können, wenn wir das Vorzeichen ihrer 1. Ableitung an dieser Stelle kennen.

25 **SATZ:** Wenn eine Funktion f in x_0 differenzierbar ist und $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{array} \right\}$ gilt, so ist f in x_0 lokal monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0.$$

Dann gibt es aber stets eine Umgebung von x_0 derart, daß für alle x aus dieser Umgebung mit $x \neq x_0$ gilt¹

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

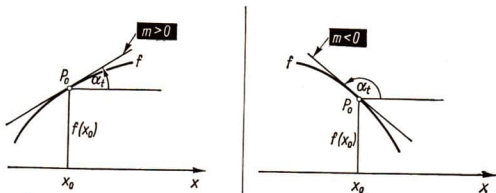
d. h. aber: f ist in x_0 lokal monoton wachsend.

Entsprechend zeigt man den zweiten Teil der Behauptung.

Der Satz C 25 ist auch anschaulich klar. Ist nämlich

$$f'(x_0) > 0 \quad | \quad f'(x_0) < 0,$$

so ist der Anstieg $m_t = \tan \alpha_t = f'(x_0)$ der Tangente an das Bild der Funktion f im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$



C 19

¹ Aus dem Satz B 8 für Zahlenfolgen folgt der Satz:

Existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und ist $g > 0$ ($g < 0$), so gibt es eine Umgebung von x_0 derart, daß für alle $x \neq x_0$ aus dieser Umgebung gilt $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

positiv

negativ

Für den Neigungswinkel α_t der Tangente (Bild C 19) gilt

$$0 < \alpha_t < \frac{\pi}{2}.$$

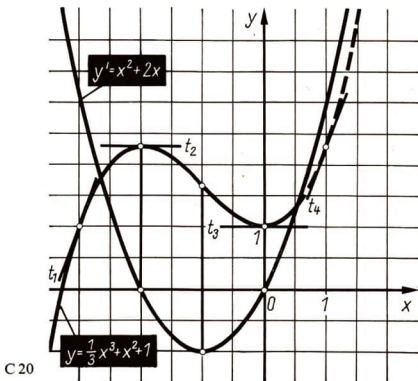
$$\frac{\pi}{2} < \alpha_t < \pi.$$

Die Kurve steigt also im Punkt P_0 . Die Kurve fällt also im Punkt P_0 .

24 Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ (Bild C 20). Ihre 1. Ableitung ist $f'(x) = x^2 + 2x = x(x + 2)$. Es ist $x(x + 2) > 0$, wenn

(1) $x > 0$ und $x > -2$, also wenn $x > 0$,(2) $x < 0$ und $x < -2$, also wenn $x < -2$.Es ist $x(x + 2) < 0$, wenn(1') $x > 0$ und $x < -2$ (für kein x möglich),(2') $x < 0$ und $x > -2$, also wenn $-2 < x < 0$.

Damit erhalten wir nach Satz C 25:

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ istfür jedes x mit $x > 0$ und für jedes x mit $x < -2$ lokal monoton wachsend undfür jedes x mit $-2 < x < 0$ lokal monoton fallend.Über die Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$, an denen die 1. Ableitung Null ist, kann noch nichts ausgesagt werden.

17 Erläutern Sie am Bild C 20 die im Beispiel C 24 durch Rechnung gefundenen Ergebnisse!

24 Der Satz von ROLLE

- 18 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $y = -x^2 + 4x$, und zeichnen Sie das Bild dieser Funktion im Intervall $-1 \leq x \leq 5$! Berechnen Sie die Nullstelle der 1. Ableitung dieser Funktion, und deuten Sie das Ergebnis geometrisch!

26

SATZ von ROLLE¹: Es sei f eine Funktion, die folgenden Bedingungen genügt:

- (1) f ist in $\langle a, b \rangle$ stetig.
- (2) f ist in $\langle a, b \rangle$ differenzierbar.
- (3) $f(a) = f(b) = 0$.

Dann gilt: Es gibt (wenigstens) eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ derart, daß $f'(\xi) = 0$ ist.

Nach dem Satz von ROLLE muß also zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion wenigstens eine Nullstelle ihrer 1. Ableitung liegen. Es wird nur behauptet, daß im Intervall $\langle a, b \rangle$ eine solche Nullstelle ξ existiert; es wird aber nichts darüber gesagt, an welcher Stelle des Intervalls diese Zahl ξ liegt. Geometrisch gedeutet besagt der Satz, daß das Bild einer stetigen Funktion mit den Nullstellen a und b , das an jeder Stelle x aus $\langle a, b \rangle$ eine Tangente hat, an wenigstens einer Stelle ξ zwischen a und b eine zur x -Achse parallele Tangente besitzt (Bild C 21).

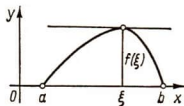
Beweis des Satzes von Rolle: Da f in $\langle a, b \rangle$ stetig ist, existiert (nach Satz B 25) in $\langle a, b \rangle$ ein größter Funktionswert M und ein kleinster Funktionswert m , so daß für jedes x aus $\langle a, b \rangle$ gilt:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

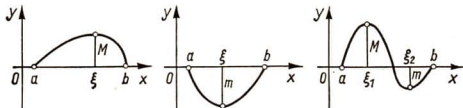
Ist $M = m$, so ist f in $\langle a, b \rangle$ konstant, und es gilt für jedes x aus $\langle a, b \rangle$:

$$f'(x) = 0.$$

Ist $M > m$, so können (wegen $f(a) = f(b) = 0$) M und m nicht beide an den Enden des Intervalls $\langle a, b \rangle$ angenommen werden, d. h., wenigstens einen der beiden Funktionswerte M oder m nimmt die Funktion f an einer Stelle ξ mit $a < \xi < b$ an (Bild C 22).



C 21



C 22

Wir betrachten den Fall, daß die Funktion f ihr Maximum M an einer Stelle ξ ($a < \xi < b$) annimmt und behaupten: $f'(\xi) = 0$. Diese Behauptung beweisen wir indirekt. Wir nehmen an, es sei $f'(\xi) \neq 0$, also entweder $f'(\xi) > 0$ oder $f'(\xi) < 0$.

- a) Ist $f'(\xi) > 0$, so ist f in ξ lokal monoton wachsend. Dann gibt es aber Zahlen x mit $x > \xi$ und $f(x) > f(\xi) = M$.
- b) Ist $f'(\xi) < 0$, so ist f in ξ lokal monoton fallend. Dann existieren Zahlen x mit $x < \xi$ und $f(x) > f(\xi) = M$.

In beiden Fällen wäre also M nicht das Maximum von f in $\langle a, b \rangle$. Folglich ist die Annahme $f'(\xi) \neq 0$ falsch, d. h., es gilt, wie behauptet, $f'(\xi) = 0$. Es existiert also ein Argument ξ mit $a < \xi < b$ und $f'(\xi) = 0$. Analog führt man den Beweis für den Fall, daß f ihr Minimum m an einer Stelle ξ mit $a < \xi < b$ annimmt.

¹ ROLLE, MICHEL, franz. Mathematiker (1652 bis 1719)

25 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

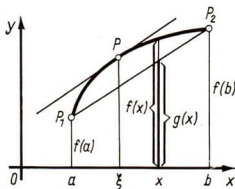
- 19 Gegeben sei das Bild der Funktion $y = \frac{1}{3}x^3$. Berechnen Sie den Anstieg m_s der Sekante, die durch die Kurvenpunkte $P_1(0; 0)$ und $P_2(3; 9)$ festgelegt ist! Stellen Sie fest, ob es im Intervall $\langle 0, 3 \rangle$ eine Stelle ξ gibt, an der die Tangente an die Kurve den gleichen Anstieg hat wie die betrachtete Sekante! Veranschaulichen Sie das Ergebnis zeichnerisch!

27 **Mittelwertsatz:** Ist eine Funktion f in $\langle a, b \rangle$ stetig und in (a, b) differenzierbar, so gibt es eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$, so daß gilt

$$(1) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Geometrisch gedeutet besagt der Satz folgendes: Das Bild einer jeden Funktion f , die in $\langle a, b \rangle$ stetig und in (a, b) differenzierbar ist, enthält mindestens einen Punkt $P(\xi; f(\xi))$, wobei $a < \xi < b$ gilt, in dem die Tangente an das Bild von f zu der Sekante durch $P_1(a; f(a))$ und $P_2(b; f(b))$ parallel ist (Bild C 23).

Der Mittelwertsatz ist ein reiner Existenzsatz, denn es wird nur die Existenz einer Zahl ξ mit den genannten Eigenschaften behauptet. Man weiß also nicht, an welcher Stelle des Intervalls (a, b) das betreffende ξ liegt. Der Name „Mittelwertsatz“ besagt nicht, daß ξ in der Mitte des Intervalls $\langle a, b \rangle$ liegt. Ist $f(a) = f(b) = 0$, so erhält man $f'(\xi) = 0$, d. h., aus dem Mittelwertsatz folgt als **Spezialfall der Satz von ROLLE**.



C 23

- 25 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$ in einem beliebigen Intervall $\langle a, b \rangle$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ mit $a < \xi < b$ und $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$, also $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2\xi$. Daraus folgt $a + b = 2\xi$ und somit
- $$\xi = \frac{a + b}{2}.$$

Das Ergebnis zeigt, daß die Zahl ξ in diesem Beispiel stets in der Mitte des Intervalls $\langle a, b \rangle$ liegt.

- 20 *Beweisen Sie, daß diese hier für die Funktion $f(x) = x^2$ gezeigte Eigenschaft für jede beliebige quadratische Funktion gilt! Benutzen Sie das Ergebnis zur Konstruktion der Tangente an die Parabel $y = x^2$ im Punkt $P(1; 1)$!*

Beweis des Mittelwertsatzes: Es sei f eine beliebige Funktion, die in $\langle a, b \rangle$ stetig und in (a, b) differenzierbar ist. Wir bilden die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) \quad (x \in \langle a, b \rangle)$$

mit

$$(*) \quad g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Dabei ist (*) die Gleichung der linearen Funktion, die durch die geordneten Paare $[a; f(a)]$ und $[b; f(b)]$ eindeutig bestimmt ist. Geometrisch gedeutet ist (*) die Gleichung der Sekante (\nearrow Bild C 23) durch die Punkte $P_1(a; f(a))$ und $P_2(b; f(b))$, und die Funktion φ gibt für jedes $x \in \langle a, b \rangle$ die Differenz zwischen der Kurvenordinate $f(x)$ und der zugehörigen Sekantenordinate $g(x)$ an.

Die Funktion φ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von ROLLE:

(1) φ ist in $\langle a, b \rangle$ stetig, denn f ist nach Voraussetzung in $\langle a, b \rangle$ stetig, und g ist als lineare Funktion überall stetig.

(2) φ ist im Intervall (a, b) differenzierbar; es ist

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(3) Es gilt $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, wie man leicht nachrechnen kann.

Nach dem Satz von ROLLE existiert eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ und $\varphi'(\xi) = 0$. Aus (2) folgt dann

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{oder} \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (a < \xi < b),$$

womit der Mittelwertsatz bewiesen ist.

Im Folgenden wird der Mittelwertsatz zum Beweis der Sätze C 28 und C 29 angewendet.

C

28

SATZ: f ist eine konstante Funktion genau dann, wenn für jedes x aus dem Definitionsbereich von f gilt: $f'(x) = 0$.

Beweis:

a) Ist f konstant, so gilt für jedes x aus dem Definitionsbereich von f : $f'(x) = 0$ (\nearrow Satz C 6).

b) Es sei f eine beliebige Funktion, für die für jedes x aus dem Definitionsbereich $f'(x) = 0$ gelte. Wir haben zu zeigen, daß f eine konstante Funktion ist.¹ Es seien a und b ($a < b$) beliebige Zahlen aus dem Definitionsbereich von f . Nach dem Mittelwertsatz existiert ein ξ mit $a < \xi < b$ und

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) (b - a).$$

Wegen $f'(\xi) = 0$ gilt

$$f(b) = f(a).$$

Aus der Gleichheit der Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ für beliebig gewählte Zahlen a und b aus dem Definitionsbereich von f folgt die Übereinstimmung der Funktionswerte für alle x aus dem Definitionsbereich von f .

Folglich ist f eine konstante Funktion,

w. z. b. w.

29

SATZ: Funktionen, deren 1. Ableitungen in einem abgeschlossenen Intervall übereinstimmen, unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Beweis:

Es seien u und v Funktionen, für die im Intervall $\langle a, b \rangle$ gilt: $u'(x) = v'(x)$. Aus u und v bilden wir die Funktion f mit

$$f(x) = u(x) - v(x).$$

¹ Es könnte doch sein, daß es noch andere uns nicht bekannte Funktionen gibt, deren Ableitung für jedes x gleich Null ist.

Nach Voraussetzung ist für jedes x aus $\langle a, b \rangle$:

$$f'(x) = u'(x) - v'(x) = 0.$$

Dann gilt nach Satz C 28: f ist in $\langle a, b \rangle$ konstant, d. h., es gibt eine Zahl c , so daß für jedes x aus $\langle a, b \rangle$ gilt

$$f(x) = c,$$

also

$$u(x) - v(x) = c,$$

w. z. b. w.

26 Lokale Extrema von Funktionen

26 Mit einem 100 m langen Zaun soll eine *möglichst große* rechteckige Fläche eingezäunt werden. Mit anderen Worten: Wir sollen von allen Rechtecken, deren Umfang 100 m beträgt, dasjenige ermitteln, dessen Flächeninhalt am größten ist, vorausgesetzt, daß ein solches Rechteck existiert. Sind x und y die Maßzahlen der Seitenlängen eines beliebigen Rechtecks, dessen Umfang 100 m beträgt, so ist

$$x + y = 50 \quad \text{bzw.} \quad y = 50 - x \quad (0 < x < 50).$$

Für die Maßzahl A des Flächeninhaltes gilt

$$A = xy = x(50 - x) = -x^2 + 50x.$$

Für jedes x mit $0 < x < 50$ erhalten wir ein eindeutig bestimmtes Rechteck, dessen Umfang 100 m beträgt. Die oben gestellte Aufgabe können wir auch wie folgt formulieren: Es ist der größte Funktionswert der Funktion

$$f(x) = -x^2 + 50x$$

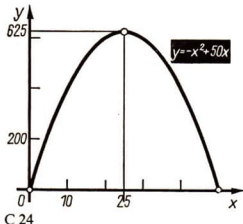
im Intervall $0 < x < 50$ zu ermitteln (Bild C 24). Wir wissen bereits, daß jede quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a < 0$ an der Stelle $x_s = -\frac{b}{2a}$ (Abszisse des Scheitels des Bildes der Funktion) einen größten Funktionswert (ein Maximum) hat. Demnach hat die Funktion $f(x) = -x^2 + 50x$ ($a = -1$; $b = 50$; $c = 0$) ihr Maximum an der Stelle

$$x_s = -\frac{50}{-2} = 25,$$

also im Intervall $0 < x < 50$. Der größte Funktionswert ist

$$f(x_s) = 25(50 - 25) = 625.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt, das wir mit einem 100 m langen Zaun einzäunen können, ist das Quadrat mit der Seitenlänge 25 m.



21 Bestimmen Sie die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = -x^2 + 50x$ an der Stelle $x_s = 25$!

Das Beispiel zeigt, welche Bedeutung der Berechnung von solchen größten (oder auch kleinsten) Funktionswerten bei gewissen Funktionen zukommt.

Aus dem Beispiel C 24 (/ Bild C 20) entnehmen wir, daß der Funktionswert der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ an der Stelle $x_1 = -2$ das Maximum dieser Funktion beispielsweise im Intervall $-3 \leq x \leq -1$ ist. Im Intervall $-3 \leq x \leq 2$ jedoch ist $f(-2)$ nicht das Maximum von f , denn es ist $f(-2) = \frac{7}{3} < \frac{23}{3} = f(2)$.

30

DEFINITION: Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases} =_{\text{Dr}}$

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes x mit $x \neq x_0$ und $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ gilt

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

Dabei setzen wir natürlich voraus, daß das Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ zum Definitionsbereich von f gehört.

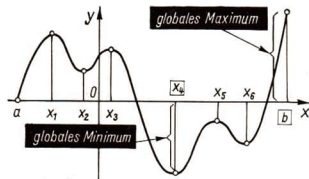
Demnach hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ an der Stelle $x_1 = -2$ ein

lokales Maximum und an der Stelle $x_2 = 0$ ein lokales Minimum (/ Beispiel C 24).

Das Bild C 25 zeigt das Bild einer Funktion, die im Intervall $\langle a, b \rangle$ definiert ist und die an den Stellen x_1, x_3 und x_5 lokale Maxima und an den Stellen x_2, x_4 und x_6 lokale Minima hat.

Lokale Maxima und lokale Minima nennt man auch **lokale Extrema** oder lokale Extremwerte. Wir heben noch einmal hervor, daß der Zusatz „lokal“ bedeuten soll, daß der betreffende Funktionswert $f(x_0)$ nur mit den Funktionswerten in einer gewissen Umgebung von x_0 verglichen wird. Das in der Lerneinheit B 20 definierte Maximum (Minimum) einer Funktion f in einem Intervall I [obere (untere) Grenze von f in I] nennt man im

Unterschied zu einem lokalen Maximum (Minimum) auch das **globale Maximum (Minimum)** von f in I . Das globale Maximum einer in einem Intervall $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktion f ist entweder das größte lokale Maximum von f in $\langle a, b \rangle$ oder einer der Funktionswerte $f(a)$ oder $f(b)$. Entsprechendes gilt für das globale Minimum (/ Bild C 25).



C 25

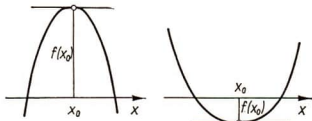
27 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

31

SATZ: Wenn eine Funktion f in x_0 ein lokales Extremum hat und in x_0 differenzierbar ist, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Geometrisch gedeutet besagt dieser Satz: Hat eine in x_0 differenzierbare Funktion f in x_0 ein lokales Extremum, so hat die Tangente an das Bild der Funktion f an dieser Stelle den Anstieg $m_t = 0$, d. h., sie verläuft parallel zur x -Achse (Bild C 26, / Beispiel C 26 und Übung C 21).

Beweis des Satzes: Die Funktion f habe an der Stelle x_0 ein lokales Maximum. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle x mit $x \neq x_0$ und $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ gilt: $f(x) < f(x_0)$. Wir nehmen an, es sei $f'(x_0) \neq 0$, also entweder $f''(x_0) > 0$ oder $f''(x_0) < 0$. Ist $f'(x_0) > 0$ [$f'(x_0) < 0$], so ist f an der Stelle x_0 monoton wachsend (fallend). Das heißt aber: In einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 , also auch im Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gibt es Zahlen x , für die $f(x) > f(x_0)$ gilt. $f(x_0)$ wäre also kein lokales Maximum. Die Annahme $f'(x_0) \neq 0$ ist damit widerlegt, es muß also gelten: $f'(x_0) = 0$.



C 26 $f(x_0)$ ist ein lokales Maximum

$f(x_0)$ ist ein lokales Minimum

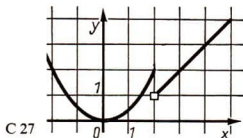
Völlig analog verläuft der Beweis, wenn f in x_0 ein lokales Minimum hat. Der Beweis hat gezeigt: Wenn für eine in x_0 differenzierbare Funktion f gilt: $f'(x_0) \neq 0$, so kann f in x_0 kein lokales Extremum haben. **Folglich ist die Bedingung $f'(x_0) = 0$ notwendig für das Vorhandensein eines lokalen Extremums von f an der Stelle x_0** (vorausgesetzt, daß f in x_0 differenzierbar ist). Diese Bedingung ist aber *nicht hinreichend*. Das heißt: Es kann $f'(x_0) = 0$ sein, ohne daß f in x_0 ein lokales Extremum hat. So hat z. B. die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 0$ kein lokales Extremum, obwohl $f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$ ist (↗ Bild C 32).

Eine Funktion kann auch an einer solchen Stelle ein lokales Extremum haben, an der die 1. Ableitung nicht existiert. So hat z. B. die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 das lokale Minimum $f(0) = 0$, obwohl sie an dieser Stelle nicht differenzierbar ist (↗ Beispiel C 6 und Bild C 9).

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \leq 2, \\ x - 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

ist an der Stelle 2 nicht stetig (an dieser Stelle also auch nicht differenzierbar). Sie hat aber an dieser Stelle ein lokales Maximum (Bild C 27), denn für jedes x aus dem Intervall $1 < x < 3$ mit $x \neq 2$ gilt $f(x) < f(2) = 2$.



C 27

- Ⓢ a) Zeichnen Sie diejenigen Tangenten an die Bilder der Funktionen $y = x^2 - 2$, $y = -x^2 + 3$, $y = x^3 + 2$ und $y = -\frac{1}{2}x^3 - 1$, die zur x -Achse parallel sind!
- b) Warum kann die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ($x \neq -1$) keine lokalen Extremwerte haben?

28 Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Wir betrachten noch einmal die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ (↗ Beispiel C 24). f hat an der Stelle $x_1 = -2$ ein lokales Maximum, deshalb gilt: $f'(x_1) = 0$. Aus dem Bild C 20 entnehmen wir, daß f' an der Stelle $x_1 = -2$ mit wachsendem x „von positiven zu negativen Werten übergeht“. Das heißt genauer: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ (etwa $\varepsilon = 1$), so daß gilt: für jedes x mit $x_1 - \varepsilon < x < x_1$ ist $f'(x) > 0$ und für jedes x mit $x_1 < x < x_1 + \varepsilon$ ist $f'(x) < 0$.

Wir sagen dafür kürzer: „ f' wechselt an der Stelle -2 das Vorzeichen.“ Geometrische Deutung: Die Tangenten an das Bild der Funktion (Bild C 28) haben im Intervall $(x_1 - \varepsilon, x_1)$ positive und im Intervall $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ negative Anstiege.

Auch an der Stelle 0, an der die Funktion f ein lokales Minimum hat, wechselt f' das Vorzeichen, und zwar geht f' an dieser Stelle mit wachsendem x von negativen zu positiven Werten über.

Diese Zusammenhänge gelten nicht nur für die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$, wie folgender Satz zeigt:

SATZ: Gelten für eine Funktion f folgende Bedingungen:

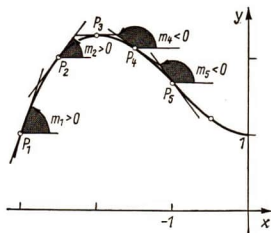
(1) f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar,

(2) $f'(x_0) = 0$,

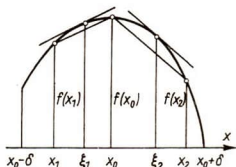
(3) f' wechselt an der Stelle x_0 das Vorzeichen,

so hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, und zwar

ein lokales Maximum, wenn f' mit wachsendem x von positiven zu negativen Werten übergeht, ein lokales Minimum, wenn f' mit wachsendem x von negativen zu positiven Werten übergeht.



C 28



C 29

Beweis:

Wir führen den Beweis für den Fall, daß f' von positiven zu negativen Werten übergeht. Nach Voraussetzung gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß gilt:

a) f ist im Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ differenzierbar

b) für jedes x mit $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ ist $f'(x) > 0$,

mit $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ ist $f'(x) < 0$.

Dann existiert aber ein δ mit $0 < \delta < \varepsilon$, so daß f im Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ stetig ist und damit die Voraussetzungen für den Mittelwertsatz erfüllt sind.

Also gibt es für jedes x aus dem Intervall $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ mit $x \neq x_0$ ein ξ mit $x < \xi < x_0$ bzw. $x_0 < \xi < x$ derart, daß gilt (Bild C 29):

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi).$$

Ist nun

$$f'(x) > 0 \text{ für } x - x_0 < 0 \text{ und } f'(x) < 0 \text{ für } x - x_0 > 0,$$

so gilt

$$(x - x_0)f'(\xi) < 0.$$

Daraus folgt: Für jedes x mit $x_0 - \delta \leq x < x_0$ oder $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ ist $f(x) - f(x_0) < 0$ bzw. $f(x) < f(x_0)$.

Das heißt aber: f hat in x_0 ein lokales Maximum, w. z. b. w.
Entsprechend verläuft der Beweis für den zweiten Teil des Satzes. Mit dem Satz C 32 haben wir nun auch eine *hinreichende Bedingung* für das Vorhandensein eines lokalen Extremums zur Verfügung.

27 Die Funktion $f(x) = x^4$, deren 1. Ableitung $f'(x) = 4x^3$ ist, hat an der Stelle 0 ein lokales Minimum, denn es gilt

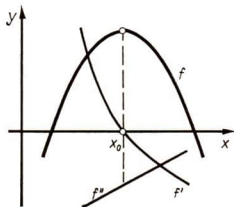
$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) < 0, \text{ wenn } x < 0, \text{ und } f'(x) > 0, \text{ wenn } x > 0.$$

29 Ein weiteres hinreichendes Kriterium für die Existenz lokaler Extremwerte

33 **SATZ:** Es sei f eine an der Stelle x_0 zweimal differenzierbare Funktion. Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, so hat f in x_0 ein lokales Extremum, und zwar
für $f''(x_0) < 0$ ein lokales Maximum,
für $f''(x_0) > 0$ ein lokales Minimum.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert $f''(x_0)$. Dann muß aber f' in einer gewissen Umgebung von x_0 existieren. Ist $f''(x_0) < 0$, so ist f' an der Stelle x_0 lokal monoton fallend. Zusammen mit $f'(x_0) = 0$ folgt: f' geht an der Stelle x_0 mit wachsendem x von positiven zu negativen Werten über. Das heißt aber (Satz C 32): f hat in x_0 ein lokales Maximum (Bild C 30). Entsprechend beweist man die zweite Behauptung.



C 30

Der Satz C 33 ist (ebenso wie auch Satz C 32¹) eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für das Vorhandensein lokaler Extrema, d. h., eine Funktion f kann auch dann ein lokales Extremum haben, wenn die Bedin-

¹ Bei den hier betrachteten rationalen Funktionen gilt auch die Umkehrung des Satzes C 32, d. h., für diese Funktionen ist Satz C 32 ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz lokaler Extrema. Daß es aber Funktionen gibt, für die die Umkehrung des Satzes C 32 nicht gilt, können wir hier nur mitteilen, denn auf die Angabe eines Beispiels, das sicher sehr kompliziert sein würde, müssen wir verzichten.

gungen des Satzes C 33 nicht erfüllt sind. So hat ja die Funktion $f(x) = x^4$ an der Stelle 0 ein lokales Minimum, obwohl $f''(0) = 0$ ist. Dieses Beispiel zeigt, daß der Satz C 32 zwar umständlicher in seiner Handhabung als der Satz C 33 ist, dafür aber wirksamer, denn mit dem Satz C 32 konnten wir sofort entscheiden, daß $f(x) = x^4$ an der Stelle 0 ein lokales Minimum hat.

28

Die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sind zu ermitteln. Nach Satz C 31 kann die Funktion nur an solchen Stellen lokale Extremwerte haben, an denen die 1. Ableitung Null ist. Wir berechnen also zunächst die Nullstellen der 1. Ableitung

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

und erhalten

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1.$$

Wir prüfen nach, ob die im Satz C 32 formulierte hinreichende Bedingung erfüllt ist, ob also f' an einer dieser Stellen das Vorzeichen wechselt. Da $(1+x^2)^2$ stets positiv ist, brauchen wir nur festzustellen, für welche x der Zähler $1-x^2$ das Vorzeichen wechselt.

$$1-x^2 > 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad |x| < 1 \quad (-1 < x < 1),$$

$$1-x^2 < 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad |x| > 1 \quad (x > 1 \quad \text{oder} \quad x < -1).$$

Damit erhalten wir:

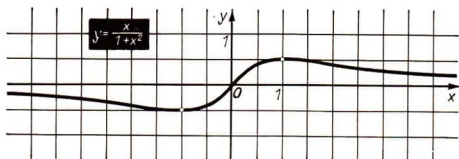
$$(1) \quad f'(1) = 0, \quad f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad -1 < x < 1, \\ f'(x) < 0 \quad \text{für} \quad x > 1.$$

Folglich hat f an der Stelle 1 ein lokales Maximum.

$$(2) \quad f'(-1) = 0, \quad f'(x) < 0 \quad \text{für} \quad x < -1, \\ f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad -1 < x < 1.$$

Folglich hat f an der Stelle -1 ein lokales Minimum.

Ergebnis: Das lokale Maximum der Funktion f ist $f(1) = \frac{1}{2}$, und das lokale Minimum der Funktion f ist $f(-1) = -\frac{1}{2}$ (Bild C 31).



C 31

Verwenden wir als hinreichendes Kriterium den Satz C 33, so haben wir zunächst die 2. Ableitung der Funktion f zu bilden. Es ist

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

bzw.

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)[-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)]}{(1+x^2)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3}$$

Man erhält

$$f''(-1) = \frac{-2+6}{8} > 0, \quad f''(1) = \frac{2-6}{8} < 0,$$

womit die oben gefundenen Ergebnisse bestätigt werden.

ZUSAMMENFASSUNG:

Es sei f eine in x_0 differenzierbare Funktion. Damit f in x_0 ein lokales Extremum annimmt, ist

notwendig (aber nicht hinreichend): $f'(x_0) = 0$

hinreichend (aber nicht notwendig):

a) $f'(x_0) = 0$ und f' wechselt in x_0 das Vorzeichen (unter der Voraussetzung, daß f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar ist).

b) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ (unter der Voraussetzung, daß f in x_0 zweimal differenzierbar ist).

	x	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x_0)$	Beispiel und Veranschaulichung
Fall 1	$x_0 - \varepsilon < x < x_0$	pos.		lok. Max.	
	x_0	0	neg.		
	$x_0 < x < x_0 + \varepsilon$	neg.			
Fall 2	$x_0 - \varepsilon < x < x_0$	neg.		lok. Min.	
	x_0	0	pos.		
	$x_0 < x < x_0 + \varepsilon$	pos.			

Um die lokalen Extremwerte einer Funktion f in einem Intervall $\langle a, b \rangle$ zu ermitteln, gehen wir folgendermaßen vor:

- Wir bilden die 1. Ableitung f' (und gegebenenfalls auch f'').
- Wir berechnen die Nullstellen von f' in $\langle a, b \rangle$.
- Für jede dieser Nullstellen entscheiden wir (mit Satz C 32 oder Satz C 33), ob f dort ein lokales Extremum hat.
- Wir stellen fest, ob f an einer eventuell vorhandenen Stelle im Inneren von $\langle a, b \rangle$, an der f nicht differenzierbar oder nicht stetig ist, ein lokales Extremum annimmt. Sollen die globalen Extremwerte einer in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktion berechnet werden, sind die gefundenen lokalen Extrema noch mit den Funktionswerten $f(a)$ bzw. $f(b)$ zu vergleichen.

30 Lokale Konvexität und Konkavität

Das Bild C 32 zeigt das Bild der Funktion $f(x) = x^3$. An den Stellen 1 und -1 sind die Tangenten an die Kurve gezeichnet. Aus der Abbildung entnehmen wir, daß in einer gewissen Umgebung der Stelle 1 alle Punkte der Kurve mit Ausnahme des Punktes P_1 oberhalb und in einer gewissen Umgebung der Stelle -1 alle Kurvenpunkte außer P_2 unterhalb der entsprechenden Tangente liegen. Dafür sagt man auch: Das Bild der Funktion $f(x) = x^3$ ist an der Stelle $x_1 = 1$ ($x_2 = -1$) „nach unten (oben) gewölbt“. Für die Stelle 0 läßt sich eine solche Aussage nicht machen, denn in jeder Umgebung von 0 gibt es Kurvenpunkte, die oberhalb, und auch solche, die unterhalb der Tangente an der Stelle 0 liegen.

Wie kann man nun entscheiden, wie eine gegebene Kurve an einer gegebenen Stelle x_0 „gewölbt“ ist?

Die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$. Es sei h eine beliebige positive Zahl mit $h < 1$. Dann ist

$$f'(1-h) = 3(1-h)^2 = 3(1-2h+h^2),$$

$$f'(1+h) = 3(1+h)^2 = 3(1+2h+h^2).$$

Also gilt

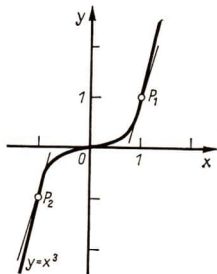
$$f'(1-h) < f'(1+h),$$

d. h.: f' ist an der Stelle 1 lokal monoton wachsend.

Entsprechend erhält man:

$$f'(-1-h) > f'(-1+h).$$

Folglich ist f' an der Stelle -1 lokal monoton fallend.



C 32

34

DEFINITION: Die in einer Umgebung von x_0 differenzierbare Funktion f heißt in x_0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokal konvex} \\ \text{lokal konkav} \end{array} \right\}$ =_{Def} f' ist in x_0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokal monoton wachsend} \\ \text{lokal monoton fallend} \end{array} \right\}$.

Ist f in x_0 lokal konvex (konkav), so sagt man auch, daß das Bild von f an der Stelle x_0 „konvex (konkav) gekrümmt“ ist. Wir wollen nun zunächst zeigen, daß wir mit dieser Definition gerade das treffen, was wir in dem einleitenden Beispiel anschaulich erarbeitet haben. Wir wollen also zeigen: Wenn f in x_0 lokal konvex (konkav) ist, so gibt es eine Umgebung von x_0 , in der alle Punkte des Bildes von f mit Ausnahme des Punktes $P_0(x_0; f(x_0))$ oberhalb (unterhalb) der Tangente liegen, deren Berührungspunkt die Abszisse x_0 hat. Wir beschränken uns auf eine in x_0 lokal konvexe Funktion (Bild C 33). Nach Voraussetzung ist f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und f' in x_0 lokal monoton wachsend. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß f in $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ stetig ist und für jedes x gilt:

(1) wenn $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, so $f'(x) < f'(x_0)$,

(2) wenn $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, so $f'(x) > f'(x_0)$.

$f'(x_0)$ ist der Anstieg der Tangente an das Bild von f an der Stelle x_0 . Wir be-

trachten eine beliebige Stelle x im Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $x \neq x_0$. Ist $g(x)$ die Tangentenordinate an dieser Stelle x , so erhält man (Bild C 33):

$$f'(x_0) = \frac{g(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es für jedes x aus dem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $x \neq x_0$ ein ξ mit $x < \xi < x_0$ bzw. $x_0 < \xi < x$ derart, daß

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

gilt. Ist $x < \xi < x_0$, so ist nach (1):

$f'(\xi) < f'(x_0)$, also

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{g(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da $x < x_0$, also $x - x_0 < 0$, folgt daraus:

$$f(x) - f(x_0) > g(x) - f(x_0)$$

bzw.

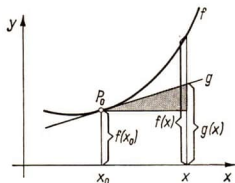
$$f(x) > g(x).$$

Ist $x_0 < \xi < x$, so ist nach (2): $f'(\xi) > f'(x_0)$, also

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{g(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und damit

$$f(x) > g(x).$$



C 33

C

29

Die Funktion $f(x) = x^3$ ist für jedes x mit $x > 0$ ($x < 0$) lokal konvex (konkav), denn die 1. Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist für jedes x mit $x > 0$ ($x < 0$) lokal monoton wachsend (fallend).

31 Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung einer Funktion

35

SATZ: Es sei f eine an der Stelle x_0 zweimal differenzierbare Funktion. Wenn $\begin{cases} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ ist, so ist f in x_0 $\begin{cases} \text{lokal konvex} \\ \text{lokal konkav} \end{cases}$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist f in x_0 zweimal differenzierbar. Folglich existiert f' in einer Umgebung von x_0 . Ist $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), so ist (nach Satz C 25) f' in x_0 lokal monoton wachsend (fallend) und damit f in x_0 lokal konvex (konkav),
w. z. b. w.

- 30 Die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ (/ Beispiel C 24, Bild C 20) ist an jeder Stelle x mit $x > -1$ ($x < -1$) lokal konvex (konkav), denn es ist $f''(x) = 2x + 2$ und folglich

$$f''(x) > 0, \text{ wenn } x > -1 \quad (f''(x) < 0, \text{ wenn } x < -1).$$

Der Satz C 35 liefert ein *hinreichendes Kriterium* für die lokale Konvexität (Konkavität) einer Funktion. Die Bedingung $f''(x_0) \neq 0$ ist aber *nicht notwendig*, denn bei der Funktion $f(x) = x^4$, die an der Stelle 0 lokal konvex ist, gilt $f''(0) = 0$. Die geometrische Bedeutung des Vorzeichens der 1. Ableitung einer gegebenen Funktion kennen wir schon. Jetzt sehen wir auch, welche geometrische Bedeutung das Vorzeichen der 2. Ableitung einer Funktion hat. Ist $f''(x_0) \neq 0$, so ist das Bild von f an der Stelle x_0 konvex oder konkav gekrümmt. Es bleibt allerdings noch der Fall $f''(x_0) = 0$ offen.

Das Beispiel C 30 zeigt, daß das Bild der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ an

der Stelle $x_0 = -1$ mit wachsendem x von einer konkaven in eine konvexe Krümmung übergeht, oder mit anderen Worten: Der Punkt $P_0(-1; f(-1))$ trennt den konkav gekrümmten von dem konvex gekrümmten Teil der Kurve. An dieser Stelle hat die 1. Ableitung $f'(x) = x^2 + 2x$ ein lokales Minimum, d. h., an dieser Stelle ist der Anstieg der Kurve kleiner als an allen benachbarten Stellen (/ Bild C 20). Für die 2. Ableitung $f''(x) = 2x + 2$ gilt dann $f''(-1) = 0$.

DEFINITION: Die in einer Umgebung von x_0 differenzierbare Funktion f hat an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt* =_{Def} f' hat in x_0 ein lokales Extremum.

Aus den Sätzen C 31, 32 und 33 erhalten wir unmittelbar folgende Bedingungen für Wendepunkte (Bild C 34): Es sei f in x_0 zweimal (bzw. dreimal) differenzierbar. Damit f in x_0 einen Wendepunkt hat, ist

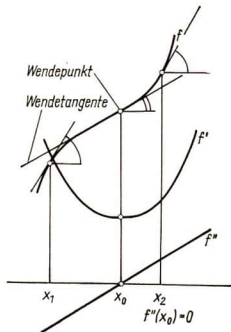
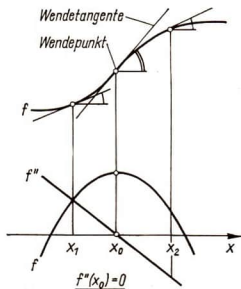
notwendig (aber nicht hinreichend):

$$f''(x_0) = 0,$$

hinreichend (aber nicht notwendig):

a) $f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt in x_0 das Vorzeichen (unter der Voraussetzung, daß f'' in einer Umgebung von x_0 existiert).

b) $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.



C 34

23) Begründen Sie folgende Aussagen:

1) Hat f in x_0 einen Wendepunkt, so trennt der Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ stets einen konkav gekrümmten von einem konvex gekrümmten Teil des Bildes von f !

2) Ist $P_0(x_0; f(x_0))$ Wendepunkt einer Kurve, so durchsetzt die Tangente in P_0 die Kurve an dieser Stelle.

24) Wie entscheiden Sie, daß die Funktion $f(x) = x^5$ an der Stelle 0 einen Wendepunkt hat?

Die Tangente in einem Wendepunkt einer Kurve heißt **Wendetangente**. Hat f in x_0 einen Wendepunkt und gilt $f'(x_0) = 0$, so verläuft die Wendetangente parallel zur x -Achse. Man spricht dann von einem Wendepunkt mit **horizontaler Wendetangente** (z. B. $y = x^3$ und $y = -x^3$).

Aufgaben c 57 bis 60

32 Untersuchung von Funktionen, Kurvendiskussionen

Um das Verhalten einer Funktion zu veranschaulichen, zeichnet man meist ihr Bild in ein kartesisches Koordinatensystem. Eine Hilfe hierbei ist die Berechnung gewisser charakteristischer Stellen einer gegebenen Funktion. Mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln können wir für eine gegebene rationale Funktion u. a. lokale Extremwerte, Wendepunkte, Nullstellen und Pole berechnen. Außerdem können wir das Verhalten der Funktion im Unendlichen ermitteln.

31) Die Nullstellen, die lokalen Extrema und die Wendepunkte der Funktion $f(x) = \frac{1}{6}(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5)$ sind zu berechnen und ihr Bild im Intervall $\langle -3; 2 \rangle$ zu zeichnen.

1) Nullstellen

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = 0.$$

Durch Probieren erhalten wir die Lösung $x_1 = 1$. Nun gilt

$$(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5) : (x - 1) = 3x^3 + 7x^2 - 5x - 5,$$

also

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = (x - 1)(3x^3 + 7x^2 - 5x - 5).$$

Wie man durch erneutes Probieren findet, ist $x_2 = 1$ eine Lösung der Gleichung

$$3x^3 + 7x^2 - 5x - 5 = 0.$$

Es ist

$$(3x^3 + 7x^2 - 5x - 5) : (x - 1) = 3x^2 + 10x + 5.$$

Die Gleichung $3x^2 + 10x + 5 = 0$ hat die Lösungen

$$x_3 = \frac{1}{3}(-5 + \sqrt{10}) \approx -0,61 \quad \text{und} \quad x_4 = \frac{1}{3}(-5 - \sqrt{10}) \approx -2,72.$$

Folglich hat f die Nullstellen $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 \approx -0,61$, $x_4 \approx -2,72$.

2) Lokale Extrema

Wir bilden die ersten beiden Ableitungen von f und erhalten

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{6}(12x^3 + 12x^2 - 24x) = 2(x^3 + x^2 - 2x) \\ &= 2x(x^2 + x - 2) \\ f''(x) &= 2(3x^2 + 2x - 2).\end{aligned}$$

Die Funktion f kann nur an solchen Stellen lokale Extrema haben, an denen die 1. Ableitung gleich Null ist. Also berechnen wir die Nullstellen der 1. Ableitung, d. h., wir lösen die Gleichung

$$x(x^2 + x - 2) = 0.$$

Als Lösungen erhalten wir: $x_5 = 0$, $x_6 = 1$ und $x_7 = -2$.

Nun ist: $f''(0) < 0$, $f''(1) > 0$ und $f''(-2) > 0$.

Folglich hat f an der Stelle 0 ein lokales Maximum und an den Stellen 1 und -2

lokale Minima. Die Funktionswerte für diese Zahlen sind: $f(0) = \frac{5}{6}$, $f(1) = 0$ und $f(-2) = -4,5$.

Ergebnis:

lokales Maximum: $x_5 = 0$, $f(x_5) = \frac{5}{6}$

lokale Minima: $x_6 = 1$, $f(x_6) = 0$ und $x_7 = -2$, $f(x_7) = -4,5$

3) Wendepunkte

Die Funktion f kann nur an solchen Stellen Wendepunkte haben, an denen die 2. Ableitung von f gleich Null ist. Wir berechnen also die Nullstellen der 2. Ableitung, d. h., wir lösen die Gleichung

$$3x^2 + 2x - 2 = 0$$

und erhalten

$$x_8 \approx 0,55 \text{ und } x_9 \approx -1,22.$$

Die zugehörigen Funktionswerte sind

$$f(x_8) \approx 0,39 \text{ bzw. } f(x_9) \approx -2,26.$$

Für die 3. Ableitung

$$f'''(x) = 2(6x + 2)$$

gilt

$$f'''(x_8) > 0 \text{ bzw. } f'''(x_9) < 0.$$

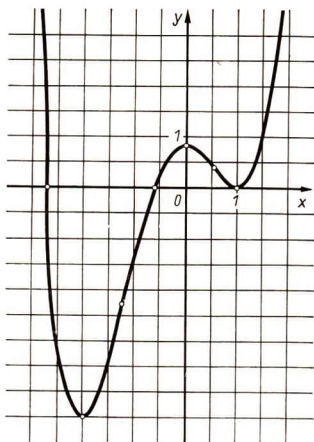
Folglich hat f an den Stellen x_8 und x_9 jeweils einen Wendepunkt.

4) Bild der Funktion

Wir berechnen noch die Funktionswerte an den Stellen 2 und -3 und erhalten

$$f(2) \approx 6,2 \text{ und } f(-3) \approx 5,3.$$

C 35



Mit den gefundenen Ergebnissen läßt sich das Bild von f schon recht genau zeichnen (Bild C 35). Da f an der Stelle 1 das lokale Minimum $f(1) = 0$ hat, muß die Kurve die x -Achse an dieser Stelle berühren.

Bemerkung über die geometrische Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle.

Hat die ganze rationale Funktion f die k -fache Nullstelle x_0 , so gibt es eine ganze rationale Funktion g derart, daß für jedes x gilt

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x) \quad \text{mit} \quad g(x_0) \neq 0.$$

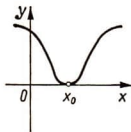
Durch Differentiation erhält man

$$f'(x) = k(x - x_0)^{k-1} g(x) + (x - x_0)^k g'(x) = (x - x_0)^{k-1} [kg(x) + (x - x_0)g'(x)],$$

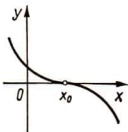
woraus man erkennt, daß x_0 eine $(k - 1)$ -fache Nullstelle der 1. Ableitung f' ist.

Ist x_0 beispielsweise eine zweifache Nullstelle von f , so ist x_0 einfache Nullstelle von f' .

Folglich gilt $f''(x_0) \neq 0$, d. h. aber: f hat an der Stelle x_0 ein lokales Extremum. Das Bild von f *berührt* an dieser Stelle die x -Achse (Bild C 36). Ist x_0 z. B. eine dreifache Nullstelle von f , so ist x_0 eine einfache Nullstelle von f'' . Folglich gilt $f'''(x_0) \neq 0$, d. h. aber: f hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt. Dann schneidet die Kurve an der Stelle x_0 die x -Achse (Bild C 37).



C 36



C 37

Aufgaben c 61 bis 68

33 Untersuchung einer gebrochenen rationalen Funktion

32 Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4}$ ist auf Nullstellen, Pole, lokale Extrema und Wendepunkte zu untersuchen. Ferner ist ihr Verhalten im Unendlichen zu ermitteln und ihr Bild im Intervall $\langle -4; 7 \rangle$ zu zeichnen.

1) Verhalten im Unendlichen

Für $x \neq 0$ ist

$$f(x) = \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}.$$

Demnach erhält man

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1.$$

Geometrische Deutung: Das Bild von f hat die Gerade $y = 1$ als Asymptote.

2) Nullstellen, Pole

Wir berechnen die Nullstellen der Funktionen

$$u(x) = x^2 - 1 \quad \text{und} \quad v(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

u hat die Nullstellen: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$,

v hat die zweifache Nullstelle $x_3 = 2$.

Folgerung: a) f hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$,

b) f hat an der Stelle 2 einen Pol (gerader Ordnung).

Es ist

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \quad (\text{Übung C 16}).$$

Für alle x mit $x \neq 2$ und $x > 1$ ist $x^2 - 1 > 0$. Folglich ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty.$$

Geometrische Deutung: Das Bild der Funktion f hat die Gerade $x = 2$ als Asymptote.

3) Lokale Extrema

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)^2 - (x^2-1)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)[2x(x-2) - 2(x^2-1)]}{(x-2)^4}$$

Für alle $x \neq 2$ ist¹

$$f'(x) = \frac{2-4x}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4(x-2)^3 - (2-4x)3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{(x-2)^2[-4(x-2) - 3(2-4x)]}{(x-2)^6}$$

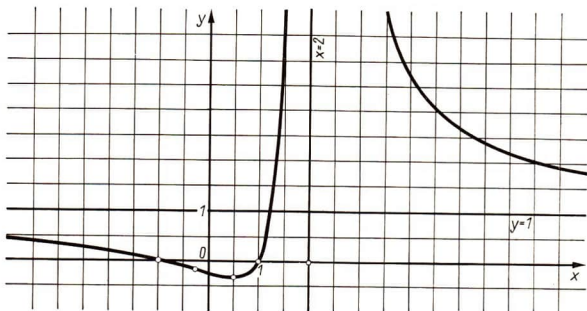
Für $x \neq 2$ ist also

$$f''(x) = \frac{8x+2}{(x-2)^4}.$$

Nun ist

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Folglich hat f das lokale Minimum $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$.



C 38

¹ An der Stelle 2 kann f weder einen Extremwert noch einen Wendepunkt haben, da f an dieser Stelle nicht definiert ist.

4) Wendepunkte

Es ist

$$f''\left(-\frac{1}{4}\right) = 0, \quad f''(x) \begin{cases} < 0, & \text{wenn } x < -\frac{1}{4} \\ > 0, & \text{wenn } -\frac{1}{4} < x < 2. \end{cases}$$

Folglich hat f an der Stelle $x_5 = -\frac{1}{4}$ einen Wendepunkt. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(x_5) = -\frac{5}{27}$.

5) Bild der Funktion (Bild C 38)

Wir zeichnen zuerst die Asymptoten der Kurve, also die Geraden $y = 1$ und $x = 2$. Die bei der Untersuchung berechneten Paare der Funktion reichen noch nicht aus, um das Bild von f zu skizzieren. Wir berechnen daher noch für einige andere Zahlen die Funktionswerte.

x	-8	-6	-4	-2	1,5	1,6	3	3,5	4	5	8
y	0,63	0,55	0,42	0,19	5	9,8	8	5	3,75	2,67	1,75

Aufgaben c 69 und 70



34 Extremwertaufgaben

Das Beispiel C 24 hatte uns bereits gezeigt, welche Bedeutung – hauptsächlich für die Anwendungen der Mathematik – die Berechnung von größten bzw. kleinsten Funktionswerten hat. Wir wollen dies noch an drei weiteren Beispielen zeigen. Es handelt sich stets darum, für eine gegebene Funktion die globalen Extrema in einem durch die Aufgabenstellung festgelegten Intervall zu berechnen. Diese globalen Extrema werden in den meisten Fällen zugleich lokale Extrema sein. Falls das betreffende Intervall abgeschlossen ist, müssen wir allerdings die berechneten lokalen Extrema mit den Funktionswerten an den Intervallenden vergleichen (/ Lerneinheit C 26).

33

Aus einem quadratischen Stück Blech mit der Seitenlänge a soll ein oben offener Kasten hergestellt werden, indem man an jeder Ecke ein Quadrat heraus-schneidet und die entstehenden Ränder nach oben biegt. Der Kasten soll ein möglichst großes Volumen erhalten.

Lösung: Das Fassungsvermögen des Kastens hängt von der Seitenlänge der herausgeschnittenen Quadrate ab. Bezeichnen wir diese Seitenlänge mit x , so erhalten wir für das Volumen des Kastens (Bild C 39)

$$(1) \quad V = f(x) = (a - 2x)^2 x = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3 \quad \text{mit } 0 < x < \frac{a}{2}.$$

Unsere Aufgabe besteht darin, den größten Funktionswert der Funktion (1) im Intervall $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ zu ermitteln. Da das Intervall offen ist, kann das gesuchte Maximum nur ein lokales Maximum sein. Daher berechnen wir die Nullstellen der 1. Ableitung

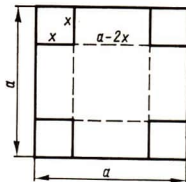
$$V' = f'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2$$

im Intervall $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, d. h., wir lösen die Gleichung

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

und erhalten

$$x_1 = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{a}{6}.$$



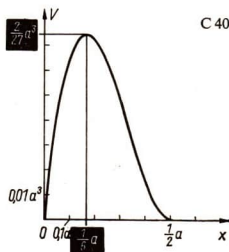
C 39

Von diesen Lösungen scheidet x_1 aus, so daß also nur an der Stelle $\frac{a}{6}$ ein lokales Extremum vorhanden sein kann. Betrachten wir die Funktion f in dem abgeschlossenen Intervall $\left\langle 0, \frac{a}{2} \right\rangle$ (für die Aufgabe selbst interessiert nur das Intervall $\left(0, \frac{a}{2}\right)$), so muß sie als stetige Funktion nach Satz B 25 ihr Maximum in diesem Intervall annehmen. Nun gilt aber $f(0) = f\left(\frac{a}{2}\right) = 0$. Da ferner alle Funktionswerte von f im Intervall $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ positiv sind, und nur ein lokaler Extremwert vorhanden sein kann, muß $f\left(\frac{a}{6}\right)$ das Maximum von f sowohl in $\left\langle 0, \frac{a}{2} \right\rangle$ als auch in $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ sein.¹

Man muß also an jeder Ecke ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{a}{6}$ ausschneiden. In diesem Falle hat der Kasten das maximale Volumen (Bild C 40)

$$V = f\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - \frac{a}{3}\right)^2 \cdot \frac{a}{6},$$

$$V = \frac{2}{27} a^3.$$



C 40

- 34 Eine Kugel wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 400 \text{ ms}^{-1}$ aus einem Gewehr senkrecht nach oben geschossen. Welche maximale Höhe erreicht sie? (Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt).

Lösung: Das Weg-Zeit-Gesetz für den senkrechten Wurf nach oben lautet

$$(1) \quad s = f(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 \quad (t \geq 0).$$

Die maximale Höhe (Steighöhe) erreicht das Geschöß, wenn seine Geschwindigkeit gleich Null ist. Wir berechnen zunächst die Zeit, die das Geschöß benötigt, um die Steighöhe zu erreichen. Das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz für den senkrechten Wurf nach oben erhält man durch Differentiation der Funktion (1):

$$v = f'(t) = v_0 - gt.$$

¹ Selbstverständlich findet man dieses Ergebnis auch sofort mit Hilfe des Vorzeichens der 2. Ableitung an der Stelle $\frac{a}{6}$.

Aus $v_0 - gt = 0$ folgt

$$t = \frac{v_0}{g},$$

d. h., für $t = \frac{v_0}{g}$ (Steigzeit) hat die Funktion (1) ein lokales Extremum. Da (1) eine quadratische Funktion ist, in deren Gleichung das quadratische Glied negativ ist (das Bild ist eine nach unten geöffnete Parabel), muß dieses Extremum ein Maximum sein. Für die maximale Höhe erhalten wir aus (1)

$$s = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Ist $v_0 = 400 \text{ ms}^{-1}$, so beträgt die maximale Höhe ($g \approx 10 \text{ ms}^{-2}$) $s \approx 8000 \text{ m}$.

35

Welche Abmessungen müßten zylindrische Konservendosen mit gegebenem Volumen V haben, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Lösung: Nach der Aufgabenstellung haben wir von allen geraden Kreiszyklindern mit dem Volumen V denjenigen zu bestimmen, dessen Oberfläche A_0 einen minimalen Wert annimmt. Sind r bzw. h der Radius bzw. die Höhe eines Zylinders, so gilt für seine Oberfläche

$$(1) \quad A_0 = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Jedes Paar $[r; h]$ ($r > 0, h > 0$) bestimmt eindeutig einen Zylinder mit eindeutig bestimmter Oberfläche A_0 , d. h. aber: A_0 ist eine Funktion der beiden Argumente r und h . Wir müssen zunächst versuchen, das eine Argument durch das andere zu ersetzen, wobei noch das gegebene Volumen V in die Gleichung der zu untersuchenden Funktion eingehen muß. Für das Volumen eines Zylinders haben wir die Formel

$$(2) \quad V = \pi r^2 h$$

kennengelernt. Aus (2) folgt

$$(3) \quad h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Durch Einsetzen von (3) in (1) erhalten wir

$$(4) \quad A_0 = f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{\pi r} \right) \quad (r > 0).$$

Diese Funktion untersuchen wir nun auf eventuell vorhandene Minima. Die erste Ableitung der Funktion (4) ist

$$A'_0 = f'(r) = 2\pi \left(2r - \frac{V}{\pi r^2} \right) \quad (r > 0).$$

Die Nullstellen der 1. Ableitung sind die Lösungen der Gleichung

$$2r - \frac{V}{\pi r^2} = 0.$$

Man erhält

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$



Die Funktion f kann demnach – wenn überhaupt – nur einen einzigen lokalen Extremwert annehmen. Dieser ist aber ein lokales Minimum, denn die 2. Ableitung

$$f''(r) = 2\pi \left(2 + \frac{2V}{\pi r^3} \right)$$

ist für jedes r mit $r > 0$ positiv.

Dieses lokale Minimum ist zugleich auch das globale Minimum der Funktion f , denn f ist eine stetige Funktion, und es ist

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \infty.$$

Mit $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ erhält man aus (3):

$$h = \frac{V}{\pi \sqrt{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\frac{\pi^3 V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

Ergebnis: Den geringsten Materialverbrauch erhält man für $h = 2r$, d. h., der durch die Zylinderachse gelegte Schnitt ist ein Quadrat.

Aufgaben c 71 bis 106

D. Einführung in die Integralrechnung

Seite

134 Das bestimmte Integral

Zur Wiederholung · Vorbereitung und Definition des bestimmten Integrals · Beispiele · Eigenschaften des bestimmten Integrals · Mittelwertsatz der Integralrechnung

144 Das unbestimmte Integral

Stammfunktion und unbestimmtes Integral · Geometrische Bedeutung der Integrationskonstanten · Integrationsregeln

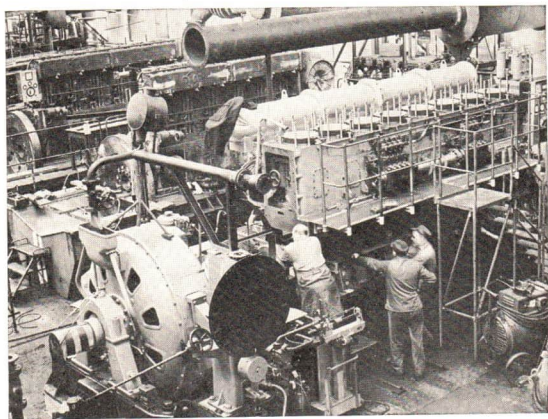
149 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze · Berechnung bestimmter Integrale

153 Anwendungen der Integralrechnung

Berechnen von Flächeninhalten · Berechnen der physikalischen Arbeit

Eine wichtige Kennziffer für einen Motor ist ein Arbeitsdiagramm, das mit Hilfe besonderer Vorrichtungen auf dem Prüfstand ermittelt werden kann. Die Berechnung der physikalischen Arbeit bei veränderlicher Kraft ist eine Anwendung der Integralrechnung. Das Bild zeigt einen Achtzylinder-Schiffsdieselmotor auf dem Prüfstand im VEB Dieselmotorenwerk Rostock.



D

1 Wiederholung und Vorbereitung des Integralbegriffs

Jedes Vieleck hat einen eindeutig bestimmten Flächeninhalt. Die Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken und von einigen speziellen Vierecken (z. B. Trapez, Parallelogramm) führen wir auf die Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken zurück. Die Flächeninhaltsberechnung von anderen Vielecken kann durch geeignete Zerlegungen der Figuren ebenfalls auf die Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken zurückgeführt werden.

Nach Wahl einer beliebigen Strecke e als Längeneinheit wird jeder Strecke umkehrbar eindeutig eine (reelle) Zahl als Maßzahl für ihre Länge zugeordnet. Sind nun a und b bei der verwendeten Längeneinheit e die Seitenlängen eines Rechtecks, so ist $a \cdot b$ der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wobei der Flächeninhalt des Quadrats über der beliebig gewählten Einheitsstrecke e als Einheit des Flächeninhaltes verwendet wird.

Demnach können wir für jedes gegebene Vieleck (für jede geradlinig begrenzte Fläche) den Flächeninhalt berechnen. Die Zuordnung

Vieleck \longrightarrow Flächeninhalt

genügt, wie Ihnen bereits bekannt ist, folgenden Bedingungen:

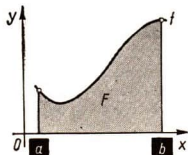
1. Kongruente Vielecke haben den gleichen Flächeninhalt.
2. Zerlegt man das Vieleck F durch eine Diagonale in die Vielecke F_1 und F_2 , so ist der Flächeninhalt von F gleich der Summe der Flächeninhalte von F_1 und F_2 .
3. Die Maßzahl des Flächeninhalts eines Vielecks ist stets eine nichtnegative reelle Zahl.
4. Die Einheit des Flächeninhalts erhält die Maßzahl 1.

Erhebliche Schwierigkeiten treten aber z. B. bei der Kreisberechnung auf. Wir erinnern uns, daß wir mit den damaligen Hilfsmitteln die Formel $A = \pi r^2$ für den Flächeninhalt einer Kreisfläche nicht herleiten konnten. Deswegen wollen wir uns mit Flächeninhalten solcher Flächen, die nicht nur von Geradenstücken begrenzt werden, genauer beschäftigen. Dazu benötigen wir die Hilfsmittel der Analysis, also Grenzprozesse. Bei den folgenden Betrachtungen kommt es nur auf die Maßzahl des Flächeninhaltes einer Fläche an. Wir werden deshalb, solange keine Anwendungsaufgaben behandelt werden, die gewählte Maßeinheit unberücksichtigt lassen und den jeweiligen Flächeninhalt mit seiner Maßzahl identifizieren.

