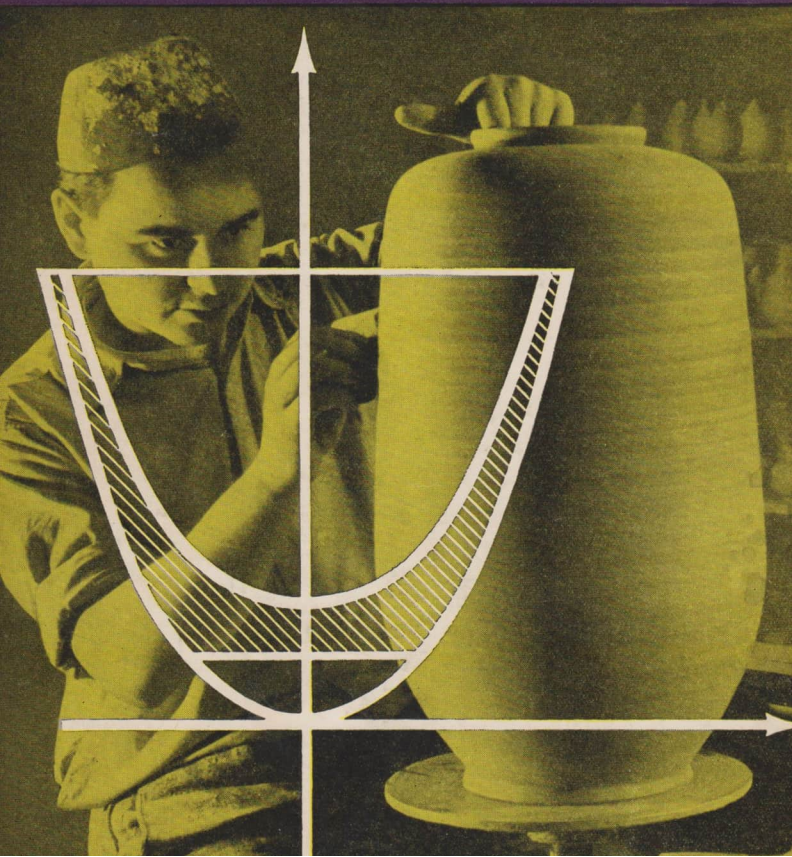


MATHEMATIK 11

ERWEITERTE OBERSCHULE



Mathematik

Lehrbuch für die erweiterte Oberschule • Klasse 11



VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1966

Verfasser:

Dr. Günter Lorenz und Günter Pietzsch	Kapitel 1
Dr. Fritz Neigenfind	Abschnitte 2.1. bis 2.4.
Hans Simon	Abschnitte 2.5. bis 2.9. und 3.3. und 3.4.
Heinz Junge	Abschnitte 3.1. und 3.2.
Johannes Gronitz	Kapitel 4
Prof. Dr. Werner Renneberg	Kapitel 5
Dr. Hans Wußing	Kapitel 6

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt.

Ausgabe 1963

Redaktion: Siegm. Kubicek, Karlheinz Martin, Siegrid Bellack
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einbandgestaltung: Werner Fahr
Kartenzulassung Abbildung 4.0.: K 1 · Kartengenehmigung Nr. 1052/64
Redaktionsschluß: 10. August 1965
ES 11 G · Bestell-Nr. 001155-4 · Preis: 6,30 · Lizenz-Nr. 203 · 1000/65 (DN)
Satz und Druck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig III/18/203



1. Schluß von n auf $n + 1$, binomischer Satz, elementare Folgen und Reihen

Zu den größten Leistungen unseres Jahrhunderts auf wissenschaftlichem und technischem Gebiet gehört die Entwicklung der programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschinen, der Rechenautomaten. Das Kapitelbild zeigt Schüler einer 11. Klasse im Moskauer Rechenzentrum. Den Rechenautomaten hat man wegen ihrer unvorstellbaren Leistungen auch Namen wie „Elektronengehirne“ und „Denkmaschinen“ gegeben. Diese Namen sind aber irreführend. ALBERT EINSTEIN drückte einmal die grundsätzliche Begrenztheit der Leistungsfähigkeit dieser Maschinen folgendermaßen aus:

„Gewiß, die Maschine löst euch Probleme, soviel ihr wollt, aber sie wird nie fähig sein, ein einziges Problem zu stellen.“

Aber auch das Lösen von Problemen geschieht durch die Maschinen nicht völlig selbständig. Der Mensch muß ihnen das Problem und den Lösungsgang aufbereiten, man sagt programmieren. Dazu gehört ein umfangreiches mathematisches Wissen, insbesondere auch aus der mathematischen Logik. In den Rechenautomaten und den mit ihnen zusammenhängenden Problemen der Automatisierung finden äußerst abstrakte und formale Gebiete der Mathematik ihre praktisch-technische Anwendung.

1.1. Über mathematische Beweisverfahren

Im Mathematikunterricht der Klassen 11 und 12 werden Stoffgebiete behandelt, die man schon zur „Höheren Mathematik“ zählt. Es ist deshalb gut, sich zu Beginn dieses Schuljahres darauf zu besinnen, wie im bisherigen Mathematikunterricht vorgegangen wurde, um zu neuen mathematischen Erkenntnissen zu kommen.

1.1.1. Induktion und Deduktion

● 1. Überdenken Sie, wie Sie in früheren Schuljahren die folgenden Aussagen gewonnen haben!

a) Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

b) Das Volumen V einer Kugel mit dem Radius r beträgt $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

c) Im gleichseitigen Dreieck beträgt jeder Innenwinkel 60° .

d) Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Nicht nur in der Mathematik, sondern in jeder Wissenschaft ist es ein Ziel der Forschung, zu wahren Aussagen zu gelangen und diese zu einem System zu verbinden bzw. in ein System einzuordnen. Mathematische Aussagen finden sich im Schülerauftrag 1. Beispiele für Aussagen in anderen Wissenschaften sind:

- (I) Wasserstoff und Sauerstoff bilden miteinander nur die Verbindungen Wasser und Wasserstoffperoxid.
- (II) Jedes Lebewesen durchläuft in seiner individuellen Entwicklung abgekürzt und in groben Zügen seine Stammesentwicklung.
- (III) Rauchen ist eine häufige Ursache für Lungenkrebs.
- (IV) Die Geschichte aller bisherigen Gesellschaft ist eine Geschichte von Klassenkämpfen.¹

Zwei Fragen sind dabei nun von Wichtigkeit:

1. Wie gelangt man zu neuen Aussagen? 2. Wie überzeugt man sich (und andere) von der Gültigkeit, der Wahrheit dieser Aussagen?

In den folgenden Beispielen 1a bis 1d werden diese Fragen kurz erörtert.

Beispiel 1

a) JOHANNES KEPLER² beobachtete lange Zeit die Bewegungen der (damals bekannten) Planeten, verarbeitete diese Beobachtungsdaten in Berechnungen und schloß daraus u. a.:

„Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.“

b) ISAAC NEWTON³ folgerte aus den KEPLERSCHEN Gesetzen und Beobachtungen über das Fallen von Körpern auf der Erde das Gravitationsgesetz:

¹ K. MARX, F. ENGELS: *Manifest der Kommunistischen Partei*. Dietz Verlag, Berlin 1948, S. 6.

² JOHANNES KEPLER (1571–1630), deutscher Astronom.

³ ISAAC NEWTON (1643–1727), engl. Naturforscher.

„Zwei (beliebige) Körper ziehen sich mit einer Kraft an, die ihren Massen proportional und dem Quadrat ihrer Entfernung indirekt proportional ist.“ (Daraus ergeben sich die KEPLERSchen Gesetze, wenn man als Körper speziell Sonne und Planeten betrachtet.)

- c) HENRY CAVENDISH¹ bestimmte den Proportionalitätsfaktor, die sogenannte Gravitationskonstante (Abb. 1.1.): Er befestigte an einem Draht einen Stab mit den Körpern K_1 und K_2 , näherte ihnen die Körper K_3 und K_4 und maß die Verdrehung des Drahtes.

Seinem Versuch lag also der Schluß zugrunde:

„Wenn sich zwei beliebige Körper anziehen, dann müssen es auch die Körper K_1 und K_3 bzw. K_2 und K_4 in einer entsprechenden Versuchsanordnung tun.“

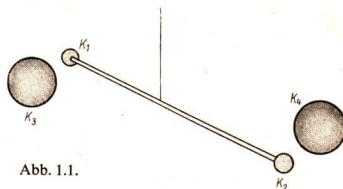


Abb. 1.1.

- d) Anfang des 19. Jahrhunderts beobachtete man, daß die Bewegungen des Planeten Uranus nicht so verliefen, wie man es auf Grund der Gesetze erwartete. Man schloß:

„Nach dem Gravitationsgesetz müssen diese Unregelmäßigkeiten von einem noch unbekanntem Planeten verursacht werden.“

Der Franzose LEVERRIER² berechnete aus den Abweichungen des Uranus die Bahnelemente des angenommenen Planeten, und der deutsche Astronom GALLE³ fand ihn am berechneten Ort. Der Planet erhielt den Namen Neptun.

Ein Vergleich der vier Schlüsse, der hier freilich nicht in Einzelheiten gehen kann und daher etwas ungenau bleiben muß, zeigt:

KEPLER schloß von Einzelbeobachtungen auf Gesetze, die nicht nur für die beobachteten Fälle gelten, sondern für alle gleichgearteten, ohne daß darüber im einzelnen Tatsachenmaterial vorlag. Die Schlußweise NEWTONS ist ganz entsprechend vom Einzelnen, Besonderen zum Allgemeinen, Umfassenderen (wenn auch sein Ausgangsmaterial bereits allgemeiner Natur war).

Derartige Schlüsse nennt man **induktiv**; KEPLER und NEWTON gewannen ihre Aussagen also durch **Induktion**⁴.

In c) und d) dagegen wurde das (allgemeine) Gravitationsgesetz auf Einzelfälle angewandt. Der Schluß erfolgt also in umgekehrter Richtung, man sagt **deduktiv**; beide Aussagen wurden durch **Deduktion**⁵ gewonnen.

Es sei bemerkt, daß induktives und deduktives Schließen in vielen Fällen der Erkennt-

¹ HENRY CAVENDISH (1731–1810), engl. Chemiker und Physiker.

² URBAIN JEAN JOSEPH LEVERRIER (1811–1877), franz. Astronom.

³ JOHANN GOTTFRIED GALLE (1812–1910).

⁴ inducere (lat.), hineinführen.

⁵ deducere (lat.), herabführen, ableiten.

nisgewinnung nicht scharf voneinander zu trennen sind und daß Induktion und Deduktion wohl die häufigsten und auch wichtigsten, aber keineswegs die einzigen Schlußweisen sind.

- 2. Entscheiden Sie, ob die Schlüsse, die Sie zu den Aussagen in den Schüleraufträgen 1a bis 1d führten, induktiv oder deduktiv waren!
- 3. Überlegen Sie, auf welche Weise man zu den Aussagen (I) bis (IV) auf S. 4 gekommen ist!
- 4. Versuchen Sie, die Gewinnung des Periodischen Systems der Elemente analog zu Beispiel 1 darzustellen und die Schlüsse zu vergleichen!

Wie steht es nun mit der Wahrheit der durch Induktion bzw. Deduktion gewonnenen Aussagen? Mit Sicherheit läßt sich sagen:

- ▶ Von wahren Aussagen gelangt man durch deduktives Schließen stets wieder zu wahren Aussagen.

Diese Erkenntnis liegt dem sogenannten **logischen Beweis** zugrunde und macht gerade ihn so überzeugend. Anders ist es bei der Induktion. Auch wenn die Ausgangssätze als wahr erkannt sind, ist die Gültigkeit der auf induktivem Wege erschlossenen Aussagen nicht völlig verbürgt. Es wohnt ihnen nur eine mehr oder minder große Wahrscheinlichkeit inne.

- ▶ Von wahren Aussagen gelangt man durch induktives Schließen nicht immer zu wahren Aussagen.

Welches Zutrauen man einer induktiv erschlossenen Aussage entgegenbringt, hängt weitgehend davon ab, ob das Ausgangsmaterial vielseitig und charakteristisch ist. Andererseits wird die Aussage wesentlich erhärtet, wenn sich deduktive Folgerungen aus ihr durch die Praxis bestätigen lassen. So wurde durch den Versuch von CAVENDISH das Gravitationsgesetz gestützt, an dem schon seit langem niemand mehr zweifelte. Deshalb wurde es ja auch nicht verworfen, als ihm die Praxis in Form der Uranusbewegungen scheinbar widersprach, sondern führte im Gegenteil zu neuen Entdeckungen.

Bei deduktiv erschlossenen Aussagen ist die Wahrheit in dem Maße verbürgt, in dem sie für die Ausgangssätze verbürgt ist. Sind diese induktiv gewonnen, so gilt das oben Gesagte; sind sie ebenfalls deduktiv gewonnen, so tritt eine abermalige Vorverlegung auf usw. Jedes deduktive Schließen muß seinen Ausgangspunkt aber schließlich bei Sätzen haben, die ihrerseits nicht deduktiv erschlossen, sondern, meist auf Grund mehr oder weniger weitgehender Abstraktionen, aus der Erfahrung gewonnen worden sind. Das bedeutet, daß auch das deduktive Schließen seine Wurzeln letztlich in der Realität hat.

- 5. Wenden Sie die Ausführungen über die Wahrheit von Aussagen auf die Sätze in den Schüleraufträgen 1a bis 1d und auf die Aussagen (I) bis (IV) auf S. 4 an!

Jedes deduktive Schließen geschieht mit Hilfe von **Schlußregeln**. So wurde im Beispiel 1 folgendermaßen geschlossen:

Alle Massen ziehen sich an.

K_1 und K_3 sind Massen.

K_1 und K_3 ziehen sich an.

Derartige Schlußregeln, von denen die angeführte die einfachste ist, führen von wahren Aussagen stets wieder zu wahren Aussagen. Sie haben sich also in der Praxis bewährt und dadurch den Charakter **absoluter Wahrheiten** erhalten. W. I. LENIN drückt das unter Verwendung des Wortes **Axiom**¹ folgendermaßen aus:

„Die praktische Tätigkeit des Menschen mußte milliardenmale das Bewußtsein des Menschen zur Wiederholung der verschiedenen logischen Figuren führen, *damit* diese Figuren die Bedeutung von *Axiomen* erhalten konnten.“²

Nur wegen dieses vollen Vertrauens in die Zuverlässigkeit der Schlußregeln konnte weiter oben gesagt werden, daß beim deduktiven Schließen aus wahren Aussagen mit Sicherheit wieder wahre Aussagen folgen.

Aufgaben

1. Sprechen Sie über die Gültigkeit der folgenden Aussagen (a), (b), (c), (d), und charakterisieren Sie die Art, wie man zu ihnen gelangt ist!
Durch Probieren findet man
(a) 840 ist durch 1, 2, 3, 4, 5, 6 teilbar.
Daraus wird geschlossen
(b) 840 ist durch alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3 \dots$ teilbar.
Aus (b) werden geschlossen
(c) 840 ist durch 21 teilbar; (d) 840 ist durch 37 teilbar.
2. Es sei $z_n = n^2 + n + 41$.
a) Untersuchen Sie die Aussage: „ z_n ist für jedes natürliche n eine Primzahl“!³
b) Untersuchen Sie allgemeiner, ob es Primzahlen p gibt, für die der Ausdruck $z_n = n^2 + n + p$ stets Primzahlen liefert!
3. Aus der Tatsache, daß sich stromdurchflossene Leiter erwärmen, und aus der Beobachtung einer Temperaturzunahme in einem Aluminiumdraht folgert jemand, daß der Draht von Strom durchflossen wird. Beurteilen Sie diesen Schluß!
4. Aus dem Satz „Jeder Bürger der DDR hat ein Recht auf Arbeit“ werden unter Benutzung von (1) Kurt Seifert ist ein Bürger der DDR bzw. (2) German Titow ist kein Bürger der DDR die folgenden Sätze aufgestellt:
(1a) Kurt Seifert hat ein Recht auf Arbeit. (1b) Kurt Seifert hat kein Recht auf Arbeit.
(2a) German Titow hat ein Recht auf Arbeit. (2b) German Titow hat kein Recht auf Arbeit.

¹ ἀξίωμα (griech.), Forderung, Grundsatz.

² W. I. LENIN: *Aus dem philosophischen Nachlaß – Exzerpte und Randglossen*. Dietz Verlag, Berlin 1954, S. 110.

Näheres über Axiome finden Sie im Abschnitt 1.1.2. Hier sind lediglich Axiome der Logik gemeint.

³ Das Beispiel geht auf den Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER (1707–1783) zurück.

- a) Erläutern Sie, von welchen dieser Aussagen lediglich auf Grund der Voraussetzungen feststeht, daß sie wahr bzw. falsch sind!
- b) Untersuchen Sie entsprechend, welche Folgerungen man ziehen kann, wenn statt (1) oder (2) vorausgesetzt wird:
 (3) Heinz Müller hat ein Recht auf Arbeit bzw.
 (4) Heinz Müller hat kein Recht auf Arbeit!
5. Um „nachzuweisen“, daß die von ROBERT KOCH (1843–1910) entdeckte Kommabakterie nicht der Erreger der Cholera sei, schluckte der Mediziner MAX V. PETTENKOFER eine ganze Reinkultur dieses Bakteriums. Er erkrankte nicht.
6. Bekanntlich gilt: Alle Rechtecke sind Parallelogramme. Was kann man demzufolge von allen Vierecken aussagen, die keine Parallelogramme sind?
7. a) Nach der Entdeckung der Krankheitserreger für eine Reihe von Krankheiten in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden vielfach Schlüsse folgender Art gezogen:
 (1) Bakterien erregen Krankheiten.
 (2) Krebs ist eine Krankheit.
 (3) Krebs wird durch Bakterien hervorgerufen.
 Eine andere verbreitete Schlußfolgerung aus (1) war, daß alle Bakterien schädlich sind.
- b) Bis 1900 war man der Ansicht, das Gelbfieber, eine oftmals tödlich verlaufende Tropenkrankheit, die nur Menschen befällt, werde durch Berührung von erkrankten Personen, von Gebrauchsgegenständen Kranker oder durch Einatmen der Erreger übertragen. Der Bakteriologe WALTER REED (1851–1902) zeigte, ohne das erregende Virus entdecken zu können, durch Versuche, daß die Übertragung ausschließlich durch Stiche einer Mosquitoart erfolgt. Stellen Sie dar, wie die Versuche angelegt werden mußten, um diesen Sachverhalt schlüssig darzulegen!
8. Aus den Aussagen
 (1) Alle Rechtecke haben Innenwinkel von je 90° ,
 (2) Alle Quadrate haben Innenwinkel von je 90°
 wird geschlossen
 (I) Alle Rechtecke sind Quadrate,
 (II) Alle Quadrate sind Rechtecke.
 Schätzen Sie die beiden Schlußweisen und ihre Ergebnisse ein!
9. Nehmen Sie Stellung zur Wahrheit der Sätze und zur Zuverlässigkeit der folgenden Schlußweise!
 Aus
 (1) Es gibt Parallelogramme, die keine Rechtecke sind,
 und
 (2) Es gibt Parallelogramme, deren Diagonalen nicht gleich lang sind,
 folgert jemand,
 (3) Parallelogramme, deren Diagonalen nicht gleich lang sind, sind keine Rechtecke.
10. Die Formel $A = \frac{g \cdot h_g}{2}$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks (Grundseite g , zugehörige Höhe h_g) wird oft folgendermaßen bewiesen:
 Aus der Tatsache, daß sich jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke mit gleicher Grundseite und Höhe zerlegen läßt, und aus der Flächenformel $A = g \cdot h_g$ für das Parallelogramm wird die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks gefolgert. Beurteilen Sie diese Schlußweise!

1.1.2. Über das axiomatische Vorgehen in der Mathematik

6. Beweisen Sie die folgenden drei Aussagen, und stellen Sie jeweils die zum Beweis benötigten Sätze zusammen!
- Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180° .
 - Für jedes rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b gilt: $c^2 = a^2 + b^2$.
 - Für beliebige positive reelle Zahlen a und b gilt: $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$.

Die Mathematik wird im allgemeinen als besonders exakte Wissenschaft angesehen, das heißt, ihre Aussagen gelten als besonders zuverlässig. Das kommt daher, daß in ihr eine Aussage erst dann als gültig anerkannt wird, wenn sie logisch bewiesen, also aus anderen, vorher als wahr erkannten Aussagen deduktiv hergeleitet wurde. Dadurch ist die Unsicherheit infolge induktiven Schließens ausgeschaltet bis auf die Aussagen, die beim logisch-deduktiven Schließen ganz am Anfang stehen. Man ist daher bestrebt, möglichst wenige solcher, ohne Beweis als gültig anerkannter Ausgangssätze zu verwenden und in ihnen wiederum möglichst wenig und eindeutig festgelegte Grundbegriffe zu benutzen. Diese zugrunde gelegten Sätze nennt man **Axiome**. Zum Aufbau eines bestimmten Teilgebiets der Mathematik ist dann eine gewisse Anzahl solcher Axiome, man sagt ein **Axiomensystem**, nötig. Da man von diesem Axiomensystem aus deduktiv folgert, spricht man vom axiomatisch-deduktiven Aufbau in der Mathematik.¹

Beispiel 2

Wir analysieren den Beweis folgender Aussage:

Satz: Die Parallele durch den Mittelpunkt eines Trapezeschenkels zu einer Grundseite halbiert auch den anderen Schenkel.

Voraussetzung: 1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{M_1M_2}$

$$2. \overline{AM_1} = \overline{M_1D}$$

Behauptung: $\overline{BM_2} = \overline{M_2C}$

Beweis: Zum Beweis ziehen wir durch M_2 die Parallele zu \overline{AD} . Ihre Schnittpunkte mit den Geraden durch A, B bzw. C, D seien E und F (Abb. 1.2.).

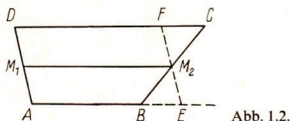


Abb. 1.2.

¹ Nähere Ausführungen dazu und zu einigen im folgenden angeschnittenen Problemen finden Sie z.B. bei A. P. NORDEN: *Elementare Einführung in die LOBATSCHESKISCHE Geometrie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958, bes. § 2.

Schlüsse	Begründungen („Hilfssätze“)
(a) $\overline{EM_2} = \overline{AM_1}$ $\overline{M_1D} = \overline{M_2F}$ $\overline{EM_2} = \overline{M_2F}$	Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang. (Nach Voraussetzung 2.)
(b) $\sphericalangle BEM_2 = \sphericalangle CFM_2$ $\sphericalangle M_2BE = \sphericalangle M_2CF$	Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich.
(c) $\triangle BEM_2 \cong \triangle CFM_2$ [aus (a) und (b)]	Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (sww).
(d) $\overline{BM_2} = \overline{M_2C}$	(Nach der Definition der Kongruenz gilt: Alle gleichliegenden Stücke stimmen überein.)

Damit ist der Satz bewiesen. Wie aber steht es mit den benutzten Hilfssätzen? Hilfssatz (a) wird zurückgeführt auf den Kongruenzsatz *swsw*, Hilfssatz (b) auf den Stufenwinkelsatz, Hilfssatz (c) wird in der Schule nicht weiter zurückgeführt.

- 7. Beweisen Sie analog zum Beispiel 2 die Hilfssätze (a) und (b)! Stellen Sie die Zusammenhänge aller Sätze des Beispiels in einer Art „Stammbaum“ dar!

Im Geometrieunterricht wurden also u. a. die Kongruenzsätze und der Stufenwinkelsatz als Axiome benutzt. Sie wurden nicht bewiesen, sondern lediglich veranschaulicht; sie sind uns so selbstverständlich, daß es unmöglich erscheint, ihre Gültigkeit anzuzweifeln.

In noch stärkerem Maße gilt das von Sätzen, die im Beweis des Beispiels wegen ihrer „Selbstverständlichkeit“ gar nicht erst erwähnt wurden, die aber dennoch in einem Axiomensystem enthalten sein müssen. So wurde zum Beispiel bei der Hilfslinie \overline{EF} stillschweigend benutzt, daß es zu \overline{AD} durch M_2 genau eine Parallele gibt und daß diese mit den Geraden durch A, B bzw. C, D jeweils genau einen Schnittpunkt hat. Aus dieser anschaulichen Selbstverständlichkeit darf man aber nicht folgern, man könne sich den Sachverhalt gar nicht anders denken, und demzufolge seien Axiome Sätze, die man nicht zu beweisen braucht. Sätze, denen diese Eigenschaft von vornherein zukommt, gibt es nicht.

■ **Beispiel 3**

Man kann zum Beispiel das EUKLIDISCHE Parallelenaxiom¹

- (1) Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb der Geraden genau eine Parallele
ersetzen durch
- (2) Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb der Geraden mindestens zwei Parallelen

¹ EUKLID (um 300 v. u. Z.), bedeutender griechischer Mathematiker.

oder

(3) Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb der Geraden keine Parallele.

Die „nichteuklidischen“ Parallelenaxiome (2) und (3) entziehen sich zunächst völlig unserer Anschauung und zeigen damit, wie unvollkommen und unzuverlässig diese ist; denn sie führen dennoch zu widerspruchsfreien, sogenannten nichteuklidischen Geometrien, die in der modernen Physik eine unmittelbare Anwendung gefunden haben, also gewissermaßen in der Praxis bestätigt wurden.¹

Nun könnte man meinen, Axiome seien Sätze, die man nicht beweisen kann. Aber auch das trifft nicht zu. So ist es zum Beispiel in der mathematischen Wissenschaft üblich, statt der vier Kongruenzsätze, wie in der Schule, nur einen in das Axiomensystem aufzunehmen und die anderen daraus zu beweisen. Noch deutlicher zeigt aber die folgende Tatsache diesen Sachverhalt: Ersetzt man das Parallelenaxiom (1) durch den Satz:

(1a) Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° ,

so läßt sich aus dem so abgeänderten Axiomensystem das Parallelenaxiom beweisen (und damit dieselbe euklidische Geometrie aufbauen). Wenn trotzdem meist anders verfahren wird, so deshalb, weil der Winkelsummensatz mehr Begriffe enthält und weniger einleuchtend ist.

Die Eigenschaft, Axiom zu sein, kommt einem Satz also nicht absolut zu. Allerdings darf die Zusammenstellung eines Axiomensystems nicht völlig willkürlich geschehen; es muß vielmehr gewisse Forderungen erfüllen. Eine von diesen ist die sogenannte Widerspruchsfreiheit: Das System darf nicht die Möglichkeit bieten, eine Aussage und ihre Verneinung herzuleiten.

8. Erläutern Sie, warum es unzulässig ist, Axiome als Sätze zu erklären, die „eines Beweises weder fähig noch bedürftig“ sind!

9. Statt des Winkelsummensatzes (1a) [und damit statt des Parallelenaxioms (1)] kann man auch einen der folgenden beiden Sätze in das Axiomensystem aufnehmen:

(1b) Alle Dreiecke haben die gleiche Winkelsumme;

(1c) Es gibt ein Dreieck, in dem die Winkelsumme 180° beträgt.

Erläutern Sie, warum man dann von schwächeren Voraussetzungen spricht!

Beim Vergleich mit dem induktiven Vorgehen werden zwei Vorteile des axiomatisch-deduktiven Verfahrens deutlich. Würde man sich zum Beispiel beim Winkelsummensatz mit einem Ausmessen einzelner Dreiecke begnügen, so ließe sich die Winkelsumme höchstens als Mittelwert von Meßergebnissen und demzufolge niemals genau mit 180° angeben. Vor allem aber würde man auf diese Weise eine sichere Aussage nur über endlich viele Dreiecke, nämlich über die untersuchten, machen können,

¹ Die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrien ist verknüpft mit den Namen der Mathematiker JÁNOS BOLYAI (1802–1860), CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), NIKOLAI IWANOWITSCH LOBATSCHESKI (1793–1856) und BERNHARD RIEMANN (1826–1866).

wohingegen die Aussage bei einem mathematischen Beweis allgemeingültig ist, das heißt für alle Dreiecke gilt.

Dennoch bedient man sich auch in der Mathematik der Induktion, zwar nicht zur Erkenntnissicherung, wohl aber zum Auffinden mathematischer Sätze. So sind zum Beispiel viele Flächen- und Rauminhaltsformeln induktiv gefunden und benutzt worden, lange bevor sie bewiesen wurden. Allerdings haben induktiv gefundene Aussagen so lange den Charakter von Vermutungen, wie ihre axiomatisch-deduktive Sicherung nicht erfolgt ist.



Beispiel 4

Bis heute sind folgende Aussagen unbewiesen (und unwiderlegt):

- (1) GOLDBACHSche¹ Vermutung: Jede gerade natürliche Zahl $a(a \neq 2)$ ist Summe von zwei Primzahlen.
- (2) FERMATSche² Vermutung: Es gibt keine natürlichen Zahlen a, b, c mit $a \cdot b \cdot c \neq 0$, für die die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ ($n > 2$ und natürlich) erfüllt ist.

Obwohl für beide Aussagen der Beweis noch nicht restlos gelungen ist, ist man von ihrer Gültigkeit überzeugt. Lange Zeit war man das aber auch bei folgenden beiden Aussagen:

- (3) Jede Zahl z , die sich aus $z = 2^{2^n} + 1$ durch Einsetzen natürlicher Zahlen für n ergibt, ist eine Primzahl.³
- (4) Zerlegt man den Ausdruck $x^n - 1$ in Faktoren, die ihrerseits nicht weiter zerlegbar sind und deren Summanden rationale Koeffizienten haben, so treten darin als Koeffizienten der einzelnen Summanden nur $-1, 0$ oder 1 auf. Zum Beispiel lautet die Zerlegung von $x^6 - 1$:

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Beide Aussagen konnten aber durch Gegenbeispiele widerlegt werden. EULER zeigte für (3), daß sich im Fall $n = 5$ keine Primzahl ergibt, und 1941 wies der sowjetische Mathematiker W. K. IWANOW für (4) nach, daß bei der Zerlegung von $x^{105} - 1$ zweimal der Koeffizient -2 auftritt.⁴

Aus den Beispielen wird auch deutlich, daß der Beweis eines Satzes sehr häufig erst dann erfolgt, wenn dieser auf anderem Wege – als Vermutung – gewonnen worden ist. Ganz entsprechend steht es mit dem axiomatischen Aufbau einer Theorie. Eine strenge und durchgehende Axiomatisierung und Sichtung der Grundlagen erfolgt in der Regel erst dann, wenn in der Entwicklung durch die Anhäufung von Sätzen ein gewisser Stand erreicht ist.

¹ CHR. GOLDBACH (1690–1764).

² PIERRE DE FERMAT (1601–1665).

³ Diese Vermutung stammt ebenfalls von FERMAT.

⁴ Eine ausführlichere Darstellung dieses Beispiels finden Sie bei I. S. SOMINSKI: *Die Methode der vollständigen Induktion*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954, S. 10.

Aufgaben

11. Überdenken Sie, für welche der folgenden Sätze aus dem bisherigen Mathematikunterricht Sie Beweise kennengelernt haben und welche Ihnen nur veranschaulicht bzw. an Einzelfällen deutlich gemacht wurden!
- Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.
 - Die Höhen jedes Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.
 - Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten eines jeden Dreiecks ist Mittelpunkt des Umkreises.
 - Jede Funktion $y = f(x)$, deren Gleichung von der Form $y = mx + n$ (m, n reelle Konstante) ist, hat als Bild eine Gerade. Diese steigt bei positivem m um so steiler, je größer m ist.
 - Für alle Kreise ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser gleich. Der Umfang u errechnet sich aus dem Radius r nach der Gleichung $u = 2\pi \cdot r$.
 - Für jedes ebene Dreieck gilt $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.
 - Für jede quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ gilt für die Lösungen x_1 und x_2 :
 $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.
12. Für welche der bisher unbewiesenen Aussagen aus Aufgabe 11 und aus den Schüleraufträgen 1a bis 1d können Sie nach Ihrem jetzigen Wissensstand Beweise angeben? Führen Sie diese Beweise durch!
13. Oftmals werden neue (umfassendere) mathematische Aussagen aus bekannten durch Verallgemeinerung gewonnen.
Es ist $33 \cdot 37 = 30 \cdot 40 + 3 \cdot 7$; $62 \cdot 68 = 60 \cdot 70 + 2 \cdot 8$.
Bilden Sie weitere Beispiele dieser Art! Versuchen Sie, durch Verallgemeinerung dieser Beispiele zu einer Rechenregel zu gelangen, und beweisen Sie diese Regel!
14. Beweisen Sie die folgende Aussage!
Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden jedes Rechtecks mit den Seiten a und b sind für $a \neq b$ die vier Ecken eines Quadrats.
Analysieren Sie den Beweis gemäß Beispiel 2, indem Sie die benutzten Sätze zusammenstellen und gegebenenfalls weiter zurückführen! (Was geschieht bei $a = b$?)
15. Zeigen Sie, daß aus dem kommutativen Gesetz $a \cdot b = b \cdot a$ und dem „rechtseitigen“ Distributionsgesetz $(a + b)c = ac + bc$ das „linksseitige“ Distributionsgesetz $a(b + c) = ab + ac$ folgt!
16. Jemand beweist den Satz:
Wenn für die Seiten a, b, c eines Dreiecks gilt $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig, wobei der rechte Winkel der Seite c gegenüberliegt.
Er zeigt zu diesem Zweck mittels des Kosinussatzes, daß bei Dreiecken, die nicht rechtwinklig sind, $a^2 + b^2 \neq c^2$ gilt.
- Beurteilen Sie diese Schlußweise!
 - In welchem Zusammenhang steht der angeführte Satz mit dem Satz des PYTHAGORAS?
17. Beweisen Sie:
Für jedes rechtwinklige Dreieck liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden.
Wie müßte man den Beweis ansetzen, um zu zeigen, daß das nur für rechtwinklige Dreiecke gilt? Versuchen Sie auch diesen Beweis!
18. Für jede natürliche Zahl n gilt $2^n > n$.
Nehmen Sie Stellung zu folgenden Beweisführungen:
- Stellt man die Funktionen $y = 2^x$ und $y = x$ mit Hilfe einer Wertetafel in einem kartesischen Koordinatensystem graphisch dar, so erkennt man, daß das Bild von $y = 2^x$ stets oberhalb des Bildes von $y = x$ verläuft. Das bedeutet, daß für gleiche x stets gilt $2^x > x$.

b) Der Beweis wird indirekt geführt:

Man nimmt an, es sei $2^n \leq n$. Beispiele zeigen, daß diese Annahme falsch ist: $2^1 > 1$; $2^2 > 2$; $2^3 > 3$. Folglich muß gelten $2^n > n$.

19. Beurteilen Sie den folgenden Nachweis für die Gültigkeit des Wurzelgesetzes

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}!$$

Aus $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ folgt durch Potenzieren jeder Gleichungsseite mit n

$$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n,$$

und wegen der Gültigkeit des Potenzgesetzes $(u \cdot v)^n = u^n \cdot v^n$ für alle reellen u, v ist

$$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \quad \text{oder} \quad a \cdot b = b \cdot a,$$

womit das behauptete Gesetz bewiesen ist.

20. Beurteilen Sie den folgenden Beweis für den Winkelsummensatz, der ohne Parallelenaxiom auskommt (Abb. 1.3)!

Wir teilen das Dreieck ABC mittels einer Geraden durch C in zwei Teildreiecke. Bezeichnen wir mit x die uns zunächst unbekannte Winkelsumme, so gilt:

$$\alpha + \gamma_1 + \delta_1 = x; \quad \beta + \gamma_2 + \delta_2 = x.$$

Daraus ergibt sich durch Addition:

$$\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 = 2x.$$

Da $\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2$ die Winkelsumme des Dreiecks ABC ist, folgt $\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = x$. Die Winkel δ_1 und δ_2 ergeben als Nebenwinkel zusammen 180° , also erhalten wir $x + 180^\circ = 2x$, woraus sich $x = 180^\circ$ ergibt.¹

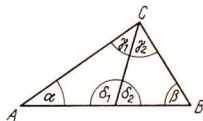


Abb. 1.3.

1.1.3. Die vollständige Induktion

- 10. Geben Sie einen algebraischen Ausdruck in n an, aus dem sich genau die geraden (bzw. ungeraden) Zahlen ergeben, wenn man für n nacheinander die natürlichen Zahlen einsetzt! Setzen Sie $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 17$, $n = k - 1$, $n = k + 1$, $n = k + 3$!
- 11. Ermitteln Sie einen entsprechenden Ausdruck, der alle die natürlichen Zahlen darstellt, die bei Division durch 7 den Rest 3 lassen! Für welche n erhalten Sie die Zahlen 31, 101, 150?
- 12. Beweisen Sie das Potenzgesetz:
Für alle reellen a, b und alle natürlichen Zahlen n gilt $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$!
- 13. Durch EDOUARD LUCAS ist die folgende, wahrscheinlich sehr alte Aufgabe bekannt geworden:
Ein Brett trägt drei Stifte A, B und H , auf die man zylindrische, in der Mitte durchbohrte Scheiben verschiedener Größe stecken kann. Zunächst sind die Scheiben der Größe nach auf dem Stift A angeordnet (Abb. 1.4.). Sie sollen einzeln zum Stab B gebracht werden, um dort wieder einen

¹ Nach J. S. DUBNOW: Fehler in geometrischen Beweisen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958, S. 13.

solchen Turm zu bilden; dabei darf der Hilfsstift H zum Ausweichen benutzt werden. Die einzige Einschränkung besteht darin, daß niemals eine größere über einer kleineren Scheibe liegen darf, weder bei A und B noch bei H .

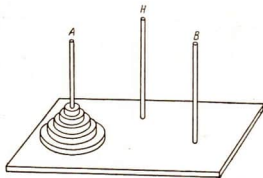


Abb. 1.4.

- a) Versuchen Sie, die Aufgabe mit 3 und dann mit 4 Scheiben zu lösen, und zählen Sie, wieviel Umsetzungen Sie dazu benötigen! (Statt der Kreisscheiben kann man auch Münzen verschiedener Größe benutzen, und an die Stelle der Stifte können markierte Stellen auf einem Blatt Papier treten.)
- b) Das eigentliche Problem besteht aber nicht im Umsetzen, sondern darin, mit möglichst wenig Umsetzungen auszukommen. Stellen Sie fest, ob ihre Anzahlen aus a) minimal waren und welches die Minimalzahl für 8 Scheiben ist! Anleitung: Beginnen Sie Ihre Überlegungen mit einer Scheibe! Schreiben Sie dann über zwei Scheiben, drei Scheiben usw. bis $n = 8$ fort!
- c) Versuchen Sie, eine allgemeine Formel für das Umsetzen von n Scheiben aufzustellen und ihre Gültigkeit zu erläutern!

Im Abschnitt 1.1.2. wurde die Induktion als Schluß vom Besonderen auf das Allgemeine gekennzeichnet; daraus ergab sich die besprochene Unsicherheit der erschlossenen Aussagen. Eine gewisse Sonderstellung nehmen Schlüsse folgender Art ein:

Die Elemente Fluor, Chlor, Brom, Jod und Astat bilden die siebente Hauptgruppe im Periodensystem der Elemente.

Aus folgenden Aussagen wird geschlossen:

- (1) Fluor hat sieben Außenelektronen.
- (2) Chlor hat sieben Außenelektronen.

Für Brom, Jod und Astat können gleichartige Aussagen, die Aussagen (3) bis (5), aufgestellt werden.

Daraus wird geschlossen, daß die Elemente der siebenten Hauptgruppe im Periodensystem der Elemente alle die gleiche Anzahl Außenelektronen haben.

Soweit bisher bekannt ist, bilden nur diese Elemente die siebente Hauptgruppe.

Aus diesem Grunde ist dieser Induktionsschluß in gewisser Weise „vollständig“. Die gewonnene Aussage ist genauso zuverlässig wie die Ausgangsaussagen; ihr haftet also nicht die Ungewißheit, die bei den üblichen Induktionsschlüssen auftritt, an.

Ein dieser Schlußweise verwandtes Vorgehen gibt es auch in der Mathematik, wenn Beweise für eine Gesamtheit von Fällen geführt werden, indem man diese erschöpfend in Teilfälle aufspaltet und die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage in jedem dieser Fälle zeigt.

Beispiel 5

Ein wichtiger Satz der Kreislehre lautet:
Jeder Peripheriewinkel eines Kreises ist halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Bogen.

Diesen Satz beweist man meist, indem man seine Gültigkeit für die folgenden drei Fälle einzeln nachweist:

- I. Ein Schenkel des Peripheriewinkels geht durch den Kreismittelpunkt (Abb. 1.5).
- II. Der Kreismittelpunkt liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels (Abb. 1.6).
- III. Der Kreismittelpunkt liegt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels (Abb. 1.7).

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft.

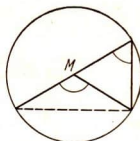


Abb. 1.5.

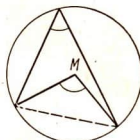


Abb. 1.6.

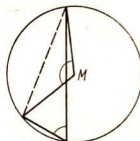


Abb. 1.7.

14. *Durchdenken Sie, wie eine entsprechende erschöpfende Einteilung für die Beweise von Sinussatz und Kosinussatz erfolgen muß!*

15. *Beweisen Sie die Aussage, daß für jede natürliche Zahl n der Ausdruck $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ ganzzahlig ist!*

Anleitung: Nutzen Sie für eine Fallunterscheidung das Restverhalten von n bei Teilung durch 3 aus!

Die Bezeichnung „vollständige Induktion“ ist jedoch in der Mathematik für Schlüsse dieser Art nicht gebräuchlich. Sie ist vielmehr einem Beweisverfahren vorbehalten, das eigentlich deduktiver Natur ist; die Bezeichnung ist also etwas unglücklich. Sie erklärt sich jedoch durch eine gewisse äußerliche Ähnlichkeit mit induktiven Schlüssen nach bloßer Aufzählung (Aufgabe 1. in 1.1.1.).

Im Abschnitt 1.1.2. wurde als ein besonderer Vorteil des deduktiven Vorgehens herausgestellt, daß allgemeingültige Sätze bewiesen werden können. Es handelt sich dabei also um Aussagen, in denen von allen mathematischen Gegenständen einer bestimmten Art (allen rationalen Zahlen, Dreiecken, Prismen, quadratischen Funktionen od. dgl.) die Rede ist, auch wenn es sich dabei um unendlich viele handelt. Recht häufig sind Aussagen, in denen alle natürlichen Zahlen n , also alle Zahlen 1, 2, 3 ... auftreten. Solche Aussagen sind zum Beispiel:

(1) Für alle n gilt: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. (Schülerauftrag 12)

(2) Für alle n ist $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ ganzzahlig. (Schülerauftrag 15)

(3) Die Winkelsumme im n -Eck beträgt $(n - 2) 180^\circ$.

Für manche solcher Aussagen ist der Beweis durch vollständige Induktion bequemer als andere Beweise; für viele ist er sogar unbedingt nötig, weil eine exakte Zurück-

führung auf Axiome oder aus diesen bewiesene Sätze anders nicht möglich ist. Dies gilt zum Beispiel für die Aussage (1), denn das übliche Verfahren mit

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{n\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n\text{-mal}} = a^n b^n$$

ist eigentlich nicht mehr als eine Veranschaulichung, eine Übertragung des bei festen natürlichen Zahlen wie 3, 7, 18 oder dgl. berechtigten Vorgehens auf den variablen Exponenten n . Um das Beweisverfahren durch vollständige Induktion verstehen und anwenden zu lernen, betrachten wir zunächst das Axiomensystem, das, in geringfügig anderer Form, erstmals der italienische Mathematiker und Logiker PEANO (1858–1932) dem Arbeiten mit natürlichen Zahlen zugrunde legte:

- (I) Es ist 1 eine natürliche Zahl.¹
- (II) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau eine natürliche Zahl n' , die (unmittelbarer) Nachfolger von n ist.
- (III) Die Zahl 1 ist nicht unmittelbarer Nachfolger einer natürlichen Zahl, das heißt, es gibt kein n mit $n' = 1$.
- (IV) Jede natürliche Zahl ist unmittelbarer Nachfolger höchstens einer Zahl, das heißt, aus $n' = m'$ folgt $n = m$.
- (V) Eine Menge M natürlicher Zahlen enthält alle natürlichen Zahlen, falls gilt:
 1. M enthält die natürliche Zahl 1.
 2. Wenn M die natürliche Zahl n enthält, so enthält sie auch deren Nachfolger n' .

● 16. *Verdeutlichen Sie sich den Inhalt der Axiome (I) bis (IV)! (Welche natürliche Zahl ist zum Beispiel der unmittelbare Nachfolger von 71? Warum mußte im Axiom (IV) ein „höchstens“ eingefügt werden?) Wie lautet das Axiomensystem, wenn 0 als natürliche Zahl angesehen wird? Charakterisieren Sie entsprechend den Bereich der negativen ganzen Zahlen! Welche der Aussagen (I) bis (IV) bleiben gültig, wenn man „natürliche Zahl“ durch „rationale Zahl“ ersetzt?*

Das Axiom (V) erfaßt die – ihrerseits induktiv gewonnene – Erkenntnis, daß man von 1 aus durch fortgesetzte Nachfolgerbildung die Folge der natürlichen Zahlen gewinnt. Es stellt die Grundlage für das sogenannte **Prinzip der vollständigen Induktion** dar, das man kurz so erklären kann:

Ist eine Aussage, in der von allen natürlichen Zahlen n die Rede ist, für $n = 1$ bewiesen, und ist ferner nachgewiesen, daß sich aus der Gültigkeit der Aussage für eine beliebige natürliche Zahl notwendig ihre Gültigkeit für deren Nachfolger ergibt, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen. Aus der Gültigkeit für 1 folgt nämlich dann die Gültigkeit für 2, aus dieser wiederum die Gültigkeit für 3, daraus die Gültigkeit für 4 usw.; demzufolge gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen.

¹ Sieht man, was häufig als zweckmäßig empfunden wird, auch 0 als natürliche Zahl an, so muß hier und in den folgenden Axiomen 0 an die Stelle von 1 treten.

- 17. Bei einem Ausflug läuft Ihre Klasse im „Gänsemarsch“ mit Ihnen an der Spitze auf einem engen Waldpfad.
1. Sie bemerken ein Vogelnest.
 2. Es ist verabredet, daß jeder eine Beobachtung (bzw. deren Mitteilung) an seinen Hintermann weitergibt.
- Was können Sie dann bezüglich der Kenntnis Ihrer Beobachtung seitens Ihrer Mitschüler schließen?
- 18. Man kann sich das Verfahren der vollständigen Induktion auch an einer Reihe hintereinander aufgestellter Dominosteine veranschaulichen (Abb. 1.8. u. 1.9.). Formulieren Sie hier die Bedingungen 1. und 2.¹



Abb. 1.8.



Abb. 1.9.

In beiden betrachteten Fällen enthalten die Mengen nur endlich viele Elemente (Schüler, Dominosteine). Die Folge der natürlichen Zahlen ist aber unendlich. Insofern kann man bei dem oben angedeuteten Vorgehen von 1 auf 2, von 2 auf 3, von 3 auf 4 usw. niemals alle natürlichen Zahlen wirklich erfassen. Diese Schwierigkeit wird beseitigt durch den folgenden „Satz über die Rechtfertigung induktiver Beweise“, der aus dem Axiom (V) folgt:

- ▶ **Prinzip der vollständigen Induktion:**
 Eine Aussage $H(n)$ ist richtig für jede natürliche Zahl n , wenn folgendes gilt:
1. $H(n)$ ist richtig für $n = 1$.
 2. Aus der Gültigkeit von $H(n)$ für $n = k$ folgt stets die Gültigkeit für $n = k + 1$. Dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl.

(Obwohl in dem PEANOSchen Axiomensystem die Addition noch nicht auftritt, wird im folgenden für den Nachfolger n' von n meist geschrieben $n + 1$.)

- ▶ Für den Beweis der Aussage $H(n)$ durch vollständige Induktion sind also zunächst zwei Beweisschritte notwendig:
1. **Induktionsanfang:** Man zeigt, daß $H(1)$ gilt.
 2. **Induktionsschritt:** Man zeigt, daß aus der Richtigkeit von $H(k)$ (Induktionsvoraussetzung) die Richtigkeit von $H(k + 1)$ (Induktionsbehauptung) folgt.
- Dabei müssen die Schlüsse so erfolgen, daß sie an kein spezielles k gebunden sind, d. h., daß man sich für k jede beliebige natürliche Zahl eingesetzt denken darf.
- Unter Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion kann man dann die Gültigkeit von $H(n)$ für alle n folgern.

¹ Nach H. STEINHAUS: *Kaleidoskop der Mathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959, S. 46.

Manchmal ist es üblich, den Induktionsschritt ohne Verwendung eines neuen Symbols k direkt mit n auszuführen. Daher trägt auch der Beweis durch vollständige Induktion den Namen **Schluß von n auf $n + 1$** .

Beispiel 6

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen beträgt

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

Für $n = 1$ ist die Formel richtig: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

2. **Induktionsschritt:** Es wird nun gezeigt, daß aus der Richtigkeit der Formel für $n = k$ ihre Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt.

Induktionsvoraussetzung: Die Formel sei für $n = k$ richtig, also

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Induktionsbehauptung: Die Formel gilt auch für $n = k + 1$, also

$$1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Beweis der Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung:

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird umgeformt:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Das ist aber gerade die in der Induktionsbehauptung aufgestellte Formel, und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt wegen des Induktionsanfangs die behauptete Formel für alle natürlichen Zahlen n .

Beispiel 7

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $2^n > n$. Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt die Aussage: $2^1 > 1$.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $2^k > k$

Induktionsbehauptung: $2^{k+1} > k + 1$

Beweis der Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung:

Es ist $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$; also gilt nach Induktionsvoraussetzung $2^{k+1} > 2k$.

Wegen $2k = k + k \geq k + 1$ für $k \geq 1$ gilt dann $2^{k+1} > k + 1$.

Damit ist die Induktionsbehauptung und somit die behauptete Formel für alle natürlichen Zahlen bewiesen.

- 19. Erläutern Sie, warum die folgende Beweisführung im Induktionsschritt falsch ist!

Aus

$$2^{k+1} > k + 1 \quad (k \geq 1)$$

folgt

$$2 \cdot 2^k > k + 1,$$

also

$$2^k + 2^k > k + 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $2^k > k$, und da $2^k > 1$ ist, ist der Beweis erbracht.

- 20. Überlegen Sie, ob es bei den Beispielen 1 und 2 auch möglich ist, für den Induktionsanfang $n = 0$ zu wählen!

Zuweilen liegt der Induktionsanfang nicht bei $n = 1$ (bzw. $n = 0$), sondern erst später, weil eine Formel erst für größere n gilt oder es in einem bestimmten Zusammenhang sinnlos ist, $n = 1$ zu setzen. Die Aussage (3) von S. 16 wird zum Beispiel frühestens sinnvoll für $n = 2$, wobei dann die Winkelsumme im „Zweieck“ 0° beträgt.

Beispiel 8

Zu beweisen ist, daß die Summe der Innenwinkel in einem (ebenen) n -Eck $(n - 2) \cdot 180^\circ$ beträgt.

1. **Induktionsanfang:** Für $n = 3$ ist die Formel richtig, da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.

2. **Induktionsschritt:**

Induktionsvoraussetzung:

Die Winkelsumme im m -Eck beträgt $(m - 2) \cdot 180^\circ$.

Induktionsbehauptung:

Die Winkelsumme im $(m + 1)$ -Eck beträgt $(m - 1) \cdot 180^\circ$.

Beweis der Induktionsbehauptung: Ein $(m + 1)$ -Eck läßt sich stets in ein Dreieck und ein m -Eck zerlegen, indem man durch eine Diagonale zwei passend gewählte Eckpunkte des $(m + 1)$ -Ecks miteinander verbindet, die nur durch einen weiteren Eckpunkt voneinander getrennt sind. Unter Beachtung des Induktionsanfangs und bei Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf das m -Eck ergibt sich die behauptete Formel für das $(m + 1)$ -Eck, womit die Formel für beliebige n -Ecke bewiesen ist.

21. Zeigen Sie, daß sich die Winkelsummenformel für konvexe¹ n -Ecke auch ohne vollständige Induktion beweisen läßt!

Beispiel 9

Gesucht ist eine Formel für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, also $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

Um die Formel erst einmal vermuten zu können, betrachten wir nacheinander einige Spezialfälle:

$$n = 1: \quad 1 = 1 (= 1^2)$$

$$n = 2: \quad 1 + 3 = 4 (= 2^2)$$

$$n = 3: \quad 1 + 3 + 5 = 9 (= 3^2)$$

$$n = 4: \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 (= 4^2)$$

Daraus vermuten wir allgemein:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Den Beweis für diese Formel führen wir durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

Für $n = 1$ ist die Formel gewiß richtig. Wir haben sie ja durch Verallgemeinerung aus Einzelfällen erhalten, in denen der Fall $n = 1$ enthalten war.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$

Induktionsbehauptung: $1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$

Beweis der Induktionsbehauptung:

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1).$$

Es ist aber gerade $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Damit ist die Induktionsbehauptung und folglich auch die vermutete Formel bewiesen.

Bei all diesen Beispielen wird ein Nachteil des Schlusses von n auf $n + 1$ deutlich: Nach diesem Verfahren ist es nicht möglich, eine Aussage zu ermitteln. Es ermöglicht lediglich den Beweis einer bereits (z. B. auf induktivem Wege durch Betrachtung von Spezialfällen) vermuteten Aussage. Allerdings führt das Verfahren der vollständigen Induktion auch dazu, vermutete falsche Aussagen als solche zu erkennen und damit zu verwerfen.

Beispiel 10

Gesucht ist eine Formel für die Summe der Potenzen von 2, also

$$s_n = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n \quad n = 0: s_0 = 1 \quad n = 1: s_1 = 3$$

Voreilig wurde vermutet, daß $s_n = 2n + 1$ gilt.

¹ Eine Figur (als Fläche verstanden) heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte der Figur stets innerhalb der Figur liegt, also wieder nur Punkte der Figur enthält. Konvexe Vielecke haben zum Beispiel keine überstumpfen Winkel.

Es wird der Versuch unternommen, diese Beziehung durch vollständige Induktion zu beweisen.

1. Induktionsanfang: Gesichert durch die Anfangsbetrachtung.

2. Induktionsschritt:

$$\text{Induktionsvoraussetzung: } 2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2k + 1$$

$$\text{Induktionsbehauptung: } 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k+1} = 2k + 3$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist aber

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2k + 1 + 2^{k+1}.$$

Diese Folgerung stimmt aber nur dann mit der Induktionsbehauptung überein, wenn $2^{k+1} = 2$ ist. Das ist aber nur für $k = 0$ der Fall. Die Tatsache, daß aus der (angenommenen) Richtigkeit der vermuteten Formel für $k \neq 0$ ihre Unrichtigkeit für $k + 1$ folgt, zeigt, daß die Formel nicht für alle n gilt.¹

- 22. Ermitteln Sie durch Untersuchung weiterer Fälle ($n = 2, n = 3$) die zutreffende Formel für s_n , und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion!

Aufgaben

21. Beweisen Sie die Formel für die Mindestzahl von Umsetzungen beim LUCASSchen Turm aus n Scheiben, die Sie im Schülerauftrag 13 vermutet haben, mittels vollständiger Induktion!

22. Man beweise durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen $n \geq 0$ (bzw. $n \geq 1$) folgendes gilt!

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

c) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = n(3n + 1)$

d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

e) Die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 9 teilbar, das heißt, $\frac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{9}$ ist immer ganzzahlig.

f) $A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ist stets durch 133 teilbar.

23. Ermitteln Sie die folgenden Summen s_n , und beweisen Sie die Richtigkeit der vermuteten Formeln durch vollständige Induktion!

a) $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

b) $s_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

c) $s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ d) $s_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

¹ Allerdings folgt auf diese Weise nicht, daß die Formel für alle von 0 und 1 verschiedenen n falsch ist.

- e) $s_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n - 3)$
 f) Die Summe der ersten n Zahlen, die bei der Teilung durch 9 den Rest 7 lassen.
 g) $s_n = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}$
24. Ermitteln Sie, von welchem n ab die folgenden Ungleichungen gelten, und beweisen Sie die Behauptungen durch vollständige Induktion!
- a) $2^n > 2n$ b) $2^n > 2n + 1$ c) $2^n > n^2$
- Anleitung zu c: Benutzen Sie beim Beweis das Ergebnis von b!
25. Ermitteln Sie die Anzahl der Diagonalen in einem (ebenen) n -Eck, und beweisen Sie die gefundene Formel sowohl mittels vollständiger Induktion als auch ohne dieses Verfahren!
26. Beweisen Sie den folgenden Satz durch vollständige Induktion! Haben n verschiedene Geraden einer Ebene einen Punkt gemeinsam, so wird die Ebene von den Geraden in $2n$ Teile zerlegt.
27. a) Nehmen Sie Stellung zu folgendem Einwand gegen das Beweisverfahren der vollständigen Induktion: „Beim Beweis wird die Behauptung benutzt“!
 b) Erläutern Sie, inwiefern innerhalb des Beweises durch vollständige Induktion gewissermaßen nochmals ein Beweis steckt!

1.1.4. Induktive Definitionen, das Summenzeichen

Auch Potenzgesetze wie $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (Schülerauftrag 12) können jetzt exakt durch vollständige Induktion bewiesen werden. Dabei ist zu beachten, daß eigentlich auch die Erklärung der Potenz durch $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$ einer Präzisierung bedarf.

Man wendet deshalb schon bei der Definition der Potenz ein mit der vollständigen Induktion in engem Zusammenhang stehendes Verfahren an, das Verfahren der **induktiven Definition**:

$$(1) \quad a^0 = 1$$

$$(2) \quad a^{n+1} = a^n \cdot a$$

23. Überdenken Sie den Zusammenhang dieser Erklärung mit dem Axiom (V) bzw. dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion, und versuchen Sie, die Bezeichnung **Rekursionsformel**¹ für Gleichungen wie (2) zu erläutern! Beweisen Sie unter Ausnutzung dieser Festsetzung das Gesetz über das Potenzieren eines Produkts!

Auch Addition und Multiplikation werden beim streng axiomatischen Aufbau der Lehre von den natürlichen Zahlen, die als Grundlage der gesamten Arithmetik dient, induktiv erklärt:

$$(1) \quad m + 1 = m'$$

$$(2) \quad m + n' = (m + n)'$$

[Von der Festsetzung (1) haben wir bereits ständig in den Formulierungen der vollständigen Induktion Gebrauch gemacht.]

¹ recurrere (lat.), zurücklaufen, (auf etwas) zurückkommen.

- 24. Überzeugen Sie sich durch Einsetzen für m und n , daß die uns bekannte Addition diesen Forderungen entspricht! Versuchen Sie entsprechend, durch Festlegungen für $m \cdot 1$ und $m \cdot n'$ die Multiplikation induktiv zu erklären!

Die induktiven Erklärungen der Rechenoperationen sind gerechtfertigt, weil man zeigen kann, daß es jedesmal genau eine Operation gibt, die den Forderungen entspricht. Auf den Beweis dieser Tatsache [ebenfalls unter Benutzung des Axioms (V)] kann hier nicht näher eingegangen werden.

- 25. Beweisen Sie durch vollständige Induktion das Assoziationsgesetz der Addition!
 „Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$.“
 Wählen Sie als Induktionsanfang $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$, indem Sie die Festsetzung der Addition ausnutzen! Der Beweis ist also durch „vollständige Induktion über c “ zu führen.

Auch das Kommutationsgesetz $a + b = b + a$ läßt sich so beweisen, nur muß man dabei den Schluß durch vollständige Induktion zweimal („über a “ und „über b “) anwenden, indem man den Induktionsanfang $a + 1 = 1 + a$ seinerseits wieder durch vollständige Induktion beweist. Dabei ist dann $1 + 1 = 1 + 1$ der Induktionsanfang. Auch die entsprechenden Gesetze der Multiplikation $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ und $a \cdot b = b \cdot a$ sowie das Distributionsgesetz $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ können durch vollständige Induktion bewiesen werden.

- 26. Erläutern Sie, warum beim Beweis des Assoziationsgesetzes die vollständige Induktion nicht dreimal (über a, b und c) angewandt zu werden brauchte!

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n die Potenzgesetze

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ für } n \leq m \text{ und } (a^m)^n = a^{m \cdot n}!$$

Nutzen Sie dabei für den Induktionsanfang die induktive Definition der Potenz aus!

Einige vorn angeführte Beispiele und Aufgaben haben deutlich gemacht, daß häufig Summenformeln durch vollständige Induktion bewiesen werden. Um die Schreibweise im folgenden zu vereinfachen, benutzen wir das von EULER¹ 1753 eingeführte und seither in der Mathematik üblich gewordene Kurzzeichen \sum^2 :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k \text{ (lies: Summe über alle } k \text{ von } k = 1 \text{ bis } n).$$

Entsprechend ist

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

[lies: Summe $\frac{1}{k(k+1)}$ von $k = 1$ bis n]

¹ LEONHARD EULER (1707–1783).

² Griechischer Großbuchstabe „Sigma“, entspricht dem S in der lateinischen Schrift.

Die Erklärung des Summenzeichens ist allerdings bisher ähnlich unbefriedigend wie es die Erklärung der Potenz vor der induktiven Definition auf S. 23 war. Im Abschnitt 1.4. wird auch der Gebrauch des Summenzeichens präzisiert werden.

Aufgaben

28. Schreiben Sie die Summen in den Aufgaben 22a bis 22d und 23 mit Summenzeichen!
 29. Schreiben Sie die folgenden Summen für $n = 5$ ausführlich, und untersuchen Sie die angegebenen Formeln auf ihre Gültigkeit!

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\text{b) } \sum_{v=1}^n \frac{1}{(4v-3)(4v+1)} = \frac{2n}{9n+1}$$

$$\text{c) } \sum_{m=1}^n \frac{1}{(a+m-1)(a+m)} = \frac{n}{a(n+a)}$$

$$\text{d) } \sum_{\varrho=1}^n \frac{1}{\varrho(\varrho+2)} = \frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$$

$$\text{e) } \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$\text{f) } \sum_{k=0}^n 8^k = \frac{8^n - 1}{7}$$

Bei welchen der Aufgaben 29a bis e könnte die Summation schon bei 0 beginnen? Sollten Sie auf fehlerhafte Formeln gestoßen sein, so stellen Sie sie richtig!

30. Beweisen Sie, daß die Summe der Kuben der natürlichen Zahlen von 1 bis n gleich dem Quadrat der Summe dieser natürlichen Zahlen ist!
 31. Ermitteln Sie Formeln für die folgenden Summen, und weisen Sie ihre Richtigkeit nach!

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n 6^k \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} \quad \text{c) } \sum_{m=1}^n \frac{1}{(3m-2)(3m+1)}$$

$$\text{d) } \sum_{v=1}^n (2v-1)^2 \quad \text{e) } \sum_{k=2}^n k \cdot 2^{k-1}$$

32. Es ist

$$s_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

- a) Schreiben Sie auch diese Summe unter Verwendung des Summenzeichens! (Beachten Sie dabei den Vorzeichenwechsel!)
 b) Beweisen Sie die Aussage!
 33. Jede Potenz einer ungeraden Zahl mit geradem Exponenten läßt bei Division durch 8 den Rest 1.
 a) Beweisen Sie diese Aussage!
 b) Zeigen Sie, daß sich aus ihr der folgende Satz ergibt!
 Jede Potenz einer ungeraden Zahl mit ungeradem Exponenten läßt bei Division durch 8 denselben Rest wie die Basis.
 Anleitung zu a): Führen Sie den Beweis durch vollständige Induktion über den Exponenten! Das heißt, als Induktionsanfang ist nachzuweisen, daß die Behauptung für das Quadrat jeder ungeraden Zahl gilt.
 34. Beweisen Sie, daß folgende Brüche für kein natürliches n zu kürzen sind!

$$\text{a) } \frac{9n+1}{18n+3} \quad \text{b) } \frac{22n+5}{33n+7}$$

35. Es gilt $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ für $n > 1$

- Schreiben Sie die Summe unter Benutzung des Summenzeichens!
- Beweisen Sie die Ungleichung durch vollständige Induktion!

36. Beweisen Sie die BERNOULLISCHE¹ Ungleichung!

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha \quad \text{für } \alpha > -1 \text{ und } \alpha \neq 0 \text{ reell, } n > 1$$

Anleitung: Multiplizieren Sie zum Beweis der Induktionsbehauptung in der Induktionsvoraussetzung beiderseits mit $(1 + \alpha)$!

Überlegen Sie, warum $\alpha > -1$ vorausgesetzt werden muß!

1.2. Permutationen

1.2.1. Vorbereitende Übungen

- Auf wieviel Arten lassen sich die drei Buchstaben a, l, t anordnen, das heißt, wieviel dreibuchstabile „Wörter“ lassen sich aus ihnen bilden, wenn kein Buchstabe mehrmals vorkommen darf? (Dabei sollen auch solche Anordnungen wie lta als „Wörter“ gezählt werden.)
- Untersuchen Sie, welche der folgenden Fragen auf das gleiche mathematische Problem führen!
 - Wieviel Anordnungsmöglichkeiten bestehen für die Buchstaben a, b, e, r ?
 - Wieviel fünfbuchstabile „Wörter“ lassen sich aus den Buchstaben e, i, k, r, s bilden, wenn alle Buchstaben auch mehrmals auftreten dürfen, zum Beispiel $kkikr$?
 - Wieviel Möglichkeiten des Einlaufs gibt es bei einem Laufwettbewerb, an dem sechs Sportler teilnehmen?
 - Auf wieviel Arten kann man aus 15 Stammspielern einer Fußballmannschaft elf Spieler auswählen, um aus ihnen die „Elf“ zusammenzustellen, wenn wir annehmen, daß jeder Spieler in jeder Position spielen kann?
 - Wieviel Möglichkeiten der Aufstellung, das heißt der Zuordnung der Zahlen 1 bis 11 zu diesen ausgewählten Spielern gibt es?
 - Wieviel Sitzordnungen gibt es für acht Personen?
 - Wieviel Zeichen kann man aus den „elementaren“ Morsezeichen \cdot und $-$ kombinieren, wenn ein Zeichen höchstens sechs Punkte oder Striche umfassen darf?
 - Wieviel Verbindungen lassen sich in einem Fernsprechnetzt mit fünfstelligen Nummern herstellen, wenn tatsächlich die maximal möglichen 100000 Anschlüsse vorhanden sind?

1.2.2. Permutationen als Anordnungen

Verschiedene Fragestellungen führen auf das mathematische Problem, alle Anordnungsmöglichkeiten der **Elemente** endlicher Mengen zu untersuchen. Da eine Anordnung aus einer anderen durch *Vertauschen* gewisser Elemente hervorgeht, spricht man hier von **Permutationen**².

► Jede Anordnung von n Elementen nennt man eine **Permutation** dieser Elemente.

¹ JACOB BERNOULLI (1654–1705).

² permutare (lat.), vertauschen.

Schon in den vorbereitenden Übungen trat als eine grundlegende Frage die nach der Anzahl der Permutationen auf. Symbolisch wird im folgenden die Anzahl der Permutationen von n Elementen mit $P(n)$ bezeichnet.

Beispiel 1

Zu bestimmen ist die Anzahl der Permutationen von drei Elementen, die mit a, b, c bezeichnet werden.

Lösung:

Wenn a an erster Stelle steht, besteht außer der Permutation abc nur noch eine weitere, zu der man durch Vertauschen von b und c gelangt: acb . An Stelle von a kann auch b oder c als erstes Element auftreten, wobei sich auch jeweils zwei Möglichkeiten ergeben. Insgesamt existieren demnach die sechs Permutationen: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$; also ist $P(3) = 6$.

Nimmt man noch ein viertes Element d hinzu, fragt also nach $P(4)$, so erhält man: Das Element d kann jeder der Permutationen aus drei Elementen als erstes, zweites, drittes oder viertes hinzugefügt werden. So ergeben sich

$dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba,$
 $adb c, adcb, bdac, bdca, cdab, cdba,$
 $abdc, acdb, badc, bcda, cadb, cbda,$
 $abcd, acbd, bacd, bcad, cabd, cbad.$

Demnach ist $P(4) = 24$.

1. Fügen Sie ein fünftes Element e hinzu, und erläutern Sie, wie sich dadurch die Anzahl der Permutationen verändert!
2. Beantworten Sie alle Fragen aus Abschnitt 1.2.1., Aufgabe 2, soweit sie Permutationen betreffen!

Allgemein kann man das n -te Element bei Permutationen von n Elementen zu jeder der $P(n - 1)$ Permutationen von $n - 1$ Elementen an erster, zweiter, ..., n -ter Stelle hinzufügen. Demnach lassen sich n Elemente also gerade n -mal so oft permutieren wie $n - 1$ Elemente.

Es gilt die wichtige **Rekursionsformel**

$$P(n) = n \cdot P(n - 1)$$

Beispiel 2

Zu bestimmen ist die Anzahl der Permutationen von 7 Elementen, also $P(7)$.

Lösung:

Ein Element läßt sich

nur auf eine Weise anordnen, das heißt $P(1) = 1$

$P(2) = 2 \cdot P(1) = 2 \cdot 1$ $P(2) = 2$

$P(3) = 3 \cdot P(2) = 3 \cdot 2 \cdot 1$ $P(3) = 6$

$P(4) = 4 \cdot P(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ $P(4) = 24$

$$P(5) = 5 \cdot P(4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad P(5) = 120$$

$$P(6) = 6 \cdot P(5) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad P(6) = 720$$

$$P(7) = 7 \cdot P(6) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad P(7) = 5040$$

Sieben Elemente ermöglichen also 5040 Permutationen.

Dieses Beispiel zeigt, daß man bei Benutzung der rekursiven Darstellung für $P(n)$ in Form von $P(n) = n \cdot P(n-1)$ zur Bestimmung von $P(n)$ immer erst $P(n-1)$ berechnen muß. Man gelangt aber auch leicht zu einer Darstellung, die die Bestimmung von $P(n)$ ohne vorherige Kenntnis eines $P(k)$ mit $k < n$ ermöglicht.

Es gilt

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

3. Beweisen Sie diese Formel durch vollständige Induktion!

Um die Darstellung zu vereinfachen, hat man für das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n das Symbol $n!$ (lies „ n -Fakultät“) eingeführt.

Abkürzend kann man schreiben

$$P(n) = n!$$

Streng genommen handelt es sich jedoch auch bei

$$P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

nicht um eine sogenannte *independent*¹ Darstellung, also um eine Darstellung, in der $P(n)$ unabhängig von $P(n-1)$ erscheint. Das kommt auch darin zum Ausdruck, daß die Fakultätsschreibweise exakt induktiv definiert wird, wobei man im allgemeinen von der Festsetzung $0! = 1$ ausgeht:

$$0! = 1; \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

4. Wie groß ist die Anzahl der möglichen Sitzordnungen in einer Klasse mit 22 Schülern, wenn der Klassenraum genau 11 Zweierbänke enthält? Wie ändert sich das Problem, wenn die Anzahl der verfügbaren Sitzplätze größer ist?