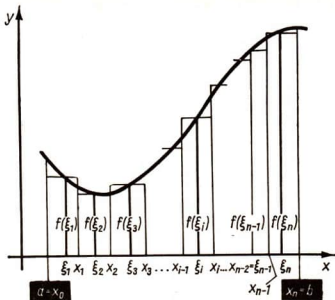
- ① *Wie erhält man ausgehend vom Flächeninhalt eines Rechtecks die Flächeninhalte a) von Parallelogrammen, b) von Dreiecken und c) von Trapezen?*

Das Bild D 1 zeigt das Bild einer Funktion f , die zusammen mit der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ eine Punktmenge F begrenzt. Eine solche Punktmenge nennen wir ein **ebenes Flächenstück**. F enthält genau die Punkte $P(x; y)$, deren Abszissen x dem Intervall $a \leq x \leq b$ und deren Ordinaten y bei einem festen x aus $\langle a, b \rangle$ dem Intervall $0 \leq y \leq f(x)$ angehören. Wir stellen uns nun die Frage: *Kann man der gegebenen Punktmenge F eine Zahl als Flächeninhalt zuordnen, und welche Zahl soll das gegebenenfalls sein?*

D 1



D 2



Daß die Punktmenge F überhaupt einen Flächeninhalt hat, scheint anschaulich klar zu sein, wenn f eine stetige Funktion ist. Deshalb werden wir nur solche Punktmenge betrachten, die von den Bildern *stetiger* Funktionen begrenzt werden. Wir haben auch gewisse anschauliche Vorstellungen darüber, wie man Zahlen ermitteln kann, die uns als Näherungswerte für den Flächeninhalt der Punktmenge F erscheinen. Auf diese anschaulichen Vorstellungen wollen wir uns stützen, um eine Definition für den Flächeninhalt eines solchen krummlinig begrenzten Flächenstücks anzugeben.

Wir versuchen zunächst, die gegebene Punktmenge durch solche Flächen annähernd auszuschöpfen, deren Flächeninhalte wir bereits kennen. Der Einfachheit halber wählen wir Rechtecke, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel sind. Dazu zerlegen wir das Intervall $\langle a, b \rangle$ in (nicht notwendig gleich lange) Teilintervalle (Bild D 2).

Wir wählen also eine *beliebige natürliche Zahl* n und *beliebige Zahlen* $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

durch die das Intervall $\langle a, b \rangle$ in n Teilintervalle zerlegt wird. Zeichnen wir in jedem dieser Teilpunkte die Parallele zur y -Achse, so wird das Flächenstück F in „Streifen“ zerlegt. In jedem Teilintervall $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) wählen wir eine beliebige Zahl (einen beliebigen „Zwischenpunkt“) ξ_i mit $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ und betrachten nach Wahl der Zahlen ξ_i über jedem dieser Intervalle das Rechteck mit den Seitenlängen $(x_i - x_{i-1})$ und $f(\xi_i)$, dessen Flächeninhalt $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ beträgt. Jeder Streifen des Flächenstückes F wird so angenähert durch ein Rechteck ersetzt.

Der Fläche, die sich aus allen n Rechtecken zusammensetzt, ist eindeutig eine Zahl als Flächeninhalt zugeordnet, nämlich die Zahl

$$\begin{aligned} s_n &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Da die Fläche, die sich aus den n Rechtecken zusammensetzt, die Punktmenge F annähernd ausschöpft, liegt es nahe, die Zahl s_n als einen Näherungswert für den zu erfassenden Flächeninhalt anzusehen. Eine auf diese Weise gefundene Zahl s_n wird um so besser geeignet sein, den Flächeninhalt von F anzunähern,

je größer die Zahl n ist (d. h., je mehr Teilpunkte wir in dem Intervall $\langle a, b \rangle$ wählen), und je kleiner die Längen der Teilintervalle bei der durchgeführten Zerlegung von $\langle a, b \rangle$ sind.

Zerlegen wir nun für jede natürliche Zahl n das Intervall $\langle a, b \rangle$ in n Teilintervalle, wobei die Zerlegungen so gewählt werden, daß mit wachsendem n die Längen aller Teilintervalle kleiner werden als eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl ϵ , und bilden wir für jede solche Zerlegung jedesmal unter ganz beliebiger Wahl der Zwischenpunkte eine Summe s_n , so erhalten wir eine Folge (s_n) von Näherungswerten für den zu erfassenden Flächeninhalt. Wenn sich nun zeigen läßt, daß jede so gebildete Folge (s_n) konvergiert, und zwar immer gegen die gleiche Zahl, so wird man dem Flächenstück F diese Zahl als Flächeninhalt zuordnen. Diese hier durchgeführten Überlegungen werden wir zunächst für die Punktmenge, die von dem Bild der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $\langle 0, b \rangle$, von der x -Achse und von der Geraden $x = b$ ($b > 0$) begrenzt wird, erläutern (s. Bild D 3).

Zerlegung des Intervalls $\langle 0, b \rangle$:

Da wir die Teilpunkte einer Zerlegung beliebig wählen können, zerlegen wir hier der Einfachheit halber das Intervall $\langle 0, b \rangle$ in *gleich lange* Teilintervalle. Wir wählen also für eine fest vorgegebene natürliche Zahl n ($n > 0$) die Teilpunkte

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{b}{n}, \quad x_2 = 2 \frac{b}{n}, \quad \dots, \quad x_i = i \frac{b}{n}, \quad \dots, \quad x_n = n \frac{b}{n} = b,$$

durch die das Intervall $\langle 0, b \rangle$ in n *gleich lange* Teilintervalle mit der Länge

$$l_n = x_i - x_{i-1} = \frac{b}{n}$$

zerlegt wird.

Wahl von Zwischenpunkten:

In jedem der n Teilintervalle $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) wählen wir zur Vereinfachung der Rechnung als Zwischenpunkt des betreffenden Intervalls:

$$\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{1}{2} \left[(i-1) \frac{b}{n} + i \frac{b}{n} \right] = \frac{b}{2n} (2i-1).$$

Dann ist der zu ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gehörige Funktionswert

$$f(\xi_i) = \frac{b^2}{4n^2} (2i-1)^2,$$

und der Flächeninhalt des i -ten Rechtecks ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \frac{b^2}{4n^2} (2i-1)^2 \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{4n^3} (2i-1)^2.$$

Wir bilden die Summe s_n :

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{b^3}{4n^3} (2i-1)^2.$$

Da alle Summanden von s_n den Faktor $\frac{b^3}{4n^3}$ enthalten, ist

$$s_n = \frac{b^3}{4n^3} \sum_{i=1}^n (2i-1)^2.$$

Die Länge des i -ten Teilintervalls ist gleich der Differenz

$$x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

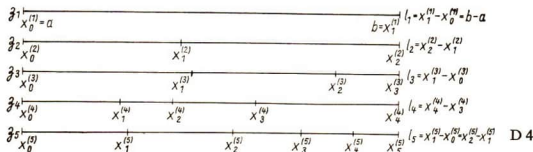
Die größte der Zahlen $x_i - x_{i-1}$, also die **maximale Länge** der Teilintervalle bei der Zerlegung δ_n , bezeichnen wir mit „ l_n “. Ist δ_n eine Zerlegung von $\langle a, b \rangle$, so versteht man unter einer zu δ_n gehörenden **Zerlegungssumme** die Zahl

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}),$$

wobei die ξ_i beliebig gewählte Zahlen mit $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ sind. Je nach Wahl der ξ_i erhält man zu einer gegebenen Zerlegung δ_n beliebig viele Zerlegungssummen. Sind die Zahlen ξ_i aber einmal fest gewählt, so ist die Zahl s_n für die gegebene Zerlegung δ_n eindeutig bestimmt. Ist für jede natürliche Zahl n ($n > 0$) eine Zerlegung δ_n des Intervalls $\langle a, b \rangle$ gegeben, so erhalten wir eine sogenannte **Zerlegungsfolge** (δ_n) für das Intervall $\langle a, b \rangle$. Damit wir die Teilpunkte bei den einzelnen Zerlegungen einer Zerlegungsfolge nicht verwechseln, nennen wir die Teilpunkte bei der n -ten Zerlegung von (δ_n)

$$a = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)} = b.$$

Das Bild D 4 veranschaulicht die ersten fünf Zerlegungen einer solchen Zerlegungsfolge für ein gegebenes Intervall $\langle a, b \rangle$.



Da zu jeder Zerlegung δ_n eine maximale Intervalllänge gehört, ist jeder Zerlegungsfolge (δ_n) eindeutig eine Folge (l_n), nämlich die Folge der maximalen Intervalllängen zugeordnet. Man nennt eine Folge von Zerlegungen eine **ausgezeichnete Zerlegungsfolge**, wenn die zugehörige Folge (l_n) eine Nullfolge ist.

Wählt man für jede Zerlegung einer Zerlegungsfolge (δ_n) in jedem Teilintervall $\langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) eine Zahl $\xi_i^{(n)}$ mit $x_{i-1}^{(n)} \leq \xi_i^{(n)} \leq x_i^{(n)}$ und bildet, nachdem die Zahlen $\xi_i^{(n)}$ gewählt sind, für jede Zerlegung die Summe

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}) (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}),$$

so ist jeder Zerlegungsfolge (δ_n) eine Folge (s_n) von Zerlegungssummen zugeordnet.

Auf Seite 136 hatten wir das Intervall $\langle 0, b \rangle$ für jede natürliche Zahl n ($n > 0$) in n gleich lange Teilintervalle zerlegt. Wir hatten also eine Zerlegungsfolge für $\langle 0, b \rangle$ gebildet, bei der die n -te Zerlegung durch die Teilpunkte

$$x_0^{(n)} = 0, x_1^{(n)} = \frac{b}{n}, x_2^{(n)} = 2 \frac{b}{n}, \dots, x_n^{(n)} = n \frac{b}{n} = b$$

gegeben war. Diese Zerlegungsfolge ist eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, denn es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} = 0$. Zu dieser ausgezeichneten Zerlegungsfolge

hatten wir die spezielle Folge von Zerlegungssummen

$$(s_n) = \left(\frac{b^3}{3} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) \right)$$

gebildet und festgestellt, daß die Folge (s_n) eine konvergente Folge ist.

Was können wir nun allgemein über Folgen von Zerlegungssummen, die zu ausgezeichneten Zerlegungsfolgen gehören, aussagen?

Es gilt – wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden muß – der folgende Satz:

SATZ: Ist f eine beliebige im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion, so konvergiert bei jeder Wahl einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge und bei jeder Wahl der Zwischenpunkte die zugehörige Folge der Zerlegungssummen, und zwar immer gegen ein und dieselbe Zahl g .

Die im Satz D 1 genannte Zahl g nennt man das **bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $\langle a, b \rangle$** und bezeichnet sie mit „ $\int_a^b f(x) dx$ “ (gelesen: Integral $f(x) dx$ von a bis b).

Wählt man also *irgendeine* ausgezeichnete Zerlegungsfolge für das Intervall $\langle a, b \rangle$, d. h., Zahlen $x_i^{(n)}$ mit $x_0^{(n)} = a$, $x_n^{(n)} = b$ und $x_{i-1}^{(n)} < x_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und feste Zahlen $\xi_i^{(n)}$ mit $x_{i-1}^{(n)} \leq \xi_i^{(n)} \leq x_i^{(n)}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}) (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Den Satz D 1 kann man nun auch wie folgt formulieren:

Für jede im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion f existiert das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$.

Das von Leibniz eingeführte Zeichen „ \int “ ist ein stilisiertes S und soll an die Summenbildung erinnern. Man nennt die Zahlen a und b die **untere bzw. obere Integrationsgrenze**. Die Funktion f heißt der **Integrand**, x die **Integrationsvariable**, und das Intervall $\langle a, b \rangle$ nennt man das **Integrationsintervall**.

Wir wenden uns nun wieder der Frage zu, was man unter dem **Flächeninhalt** eines nicht nur von Geraden begrenzten Flächenstückes zu verstehen hat. Wir betrachten also jetzt nur wieder solche Funktionen, die in dem betreffenden Intervall keine negativen Funktionswerte haben.

DEFINITION: Ist f eine im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion, deren Funktionswerte in $\langle a, b \rangle$ nicht negativ sind, so versteht man unter dem **Flächeninhalt A** des Flächenstückes, das von dem Bild von f , der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, das bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $\langle a, b \rangle$, d. h., es ist

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Nach den Ausführungen auf den Seiten 136/137 ist also der Flächeninhalt des im Bild D 3 gerasterten Flächenstückes

$$A = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

Aufgaben d 5 bis 7

3 Beispiele

- 1 Es ist der Flächeninhalt des Flächenstückes, das durch das Bild der Funktion $f(x) = 2x + 1$, die x -Achse und die Geraden $x = 0$ und $x = 3$ begrenzt wird, zu berechnen (Bild D 5).

Lösung:

Den Flächeninhalt des in Bild D 5 dargestellten Trapezes können wir nach der Formel

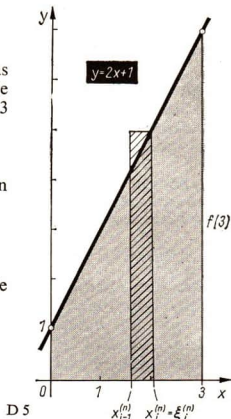
$$A = \frac{a + c}{2} h,$$

wobei a und c die parallelen Seiten und h die Höhe des Trapezes sind, berechnen. Mit

$$a = 1, c = f(3) = 7 \quad \text{und} \quad h = 3$$

erhalten wir

$$A = \frac{1 + 7}{2} \cdot 3 = 12.$$



Wir wollen jetzt zeigen, daß die neue Methode, Flächeninhalte mit Hilfe bestimmter Integrale zu berechnen, das gleiche Ergebnis liefert.

- 2 Die Aufgabenstellung entspricht der im Beispiel D 1.

Lösung: Nach Definition D 2 ist der Flächeninhalt des Trapezes

$$A = \int_0^3 (2x + 1) dx.$$

Wahl einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge:

Um das bestimmte Integral auszurechnen, genügt es (nach Satz D 1), irgendeine ausgezeichnete Zerlegungsfolge für das Intervall $\langle 0, 3 \rangle$ zu bilden. Wir wählen in diesem Beispiel diejenige ausgezeichnete Zerlegungsfolge, bei der die n -te Zerlegung durch die Teilpunkte

$$x_0^{(n)} = 0, x_1^{(n)} = \frac{3}{n}, x_2^{(n)} = 2 \frac{3}{n}, \dots, x_i^{(n)} = i \frac{3}{n}, \dots, x_n^{(n)} = n \frac{3}{n} = 3$$

gegeben ist. Dann ist

$$x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)} = \frac{3}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Wahl von Zwischenpunkten: Da auch die Zwischenpunkte $\xi_i^{(n)}$ in den Intervallen $\langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle$ beliebig gewählt werden können, setzen wir

$$\xi_i^{(n)} = x_i^{(n)} = i \frac{3}{n}.$$

Somit ist

$$f(\xi_i^{(n)}) = 2 \cdot i \frac{3}{n} + 1 = i \frac{6}{n} + 1$$

$$f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \left(\frac{6}{n} \cdot i + 1\right) \frac{3}{n} = \frac{18}{n^2} \cdot i + \frac{3}{n}.$$

Bilden der Folge (s_n) :

Für die gewählte Zerlegungsfolge und die gewählten Zwischenpunkte erhalten wir die Folge der Zerlegungssummen (s_n) mit

$$s_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{18}{n^2} \cdot i + \frac{3}{n}\right) = n \cdot \frac{3}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{18}{n^2} \cdot i = 3 + \frac{18}{n^2} \sum_{i=1}^n i.$$

Nun ist

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{Beispiel A 5, Seite 14}).$$

Also erhalten wir:

$$s_n = 3 + \frac{18}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 3 + \frac{9}{n} (n+1) = 3 + 9 \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$A = \int_0^3 (2x+1) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + 9 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = 12.$$

3 Es ist $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ ($0 < a < b$) zu berechnen (Bild D 6).

Lösung: Es sei (ξ_n) eine ganz beliebige ausgezeichnete Zerlegungsfolge für das Intervall $\langle a, b \rangle$. Die n -te Zerlegung dieser Folge sei durch die Teilpunkte

$$x_0^{(n)} = a, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)} = b$$

gegeben. Bei diesem Beispiel ist es zweckmäßig, in jedem Teilintervall $\langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) als Zwischenpunkt die Zahl

$$\xi_i^{(n)} = \sqrt{x_{i-1}^{(n)} \cdot x_i^{(n)}}$$

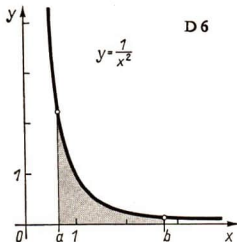
zu wählen. Dann ist

$$f(\xi_i^{(n)}) = \frac{1}{(\xi_i^{(n)})^2} = \frac{1}{x_{i-1}^{(n)} \cdot x_i^{(n)}}$$

$$f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \frac{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}}{x_{i-1}^{(n)} \cdot x_i^{(n)}} = \frac{1}{x_{i-1}^{(n)}} - \frac{1}{x_i^{(n)}}$$

und

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_{i-1}^{(n)}} - \frac{1}{x_i^{(n)}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{x_0^{(n)}} - \frac{1}{x_1^{(n)}}\right) + \left(\frac{1}{x_1^{(n)}} - \frac{1}{x_2^{(n)}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{x_{n-1}^{(n)}} - \frac{1}{x_n^{(n)}}\right) \\ &= \frac{1}{x_0^{(n)}} - \frac{1}{x_n^{(n)}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \end{aligned}$$



Bei dieser speziellen Wahl der Zwischenpunkte hängen die Zerlegungssummen s_n noch nicht einmal von n ab. Also ist der Grenzwert für jede so gebildete Folge (s_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Folglich ist

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

- ② Berechnen Sie $\int_{-1}^3 (x+3) dx$ und $\int_0^4 2x dx$, indem Sie die betreffenden Flächenstücke zeichnen und deren Flächeninhalte mit Hilfe bekannter Flächeninhaltsformeln elementar berechnen!
- ③ Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes, das durch das Bild der Funktion $f(x) = x^3$, die x -Achse und die Gerade $x = b$ ($b > 0$) begrenzt wird!

Aufgabe d 8

4 Einige Eigenschaften des bestimmten Integrals

I. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ einer in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktion ist eine eindeutig bestimmte Zahl, die nur von der gegebenen Funktion f und den Integrationsgrenzen a und b und *nicht* von der Bezeichnung der Integrationsvariablen abhängig ist. Wir dürfen deshalb die Integrationsvariable umbenennen. Es ist also beispielsweise

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(t) dt.$$

II. Die ursprüngliche Einschränkung $a < b$ bei einem bestimmten Integral $\int_a^b f(x) dx$ beseitigen wir durch folgende zusätzliche

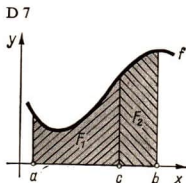
DEFINITIONEN:

Wenn f in a definiert ist, setzen wir:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Wenn $\int_a^b f(x) dx$ mit $a < b$ existiert, so setzen wir:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$



Die letzte Gleichung besagt, daß ein bestimmtes Integral das Vorzeichen ändert, wenn man die Integrationsgrenzen vertauscht.

III. Wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden soll, gilt der folgende

SATZ: Ist f eine in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion und c eine beliebige Zahl aus dem Intervall $\langle a, b \rangle$, so ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

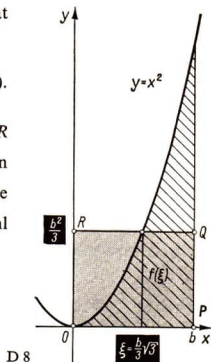
Der Inhalt des Satzes D 3 ist anschaulich klar, wenn die Funktionswerte von f in $\langle a, b \rangle$ nicht negativ sind, denn dann stellen die Integrale nach Definition D 2 die jeweiligen Flächeninhalte dar. Demnach ist beispielsweise im Bild D 7 die Summe der Flächeninhalte der Flächenstücke F_1 und F_2 gleich dem Flächeninhalt der gesamten im Bild D 7 gerasterten Fläche.

IV. Das im Bild D 8 schraffierte Flächenstück hat den Flächeninhalt

$$A = \int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3} \quad (\text{ / Seite 139}).$$

Den gleichen Flächeninhalt hat das Rechteck $OPQR$ mit den Seitenlängen b und $\frac{b^2}{3}$. Da die Funktion $f(x) = x^2$ stetig ist, gibt es im Intervall $\langle 0, b \rangle$ eine Zahl ξ mit $f(\xi) = \xi^2 = \frac{b^2}{3}$. Es ist dies die Zahl $\frac{b}{3}\sqrt{3}$. Folglich gilt

$$\int_0^b x^2 \, dx = f(\xi) \cdot b = \left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot b.$$



Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist f eine im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion, so gibt es stets (wenigstens) eine Zahl ξ mit $a \leq \xi \leq b$, für die gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) (b - a).$$

Die Zahl $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ heißt **Integralmittelwert** der Funktion f im Intervall $\langle a, b \rangle$.

Auf den Beweis des Mittelwertsatzes verzichten wir ebenfalls.

Sind die Funktionswerte von f im Intervall $\langle a, b \rangle$ nicht negativ, so können wir den Mittelwertsatz geometrisch deuten. Er besagt dann, daß es eine Zahl ξ im Intervall $\langle a, b \rangle$ gibt, so daß das Flächenstück, das durch das Bild von f im Intervall $\langle a, b \rangle$ bestimmt ist, den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck, dessen Seiten die Längen $(b - a)$ und $f(\xi)$ haben (Bild D 9).

Der Mittelwertsatz gilt auch für $a = b$ (dann ist $\xi = a$) und auch für $a > b$. Ist nämlich $a > b$, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = -f(\xi)(a - b) = f(\xi)(b - a).$$

- 4 Gesucht ist die Zahl ξ aus dem Intervall $\langle a, b \rangle$ ($0 < a < b$), für die

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\xi^2}(b - a) \text{ gilt.}$$

Mit dem Ergebnis

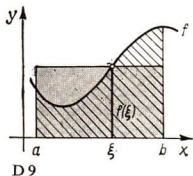
$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

aus dem Beispiel D 3 erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{\xi^2}(b - a)$$

mit der Lösung

$$\xi = \sqrt{ab}.$$



Aufgaben d 9 bis 12

Das unbestimmte Integral

5 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Durch die Differentiation einer gegebenen Funktion¹ erhalten wir (mit Hilfe der uns bekannten Differentiationsregeln) eine neue Funktion, die wir die Ableitung der gegebenen Funktion nennen. Viel schwieriger ist nun im allgemeinen die Umkehrung dieser Operation, nämlich eine Funktion zu ermitteln, deren Ableitung gegeben ist.

Unsere Aufgabe besteht also in der Beantwortung folgender Fragen:

1. Gibt es zu einer gegebenen Funktion f eine Funktion F mit $F' = f$?
2. Wie erhält man eine solche Funktion F , wenn sie existiert?

Mit unseren Kenntnissen aus der Differentialrechnung können wir für gewisse (rationale) Funktionen f sofort Funktionen F mit $F' = f$ angeben.

- 5 a) $f(x) = 2x$; $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 1$, $F_3(x) = x^2 - 1$
 b) $f(x) = 3x^2$; $F_1(x) = x^3$, $F_2(x) = x^3 + 3$, $F_3(x) = x^3 - 2$
 c) $f(x) = 3x^2 + 2x$; $F_1(x) = x^3 + x^2$, $F_2(x) = x^3 + x^2 + c$

(c beliebig reell)

¹ Wir haben uns bei der Differentiation zunächst auf rationale Funktionen beschränkt. In der 12. Klasse werden wir sehen, daß auch andere uns schon bekannte Funktionen, wie z. B. die trigonometrischen Funktionen, die Exponential- und Logarithmusfunktionen differenzierbare Funktionen sind.

5 DEFINITION: Die Funktion F ist eine *Stammfunktion* der Funktion f im Intervall $I =_{\text{Dr}}$ Für jedes x aus I gilt $F'(x) = f(x)$.

Ist F_1 eine Stammfunktion von f in einem Intervall I , so ist auch jede Funktion $F_1 + c$ (c eine beliebige Konstante) eine Stammfunktion von f in I , denn für jedes $x \in I$ gilt:

$$(F_1(x) + c)' = F_1'(x) = f(x).$$

Existiert also zu einer gegebenen Funktion f in einem Intervall I (wenigstens) eine Stammfunktion, so gibt es unendlich viele solcher Stammfunktionen. Ist F_2 eine andere Stammfunktion von f im Intervall I , so gilt für jedes x aus I :

$$F_2'(x) = F_1'(x) = f(x).$$

Nach Satz C 29 (/ Seite 114) unterscheiden sich die Funktionen F_1 und F_2 nur um eine additive Konstante, d. h., es gibt eine Zahl c derart, daß für jedes x mit $x \in I$ gilt:

$$F_2(x) = F_1(x) + c.$$

Kennt man also nur eine einzige Stammfunktion F der gegebenen Funktion f , so kennt man bereits die Menge aller Stammfunktionen von f . Diese Menge enthält genau diejenigen Funktionen, die man aus der Funktion F durch Addition beliebiger Konstanten c erhält.

6 DEFINITION: Unter dem unbestimmten Integral $\int f(x) dx$ einer im Intervall I definierten Funktion f versteht man die Menge aller Stammfunktionen von f in I .

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f in I und c eine beliebige reelle Zahl, so wird durch die Schreibweise

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

zum Ausdruck gebracht, daß $F + c$ die gesamte Menge der Stammfunktionen von f durchläuft, wenn c die Menge der reellen Zahlen durchläuft. Die gegebene Funktion f heißt **Integrand** des unbestimmten Integrals, die Konstante c heißt **Integrationskonstante**. Die Operation, die einer gegebenen Funktion f eine Stammfunktion F zuordnet, heißt **Integration**.

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation.

Aus der Definition des unbestimmten Integrals folgt

$$\left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

Die Gleichungen

$$f(x) = (F(x) + c)' = F'(x) \quad \text{und} \quad \int f(x) dx = F(x) + c$$

besagen also genau dasselbe, sie stellen nur verschiedene Schreibweisen desselben Sachverhaltes dar.

7 a) $\int 2x dx = x^2 + c$ b) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ c) $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + c$

d) $\int (3x^2 + 2x) dx = x^3 + x^2 + c$ e) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c (x \neq 0)$

Aufgaben d 13 bis 15

6 Geometrische Bedeutung der Integrationskonstanten

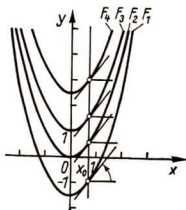
Das Aufsuchen einer Stammfunktion F zu einer gegebenen Funktion f (in einem Intervall I) bedeutet, geometrisch, eine Kurve – genannt Integralkurve – zu ermitteln, deren Tangente an einer beliebigen Stelle $x_0 (x_0 \in I)$ den Anstieg $f(x_0)$ hat. Hat man bereits eine einzige Integralkurve der Funktion f gezeichnet, so erhält man alle anderen Integralkurven von f durch Verschieben der gezeichneten Kurve parallel zur y -Achse, denn alle die so entstehenden Kurven haben an ein und derselben Stelle den gleichen Anstieg.

Das Bild D 10 zeigt die Bilder der Stammfunktionen

$$F_1(x) = x^2 - 1,5; \quad F_2(x) = x^2;$$

$$F_3(x) = x^2 + 1; \quad F_4(x) = x^2 + 2,5$$

der Funktion $f(x) = 2x$. Für eine beliebig gewählte Stelle x_0 gilt



D 10

$$F_1'(x_0) = F_2'(x_0) = F_3'(x_0) = F_4'(x_0) = f(x_0) = 2x_0,$$

das bedeutet aber, daß die gezeichneten Parabeln an ein und derselben Stelle x_0 den gleichen Anstieg haben.

Als graphische Darstellung eines unbestimmten Integrals $\int f(x) dx = F(x) + c$ einer im Intervall I definierten Funktion f erhält man demnach eine Schar von Kurven, die alle an ein und derselben Stelle (aus dem Intervall I) jeweils den gleichen Anstieg haben. Die Integrationskonstante c ist ein Parameter dieser Kurvenschar, denn für jeden Wert von c erhält man eine eindeutig bestimmte Kurve aus der Schar. Die Zahl c beeinflusst nur die Lage der betreffenden Kurve im Koordinatensystem, nicht aber ihre Form. Durch jeden Punkt $P(x; y)$ der Ebene mit $x \in I$ geht genau eine Integralkurve der Schar. Um eine spezielle Kurve der Schar zu bestimmen, genügt es, einen Punkt $P_0(x_0; y_0)$ auszuwählen, durch den diese Kurve verlaufen soll. Aus der Gleichung

$$y_0 = F(x_0) + c$$

läßt sich dann die Konstante c berechnen.

- 7 Es ist diejenige Stammfunktion der Funktion $f(x) = 2x$ zu ermitteln, die an der Stelle 1 den Funktionswert -3 hat.

Die gesuchte Stammfunktion läßt sich in der Form

$$F(x) = x^2 + c$$

darstellen. Mit $F(1) = -3$ folgt

$$-3 = 1 + c \quad \text{bzw.} \quad c = -4.$$

Folglich ist $F(x) = x^2 - 4$ die gesuchte Funktion.

- 4 Ermitteln Sie diejenige Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$), die an der Stelle -2 den Funktionswert $\frac{1}{2}$ hat!

7 Integrationsregeln

Die Frage, für welche Funktionen Stammfunktionen existieren, ist noch nicht beantwortet. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß für jede (in einem Intervall I) stetige Funktion das unbestimmte Integral existiert. Hier sollen zunächst einige einfache Regeln angegeben werden, mit denen wir für gewisse stetige Funktionen das unbestimmte Integral ermitteln können. Da die Integration die Umkehrung der Differentiation ist, erhalten wir solche Regeln aus schon bekannten Differentiationsregeln.

Für jede ganze Zahl n mit $n \neq -1$ gilt¹

$$(a) \quad \boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c}$$

Diese Regel gilt für jedes x , wenn $n \geq 0$ bzw. für jedes x mit $x \neq 0$, wenn $n < -1$ ist.

Es ist nämlich $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ($n \neq -1$; $x \neq 0$, wenn $n < -1$) eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = x^n$, denn

$$\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = x^n.$$

Folglich ist $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$.

Für jedes Intervall, in dem die Funktionen f bzw. f und g stetig sind, gilt

$$(b) \quad \boxed{\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0)}$$
$$(c) \quad \boxed{\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx}$$

Beweis für (b):

Ist F eine Stammfunktion von f , d. h., ist $F' = f$ bzw.

$$(1) \quad \int f(x) dx = F(x) + c \quad c \text{ beliebig reell,}$$

so ist kF ($k \neq 0$) eine Stammfunktion von kf , denn es ist

$$(kF)' = kF' = kf.$$

Folglich ist

$$\int kf(x) dx = kF(x) + c', \quad c' \text{ beliebig reell.}$$

Aus (1) folgt

$$k \int f(x) dx = kF(x) + c' \quad c' = kc.$$

Man erkennt unmittelbar, daß jede Stammfunktion des unbestimmten Integrals $\int kf(x) dx$ auch Stammfunktion von $k \int f(x) dx$ ist und umgekehrt. Also ist $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, w. z. b. w.

¹ Das Integral $\int \frac{dx}{x}$ behandeln wir erst in der 12. Klasse.

Beweis zu (c):

Es sei F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g , d. h., es ist

$$(1) \quad \int f(x) dx = F(x) + c_1, \quad c_1 \text{ beliebig reell,}$$

$$(2) \quad \int g(x) dx = G(x) + c_2, \quad c_2 \text{ beliebig reell.}$$

Dann ist aber $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$, denn es ist

$$(F + G)' = F' + G' = f + g.$$

Folglich ist

$$(3) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + c, \quad c \text{ beliebig reell.}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(4) \quad \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + c^* \quad (c^* = c_1 + c_2).$$

Aus (3) und (4) erkennt man, daß jede Stammfunktion von $\int (f(x) + g(x)) dx$ auch Stammfunktion von $\int f(x) dx + \int g(x) dx$ ist und umgekehrt. Also gilt

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Aus den Formeln (b) und (c) erhält man durch vollständige Induktion

$$(d) \quad \boxed{\int \left(\sum_{v=1}^n k_v f_v(x) \right) dx = \sum_{v=1}^n k_v \int f_v(x) dx} \quad k_v \neq 0 \text{ für } v = 1, 2, \dots, n.$$

8

$$a) \quad \int dx = \int 1 \cdot dx = \int x^0 dx = x + c \quad b) \quad \int 5 dx = 5x + c$$

$$c) \quad \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c \quad d) \quad \int 5x^3 dx = 5 \int x^3 dx = \frac{5}{4} x^4 + c$$

$$e) \quad \int (4x^2 + 3x - 1) dx = 4 \int x^2 dx + 3 \int x dx - \int dx = \frac{4}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - x + c$$

$$f) \quad \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c \quad (x \neq 0)$$

$$g) \quad \int \frac{4x^4 + 5x^3 + 1}{x^3} dx = \int \left(4x + 5 + \frac{1}{x^3} \right) dx = 2x^2 + 5x - \frac{1}{2x^2} + c \quad (x \neq 0)$$

(Es ist zweckmäßig, nach jeder Integration die Probe durch Differenzieren durchzuführen.)

Mit Hilfe der Regeln (a) und (d) können wir für jede ganze rationale Funktion das unbestimmte Integral ermitteln:

$$\begin{aligned} & \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c. \end{aligned}$$

Jede Stammfunktion einer ganzen rationalen Funktion ist also stets wieder eine ganze rationale Funktion. Die Stammfunktionen gebrochener rationaler Funktionen sind im allgemeinen keine rationalen Funktionen.

8 Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze

Bisher haben wir bestimmte Integrale stetiger Funktionen nur mit konstanten Integrationsgrenzen betrachtet. Wie verhält sich nun aber ein bestimmtes Integral, wenn eine Integrationsgrenze (oder auch beide) veränderlich sind?

Es sei f eine beliebige in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion. Dann ist f auch in jedem Intervall $\langle a, x \rangle$ mit $a \leq x \leq b$ stetig. Folglich ist

$$\int_a^x f(t) dt$$

für jedes x aus dem Intervall $\langle a, b \rangle$ eine eindeutig bestimmte Zahl. Dann ist aber die Menge Φ , die aus den geordneten Paaren $\left[x; \int_a^x f(t) dt \right]$ mit $a \leq x \leq b$ besteht, eine Funktion, die durch die Gleichung

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

dargestellt werden kann. Sind die Funktionswerte von f im Intervall $\langle a, b \rangle$ nicht negativ, so läßt sich diese Funktion leicht geometrisch veranschaulichen. Für ein beliebiges x_0 aus dem Intervall $\langle a, b \rangle$ bedeutet $\Phi(x_0)$ den Flächeninhalt des Flächenstückes, das von dem Bild der Funktion f , der x -Achse und den Parallelen zur y -Achse durch die Punkte a und x_0 begrenzt wird (Bild D 11).

Es wird nun behauptet, daß die so gewonnene Funktion Φ eine Stammfunktion der Funktion f im Intervall $\langle a, b \rangle$ ist. Um diese Behauptung zu beweisen, müssen wir zeigen, daß die Funktion Φ in $\langle a, b \rangle$ differenzierbar ist, und daß für jedes x mit $a \leq x \leq b$ gilt:¹

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Aufstellen des Differenzenquotienten:

Ist x_0 eine beliebige Stelle aus dem Intervall $\langle a, b \rangle$, so ist

$$\Phi(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt \quad \text{und}$$

$$\Phi(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt \quad \text{mit} \quad a \leq x_0 + h \leq b.$$

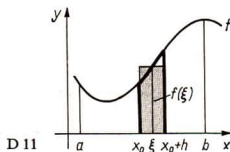
Für $h \neq 0$ erhalten wir also

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right].$$

Umformen des Differenzenquotienten:

Nach Satz D 3 gilt

$$\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$



¹ An den Stellen a und b fordert man die Existenz der einseitigen Ableitungen der Funktion Φ .

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es eine Zahl ξ mit $x_0 \leq \xi \leq x_0 + h$ bzw. $x_0 + h \leq \xi \leq x_0$ derart, daß

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = h \cdot f(\xi)$$

gilt. Dann ist

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \frac{1}{h} h \cdot f(\xi) = f(\xi).$$

Grenzwert des Differenzenquotienten:

ξ ist eine Stelle in dem Intervall $\langle x_0, x_0 + h \rangle$ bzw. in $\langle x_0 + h, x_0 \rangle$, für die man auch

$$\xi = x_0 + \vartheta h \quad \text{mit} \quad 0 \leq \vartheta \leq 1$$

schreiben kann. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \vartheta h) = f(x_0).$$

Folglich existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \Phi'(x_0),$$

und es ist

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Da x_0 beliebig gewählt war, gilt für jedes x aus $\langle a, b \rangle$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Damit erhalten wir den folgenden

7 **SATZ:** Ist f eine im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion, so ist die Funktion Φ mit

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

eine Stammfunktion von f in $\langle a, b \rangle$.

Mit dem Satz D 7 ist nun auch die in der Lerneinheit D 5 gestellte Frage nach der Existenz einer Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion f beantwortet, denn aus dem Satz D 7 folgt

8 **SATZ:** Zu jeder stetigen Funktion gibt es eine Stammfunktion.

Ist nämlich f eine im Intervall I stetige Funktion und a eine beliebige Stelle im Intervall I , so ist nach Satz D 7 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f in I .

Aufgabe d 28

9 Berechnung bestimmter Integrale

Wir sind nun auch in der Lage, ein bestimmtes Integral einer stetigen Funktion f ohne Grenzwertermittlungen auszurechnen, wenn uns nur irgendeine Stammfunktion der Funktion f bekannt ist.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Ist f eine im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion und F irgendeine Stammfunktion von f , so ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Nach Satz D 7 ist

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

eine Stammfunktion von f im Intervall $\langle a, b \rangle$. Da F ebenfalls eine Stammfunktion von f ist, gibt es (siehe Lerneinheit D 5) eine Konstante c , so daß für jedes x aus dem Intervall $\langle a, b \rangle$ gilt

$$(1) \quad \Phi(x) = F(x) + c.$$

Aus (1) erhalten wir für $x = a$:

$$\Phi(a) = F(a) + c.$$

Nun ist

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0,$$

also

$$c = -F(a)$$

und

$$(2) \quad \Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Setzen wir in (2) $x = b$, so ist

$$\Phi(b) = F(b) - F(a),$$

und wegen

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt$$

ist

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

bzw. nach Umbenennung der Integrationsvariablen

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

w. z. b. w.

Man schreibt auch

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{oder}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

In dem Satz D 9 wurde $a < b$ vorausgesetzt. Ist $a > b$, so gilt ebenfalls

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ist nämlich $b < a$, so ist nach Satz D 9

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit (-1) , so erhalten wir

$$- \int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{bzw.}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Die Sätze D 7 und D 9 stellen den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und damit den Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung dar. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ einer stetigen Funktion f wurde (völlig unabhängig von der Differentialrechnung) durch einen Grenzwert definiert.

Das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ einer stetigen Funktion f erhielten wir durch Umkehrung der Differentiation, so daß letzten Endes die Ermittlung des unbestimmten Integrals einer gegebenen Funktion eine Aufgabe der Differentialrechnung ist.

Insofern stellt also der Begriff des bestimmten Integrals das wesentlich Neue dar.

Mit Hilfe des bestimmten Integrals erhalten wir zu einer stetigen Funktion f einer Stammfunktion, wenn wir das Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze betrachten. Mit Hilfe des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion f wird also die Existenz des unbestimmten Integrals dieser Funktion nachgewiesen (Satz D 7). Andererseits zeigt der Satz D 9, daß man ein bestimmtes Integral einer stetigen Funktion f numerisch leicht berechnen kann, wenn das unbestimmte Integral von f bekannt ist. Damit wird die Berechnung des bestimmten Integrals auf das Aufsuchen einer Stammfunktion zurückgeführt.

$$\square \quad \text{a) } \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \quad \text{b) } \int_{-2}^0 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-2}^0 = 0 - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

$$\text{c) } \int_{-1}^3 (x^3 + x^2 + x + 1) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x \right]_{-1}^3 \\ = \frac{81}{4} + 9 + \frac{9}{2} + 3 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = 37 \frac{1}{3}$$

$$\text{d) } \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}$$

5 Berechnen Sie die bestimmten Integrale der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ in den Intervallen $\langle 0, 2 \rangle$, $\langle 2, 4 \rangle$ und $\langle 0, 4 \rangle$!

6 Beweisen Sie (unter Verwendung des Satzes D 9 und der Regeln (b) und (c) aus der Lerneinheit D 7):

Sind f und g in $\langle a, b \rangle$ stetig, so ist

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \neq 0)$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx!$$

Aufgaben d 29 bis 36

Anwendungen der Integralrechnung

10 Berechnen von Flächeninhalten

Wir betrachten zunächst Flächenstücke, die entweder oberhalb oder unterhalb der x -Achse liegen und von einem Teil der x -Achse begrenzt werden.

Ist f eine im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion und sind die Funktionswerte von f im Intervall $\langle a, b \rangle$ nichtnegativ, so ist der Flächeninhalt des Flächenstückes, das von dem Bild von f , der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, (nach Definition 2)

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

10 Es soll der Flächeninhalt des Flächenstückes, das von dem Bild der Funktion $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 30$, der x -Achse und den Parallelen zur y -Achse durch den lokalen Maximumpunkt bzw. durch den lokalen Minimumpunkt der Kurve begrenzt wird, ermittelt werden.

Lösung:

1) Ermittlung der Integrationsgrenzen:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

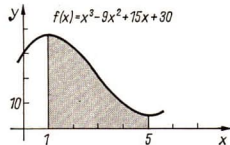
Nullstellen der 1. Ableitung: $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$. Es ist

$$f''(x_1) < 0 \quad \text{und} \quad f''(x_2) > 0.$$

Folglich hat die Funktion an der Stelle 1 ein lokales Maximum und an der Stelle 5 ein lokales Minimum. Ferner ist

$$f(x_1) = 37 \quad \text{und} \quad f(x_2) = 5.$$

Da beide Extrema positiv sind, hat f als stetige Funktion im Intervall $\langle 1; 5 \rangle$ nur positive Funktionswerte (Bild D 12).



D 12

2) Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^5 (x^3 - 9x^2 + 15x + 30) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 30x \right]_1^5 \\
 &= \frac{625}{4} - 375 + \frac{375}{2} + 150 - \left(\frac{1}{4} - 3 + \frac{15}{2} + 30 \right) \\
 &= \frac{624}{4} + \frac{360}{2} - 252 \\
 A &= 84
 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt eines Flächenstückes soll stets eine positive Zahl sein. Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ einer im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktion, deren Funktionswerte in $\langle a, b \rangle$ nicht negativ sind, eine nichtnegative Zahl ist. Das folgt aber unmittelbar aus der Definition des bestimmten Integrals. Ist nämlich f eine in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle x aus $\langle a, b \rangle$, so sind bei einer beliebigen Zerlegung \mathfrak{z}_n des Intervalls $\langle a, b \rangle$ wegen $f(\xi_i^{(n)}) \geq 0$ und $x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)} > 0$ alle Zerlegungssummen

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)}) (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

nichtnegative Zahlen. Demnach enthält *jede* Folge von Zerlegungssummen, die zu einer beliebigen ausgezeichneten Zerlegungsfolge für das Intervall $\langle a, b \rangle$ gehört, nur nichtnegative Glieder. Aus dem Satz B 7 folgt dann für den Grenzwert jeder solchen Folge (s_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

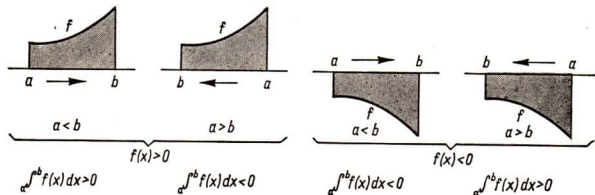
Entsprechend erhält man: Ist f eine im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion, deren Funktionswerte in $\langle a, b \rangle$ nicht positiv sind, so ist $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Diese Aussagen lassen sich noch wie folgt verschärfen:

SATZ: Ist f eine in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion, deren Funktionswerte in $\langle a, b \rangle$ nicht negativ (nicht positiv) sind, und gibt es wenigstens eine Zahl x_0 aus $\langle a, b \rangle$ mit $f(x_0) > 0$ (mit $f(x_0) < 0$), so ist

$$\int_a^b f(x) dx > 0 \quad \left(\int_a^b f(x) dx < 0 \right).$$

D 13



Bezüglich des Vorzeichens eines bestimmten Integrals einer stetigen Funktion f haben wir, wenn f im Integrationsintervall keine Nullstelle besitzt, die im Bild D 13 angeführten Fälle zu unterscheiden.

(Die Integrationsrichtung ist in den Abbildungen jeweils durch einen Pfeil angegeben.)

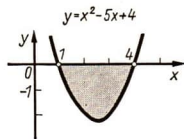
Sind nun die Funktionswerte einer stetigen Funktion f im Intervall $\langle a, b \rangle$ nicht positiv, so wird durch das Bild von f , die x -Achse und die Geraden $x = a$ und $x = b$ ein Flächenstück begrenzt, das nicht oberhalb der x -Achse liegt. Als Flächeninhalt A eines solchen Flächenstückes **definieren wir**

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx .$$

- 11 Der Flächeninhalt des Segmentes, das von der x -Achse und der Parabel $y = x^2 - 5x + 4$ begrenzt wird, ist zu berechnen.

Lösung:

Die Integrationsgrenzen sind die Nullstellen der Funktion $y = x^2 - 5x + 4$, nämlich $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ (Bild D 14). Der Flächeninhalt des Segmentes ist



D 14

$$A = \left| \int_1^4 (x^2 - 5x + 4) dx \right| = - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 = 4,5.$$

Aufgaben d 37 bis 47

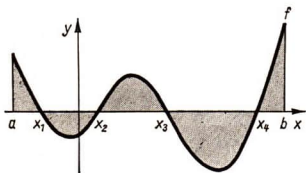
11

Liegt die von dem Bild einer stetigen Funktion f und zwei Parallelen zur y -Achse begrenzte Fläche teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x -Achse, d. h., hat die Funktion f im Integrationsintervall eine Nullstelle, so sind die Teile dieser Fläche, die ober- bzw. unterhalb der x -Achse liegen, getrennt zu berechnen. So ist beispielsweise der Flächeninhalt der im Bild D 15 gerasterten Fläche

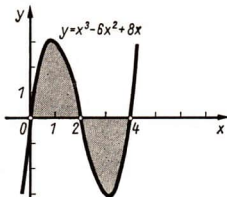
$$A = \int_a^{x_1} f(x) dx + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \left| \int_{x_3}^{x_4} f(x) dx \right| + \int_{x_4}^b f(x) dx,$$

wenn f im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetig ist und x_1, x_2, x_3 und x_4 Nullstellen von f in $\langle a, b \rangle$ sind.

D 15



D 16



Es ist der Flächeninhalt derjenigen Fläche zu berechnen, die von dem Bild der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ und der x -Achse im Intervall $\langle 0; 4 \rangle$ begrenzt wird.

Lösung:

Die gegebene Funktion f hat die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 4$ (Bild D 16). Für das oberhalb der x -Achse liegende Flächenstück ist

$$A_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = 4.$$

Entsprechend erhält man für das unterhalb der x -Achse liegende Flächenstück

$$A_2 = \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| = |-4| = 4.$$

Der Flächeninhalt des gesamten Flächenstückes ist also

$$A = A_1 + A_2 = 8.$$

Es ist zu beachten, daß dieser Flächeninhalt nicht etwa mit dem bestimmten

Integral $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$ übereinstimmt, denn es ist:

$$\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = 0. \quad (\nearrow \text{Übung D 5})$$

Der Flächeninhalt eines Flächenstückes, das von einer stetigen Funktion f , der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, stimmt für $a < b$ nur dann mit dem bestimmten Integral $\int_a^b f(x) dx$ überein, wenn für alle x aus $\langle a, b \rangle$ gilt $f(x) \geq 0$.

Aufgaben d 48 bis 51

12

Es sollen nun Flächenstücke berechnet werden, die von den Bildern zweier Funktionen eingeschlossen werden.

Es seien f_1 und f_2 beliebige Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

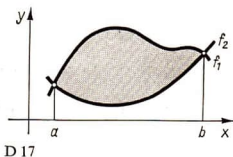
- 1) f_1 und f_2 sind im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetig,
- 2) für jedes x aus $\langle a, b \rangle$ ist $f_1(x) \geq f_2(x)$,
- 3) es ist $f_1(a) = f_2(a)$ und $f_1(b) = f_2(b)$.

Den Flächeninhalt des Flächenstückes, das von den Bildern der Funktionen f_1 und f_2 begrenzt wird, definieren wir folgendermaßen:

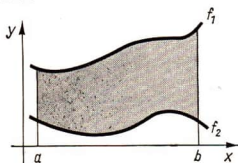
$$A = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

Die Integrationsgrenzen sind in diesem Fall die Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven.

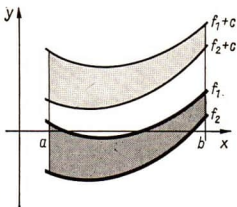
Ebenso wird der Flächeninhalt des im Bild D 18 gerasterten Flächenstückes berechnet, wenn nur die gegebenen Funktionen f_1 und f_2 im Intervall $\langle a, b \rangle$ stetig sind. Allerdings müssen hier die Integrationsgrenzen angegeben werden.



D 18



D 19



Auch wenn gewisse Teile eines Flächenstückes, das von den Geraden $x = a$ und $x = b$ und den Bildern der stetigen Funktionen f_1 und f_2 ($f_1(x) \geq f_2(x)$ für alle x aus $\langle a, b \rangle$) begrenzt wird, unterhalb der x -Achse liegen (Bild D 19), gilt für den Flächeninhalt eines solchen Flächenstückes

$$A = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

Es läßt sich nämlich stets eine positive Zahl c so finden, daß die Funktionen

$$\varphi = f_1 + c \quad \text{und} \quad \psi = f_2 + c$$

im Intervall $\langle a, b \rangle$ keine Nullstelle haben. Das Flächenstück, das von den Bildern der Funktionen φ und ψ und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, ist dem ursprünglichen Flächenstück kongruent, denn es entsteht aus dem ursprünglichen durch Verschiebung parallel zur y -Achse. Nun gilt aber für jedes x aus $\langle a, b \rangle$

$$\varphi(x) - \psi(x) = f_1(x) + c - (f_2(x) + c) = f_1(x) - f_2(x). \quad \text{Also ist}$$

$$A = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

Bei der Berechnung des Flächeninhaltes solcher Flächenstücke braucht man also die eventuell im Integrationsintervall vorhandenen Nullstellen der Funktionen f_1 und f_2 nicht zu berücksichtigen.

13

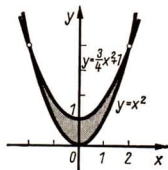
Welchen Flächeninhalt hat das Flächenstück, das von den Parabeln $y = x^2$ und $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ begrenzt wird?

Lösung:

Die Abszissen der Schnittpunkte der Parabeln sind diejenigen Zahlen x , für die die Funktionswerte der Funktionen $y = x^2$ und $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ übereinstimmen, d. h., es sind diejenigen Zahlen x , für die gilt: $x^2 = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

Also sind die Abszissen der Schnittpunkte der Parabeln die Lösungen der Gleichung $x^2 = \frac{3}{4}x^2 + 1$. Diese Lösungen sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Das Bild D 20 zeigt das zu berechnende Flächenstück. Es ist

$$A = \int_{-2}^2 \left(\frac{3}{4}x^2 + 1 - x^2 \right) dx = 2 \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx = \frac{8}{3}.$$



- 7 Begründen Sie, daß für jede gerade stetige Funktion f

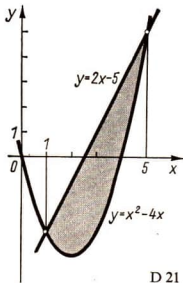
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \text{ gilt!}$$

- 14 Es soll der Flächeninhalt des Segments ermittelt werden, das von der Geraden $y = 2x - 5$ und der Parabel $y = x^2 - 4x$ begrenzt wird.

Lösung:

Die Abszissen der Schnittpunkte von Gerade und Parabel erhalten wir als Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x = 2x - 5$.

Diese Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$; folglich schneidet die Gerade die Parabel an den Stellen 1 und 5 (Bild D 21). Der Flächeninhalt des Segmentes ist



D 21

$$\begin{aligned} A &= \int_1^5 (2x - 5 - x^2 + 4x) dx \\ &= \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x \right]_1^5 \\ A &= \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

- 8 Die Parabeln $y = x^2 - 1$ und $y = -2x^2 + 11$ begrenzen ein Flächenstück. Zeichnen Sie dieses Flächenstück, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt!

Aufgaben d 52 bis 60

13 Physikalische Arbeit bei veränderlicher Kraft

Um einen Körper, an dem eine Kraft \vec{F} angreift, zu verschieben, muß eine Arbeit aufgewendet werden. Ist F der Betrag dieser Kraft und s die Länge des zurückgelegten Weges, so beträgt die Arbeit

$$W = F \cdot s.$$

Diese Definition der mechanischen Arbeit gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß Kraftrichtung und Wegrichtung zusammenfallen und daß die Kraft \vec{F} längs des (geradlinigen) Weges s konstant ist.¹

¹ Fallen Kraft- und Wegrichtung nicht zusammen, so bezeichnet F den Betrag der in die Wegrichtung fallenden Kraftkomponente von F .

Ist die Kraft längs des (geradlinigen) Weges s nicht konstant, so wird die mechanische Arbeit durch ein Integral definiert.

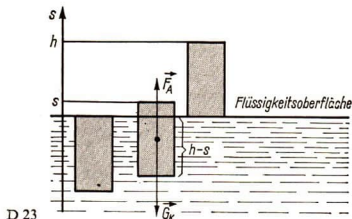
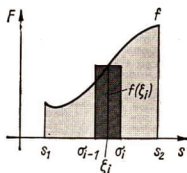
Soll z. B. ein (punktförmig gedachter) Körper längs einer Geraden von einem Punkt s_1 zum Punkt s_2 verschoben werden und ist der Zusammenhang zwischen den Punkten s dieses Weges und dem Betrag F der in die Wegrichtung fallenden (veränderlichen) Kraftkomponente durch eine **stetige** Funktion f mit $F = f(s)$ gegeben (Bild D 22), so wird die aufzuwendende mechanische Arbeit durch das Integral

$$W = \int_{s_1}^{s_2} f(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} F ds$$

definiert.

Man nennt dieses Integral das „**Wegintegral der Kraft**“.

D 22



- 9 Erläutern Sie, wie man dieses Integral als Grenzwert einer Folge von Zerlegungssummen erhält! Welche physikalische Bedeutung haben die Summanden jeder Zerlegungssumme der betrachteten Folge?

- 15 Welche Arbeit ist erforderlich, um einen quaderförmigen Körper mit dem Gewicht \vec{G}_K , der so in eine Flüssigkeit mit der Wichte γ_{F1} eintaucht, daß seine Grundfläche mit der Flüssigkeitsoberfläche zusammenfällt, vollständig aus der Flüssigkeit zu heben? (Dabei wird angenommen, daß das Flüssigkeitsniveau konstant bleibt.)

Lösung:

Der Betrag F der aufzuwendenden Kraft ist gleich der Differenz aus dem Betrag G_K des Gewichtes des Körpers und dem Betrag F_A des Auftriebs, den der Körper in der Flüssigkeit erfährt. Nach dem Archimedischen Prinzip ist der Auftrieb gleich dem Gewicht der von dem Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge. Hat man den Körper schon zum Teil aus der Flüssigkeit herausgehoben (Bild D 23) und ist A die Grundfläche des Körpers und h seine Höhe, so gilt

$$F_A = A(h - s) \cdot \gamma_{F1}.$$

Folglich ist

$$F = f(s) = G_K - A(h - s) \gamma_{F1}.$$

Die aufzuwendende Arbeit beträgt dann

$$\begin{aligned} W &= \int_0^h [(G_K - A\gamma_{F1}h) + A\gamma_{F1}s] ds \\ &= \left[(G_K - A\gamma_{F1}h)s + \frac{1}{2}A\gamma_{F1}s^2 \right]_0^h \\ &= (G_K - A\gamma_{F1}h)h + \frac{1}{2}A\gamma_{F1}h^2 \\ &= G_K h - \frac{1}{2}A\gamma_{F1}h^2. \end{aligned}$$

- 16 Welche Arbeit ist aufzuwenden, um ein Raumschiff mit der Masse $m = 10^4$ kg bis zum Abstand R von der Erdoberfläche zu bringen? ($R = 6,37 \cdot 10^6$ m ist der Erdradius; die Masse der Erde beträgt $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg).

Lösung:

Der Betrag der Gravitationskraft, der das Raumschiff unterliegt, beträgt im Abstand r vom Erdmittelpunkt

$$F = k \cdot \frac{Mm}{r^2} \quad k = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$$

Die aufzuwendende Arbeit ist dann

$$\begin{aligned} W &= \int_R^{2R} k \frac{Mm}{r^2} dr = kMm \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{2R} \\ W &= k \cdot Mm \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right] = \frac{k \cdot Mm}{2R}. \end{aligned}$$

Setzen wir die gegebenen Größen ein, so erhalten wir

$$W = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 10^4 \text{ kg}}{2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

$$W = \frac{6,67 \cdot 5,98}{2 \cdot 6,37} \cdot 10^{11} \text{ N m} \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ N m}.$$

Aufgaben d 61 und 62

E. Vektorrechnung und analytische Geometrie

Seite

162 **Verschiebungen; Addition von Verschiebungen**

Addition von Verschiebungen · Subtraktion von Verschiebungen

170 **Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl**

174 **Begriff des Vektorraumes**

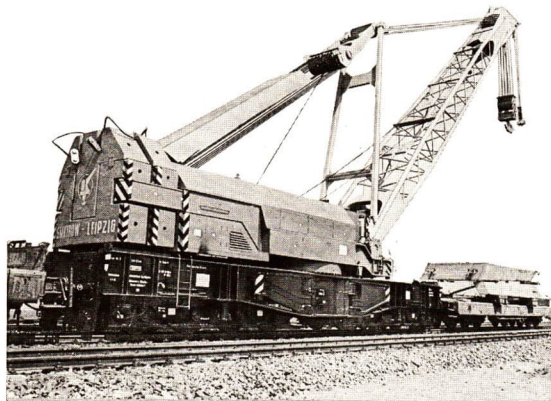
176 **Basen und Koordinatensysteme in der Ebene**

Linearkombinationen von Vektoren · Basis und Komponenten · Koordinatensysteme · Koordinaten · Transformation eines Koordinatensystems · Additionstheoreme der Winkelfunktionen

189 **Analytische Geometrie der Geraden in der Ebene**

Parametergleichung einer Geraden · Punktgleichung einer Geraden · Zweipunktgleichung einer Geraden · Normalform der Geradengleichung, Achsenabschnittsgleichung · Allgemeine Geradengleichung · Schnittpunkt zweier Geraden · Teilverhältnis

Das Bild zeigt einen schweren Eisenbahndrehkran aus dem VEB Schwermaschinenbau S. M. Kirow in Leipzig, der u. a. zum Brückenbau eingesetzt wird. Die Ermittlung und zeichnerische Darstellung des Kräfteverlaufs beim Einsatz einer solchen Hebevorrichtung kann mit Hilfe der Vektorrechnung erfolgen. Die Kräfte werden dabei durch Pfeile dargestellt, deren Länge, Richtung und Orientierung von Bedeutung sind.



E

1 Verschiebungen

Wird für eine Strecke \overline{AB} ein Richtungs- oder Durchlaufssinn festgelegt, dann nennt man die Strecke eine **gerichtete Strecke** oder **Pfeil** und schreibt für sie \overrightarrow{AB} , wenn die Strecke von A nach B durchlaufen wird, und \overrightarrow{BA} , wenn die Strecke von B nach A durchlaufen wird. In Zeichnungen kennzeichnet man den Richtungssinn einer gerichteten Strecke durch eine auf den Endpunkt weisende Pfeilspitze (Bild E 1).