5. Beweisen Sie durch vollständige Induktion das folgende Gesetz!

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

Steht man vor der Aufgabe, alle Permutationen von n Elementen wirklich anzugeben, so ist es zweckmäßig, eine bestimmte Reihenfolge einzuhalten. Die übersichtlichste und bequemste Art, Permutationen zu ordnen, ist die lexikographische Reihenfolge. Dazu muß man eine **natürliche Anordnung** der Elemente, die permutiert werden, zugrunde legen, wie sie beispielsweise bei Buchstaben durch das Alphabet, bei Zahlen

¹ *dependere* (lat.), abhängen; daraus: independent, nicht abhängig, unabhängig.
Näheres über *independent* Darstellung wird auf Seite 45 mitgeteilt.

durch die Anordnung nach der Größe gegeben ist. In lexikographischer Reihenfolge steht demzufolge beim Permutieren der Elemente a, b, c, d, e die Permutation $abdec$ früher als $abedc$; beim Permutieren von $1, 2, 3, 4, 5, 6$ steht 354216 früher als 356142 .

- 6. Ordnen Sie die im Beispiel 1 aufgeführten Permutationen von a, b, c, d lexikographisch!
- 7. Beschreiben Sie, wie man vorgeht, wenn man alle Permutationen von a, b, c, d, e in lexikographischer Reihenfolge aufführen will!
- 8. Welche Permutationen stehen in der lexikographischen Reihenfolge noch zwischen $abdec$ und $abedc$ sowie zwischen 354216 und 356142 ?

Aufgaben

1. Wie groß ist die Summe aller Zahlen, die durch Permutation der Ziffern $2, 4, 6$ entstehen?
2. Wieviel fünfziffrige Zahlen lassen sich mit den Ziffern $0, 2, 4, 6, 8$ schreiben, wenn Zahlen, die mit 0 beginnen, nicht mit einbezogen werden?
3. Wieviel Permutationen der Elemente u, v, w, x, y, z beginnen a) mit w , b) mit xy , c) mit $vzxu$?
4. Acht Personen essen täglich in einer Gaststätte und wechseln von Tag zu Tag ihre Sitzordnung. Der Kellner hat ihnen ein Freisessen für den Tag versprochen, an dem sich erstmalig eine bereits vorher dagewesene Sitzordnung wiederholen muß. Wann tritt dieser Fall ein, wenn das erste Essen am 1. 1. 1963 stattfand?
5. In wieviel Permutationen von $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ stehen die Elemente 3 und 6 an vierter bzw. siebenter Stelle?
6. a) Wie groß ist die Anzahl der Permutationen von a, b, c, d, e, f, g, h , in denen die Elemente b, d, f, g in der angegebenen Reihenfolge nebeneinander stehen?
b) Wie ändert sich diese Anzahl, wenn nur gefordert wird, daß b, d, f, g nicht durch ein anderes Element getrennt werden dürfen, die Reihenfolge untereinander aber beliebig ist?
c) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse, indem Sie n Elemente betrachten, von denen m benachbart sein sollen!
7. Ermitteln Sie von allen mit 35 beginnenden Permutationen der Elemente $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ die in lexikographischer Reihenfolge siebente!
8. Geben Sie die in lexikographischer Reihenfolge erste und letzte derjenigen Permutationen von $1, 2, 3, 4, 5, 6$ an, die mit 52 beginnen!
9. a) Welches ist die in lexikographischer Reihenfolge 247-te Permutation von a, b, c, d, e, f ?
b) Geben Sie die nachfolgenden fünf Permutationen an!
10. Ermitteln Sie die in lexikographischer Reihenfolge 2709-te Permutation der Elemente $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$!
11. An wievielter Stelle unter den Permutationen von $1, 2, 3, 4, 5$ steht in lexikographischer Reihenfolge 24153?
12. An wievielter Stelle unter den Permutationen von a, e, f, h, n stehen *fahne* und *hafen*?
13. An wievielter Stelle unter den Permutationen der natürlichen Zahlen von 1 bis 8 steht 17583426?
14. Formen Sie die folgenden Ausdrücke um, indem Sie Brüche beseitigen oder zusammenfassen! Setzen Sie dann $n = 4$, und berechnen Sie die Werte!

a) $(n+1) \cdot n!$ b) $\frac{n!}{n-1}$ c) $\frac{(n+1)!}{n+1}$ d) $\frac{n-1}{(n-1)!}$ e) $\frac{(n+1)!}{n!}$ f) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$
 g) $\frac{(n-3)!}{(n-2)!}$ h) $\frac{(n+3)!}{(n-1)!}$ i) $\frac{(n+k)!}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)}$ k) $\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$
 l) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$ m) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$ n) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-2)!}$ o) $\frac{n!}{(n+3)!} + \frac{(n+1)!}{(n+4)!}$
 p) $\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right) \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$ q) $\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

15. Ermitteln Sie, wieviel Nullen am Ende der Zahl stehen, die sich durch Berechnung von $50!$ ergibt!

1.2.3. Permutationen als Abbildungen

Mathematisch fruchtbarer als die Untersuchung der Permutationen als Anordnungen, gewissermaßen als Ergebnisse von Vertauschungsprozessen, ist die Untersuchung der Vertauschungsprozesse selbst. Als Permutation betrachtet man dann also nicht die Anordnung, sondern den Übergang von einer Anordnung zur anderen. Bisher bezeichnete beispielsweise cab eine Permutation der Elemente a, b, c (natürliche Anordnung). Die Permutation cab entsteht aus abc , indem c an die Stelle von a , a an die Stelle von b und b an die Stelle von c tritt. Es liegt also eine umkehrbar eindeutige (eindeutige) Abbildung der (drei Elemente umfassenden) Menge (a, b, c) auf sich selbst vor. Symbolisch schreibt man $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$.

► Jede umkehrbar eindeutige Abbildung einer Menge von n Elementen ($n = 1, 2, 3, \dots$, also natürlich) auf sich selbst heißt eine Permutation dieser Menge.

Da die besondere Natur der Elemente für die Untersuchung der Permutationen als Abbildungen unwesentlich ist, bezeichnet man die Elemente meist mit Zahlen; zum Beispiel entspräche $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ der oben angegebenen Permutation $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$.

Allgemein kann man schreiben $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$; dabei sind die a_k ebenfalls genau die Zahlen von 1 bis n .

- 9. Schreiben Sie alle Permutationen von drei Elementen in dieser Form, und halten Sie sich dabei an die lexikographische Reihenfolge! Beachten Sie, daß auch die Abbildung, die jedes Element sich selbst zuordnet, also alle Elemente an ihrem Platz läßt, eine eindeutige Abbildung der Menge auf sich selbst, also eine Permutation, ist! Man nennt diese Abbildung **identische Permutation**.
- 10. Ergänzen Sie so, daß die in lexikographischer Reihenfolge 297te Permutation entsteht: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$! Fügen Sie die darauf folgenden fünf Permutationen hinzu!

Zwei Permutationen bezeichnet man dann und nur dann als gleich, wenn in beiden jedem Element der oberen Zeile ein und dasselbe Element der unteren Zeile zugeordnet ist.

So sind beispielsweise die Permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ gleich.

Sind in einer Permutation Elemente gegenüber ihrer natürlichen Anordnung vertauscht, so spricht man von **Inversionen**. So bilden zum Beispiel in der Permutation

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ die Paare (2, 3), (2, 4) und (3, 4) je eine Inversion.

▶ Betrachtet man in der Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ alle Paare (i, k) mit $i < k$, so spricht man jedesmal von einer Inversion, wenn $a_i > a_k$ ist.

▶ Ist die Anzahl der Inversionen einer Permutation gerade, so heißt die Permutation gerade, andernfalls ungerade.

Beispiel 3

Es ist zu untersuchen, ob die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ gerade oder ungerade ist.

Folgende Paare bilden Inversionen: (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4). Die Anzahl der Inversionen beträgt 6, es handelt sich also um eine gerade Permutation.

11. Untersuchen Sie an diesem Beispiel, wie sich die Anzahl der Inversionen ändert, wenn
 - a) zwei benachbarte Elemente vertauscht werden,
 - b) zwei beliebige Elemente vertauscht werden!
12. Teilen Sie alle Permutationen von drei Elementen in gerade und ungerade Permutationen ein!
13. Ermitteln Sie die Anzahl der Inversionen bei $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}!$
14. Wieviel Inversionen kann eine Permutation von 8 Elementen höchstens haben?

1.2.4. Verknüpfungen von Permutationen

Ein wesentlicher Vorteil der Betrachtung der Permutationen als Abbildungen besteht darin, daß man die Permutationen jetzt miteinander *verknüpfen* kann, so wie beispielsweise die ganzen Zahlen oder die rationalen Zahlen miteinander durch die Rechenoperationen verknüpft werden. Diese Verknüpfungen und die bei ihnen geltenden Gesetze werden dann zum Gegenstand weiterer Untersuchungen gemacht und führen zur Betrachtung allgemeiner Strukturen mit den gleichen Gesetzmäßigkeiten, die in verschiedenen Bereichen der Mathematik auftreten. Als **Verknüpfung von Permutationen** wird die Hintereinanderausführung betrachtet.

Beispiel 4

Vorgegeben seien die Permutationen $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Permutation, die sich ergibt, wenn p_1 und p_2 nacheinander auf die Elemente 1, 2, 3, 4 angewandt werden. Bei p_1 ist 4 an die Stelle von 1 getreten, bei p_2 wird diese 4 in 3 übergeführt. In Kurzform könnte man etwa schreiben

$$p_1: 1 \rightarrow 4 \quad p_2: 4 \rightarrow 3$$

Entsprechend gilt: $2 \rightarrow 3 \quad 3 \rightarrow 1$

$$3 \rightarrow 1 \quad 1 \rightarrow 2$$

$$4 \rightarrow 2 \quad 2 \rightarrow 4$$

Also ergibt sich beim Hintereinanderausführen von p_1 und p_2 (p_2 nach p_1) die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Man schreibt kurz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{also } p_1 \circ p_2 = p_3,$$

und liest „ p_1 dann p_2 gleich p_3 “ oder auch „ p_1 mal p_2 gleich p_3 “.

Die Wahl des Verknüpfungszeichens und die Sprechweise sind an sich belanglos, und es ist auch üblich, für die Verknüpfung einen Punkt – das bekannte Multiplikationszeichen – zu benutzen. Demgemäß spricht man dann vom Produkt zweier Permutationen.

► Als Verknüpfung zweier Permutationen von n Elementen betrachtet man die Hintereinanderausführung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}; \quad A \circ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_{a_1} & b_{a_2} & \dots & b_{a_n} \end{pmatrix}$$

Je zwei Permutationen lassen sich also stets auf diese Weise verknüpfen, und dadurch entsteht jeweils wieder genau eine Permutation dieser n Elemente; die Verknüpfung führt also nicht über den Bereich der Permutationen von n Elementen hinaus.

● **15. Vorgegeben seien die Permutationen**

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bilden Sie $p_1 \circ p_2$ und $p_2 \circ p_1$, und vergleichen Sie! Verknüpfen Sie alle drei Permutationen folgendermaßen:

- Führen Sie zuerst p_2 nach p_1 aus, und wenden Sie auf die so entstandene Permutation p_3 an, bilden Sie also $(p_1 \circ p_2) \circ p_3$!
- Wenden Sie die Permutation, die durch das Ausführen von p_3 nach p_2 entstanden ist, auf p_1 an, bilden Sie also $p_1 \circ (p_2 \circ p_3)$!

Was können Sie über die Gültigkeit des Kommutationsgesetzes und des Assoziationsgesetzes bei der Verknüpfung von Permutationen aussagen?

Beispiel 5

Für 3 Elemente gibt es die 6 Permutationen: $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, demzufolge

36 Verknüpfungen $p_i \circ p_k$. Da die Verknüpfung aber nicht aus dem Bereich hinausführt, müssen gewisse $p_i \circ p_k$ einander gleich sein, obwohl ihre Faktoren voneinander verschieden sind. Um eine Übersicht zu erhalten, stellen wir eine Tabelle mit doppeltem Eingang auf, so daß im Schnittpunkt der i -ten Zeile mit der k -ten Spalte das Produkt $p_i \circ p_k$ steht.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1						
p_2			p_4			
p_3						
p_4					p_1	
p_5						
p_6						

Zwei Verknüpfungen, nämlich

$$p_2 \circ p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = p_4 \text{ und}$$

$$p_4 \circ p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = p_1,$$

wurden eingetragen.

Vervollständigen Sie die Tabelle!

16. Betrachten Sie alle Produkte $p_1 \circ p_i$ und $p_i \circ p_1$ ($i = 1, \dots, 6$), und beschreiben Sie, welche Rolle die identische Permutation bei der Verknüpfung spielt! Erklären Sie die Bezeichnung „Einselement“ oder „neutrales Element“ für p_1 , indem Sie diese Rolle mit der der 1 bei der Multiplikation (bzw. der 0 bei der Addition) vergleichen!

Suchen Sie zu jeder Permutation p_i ($i = 1, \dots, 6$) nach Permutationen p_k , für die gilt $p_i \circ p_k = p_1$ oder $p_k \circ p_i = p_1$!

Erklären Sie den Ausdruck „zueinander inverse Permutationen“, indem Sie vergleichen mit der Rolle des Inversen bei Multiplikation bzw. Addition (das heißt des Reziproken bzw. Negativen)!

Ohne Beweis¹ seien hier nur noch folgende Tatsachen erwähnt: Alle Permutationen von n Elementen bilden einen Bereich, in dem bezüglich der beschriebenen Verknüpfung gelten:

- (1) Der Bereich enthält genau ein neutrales Element (die identische Permutation p_1).
- (2) Zu jedem Element p_i des Bereiches existiert genau ein anderes, das bei Verknüpfung mit p_i das neutrale Element liefert (die zu p_i inverse Permutation).
- (3) Es gilt das Assoziationsgesetz.

¹ Näheres dazu finden Sie zum Beispiel bei P. S. ALEXANDROFF: *Einführung in die Gruppentheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954, S. 15 ff.

Ferner ergibt sich bei der Verknüpfung zweier gerader Permutationen stets wieder eine gerade Permutation, genau wie bei der Verknüpfung zweier ungerader Permutationen. Bei der Verknüpfung einer geraden mit einer ungeraden Permutation erhält man hingegen eine ungerade Permutation.

- 17. Untersuchen Sie auf die Eigenschaften (1), (2), (3) hin die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen, die geraden ganzen Zahlen, die ungeraden ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die von 0 verschiedenen rationalen Zahlen! Betrachten Sie dabei als Verknüpfung zuerst die Addition, dann die Multiplikation!
- 18. Vergleichen Sie das Verhalten gerader und ungerader Permutationen mit dem gerader und ungerader (ganzer) Zahlen!

Aufgaben

16. Beschreiben Sie die Permutationen, die von *aeglr* zu *lager* und *regal* führen, durch Ziffern, und bestimmen Sie, ob es sich um gerade oder ungerade Permutationen handelt!
17. Lösen Sie die gleiche Aufgabe für
- a) *treibsand*, *dienstbar*, *bierstand*, *bastrinde*; b) *kreisumfang* und *musikfragen*;
 c) die Namen der Schüler Ihrer Klasse, soweit sich in ihnen keine Buchstaben wiederholen!
18. Bestimmen Sie zu jeder Permutation von vier Elementen die inverse Permutation!
19. Stellen Sie für alle geraden Permutationen von vier Elementen eine vollständige Übersicht auf, und untersuchen Sie, ob Sie bei der Verknüpfung aus dem Bereich der geraden Permutationen hinausgeführt werden! Untersuchen Sie die Eigenschaften (1) bis (3)!
20. Verknüpfen Sie auf alle möglichen Arten die Permutationen

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}!$$

1.3. Der binomische Satz

1.3.1. Vorbereitende Übungen

1. Formen Sie $(a + b)^n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ durch sukzessives Multiplizieren in eine Summe um! Geben Sie die Anzahl der Summanden in Abhängigkeit von n an, und lesen Sie ein Bildungsgesetz für die Exponenten ab! Entwickeln Sie aus den gefundenen Summen die entsprechenden Ausdrücke für $(a - b)^n$!
2. Weisen Sie nach, daß 7^2 und 2457^2 auf dieselbe Ziffer enden! Überlegen Sie, ob eine solche Gesetzmäßigkeit immer gilt, ob also für die letzte Ziffer der zweiten Potenz nur die letzte^e Ziffer der Basis entscheidend ist! Führen Sie die gleiche Überlegung auch für dritte, vierte und fünfte Potenzen durch!
3. Zeigen Sie, daß eine Zahl, die auf die Ziffernfolge a) 386, b) 834, c) 772, d) 242 endet, keine Kubikzahl sein kann!
4. Stellen Sie für die Beispiele aus Aufgabe 1 die Koeffizienten in Form des PASCALSchen Dreiecks dar! Erläutern Sie das zugrunde liegende Bildungsgesetz, und ergänzen Sie das Dreieck um weitere drei Zeilen!

5. a) Welchen Vorteil bietet das PASCALSche Dreieck gegenüber dem sukzessiven Ausmultiplizieren?
 b) Legen Sie dar, wie Sie nach beiden Methoden vorgehen müßten, um $(a + b)^{27}$ umzuformen!
 c) Beurteilen Sie das Vorgehen beim Aufstellen des PASCALSchen Dreiecks auf Grund Ihrer Erkenntnisse aus Abschnitt 1.1.!

1.3.2. Binomialkoeffizienten

Wenn auch bei der Ermittlung der n -ten Potenz eines Binoms das PASCALSche Dreieck gewisse Vereinfachungen gegenüber dem sukzessiven Ausmultiplizieren bietet, so besteht doch der Nachteil, daß auch hier rekursiv verfahren wird: Zur Ermittlung der Koeffizienten von $(a + b)^n$ ist erst das Aufstellen aller Zeilen bis zur $(n - 1)$ -ten notwendig. Außerdem besteht der Mangel, daß sowohl das PASCALSche Dreieck wie auch das Bildungsgesetz der Exponenten induktiv gewonnen wurden. (Vgl. Aufgabe 1 im Abschnitt 1.3.1!) Deshalb muß man sich bemühen, eine unabhängige Darstellung für $(a + b)^n$ zu gewinnen und diese zu beweisen. Als erstes benötigt man dazu eine unabhängige Darstellung der Koeffizienten, der sogenannten **Binomialkoeffizienten**. Die Koeffizienten der siebenten Zeile des PASCALSchen Dreiecks, also der Zeile für $(a + b)^6$:

$$1; 6; 15; 20; 15; 6; 1$$

lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$1; 6 = \frac{6}{1}; 15 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}; 20 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}; 15 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}; 6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5};$$

$$1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

1. Schreiben Sie in entsprechender Form die Binomialkoeffizienten für $n = 2, 3, 4, 5, 7$ und $8!$ Verwenden Sie dabei im Nenner auch die Fakultätsschreibweise! Stellen Sie in gleicher Weise die Koeffizienten für den Exponenten 11 zusammen, und ermitteln Sie danach zum Vergleich die zwölfte Zeile des PASCALSchen Dreiecks!

Zur Vereinfachung der Darstellung wird für die Binomialkoeffizienten die symbolische Schreibweise $\binom{n}{p}$ (lies: „ n über p “) eingeführt:

$$\binom{n}{p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (p - 1)]}{p!} \quad n, p \text{ natürlich mit } n \geq p$$

(Man beachte, daß die Anzahl der Faktoren in Zähler und Nenner gleich ist!)

¹ Strenggenommen müßte man auch $\binom{n}{p}$ hier ähnlich wie die Potenz auf S. 23 induktiv definieren oder die Definition (*) auf S. 36 verwenden, wobei $k!$ selbst wieder induktiv definiert ist.

Beispiel

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

Die Erklärung der Binomialkoeffizienten kann auch auf folgende Weise erfolgen:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (*)$$

2. Zeigen Sie die Gleichwertigkeit beider Definitionen! Erläutern Sie unter Benutzung der zweiten Erklärung, daß es sinnvoll ist, die folgende Festsetzung zu treffen!

Definition:

$$\binom{n}{0} = 1$$

(Hinweis: Auch $\binom{0}{0} = 1$ wird festgesetzt.)

Weiterhin gilt die wichtige Beziehung:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

3. Weisen Sie die Gültigkeit dieser Beziehung nach, und vergleichen Sie mit dem Bildungsgesetz des PASCALSchen Dreiecks!

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Binomialkoeffizienten wird durch folgende Gleichung erfaßt:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

4. Beweisen Sie diese Gleichung! Wie spiegelt sie sich im PASCALSchen Dreieck wider?

Aufgaben

1. Berechnen Sie folgende Binomialkoeffizienten!

a) $\binom{7}{4}$ b) $\binom{10}{3}$ c) $\binom{30}{1}$ d) $\binom{8}{8}$ e) $\binom{18}{3}$ f) $\binom{12}{10}$ g) $\binom{13}{0}$ h) $\binom{15}{13}$ i) $\binom{76}{73}$ k) $\binom{20}{10}$

2. Für jede Zahl n gibt es die trivialen¹ Darstellungen als Binomialkoeffizienten

$$n = \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}. \text{ Suchen Sie für die folgenden Zahlen nichttriviale Darstellungen!}$$

a) 21 b) 28 c) 32 d) 36 e) 55 f) 56 g) 70 h) 84

¹ trivialis (lat.), gewöhnlich.

3. Erläutern Sie, warum für alle natürlichen n und p mit $p \leq n$ der Binomialkoeffizient $\binom{n}{p}$ selbst eine natürliche Zahl ist!

4. Schreiben Sie möglichst einfach in Bruchform:

a) $\binom{n+1}{3}$ b) $\binom{a-1}{2}$ c) $\binom{u}{u-1}$ d) $\binom{n+1}{n-1}$ e) $\binom{z+1}{z-2}$ f) $\binom{k+2}{k-2}$

5. Versuchen Sie, die Einschränkung $n \geq p$ fallenzulassen und demgemäß die folgenden Binomialkoeffizienten zu bestimmen!

a) $\binom{3}{5}$ b) $\binom{14}{19}$ c) $\binom{527}{613}$ d) $\binom{-2}{3}$ e) $\binom{-5}{4}$ f) $\binom{-7}{2}$

Untersuchen Sie die beiden Definitionen des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{p}$ und die im Abschnitt 1.3.2. angeführten grundlegenden Eigenschaften daraufhin, ob sie auch für den Fall $n < p$ und speziell für negative n sinnvoll bzw. gültig sind!

6. Berechnen Sie möglichst vorteilhaft die folgenden Summen (bzw. Differenzen) von Binomialkoeffizienten!

a) $\binom{5}{3} + \binom{5}{4}$ b) $\binom{7}{2} + \binom{7}{3}$ c) $\binom{15}{14} + \binom{15}{13}$ d) $\binom{6}{7} + \binom{6}{8}$ e) $\binom{17}{14} + \binom{16}{14}$

f) $\binom{5}{3} - \binom{4}{3}$ g) $\binom{12}{8} - \binom{11}{8}$ h) $\binom{19}{16} - \binom{18}{15}$ i) $\binom{21}{7} - \binom{20}{6}$ k) $\binom{13}{7} - \binom{12}{7}$

l) $\binom{31}{20} - \binom{31}{19}$ m) $\binom{11}{4} + \binom{11}{8}$ n) $\binom{18}{5} - \binom{17}{13}$ o) $\binom{22}{14} - \binom{21}{7}$ p) $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{10}{6}$

q) $\binom{13}{9} + \binom{14}{9} + \binom{13}{10}$ r) $\binom{15}{6} + \binom{16}{6} + \binom{15}{8}$ s) $\binom{27}{21} + \binom{27}{20} + \binom{28}{22} + \binom{29}{21}$

t) $\binom{18}{5} + \binom{17}{6} + \binom{19}{7} + \binom{17}{5}$ u) $\binom{21}{4} + \binom{23}{18} + \binom{21}{16} + \binom{22}{6}$

7. Ermitteln Sie die Lösungen folgender Gleichungen (x natürlich)!

a) $\binom{9}{4} = \binom{9}{x}$ b) $\binom{10}{5} = \binom{10}{x}$ c) $\binom{7}{2} = \binom{x}{2}$ d) $\binom{5}{2} = \binom{x}{3}$ e) $\binom{7}{7} = \binom{3}{x}$

f) $\binom{6}{3} = \binom{x}{2}$ g) $\binom{15}{0} = \binom{x}{0}$ h) $\binom{17}{x} + \binom{17}{5} = \binom{18}{x}$ i) $\binom{7}{x} + \binom{7}{x} = \binom{8}{4}$

8. Errechnen Sie die folgenden Summen, und schreiben Sie sie auch unter Verwendung des Summenzeichens!

a) $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

c) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$ d) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

e) Welche allgemeine Gesetzmäßigkeit können Sie vermuten? Beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion!

9. Bestätigen Sie durch Rechnung die folgenden Gleichungen!

a) $\sum_{v=0}^3 \binom{6}{v} \binom{4}{3-v} = \binom{6+4}{3}$ b) $\sum_{k=0}^5 \binom{8}{k} \binom{6}{5-k} = \binom{14}{5}$ c) $\sum_{p=0}^4 \binom{7}{p} \binom{11}{4-p} = \binom{18}{4}$

10. Berechnen Sie wie in Aufgabe 9!

$$\text{a) } \sum_{k=0}^3 \binom{4}{k} \binom{5}{3-k} \quad \text{b) } \sum_{p=0}^4 \binom{10}{4-p} \binom{7}{p} \quad \text{c) } \sum_{v=0}^7 \binom{12}{v} \binom{9}{7-v} \quad \text{d) } \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k}^2$$

(Beachten Sie, daß $\binom{6}{k} = \binom{6}{6-k}$ ist!)

11. Berechnen Sie die Summe $\sum_{v=0}^m \binom{a+v}{v}$ für die folgenden Werte von a und m !

$$\begin{array}{llll} \text{a) } a = 3; m = 1 & \text{b) } a = 3; m = 2 & \text{c) } a = 3; m = 3 & \text{d) } a = 5; m = 2 \\ \text{e) } a = 5; m = 4 & \text{f) } a = 5; m = 5 & \text{g) } a = 8; m = 3 & \text{h) } a = 8; m = 6 \end{array}$$

12. a) Allgemein gilt $\sum_{v=0}^m \binom{a+v}{v} = \binom{a+1+m}{m}$. Vergleichen Sie damit Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 11, und beweisen Sie die Formel mittels vollständiger Induktion!

b) Wenn $m \geq 2a$ ist, a eine natürliche Zahl, kann man auch schreiben

$$\sum_{v=0}^{n-a} \binom{a+v}{a} = \binom{a}{a} + \binom{a+1}{a} + \dots + \binom{n}{a} = \binom{n+1}{a+1}.$$

Erläutern Sie, wie diese Beziehung aus der Formel aus Aufgabe 12a durch mehrmalige Anwendung von $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ hervorgeht, wenn man $n = m - a$ setzt! Berechnen Sie die Summe für den Fall $a = 3, m = 8$!

13. Ist in $\binom{n}{p}$ die Zahl n gerade ($n = 2m$), so gilt

$$\binom{2m}{0} + \binom{2m}{2} + \dots + \binom{2m}{2m} = \binom{2m}{1} + \binom{2m}{3} + \dots + \binom{2m}{2m-1}.$$

a) Beweisen Sie diese Behauptung durch vollständige Induktion über m !

b) Formulieren Sie den entsprechenden Sachverhalt für ungerades n , und verwenden Sie dabei auch das Summenzeichen!

1.3.3. Beweis des binomischen Satzes

Binomischer Satz:

Für alle reellen a und b sowie für alle natürlichen n gilt¹

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

oder unter Verwendung des Summenzeichens

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

¹ Hier bedeutet $a^0 = b^0 = 1$ auch für den Fall, daß $a = 0$ oder $b = 0$ ist. Diese Festsetzung gilt jedoch nicht allgemein

Der Beweis für den binomischen Satz wird durch vollständige Induktion geführt.

1. Induktionsanfang:

Wegen $(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = a + b$ gilt der Satz für $n = 1$.

2. Induktionsschritt: Jetzt wird gezeigt, daß aus der Richtigkeit der zu beweisenden Formel für $n = k$ die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt. Dabei ist der Beweis so angelegt, daß man sich in ihm für k jede beliebige natürliche Zahl eingesetzt denken darf.

Induktionsvoraussetzung:

$$(a + b)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + \binom{k}{k} b^k.$$

Induktionsbehauptung:

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \dots + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}.$$

Beweis der Induktionsbehauptung:

Es ist $(a + b)^{k+1} = (a + b)^k (a + b)$. Deshalb multiplizieren wir in der Induktionsvoraussetzung beide Seiten der Gleichung mit $(a + b)$. Dabei ordnen wir die Glieder so an, daß die durch Multiplikation mit a entstandenen vorangehen und gleiche $a^i b^j$ untereinanderstehen:

$$\begin{aligned} (a + b)^{k+1} &= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \dots + \binom{k}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k} a b^k \\ &\quad + \binom{k}{0} a^k b + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1}. \end{aligned}$$

Die Induktionsbehauptung ergibt sich daraus durch fortgesetztes Anwenden der Beziehung $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$ und Berücksichtigung von $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ und $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$. Also gilt der Satz für beliebiges natürliches n .

● 5. Überlegen Sie, ob auch $n = 0$ als Induktionsanfang zulässig ist!

Formulieren Sie den Beweis unter ständiger Benutzung des Summenzeichens!

Stellt man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{p}$ für $(a + b)^8$ graphisch dar, wobei auf der Abszissenachse p aufgetragen wird, so ergibt sich ein Bild wie in Abbildung 1.10.

● 6. Stellen Sie entsprechend die Binomialkoeffizienten für $(a + b)^9$, $(a + b)^{10}$ und $(a + b)^{11}$ dar! Nehmen Sie Stellung zum Verbinden der erhaltenen Punkte in der graphischen Darstellung!

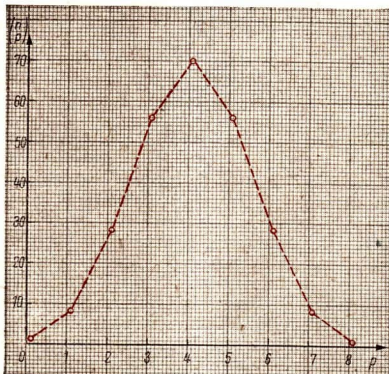


Abb. 1.10.

Aufgaben

14. Entwickeln Sie nach dem binomischen Satz!

a) $(r + s)^7$ b) $(4 + m)^9$ c) $\left(\frac{2}{3} + g\right)^4$ d) $(u + 0,3)^5$

15. Leiten Sie die Entwicklung für $(a - b)^n$ durch Zurückführen auf $(a + b)^n$ her! Stellen Sie eine neue Formel dar? Gilt sie auch für negative b ?

16. a) $(u_1 - u_2)^8$ b) $(h - 0,4)^5$ c) $\left(1 - \frac{1}{5} - \alpha\right)^6$

17. a) Wie lautet der Koeffizient des 5., 7. und 10. Gliedes in $(a + b)^{28}$? Gibt es weitere Glieder mit diesen Koeffizienten?

b) Welches ist der Koeffizient von $a^{17}b^{11}$?

18. a) $(2a + 3b)^5$ b) $\left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}v\right)^6$ c) $(0,1x - 0,3xy)^4$ d) $\left(\frac{2}{3}s^2 - \frac{1}{6}s^2\right)^7$

e) $(\sqrt{2} + a)^4$ f) $(x^2 - \sqrt{3})^5$ g) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^6$ h) $(x^2\sqrt{2} + y^2\sqrt{5})^4$

19. Wie heißt das k -te Glied in der Entwicklung

a) $\left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{4}\right)^{15}$, $k = 13$ b) $\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^{21}$, $k = 17$

20. Betrachten Sie außer der allgemeinen Entwicklung die Fälle $n = 4$ und $n = 5$ näher!

a) $(x + 1)^n + (x - 1)^n$ b) $(2x + 1)^n + (1 - 2x)^n$ c) $(1 + 4a)^n - (1 - 4a)^n$

d) $\left(\frac{2}{3}u + \frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}u\right)^n$ e) $(g - \sqrt{h})^n - (g + \sqrt{h})^n$

f) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^n + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^n$ g) $(\sqrt{1 - a^2} + 1)^n - (\sqrt{1 - a^2} - 1)^n$

$$\text{h) } (1 - \sqrt{u^2 + v^2})^n - (\sqrt{u^2 + v^2} + 1)^n \quad \text{i) } \left(m - \frac{1}{m}\right)^n \quad \text{k) } \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right)^n$$

$$\text{l) } \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \text{m) } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{n) } (a + b + c)^n \quad \text{o) } (2a + 3b - c)^n \quad \text{p) } (2a + 3b - 5a)^n$$

21. Im folgenden sei β_i der Koeffizient des i -ten Gliedes in der Entwicklung von $(a + b)^n$. Ermitteln Sie n , wenn über die Koeffizienten folgendes bekannt ist!

$$\text{a) } \beta_4 = \beta_8 \quad \text{b) } \beta_3 = 2\beta_5 \quad \text{c) } \beta_3 : \beta_7 = 3 : 7 \quad \text{d) } \beta_3 : \beta_9 = 1 : 3$$

22. Wie groß ist m , wenn der dritte Summand von $\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}}{2}} + m\right)^8$ gleich 1 ist?

23. Wie lauten die größten Koeffizienten in der Entwicklung von $(a + b)^9$?

24. Ermitteln Sie in den folgenden Funktionen $y = f(x)$ den von x unabhängigen Summanden!

$$\text{a) } \left(x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)^5 \quad \text{b) } \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{3}\sqrt[5]{x^2}\right)^9 \quad \text{c) } \left(\frac{3\sqrt[3]{x}}{2x} + x\sqrt[3]{x}\right)^9$$

Gibt dieser Summand jeweils den Schnittpunkt des Bildes mit der y -Achse an?

25. a) Zeigen Sie, daß die BERNOULLISCHE Ungleichung im Falle $x > 0$ (Aufgabe 36, Abschnitt 1.1.4.) unmittelbar aus dem binomischen Satz folgt!

b) Wann halten Sie die Anwendung folgender Näherungsformeln für zulässig:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx; \quad (1 - x)^n \approx 1 - nx?$$

Vergleichen Sie mit dem Gültigkeitsbereich der BERNOULLISCHEN Ungleichung!

26. Berechnen Sie auf drei Dezimalstellen genau!

$$\text{a) } 1,5^5 \quad \text{b) } 1,02^{10} \quad \text{c) } 0,98^9 \quad \text{d) } 2,06^8 \quad \text{e) } 1,98^7$$

$$\text{f) } \left(\frac{21}{20}\right)^6 \quad \text{g) } \left(\frac{24}{25}\right)^5 \quad \text{h) } \left(\frac{51}{50}\right)^{12} \quad \text{i) } \left(\frac{29}{30}\right)^8 \quad \text{k) } \left(\frac{101}{100}\right)^{11}$$

27. Berechnen Sie auf drei geltende Ziffern genau!

$$\text{a) } 3,14^7 \quad \text{b) } 2,72^6 \quad \text{c) } 9,81^5$$

28. Bei Berechnungen der Volumenveränderung von Körpern infolge Temperaturveränderung wird in $V_t = V_0(1 + \alpha t)^3$ häufig gesetzt $(1 + \alpha t)^3 \approx 1 + 3\alpha t$.

Ermitteln Sie die Größenordnung des Fehlers bei $t = 20$ grad für Aluminium, Stahl, Kupfer und Zink! (Entnehmen Sie den linearen Ausdehnungskoeffizienten α der Zahlentafel!)

29. Bilden Sie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100$ auf drei geltende Ziffern!

30. Berechnen Sie $(x + h_i)^n$ für folgende Werte!

$$\text{a) } x = 2; \quad n = 4; \quad h_1 = 1; \quad h_2 = \frac{1}{10}h_1; \quad h_3 = -h_2; \quad h_4 = \frac{1}{10}h_3$$

$$\text{b) } x = \frac{3}{4}; \quad n = 5; \quad h_1 = \frac{1}{2}; \quad h_2 = h_1 \cdot 10^{-2}; \quad h_3 = -h_2 \cdot 10^{-2}$$

31. Beweisen Sie mittels des binomischen Satzes, daß jede gerade Potenz einer ungeraden Zahl bei Teilung durch 8 den Rest 1 läßt! (Vgl. Sie mit Aufgabe 33, Abschnitt 1.1.4.!)

1.4. Elementare Folgen und Reihen

1.4.1. Grundbegriffe

1. Ergänzen Sie die nachstehenden „Zahlenfolgen“ um weitere fünf Glieder!

a) 1; 2; 3; 4 b) -7; -3; 1 c) 2; 5; 10; 17 d) $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{5}$

e) 1 ; $\frac{19}{21}$; $\frac{18}{22}$ f) 1,1; 0,9; 1,01; 0,99; 1,001 g) $-\frac{1}{8}$; $-\frac{4}{27}$; $-\frac{9}{64}$; $-\frac{16}{125}$

h) 5 ; $\frac{9}{2}$; $\frac{37}{9}$; $\frac{38}{10}$; $\frac{39}{11}$ i) $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4 k) 2; -3; 5; -8; 13; -21

2. Ergänzen Sie in nachstehender Tabelle die Zahlenfolgen l bis u!

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
l)	-17	-23	-29							
m)		$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{7}$						
n)				$\frac{8}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{32}{27}$				
o)			4	$\frac{7}{2}$				$\frac{3}{2}$		
p)	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{720}$				
q)				5	2,5	1,25				
r)			$\frac{8}{10}$	$-\frac{15}{17}$	$\frac{24}{26}$					
s)		1	5	14	30			140		
t)			$-\frac{6}{27}$	$\frac{24}{81}$			$-\frac{5040}{2187}$			
u)		$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{21}{34}$						

3. Versuchen Sie zu erklären, was Sie unter einer Zahlenfolge verstehen!

Oftmals wird als Erklärung für den Begriff **Zahlenfolge** angegeben, es handele sich dabei um eine Menge von Zahlen, die nach einer bestimmten Vorschrift gebildet sind.

Beispiele

1. $0; -2; -4; -6; -8; -10; -12; \dots$

2. $4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31$

3. $3; 4; 6; 9; 13; 18; \dots$

4. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots$

5. $1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; \dots$

6. $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \frac{1}{25}; \frac{1}{36}; \frac{1}{49}; \frac{1}{64}; \frac{1}{81}; \frac{1}{100}$

7. $-3; 6; -9; 12; -15; 18; \dots$

8. $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots$

9. $0; -\frac{1}{2}; \frac{4}{6}; -\frac{9}{24}; \frac{16}{120}; -\frac{25}{720}; \frac{36}{5040}; \dots$

10. $7; 12; 10; 9; 5; 8; 13$

11. $7; 19; 29; 38; 43; 51; 64$

Diese Definition erfaßt den Begriff der Zahlenfolge aber nur dann in seiner vollen Allgemeinheit, wenn der Begriff des Bildungsgesetzes in genügender Weite verstanden wird. Im Beispiel 10 wurden die Zahlen willkürlich ausgewählt und angeordnet. (Man kann allerdings in allen derartigen Fällen, wenn auch nicht mit den Mitteln der Schulmathematik, nachträglich ein Bildungsgesetz konstruieren.) Trotz dieser Willkür und ohne Kenntnis eines Bildungsgesetzes spricht man aber auch hier von einer Zahlenfolge.

Gemeinsam ist aber den Beispielen 1 bis 11 und auch den Zahlenfolgen aus den Schüleraufträgen 1 und 2, daß es sich um Mengen von Zahlen handelt, bei denen feststeht, welche Zahl an erster, welche an zweiter, welche an dritter, ... Stelle steht. Diese Tatsache läßt sich als Zuordnung zwischen natürlichen Zahlen und den Gliedern der Zahlenfolge in einer Wertetafel deutlich machen, z. B. für die Folge 6:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_k	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{100}$

Da diese Zuordnung eindeutig ist, liegt eine Funktion vor, deren Definitionsbereich ein Abschnitt der natürlichen Zahlen (hier von 1 bis 10) ist. In solchem Fall spricht man von einer **endlichen Folge**. Umfaßt der Definitionsbereich alle natürlichen Zahlen, so liegt eine **unendliche Folge** vor. In den Beispielen wurde das Vorliegen einer unendlichen Zahlenfolge durch Hinzufügen von Punkten angedeutet.¹ Die Zuordnung wird durch Indizes deutlich gemacht, indem für die Elemente des Wertevorrats das Symbol a_k an Stelle von $f(k)$ geschrieben wird.

Zusammenfassend läßt sich also definieren:

- ▶ Eine **endliche Folge** ist eine Funktion, deren Definitionsbereich die natürlichen Zahlen $k = 1; 2; \dots; n$ sind.
- ▶ Eine **unendliche Folge** liegt vor, wenn der Definitionsbereich die Menge aller natürlichen Zahlen ist.
- ▶ Die Elemente a_k des Wertevorrats heißen **Glieder der Folge**.
- 4. Es seien $a_3 = 8$ und $a_4 = 16$. Bilden Sie auf zwei verschiedene Arten a_1, a_2, a_5 und a_6 !
- 5. Vergleichen Sie die Folgen der Beispiele 3 und 8 mit denen der Beispiele 1 und 4 hinsichtlich des Verhaltens der a_k mit wachsendem k ! Stellen Sie die Wertepaare $(k; a_k)$ dieser vier Folgen graphisch dar!
- ▶ Eine **Zahlenfolge** heißt (streng)² **monoton wachsend**, wenn für alle k gilt $a_k < a_{k+1}$.
 Eine **Zahlenfolge** heißt (streng)² **monoton fallend**, wenn für alle k gilt $a_k > a_{k+1}$.
 Eine **Zahlenfolge** heißt **alternierend**, wenn für alle k gilt $a_k \cdot a_{k+1} < 0$.
- 6. Geben Sie für das Alternieren einer Folge eine andere Erklärung!
- 7. Untersuchen Sie alle Folgen in den Beispielen 1 bis 11 und in den Schüleraufträgen 1 und 2 auf diese drei Eigenschaften hin!

In der Lehre von den Funktionen beschäftigte sich der bisherige Mathematikunterricht fast ausschließlich mit solchen Funktionen, bei denen die Zuordnung durch einen analytischen Ausdruck angegeben werden kann. Dem analytischen Ausdruck bei Funktionen entspricht bei Folgen ein Bildungsgesetz.

- 8. In den Schüleraufträgen 1 und 2 haben Sie, mehr unbewußt, von solchen Bildungsgesetzen Gebrauch gemacht. Formulieren Sie die dort und in den Beispielen 1 bis 8 zugrunde gelegten Bildungsgesetze mit Worten!

Für die Folge im Beispiel 6 wurde auf S. 43 die Wertetafel angegeben. Die zugehörige Funktionsgleichung kann in der Form

$$y = \frac{1}{x^2}$$

geschrieben werden.

Um aber anzudeuten, daß es sich um eine Folge handelt, das heißt um eine Funk-

¹ Auf die Problematik dieses Vorgehens wird auf S. 45 eingegangen.

² Man spricht auch von Monotonie in weiterem Sinne, wenn $a_k \leq a_{k+1}$ bzw. $a_k \geq a_{k+1}$ ist.

tion, bei der für x nur natürliche Zahlen eingesetzt werden sollen, wird das Symbol x für die unabhängige Variable ersetzt durch k und y dementsprechend durch a_k :

$$a_k = \frac{1}{k^2} \quad \text{mit } k = 1; 2; \dots; 10.$$

In Worten: Das k -te Glied der Folge 6 hat die Form $\frac{1}{k^2}$, oder: Das **allgemeine Glied** der Folge lautet $\frac{1}{k^2}$, das 5. Glied ist z. B. $\frac{1}{25}$.

- 9. Bestimmen Sie aus den ersten vier Gliedern der Folgen in den Beispielen 1, 2, 4, 5, 8 und 9 das jeweilige allgemeine Glied a_k , und überprüfen Sie durch Einsetzen von größeren Werten für k !

Während also mit $a_k = \frac{1}{k^2}$ nur ein einzelnes Glied der Folge, eben das Glied an der k -ten Stelle, bezeichnet wird, deutet das Symbol $\{a_k\}$ auf die gesamte Folge:

$$\{a_k\} \quad \text{mit } a_k = \frac{1}{k^2} \quad \text{und } k = 1; 2; \dots; 10.$$

Diese Darstellung einer Folge, mit deren Hilfe man ein beliebiges Folgenglied angeben kann, wenn man weiß, an welcher Stelle es steht, heißt **independente Darstellung**. Sie entspricht den Funktionsgleichungen.

- Die **independente Darstellung der endlichen n -gliedrigen Folge $\{a_k\}$ hat die Form $\{a_k\}$ mit $a_k = f(k)$ und $k = 1; 2; \dots; n$.¹**

Bei unendlichen Folgen tritt an die Stelle von „ $k = 1; \dots; n$ “ die Angabe „ k natürlich“. Wo keine Irrtümer möglich sind, wird diese Angabe weggelassen.

Die **independente Darstellung** mittels eines allgemeinen Gliedes ermöglicht es, eine Folge eindeutig festzulegen. Bei endlichen Folgen kann man auf sie verzichten, wenn man sämtliche Glieder angibt. Im Prinzip ist das zwar bei jeder endlichen Folge möglich, dürfte allerdings praktisch bei einer sehr großen Anzahl von Gliedern auf Schwierigkeiten stoßen. Bei unendlichen Folgen hingegen ist die Angabe des allgemeinen Gliedes (mit Hilfe von Formeln oder Worten) unbedingt notwendig, denn endlich viele Glieder können stets auf unendlich viele Weisen zu einer unendlichen Folge ergänzt werden. Eine Angabe wie

$$\{a_k\} = 1; 2; 3; \dots$$

ist also eigentlich unvollständig. Eine vollständige Angabe könnte lauten

$$\{a_k\} = 1; 2; 3; \dots; k; \dots$$

(Eine der vielen noch bestehenden Fortsetzungsmöglichkeiten ist

$$\{a_k\} = 1; 2; 3; 5; 8; 13; \dots,$$

wobei jedes Glied von a_3 ab die Summe der beiden vorangehenden ist.)

¹ Verschiedentlich ist es auch zweckmäßig, mit $k = 0$ zu beginnen, das erste Folgenglied also mit a_0 zu bezeichnen.

Wenn hier trotzdem auch bei unendlichen Folgen zu Übungszwecken bisweilen auf die Angabe des allgemeinen Gliedes verzichtet wird, so muß man sich dieser Sachlage stets bewußt sein.

- 10. Geben Sie eine unabhängige Darstellung für die Folge d im Schülerauftrag 1 an! Ermitteln Sie die unabhängige Darstellung für die Folge, die aus d entsteht, wenn jedes Glied mit (-1) multipliziert wird!

Bei alternierenden Folgen bereitet der Vorzeichenwechsel zusätzliche Schwierigkeiten. Man überwindet sie, indem man die Vorzeichen zunächst nicht beachtet und dann eine Potenz von (-1) als Faktor hinzufügt.

■ **Beispiel 12**

Als unabhängige Darstellung für

$$-3; 6; -9; 12; -15; 18; \dots \quad (\text{Beispiel 7})$$

läßt sich angeben

$$\{a_k\} \quad \text{mit} \quad a_k = (-1)^k \cdot 3k.$$

Wären die Glieder mit geradem Index negativ, müßte der Exponent von (-1) nicht k , sondern $k - 1$ oder $k + 1$ heißen.

- 11. Geben Sie die ersten sechs Glieder der Folge $\{a_k\}$ mit $a_k = (-1)^{k-1} \cdot k^2$ an!
● 12. a) Ermitteln Sie ein allgemeines Glied der Folge p im Schülerauftrag 2!
b) Versuchen Sie, eine unabhängige Darstellung für die Folge anzugeben!

Mitunter sind die unabhängigen Darstellungen etwas kompliziert, daher schwer zu finden und unbequem im Gebrauch. Dies ist beispielsweise für die Folge im Beispiel 3 der Fall. Man wählt in solchen Fällen eine **rekursive Darstellung**, bei der angegeben wird, wie man jedes Glied aus seinem Vorgänger (bzw. anderen vorangehenden Gliedern) erhält.

■ **Beispiel 13**

Für die Folge $3; 4; 6; 9; 13; 18; \dots$ gilt:

Jedes Glied a_k erhält man aus a_{k-1} durch Addition von $k - 1$ (nicht von $a_{k-1}!$), a_4 also aus a_3 durch Addition von 3. Allgemein:

$$a_k = a_{k-1} + (k - 1)$$

Diese Angabe ist jedoch unvollständig, solange nicht die „Anfangsbedingungen“, in unserem Falle a_1 , bekannt sind. Erst dann ist nämlich die Bildung von a_2 , aus diesem die Bildung von a_3 usw. möglich. Die rekursive Darstellung der Folge lautet also:

$$\{a_k\} \quad \text{mit} \quad a_1 = 3; \quad a_k = a_{k-1} + (k - 1) \quad \text{für natürliche } k > 1.$$

- 13. Geben Sie rekursive Darstellungen für die Folgen in den Beispielen 1, 2, 5 und 7 an!

Nachteilig ist bei rekursiven Darstellungen, daß man z. B. für a_{20} zunächst a_{19} (oder andere in der Rekursionsformel auftretende Glieder) benötigt; vorteilhaft ist dagegen, daß man sofort den Zusammenhang benachbarter Glieder erkennt.

Häufig ist es notwendig, bei einer Folge $\{a_k\}$ die **Summe** s_n der ersten n Glieder zu berechnen.

Beispiel 14

Es ist die Summe der ersten sieben Glieder der Folge im Beispiel 5 zu berechnen. Die Folge lautet $\{a_k\}$ mit $a_k = 2^{k-1}$, und für die Summe s_7 gilt:

$$s_7 = \sum_{k=1}^7 2^{k-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127.$$

Der Gebrauch des Summenzeichens kann nun durch eine induktive Definition präzisiert werden:

Es sei $\{a_k\}$ eine Folge (k natürlich). Dann wird festgesetzt:

$$\sum_{k=1}^1 a_k = a_1; \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}.$$

Aufgaben

1. Geben Sie von den nachstehenden Folgen die ersten fünf Glieder an, und charakterisieren Sie die Folgen hinsichtlich Monotonie und Vorzeichenwechsel!

a) $\left\{ \frac{3k-4}{k} \right\}$ b) $\left\{ \frac{5+k}{-k} \right\}$ c) $\left\{ (-1)^k \cdot \frac{3-k}{k^2} \right\}$ d) $\left\{ \frac{k^3}{k!} \right\}$

Geben Sie möglichst auch rekursive Darstellungen!

2. Charakterisieren Sie die nachstehenden Folgen, ermitteln Sie die ersten fünf Glieder und geben Sie möglichst auch unabhängige Darstellungen!

a) $a_1 = 2; a_{k+1} = a_k + \frac{1}{3}$

b) $a_1 = \frac{3}{2}; a_{k+1} = \frac{4}{3} a_k$

c) $a_1 = 0; a_2 = -1; a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$

d) $a_1 = 1; a_{k+1} = 2a_k - 5$

e) $a_1 = 1; a_2 = -1; a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1}$

f) $a_1 = 0; a_2 = -\frac{1}{2}; a_{k+1} = a_{k-1}^2 \cdot a_k$

g) $a_1 = 2; a_2 = 9; a_3 = -5; a_{k+1} = a_{k-2} + 3$

3. Versuchen Sie, unabhängige und rekursive Darstellungen zu geben!

a) $0; 4; \frac{8}{3}; \frac{12}{5}; \dots$ b) $1; 1; \frac{3}{4}; \frac{4}{8}; \frac{5}{16}; \dots$ c) $2; 6; 12; 20; 30; \dots$

d) $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}; \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}; \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}; \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7}; \dots$

Charakterisieren Sie die Folgen, und stellen Sie die Folgen unter a), b) und d) durch Eintragen/der Wertepaare in ein Koordinatensystem graphisch dar!

4. Welche der folgenden vier Ausdrücke stellen die gleiche Summe dar?

a) $\sum_{k=1}^7 2^{k-1}$

b) $\sum_{n=1}^7 2^{n-1}$

c) $\sum_{\nu=0}^7 2^\nu$

d) $\sum_{n=0}^6 2^n$

1.4.2. Arithmetische Folgen

1. *Vergleichen Sie die Folgen in den Beispielen 2 und 3 miteinander! Suchen Sie unter den Folgen der Beispiele 1 bis 11 und der Schüleraufträge 1 und 2 auf S. 42 nach weiteren Folgen, deren Bildungsgesetz dem der Folge im Beispiel 2 entspricht!*
Bilden Sie selbständig derartige Folgen!

► Eine Folge $\{a_k\}$ heißt eine **arithmetische Folge**, wenn für jedes k gilt:
 $a_{k+1} - a_k = d$, wobei d nicht von k abhängt.

Daraus ergibt sich für arithmetische Folgen die Rekursionsformel:

$$a_{k+1} = a_k + d$$

2. *Begründen Sie den Namen „arithmetische Folge“ mit Hilfe des Begriffs „arithmetisches Mittel“!*

► Für jede arithmetische Folge $\{a_k\}$ gilt:
 $a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$ für alle k .

3. *Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Formel mittels vollständiger Induktion aus der oben angegebenen Rekursionsformel!*

Die Summe der Glieder einer endlichen arithmetischen Folge $\{a_k\}$ läßt sich verhältnismäßig leicht berechnen.

Beispiel 15

Zu der Folge im Beispiel 2 gehört die zehngliedrige Summe

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} (3k + 1) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31.$$

Aus den zehn Summanden lassen sich $\frac{10}{2} = 5$ Paare bilden:

$$4 + 31 = 7 + 28 = 10 + 25 = 13 + 22 = 16 + 19.$$

$$\text{Demnach ist } s_{10} = \frac{10}{2} (4 + 31) = 5 \cdot 35 = 175.$$

Zu dem gleichen Ergebnis kommt man auch auf folgende Weise:

$$s_{10} = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31$$

$$s_{10} = 31 + 28 + 25 + 22 + 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4$$

$$2s_{10} = 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35$$

$$2s_{10} = 10 \cdot 35; \quad s_{10} = \frac{10}{2} \cdot 35$$

- 4. Der neunjährige GAUSS soll auf solche Weise die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 ermittelt haben. Welches Ergebnis erhielt er?
- 5. Vergleichen Sie die beiden Möglichkeiten der Berechnung bezüglich ihrer Anwendbarkeit auf jede arithmetische Folge!

► Allgemein gilt für jedes natürliche n

$$(1) \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Der Beweis für (1) erfolgt durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang: $s_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1$

2. Induktionsschritt:

Aus der Richtigkeit der Formel für

$$n = k: \quad s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$$

wird ihre Richtigkeit

$$\text{für } n = k + 1: \quad s_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$$

bewiesen, wobei man sich für k jede beliebige natürliche Zahl eingesetzt denken darf.

Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + a_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_{k+1} - d) + a_{k+1} \\ &= \frac{k}{2}(a_1 + a_{k+1}) - \frac{k}{2}d + a_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_{k+1}) + \frac{1}{2}(2a_{k+1} - kd) \\ &= \frac{k}{2}(a_1 + a_{k+1}) + \frac{1}{2}(a_{k+1} - kd + a_{k+1}) \\ &= \frac{k}{2}(a_1 + a_{k+1}) + \frac{1}{2}(a_1 + a_{k+1}) \\ s_{k+1} &= \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1}). \end{aligned}$$

Die Formel gilt also allgemein für alle natürlichen n . Man kann die Summenformel auch in anderer Form angeben:

$$(2) \quad s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

- 6. Leiten Sie (2) aus (1) her!

Bei dem im Schülerauftrag 1 verlangten Vergleich der Folgen in den Beispielen 2 und 3

4; 7; 10; 13; 16; 19; ... und 3; 4; 6; 9; 13; 18; ...

läßt sich feststellen, daß in der ersten Folge die Differenzen jeweils zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Glieder konstant sind. Dagegen wachsen die Differenzen in der zweiten Folge ständig um 1 an. Am deutlichsten wird die Struktur der zweiten Folge, wenn man die Folge der Differenzen $\{a_{k+1} - a_k\} = \{\Delta a_k\}$ ⁴ bildet:

$$\{a_k\} = 3; 4; 6; 9; 13; 18; 24; \dots$$

$$\{\Delta a_k\} = 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots$$

Die **erste Differenzfolge** von $\{a_k\}$ ist also eine arithmetische Folge. Gegebenenfalls bildet man auch zweite, dritte, ... Differenzfolgen. In diesem Fall heißt die zweite Differenzfolge zum Beispiel

$$\{\Delta^2 a_k\} = 1; 1; 1; 1; \dots$$

Eine Zahlenfolge, deren zweite Differenzfolge eine konstante Folge $c, c, c, \dots; c \neq 0$, ist, nennt man auch eine arithmetische Folge zweiter Ordnung.

● 7. Untersuchen Sie die Folgen

a) $\{a_k\}$ mit $a_k = k^2$ und b) $\{a_k\}$ mit $a_k = k^3$

mit ihren Differenzfolgen!

Die bisher besprochenen arithmetischen Folgen, zum Beispiel die Folge im Beispiel 2, müßten eigentlich als arithmetische Folgen erster Ordnung bezeichnet werden, doch spricht man üblicherweise hier nur von arithmetischen Folgen schlechthin.

Aufgaben

5. Bilden Sie arithmetische Folgen, indem Sie noch vier weitere Glieder hinzufügen!

a) 2; 3,5; ... b) -1; -3; ... c) 12; 9,5; ... d) 15; 7,5; ... e) -3; 4; ... f) 0,7; 0,9; ...
Berechnen Sie a_{10} , a_{13} , s_{10} und s_{13} !

6. Berechnen Sie die ersten sechs Glieder der arithmetischen Folge $\{a_k\}$, von der Sie die folgenden Werte kennen!

a) $a_2 = 7; d = -1,5$ b) $a_3 = 7,5; d = 9$ c) $a_5 = 25; d = -0,01$

d) $a_7 = 0; d = 12$ e) $a_4 = -23; d = -12$ f) $a_7 = 6,8; d = 8,6$

Bestimmen Sie a_{15} , a_{27} , s_{15} und s_{27} !

7. Es sind alle dreiziffrigen Zahlen zu addieren, die bei Teilung durch 7 den Rest 5 lassen.

⁴ Der griechische Großbuchstabe Δ (Delta) wird häufig zur Kennzeichnung einer Differenz benutzt.

8. Vervollständigen Sie die Tabelle!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
a_1	0,8	-3			3	-12	12	
d	$\frac{1}{5}$	5	0,7	-2		$\frac{2}{3}$		
n	50		21				15	21
a_n		57	30	17	-15			1
s_n				897	-222	86	225	0

9. a) Kann eine endliche arithmetische Folge auch durch zwei der Werte a_1, d, n, a_n, s_n eindeutig festgelegt werden?
 b) Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, drei dieser Werte zugrunde zu legen? Können in allen diesen Fällen die einzelnen Zahlenwerte unabhängig voneinander gewählt werden?
10. Berechnen Sie a_1, a_2, \dots, a_{15} aus $\sum_{k=1}^9 a_k = 92,25$ und $\sum_{k=1}^{15} a_k = 210!$
11. Berechnen Sie $\sum_{k=17}^{33} a_k$ für $\{a_k\} = -3,5; -2,8; -2,1; \dots!$
12. Wie lautet eine arithmetische Folge $a_1; a_2; \dots; a_6$, für die gilt
 $\sum_{r=1}^6 a_r = 51$ und $\sum_{r=1}^6 a_r^2 = 591?$
13. a) Beweisen Sie den folgenden Satz! Für die Folge $\{a_k\}$ mit $a_k = k$ gilt $s_n = \binom{n+1}{2}$.
 b) Bilden Sie die Folge $s_1; s_2; \dots; s_{10}!$
 c) Beweisen Sie, daß für die Summe S der Folge $\{s_k\}$ die Beziehung

$$S = \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$
 gilt!
14. Untersuchen Sie an Beispielen und allgemein!
 a) Ist die Funktion $f(k) = a_k$ bei einer arithmetischen Folge $\{a_k\}$ stets eine lineare Funktion?
 b) Stellt jede lineare Funktion eine arithmetische Folge dar, wenn man als Definitionsbereich die natürlichen Zahlen wählt?
15. a) Bilden Sie die ersten sieben Glieder der Folge $\{a_k\}$ mit $a_k = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3)$ und ihre Differenzenfolgen!
 b) Stellen Sie $\{a_k\}$ und die Differenzenfolgen gemeinsam in einem Koordinatensystem dar!

1.4.3. Geometrische Folgen

Die ersten fünf Glieder der Folge $\{2^k\}$ mit $k = 1; 2; \dots$ lauten 2; 4; 8; 16; 32. Jedes Glied (außer a_1) geht aus seinem Vorgänger durch Multiplikation mit 2 hervor. Der Quotient zweier Nachbarglieder ist stets 2.

- Eine Folge $\{a_k\}$ heißt geometrische Folge, wenn für jedes k gilt $a_{k+1} : a_k = q$ mit $a_k \neq 0$, wobei q nicht von k abhängt und der Quotient der Folge heißt.

- 1. Suchen Sie unter den Folgen in den Beispielen 1 bis 11 nach weiteren geometrischen Folgen!
- 2. Begründen Sie den Namen „geometrische Folge“ mit Hilfe des Begriffs „geometrisches Mittel“!
- 3. Stellen Sie auf Grund der Definition der geometrischen Folge eine Rekursionsformel für a_{k+1} auf! Beweisen Sie daraus durch vollständige Induktion die folgende Gleichung!

► Für jede geometrische Folge $\{a_k\}$ mit dem Quotienten q gilt
 $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ für alle k .

- 4. Vergleichen Sie arithmetisches und geometrisches Mittel bezüglich der auftretenden Rechenoperationen, und führen Sie eine Analogiebetachtung durch für $a_k = a_1 + (k-1)d$ (arithmetische Folge) und $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ (geometrische Folge)!

Wie bei arithmetischen Folgen, so wird häufig auch für geometrische Folgen die Summenbildung gefordert, zum Beispiel

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 2^n = \sum_{k=1}^n 2^k.$$

■ Beispiel 16

Zu ermitteln ist die Summe $\sum_{k=1}^8 4 \cdot 3^{k-1}$.

$$s_8 = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^7$$

$$3s_8 = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^7 + 4 \cdot 3^8$$

$$2s_8 = 4 \cdot 3^8 - 4 \quad (\text{durch Subtraktion})$$

$$s_8 = \frac{4(3^8 - 1)}{2} \quad s_8 = 13120$$

- 5. Verallgemeinern Sie dieses Ergebnis, um so zur Vermutung einer Formel für die Summe $\sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 q^k$ zu gelangen!
 Überprüfen Sie Ihre Vermutung an der Summe $\sum_{k=1}^n 2^k$ für $n = 5$ und $n = 10$!

Allgemein gilt:

$$(3) \quad s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

und $s_n = na_1$ im Falle $q = 1$.

- 6. Beweisen Sie diesen Sachverhalt durch vollständige Induktion! Erläutern Sie, unter welcher Bedingung man zweckmäßigerweise die erste und unter welcher Bedingung die zweite Form zur Berechnung benutzen wird!

Bei geometrischen Folgen kann die Summe s_n auch in Abhängigkeit von a_1 , a_n und q dargestellt werden:

$$(4) \quad s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

7. Leiten Sie (4) aus (3) her!

8. Bilden Sie Beispiele geometrischer Folgen für die folgenden Fälle!

- a) $a_1 > 0; q > 1$ b) $a_1 > 0; 0 < q < 1$ c) $a_1 > 0; -1 < q < 0$
 d) $a_1 > 0; q < -1$ e) $a_1 < 0; q > 1$ f) $a_1 < 0; 0 < q < 1$
 g) $a_1 < 0; -1 < q < 0$ h) $a_1 < 0; q < -1$

Beschreiben Sie die Eigenschaften der Folgen! Bilden Sie die Summen s_5 !

Aufgaben

16. Setzen Sie um vier Glieder fort, so daß geometrische Folgen entstehen!

- a) $\frac{2}{3}; 1; \frac{3}{2}; \dots$ b) $-1; 0,8; -0,64; \dots$ c) $\sqrt{3}; 3; 3\sqrt{3}; \dots$ d) $2a; 4ab; 8ab^2; \dots$

Berechnen Sie a_{12} , und stellen Sie die Folgen a, b und c graphisch dar! In welcher dieser drei Folgen wird 1000 überschritten, wenn man sie weit genug fortsetzt? Geben Sie in diesem Falle k mit $a_{k-1} \leq 1000 < a_k$ an! Durchdenken Sie diese Fragen auch für d!

17. Berechnen Sie die ersten fünf Glieder der geometrischen Folge $\{a_k\}$, von der die nachstehenden Werte bekannt sind!

- a) $a_1 = -3; q = 0,5$ b) $a_1 = 2; q = -0,3$ c) $a_1 = 0,7; q = 2$ d) $a_5 = 7; q = \frac{3}{2}$
 e) $a_3 = -2; q = -1$ f) $a_4 = 64; q = 0,4$ g) $a_3 = -4; a_4 = \frac{1}{4}$ h) $a_2 = 9,1; a_3 = 2,6$

Beschreiben Sie die Folgen hinsichtlich Monotonie! Für welches k bzw. n würde jeweils gelten $a_{k-1} \leq 100 < a_k$ bzw. $s_{n-1} \leq 500 < s_n$?

18. Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
a_1	2	3		3		1	2
q	1,25		$-\frac{2}{3}$		5		3
n	4	5	7	7	4		
a_n		12	$\frac{64}{243}$			81	
s_n				381	2340	$121 + 40\sqrt{3}$	6560

19. a) Kann eine endliche geometrische Folge durch zwei der Werte a_1 , q , n , a_n , s_n eindeutig festgelegt werden?
 b) Können in jeder Zusammenstellung von je drei dieser Werte die einzelnen Zahlenwerte unabhängig voneinander gewählt werden?
 c) Warum wurde in der Tabelle n verhältnismäßig klein gehalten?
20. Wieviel Glieder haben die nachstehenden geometrischen Folgen?
 a) 1, 5, 25, ..., 15625 b) 81, 54, 36, ..., $3\frac{13}{81}$ c) 2; 6; 18; ...; 4374
21. Bestimmen Sie $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ für die folgenden Werte!
 a) $x = 1$; $n = 7$ b) $x = -1$; $n = 8$ c) $x = 10$; $n = 5$
 d) $x = 10^{-1}$; $n = 5$ e) $x = 3 \cdot 10^{-1}$; $n = 6$ f) $x = 12 \cdot 10^{-2}$; $n = 4$ g) $x = \frac{a}{b}$; $n = 6$
 h) Formen Sie unter Benutzung von g den Quotienten $\frac{a^6 - b^6}{a - b}$ in eine Summe um!
22. Entnehmen Sie Ihrer Logarithmentafel die Logarithmen für 2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; ...; 2^{10} , und vergleichen Sie die Folge der Numeri mit der der Logarithmen! Untersuchen Sie, ob die Beziehung für eine beliebige Folge von Potenzen mit fester Basis gilt!

1.4.4. Der Begriff des Grenzwertes

1. Bei welchen Funktionsbildern haben Sie bisher Asymptoten kennengelernt? Beschreiben Sie, was man unter „asymptotischem Verhalten“ versteht!
2. Veranschaulichen Sie die Folgen

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots; \frac{1}{k}; \dots \quad \text{und} \quad 0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots; \frac{k-1}{k}; \dots$$

graphisch! Vergleichen Sie mit dem Schülerauftrag 1!

(Wenn im vorliegenden Abschnitt von Folgen gesprochen wird, so sind stets unendliche Folgen gemeint.)

Unter den Gliedern einer endlichen Folge gibt es zwei Zahlen M und m , die von keinem anderen Folgenglied übertroffen bzw. unterschritten werden. (Dabei können diese beiden Zahlen eventuell mehrmals auftreten und brauchen auch nicht voneinander verschieden zu sein.) Das gilt jedoch nicht für alle unendlichen Folgen.

Es wird daher definiert:

► Eine Folge $\{a_n\}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl M gibt, so daß für alle n gilt $a_n \leq M$. (In diesem Fall heißt M eine obere Schranke der Folge $\{a_n\}$. Dabei braucht M kein Folgenglied zu sein.)

3. Definieren Sie entsprechend, unter welcher Bedingung eine Folge nach unten beschränkt heißt!
 Es sei M eine obere Schranke für $\{a_n\}$. Was läßt sich für alle K mit $K > M$ sagen?

- 4. Untersuchen Sie die Folgen in den Beispielen 1 bis 9 auf Beschränktheit! (Ergänzen Sie die endlichen Folgen zu unendlichen!)
- 5. Untersuchen Sie arithmetische Folgen ($d > 0$; $d < 0$) und geometrische Folgen ($q > 1$; $|q| < 1$; $q < -1$) auf Beschränktheit! Was ergibt sich für $d = 0$ bzw. $q = \pm 1$?

Für die Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ist 1 eine obere Schranke und 0 eine untere Schranke. Die 1 gehört als Anfangsglied zur Folge, die 0 nicht (ist also nicht etwa letztes Glied!). Zwischen beiden besteht aber noch ein wichtigerer Unterschied: Den kleinsten Abstand zu $a_1 = 1$ hat a_2 . Dieser Abstand $\frac{1}{2}$ wird von keinem anderen Glied unterschritten. Hingegen läßt sich kein kleinster Abstand zwischen 0 und den Folgengliedern angeben. Für jede noch so kleine positive Zahl finden sich unendlich viele Glieder, deren Abstand zur 0 kleiner als diese Zahl ist. Mit wachsendem n nähern sich die Folgenglieder unbegrenzt der 0. Man sagt: Die 0 ist der **Grenzwert** der Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, denn 0 ist tatsächlich die einzige Zahl, die für die Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ diese Eigenschaft hat.

Die Zahl g heißt Grenzwert der Folge $\{a_n\}$, wenn von einem gewissen Index ab der Abstand jedes Folgengliedes von g kleiner ausfällt als jede noch so kleine positive Zahl. Man sagt auch genauer:

- ▶ Die Zahl g heißt Grenzwert der Folge $\{a_n\}$, wenn in jeder Umgebung von g alle Folgenglieder von einem gewissen a_m ab enthalten sind, das heißt, für jede auch noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ gilt, daß für alle $n \geq m$ die Glieder a_n zwischen $g - \varepsilon$ und $g + \varepsilon$ liegen.

Wegen der Bedeutung des Grenzwertbegriffes ist es gut, sich das Verhalten der Folge an der Zahlengeraden zu veranschaulichen.