Eine gerichtete Strecke \overrightarrow{AB} ist demnach festgelegt durch Angabe ihres *Anfangspunktes* A und ihres *Endpunktes* B . Man kann sie jedoch auch charakterisieren durch die Angabe ihres *Anfangspunktes*, ihrer *Länge*, ihrer *Richtung* und ihres *Richtungssinnes*.¹



Im Physikunterricht fanden gerichtete Strecken Anwendung bei der Veranschaulichung der sogenannten „vektoriellen Größen“, z. B. der Kraft und der Geschwindigkeit. Im Mathematikunterricht spielen gerichtete Strecken bei Verschiebungen eine Rolle.

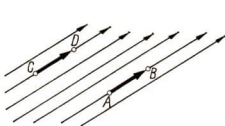
Ist in einer Ebene eine gerichtete Strecke \overrightarrow{AB} gegeben, so können wir zu *jedem* von A verschiedenen Punkt C dieser Ebene genau einen Punkt D finden, so daß die gerichtete Strecke \overrightarrow{CD} mit \overrightarrow{AB} gleich lang ist, der gleichen Richtung angehört und diese Richtung mit dem gleichen Richtungssinn vertritt (Bilder E 3 und E 4).

Bezeichnet man die Punkte A und C als Originalpunkte und die Punkte B sowie D als Bildpunkte, so haben wir nach der oben angegebenen Vorschrift jedem Punkt der Ebene einen Bildpunkt zugeordnet, und zwar auf umkehrbar eindeutige Weise (denn jedem Bildpunkt entspricht auch genau ein Originalpunkt). Wir haben also eine **umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich** festgelegt; sie ist Ihnen unter der Bezeichnung **Verschiebung** bekannt.

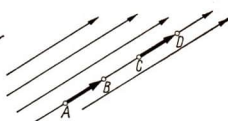
Bei dem oben angegebenen Konstruktionsverfahren für den Bildpunkt D eines Punktes C sind die Punkte A, B, D und C in der angegebenen Reihenfolge Eckpunkte eines Parallelogramms, wenn C nicht auf der Geraden AB liegt (Bild E 5). Liegt dagegen C auf der Geraden AB , so entartet das Parallelogramm in die doppelt überdeckte Strecke \overline{AD} (Bild E 6). Für jeden nicht auf der Geraden

E

E 2



E 3

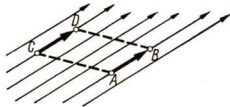


E 4

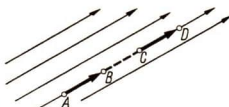
¹ Unter einer *Richtung* versteht man eine Schar zueinander paralleler Geraden. Ist für jede Gerade einer Richtung ein Durchlaufssinn angegeben, und zwar so, daß die Pfeilspitzen, welche den Durchlaufssinn der einzelnen Geraden angeben, alle nach ein und derselben Seite einer Geraden zeigen, die die Schar schneidet (Bild E 2), dann sagt man:

Die *Richtung* ist mit einem Richtungs- oder Durchlaufssinn versehen, oder man nennt sie eine *orientierte Richtung*.

E 5



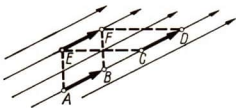
E 6



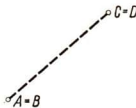
AB gelegenen Punkt E und dessen Bildpunkt F sind jedoch wieder die Punkte A, B, F und E sowie C, D, F und E Eckpunkte von Parallelogrammen (Bild E 7). Sieht man insbesondere die identische Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt sich selbst als Bildpunkt zuordnet, als Sonderfall der Verschiebung an, dann entartet für diese „Verschiebung“ wegen $A = B$ und $C = D$ dieses Parallelogramm in die doppelt überdeckte Strecke \overline{AC} (Bild E 8).

Gerichtete Strecken \overline{AB} und \overline{CD} , die sich in einer der soeben beschriebenen gegenseitigen Lagen befinden, nennt man **parallelgleich**.

E 7



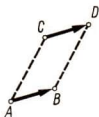
E 8



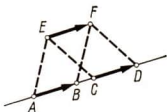
DEFINITION: Zwei gerichtete Strecken \overline{AB} und \overline{CD} sind **parallelgleich**,

- wenn die Punkte A, B, C und D nicht auf ein und derselben Geraden liegen und die Strecke \overline{AB} parallel zur Strecke \overline{CD} sowie die Strecke \overline{AC} parallel zur Strecke \overline{BD} ist (Bild E 9) oder
- wenn die Punkte A, B, C und D auf ein und derselben Geraden liegen und es Punkte E und F so gibt, daß sowohl \overline{AB} und \overline{EF} als auch \overline{CD} und \overline{EF} nach a) parallelgleich sind (Bild E 10), oder
- wenn $A = B$ und $C = D$ ist (Bild E 11).

E 9



E 10



E 11



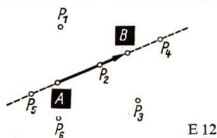
Unter Benutzung des Begriffs „parallelgleich“ können wir die Verschiebungen einer Ebene folgendermaßen definieren:

DEFINITION: *Verschiebung einer Ebene* heißt eine umkehrbar eindeutige Abbildung dieser Ebene auf sich, bei der alle durch Original- und Bildpunkt bestimmten gerichteten Strecken parallelgleich sind.

Mit anderen Worten:

Eine Verschiebung einer Ebene ist eine Menge geordneter Punktepaare (Originalpunkt, Bildpunkt), deren jedes eine gerichtete Strecke bestimmt, wobei alle durch Original- und Bildpunkt bestimmten gerichteten Strecken parallelgleich sind. Jedes dieser Punktepaare nennt man einen **Repräsentanten** der Verschie-

bung, denn wegen der Parallelgleichheit der durch die Repräsentanten einer Verschiebung bestimmten gerichteten Strecken ist eine Verschiebung durch die Angabe eines Punktpaares (Originalpunkt, Bildpunkt) bzw. der durch ein solches Paar bestimmten gerichteten Strecke eindeutig charakterisiert.



E 12

- ① Übernehmen Sie die Aufgabenstellung aus Bild E 12, und ermitteln Sie mit Hilfe zweier Zeichendreiecke die Bildpunkte P'_1, \dots, P'_6 von P_1, \dots, P_6 bei der durch \overrightarrow{AB} charakterisierten Verschiebung!

2

Da eine Verschiebung durch eine gerichtete Strecke eindeutig bestimmt ist, sind die Verschiebungen einer Ebene „vektorielle Größen“ in dem in der Physik geprägten Sinne. Später werden noch andere mathematische Beispiele für „vektorielle Größen“ angeführt. Zunächst soll jedoch zur Klärung des allgemeinen Vektorbegriffs die Menge der Verschiebungen etwas näher untersucht werden.



Neben den **Verschiebungen einer Ebene** kennt man noch die **Verschiebungen einer Geraden** und die **Verschiebungen des Raumes**.

➤ **Verschiebung des Raumes (einer Geraden)** heißt eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Raumes (dieser Geraden) auf sich, bei der alle durch Original- und Bildpunkt bestimmten gerichteten Strecken parallelgleich sind.

Da die **Verschiebungen des Raumes**, die **Verschiebungen einer Ebene** und die **Verschiebungen einer Geraden** die gleichen grundlegenden Eigenschaften haben, stellen wir in den vier folgenden Lerneinheiten alle Betrachtungen im Raum an, ohne darauf ständig hinzuweisen; für die Verschiebungen jeder beliebigen Ebene und jeder Geraden gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten.

Wir bezeichnen die Verschiebungen im allgemeinen mit Frakturbuchstaben, z. B. a, b, c, ξ und veranschaulichen sie, indem wir eine der durch die Repräsentanten der Verschiebung bestimmten Strecken zeichnen.¹ Wir können der Bezeichnung einer Verschiebung a aber auch einen ihrer Repräsentanten, z. B. das geordnete Punktpaar $[A; B]$, zugrunde legen. In solchen Fällen steht für a das Zeichen \overrightarrow{AB} , und wir schreiben $a = \overrightarrow{AB}$. Unter \overrightarrow{AB} verstehen wir also stets die **Verschiebung**, die A in B abbildet und **nicht** die **gerichtete Strecke** \overline{AB} . Diesen Sachverhalt müssen wir stets im Auge haben, insbesondere bei der Interpretation von Zeichnungen, in denen die Veranschaulichungen von Verschiebungen, d. h. also gerichtete Strecken, der Einfachheit halber mit der Bezeichnung der durch sie bestimmten Verschiebung beschriftet werden.

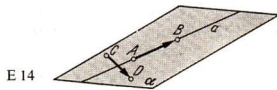
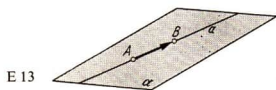
¹ Im Physikunterricht werden die vektoriellen Größen stets mit einem Pfeil gekennzeichnet, eine Kraft z. B. durch \vec{F} .

	Veranschaulichung	Bezeichnung	Repräsentant
gerichtete Strecke		\overrightarrow{AB}	—
Verschiebung		\vec{CD} oder α	$[C; D]$

Alle Repräsentanten einer Verschiebung α bestimmen gerichtete Strecken, die dieselbe Richtung und denselben Richtungssinn festlegen sowie als gegenüberliegende Seiten von Parallelogrammen (die auch entartet sein können) gleich lang sind. Die Länge der den Repräsentanten einer Verschiebung $\alpha = \overrightarrow{AB}$ entsprechenden gerichteten Strecken nennt man die **Verschiebungsweite** oder den

Betrag der Verschiebung und schreibt dafür $|\alpha|$ oder $|\overrightarrow{AB}|$. Legen zwei Verschiebungen α und β dieselbe Richtung und denselben Richtungssinn fest, so nennt man sie **gleichgerichtet**, legen sie dieselbe Richtung und verschiedene Richtungssinne fest, dann nennt man sie **entgegengesetzt gerichtet**. Insbesondere bezeichnet man entgegengesetzt gerichtete Verschiebungen gleichen Betrags als **entgegengesetzte Verschiebungen**.

Ist z. B. \overrightarrow{AB} eine Verschiebung, dann ist \overrightarrow{BA} die zu \overrightarrow{AB} entgegengesetzte Verschiebung.



- ② Gibt es zu jeder Verschiebung \overrightarrow{AB} einer Geraden a
- eine Verschiebung \overrightarrow{AB} einer Ebene α , die die Gerade enthält (Bild E 13),
 - eine Verschiebung \overrightarrow{AB} des Raumes?
- ③ Wodurch unterscheidet sich die Verschiebung \overrightarrow{AB} der Geraden a
- von der Verschiebung \overrightarrow{AB} der Ebene α ,
 - von der Verschiebung \overrightarrow{AB} des Raumes?
- ④ Entspricht jeder Verschiebung einer die Punkte A und B enthaltenden Ebene α eine Verschiebung der durch A und B bestimmten Geraden (Bild E 14)?

Aufgaben e 1 bis 5

3 Addition von Verschiebungen

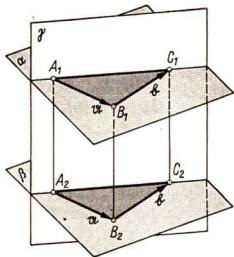
Zwei Kräfte, die an einem Punkt angreifen, kann man zusammensetzen (Parallelogramm der Kräfte). Entsprechend kann man ein Parallelogramm zweier Geschwindigkeiten oder ein Parallelogramm zweier Beschleunigungen zeichnen.

Das Zusammensetzen von Kräften bezeichnet man auch als *Addition dieser Kräfte*. Analog zur Addition von Kräften, die an einem Punkt angreifen, kann

man in der Menge der Verschiebungen eine Operation einführen, die ebenfalls Addition genannt wird. Um diese Operation definieren zu können, beweisen wir zunächst folgenden bereits bekannten Satz:

SATZ: Das Ergebnis der Hintereinanderausführung zweier Verschiebungen ist eine Verschiebung.

E 15



Beweis: Gegeben seien zwei beliebige Verschiebungen a und b . Wir wählen zwei beliebige Punkte A_1 und A_2 und bezeichnen die Bildpunkte von A_1 bzw. A_2 bei der Verschiebung a mit B_1 bzw. B_2 und deren Bildpunkte bei der Verschiebung b mit C_1 bzw. C_2 ; es sei also $a = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ und $b = \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_2C_2}$ (Bild E 15).

Da a und b als Verschiebungen umkehrbar eindeutige Abbildungen sind, wird bei der Hintereinanderausführung von a und b in der angegebenen Reihenfolge jedem Punkt wieder umkehrbar eindeutig ein Punkt zugeordnet, z. B. dem Punkt A_1 der Punkt C_1 , dem

Punkt A_2 der Punkt C_2 . Wenn wir nun zeigen können, daß die gerichteten Strecken $\overline{A_1C_1}$ und $\overline{A_2C_2}$ unabhängig von der Wahl der Punkte A_1 und A_2 parallelgleich sind, d. h. ein und dieselbe Verschiebung bestimmen, dann ist der Satz bewiesen. Wir wollen hier nur den Fall beweisen, bei dem

1. die Punkte A_1, B_1 und C_1 nicht auf einer Geraden liegen und
 2. der Punkt A_2 nicht in der Ebene α liegt, die durch A_1, B_1, C_1 aufgespannt wird.
- Die Punkte A_2, B_2, C_2 bestimmen wegen der Parallelität die Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ sowie $\overline{B_1C_1}$ und $\overline{B_2C_2}$ eine Ebene β , die zu α parallel ist, aber mit α keinen Punkt gemeinsam hat. Aus der Parallelgleichheit der gerichteten Strecke $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ sowie $\overline{B_1C_1}$ und $\overline{B_2C_2}$ folgt $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$ und $\overline{B_1B_2} \parallel \overline{C_1C_2}$, woraus sich $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{C_1C_2}$ ergibt.¹ Die Beziehung $\overline{A_1C_1} \parallel \overline{A_2C_2}$ folgt daraus, daß diese Strecken Geraden angehören, die einerseits in den zueinander parallelen Ebenen α und β liegen, andererseits jedoch in der durch die parallelen Geraden A_1A_2 bzw. C_1C_2 bestimmten Ebene γ . Diese Geraden haben also als Geraden der Ebene γ die gleiche Richtung und sind damit parallel zueinander. Also ist auch $\overline{A_1C_1} \parallel \overline{A_2C_2}$ und damit $\overline{A_1C_1}$ parallelgleich $\overline{A_2C_2}$,
w. z. b. w.

Dem Satz E 4 zufolge können wir in Analogie zur Addition der an einem Punkt angreifenden Kräfte jede Nacheinanderausführung zweier Verschiebungen a und b als **Addition** dieser Verschiebungen auffassen und die resultierende Verschiebung als **Summe von a und b** .

DEFINITION: Sind $a = \overrightarrow{AB}$ und $b = \overrightarrow{BC}$ zwei beliebige Verschiebungen, dann heißt die als Ergebnis der Nacheinanderausführung von a und b resultierende Verschiebung $c = \overrightarrow{AC}$ die **Summe** von a und b .
Man bezeichnet sie mit $c = a + b$ oder schreibt $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

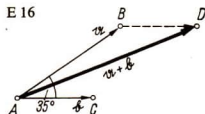
¹ Man kann zeigen: Ist eine Gerade zu einer zweiten parallel und ist diese zu einer dritten parallel, so ist auch die erste Gerade zur dritten parallel.

Die Summe aus einer Verschiebung $\vec{a} = \vec{AB}$ und ihrer Umkehrung $\vec{b} = \vec{BA}$ ist die **identische Abbildung** \vec{AA} . Man bezeichnet sie mit \circ und nennt sie auch **Nullverschiebung**, weil für sie wie für die Null bei den reellen Zahlen für jede beliebige Verschiebung $\vec{a} = \vec{AB}$ die Beziehung $\vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB}$ oder $\circ + \vec{a} = \vec{a} + \circ = \vec{a}$ gilt.

1 Für zwei Verschiebungen $\vec{a} = \vec{AB}$ bzw. $\vec{b} = \vec{AC}$ gelte:

$|\vec{a}| = 2,5 \text{ cm}$; $|\vec{b}| = 1,5 \text{ cm}$ und $\sphericalangle CAB = 35^\circ$.

Es sollen \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AD}$ veranschaulicht sowie $|\vec{a} + \vec{b}|$, $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle CAD$ ermittelt werden.



Zeichnerische Lösung: Vergleiche Bild E 16!

Rechnerische Lösung: Die gerichteten Strecken \vec{AB} und \vec{AC} bestimmen ein Parallelogramm mit den Seiten 2,5 cm und 1,5 cm und den Winkeln 35° und $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$. Der Betrag von $\vec{a} + \vec{b}$ ist gleich der Länge der Diagonalen \vec{AD} des Parallelogramms, die mit Hilfe des Kosinussatzes errechnet werden kann.

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \sphericalangle ABC \\ 2,5^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \cdot \cos 145^\circ &= 6,25 + 2,25 + 7,5 \cdot \cos 35^\circ \\ &\approx 8,5 + 6,1 = 14,6 \\ \overline{AD} &\approx 3,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

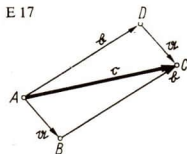
Die Winkel können ebenfalls trigonometrisch ermittelt werden.

Wie die für reelle Zahlen erklärte Addition ist die Addition von Verschiebungen kommutativ und assoziativ, d. h. für beliebige Verschiebungen \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} gelten die folgenden Beziehungen.

- | | |
|---|---------------------|
| (1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ | (Kommutativgesetz), |
| (2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ | (Assoziativgesetz). |

Beweis von (1): Wir gehen von beliebigen Verschiebungen \vec{a} und \vec{b} aus und bestimmen nach Wahl eines beliebigen Punktes A Punkte B , C und D so, daß $\vec{a} = \vec{AB} = \vec{DC}$ und $\vec{b} = \vec{AD} = \vec{BC}$ ist (Bild E 17). Nun können wir schreiben

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}, \\ \vec{b} + \vec{a} &= \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}. \end{aligned}$$



Die gerichtete Strecke \vec{AC} charakterisiert also sowohl die Verschiebung $\vec{a} + \vec{b}$ als auch die Verschiebung $\vec{b} + \vec{a}$, d. h. es gilt

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Da das Ergebnis unserer Überlegungen nicht von der Wahl des Punktes A abhängt, ist damit die Gültigkeit der Beziehung (1) bewiesen.

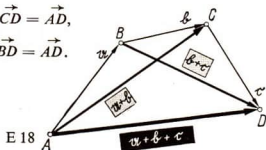
Beweis von (2): Nach Wahl eines Punktes A bestimmen wir Punkte B, C und D so, daß $a = \vec{AB}$, $b = \vec{BC}$ und $c = \vec{CD}$ ist (Bild E 18) und können schreiben

$$(a + b) + c = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD},$$

$$a + (b + c) = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar

$$(a + b) + c = a + (b + c), \text{ w. z. b. w.}$$



- 5) Gelten die angeführten Beweise für die Kommutativität und Assoziativität der Addition von Verschiebungen auch, wenn die Verschiebungen a, b und c gleich- bzw. entgegengesetzt gerichtet sind?
- 6) Die Addition von Kräften haben Sie im Physikunterricht unter der Bezeichnung „Zusammensetzen von Kräften“ kennengelernt. Überprüfen Sie, ob für die Addition von an einem Punkt angreifenden Kräften ebenfalls das Kommutativ- und das Assoziativgesetz gelten!

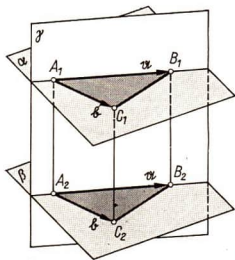
Die Beziehung (2) bringt zum Ausdruck, daß es gleichgültig ist, in welcher Weise man in einer Summe von drei Verschiebungen Summanden durch Klammern zusammenfaßt. Die Klammern sind hier also überflüssig und können weggelassen werden.

Aufgaben e 6 bis 10

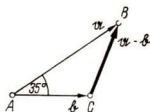
4 Subtraktion von Verschiebungen

Es seien a und b zwei beliebige Verschiebungen sowie A_1 und A_2 zwei beliebige Punkte (Bild E 19). Bestimmen wir nun Punkte B_1, B_2, C_1 und C_2 so, daß $a = \vec{A_1B_1} = \vec{A_2B_2}$ und $b = \vec{A_1C_1} = \vec{A_2C_2}$, dann läßt sich analog zum Beweis des Satzes E 4 sagen, daß für jede Wahl der Punkte A_1 und A_2 die gerichteten Strecken $\vec{B_1C_1}$ und $\vec{B_2C_2}$ parallelgleich sind. Durch die Verschiebungen a und b wird also auf eindeutige Weise eine Verschiebung $x = \vec{B_1C_1} = \vec{B_2C_2}$ festgelegt, für die gilt $a + x = b$.

Wie im Bereich der reellen Zahlen können wir deshalb definieren:



E 19



E 20

DEFINITION: *Differenz zweier beliebiger Verschiebungen* \vec{b} und \vec{a} heißt die Verschiebung \vec{x} , für die die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ gilt. Man bezeichnet sie mit $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$.

Für zwei Verschiebungen $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bzw. $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ gelte:

$$|\vec{a}| = 2,5 \text{ cm}; |\vec{b}| = 1,5 \text{ cm} \quad \text{und} \quad \sphericalangle CAB = 35^\circ.$$

Es soll $|\vec{a} - \vec{b}|$ ermittelt werden.

Zeichnerische Lösung: Vergleiche Bild E 20!

Rechnerische Lösung: Die gerichteten Strecken \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} bilden mit der gesuchten gerichteten Strecke $\overrightarrow{CB} = |\vec{a} - \vec{b}|$ ein Dreieck. Zur Berechnung der Länge von \overrightarrow{CB} wenden wir den Kosinussatz an.

$$\overrightarrow{CB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \cos 35^\circ$$

$$2,5^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \cdot \cos 35^\circ = 6,25 + 2,25 - 7,5 \cdot 0,819 \approx 2,36$$

$$\overrightarrow{CB} \approx 1,54 \text{ cm}$$

Aus der Definition der Differenz zweier Verschiebungen lassen sich für das formale Rechnen mit Verschiebungen folgende Regeln herleiten:

I.) $\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$; II.) $\vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}$; III.) $\vec{a} = -(-\vec{a})$ IV.) $\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$; V.) $-(\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b}$; VI.) $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$

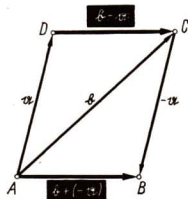
Dabei wurden mit \vec{a} und \vec{b} zwei beliebige Verschiebungen und mit $-\vec{a}$ die zu \vec{a} **entgegengesetzte Verschiebung** bezeichnet.

Wir zeigen nun die Gültigkeit der Regeln I, II und IV:

Regel I: Für $\vec{x} = \vec{a} - \vec{0}$ kann nach der Definition der Differenz zweier Verschiebungen die Gleichung $\vec{0} + \vec{x} = \vec{a}$ geschrieben werden, die wegen $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ in $\vec{x} = \vec{a}$ übergeht. Für jede beliebige Verschiebung \vec{a} ist folglich $\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$.

Regel II: Für $\vec{x} = \vec{0} - \vec{a}$ kann hier die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ geschrieben werden. Weil einerseits die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ für beliebige \vec{a} und \vec{b} (also auch für $\vec{b} = \vec{0}$) genau eine Lösung \vec{x} besitzt und andererseits einander entgegengesetzte Verschiebungen die Summe $\vec{0}$ haben, muß im vorliegenden Falle $\vec{x} = -\vec{a}$ sein. Folglich ist $\vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}$ für jedes \vec{a} .

Regel IV: (Bild E 21). Wir beweisen die Gültigkeit der Regel IV, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ die Verschiebung $-\vec{a}$ addieren,



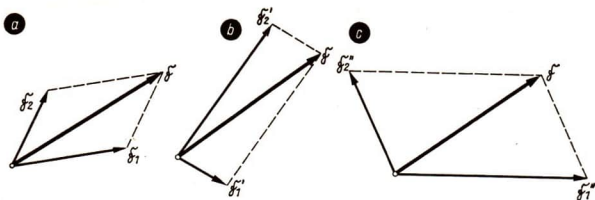
E 21

$$(3) \quad -\vec{a} + \vec{a} + \vec{x} = -\vec{a} + \vec{b},$$

auf der linken Seite von (3) für $-\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$ und für $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ schreiben und auf der rechten Seite $-\vec{a}$ und \vec{b} nach (1) vertauschen. Die Lösung $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ der Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ nimmt dann die Gestalt $\vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a})$ an. Damit haben wir gezeigt, daß für beliebige Verschiebungen \vec{a} und \vec{b} die Beziehung

$$(4) \quad \vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$$

gilt, daß also die Differenz von \vec{b} und \vec{a} auch als Summe von \vec{b} und $-\vec{a}$ aufgefaßt werden kann.



E 22

Im Physikunterricht wurde nach dem Zusammensetzen von Kräften auch das Zerlegen einer Kraft in Teilkräfte (Komponenten) behandelt. Dabei wurde festgestellt, daß man in der Menge der an einem Punkt P angreifenden Kräfte eine Kraft \vec{F} auf verschiedene Weise in Teilkräfte zerlegen kann (Bild E 22). Wird jedoch eine dieser Komponenten \vec{F}_1 mit dem gleichen Angriffspunkt wie \vec{F} vorgegeben, dann ist die zweite Komponente \vec{F}_2 eindeutig bestimmt, und es gilt: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$. Das Auffinden von \vec{F}_2 ist nichts anderes als das Bestimmen der Differenz $\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1$.

Aufgaben e 11 bis 25

Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl

5

- 7) Gegeben sei eine beliebige Verschiebung a . Bestimmen Sie zeichnerisch je einen Repräsentanten der Summe $a + a + a$ und $(-a) + (-a)$! Vergleichen Sie diese Summen mit a !

Für die Verschiebungen $a + a + a$ und $(-a) + (-a)$ schreiben wir in Analogie zum Rechnen mit reellen Zahlen kürzer entsprechend $3a$ bzw. $2(-a)$.

DEFINITION: Produkt einer Verschiebung a mit einer reellen Zahl λ heißt die Verschiebung, deren Betrag das $|\lambda|$ -fache des Betrages von a ist und die für $\lambda \geq 0$ mit a und für $\lambda < 0$ mit $-a$ gleichgerichtet ist.

Das Produkt wird mit λa bezeichnet.

Aus dieser Definition geht unmittelbar hervor, daß für beliebige λ und a gilt:

I.) $ \lambda a = \lambda a $;	II.) $0 \cdot a = 0$;	III.) $\lambda 0 = 0$
IV.) $1 a = a$;	V.) $-1 a = -a$	

Darüber hinaus gelten für die so definierte Multiplikation von Verschiebungen mit reellen Zahlen noch folgende Rechengesetze:

$$(5) (\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$$

$$(6) \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$$

$$(7) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a$$

(1. Distributivgesetz)

(2. Distributivgesetz)

(Assoziativgesetz)

(Dabei sind a und b beliebige Verschiebungen, λ und μ sind beliebige reelle Zahlen.)

Daß diese Rechengesetze gelten, wenn $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $a = 0$ oder $b = 0$ ist, kann man sich sofort überlegen. Daß die Rechengesetze (5) bis (7) auch gelten, wenn diese Größen von Null bzw. von der identischen Abbildung verschieden sind, werden wir jetzt zeigen.

Die Gültigkeit von (7) folgt aus der Definition der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl. Daraus ergibt sich nämlich, daß die Verschiebung $\lambda(\mu a)$ den Betrag $|\lambda| |\mu a| = |\lambda| |\mu| |a|$ und die Verschiebung $(\lambda\mu) a$ den Betrag $|\lambda\mu| |a| = |\lambda| |\mu| |a|$ hat, beide Beträge also gleich sind, und daß im Falle $\lambda < 0$, $\mu > 0$ die Verschiebung μa mit a gleichgerichtet und die Verschiebungen $\lambda(\mu a)$ und $(\lambda\mu) a$ mit $-a$ und damit einander gleichgerichtet sind. Da wir in den verbleibenden Fällen $\lambda > 0$, $\mu > 0$ bzw. $\lambda > 0$, $\mu < 0$ bzw. $\lambda < 0$, $\mu < 0$ ganz analoge Überlegungen anstellen können, ist die Allgemeingültigkeit von (7) bewiesen.

Das Rechengesetz (5) kann, gestützt auf die Definition der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl und das Ergebnis der Aufgabe 1 b, ebenso bewiesen werden.

6

Bevor wir zeigen, daß auch (6) gilt, führen wir eine neue Bezeichnung ein.

DEFINITION: Zwei Verschiebungen a und b sind *parallel zueinander*, wenn es eine reelle Zahl λ gibt, für die $a = \lambda b$ oder $b = \lambda a$ ist.

Als Abkürzung schreibt man für a parallel b kurz $a \parallel b$.

Wenn in $a = \lambda b$ oder $b = \lambda a$

die Zahl λ positiv ist, schreibt man speziell $a \uparrow\uparrow b$,

die Zahl λ negativ ist, schreibt man speziell $a \uparrow\downarrow b$.

Ist a nicht parallel zu b , schreibt man $a \nparallel b$.

3

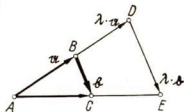
Zwei beliebige gleich- bzw. entgegengesetzt gerichtete Verschiebungen sind parallel zueinander.

Insbesondere ist nach den Regeln II bzw. IV bzw. V auf Seite 170 jede Verschiebung parallel zu

- der identischen Abbildung, d. h. $a \parallel a$,
- sich selbst, d. h. $a \parallel a$ oder $a \uparrow\uparrow a$,
- der zu ihr entgegengesetzten Verschiebung, d. h. $a \parallel -a$ oder $a \uparrow\downarrow -a$.

Für den nun folgenden Beweis des Rechengesetzes (6) betrachten wir zunächst nur Verschiebungen a und b , die nicht parallel sind, und setzen $\lambda > 0$ voraus. Wir wählen einen beliebigen Punkt A und bestimmen Punkte B, C, D und E so (Bild E 23), daß

E 23



$$(8) \quad \vec{a} = \vec{AB}, \quad \vec{b} = \vec{BC}, \quad \lambda\vec{a} = \vec{AD}, \quad \lambda\vec{b} = \vec{DE}$$

ist. Durch diese Repräsentantenwahl für \vec{a} , \vec{b} , $\lambda\vec{a}$ und $\lambda\vec{b}$ werden zwei Dreiecke ABC und ADE bestimmt, die wegen (8) ähnlich sind und sich in Ähnlichkeitslage befinden. Deshalb ist auch

$$\overline{AE}:\overline{AC} = \overline{AD}:\overline{AB} = \overline{ED}:\overline{CB} = \lambda.$$

Die Verschiebungen \vec{AC} und \vec{AE} sind gleichgerichtet, d. h., es gilt die Beziehung $\vec{AE} = \lambda\vec{AC}$. Da aber nach der Definition der Summe zweier Verschiebungen (\nearrow Def. E 5, Seite 166) $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{AE} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ist, gilt somit $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$. Damit ist (6) für $\lambda \geq 0$ und $\vec{a} \neq \vec{b}$ bewiesen.

- 8 a) Der für $\lambda \geq 0$ angegebene Beweis von (6) kann so abgeändert werden, daß der Fall $\lambda < 0$ miteinfaßt wird. Geben Sie die dazu erforderlichen Änderungen an!
 b) Zeigen Sie unter Verwendung von (7) und (5) durch äquivalente Umformungen des Ausdrucks $\lambda(\vec{a} + \vec{b})$, daß (6) für beliebige λ und $\vec{a} \parallel \vec{b}$ gilt!

Für die Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl gibt es zwei Distributivgesetze, da diese Multiplikation Elemente verschiedener Mengen miteinander verknüpft. Während im Bereich der reellen Zahlen $(\lambda + \mu)\alpha$ das gleiche wie $\lambda(\alpha + \beta)$ ausdrückt, unterscheiden sich bei der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl die Ausdrücke $(\lambda + \mu)\vec{a}$ und $\lambda(\vec{a} + \vec{b})$ inhaltlich wesentlich voneinander.

Die in der Menge der Verschiebungen eingeführte Multiplikation mit einer reellen Zahl läßt sich wieder in die Menge der an einem Punkt angreifenden Kräfte übertragen. Hierzu braucht man nur in der Definition statt „Verschiebung“ jeweils „Kraft“ zu sagen.

Aus der Analogie bei der Definition der Vervielfachung von Verschiebungen und von an einem Punkt angreifenden Kräften folgt, daß auch in der Menge der an einem Punkt angreifenden Kräfte die sich aus der Definition unmittelbar ergebenden Regeln I bis V auf Seite 170 und die Rechengesetze (5) und (7) gelten, wobei natürlich für \vec{a} , \vec{a} und \vec{b} jeweils Elemente der betrachteten Menge, d. h. Kräfte, einzusetzen sind. Daß in dieser Menge auch das Rechengesetz (6) gilt, kann man sich anhand des angegebenen Beweises für Verschiebungen überlegen.

7

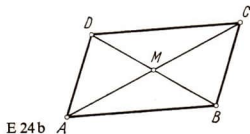
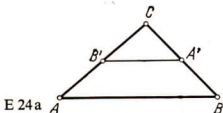
- 9 Überzeugen Sie sich davon, daß die Begriffe „Summe“ und „Differenz zweier Verschiebungen“ sowie „Produkt einer Verschiebung mit einer reellen Zahl“ in der Menge der Verschiebungen einer Ebene und in der Menge der Verschiebungen einer Geraden auf die gleiche Weise definiert werden können und daß in diesen Mengen bezüglich der angegebenen Operationen die gleichen Gesetzmäßigkeiten gelten wie in der Menge der Verschiebungen des Raumes!

Die Verschiebungen können in der ebenen und räumlichen Geometrie vielfältig Anwendung finden, so z. B. beim Beweis der folgenden Sätze.

- 4 SATZ: Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist zur dritten Seite parallel und halb so lang wie diese.

Beweis: Wir betrachten ein beliebiges Dreieck ABC und bezeichnen die Mittelpunkte der Seiten \overline{BC} bzw. \overline{CA} mit A' bzw. B' (Bild E 24a). Im Dreieck $B'A'C$ ist offensichtlich

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CA'}$$



oder, nach der Definition der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl und nach dem Rechengesetz (6)

$$\overrightarrow{B'A'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB},$$

d. h., die Strecke $\overline{B'A'}$ ist halb so lang wie die Strecke \overline{AB} und zu dieser parallel. Da für die Mittellinien $\overline{B'C'}$ und $\overline{A'C'}$ die gleichen Überlegungen angestellt werden können, ist der Satz bewiesen.

5 SATZ: Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

Beweis: Gegeben sei das Parallelogramm $ABCD$ und der Schnittpunkt der Diagonalen M (Bild E 24b). Da M der Strecke \overline{AC} und der Strecke \overline{BD} angehört, ist $\overline{AM} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{BM} \parallel \overline{BD}$, d. h., es gibt Zahlen λ und μ so, daß $\overline{AM} = \lambda \overline{AC}$ und $\overline{BM} = \mu \overline{BD}$ ist. Es gilt, diese Zahlen zu ermitteln. Wir formen die Beziehung

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$$

um:

$$\lambda \overrightarrow{AC} - \mu \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$$

$$\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \mu(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}$$

$$(\lambda + \mu - 1) \overrightarrow{AB} = (\mu - \lambda) \overrightarrow{BC}.$$

Wegen der Voraussetzung $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{BC}$ muß in dieser Gleichung sowohl $(\lambda + \mu - 1) = 0$ als auch $(\mu - \lambda) = 0$ sein. Würden wir nämlich annehmen, daß $\mu - \lambda \neq 0$ gelte, so erhielten wir $\overrightarrow{BC} = \frac{\lambda + \mu - 1}{\mu - \lambda} \overrightarrow{AB}$, d. h., es wäre $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AB}$ entgegen der Voraussetzung. Entsprechend würden wir aus der Annahme, $\lambda + \mu - 1 \neq 0$ die Beziehung $\overrightarrow{AB} = \frac{\mu - \lambda}{\lambda + \mu - 1} \overrightarrow{BC}$ erhalten, d. h., es wäre wieder $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$ entgegen der Voraussetzung. Aus $\mu - \lambda = 0$ und $\lambda + \mu - 1 = 0$ errechnet man nun $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, w. z. b. w.

8

In den vorhergehenden Lerneinheiten haben wir gesehen, daß in der Menge der Verschiebungen und der Menge der an einem Punkt angreifenden Kräfte eine Addition und eine Multiplikation mit einer reellen Zahl so definiert werden kann, daß für beliebige Elemente a, b, c der jeweiligen Menge und beliebige reelle Zahlen λ, μ gilt:

- (1°) $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz),
 (2°) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz),
 (3°) zu je zwei Elementen a und b der Menge existiert genau ein Element ξ dieser Menge so, daß $a + \xi = b$ ist,
 (4°) $1a = a$,
 (5°) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (1. Distributivgesetz),
 (6°) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (2. Distributivgesetz),
 (7°) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ (Assoziativgesetz).

Wir wollen nun an einem Beispiel zeigen, daß man noch in weiteren Mengen zwei Operationen „Addition von Elementen der betrachteten Menge“ und „Multiplikation von Elementen der Menge der reellen Zahlen“ so definieren kann, daß diese Gesetze gelten.

Wir betrachten die Menge aller geordneten Zahlenpaare $[x; y]$ (x und y sind reelle Zahlen) und definieren:

DEFINITION: *Summe zweier Zahlenpaare $[x_1; y_1]$ und $[x_2; y_2]$ nennen wir das Zahlenpaar $[x_1 + x_2; y_1 + y_2]$ und schreiben $[x_1; y_1] + [x_2; y_2] = [x_1 + x_2; y_1 + y_2]$.
 Produkt des Zahlenpaares $[x; y]$ mit der reellen Zahl λ nennen wir das Zahlenpaar $[\lambda x; \lambda y]$ und schreiben $\lambda[x; y] = [\lambda x; \lambda y]$.*

Es gilt nun zu zeigen, daß in der Menge der Zahlenpaare bezüglich der soeben eingeführten Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl die Gesetze (1°) bis (7°) gelten, wobei natürlich in (1°) bis (7°) an die Stelle von a, b, ξ Zahlenpaare treten müssen.

Gegeben seien zwei Zahlenpaare $[x_1; y_1]$ und $[x_2; y_2]$. Nach der Definition der Addition von Zahlenpaaren ist

$$[x_1; y_1] + [x_2; y_2] = [x_1 + x_2; y_1 + y_2]$$

und

$$[x_2; y_2] + [x_1; y_1] = [x_2 + x_1; y_2 + y_1].$$

Da aber für reelle Zahlen das Kommutativgesetz gilt, ist

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, y_1 + y_2 = y_2 + y_1$$

und damit

$$[x_1 + x_2; y_1 + y_2] = [x_2 + x_1; y_2 + y_1],$$

d. h., es gilt (1°).

Die Gültigkeit von (2°) beweist man analog. Zum Nachweis dafür, daß (3°) gilt, müssen wir ein durch $[x_1; y_1]$ und $[x_2; y_2]$ bestimmtes Zahlenpaar $[x; y]$ angeben, das der Gleichung

$$(9) \quad [x_1; y_1] + [x; y] = [x_2; y_2]$$

genügt. Für die linke Seite von (9) kann nach Definition der Addition $[x_1 + x; y_1 + y]$ geschrieben werden, und die Gleichheit $[x_1 + x; y_1 + y] = [x_2; y_2]$ besagt, daß $x_1 + x = x_2$ und $y_1 + y = y_2$ sein muß. Aus diesen Gleichungen läßt sich x und y eindeutig bestimmen, und das Zahlenpaar $[x; y] = [x_2 - x_1; y_2 - y_1]$ löst die Gleichung (9), ist also die Differenz von $[x_2; y_2]$ und $[x_1; y_1]$ in der Menge der Zahlenpaare.

Von den verbleibenden vier Gesetzen überprüfen wir lediglich, ob (6°) gilt. (Die Gültigkeit von 4°, 5° und 7° weist man analog nach.) Nach bereits genannten Definitionen und Gesetzen ist

$$\begin{aligned} \lambda([x_1; y_1] + [x_2; y_2]) &= \lambda[x_1 + x_2; y_1 + y_2] = [\lambda(x_1 + x_2); \lambda(y_1 + y_2)] \\ &= [\lambda x_1 + \lambda x_2; \lambda y_1 + \lambda y_2] \\ &= [\lambda x_1; \lambda y_1] + [\lambda x_2; \lambda y_2] = \lambda[x_1; y_1] + \lambda[x_2; y_2] \end{aligned}$$

9

Sowohl eine Verschiebung des Raumes als auch eine an einem festen Punkt A angreifende Kraft kann durch eine im Punkt A beginnende gerichtete Strecke charakterisiert werden. Lassen wir der Verschiebung a die Kraft \mathfrak{F}_a entsprechen, die durch die gleiche im Punkt A beginnende gerichtete Strecke charakterisiert wird wie a , dann haben wir eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Verschiebungen des Raumes und den in Punkt A angreifenden Kräften getroffen. Die Existenz einer solchen umkehrbar eindeutigen Zuordnung zwischen den Verschiebungen und den an einem festen Punkt angreifenden Kräften läßt vermuten, daß in den entsprechenden Mengen gleiche mathematische Gesetzmäßigkeiten auftreten, was sich ja auch bestätigte.

In einer Ebene kann man auch zwischen den Zahlenpaaren und den Verschiebungen dieser Ebene eine umkehrbar eindeutige Zuordnung treffen (↗ Lerneinheiten E 10 und 11). Eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Zahlenpaaren und den Verschiebungen des Raumes gibt es allerdings nicht.

DEFINITION: Eine Menge, für deren Elemente eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen so definiert ist, daß für beliebige Elemente a, b und x der Menge und beliebige reelle Zahlen λ und μ die Gesetze

$$(1^\circ) \quad a + b = b + a,$$

$$(2^\circ) \quad (a + b) + c = a + (b + c),$$

(3°) zu je zwei Elementen a und b der Menge existiert genau ein Element x dieser Menge so, daß

$$a + x = b \text{ ist,}$$

$$(4^\circ) \quad 1a = a,$$

$$(5^\circ) \quad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$$

$$(6^\circ) \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b,$$

$$(7^\circ) \quad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$

gelten, heißt **Vektorraum** und ihre Elemente **Vektoren**.

6 Als Beispiele für Vektorräume haben Sie bisher kennengelernt:

- die Menge der Verschiebungen des Raumes,
- die Menge der Verschiebungen einer beliebigen Ebene,
- die Menge der Verschiebungen einer beliebigen Geraden,
- die Menge der an einem Punkt angreifenden Kräfte,
- die Menge der geordneten Zahlenpaare

mit der jeweils definierten Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen. Die an einem Punkt angreifenden Kräfte sind genauso wie die Verschiebungen, wie die geordneten Zahlenpaare Vektoren als Elemente eines bestimmten Vektorraumes. Das erklärt zusammen mit der Tatsache, daß über die genannten Beispiele hinaus viele der in der Mathematik und Physik betrachteten Mengen Vektorräume sind, die breite Verwendung des Begriffes Vektor.¹

Ist n eine natürliche Zahl, so nennt man jede geordnete Menge von n reellen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n ein **n -Tupel** reeller Zahlen und schreibt dafür (x_1, x_2, \dots, x_n) . Für $n = 2$ sagt man statt 2-Tupel **Zahlenpaar**, für $n = 3$ **Zahlentripel**.

10 Zeigen Sie, daß für ein gegebenes n die Menge aller n -Tupel einen Vektorraum bildet!

Aufgaben e 42 bis 46

Basen und Koordinatensysteme in der Ebene

10 Linearkombinationen von Vektoren

Wir betrachten nun eine beliebige, aber fest gewählte Ebene und treffen der kürzeren Sprechweise wegen folgende Vereinbarungen:

- von der betrachteten Ebene sprechen wir als von „der Ebene“;
- die Verschiebungen dieser Ebene nennen wir „Vektoren“ und den Vektorraum der Verschiebungen dieser Ebene „Raum der Vektoren dieser Ebene“; die identische Abbildung der Ebene auf sich wird „Nullvektor“ genannt;
- wenn von Punkten und Vektoren schlechthin die Rede ist, sind stets Punkte und Vektoren der betrachteten Ebene gemeint.

11 **DEFINITION:** *Linearkombination der Vektoren a_1, a_2, \dots, a_n heißt jeder Vektor \vec{b} , der sich in der Gestalt*

$$\vec{b} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

schreiben läßt, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ reelle Zahlen sind. Die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nennt man die *Koeffizienten der Linearkombination*.

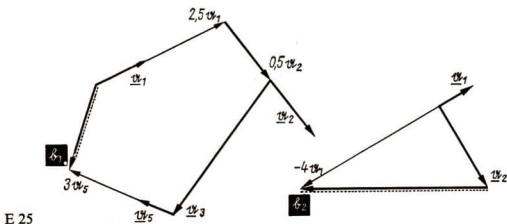
7 Das Bild E 25 veranschaulicht die Beziehungen

$$\vec{b}_1 = 2,5a_1 + 0,5a_2 + a_3 + 0a_4 + 3a_5 \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = a_2 - 4a_1,$$

in denen \vec{b}_1 und \vec{b}_2 Linearkombinationen der Vektoren a_1, a_2, \dots, a_5 sind.

¹ Natürlich gibt es auch Mengen, die keine Vektorräume sind. In der Menge der ganzen Zahlen gelten ebenfalls bezüglich der in ihr definierten Addition und Multiplikation mit Zahlen (dieser Menge!) die Gesetze 1^a-4^a. Da jedoch die Multiplikation einer ganzen Zahl mit einer reellen Zahl nur in der Menge der reellen Zahlen und nicht in der Menge der ganzen Zahlen definiert werden kann (λa ist für a -ganz und λ -irrational eine irrationale Zahl), ist die Menge der ganzen Zahlen (und auch die Menge der natürlichen bzw. der gebrochen-rationalen Zahlen) kein Vektorraum.

in denen b_1 und b_2 Linearkombinationen der Vektoren a_1, a_2, \dots, a_5 sind. Ist ein vom Nullvektor verschiedener Vektor a gegeben, dann können alle zu a parallelen Vektoren b , darunter auch der Nullvektor, als Linearkombinationen von a aufgefaßt werden, denn es gilt laut Definition $b = \lambda a$, wobei λ jeweils eine reelle Zahl ist. Sind a_1 und a_2 zwei einander nicht parallele und damit vom Nullvektor verschiedene Vektoren, so läßt sich keiner der beiden als Linearkombination des anderen darstellen. Es gilt aber der



E 25

SATZ: Ist b ein beliebiger Vektor und sind a_1 und a_2 zwei zueinander nicht parallele Vektoren der Ebene, dann kann b auf eindeutige Weise als Linearkombination $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ von a_1 und a_2 dargestellt werden.

Dem *Beweis* liegen Überlegungen zugrunde, die bei der Kräftezerlegung angewandt werden.

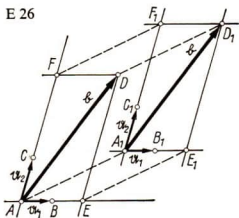
Wir wählen einen beliebigen Punkt A und bestimmen Punkte B, C , und D so, daß $a_1 = \vec{AB}$, $a_2 = \vec{AC}$ und $b = \vec{AD}$ ist (Bild E 26). Durch den Punkt D werden die Parallelen zu AB bzw. AC gezogen, die mit den Geraden AC bzw. AB die Schnittpunkte F bzw. E bilden. Auf die gleiche Weise findet man für jeden von A verschiedenen Punkt A_1 Punkte B_1, C_1, D_1, E_1 und F_1 so, daß $a_1 = \vec{A_1B_1}$, $a_2 = \vec{A_1C_1}$, $b = \vec{A_1D_1}$ ist und die Punkte E_1, F_1 den Punkten E und F entsprechen. Da man auch hier durch einfache Überlegungen zeigen kann, daß für beliebig gewählte Punkte A und A_1 die gerichteten Strecken $\vec{AE}, \vec{A_1E_1}, \vec{FD}$ und $\vec{F_1D_1}$ bzw. $\vec{ED}, \vec{E_1D_1}, \vec{AF}$ und $\vec{A_1F_1}$ jeweils parallelgleich sind, repräsentieren die Punktepaare $[A; E]$, $[A_1; E_1]$, $[F; D]$ und $[F_1; D_1]$ bzw. $[E; D]$, $[E_1; D_1]$, $[A; F]$ und $[A_1; F_1]$ jeweils denselben Vektor, und es gilt

$$(10) \quad b = \vec{AD} = \vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AF} + \vec{FD} = \vec{AE} + \vec{AF}.$$

Wegen $\vec{AE} \parallel a_1$ und $\vec{AF} \parallel a_2$ können wir nun $\vec{AE} = \lambda_1 a_1$ und $\vec{AF} = \lambda_2 a_2$ setzen und erhalten aus (10) die gewünschte Beziehung

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \quad \text{w. z. b. w.}$$

- (11) Zeigen Sie, daß außer der gefundenen Darstellung von b als Linearkombination von a_1 und a_2 keine weitere solche Darstellung $b = \lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_2$ existiert! (Indirekter Beweis: $a_1 \nparallel a_2$).



E 26

Aus $\vec{AE} = \lambda_1 a_1$ und $\vec{AF} = \lambda_2 a_2$ folgt nach der Definition der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl $|\lambda_1| = \frac{|\vec{AE}|}{|a_1|}$ und $|\lambda_2| = \frac{|\vec{AF}|}{|a_2|}$, wobei $\lambda_1 > 0$ bzw. $\lambda_2 > 0$ ist für $\vec{AE} \uparrow\uparrow a_1$ bzw. $\vec{AF} \uparrow\uparrow a_2$ und $\lambda_1 < 0$ bzw. $\lambda_2 < 0$ für $\vec{AE} \downarrow\downarrow a_1$ bzw. $\vec{AF} \downarrow\downarrow a_2$.

Die Zahlen λ_1 und λ_2 können folglich als mit Vorzeichen versehenes Verhältnis der Beträge der Vektoren \vec{AE} und a_1 bzw. \vec{AF} und a_2 oder der Strecken \overline{AE} und \overline{AB} bzw. \overline{AF} und \overline{AC} interpretiert werden.

Aus dem Beweis des Satzes geht hervor, daß $\lambda_1 = 0$ ist für $b \parallel a_2$ und $\lambda_2 = 0$ für $b \parallel a_1$. Ist insbesondere $b = 0$, dann verschwinden beide Koeffizienten gleichzeitig, was bedeutet, daß der Nullvektor aus zueinander nicht parallelen Vektoren a_1 und a_2 nur auf folgende Weise linear kombiniert werden kann: $0 = 0a_1 + 0a_2$. Diese Beziehung besagt, daß von zwei zueinander nicht parallelen Vektoren keiner eine Linearkombination des anderen ist. Wegen dieses Zusammenhangs nennt man zwei zueinander nicht parallele Vektoren auch oft **linear unabhängig** und definiert ganz allgemein:

13 DEFINITION: Vektoren a_1, a_2, \dots, a_n heißen **linear unabhängig**, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ gilt.

Sind Vektoren nicht linear unabhängig, heißen sie **linear abhängig**.

12 Zeigen Sie, daß in der Ebene drei beliebige Vektoren stets linear abhängig sind!

Aufgaben e 47 bis 53

11 Basis und Komponenten

In der Ebene sind drei beliebige Vektoren stets linear abhängig. Demgegenüber gibt es offensichtlich beliebig viele Paare von linear unabhängigen Vektoren.

14 DEFINITION: Jedes Paar linear unabhängiger Vektoren a_1 und a_2 nennt man **Basis des Raumes der Vektoren der Ebene**; man bezeichnet sie mit $\{a_1, a_2\}$. Ist $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, so heißen die Zahlen λ_1, λ_2 die **Koordinaten** und die Vektoren $\lambda_1 a_1$ und $\lambda_2 a_2$ die **Komponenten des Vektors** b bezüglich der Basis $\{a_1, a_2\}$.

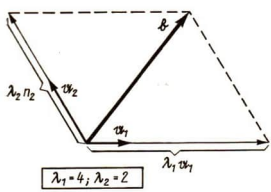
Für die Angabe der Koordinaten λ_1, λ_2 eines Vektors b bezüglich der Basis $\{a_1, a_2\}$ verwendet man die Kurzschreibweise $b(\lambda_1; \lambda_2)$.

8 Die Bilder E 27a bis d zeigen jeweils eine Basis $\{a_1, a_2\}$ und einen Vektor b in Komponentendarstellung bezüglich dieser Basis $\{a_1, a_2\}$.

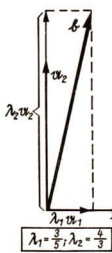
Nach Satz E 12 und der eindeutigen Bestimmtheit der Summe zweier Vektoren ist die Zuordnung zwischen einem Vektor und seinen Koordinaten bezüglich einer Basis umkehrbar eindeutig.

Die Koordinaten der Vektoren spiegeln die Operationen wider, denen wir die Vektoren unterwerfen.

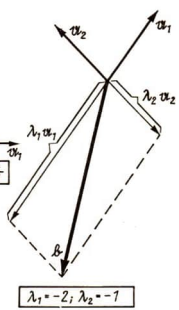
a $b(4, 2)$ bezüglich $\{v_1, v_2\}$



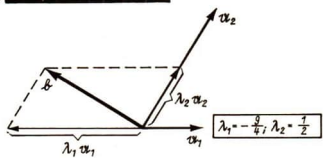
b $b(\frac{3}{5}, \frac{1}{3})$ bezüglich $\{v_1, v_2\}$



d $b(-2, -1)$ bzgl $\{v_1, v_2\}$



c $b(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ bezüglich $\{v_1, v_2\}$



E 27

Haben zwei Vektoren b und c bezüglich einer Basis $\{a_1, a_2\}$ die Darstellung $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ und $c = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2$, dann ist

$$b + c = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) + (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2) = (\lambda_1 + \mu_1) a_1 + (\lambda_2 + \mu_2) a_2$$

(Bild E 28) und entsprechend

$$b - c = (\lambda_1 - \mu_1) a_1 + (\lambda_2 - \mu_2) a_2 \quad (\text{Bild E 29}).$$

E 28

E 29

Gegeben: $b = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$; $c = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$

Summe:
 $b + c = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + (\lambda_2 + \mu_2) v_2$

Differenz:
 $b - c = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2$

E

15

SATZ: Die Koordinaten der Summe (Differenz) zweier Vektoren \vec{b} und \vec{c} bezüglich einer Basis sind gleich den Summen (Differenzen) entsprechender Koordinaten von \vec{b} und \vec{c} .

Da weiterhin

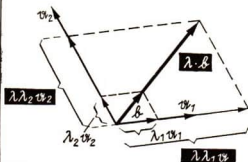
$$\begin{aligned}\lambda \vec{b} &= \lambda(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) \\ &= (\lambda \lambda_1) \alpha_1 + (\lambda \lambda_2) \alpha_2\end{aligned}$$

ist (Bild E 30), können wir feststellen:

16

SATZ: Die Koordinaten des Produktes eines Vektors \vec{b} mit einer reellen Zahl λ bezüglich einer Basis sind gleich den Produkten der entsprechenden Koordinaten von \vec{b} mit λ .

Gegeben: $\vec{b} = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$ und $\lambda = 3,5$



Produkt:

$$\lambda \vec{b} = (\lambda \lambda_1) \alpha_1 + (\lambda \lambda_2) \alpha_2$$

E 30

Die *Komponenten von Vektoren* bezüglich einer gegebenen Basis verhalten sich bezüglich der Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer reellen Zahl genauso wie die *Koordinaten der Vektoren*.

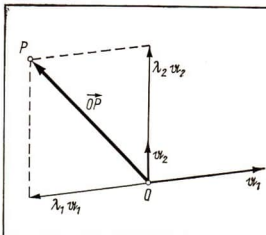
Aufgaben e 54 bis 67

12 Koordinatensysteme

Durch die bisherigen Überlegungen haben wir den Vektoren der Ebene bezüglich einer Basis auf umkehrbar eindeutige Weise geordnete Zahlenpaare, ihre Koordinaten, zugeordnet. Jetzt wollen wir mit Hilfe der Vektoren allen Punkten der Ebene auf umkehrbar eindeutige Weise Zahlen zuordnen.

Wir wählen in der Ebene einen beliebigen Punkt O und im Raum der Vektoren dieser Ebene eine beliebige Basis $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Da jedes geordnete Punktepaar $[A; B]$ genau einen Vektor, nämlich \vec{AB} , bestimmt, wird durch O und einen beliebigen Punkt P der Ebene ein Vektor \vec{OP} eindeutig festgelegt. Wir schreiben für ihn seine Darstellung $\vec{OP} = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$ als Linearkombination von α_1 und α_2 (Bild E 31). Da die Zuordnung zwischen \vec{OP} und dem Zahlenpaar $[\lambda_1; \lambda_2]$ ebenfalls eindeutig ist, können wir also jedem Punkt P auf die angegebene Weise

E 31



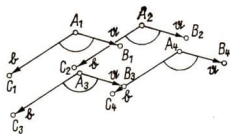
Ortsvektor	\vec{OP}
Basis	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$
Koordinatensystem	$\{0; \alpha_1, \alpha_2\}$
Komponenten von \vec{OP}	$\lambda_1 \alpha_1$ und $\lambda_2 \alpha_2$
Koordinaten von \vec{OP} und P	λ_1 und λ_2
Ursprung	0

eindeutig ein Zahlenpaar $[\lambda_1; \lambda_2]$ zuordnen. Umgekehrt ist für jedes Zahlenpaar $[\lambda_1; \lambda_2]$ der Summenvektor $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a$ eindeutig bestimmt, und es gibt für a und O genau einen Punkt Q , so daß $a = \overrightarrow{OQ}$ ist; da andererseits auch $\overrightarrow{OP} = a$ war, muß Q mit P übereinstimmen. Die durch die Beziehung $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ vermittelte Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene und den Paaren reeller Zahlen ist also umkehrbar eindeutig; sie hängt nur von der Wahl des Punktes O und der Basis $\{a_1, a_2\}$ ab.

Den Punkt O zusammen mit der Basis $\{a_1, a_2\}$ nennt man ein **Koordinatensystem** der Ebene und bezeichnet es mit $\{0; a_1, a_2\}$. Der Vektor \overrightarrow{OP} heißt **Ortsvektor** des Punktes P bezüglich des Punktes O , des **Ursprungs** des Koordinatensystems, und die Koeffizienten λ_1, λ_2 der Zerlegung $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ die **Koordinaten** von P bezüglich $\{0; a_1, a_2\}$. Für die Angabe der Koordinaten λ_1, λ_2 eines Punktes P bezüglich eines Koordinatensystems $\{0; a_1, a_2\}$ verwendet man die Kurzschreibweise $P(\lambda_1; \lambda_2)$.

Wegen der Parallelgleichheit aller durch die Repräsentanten eines Vektors bestimmten gerichteten Strecken bilden für zwei Vektoren a und b alle Paare dieser Strecken mit gemeinsamem Anfangspunkt den gleichen (nicht orientierten!) Winkel miteinander (Bild E 32). Diesen Winkel nennt man den **Winkel zwischen a und b** und bezeichnet ihn mit $\sphericalangle(a, b)$.

Da von den Vektoren einer Basis $\{a_1, a_2\}$ nur gefordert wird, daß $a_1 \nparallel a_2$ ist, können die Basisvektoren a_1 und a_2 jeden beliebigen Winkel zwischen 0 und π (die Werte 0 und π ausgenommen) miteinander bilden. Man nennt deshalb die soeben definierten Koordinatensysteme im allgemeinen **schiefwinklige** Koordinatensysteme. Bilden die Basisvektoren a_1 und a_2 einen rechten Winkel miteinander, nennt man sie zueinander **orthogonal**, die Basis $\{a_1, a_2\}$ eine **orthogonale Basis** und jedes dieser Basis entsprechende Koordinatensystem ein **orthogonales** oder **rechtwinkliges Koordinatensystem**.



E 32

Sowohl im schief- als auch im rechtwinkligen Koordinatensystem $\{0; a_1, a_2\}$ können die Beträge der Vektoren a_1 und a_2 beliebige von Null verschiedene positive reelle Zahlen sein. Die Koordinaten λ_1, λ_2 eines Vektors b bezüglich der Basis $\{a_1, a_2\}$ oder eines Punktes P bezüglich eines Koordinatensystems $\{0; a_1, a_2\}$ lassen sich jedoch (als mit Vorzeichen versehene Verhältnisse der Beträge der Komponenten von b bzw. \overrightarrow{OP} zu den $|a_i|$) besonders einfach berechnen, wenn a_1 und a_2 den Betrag 1 haben, d. h. sogenannte **Einheitsvektoren** sind. Basen und Koordinatensysteme, in denen die Basisvektoren Einheitsvektoren sind, heißen **normiert**; rechtwinklige normierte Basen bzw. Koordinatensysteme nennt man **orthonormierte Basen** bzw. **Koordinatensysteme**. Ein orthonormiertes Koordinatensystem nennt man auch **kartesisches** Koordinatensystem nach dem Mathematiker RENÉ DESCARTES (latinisiert Cartesius, 1596–1650), der erstmalig Koordinaten in der Geometrie verwendete.

Da sich viele Berechnungen in kartesischen Koordinatensystemen einfacher gestalten als in schiefwinkligen, werden sie häufiger als diese verwendet.

Aufgaben e 68 bis 79

13 Koordinaten

13 Was ist eine gerichtete oder orientierte Strecke, ein orientierter Winkel?

In der Ebene sei uns ein kartesisches Koordinatensystem gegeben. Seine Basisvektoren bezeichnen wir mit i und j und die Koordinaten eines Punktes P bzw. eines beliebigen Vektors \vec{r} mit x und y . Wir schreiben also

$$\vec{OP} = xi + yj \text{ bzw. } \vec{r} = xi + yj.$$

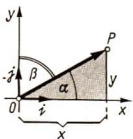
Im kartesischen Koordinatensystem lassen sich die Koordinaten x , y eines Punktes P wegen $|i| = |j| = 1$ und $\sphericalangle(i, j) = \frac{\pi}{2}$ leicht aus $|\vec{OP}|$ und $\sphericalangle(i, \vec{OP}) = \alpha$ berechnen. Ist nämlich $\alpha = \sphericalangle(i, \vec{OP}) \leq \pi$ und $\beta = \sphericalangle(j, \vec{OP}) \leq \frac{\pi}{2}$ (Bilder E 33a und b), so gilt

$$(11) \quad x = |\vec{OP}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{OP}| \sin \alpha.$$

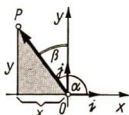
Ist $0 \leq \alpha < \pi$ und $\frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi$ (Bilder E 34a und b), so gilt

$$(12) \quad x = |\vec{OP}| \cos \alpha, \quad y = -|\vec{OP}| \sin \alpha.$$

Umgekehrt können wegen $x^2 + y^2 = |\vec{OP}|^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = |\vec{OP}|^2$ nach (11) und (12) für jeden Punkt P aus x und y die Größen $|\vec{OP}|$ und α sowie β eindeutig bestimmt werden.

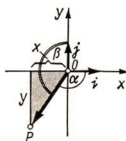


E 33a

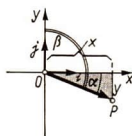


E 33b

E 34a



E 34b



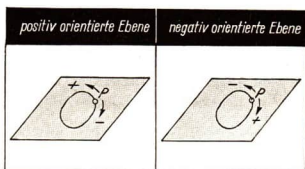
Die dabei ständig notwendig werdenden Fallunterscheidungen sind für Berechnungen sehr unbequem und lassen sich vermeiden, wenn man die Ebene orientiert und den orientierten Winkel zwischen zwei Vektoren definiert.

Bei jeder Ebene im Raum kann man zwei Seiten unterscheiden. Wir wählen eine Seite der Ebene aus und denken uns in der Ebene einen beliebigen Kreis. Beginnend bei einem frei gewählten Punkt P des Kreises kann dieser auf genau zweierlei Weise durchlaufen werden (Bild E 35), und zwar unabhängig von der Wahl des Punktes P . Die Art und Weise, wie ein Kreis durchlaufen wird, bezeichnet man als seinen **Durchlaufssinn**. Legen wir für die gewählte Seite der

E 35



E 36



Ebene fest, daß wir den Durchlaufssinn eines beliebigen Kreises als positiv ansehen, wenn der Kreis im „Gegenuhrzeigersinn“ durchlaufen wird und als negativ im entgegengesetzten Falle, so sagen wir, die Ebene ist **positiv orientiert**. Sehen wir den Durchlaufssinn eines Kreises als negativ an, wenn der Kreis im „Gegenuhrzeigersinn“ durchlaufen wird, heißt die Ebene **negativ orientiert**. Jede Ebene, für deren betrachtete Seite eine der beiden möglichen Festlegungen getroffen ist, nennt man **orientierte Ebene** (Bild E 36).

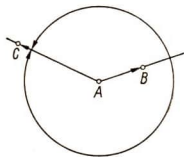
Zur Lösung von praktischen Problemen der ebenen Geometrie ist es oft zweckmäßig, eine Ebene zu orientieren. Wir müssen uns aber darüber im Klaren sein, daß im Raum keine Ebene im absoluten Sinne orientiert werden kann. Gilt in einer Ebene der Durchlaufssinn eines Kreises von einer Seite der Ebene her als positiv, erscheint er auf der anderen Seite der Ebene als negativ.

- 14 Überzeugen Sie sich davon, indem Sie auf einem durchscheinenden Blatt Papier auf einer Seite wie im Bild E 35 einen Kreis zeichnen, dann wie im Bild E 36 eine Orientierung angeben und das Blatt umdrehen!

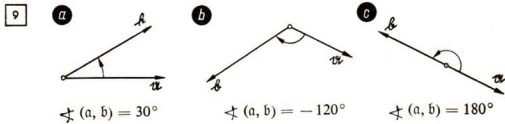
In der orientierten Ebene nennt man **Winkel zwischen zwei vom Nullvektor** verschiedenen **Vektoren** α und β [in Zeichen $\sphericalangle(\alpha, \beta)$] den Winkel der Drehung, die den durch den Repräsentanten $[A; B]$ von α bestimmten Strahl AB auf den durch den Repräsentanten $[A; C]$ von β bestimmten Strahl AC abbildet. Durch die übliche Annahme, daß er positiv ist, wenn man ihn vom Strahl AB ausgehend über einen im positiven Sinne durchlaufenen Kreisbogen mißt, und negativ im entgegengesetzten Falle, ist der Winkel zwischen zwei Vektoren in der orientierten Ebene bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmt (Bild E 37).

Wir können den Winkel $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ eindeutig festlegen, wenn wir noch $-\pi < \sphericalangle(\alpha, \beta) \leq \pi$ fordern. Vektoren α und β heißen einander orthogonal, wenn $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \pm \frac{\pi}{2}$ gilt oder wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist. Offensichtlich ist

$$\sphericalangle(\alpha, \beta) = -\sphericalangle(\beta, \alpha).$$



E 37



E 38

Ändern wir die Orientierung der Ebene, dann ändern bis auf die Winkel zwischen parallelen Vektoren alle Winkel zwischen Vektoren ihr Vorzeichen. Der absolute Betrag des Winkels $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ hängt folglich nicht von der Orientierung der Ebene ab; er ist gleich dem Winkel zwischen α und β in der nicht orientierten Ebene.

Für das weitere nehmen wir nun an, daß die Ebene positiv orientiert sei. Ist dann $\alpha = \sphericalangle(i, \vec{OP})$ der Winkel zwischen i und \vec{OP} in der orientierten Ebene, dann haben die Formeln (11) für jeden beliebigen Punkt P der Ebene Gültigkeit und die Beziehungen (12) sind überflüssig geworden.

Für die Koordinaten x, y eines Vektors \vec{x} bezüglich $\{0; i, j\}$ gelten analoge Beziehungen. Schreiben wir nämlich \vec{x} in Repräsentantenschreibweise $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ und bezeichnen $\sphericalangle(i, \vec{x}) = \alpha$, dann finden wir wie oben:

$$\boxed{x = |\vec{x}| \cos \alpha, y = |\vec{x}| \sin \alpha}$$

für alle α .

Bemerkung: Der **Abstand zweier Punkte** $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ ist gleich der Länge der durch sie bestimmten Strecke und damit gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$. Dieser Betrag läßt sich nach den angegebenen Formeln

$$x = |\vec{x}| \cos \alpha, y = |\vec{x}| \sin \alpha$$

für einen Vektor α mit den Koordinaten $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ berechnen, denn es gilt dann:

$$x_2 - x_1 = |\overrightarrow{P_1P_2}| \cos \alpha$$

$$y_2 - y_1 = |\overrightarrow{P_1P_2}| \sin \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \sphericalangle(i; \overrightarrow{P_1P_2}),$$

woraus wir wegen

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |\overrightarrow{P_1P_2}|^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = |\overrightarrow{P_1P_2}|^2$$

für den Abstand $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ der Punkte P_1 und P_2 die Formel

$$(13) \quad \boxed{|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

erhalten.

Aufgaben e 80 bis 91

14 Anwendungsaufgaben

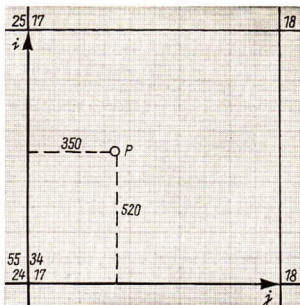
In der Geodäsie werden die Punkte eines als eben angesehenen Gebietes auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ bezogen, bei dem die den Einheitsvektor i bzw. j veranschaulichenden gerichteten Strecken nach Norden bzw. nach Osten weisen. Man kann mit Hilfe dieses Koordinatensystems Vermessungen von kleinen Geländeteilen durchführen, ohne große Verzerrungen befürchten zu müssen.

Von zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 ist neben der Angabe ihrer Koordinaten oft der orientierte Winkel von Interesse, den der Vektor i mit $\overrightarrow{P_1P_2}$ bildet.

Dieser Winkel ist charakteristisch für die durch $\overrightarrow{P_1P_2}$ bestimmte, mit einem Durchlaufssinn versehene Richtung. Nach ihm ist gefragt, wenn in Aufgaben der Geodäsie die „Richtung von P_1 nach P_2 “ bestimmt werden soll. Bei der Bestimmung dieses Winkels wird die Ebene als negativ orientiert angesehen, d. h. im Uhrzeigersinn gemessene Winkel erhalten ein positives Vorzeichen.

- (15) *Worin unterscheidet sich das geodätische Koordinatensystem vom kartesischen Koordinatensystem?*

Auch in der Topographie verwendet man neben geographischen und polaren Koordinaten das in der Geodäsie übliche Koordinatensystem. Auf topographischen Karten, die u. a. auch bei der Nationalen Volksarmee verwendet werden, befindet sich ein Gitternetz (Bild E 39). Durch dieses Netz wird die Karte in Planquadrate eingeteilt. Jedes Planquadrat kann genau angegeben werden, und zwar mit dem Hochwert (x -Wert) und dem Rechtswert (y -Wert) der südwestlichen Ecke. Mit Hilfe des Gitternetzes und seiner Bezifferung am Blattrand lassen sich also sowohl Geländeobjekte nach ihren Koordinaten in die Karte eintragen als auch die Koordinaten auf der Karte dargestellter Objekte bestimmen. Meist arbeitet man dabei mit dem Planzeiger.



E 39

Die Koordinaten eines Punktes erhält man, indem man seinen senkrechten Abstand von der südlichen horizontalen Gitterlinie zum x -Wert und seinen senkrechten Abstand von der westlichen vertikalen Gitterlinie zum y -Wert des Planquadrats addiert. Die Koordinaten für einen Kartenpunkt setzen sich also aus den Koordinaten der südwestlichen Ecke seines Planquadrats und den senkrechten Abständen von der südlichen und der westlichen Gitterlinie des Planquadrats additiv zusammen. Zur Bezeichnung der Planquadrate werden gewöhnlich die sogenannten verkürzten Koordinatenzahlen benutzt, bei denen man die ersten beiden Ziffern der Koordinaten wegläßt.

Im Bild E 39 ist der x -Wert des Planquadrats 5524, der y -Wert 3417. Kurz sagt man:

Planquadrat 24–17.

Der Punkt P_1 hat die Koordinaten

$$x_1 = 5524520 \text{ m und } y_1 = 3417350 \text{ m,}$$

die verkürzten Koordinaten sind

$$x_1 = 24520 \text{ m und } y_1 = 17350 \text{ m.}$$

In den Aufgaben hierzu werden verkürzte Koordinaten angegeben. Die Maßangaben erfolgen in Metern.

Aufgaben e 92 bis 101



15 Transformation eines Koordinatensystems

Bei praktischen Berechnungen ergibt es sich oft, daß die Koordinaten x, y eines Punktes P bezüglich eines Koordinatensystems $\{0; i, j\}$ bekannt oder leicht zu bestimmen sind, daß aber die Koordinaten x', y' von P bezüglich eines anderen Koordinatensystems $\{0'; i', j'\}$ benötigt werden.

Um die dadurch notwendig werdenden Umrechnungen vornehmen zu können, müssen wir wissen, welche Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes bezüglich zweier verschiedener Koordinatensysteme $\{0; i, j\}$ und $\{0'; i', j'\}$ bestehen.

Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen nehmen wir an, daß die Winkel $\sphericalangle(i, j)$ und $\sphericalangle(i', j')$ beide nicht negativ sind, daß also, wie man sagt, beide Koordinatensysteme **Rechtssysteme** sind [bei $\sphericalangle(i, j) < 0$ heißt das Koordinatensystem $\{0; i, j\}$ Linkssystem]. Ferner nehmen wir an, daß die Koordinaten von P, O', i' und $E 40$ i' bezüglich $\{0, i, j\}$ gegeben sind (Bild E 40)

$$\vec{OP} = xi + yj, \quad \vec{OO'} = a_0i + b_0j,$$

$$(14) \quad \boxed{i' = a_1i + b_1j, \quad j' = a_2i + b_2j}.$$

Ist dann $\vec{O'P} = x'i' + y'j'$, so können wir für die Beziehung $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$ schreiben

$$xi + yj = a_0i + b_0j + x'i' + y'j'$$

oder, wenn wir i' und j' aus (14) einsetzen,

$$xi + yj = a_0i + b_0j + x'(a_1i + b_1j) + y'(a_2i + b_2j)$$

bzw.

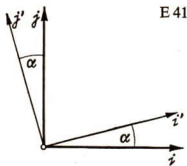
$$(x - a_1x' - a_2y' - a_0)i + (y - b_1x' - b_2y' - b_0)j = 0.$$

Die Vektoren i und j sind linear unabhängig. Deshalb müssen die Koeffizienten der Linearkombination auf der linken Seite beide gleichzeitig verschwinden, d. h., es ist

$$(15) \quad x = a_1x' + a_2y' + a_0, \quad y = b_1x' + b_2y' + b_0.$$

Diese Beziehungen zwischen den Koordinaten $(x; y)$ des Punktes P bezüglich $\{0; i, j\}$ und seinen Koordinaten $(x'; y')$ bezüglich $\{0; i', j'\}$ lassen sich noch vereinfachen, da beide Koordinatensysteme als orthonormiert vorausgesetzt sind. In diesem Falle ist nämlich

$$|i| = 1, |j| = 1, |i'| = 1, |j'| = 1, \sphericalangle(i, i') = 90^\circ, \sphericalangle(i', i') = 90^\circ,$$



E 41

und es gelten für die Koordinaten $(a_1; b_1)$ von i' sowie $(a_2; b_2)$ von j' bezüglich der Basis $\{i, j\}$ die Beziehungen

$$a_1 = \cos \alpha, \quad b_1 = \sin \alpha,$$

$$a_2 = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$b_2 = \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha,$$

wobei mit α der Winkel $\sphericalangle(i, i')$ bezeichnet wurde (Bild E 41).

Setzen wir diese Werte in (14) und (15) ein, so ergeben sich dafür die Beziehungen

$$(16) \quad \boxed{\begin{aligned} i' &= \cos \alpha \cdot i + \sin \alpha \cdot j \\ j' &= -\sin \alpha \cdot i + \cos \alpha \cdot j \end{aligned}} \quad (17) \quad \boxed{\begin{aligned} x &= \cos \alpha \cdot x' + \sin \alpha \cdot y' + a_0 \\ y &= \sin \alpha \cdot x' + \cos \alpha \cdot y' + b_0 \end{aligned}}$$

Multipliziert man nun noch die 1. Gleichung von (17) mit $\cos \alpha$ bzw. mit $-\sin \alpha$, die 2. Gleichung von (17) mit $\sin \alpha$ bzw. $\cos \alpha$ und addiert entsprechend die so erhaltenen Gleichungen, dann ergeben sich unter Berücksichtigung der Beziehung $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ für (17) die Gleichungen

$$(17) \begin{cases} x' = \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - (\cos \alpha \cdot a_0 + \sin \alpha \cdot b_0) \\ y' = -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y - (-\sin \alpha \cdot a_0 + \cos \alpha \cdot b_0) \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können für jeden Punkt P nach seinen bezüglich des Koordinatensystems $\{0; i, j\}$ gegebenen Koordinaten $(x; y)$ seine Koordinaten $(x'; y')$ bezüglich eines Koordinatensystems $\{0; i', j'\}$ berechnet werden. Hierzu müssen die Koordinaten $(a_0; b_0)$ von O' bezüglich $\{0; i, j\}$ und die Koordinaten von i' und j' bezüglich $\{i, j\}$ und damit $\alpha = \sphericalangle(i, i')$ bekannt sein. So ergibt sich z. B. für die Koordinaten $(a'_0; b'_0)$ des Punktes O bezüglich $\{O'; i', j'\}$

$$a'_0 = -(\cos \alpha \cdot a_0 + \sin \alpha \cdot b_0), \quad b'_0 = -(-\sin \alpha \cdot a_0 + \cos \alpha \cdot b_0).$$

Deswegen kann auch für (17') in Analogie zu (17) geschrieben werden

$$(17'') \begin{cases} x' = \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y + a'_0 \\ y' = -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y + b'_0 \end{cases}$$

Die Gleichungen (17) nennt man die **Transformationsgleichungen** für die Koordinaten eines Punktes P bezüglich zweier orthonormierter Rechtssysteme $\{0; i, j\}$ und $\{O'; i', j'\}$ und die durch sie definierte eindeutige Abbildung der Koordinaten $(x; y)$ eines beliebigen Punktes P der Ebene bezüglich $\{0; i, j\}$ auf die Koordinaten $(x'; y')$ von P bezüglich $\{O'; i', j'\}$ eine **Koordinatentransformation**. Die Abbildung von $\{0; i, j\}$ auf $\{O'; i', j'\}$ heißt **Transformation des Koordinatensystems**.

Ist bei der vorgenommenen Transformation des Koordinatensystems $\alpha = 0$, dann geht $\{0; i, j\}$ aus $\{O'; i', j'\}$ durch eine Verschiebung hervor, und man nennt die Transformation eine **Verschiebung** oder **Translation** des Koordinatensystems. Für eine Translation lauten die Formeln (17)

$$(17a) \quad \boxed{x' = x + a_0, y' = y + b_0}.$$

Ist $\alpha \neq 0$, aber $O' = O$, spricht man von einer **Drehung** des Koordinatensystems oder einer **Transformation** der dem Koordinatensystem zugrunde gelegten Basis. In diesem Falle ist $a_0 = b_0 = 0$ und die Formeln (17) lauten

$$(17b) \quad \boxed{\begin{cases} x' = \cos \alpha x + \sin \alpha y, \\ y' = \sin \alpha x - \cos \alpha y \end{cases}}$$

10

Es seien für den Punkt P mit den Koordinaten $P(8; -4)$ bezüglich des Koordinatensystems $\{0; i, j\}$ seine Koordinaten $P(x'; y')$ bezüglich des Koordinatensystems $\{O'; i', j'\}$ zu berechnen, wenn O' bezüglich $\{0; i, j\}$ die Koordinaten $O'(6; 2)$ hat und die Koordinaten von i' und j' bezüglich $\{i, j\}$ entsprechend $i'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ und $j'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sind.

Lösung: Wir setzen die angegebenen Werte für die Koordinaten von i' und j' bezüglich $\{i, j\}$ in Gleichung (14) ein:

$$i' = -\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j, \quad j' = \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j.$$

Wir finden durch Vergleich dieser Beziehungen mit (16)

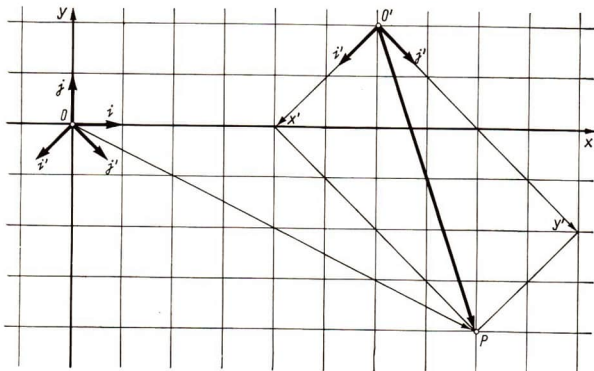
$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aus (17') bestimmen wir dann die gesuchten Werte für x' und y' :

$$x' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-4) - \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 6 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2\right] = 2\sqrt{2}$$

$$y' = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 8 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-4) - \left[-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 6 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2\right] = 4\sqrt{2}$$

Das Bild E 42 entspricht den rechnerisch ermittelten Ergebnissen.



E 42

Aufgaben e 102 bis 106

16 Additionstheoreme der Winkelfunktionen

Mit Hilfe der Drehungen von Koordinatensystemen können wir die folgenden **Additionstheoreme der Winkelfunktionen** herleiten.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Gegeben seien drei orthonormierte Rechtssysteme $\{O; i, j\}$, $\{O; i', j'\}$, $\{O; i'', j''\}$ mit dem gleichen Ursprung, und es sei $\sphericalangle(i, i') = \alpha$, $\sphericalangle(i', i'') = \beta$. Nach (16) ist dann

$$\begin{aligned} i' &= \cos \alpha i + \sin \alpha j, & i'' &= \cos \beta i' + \sin \beta j', \\ j' &= -\sin \alpha i + \cos \alpha j, & j'' &= -\sin \beta i' + \cos \beta j' \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} i'' &= \cos \beta (\cos \alpha i + \sin \alpha j) + \sin \beta (-\sin \alpha i + \cos \alpha j), \\ j'' &= -\sin \beta (\cos \alpha i + \sin \alpha j) + \cos \beta (-\sin \alpha i + \cos \alpha j) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}i'' &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) i + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) j, \\j'' &= -(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) i - (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) j.\end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen $\sphericalangle(i, i'') = \alpha + \beta$ und (16)

$$\begin{aligned}i'' &= \cos(\alpha + \beta) i + \sin(\alpha + \beta) j, \\j'' &= -\sin(\alpha + \beta) i + \cos(\alpha + \beta) j.\end{aligned}$$

Setzt man die für i'' erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) i + \sin(\alpha + \beta) j \\= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) i + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) j,\end{aligned}$$

aus der wegen der linearen Unabhängigkeit von i und j

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

folgt. Die entsprechende Beziehung für j'' liefert das gleiche Ergebnis. Bezeichnen wir oben den Winkel $\sphericalangle(i', i'')$ mit $-\beta$, dann erhalten wir auf dem gleichen Wege zwei weitere häufig verwendete Formeln:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Wegen der in Lerneinheit E 13 gemachten Einschränkung der Winkel zwischen zwei Vektoren in der orientierten Ebene auf Werte zwischen $-\pi$ und π (\sphericalangle 183) wurden alle vier Formeln für Winkel dieser Größe hergeleitet. Da jedoch die verwendeten Beziehungen (11) und (16) wegen $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$ und $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$ für ganzzahlige k auch ohne diese Einschränkung gelten, können in den angeführten Additionstheoremen α und β beliebige Werte annehmen.

11

Wenn man die Werte der Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ für die Argumente 0° , 30° , 45° , 60° , 90° sowie ganzzahlige Vielfache von 90° im Kopf hat (vgl. mit der Tabelle „Spezielle Funktionswerte“ auf Seite 61 des Tafelwerks), dann findet man mit Hilfe der Additionstheoreme für viele Werte des Arguments die zugehörigen Funktionswerte:

$$300^\circ = 270^\circ + 30^\circ$$

$$\sin 300^\circ = \sin(270^\circ + 30^\circ) = \sin 270^\circ \cos 30^\circ + \cos 270^\circ \sin 30^\circ$$

$$= (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgaben e 107 bis 113

E

Analytische Geometrie der Geraden in der Ebene

17 Parametergleichung einer Geraden

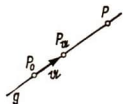
16

- a) Wo ist Ihnen das Wort „Parameter“ bereits einmal begegnet? Was verstand man darunter?
- b) Welche Möglichkeiten gibt es, um eine Gerade eindeutig zu bestimmen?

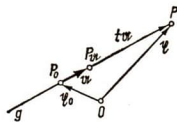
Wir gehen wieder von einer Ebene aus und betrachten in dieser Ebene eine Gerade g . Diese Gerade sei uns durch einen ihrer Punkte P_0 und einen Vektor $\alpha \neq 0$ gegeben, der ihre Richtung angibt, d. h. dessen Repräsentant auf Geraden liegen, die zu g parallel sind. Im Bild E 43 ist der Repräsentant $[P_0; P_\alpha]$ von α und die ihm entsprechende gerichtete Strecke eingezeichnet.

Bezeichnen wir mit P einen beliebigen Punkt der Geraden g , so gilt offensichtlich $\overrightarrow{P_0P} \parallel \alpha$ und damit auch

$$(18) \quad \boxed{\overrightarrow{P_0P} = \lambda \alpha},$$



E 43



E 44

wobei $\lambda > 0$ für $\overrightarrow{P_0P} \uparrow \alpha$, $\lambda < 0$ für $\overrightarrow{P_0P} \downarrow \alpha$ und $|\lambda| = \frac{|\overrightarrow{P_0P}|}{|\alpha|}$ ist. Der Zahlenfaktor λ ist also auch hier wieder das mit Vorzeichen versehene Verhältnis der Beträge der Vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ und α bzw. der Längen der gerichteten Strecken $\overline{P_0P}$ und $\overline{P_0P_\alpha}$, wenn $\alpha = \overrightarrow{P_0P_\alpha}$ ist.

Durchläuft der Punkt P die Gerade g , so nimmt λ jeweils entsprechende Werte zwischen $-\infty$ und ∞ an, und zwar alle, da (18) auch jedem λ einen Punkt P zuordnet. Die Beziehung (18) stellt folglich eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten einer Geraden und den reellen Zahlen her.

Die Gleichung (18) nennt man eine **Parametergleichung der Geraden g** . Der Faktor λ , für welchen man in diesem speziellen Falle meist t schreibt, heißt der **Parameter der Geraden**, α ihr **Richtungsvektor**.

Gibt man beim Aufstellen der Gleichung (18) außer P_0 noch einen beliebigen Punkt O der Ebene vor (Bild E 44), so kann die Parametergleichung für g auch

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

oder, wenn man \overrightarrow{OP} mit ξ und $\overrightarrow{OP_0}$ mit ξ_0 bezeichnet,

$$(19) \quad \boxed{\xi = \xi_0 + t\alpha}$$

geschrieben werden.

- 12** a) Gegeben ist eine Gerade g durch einen ihrer Punkte $A(1; 1)$ und einen ihrer Richtungsvektoren $\alpha = i$.

Durch Einsetzen in die Gleichung (19) erhalten wir als Gleichung für g :

$$\xi = i + j + ti, \quad \text{also} \quad \xi = (t + 1)i + j.$$

- b) Auf g soll der Punkt P bestimmt werden, der dem Parameterwert $t = -5$ entspricht.

Wir erhalten den Ortsvektor von P :

$$\xi = (-5 + 1)i + j = -4i + j$$

und damit den Punkt $P(-4; 1)$.

Unterwirft man den Parameter in der Gleichung (18) bzw. (19) Beschränkungen, wie z. B. $t \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$, $|t| \geq 1$, dann beschreibt die Gleichung nicht mehr die gesamte Gerade g , sondern nur noch Teile derselben.

13

a) Die Gleichung

$$\xi = \xi_0 + t\alpha, t \geq 0$$

ist die Parametergleichung des Strahls P_0P_α mit dem Anfangspunkt P_0 (Bild E 45a).

b) Die Gleichung

$$\xi = \xi_0 + t\alpha, 0 \leq t \leq 1$$

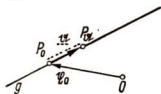
ist die Parametergleichung der Strecke $\overline{P_0P_\alpha}$ (Bild E 45b).

c) Die Gleichung

$$\xi = \xi_0 + t\alpha, |t| \geq 1$$

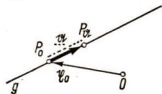
ist die Parametergleichung zweier Strahlen auf g ohne gemeinsamen Punkt, deren Anfangspunkte den Parameterwerten $t = 1$ bzw. $t = -1$ entsprechen (Bild E 45c).

a

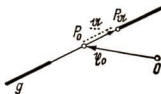


E 45

b



c



17

Ist der Richtungsvektor einer Geraden eindeutig bestimmt?

Geht man beim Aufstellen der Parametergleichung (19) für g von a und an Stelle von P_0 von einem Punkt P_1 der Geraden g , $P_1 \neq P_0$, aus, dann lautet die entsprechende Parametergleichung:

$$(19') \quad \xi = \xi_1 + \bar{t}\alpha,$$

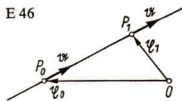
wobei \bar{t} von t verschieden ist, da z. B. dem Wert $t = 0$ der Punkt P_0 , aber $\bar{t} = 0$ der Punkt P_1 entspricht (Bild E 46). Die funktionale Abhängigkeit zwischen t und \bar{t} findet man, wenn man $\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda\alpha$

mit $\lambda = \text{const.}$ setzt, aus $\overrightarrow{P_0P_1} = \xi_1 - \xi_0$ den Vektor $\xi_1 = \overrightarrow{P_0P_1} + \xi_0 = \xi_0 + \lambda\alpha$ berechnet, in (19') einsetzt:

$$\xi = \xi_0 + \lambda\alpha + \bar{t}\alpha = \xi_0 + (\lambda + \bar{t})\alpha$$

und diese Gleichung mit (19) vergleicht. Wir finden: $t = \lambda + \bar{t}$.

E 46



18

Schreiben Sie die Parametergleichung der Geraden g ausgehenda) vom Punkt $P_0 \in g$ und von einem Richtungsvektor $\alpha' \neq \alpha$;b) von einem Punkt $P_1 \in g$, $P_1 \neq P_0$, und vom Richtungsvektor α' nieder!

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Parameter t der Geraden g aus ihrer Parametergleichung (19) und den Parametern \bar{t} und \bar{t}' von g , die den Fällen a) und b) in Übung 18 entsprechen?

Berechnet man die Parameterwerte der Punkte einer Geraden g ausgehend von einem beliebigen Punkt P_0 und einem Richtungsvektor a von g , dann wird durch die Wahl von a auf g ein **Durchlaufssinn**, d. h. eine Orientierung festgelegt, wenn man definiert, daß ein Punkt mit dem Parameterwert t stets vor jedem Punkt mit einem größeren und nach jedem Punkt mit einem kleineren Parameterwert als t liegen soll. Nimmt man für g anstelle von a den Vektor $-a$ als Richtungsvektor, kehrt sich die Orientierung, der Durchlaufssinn, von g um.

Eine Gerade, für die durch die Angabe eines bestimmten Richtungsvektors eine Orientierung festgelegt ist, nennt man eine **orientierte Gerade** oder auch **Achse**. Eine Achse wird durch eine Gerade veranschaulicht, die zur Kennzeichnung des Durchlaufsinnes mit einer Pfeilspitze versehen ist, welche nach der Seite des Anwachsens der Parameterwerte zeigt.

Legt man irgendwelchen Betrachtungen in einer Ebene ein Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ zugrunde, dann zeichnet man durch die Angabe von $O; i$ und j zwei orientierte Geraden dieser Ebene aus, und zwar

- die Gerade durch O , deren Richtungsvektor i ist; man nennt sie die **x-Achse** oder **Abzissenachse**;
- die Gerade durch O , deren Richtungsvektor j ist, man nennt sie die **y-Achse** oder **Ordinatenachse**.

Diese Achsen heißen die Koordinatenachsen des Koordinatensystems $\{O; i, j\}$.

Aufgaben e 114 bis 121

19 Punktrichtungsgleichung einer Geraden

Ist für eine Gerade g eine Parametergleichung (18) bekannt, dann kann aus dieser Beziehung eine Gleichung für g gewonnen werden, die keinen Parameter mehr enthält. Man geht zu diesem Zwecke folgendermaßen vor.

In der Ebene sei ein Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ gegeben. Dann kann man in die Gleichung (19) der Geraden g für die Vektoren ξ, ξ_0 und a ihre Zerlegungen

$$\xi = x_i i + y_j j, \quad \xi_0 = x_0 i + y_0 j, \quad a = a_x i + a_y j$$

nach den Basisvektoren i und j einsetzen und erhält die Beziehung

$$x_i + y_j = x_0 i + y_0 j + t(a_x i + a_y j),$$

die wegen der linearen Unabhängigkeit von i und j mit dem Gleichungssystem

$$(20) \quad x = x_0 + t a_x,$$

$$y = y_0 + t a_y$$

gleichbedeutend ist. Aus (20) eliminieren wir t , indem wir die erste dieser Gleichungen mit a_y , die zweite mit $-a_x$ multiplizieren und die Ergebnisse addieren. Wir erhalten so für (20) die Gleichung

$$(21) \quad \boxed{a_y x - a_x y = a_y x_0 - a_x y_0}.$$

In dieser Gleichung der Geraden g ist wegen $a \neq 0$ und damit auch $a_x^2 + a_y^2 \neq 0$ mindestens einer der Faktoren bei x und y von Null verschieden. Gleichungen dieser Gestalt mit $A^2 + B^2 \neq 0$ sind Ihnen bei der Behandlung der linearen Funktion in Zahlenbeispielen bereits begegnet. Da in die Gleichung (21) der

Parameter t nicht mehr eingeht, heißt (21) eine **parameterfreie Gleichung** der Geraden g .

Eine zweite Möglichkeit, den Parameter t aus dem Gleichungssystem (20) zu eliminieren, besteht in Folgendem. Wegen $a \neq 0$ ist stets $a_x^2 + a_y^2 \neq 0$, d. h. a_x und a_y sind nicht beide gleichzeitig Null. Setzen wir $a_x \neq 0$ voraus, kann aus der ersten Gleichung von (20) t berechnet und in die zweite eingesetzt werden. Dabei geht (20) für $a_x \neq 0$ in die Gleichung

$$(22) \quad y = y_0 + \frac{a_y}{a_x}(x - x_0)$$

über, in der wegen $a_x = |a| \cos \alpha$, $a_y = |a| \sin \alpha$ mit $\alpha = \begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{matrix} (i, a)$ für $\frac{a_y}{a_x} = \tan \alpha$ geschrieben werden kann. Den Koeffizienten $\frac{a_y}{a_x}$, den man meist kurz mit m bezeichnet, nennt man wegen $m = \tan \alpha$ mit $\alpha = \begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{matrix} (i, a)$ den **Anstieg** der Geraden g (Bild E 47). Die Gleichung

$$(23) \quad \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

heißt die **Punktgleichung** von g , da man sie nach einem Punkt $P_0(x_0; y_0)$ von g und einem Richtungsvektor dieser Geraden bzw. ihrem Anstieg aufschreiben kann. Die Gleichung (23) wird von den Koordinaten aller Punkte von g (und nur von diesen) erfüllt. Sie kann für alle Geraden mit

$\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ niedergeschrieben werden.

Ist für g dagegen $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ und folglich $a_x = 0$,

dann geht das Gleichungssystem (20) über in

$$(24) \quad x = x_0$$

$$y = y_0 + ta_y$$

mit $a_y = |a|$. Berücksichtigt man, daß hier y_0 und a_y feste Zahlen sind, dann drückt die zweite Gleichung von (24) nur aus, daß y für die Punkte von g alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt. Das wird besonders deutlich, wenn für a ein Einheitsvektor und für P_0 der Schnittpunkt von g mit der x -Achse gewählt wird. Man läßt deshalb für Geraden mit $a_x = 0$ die zweite Gleichung des Systems (24) weg und schreibt als Geradengleichung kurz $x = x_0$.

Die Parametergleichung (19) ist die vektorielle Form der Punktgleichung (22) bzw. (23).

14 Eine Gerade g sei durch einen Punkt $P_0(-1; 3)$ und den Richtungsfaktor

$m = -\frac{4}{5}$ gegeben. Gesucht ist eine Parametergleichung für g .

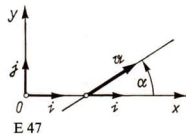
Der Vektor \vec{OP}_0 hat in Komponentendarstellung die Gestalt:

$$\vec{OP}_0 = \xi_0 = -1i + 3j.$$

Zur Bestimmung eines Richtungsvektors a von g schreiben wir a ebenfalls in Komponentendarstellung $a = a_x i + a_y j$ und setzen $m = -\frac{4}{5} = \frac{a_y}{a_x}$. Aus dieser

Beziehung entnehmen wir, daß als a beispielsweise der Vektor $a = 5i - 4j$ gewählt werden kann. Als mögliche Parametergleichung für g erhalten wir dann

$$\xi = \xi_0 + ta = -1i + 3j + t(5i - 4j).$$



Da für $\vec{a}(-10; 8)$ wieder $m = -\frac{4}{5}$ ist, kann \vec{a} gleichfalls als Richtungsvektor von g angesehen werden. Die entsprechende Parametergleichung für g lautet dann

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} = -1i + 3j + t(-10i + 8j).$$

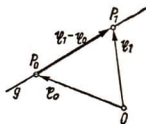
Beide Gleichungen sind Parametergleichungen für ein und dieselbe Gerade g .

Aufgaben e 122 bis 127

20 Zweipunktegleichung einer Geraden

Eine Gerade g kann auch durch zwei ihrer Punkte P_0 und P_1 gegeben werden. Will man ausgehend von diesen zwei Punkten eine Gleichung für g aufstellen, braucht man nur zu berücksichtigen, daß der Vektor $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0$ Richtungsvektor von g ist (Bild E 48), und die Gleichung (19) dementsprechend in der Gestalt

$$(25) \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$$



zu schreiben. Setzt man hier wieder für die Vektoren \vec{x} , \vec{x}_0 und \vec{x}_1 ihre Zerlegungen

$$\vec{x} = x_i + y_j, \quad \vec{x}_0 = x_0i + y_0j, \quad \vec{x}_1 = x_1i + y_1j \quad \text{E 48}$$

ein und beachtet die lineare Unabhängigkeit der Vektoren i und j , dann ergibt sich für (25) das Gleichungssystem

$$(26) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + t(x_1 - x_0), \\ y &= y_0 + t(y_1 - y_0). \end{aligned}$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $(y_1 - y_0)$, der zweiten mit $-(x_1 - x_0)$ und anschließende Addition läßt sich aus diesen Gleichungen der Parameter t eliminieren, und man erhält für (26) die Gleichung

$$(27) \quad (x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0),$$

für die im Falle $x_1 - x_0 \neq 0$ oft die einprägsamere, aber nicht uneingeschränkt geltende Formel

$$(28) \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

geschrieben wird [(28) gilt nicht für den Punkt P_0 !]. Die Gleichung (27) heißt die **Zweipunktegleichung** der Geraden g .

- (20) Zeigen Sie, daß auch die Zweipunktegleichung einer Geraden stets in der Gestalt $Ax + By + C = 0$ mit $A^2 + B^2 \neq 0$ geschrieben werden kann!

Aufgaben e 128 bis 131

21 Normalform der Geradengleichung, Achsenabschnittsgleichung

Im Falle, daß die zum Aufstellen der Punktrichtungsgleichung bzw. Zweipunktgleichung einer Geraden zur Verfügung stehenden Punkte gerade die Punkte sind, welche die Gerade mit den Koordinatenachsen gemein hat, nehmen die beiden Gleichungen eine besonders einfache und aussagekräftige Gestalt an.

Ist eine Gerade g durch ihren Anstieg m und den Punkt P_0 mit den Koordinaten $x_0 = 0$, $y_0 = b$ gegeben, so lautet ihre Punktrichtungsgleichung (23)

$$(29) \quad \boxed{y = mx + b},$$

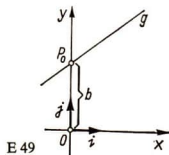
aus der sich der Anstieg m von g und die Länge b des von O und P_0 begrenzten Abschnittes der y -Achse sofort ablesen lassen. Im Falle $b = 0$, d. h., wenn P_0 mit O zusammenfällt, ist

$$y = mx$$

die Gleichung der Geraden.

Die Beziehung (29) heißt die **Normalform** der Geradengleichung.

- (21) Erläutern Sie den Sinn des Vorzeichens von b in (29)! (Bild E 49)



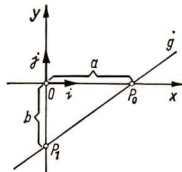
Haben die zwei zum Aufstellen der Zweipunktgleichung der Geraden g zur Verfügung stehenden Punkte P_0 und P_1 die Koordinaten $x_0 = a$, $y_0 = 0$ bzw. $x_1 = 0$, $y_1 = b$, dann vereinfacht sich die Gleichung (27) zu

$$(x - a) b = y (-a).$$

Ist insbesondere $a \neq 0$ und $b \neq 0$, so kann dafür

$$(30) \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

E 50



geschrieben werden.

Die gefundene Beziehung (30) heißt die **Achsenabschnittsgleichung** der Geraden g , weil aus ihr sofort die Länge und Lage der Strecken $\overline{OP_0}$ und $\overline{OP_1}$, der sogenannten Achsenabschnitte, abgelesen werden können (Bild E 50).

Aufgaben e 132 bis 136

22 Allgemeine Geradengleichung

Jede Gerade kann entweder durch zwei ihrer Punkte oder durch einen ihrer Punkte und einen ihrer Richtungsvektoren gegeben werden. Demzufolge kann für jede Gerade ihre Zweipunkte- oder ihre Punktrichtungsgleichung auf-

geschrieben werden. Da nun sowohl die Zweipunktgleichung als auch die Punktrichtungsgleichung einer Geraden in der Gestalt

$$(31) \quad \boxed{Ax + By + C = 0} \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

geschrieben werden kann, hat also jede Gerade eine Gleichung dieses Typs. Umgekehrt kann man zeigen, daß jede lineare Gleichung der Gestalt (31) bei $A^2 + B^2 \neq 0$ die Gleichung einer Geraden ist. Ist nämlich $B \neq 0$, dann kann für (31)

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

geschrieben werden, und das ist die Normalform der Gleichung einer Geraden mit dem Anstieg $m = -\frac{A}{B}$ durch den Punkt $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$. Ist dagegen $B = 0$, geht wegen $A \neq 0$ (31) in die Gleichung

$$x = -\frac{C}{A}$$

über, und das ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ geht und parallel zur y -Achse verläuft.

Die Schreibweise (31) für die Gleichung einer Geraden nennt man die **allgemeine Gleichung** dieser Geraden.

Aufgaben e 137 und 138

23 Schnittpunkt zweier Geraden

Haben zwei Geraden g_1 und g_2 genau einen gemeinsamen Punkt S , so nennt man diesen ihren **Schnittpunkt**. Man kann seine Koordinaten in jedem der drei möglichen Fälle berechnen:

1.) g_1 und g_2 sind durch allgemeine Geradengleichungen

$$(32) \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

mit $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$ und $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$ gegeben.

2.) g_1 und g_2 sind durch folgende Parametergleichungen gegeben:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}, \quad \vec{y} = \vec{y}_0 + i\vec{a}, \quad a \neq 0, \quad \vec{a} \neq 0.$$

3.) g_1 ist durch die Gleichung

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0,$$

gegeben und g_2 durch die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}, \quad a \neq 0.$$

Im ersten Fall müssen die Koordinaten x_S und y_S von S sowohl der Gleichung für g_1 als auch der Gleichung für g_2 genügen, d. h., es muß gelten:

$$A_1x_S + B_1y_S + C_1 = 0$$

$$\underline{A_2x_S + B_2y_S + C_2 = 0}$$

Eliminiert man aus diesem Gleichungssystem auf die übliche Art und Weise einmal x_S und einmal y_S , dann ergeben sich zur Bestimmung dieser Koordinaten die Beziehungen

$$x_S(A_1B_2 - A_2B_1) + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0,$$

$$y_S(A_2B_1 - A_1B_2) + (A_2C_1 - A_1C_2) = 0,$$

aus denen für $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ die Koordinaten

$$(33) \quad x_S = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y_S = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$$

des einzigen gemeinsamen Punktes S von g_1 und g_2 berechnet werden können. Ist für die gegebenen Geraden $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, aber $B_1 \neq 0$, dann muß auch $B_2 \neq 0$ sein (sowohl für $A_2 \neq 0$, als auch wegen $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$ für $A_2 = 0$) und für (32) kann geschrieben werden:

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}, \quad y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}.$$

Hieraus ersieht man, daß wegen $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, d. h. $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$, der Anstieg beider Geraden gleich ist. Folglich sind die Geraden parallel zueinander.

Sie fallen zusammen, wenn außer $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ noch $\frac{C_1}{B_1} = \frac{C_2}{B_2}$ ist.

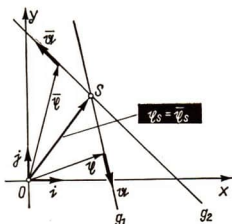
Ist $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ und $B_1 = 0$, so muß wegen $A_1 \neq 0$ (da $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$) noch $B_2 = 0$ sein. Die Gleichungen (32) lauten dann

$$x = -\frac{C_1}{A_1}, \quad x = -\frac{C_2}{A_2};$$

sie stehen für zwei Geraden, die beide parallel zur y -Achse sind und bei $\frac{C_1}{A_1} = \frac{C_2}{A_2}$ zusammenfallen.

(22) Zeigen Sie, daß zwei Geradengleichungen (32) ein und dieselbe Gerade darstellen, wenn gilt

$$(34) \quad A_1 = kA_2, \quad B_1 = kB_2, \\ C_1 = kC_2 \text{ bei } k \neq 0!$$



E 51

Umgekehrt stellen zwei Geradengleichungen (32) verschiedene Geraden dar, wenn zwischen den Koeffizienten beider Gleichungen keine Beziehung der Gestalt (34) besteht.

Im zweiten Fall gilt für den Schnittpunkt S von g_1 und g_2 , dem auf g_1 der Parameterwert t_S und auf g_2 der Parameterwert \bar{t}_S entsprechen möge, die Beziehung (Bild E 51)

$$(35) \quad \underline{r}_S = \underline{\bar{r}}_S \quad \text{oder} \quad \underline{r}_0 + t_S \underline{a} = \underline{\bar{r}}_0 + \bar{t}_S \underline{\bar{a}}.$$

Dieser Gleichung entspricht in Koordinatenschreibweise das System

$$\begin{array}{l} x_0 + t_S a_x = \bar{x}_0 + \bar{t}_S \bar{a}_x \quad | \cdot \bar{a}_y \quad | \cdot a_y \\ y_0 + t_S a_y = \bar{y}_0 + \bar{t}_S \bar{a}_y \quad | \cdot -\bar{a}_x \quad | \cdot -a_x \end{array}$$

aus dem wir durch Eliminieren von t_S bzw. \bar{t}_S die Beziehungen

$$t_S(a_x \bar{a}_y - a_y \bar{a}_x) = \bar{x}_0 \bar{a}_y - \bar{y}_0 \bar{a}_x - (x_0 \bar{a}_y - y_0 \bar{a}_x)$$

$$\bar{t}_S(\bar{a}_x a_y - \bar{a}_y a_x) = x_0 a_y - y_0 a_x - (\bar{x}_0 a_y - \bar{y}_0 a_x)$$

erhalten, aus denen sich bei $a_x \bar{a}_y - a_y \bar{a}_x \neq 0$ die gesuchten Parameterwerte

$$t_S = \frac{(\bar{x}_0 - x_0) \bar{a}_y - (\bar{y}_0 - y_0) \bar{a}_x}{a_x \bar{a}_y - a_y \bar{a}_x}$$

$$\bar{t}_S = \frac{(x_0 - \bar{x}_0) a_y - (y_0 - \bar{y}_0) a_x}{-(a_x \bar{a}_y - a_y \bar{a}_x)}$$

für den gemeinsamen Punkt S von g_1 und g_2 bestimmen lassen. Den Schnittpunkt S erhält man durch Einsetzen von t_S bzw. \bar{t}_S in die Gleichung für g_1 bzw. g_2 .

Ist für die gegebenen Geraden $a_x \bar{a}_y - a_y \bar{a}_x = 0$, dann ist für $a_x \neq 0$ (und damit wegen $\bar{a} \neq 0$ auch $\bar{a}_x \neq 0$) $\frac{a_y}{a_x} = \frac{\bar{a}_y}{\bar{a}_x}$ und für $a_x = 0$: $a_y = \bar{a}_y$, $a_x = \bar{a}_x = 0$, d. h., in beiden Fällen ist \bar{a} parallel zu \bar{a} und damit $\bar{a} = \lambda a$ mit $\lambda = \text{const.} \neq 0$. Schreiben wir nun für (35) die Beziehung

$$t_S a - \bar{t}_S \bar{a} = \bar{x}_0 - x_0 \quad \text{oder} \quad (t_S - \lambda \bar{t}_S) a = \bar{x}_0 - x_0,$$

so kann man daran ablesen,

1.) daß für $\bar{x}_0 - x_0 \parallel a$, d. h. $\bar{x}_0 - x_0 = \mu a$ mit $\mu = \text{const.}$, die Gleichung

$$(t_S - \lambda \bar{t}_S) a = \mu a \quad \text{bzw.} \quad (t_S - \lambda \bar{t}_S - \mu) a = 0$$

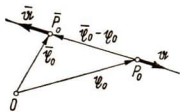
unendlich viele Lösungen $[t_S; \bar{t}_S]$ besitzt. Die Geraden g_1 und g_2 fallen folglich zusammen (Bild E 52);

2.) daß für $\bar{x}_0 - x_0 \not\parallel a$ die Gleichung

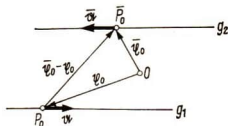
$$(t_S - \lambda \bar{t}_S) a = \bar{x}_0 - x_0$$

für kein einziges Wertepaar $[t_S; \bar{t}_S]$ erfüllt sein kann.

Folglich sind bei $\bar{x}_0 - x_0 \not\parallel a$ die Geraden g_1 und g_2 parallel zueinander und fallen nicht zusammen (Bild E 53).



E 52



E 53

15 Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen

$$g_1: \bar{x} = \bar{x}_0 + t a \quad \text{mit} \quad \bar{x}_0(3; 0), a(a_x; 3),$$

$$g_2: \bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{t} \bar{a} \quad \text{mit} \quad \bar{x}_0(0; y), \bar{a}\left(-\frac{4}{3}; 1\right).$$

Es soll festgestellt werden, für welche Werte von y und a_x diese Geraden gemeinsame Punkte besitzen.

Die Richtungsvektoren a und \bar{a} sind zueinander parallel, wenn

$$a_x \bar{a}_y - a_y \bar{a}_x = a_x \cdot 1 - \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 3 = 0, \text{ d. h. } a_x = -4 \text{ ist. F\u00fcr diesen Wert von } a_x$$

ist folglich $g_1 \parallel g_2$ oder $g_1 = g_2$.

Die Geraden fallen zusammen, wenn $\bar{x}_0 - \bar{x}_0 \parallel a$ ist, d. h., wenn es eine Zahl μ gibt, f\u00fcr die $\bar{x}_0 - \bar{x}_0 = \mu a$ ist. F\u00fcr diese Beziehung schreiben wir das System

$$\begin{array}{l} \bar{x}_0 - x_0 = \mu a_x \\ \bar{y}_0 - y_0 = \mu a_y \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} 0 - 3 = \mu \cdot (-4) \\ y - 0 = \mu \cdot 3 \end{array}$$

dessen L\u00f6sung das Zahlenpaar $\mu = \frac{3}{4}$ und $y = \frac{9}{4}$ ist. Damit haben wir gefunden:

1. F\u00fcr $a_x = -4$ und $y = \frac{9}{4}$ fallen g_1 und g_2 zusammen.
2. F\u00fcr $a_x = -4$ und $y \neq \frac{9}{4}$ sind g_1 und g_2 parallel zueinander, ohne da\u00df sie zusammenfallen.
3. F\u00fcr $a_x \neq -4$ sind die Geraden nicht parallel zueinander.

Ihr Schnittpunkt entspricht den Parameterwerten

$$t_s = \frac{(0 - 3) \cdot 1 - (y - 0) \left(-\frac{4}{3}\right)}{a_x \cdot 1 - 3 \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{4y - 9}{3a_x + 12},$$

$$\bar{i}_s = \frac{3 \cdot 3 - (0 - y) \cdot a_x}{-\left(a_x \cdot 1 - 3 \left(-\frac{4}{3}\right)\right)} = -\frac{a_x y + 9}{a_x + 4}.$$

Setzt man beispielsweise $y = 0$ und $a_x = 0$, so ist $t_s = -\frac{3}{4}$, $\bar{i}_s = -\frac{9}{4}$, und der Schnittpunkt hat die Koordinaten

$$x_s = x_0 + t_s a_x = 3 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 0 = 3,$$

$$y_s = y_0 + t_s a_y = 0 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 3 = -\frac{9}{4},$$

die auch aus den Beziehungen $\bar{x}_s = \bar{x}_0 + \bar{i}_s \bar{a}_x$ und $\bar{y}_s = \bar{y}_0 + \bar{i}_s \bar{a}_y$ h\u00e4tten berechnet werden k\u00f6nnen.

Im dritten Falle m\u00fcssen f\u00fcr die Koordinaten x_s und y_s des gemeinsamen Punktes S von g_1 und g_2 die Gleichung

$$(36) \quad Ax_s + By_s + C = 0$$

und die in Koordinatenschreibweise geschriebene Parametergleichung f\u00fcr g_2

$$(37) \quad x_s = x_0 + t_s a_x, \quad y_s = y_0 + t_s a_y$$

erf\u00fcllt sein. Setzt man (37) in (36) ein, so erh\u00e4lt man die Gleichung

$$A(x_0 + t_s a_x) + B(y_0 + t_s a_y) + C = 0$$

oder

$$t_s(Aa_x + Ba_y) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

aus der t_S für $Aa_x + Ba_y \neq 0$ berechnet werden kann:

$$t_S = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{Aa_x + Ba_y}.$$

Die Werte für die Koordinaten von S findet man durch Einsetzen des gefundenen Wertes für t_S in (37).

- (23) Welche gegenseitige Lage haben g_1 und g_2 bei $Aa_x + Ba_y = 0$?

Aufgaben e 139 bis 148

24 Teilverhältnis



DEFINITION: Ist P ein Punkt der durch die Punkte A und B bestimmten Geraden und ist $P \neq B$, dann heißt die Zahl λ , für die die Beziehung

$$(38) \quad \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$$

zwischen den gerichteten Strecken \overrightarrow{AP} und \overrightarrow{PB} gilt, das *Teilverhältnis*, in dem der Punkt P die gerichtete Strecke \overrightarrow{AB} teilt.

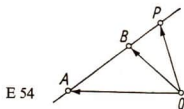
Liegt P nicht zwischen A und B , dann sind die Strecken \overrightarrow{AP} und \overrightarrow{PB} entgegengesetzt gerichtet, und λ ist negativ. Liegt P zwischen A und B , sind \overrightarrow{AP} und \overrightarrow{PB} gleichgerichtete Strecken, und λ ist positiv. Für $P = A$ ist $\lambda = 0$.

Die (38) entsprechende vektorielle Gleichung lautet $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ (Bild E 54). Schreibt man dafür die Gleichung

$$(39) \quad \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$$

oder, für $\lambda \neq -1$

$$(40) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda},$$



dann lassen sich nach zwei vorgegebenen Punkten A und B und einer Zahl $\lambda \neq -1$ die Koordinaten x_P und y_P des dem Teilverhältnis λ entsprechenden Teilpunktes P schnell finden:

$$\boxed{x_P = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_P = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}.}$$

Umgekehrt kann man nach drei vorgegebenen Punkten A , B und P einer Geraden aus (39) das Teilverhältnis λ bestimmen, in dem der Punkt P die gerichtete Strecke \overrightarrow{AB} teilt. Wegen

$$x_P - x_A = \lambda(x_B - x_P),$$

$$y_P - y_A = \lambda(y_B - y_P)$$

ist nämlich

$$\boxed{\lambda = \frac{x_P + x_A}{x_P + x_B} = \frac{y_P + y_A}{y_P + y_B}.}$$

In der letzten Beziehung kommt zum Ausdruck, daß das Teilverhältnis nur für drei Punkte einer Geraden berechnet werden kann.

- 24) Deuten Sie **a)** die Koordinaten x und y eines Punktes P bezüglich $\{0; a_1, a_2\}$ bzw. eines Vektors ξ bezüglich einer Basis $\{a_1, a_2\}$ und **b)** den Parameter t in der Geradengleichung (18)¹ als Teilverhältnis!

Aufgaben e 149 bis 151

Anhang

Über notwendige und hinreichende Bedingungen

Viele Aussagen bzw. Aussageformen, nicht nur in der Mathematik, sind von der Form:

Wenn p , so q .

Dabei sind p und q wiederum Aussagen bzw. Aussageformen.

- 16) **Wenn** eine natürliche Zahl durch 6 teilbar ist, **so** ist sie auch durch 3 teilbar.

Mit anderen Worten: Für jede natürliche Zahl a gilt:

Wenn a durch 6 teilbar ist, so ist a durch 3 teilbar.

- 17) **Wenn** zwei Dreiecke kongruent sind, **so** sind sie auch ähnlich.

- 18) Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

Wenn $a \cdot b = 0$, so $a = 0$ oder $b = 0$.

- 19) Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

Wenn $a > 0$ und $b > 0$, so $a \cdot b > 0$.

- 20) Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:

Wenn $a > b$, so $a + c > b + c$.

Im Beispiel E 16 ist p die Aussageform „ a ist durch 6 teilbar“ und q die Aussageform „ a ist durch 3 teilbar“.

Sei a eine natürliche Zahl. Ist uns nun von der Zahl a bekannt, daß sie durch 6 teilbar ist, so folgt nach dem 1. Satz sofort, daß sie auch durch 3 teilbar ist.

Wir sagen: Die Teilbarkeit durch 6 ist **hinreichend** für die Teilbarkeit durch 3.

Ist dagegen die Zahl a nicht durch 3 teilbar, so ist sie schon gar nicht durch 6 teilbar. Auch das ist eine unmittelbare Folgerung aus dem ersten Satz des Beispiels E 16.

Wir sagen: Die Teilbarkeit durch 3 ist **notwendig** für die Teilbarkeit durch 6.

Oftmals wird auch folgende übersichtliche Form für die Darstellung eines „Wenn-so“-Satzes (auch **Implikation** genannt) gewählt:

¹ In Gleichung (18) wurde der Parameter einer Geradengleichung noch mit λ bezeichnet.

Voraussetzung: a ist durch 6 teilbar.

Behauptung: a ist durch 3 teilbar.

Für eine Implikation werden also mehrere unterschiedliche Formulierungen gebraucht, die aber untereinander völlig gleichwertig sind:

- a) Wenn p , so q .
- b) Wenn nicht q , so nicht p .
- c) p ist hinreichend für q (p ist eine hinreichende Bedingung für q).
- d) q ist notwendig für p (q ist eine notwendige Bedingung für p).
- e) Voraussetzung: p
Behauptung: q .

25 Formulieren Sie die Sätze in den Beispielen E 17 bis E 20 nach den Mustern b) bis e)!

Das Beispiel E 18 ist noch eine besondere Bemerkung wert. Hier gilt nämlich sogar die Umkehrung, d. h. es ist für beliebige reelle Zahlen a und b

$$a \cdot b = 0 \text{ genau dann, wenn } a = 0 \text{ oder } b = 0$$

ist. Das bedeutet: Es gilt für beliebige reelle Zahlen a und b :

$$\text{Wenn } a \cdot b = 0, \text{ so } a = 0 \text{ oder } b = 0$$

$$\text{und wenn } a = 0 \text{ oder } b = 0, \text{ so } a \cdot b = 0.$$

Die Bedingung $a \cdot b = 0$ tritt einmal als Voraussetzung und einmal als Behauptung auf, entsprechend (nur in anderer Reihenfolge) die andere Bedingung.

Es ist also $a \cdot b = 0$ hinreichend dafür, daß $a = 0$ oder $b = 0$ ist, **und** andererseits ist $a \cdot b = 0$ notwendig dafür, daß $a = 0$ oder $b = 0$ ist.

Wir sagen dann: $a \cdot b = 0$ ist eine **notwendige und hinreichende** Bedingung dafür, daß $a = 0$ oder $b = 0$ ist. In gleicher Weise ist dann auch $a = 0$ oder $b = 0$ notwendig und hinreichend dafür, daß $a \cdot b = 0$ ist.

a) Vollständige Induktion, elementare Folgen

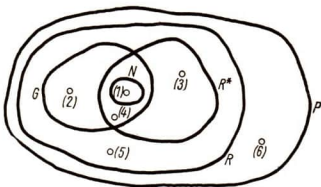
1. Für die folgenden Zahlen ist die Zugehörigkeit zu den Zahlenbereichen N , G , R^* , R und P zu untersuchen.