- 6. Untersuchen Sie für die beiden Folgen $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (Abb. 1.11.) und $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ (Abb. 1.12.) die folgenden Fragen!
 - a) Wie heißt das Glied, das den Abstand $\varepsilon = 0,05$ von 0 erstmals unterschreitet?
 - b) Welchen Index trägt das Glied, das als erstes innerhalb der Umgebung $0 - 0,01 < x < 0 + 0,01$ liegt?

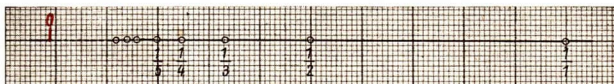
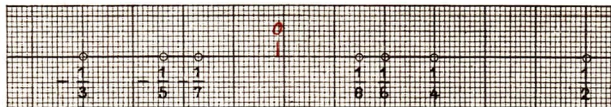


Abb. 1.11.

Abb. 1.12.



7. Veranschaulichen Sie sich das Grenzwertverhalten der Folgen

$$a) \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}, \quad b) \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}, \quad c) \left\{ 1 + \frac{n+1}{n} \right\} = \left\{ \frac{2n+1}{n} \right\}!$$

Versuchen Sie, auch hier die Fragen aus dem Schülerauftrag 6 zu beantworten!

8. Veranschaulichen Sie sich die Glieder der Folge $\left\{ (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1} \right\}$, und erläutern Sie, warum man in diesem Fall nicht von Grenzwerten spricht!

Man verwendet folgende Bezeichnungen:

- ▶ Folgen, die einen Grenzwert haben, heißen konvergent.¹
- Folgen, die keinen Grenzwert haben, heißen divergent.¹
- Folgen mit dem Grenzwert 0 heißen Nullfolgen.

In kurzer symbolischer Schreibweise wird das Verhalten der Konvergenz folgendermaßen zum Ausdruck gebracht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \text{ (lies: Der Limes}^2 \text{ der Folge } \{a_n\}, \text{ wenn } n \text{ unbeschränkt wächst, ist } g.$$

Kürzer: Limes a_n für n gegen unendlich gleich g .)

Beispiel 17

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Mit dem Symbol „ $n \rightarrow \infty$ “ wird nur zum Ausdruck gebracht, daß dem Anwachsen von n keine Schranke gesetzt ist. Es darf also darunter nicht etwa verstanden werden, daß sich das n einer letzten, größten „Zahl ∞ “ nähert. Eine derartige Zahl gibt es nicht, die Folge der natürlichen Zahlen bricht ja nie ab. Der Grenzwert wird bei vielen Folgen auch nie erreicht, ist selbst kein Folgenglied; zum Beispiel ist kein Glied der Folge $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ gleich 0.

In Anlehnung an die oben eingeführte Schreibweise wird auch bei gewissen divergenten Folgen, zum Beispiel für monotone, aber nicht beschränkte Folgen, das Limesymbol verwendet:

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ bedeutet, daß jede (auch noch so große) Zahl S von einem gewissen a_m ab von allen Folgengliedern übertroffen wird, daß also für alle $n \geq m$ gilt $a_n > S$.

9. Erläutern Sie die Bedeutung der Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty!$

Beispiel 18

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} 3n = \infty \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} (-2^n) = -\infty$$

¹ vergere (lat.), sich neigen.

² limes (lat.), Grenze.

Das Limesymbol wird jedoch nicht verwandt bei der sogenannten unbestimmten Divergenz, wie sie zum Beispiel die Folgen $\{(-2)^n\}$ und

$$\left\{(-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}\right\} \text{ zeigen.}$$

- 10. Beschreiben Sie das Verhalten der Folgen in den Beispielen 1 bis 9 bzw. ihnen entsprechender unendlicher Folgen mit dem Limesymbol, soweit das nach den Vereinbarungen möglich ist!

Bisher wurde die Entscheidung, ob und gegen welchen Grenzwert eine Folge konvergiert, lediglich der Anschauung entnommen. Dieses Verfahren kann nicht befriedigen. Zu einem exakten Nachweis, ob eine Folge $\{a_n\}$ den vermuteten Grenzwert g auch tatsächlich besitzt, muß man nach der Definition des Grenzwerts zunächst folgendermaßen überlegen:

Kann man für jede positive, insbesondere noch so kleine, Zahl ε ein Folgenglied a_N finden¹, so daß für alle folgenden Glieder der Abstand zu g kleiner als ε ist?

Kurz: Gibt es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein N , so daß für alle a_n mit $n \geq N$ gilt:

$$|g - a_n| < \varepsilon?$$

Beispiel 19

Hat $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ den Grenzwert 0?

Es müßte dann für jedes $\varepsilon > 0$ ein N zu finden sein, so daß für alle $n \geq N$ gilt

$$\left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ also } n > \frac{1}{\varepsilon}. \text{ Diese notwendige Bedingung läßt sich aber}$$

immer erfüllen. Zu jeder positiven Zahl ε existiert $\frac{1}{\varepsilon}$. Dazu kann man

immer ein $N > \frac{1}{\varepsilon}$ finden, und für alle $n \geq N$ gilt dann $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Da von $n > \frac{1}{\varepsilon}$

auf $\left|0 - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ gefolgert werden kann, liegen alle $a_n = \frac{1}{n}$ mit $n \geq N > \frac{1}{\varepsilon}$

in der vorgegebenen ε -Umgebung.

Beispiel 20

Hat $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ den Grenzwert 1?

Aus $\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| < \varepsilon$ folgt $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$, also $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, also $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$

oder $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Ähnlich wie in Beispiel 19 kann nun gefolgert werden, daß

¹ Der ausgezeichnete Index wird künftig meist mit N bezeichnet; er hängt natürlich im allgemeinen von ε ab. (Vgl. Sie auch mit den Schüleraufträgen 6a und b dieses Abschnitts!)

sich immer ein N finden läßt, so daß diese Bedingung, aus der wiederum die Ausgangsungleichung folgt, für alle $n \geq N$ erfüllt ist.

Wie man vorgeht, wenn das Konvergenzverhalten bzw. der Grenzwert nicht ohne weiteres ersichtlich ist, wird im Abschnitt 2.1. dargestellt.

1.4.5. Unendliche Reihen

Bei der Summenbildung, die in den Abschnitten 1.4.2. und 1.4.3. für endliche arithmetische bzw. geometrische Zahlenfolgen vorgenommen wurde, benutzte man das Summenzeichen. Diese Schreibweise kann auch auf unendliche Zahlenfolgen übertragen werden:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Man spricht hierbei von einer **unendlichen Reihe** und bezeichnet die a_n als Glieder dieser Reihe.

Welche Bedeutung soll man aber einer Summe von unendlich vielen Gliedern beilegen? Um hier zu einer sinnvollen Definition zu kommen, wird die Berechnung einer „endlichen Reihe“, einer Summe aus endlich vielen Summanden, betrachtet.

Beispiel 21

Zu berechnen ist $\sum_{n=1}^7 a_n$ für die Folge

$$\{a_n\} = 7; 12; 10; 9; 5; 8; 13.$$

Da hier keine Summenformel zur Verfügung steht, muß die Berechnung durch gliedweises Aufsummieren erfolgen. Ihr liegt also letztlich, auch wenn die Rechnung praktisch unter Ausnutzung von Assoziationsgesetz und Kommutationsgesetz wesentlich bequemer und schneller erfolgt, folgendes Prinzip zugrunde:

$$\begin{aligned} s_2 &= a_1 + a_2 &&= 19 \\ s_3 &= (a_1 + a_2) + a_3 &&= 29 \\ s_4 &= (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 &&= 38 \\ s_5 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + a_5 &&= 43 \\ s_6 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_6 &&= 51 \\ s_7 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + a_7 = 64 \\ &&&\sum_{n=1}^7 a_n = 64 \end{aligned}$$

In dem Beispiel wurden schrittweise die Teilsummen, die sogenannten **Partialsummen**¹, gebildet. Auf diese Weise erhält man eine Folge von Partialsummen, und

¹ pars (lat.), Teil.

das letzte Glied dieser Folge ist die gewünschte Summe. Eine Folge von Partialsummen kann aber auch zu jeder unendlichen Folge gebildet werden.

11. Bilden Sie den Anfang der Partialsummenfolgen (s_1 bis s_6) für die Folgen:

$$a) \{a_n\} \text{ mit } a_n = 2n, \quad b) \{a_n\} \text{ mit } a_n = \frac{1}{n}, \quad c) \{a_n\} \text{ mit } a_n = \frac{1}{n^2 - n + 1},$$

indem Sie mit $s_1 = a_1$ beginnen!

Bei unendlichen Folgen $\{a_n\}$ hat zwar auch die Partialsummenfolge $\{s_n\}$ kein letztes Glied, kann aber, wie andere Folgen, gegen eine bestimmte Zahl als Grenzwert konvergieren. Daher wird die folgende Definition nahegelegt:

► Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, wenn die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ konvergiert.

Der Grenzwert s der Partialsummenfolge wird als Summe der unendlichen Reihe bezeichnet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s.$$

Beispiel 22

Betrachtet wird die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$$\{a_n\} = \frac{1}{1 \cdot 2}; \frac{1}{2 \cdot 3}; \frac{1}{3 \cdot 4}; \frac{1}{4 \cdot 5}; \dots$$

Durch vollständige Induktion kann man zeigen, daß

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{n+1}$$

ist, also

$$\{s_n\} = \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$$

Diese Folge $\{s_n\}$ konvergiert gegen 1 (Beispiel 20), also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

12. Durchdenken Sie an Hand von Beispielen folgende Fragen!

- Kann eine Reihe konvergieren, deren Glieder eine arithmetische Folge bilden?
- Kann eine Reihe konvergieren, deren Glieder eine konstante Folge bilden?
- Kann eine Reihe konvergieren, deren Glieder positiv sind und eine monoton wachsende, aber beschränkte Folge bilden?
- Kann eine Reihe konvergieren, deren Glieder keine Nullfolge bilden?

Vielfach wird, um die durch das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur formal eingeführte unendliche Reihe exakt zu definieren, die Reihe mit der Partialsummenfolge identifiziert. Man sagt dann: Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Partialsummenfolge $\{s_n\}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ und nimmt dafür einige Bezeichnungsunstimmigkeiten in Kauf. Denn nicht die s_n , wie man nach dieser Definition erwarten müßte, sondern die a_n heißen Glieder der Reihe. Außerdem wird eine Reihe alternierend genannt, wenn die Folge $\{a_n\}$ alternierend ist, wobei aber $\{s_n\}$ nicht zu alternieren braucht. Eingehendere Untersuchungen unendlicher Reihen übersteigen den Mathematikunterricht der Schule. Hier kann nur ein Spezialfall, nämlich der der unendlichen geometrischen Reihe, behandelt werden.

Aufgaben

23. Geben Sie eine unabhängige Darstellung!

a) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$ b) $0; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{6}{7}; \dots$ c) $4; -\frac{5}{2}; 2; -\frac{7}{4}; \dots$

d) $0; \frac{3}{2}; \frac{6}{3}; \frac{9}{4}; \dots$ e) $0; \frac{3}{5}; \frac{8}{10}; \frac{15}{17}; \dots$ f) $1; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}; \frac{5}{8}; \dots$

g) Beschreiben Sie das Verhalten der sechs Folgen hinsichtlich Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz!

h) Stellen Sie die Folgen in einem Koordinatensystem graphisch dar (sinnvolle Wahl der Einheiten beachten!), und bringen Sie die Darstellungen in Zusammenhang mit den Ergebnissen von g)!

24. Bilden Sie die ersten acht Glieder der Folgen a bis e!

a) $\left\{\frac{3}{n^2}\right\}$ b) $\left\{\frac{n+1}{n-1}\right\}$ c) $\left\{\frac{n^2+n}{n}\right\}$ d) $\left\{\frac{n^2+1}{1-n^2}\right\}$ e) $\left\{\frac{3n-1}{n}\right\}$

f) Entnehmen Sie der Anschauung, ob und gegen welche Zahlen diese Folgen konvergieren! Benutzen Sie für die Kennzeichnung das Limesymbol!

g) Bestimmen Sie für jede konvergente Folge eine ε -Umgebung, so daß die gebildeten acht Glieder als einzige außerhalb dieser Umgebung liegen!

25. Geben Sie je drei Folgen an, deren Grenzwert g ist!

a) $g = 5$ b) $g = 19$ c) $g = \frac{1}{2}$ d) $g = -1$ e) $g = 0,3$ f) $g = -3,5$ g) $g = \frac{1}{3}$

26. Zeigen Sie entsprechend den Beispielen 19 und 20 die Konvergenz für die nachstehenden Folgen!

a) $\left\{\frac{2n}{n^2}\right\}$ b) $\left\{\frac{1-2n}{n-1}\right\} (n > 1)$ c) $\left\{\frac{n+3}{n-2}\right\} (n > 2)$ d) $\left\{\frac{n+2}{n} - 2\right\}$

e) Welcher Index gehört jeweils zu dem Glied a_n , das als erstes innerhalb der Umgebung mit $\varepsilon = 0,01$ liegt?

f) Welche der Folgen konvergiert „am schnellsten“?

27. Bilden Sie die ersten zehn Glieder der Partialsummenfolgen $\{s_n\}$ zu den unter a bis e aufgeführten Reihen!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{2n-1}$

- f) Was läßt sich über Monotonie und Beschränktheit der Folgen $\{s_n\}$ und der zugrunde liegenden Folgen $\{a_n\}$ sagen?
 g) Welche Vermutungen lassen sich unter Benutzung einer graphischen Veranschaulichung der Folgen $\{s_n\}$ an der Zahlengeraden für deren Konvergenz aufstellen?
 h) Bestimmen Sie das jeweilige n , für das der Abstand von s_n zum vermuteten Grenzwert erstmals kleiner als 0,001 ist!
28. Untersuchen Sie wie in Aufgabe 27 die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n!$

a) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$ b) $a_1 = 5; a_{n+1} = \frac{1}{n} \cdot a_n$

c) $a_1 = 2; a_2 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}$ für $n > 1$

d) $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n}$

29. Untersuchen Sie wie im Beispiel 22 nachstehende Reihen!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

30. Nehmen Sie Stellung zu dem folgenden Schluß!

Faßt man in der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$ das 1. und 2. Glied, das 3. und 4. Glied usw. jeweils zusammen, so erhält man $s = 0$. Faßt man dagegen erst vom 2. Glied ab je zwei aufeinanderfolgende Glieder zusammen, ergibt sich als Summe das 1. Glied, also $s = 1$. Daraus schließt jemand, daß $0 = 1$ ist.

1.4.6. Die unendliche geometrische Reihe

- 13. Was versteht man unter einer unendlichen geometrischen Folge? Definieren Sie entsprechend, was unter einer unendlichen geometrischen Reihe zu verstehen ist!
- 14. Warum ist es sinnlos, unendliche arithmetische Reihen zu untersuchen?

Beispiel 23

Eine einfache geometrische Reihe ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen ergibt sich aus

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{zu} \quad \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \frac{15}{16}; \dots$$

Die Glieder dieser Folge können auf der Zahlengeraden dargestellt werden

(Abb. 1.13). Daraus läßt sich vermuten $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$. Das ergibt

sich auch aus der Betrachtung der Folgenglieder: Jedes Folgenglied s_n unterscheidet sich von seinem Vorgänger gerade um die Hälfte des Abstandes, den dieser Vorgänger von 1 hat. Dadurch kommen die s_n einerseits der 1 beliebig nahe, können sie andererseits aber nie überschreiten.

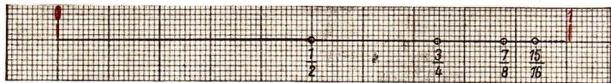


Abb. 1.13.

- 15. Wie heißt das Glied der Folge $\{s_n\}$ im Beispiel 23, für das der Abstand von 1 erstmals kleiner als 0,001 ist?
- 16. Untersuchen Sie die geometrischen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$!

Von der Richtigkeit der vermuteten Grenzwerte überzeugt man sich am besten durch eine allgemeine Grenzwertbetrachtung für die geometrische Reihe, wobei jetzt für a_1 kurz a geschrieben wird:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

Für $q > 1$ und $a > 0$ bilden die Glieder der geometrischen Reihe eine monoton wachsende, nach oben nicht beschränkte Folge. Das gilt dann erst recht für die Folge der Partialsummen: $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ist in diesem Fall also divergent.

- 17. Zeigen Sie unter Benutzung des binomischen Satzes oder der BERNOULLISCHEN Ungleichung (Abschnitt 1.1.3., Aufgabe 33), daß für $q > 1$ die Folge $\{q^n\}$ unbeschränkt wächst, das heißt, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ ist! Denken Sie, wie daraus folgt, daß für $0 < q < 1$ die Folge $\{q^n\}$ eine Nullfolge ist!

■ Beispiel 24

Die Folge $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ ist divergent.

- 18. Wie ist das Grenzverhalten von $\sum_{n=100}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$?

Für $0 < q < 1$ und $a > 0$ bilden die Glieder der geometrischen Reihe eine monoton fallende, nach unten aber durch 0 beschränkte Folge. Dadurch ist $\{s_n\}$ zwar auch monoton wachsend, könnte aber beschränkt sein. Um das Grenzwertverhalten von $\{s_n\}$ zu untersuchen, wird die Summenformel folgendermaßen umgeformt:

$$s_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot q^n.$$

Der Minuend in dieser Differenz hängt von n nicht mehr ab; deshalb ist

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$. Im Subtrahenden beeinflusst n nur den Faktor q^n . Da q zwischen 0 und 1 liegt, ist $\{q^n\}$ eine Nullfolge (Schülerauftrag 17). Also

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} \cdot q^n \right) = \frac{a}{1 - q} \cdot 0 = 0$. Demzufolge ist für $0 < q < 1$ und $a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}.$$

19. a) Überprüfen Sie die im Beispiel 23 und im Schülerauftrag 16 vermuteten

Summen für $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ an der Formel!

b) Was ergibt sich für $q < -1$; $q = \pm 1$; $-1 < q < 0$?

c) Was ergibt sich für $a < 0$?

Allgemein kann formuliert werden:

► Eine geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ konvergiert dann, aber auch nur dann, wenn $|q| < 1$ ist. Ihre Summe ist dann¹ $\frac{a}{1 - q}$.

$$s = \frac{a}{1 - q}$$

20. Geben Sie für die nachstehenden geometrischen Reihen das s_n an, das sich als erstes von s um weniger als ε unterscheidet!

a) $8 + 4 + 2 + \dots$; $\varepsilon = 0,1$

b) $2 + \frac{4}{5} + \dots$; $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Die Werte a und q und die daraus zu bildenden a_n und s_n kann man auch geometrisch in Zusammenhang bringen (Abb. 1.14. und 1.15.).

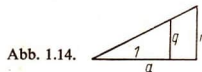


Abb. 1.14.

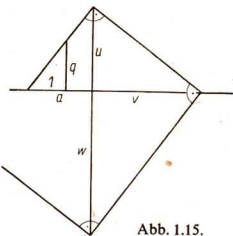


Abb. 1.15.

¹ Beim Herleiten dieser Formel wurden zwei wichtige Sätze über das Rechnen mit Grenzwerten benutzt, auf die erst im Abschnitt 2.1. eingegangen wird.

- 21. a) Drücken Sie in den Abbildungen 1.14. bzw. 1.15. die Maßzahlen der Strecken r bzw. u , v und w durch a und q aus!
 b) Führen Sie je eine derartige Konstruktion für die nachstehenden Angaben aus!

a) $a = 1$; $q = \frac{3}{4}$; $n = 5$ b) $a = 1$; $q = \frac{4}{3}$; $n = 5$

Wie lang ist der spiralförmige Streckenzug für $n = 5$?

Das Konvergieren bzw. Divergieren einer geometrischen Reihe kann man sich auch so veranschaulichen, wie es die Abbildungen 1.16. bzw. 1.17. zeigen.

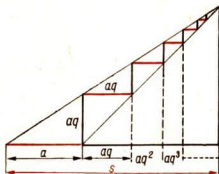


Abb. 1.16.

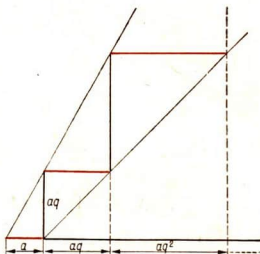


Abb. 1.17.

- 22. a) Erläutern Sie, wie diese Darstellungen zustande gekommen sind! Welches Bild ergibt sich für $|q| = 1$?

b) Leiten Sie $s = \frac{a}{1 - q}$ an Hand der Zeichnung geometrisch her!

Unendliche geometrische Reihen treten besonders häufig in der Form periodischer Dezimalbrüche auf.

■ **Beispiel 25**

$$0,\bar{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots$$

$$0,\bar{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

■ **Beispiel 26**

$$2,\overline{56} = 2 + \frac{56}{100} + \frac{56}{10000} + \dots = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{56}{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

- 23. Benutzen Sie die Summenformel der geometrischen Reihe, um die periodischen Dezimalbrüche der Beispiele 25 und 26 in gemeine Brüche zu verwandeln!

24. Lassen sich die endlichen und die unendlichen, nichtperiodischen Dezimalbrüche ebenfalls als geometrische Reihen darstellen?

Aufgaben

31. Bei den nachstehenden Aufgaben ist die geometrische Reihe gegeben durch zwei der Werte a, s, q .

Berechnen Sie in a bis f jeweils die Summe!

a) $a = 2; q = \frac{1}{3}$ b) $a = 0,8; q = 0,5$ c) $a = 1,5; q = -\frac{3}{4}$

d) $a = 4,3; q = 0,1$ e) $a = -2; q = 0,8$ f) $a = -3; q = -0,3$

Berechnen Sie in g bis l jeweils das Anfangsglied!

g) $s = 7; q = \frac{1}{2}$ h) $s = 18; q = \frac{1}{9}$ i) $s = -10; q = \frac{4}{5}$

k) $s = -1,7; q = \frac{2}{3}$ l) $s = 2; q = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Berechnen Sie in m bis q jeweils den Quotienten!

m) $a = \frac{1}{2}; s = \frac{3}{2}$ n) $a = 9; s = 13,5$ o) $a = -17; s = -36\frac{2}{3}$

p) $a = 28; s = 27$ q) $a = 70; s = 56$

r) Ermitteln Sie q für $a = -70$ und $s = 56$, und nehmen Sie Stellung zum Ergebnis!

s) Stellen Sie die Reihen aus a, g und m graphisch dar! Bestimmen Sie $|s - s_4|$ aus der Zeichnung und durch Rechnung!

32. Nachstehende Quotienten sollen als Summen geometrischer Reihen aufgefaßt werden. Geben Sie für x den jeweils größten Bereich an, für den das möglich ist!

a) $\frac{1}{1-2x}$ b) $\frac{1}{1+3x}$ c) $\frac{3}{1-5x}$ d) $\frac{17}{1+10x}$

e) $\frac{4}{2-3x}$ f) $\frac{5}{\frac{1}{2}+x}$ g) $\frac{0,7}{0,8-2x}$ h) $\frac{133}{7+\frac{x}{2}}$

33. Geben Sie jeweils zwei geometrische Reihen an, die die Summe s haben!

a) $s = 2$ b) $s = 5$ c) $s = -5$ d) $s = 17$ e) $s = \frac{1}{2}$

34. Schreiben Sie $\sum_{k=1}^6 a_k$ als Dezimalbruch, und ermitteln Sie in allen Fällen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$!

a) $a_k = 4 \cdot 10^{-k}$ b) $a_k = 10^{-2k}$ c) $a_k = 27 \cdot 10^{-2k}$

d) $a_k = 7 \cdot 10^{-2k}$ e) $a_k = 515 \cdot 10^{-3k}$ f) $a_k = 91 \cdot 10^{-3k}$

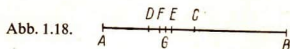
35. Schreiben Sie die nachstehenden periodischen Dezimalbrüche als gemeine Brüche!

a) $0,\overline{8}$ b) $0,\overline{18}$ c) $0,\overline{04}$ d) $0,\overline{04}$ e) $0,\overline{139}$ f) $0,\overline{3579}$ g) $0,\overline{142857}$ h) $0,\overline{857142}$

i) $3,\overline{75}$ k) $0,\overline{413}$ l) $7,\overline{053}$ m) $18,\overline{201}$ n) $47,\overline{542}$

1.4.7. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

- Wieviel Schläge macht eine Uhr in 24 Stunden, wenn sie
 - nur die vollen Stunden schlägt,
 - auch Viertelstunden mit 1, 2, 3 bzw. 4 Schlägen anzeigt?
- Drei Wandergruppen G_1, G_2, G_3 unternehmen eine Sternwanderung von A_1, A_2, A_3 nach Z . Die Entfernungen sind $\overline{A_1Z} = 144$ km, $\overline{A_2Z} = 153$ km, $\overline{A_3Z} = 150$ km. Die Gruppe G_1 will am ersten Tag 25 km zurücklegen und dann die Tagesmärsche von Tag zu Tag um 2 km verkürzen. Die Gruppe G_2 will mit $9 \text{ km} \cdot \text{d}^{-1}$ beginnen und dann die Tagesmärsche von Tag zu Tag um 2 km erhöhen. Die Gruppe G_3 will mit $15 \text{ km} \cdot \text{d}^{-1}$ beginnen und an den folgenden Tagen 10% des jeweiligen Restweges zurücklegen. Nach wieviel Tagen erreichen die Gruppen Z ?
- Messungen ergeben, daß die Temperatur zum Erdinnern hin um etwa 3° je 100 m Tiefe zunimmt, wobei in unseren Breiten eine Temperatur von 10°C in 25 m Tiefe zugrunde zu legen ist.
 - Welche Temperatur herrscht in 2300 m Tiefe?
 - In welcher Tiefe werden 100°C erreicht?
 - Aus welcher Tiefe kommt eine Heilquelle von 45°C ?
- J. I. PERELMAN¹ berichtet von einem römischen Kaiser, der seinen Feldherrn Terentius „fürstlich“ belohnt: Statt der erbetenen Summe von 1 Million Denar darf Terentius am ersten Tag 1 As (= 0,1 Denar) aus der Schatzkammer tragen und muß diese Menge von Tag zu Tag verdoppeln. All diese Münzen gehören ihm, solange er sie mit eigener Kraft fortbewegen kann.
 - Wie groß ist die Belohnung, wenn Terentius höchstens 100 kg bewältigen kann und 1 As 5 g wiegt?
 - Mit welcher Masse hätte Terentius im Interesse einer möglichst hohen Gesamtsumme beginnen müssen, wenn ihm der Kaiser gestattet hätte, ungemünztes Kupfer zu nehmen, die Zahl der Schatzkammeregänge aber auf höchstens 20 beschränkt hätte?
- 220 m Papier (Stärke 0,2 mm) werden auf eine Rolle (Durchmesser 15 cm) gewickelt. Wieviel Lagen ergeben sich, und welchen Durchmesser hat die Rolle zum Schluß? Welche vereinfachende Annahme haben Sie bei der Berechnung gemacht?
- Nach TGL 0-476 genügen die Papierformate der A-Reihe den folgenden Bedingungen:
 - Das Format A_0 ist ein Rechteck von 1 m^2 Flächeninhalt, dessen Seiten sich wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten.
 - Alle Formate A_k ($k = 1, \dots, 10$) entstehen aus A_{k-1} durch Halbieren der längeren Rechtecksseite a_{k-1} .
 Untersuchen Sie die Zahlenfolge $\{a_k\}$ und die Folge $\{b_k\}$ der kürzeren Rechtecksseiten!
- Will man eine Strecke \overline{AB} nach Augenmaß dritteln, so kann man abwechselnd (ebenfalls nach Augenmaß) nach rechts und links halbieren. So sind die Punkte C bis G der Abbildung 1.18. entstanden. Weisen Sie die Berechtigung dieses Näherungsverfahrens nach!



¹ J. I. PERELMAN: *Heitere Mathematik*. Der Kinderbuchverlag, 2. Aufl., Berlin 1960, S. 131ff. Hier finden sich auch weitere Beispiele für Folgen und Reihen.

8. Durch den Scheitel eines Winkels wird eine Gerade gelegt, und zu ihr werden in jeweils gleichem Abstand Parallelen gezogen, die beide Schenkel des Winkels schneiden. Der Abschnitt auf der fünften Geraden ist 20 mm lang. Wie lang sind der Abschnitt auf der zwölften Geraden und die Summe aller Abschnitte bis dorthin?
9. Eine Strecke \overline{AB} (Länge a) werde durch einen Punkt S_1 stetig geteilt. Es gilt also $\overline{AS_1} : \overline{AS_1} = \overline{AS_1} : \overline{S_1B}$. Die längere der beiden Teilstrecken $\overline{AS_1}$ und $\overline{S_1B}$ wird wiederum stetig durch S_2 geteilt usw. Dadurch entsteht eine Folge von Strecken $\overline{AB}; \overline{AS_1}; \overline{AS_2}; \dots$
- Veranschaulichen Sie sich die Teilungen konstruktiv!
 - Welcher Grenzwert ergibt sich für die unendliche Reihe, der diese Streckenfolge zugrunde liegt?
 - Überdenken Sie die gleiche Frage für die jeweils kleineren Teilstrecken!
10. Ein Guthaben von 4000 DM verbleibt 10 Jahre auf einem Sparkonto und wird mit 4% verzinst. Wie groß ist der gesamte Zinsbetrag, wenn
- die Zinsen jährlich abgehoben werden,
 - die Zinsen jeweils nach Ablauf eines Jahres dem Guthaben zur weiteren Verzinsung zugeschlagen werden?
- Stellen Sie für beide Fälle die Zinsen in Abhängigkeit von der Zeit in einem Koordinatensystem dar!
11. In der Technik sind Stufungen für Drehzahlen, Vorschübe, Gewindedurchmesser usw. fast durchweg in geometrischer Folge standardisiert.
- Begründen Sie die Zweckmäßigkeit dieser Stufung!
 - Untersuchen Sie die Folgen der Blendenzahlen und der Verschlußzeiten am Objektiv eines Fotoapparates!
 - Untersuchen Sie Zahlenfolgen, die Sie während Ihrer beruflichen Grundausbildung an Drehmaschinen, Bohrmaschinen u. dgl. finden!
12. a) Stellen Sie nach dem Fallgesetz je eine Tabelle für die Wege bzw. die Geschwindigkeiten am Ende der 1., 2., ..., 10. Sekunde des Fallvorganges auf! Charakterisieren Sie die Folge der Wege und die der Geschwindigkeiten!
- b) Wie ändern sich die Folgen, wenn dem Körper zu Beginn eine Geschwindigkeit von $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ senkrecht nach unten (oben) erteilt wird?
13. a) Bestimmen Sie nach dem Gesetz von GAY-LUSSAC die Volumina, die eine Gasmenge nach Erwärmung auf $5^\circ, 10^\circ, \dots, 50^\circ$ einnimmt, wenn ihr Volumen bei 0°C $V_0 = 1 \text{ m}^3$ beträgt und der Druck konstant bleibt!
- b) Um wieviel Grad wurde eine Gasmenge erwärmt, wenn sie ihr Volumen dabei von $V_0 = 470 \text{ cm}^3$ auf $V_t = 520 \text{ cm}^3$ vergrößerte?

14. Die Abbildung 1.19. zeigt im Schnitt eine Rotationskapselpumpe. An den Saugstutzen S wird der Rezipient mit dem Volumen V (in cm^3) angeschlossen. Durch den exzentrischen Vollzylinder Z kann je Drehung Luft mit dem Volumen v (in cm^3) zum Druckstutzen D befördert werden.

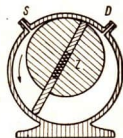


Abb. 1.19.

- Wie groß ist dem BOYLE-MARIOTTESchen Gesetz entsprechend der Druck im Rezipienten nach 1, 2, 3, ..., 10 Umdrehungen, wenn $V = 3000 \text{ cm}^3$, $v = 200 \text{ cm}^3$ und der ursprüngliche Druck im Rezipienten 1000 mb betragen?
- Auf welchen Wert sinkt der Druck im Rezipienten in einer Minute, wenn der Vollzylinder 50 Umdrehungen je Minute macht?
- Wieviel Minuten muß die Pumpe laufen, um einen Druck von 10^{-6} mb zu erreichen?

15. Die Spielfläche einer Langspielplatte (33 min^{-1}) ist ein Kreisring mit den Durchmessern 14,9 cm bzw. 23,7 cm. Die Spieldauer beträgt 615 s. Welchen Weg legt der Saphir zurück, wenn wir uns die Spirale durch eine Folge konzentrischer Kreise ersetzt denken? Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeiten für die erste und die letzte Umdrehung, und ziehen Sie Folgerungen für die Wiedergabequalität!
16. Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte „stufenweise Verdünnung“ an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe mit 10 cm^3 chemisch reinen Wassers auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt abermals mit 10 cm^3 reinen Wassers auf.
- a) Nach wieviel Aufschwemmungen ist ein Mischungsverhältnis von etwa $1 : 2000000$ erreicht?
- b) Ein Kubikzentimeter der fünften Aufschwemmung enthalte noch 10 Bakterien. Wieviel Bakterien enthält dann durchschnittlich 1 cm^3 der Bodenprobe?
17. Wieviel kostet ein Pferd, wenn man „nur“ die Hufnägel zu bezahlen braucht, und zwar für den ersten 1 Pf. und für jeden folgenden den doppelten Betrag? (Zu jedem Hufeisen gehören acht Nägel.)
18. Scheich Hassan starb und hinterließ 4 Söhne, 39 Kamele und ein Testament mit folgendem Inhalt: „Die Söhne sollen der Reihe nach die Hälfte, ein Viertel, ein Achtel und ein Zehntel des Kamelbestandes erben.“
Da die Söhne die Teilung, ohne die wertvollen Tiere zu schlachten, nicht vornehmen konnten, holten sie den Nachbarn Murad. Der stellte eins seiner Kamele als vierzigstes hinzu und teilte: $20 - 10 - 5 - 4$. Murads Kamel blieb übrig, und jeder der Söhne war froh über die gelungene Teilung; hatte er doch mehr bekommen als erwartet. Erläutern Sie, inwiefern diese Teilung trotzdem den Testamentsbestimmungen entsprach!
19. Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt der in Abbildung 1.20. dargestellten sieben Kreise? Denken Sie sich zu den Ecken hin weitere Kreise eingezeichnet! Gibt es für die Summe aus den Umfängen bzw. den Flächen Grenzen?

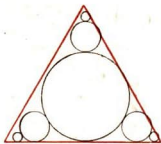


Abb. 1.20.

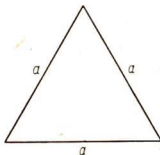
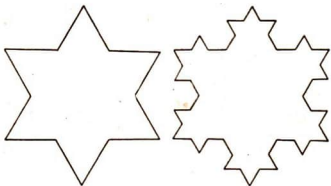


Abb. 1.21.



20. Erläutern Sie den Zusammenhang der drei Figuren in Abbildung 1.21., und drücken Sie Umfang und Flächeninhalt durch a aus! Setzen Sie das Konstruktionsverfahren in Gedanken fort, und versuchen Sie, Grenzen für die Umfänge und Flächeninhalte der so entstehenden Figuren anzugeben!