Beispiel: Für $-\frac{3}{2}$ gilt: $-\frac{3}{2} \in P$; $-\frac{3}{2} \in R$; $-\frac{3}{2} \notin R^*$; $-\frac{3}{2} \notin G$; $-\frac{3}{2} \notin N$

- | | | | |
|------------------|-------------------------|---------------------------------------|-------------------------|
| a) -5 | f) π | l) $3,14159$ | q) $-3,25$ |
| b) $0,\bar{3}$ | g) $-8,17\bar{53}$ | m) $0,101\ 001\ 000\ 100\ 001\ \dots$ | |
| c) $\sqrt{0,36}$ | h) $32^{-\frac{1}{5}}$ | n) $\sqrt[3]{100}$ | r) $8^{\frac{2}{3}}$ |
| d) $\lg 25$ | i) $\lg(\lg 10)$ | o) $\lg 25 + \lg 4$ | |
| e) $\log_2 0,25$ | k) $\sin \frac{\pi}{6}$ | p) $\log_3 17$ | s) $\cos \frac{\pi}{4}$ |

2. Suchen Sie Zahlen x , für die gilt

- $x \in R$ und $x \notin G$,
- $x \in G$ und $x \in R^*$,
- $x \in R^*$ und $x \notin N$,
- $x \in N$ und $x \notin R$,
- $x \in P$ und $x \notin R!$



a 1

3. Das Bild a 1 veranschaulicht die Teilmengenbeziehungen zwischen den Zahlenbereichen N , G , R^* , R und P .

Die mit (1) bis (6) bezeichneten Punkte mögen jeweils Elemente der entsprechenden dargestellten Mengen repräsentieren.

- Welche der in der Aufgabe 1 angegebenen Zahlen könnte (1) repräsentieren?
- Untersuchen Sie dieselbe Fragestellung für (2) bis (6)!

4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $N \subset R$ | c) $R^* \subset N$ | e) $P \subseteq R$ |
| b) $G \subseteq R$ | d) $R \subseteq R$ | f) $G \notin G$ |

5. In welchen der Zahlenbereiche N , G , R^* und R liegen die reellen Lösungen folgender Gleichungen?

- | | | |
|---|------------------------------|--------------------------------|
| a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ | f) $x^2 + 6x + 9 = 0$ | l) $x^2 + 283x = 0$ |
| b) $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$ | g) $x^2 + 3x - 7 = 0$ | m) $x^2 - x + 11 = 0$ |
| c) $x^3 = -8$ | h) $x^4 + 13x = 0$ | n) $5^x = 625$ |
| d) $10^x = 2$ | i) $\lg x = \frac{3}{2}$ | o) $\log_4 x = 3$ |
| e) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ | k) $\tan x \cdot \cot x = 1$ | p) $\sin^2 x + \cos^2 x = 0,8$ |

Es seien

P_r – Menge der Primzahlen

G^- – Menge der negativen ganzen Zahlen

N_2 – Menge der durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen

N_4 – Menge der durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen

V_2 – Menge derjenigen natürlichen Zahlen, die Vielfache von genau zwei verschiedenen natürlichen Zahlen sind

T_7 – Menge der (natürlichen) Teiler von 7

Geben Sie alle echten und unechten Teilmengenbeziehungen dieser Mengen untereinander und mit den Zahlenbereichen N und G an!

8. Betrachtet werden die nachstehenden Mengen reeller Zahlen. Untersuchen Sie die echten und unechten Teilmengenbeziehungen der aufgeführten Mengen untereinander und zu den Zahlenbereichen N , G , R^* , R und P !

a) Q_N – Menge der x mit $x^2 \in N$

Q_G – Menge der x mit $x^2 \in G$

Q_{R^*} – Menge der x mit $x^2 \in R^*$

Q_R – Menge der x mit $x^2 \in R$

Q_P – Menge der x mit $x^2 \in P$

(Denken Sie dabei an Definitionsbereich und Wertevorrat der Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = \sqrt{x}$!)

b) W_N – Menge der x mit $\sqrt{x} \in N$

W_G – Menge der x mit $\sqrt{x} \in G$

W_{R^*} – Menge der x mit $\sqrt{x} \in R^*$

W_R – Menge der x mit $\sqrt{x} \in R$

W_P – Menge der x mit $\sqrt{x} \in P$

9. a) Innerhalb von R^* bilden die gebrochenen Zahlen $\frac{1}{n}$ mit $n \in N$ eine echte Teilmenge, deren Elemente man, zusammen mit 0, den natürlichen Zahlen folgendermaßen eindeutig zuordnen kann:

$$\frac{1}{n} \leftrightarrow n \quad (n \in N; n \neq 0)$$

$$0 \leftrightarrow 0$$

Überprüfen Sie, ob bei dieser Zuordnung Kleiner-Beziehung und Operationen erhalten bleiben!

b) Untersuchen Sie entsprechend eine Zuordnung zwischen den gebrochenen und den nicht-positiven rationalen Zahlen vermöge

$$b \leftrightarrow -b \quad (b \in R^*)!$$

10. Ordnet man jeder natürlichen Zahl n ihr Doppeltes zu, so ist diese Zuordnung zwischen den Elementen von N und den geraden Zahlen eindeutig.

Bleiben bei dieser Zuordnung die Kleiner-Beziehung und die vier Grundoperationen erhalten?

7. Betrachtet werden Mengen von Zahlen, die sich durch Brüche darstellen lassen, und zwar

D_E – durch endliche Dezimalbrüche,

D_P – durch periodische Dezimalbrüche,

D_U – durch unendliche Dezimalbrüche,

D_N – durch unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche,

B – durch gemeine Brüche

a) Geben Sie möglichst vielseitige Beispiele für Elemente dieser Mengen an!

b) Welche dieser Mengen stimmen miteinander oder mit einem der Zahlenbereiche R oder P überein?

c) Welche dieser Mengen sind echte Teilmengen von R oder P ?

11. Untersuchen Sie entsprechend der Aufgabe a 10 eine Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen und den Quadratzahlen! Was ändert sich, wenn man statt der natürlichen Zahlen die ganzen Zahlen betrachtet?

1. Untersuchen Sie, ob die irrationalen Zahlen ebenfalls einen Zahlenbereich bilden, ob also etwa die Summe oder das Produkt zweier Irrationalzahlen stets wieder eine Irrationalzahl ist!

12. Jeder reellen Zahl werde ihr, nach den Rundungsregeln festgelegter rationaler Näherungswert mit vier geltenden Ziffern zugeordnet.

a) Ist diese Zuordnung eineindeutig?

b) Wie steht es mit dem Erhalt der Beziehungen „kleiner“, „kleiner oder gleich“ und der Rechenoperationen?

Setzen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen in Beziehung zu Ihren Kenntnissen von zweckmäßigen Überschlagsrechnungen!

13. Die reellen Zahlen können eineindeutig durch unendliche Dezimalbrüche dargestellt werden. Wie läßt sich verhältnismäßig bequem eine Kleiner-Beziehung zwischen ihnen auf der Grundlage dieser Darstellung erklären?

14. Die Addition zweier rationaler Zahlen $[a; b]$ und $[c; d]$ wurde auf Seite 6 definiert durch

$$r[a; b] \oplus r[c; d] = r[a + c; b + d].$$

Das legt nahe, die Subtraktion zu definieren durch

$$r[a; b] \ominus r[c; d] = r[a - c; b - d].$$

Warum ist diese Definition für die Erweiterung von R^* zu R unbrauchbar?

15. Beispiele wie $\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{1}$ lassen es möglich erscheinen, die Fortsetzung der Multiplikation natürlicher Zahlen in den Bereich der gebrochenen Zahlen dadurch zu erhalten, daß man wie bei der Addition verfährt, also erklärt:

Man multipliziert zwei gebrochene Zahlen, indem man Darstellungsweisen mit gleichen Nennern wählt (gleichnamig macht), deren Zähler multipliziert und den Nenner beibehält.

Erläutern Sie, warum eine solche Festlegung unzulässig wäre!

2. Man kann die in der Lerneinheit A 2 beschriebene Erweiterung von R^* zu R dadurch abändern, daß man für die Definition von Ordnung und Operationen die im Schritt 3 eingeführten Bezeichnungen rationaler Zahlen heranzieht, also etwa festlegt:

$$(+a) \oplus (+b) = +(a + b).$$

Dabei sind a und b die (den rationalen Zahlen $+a$ und $+b$ entsprechenden) gebrochenen Zahlen in den ausgezeichneten Repräsentanten $[a; 0]$ und $[b; 0]$, und $+(a + b)$ ist diejenige rationale Zahl, die einen Repräsentanten $[a + b; 0]$ hat.

a) Wie müßte die Addition für die übrigen möglichen Vorzeichenkombinationen festgelegt werden?

Untersuchen Sie auch die übrigen Rechenoperationen! Wie steht es jetzt mit dem Problem der Repräsentantenunabhängigkeit?

b) Welche Konsequenzen hätte es, wenn man in R folgende Kleinerbeziehung festlegte:

$$1. +a \otimes +b \text{ genau dann, wenn } a < b$$

$$2. -a \otimes -b \text{ genau dann, wenn } a < b$$

$$3. -a \otimes +b \text{ für alle } a, b \text{ aus } R^*?$$

3. Führen Sie in völliger Analogie zu der Erweiterung $R^* \rightarrow R$ in der Lerneinheit A 2 die Erweiterung $N \rightarrow G$ durch!

Überlegen Sie (nach Möglichkeit vorher), welche Operationen und Begriffe zueinander analog sind!

16. Untersuchen Sie die Zahlenbereiche N , R^* , R und P auf Beschränktheit und Grenzen!

17. Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit, und geben Sie – sofern möglich – je zwei obere und untere Schranken an!

- a) Menge aller natürlichen Zahlen, die gerade und zweistellig sind
 b) Menge aller rationalen x mit $|x| < 17$
 c) Menge aller natürlichen x mit $-27 < x \leq 0$
 d) Menge aller durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen
 e) Menge aller rationalen x mit $x \leq 1$
 f) Menge aller rationalen x mit $x < |x|$

18. Geben Sie eine (in den Lerneinheiten A 3 und A 4 nicht vorkommende) Menge an (mit Begründung), die

- a) beiderseitig nicht beschränkt ist, b) nicht beiderseitig beschränkt ist, c) nur nach unten beschränkt ist, d) nur nach oben beschränkt ist, e) beiderseitig beschränkt ist!

19. Geben Sie eine Menge mit unendlich vielen Elementen an, für die

- a) -10 untere Schranke ist,
 b) -10 untere Grenze ist,
 c) 4 und 5 untere Schranken sind,
 d) 4 und 5 untere Grenzen sind,
 e) 4 und 5 Grenzen sind!

20. Geben Sie eine Menge mit unendlich vielen Elementen an, für die

- a) 3 obere Schranke ist,
 b) 3 obere Grenze ist,
 c) 3 obere Schranke, aber nicht obere Grenze ist,
 d) 3 obere Grenze, aber nicht obere Schranke ist!

21. Geben Sie alle Mengen an, für die

- a) 3 sowohl obere als auch untere Schranke ist,
 b) 3 sowohl obere als auch untere Grenze ist,
 c) 3 zwar obere und untere Schranke, aber nicht Grenze ist,
 d) 3 obere und 5 untere Schranke ist,
 e) 3 obere und 5 untere Grenze ist!

22. Untersuchen Sie für folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen die Lösungsmengen über dem Grundbereich der rationalen Zahlen auf Beschränktheit, und geben Sie – sofern möglich – untere und obere Grenzen an!

- a) $\sin x = 0$ c) $\tan x = 1$ e) $x^3 = -125$
 b) $x^2 < 81$ d) $x^2 - 17x + 72 < 0$ f) $x^2 + 12x - 45 > 0$

23. Untersuchen Sie für folgende Gleichungen und Ungleichungen die Mengen reeller x auf Beschränktheit, und geben Sie – sofern möglich – untere und obere Grenzen an!

- a) $\sin x = 0$ d) $x^2 = 80$ g) $x^2 + 10x + 24 \leq 0$
 b) $25x - x^2 \geq 100$ e) $x^3 > 27$ h) $x^3 \leq -10$
 c) $\lg x < 1$ f) $10^x < 1000$

4. Im folgenden bedeuten p und q natürliche Zahlen ($q \neq 0$), und es sind Mengen rationaler Zahlen $\frac{p}{q}$ auf Beschränktheit und Grenzen zu untersuchen:

- a) Menge aller $\frac{p}{q}$ mit $p + q = 10$ c) Menge aller $\frac{p}{q}$ mit $p - q = 2$
 b) Menge aller $\frac{p}{q}$ mit $p \cdot q = 60$ d) Menge aller $\frac{p}{q}$ mit $q : p = 3$

5. Untersuchen Sie, ob die Menge aller natürlichen Zahlen n , für die $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ ganzzahlig ist, nach oben beschränkt ist!

6. Untersuchen Sie, ob die Menge aller reellen x mit

$$2 \lg(5 - x) - \lg(x - 5) = \lg(x - 5)$$

beschränkt ist!

24. Geben Sie eine rationale Zahl an, die zwischen den nachfolgend genannten Zahlen a und b liegt!

a) $a = \frac{17}{23}$; $b = \frac{18}{23}$ f) $a = \frac{13}{7}$; $b = \frac{13}{8}$

b) $a = \frac{6}{5}$; $b = \frac{5}{6}$ g) $a = \frac{7}{8}$; $b = \frac{3}{7}$

c) $a = -\frac{9}{4}$; $b = -\frac{21}{5}$ h) $a = \frac{16}{17}$; $b = \frac{17}{18}$

d) $a = \sqrt{-19}$; $b = -\sqrt{20}$ i) $a = 5$; $b = \sqrt{26}$

e) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $b = \frac{1}{14}\sqrt{98}$ k) $a = \sqrt[3]{125}$; $b = \sqrt{25}$

25. Geben Sie eine rationale Zahl an, die zwischen den nachfolgend genannten Zahlen a und b liegt!

a) $a = \sqrt{0,8}$; $b = \sqrt{0,801}$ e) $a = 1$; $b = 1,001$

b) $a = \pi$; $b = \sqrt{10}$ f) $a = \lg 2$; $b = \sin 17^\circ$

c) $a = \tan 30^\circ$; $b = \sin 90^\circ$ g) $a = 27^{\frac{1}{4}}$; $b = \sqrt{27}$

d) $a = \log_2 9$; $b = \log_3 25$ h) $a = \sin \frac{5\pi}{6}$; $b = \cos \frac{\pi}{3}$

26. Geben Sie eine irrationale Zahl z mit $a < z < b$ an!

a) $a = 3$; $b = 4$ d) $a = 0,2\overline{7}$; $b = 0,27\overline{1}$

b) $a = -\frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{3}$ e) $a = 4\sqrt{3}$; $b = 7$

c) $a = \frac{7}{9}$; $b = \frac{8}{9}$ f) $a = -10^{-4}$; $b = 10^{-4}$

27. Untersuchen Sie, ob die nachfolgend genannten Mengen aller x rationale oder irrationale Zahlen als Grenzen haben!

a) $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 < 9$ f) $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 \geq 16$

b) $x \in \mathbb{P}$ mit $1 \leq x^2 < 5$ g) $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 - 4x + 1 \leq 0$

c) $x \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq x^2 < 5$ h) $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < 2^x < 1$

d) $x \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq x^2 < 5$ i) $x \in \mathbb{P}$ mit $2 < 10^x < 3$

e) $x \in \mathbb{R}$ mit $4 < 2^x < 9$ k) $x \in \mathbb{P}$ mit $2 < \lg x < 3$

28. Bestimmen Sie – soweit vorhanden – obere und untere Grenze folgender Mengen, wobei x alle reellen Zahlen durchläuft!

a) Menge aller y mit $y \leq x^2 - 5$

b) Menge aller y mit $y \geq x^2 + 3$

c) Menge aller y mit $y > -x^2 + 0,7$

d) Menge aller y mit $-x^2 + 4 > y > x^2 - 12x - 160$

e) Menge aller y mit $-x^2 + 2x - 17 \leq y \leq x^2 - 2x + 17$

f) Menge aller y mit $-x^2 - x + 9 \leq y \leq x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$

29. Für die Ungleichung $x^2 + px + q = 0$ sollen reelle Zahlen p und q so bestimmt werden, daß die Lösungsmenge

a) $-\sqrt{7}$ als untere und $\sqrt{7}$ als obere Grenze hat,

b) 0 als untere und 15 als obere Grenze hat,

c) 1 als untere und $\frac{4}{3}$ als obere Grenze hat,

d) $\sqrt{7}$ als untere und $\sqrt{8}$ als obere Grenze hat,

e) 6 als untere und 2π als obere Grenze hat.

30. Für die Ungleichung $a < x^3 < b$ sind ganzzahlige a und b so zu bestimmen, daß für die untere Grenze G_u und die obere Grenze G_o der Lösungsmenge gilt:

a) G_u und G_o rational,

b) G_u rational, G_o irrational,

c) G_u irrational, G_o rational,

d) G_u und G_o irrational.

31. Gegeben sei ein Kreis mit $r = 1$ dm. Die Menge M bestehe aus den Maßzahlen der Umfänge (in dm) all derjenigen einbeschriebenen regelmäßigen Vielecke, deren Eckenzahl durch 3 teilbar ist.

a) Geben Sie ein x mit $x \in M$ und $x \in \mathbb{N}$ an!

b) Bestimmen Sie die untere Grenze von M !

c) Nennen Sie – ohne Beweis – die obere Grenze!

Warum läßt sich ein Beweis hierfür nicht in gleicher Art wie auf Seite 10 für die Menge $Q(x \in Q \text{ genau dann, wenn } x^2 < 2)$ führen?

32. Einem Quadrat Q von der Seitenlänge 1 dm seien alle Quadrate einbeschrieben, deren Ecken auf den Seiten von Q liegen. Die Maßzahlen ihrer Umfänge (in dm) bilden die Menge U , die ihrer Flächeninhalte (in dm^2) die Menge A .

a) Bestimmen Sie für U die untere und die obere Grenze!

b) Bestimmen Sie für A die untere und die obere Grenze!

33. Betrachtet werden sämtliche Rechtecke, die sich einem Kreis mit $r = 1$ einbeschreiben lassen. Bestimmen Sie

a) obere und untere Grenze für die Umfänge,

b) obere und untere Grenze für die Flächeninhalte dieser Rechtecke!

7. Alfred und Bernd, die soeben den Satz von der oberen Grenze kennengelernt haben, unterhalten sich:

A: „Die Menge der Maßzahlen aller Sprungweiten in Meter, die beim Weitsprung jemals erreicht worden sind oder noch erreicht werden können, ist gewiß beschränkt – etwa durch 100. Diese Menge muß also auch eine obere Grenze haben.“

B: „Dann muß also mal eine Zeit eintreten, bei der der Weltrekord im Weitsprung nicht mehr verbessert, sondern nur noch eingestellt werden kann.“

A: „Muß wohl nicht; denn es gibt ja unterhalb dieser oberen Grenze keine größte Zahl.“
Was meinen Sie zu diesem Dialog?

8. Man ermittle die untere Grenze und die obere Grenze für die Menge derjenigen Primzahlen p , die bei der Darstellung der Zahl 103 als Summe dreier verschiedener Primzahlen Summanden sein können!

9. Man bestimme die untere und die obere Grenze der Menge aller von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen n_1 und n_2 , für die

$$\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} = \sqrt{50}$$

gilt!

10. Man bestimme untere und obere Grenze für die Lösungsmengen folgender Ungleichungen!

a) $\lg(3x - 2) - \lg(2 - x) \leq 1$

b) $\lg(3x - 2) - \lg(2 - x) \geq 1$

34. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen n folgendes gilt!

a) $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

b) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n + 4) = (n + 1)(3n + 4)$

35. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

Die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 9 teilbar, das heißt,

$$\frac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{9}$$

ist immer ganzzahlig!

36. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen $n \geq 1$ folgendes gilt!

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

c) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$

d) $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ für $a \neq 1$

37. Beweisen Sie durch vollständige Induktion! 38. Beweisen Sie durch vollständige Induktion!

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ist stets durch 133 teilbar.

a) $4^n + 15n - 1$ ist stets durch 9 teilbar.

b) $2^{3^n} + 1$ ist durch 3^{n+1} , aber nicht durch 3^{n+2} teilbar.

b) $3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} , aber nicht durch 2^{n+3} teilbar.

39. Ermitteln Sie jeweils eine Formel für die folgenden Summen von s_n , und beweisen Sie die Richtigkeit der vermuteten Formeln durch vollständige Induktion!

a) $s_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

d) $s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

b) $s_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

e) Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, die bei der Teilung durch 9 den Rest 7 lassen.

c) $s_n = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3)$

f) $s_n = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n$

40. Beweisen Sie, daß folgende Brüche für kein natürliches n zu kürzen sind!

a) $\frac{9n+1}{18n+3}$

b) $\frac{22n+5}{33n+7}$

41. Ermitteln Sie, von welchem n ab die folgenden Ungleichungen gelten, und beweisen Sie die Behauptungen durch vollständige Induktion!

a) $2^n > 2n$

b) $2^n > 2n + 1$

c) $2^n > n^2$

Anleitung zu c: Benutzen Sie beim Beweis das Ergebnis von b!

42. Man beweise die Gültigkeit folgender Ungleichung für $n > 1$:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

43. Ermitteln Sie die Anzahl der Diagonalen in einem (ebenen) n -Eck, und beweisen Sie die gefundene Formel sowohl mittels vollständiger Induktion als auch ohne dieses Verfahren!

44. Beweisen Sie den folgenden Satz durch vollständige Induktion!

Haben n verschiedene Geraden einer Ebene einen Punkt gemeinsam, so wird die Ebene von den Geraden in $2n$ Teile zerlegt.

45. In einer Ebene mögen n Geraden so verlaufen, daß keine Gerade zu einer anderen parallel ist und es keinen Punkt der Ebene gibt, durch den mehr als 2 der Geraden gehen. Es ist zu untersuchen, in wieviel Teile die Ebene durch diese Geraden zerlegt wird.

a) Veranschaulichen Sie sich den Fall $n = 3$ durch eine Skizze!

- b) Nehmen Sie eine vierte Gerade hinzu, und erläutern Sie, warum die Hinzunahme einer $(k+1)$ -ten Geraden zu k bereits vorhandenen die Anzahl der Ebenenteile um $k+1$ erhöht!
 c) Ermitteln Sie eine Formel für die Anzahl der Ebenenteile bei n Geraden, und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion!

11. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß die folgende Gleichung für alle natürlichen $n \geq 1$ gilt!

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$$

12. Man ermittle die Summe

$$s_n = \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{(5n-2)(5n+3)}$$

und beweise die Richtigkeit der vermuteten Formel durch vollständige Induktion.

13. a) Man zeige, daß es möglich ist, mit einem Satz Wägestücke von 1 g, 2 g, ..., 2^n g jede beliebige Masse (in vollen Gramm) von 1 g bis $(2^{n+1} - 1)$ g mittels einer Schalenwaage zu bestimmen, wenn die Wägestücke nur in eine Schale gelegt werden dürfen.
 b) Welche Massen (in vollen Gramm) kann man mit einem Satz von 1 g, 3 g, ..., 3^n g bestimmen, wenn man auf beide Schalen Wägestücke legen darf?

46. Sprechen Sie über die Gültigkeit der folgenden Aussagen (a), (b), (c), (d), und charakterisieren Sie die Art, wie man zu ihnen gelangt ist!

Durch Probieren findet man

- (a) 840 ist durch 1, 2, 3, 4, 5, 6 teilbar

Daraus wird geschlossen

- (b) 840 ist durch alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots$ teilbar.

Aus (b) werden geschlossen

- (c) 840 ist durch 21 teilbar;

- (d) 840 ist durch 37 teilbar.

47. Es sei $Z_n = n^2 + n + 41$.

- a) Untersuchen Sie die Aussage:

„ Z_n ist für jedes natürliche n eine Primzahl“!¹

- b) Untersuchen Sie allgemeiner, ob es Primzahlen p gibt, für die der Term

$Z_n = n^2 + n + p$ stets Primzahlen liefert!

48. Aus der Tatsache, daß sich stromdurchflossene Leiter erwärmen, und aus der Beobachtung einer Temperaturzunahme in einem Aluminiumdraht folgert jemand, daß der Draht von Strom durchflossen wird. Beurteilen Sie diesen Schluß!

49. Aus den Aussagen

- (1) Alle Rechtecke haben Innenwinkel von je 90° ,

- (2) Alle Quadrate haben Innenwinkel von je 90°

wird geschlossen

(I) Alle Rechtecke sind Quadrate,

(II) Alle Quadrate sind Rechtecke.

Schätzen Sie die beiden Schlußweisen und ihre Ergebnisse ein!

50. Nehmen Sie Stellung zur Wahrheit der Sätze und zur Zuverlässigkeit der folgenden Schlußweise!

Aus

- (1) Es gibt Parallelogramme, die keine Rechtecke sind,

und

- (2) Es gibt Parallelogramme, deren Diagonalen nicht gleich lang sind, folgert jemand

- (3) Parallelogramme, deren Diagonalen nicht gleich lang sind, sind keine Rechtecke.

¹ Das Beispiel geht auf den Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER (1707 bis 1783) zurück.

51. Die Formel $A = \frac{g \cdot h_g}{2}$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks (Grundseite g , zugehörige Höhe h_g) beweist jemand folgendermaßen: Aus der Tatsache, daß sich jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke mit gleicher Grundseite und Höhe zerlegen läßt, und aus der Flächenformel $A = g \cdot h_g$ für das Parallelogramm folgt die Formel für den Dreiecksinhalt. Beurteilen Sie die Schlußweise!
52. Jemand beweist den Satz: Wenn für die Seiten a, b, c eines Dreiecks gilt $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig, wobei $\sphericalangle a, b$ der rechte Winkel ist. Er zeigt zu diesem Zweck mittels des Kosinussatzes, daß bei Dreiecken, die nicht rechtwinklig sind, $a^2 + b^2 \neq c^2$ gilt.
- a) Beurteilen Sie diese Schlußweise!
 b) In welchem Zusammenhang steht der angeführte Satz mit dem Satz des PYTHAGORAS?
53. Für jede natürliche Zahl n gilt $2^n > n$ (Beispiel A 6, S. 15). Nehmen Sie Stellung zu folgenden beiden Beweisführungen:
- a) Stellt man die Funktionen $y = f(x) = 2^x$ und $y = g(x) = x$ mit Hilfe einer Wertetafel in einem kartesischen x, y -Koordinatensystem dar, so erkennt man, daß das Bild von $f(x)$ stets oberhalb des Bildes von $g(x)$ verläuft. Das bedeutet, daß für gleiche x stets gilt $2^x > x$.
- b) Der Beweis wird indirekt geführt: Man nimmt an, es sei $2^n \leq n$. Beispiele zeigen, daß diese Annahme falsch ist: $2^1 > 1, 2^2 > 2, 2^3 > 3$. Folglich muß gelten $2^n > n$.

14. Der französische Mathematiker und Jurist PIERRE DE FERMAT (1601–1665) stellte auf Grund der Untersuchung von

$$Z_n = 2^{2^n} + 1$$

für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ die Vermutung auf, Z_n sei für alle natürlichen n eine Primzahl. LEONHARD EULER konnte nachweisen, daß das schon für $n = 5$ unrichtig ist.

- a) Zeigen Sie, daß $2^{2^5} + 1$ durch $2^4 + 5^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$ teilbar ist!
 b) Weisen Sie nach, daß eine Zahl

$$Z = 2^m + 1$$

höchstens dann eine Primzahl sein kann, wenn m keine ungeraden Teiler enthält, also $m = 2^n$ gilt.

54. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von

- a) $12!$ und $7!$ c) $2 \cdot 12!$ und $2 \cdot 7!$ e) $(2 \cdot 12)!$ und $(2 \cdot 7)!$
 b) $2 \cdot 12!$ und $7!$ d) $2 \cdot 12!$ und $(2 \cdot 7)!$

55. Formen Sie die folgenden Terme um, indem Sie Brüche beseitigen oder zusammenfassen! Setzen Sie dann $n = 4$, und berechnen Sie die Werte!

- | | | | |
|---|----------------------------|---|--------------------------------------|
| a) $\frac{n!}{n-1}$ | b) $\frac{(n+1)!}{n+1}$ | b) $\frac{n-1}{(n-1)!}$ | j) $\frac{(n+3)!}{(n-1)!}$ |
| c) $\frac{(n+1)!}{n!}$ | d) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ | k) $\frac{(n-3)!}{(n-2)!}$ | l) $\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$ |
| e) $\frac{(n+k)!}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$ | | m) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$ | |
| f) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$ | | n) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-2)!}$ | |
| g) $\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right) \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$ | | o) $\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ | |

56. Welche Zweierpotenzen sind Teiler von a) $4!$, b) $8!$, c) $20!$? 57. Welche Dreierpotenzen sind Teiler von a) $3!$, b) $9!$, c) $25!$?

58. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $x! = (x + 1)!$

c) $x! = 3x!$

e) $x! : 9 = 80$

b) $x! = 7(x - 1)!$

d) $x! - 120 = 0$

f) $x(x - 1)! = x!$

59. Bestimmen Sie alle Paare natürlicher Zahlen $[x; y]$, für die folgendes gilt!

a) $y! \cdot x! = 144$

c) $y! \cdot x! = 60$

e) $y! + x! = 2$

b) $y! \cdot x! = 720$

d) $y! + x! = 144$

f) $y! - x! = 0$

60. Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $3x! = (x + 1)! - x!$

c) $x! - 9(x - 1)! + 12(x - 2)! = 0$

b) $2x! - (x + 1)! = -20 \cdot (x - 1)!$

61. Beweisen Sie, daß für alle reellen a, b mit $a \neq 0, b \neq 0$ und für alle natürlichen m, n folgende Gesetzmäßigkeiten gelten!

a) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m \geq n)$

62. Beweisen Sie die BERNOULLISCHE¹ Ungleichung:

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha \quad \text{für } \alpha > -1 \text{ und } \alpha \neq 0, \text{ reell, } n > 1.$$

Anleitung: Multiplizieren Sie zum Beweis der Induktionsbehauptung in der Induktionsvoraussetzung beiderseits mit $(1 + \alpha)!$ Überlegen Sie, warum $\alpha > -1$ vorausgesetzt werden muß!

15. Ermitteln Sie, wieviel Nullen am Ende der Zahl stehen, die sich durch Berechnung von $50!$ ergibt!

16. Es sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl. Von welchem n ab gilt

$$(n + 1)! - n! > m \cdot k \quad \text{für alle } k \leq n?$$

Beweisen Sie Ihre Behauptung!

17. Man bestimme alle Tripel $[x; y; z]$ natürlicher Zahlen mit

a) $x! + y! = z!$

b) $x! + 2y! = 3z!$

c) Erläutern Sie, inwiefern Sie dabei das Ergebnis von Aufgabe a 16 ausgenutzt haben!

63. Schreiben Sie die Summen der Aufgaben a 34, a 36 sowie a 39 mit Summenzeichen!

64. Schreiben Sie die folgenden Summen für $n = 5$ ausführlich, und untersuchen Sie die angegebenen Formeln auf ihre Gültigkeit!

Bei welchen Summen könnte die Summation schon bei 0 beginnen? Sollten Sie auf fehlerhafte Formeln stoßen, so stellen Sie sie richtig!

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

d) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{2n}{9n+1}$

b) $\sum_{m=1}^n \frac{1}{(a+m-1)(a+m)} = \frac{n}{a(a+n)}$

e) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

c) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3n^2 + 5n}{4(n+1)(n+2)}$

65. Ermitteln Sie die Formeln für die folgenden Summen, und weisen Sie ihre Richtigkeit nach!

a) $\sum_{k=0}^n 6^k$

b) $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$

c) $\sum_{m=1}^n \frac{1}{(3m-2)(3m+1)}$

d) $\sum_{k=2}^n k \cdot 2^{k-1}$

¹ JAKOB BERNOULLI (1654 bis 1705), Schweizer Mathematiker.

18. Man beweise, daß für $n \geq 2$ das geometrische Mittel von n positiven reellen Zahlen x_i höchstens so groß ist wie ihr arithmetisches Mittel, also

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

gilt.

Anleitung: Zeigen Sie im Induktionsschritt zunächst, daß für beliebiges $n = k$ aus der Annahme der Gültigkeit der Ungleichung für k folgt, daß sie auch für $2k$ gilt.

Weisen Sie dann nach, daß aus der Gültigkeit für k auch die für $k - 1$ folgt (Einschränkung für k ?) Erläutern Sie, warum die Ungleichung damit bewiesen ist!

19. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$(1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1 \text{ für alle natürlichen } n \geq 1!$$

66. Weisen Sie nach, daß 7^2 und 2457^2 auf dieselbe Ziffer enden!

Überlegen Sie, ob eine solche Gesetzmäßigkeit immer gilt, ob also für die letzte Ziffer der zweiten Potenz nur die letzte Ziffer der Basis entscheidend ist! Führen Sie die gleiche Überlegung auch für dritte, vierte und fünfte Potenzen durch!

67. Zeigen Sie, daß eine Zahl, die auf die Ziffernfolge a) 386, b) 834, c) 772, d) 242 endet, keine Kubikzahl sein kann!

68. Berechnen Sie folgende Binomialkoeffizienten!

$$\text{a) } \binom{7}{4} \quad \text{b) } \binom{10}{3} \quad \text{c) } \binom{30}{1} \quad \text{d) } \binom{8}{8} \quad \text{e) } \binom{18}{3} \quad \text{f) } \binom{12}{10} \quad \text{g) } \binom{13}{0} \quad \text{h) } \binom{15}{13}$$

69. Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gibt es die trivialen¹ Darstellungen als Binomialkoeffizienten

$$n = \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}. \text{ Suchen Sie für die folgenden Zahlen nichttriviale Darstellungen!}$$

$$\text{a) } 21 \quad \text{b) } 28 \quad \text{c) } 32 \quad \text{d) } 36 \quad \text{e) } 55 \quad \text{f) } 56 \quad \text{g) } 70 \quad \text{h) } 84$$

70. Erläutern Sie, warum für alle natürlichen n und p mit $p \leq n$ der Binomialkoeffizient $\binom{n}{p}$ selbst eine natürliche Zahl ist!

71. Schreiben Sie möglichst einfach in Bruchform.

$$\text{a) } \binom{n+1}{3} \quad \text{b) } \binom{a-1}{2} \quad \text{c) } \binom{u}{u-1} \quad \text{d) } \binom{n+1}{n-1} \quad \text{e) } \binom{z+1}{z-2} \quad \text{f) } \binom{k+2}{k-2}$$

72. Berechnen Sie möglichst vorteilhaft die folgenden Summen (bzw. Differenzen) von Binomialkoeffizienten!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \binom{5}{3} + \binom{5}{4} & \text{b) } \binom{7}{2} + \binom{7}{3} & \text{i) } \binom{15}{14} + \binom{15}{13} & \text{k) } \binom{6}{7} + \binom{6}{8} \\ \text{c) } \binom{17}{14} + \binom{16}{14} & \text{d) } \binom{5}{3} - \binom{4}{3} & \text{l) } \binom{12}{8} - \binom{11}{8} & \text{m) } \binom{19}{16} - \binom{18}{15} \\ \text{e) } \binom{21}{7} - \binom{20}{6} & \text{f) } \binom{31}{20} - \binom{31}{19} & \text{n) } \binom{13}{7} - \binom{12}{7} & \text{o) } \binom{11}{4} + \binom{11}{8} \\ \text{g) } \binom{13}{9} + \binom{14}{9} + \binom{13}{10} & & \text{p) } \binom{15}{6} + \binom{16}{6} + \binom{15}{8} & \\ \text{h) } \binom{21}{4} + \binom{23}{18} + \binom{21}{16} + \binom{22}{6} & & \text{q) } \binom{18}{5} + \binom{17}{6} + \binom{19}{7} + \binom{17}{5} & \end{array}$$

¹ trivialis (lat.), gewöhnlich.

73. Ermitteln Sie die Lösungen folgender Gleichungen ($x \in \mathbb{N}$)!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \binom{9}{4} = \binom{9}{x} & \text{b)} \binom{10}{5} = \binom{10}{x} & \text{d)} \binom{7}{2} = \binom{x}{2} \end{array} \quad \text{e)} \binom{7}{7} = \binom{3}{x}$$

$$\text{c)} \binom{17}{x} + \binom{17}{5} = \binom{18}{x} \quad \text{f)} \binom{7}{x} + \binom{7}{x} = \binom{8}{4}$$

74. Errechnen Sie die folgenden Summen, und schreiben Sie sie auch unter Verwendung des Summenzeichens!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} & \text{c)} \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} \\ \text{b)} \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} & \text{d)} \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \end{array}$$

e) Welche allgemeine Gesetzmäßigkeit können Sie vermuten?
Beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion!

75. Bestätigen Sie durch Rechnung die folgenden Gleichungen!

$$\text{a)} \sum_{v=0}^3 \binom{6}{v} \binom{4}{3-v} = \binom{6+4}{3} \quad \text{b)} \sum_{p=0}^4 \binom{7}{p} \binom{11}{4-p} = \binom{18}{4}$$

76. Berechnen Sie wie in Aufgabe a 75!

$$\text{a)} \sum_{p=0}^4 \binom{10}{4-p} \binom{7}{p} \quad \text{b)} \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k}^2 \quad (\text{Beachten Sie, daß } \binom{6}{k} = \binom{6}{6-k} \text{ ist!})$$

20. Berechnen Sie die Summe $\sum_{v=0}^m \binom{a+v}{v}$ für die folgenden Werte von a und m !

$$\text{a)} a = 3; m = 1 \quad \text{b)} a = 3; m = 2 \quad \text{c)} a = 3; m = 3 \quad \text{d)} a = 5; m = 2$$

21. a) Allgemein gilt $\sum_{v=0}^m \binom{a+v}{v} = \binom{a+1+m}{m}$.

Vergleichen Sie damit Ihre Ergebnisse aus Aufgabe a 20 und beweisen Sie die Formel mittels vollständiger Induktion!

b) Wenn $m = 2a$ ist ($a \in \mathbb{N}$), kann man auch schreiben

$$\sum_{v=0}^{n-a} \binom{a+v}{a} = \binom{a}{a} + \binom{a+1}{a} + \dots + \binom{n}{a} = \binom{n+1}{a+1}.$$

Erläutern Sie, wie diese Beziehung aus der Formel unter a) durch mehrmalige Anwendung von $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ hervorgeht, wenn man $n = m - a$ setzt! Berechnen Sie die Summe für den Fall $a = 3, m = 8$!

77. Entwickeln Sie nach dem binomischen Satz!

$$\text{a)} (r+s)^7 \quad \text{b)} (4+m)^9 \quad \text{c)} \left(\frac{2}{3} + g\right)^4 \quad \text{d)} (u_1 - u_2)^8 \quad \text{e)} (h - 0,4)^5$$

78. a) Wie lautet der Koeffizient des 5., 7. und 10. Gliedes in $(a+b)^{28}$? Gibt es weitere Glieder mit diesen Koeffizienten?

b) Welches ist der Koeffizient von $a^{17}b^{11}$?

$$\begin{array}{lll} \text{79. a)} (2a+3b)^5 & \text{c)} \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}v\right)^6 & \text{e)} (0,1x - 0,3xy)^4 \\ \text{b)} (\sqrt{2}+a)^4 & \text{d)} (\sqrt{7}-\sqrt{5})^6 & \text{f)} (x^2\sqrt{2}+y^2\sqrt{5})^4 \end{array}$$

80. Wie heißt das k -te Glied in der folgenden Entwicklung?

a) $\left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{4}\right)^{15}, k = 13$

b) $\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^{21}, k = 17$

81. Betrachten Sie außer der allgemeinen Entwicklung die Fälle $n = 4$ und $n = 5$ näher!

a) $(x+1)^n + (x-1)^n$

g) $(2x+1)^n + (1-2x)^n$

b) $(1+4a)^n - (1-4a)^n$

h) $\left(\frac{2}{3}u + \frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}u\right)^n$

c) $(g - \sqrt{h})^n - (g + \sqrt{h})^n$

i) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^n + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^n$

d) $(\sqrt{1-a^2} + 1)^n - (\sqrt{1-a^2} - 1)^n$

k) $(1 - \sqrt{u^2 + v^2})^n - (\sqrt{u^2 + v^2} + 1)^n$

e) $\left(m - \frac{1}{n}\right)^n$

f) $\left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right)^n$

l) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

m) $(a+b+c)^n$

82. Im folgenden sei β_i der Koeffizient des i -ten Gliedes in der Entwicklung von $(a+b)^n$. Ermitteln Sie n , wenn über die Koeffizienten folgendes bekannt ist!

a) $\beta_4 = \beta_8$

b) $\beta_3 = 2\beta_5$

c) $\beta_3 : \beta_7 = 3 : 7$

d) $\beta_3 : \beta_9 = 1 : 3$

83. a) Zeigen Sie, daß die BERNOULLISCHE Ungleichung (Aufgabe a 62) im Falle $\alpha > 0$ unmittelbar aus dem binomischen Satz folgt!

b) Unter welcher Bedingung halten Sie die Anwendung folgender Näherungsformeln für zulässig? $(1+x)^n \approx 1+nx$; $(1-x)^n \approx 1-nx$

Vergleichen Sie mit dem Gültigkeitsbereich der BERNOULLISCHEN Ungleichung!

84. Berechnen Sie auf drei Dezimalstellen genau

a) $1,5^5$

b) $1,02^{10}$

c) $0,98^9$

d) $2,06^8$

e) $1,98^7$

f) $\left(\frac{21}{20}\right)^6$

g) $\left(\frac{24}{25}\right)^5$

h) $\left(\frac{51}{50}\right)^{12}$

i) $\left(\frac{29}{30}\right)^8$

k) $\left(\frac{101}{100}\right)^{11}$

[Hinweis: Es soll der binomische Satz angewendet werden, z. B.: $1,5^5 = (1 + 0,5)^5$]

85. Berechnen Sie auf drei geltende Ziffern genau!

a) $3,14^7$

b) $2,72^9$

c) $9,81^5$

86. Bei Berechnungen der Volumenänderung von Körpern infolge Temperaturveränderung wird in $V_t = V_0(1 + \alpha t)^3$ häufig gesetzt $(1 + \alpha t)^3 \approx 1 + 3\alpha t$.

Ermitteln Sie die Größenordnung des Fehlers bei $t = 20$ grad für Aluminium, Stahl, Kupfer, Zink! (Entnehmen Sie den linearen Ausdehnungskoeffizienten α dem Tafelwerk!)

22. Wie groß ist m , wenn der dritte Summand von $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{2}} + m\right)^8$ gleich 1 ist?

23. Ermitteln Sie in den folgenden Funktionen $y = f(x)$ den von x unabhängigen Summanden!

a) $\left(x + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^5$

b) $\left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{3}\sqrt[5]{x^2}\right)^9$

c) $\left(\frac{3\sqrt[3]{x}}{2x} + x\sqrt[3]{x}\right)^9$

Gibt dieser Summand jeweils den Schnittpunkt des Bildes mit der y -Achse an?

24. Bilden Sie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100$ auf drei geltende Ziffern!

25. Bilden Sie $(x + h_i)^n$ für folgende Werte!

$x = 2$; $n = 4$; $h_1 = 1$; $h_2 = \frac{1}{10}h_1$; $h_3 = -h_2$; $h_4 = \frac{1}{10}h_3$

87. Stellen Sie von den folgenden Mengen f geordneter Paare fest, ob es sich um Funktionen handelt! Geben Sie bei den Funktionen Definitionsbereich und Wertevorrat an, und ermitteln Sie die

Funktionswerte $f(x)$ mit $x = -2; -1; 0; 1; 10; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$ (sofern diese Zahlen zum Definitionsbereich gehören)!

Bei den Paarmengen, die keine Funktionen sind, weil die Zuordnung der y -Werte zu den x -Werten nicht eindeutig ist, belegen Sie dies durch Beispiele!

$[x; y] \in f$ genau dann, wenn $x \in P, y \in P$ und

- a) $x = y$ b) $x^2 = y^3$ c) $x^3 = y^2$ d) $2^x = 3^y$
 e) $\lg x = \log_5 y$ f) $\sin x = \sin y$ g) $\tan x = \lg y$ h) $\lg x = \tan y$

88. Ermitteln Sie die ersten sechs Glieder nachstehender Folgen!

a) $\left(\frac{k^2 + 2k + 1}{k}\right)$ b) $\left(1 - \frac{1}{10^{k-1}}\right)$ c) $\left(\cos \frac{k\pi}{2}\right), k \geq 0$
 d) $(\lg 10^k), k \geq 0$ e) $(\lg 2^{k-1})$

89. Sind die Zahlen 1, 25, 0, -2, -30 und 100 Glieder der nachstehenden Folgen? Wenn ja, welche?

a) $\left(\frac{k}{2}\right)$ b) $(3k - 5)$ c) $(k - k^2)$ a) $\left(\frac{2k-1}{5}\right)$ b) $\left(\frac{7}{k}\right)$ c) $\left(\frac{3k-2}{k+1}\right)$

91. Gegeben sind jeweils einige Glieder einer Zahlenfolge. Ergänzen Sie die Zahlenfolgen so, daß jeweils die Glieder a_1, a_2, \dots, a_{10} vorliegen!

a) $a_1 = -17; a_2 = -23; a_3 = -29$ f) $a_5 = 5; a_6 = 2,5; a_7 = 1,25$
 b) $a_2 = \frac{4}{3}; a_3 = \frac{6}{5}; a_4 = \frac{8}{7}$ g) $a_4 = \frac{8}{3}; a_5 = \frac{16}{9}; a_6 = \frac{32}{27}$
 c) $a_3 = 4; a_4 = \frac{7}{2}; a_8 = \frac{3}{2}$ h) $a_3 = \frac{8}{10}; a_4 = -\frac{15}{17}; a_5 = \frac{24}{26}$
 d) $a_1 = 1; a_2 = -\frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{6}; a_6 = -\frac{1}{720}$ i) $a_2 = \frac{3}{5}; a_3 = \frac{8}{13}; a_4 = \frac{21}{34}$
 e) $a_2 = 1; a_3 = 5; a_4 = 14; a_5 = 30; a_8 = 140$ k) $a_3 = -\frac{6}{27}; a_4 = \frac{24}{81}; a_7 = -\frac{5040}{2187}$

92. Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für die Folgen aus Aufgabe a 91 (mit Ausnahme von e und i)!

93. Geben Sie eine rekursive Bildungsvorschrift für die Folgen aus Aufgabe a 91 mit Ausnahme von b), g) und h)!

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Gleichwertigkeit dieser Darstellungen mit den in Aufgabe a 92 ermittelten expliziten Bildungsvorschriften!

94. Geben Sie von den nachstehenden Folgen die ersten fünf Glieder an!

a) $\left(\frac{3k-4}{k}\right)$ b) $\left(\frac{5+k}{-k}\right)$ c) $\left((-1)^k \frac{3-k}{k}\right)$ d) $\left(\frac{k^3}{k!}\right), k \geq 0$

Geben Sie möglichst auch eine rekursive Bildungsvorschrift an!

95. Ermitteln Sie für die nachstehenden Folgen die ersten fünf Glieder, und geben Sie möglichst auch explizite Bildungsvorschriften an!

a) $a_1 = 2; a_{k+1} = a_k + \frac{1}{3}$ b) $a_1 = \frac{3}{2}; a_{k+1} = \frac{4}{3} a_k$
 c) $a_1 = 1; a_{k+1} = 2a_k - 5$ d) $a_1 = 0; a_2 = -\frac{1}{2}; a_{k+2} = a_k^2 \cdot a_{k+1}$

96. Versuchen Sie, explizite und rekursive Bildungsvorschriften zu geben!

a) $0; 4; \frac{8}{3}; \frac{12}{5}; \dots$

c) $2; 6; 12; 20; 30; \dots$

b) $1; 1; \frac{3}{4}; \frac{4}{8}; \frac{5}{16}; \dots$

d) $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}; \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}; \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}; \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7}; \dots$

26. Stellen Sie eine explizite Bildungsvorschrift für die Folge (a_k) auf mit

$$a_1 = 0; a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}; a_3 = 1; a_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}; a_{k+4} = -a_k!$$

97. Gegeben sind die Zahlen z . Bestimmen Sie bei den angegebenen monoton steigenden Folgen dasjenige a_k , für das gilt

$$a_k < z \leq a_{k+1}!$$

$$z \in \{10; 50; 100; 500\}$$

a) $\left(\frac{k}{3}\right)$ b) $(3k+2)$ c) (k^2-k)

$$z \in \left\{2; 2,5; \frac{23}{8}; 4\right\}$$

d) $\left(\frac{3k-2}{k}\right)$ e) $\left(\frac{3k+2}{k+1}\right)$

f) $\left(\frac{k^2}{k+2}\right)$

Beispiel zu 97. a)

$$a_{149} = \frac{149}{3}, \text{ da } \frac{149}{3} < 50 \leq \frac{150}{3} = a_{150}$$

98. Gegeben sind die Zahlen z . Bestimmen Sie bei den angegebenen monoton fallenden Folgen dasjenige a_k , für das gilt

$$a_k > z \geq a_{k+1}!$$

$$z \in \{-5; -20; -100; -120\}$$

a) $(-2k-3)$ b) $(3k-k^2)$

$$z \in \left\{4; 1,5; \frac{11}{10}; \frac{100}{98}\right\}$$

c) $\left(\frac{k+1}{k}\right)$ d) $\left(\frac{10}{k}\right)$

e) $\left(\frac{k+3}{k^2+1}\right)$

99. Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Monotonie und Grenzen!

a) $\left(\frac{k}{2}\right)$ b) $\left(\frac{2}{k}\right)$ c) $\left(\frac{3k+3}{k+1}\right)$ d) $\left(\frac{1}{3^k}\right)$ e) $\left(\frac{5+k}{-k}\right)$

100. Untersuchen Sie die Folgen von Aufgabe a 95 auf Monotonie und Grenzen!

101. Die Folge $\left(\frac{5k+4}{k+1}\right)$ ist monoton wachsend und hat eine obere Grenze G_0 . Bestimmen Sie diese obere Grenze und dasjenige k , für das erstmals a_k um weniger als $\frac{1}{10}$ von dieser Grenze entfernt ist, für das also gilt

$$|G_0 - a_k| < \frac{1}{10}, \text{ aber}$$

$$|G_0 - a_{k-1}| \geq \frac{1}{10}!$$

102. Die Folge $\left(\frac{3k+2}{(k+1)^2}\right)$ ist monoton fallend und hat eine untere Grenze G_U . Bestimmen Sie G_U und dasjenige k , für das

$$|G_U - a_k| < \frac{1}{3}, \text{ aber } |G_U - a_{k-1}| \geq \frac{1}{3} \text{ gilt!}$$

103. Geben Sie eine Folge an, die

- a) monoton wächst und die obere Grenze 10 hat;
- b) monoton fällt und die untere Grenze 8 hat;
- c) monoton wächst, die untere Grenze -3 und die obere Grenze -1 hat;
- d) monoton fällt, die obere Grenze 4 und die untere Grenze -4 hat!



27. Untersuchen Sie auf Monotonie und Grenzen!

a) $\left(\frac{35+k}{7+k}\right)$ b) $\left((-1)^k \frac{3-k}{k^2}\right)$ c) $\left(\frac{k^2}{k-8,4}\right)$ d) $\left(\frac{k^2}{2-3k}\right)$ e) $\left(\frac{\lg(k+1)}{\log_{100}(k+1)}\right)$

28. a) Untersuchen Sie auf Monotonie $\left(\frac{1}{k!}\right); \left(\frac{k}{k!}\right); \left(\frac{k^2}{k!}\right); \left(\frac{k^3}{k!}\right); \left(\frac{k^4}{k!}\right)$ (sämtlich $k \geq 0$)!

b) Es ist zu beweisen, daß es zu jedem Exponenten n einen Index k_0 gibt, von dem ab die Folge

$$(a_k) = \left(\frac{k^n}{k!}\right) \text{ monoton fällt, d. h., es gilt } \frac{(k+1)^n}{(k+1)!} < \frac{k^n}{k!} \text{ für } k \geq k_0.$$

c) Ermitteln Sie, ob ein entsprechender Sachverhalt auch für $(a_k) = \left(\frac{n^k}{k!}\right)$ gilt!

104. Bilden Sie arithmetische Folgen, indem Sie noch vier weitere Glieder hinzufügen! Ermitteln Sie jeweils auch a_{10} und a_{13} !

a) 2; 3,5; ... b) 15; 7,5; ... c) -1; -3; ... d) -3; 4; ... e) 12; 9,5; ... f) 0,7; 0,9; ...

105. Berechnen Sie die ersten sechs Glieder der arithmetischen Folge (a_k) , von der Sie die folgenden Werte kennen! Bestimmen Sie jeweils auch a_{15} und a_{27} !

a) $a_2 = 7; d = -1,5$ d) $a_3 = 7,5; d = 9$ g) $a_5 = 25; d = -0,01$
 b) $a_7 = 0; d = 12$ e) $a_4 = -23; d = -12$ h) $a_7 = 6,8; d = 8,6$
 c) $a_3 = 11; a_8 = 31$ f) $a_6 = 19; a_9 = 14,5$ i) $a_{13} = -6; a_{22} = -9$

106. Setzen Sie um vier Glieder fort, so daß geometrische Folgen entstehen!

a) $\frac{2}{3}; 1; \frac{3}{2}; \dots$ b) $2a; 4ab; 8ab^2; \dots$ c) $-1; 0,8; \dots$ d) $\sqrt{3}; 3; \dots$ e) $\frac{5}{3}; \frac{10}{9}; \frac{15}{27}$

Ermitteln Sie a_{12} , und stellen Sie die Folgen a, c und d graphisch dar!

In welcher dieser drei Folgen wird 1000 überschritten, wenn man sie weit genug fortsetzt? Geben Sie in diesem Falle k mit $a_{k-1} \leq 1000 < a_k$ an!

107. Berechnen Sie die ersten fünf Glieder der geometrischen Folge (a_k) , von der nachstehende Werte bekannt sind! Beschreiben Sie die Folgen hinsichtlich Monotonie und Grenzen!

a) $a_1 = -3; q = 0,5$ d) $a_1 = 2; q = -0,3$ g) $a_1 = 0,7; q = 2$
 b) $a_5 = 7; q = \frac{3}{2}$ e) $a_3 = -2; q = -1$ h) $a_4 = 64; q = 0,4$
 c) $a_3 = -4; a_4 = 0,25$ f) $a_2 = 9,1; a_3 = 2,6$

108. Wieviel Glieder haben die nachstehenden endlichen geometrischen Folgen?

a) 1; 5; 25; ...; 15625 b) 81; 54; 36; ...; $3 \frac{13}{81}$ c) 2; 6; 18; ...; 4374

109. Entnehmen Sie Ihrer Logarithmentafel die Logarithmen für $2^0; 2^1; 2^2; \dots; 2^{10}$, und vergleichen Sie die Folge der Numeri mit der der Logarithmen! Untersuchen Sie, ob die Beziehung für eine beliebige Folge von Potenzen mit fester Basis gilt!

29. Beweisen Sie: Wenn a, b, c reelle Zahlen derart sind, daß $\frac{1}{a+b}; \frac{1}{a+c}; \frac{1}{b+c}$ eine (endliche) arithmetische Folge bilden, dann bilden auch $a^2; b^2; c^2$ eine arithmetische Folge! Unter welcher Voraussetzung gilt die Umkehrung?

30. a) Wenn die reellen Zahlen a, b, c eine (dreigliedrige) arithmetische Folge bilden, dann gilt

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a-b)^2 + (a+b+c)^2$$

Beweisen Sie diesen Sachverhalt!

b) Gilt auch die Umkehrung?

31. Ermitteln Sie die ersten fünf Glieder aller geometrischen Folgen a_k , die die nachstehenden Glieder haben:

a) $a_3 = 12; a_6 = 324$

b) $a_4 = -10; a_{11} = 0,000128$

c) $a_6 = \frac{5}{3}; a_8 = \frac{5}{48}$

d) $a_3 = -16; a_7 = -2401$

Ermitteln Sie danach a_9 ! Beschreiben Sie die Folgen hinsichtlich Monotonie und Grenzen!

110. Ermitteln Sie die 10. und die 13. Partialsumme für die Folgen aus Aufgabe a 104!

111. Berechnen Sie s_{15} und s_{27} für die Folgen von Aufgabe a 105!

112. Vervollständigen Sie die Tabelle für die arithmetischen Folgen (a_k)!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
a_1	0,8	-3			3	-12	12	
d	$\frac{1}{5}$	5	0,7	-2		$\frac{2}{3}$		
n	50		21				15	21
a_n		57	30	17	-15			1
s_n				897	-222	86	225	0

113. Berechnen Sie $a_1; a_2; \dots; a_{15}$ einer arithmetischen Folge (a_k) mit $\sum_{k=1}^9 a_k = 92,25$ und $\sum_{k=1}^{15} a_k = 210$!

114. Berechnen Sie $\sum_{k=17}^{33} a_k$ für die arithmetische Folge (a_k) = -3,5; -2,8; ...!

115. Ermitteln Sie die fünften Partialsummen für die Folgen aus Aufgabe a 106a und c!

116. Ermitteln Sie die siebzehnte Partialsumme für die Folge aus Aufgabe a 106d!

117. Vervollständigen Sie die Tabelle für geometrische Folgen (a_k)!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
a_1	2	3		3		1	2
q	1,25		$-\frac{2}{3}$		5		3
n	4	5	7	7	4		
a_n		12	$\frac{64}{243}$			81	
s_n				381	2340	$121 + 40\sqrt{3}$	6560

118. Bestimmen Sie $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ für die folgenden Werte!

a) $x = 1; n = 7$

c) $x = -1; n = 8$

e) $x = 10; n = 5$

b) $x = 10^{-1}; n = 5$

d) $x = 3 \cdot 10^{-1}; n = 6$

f) $x = 12 \cdot 10^{-2}; n = 4$

119. Es ist $((2k - 1)^2)$ die Folge der Quadrate der ungeraden Zahlen. Ermitteln Sie die Partialsummenformel, indem Sie die Vermutung induktiv oder ähnlich wie bei der Summe der Quadratzahlen (Beispiel A 26, S. 38) gewinnen, und die Formel durch vollständige Induktion beweisen!

120. Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$s_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

32. Es sei (a_i) eine Folge positiver reeller Zahlen. Die Partialsummen von (a_i) werden mit s_n bezeichnet, die Partialsummen von $\left(\frac{1}{a_i}\right)$ mit \bar{s}_n . Dann gilt für jedes $n \geq 1$:

$$s_n \cdot \bar{s}_n \geq n^2. \text{ Beweisen Sie das durch vollständige Induktion!}$$

33. Für die Folge $(a_k) = (k)$ gilt $s_n = \binom{n+1}{2}$ (Beispiel A 5).

a) Bilden Sie die zehngliedrige Partialsummenfolge $s_1; s_2; s_3; \dots; s_{10}$!

b) Beweisen Sie, daß für die Folge (s_k) die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n s_k = \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2} = \binom{n+2}{3} \text{ gilt!}$$

121. Messungen ergeben, daß die Temperatur zum Erdinnern hin um etwa 3 grd je 100 m Tiefe zunimmt, wobei in unseren Breiten eine Temperatur von 10 °C in 25 m Tiefe zugrunde zu legen ist.

a) Welche Temperatur herrscht in 2300 m Tiefe?

b) In welcher Tiefe werden 100 °C erreicht?

c) Aus welcher Tiefe kommt eine Heilquelle von 45 °C?

122. Wieviel Schläge macht eine Uhr in 24 Stunden, wenn sie

a) nur die vollen Stunden schlägt,

b) auch Viertelstunden mit 1, 2, 3 bzw. 4 Schlägen anzeigt?

123. Nach TGL0-476 genügen die Papierformate der A-Reihe den folgenden Bedingungen:

1) Das Format A_0 ist ein Rechteck von 1 m² Flächeninhalt, dessen Seiten a_0 und b_0 sich wie $\sqrt{2} : 1$ verhalten.

2) Alle Formate $A_k (k = 1; \dots; 10)$ entstehen aus A_{k-1} durch Halbieren der längeren Rechteckseite a_{k-1} .

Untersuchen Sie die Zahlenfolgen (a_k) und (b_k) , $k \geq 0$!

124. Ein Guthaben von 4000,00 M verbleibt 10 Jahre auf einem Sparkonto und wird mit 4% verzinst. Wie groß ist der gesamte Zinsbetrag, wenn

a) die Zinsen jährlich abgehoben werden;

b) die Zinsen jeweils nach Ablauf eines Jahres dem Guthaben zur weiteren Verzinsung zugeschlagen werden?