2. Differentialrechnung

In der Straßenverkehrsordnung werden für den Kraftfahrzeugverkehr die Höchstgeschwindigkeiten festgelegt. Zur Kontrolle der Einhaltung dieser Vorschrift werden von der Volkspolizei Überprüfungen durchgeführt. Bekanntlich versteht man unter der Geschwindigkeit eines sich gleichförmig auf einem Streckenabschnitt bewegendes Körpers den Quotienten $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$. Dabei bedeuten $s_2 - s_1$ die Länge der Meß-

strecke und $t_2 - t_1$ die zum Durchfahren der Strecke benötigte Zeit. Die Zeitmessung nimmt die Volkspolizei mit Stoppuhren vor. Die augenblickliche Geschwindigkeit eines Fahrzeugs weicht jedoch im allgemeinen von dieser ermittelten Geschwindigkeit ab, da ein Kraftfahrzeug keine gleichförmige Bewegung ausführt. Zu einer genauen Erklärung der augenblicklichen Geschwindigkeit kann man kommen, indem man sich das Zeitintervall $t_2 - t_1$ immer mehr verkleinert denkt und den Grenzübergang $(t_2 - t_1) \rightarrow 0$ vornimmt (vgl. S. 88). Derartige Grenzübergänge sind charakteristisch für die Differentialrechnung. Teilweise verwendet man bereits Radargeräte zur Geschwindigkeitskontrolle. Diese zeigen auf einem Gerät unmittelbar die augenblickliche Geschwindigkeit des Fahrzeugs an.

2.1. Grenzwerte von Zahlenfolgen und von Funktionen

2.1.1. Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte

Etwa um 500 v. u. Z. versuchte ZENON, ein griechischer Philosoph, die Unzulänglichkeit mathematischer Untersuchungen mit Hilfe des Paradoxon¹ von ACHILLES² und der Schildkröte nachzuweisen. ZENON behauptete, ACHILLES könne eine Schildkröte, die einen Vorsprung von nur einem Stadion³ habe, niemals einholen, obwohl er mit der zwölfwachen Geschwindigkeit der Schildkröte laufen könne. Und zwar schloß ZENON wie folgt: Wenn ACHILLES das eine Stadion zurückgelegt hat, das die Schildkröte ihm ursprünglich voraus ist, hat die Schildkröte inzwischen einen Weg von $\frac{1}{12}$ Stadion durchlaufen. Während ACHILLES nun diese Strecke von $\frac{1}{12}$ Stadion durchläuft, läuft die Schildkröte $\frac{1}{144}$ Stadion weiter usw. Die Schildkröte behält

also vor ACHILLES stets einen Vorsprung, der sich zwar immer mehr verringert, jedoch nie verschwindet. ACHILLES muß nämlich immer erst an den Ort gelangen, den die Schildkröte bereits verlassen hat, kann sie also nie einholen. Da das Ergebnis dieser Überlegungen aber der täglichen Erfahrung widerspricht, glaubte ZENON die Unzulänglichkeit mathematischer Untersuchungen überzeugend nachgewiesen zu haben.

In der Tat, das ZENONSche Paradoxon war mit den Mitteln der altgriechischen Mathematik nicht zu widerlegen. Dazu benötigt man den zur damaligen Zeit noch nicht entwickelten Begriff des Grenzwertes.

Es soll nun zuerst die Zeit ermittelt werden, die ACHILLES benötigt, um die Schildkröte einzuholen. Der ursprüngliche Vorsprung der Schildkröte sei die Wegstrecke s , die Geschwindigkeit der Schildkröte sei v_1 , ACHILLES laufe mit der Geschwindigkeit v_2 , die gesuchte Zeit sei t . Zu dem mathematischen Ansatz gelangt man auf Grund der Erfahrung, daß die Schildkröte nach einer bestimmten Zeit t von ACHILLES eingeholt wird. Diese Annahme beruht also auf den in der Praxis gesammelten gesellschaftlichen Erfahrungen, die als Quelle der Erkenntnis und zugleich als Kriterium für die Richtigkeit der theoretisch gewonnenen Erkenntnisse angesehen werden.

Der Weg, den die Schildkröte noch laufen kann, bis ACHILLES sie einholt, ist $v_1 t$. ACHILLES legt in der gleichen Zeit t den Weg $v_2 t$ zurück. Also gilt für t die Gleichung:

$$v_2 t = s + v_1 t.$$

Daraus wird t ermittelt:

$$t = \frac{s}{v_2 - v_1}.$$

¹ Paradoxon (griech.), widersinnige Behauptung.

² ACHILLES, griechischer Held des Trojanischen Krieges, berühmt als schneller Läufer.

³ Stadion, altgriechisches Längenmaß von 192,27 m.

ZENON hingegen stellte folgende Überlegungen an:

ACHILLES legt den Vorsprung s in der Zeit $t_1 = \frac{s}{v_2}$ zurück, in der die Schildkröte den neuen Vorsprung $t_1 v_1$ gewinnt. Dieser neue Vorsprung wird von ACHILLES in der Zeit $t_2 = \frac{t_1 v_1}{v_2}$ zurückgelegt. Einsetzen von $\frac{s}{v_2}$ für t_1 ergibt $t_2 = \frac{s}{v_2} \cdot \frac{v_1}{v_2}$. In der Zeit t_2 kommt die Schildkröte um die Strecke $t_2 v_1$ voran, für die man schreibt: $t_2 v_1 = \frac{s}{v_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot v_1$. ACHILLES durchheilt diese Strecke in der Zeit $t_3 = \frac{t_2 v_1}{v_2}$. So geht es unbegrenzt weiter. Man erhält als Summe der Zeiten:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \dots = \frac{s}{v_2} \left[1 + \frac{v_1}{v_2} + \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 + \dots \right].$$

Offenbar stellt sich auf diese Weise $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ als eine unendliche geometrische Reihe dar, deren Quotient gleich $\frac{v_1}{v_2}$ ist. Weil nach Voraussetzung $v_1 < v_2$ gilt und sowohl v_1 als auch v_2 positiv sind, ist $\left| \frac{v_1}{v_2} \right| < 1$. Nach den Überlegungen des Abschnitts 1.4.4. konvergiert diese geometrische Reihe, und man erhält:

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_k = \frac{s}{v_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_1}{v_2}} = \frac{s}{v_2 - v_1}.$$

Dieses mit Hilfe der Summe einer unendlichen geometrischen Reihe, also mit Hilfe eines Grenzwertes, gewonnene Ergebnis stimmt mit dem Resultat überein, das als Lösung einer Gleichung auf der Grundlage der praktischen Erfahrung ermittelt wurde. Die griechischen Philosophen und Mathematiker zur Zeit ZENONS konnten sich noch nicht vorstellen, daß unendliche Reihen eine bestimmte Zahl, nämlich den Grenzwert ihrer Partialsummenfolge, als Ergebnis der Summation aller Glieder der Reihe haben können. Heute wissen wir, daß sich die Theorie der Grenzwerte als ein wertvolles Mittel zur tieferen und genaueren Erfassung der Wirklichkeit erweist.

2.1.2. Grenzwertuntersuchungen, Nullfolgen

Mit Hilfe der Definition des Grenzwertes g einer Zahlenfolge $\{a_n\}$ im Abschnitt 1.4.4. sollen einige Zahlenfolgen untersucht werden.

Da in der Folge der Stammbrüche $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ mit wachsendem n die Zahl $\frac{1}{n}$ immer kleiner wird, und zwar für sehr große n beliebig klein, vermutet man, daß der Grenzwert dieser Folge die Zahl Null ist. Um nachzuweisen, daß der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ tatsächlich

Null ist, muß gezeigt werden, daß

$$|0 - a_n| = \left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

kleiner ausfällt als jede noch so kleine positive Zahl ε , sobald man n hinreichend groß wählt.

Denkt man sich zum Beispiel für ε nacheinander eingesetzt:

$$\text{a) } \varepsilon = 0,1, \quad \text{b) } \varepsilon = 10^{-3}, \quad \text{c) } \varepsilon = 4 \cdot 10^{-8},$$

so ist die Behauptung im Fall a) tatsächlich für alle $n > 10$ erfüllt. Es ist dann nämlich:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{10}.$$

Ebenso ist im Fall b) für jedes $n > 10^3$:

$$\frac{1}{n} < 10^{-3}.$$

Schließlich ist im Fall c) für jedes $n > \frac{1}{4} \cdot 10^8$:

$$\frac{1}{n} < 4 \cdot 10^{-8}.$$

Um die Behauptung für jede positive Zahl ε zu beweisen, denkt man sich ε beliebig klein vorgegeben und bildet damit die Zahl $\frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für jede natürliche Zahl n , die größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist, sicherlich $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Damit ist bewiesen, daß gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Zahlenfolgen, deren Grenzwert die Zahl Null ist, heißen **Nullfolgen**.

► Die Folge der Stammbrüche ist eine Nullfolge.

● Zeigen Sie, daß die Folge $\left\{ -\frac{1}{n} \right\}$ eine Nullfolge ist!

Die Untersuchung von Zahlenfolgen $\{a_n\}$, deren Grenzwert g von Null verschieden ist, kann häufig mit Vorteil auf die Untersuchung einer Nullfolge zurückgeführt werden. Dabei untersucht man an Stelle der Folge $\{a_n\}$ eine neue Folge $\{b_n\}$, mit $b_n = g - a_n$. Aus der Definition des Grenzwertes ergeben sich nämlich leicht die beiden folgenden Sätze:

1. Hat die Folge $\{a_n\}$ den Grenzwert g , so ist die Folge $\{b_n\}$ mit $b_n = g - a_n$ eine Nullfolge.

Umgekehrt gilt:

2. Ist die Folge $\{b_n\}$ mit $b_n = g - a_n$ eine Nullfolge, so hat die Folge $\{a_n\}$ den Grenzwert g .

Als Beispiel wird die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ betrachtet. Diese hat den Grenzwert 1, denn die Zahlen $b_n = 1 - a_n = 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$ bilden die Glieder einer Nullfolge. Das Beispiel der Folge $\{a_n\}$ zeigt auch, daß eine Folge, deren Glieder immer kleiner werden, nicht notwendig eine Nullfolge zu sein braucht.

Als weiteres Beispiel folgt nun:

$$\{s_n\} \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Vom dritten Summanden an werden jetzt in der unten ersichtlichen Weise stets 2^p aufeinanderfolgende Summanden ($p = 1; 2; 3; \dots$) zusammengefaßt.

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^r + 1} + \dots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Von den in jeweils einer Klammer stehenden Summanden ist stets der letzte der kleinste, so daß man zu folgenden Ungleichungen gelangt:

1. Klammer: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2^1 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$

2. Klammer: $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2}$

\vdots \vdots \vdots \vdots

($r - 1$)-te Klammer:

$$\frac{1}{2^{r-1} + 1} + \frac{1}{2^{r-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^{r-1} + 2^{r-1}}$$

$$> \frac{1}{2^{r-1} + 2^{r-1}} + \frac{1}{2^{r-1} + 2^{r-1}} + \dots + \frac{1}{2^{r-1} + 2^{r-1}} = 2^{r-1} \cdot \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2}$$

Der Ausdruck in der r -ten Klammer ist sicher nicht kleiner als Null. Somit gilt insgesamt:

$$s_n > 1 + \frac{1}{2} + (r-1) \frac{1}{2} = 1 + \frac{r}{2} \quad \text{für } n \geq 2r, \text{ insbesondere auch für } n = 2r.$$

Daher wächst die Zahlenfolge $\{s_n\}$ mit $n = 2r$, wenn $r = 1; 2; \dots$ gilt, über alle Grenzen. Weil nun die Folge $\{s_n\}$, bei der n alle natürlichen Zahlen durchläuft, wegen $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1}$ monoton wachsend ist, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Hieraus erkennt man, daß eine unendliche Reihe, deren Glieder gegen Null streben, nicht zu konvergieren braucht. Die formal niedergeschriebene unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nämlich nicht, obwohl ihre Glieder eine Nullfolge bilden. Diese

Reihe bezeichnet man als **harmonische Reihe**. Sie ist bei Konvergenzuntersuchungen unendlicher Folgen und Reihen oft nützlich. Der Name harmonische Reihe rührt daher, daß jedes Glied dieser Reihe das harmonische Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist, daß also gilt:

$$(1) \quad \frac{1}{u_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{k-1}} + \frac{1}{u_{k+1}} \right).$$

(Das harmonische Mittel zweier positiver Zahlen ist gleich dem reziproken Wert des arithmetischen Mittels der reziproken Werte der beiden gegebenen Zahlen.)

- 1. Zeigen Sie, daß für $u_k = \frac{1}{k}$ die Relation (1) erfüllt ist!
- 2. Zeigen Sie, daß das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen p und q die mittlere Proportionale zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel dieser beiden Zahlen p und q ist!
- 3. Zeigen Sie, daß im Halbkreis in Abbildung 2.1. das arithmetische Mittel gleich der Länge von \overline{MC} ist, daß das geometrische Mittel gleich der Länge von \overline{CD} ist und daß das harmonische Mittel gleich der Länge von \overline{CE} ist!

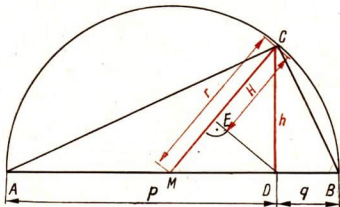


Abb. 2. 1.

4. Schreiben Sie die ersten zehn Glieder der Folgen

a) $\left\{\frac{3}{n}\right\}$; b) $\left\{\frac{7}{n}\right\}$; c) $\left\{\frac{-5}{n}\right\}$; d) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

nieder, und gewinnen Sie daraus eine Vermutung über den Grenzwert der Folge

$\left\{\frac{a}{n}\right\}$, wobei a eine beliebige reelle Zahl bedeutet!

Die Zahlenfolge $\left\{\frac{a}{n}\right\}$ mit $n = 1; 2; 3; \dots$ ist bei beliebigem konstantem a eine Nullfolge.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $\left|0 - \frac{a}{n}\right| = \frac{|a|}{n}$ kleiner ausfällt als jede noch so kleine positive Zahl ε , sobald n hinreichend groß gewählt wird.

1. Ist $a = 0$, so ist die Behauptung offenbar richtig.

2. Ist $a \neq 0$, so bildet man die Zahl $|a| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$.

Wählt man nun n größer als diese Zahl $|a| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$, so fällt $\frac{|a|}{n}$ sicher kleiner als ε aus, womit die Behauptung bewiesen ist.

Folglich gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Allgemein gilt folgender hier ohne Beweis dargelegte Satz:

Multipliziert man jedes Glied einer Nullfolge mit ein und derselben Zahl, so ist die entstehende Zahlenfolge ebenfalls eine Nullfolge.

Mit $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$ ist auch $\lim_{k \rightarrow \infty} a \cdot u_k = a \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$.

Ein anderer Weg zur Berechnung des Grenzwertes einer Zahlenfolge wird im folgenden Beispiel gezeigt:

$\{u_k\}$ mit $u_k = \frac{k}{k+1}$ und $k = 1; 2; \dots$

Wegen $k = (k+1) - 1$ läßt sich u_k in der Form

$$u_k = \frac{k+1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n} \text{ mit } n = k+1 = 2; 3; 4; \dots$$

schreiben.

Wegen $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ ist die Folge $\{1 - u_k\}$ eine Nullfolge, so daß gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 1.$$

Dabei wurde wiederum der Satz benutzt, daß der Grenzwert einer Folge $\{a_n\}$ sicher dann gleich g ist, wenn $\{b_n\}$ mit $b_n = g - a_n$ eine Nullfolge ist.

Die Folge $\{b_n\}$ kann man sich auch folgendermaßen entstanden denken:

Bei den Folgen $g; g; g; \dots$ (mit dem Grenzwert g)

und $a_1; a_2; a_3; \dots$ (mit dem Grenzwert g)

wird jeweils die Differenz zweier untereinanderstehender Glieder gebildet, also

$$g - a_1; g - a_2; g - a_3; \dots$$

Dann hat die Folge dieser Differenzen die Differenz der Grenzwerte $g - g = 0$ als Grenzwert.

Allgemeiner gelten die folgenden drei Sätze über das Rechnen mit Grenzwerten, die zwar im folgenden benötigt, hier aber nicht bewiesen werden:

Voraussetzung:

Die Folge $\{a_n\}$ habe den Grenzwert a , die Folge $\{b_n\}$ den Grenzwert b .

Dann hat

1. die Folge $\{a_n + b_n\}$ den Grenzwert $a + b$,
2. die Folge $\{a_n \cdot b_n\}$ den Grenzwert $a \cdot b$.

Wenn sämtliche b_n und b von Null verschieden sind, hat

3. die Folge $\{a_n : b_n\}$ den Grenzwert $a : b$.

In Worten:

- ▶ 1. Der Grenzwert einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden, falls diese Grenzwerte existieren.
- ▶ 2. Der Grenzwert eines Produktes ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren, falls diese Grenzwerte existieren.
- ▶ 3. Der Grenzwert eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte von Dividend und Divisor, falls diese Grenzwerte existieren und der Grenzwert des Divisors ungleich Null ist.

Nun soll der Grenzwert der Zahlenfolge

$$\{u_n\} \quad \text{mit} \quad u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1} \quad \text{und} \quad n = 1; 2; \dots$$

bestimmt werden. Dieser Grenzwert kann mit Hilfe der eben genannten Grenzwertsätze ermittelt werden, wenn zuvor eine geeignete Umformung vorgenommen wird. Dividiert man nämlich Zähler und Nenner von u_n durch n^2 , so erhält man

$$u_n = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Nach dem 2. Grenzwertsatz ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Daher ist nach dem 1. und 2. Grenzwertsatz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n^2} \right) = 1 + (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 0 = 1.$$

Nach dem 1. Grenzwertsatz ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n} \right] + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 0 = 1.$$

Schließlich ist nach dem 3. Grenzwertsatz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

- 5. Überprüfen Sie, ob die Voraussetzungen zur Anwendung des 3. Grenzwertsatzes erfüllt sind!
- 6. Bestimmen Sie den bereits ermittelten Grenzwert von $\{u_k\}$ mit $u_k = \frac{k}{k+1}$ auf die Weise, daß Sie vor den Grenzwertbetrachtungen das allgemeine Glied der Zahlenfolge durch Kürzen mit der Zahl k ($k \neq 0$) umformen!

2.1.3. Grenzwerte von Funktionen

Bisher wurden nur Grenzwerte von Zahlenfolgen ermittelt. Man kann jede Zahlenfolge wegen der eindeutigen Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen n und den Gliedern u_n der Zahlenfolge $\{u_n\}$ auch als eine Funktion der ganzzahligen Veränderlichen n betrachten und dafür schreiben:

$$y_n = f(n) = u_n.$$

Es sei nunmehr eine Funktion $y = f(x)$ gegeben, die stetig ist. Der in der Mathematik außerordentlich wichtige Begriff der **Stetigkeit** von Funktionen wird im Schulunterricht nicht näher erläutert. Deshalb mögen folgende Feststellungen genügen:

- ▶ Die Bilder stetiger Funktionen weisen keine Lücken oder Sprünge auf. Der Betrag der Differenz zweier Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ fällt kleiner aus als jede noch so kleine positive Zahl, sobald nur die Argumentdifferenz $x_1 - x_2$ dem Betrage nach hinreichend klein gewählt wird.

Ein beliebiger Punkt $P(x; y)$ durchlaufe die Kurve, die das Bild der Funktion $y = f(x)$ ist, so daß die Abszissen x gegen x_g streben. Wenn es nun einen Punkt $P(x_g; y_g)$ gibt, (der Punkt braucht nicht dem Bild der Funktion $y = f(x)$ anzugehören), für den der Abstand zwischen ihm und den Punkten $P(x; y)$ bei dem betrachteten Grenzübergang $x \rightarrow x_g$ beliebig klein wird, so bezeichnet man y_g als Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ für $x \rightarrow x_g$.

Unter Benutzung von Zahlenfolgen kann dieser Sachverhalt wie folgt beschrieben werden:

► Durchläuft x eine beliebige Zahlenfolge $\{x_n\}$ mit dem Grenzwert x_g und strebt dabei stets $y_n = f(x_n)$ gegen einen Grenzwert y_g , so bezeichnet man y_g als Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ für $x \rightarrow x_g$.

Man symbolisiert diesen Sachverhalt kurz mit:

$$\lim_{x \rightarrow x_g} f(x) = y_g.$$

Damit ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion auf den des Grenzwertes von Zahlenfolgen zurückgeführt.

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß hier nicht gefordert ist, daß der Grenzwert $y_g = f(x_g)$ dem Wertevorrat, ja nicht einmal, daß x_g dem Definitionsbereich der Funktion $y = f(x)$ angehört. Es ist durchaus möglich, daß die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_g$ unstetig bzw. gar nicht definiert ist.

Durch die Festlegung des Grenzwertes als Funktionswert an einer solchen Stelle kann jedoch in vielen Fällen eine Funktion $y = f(x)$ zu einer an dieser Stelle stetigen Funktion ergänzt werden.

■ Beispiel

Die Funktion $y = f(x) = \frac{x}{x}$ ist für alle reellen Zahlen x , die ungleich Null sind, definiert. Es gilt für jedes $x = x_n \neq 0$:

$$y_n = f(x_n) = \frac{x_n}{x_n} = 1.$$

Wie wenig sich die reelle Zahl $x_n \neq 0$ auch von $x_g = 0$ unterscheidet, stets ergibt sich als Funktionswert $y_n = f(x_n) = 1$. Für $x_g = 0$ hingegen ist die

Funktion $y = f(x) = \frac{x}{x}$ nicht definiert, da in diesem Fall der Nenner Null ist.

Setzt man aber wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = y_g = 1$$

nunmehr $f(0) = 1$ fest, so erhält man eine neue Funktion, die für alle Werte

von x erklärt ist und für alle $x \neq 0$ mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt.

Wenn dagegen als Festsetzung gewählt worden wäre

$$y_0 = f(x_g) = f(0) = 2 \neq y_g,$$

so wäre ebenfalls eine Funktion $y = f(x) = \frac{x}{x}$ entstanden, die für alle reellen

Werte von x erklärt ist und für alle $x \neq 0$ mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt. Jedoch besäße die so definierte Funktion an der Stelle $x_g = 0$ eine Unstetigkeitsstelle. Es ist offensichtlich, daß die zuerst gewählte Erweiterung des Definitionsbereichs der Funktion $y = f(x) = \frac{x}{x}$ mehr dem

Wesen der Funktion außerhalb der kritischen Stelle $x = x_g = 0$ angepaßt ist.

Es sei noch bemerkt, daß für jede in ihrem Definitionsbereich stetige Funktion $y = f(x)$ an jeder Stelle x_g des Definitionsbereichs gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_g} f(x) = f(x_g).$$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^5}{2n} & \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+3} & \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5}{3n-1} \\ \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} & \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} & \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{n} & \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n-2}{3n+4} \end{array}$$

2. Ermitteln Sie die Nullfolgen aus Aufgabe 1, und schreiben Sie von diesen alle Glieder nieder, deren Betrag größer als 0,03 ist!

3. Schreiben Sie für alle diejenigen Zahlenfolgen aus Aufgabe 1, deren Grenzwert g ungleich Null ist, alle Glieder nieder, die die Bedingung $|g - a_n| < 0,05$ nicht erfüllen!

4. Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n^2} & \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2+1} & \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{3n^2+4} \\ \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n^2} & \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n^2} & \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-8}{3n^2} & \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{2n^2-1} \\ \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+1}{4n^2} & \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+3n-1}{4n^2} & & \\ \text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-3n+4}{6n^2+2n-7} & \text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n+1} & \text{n) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2-1} & \end{array}$$

5. Wählen Sie $\varepsilon = \frac{1}{500}$, und überprüfen Sie, ob für das zehnte Glied der Zahlenfolgen aus Aufgabe 4 bereits $|g - a_{10}| < \varepsilon$ gilt!

6. Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{5}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n+1}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2 + 4n - 2}$
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 5n^2 - 2}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^4 - 5n + 1}$

7. Ermitteln Sie den Grenzwert von $\{x_n\}$ mit $x_n = \frac{n}{2^n}$ für $n \rightarrow \infty$!

Hinweis: Ersetzen Sie 2^n durch eine Summe von Binomialkoeffizienten, und gewinnen Sie daraus die Ungleichung $2^n > \frac{n(n-1)}{2}$, aus der sich durch Bilden der reziproken Werte der gesuchte Grenzwert ermitteln läßt!

8. Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ für $a_n = \frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n!}{2}$!

9. Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)^2}{n^3}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k(k+1)}{n^3}$

10. Ermitteln Sie die Grenzwerte folgender Funktionen!

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ für $\alpha) x \rightarrow -1$; $\beta) x \rightarrow -\infty$; $\gamma) x \rightarrow 1$
b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ für $\alpha) x \rightarrow 1$; $\beta) x \rightarrow -1$
c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ für $\alpha) x \rightarrow 1$; $\beta) x \rightarrow -1$

11. Auf Seite 76 werden drei Sätze für das Rechnen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen genannt. Das Ermitteln von Grenzwerten von Funktionen wird auf das Ermitteln von Grenzwerten von Zahlenfolgen zurückgeführt. Daher gelten für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen auch drei Sätze, die den Sätzen für das Rechnen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen entsprechen. Wie lauten diese drei Sätze für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen? Schreiben Sie die Sätze mit Hilfe mathematischer Symbole nieder!

12. Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$ c) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}} \frac{x^2 - a}{x - \sqrt{a}}$

Hinweis: Formen Sie die Ausdrücke so um, daß Sie die drei Grenzwertsätze anwenden können!

13. Suchen Sie die Nullstellen folgender quadratischer Funktionen!

a) $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$ b) $y = f(x) = x^2 + 7x + 12$
c) $y = f(x) = x^2 + 2x - 15$ d) $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$

Bilden Sie mit den unter a) bis d) genannten Funktionen und deren Nullstellen x_1 und x_2 die folgenden acht weiteren Funktionen:

$$y = g(x) = \frac{f(x)}{x - x_k} \quad (k = 1; 2)!$$

An welchen Stellen sind diese acht Funktionen nicht definiert? Warum nicht? Welchen Grenzwert muß man in jedem der acht Fälle bilden, wenn man $g(x_k)$ durch $\lim_{x \rightarrow x_k} g(x)$ definieren will?

14. Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} - \frac{2x}{x - 1} \right)$$

15. Stellen Sie eine Wertetafel auf, und skizzieren Sie das Bild der Funktion $y = f(x)$ für:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 + x - 6} \quad \text{im Intervall } 0 \leq x \leq 4;$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 4x - 5} \quad \text{im Intervall } 3 \leq x \leq 7;$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 3x - 18} \quad \text{im Intervall } 4 \leq x \leq 8!$$

Wählen Sie für die Wertetafel Abstände von 0,2 für zwei aufeinanderfolgende Argumente! Schließen Sie die Lücken in den Funktionsbildern durch geeignete Festsetzungen!

2.2. Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten

2.2.1. Differenzenfolgen, Differenzenquotienten

Unter der Vielzahl von Grenzwerten von Funktionen spielt der Grenzwert aus dem Quotienten zweier Nullfolgen, die auf eine bestimmte Art und Weise gebildet werden, eine besondere Rolle.

● 1. Wählen Sie eine bestimmte Zahl $x = x_0$! Bilden Sie mit dieser Zahl $x = x_0$ die Zahlenfolge $\{u_n\}$ mit $u_n = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{(x_0 + h_n) - x_0}$ und $f(x) = 2x^2 + 3$!

Wählen Sie speziell $x_0 = 5$ sowie

$$\text{a) } h_n = 10^{-n}, \text{ b) } h_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ c) } h_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ d) } h_n \text{ eine beliebige Nullfolge!}$$

(Beachten Sie bei der Rechnung, daß $(x_0 + h_n) - x_0 = h_n$ ist!)

Bedeutet h eine beliebige von Null verschiedene Zahl, die so beschaffen ist, daß mit x_0 auch $(x_0 + h)$ zum Definitionsbereich der Funktion $y = f(x)$ gehört, so bezeichnet man den Ausdruck

den Ausdruck $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ als **Differenzenquotient** der

Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

- 2. Deuten Sie den Quotienten in der Einführung auf S. 69 als Differenzenquotienten!

Für die im Zähler stehende Funktionswertdifferenz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ wird häufig das Symbol Δy und für die im Nenner stehende Argumentdifferenz $(x_0 + h) - x_0 = h$ das Symbol Δx verwendet. Mit dieser Bezeichnungsweise kann man den Differenzenquotienten in folgender Form schreiben:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- 3. Bilden Sie den Differenzenquotienten der für alle positiven x erklärten Funktion $y = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$!

2.2.2. Die Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle

Denkt man sich in dem Differenzenquotienten einer Funktion $y = f(x)$ an einer festen Stelle x_0 für h die Glieder einer Nullfolge $\{h_n\}$ eingesetzt, so entsteht eine Folge von Quotienten. Solche Folgen sind zum Beispiel im Schülerauftrag 1 aufgestellt worden. Es soll jetzt an einzelnen Beispielen untersucht werden, ob solche Quotientenfolgen einem Grenzwert zustreben und, wenn das der Fall ist, welchem Grenzwert.

Die im Abschnitt 2.1.2. aufgeführten Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen sind hier nicht unmittelbar anwendbar, denn die Folge der Nenner hat den Grenzwert Null. Daher muß der Ermittlung des Grenzwertes der Quotientenfolge stets eine Umformung vorangehen.

Beispiel 1

Der Differenzenquotient von $y = f(x) = 3x^2 - 1$ an einer beliebigen Stelle x_0 soll bestimmt werden.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{[3(x_0 + h)^2 - 1] - [3x_0^2 - 1]}{h} = \frac{6x_0 h + 3h^2}{h}$$

Setzt man jetzt für h die Glieder einer beliebigen Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$ ein, so kann gekürzt werden, und die Glieder der entstehenden Folge der Differenzenquotienten haben die Gestalt:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = 6x_0 + 3h_n.$$

Auf den rechts stehenden Ausdruck können die Grenzwertsätze angewendet werden, und man erhält das Ergebnis, daß für jede beliebige Nullfolge $\{h_n\}$ die Folge der zugehörigen Differenzenquotienten gegen $6x_0$ strebt.

Beispiel 2

Es soll der Grenzwert einer beliebigen Differenzenquotientenfolge der Funktion $y = f(x) = |x|$ an einer beliebigen Stelle x_0 untersucht werden.

Hierbei werden drei Fälle unterschieden:

a) $x_0 > 0$, b) $x_0 < 0$, c) $x_0 = 0$.

Allgemein lautet der Differenzenquotient an der Stelle x_0 :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h}.$$

Fall a): Denkt man sich für h die Glieder einer beliebigen Nullfolge $\{h_n\}$ eingesetzt, so gilt für die Glieder h_n von $\{h_n\}$, eventuell bis auf endlich viele Anfangsglieder, $h_n > -x_0$. Für diese h_n ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{|x_0 + h_n| - |x_0|}{h_n} = \frac{x_0 + h_n - x_0}{h_n} = 1,$$

so daß man die Folge $1; 1; 1; \dots$ mit dem Grenzwert 1 erhält. Es gilt also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = 1.$$

Fall b): In diesem Fall gilt, eventuell bis auf endlich viele Anfangsglieder, $h_n < -x_0$, so daß der Differenzenquotient gleich

$$\frac{|x_0 + h_n| - |x_0|}{h_n} = \frac{-x_0 - h_n + x_0}{h_n} = -1$$

ist. Als Differenzenquotientenfolge erhält man $-1; -1; -1; \dots$ mit dem Grenzwert -1 . Es gilt also in diesem Fall:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = -1.$$

Fall c): In diesem Fall lautet die entsprechende Folge der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \frac{|h_n|}{h_n}.$$

Denkt man sich nun die spezielle Nullfolge $h_n = \frac{(-1)^n}{n}$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \begin{cases} 1 & \text{für geradzahliges } n \\ -1 & \text{für ungeradzahliges } n. \end{cases}$$

Als Differenzenquotientenfolge erhält man $-1; 1; -1; 1; \dots$. Diese Folge besitzt keinen Grenzwert.

Aus diesen Beispielen wird folgendes ersichtlich:

Es gibt Funktionen, für die bei jeder beliebigen Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$ die Folge der zugehörigen Differenzenquotienten stets einem Grenzwert zustrebt. Es gibt aber auch Funktionen, für die nicht bei jeder Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$ die Folge der zugehörigen Differenzenquotienten einem Grenzwert zustrebt. Von besonderer Bedeutung ist der erste Fall. Daher wird definiert:

- Ist die Funktion $y = f(x)$ in einer Umgebung der Stelle $x = x_0$ erklärt, und strebt für jede Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$, für die $x_0 + h_n$ in dieser Umgebung liegt, stets die Folge der zugehörigen Differenzenquotienten $\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$ einem Grenzwert g zu,
- so sagt man, die Funktion $y = f(x)$ sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Den Grenzwert g nennt man den Differentialquotienten oder die erste Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 .

Zur Bezeichnung des **Differentialquotienten** sind folgende Schreibweisen üblich:

$$f'(x_0) \text{ (gelesen } f\text{-Strich an der Stelle } x = x_0)$$

$$\text{oder } y'|_{x=x_0} \text{ (gelesen } y\text{-Strich an der Stelle } x = x_0)$$

$$\text{oder } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ (gelesen } dy \text{ nach } dx \text{ an der Stelle } x = x_0)^1.$$

Unter Verwendung der Limes-Schreibweise gilt schließlich:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Aus dieser Erklärung der Differenzierbarkeit ergibt sich, daß für jede Funktion $y = f(x)$, die an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar ist, gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0).$$

Die letzte Relation besagt offenbar, daß die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ stetig ist. Aus der Differenzierbarkeit folgt demnach die Stetigkeit. Dagegen folgt aus der Stetigkeit, wie das Beispiel der Funktion $y = f(x) = |x|$ zeigt, nicht die Differenzierbarkeit.

- 4. Erläutern Sie, weshalb die Funktion $y = f(x) = |x|$ an der Stelle $x = x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist!

¹ Diese Symbolik stammt von G. W. v. LEIBNIZ.

Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $y = f(x) = 3x - 5$ an den folgenden Stellen!

a) $x_0 = 0$; b) $x_0 = 2$ c) $x_0 = 4$ d) $x_0 = -2$ e) $x_0 = -4$

2. Ermitteln Sie die Ableitungen der Funktionen $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$!

a) $y = f(x) = 5x + 3$; $x_{01} = -2$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 2$

b) $y = f(x) = 5x - 6$; $x_{01} = -2$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 2$

c) $y = f(x) = 5x + a$; a konstant; $x_0 = k$

Ermitteln Sie die Ableitungen folgender Funktionen $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$!

3. a) $y = f(x) = 4x - 5$; $x_0 = 3$ b) $y = f(x) = -3x + 2$; $x_0 = -4$

c) $y = f(x) = 7x - 9$; $x_0 = 0,03$ d) $y = f(x) = -x + 3$; $x_0 = -\frac{2}{3}$

e) $y = f(x) = \frac{1}{2}x - 4$; $x_0 = 5$ f) $y = f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}$; $x_0 = \frac{3}{10}$

g) $y = f(x) = mx$; $x_0 = k$ h) $y = f(x) = mx + n$; $x_0 = k$; m, n konstant

4. a) $y = f(x) = x^2 + 3x + 5$; $x_{01} = -2$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 1$

b) $y = f(x) = x^2 - 4x + 6$; $x_{01} = -1$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 2$

c) $y = f(x) = x^2 + 3x - 5$; $x_{01} = -5$; $x_{02} = 3$; $x_{03} = 8$

d) $y = f(x) = x^2 - 9x + 2$; $x_{01} = 3$; $x_{02} = 3,1$; $x_{03} = 3,2$

e) $y = f(x) = 3x^2 - 4x + 9$; $x_{01} = -1$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 1$

f) $y = f(x) = -2x^2 + 3x - 5$; $x_{01} = -1$; $x_{02} = 1$; $x_{03} = 2$

5. Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden quadratischen Funktionen an der Stelle $x = x_0$!
(a, b und c sind Konstanten)

a) $y = f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ b) $y = f(x) = 2x^2 + 5x + c$ c) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

6. Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden kubischen Funktionen an der Stelle $x = 2$
und an der Stelle $x = x_0$!

a) $y = f(x) = x^3$ b) $y = f(x) = 2x^3$ c) $y = f(x) = x^3 + 2$

d) $y = f(x) = x^3 + 2x$ e) $y = f(x) = x^3 - 2x$ f) $y = f(x) = 2x^3 + 5$

g) $y = f(x) = 2x^3 + 2x + 5$ h) $y = f(x) = 2x^3 + 5x^2$

i) $y = f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x$ k) $y = f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 3$

l) $y = f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ m) $y = f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + d$

n) $y = f(x) = 2x^3 + 5x^2 + cx + d$ o) $y = f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$

p) $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ q) $y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0 = \sum_{i=0}^3 a_i x^i$
(a_i, b, c und d sind Konstanten.)

7. Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle $x = x_0$!

a) $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 5$; $x_0 = 2$ b) $y = f(x) = \sum_{i=0}^2 a_i x^i$; $x_0 = k$

c) $y = f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = 1$ d) $y = f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; $x_0 = 0$

2.3. Geometrische und physikalische Deutung des Differenzenquotienten und der Ableitung

2.3.1. Die Ableitung als Tangentensteigung

Die Bildung eines Differentialquotienten hängt sehr eng mit dem Tangentenproblem zusammen, von dem aus LEIBNIZ zur Differentialrechnung gekommen ist.

● 1. Was versteht man unter einer Tangente a) an einen Kreis, b) an eine Ellipse?

Während man bei gewissen speziellen Kurven, zum Beispiel beim Kreis und bei der Ellipse, eine Tangente als eine Gerade erklären kann, die mit der Kurve einen und nur einen Punkt gemeinsam hat, ist diese Erklärung für allgemeine Kurven nicht brauchbar. So ist zum Beispiel in Abbildung 2.2. die Gerade g_1 , die mit der Kurve C nur einen Punkt gemeinsam hat, offenbar keine Tangente an C . Dagegen ist die Gerade g_2 , die mit der Kurve C die Punkte P_2 und P_4 gemeinsam hat, Tangente an C in P_2 . Während aber g_2 in der Umgebung des Berührungspunktes P_2 ganz auf der einen Seite von

C verläuft, ist dies bei der Geraden g_3 nicht der Fall, obwohl g_3 Tangente an C im Punkte P_3 ist. Es sei noch bemerkt, daß die Gerade g_3 nur einen Punkt mit der Kurve C gemeinsam hat. Aus diesen Beispielen geht hervor, daß die Erklärung des Begriffs der Tangente einer Präzisierung bedarf.

Dazu denkt man sich die Kurve C durch die Funktion $y = f(x)$ gegeben (Abb. 2.3.) und legt durch den Punkt P_0 und einen Nachbarpunkt P die Sekante. Läßt man nun P eine beliebige Folge von Punkten $P_n (P_n \neq P_0)$, die gegen P_0 streben, durchlaufen, so erhält man eine zugehörige Folge von Sekanten. Wenn bei dem Grenzübergang $P_n \rightarrow P_0$ die Sekanten stets einer Grenzlage zustreben, so nennt man die dieser Grenzlage entsprechende Gerade die Tangente an C in P_0 . Da jede Gerade durch einen festen Punkt P_0 durch ihre Richtung eindeutig bestimmt ist, wird die Steigung der Sekante mit Hilfe der Funktion $y = f(x)$ ausgedrückt. Man erhält so aus dem Dreieck $P_n Q_n P_0$:

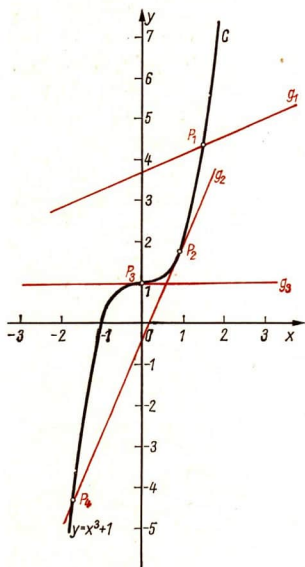


Abb. 2.2.

$$\tan \varphi_n = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$$

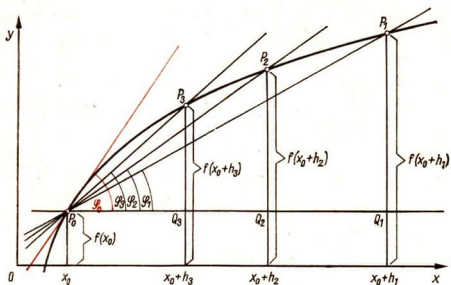


Abb. 2.3.

Die Steigung der Sekante ist also gleich dem Differenzenquotienten. Wenn daher der Differentialquotient von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ existiert, so strebt $\tan \varphi_n$ gegen den Grenzwert

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} \tan \varphi_n = \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = f'(x_0) = \tan \varphi_0,$$

die Steigung der Tangente an C in P_0 .

► Die Steigung der Tangente an C in P_0 ist gleich der Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 .

Anmerkung:

So wie hier aus der Differenzierbarkeit auf die Existenz einer Tangente geschlossen wird, kann nicht umgekehrt aus der Existenz einer Tangente auf die Differenzierbarkeit geschlossen werden, da die Tangente parallel zur y -Achse verlaufen könnte.

● 2. Welche Steigung hat die Tangente an die Parabel $y = 7x^2 - 5x + 1$ in demjenigen Kurvenpunkt, dessen Abszisse a) $x = 4$, b) $x = \frac{3}{7}$, c) $x = \frac{5}{14}$ ist?

2.3.2. Die Ableitung als Momentangeschwindigkeit

Bereits in der Einleitung wurde auf das Problem der Erklärung der Geschwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Körpers hingewiesen. Auch dieses Problem hängt eng mit dem Differentialquotienten zusammen. Auf diesem Wege ist NEWTON zur Differentialrechnung gekommen.

Denkt man sich die Länge der zurückgelegten Strecke s als Funktion der Zeit t gegeben, $s = f(t)$, so bedeutet der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

die mittlere Geschwindigkeit des bewegten Körpers auf dem entsprechenden Strecken-

abschnitt. Da sich bei sehr kleinem Δt die Bewegung auf dem entsprechenden Streckenabschnitt unter gewissen in den Anwendungen meistens erfüllten Voraussetzungen nur sehr wenig von einer gleichförmigen Bewegung unterscheidet, liegt es nahe, die **Momentangeschwindigkeit** nach der Zeit t_0 durch den Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)$$

zu erklären. Bezeichnet man die Momentangeschwindigkeit mit v_0 , so ergibt sich:

$$v_0 = f'(t_0) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0}$$

In Worten:

► Die Momentangeschwindigkeit v_0 nach der Zeit t_0 ist gleich der Ableitung des Weges nach der Zeit an der Stelle $t = t_0$.

● Überzeugen Sie sich, daß im Falle einer gleichförmigen Bewegung die so definierte Momentangeschwindigkeit mit der Ihnen bereits bekannten Erklärung der Geschwindigkeit für eine gleichförmige Bewegung übereinstimmt!

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Bilder der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = 3x - 2$ b) $y = f(x) = -2x + 1$

c) $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 4$ d) $y = f(x) = -\frac{4}{3}x - 2$

Ermitteln Sie rechnerisch durch Bilden der Differenzenquotienten an der Stelle $x = x_0 = 2$, unter welchem Neigungswinkel die Geraden $y = f(x)$ die Abszissenachse schneiden! Führen Sie auch eine Messung an den Zeichnungen durch, und vergleichen Sie mit dem rechnerischen Ergebnis!

2. Welche lineare Funktion wird durch die Gerade dargestellt, die durch den Punkt $P_0(0; 3)$ geht und die Abszissenachse unter dem Winkel φ schneidet?

a) $\varphi = 30^\circ$ b) $\varphi = 45^\circ$ c) $\varphi = 60^\circ$ d) $\varphi = 120^\circ$ e) $\varphi = 135^\circ$

f) $\varphi = 150^\circ$ g) $\varphi = 70^\circ$ h) $\varphi = 42^\circ$ i) $\varphi = 112^\circ$ k) $\varphi = 163^\circ$

3. Skizzieren Sie die Bilder folgender Funktionen!

a) $y = f(x) = x^2$ b) $y = f(x) = x^2 + 4$ c) $y = f(x) = (x - 1)^2$

d) $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ e) $y = f(x) = x^2 + 3x - 1$

Legen Sie an diese Parabeln die Tangenten in den Punkten mit den Abszissen $x_1 = -3$; $x_2 = -2,5$; $x_3 = -2$; ...; $x_{14} = 3,5$; $x_{15} = 4$! Ermitteln Sie die Steigung dieser Tangenten durch Bilden der Ableitungen der gegebenen Funktionen an diesen Stellen!

4. Welche Steigung besitzen die Sekanten der in Aufgabe 3 angegebenen Parabeln, wenn als Schnittpunkte von Parabel und Sekante folgende Punktepaare gewählt werden?

a) $P_1(3; y_1)$ und $P_2(2; y_2)$ b) $P_1(-3; y_1)$ und $P_2(-2; y_2)$

c) $P_1(3; y_1)$ und $P_2(2,5; y_2)$ d) $P_1(-3; y_1)$ und $P_2(-2,5; y_2)$

e) $P_1(3; y_1)$ und $P_2(2,8; y_2)$ f) $P_1(-3; y_1)$ und $P_2(-2,8; y_2)$

Zeichnen Sie auch die Bilder, und messen Sie die Steigung!

5. Welche Steigung besitzen die Sekanten zum Bild der Funktion $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$, die durch den Punkt $P_0(1; y_0)$ und durch Kurvenpunkte mit folgenden Abszissen gehen?
- a) $x_1 = 0$ b) $x_2 = 0,5$ c) $x_3 = 0,8$ d) $x_4 = 1,1$ e) $x_5 = 2$
- Welche Steigung hat die Tangente an die Kurve im Punkt $P_0(1; y_0)$? Messen Sie auch die Steigungen in den Zeichnungen, und vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den rechnerisch gewonnenen Werten!
6. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = f(x) = |x|$! Erläutern Sie an Hand des Bildes dieser Funktion, weshalb $y = f(x) = |x|$ an der Stelle $x = x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist!
7. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$! Ermitteln Sie diejenigen Tangenten an die Kurve, die die Abszissenachse unter dem Winkel $\varphi_0 = 135^\circ$ schneiden!
8. Skizzieren Sie das Bild der Funktion $y = f(x) = x^2 + 1$, und ermitteln Sie diejenige Tangente an die Kurve, die parallel zur Abszissenachse verläuft!
9. Skizzieren Sie das Bild der Funktion $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$, und ermitteln Sie diejenige Stelle, an der die Tangente parallel zur Abszissenachse verläuft! Welche Besonderheit über den Verlauf von Kurve und Tangente können Sie an der Zeichnung feststellen?

2.4. Rechnen mit Differentialquotienten

2.4.1. Die Ableitung als Funktion

Aus den bisher durchgeführten Rechnungen ging hervor, daß gewisse Funktionentypen Ableitungen haben, die relativ einfach zu ermitteln sind. Damit künftig nicht bei jeder Rechnung der gesamte Weg von der Bildung des Differenzenquotienten an einer bestimmten Stelle über die zweckmäßige Umformung des Differenzenquotienten bis zur Bildung des Grenzwertes des Differenzenquotienten an dieser Stelle gegangen werden muß, sollen nun einige Formeln hergeleitet werden, die unter gewissen Bedingungen die Berechnung der Ableitung auf einfache Weise ermöglichen.

- 1. Bilden Sie die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion $y = f(x) = mx + n$ an der Stelle $x = x_0$, wobei m und n beliebige Konstanten bedeuten!
- 2. Bilden Sie die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = x_0$, wobei a , b und c beliebige Konstanten bedeuten!

Da die Funktionen $y = f(x) = mx + n$ und $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ an jeder Stelle $x = x_0$ eine Ableitung haben, gelten die Sätze:

- ▶ Die für alle x erklärte Funktion $y = f(x) = mx + n$ (m und n sind beliebige Konstanten) hat an jeder Stelle $x = x_0$ die Ableitung $y' = f'(x_0) = m$.
- ▶ Die für alle x erklärte Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (a , b und c sind beliebige Konstanten) hat an der (beliebigen) Stelle $x = x_0$ die Ableitung $y' = f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Analog kann mit vielen anderen Funktionen verfahren werden, z. B. mit

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^3 a_n x^n = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0,$$

wobei die a_n reelle Konstanten sind. Die Funktion besitzt an der beliebigen Stelle $x = x_0$ folgenden Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{[a_3(x_0 + h)^3 + a_2(x_0 + h)^2 + a_1(x_0 + h) + a_0] - [a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0]}{h} \\ &= \frac{3a_3x_0^2h + 3a_3x_0h^2 + a_3h^3 + 2a_2x_0h + a_2h^2 + a_1h}{h} \\ &= \frac{h(3a_3x_0^2 + 2a_2x_0 + a_1) + h^2(3a_3x_0 + a_2) + h^3a_3}{h} \\ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} &= \sum_{n=1}^3 na_nx_0^{n-1} + h(3a_3x_0 + a_2) + h^2a_3. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^3 na_nx_0^{n-1}.$$

Hat man allgemein eine in einem Intervall $a < x < b$ erklärte Funktion $y = f(x)$, die dort an jeder Stelle des Intervalls differenzierbar ist, so entsteht, wenn man jedem Wert x_0 des Intervalls den Wert $f'(x_0)$ zuordnet, eine ebenfalls in dem Intervall $a < x < b$ erklärte Funktion $y' = \varphi(x) = f'(x)$.

► Die Ableitung einer Funktion in einem Intervall kann also ihrerseits wieder als eine Funktion aufgefaßt werden.

Aus den oben behandelten Beispielen

- 1. $y = f(x) = mx + n$
- 2. $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
- 3. $y = f(x) = \sum_{n=0}^3 a_nx^n$

erhält man so die für alle x erklärten Funktionen

- 1. $y' = f'(x) = m$
- 2. $y' = f'(x) = 2ax + b$
- 3. $y' = f'(x) = \sum_{n=1}^3 n \cdot a_nx^{n-1} = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1.$

Die Funktion $y' = f'(x)$ kann oftmals wiederum differenziert werden. Ist das im gesamten Definitionsintervall möglich, so entsteht dadurch eine neue Funktion

$$y'' = [f'(x)]' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{gelesen: } d\text{-zwei-}y \text{ nach } dx\text{-Quadrat}).$$

Man sagt, es wird die **zweite Ableitung** gebildet.

In den drei oben aufgeführten Beispielen ergibt sich so:

- 1. $y'' = f''(x) = 0$
 - 2. $y'' = f''(x) = 2a$
 - 3. $y'' = f''(x) = 6a_3x + 2a_2$.
- 3. Erklären Sie auch noch die dritte Ableitung $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$, und bilden Sie diese für die drei betrachteten Funktionen!

Die n -te Ableitung kann allgemein durch vollständige Induktion erklärt werden:

1. Die Definition von y' wird aus den vorangegangenen Abschnitten entnommen.
2. Denkt man sich $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ bereits für $n = k$ definiert, so wird durch

$$y^{(k+1)} = f^{(k+1)}(x) = \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = [f^{(k)}(x)]'$$

die n -te Ableitung von $y = f(x)$ für $n = k + 1$ erklärt.¹

2.4.2. Die Differentiation der Summe zweier Funktionen

Zur Differentiation gegebener Funktionen sind gewisse Regeln von Nutzen, die mit den drei Grenzwertsätzen in engem Zusammenhang stehen.

Die beiden Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ seien in einer Umgebung der Stelle $x = x_0$ erklärt und differenzierbar. Dann ist auch die Funktion

$$y = f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

in dieser Umgebung erklärt und an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x_0) = [\varphi(x_0) + \psi(x_0)]' = \varphi'(x_0) + \psi'(x_0).$$

Beweis: Der Differenzenquotient $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0}$ läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{[\varphi(x_0 + h) + \psi(x_0 + h)] - [\varphi(x_0) + \psi(x_0)]}{h} \\ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} &= \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} + \frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

¹ Von der vierten Ableitung an werden statt der Striche hochgestellte, in Klammern eingeschlossene Ziffern geschrieben.

Läßt man jetzt h gegen Null gehen, so streben die beiden Brüche auf der rechten Seite, die offenbar Differenzenquotienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind, nach Voraussetzung gegen $\varphi'(x_0)$ bzw. $\psi'(x_0)$. Daher strebt nach dem ersten Grenzwertsatz auch $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0}$ einem Grenzwert zu, und zwar dem Grenzwert $f'(x_0) = \varphi'(x_0) + \psi'(x_0)$.

► Sind die beiden Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ an jeder Stelle ihres Definitionsintervalls differenzierbar, so gilt dort für

$$y = f(x) = \varphi(x) + \psi(x) = u + v$$

die Differentiationsregel:

$$y' = u' + v' \quad (\text{Summenregel}).$$

● 4. Verallgemeinern Sie diesen Satz auf eine Summe von n Funktionen

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)!$$

2.4.3. Die Differentiation des Produktes zweier Funktionen

Die beiden Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ seien in einer Umgebung der Stelle $x = x_0$ erklärt und differenzierbar. Dann ist auch die Funktion $y = f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ in dieser Umgebung erklärt und an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x_0) = [\varphi(x_0) \cdot \psi(x_0)]' = \varphi'(x_0) \cdot \psi(x_0) + \varphi(x_0) \cdot \psi'(x_0).$$

Beweis: Der Differenzenquotient an der Stelle $x = x_0$ läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\varphi(x_0 + h) \cdot \psi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \cdot \psi(x_0)}{h}.$$

Um diesen Differenzenquotienten mit dem Differenzenquotienten von $\varphi(x)$,

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h},$$

und dem Differenzenquotienten von $\psi(x)$,

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} = \frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h},$$

in Verbindung bringen zu können, ist es zweckmäßig, daß man im Zähler $\varphi(x_0) \psi(x_0 + h)$ erst subtrahiert und dann wieder addiert, wodurch der Zähler nicht geändert wird. Dann nimmt der Differenzenquotient des Produktes die folgende Gestalt an:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} = \frac{\varphi(x_0 + h) \psi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \psi(x_0 + h) + \varphi(x_0) \psi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \psi(x_0)}{h}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} = \varphi(x_0 + h) \cdot \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} + \varphi(x_0) \cdot \frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h}.$$

Die auftretenden Quotienten sind die Differenzenquotienten der Funktion $u = \varphi(x)$ bzw. $v = \psi(x)$.

Läßt man jetzt h gegen Null gehen, so strebt $\psi(x_0 + h)$ wegen der Stetigkeit von $\psi(x)$ ¹ gegen $\psi(x_0)$, und die beiden Quotienten streben wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegen $\varphi'(x_0)$ bzw. $\psi'(x_0)$. Auf Grund des

1. und 2. Grenzwertsatzes strebt daher $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0}$ gegen $\varphi'(x_0)\psi(x_0) + \varphi(x_0)\psi'(x_0)$. Damit ist der Satz bewiesen.

► Sind die beiden Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ an jeder Stelle ihres Definitionsintervalls differenzierbar, so gilt für

$$y = f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) = u \cdot v$$

die Differentiationsregel:

$$y' = u'v + uv'. \quad (\text{Produktregel}).$$

2.4.4. Die Differentiation des Quotienten zweier Funktionen

Die beiden Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ seien in einer Umgebung der Stelle $x = x_0$ erklärt, wobei dort $\psi(x) \neq 0$ sei, und beide Funktionen seien an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar. Dann ist auch die Funktion $y = f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in dieser

Umgebung erklärt und an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x_0) = \left[\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\right]' = \frac{\varphi'(x_0)\psi(x_0) - \varphi(x_0)\psi'(x_0)}{[\psi(x_0)]^2}.$$

Beweis: Es genügt, den Beweis dieser Regel für den Fall zu erbringen, daß die zweite Funktion $y = f(x) = \frac{1}{\psi(x)}$ lautet; denn aus ihr ergibt sich mit Hilfe der Produktregel der allgemeine Fall:

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \varphi(x) \cdot \frac{1}{\psi(x)}.$$

Der Differenzenquotient von $\frac{1}{\psi(x)}$ an der Stelle x_0 ist:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} &= \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\psi(x_0 + h)} - \frac{1}{\psi(x_0)} \right] = \frac{1}{h} \left[\frac{\psi(x_0) - \psi(x_0 + h)}{\psi(x_0 + h) \cdot \psi(x_0)} \right] \\ &= - \frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{\psi(x_0 + h) \cdot \psi(x_0)}. \end{aligned}$$

¹ Als differenzierbare Funktion ist $y = \psi(x)$ stetig (vgl. auch Abschnitt 2.2.2.1).

Läßt man jetzt h gegen Null streben, so ergibt sich wegen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\psi(x)$ unter Benutzung der Grenzwertsätze 2 und 3:

$$f'(x_0) = - \frac{\psi'(x_0)}{[\psi(x_0)]^2}.$$

Für den allgemeinen Fall folgt:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \right]' &= \varphi'(x_0) \cdot \frac{1}{\psi(x_0)} + \varphi(x_0) \cdot \left[- \frac{\psi'(x_0)}{[\psi(x_0)]^2} \right] \\ \left[\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \right]' &= \frac{\varphi'(x_0) \cdot \psi(x_0) - \varphi(x_0) \cdot \psi'(x_0)}{[\psi(x_0)]^2}. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

► Sind die beiden Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ an jeder Stelle ihres Definitionsintervalls differenzierbar und ist dort $\psi(x) \neq 0$, so gilt für

$$y = f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{u}{v}$$

die Differentiationsregel:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (\text{Quotientenregel}).$$

● 5. Leiten Sie nach dem Vorbild der Herleitung der Regel für die Ableitung eines Produktes differenzierbarer Funktionen die Regel für die Ableitung eines Quotienten differenzierbarer Funktionen her, ohne die Produktregel zu benutzen!

Im Beispiel 1 wurde gezeigt, daß für die Funktion $y = mx + n$ die Ableitung $y' = m$ ist. Daraus ergibt sich als Spezialfall für $m = 0$, daß die Ableitung jeder konstanten Funktion

$$y = f(x) = n (= 0 \cdot x + n)$$

identisch Null ist: $y' \equiv 0$.

► Die Ableitung einer Konstanten hat den Wert Null.

Dieses Resultat ergibt zusammen mit der Produktregel folgende nützliche Differentiationsregel:

► Ist die Funktion $y = f(x)$ in einem Intervall überall differenzierbar, so gilt das gleiche auch für die Funktion $y = a \cdot f(x)$, wenn a eine beliebige Konstante bedeutet, und man findet die Ableitung $y' = [a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$.

● 6. Leiten Sie auf dem angegebenen Wege diese Formel her!

● 7. Zeigen Sie, daß $[-f(x)]' = -f'(x)$ ist!

Aufgaben

1. Bilden Sie die erste, zweite und dritte Ableitung folgender Funktionen!

a) $y = f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 5$ b) $y = f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + x^0$

c) $y = f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)$ d) $y = f(x) = (x - a)^3$

2. Bilden Sie die Ableitungen erstens mit Hilfe des Differenzenquotienten, zweitens mit Hilfe der Regel für das Differenzieren von Produkten!

a) $y = f(x) = x^2$ b) $y = f(x) = x^3$ c) $y = f(x) = x^4$

d) $y = f(x) = (2x - 5)(3x + 2)$ e) $y = f(x) = (3x - 4)(2x + 3)$

Differenzieren Sie so lange, bis Sie als Ableitung eine von Null verschiedene Konstante erhalten!

3. Bilden Sie die Ableitungen erstens mit Hilfe des Differenzenquotienten, zweitens mit Hilfe der Regel für das Differenzieren von Quotienten!

a) $y = f(x) = \frac{1}{x}$ b) $y = f(x) = \frac{a}{x}$ c) $y = f(x) = \frac{1}{x - 2}$

d) $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ e) $y = f(x) = \frac{2}{x^2 + 3}$ f) $y = f(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$

An welchen Stellen sind die gegebenen Funktionen nicht differenzierbar? Welche Intervallangaben müssen Sie deshalb bei den gewonnenen Ableitungen hinzufügen?

4. Ermitteln Sie die ersten beiden Ableitungen nach verschiedenen Verfahren!

a) $y = f(x) = (x - 1)(x + 1)(2x - 3)$ b) $y = f(x) = x^2 - 8x + 15$

c) $y = f(x) = (x^2 + 3x)(2x - 5) + (x - 4)^2(5x - 1)$

d) $y = f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1} + \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

2.5. Die Ableitungen der Potenzfunktion

$y = x^n$ für ganzzahlige Exponenten

2.5.1. Aufgaben zur Wiederholung

- Zur Kennzeichnung und Einteilung gewisser Funktionen können ihre analytischen Ausdrücke in der expliziten Form $y = f(x)$ dienen. Charakterisieren Sie in dieser Weise
 - die lineare Funktion,
 - die quadratische Funktion,
 - die Funktion dritten Grades,
 - die Potenzfunktion n -ten Grades!
- Welche besonderen Wertepaare x, y sind allen Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n > 0$, ganzzahlig) gemeinsam? Wie zeigt sich das in der graphischen Darstellung? Skizzieren Sie die zu den Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n > 0$, ganzzahlig) gehörende Kurvenschar! Was ist dabei der Scharparameter?
- Begründen Sie die Zweckmäßigkeit der Festsetzung $a^0 = 1$! Für welche Zahlenbereiche von a ist die Definition gültig?
- Können Sie die Potenzbeziehung $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ($n > 0$, ganzzahlig) beweisen? Für welche Zahlenbereiche von a hat diese Beziehung Gültigkeit?

- Wie sieht das Bild der Funktion $xy = 1$ aus? Wie heißt es? Welche Besonderheit weist der Kurvenzug auf?
- Welche besonderen Wertepaare x, y sind allen Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n < 0$, ganzzahlig) gemeinsam? Wie zeigt sich das in der graphischen Darstellung? Skizzieren Sie die Kurvenschar, die den Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n < 0$, ganzzahlig) entspricht! Welche Zahlenfolge durchläuft dabei der Scharparameter?
- Welcher grundsätzliche Unterschied besteht zwischen den Bildern, die zu $y = x^n$ für $n > 0$ und den Bildern, die zu $y = x^n$ für $n < 0$ gehören? Welcher Schar wäre aus diesem Grunde $y = x^n$ für $n = 0$ zuzuweisen?

2.5.2. Die Ableitungen der Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$ ($n \geq 0$, ganzzahlig)

Unter einer **ganzen rationalen Funktion**¹ versteht man eine Funktion, deren analytischer Ausdruck in expliziter Form aus einer endlichen Anzahl von Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen entstanden ist, die auf die unabhängige Veränderliche angewendet wurden, wobei diese auch noch additiv oder multiplikativ mit Konstanten verknüpft sein kann. Der Ausdruck läßt sich stets in der Form

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

($n \geq 0$, ganzzahlig; a_k reelle Konstante)

schreiben. Er setzt sich also aus einer endlichen Anzahl von analytischen Ausdrücken $y = a_n x^n$ von Potenzfunktionen mit nicht negativen ganzzahligen Exponenten zusammen.

Zur Zeichnung der Bilder der Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \geq 0$, ganzzahlig) ist es vorteilhaft, die Tangenten an die Bilder in verschiedenen Punkten zu Hilfe zu nehmen. Dazu muß deren Steigung bestimmt werden. Sie ist durch die erste Ableitung der jeweils zugeordneten Funktion gegeben. Es ist also erforderlich, die Ableitung der Funktion $y = x^n$ für alle nicht negativen, ganzzahligen Exponenten zu ermitteln. Diese Aufgabe soll zunächst mit Hilfe des binomischen Satzes gelöst werden.

Gegebene Funktion: $y = x^n$

Ableitung:
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Wenn $(x+h)^n$ nach dem *binomischen Lehrsatz* entwickelt wird, entstehen $(n+1)$ Glieder, die vom dritten an, soweit dieses vorhanden ist, Faktoren h^i mit $i \geq 2$ enthalten. Aus diesen läßt sich h^2 als Faktor ausklammern:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + h^2 \cdot \varphi(x, h) - x^n}{h}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + h^2 \cdot \varphi(x, h)}{h}$$

¹ Vgl. auch Abschnitt 2.6.2.!

Nach dem Kürzen mit h bleibt beim zweiten Summanden noch der gemeinsame Faktor h stehen, so daß beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ dieser Summand gleich Null wird, weil $\varphi(x, h)$ einem endlichen Grenzwert zustrebt.

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} [nx^{n-1} + h \cdot \varphi(x, h)]$$

$$y' = nx^{n-1}.$$

Die Steigungen der Tangenten an die entsprechenden Bilder in den der ganzen Schar gemeinsamen Punkten $O(0; 0)$ und $P_1(1; 1)$ ergeben sich daraus wie folgt:

im Punkte $O(0; 0)$: $y'_0 = n \cdot 0^{n-1} = 0$ (für $n > 1$; ganzzahlig);

im Punkte $P_1(1; 1)$: $y'_1 = n \cdot 1^{n-1} = n$.

Geometrisch läßt sich dieses Ergebnis für den Punkt $O(0; 0)$ so deuten, daß alle Funktionsbilder der Schar, die zu $y = x^n$ ($n > 1$; ganzzahlig) gehören, im Koordinatenursprung die x -Achse zur Tangente haben (Abb. 2.4.).

Für $n = 1$ ergibt sich aus $y' = n \cdot x^{n-1}$

$$y' = 1 \cdot x^0 = 1 \quad \text{für jedes } x \neq 0.$$

Im Koordinatenursprung würde sich ergeben

$$y'_0 = 1 \cdot 0^0$$

mit dem nicht definierten Ausdruck 0^0 .

Nun gilt für $y = f(x) = x$ bei $x_0 = 0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} = \frac{(0 + h) - 0}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

also

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Bezüglich des Verhaltens ihres Bildes im Koordinatenursprung stellt die Potenzfunktion $y = x^1$ eine Ausnahme in der Schar der Funktionen $y = x^n$ mit positiven, ganzzahligen Exponenten dar.

1. Deuten Sie entsprechend $y'_1 = n \cdot 1^{n-1} = n$ geometrisch als Steigung der Bilder im Punkt $P_1(1; 1)$! Wie ändert sich die Steigung der Bilder bei veränderlichen n ? Was können Sie daraus über die Lage der einzelnen Bilder bezüglich der x - bzw. y -Achse in den Intervallen $0 < x < 1$ und $x > 1$ folgern?
2. Überprüfen Sie ihre im Abschnitt 2.5.1., Aufgabe 2, angefertigte Skizze in bezug auf den Verlauf der Bilder besonders in den Punkten $O(0; 0)$ und $P_1(1; 1)$!

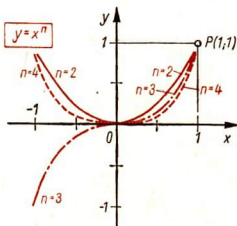


Abb. 2.4.

Die erste Ableitung der Funktion $y = x^n$ kann auch mit Hilfe der vollständigen Induktion gewonnen werden. Hierzu wird erst ein Einzelfall untersucht.

● 3. Bestimmen Sie die Ableitung von $y = x^3$ mit Hilfe des Differenzenquotienten!

Das Ergebnis $y' = (x^3)' = 3x^2$ läßt die Vermutung aufkommen, daß allgemein gilt:

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n > 0, \text{ ganzzahlig}).$$

Beweis für die Gültigkeit der Relation $y' = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ für alle natürlichen n :

1. Für $n = 1$ gilt:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1,$$

$$\text{d. h. } y' = n \cdot x^{n-1} = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Die Behauptung ist also für $n = 1$ richtig.

2. Jetzt wird gezeigt, daß aus der Richtigkeit der Behauptung für $n = k$ (Induktionsvoraussetzung) die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt. Dabei muß man sich für k jede natürliche Zahl eingesetzt denken dürfen.

Es gilt:

$$(1) \quad x^{k+1} = x^k \cdot x.$$

Unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung

$$(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$$

erhält man aus (1) durch Anwendung der Produktregel:

$$(x^{k+1})' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)'$$

$$(x^{k+1})' = k \cdot x^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = k \cdot x^k + x^k = (k + 1)x^k,$$

d. h., die Behauptung gilt für $n = k + 1$.

Damit ist mit Hilfe der vollständigen Induktion der Beweis der Behauptung erbracht.

Die Ableitung von $y = x^n$ ($n > 0$, ganzzahlig) ist also $y' = n \cdot x^{n-1}$.

● 4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der Funktion

$$y = x^0 = 1!$$

Das Ergebnis des Schülerauftrages 4, $y' = (x^0)' = 0$, ergibt sich auch, wenn

$y' = n \cdot x^{n-1}$ für $n = 0$ gebildet wird:

$$y' = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Also gilt schließlich:

► Die Ableitung von $y = x^n$ ($n \geq 0$, ganzzahlig) ist $y' = n \cdot x^{n-1}$.

Die **höheren Ableitungen** einer Funktion (vgl. Abschnitt 2.4.1.) bilden eine **Folge von Funktionen**. Für die Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \geq 0$, ganzzahlig) erhält man unter Verwendung des Fakultätssymbols oder der Binomialkoeffizienten folgende Funktionen:

$$y = x^n$$

$$y' = n \cdot x^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} x^{n-1} = 1! \binom{n}{1} x^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1) \cdot x^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} x^{n-2} = 2! \binom{n}{2} x^{n-2}$$

$$y''' = n(n-1)(n-2) \cdot x^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!} x^{n-3} = 3! \binom{n}{3} x^{n-3}$$

$$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot x^{n-4} = \frac{n!}{(n-4)!} x^{n-4} = 4! \binom{n}{4} x^{n-4}$$

Daraus geht hervor:

1. Jede der Ableitungen $y^{(i)}$ ($i = 1; 2; \dots; n$) einer Potenzfunktion $y = x^n$ ($n \geq 0$, ganzzahlig) ist eine um einen Grad niedrigere Funktion als die vorhergehende Ableitung.

2. Die n -te Ableitung hat den Grad Null, d. h., sie ist eine von Null verschiedene Konstante.

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

3. Die $(n+1)$ -te Ableitung und alle folgenden sind identisch Null.

$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \dots = 0$$

Aufgaben

1. Gewinnen Sie die Ableitung der Funktion $y = x^n$ ($n > 0$, ganzzahlig) mit Hilfe der erweiterten Produktregel!

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n + \dots \\ \dots + u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n'$$

2. Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die erste Ableitung jeder nicht konstanten geraden Potenzfunktion ist eine ungerade Funktion, die erste Ableitung jeder ungeraden Potenzfunktion ist eine gerade Funktion.
3. Begründen Sie mit Hilfe des in Aufgabe 2 genannten Satzes die Symmetrieverhältnisse der Bilder der geraden und der ungeraden Potenzfunktionen!
Anleitung: Die ersten Ableitungen an zwei Stellen x_0 und $-x_0$ bestimmen die Richtungen der Tangenten an das jeweilige Bild der entsprechenden Funktion in den Punkten mit den Abszissen x_0 und $-x_0$. Achten Sie auf die Vorzeichen von $f'(x_0)$ und $f'(-x_0)$!
4. Inwiefern kann man $y = x^1$ zu den ungeraden und $y = x^0$ zu den geraden Funktionen rechnen? Begründen Sie diese Einteilung wie bei Aufgabe 3!
5. Wie groß ist die 2., 5., 9. Ableitung von

a) $y = x^9$, b) $y = x^{12}$ an den Stellen $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{1}{4}$; $x_4 = -0,3$; $x_5 = \sqrt{2}$?