Stellen Sie für beide Fälle die Zinsen in Abhängigkeit von der Zeit in einem Koordinatensystem dar!

125. In einem Betrieb wird nach TGL 14104 hochsteiger T-Stahl mit folgenden Werten hergestellt:

Höhe h (und Breite) in mm	Stegdick e s in mm	Masse m pro m in kg	Querschnitt A in cm ²
20	3	0,88	1,12
30	4	1,77	2,26
40	5	2,96	3,77
50	6	4,44	5,66
60	7	6,23	7,94
70	8	8,32	10,6
80	9	10,7	13,6

Sind die Folgen (h_k) , (s_k) , (m_k) , (A_k) arithmetische oder geometrische Folgen?

- 126.** Eine Drehmaschine kann mit 35; 45; 56; 71; 90; 112; 140; 180; 224; 355; 450 Umdrehungen pro Minute laufen. Bilden diese Drehzahlen annähernd eine geometrische Folge?
- 127.** Eine Grundlage für die Standardisierung bilden die sogenannten Vorzugs- oder Normzahlen. Sie dienen der Stufung technischer und ökonomischer Größen. Bei konsequenter Verwendung wird die wirtschaftliche Fertigung durch Verringerung von Lehren, Werkzeugen und Vorrichtungen gefördert und das Auswechseln von Einzelteilen erleichtert. Die Vorzugszahlenreihen R 5, R 10, R 20 und R 40 sind geometrische Folgen mit $a_0 = 1$ und a_5 bzw. a_{10} bzw. a_{20} bzw. $a_{40} = 10$.
- a) Bestimmen Sie die Quotienten q und a_1 bis a_4 bzw. a_1 bis a_9 für R 5 und R 10 (Runden auf 3 gültige Ziffern)!
- b) Eine verbindliche Rundwertreihe für R 10 lautet
1; 1,2; 1,6; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10
Vergleichen Sie mit den genauen Werten!
- c) Entsprechen die Drehzahlen von Aufgabe a 126 (annähernd) einer der Vorzugsreihen?
- 128.** Nach dem Volkswirtschaftsplan 1968 waren im genannten Jahr 389 Autodrehkrane zu produzieren, was gegenüber 1967 einer Steigerung auf 114% entspricht.
- a) Ermitteln Sie die Jahresproduktion 1967!
- b) Ermitteln Sie unter der Annahme gleichbleibender prozentualer Jahressteigerung die Produktion im Jahre 1975 und die gesamte Produktion der Jahre 1967 bis 1975!
- 129. a)** Stellen Sie nach dem Fallgesetz je eine Tabelle für die Wege bzw. die Geschwindigkeiten am Ende der 1., 2., ..., 10. Sekunde des Fallvorganges auf! Charakterisieren Sie die Folge der Wege und die der Geschwindigkeiten!
- b) Wie ändern sich die Folgen, wenn dem Körper zu Beginn eine Geschwindigkeit von 15 ms^{-1} senkrecht nach unten (oben) erteilt wird?
- 131.** Die Spielfläche einer Langspielplatte (33 min^{-1}) ist ein Kreisring mit den Durchmesser 14,9 cm bzw. 23,7 cm. Die Spieldauer beträgt 615 s. Welchen Weg legt der Saphir zurück, wenn wir uns die Spirale durch eine Folge konzentrischer Kreise ersetzt denken? Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeiten für die erste und die letzte Umdrehung, und ziehen Sie Folgerungen für die Wiedergabequalität!
- 130. a)** Bestimmen Sie nach dem Gesetz von GAY-LUSSAC die Volumina, die eine Gasmenge nach Erwärmung auf 5° , 10° , ..., 50° einnimmt, wenn ihr Volumen bei 0°C 1 m^3 beträgt und der Druck konstant bleibt.
- b) Um wieviel Grad wurde eine Gasmenge erwärmt, wenn sie ihr Volumen dabei von 470 cm^3 auf 520 cm^3 vergrößerte?
- 132.** Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte „stufenweise Verdünnung“ an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe mit 10 cm^3 chemisch reinen Wassers auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt abermals mit 10 cm^3 reinen Wassers auf.
- a) Nach wieviel Aufschwemmungen ist ein Mischungsverhältnis von $1 : (2 \cdot 10^6)$ erreicht?
- b) Ein Kubikzentimeter der fünften Aufschwemmung enthalte noch 10 Bakterien. Wieviel Bakterien enthält dann durchschnittlich 1 cm^3 der Bodenprobe?

b) Grenzwerte von Zahlenfolgen

- 1.** Gegeben sei eine Zahlenfolge (a_n) und eine Zahl g . Geben Sie die ersten fünf Glieder dieser Zahlenfolge an! Weisen Sie nach, daß diese Zahlenfolge monoton wachsend ist! Weisen Sie nach, daß die Zahl g obere Grenze dieser Folge ist! Bestimmen Sie das n , von dem ab alle Glieder der Folge innerhalb einer ε -Umgebung von g liegen! (ε sei z. B. $\frac{1}{10}$ bzw. $\frac{1}{100}$) Bestimmen Sie für a) den Zusammenhang zwischen n und ε !

a) (a_n) mit $a_n = \frac{n-1}{2n}$; $g = \frac{1}{2}$

c) (a_n) mit $a_n = \frac{2n-3}{3n}$; $g = \frac{2}{3}$

b) (a_n) mit $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$; $g = 2$

d) (a_n) mit $a_n = -\frac{n+1}{n}$; $g = -1$

2. Gegeben sei eine Zahlenfolge (a_n) und eine Zahl g .

Geben Sie die ersten fünf Glieder dieser Folge an!

Weisen Sie nach, daß diese Folge monoton fallend ist!

Weisen Sie nach, daß g untere Grenze ist!

Bestimmen Sie für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ($\varepsilon = \frac{1}{100}$) dasjenige n , von dem ab alle Glieder der Folge Elemente der ε -Umgebung von g sind!

Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen n und ε !

a) (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{n}$; $g = 1$

c) (a_n) mit $a_n = \frac{1-n}{2n}$; $g = -\frac{1}{2}$

b) (a_n) mit $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$; $g = 2$

d) (a_n) mit $a_n = \frac{2n}{n^2}$; $g = 0$

3. Im folgenden sind jeweils die ersten Glieder einer Zahlenfolge gegeben.

Geben Sie das allgemeine Glied a_n an!

Ist diese Folge wachsend oder fallend? Beweisen Sie Ihre Aussage!

Stellen Sie eine Vermutung über eine mögliche Grenze an, und beweisen Sie Ihre Vermutung!

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$

b) -1 ; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{6}$; $-\frac{5}{8}$; $-\frac{6}{10}$

4. a) Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$ den Grenzwert 1 hat!

5. a) Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\frac{2n+2}{3n-1}\right)$ den Grenzwert $\frac{2}{3}$ hat!

b) Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\frac{3n}{n+1}\right)$ den Grenzwert 3 hat!

b) Zeigen Sie, daß die Folge $\left(\frac{2}{n}\right)$ den Grenzwert 0 hat!

6. Zeigen Sie, daß nachstehende Folgen Nullfolgen sind!

a) $\left(\frac{10}{n-2}\right)$

b) $\left(\frac{10^7}{n^2}\right)$

c) $\left(\frac{2n+3}{n^2}\right)$

d) $\left(\frac{n}{n^2-n}\right)$

7. Geben Sie je zwei Folgen an, die den Grenzwert g haben!

a) $g = 1$

b) $g = 5$

c) $g = -2$

d) $g = 0$

e) $g = \frac{3}{4}$

8. Zeigen Sie, daß die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$ die obere Grenze $+2$ und die untere Grenze -2 hat! Kann diese Folge konvergent sein?

9. Zeigen Sie, daß nachstehende Folgen divergent sind!

a) $\left(\frac{n^2+n}{n}\right)$

b) $\left(\frac{n}{10^7}\right)$

c) $\left(\frac{n^2}{3n+4}\right)$

10. Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n}{n-1}$ ($n > 1$) hat den Grenzwert $g_1 = 3$, die Folge b_n mit $b_n = \frac{2n-1}{n-1}$ ($n > 1$) hat den Grenzwert $g_2 = 2$.

Bilden Sie die nachstehend angeführten Folgen!

Geben Sie von diesen Folgen die ersten fünf Glieder an, und zeigen Sie, daß die Grenzwerte dieser Folgen Summe bzw. Differenz, Produkt, Quotient der Grenzwerte g_1 und g_2 sind!

a) (c_n) mit $c_n = a_n + b_n$

c) (e_n) mit $e_n = a_n \cdot b_n$

b) (d_n) mit $d_n = a_n - b_n$

d) (f_n) mit $f_n = a_n : b_n$

11. Wählen Sie aus der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ jedes dritte Glied aus!
Wie heißt das Bildungsgesetz der Folge der ausgewählten Zahlen?
Welchen Grenzwert hat diese Folge?

12. Wählen Sie aus der Folge $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ die Glieder a_n aus, für die n ungerade ist.
Geben Sie von der Folge der ausgewählten Zahlen die ersten fünf an!
Wie heißt das Bildungsgesetz dieser Folge?
Weisen Sie nach, daß diese Folge den Grenzwert 2 hat!

13. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^5}{2n}$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$

14. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+1}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5}{3n-1}$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{n}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n-2}{3n+4}$

15. Ermitteln Sie aus den Aufgaben b 13 und 14 die Nullfolgen, und geben Sie von diesen alle Glieder an, die größer als 0,03 sind!

16. Geben Sie für alle diejenigen Zahlenfolgen aus den Aufgaben b 13 und 14, die keine Nullfolgen sind, alle Glieder an, die die Bedingung $|g - a_n| < 0,05$ nicht erfüllen!

17. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-8}{3n^2}$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2+1}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+1}{4n^2}$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n^2}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n+1}$

18. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n^2}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{2n^2-1}$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{3n^2+4}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+3n-1}{4n^2}$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n^2}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2-1}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-3n+4}{6n^2+2n-7}$

I. Wählen Sie $\varepsilon = \frac{1}{500}$ und überprüfen Sie, ob für das zehnte Glied der Zahlenfolgen

- a) aus Aufgabe b 17, b) aus Aufgabe b 18
bereits $|g - a_n| < \varepsilon$ gilt!

19. Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{5}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2+4n-2}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^4-5n+1}$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n+1}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3+5n^2-2}$

20. Bestimmen Sie von den nachstehenden geometrischen Zahlenfolgen den Quotienten q , und entscheiden Sie, ob die jeweilige Folge konvergent ist! Geben Sie jeweils den Grenzwert an!

- a) 12; 3; 0,75; ... c) 1; 1,1; 1,21; ... e) 4; 2,4; 1,44; ...
b) 10; 2,5; 0,625; ... d) 4; 6; 9; ... f) 3; 2,4; 1,92; ...

21. Gegeben sind die nachstehenden Folgen. Berechnen Sie näherungsweise das Glied a_n für $n = 10$; $n = 10^2$; $n = 10^3$ und $n = 10^4$!

- a) $(0,9^n)$; $(0,99^n)$; $(0,999^n)$ Für welche Werte von n ist $0,99^n$ kleiner als 10^{-5} ?
b) $(1,1^n)$; $(1,01^n)$; $(1,001^n)$ Für welche Werte von n ist $1,001^n$ größer als 10^3 ?

b

22. Gegeben ist die Folge $(2n - 1)$.

- Geben Sie die ersten fünf Glieder dieser Folge an!
- Bilden Sie die Partialsummen s_1 bis s_5 !
- Welche Vermutung ergibt sich für s_n ?
- Beweisen Sie die Vermutung durch vollständige Induktion!

23. Gegeben ist die Folge

$$(a_n) \text{ mit } a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

- Berechnen Sie die ersten fünf Glieder dieser Folge!
- Berechnen Sie die Partialsummen s_1 bis s_5 ! (Kürzen!)!
- Stellen Sie eine Vermutung für s_n auf!
- Beweisen Sie die Vermutung durch vollständige Induktion!

b

2. Zeigen Sie in Fortsetzung der Aufgabe **b 23**, daß die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(2v-1)(2v+1)}$ konvergiert, und berechnen Sie diese Summe!

3. Führen Sie die gleichen Untersuchungen wie in den Aufgaben **b 23** und **b 2** für die Folgen

a) $\left(\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right)$, b) $\left(\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right)$
durch!

24. Bilden Sie die ersten fünf Glieder der Partialsummenfolgen (s_n) zu den folgenden Reihen!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2n-1}$

25. a) Was läßt sich über Monotonie und Beschränktheit der Folgen (s_n) aus Aufgabe **b 24** und der zugrunde liegenden Folgen (a_n) sagen?

- Welche Vermutungen lassen sich unter Benutzung einer graphischen Veranschaulichung der Folgen (s_n) an der Zahlengeraden für deren Konvergenz aufstellen?
- Bestimmen Sie jeweils das n , für das der Abstand von s_n zum vermuteten Grenzwert erstmals kleiner als 0,001 ist (Aufgabe **b 24 b** ausgenommen)!

26. Durchdenken Sie an Hand von Beispielen folgende Fragen!

- Kann eine Reihe konvergieren, deren Glieder eine konstante Folge bilden?
- Kann eine Reihe konvergieren, deren Glieder eine arithmetische Folge bilden?
- Kann eine Reihe konvergieren, deren Glieder positiv sind und eine wachsende, aber beschränkte Folge bilden?
- Kann eine Reihe konvergieren, deren Glieder keine Nullfolge bilden?

27. Bilden Sie die geometrischen Reihen zu den in Aufgabe **b 20** gegebenen geometrischen Folgen und berechnen Sie jeweils die ersten fünf Glieder!

Welche dieser geometrischen Reihen sind konvergent? Berechnen Sie von diesen die Summe!

28. Berechnen Sie jeweils die Summe folgender geometrischer Reihen!

a) $7 + 2,1 + 0,63 + \dots$ b) $-4 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \dots$

c) $\sqrt{8} + 2 + \sqrt{2} + 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \dots$

29. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit folgende Summen existieren?

a) $b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} + \dots$ b) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$

30. Nachstehend werden geometrische Folgen durch das Anfangsglied a und den Quotienten q gegeben. Es ist jeweils die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ zu berechnen.

a) $a = 2; q = \frac{1}{3}$

c) $a = 0,8; q = 0,5$

e) $a = 1,5; q = -\frac{3}{4}$

b) $a = 4,3; q = 0,1$

d) $a = -2; q = 0,8$

f) $a = -3; q = -0,3$

31. Nachstehend werden geometrische Reihen durch die Summe s und den Quotienten q gegeben. Es ist jeweils das Anfangsglied a zu berechnen.

a) $s = 7; q = \frac{1}{2}$

c) $s = 18; q = \frac{1}{9}$

e) $s = -10; q = \frac{4}{5}$

b) $s = -1,7; q = \frac{2}{3}$

d) $s = 2; q = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

32. Nachstehend werden geometrische Reihen durch die Summe s und das Anfangsglied a gegeben. Es ist jeweils der Quotient q zu berechnen.

a) $a = \frac{1}{2}; s = \frac{3}{2}$

c) $a = 9; s = 13,5$

e) $a = -17; s = -36 \frac{2}{3}$

b) $a = 28; s = 27$

d) $a = 70; s = 56$

33. Ermitteln Sie q für $a = -70$ und $s = 56!$

Nehmen Sie zum Ergebnis Stellung!

34. Stellen Sie die Reihen aus Aufgabe **b 30 a)**, **b 31 a)** und **b 32 a)** graphisch dar!

Bestimmen Sie $|s - s_n|$ aus der Zeichnung und durch Rechnung!

35. Geben Sie jeweils zwei geometrische Reihen an, die die Summe s haben!

a) $s = 2$ b) $s = 5$ c) $s = -5$ d) $s = 17$ e) $s = \frac{1}{2}$

4. Nachstehende Quotienten sollen als Summen geometrischer Reihen aufgefaßt werden. Geben Sie für x den jeweils größten Bereich an, für den das möglich ist!

a) $\frac{1}{1-2x}$

c) $\frac{1}{1+3x}$

e) $\frac{3}{1-5x}$

g) $\frac{17}{1+10x}$

b) $\frac{4}{2-3x}$

d) $\frac{5}{\frac{1}{2} + x}$

f) $\frac{0,7}{0,8-2x}$

h) $\frac{133}{7 + \frac{x}{2}}$

36. Schreiben Sie $\sum_{k=1}^6 a_k$ als Dezimalbruch, und ermitteln Sie in allen Fällen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k!$

a) $a_k = 4 \cdot 10^{-k}$

c) $a_k = 7 \cdot 10^{-2k}$

e) $a_k = 27 \cdot 10^{-2k}$

b) $a_k = 10^{-2k}$

d) $a_k = 515 \cdot 10^{-3k}$

f) $a_k = 91 \cdot 10^{-3k}$

37. Verwandeln Sie die nachstehenden periodischen Dezimalbrüche in gemeine Brüche!

38. Verwandeln Sie die nachstehenden periodischen Dezimalbrüche in gemeine Brüche!

a) $0,\overline{8}$ d) $0,\overline{142857}$

a) $0,\overline{18}$ d) $0,\overline{857142}$

b) $0,\overline{04}$ e) $3,\overline{75}$

b) $47,\overline{542}$ e) $18,\overline{201}$

c) $0,\overline{139}$ f) $0,4\overline{13}$

c) $0,\overline{3579}$ f) $7,0\overline{53}$

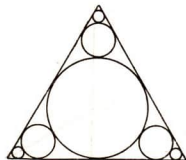
39. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein Kreis einbeschrieben, diesem wieder ein Quadrat usw.

- a) Berechnen Sie die Summe aller Kreisumfänge!
 b) Berechnen Sie die Summe aller Quadratumfänge!
 c) Berechnen Sie die Summe aller Kreisflächen!
 d) Berechnen Sie die Summe aller Quadratflächen!

b

40. Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt der im Bild b 1 dargestellten sieben Kreise? Gibt es für die Summe aus den Umfängen bzw. Flächen Grenzen, wenn immer weitere Kreise eingezeichnet werden?

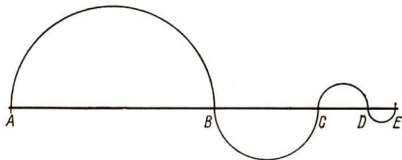
42. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein zweites einbeschrieben, dessen Eckpunkte auf den Mitten der Seiten des ersten Quadrates liegen. In der gleichen Weise ist dem zweiten Quadrat ein drittes, dem dritten ein viertes usw. einbeschrieben. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte und die Summe der Umfänge aller Quadrate!



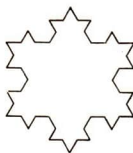
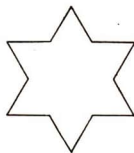
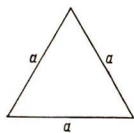
b 1

41. Erläutern Sie den Zusammenhang der drei Figuren im Bild b 2, und drücken Sie Umfang und Flächeninhalt durch a aus! Setzen Sie das Konstruktionsverfahren in Gedanken fort, und versuchen Sie, Grenzen für die Umfänge und Flächeninhalte der so entstehenden Figuren anzugeben!

43. Eine Strecke $\overline{AB} = s$ wird um die Hälfte verlängert, die Verlängerung \overline{BC} wird wieder um die Hälfte verlängert usw. (Bild b 3). Über allen Strecken werden abwechselnd nach verschiedenen Seiten Halbkreise gezeichnet. Berechnen Sie die Gesamtlänge der geschlängelten Linie!



b 3



b 2

44. Mit Hilfe eines Paradoxon wollte ZENON (griechischer Philosoph, etwa um 550 v. u. Z.) die Unzulänglichkeit mathematischer Untersuchungen nachweisen.

Das Paradoxon lautet:

ACHILLES¹ könne eine Schildkröte, die einen Vorsprung von nur einem Stadion² habe, niemals einholen, obwohl er mit der zwölffachen Geschwindigkeit der Schildkröte laufen könnte. Wenn

nämlich ACHILLES das eine Stadion zurückgelegt hat, ist die Schildkröte $\frac{1}{12}$ Stadion weitergelaufen. Während ACHILLES diese Strecke durchläuft, läuft die Schildkröte $\frac{1}{144}$ Stadion usw.

Die Schildkröte behält also (so schlussfolgerte ZENON) ständig einen, wenn auch kleiner werdenden Vorsprung vor ACHILLES. Da dies der Erfahrung widerspricht, ist also das mathematische Denken fehlerhaft.

Zeigen Sie, wo der Trugschluss liegt, und berechnen Sie, wo ACHILLES die Schildkröte einholt.

¹ ACHILLES, griechischer Held des Trojanischen Krieges, berühmt als schneller Läufer.

² Stadion, altgriechisches Längenmaß von 192,27 m.

45. Untersuchen Sie das Verhalten der nachstehend angegebenen Funktionen bei Annäherung an die Stelle x_0 !

a) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; $x_0 = 2$ b) $y = \frac{|x-1|}{x-1}$; $x_0 = 1$ c) $y = \frac{1}{2^x}$; $x_0 = 0$

46. Zeigen Sie, daß die Funktion $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ an der Stelle -1 den Grenzwert -2 hat!
47. Zeigen Sie, daß die Funktion $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ an der Stelle 2 den Grenzwert 4 hat!

48. Ermitteln Sie jeweils den Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 !

a) $y = 2x$ $x_0 = 1$; $x_0 = -2$ c) $y = -x + \frac{1}{2}$; $x_0 = 1$; $x_0 = -\frac{3}{2}$

b) $y = \frac{1}{3}x + 2$; $x_0 = -1$; $x_0 = \frac{1}{3}$

49. Berechnen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 1}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - 1}$ f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2 - 1}$

50. Berechnen Sie!

a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} -5x$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} (+3)$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

51. Berechnen Sie!

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0 + h) - 2x_0}{h}$
 b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}$

52. Zeichnen Sie die Bilder der folgenden Funktionen, und untersuchen Sie, ob diese Funktionen an der Stelle x_0 stetig sind!

a) $f(x) = |x - 2|$; $x_0 = 2$ d) $f(x) = |x + 1|$; $x_0 = -1$
 b) $f(x) = |x - c|$; $x_0 = c$ e) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$
 c) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{für } x > 2 \\ 4 & \text{für } x \leq 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

53. Zeigen Sie, daß folgende Funktionen stetig sind!

a) $f(x) = x^2 - 7$ c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$
 b) $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 5}{10}$ d) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$
 (↗ Beispiel B 19)

54. Skizzieren Sie die Bilder der folgenden Funktionen, und geben Sie jeweils das Intervall an, in dem eine Nullstelle liegt (Intervallgrenzen auf eine Dezimalstelle)!

a) $y = x^3 + x - 1$ b) $y = x^3 - 3x + 2$ c) $y = x^3 - 5x - 1$

55. Ermitteln Sie von folgenden Funktionen das Maximum und das Minimum im angegebenen Intervall! Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen!

a) $y = x^2 - 6x + 2$; $\langle -1; 4 \rangle$ b) $y = -x^2 + 4$; $\langle -2; 3 \rangle$ c) $y = x^2 + 2x + 1$; $\langle -2; 3 \rangle$

c) Einführung in die Differentialrechnung

1. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = x^2$ sowie die Gerade durch die Punkte $P_1(-1; y_1)$ und $P_2(2; y_2)$! Berechnen Sie den Anstieg dieser Geraden und den Winkel zwischen der Geraden und der positiven x -Achse!
2. Zeichnen Sie die Bilder der folgenden Funktionen! Ermitteln Sie rechnerisch, unter welchem Neigungswinkel diese Geraden die Abszissenachse schneiden! Führen Sie auch Messungen an den Zeichnungen durch, und vergleichen Sie!
- a) $y = 3x - 2$ b) $y = -2x + 1$ c) $y = \frac{2}{3}x + 4$ d) $y = -\frac{4}{3}x - 2$
3. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = -x^2 + 4$ sowie die Gerade durch die Punkte $P_1(-1; y_1)$ und $P_2(3; y_2)$! Berechnen Sie den Anstieg dieser Geraden sowie den Winkel zwischen der Geraden und der positiven x -Achse!
4. Gegeben ist die Funktion $y = x^2$. Berechnen Sie den Anstieg der Geraden, die durch die Punkte $P_1(2; y_1)$ und $P_2(2 + \Delta x; y_2)$ mit $\Delta x = \pm 1; \pm 0,1; \pm 0,01$ gehen!
5. Gegeben ist die Funktion $y = x^2$. Berechnen Sie den Anstieg der Geraden, die durch die Punkte $P_1(-1; y_1)$ und $P_2(-1 + \Delta x; y_2)$ mit $\Delta x = \pm 1; \pm 0,1; \pm 0,01$ gehen!
6. Zeichnen Sie jeweils das Bild der Funktion und die angegebene Gerade, und überzeugen Sie sich durch Rechnung, daß die Gerade die Kurve im angegebenen Punkt berührt!
- a) $y = x^2$; $P_1(2; 4)$; $m = 4$ $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$; $P_1(-2; 0)$; $m = -1$
 b) $y = -x^2 + 4$; $P_1(1; 3)$; $m = -2$
7. Ermitteln Sie den Anstieg des Bildes der Funktion $y = x^2$ an der Stelle x_0 !
- a) $x_0 = -\frac{1}{2}$ c) $x_0 = \frac{3}{2}$
 b) $x_0 = -2$ d) $x_0 = 3$
8. Ermitteln Sie den Anstieg des Bildes der Funktion $y = -x^2 + 4$ an der Stelle x_0 !
- a) $x_0 = 1$ c) $x_0 = -1$
 b) $x_0 = \frac{3}{2}$ d) $x_0 = -\frac{3}{2}$
9. Ermitteln Sie den Anstieg der Funktion $y = x^2 - 2x + 1$ an der Stelle x_0 !
- a) $x_0 = 2$ b) $x_0 = \frac{3}{2}$ c) $x_0 = \frac{1}{2}$ d) $x_0 = 1$
10. Ein Körper fällt aus der Höhe h frei nach unten. Wie groß ist seine Geschwindigkeit im Moment des Aufpralls?
- a) $h = 20$ m c) $h = 100$ m
 b) $h = 40$ m d) $h = 200$ m
 (Rechnen Sie mit dem Näherungswert $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$!)
11. Ein Kraftfahrzeug prallt mit einer Geschwindigkeit von a) $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, b) $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, c) $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ auf ein Hindernis. Bei welcher Fallhöhe wird eine gleiche Aufprallgeschwindigkeit erreicht? (Rechnen Sie mit dem Näherungswert $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$!)
12. Wie groß ist die Augenblicksgeschwindigkeit beim senkrechten Wurf nach oben zur Zeit t_1 ?
- $$s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$
13. Wie groß ist die Augenblicksgeschwindigkeit beim senkrechten Wurf nach unten zur Zeit t_1 ?
- $$s = v_0 t + \frac{g}{2} t^2$$
14. Ermitteln Sie die 1. Ableitung der Funktion $y = 3x - 5$ an folgenden Stellen!
- a) $x_0 = 0$ c) $x_0 = 4$ e) $x_0 = -4$
 b) $x_0 = 2$ d) $x_0 = -2$
15. Ermitteln Sie die 1. Ableitung der Funktion $y = 5x + 3$ an folgenden Stellen!
- a) $x_0 = -2$ c) $x_0 = 2$
 b) $x_0 = 0$

16. Ermitteln Sie die 1. Ableitung der Funktion $y = 5x - 6$ an folgenden Stellen!
 a) $x_0 = -2$ b) $x_0 = 0$ c) $x_0 = 2$
17. Ermitteln Sie die 1. Ableitung der Funktion $y = 5x + a$ (a konstant) an der Stelle $x_0 = k$!
18. Ermitteln Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen jeweils an der Stelle x_0 !
 a) $y = 4x - 5$; $x_0 = 3$
 b) $y = \frac{1}{2}x - 5$; $x_0 = 5$
 c) $y = x^2 + 3x + 5$; $x_0 = -2$
 ($x_0 = 2$; $x_0 = 0$)
 d) $y = 3x^2 - 4x + 9$; $x_0 = -1$
 ($x_0 = 0$; $x_0 = 1$)
 e) $y = mx + n$; $x_0 = k$
 (k, m, n konstant)
19. Ermitteln Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen jeweils an der Stelle x_0 !
 a) $y = -3x + 2$; $x_0 = -4$
 b) $y = -0,3x - 1,7$; $x_0 = 0,1$
 c) $y = x^2 - 4x + 6$; $x_0 = -1$
 ($x_0 = 0$; $x_0 = 2$)
 d) $y = -2x^2 + 3x - 5$; $x_0 = -1$
 ($x_0 = 1$; $x_0 = 2$)
 e) $y = ax^2 + bx + c$; $x_0 = k$
 (k, a, b, c konstant)
20. Ermitteln Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen jeweils an der Stelle $x_0 = 2$ und an der Stelle x_1 !
 a) $y = x^3$ b) $y = x^3 + 2x$ c) $y = 2x^3$ d) $y = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 3$
21. Bilden Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen einmal durch Grenzübergang aus dem Differenzenquotienten und zum anderen unter Anwendung des Satzes C 8! Berechnen Sie dann den Anstieg an der Stelle $x_0 = 1$!
 a) $y = x^2 + x - 1$ b) $y = \frac{1}{x} + x^2$ c) $y = x^3 + x^2 - x + 3$ d) $y = x^2 + x - \frac{1}{x} + 1$
22. Bilden Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen einmal durch vorheriges Ausmultiplizieren, zum anderen durch Anwendung des Satzes C 9!
 a) $y = (x - 1)(2x + 1)$ c) $y = x^2(x - 3)$
 b) $y = (0,5x - 1)(x^2 - 2x + 4)$ d) $y = (x - 2)(x^2 - 0,5)$
23. Bilden Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen!
 Wie groß ist jeweils der Anstieg an der Stelle $x_0 = -1$?
 a) $y = \frac{1}{x}(x + 2)$ b) $y = \frac{1}{x}(x^2 + 4)$
24. Bilden Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen!
 An welchen Stellen sind die gegebenen Funktionen nicht differenzierbar?
 Welche Intervallangaben müssen bei den gewonnenen Ableitungen hinzugefügt werden?
 a) $y = \frac{2}{x}$ c) $y = \frac{a}{x}$ e) $y = \frac{1}{x-2}$ g) $y = \frac{1}{x^2}$
 b) $y = \frac{2}{x^2 + 3}$ d) $y = \frac{x}{x^2 - 3}$ f) $y = \frac{x-1}{x^2-1} + \frac{x-2}{x^2-5x+6}$
25. Bilden Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen an den Stellen $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 = -2$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = \sqrt{2}$!
 a) $y = x^3$ b) $y = x^4$ c) $y = x^9$ d) $y = x^{12}$
26. An die Bilder folgender Funktionen sollen jeweils im Punkt $P_1(x_1; y_1)$ die Tangenten gelegt werden. Wie groß ist deren Anstieg? Unter welchem Winkel schneiden sie jeweils die x -Achse?
 a) $y = x^2$; $P_1\left(\frac{1}{2}; \quad\right)$; $P_2\left(-\frac{1}{2}; \quad\right)$ d) $y = x^3$; $P_1(\quad; 8)$; $P_2(\quad; -27)$
 b) $y = x^4$; $P_1(0,1; \quad)$; $P_2(0,2; \quad)$ e) $y = x^5$; $P_1\left(\quad; \frac{1}{32}\right)$; $P_2(-3; \quad)$
 c) $y = x^8$; $P_1(x_1 > 0; 1)$; $P_2(x_1 < 0; 1)$ f) $y = x^0$; $P_1(\sqrt{2}; \quad)$; $P_2(-\sqrt{3}; \quad)$

27. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die den gegebenen Anstieg m_1 haben! Wie heißen die Koordinaten der Berührungspunkte?

a) $y = x^2$; $m_1 = 1$; $m_2 = -2$ c) $y = x^3$; $m_1 = \frac{4}{3}$; $m_2 = \frac{3}{4}$

b) $y = x^4$; $m_1 = -\frac{1}{2}$; $m_2 = 4$ d) $y = x^5$; $m_1 = 80$; $m_2 = \frac{4}{5}$

28. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die mit der x -Achse den Winkel α bzw. mit der y -Achse den Winkel β bilden. In welchen Punkten ist das möglich?

a) $y = x^2$; $\alpha = 135^\circ$; $\beta = 150^\circ$ c) $y = x^3$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 135^\circ$

b) $y = x^6$; $\alpha = 0^\circ$; $\beta = 45^\circ$ d) $y = x^5$; $\alpha = 75^\circ$; $\beta = 160^\circ$

29. An die Bilder folgender Funktionen sollen jeweils im Punkt P_1 Tangenten gelegt werden. Wie groß ist deren Anstieg? Unter welchen Winkeln schneiden sie die Achsen?

a) $y = x^{-1}$; $P_1(2; \quad)$; $P_2(-2; \quad)$ c) $y = x^{-5}$; $P_1(\quad; 32)$; $P_2(0,2; \quad)$

b) $y = x^{-3}$; $P_1(\sqrt{2}; \quad)$; $P_2(-\sqrt{3}; \quad)$ d) $y = x^{-2}$; $P_1(2; \quad)$; $P_2(-2; \quad)$

e) $y = x^{-4}$; $P_1(x_1 > 0; \frac{1}{16})$; $P_2(x_2 < 0; \frac{1}{16})$

30. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die den gegebenen Anstieg m_1 haben. Wie heißen die Koordinaten der Berührungspunkte?

a) $y = x^{-1}$; $m_1 = -1$; $m_2 = -4$ c) $y = x^{-2}$; $m_1 = 16$; $m_2 = -54$

b) $y = x^{-3}$; $m_1 = 3$; $m_2 = -\frac{3}{16}$ d) $y = x^{-4}$; $m_1 = \frac{1}{8}$; $m_2 = 1$

31. An die Bilder folgender Funktionen sind Tangenten zu legen, die mit der x -Achse den Winkel α bzw. mit der y -Achse den Winkel β bilden! Wie heißen die Berührungspunkte?

a) $y = x^{-1}$; $\alpha = 135^\circ$; $\beta = 30^\circ$ c) $y = x^{-2}$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 60^\circ$

b) $y = x^{-3}$; $\alpha = 120^\circ$; $\beta = 45^\circ$ d) $y = x^{-4}$; $\alpha = 75^\circ$; $\beta = 110^\circ$

- I. An das Bild von $y = x^{-1}$ sollen in vier Punkten, die paarweise symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten bzw. zur Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten liegen, die Tangenten gelegt werden. Von diesen Tangenten sollen sich diejenigen, die an demselben Kurvenast liegen, unter einem Winkel von a) 100° , b) 120° , c) 140° , d) 160° schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten der vier Berührungspunkte!

32. Bilden Sie von der Funktion

$$f(x) = 3x^6 + 4x^5 - 7x^4 + 8x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$$

die 1. Ableitung!

33. Ermitteln Sie die 2., 5. und 9. Ableitung der folgenden Funktionen an den Stellen

$$x_0 = 1, x_0 = -1, x_0 = 2, x_0 = \frac{1}{4}, x_0 = -0,3!$$

a) $y = x^6$ b) $y = x^9$ c) $y = x^{12}$ d) $y = x^{-1}$

34. Bilden Sie von den folgenden Funktionen die 1., 2. und 3. Ableitung!

a) $y = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$ e) $y = ax^k - bx^{k+1} + ax^{k+2}$

b) $y = x^2\sqrt{2} + x\sqrt{3} - \sqrt{5}$ f) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

c) $y = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^2$ g) $y = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$

d) $y = \frac{5x-2}{3}$ h) $y = \frac{x^2 - 1,5x + 0,25}{7}$

35. Bilden Sie von folgenden Funktionen jeweils diejenigen Ableitungen, die die angegebene Bedingung erfüllen!

Funktion	Bedingung
a) $y = \frac{1}{8}x^4 - 2x^3 + 7x - 0,2$	Alle nicht identisch verschwindenden Ableitungen.
b) $y = 0,1x^2 - 0,01x + 0,001$	Diejenige Ableitung, die eine Konstante ungleich Null ist.
c) $y = \frac{3}{4} - 5x^2 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{2}{3}x^7$	Alle Ableitungen gerader Ordnung, die nicht identisch verschwinden.
d) $y = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{3}x - 3\right)\left(\frac{1}{4}x - 4\right)$	Alle Ableitungen ungerader Ordnung, die nicht identisch verschwinden.
e) $y = (0,1x^2 - 0,05)^2$	Die Ableitung, die eine lineare Funktion ist.

36. Bilden Sie von den folgenden Funktionen die 2., 3., 5. und 10. Ableitung an den Stellen

$$x_0 = 1; x_0 = -2; x_0 = -\frac{1}{5}; x_0 = 0,1; x_0 = \sqrt{3}!$$

$$\text{a) } y = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{24}x^4 \qquad \text{b) } y = 0,02x^{10} + 0,01x^5 - x^2 + 4$$

37. Von einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades sind bekannt

$$\text{a) } f(0) = 1; f'(0) = -1; f''(0) = 4; f'''(0) = 6,$$

$$\text{b) } f(1) = 5; f'(0) = 1; f''(-1) = 2; f'''(x) = 6,$$

$$\text{c) } f(0) = -4; f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0; f''(-1) = 8; f'''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Geben Sie die Funktion an!

38. Aus den angegebenen Werten der Funktion und ihrer Ableitungen an bestimmten Stellen ist die zugrunde liegende ganze rationale Funktion, deren Grad jeweils gegeben ist, aufzustellen.

Funktionen 2. Grades:

$$\text{a) } f(2) = 2$$

$$\text{b) } f(-5) = 30$$

$$f'(4) = 1; f''(x) = 1$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3; f''(x) = 2$$

Funktionen 3. Grades:

$$\text{c) } f(0) = 3; f'(0) = -7$$

$$\text{d) } f(2) = -21; f'(3) = 13$$

$$f''(0) = 5; f'''(6) = 4$$

$$f''(4) = 36; f'''(6) = 60$$

Funktionen 4. Grades:

$$\text{e) } f(0) = -4; f'(1) = 5$$

$$\text{f) } f(0) = 0; f'(0) = 0$$

$$f''(2) = 42; f'''(0) = 0$$

$$f''(0) = 0; f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

$$f^{(4)}(x) = 4$$

39. Bilden Sie von folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

$$\text{a) } y = (2x + 3)^2$$

$$\text{d) } y = (x^2 + 3)^2$$

$$\text{g) } y = (2x^2 + 2x)^2$$

$$\text{b) } y = (3x - 2)^2$$

$$\text{e) } y = (x^2 + 2)^3$$

$$\text{h) } y = (5x^2 + 3x - 1)^2$$

$$\text{c) } y = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^4$$

$$\text{f) } y = (3x^2 + 4x)^3$$

$$\text{i) } y = (3x^2 + 5x - 2)^2$$

40. Bilden Sie von folgenden echt gebrochenen rationalen Funktionen die 1., 2. und 3. Ableitung!

$$a) y = \frac{5x-3}{7x^2}$$

$$c) y = \frac{2x^2-x}{3x^4-2x-7}$$

$$e) y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$$

$$b) y = \frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{x+2}$$

$$d) y = \frac{x \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2}}{3x^2-2}$$

$$f) y = \frac{5}{1+x^2}$$

41. Bilden Sie von folgenden unecht gebrochenen rationalen Funktionen jeweils die 1. und 2. Ableitung!

$$a) y = \frac{x^2+1}{2x}$$

$$c) y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$$

$$e) y = 4x + \frac{1}{x^2+1}$$

$$b) y = \frac{3}{9-x^2} + \frac{x}{x-1}$$

$$d) y = \frac{x-5}{x-1}$$

$$f) y = \frac{x(3-4x)}{2-3x^2}$$

42. Wie heißt von folgenden unecht gebrochenen Funktionen die Ableitung, die als erste eine echt gebrochene Funktion ist? Können Sie im Voraus angeben, für welche Ableitung das zutrifft?

$$a) y = \frac{5-x^2}{3x-6}$$

$$b) y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$$

$$c) y = x + \frac{x}{x^2+2}$$

$$d) y = \frac{x^3-27}{x^2}$$

43. Welche Werte hat die erste und zweite Ableitung folgender Funktionen an den angegebenen Stellen?

$$a) y = \frac{x^2-3}{x-2}$$

$$b) y = \frac{6}{5-x^2}$$

$$c) y = \frac{x-4}{2-x}$$

$$x_0 = 1; x_0 = -1$$

$$x_0 = 2; x_0 = -2$$

$$x_0 = 1; x_0 = -3$$

$$x_0 = 2,5; x_0 = -\frac{7}{2}$$

$$x_0 = \frac{1}{2}; x_0 = -1,5$$

$$x_0 = \sqrt{2}; x_0 = -\frac{1}{3}$$

44. Welchen Anstieg haben die Tangenten an die Bilder der folgenden Funktionen in den angeführten Punkten? Unter welchen Winkeln schneiden die Tangenten die Achsen?

$$a) y = \frac{x^2-7}{3+x} \quad P_1(-1; y_1); P_{2,3}(x_2; -16)$$

$$b) y = \frac{3}{4-x^2}$$

$$P_1(3; y_1); P_2(x_2 < 0; 1)$$

$$c) y = \frac{3+x^2}{4-x^2}$$

$$P_1(3; y_1); P_2(x_2 < 0; -\frac{4}{3})$$

45. Tangenten an die Bilder der folgenden Funktionen sollen den jeweils angegebenen Anstieg m_t haben. In welchen Punkten müssen die Tangenten angelegt werden?

$$a) y = \frac{x^2+1}{x-1} \quad m_1 = \frac{1}{2}; m_2 = 0$$

$$b) y = \frac{x^2-5}{1+x}$$

$$m_1 = 2; m_2 = 5$$

$$c) y = \frac{x^2-8}{x-3}$$

$$m_1 = \frac{3}{4}; m_2 = 0$$

46. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die die x -Achse unter dem Winkel α bzw. die y -Achse unter dem Winkel β schneiden. In welchen Kurvenpunkten ist das möglich?

$$a) y = \frac{x^2+x+14}{x+2}; \alpha = 135^\circ$$

$$b) y = \frac{x^2-3}{2x}; \beta = 135^\circ$$

$$c) y = \frac{x - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{x + \frac{1}{2}\sqrt{3}}; \alpha = 60^\circ; \beta = 120^\circ$$

47. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Bilder folgender Funktionen mit den Achsen! Zeichnen Sie im Anschluß an die Berechnung die Bilder der Funktionen mit Hilfe einer Wertetafel!

a) $2x + 3y + 6 = 0$ c) $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x + 2) = y$ e) $y = x^4 - 13x^2 + 36$
 b) $y = 4x^2 - 5x - 6$ d) $y + 2 = 0$

48. Welche Bedingung muß die Gleichung einer Funktion erfüllen, wenn ihr Bild durch den Koordinatenursprung geht?

49. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

a) $y = 8x - 4x^2$ c) $y = x^3 - 3x^2$ e) $y = x^3 - 3x$
 b) $y = x^5 - x^4 - x^3$ d) $2y - x + 3 = 0$ f) $y = x^6 - 5x^3 + 6$

50. Lösen Sie folgende Gleichungen!

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ (Setzen Sie: $x^3 = z$) d) $x^3 - 1,5x^2 - x = 0$
 b) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 = 0$ e) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
 c) $x^5 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 = 0$

51. Führen Sie für die nachstehend bezeichneten Gleichungen die Zerlegung in Linearfaktoren an!

a) Aufgaben c 47a, c, e b) Aufgaben c 49a bis e c) Aufgaben c 50b, c, d

52. Von folgenden Funktionen ist jeweils die Nullstelle x_0 gegeben. Berechnen Sie die restlichen Nullstellen!

a) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$; $x_{01} = 2$ c) $y = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$; $x_{01} = 1$
 b) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$; $x_{01} = -2$ d) $y = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18$; $\begin{cases} x_{01} = -3 \\ x_{02} = 1 \end{cases}$

53. Geben Sie eine Funktion an, die die folgenden Nullstellen hat!

a) $x_{01} = 1$; $x_{02} = -2$ c) $x_{01} = 0$; $x_{02} = \frac{1}{2}$; $x_{03} = -\frac{3}{2}$
 b) $x_{01} = 1$; $x_{02} = -2$; $x_{03} = 3$ d) $x_{01} = 2$; $x_{02} = -1$; $x_{03} = -3$; $x_{04} = 4$

54. Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

a) $y = \frac{x^2 + 5x + 22}{x - 2}$ c) $y = \frac{x}{x^2 + 4}$ e) $y = \frac{3}{4 - x^2}$
 b) $y = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$ d) $y = \frac{x^2 + 2}{3 + x^2}$ f) $y = \frac{x}{1 - x^2}$

55. Skizzieren Sie die Bilder folgender Funktionen, und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen im Unendlichen!

a) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ c) $y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 9}$ e) $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2}$
 b) $y = \frac{x^2 - 2}{3 - x^2}$ d) $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$

56. Berechnen Sie

a) von den in Aufgabe c 54, b) von den in Aufgabe c 55 gegebenen Funktionen die Polstellen! Untersuchen Sie das Verhalten in der Nähe der Polstelle! Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen!

2. Bestimmen Sie von der Funktion $y = 30x^5 + 70x^4 + 40x^3 + 1$ die lokalen Extrema und die Wendepunkte! Skizzieren Sie das Bild der Funktion!

57. Die Abszisse des Scheitels jeder Parabel, die als graphische Darstellung einer Funktion $y = x^2 + px + q$ entsteht, ist eine Stelle, an der die Funktion $y = x^2 + px + q$ ein Extremum besitzt. Bestimmen Sie auf diesem Wege die Koordinaten des Scheitelpunktes, und vergleichen Sie mit früher gewonnenen Ergebnissen!

58. Verfahren Sie wie in Aufgabe c 57 mit der Funktion

$$y = Ax^2 + Bx + C, \quad A \neq 0!$$

Wovon hängt es ab, ob der lokale Extremwert ein Minimum oder ein Maximum ist?

59. Welche Aussagen lassen sich über die Anzahl der lokalen Extremwerte und der Wendepunkte einer ganzen rationalen Funktion n -ten Grades machen?

60. Bestimmen Sie von folgenden Funktionen die lokalen Extremwerte und die Wendepunkte! Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen!

a) $y = x^3 - x - 2$

e) $y = x^2 + 2x - 4$

b) $y = x^4 - 8x^2 + 16$

f) $y = 2x^4 - 32x^2 - 10$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$

g) $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$

d) $y = x^3 - 13x + 27$

h) $y = 30 - 24x + 9x^2 - x^3$

61. Führen Sie von den folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch! (1. Untersuchung des Verhaltens im Unendlichen, 2. Berechnung der Nullstellen, 3. Berechnung der lokalen Extrema, 4. Berechnung der Wendepunkte) Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen!

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

e) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$

f) $y = x^3 - x^2 - 11x + 15$

c) $y = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4x - 6)$

g) $y = \frac{1}{10}(x^3 + 3x^2 - 24x + 20)$

d) $y = \frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 - 24x + 26)$

h) $y = (x^2 - 4x + 3)(x + 2)$

e) $y = (x^2 - 6x + 8)(x + 1)$

i) $y = \frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{10}x^4$

f) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

m) $y = x^4 - 10x^2 - 9$

62. Berechnen Sie von folgenden Funktionen Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte, und stellen Sie die Funktionen im Intervall von -3 bis $+3$ graphisch dar!

a) $y = \frac{1}{5}\left(x^5 - \frac{19}{3}x^3 - 4x\right)$

b) $y = \frac{1}{2}(x^4 - 8x^2 + 12)$

Unter welchen Winkeln schneiden die Bilder der Funktionen die x -Achse?

63. Bestimmen Sie von den in Aufgabe c 61 gegebenen Funktionen den Anstieg der Wendetangenten!

64. Gegeben ist die Funktion

$$y = \frac{x^4}{32} - \frac{3x^2}{4} + 5$$

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrema und der Wendepunkte!
 b) Weisen Sie nach, daß das Bild der Funktion nur im 1. und 2. Quadranten liegt!
 c) Berechnen Sie den Anstieg der Wendetangenten!

65. a) Unter welchem Winkel schneidet das Bild von $y = \frac{1}{4}(x^3 - 4x)$ den positiven Teil der x -Achse?

- b) Ermitteln Sie diejenigen Punkte des Bildes von $y = \frac{1}{4}(x^3 - 4x)$, in denen der Anstiegswinkel 45° beträgt!

66. Gegeben seien die Funktionen $y = x^2 - 6x + k$ ($k > 9$).

Weisen Sie nach, daß diese Funktionen keine Nullstellen haben!

3. Ein Träger ist an einem Ende fest eingespannt und liegt an seinem anderen Ende fest auf (Bild c1). Infolge seines Eigengewichtes biegt sich der Träger nach unten durch. Die Lage der neutralen Faser des Balkens wird für das angenommene Koordinatensystem durch die Gleichung

$$y = -k \left(x - \frac{3x^3}{a^2} + \frac{2x^4}{a^3} \right) \text{ gegeben.}$$

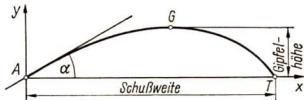
Dabei sind a und x in Metern gemessen; k ist eine positive dimensionslose Konstante.

- a) An welcher Stelle hängt der Träger am weitesten durch, wenn $a = 8$ m ist?
 b) An welcher Stelle zwischen Auflage und Wand befindet sich ein Wendepunkt?
 c) Wie groß ist k , wenn der Winkel zwischen der Kurventangente im Auflagepunkt und der Horizontalen 1° beträgt?



c 1

c 2



67. Die Flugbahn eines Geschosses kann bei vereinfachten Bedingungen durch folgende Funktion beschrieben werden: $y = f(x) = k(135x - 6x^2 - x^3)$. Dabei geben x die horizontale Entfernung vom Abschusspunkt A und y die zugeordnete Geschöshöhe über der Horizontalebene an. Die Koordinateneinheit ist für beide Achsen 1 km. Abschusspunkt A und Auftreffpunkt T liegen in derselben Horizontalebene (Bild c 2).

- a) Berechnen Sie die Schubweite \overline{AT} !
 b) Berechnen Sie die Koordinaten des Gipfelpunktes G der Geschösbahn, wenn $k = \frac{1}{200}$ ist!
 c) Bestimmen Sie den Abschusswinkel α für $k = \frac{1}{200}$! (Rechenstabgenauigkeit genügt!)
 d) Wie groß muß k sein, damit die Gipfelhöhe 1,5 km beträgt?
68. Gegeben ist die Funktion $y = ax^3 + bx$ ($a > 0$). Für welche b ist die gegebene Funktion überall monoton wachsend?
69. Führen Sie von folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch! (1. Untersuchung des Verhaltens im Unendlichen; 2. Berechnung der Nullstellen und Pole; 3. Berechnung der Extrema; 4. Berechnung der Wendepunkte). Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen!

a) $y = \frac{x^2 + 5x + 22}{x - 2}$

e) $y = \frac{x}{x^2 + 4}$

i) $y = \frac{3}{4 - x^2}$

b) $y = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$

f) $y = \frac{x^2 + 2}{3 + x^2}$

k) $y = \frac{x}{1 - x^2}$

c) $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$

g) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 16}$

l) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

d) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1}$

h) $y = \frac{x^2 - 2}{3 - x^2}$

m) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x}$

4. a) Bestimmen Sie Nullstellen, Pole, Extremwerte und Wendepunkte der Funktion

$$y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2} \text{! Untersuchen Sie das Verhalten der Kurve für } x \rightarrow \pm \infty!$$

- b) Fertigen Sie eine Skizze des Kurvenverlaufs an!
 c) An welcher Stelle hat das Bild der Funktion den Anstieg $m = 2$?

70. Untersuchen Sie folgende Funktionen!

$$a) y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$$

$$b) y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

$$c) y = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$$

5. Bringen Sie die Funktion $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$ (Linsengleichung) auf die Form $y = F(x)$! Um was für eine Funktion handelt es sich? Nehmen Sie verschiedene positive und negative Werte für die Brennweite f cm, und zeichnen Sie jeweils das Bild der Funktion!

71. Aus einem 4,80 m langen Stück Winkelisen soll das Kantengerüst für ein Aquarium hergestellt werden. Die Kanten der Bodenfläche sollen im Verhältnis 2 : 3 stehen.

Welche Abmessungen muß das Aquarium haben, damit sein Volumen möglichst groß wird?

73. Aus rechteckigen Pappen (Länge a , Breite b) sollen durch Ausstanzen von Quadraten bzw. Rechtecken und Zusammenfalten Kästen von möglichst großem Inhalt

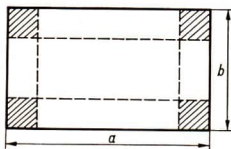
- a) ohne Deckel (Bild c 3),
- b) mit anhängendem aufliegendem Deckel (Bild c 4),
- c) mit übergreifendem Deckel (Bild c 5) hergestellt werden.

In welchem Verhältnis stehen die Volumina bei a), b) und c)?

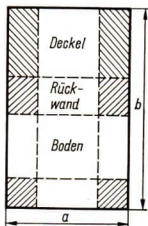
72. Das Kantengerüst eines quaderförmigen Transportkäfigs soll aus 36 m Winkelisen hergestellt werden.

Bei welchen Abmessungen für Länge, Breite und Höhe erhält man das größte Volumen des Käfigs, wenn dessen Höhe halb so groß wie die Länge sein soll?

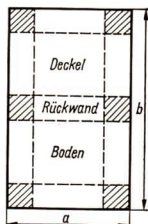
74. Lösen Sie die Aufgabe c 73 für den Fall, daß die Pappen quadratisch sind!



c 3



c 4



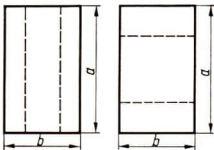
c 5

75. Aus rechteckigen Blechen von der Länge a und der Breite b ($b < a$) sollen der Boden und zwei gegenüberliegende Seitenflächen von quaderförmigen Behältern für Kleinmaterial gebogen werden. (Für die beiden fehlenden Seitenflächen werden vorhandene Abfallbleche verwendet.) Die beiden Skizzen im Bild c 6 zeigen zwei verschiedene Möglichkeiten für die Lage der Biegekanten.

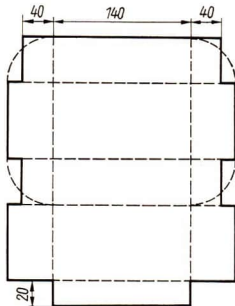
- a) Bestimmen Sie für beide Möglichkeiten das jeweilige Maximalvolumen!
- b) Welcher von diesen beiden Behältern hat das größere Fassungsvermögen? Begründen Sie Ihre Antwort!

76. Packungen für 300 g Dextropur haben einen Rauminhalt von 440 cm^3 . Das Faltnetz der Schachtel ist durch die nicht maßstabgerechte Skizze (in Bild c 7) gegeben. Bestimmen Sie die Abmessungen der Packungen, wenn der Papperverbrauch, d. h. der Flächeninhalt des Faltnetzes, minimal sein soll!

c 6



c 7



77. Eine natürliche Zahl ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß

- das Produkt der Summanden,
- die Summe der Quadrate der Summanden,
- die Summe der dritten Potenzen der Summanden ein Extremum wird.

Untersuchen Sie, ob in den einzelnen Fällen ein Maximum oder ein Minimum sinnvoll ist!

78. Aus einem Baumstamm (der der Einfachheit halber mit durchgängig gleich großem kreisförmigen Querschnitt angenommen wird) soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit geschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite und zum Quadrat der Balkenhöhe. In welchem Verhältnis müssen Breite und Höhe des Balkens stehen?

79. Von allen geraden Kreiskegeln, deren Mantellinien $s = 12$ cm lang sind, wird derjenige mit dem größten Volumen gesucht. Berechnen Sie für diesen Kegel Höhe und Grundkreisradius!

80. Welcher Kreiszylinder hat bei gegebener Oberfläche A_0 das größte Volumen? Bestimmen Sie das Verhältnis von Grundkreisradius und Höhe!

81. Für die Herstellung einer oben offenen Konservendose stehen 300 cm^2 Blech zur Verfügung. Wie groß sind r und h , wenn das Volumen ein Maximum sein soll?

82. In eine Kugel mit dem Radius R soll ein Kreiszylinder einbeschrieben werden. Bestimmen Sie das Verhältnis von Grundkreisradius und Höhe, wenn das Volumen des Zylinders ein Maximum sein soll! Anleitung: Wählen Sie die Höhe als unabhängige Variable!

83. In eine Kugel mit dem Radius R soll ein Kreiskegel einbeschrieben werden. Bestimmen Sie das Verhältnis von Grundkreisradius und Höhe, wenn das Volumen des Kegels ein Maximum sein soll! Anleitung: Wählen Sie die Höhe als unabhängige Variable!

84. Es soll ein Sportplatz, bestehend aus einem möglichst großen rechteckigen Spielfeld und einer 400 m Laufbahn, angelegt werden. Das zur Verfügung stehende Gelände läßt aber höchstens eine Spielfeldbreite von 50 m zu. Wie ist der Sportplatz anzulegen? Welchen Flächeninhalt hat das Spielfeld?

85. Mit 100 m Maschendraht soll ein rechteckiges Tiergehege eingezäunt werden, und zwar

- freistehend,
- mit einer Seite an eine Mauer angelehnt,
- mit zwei Seiten in eine Mauerecke eingebaut.

Welche Gestalt ergibt jeweils die größte Gehegefläche? In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte bei a), b) und c)? Fertigen Sie maßstabgerechte Skizzen für die drei Fälle an!

C

86. Einer geraden Pyramide ist ein gerades Prisma einbeschrieben. Beide Körper haben quadratische Grundflächen. Die Seiten der Grundflächen verlaufen parallel zueinander. Die Pyramide ist 12 cm hoch, ihre Grundkante 8 cm lang.
- Welche Maße müssen Höhe und Grundkante des Prismas erhalten, wenn dessen Volumen möglichst groß sein soll?
 - Stellen Sie Pyramide und Prisma im Zweitafelverfahren dar!
87. Einem geraden Kreiskegel mit der Höhe 6 cm und dem Grundkreisradius 2 cm wird ein quadratisches gerades Prisma einbeschrieben.
- Berechnen Sie Grundkante, Höhe, Volumen und Oberflächeninhalt des Prismas, wenn dessen Volumen ein Maximum sein soll!
 - Stellen Sie den Kegel und das Prisma im Zweitafelverfahren dar!

6. In einem geraden Kreiskegel (Grundkreisdurchmesser d , Höhe h) soll ein gerader Kreiszylinder mit größtmöglichem Volumen einbeschrieben werden. Bestimmen Sie dessen Abmessungen!
7. In einem geraden Kreiskegel soll ein zweiter von möglichst großem Volumen so einbeschrieben werden, daß seine Spitze im Mittelpunkte des Grundkreises des ersten Kegels liegt.

88. Beweisen Sie folgenden Satz!

Von allen rechtwinkligen Dreiecken mit konstanter Summe (s), der Kathetenlängen (a und b) hat das gleichschenklige den größten Flächeninhalt.

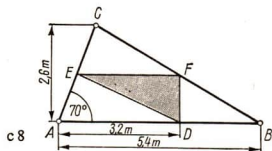
89. Einem Kreis ist das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einzubeschreiben!

90. Einem spitzwinkligen Dreieck mit der Grundseite a und der Höhe h soll ein Rechteck einbeschrieben werden, das auf a steht. Wie sind die Abmessungen des Rechtecks, wenn sein Flächeninhalt ein Maximum sein soll?

91. In einem Rechteck soll die längere Seite a um den gleichen Betrag verkürzt werden um den die Seite b verlängert wird. Das dadurch entstehende Rechteck soll einen möglichst großen Flächeninhalt haben. Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

8. Ein Dreieck ABC (Bild c 8) soll von D auf \overline{AB} aus so in vier Teildreiecke zerlegt werden, daß \overline{EF} parallel zu \overline{AB} verläuft und das mittlere Dreieck einen möglichst großen Flächeninhalt bekommt. Bestimmen Sie die Seiten und Winkel dieses Dreiecks zeichnerisch und rechnerisch!

92. Ein Wasserbehälter besteht aus einem auf der Spitze stehenden Kreiskegel mit aufgesetztem Kreiszylinder. Die Höhe des Zylinders soll eine Länge von 2,00 m und die Mantellinie des Kegels eine Länge von 6,00 m haben. Welches Fassungsvermögen ist im Höchstfall möglich?



93. Ein Draht von der Länge a wird zu einem Rechteck gebogen, welches um eine seiner Seiten rotiert. Unter welchen Bedingungen hat der entstehende Zylinder
- den größten Mantelflächeninhalt, b) das größte Volumen?
- In welchem Verhältnis stehen in beiden Fällen die Mantelflächeninhalte, die Oberflächeninhalte und die Volumina?
- Anleitung: Lösen Sie die Aufgabe zunächst mit Variablen, wählen Sie dann eine geeignete Länge für a , und stellen Sie beide Zylinder aus Papier her!
94. Von einer rechteckigen Glasscheibe (48 cm mal 60 cm) ist an einer Ecke ein dreieckiges Stück so abgesprungen, daß die kürzere
95. An zwei geraden Straßen, die sich unter einem Winkel von 60° schneiden, liegen die Orte A und B 30 km bzw. 45 km von der

Seite um 8 cm und die längere um 10 cm verkürzt wird. Welche größtmögliche rechteckige Glasscheibe läßt sich aus dem Rest schneiden? Wieviel Prozent beträgt der Verlust?

96. Der Querschnitt eines Stollens ist $2,00 \text{ m}^2$ groß und hat die Gestalt eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis.
- Zeigen Sie, daß man aus der Breite $2x$ des Stollens die Höhe y der Seitenwände und die Länge b des Halbkreisbogens berechnen kann!
 - Stellen Sie die gesamte Oberfläche eines $1,00 \text{ m}$ langen Stollenstückes als Funktion von x dar!
 - Welche Form müßte der Querschnitt haben, wenn die Oberfläche einen Extremwert haben soll? Welcher Art ist der Extremwert?
98. Ein Reaktionsgefäß für die chemische Industrie hat die Form eines oben offenen Zylinders und ein Volumen von 500 l . Wie groß müssen Höhe und Grundkreisradius gewählt werden, wenn der Oberflächeninhalt ein Minimum werden soll?
99. Welche Maße muß man für allseitig geschlossene zylindrische Blechdosen von a) 1 l ; b) $0,5 \text{ l}$; c) $0,25 \text{ l}$ Inhalt wählen, wenn der Blechverbrauch möglichst gering sein soll? Ändert sich das Ergebnis, wenn die Dosen oben offen sind?
100. Der Boden eines oben offenen zylindrischen Gefäßes ist eine nach innen gewölbte Halbkugel. Bei welchen Maßen wird das Volumen bei gegebenem Oberflächeninhalt ein Maximum?
101. Eine positive Zahl soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß die Summe der beiden Quotienten, die man durch Division des einen Summanden durch den anderen erhält, ein Minimum wird.
102. Eine Streichholzschachtel muß 50 mm lang sein und soll 25 cm^3 Inhalt haben. Der äußere Teil wird längs einer Schmalseite zusammengeklebt, so daß diese doppelt zu rechnen ist. Welche Maße müßte sie bei möglichst geringem Materialverbrauch haben?
103. Von 24 Elementen mit je 2 V und $0,25 \Omega$ inneren Widerstand sollen bei einem Außenwiderstand von $1,5 \Omega$ Gruppen parallelgeschalteter Elemente so hintereinandergeschaltet werden, daß die Stromstärke ein Maximum wird.
104. Eine Sammellinse mit der Brennweite f erzeugt von einem Gegenstand ein reelles Bild. Bei welcher Gegenstandsweite ist die Entfernung des Gegenstandes vom Bild am kleinsten?

9. Um eine Kugel vom Radius R ist ein gerader Kreiskegel so zu beschreiben, daß das Volumen des Kegels ein Minimum wird.

10. Eine gewisse Menge Wasser hat bei $t_0 = 0^\circ\text{C}$ das Volumen V_0 .

Bei der Temperatur t ($0^\circ\text{C} \leq t \leq 25^\circ\text{C}$) hat sie dann das Volumen

$$V_t = V_0(1 - 0,0001608t + 0,0000207t^2 - 0,0000001t^3).$$

Bestimmen Sie daraus die Temperatur, bei der Wasser die größte Dichte hat!

105. Ein Element von $1,8 \text{ V}$ Ursprung und $0,2 \Omega$ inneren Widerstand erhitzt eine Heizspirale aus einem Widerstandsdraht von 8 m Länge und dem spezifischen Widerstand $0,017 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$. Welchen Querschnitt muß der Heizdraht haben, um einen möglichst großen Heizeffekt zu ergeben?

106. Für den Verkauf von Ölfarbe verwendet man zylindrische Blechdosen mit einem Fassungsvermögen von $V = 250 \text{ cm}^3$. Sie haben eine kreisrunde Öffnung, die durch einen Kunststoffdeckel verschlossen wird. Der Durchmesser dieser Öffnung steht zum Durchmesser des Zylinders im Verhältnis 4 : 5. Wie müssen Durchmesser und Höhe der Dosen gewählt werden, damit möglichst wenig Blech verbraucht wird?

d) Integralrechnung

1. Ermitteln Sie näherungsweise den Inhalt einer Kreisfläche ($r = 50 \text{ mm}$) in Quadratmillimetern!

- a) Zeichnen Sie hierzu einen Kreis mit dem angegebenen Radius auf Millimeterpapier, und zählen Sie die Einheitsquadrate aus! b) Berechnen Sie hierzu den Flächeninhalt ein- und umbeschriebener n -Ecke ($n = 6; 10; 100$)!

2. Zerlegen Sie die nachstehenden Intervalle in

- 2 Teilintervalle gleicher Länge, 2 Teilintervalle verschiedener Länge,
5 Teilintervalle gleicher Länge, 5 Teilintervalle verschiedener Länge,
10 Teilintervalle gleicher Länge, n Teilintervalle gleicher Länge!
- a) $\langle 0; 1 \rangle$ c) $\langle 0; a \rangle$ e) $\langle 0; 5 \rangle$ g) $\langle 0,1; 0,2 \rangle$
b) $\langle 1; 2 \rangle$ d) $\left\langle \frac{1}{3}b; \frac{11}{3}b \right\rangle$ f) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$ h) $\langle c; d \rangle$

3. Zeichnen Sie die Bilder der nachstehenden Funktionen in ein Koordinatensystem (Koordinateneinheit: 5 cm)!

Zerlegen Sie den angegebenen Definitionsbereich in 5 gleich lange Teilintervalle! Wählen Sie bei jedem Aufgabenteil nacheinander als Zwischenpunkt mit der Abszisse ξ_i

1. den Mittelpunkt des jeweiligen Intervalls,
2. den linken Endpunkt des jeweiligen Intervalls,
3. den rechten Endpunkt des jeweiligen Intervalls!

Tragen Sie die entsprechenden Rechtecke in Ihre Zeichnung ein!

Berechnen Sie näherungsweise den Inhalt des Flächenstücks, das durch das Bild der Funktion, durch die y - und die x -Achse sowie durch die Gerade $x = 1$ bzw. $x = 2$ begrenzt ist!

- a) $y = x^2; \langle 0; 1 \rangle$ c) $y = x^3; \langle 0; 1 \rangle$
b) $y = x^3 + 1; \langle 0; 1 \rangle$ d) $y = x^3 + 1; \langle 0; 2 \rangle$
4. Gegeben sind die nachstehenden Funktionen im Intervall $\langle a; b \rangle$. Berechnen Sie näherungsweise den Inhalt des Flächenstücks, das durch die x -Achse, das Bild der Funktion und durch die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird!
Zerlegen Sie dazu das angegebene Intervall in n gleich lange Teilintervalle! Wählen Sie als Zwischenpunkt mit der Abszisse ξ_i den Mittelpunkt des jeweiligen Teilintervalls!
- a) $y = x^3; \langle 0; 2 \rangle$ b) $y = x^2 + 1; \langle 0; b \rangle$ c) $y = x^3; \langle 0; b \rangle$ d) $y = x^2 - 1; \langle 1; 2 \rangle$

1. Gegeben ist die Funktion $y = x^3$ im Intervall $\langle 0; 1 \rangle$. Durch das Bild dieser Funktion, die x -Achse und die Gerade $x = 1$ ist ein Flächenstück begrenzt.

Zeigen Sie, daß für den Inhalt dieses Flächenstücks gilt: $A = \frac{1}{4}$!

5. Bilden Sie für jedes der nachstehenden Intervalle Zerlegungen z_2, z_5, z_{10}, z_{20} !
Die Teilintervalle der einzelnen Zerlegungen sollen nicht alle gleich lang sein.
Bilden Sie zu Ihren Zerlegungen z_n die Folge (I_n) , ($n = 2; 5; 10; 20$), der maximalen Intervalllängen!

- a) $\langle 1; 6 \rangle$ b) $\langle -5; 0 \rangle$ c) $\langle 0,5; 1 \rangle$ d) $\langle 0; b \rangle$

6. Geben Sie für jedes der nachstehenden Intervalle die Zerlegungen z_n , ($n = 10; 100; \dots; 10^k; \dots; k \in \mathbb{N}$) an!

Die Teilintervalle jeder Zerlegung können gleich lang sein.

Stellen Sie die Folge (l_n) , ($n = 10; 100; \dots; 10^k; \dots; k \in \mathbb{N}$) der maximalen Intervalllängen auf! Untersuchen Sie, ob die Zerlegungsfolge (z_n) eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge ist!

- a) $\langle 0; 10 \rangle$ b) $\langle 1; 2 \rangle$ c) $\langle 0; b \rangle$ d) $\langle c; d \rangle$

7. Stellen Sie für die nachstehenden Funktionen im Intervall $\langle 0; 4 \rangle$ eine Zerlegungsfolge (z_n) auf! Wählen Sie bei jeder Zerlegung zweckmäßigerweise gleich lange Teilintervalle!

Bilden Sie zu dieser Zerlegungsfolge (z_n) die Folge (s_n) der Zerlegungssummen! Lassen Sie die Abszisse ξ_i des Zwischenpunktes mit einem der Intervallenden zusammenfallen!

Ermitteln Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$!

- a) $y = x$ b) $y = x^2$

2. Bilden Sie für die nachstehenden Funktionen im Intervall $\langle 1; 6 \rangle$ eine Folge (s_n) der Zerlegungssummen!

Ermitteln Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$! Veranschaulichen Sie sich das Ergebnis, indem Sie die Bilder der genannten Funktionen im Intervall $\langle 1; 6 \rangle$ zeichnen!

- a) $y = \frac{1}{2}x + 2$ b) $y = \frac{1}{3}x^2$ c) $y = \frac{1}{x^2}$

3. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das durch das Bild der Funktion $f(x) = m \cdot x$ ($m > 0$), die x -Achse und die Gerade $x = b$ ($b > 0$) begrenzt wird, indem Sie

- a) eine Formel der Flächeninhaltsberechnung verwenden,
b) die Folge der Zerlegungssummen und deren Grenzwert bilden!

4. Zeichnen Sie die Bilder der folgenden zu integrierenden Funktionen für das angegebene Intervall, und kennzeichnen Sie das zu berechnende Flächenstück (Koordinateneinheit: 5 cm)!

Zerlegen Sie das Intervall nacheinander in 2, 5, 10 Teilintervalle! Zeichnen Sie die Rechtecke, die als Maßzahlen für ihre Seiten jeweils die Intervalllänge und die Ordinate im rechten Intervallende haben! Berechnen Sie s_2, s_5, s_{10} !

Bilden Sie s_n ! Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ und damit den Inhalt des gekennzeichneten Flächenstücks!

- a) $\int_0^3 x \, dx$ b) $\int_0^1 x^2 \, dx$ c) $\int_1^3 x \, dx$ d) $\int_1^2 (x+1) \, dx$

8. Berechnen Sie folgende Integrale, indem Sie die Zerlegungssummen s_n und $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ bilden!

- a) $\int_0^1 x \, dx$ b) $\int_0^2 x^2 \, dx$ c) $\int_0^1 x^3 \, dx$

9. Zeigen Sie, daß die untenstehenden Aussagen wahr sind!

Zeichnen Sie die Bilder der nachstehend aufgeführten zu integrierenden Funktionen in dem angegebenen Intervall!

Berechnen Sie den Mittelwert jeder Funktion in dem angegebenen Intervall! Veranschaulichen Sie sich die berechneten Mittelwerte und den Mittelwertsatz der Integralrechnung in den jeweiligen Zeichnungen!

- a) $\int_0^2 x \, dx = 2$ b) $\int_2^4 (x-2) \, dx = 2$ c) $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$
d) $\int_0^2 x^3 \, dx = 4$ e) $\int_{-1}^0 (x+1) \, dx = \frac{1}{2}$ f) $\int_0^1 (x+1) \, dx = \frac{3}{2}$

$$g) \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \frac{4}{3}$$

$$k) \int_1^3 2x dx = 8$$

$$h) \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = \frac{2}{3}$$

$$l) \int_1^2 (x^3 - 1) dx = \frac{11}{4}$$

$$i) \int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$$

10. Benutzen Sie zur Lösung der folgenden Aufgaben die in den Aufgaben d 4, d 8 und 9 ermittelten bzw. nachgewiesenen Ergebnisse!

Berechnen Sie unter Verwendung der Definitionen der Lerneinheit D 4 und des Satzes D 3 die folgenden Integrale!

$$a) \int_2^{\frac{4}{3}} x^4 dx$$

$$g) \int_0^0 x dx$$

$$n) \int_2^0 x^2 dx$$

$$b) \int_0^{-1} (x + 1) dx$$

$$h) \int_3^0 x dx$$

$$o) \int_0^2 (x + 1) dx$$

$$c) \int_1^3 x dx$$

$$i) \int_{-1}^1 (x + 1) dx$$

$$p) \int_1^2 x^2 dx$$

$$d) \int_0^1 x dx + \int_1^3 x dx$$

$$k) \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx$$

$$q) \int_2^3 x dx + \int_0^2 x dx$$

$$e) \int_2^0 (x + 1) dx$$

$$l) - \int_2^1 (x^2 - 1) dx$$

$$r) - \int_1^0 x^3 dx$$

$$f) \int_0^1 z dz$$

$$m) \int_{-1}^{-1} t^3 dt$$

$$s) \int_3^1 2r dr$$

11. Fassen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung des Bildes d 1 zusammen!

$$a) \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{x_0} f(x) dx$$

12. Zerlegen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung des Bildes d 1 in Teilintegrale!

$$a) \int_0^c f(x) dx \quad c) \int_{x_0}^b f(x) dx$$

$$b) \int_0^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

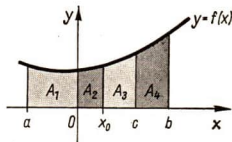
$$b) \int_a^{x_0} f(x) dx \quad d) \int_a^b f(x) dx$$

$$c) \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

$$d) A_2 + A_3$$

$$e) A_1 + A_2 + A_3$$

d 1



13. Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils drei Stammfunktionen an!
- a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 4x + 2$
 c) $f(x) = x^3 + 1$
 d) $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x$
 e) $f(x) = \frac{1}{x^2} (x \neq 0)$
 f) $f(x) = n \cdot x^{n-1} (n \geq 0, n \in \mathbb{N})$
 g) $f(x) = x^4 + x^2 - 1$
 h) $f(x) = -3x^{-4} (x \neq 0)$
14. Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils drei Stammfunktionen an!
- a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 5x^4$
 c) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$
 d) $f(x) = \frac{3}{10}x^2 - x + \frac{3}{5}$
 e) $f(x) = \frac{-2}{x^3} (x \neq 0)$
 f) $f(x) = 3$
 g) $f(x) = 3x^2 + 5$
 h) $f(x) = a_1x + a_0$

15. Ermitteln Sie die Menge aller Stammfunktionen F !
 Stellen Sie jeweils 3 der Stammfunktionen graphisch dar!

a) $\int x \, dx$ b) $\int 4x \, dx$ d) $\int 4 \, dx$ e) $\int (2x - 4) \, dx$
 c) $\int 6x^2 \, dx$ f) $\int 2x^3 \, dx$

16. Geben Sie aus der Menge der in Aufgabe d 15 ermittelten Stammfunktionen jeweils diejenigen an, deren Bild
- a) die y -Achse im Punkt $P(0; 4)$ schneidet,
 b) durch den Koordinatenursprung verläuft!
17. Geben Sie aus der Menge der in Aufgabe d 15 ermittelten Stammfunktionen jeweils diejenigen an, deren Bild
- a) die x -Achse im Punkt $P_1(2; 0)$ schneidet,
 b) durch den Punkt $P_2(1; 1)$ verläuft!

18. Ermitteln Sie die Stammfunktionen

a) $\int 3x^2 \, dx$, b) $\int (-2) \, dx$,
 und zeichnen Sie die Bilder für
 $c_1 = -2$, $c_2 = 0$, $c_3 = 3$!

19. Ermitteln Sie die Stammfunktionen

a) $\int \frac{1}{2} x \, dx$, b) $\int (-2x) \, dx$,
 und zeichnen Sie die Bilder für
 $c_1 = -2$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1,5$!

5. Von einer Funktion F ist bekannt, daß ihr Bild an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches den Anstieg $F'(x_0)$ besitzt und daß es durch den Punkt $P_0(0; 1)$ verläuft. Ermitteln Sie die Funktion!

a) $F'(x_0) = x_0$ b) $F'(x_0) = -1$ c) $F'(x_0) = 6x_0$ d) $F'(x_0) = -\frac{1}{4}x_0$

20. Ermitteln Sie diejenige Stammfunktion der Funktion f , die an der Stelle x_0 den Funktionswert $F(x_0)$ besitzt!

a) $f(x) = 2$ für $x_0 = 3$ und $F(x_0) = 8$
 b) $f(x) = -3x$ für $x_0 = 0$ und $F(x_0) = -2$
 c) $f(x) = \frac{3}{5}x^2$ für $x_0 = 2$ und $F(x_0) = \frac{14}{5}$
 d) $f(x) = -4$ für $x_0 = 1$ und $F(x_0) = -3$
 e) $f(x) = 0,2x$ für $x_0 = -5$ und $F(x_0) = 3,5$
 f) $f(x) = \frac{1}{x^2} (x \neq 0)$ für $x_0 = 7$ und $F(x_0) = \frac{6}{7}$

21. Ermitteln Sie in den folgenden Gleichungen $f(x)$!¹

a) $2x^3 + c = \int f(x) \, dx$ c) $x^2 + 6x + c = \int f(x) \, dx$
 b) $x^4 - 8x^2 + c = \int f(x) \, dx$ d) $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + c = \int f(x) \, dx$

¹ Für die Variablen im Nenner sind hier und in allen folgenden Aufgaben die Zahlen ausgeschlossen, die den Nenner beim Einsetzen zu Null werden lassen.

22. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale!

a) $\int 3x \, dx$

b) $\int (-x) \, dx$

c) $\int (-2) \, dx$

d) $\int (2x - 4) \, dx$

e) $\int -(4x - 1) \, dx$

f) $\int x^7 \, dx$

g) $\int nx^{n-1} \, dx \quad (n \neq 0, n \text{ ganz})$

23. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale!

a) $\int 4 \, dx$

b) $\int \left(-\frac{1}{2}\right) \, dx$

c) $\int (x + 3) \, dx$

d) $\int (1 + 3x) \, dx$

e) $\int (-6x^2) \, dx$

f) $\int 3x^2 \, dx$

g) $\int x^p \, dx \quad (p \neq -1, p \text{ ganz})$

24. Berechnen Sie folgende Integrale!

a) $\int x^8 \, dx$

b) $\int (-5w^{12}) \, dw$

c) $\int (-7) \, dz$

d) $\int \frac{ax^2}{b} \, dx$

e) $\int gt \, dt$

f) $\int (x^3 + 2x) \, dx$

g) $\int (a_2x^2 + a_1x + a_0) \, dx$

h) $\int (\sqrt{a} - z + \sqrt{b}) \, dz$

i) $\int (2x^2 - 2)^2 \, dx$

25. Berechnen Sie folgende Integrale!

a) $\int \frac{3}{2} x^2 \, dx$

b) $\int \frac{x}{10} \, dx$

c) $\int (-4x^3) \, dx$

d) $\int \frac{1}{2\pi^2} \, dr$

e) $\int \left(4x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 10x - \frac{1}{7}\right) \, dx$

f) $\int (3 + v^2 + v^5 - v^7) \, dv$

g) $\int (x - 1)(x + 1) \, dx$

h) $\int \left((z + 3)\left(z^2 - \frac{1}{3}z + 3\right)\right) \, dz$

26. Berechnen Sie folgende Integrale!

a) $\int \frac{dx}{x^3}$

b) $\int w^{-13} \, dw$

c) $\int k \cdot \frac{1}{x^5} \, dx$

d) $\int \left(v^2 + \frac{1}{v^2}\right) \, dv$

e) $\int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right) \, dx$

f) $\int \frac{-n + 1}{x^n} \, dx \quad (n \neq 1)$

g) $\int \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2} \, dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3}\right) \frac{1}{x^2} \, dx$

27. Berechnen Sie folgende Integrale!

a) $\int \frac{dx}{x^7}$

b) $\int (-5x^{-6}) \, dx$

c) $\int x^3 \cdot x^{-7} \, dx$

d) $\int \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}\right) \, dx$

e) $\int \left(x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 1 - \frac{6}{x^7}\right) \, dx$

f) $\int \frac{w^2}{z^3} \, dz$

g) $\int \frac{w^2}{z^3} \, dw$

b) $\int \left(\frac{1}{x^7} - \frac{1}{x^5}\right) (x^3 - x) \, dx$

6. Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale möglichst rationell!

a) $\int (a + bx) \, dx - \int (a - bx) \, dx$

b) $\int \left(x^3 - 2x^2 - \frac{1}{5}x + 1\right) \, dx + \int \left(x^3 + 2x^2 + \frac{1}{5}x - 1\right) \, dx$

28. a) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = t$ in ein kartesisches x, t -Koordinatensystem!

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Dreiecksflächenformeln

$$\int_1^{x_i} t \, dt \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad \text{für} \quad x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = 3, x_5 = \frac{7}{2}, x_6 = 4!$$

c) Bilden Sie die Menge Φ aller geordneten Paare

$$\left[x_i; \int_1^{x_i} t \, dt \right] \quad \text{mit den in b) aufgeführten } x_i!$$

29. a) $\int_0^3 x \, dx$ e) $\int_0^4 x^2 \, dx$ 30. a) $\int_0^2 \frac{1}{3} x \, dx$ e) $\int_1^5 x^2 \, dx$

b) $\int_5^1 x^2 \, dx$ f) $\int_0^2 dx$ b) $\int_2^3 \frac{1}{5} x^2 \, dx$ f) $\int_{-1}^1 2 \, dx$

c) $\int_{-2}^0 -3 \, dx$ g) $\int_0^1 x^{12} \, dx$ c) $\int_{-2}^0 x^3 \, dx$ g) $\int_2^0 x^2 \, dx$

d) $\int_{-1}^{-2} 5x \, dx$ h) $\int_{-0.5}^{2.5} 6x \, dx$ d) $\int_1^3 \frac{1}{9} x^2 \, dx$

31. a) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx$ e) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} \, dx$ 32. a) $\int_1^4 x^{-2} \, dx$ e) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} \, dx$

b) $\int_1^3 \frac{4}{x^3} \, dx$ d) $\int_2^1 x^{-4} \, dx$ b) $\int_{-3}^{-2} x^{-3} \, dx$ d) $\int_3^1 -\frac{10}{x^2} \, dx$

33. a) $\int_0^1 (4x + x) \, dx$ c) $\int_1^3 \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) dx$ e) $\int_{-1}^1 (x + 4) \, dx$

b) $\int_1^2 (x^2 - 2) \, dx$ d) $\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) dx$ f) $\int_0^3 (x^2 + x + 1) \, dx$

34. a) $\int_{-2}^1 \left(5x^4 - \frac{1}{5}x^2 - 3 \right) dx$ 35. a) $\int_0^3 (3x^2 + 4x + 5) \, dx$

b) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$ b) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4} \right) dx$

36. Berechnen Sie die bestimmten Integrale der Funktion f in den angegebenen Intervallen!

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
 $\langle -1; 0 \rangle; \langle -1; 3 \rangle; \langle 0; 3 \rangle$

c) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
 $\langle -3; 3 \rangle; \langle -2; 2 \rangle; \langle -1; 1 \rangle$

b) $f(x) = x^3 - 16x$
 $\langle -4; 0 \rangle; \langle 0; 4 \rangle; \langle -4; 4 \rangle$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x$
 $\langle -1; 1 \rangle; \langle 2; 3 \rangle; \langle 0; 3 \rangle$

d

37. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen für die Intervalle $\langle a, b \rangle$, und berechnen Sie jeweils den Inhalt des Flächenstücks, das durch das Bild der Funktion, die x -Achse und die Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird!

a) $y = x^2$

$\langle 0; 2 \rangle; \langle 1; 5 \rangle; \langle -4; -2 \rangle$

b) $y = x + 2$

$\langle -2; 0 \rangle; \langle 1; 4 \rangle; \langle 0; \frac{4}{5} \rangle$

c) $y = -x^2 + 4$

$\langle -2; 2 \rangle; \langle -\frac{1}{2}; 0 \rangle; \langle 0; 1 \rangle$

d) $y = \frac{1}{x^2}$

$\langle -3; -1 \rangle; \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle; \langle 1; 4 \rangle$

e) $y = x$

$\langle 0; 6 \rangle; \langle 1; 5 \rangle; \langle 2; 3 \rangle$

f) $y = x^2 + 1$

$\langle -1; 1 \rangle; \langle 0; 1 \rangle; \langle -2; \frac{3}{2} \rangle$

g) $y = x^3$

$\langle 0; 1 \rangle; \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle; \langle 1; \sqrt{2} \rangle$

h) $y = -\frac{1}{x^2} + 1$

$\langle -3; -1 \rangle; \langle \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \rangle; \langle \sqrt{2}; 4 \rangle$

38. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von dem Bild der Funktion

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 12,$$

der x -Achse und den Parallelen zur y -Achse durch den lokalen Maximumpunkt bzw. durch den lokalen Minimumpunkt begrenzt wird!

39. Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von dem Bild der Funktion f und der x -Achse begrenzt wird!

a) $f(x) = -x^2 + 1$

d) $f(x) = -x(x - 4)$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2$

e) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

c) $f(x) = -x^2 + 3$

f) $f(x) = -(x^2 - \sqrt{2}x)$

40. Die Punkte $P_1(0; 0)$, $P_2(4; 0)$, $P_3(4; 4)$, $P_4(0; 4)$ sind die Eckpunkte eines Quadrats.

Das Bild der Funktion $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ zerlegt die Quadratfläche in vier Teilflächen. Berechnen Sie den Inhalt jeder der vier Teilflächen!

7. Bestimmen Sie den Parameter c , so daß die Fläche, die im angegebenen Intervall zwischen dem Bild der Funktion und der x -Achse liegt, den Flächeninhalt A hat!

a) $f(x) = -x^2 + c^2$

b) $f(x) = ax^3$

c) $f(x) = ax^2$

d) $f(x) = x(x - c)^2$

$\langle -c; c \rangle; A = 36$

$\langle 0; 2 \rangle; A = 1$

$\langle -b; b \rangle; A = b^2$

$\langle 0; c \rangle; A = \frac{4}{3}$

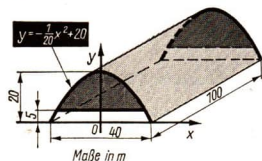
41. Das Stahlskelett einer Halle soll aus parabolisch gebogenen Trägern zusammengesetzt werden (Bild d 2). (Maße in m)

- a) Berechnen Sie für die im Bild angegebene Parabelgleichung den Inhalt der Querschnittsfläche!
 b) Berechnen Sie das Fassungsvermögen einer solchen Halle!
 c) Die Giebelflächen sollen zum Teil verglast werden (Maße siehe Bild). Berechnen Sie den Inhalt der zu verglasenden Flächen!

42. Ein Wasserstollen, dessen Querschnittsfläche ein Parabelsegment ist, hat eine Sohlenbreite von 4 m (Bild d 3).

- a) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche für die im Bild angegebene Gleichung!
 b) Der Stollen ist bis zur halben Scheitelhöhe mit Wasser gefüllt. Berechnen Sie den Inhalt der von Wasser durchflossenen Querschnittsfläche!
 c) Wieviel Kubikmeter Wasser fließen in jeder Minute durch den Stollen, wenn er bis zur halben Scheitelhöhe gefüllt ist und die Strömungsgeschwindigkeit $2,5 \text{ ms}^{-1}$ beträgt?

d 2



43. Ein Muldenkipper (Bild d 4) ist 1,20 m lang und 0,80 m tief. Die Querschnittsfläche ist ein Parabelsegment. Berechnen Sie das Fassungsvermögen des Kippers für die im Bild angegebene Gleichung!

44. Von den Bildern der Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n > 0$, $n \in \mathbb{G}$), der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ (siehe Tabelle) werden Flächenstücke begrenzt.

$\langle a; b \rangle$	$y = x^1$ $y = x^2 \dots$
$\langle 0; 1 \rangle$	
$\langle 1; 2 \rangle$	
$\langle 2; 3 \rangle$	
$\langle 3; 4 \rangle$	
$\langle 4; 5 \rangle$	

Berechnen Sie die Inhalte dieser Flächenstücke!

Vergleichen Sie die Inhalte der Flächenstücke

- a) für jeden Exponenten n ,
b) für jedes Intervall $\langle a; b \rangle$!

46. Beweisen Sie mit Hilfe der Integralrechnung folgende Formeln zur Berechnung von Flächeninhalten!

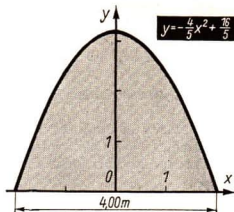
a) Rechtecksfläche: $A = a \cdot b$

(Wählen Sie zweckmäßigerweise das Rechteck mit den Eckpunkten $P_1(0; 0)$, $P_2(a; 0)$, $P_3(a; b)$, $P_4(0; b)$!)

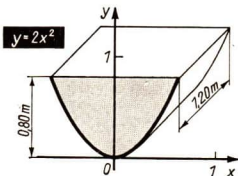
b) Fläche des rechtwinkligen Dreiecks: $A = \frac{1}{2} ab$
(a, b Katheten)

c) Parabelsegment: $A = \frac{2}{3} hs$ (Bild d 5)

d 3



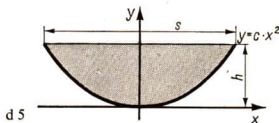
d 4



45. Berechnen Sie die Inhalte der in Aufgabe d 44 beschriebenen Flächenstücke auch für Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n < -1$, $n \in \mathbb{G}$) für die in der Tabelle angegebenen Intervalle!

$\langle a; b \rangle$	$y = x^{-2}$ $y = x^{-3}$
$\langle 1; 2 \rangle$	
$\langle 2; 3 \rangle$	
$\langle 3; 4 \rangle$	
$\langle 4; 5 \rangle$	

Warum wurden $n = -1$ und $a = 0$ ausgeschlossen?



d 5

47. a) Das Bild der Funktion $y = x^2$, die x -Achse und die Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

b) Zeigen Sie, daß man mit Hilfe der Formel $A = \frac{x_2 - x_1}{6} (y_1 + y_2 + 4y_m)$ (Simpsonsche Regel) den gleichen Flächeninhalt erhält! Hinweis: $y_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$

48. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das vom Bild der Funktion f , der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird!

Untersuchen Sie in jedem Fall, ob die Funktion im Integrationsintervall Nullstellen besitzt!

f) $f(x) = x^3$

$\langle -1; 1 \rangle; \langle -2; 3 \rangle$

f) $f(x) = x^2 - 1$

$\langle 0; 2 \rangle; \left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$

g) $f(x) = -x^2 + 2$

$\langle 1; 2 \rangle; \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

g) $f(x) = 8 - x^3$

$\langle 0; 3 \rangle; \langle \sqrt{3}; \sqrt{5} \rangle$

h) $f(x) = x^2 - x - 6$

$\langle 2; 4 \rangle; \langle -3; 5 \rangle$

h) $f(x) = \frac{5}{4} + 2x - x^2$

$\langle -1; 1 \rangle; \langle -3; 3 \rangle$

i) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

$\langle 1; 3 \rangle; \langle 0; 4 \rangle$

i) $f(x) = x^3 - 2x$

$\langle -2; 2 \rangle; \langle 3; 0 \rangle$

j) $f(x) = (x^2 - x - 6)(x - 1)$

$\langle 0; 4 \rangle; \left\langle -3; \frac{3}{2} \right\rangle$

49. Ermitteln Sie mit Hilfe einer Kurvendiskussion die Bilder der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3 - 3x$ im Intervall $\langle -3; 3 \rangle$

b) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ im Intervall $\langle -4; 4 \rangle$

Berechnen Sie jeweils den Inhalt des Flächenstücks, das durch das Bild der Funktion, die x -Achse und die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird!

50. Berechnen Sie die Inhalte der Flächenstücke A_1 und A_2 , die durch das Bild der Funktion f , die x -Achse und die Parallelen zur y -Achse durch die Intervallgrenzen begrenzt werden!

In welchem Verhältnis stehen A_1 und A_2 ?

a) $f(x) = 2$

$\langle 0; 1 \rangle; \langle 0; 5 \rangle$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x$

$\langle 0; 2 \rangle; \langle 2; 4 \rangle$

b) $f(x) = x + 1$

$\langle -3; x_1 \rangle; \langle x_1; 1 \rangle; f(x_1) = 0$

e) $f(x) = 2x^2$

$\langle 0; 1 \rangle; \langle 0; 3 \rangle$

c) $f(x) = 4x^3 - 4$

$\langle 0; x_0 \rangle; \langle x_0; 3 \rangle; f(x_0) = 0$

f) $f(x) = ax + b$

$\left\langle -\frac{b}{a} - 1; x_0 \right\rangle; \left\langle x_0; -\frac{b}{a} + 2 \right\rangle;$

$f(x_0) = 0; a \neq 0; a, b \in \mathbb{R}$

51. Durch die Nullstelle $x_N (a < x_N < b)$ wird der Definitionsbereich $\langle a; b \rangle$ der Funktion f in zwei Teilintervalle zerlegt. Man kann sich dadurch die Gesamtfläche A , die durch das Bild der Funktion, die x -Achse und die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, in zwei Teilflächen A_1 für $\langle a; x_N \rangle$ und A_2 für $\langle x_N; b \rangle$ zerlegt denken. Berechnen Sie a und b , wenn folgende Funktionen und Flächeninhalte vorgegeben sind!

a) $f(x) = x - 4$ $A_1 = A_2 = 8$

c) $f(x) = x^3$ $A_1 = A_2 = 64$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ $A_1 = A_2 = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1, x > 0,$ $A_1 = A_2 = \frac{1}{6}$

e) $f(x) = x - 2$ $A_1 = 2$ und $A_1 : A_2 = 1 : 4$

f) $f(x) = 4x$ $A_1 = 8$ und $A_1 : A_2 = 4 : 9$

52. Skizzieren Sie die Bilder der nachfolgend angegebenen Paare von Funktionen jeweils in einem Koordinatensystem!

Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von den beiden Bildern der Funktionen eingeschlossen wird!

- a) $y = x^2$ und $y = x^4$ e) $y = x^2$ und $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$
 b) $y = x^2 + 1$ und $y = -x^2 + 9$ f) $y = x^2 - 6x + 8$ und $y = 3x^2 - 18x + 24$
 c) $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}$ und $y = x^2 - \frac{7}{3}$ g) $y = -\frac{1}{9}x^2 + 4$ und $y = x^2 - 6$
 d) $y = x^3 + 7$ und h) $y = -x^2 + c$ und
 $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$ $y = x^2 - c$ ($c > 0$)

53. Skizzieren Sie die Bilder der folgenden Funktionen, und berechnen Sie die Inhalte der Flächenstücke, die von beiden Kurven eingeschlossen werden!

a) $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ und $y = x^2 - 4x$ b) $y = 5x$ und $y = x^3 - 2x^2 - 3x$

54. Berechnen Sie jeweils den Inhalt des Flächenstücks, das von der Parabel und der Geraden eingeschlossen wird!

- a) $y = x^2$ und $y = x$ f) $y = x^2$ und $y = 4$
 b) $y = -x^2$ und $y = -2$ g) $y = (x + 2)^2$ und $y = \frac{9}{4}$
 c) $y = x^2$ und $y = x + 2$ h) $y = -\frac{1}{2}x^2$ und $y = \frac{1}{2}x - 1$
 d) $y = (x - 2)^2 - 1$ und $y = 2x - 2$ i) $y = x^2$ und $y = nx$
 e) $y = x^3 - 8$ und $y = 4x - 8$

55. a) Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen

$y = 9 - x^2$ und $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$!

- b) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das durch die Bilder der Funktionen begrenzt wird!

56. a) Berechnen Sie die Inhalte der Flächenstücke, die von den Bildern der Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \in G, n > 1$) und der Geraden $y = x$ im ersten Quadranten eingeschlossen werden!

- b) Welchem Grenzwert streben die Flächeninhalte für $n \rightarrow \infty$ zu?
 57. a) Berechnen Sie die Inhalte der Flächenstücke, die von den Bildern der Potenzfunktionen $y = x^{n-1}$ und $y = x^n$ ($n \in G, n > 1$) im ersten Quadranten begrenzt werden!

- b) Welchem Grenzwert streben die Flächeninhalte für $n \rightarrow \infty$ zu?

58. Spiegeln Sie die Parabel $y = x^2$ an der Geraden $y = x$!
 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von der Parabel $y = x^2$ und ihrem Spiegelbild begrenzt wird!

59. Die Parabel $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$ berührt die Geraden $y = x$ und $y = -x$!

- a) Berechnen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte!
 b) Spiegeln Sie den Parabelbogen, der zwischen den Berührungspunkten liegt, an der Geraden $y = x$!

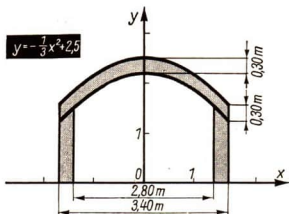


- c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das durch die Parabel $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$, ihr Spiegelbild und die Gerade $y = -x$ begrenzt wird!
(Nutzen Sie zur Flächeninhaltsberechnung die Symmetrieverhältnisse aus!)

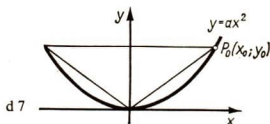
60. Ein Tonnengewölbe hat die im Bild d 6 angegebenen Maße. Die Gewölbedecke ist parabolisch gekrümmt.
- Wieviel Kubikmeter Mauerwerk sind je Meter Gewölbelänge (einschließlich der Seitenwände) erforderlich?
 - Wieviel Prozent des erforderlichen Mauerwerks entfallen auf die Gewölbedecke?
 - Wieviel Kubikmeter Luft sind je Meter Gewölbelänge enthalten?

8. Einem Parabelsegment ist ein Dreieck einbeschrieben (Bild d 7). Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte von Dreieck und Parabelsegment, und deuten Sie das Ergebnis in bezug auf die Größe des gewählten Parabelsegments!

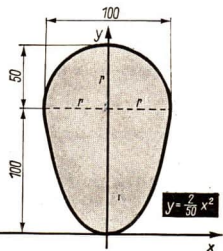
9. Ein Abwasserkanal hat die im Bild d 8 angegebenen Maße (in cm). Der obere Bogen des Beton-
gewölbes kann durch einen Halbkreis, der untere durch eine Parabel mit der Gleichung $y = \frac{2}{50}x^2$
angenähert dargestellt werden.
Berechnen Sie das Fassungsvermögen je Meter Kanallänge!



d 6



d 7



d 8

61. Die Arbeit ist das Wegintegral der Kraft ($W = \int_{s_1}^{s_2} F ds$), wenn F als Funktion von s gegeben ist sowie Kraft- und Wegrichtung übereinstimmen.
Berechnen Sie für die folgenden Kräfte und die zurückzulegenden Wege die aufzuwendende Arbeit! Zeichnen Sie ein F, s -Diagramm!

- a) Konstante Kraft: $F = c$

$$F = 5N; s = 3 \text{ m}$$

- b) Hangabtriebskraft: $F = G \sin \alpha$

$$\text{Gewicht: } G = 25 \text{ kp; } \alpha = 30^\circ$$

$$\text{Höhenunterschied: } h = 3 \text{ m}$$

62. Für die Zugkraft F einer Feder gilt: $F = ks$ (k – Federkonst.)

- Berechnen Sie die Arbeit, wenn die Feder um a Einheiten gedehnt werden soll!
- Berechnen Sie die Arbeit für $k = 0,2 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}$ und eine Federverlängerung von a auf b !

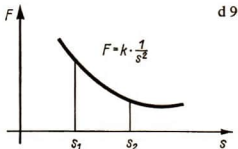
a	0	5	10	...
b	10	15	20	...

10. Im Bild d 9 ist eine Kraft F als Funktion des Weges s graphisch dargestellt. Berechnen Sie die Arbeit für die von s_1 nach s_2 wirkende Kraft!

11. Zwischen zwei ungleichnamigen Ladungen Q_1 und Q_2 , die sich im Abstand r voneinander befinden, wirkt die Kraft F :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Die Ladung Q_2 soll von r_1 nach r_2 ($r_1 < r_2$) gebracht werden. Berechnen Sie die zu verrichtende Arbeit!

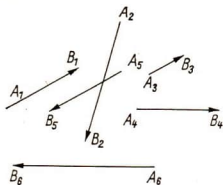


d 9

e. Vektorrechnung und analytische Geometrie

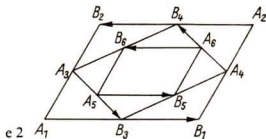
- Gegeben seien a) 2, b) 3 verschiedene Punkte einer Geraden a . Bestimmen Sie alle möglichen Verschiebungen für a , für die einer dieser Punkte Bildpunkt eines anderen der angegebenen Punkte ist!
- Gegeben seien drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte A, B, C . Wieviel verschiedene Verschiebungen a) der Geraden AB , b) der Ebene ABC , c) des Raumes können Sie angeben, für die einer dieser Punkte Bildpunkt eines anderen der angegebenen Punkte ist?
- Wieviel verschiedene Verschiebungen der Ebene eines a) regelmäßigen Fünfecks, b) Parallelogramms, c) Drachenvierecks können durch geordnete Paare von Eckpunkten dieser Figur angegeben werden?
- Wieviel verschiedene Verschiebungen des Raumes können durch geordnete Paare von Eckpunkten a) eines Tetraeders, b) eines Würfels angegeben werden?
- Stellen Sie in den folgenden Bildern Paare von Verschiebungen $\vec{A_1B_1}$ zusammen, bei denen man vermuten kann, daß sie gleichgerichtet sind, und andere, die entgegengesetzt gerichtet sind!

a) Bild e 1

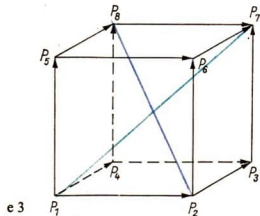


e 1

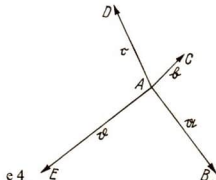
b) Bild e 2



e 2



e 3



e 4

6. Acht Punkte P_1, P_2, \dots, P_8 sind die Eckpunkte eines Würfels (Bild e 3), dessen Kanten in der angegebenen Weise gerichtet werden. Bestimmen Sie die Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_7}$ als Summe dreier, durch die gerichteten Kanten des Würfels charakterisierter Verschiebungen! Geben Sie alle Möglichkeiten an!
7. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch für $a = \overrightarrow{AB}$ und $b = \overrightarrow{AC}$ jeweils für $a + b = \overrightarrow{AD}$: $|a + b|$, $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle CAD$, wenn folgendes bekannt ist:
- a) $|a| = 4 \text{ cm}$, $|b| = 2 \text{ cm}$, $\sphericalangle CAB = 0^\circ$, c) $|a| = 3 \text{ cm}$, $|b| = 5 \text{ cm}$, $\sphericalangle CAB = 180^\circ$,
 b) $|a| = 2 \text{ cm}$, $|b| = 2 \text{ cm}$, $\sphericalangle CAB = 90^\circ$, d) $|a| = 1 \text{ cm}$, $|b| = 7 \text{ cm}$, $\sphericalangle CAB = 40^\circ$!
8. In einer Ebene seien vier Verschiebungen a, b, c und d durch Angabe ihrer Repräsentanten $[A; B]$, $[A; C]$, $[A; D]$ und $[A; E]$ gegeben (Bild e 4). Veranschaulichen Sie die Verschiebung $a + b + c + d = \overrightarrow{AF}$ in einer Zeichnung! Berechnen Sie $|a + b + c + d|$ und $\sphericalangle FAB$ sowie $\sphericalangle FAE$!
- a) $|a| = 1 \text{ cm}$; $|b| = 1 \text{ cm}$; b) $|a| = 1 \text{ cm}$; $|b| = 3 \text{ cm}$,
 $|c| = \sqrt{2} \text{ cm}$; $|d| = 2 \text{ cm}$; $|c| = 2\sqrt{2} \text{ cm}$; $|d| = 2 \text{ cm}$;
 $\sphericalangle BAC = 90^\circ$; $\sphericalangle CAD = 45^\circ$; $\sphericalangle BAC = 180^\circ$; $\sphericalangle CAD = 45^\circ$;
 $\sphericalangle DAE = 45^\circ$ $\sphericalangle DAE = 45^\circ$
9. Welcher notwendigen Bedingung müssen drei Verschiebungen genügen, die, hintereinander ausgeführt, den Punkt A auf sich selbst abbilden?
10. Drücken Sie für den Würfel in Aufgabe e 6 die Verschiebungen $\overrightarrow{P_2P_8}$, $\overrightarrow{P_4P_6}$ und $\overrightarrow{P_3P_5}$ durch Verschiebungen aus, die durch die gerichteten Kanten des Würfels charakterisiert werden!
11. Gegeben seien zwei Verschiebungen $a = \overrightarrow{AB}$ und $b = \overrightarrow{AC}$. Veranschaulichen Sie die Verschiebungen a) $a + b$, b) $a - b$, c) $b - a$, d) $-a - b$ durch im Punkte A beginnende gerichtete Strecken, die Sie konstruktiv ermitteln!
12. Zeichnen Sie fünf in einer Ebene gelegene gerichtete Strecken, die entsprechend die Verschiebungen a, b, c, d, e veranschaulichen sollen! Ermitteln Sie konstruktiv eine gerichtete Strecke, die die Verschiebung $a - b + c - d - e$ veranschaulicht!
13. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch für $a = \overrightarrow{AB}$ und $b = \overrightarrow{AC}$ jeweils $|a - b|$, $|b - a|$ sowie die entstehenden Winkel!
- a) $|a| = 5 \text{ cm}$; $|b| = 12 \text{ cm}$; $\sphericalangle CAB = 90^\circ$ c) $|a| = 3 \text{ cm}$; $|b| = 5 \text{ cm}$; $\sphericalangle CAB = 120^\circ$
 b) $|a| = 5 \text{ cm}$; $|b| = 8 \text{ cm}$; $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ d) $|a| = 4 \text{ cm}$; $|b| = 2 \text{ cm}$; $\sphericalangle CAB = 135^\circ$
14. Veranschaulichen Sie für die vier Verschiebungen a, b, c und d der Aufgabe e 8 a) und b) die Verschiebung $a - b + c - d$ durch die entsprechende gerichtete Strecke \overrightarrow{AG} ! Berechnen Sie $|a - b + c - d|$ und $\sphericalangle GAB$ sowie $\sphericalangle EAB$!
15. Für zwei Verschiebungen a und b sei bekannt:
- a) $|a| = 13 \text{ cm}$; $|b| = 19 \text{ cm}$;
 $|a + b| = 24 \text{ cm}$,
 b) $|a| = 2 \text{ cm}$; $|b| = 5 \text{ cm}$; $|a + b| = 7 \text{ cm}$.
 Berechnen Sie jeweils $|a - b|$!
16. Für zwei Verschiebungen a und b sei bekannt:
- a) $|a| = 11 \text{ cm}$; $|b| = 23 \text{ cm}$;
 $|a - b| = 30 \text{ cm}$,
 b) $|a| = 5 \text{ cm}$; $|b| = 4 \text{ cm}$; $|a - b| = 3 \text{ cm}$.
 Berechnen Sie jeweils $|a + b|$!
17. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!
- a) $a + [b - (a - c)] - [c + b - (a + c)] - [a + (c - a)]$
 b) $a - \{-[b - (a - a + c)] + [-a + (a - c + a)]\} - (a + b)$
 c) $[(x - a) - (y - b)] - [(x - y) - (a - b)] + [(x - b) - (c - a)] - [(y - b) - (c - a)]$
- Begründen Sie jeden Ihrer Schritte!

18. Eine Straßenleuchte wiege 5 kp. Sie hänge an zwei Drahtseilen, die mit der Waagerechten Winkel von 30° bilden (Bild e 5). Wie groß ist die Zugkraft in den Seilen?

20. Eine Lampe vom Gewicht 3 kp sei mit Hilfe zweier Schnüre AB und BC aufgehängt, deren erste horizontal verläuft (Bild e 7). Bestimmen Sie die in ihnen wirkenden Zugkräfte \tilde{F}_1 und \tilde{F}_2 , wenn die Länge der Strecken \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{DC} entsprechend 1,1 m, 1,8 m und 2,0 m beträgt!

22. Eine im Punkt P angreifende Kraft $\tilde{F} = 280$ kp wird in zwei Komponenten zerlegt, deren Wirkungslinien mit der Wirkungslinie von \tilde{F} Winkel von 35° bzw. 15° bilden. Berechnen Sie den Betrag der Komponenten! Überprüfen Sie das Ergebnis an einer Zeichnung!

24. Auf einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 12^\circ$ befinde sich eine Last $\mathcal{Q} = 120$ kp (Bild e 10). Bestimmen Sie konstruktiv

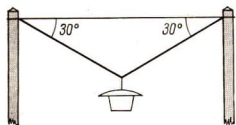
- die Kraft, die diese Last gerade am Hinabgleiten hindert,
- die Kraft, mit der diese Last auf die geneigte Ebene drückt!

19. Auf zwei senkrecht zueinander stehenden glatten, geneigten Ebenen AB und BC (Bild e 6) liege eine homogene Kugel vom Gewicht 6 kp. Bestimmen Sie den Druck der Kugel auf jede der Ebenen, wenn die Ebene BC mit der Horizontalebene einen Winkel von 60° bildet!

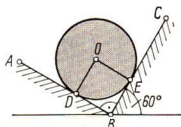
21. Eine Last vom Gewicht $\mathcal{P} = 100$ kp hänge am Kran ABC (Bild e 8). Bestimmen Sie die in den Stäben AB und BC wirkenden Kräfte, wenn die Länge der Strecken \overline{AB} , \overline{AC} und \overline{BC} entsprechend 3,8 m, 2,0 m und 2,6 m beträgt!

23. Am Ende eines horizontalen Tragarmes, der durch eine Zugstange gehalten wird, hänge eine Last $\mathcal{Q} = 580$ kp. Berechnen Sie, wie der Tragarm auf Druck und die Zugstange auf Zug beansprucht werden, wenn beide einen Winkel von 35° miteinander bilden (Bild e 9)!

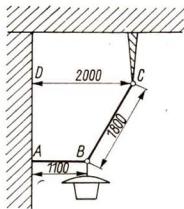
25. Im Panamakanal werden die Schiffe getreidelt, d. h., sie werden von einer am Ufer entlangfahrenden elektrischen Lokomotive gezogen. Dabei bilde die Zugrichtung mit der Fahrtrichtung einen Winkel von 18° (Bild e 11). Welcher Anteil der Lokomotivkraft dient zur Vorwärtsbewegung des Schiffes? Welcher Anteil muß durch einen Ausschlag des Steuerruders vernichtet werden?



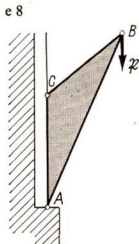
e 5



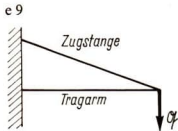
e 6



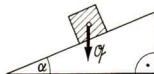
e 7



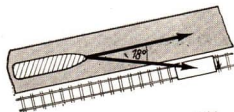
e 8



e 9



e 10



e 11

1. Aus der Beziehung $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ und den bekannten Ungleichungen, die die Seiten eines Dreiecks miteinander verknüpfen, folgt, daß der Betrag der Summe zweier Verschiebungen nicht größer als die Summe der Beträge der Summanden und nicht kleiner als deren Differenz ist:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, |a + b| \geq |a| - |b|.$$

- a) Unter welcher Bedingung gelten in diesen Ungleichungen die Gleichheitszeichen?
 b) Bestimmen Sie die Summe zweier gleichgerichteter und die Summe zweier entgegengesetzt gerichteter Verschiebungen!
2. Bestimmen Sie die resultierende Beschleunigung \vec{b} , die eine Masse m erfährt, wenn auf sie zwei Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 gleichzeitig wirken, deren Wirkungslinien einen Winkel von 65° miteinander bilden und die unabhängig voneinander der Masse die Beschleunigung \vec{b}_1 mit $|\vec{b}_1| = 3,6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ und \vec{b}_2 mit $|\vec{b}_2| = 4,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ erteilen!
3. Welcher Bedingung müssen zwei Verschiebungen a und b genügen, damit für sie die Beziehung
 a) $|a + b| = |a - b|$, b) $|a + b| > |a - b|$, c) $|a + b| < |a - b|$ gilt?
4. $a = \vec{AB}$ und $b = \vec{AC}$ seien zwei beliebige Verschiebungen. Welcher Bedingung müssen sie genügen, damit für die Verschiebung $a + b = \vec{AD}$ die Beziehung $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD$ gilt?
5. Beweisen Sie, daß für beliebige Verschiebungen a und b die Ungleichung $|a - b| \leq |a| + |b|$ gilt! Unter welcher Bedingung gilt in ihr das Gleichheitszeichen?

26. Geben Sie den folgenden Ausdrücken, in denen a , b und c Verschiebungen sind, eine einfachere Gestalt. Welche Gesetze wenden Sie bei der Umformung an?

a) $a + 3b - (2a - b) + 4(a - b)$

b) $b + 4 \left[-(b + a) - \frac{1}{2}(2a - b) \right] - a + c$

27. Es seien a und b zwei Verschiebungen und \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle . Zeigen Sie konstruktiv und rechnerisch, daß $(a + b) + (a - b) = 2a$ ist!

28. Konstruieren Sie zu einer durch einen Repräsentanten gegebenen Verschiebung a (mit Hilfe des Strahlensatzes) die folgenden Vielfachen!

a) $1,5a$

b) $-0,3a$

c) $-2,5a$

d) $1,2a$

29. Zwei nicht zueinander parallele Verschiebungen a und b sowie die Verschiebung λa , $\lambda \neq 0$, seien durch die Angabe ihrer Repräsentanten $[A; B]$, $[A; C]$ und $[A; D]$ gegeben. Bestimmen Sie konstruktiv den Repräsentanten $[A; X]$ der Verschiebung a) λb und b) $\frac{1}{\lambda} b$!

30. Es seien zwei Verschiebungen a und b durch Angabe ihrer Repräsentanten $[A; B]$ bzw. $[A; C]$ gegeben, und es sei $|a| = 1 \text{ cm}$, $|b| = 2 \text{ cm}$, $\sphericalangle CAB = 30^\circ$. Veranschaulichen Sie die folgenden Verschiebungen durch die jeweils entsprechende gerichtete Strecke \vec{AD} ! Berechnen Sie $|\vec{AD}|$ und $\sphericalangle DAB$ sowie $\sphericalangle DAC$!

a) $3a - 2b$

b) $-1,5a - b$

c) $2a + \frac{1}{2}b$

d) $-a + 2b$

31. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit für zwei Verschiebungen a und b gilt $a + b \parallel a - b$?

32. Beweisen Sie, daß A , B und C Punkte einer Geraden sind, wenn

a) $\vec{OC} = 3\vec{OA} - 2\vec{OB}$,

b) $\vec{OC} = \frac{3}{5}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB}$ ist!

Wievievielmal so lang wie \vec{AC} ist jeweils die Strecke \vec{BC} ?

33. Liegen die Punkte A , B und C auf einer Geraden, wenn a und b zwei beliebig gegebene, zueinander nicht parallele Verschiebungen sind und folgendes gilt?

a) $\vec{AB} = a + 5b$; $\vec{BC} = -2a + 8b$

c) $\vec{AB} = -3a + 2b$; $\vec{OB} = -a + \frac{3}{2}b$;

$\vec{OC} = -4a + \frac{7}{2}b$

b) $\vec{OA} = a + 2b$; $\vec{OB} = -4a - b$;
 $\vec{OC} = 5a + 5b$

d) $\vec{AC} = -2a - b$; $\vec{OC} = -2a - b$;
 $\vec{OB} = 3a + 2b$

34. Gegeben sei ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$. Beweisen Sie, daß $\vec{AC} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$ ist!

35. Gegeben seien eine Verschiebung a , ein Punkt O und nachfolgend ein Intervall aus dem Bereich der reellen Zahlen. Gesucht ist die Menge der Punkte P , für die $\vec{OP} = \lambda a$ ist.

a) $0 \leq \lambda \leq 2$ b) $|\lambda| \leq 1$ c) $|\lambda| = 4$ d) $\lambda \geq 0$ e) $\lambda < 2$ f) $2 < |\lambda| < 3$

36. Gegeben seien zwei Verschiebungen a und b (es gilt $a \nparallel b$), ein Punkt O sowie nachfolgend je ein Intervall reeller Zahlen λ und μ . Gesucht ist die Menge der Punkte P , für die $\vec{OP} = \lambda a + \mu b$ ist.

a) $\lambda > 0$; μ beliebig d) $0 < \lambda < 1$; μ beliebig
b) $\lambda > 0$; $\mu > 0$ e) $|\lambda| \leq 1$; $\mu > 2$
c) $\lambda < 0$; $\mu > 1$

37. Beweisen Sie mit Hilfe von Verschiebungen den Satz: Wenn sich in einem Viereck $ABCD$ die Diagonalen halbieren, dann ist es ein Parallelogramm!

38. Beweisen Sie mit Hilfe von Verschiebungen den Satz: Im Trapez ist die Strecke, welche die Mittelpunkte der beiden nichtparallelen Seiten miteinander verbindet, zu den parallelen Seiten parallel und halb so groß wie deren Summe!

39. Beweisen Sie mit Hilfe von Verschiebungen: Die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen (nicht unbedingt ebenen!) Vierecks sind die Eckpunkte eines Parallelogramms!

40. Beweisen Sie mit Hilfe von Verschiebungen den Satz: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks teilen einander im Verhältnis 1 : 2!

41. Ein Junge schwimmt in ruhendem Wasser mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Der 100 m breite Fluß, den der Junge überqueren will, hat die Strömungsgeschwindigkeit $v_2 = 0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Berechnen Sie die Größe und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit, wenn der Junge

- a) genau senkrecht zur Stromrichtung schwimmt,
b) unter einem Winkel von 45° mit dem Strom,
c) unter einem Winkel von 60° gegen den Strom!
Wann und wo erreicht er das jenseitige Ufer?

- d) Unter welchem Winkel gegen die Strömungsrichtung müßte er schwimmen, um auf dem kürzesten Wege quer über den Fluß zu schwimmen? Entspricht dem kürzesten Weg auch die kürzeste Überquerungszeit?

42. Zeigen Sie, daß für ein gegebenes n in der Menge aller Polynome höchstens n -ten Grades mit reellen Koeffizienten die Gesetze (1°) bis (7°) gelten, wenn man unter der Summe zweier Polynome $a = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $b = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ das Polynom

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

und unter dem Produkt λa einer reellen Zahl λ mit dem Polynom a das Polynom

$$\lambda a = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \dots + \lambda a_nx^n \text{ versteht!}$$

43. Zeigen Sie, daß die Menge der reellen Zahlen bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation ein Vektorraum ist!



44. Gestützt auf die Gesetze (1°) bis (3°) kann man beweisen:

Jeder Vektorraum enthält genau einen Nullvektor mit der Eigenschaft, daß $a + 0 = 0 + a = a$ (für jeden Vektor a dieses Raumes).

Nennen Sie den Nullvektor des Vektorraumes

- a) der Zahlenpaare, b) der n -Tupel, c) der Polynome höchstens n -ten Grades, d) der reellen Zahlen!

45. Gestützt auf die Gesetze (1°) bis (3°) kann man beweisen:

In jedem Vektorraum gibt es zu jedem Vektor a dieses Raumes genau einen entgegengesetzten Vektor $-a$, so, daß $a + (-a) = 0$.

Geben Sie im Vektorraum der Zahlenpaare zu den folgenden Zahlenpaaren jeweils den entgegengesetzten Vektor an!

- a) $[5; 0]$ b) $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$ c) $\left[\frac{1}{2}; -\frac{23}{7}\right]$ d) $[0; 3]$

46. Geben Sie in den entsprechenden Vektorräumen zu den folgenden Vektoren jeweils die entgegengesetzten Vektoren an!

- n -Tupel: a) $[1; 0; 1; 0; \dots; 1; 0]$, n gerade b) $\left[1; \frac{1}{2}; \dots; \frac{1}{n}\right]$

- Polynome höchstens n -ten Grades: c) $2x + 7x^5$ d) $\sqrt{3} - \sqrt{7}x^3$ e) $x^2 - 1$ f) -9

- Reelle Zahlen: g) π h) 10^{-8} i) $-\sqrt{11}$

6. Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, daß in jedem Vektorraum die folgenden Beziehungen gelten!

a) $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a + \dots + \lambda_n a$

b) $\lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n$

47. Veranschaulichen Sie a) fünf, b) drei, c) zwei Vektoren, deren Summe gleich 0 ist!

49. Stellen Sie die Vektoren aus Bild e 12 als Linearkombinationen der Vektoren π_1 und π_2 dar!

51. Veranschaulichen Sie nach Wahl der Vektoren a_1, a_2, a_3, a_4 die folgenden Linearkombinationen!

a) $b_1 = 2a_1 - a_2 - 3a_3 + 11a_4$

b) $b_2 = -a_1 + 5a_2 - 3a_3 - 10a_4$

c) $b_3 = a_4 - a_1 + 5a_2$

48. Stellen Sie einen beliebig gewählten Vektor als Linearkombination von a) einem, b) zwei, c) vier Vektoren dar!

50. Stellen Sie die Vektoren aus Bild e 12 als Linearkombination der Vektoren e_1 und e_2 dar!

52. Veranschaulichen Sie nach Wahl der Vektoren a_1, a_2, a_3, a_4 die folgenden Linearkombinationen!

a) $b_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4$

b) $b_2 = 4a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_4$

c) $b_3 = 2a_3 + a_1 - \frac{2}{3}a_2$

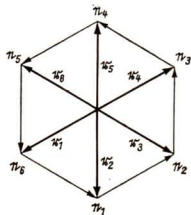
53. Kann man durch geeignete Wahl der Vektoren a_1, a_2, a_3, a_4

a) in den Aufgaben e 51 a bis c,

b) in den Aufgaben e 52 a bis c erreichen, daß

$\alpha) b_1 = 0, \quad \beta) b_2 = 0,$

$\gamma) b_1 = 0 \text{ und } b_2 = 0$ ist?



e 12

Im folgenden sei $\{a_1, a_2\}$ stets eine Basis des Raumes der Vektoren der Ebene.

54. Veranschaulichen Sie je zwei Vektoren, für deren Koordinaten λ_1 und λ_2 bezüglich einer frei zu wählenden Basis $\{a_1, a_2\}$ folgendes gilt!

- a) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ c) $\lambda_1 < 0$ e) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ g) $\lambda_2 < 0$
 b) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ d) $\lambda_2 = 0$ f) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ h) $\lambda_1 = 0$

55. Veranschaulichen Sie die Vektoren mit den Koordinaten

- a) $b(2; 5)$, b) $b(-4; 1)$,
 c) $b(0; -3)$

bezüglich einer frei gewählten Basis $\{a_1, a_2\}$!

56. Veranschaulichen Sie die Vektoren mit den Koordinaten

- a) $b(7; 1)$, b) $b\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$,
 c) $b(-2; 0)$

bezüglich einer frei gewählten Basis $\{a_1, a_2\}$!

57. Bestimmen Sie die Komponenten und Koordinaten der folgenden Vektoren!

- a) $b = 5a_1 + 3a_2$
 b) $b = -(a_1 + 2a_2)$
 c) $b = a_1$
 d) $b = 7(a_1 - a_2) + 3a_2 - 2a_1$

58. Bestimmen Sie die Komponenten und Koordinaten der folgenden Vektoren!

- a) $b = 2a_1 - 5a_2$
 b) $b = 3\left(a_1 - \frac{1}{3}a_2\right)$
 c) $b = a_1 - (a_2 + a_1)$
 d) $b = 0$

59. Gegeben seien die Vektoren $a = 2a_1 + 5a_2$, $b = -a_1 + a_2$, $c = 2a_1$. Bestimmen Sie die Koordinaten und Komponenten der folgenden Vektoren bezüglich $\{a_1, a_2\}$!

- a) $\xi = 2a - 4b + c$ c) $\xi = a - 5b - c$ e) $\xi = 7a - 6b - 5c$
 b) $\xi = -a + b + c$ d) $\xi = a + c$ f) $\xi = 3(2b - c)$

60. Definieren Sie den Begriff „linear abhängig“ für zwei Vektoren, ohne die Worte „linear unabhängig“ dabei zu verwenden!

61. Beweisen Sie, daß die Vektoren b_1 und b_2 im Folgenden linear unabhängig sind!

- a) $b_1 = a_1 + a_2$; $b_2 = a_1 - a_2$ c) $b_1 = -a_1 + a_2$; $b_2 = 5a_1$
 b) $b_1 = 3a_1 - a_2$; $b_2 = a_2$ d) $b_1 = 2a_1 + a_2$; $b_2 = a_1 + 2a_2$

62. Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $\xi_1 = 7a_1 - 3a_2$, $\xi_2 = -2a_1 - a_2$, $\xi_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ bezüglich der Basen $\{b_1, b_2\}$

- a) aus Aufgabe e 61a und e 61b, b) aus Aufgabe e 61c und e 61d!

63. Bestimmen Sie zwei reelle Zahlen x und y so, daß für die Vektoren a , b und c aus Aufgabe e 59 die folgende Gleichung gilt!

- a) $2(xa + yb + c) = 3xa - yc$ b) $a + xb = 2b + ya - \frac{x}{2}c$

64. Für welchen Wert von α sind die Vektoren $a = \alpha a_1 - 6a_2$, $b = -2a_1 + a_2$ parallel zueinander?

65. Bezüglich der Basis $\{a_1, a_2\}$ haben die Vektoren a und b die Koordinaten $a(-6; 3)$ und $b(2; -1)$. Welche Beziehung besteht zwischen a und b ?

66. Gegeben seien die Vektoren $b_1 = 4a_1 - 2a_2$, $b_2 = -12a_1 + 6a_2$, $b_3 = 2(a_1 + a_2)$, $b_4 = -6a_1$, $b_5 = 0,5a_2$, $b_6 = -a_1 - a_2$, $b_7 = 0$. Stellen Sie durch Vergleichen der Koordinaten von b_1, \dots, b_7 fest, welche Beziehungen zwischen den folgenden Vektoren bestehen!

- a) b_1, b_3, b_4 c) b_2, b_4, b_5 e) b_3, b_6 g) b_1, b_7
 b) b_1, b_2 d) b_4, b_5 f) b_1, b_6, b_5 h) b_3, b_4, b_5, b_7



67. Welche Paare von Vektoren \vec{b}_i und \vec{b}_j ($i, j = 1, \dots, 7$) der Aufgabe e 66 bilden eine Basis des Raumes der Vektoren der Ebene?

Im Folgenden nehmen wir an, daß in der betrachteten Ebene ein *kartesisches* Koordinatensystem $\{0; i, j\}$ gegeben sei.

68. Bestimmen Sie die Komponenten des Ortsvektors \vec{OP} des Punktes $P(x; y)$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
x	2	-1	5	0	7	1	-2,5	2	0
y	4	-1	-3	π	1	-1	-21	0	0

69. Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes P , für den $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB}$ ist, wenn folgendes gilt! Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit einer zeichnerisch gewonnenen Lösung!

a) $\vec{OA} = i + j$; $\vec{OB} = i - j$

d) $\vec{OA} = -i - j$; $\vec{OB} = i + j$

b) $\vec{OA} = 2i - j$; $\vec{OB} = i + 2j$

e) $\vec{OA} = -3i + 4j$; $\vec{OB} = -2i - j$

c) $\vec{OA} = \sqrt{2}i$; $\vec{OB} = -\sqrt{2}j$

f) $\vec{OA} = \frac{1}{\sqrt{7}}i$; $\vec{OB} = -\frac{1}{\sqrt{7}}j$

70. Welche Koordinaten hat der Vektor \vec{AB} , wenn \vec{OA} und \vec{OB} durch die Angaben

a) aus Aufgabe e 69 a bis c,

b) aus Aufgabe e 69 d bis f gegeben ist?

71. Die Koordinaten zweier Punkte A und B sind gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten von \vec{AB} , und veranschaulichen Sie die Ergebnisse in einer Zeichnung!

a) $A(4; 1)$ und $B(6; 4)$

b) $A(-1; -2)$ und $B(1; -1)$

c) $A(\sqrt{2}; -1)$ und $B(-2; \sqrt{2})$

72. Die Koordinaten zweier Punkte A und B sind gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten von \vec{BA} , und veranschaulichen Sie die Ergebnisse in einer Zeichnung!

a) $A(4; 1)$ und $B(6; 4)$

b) $A(-1; -2)$ und $B(1; -1)$

c) $A(\sqrt{2}; -1)$ und $B(-2; \sqrt{2})$

73. Gegeben seien ein Punkt A und ein Vektor a . Berechnen Sie für

a) $A(1; 4)$, $a(4; -2)$,

b) $A(-1; -2)$, $a(-2; 5)$,

c) $A(0; 7)$, $a(-4; -8)$

die Koordinaten des durch die Beziehung $\vec{AB} = a$ bestimmten Punktes B !

74. Gegeben seien ein Punkt $A(4; -1)$ und die Vektoren $a(4; 3)$, $b(-10; -4)$, $c(-3; 1)$. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P , für den gilt

a) $\vec{AP} = 2a + b - c$,

b) $\vec{AP} = -a + b - 5c$!

75. Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren \vec{AB} und $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB}$ für die Punkte $A(x_A; y_A)$ und $B(x_B; y_B)$! Welche Koordinaten hat der Punkt Q , für den $\vec{OQ} = \vec{AB}$ ist?

76. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der durch die Punkte

a) $A(1; 3)$, $B(-2; 6)$,

b) $A(3; 0)$, $B(0; 3)$,

c) $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$

bestimmten Strecke!

77. Die Strecke \vec{AB} soll über B hinaus verdoppelt werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Endpunktes C der verlängerten Strecke für

a) $A(2; 1)$, $B(-1; 1)$,

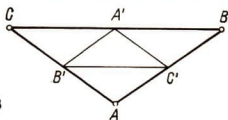
b) $A(-3; 1)$, $B(0; 0)$,

c) $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$!

78. Drei Eckpunkte des Parallelogramms $ABCD$ befinden sich in den Punkten $A(2; 4)$, $B(-7; 1)$, $C(-4; -3)$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D ! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} berechnen!
79. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes des durch die Punkte
- a) $A(1; 2)$, $B(9; 0)$, $C(5; 4)$, b) $A(2,5; 1,5)$, $B(-1,5; -0,5)$, $C(-5,5; 3,5)$,
 c) $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$
 bestimmten Dreiecks!
80. Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Koordinatenursprung und dem folgenden Punkt! Benutzen Sie dabei kartesische Koordinaten!
- a) $A(1; \sqrt{3})$ b) $A(-5; 2)$ c) $A(-3; -4)$ d) $A(-2; \sqrt{5})$
81. Berechnen Sie jeweils die Länge der Strecke \overline{AB} !
- a) $A(1; 1)$, $B(4; 2)$ c) $A(1; -2)$, $B(-6; -1)$
 b) $A(-2; 7)$, $B(0; -5)$ d) $A(a + b; a - b)$, $B(a - b; a + b)$
82. Berechnen Sie die Seitenlängen der Dreiecke, deren Eckpunkte folgende Ortsvektoren haben!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
\vec{OA}	0	$-i - j$	$9i$	$11i + 46j$	$ai + bj$	$(a + b)(i + j)$
\vec{OB}	$25i$	$3i - 5j$	$-5i$	$21i + 16j$	$ai - bj$	$-(a + b)(i + j)$
\vec{OC}	$33j$	$3i + 7j$	$12j$	$-9i + 21j$	$-bj$	$(a + b)(i - j)$

83. Gegeben seien der Punkt $A(5; 1)$ sowie die Vektoren $\vec{a}(-3; -4)$ und $\vec{b}(-2; 1)$.
- a) Bestimmen Sie drei Punkte B, C, D so, daß $\vec{a} = \vec{AB}$ und $\vec{b} = \vec{AD}$ ist und die Punkte A, B, C, D Eckpunkte eines Parallelogramms sind!
- b) Berechnen Sie die Längen der Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} !
84. Berechnen Sie einen Punkt $P(x; y)$ mit $x = 0$, der von den Punkten $A(3; 8)$ und $B(7; 7)$ gleich weit entfernt ist!
85. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P(x; y)$, der von den Punkten $A(8; 2)$, $B(-7; 5)$ und $C(4; 8)$ gleich weit entfernt ist!
86. Gegeben seien die Mittelpunkte $A'(x_{A'}; y_{A'})$, $B'(x_{B'}; y_{B'})$ und $C'(x_{C'}; y_{C'})$ der Seiten eines Dreiecks ABC (Bild e 13). Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C !



e 13

7. Von einem Dreieck ABC sind die Eckpunkte $A(2,5; -0,5)$, $B(-1; 4,5)$ und sein Schwerpunkt $S(-0,5; 1)$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C und die Längen der Dreiecksseiten!
8. Gegeben seien drei Punkte $A(-1; 2)$, $B(0; 3)$, $C(1; 2)$. Berechnen Sie einen Punkt D so, daß $\vec{DC} \parallel \vec{AB}$ und $|\vec{DC}| = \sqrt{5}$ ist! Wieviele Lösungen hat die Aufgabe?

87. Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle(i, \vec{OP})$ für die folgenden Punkte!

- a) $P(-1; -1)$ c) $P(27; 4)$ e) $P\left(-2; -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ g) $P\left(\frac{7}{8}; 3\right)$
 b) $P\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ d) $P(-\sqrt{3}; 0)$ f) $P(0; -5)$ h) $P(4; -4)$

88. Für einen Punkt sei die y -Koordinate und der Winkel $\sphericalangle(i, \overrightarrow{OP})$ bekannt. Bestimmen Sie jeweils die x -Koordinate von P und seinen Abstand vom Koordinatenursprung!

- a) $y = 436,5$; $\sphericalangle(i, \overrightarrow{OP}) = 57,62^\circ$ c) $y = 236,3$; $\sphericalangle(i, \overrightarrow{OP}) = 110,72^\circ$
 b) $y = -48,21$; $\sphericalangle(i, \overrightarrow{OP}) = -52,72^\circ$ d) $y = -838,1$; $\sphericalangle(i, \overrightarrow{OP}) = -121,54^\circ$

89. Bestimmen Sie nach den folgenden Angaben die Koordinaten des Vektors a !

- a) $|a| = 7\sqrt{2}$; $\sphericalangle(i, a) = 135^\circ$ d) $|a| = 6\sqrt{3}$; $\sphericalangle(i, a) = -30^\circ$
 b) $a = -3i + yj$; $|a| = 6$ e) $|a| = 8$; $a = xi - 7j$
 c) $\sphericalangle(i, a) = 225^\circ$; $a = xi - \frac{25}{2}j$ f) $\sphericalangle(i, a) = -210^\circ$; $a = -3\sqrt{3}i + yj$

90. Gegeben sind die Koordinaten zweier Punkte A und B . Berechnen Sie jeweils die Winkel $\sphericalangle(i, \overrightarrow{AB})$ und $\sphericalangle(i, \overrightarrow{BA})$!

- a) $A(3; 1)$, $B(3 + \sqrt{2}; 4)$ c) $A(4; -1)$, $B(-1; -1)$
 b) $A(1; 1)$, $B(-\sqrt{3}; 0)$ d) $A(0; -5)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

91. Gegeben sind die Koordinaten dreier Punkte A , B und C . Berechnen Sie jeweils die Längen der Seiten und die Größe der Innenwinkel des Dreiecks ABC !

- a) $A(-2; -2)$, $B(5; 2)$, $C(1; 3)$ c) $A(-5; 0)$, $B(8; 3)$, $C(5; 11)$
 b) $A(2; 1)$, $B(-5; 3)$, $C(1; -4)$ d) $A(5; 0)$, $B(-2,5; 1)$, $C\left(-2; -\frac{5}{2}\right)$

9. Gegeben seien vier Punkte $A(-2; 3)$, $B(2; -1)$, $C(6; -1)$, $D(2; 3)$.

- a) Was für ein spezielles Viereck bestimmen diese vier Punkte?
 b) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes dieser Figur und den Winkel $\sphericalangle DAB$!

92. Ein Punkt P hat die nachstehenden geodätischen Koordinaten.

In welcher Richtung vom Ursprung liegt der Punkt?
 Welchen Abstand hat der Punkt vom Ursprung?

- a) $x_1 = 2153,7$ m; $y_1 = 3288,3$ m b) $x_2 = 537$ m; $y_2 = 2,3$ km
 c) $x_3 = 4,5$ km; $y_3 = 2355$ m

93. Zwei Punkte P_1 und P_2 haben die geodätischen Koordinaten $x_1 = 1700$ m; $y_1 = 2500$ m bzw. $x_2 = 350$ m; $y_2 = 5200$ m.

- a) Welcher Punkt liegt nördlicher bzw. östlicher?
 b) Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden Punkten?
 c) In welcher Richtung liegt der Punkt P_2 von P_1 aus?

94. Von einem Punkt P_1 mit den geodätischen Koordinaten $x_1 = 1380$ m und $y_1 = 1800$ m liegt ein Punkt P_2 in einer Entfernung von 1,5 km. Welche Koordinaten hat P_2 , wenn $\sphericalangle(i, \overrightarrow{P_1P_2}) = 50^\circ$ beträgt?

95. Bei der Landesvermessung wird bei kleineren Flächen, bei denen die Eckpunkte der zu vermessenden Fläche markiert sind, die durch die Punkte O und E mit $\overrightarrow{OE} = i$ bestimmte Gerade so festgelegt, daß sie die Fläche entweder in der Mitte oder diagonal durchschneidet.

- a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des im Bild e 14 wiedergegebenen Grundstücks!
 b) Berechnen Sie den Umfang der Fläche!

96. Zwei Objekte P_1 und P_2 haben auf einer topographischen Karte die Koordinaten $P_1: x_1 = 24500; y_1 = 17300$ und $P_2: x_2 = 32900; y_2 = 19200$.

Wie weit sind die Objekte voneinander entfernt?

In welcher Richtung liegt P_2 von P_1 aus?

97. Im Manöver befinde sich die Stellung einer Einheit der Nationalen Volksarmee im Punkt A (10500; 18300), eine feindliche Stellung im Punkt B (29500; 19900).

Wie weit ist die feindliche Stellung entfernt?

In welcher Richtung liegt sie?

98. Ein Melder der Nationalen Volksarmee soll eine Meldung vom Ort A (9300; 1100) nach dem Ort B (12000; 2600) bringen.

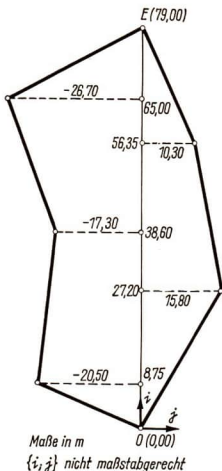
Wie weit (Luftlinie) sind die Orte voneinander entfernt?

In welche Richtung muß der Melder laufen?

99. Ein Geschütz steht am Ort A (12500; 13500). Das Ziel befindet sich am Ort B (25300; 18200).

Welche Zielrichtung muß angegeben werden?

Welche Entfernung liegt vor?



e 14

Maße in m

$\{i, j\}$ nicht maßstabgerecht

100. Eine Einheit der Nationalen Volksarmee macht einen Geländemarsch, Ausgangspunkt ist der Ort A (2500; 3600). Die Einheit marschiert 2,5 km in Richtung Nordost und anschließend 10 km in Richtung Nord.
Welche Koordinaten hat der Ort, den sie erreicht?
101. Bestimmen Sie mit Hilfe einer topographischen Karte die Koordinaten einiger Geländeobjekte! Messen Sie die Entfernung zweier Objekte!
Prüfen Sie den gemessenen Wert durch eine Rechnung nach!
Tragen Sie Punkte, von denen die Koordinaten bekannt sind, in eine topographische Karte ein!
102. Der Punkt P habe bezüglich des Koordinatensystems $\{O; i, j\}$ die Koordinaten $x = 4, y = 3$. Welche Koordinaten hat P bezüglich des Koordinatensystems $\{O'; i', j'\}$, wenn O', i' und j' bezüglich $\{O; i, j\}$ bzw. $\{i, j\}$ die folgenden Koordinaten haben!
Veranschaulichen Sie die gegenseitige Lage der Koordinatensysteme $\{O; i, j\}$ und $\{O'; i', j'\}$ in einer Zeichnung!
- a) $O'(0; 3), i'(1; 0), j'(0; 1)$
- b) $O'(7; -\frac{1}{2}), i'(-1; 0), j'(0; -1)$
- c) $O'(4; 3), i'(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}), j'(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$
- d) $O'(3\frac{1}{2}; 0), i'(-\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\sqrt{6}), j'(\frac{2}{5}\sqrt{6}; -\frac{1}{5})$
- e) $O'(-5; 4), i'(1; 0), j'(0; 1)$
- f) $O'(3; -2), i'(0; -1), j'(1; 0)$
- g) $O'(2; 0), i'(0; 1), j'(-1; 0)$
- h) $O'(10; 7), i'(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}), j'(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$
103. Es sei ein Punkt P durch seine Koordinaten x und y bezüglich des Koordinatensystems $\{O; i, j\}$ gegeben. Berechnen Sie seine Koordinaten x' und y' bezüglich des im folgenden gegebenen Koordinatensystems!
Veranschaulichen Sie die gegenseitige Lage der Koordinatensysteme $\{O; i, j\}$ und $\{O'; i', j'\}$ in einer Zeichnung!

- a) $\{O; i, -j\}$, b) $\{O; -i, -j\}$ d) $\{O; -i, i\}$ e) $\left\{O; \frac{i+j}{\sqrt{2}}, \frac{-i+j}{\sqrt{2}}\right\}$
 c) $\left\{O; \frac{-i+\sqrt{15}j}{4}, \frac{-\sqrt{15}i-j}{4}\right\}$ f) $\left\{O; \frac{2i+3\sqrt{5}j}{7}, \frac{-3\sqrt{5}i+2j}{7}\right\}$

104. Geben Sie das Koordinatensystem $\{O'; i', j'\}$ an, das aus dem Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ durch Translation bzw. Drehung bzw. beides hervorgegangen ist und für das folgendes gilt:

- a) $\vec{OO'} = 2i + j$, $\alpha = 0^\circ$, c) $\vec{OO'} = 0$, $\alpha = 180^\circ$, e) $\vec{OO'} = -i + j$, $\alpha = -45^\circ$,
 b) $\vec{OO'} = -i$, $\alpha = 0^\circ$, d) $\vec{OO'} = 0$, $\alpha = -90^\circ$, f) $\vec{OO'} = 3i + 5j$, $\alpha = 225^\circ$!

105. Lesen Sie aus den nachfolgenden Angaben ab, durch was für eine Transformation das Koordinatensystem $\{O; i, j\}$ in das Koordinatensystem $\{O'; i', j'\}$ übergeführt werden kann! Die Koordinaten von $\{O'; i', j'\}$ beziehen sich auf $\{O; i, j\}$.

- a) $O'(0; 1)$, $i'(1; 0)$, $j'(0; 1)$ d) $O'(0; 0)$; $i'\left(\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{35}}{6}\right)$, $j'\left(-\frac{\sqrt{35}}{6}; \frac{1}{6}\right)$
 b) $O'(0; 0)$; $i'\left(\frac{1}{\sqrt{7}}; -\frac{6}{\sqrt{7}}\right)$, $j'\left(\sqrt{\frac{6}{7}}; -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ e) $O'(-1; 0)$, $i'(1; 0)$, $j'(0; 1)$
 c) $O'(-5; -4)$; $i'\left(\frac{1}{5}; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$, $j'\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}; \frac{1}{5}\right)$ f) $O'(0; 23)$; $i'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $j'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

106. Gegeben seien die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks durch ihre Koordinaten $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$, $C(-3; -5)$ bezüglich des Koordinatensystems $\{O; i, j\}$. Berechnen Sie die Koordinaten von A, B, C bezüglich des Koordinatensystems $\{O'; i', j'\}$ mit

- a) $O'(6; 2)$; $i'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $j'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, b) $O'(-1; 0)$; $i'\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $j'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$
 und die Koordinaten der Vektoren \vec{AB} , \vec{AC} und \vec{BC} bezüglich $\{O; i, j\}$ und $\{O'; i', j'\}$!

10. Die Punkte $A(-1; -1)$, $B(1; -4)$, $C(8; 4)$ und $D(1; 6)$, deren Koordinaten bezüglich $\{O; i, j\}$ errechnet wurden, sind Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren \vec{AC} und \vec{BD} bezüglich der dem Koordinatensystem $\{O'; i', j'\}$ zugrunde gelegten Basis!

- a) $O'(1; 4)$; $i'\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $j'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ b) $O'(-1; 1)$; $i'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $j'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

11. Geben Sie die Transformationsgleichungen für die Koordinaten eines Vektors a bezüglich zweier orthonormierter Basen $\{i, j\}$ und $\{i', j'\}$ mit $\angle(i, i') > 0$ und $\angle(j, j') > 0$ an!

12. Zeigen Sie, daß die Formel für die Länge einer Strecke \overline{AB}

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

bei Koordinatentransformationen ihre Gestalt nicht ändert!

107. Berechnen Sie $\sin 105^\circ$ und $\cos 105^\circ$ mit Hilfe der Additionstheoreme und der Beziehung $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$! 108. Berechnen Sie $\sin 15^\circ$ und $\cos 15^\circ$, indem Sie die Beziehung $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$ ausnutzen!

109. Berechnen Sie wie in Aufgabe e 107 die folgenden Winkelfunktionswerte!

- a) $\sin 150^\circ$ c) $\cos 300^\circ$ e) $\cos 225^\circ$ g) $\sin 195^\circ$
 b) $\sin 225^\circ$ d) $\cos 345^\circ$ f) $\sin 315^\circ$ h) $\cos 225^\circ$

110. Zeigen Sie, daß die folgenden Identitäten gelten!

a) $\sin(45^\circ - \alpha) = \cos(45^\circ + \alpha)$

e) $\sin(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha) = \cos \alpha$

b) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

f) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = \tan \alpha$

c) $\sin 120^\circ \cos 300^\circ - \cos 315^\circ \sin 150^\circ = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$

g) $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

d) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

111. Bestimmen Sie $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$

112. Gegeben sei $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$. Be-

für den Fall, daß $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\sin \beta = \frac{8}{17}$,

rechnen Sie $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$
für spitze und positive Winkel α und β !

und $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$ ist!

113. Gegeben sei $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\sin \beta = \frac{15}{17}$ sowie die Angabe, daß α und β spitze positive Winkel sind. Beweisen Sie, daß dann $\alpha + \beta = 90^\circ$ ist!

114. Schreiben Sie eine Parametergleichung der Geraden g auf, die

a) durch den Punkt $A(3; -4)$ geht und \vec{j} zum Richtungsvektor hat;

b) durch den Ursprung geht und Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle(i, j)$ ist;

c) durch den Ursprung und den Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{OA} = \vec{r}$ verläuft;

d) durch den Punkt $A(3; 1)$ geht und $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ zum Richtungsvektor hat!

Veranschaulichen Sie g und die sie bestimmenden Größen in einer Zeichnung!

115. Welche Punktmenge beschreibt die Gleichung $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ mit $\vec{x}_0(-1; 4)$ und $\vec{a}(2; -3)$ für die folgenden Intervalle von t ?

a) $t = 5$

b) $|t| < 3$

d) $t = -5$

e) $50 < t < +\infty$

c) $0 < t < 1$

f) $-\infty < t < 4$

116. Geben Sie eine Parametergleichung an für

a) den Strahl OA mit dem Anfangspunkt O ;

b) die Strecke \overline{OA} ;

c) die Strecke \overline{OB} , wenn $\vec{OB} = 7\vec{OA}$ ist;

d) die Strecke \overline{OC} , wenn $\vec{OC} = -3\vec{OA}$ ist;

e) die Strecke \overline{CB} , wenn $\vec{OB} = 7\vec{OA}$ und $\vec{OC} = -3\vec{OA}$ ist;

f) die Strecke \overline{DE} , wenn $\vec{OD} = -\vec{OA}$ und $\vec{OE} = -3\vec{OA}$ ist!

117. $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ mit $\vec{x}_0(-2; 3)$ und $\vec{a}\left(1; \frac{3}{2}\right)$ sei eine Parametergleichung der Geraden g . Berechnen

Sie die Koordinaten der Punkte P , die den folgenden Parameterwerten entsprechen! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an Hand einer Zeichnung!

a) $t = 1$

b) $t = 2$

c) $t = -2$

d) $t = 7$

118. Berechnen Sie für

a) $\vec{x}_0(7; 4)$, $\vec{a}(1; 1)$; $t_1 = 1$, $t_2 = -4$, $t_3 = -7$,

b) $\vec{x}_0(3; 0)$, $\vec{a}(0; -2)$; $t_1 = 0,5$, $t_2 = -1$, $t_3 = 3,5$,

c) $\vec{x}_0(4; 3,5)$, $\vec{a}(-4; 2)$; $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{7}{4}$, $t_3 = \frac{3}{8}$

die Koordinaten der Punkte der Geraden mit der Parametergleichung $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$, die den jeweils angegebenen Parameterwerten entsprechen!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$A(x_A; y_A)$	$(0; -1)$	$(-2; 3)$	$\left(-\frac{3}{2}; 4\right)$	$(-4; -1)$	$(-3; 1)$	$(2; 3)$
$a(a_x; a_y)$	$(4; 2)$	$(3; 0)$	$\left(\frac{3}{2}; 3\right)$	$(-1; -2)$	$(1; -1)$	$\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Geben Sie von der durch den Punkt A und den Richtungsvektor a bestimmten Geraden g drei weitere Punkte und drei weitere Richtungsvektoren an!

120. Berechnen Sie die y -Koordinate und den zugehörigen Parameterwert für den Punkt mit der Abszisse $x = 2$ auf der Geraden $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\mathbf{a}$ mit

a) $\vec{x}_0(1; 3)$, $\mathbf{a}(-1; -3)$, b) $\vec{x}_0(0; 3)$, $\mathbf{a}(1; 0)$, c) $\vec{x}_0(-5; 2)$, $\mathbf{a}(5; 3)$!

121. Überprüfen Sie, welcher der Punkte P jeweils auf der durch die Angabe von \vec{x}_0 und \mathbf{a} bestimmten Geraden $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\mathbf{a}$ liegt! Berechnen Sie dann für die auf g gelegenen Punkte die zugehörigen Parameterwerte!

a) $P_1(6; 9)$, $P_2(10; 4)$, $P_3(17; -2)$ b) $P_1(-5; 3)$, $P_2(3; 11)$, $P_3(4; 3)$
 $\vec{x}_0(-3; 18)$, $\mathbf{a}(-1; 1)$ $\vec{x}_0(0; 8)$, $\mathbf{a}(1; 1)$

13. Die Gerade g habe die Parametergleichungen

a) $\vec{x} = t\mathbf{a}$ mit $\mathbf{a}(1; 1)$,

b) $\vec{x} = \bar{t}\bar{\mathbf{a}}$ mit $\bar{\mathbf{a}}(-1; -1)$,

c) $\vec{x} = \tilde{x}_0 + \bar{t}\bar{\mathbf{a}}$ mit $\tilde{x}_0(2; 2)$, $\bar{\mathbf{a}}(1; 1)$,

d) $\vec{x} = \bar{\bar{t}}\bar{\bar{\mathbf{a}}}$ mit $\bar{\bar{\mathbf{a}}}(4; 4)$,

e) $\vec{x} = \tilde{\tilde{x}}_0 + \bar{\bar{t}}\bar{\bar{\mathbf{a}}}$ mit $\tilde{\tilde{x}}_0(-2; -2)$, $\bar{\bar{\mathbf{a}}}(1; 1)$.

Bestimmen Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen t und den Parametern \bar{t} , \tilde{t} und $\bar{\bar{t}}$! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an Hand einer Zeichnung und indem Sie die Koordinaten eines Punktes auf verschiedene Weise berechnen!

122. Eine Gerade g gehe durch den Punkt $A(2; -2)$ und habe $\overrightarrow{AB}(-6; 9)$ zum Richtungsvektor. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B , und zeigen Sie, daß g durch den Punkt $C(0; 1)$ geht!

123. Geben Sie eine parameterfreie Gleichung der Geraden $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\mathbf{a}$ an!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
\vec{x}_0	$(-3; 5)$	$(1; -8)$	$(-6; -2)$	$\left(-\frac{11}{2}; 29\right)$	$(1; 7)$	$(-7; 4)$
\mathbf{a}	$(2; 1)$	$(-1; -6)$	$\left(-\frac{7}{8}; 0\right)$	$(0; 3)$	$(-5; 5)$	$\left(\frac{3}{2}; -4\right)$

Welchen Anstieg hat diese Gerade?

124. Stellen Sie die Punktgleichung der Geraden durch den Punkt P_0 und mit dem Anstieg m auf!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
P_0	$(0; -1,5)$	$(3; 4)$	$(-6; -6)$	$(-8; -9)$	$(3; 3)$	$(-5; 8)$
m	-3	$2,5$	1	-1	$0,5$	$-\frac{3}{4}$

125. Bestimmen Sie den Anstieg m der Geraden mit den folgenden Gleichungen und nach m einen ihrer Richtungsvektoren!

a) $y + x = 1$ c) $y - x = 0$ e) $23 - y + 2x = 0$ g) $y - 4 = 0$
 b) $8x + 3y + 2 = 0$ d) $x + 2y - 17 = 0$ f) $x + 2 = 0$ h) $x + \sqrt{3}y = 0$

126. Die folgenden Gleichungen seien parameterfreie Gleichungen der Geraden g . Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P_0 von g , einen ihrer Richtungsvektoren a , und schreiben Sie für g eine Parametergleichung nieder! Veranschaulichen Sie g mit Hilfe von P_0 und a !

a) $3x + y = 9$ b) $y = \sqrt{71}$ c) $27x + 36y = 0$ d) $x = 5 + \sqrt{3}$

127. Veranschaulichen Sie die Geraden mit den folgenden Gleichungen!

a) $3x + 4y + 12 = 0$ c) $2x + 5y = 0$ e) $x + 4 = 0$ g) $y - 4 = 0$ i) $x + y = 0$
 b) $x - 2y + 3 = 0$ d) $3x - 7y = 0$ f) $3x - 2 = 0$ h) $2y + 3 = 0$ k) $x - y = 0$

128. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die durch den Ursprung und durch den Punkt P geht!

a) $P(3; 4)$ b) $P(-2; 3)$ c) $P\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ d) $P(a; -a)$

129. Bestimmen Sie die Lage der Punkte $P_1(-3; 0)$, $P_2(0; -7)$, $P_3(-7; 0)$, $P_4(-1; 3)$ und $P_5(-1; 4)$ bezüglich der durch die Punkte $A(3; 5)$ und $B(1; 4)$ bestimmten Geraden!

130. Geben Sie je eine Gleichung für die Geraden an, auf denen die Seiten und die Seitenhalbierenden des Dreiecks mit den folgenden Eckpunkten liegen! Anmerkung: Vgl. mit Aufgabe e 76c!

a) $A(-1; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-3; 2)$ b) $A(-1; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(7; 11)$

131. Weisen Sie nach, daß die Punkte $A(-2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(7; 7)$ und $D(3; 1)$ die Eckpunkte eines Trapezes sind, und schreiben Sie je eine Gleichung für die Geraden auf, die die Mittelnie bzw. die Diagonalen dieses Trapezes enthalten!

14. Gegeben seien das Ähnlichkeitszentrum $M(-4; -1)$ zweier ähnlicher und in Ähnlichkeitslage befindlicher Dreiecke sowie die Eckpunkte $A(-3; -2)$, $B(2; 0)$, $C(-1; 1)$ des kleineren der beiden. Der Ähnlichkeitsfaktor sei $k = 3$, d. h., entsprechende Seiten der Dreiecke mögen sich wie 1 : 3 verhalten. Geben Sie für die Geraden, die die Seiten des zweiten Dreiecks enthalten, je eine Gleichung an!

132. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die jeweils durch die Punkte P_1 und P_2 geht!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
P_1	(5; 6)	(-3; -4)	(2; 3)	$\left(2; -\frac{1}{2}\right)$	(1; 4)	(a; a)	(0; a)
P_2	(7; 8)	(3; 4)	(3; 2)	$\left(-3; \frac{1}{3}\right)$	(-1; -2)	(b; b)	(a; 0)

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem! Wie groß sind die Abschnitte auf den Achsen? Geben Sie die Achsenabschnittsgleichung der Geraden an!

133. Ermitteln Sie je eine Gleichung der Geraden, auf denen die Seiten eines Rhombus liegen, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist und dessen Diagonalen auf den Achsen liegen! Die Länge der Diagonalen auf der x -Achse sei $2a$ und der auf der y -Achse $2b$. Wie groß sind die Seiten des Rhombus?

134. Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte

a) $P_1(2; 0)$, $P_2(0; 3)$, b) $P_1(3; 0)$, $P_2(0; -2)$, c) $P_1(5; 0)$, $P_2(0; -6)$
 der Koordinatenachsen geht! Veranschaulichen Sie diese Gerade!

135. Welche Beziehung besteht zwischen den Konstanten a und b in der Achsenabschnittsgleichung einer Geraden g und dem Anstieg m von g ?

136. Geben Sie den folgenden Gleichungen jeweils die Gestalt $y = mx + b$!

Veranschaulichen Sie die Gerade g mit dieser Gleichung mit Hilfe von b und eines über m bestimmten Richtungsvektors von g !

a) $5x - 3y + 7 = 0$ c) $-\frac{1}{3}x - \frac{5}{4}y - \frac{8}{3} = 0$ e) $4y + 5\sqrt{3} = 0$
 b) $x + 9y = 2$ d) $10y - 3x = 0$ f) $11y + 5x = 0$

137. Wie lautet die allgemeine Form der folgenden Geradengleichungen?

a) $y = \frac{x}{2} - 3$ b) $y + \frac{3}{4}x - 5 = 0$ e) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ f) $\frac{4}{5} = \frac{y-2}{x+1}$

c) $\xi = \xi_0 + t\alpha$

g) $\xi = \xi_0 + t(\xi_1 - \xi_0)$

mit $\xi_0(5; 7)$, $\alpha(-3; 1)$

mit $\xi_0\left(4; -\frac{1}{2}\right)$, $\xi_1(-1; 3)$

d) $x = \sqrt{3} + 5t$, $y = \sqrt{2}t$

h) $x = 2 - t$, $y = 11 + 7t$

138. Bestimmen Sie die Menge der Punkte $P(x; y)$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind!

a) $y > 3x + 1$ b) $y < 3x + 1$ e) $2x + y - 4 \geq 0$ f) $2x + y - 4 < 0$
 c) $y < 2 - x$, $x > -2$, $y > -2$ g) $y > 2 - x$, $x < 4$, $y < 0$

d) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1$, $y \geq x + 2$, $x \geq -4$

139. Stellen Sie die gegenseitige Lage der Geraden mit folgenden Gleichungen fest, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Schnittpunkt!

Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch eine Zeichnung!

a) $y = \frac{5}{3}x - 1$ c) $x + 3y - 2 = 0$ d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ f) $y - 3x = 0$

$y = -\frac{4}{5}x + 6\frac{2}{5}$ $2x + 6y - 2 = 0$ $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ $4x + 5y = 0$

b) $\frac{y-1}{x-1} = 3$ e) $y = mx + n$ g) $y + 3 - \sqrt{5} = 0$

$\frac{y-2}{x-2} = 1$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $x + 3 - \sqrt{5} = 0$

140. Stellen Sie die gegenseitige Lage der Geraden mit folgenden Gleichungen fest, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Schnittpunkt! Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch eine Zeichnung!

$\xi = \xi_0 + t\alpha$

$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + t\bar{\alpha}$

mit

a)	b)	c)
$\xi_0(2; 3)$, $\alpha(1; 0)$ $\bar{\xi}_0(2; 0)$, $\bar{\alpha}(0; 1)$	$\xi_0(-4; 2)$, $\alpha(2; 1)$ $\bar{\xi}_0(-1; -4)$, $\bar{\alpha}(-1; 1)$	$\xi_0(3; -1)$, $\alpha(2; -6)$ $\bar{\xi}_0(2; 0)$, $\bar{\alpha}(-1; 3)$

141. Stellen Sie die gegenseitige Lage der Geraden mit folgenden Gleichungen fest, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Schnittpunkt! Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch eine Zeichnung!

a) $2y + 3x - 6 = 0$

$\xi = \xi_0 + t\alpha$ mit $\xi_0(6; 13)$, $\alpha(0; 4)$

b) $y = 1,5$

$\xi = \xi_0 + t\alpha$ mit $\xi_0(4; 1,5)$, $\alpha(-1; 0)$

c) $y + 7x = 0$

$\xi = \xi_0 + t\alpha$ mit $\xi_0(4; 5)$, $\alpha(1; 7)$

d) $-3x - 5y = 2$

$\xi = t\alpha$ mit $\alpha(-1; 2)$

142. Für welche Werte von m und n hat die Gerade

$$(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$$

mit der x -Achse keinen Punkt gemeinsam und hat den Achsenabschnitt $b = -3$ auf der y -Achse? Wie lautet die entsprechende Geradengleichung?

143. Für welchen Wert m schneiden sich die Geraden $(m - 1)x + my - 5 = 0$ und $mx + (2m - 1)y + 7 = 0$ in einem Punkt der x -Achse?

144. Für welche Werte von m und n haben die Geraden $mx + 8y + n = 0$ und $2x + my - 1 = 0$

a) einen Punkt, b) keinen Punkt, c) alle Punkte gemeinsam?

145. Bestimmen Sie die Lage der Strecke $\overline{M_1M_2}$ bezüglich der Geraden g mit der Gleichung $2x - y + 5 = 0$ in jedem der folgenden Fälle!

	a)	b)	c)	d)	e)
M_1	(2; 3)	(1; 1)	(4; 3)	(0; 2)	(-4; -3)
M_2	(0; 1)	(3; 5)	(-2; 2)	(5; 0)	(-1; 3)

146. Bestimmen Sie die Lage der Geraden mit der Gleichung $x - 7y + 5 = 0$ bezüglich des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(3; 1)$, $B(-2; 4)$ und $C(1; 0)$!

147. P_1 und P_2 seien die Schnittpunkte der Geraden $x = 2 + 5t$, $y = -1 + t$ mit den Geraden $x + 4y - 1 = 0$ und $x + y = 0$. Welchen Parameterwerten entsprechen die Punkte der Strecke $\overline{P_1P_2}$?

148. Die Geraden $x = -1$ und $x = 3$ schneiden die Gerade $y = 2x + 1$ in den Punkten A und B . Bestimmen Sie den Betrag des Vektors \overrightarrow{AB} , seine Koordinaten und Komponenten!

15. Gegeben seien die Eckpunkte $A(3; 0)$, $B(0; 3)$, $C(-2; -1)$ und $A'(6\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2})$, $B'(5; 4)$, $C'(4; 2)$ zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Beweisen Sie, daß die Seiten dieser Dreiecke paarweise parallel zueinander sind und daß sich die Geraden, die jeweils durch zwei einander entsprechende Punkte beider Dreiecke gehen, in einem Punkt schneiden!

149. Gegeben seien die Punkte $A(1; 2)$, $B(-3; 4)$. Prüfen Sie, ohne die Geradengleichung für die Gerade AB aufzustellen, ob die Punkte $P_1(1; 4)$, $P_2(-1; 3)$ auf der Geraden AB liegen, und berechnen Sie gegebenenfalls das Teilverhältnis $\overline{AP_i}$ zu $\overline{BP_i}$, ($i = 1, 2$)! Welcher Punkt P teilt die gerichtete Strecke AB im Verhältnis $\lambda = -\frac{3}{2}$?

150. In welchem Verhältnis teilt die Gerade $x - 3y = 9$ die gerichtete Strecke \overline{AB} für $A(1; 2)$, $B(5; 1)$?

151. Gegeben seien die Punkte $A(1; -1)$, $B(3; 3)$ und $C(4; 5)$ einer Geraden. Bestimmen Sie das Teilverhältnis λ , in dem jeder der Punkte die Strecke teilt, die von den anderen Punkten bestimmt wird!



A

- Abbildung **E** Seite 162
- Ableitung
 - an der Stelle x_0 **C** Seiten 81 ff. (► 2)
 - der Potenzfunktionen **C** Seite 89 (► 12)
 - einer Konstanten **C** Seiten 85, 89 (► 6)
 - einer Summe **C** Seiten 85, 89 (► 7)
 - eines Produktes **C** Seiten 87, 89 (► 9)
 - eines Quotienten **C** Seiten 88, 89 (► 11)
 - im Intervall (a, b) **C** Seite 83 (► 4)

B

- Ableitungen höherer Ordnung **C** Seite 90
- Abschnitt **A** Seite 36
- Abstand **E** Seite 184
- Additionstheoreme **E** Seiten 188 ff.
- Anstieg **C** Seiten 76 f.; **E** Seite 193
 - an der Stelle x_0 **C** Seite 78
 - mittlerer **C** Seite 77
- Ausgezeichnete Zerlegungsfolge **D** Seite 138

C

- Basis **E** Seite 178 (► 14)
- Bedingung
 - , hinreichende **C** Seite 84; **E** Seiten 201 f.
 - , notwendige **C** Seite 84; **E** Seiten 201 f.
- Bernoullische Ungleichung **a** Seite 212
- Binomialkoeffizienten **A** Seite 23
- Binomischer Satz **A** Seite 25

D

- Deduktion **A** Seite 17
- Dezimalbrüche, periodische **B** Seite 62
- Differenzialquotient **C** Seite 81
 - , zweiter **C** Seite 90
- Differenzenquotient **C** Seiten 78, 81
- Differenzierbarkeit **C** Seiten 80 ff., 89
 - an der Stelle x_0 **C** Seite 81 (► 2)
 - im Intervall (a, b) **C** Seite 83 (► 3)
- , einseitige **C** Seite 83
- Divergente Zahlenfolge **B** Seite 51 (► 7)
- Drehung **E** Seite 187
- Durchlaufssinn **E** Seiten 182, 192

E

- ε -Umgebung **B** Seite 48
- Extrema, lokale **C** Seite 115

R

- Fakultätsdefinition **A** Seite 20 (► 12)
- Folge (\neq Zahlenfolge)
- Funktion
 - der oberen Grenze **D** Seite 149
 - , Grenzwert einer **B** Seiten 63 ff. (► 17)
- Funktionen
 - , ganze rationale **C** Seite 91 (► 13)
 - , gebrochene rationale **C** Seite 93
 - , identische **C** Seite 91
 - , konstante **C** Seiten 85, 89, 91, 114
 - , rationale **C** Seite 92 (► 14)

Geradengleichung

- , allgemeine **E** Seiten 195 f.
- , Normalform der **E** Seiten 195 f.
- Achsenabschnittsgleichung **E** Seite 195
- Parametergleichung **E** Seiten 189 ff.
- Punkttrichtungsgleichung **E** Seiten 192 ff.
- Zwei-punktgleichung **E** Seiten 194 f.
- Gerichtete Strecke **E** Seiten 162, 165
- Geschwindigkeit **C** Seite 79
- Grad einer Funktion **C** Seite 92
- Grenze **A** Seiten 9 (► 3), 32; **B** Seiten 54, 73
 - , Satz von der oberen **A** Seiten 10 f. (► 5)
- Grenzwert
 - einer Zahlenfolge **B** Seite 49 (► 2)
 - einer Partialsummenfolge **B** Seite 60
 - einer Funktion **B** Seiten 63 ff. (► 17); **C** Seiten 100 ff. (► 21)
- , einseitiger **B** Seite 68; **C** Seite 83

Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung **D** Seite 149 ff. (► 9)

- Hinreichende Bedingung **C** Seite 84; **E** Seiten 201 f.
- für lokale Extrema **C** Seiten 118 f. (► 32, 33)
- für lokale Konkavität (Konvexität) **C** Seite 123 (► 35)

Induktion **A** Seite 17

- , vollständige **A** Seiten 13 ff. (► 8)
- Induktive Definition **A** Seiten 20 f.

Integral

- , bestimmtes **D** Seite 137 ff. (► 1)
- , unbestimmtes **D** Seite 145 (► 6)
- Integralmittelwert **D** Seite 143 (► 4)

Koeffizienten

- einer ganzen rationalen Funktion **C** Seite 92
- einer Linearkombination **E** Seite 176 (► 11)
- Komponenten **E** Seite 178 (► 14)
- Konkav **C** Seiten 122 f. (► 34, 35)
- Konstante Folge **A** Seite 31; **B** Seite 50
- Konvergente geometrische Reihe **B** Seite 61
- Konvergente Reihe **B** Seite 60 (► 15)
- Konvergente Zahlenfolge **B** Seiten 49, 53 (► 3, 10, 11, 12)

Konvergenzverhalten monotoner Folgen **B** Seiten 54 ff.

- Konvex **C** Seiten 122 f. (► 34, 35)
- Koordinaten **E** Seiten 178 f. (► 14)
- Koordinatensysteme **E** Seiten 180
- Koordinatensystem (Transformation) **E** Seiten 185
- Kriterium für
 - lokale Extrema **C** Seiten 116 f. (► 32, 33)
 - lokale Konkavität (Konvexität) **C** Seite 123 (► 35)

Kriterium für Wendepunkte C Seite 124
Kurvendiskussion C Seiten 125 ff.

Limes (\neq Grenzwert)

Linear unabhängig E Seite 178 (► 13)

Linearkombination E Seite 176 (► 11)

Lokales Verhalten einer Funktion C Seiten 107 ff.,
122

Maximum B Seite 74

–, globales C Seite 114

–, lokales C Seite 114 (► 30)

Minimum B Seite 74

–, globales C Seite 114

–, lokales C Seite 114 (► 30)

Mittelwertsatz

– der Differenzialrechnung C Seite 113 (► 27)

– der Integralrechnung D Seite 143 (► 4)

Monotonie A Seite 31 (► 17)

–, lokale C Seite 108 (► 23)

n -Tupel E Seite 176

Neigungswinkel C Seiten 76, 110

Notwendige Bedingung C Seite 84; E Seite 201 f.

– für lokale Extrema C Seite 116

Nullfolge B Seiten 49, 51 (► 4)

Nullstelle C Seite 95 (► 16)

Nullverschiebung E Seite 167

Orientierung

– einer Ebene E Seiten 182 f.

– einer Geraden E Seite 192

Parallelgleich E Seite 163 (► 1)

Parameter C Seite 76

Parametergleichung E Seiten 189 ff.

Partialsummen A Seite 36 (► 26); B Seiten 57 ff.

–, Folge der B Seiten 59 f. (► 15)

Periodische Dezimalbrüche B Seite 62

Pfeil E Seite 162

Pole rationaler Funktionen C Seite 105 (► 22)

Rationale Funktionen C Seite 92 (► 14)

Rechtssystem E Seite 186

Reihe B Seiten 59 ff. (► 15)

–, geometrische B Seite 60 f.

–, Summe einer B Seite 60 (► 15)

Rekursive

– Definitionen A Seite 20

– Bildungsvorschrift A Seite 30

Repräsentant E Seite 163

Richtung, Richtungssinn E Seite 162

Rolle, Michel C Seite 112

Schnittpunkt E Seiten 196 ff.

Schranke A Seiten 8, 32 (► 1, 2, 18)

Sekante C Seiten 77 f., 81

Stammfunktion D Seite 145 (► 5)

Stetigkeit B Seiten 69 ff. (► 19); C Seite 84
(\neq auch Unstetigkeit)

– in einem Intervall B Seite 71

–, einseitige B Seite 70

Summe von Funktionen C Seite 92

–, Ableitung einer C Seiten 85, 89 (► 7)

Summenzeichen A Seite 22

Tangens C Seite 76

Tangenten C Seiten 78, 81, 110

–, parallele C Seite 86

Wendetangente C Seite 125

Teilfolge B Seite 53 (► 9)

Teilverhältnis E Seite 200 (► 17)

Translation (\neq Verschiebung)

Umgebung B Seite 48 (► 1)

Unstetigkeit, hebbare B Seite 70

Ursprung E Seite 181

Vektorraum E Seiten 174 ff.

Einheitsvektor E Seite 181

Ortsvektor E Seite 181

Richtungsvektor E Seite 190

Verschiebungen E Seiten 162 ff. (► 2)

–, Addition von E Seiten 165 f., 180 (► 5, 15)

–, des Koordinatensystems E Seite 187

–, entgegengesetzte E Seite 169

–, Multiplikation von reellen Zahlen und E Seiten
170 f., 180 (► 7, 16)

–, parallele E Seite 171

–, Subtraktion von E Seiten 168, 180 (► 6, 15)

Verschiebungsweite E Seite 165

Vollständige Induktion A Seiten 13 ff. (► 8)

Wendepunkt C Seite 124 (► 36)

Wendetangente C Seite 125

Winkel E Seiten 181, 183

Zahlenbereiche A Seiten 4 ff.

Zahlenfolge A Seite 27

–, arithmetische A Seiten 34 ff. (► 20)

–, beschränkte A Seite 32

–, divergente B Seite 51 (► 5)

–, endliche A Seite 28

–, geometrische A Seiten 34 ff. (► 22); B Seite 55

–, Grenze einer A Seite 32 (► 19)

–, Grenzwert einer B Seite 49 (► 2)

–, konstante A Seite 31; B Seite 50

–, konvergente B Seiten 49, 53 (► 3, 10)

–, monotone A Seite 31; B Seite 54

–, Schranke einer A Seite 32 (► 18)

Nullfolge B Seiten 49, 51 (► 4)

Teilfolge B Seite 53 (► 11)

Zahlenpaare (Zahlentripel) E Seiten 174, 176

Zerlegungsfolge D Seite 138

Zerlegungssumme D Seite 138

Zwischenwertsatz B Seite 73

Inhaltsverzeichnis

A

A Vollständige Induktion, elementare Folgen	3
<i>Aufbau der Zahlenbereiche, Schranken und Grenzen</i>	4
Zur Wiederholung des Aufbaus der Zahlenbereiche	4
Das Prinzip der Zahlenbereichserweiterungen	5
Schranken und Grenzen	8
Der Satz von der oberen (unteren) Grenze	10
<i>Beweisverfahren der vollständigen Induktion</i>	12
Induktion und Deduktion	17
Induktive Definitionen	20
Das Summenzeichen	22
Binomialkoeffizienten	23
Der binomische Satz	25
<i>Elementare Folgen</i>	27
Der Begriff „Zahlenfolge“	27
Monotonie, Schranken und Grenzen von Folgen	31
Arithmetische und geometrische Folgen	34
Partialsummen	36
Anwendungsbeispiele	39

B

B Grenzwerte 43

<i>Grenzwerte von Zahlenfolgen</i>	44
Einleitende Beispiele	44
Konvergente Zahlenfolgen	49
Divergente Zahlenfolgen	51
Sätze über konvergente Zahlenfolgen	51
Teilfolgen konvergenter Zahlenfolgen	53
Konvergenzverhalten monotoner Folgen; geometrische Folgen	54
Reihen	57
Geometrische Reihen	60
Periodische Dezimalbrüche als Reihen	62
<i>Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit</i>	63
Grenzwerte von Funktionen	63
Grenzwertsätze für Funktionen	68
Stetige Funktionen	69
Stetigkeit in einem Intervall	70
Sätze über stetige Funktionen	71

D

C Einführung in die Differentialrechnung 75

<i>Ableitung einer Funktion</i>	76
Anstieg einer Geraden	76
Anstieg einer Kurve in einem Punkt	76
Zwei physikalische Probleme	79
Differenzierbarkeit einer Funktion	80
Ermittlung der ersten Ableitung	82
Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit	84
Ableitung einer Summe	85
Ableitung eines Produktes	87
Ableitung eines Quotienten	88
Ableitung der Potenzfunktionen $y = x^n$ (n ganzzahlig)	89
Ableitungen höherer Ordnung	90

E

<i>Rationale Funktionen</i>	91
Differentiation der rationalen Funktion	93
Nullstellen rationaler Funktionen	95
Zerlegung ganzer rationaler Funktionen in Linearfaktoren	96
Berechnung von Nullstellen ganzer rationaler Funktionen	98
Grenzwerte von Funktionen bei unbeschränkt wachsendem (fallendem) Argument	100
Verhalten der rationalen Funktionen im Unendlichen	103
Pole rationaler Funktionen	105
<i>Kurvenuntersuchungen; Extremwertaufgaben</i>	107
Lokales, monotones Verhalten von Funktionen	107
Lokale Monotonie und erste Ableitung	109
Der Satz von Rolle	112
Mittelwertsatz der Differentialrechnung	113
Lokale Extrema von Funktionen	115
Notwendige Bedingung für lokale Extrema	116
Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema	118
Lokale Konvexität und Konkavität	122
Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung einer Funktion	123
Untersuchung von Funktionen, Kurvendiskussionen	125
Untersuchung einer gebrochenen rationalen Funktion	127
Extremwertaufgaben	129
D Einführung in die Integralrechnung	133
<i>Das bestimmte Integral</i>	134
Wiederholung und Vorbereitung des Integralbegriffs	134
Definition des bestimmten Integrals	137
Beispiele	140
Einige Eigenschaften des bestimmten Integrals	142
<i>Das unbestimmte Integral</i>	144
Stammfunktionen und unbestimmtes Integral	144
Geometrische Bedeutung der Integrationskonstanten	146
Integrationsregeln	147
<i>Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</i>	149
Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze	149
Berechnung bestimmter Integrale	151
<i>Anwendung der Integralrechnung</i>	153
Berechnung von Flächeninhalten	153
Physikalische Arbeit bei veränderlicher Kraft	158
E Vektorrechnung und analytische Geometrie	161
<i>Verschiebungen; Addition von Verschiebungen</i>	162
Verschiebungen	162
Addition von Verschiebungen	165
Subtraktion von Verschiebungen	168
<i>Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl</i>	170
<i>Begriff des Vektorraums</i>	174
<i>Basen und Koordinatensysteme in der Ebene</i>	176
Linearkombinationen von Vektoren	176
Basis und Komponenten	178
Koordinatensysteme	180
Koordinaten	182
Anwendungsaufgaben	184
Transformation eines Koordinatensystems	185
Additionstheoreme der Winkelfunktionen	188

Analytische Geometrie der Geraden in der Ebene

	189
A	189
Parametergleichung einer Geraden	192
Punkttrichtungsgleichung einer Geraden	194
Zweipunktgleichung einer Geraden	195
Normalform der Geradengleichung, Achsenabschnittsgleichung	195
Allgemeine Geradengleichung	196
Schnittpunkt zweier Geraden	200
Teilverhältnis	201
<i>Anhang</i>	203
Aufgaben	

B

C

D

E

R

Quellennachweis

Rückseite des Außentitels: Günter Klemens Helbig, Ludwigsfelde
Zwischentitel, Kap. A: VEB Pentacon Dresden; Kap. B: Zentralbild/Großmann; Kap. C: Zentralbild/Hesse;
Kap. D: Zentralbild/Karnitzki; Kap. E: Zentrale Bildstelle der Deutschen Reichsbahn

A a

**Vollständige Induktion;
Folgen**

B b

Grenzwerte

C c

**Einführung
in die Differentialrechnung**

D d

**Einführung
in die Integralrechnung**

E e

**Vektorrechnung
und analytische Geometrie**

Z

Register

A Vollständige Induktion, Folgen	
Vollständige Induktion	A7
Summenzeichen	A13
Binomialkoeffizienten	A14
Zahlenfolgen	A16

B Grenzwerte	
Konvergente Zahlenfolgen	B3
Divergente Zahlenfolgen	B4
Teilfolgen	B6
Reihen	B11
Stetigkeit	B18

Schränken und Grenzen	
— von Zahlenmengen	A3
— von Zahlenfolgen	A18

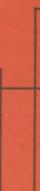
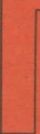
Grenzwerte	
— von Zahlenfolgen	B1
— von Funktionen	B14

C Differentialrechnung	
Differenzierbarkeit	C4
Ableitungen	C7
Rationale Funktionen	C13
Kurvenuntersuchungen	C21
Mittelwertsatz	C25

D Integralrechnung	
Bestimmtes Integral	D2
Stammfunktion und unbestimmtes Integral	D5
Integrationsregeln	D7
Berechnung bestimmter Integrale	D9
Mittelwertsatz	D4

E Vektorrechnung, analytische Geometrie	
Verschiebungen	E1
Vektorraum	E8

Linearkombinationen	E10
Basis, Komponenten	E11
Transformation eines Koordinatensystems	E15
Geradengleichungen	E17
Schnittpunkt, Teilverhältnis	E23



$$W = \int_{S_1}^{S_2} f(s) ds$$