6. An die Bilder folgender Funktionen sollen jeweils in $P_1(x_1; y_1)$ die Tangenten gelegt werden. Wie groß ist deren Steigung? Unter welchem Winkel schneiden sie jeweils die x -Achse, unter welchem die y -Achse? Wie heißen die Koordinaten dieser Schnittpunkte?
- a) $y = x^2$ $P_1\left(\frac{1}{2}; \dots\right)$ $P_2\left(-\frac{1}{2}; \dots\right)$ b) $y = x^3$ $P_1(\dots; 8)$ $P_2(\dots; -27)$
- c) $y = x^4$ $P_1(0,1; \dots)$ $P_2(0,2; \dots)$ d) $y = x^5$ $P_1\left(\dots; \frac{1}{32}\right)$ $P_2(-3; \dots)$
- e) $y = x^8$ $P_1(x_1 > 0; 1)$ $P_2(x_1 < 0; 1)$ f) $y = x^9$ $P_1(\sqrt[3]{2}; \dots)$ $P_2(-\sqrt[3]{3}; \dots)$
7. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die die gegebenen Steigungen m_1 haben. In welchen Punkten muß das geschehen?

a) $y = x^2$ $m_1 = 1$ $m_2 = -2$ b) $y = x^3$ $m_1 = \frac{4}{3}$ $m_2 = \frac{3}{4}$

c) $y = x^4$ $m_1 = -\frac{1}{2}$ $m_2 = 4$ d) $y = x^5$ $m_1 = 80$ $m_2 = \frac{4}{5}$

8. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die mit der x -Achse die gegebenen Winkel α bzw. mit der y -Achse die gegebenen Winkel β bilden. In welchen Punkten ist das möglich? (Die Winkel α und β werden jeweils vom positiven Teil der Achse aus im mathematisch positiven Sinne gemessen.)

a) $y = x^2$ $\alpha = 135^\circ$ $\beta = 150^\circ$ b) $y = x^3$ $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 135^\circ$

c) $y = x^6$ $\alpha = 0^\circ$ $\beta = 45^\circ$ d) $y = x^5$ $\alpha = 75^\circ$ $\beta = 160^\circ$

9. An das Bild von $y = x^2$ sind in zwei symmetrisch zur y -Achse gelegenen Kurvenpunkten Tangenten gelegt. Diese schneiden einander unter a) 90° , b) 60° , c) 120° , d) 20° , e) 140° . Bestimmen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte und des Schnittpunktes der Tangenten!

2.5.3. Die Ableitungen der Potenzfunktion $y = x^n$ ($n < 0$, ganzzahlig)

Diese Potenzfunktionen gehören zu den **echt gebrochenen rationalen Funktionen**¹:

$$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}; \quad y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Sie zeichnen sich durch die Besonderheit aus, daß der Zähler die Konstante 1 ist und der Nenner nur einen einzigen Summanden enthält.

- 5. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ mit Hilfe der Quotientenregel, und bestätigen Sie das nachstehende Ergebnis!

- Die Grundbeziehung $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ gilt für alle ganzzahligen Exponenten, also für $n \in \mathbb{Z}$, ganzzahlig.

Im Gegensatz zu den Potenzfunktionen mit positiven ganzen Exponenten wird bei

¹ Vgl. auch Abschnitt 2.7.2.!

den Potenzfunktionen mit negativen ganzen Exponenten keine der höheren Ableitungen identisch Null.

$$y = x^{-m}$$

$$y' = -mx^{-m-1} = (-1)^1 \cdot \frac{m!}{(m-1)!} x^{-m-1}$$

$$y'' = m(m+1)x^{-m-2} = (-1)^2 \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!} x^{-m-2}$$

$$y''' = -m(m+1)(m+2)x^{-m-3} = (-1)^3 \cdot \frac{(m+2)!}{(m-1)!} x^{-m-3}$$

$$y^{(4)} = m(m+1)(m+2)(m+3) \cdot x^{-m-4} = (-1)^4 \cdot \frac{(m+3)!}{(m-1)!} x^{-m-4}$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} x^{-m-n}$$

Dieser Ausdruck kann niemals identisch Null werden.

● 6. Beweisen Sie diese Aussage!

An der Stelle $x_0 = 0$ sind die Funktionen $y = x^n$ ($n < 0$, ganzzahlig) nicht definiert, denn $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ erfordert für $x_0 = 0$ die Division $1 : 0$, die nicht erklärt ist. Die Funktionen haben bei $x_0 = 0$ eine sogenannte Unstetigkeitsstelle (einen **Pol**).

Im Definitionsbereich muß diese Polstelle $x_0 = 0$ ausgenommen werden: Definitionsbereich $-\infty < x < 0$; $0 < x < +\infty$.

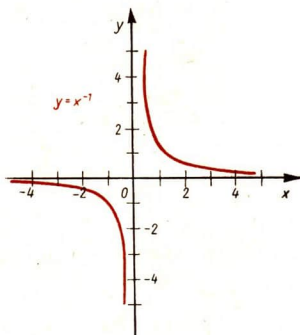


Abb. 2.5.

Die Funktionsbilder nähern sich an dieser Stelle asymptotisch der y -Achse (Abb. 2.5.). Da die Funktionen $y = x^n$ ($n < 0$; ganzzahlig) an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert sind, kann man sie an dieser Stelle auch nicht differenzieren.

Aufgaben

1. Beweisen Sie die Gültigkeit der Beziehung $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ auch für negative ganzzahlige Exponenten, indem Sie die Beziehung $(x^{-m})' = -m \cdot x^{-m-1}$ als Grenzwert des entsprechenden Differenzenquotienten herleiten!

Anleitung: Verwenden Sie $f(x)$ in der Form $\frac{1}{x^m}$ ($m > 0$)!

2. Untersuchen Sie die Steigung der Tangenten an die Bilder der Funktionenschar $y = x^n$ ($n < 0$, ganzzahlig) in dem allen Bildern gemeinsamen Punkt $P_1(1; 1)$! Nutzen Sie die

Ergebnisse zum genaueren Zeichnen der Schar, und vergleichen Sie die Zeichnung mit Ihrer Skizze aus der Aufgabe 6, Abschnitt 2.5.1.!

- Leiten Sie aus den Ergebnissen der Aufgabe 2 eine Aussage über den Verlauf der Kurven in den Bereichen $0 < x < 1$ und $x > 1$ her!
- Wie lautet der in Abschnitt 2.5.2., Aufgabe 2, ausgesprochene Satz für Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten?
- Welche Symmetrieverhältnisse liegen bei der Funktionsbilderschar der Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten vor? Begründen Sie Ihre Aussagen geometrisch und rechnerisch!
- Wie groß ist der Wert der 3., 6., 10. Ableitung von

a) $y = x^{-4}$, b) $y = x^{-9}$ an den Stellen $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 3$; $x_4 = -0,4$?

- An die Bilder folgender Funktionen sollen jeweils in $P_1(x_1; y_1)$ die Tangenten gelegt werden. Wie groß ist deren Steigung? Unter welchem Winkel schneiden sie jeweils die x -Achse, unter welchem die y -Achse? Wie heißen die Koordinaten dieser Schnittpunkte?

a) $y = x^{-1}$ $P_1(2; \dots)$ $P_2(-2; \dots)$

b) $y = x^{-2}$ $P_1(2; \dots)$ $P_2(-2; \dots)$

c) $y = x^{-3}$ $P_1(\sqrt{2}; \dots)$ $P_2(-\sqrt{3}; \dots)$

d) $y = x^{-4}$ $P_1(-0,8; \dots)$ $P_2(-0,75; \dots)$

e) $y = x^{-5}$ $P_1(\dots; 32)$ $P_2(0,2; \dots)$

f) $y = x^{-4}$ $P_1\left(x_1 > 0; \frac{1}{16}\right)$ $P_2\left(x_1 < 0; \frac{1}{81}\right)$

- An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die die gegebenen Steigungen m_i haben. Wie heißen die Koordinaten ihrer Berührungspunkte?

a) $y = x^{-1}$ $m_1 = -1$ $m_2 = -4$ b) $y = x^{-2}$ $m_1 = 16$ $m_2 = -54$

c) $y = x^{-3}$ $m_1 = -3$ $m_2 = -\frac{3}{16}$ d) $y = x^{-4}$ $m_1 = \frac{1}{8}$ $m_2 = 1$

- An die Bilder folgender Funktionen sind Tangenten zu legen, die mit der x -Achse die gegebenen Winkel α bzw. mit der y -Achse die gegebenen Winkel β bilden. In welchen Kurvenpunkten muß das geschehen? (Die Winkel α und β werden jeweils vom positiven Teil der Achse aus im mathematisch positiven Sinn gemessen.)

a) $y = x^{-1}$ $\alpha = 135^\circ$ $\beta = 30^\circ$ b) $y = x^{-2}$ $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 60^\circ$

c) $y = x^{-3}$ $\alpha = 120^\circ$ $\beta = 45^\circ$ d) $y = x^{-4}$ $\alpha = 75^\circ$ $\beta = 110^\circ$

- An das Bild von $y = x^{-1}$ sollen in vier Punkten, die paarweise symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten bzw. zur Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten liegen, die Tangenten gelegt werden. Von diesen sollen sich die an demselben Kurvenast liegenden jeweils unter

a) 100° , b) 120° , c) 140° , d) 160°

schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten der vier Berührungspunkte und der vier Tangentenschnittpunkte!

2.6. Ganze rationale Funktionen

2.6.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Der analytische Ausdruck der allgemeinen quadratischen Funktion lautet in expliziter Form $y = Ax^2 + Bx + C$. Wie sieht das Funktionsbild aus? Durch welchen Punkt läßt sich am einfachsten die Lage des Bildes bestimmen? Wie heißen dessen Koordinaten?
2. Welche Bedeutung hat insbesondere der Koeffizient A des quadratischen Gliedes? Wie wirkt sich seine Größe und sein Vorzeichen auf das Funktionsbild aus?
3. Was versteht man unter den Nullstellen einer Funktion? Wie werden sie bestimmt? Was entspricht ihnen in der graphischen Darstellung der Funktion?
4. Welche Bedeutung hat x im analytischen Ausdruck einer Funktion (z. B. bei $y = Ax^2 + Bx + C$), welche in der zugehörigen Bestimmungsgleichung ($Ax^2 + Bx + C = 0$)?

2.6.2. Die Ableitungen der ganzen rationalen Funktionen

Unter einer ganzen rationalen Funktion versteht man eine Funktion, die sich in der Form

$$(1) \quad y = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

für alle Werte von x darstellen läßt. Darin bedeuten die Symbole a_k reelle Zahlen (Konstante). Sie heißen die Koeffizienten des Polynoms auf der rechten Seite von (1). Falls $a_n \neq 0$, hat das Polynom den Grad n .

● 1. Bilden Sie die ersten drei Ableitungen der ganzen rationalen Funktion:

$$y = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

($n \geq 0$, ganzzahlig; a_k reell),

und notieren Sie die Ergebnisse unter Verwendung der Binomialkoeffizienten!

Für die k -te Ableitung ergibt sich

$$y^{(k)} = k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k} + k! \binom{n-1}{k} a_{n-1} x^{n-1-k} + \dots + k! \binom{k}{k} a_k,$$

für die n -te Ableitung

$$y^{(n)} = n! \binom{n}{n} a_n = n! a_n$$

und für alle weiteren Ableitungen

$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \dots = 0.$$

● 2. Begründen Sie diese Ergebnisse!

Sie erkennen:

1. Die Ableitungen jeder ganzen rationalen Funktion sind wieder ganze rationale Funktionen, und zwar ist jede der Ableitungen $y^{(i)}$ ($i = 1; \dots; n$) eine um einen Grad niedrigere Funktion als die vorhergehende Ableitung.
2. Sind alle Koeffizienten a_k von Null verschieden, so vermindert sich die Zahl der Glieder von Ableitung zu Ableitung jeweils um 1.
3. Die n -te Ableitung einer ganzen rationalen Funktion n -ten Grades ist $y^{(n)} = n! \cdot a_n$, also eine Konstante.
4. Alle folgenden Ableitungen werden identisch Null.

Ergebnis:

- Jede ganze rationale Funktion n -ten Grades hat genau n nicht identisch verschwindende Ableitungen.

2.6.3. Die Nullstellen der ganzen rationalen Funktion

Jeder Wert der unabhängigen Veränderlichen x , für den die Funktion $y = f(x)$ den Wert Null annimmt, heißt eine **Nullstelle** dieser Funktion. Für die Ermittlung der Nullstellen x_i wird gesetzt:

$$f(x_i) = 0.$$

Die Lösungen dieser Bestimmungsgleichung sind die Nullstellen der zugrunde liegenden Funktion.

- 3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Nullstellen (Existenz, Lage)!

$$a) y = x^2 - 4x - 3 \quad b) y = x^2 - 6x + 9 \quad c) y = x^2 - 2x + 5$$

Unter Verwendung der Nullstellen können die Funktionen des Schülerauftrags 3 in folgender Form geschrieben werden:

$$a) y = (x - [2 + \sqrt{7}])(x - [2 - \sqrt{7}]), \quad b) y = (x - 3)(x - 3),$$

c) im Bereich der reellen Zahlen ist eine derartige Zerlegung nicht möglich.

Die hierbei auftretenden Klammern $(x - x_i)$ heißen **Linearfaktoren**. Aus der Zerlegung in Linearfaktoren läßt sich der Wurzelsatz von VIETA herleiten. Die Zerlegung in Linearfaktoren ist gegebenenfalls auch bei Polynomen höheren Grades möglich.

- Jede ganze rationale Funktion n -ten Grades hat höchstens n voneinander verschiedene Nullstellen im Bereich der reellen Zahlen.

- Hat sie tatsächlich n voneinander verschiedene Nullstellen, so läßt sie sich durch ein Produkt von n verschiedenen Linearfaktoren darstellen.

Beweis:

Die ganze rationale Funktion

$$(1) \quad y = f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

möge die Nullstelle x_1 haben.

Dann gilt:

$$(2) \quad 0 = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0.$$

Durch Subtraktion (1) - (2) ergibt sich:

$$(3) \quad y = a_n(x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \dots + a_2(x^2 - x_1^2) + a_1(x - x_1).$$

Für jedes natürliche m und beliebige reelle a und b gilt:

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2} \cdot b + a^{m-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{m-3} + a \cdot b^{m-2} + b^{m-1}).$$

● 4. Bestätigen Sie die Richtigkeit dieser Beziehung durch Ausmultiplizieren der rechten Seite!

Infolgedessen läßt sich (3) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} y &= a_n(x - x_1)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_1 + \dots + x \cdot x_1^{n-2} + x_1^{n-1}) \\ &\quad + a_{n-1}(x - x_1)(x^{n-2} + x^{n-3} \cdot x_1 + \dots + x \cdot x_1^{n-3} + x_1^{n-2}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_2(x - x_1)(x + x_1) \\ &\quad + a_1(x - x_1) \\ y &= (x - x_1)[a_n x^{n-1} + (a_n x_1 + a_{n-1})x^{n-2} + \dots] = (x - x_1) \cdot f_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Zwischenergebnis:

Ist x_1 eine Nullstelle der Funktion n -ten Grades $y = f_n(x)$, so läßt sich der Linearfaktor $(x - x_1)$ abspalten. Der zweite Faktor ist dann eine Funktion $(n - 1)$ -ten Grades: $y = f_{n-1}(x)$.

Auf $y = f_{n-1}(x)$ läßt sich, falls x_2 eine Nullstelle dieser Funktion ist, dieselbe Umformung wieder anwenden. Nach $n - 1$ solchen Schritten ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= f_n(x) = (x - x_1)f_{n-1}(x) \\ &= (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot f_{n-2}(x) \\ &= \dots \\ &= (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-2}) \cdot f_2(x) \\ y &= f_n(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot f_1(x) \end{aligned}$$

Dabei ist $y = f_1(x)$ eine Funktion 1. Grades, deren Nullstelle x_n sei, so daß sich

$$(4) \quad y = f_n(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n) \cdot a_n$$

ergibt.

Damit ist gezeigt, daß sich jedes Polynom, das n reelle Nullstellen besitzt, durch ein Produkt der Form (4) darstellen läßt.

Ist x^* eine beliebige von jeder der $x_1 \dots x_n$ verschiedene Zahl, so ist

$$f_n(x^*) = (x^* - x_1) \cdot (x^* - x_2) \cdot \dots \cdot (x^* - x_n) \cdot a_n$$

ungleich Null, da in dem Produkt jeder Faktor von Null verschieden ist. Deshalb kann $f_n(x)$ höchstens n voneinander verschiedene Nullstellen haben.

Insbesondere können unter den n Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion n -ten Grades mehrere gleiche vorkommen. Dann läßt sich das Polynom (4) in der Form schreiben:

$$f_n(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot (x - x_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k}$$

mit

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n \quad \text{und} \quad k \leq n.$$

Dabei heißt x_1 eine α_1 -fache, x_2 eine α_2 -fache, x_k eine α_k -fache Nullstelle von $f_n(x)$.

Aufgaben

1. Bilden Sie von folgenden Funktionen die 1., 2. und 3. Ableitung!

a) $y = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$

b) $y = ax^k - bx^{k+1} + ax^{k+2}$

c) $y = x^2 \sqrt{2} + x \sqrt{3} - \sqrt{5}$

d) $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

e) $y = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^2$

f) $y = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$

2. Bilden Sie von folgenden Funktionen jeweils diejenigen Ableitungen, die die angegebene Bedingung erfüllen!

Funktion	Bedingung
a) $y = \frac{1}{8}x^4 - 2x^3 + 7x - 0,2$	Alle nicht identisch verschwindenden Ableitungen.
b) $y = 0,1x^2 - 0,01x + 0,001$	Diejenige Ableitung, die eine Konstante ungleich Null ist.
c) $y = \frac{3}{4} - 5x^2 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{2}{3}x^7$	Alle Ableitungen gerader Ordnung, die nicht identisch verschwinden.
d) $y = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{3}x + 3\right)\left(\frac{1}{4}x - 4\right)$	Alle Ableitungen ungerader Ordnung, die nicht identisch verschwinden.
e) $y = (0,1x^2 - 0,05)^2$	Die Ableitung, die eine lineare Funktion ist.

3. Welchen Wert hat die 2., 3., 5., 10. Ableitung von

a) $y = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{24}x^4$

b) $y = 0,02x^{10} + 0,01x^5 - x^2 + 4$

an den Stellen $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -\frac{1}{5}$; $x_4 = 0,1$; $x_5 = \sqrt{3}$?

4. An die Bilder folgender Funktionen sollen jeweils in $P_i(x_i; y_i)$ die Tangenten gelegt werden. Wie groß ist deren Steigung? Unter welchen Winkeln schneiden sie die x - und y -Achse? Wie heißen die Koordinaten dieser Schnittpunkte?

- a) $y = 0,1x^2 + 0,2x + 0,3$ $P_1\left(\frac{1}{2}; \dots\right)$ $P_2\left(-\frac{1}{2}; \dots\right)$
 b) $y = -x^3 + \frac{1}{2}x + 4$ $P_1\left(\frac{1}{2}; \dots\right)$ $P_2\left(-\frac{1}{2}; \dots\right)$
 c) $y = 0,001x^6 + 0,01x^5$ $P_1(2; \dots)$ $P_2(3; \dots)$
 d) $y = x^4 - 5x^2 + 6$ $P_1(x_1 > 1; 2)$ $P_2(-2 < x_2 < 0; 2)$

5. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die die gegebenen Steigungen m_1 haben. In welchen Punkten ist das möglich?

- a) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + 3$ $m_1 = 0,5$ $m_2 = -\frac{3}{2}$ b) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$ $m_1 = 1$ $m_2 = -3$
 c) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 2x$ $m = 2$ d) $y = x^5 - 5x^3$ $m = -10$

6. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die mit der x -Achse die gegebenen Winkel α bzw. mit der y -Achse die gegebenen Winkel β bilden (beide Winkel vom jeweils positiven Teil der Achse aus im mathematisch positiven Sinn gemessen). In welchen Punkten muß das geschehen?

- a) $y = \frac{x^2}{2} - x\sqrt{3} + 4$ $\alpha = 120^\circ$ $\beta = 60^\circ$ b) $y = \frac{4}{3}x^3 - x + 1$ $\alpha = 135^\circ$ $\beta = 90^\circ$
 c) $y = \frac{x^4}{4} - x^2 + x - 2$ $\alpha = 45^\circ$ d) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{17}{12}x^3$ $\beta = 45^\circ$

7. Bestimmen Sie die Nullstellen der angegebenen Ableitungen folgender Funktionen!

Funktion	Ableitungen, deren Nullstellen zu bestimmen sind
a) $y = 1,6x^2 - 0,8x + 4$	1. Ableitung
b) $y = 2x^3 + 2,7x^2 - 21,6x + 3$	1. und 2. Ableitung
c) $y = x^4 + 1,4x^3 + 0,6x^2 + 12$	2. und 3. Ableitung
d) $y = 10 - 180x + 35x^3 - 3x^5$	1. bis 4. Ableitung

8. Aus den angegebenen Werten der Funktion und ihren Ableitungen an bestimmten Stellen ist die zugrunde liegende ganze rationale Funktion $y = f(x)$, deren Grad jeweils vorgeschrieben ist, aufzustellen.

Funktionen 2. Grades:

- a) $f(2) = 2$ $f'(4) = 1$ $f''(x) = 1$
 b) $f(-5) = 30$ $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3$ $f''(x) = 2$

Funktionen 3. Grades:

- c) $f(0) = 3$ $f'(0) = -7$ $f''(0) = 5$ $f'''(6) = 4$
 d) $f(2) = -21$ $f'(3) = 13$ $f''(4) = 36$ $f'''(6) = 60$

Funktionen 4. Grades:

- e) $f(0) = -4$ $f'(1) = 5$ $f''(2) = 42$ $f'''(0) = 0$ $f^{(4)}(x) = 24$
 f) $f(0) = 0$ $f'(0) = 0$ $f''(0) = 0$ $f'''(0) = 1$ $f^{(4)}(x) = 4$

Anleitung: Setzen Sie die Funktion allgemein an (z. B. $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$), und bilden Sie zunächst alle nicht identisch verschwindenden Ableitungen! Durch Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte für x und für y , y' und y'' ergeben sich drei Bestimmungsgleichungen für die zunächst unbekanntenen Koeffizienten a_0 , a_1 , a_2 .

2.7.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Jede rationale Zahl kann in Form eines gemeinen Bruches $\frac{a}{b}$ geschrieben werden, wobei a und b ganze rationale Zahlen sind.
Was versteht man unter einem echten Bruch, was unter einem unechten Bruch? Was ergibt sich im Fall $a = b$? Wie wird ein unechter Bruch in eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch verwandelt?
2. Wie dividiert man zwei mehrgliedrige algebraische Summen durcheinander? Warum heißt dieses Rechenverfahren Partialdivision¹?
Erläutern Sie das an folgenden Beispielen!
 a) $(12a^3 - 11a^2b - 71ab^2 + 40b^3) : (3a - 8b)$ b) $(9p^3 - 7p^2q + 2q^3) : (3p - 2q)$
3. Was ergibt sich bei der Division $0 : a$ ($a \neq 0$)? Unter welcher Bedingung hat also ein Bruch den Wert Null?
4. Warum kann man eine Zahl nicht durch Null dividieren ($a : 0$)?

2.7.2. Echt und unecht gebrochene rationale Funktionen

Unter einer **rationalen Funktion** versteht man eine Funktion, die sich in folgender Form darstellen läßt:

$$(1) \quad y = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0}{B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_2 x^2 + B_1 x + B_0}$$

$$(1a) \quad y = \frac{\sum_{i=0}^m A_i x^i}{\sum_{k=0}^n B_k x^k} \quad (m, n \geq 0, \text{ ganzzahlig; } B_n \neq 0),$$

wobei der Nenner nicht identisch Null ist. Ist $n \geq 1$ und läßt sich der Zähler nicht ohne Rest durch den Nenner dividieren, so heißt die Funktion **gebrochen rational**. Der Definitionsbereich dieser Funktion umfaßt alle x , für die der Nenner nicht verschwindet. Insbesondere gehören zu den rationalen Funktionen alle Funktionen der Form

$$y = \sum_{k=0}^p a_k x^{k-q} \quad (p, q \text{ natürliche Zahlen}).$$

Ist in (1) der Grad der ganzen rationalen Funktion im Zähler kleiner als der der Funktion im Nenner ($m < n$), so heißt die Funktion **echt gebrochen**.

Ist bei einer gebrochenen Funktion der Grad der ganzen rationalen Funktion im Zähler gleich dem der Funktion im Nenner ($m = n$) oder größer als der der Funktion im Nenner ($m > n$), so heißt die Funktion **unecht gebrochen**.

¹ pars (lat.), Teil

1. Bilden Sie je drei Beispiele für echt gebrochene und für unecht gebrochene Funktionen!

Der analytische Ausdruck jeder unecht gebrochenen Funktion $f(x)$ läßt sich als Summe aus dem Ausdruck einer ganzen rationalen Funktion $g(x)$ und einer echt gebrochenen Funktion $r(x)$ darstellen.

Die Umformung erfolgt durch Division des Zählerpolynoms durch das Nennerpolynom.

Beispiel 1

Die Funktion

$$y = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x - 2} = f(x)$$

ist als eine Summe aus einer ganzen rationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion darzustellen.

Umformung durch Division:

$$(x^3 - x^2 + 2) : (x - 2) = x^2 + x + 2$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(x^2 \quad \quad - 2x) \\ + 2 \quad + 2x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -(-4 \quad + 2x) \\ + 6 \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis:

$$y = (x^2 + x + 2) + \frac{6}{x - 2}$$

$$y = g(x) + r(x)$$

2. Untersuchen Sie diese Umformung an Hand selbstgewählter Beispiele für den Fall, daß

a) Zählerpolynom und Nennerpolynom von gleichem Grad sind,

b) das Nennerpolynom ein Faktor des (im Grad höheren) Zählerpolynoms ist!

2.7.3. Die Nullstellen der gebrochenen rationalen Funktionen

Da ein gemeiner Bruch dann und nur dann den Wert Null hat, wenn der Zähler gleich Null und der Nenner von Null verschieden ist, ergibt sich:

Eine gebrochene rationale Funktion kann nur dort eine Nullstelle besitzen, wo die Zählerfunktion verschwindet. Eine Nullstelle des Zählers ist sicher dann eine Nullstelle der gebrochenen Funktion, wenn dort nicht auch gleichzeitig der Nenner verschwindet.

Die Bestimmung der Nullstellen der gebrochenen rationalen Funktionen reduziert sich so auf die Bestimmung der Nullstellen von ganzen rationalen Funktionen.

Beispiel 2

Es sind die Nullstellen der Funktion

$$y = f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^4 + 1}$$

zu bestimmen.

Nullstellen von $Z(x)$:

$$x_0^3 - x_0^2 - 6x_0 = 0$$

$$x_1 \cdot (x_0^2 - x_0 - 6) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = -2$$

Überprüfen an $N(x)$:

$$N(x_1) = 1 \neq 0$$

$$N(x_2) = 82 \neq 0$$

$$N(x_3) = 17 \neq 0$$

Ergebnis:

$$y = f(x) \text{ hat die Nullstellen } x_1 = 0; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = -2$$

3. Bestimmen Sie die Nullstellen von $y = f(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$!

Anleitung: Beachten Sie hierzu die folgende allgemeine Gesetzmäßigkeit!

► Ist eine Nullstelle der Zählerfunktion zugleich Nullstelle der Nennerfunktion, dann läßt sich der gebrochene rationale Ausdruck durch Kürzen mit dem zugehörigen Linearfaktor vereinfachen.

Der Definitionsbereich soll dabei zunächst nicht verändert werden.

2.7.4. Ableitungen der gebrochenen rationalen Funktionen

Zum Differenzieren gebrochener rationaler Funktionen wird die Quotientenregel verwendet:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Beispiel 3

Es ist die 1. Ableitung der Funktion

$$y = f_1(x) = \frac{Z_1(x)}{N_1(x)} = \frac{3x^2 - 4x + 2}{2x^5 + 6x^3 - 7}$$

zu bestimmen.

$$u = Z_1(x) = 3x^2 - 4x + 2 \quad v = N_1(x) = 2x^5 + 6x^3 - 7$$

$$u' = Z_1'(x) = 6x - 4 \quad v' = N_1'(x) = 10x^4 + 18x^2$$

Einsetzen:

$$y' = f_1'(x) = \frac{(6x - 4)(2x^5 + 6x^3 - 7) - (3x^2 - 4x + 2)(10x^4 + 18x^2)}{(2x^5 + 6x^3 - 7)^2}$$

$$y' = \frac{-18x^6 + 32x^5 - 38x^4 + 48x^3 - 36x^2 - 42x + 28}{4x^{10} + 24x^8 + 36x^6 - 28x^5 - 84x^3 + 49} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Es kann festgestellt werden:

$Z_1(x)$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade 2 } Differenz der Grade:
 $N_1(x)$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade 5 } $5 - 2 = 3$

$P_1(x)$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade 6 } Differenz der Grade:
 $Q_1(x)$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade 10 } $10 - 6 = 4$

Es soll nun die entsprechende allgemeine Untersuchung für Funktionen vom Grade m bzw. n im Zähler bzw. Nenner ($m, n \geq 0$; $m < n$) durchgeführt werden.

Gegebene Funktion:

$$y = f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m A_i x^i}{\sum_{k=0}^n B_k x^k} \quad \text{mit } Z(x) \neq 0 \text{ und } m \geq 1 \text{ sowie } n > 1.$$

$Z(x)$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade m } Differenz der Grade:
 $N(x)$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade n } $n - m$ mit $m < n$

Ableitung:

$$y' = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{[N(x)]^2} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Da die Ableitungen $Z'(x)$ und $N'(x)$ wiederum ganze rationale Funktionen von einem jeweils um 1 niedrigeren Grade sind, läßt sich der Grad von $P(x)$ folgendermaßen bestimmen:

Der Grad des Produktes zweier Polynome vom Grad p bzw. q ist stets $p + q$, wie sich durch Ausmultiplizieren beweisen läßt. Folglich ist der Grad von $Z'(x) \cdot N(x)$ im Zähler der Ableitung $m - 1 + n$, der von $Z(x) \cdot N'(x)$ aber $m + n - 1$, also derselbe. Der Grad der Differenz zweier Polynome vom Grad p bzw. q hängt dagegen von den Koeffizienten der Polynome ab und muß daher jeweils besonders untersucht werden. Im vorliegenden Fall ergibt sich:

$$Z'(x) \cdot N(x) = (m \cdot A_m \cdot x^{m-1} + \dots) \cdot (B_n x^n + \dots) = m \cdot A_m \cdot B_n \cdot x^{m+n-1} + \dots$$

$$Z(x) \cdot N'(x) = (A_m \cdot x^m + \dots) \cdot (n \cdot B_n \cdot x^{n-1} + \dots) = n \cdot A_m \cdot B_n \cdot x^{m+n-1} + \dots$$

Wegen $m \neq n$ ergibt sich bei der Differenzbildung

$$P(x) = A_m \cdot B_n (m - n) \cdot x^{m+n-1} + \dots$$

$P(x)$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade $m + n - 1$ } Differenz der Grade:
 $Q(x)$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade $2n$ } $n - m + 1$ mit $m < n$

Die 1. Ableitung einer *echt* gebrochenen rationalen Funktion ist also wieder eine echt gebrochene rationale Funktion, bei der unter den obengenannten Bedingungen

die Grade der Zähler- und der Nennerfunktion größer sind als die der entsprechenden Funktionen der Ausgangsfunktion. Die Differenz dieser Grade wird dabei aber um 1 größer.

Ist $y = \frac{Z(x)}{N(x)}$ eine *unecht* gebrochene rationale Funktion mit der Voraussetzung $m > n$, so ist die Differenz der Grade von $Z(x)$ und $N(x)$ gleich $m - n$. Bei der Ableitung $y' = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ergibt sich dann unter den obengenannten Bedingungen als Differenz der Grade $(m + n - 1) - 2n = m - n - 1$. In diesem Fall werden also die Zähler- und Nennerfunktion der ersten Ableitung ebenfalls von höherem Grade, die Differenz der Grade wird aber um 1 kleiner. Das bedeutet: Für $m > n$ ist auch die Ableitung der unecht gebrochenen rationalen Funktion wieder eine unecht gebrochene rationale Funktion.

Für $m = n$ wird aber die Ableitung eine echt gebrochene rationale Funktion, wobei die Differenz der Grade von Zählerfunktion und Nennerfunktion um mindestens 2 zunimmt, wie sich aus folgender Überlegung ergibt:

Unter den genannten Bedingungen wird diesmal die Ableitung für noch je ein weiteres Glied des Zähler- und Nennerpolynoms gebildet.

$$\begin{aligned} Z'(x) \cdot N(x) &= [n \cdot A_n x^{n-1} + (n-1) \cdot A_{n-1} x^{n-2} + \dots] [B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots] \\ &= n \cdot A_n B_n x^{2n-1} + [n \cdot A_n B_{n-1} + (n-1) \cdot A_{n-1} B_n] x^{2n-2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(x) \cdot N'(x) &= (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots) \cdot [n \cdot B_n x^{n-1} + (n-1) \cdot B_{n-1} x^{n-2} + \dots] \\ &= n \cdot A_n B_n x^{2n-1} + [n \cdot A_{n-1} B_n + (n-1) \cdot A_n B_{n-1}] x^{2n-2} + \dots \end{aligned}$$

Die Differenz ergibt den Zähler der 1. Ableitung, wobei auf jeden Fall das Glied $n \cdot A_n B_n x^{2n-1}$ in Wegfall kommt:

$$P(x) = (A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n) x^{2n-2} + \dots$$

Daraus folgt, daß der Grad des Zählerpolynoms der Ableitung im Höchstfall $2n - 2$ sein kann, also kleiner ist als der des Nennerpolynoms $N(x)$, der $2n$ wird. Die Ableitung ist also eine echt gebrochene Funktion, und die Differenz der Grade $[n - n = 0$ gegen $2n - (2n - 2) = 2$] ändert sich dabei um 2. Es ist ferner ersichtlich, daß bei geeigneter Wahl der Koeffizienten von $Z(x)$ und $N(x)$ der Ausdruck $A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n$ gleich Null ist. Dasselbe kann gegebenenfalls auch mit den Koeffizienten der folgenden Glieder von $P(x)$ geschehen. Dadurch würde sich der Grad des Zählerpolynoms der Ableitung weiter erniedrigen, und die Differenz der Grade von Zähler- und Nennerfunktion nimmt dann um mehr als 2 zu.

● 4. Bestätigen Sie die Richtigkeit dieser Erkenntnisse für die Funktionen

$$y = \frac{5x^3 - x^2}{3x^2 + 2} \quad \text{mit } m > n \quad \text{und} \quad y = \frac{5x^3 - x^2}{3x^3 + 2} \quad \text{mit } m = n!$$

Da die erste Ableitung $f'(x)$ jeder gebrochenen rationalen Funktion $f(x)$ wieder eine gebrochene rationale Funktion ist, muß deren Ableitung, d. h. die zweite Ableitung $f''(x)$, ebenfalls eine gebrochene rationale Funktion sein. Für diese muß bezüglich $f'(x)$ dasselbe gelten, was für $f'(x)$ bezüglich $f(x)$ gilt: Die Grade der Zähler- und Nennerfunktion werden größer, ihre Differenz verändert sich um mindestens 1.

Das führt zu folgenden Ergebnissen:

- ▶ 1. Die höheren Ableitungen echt gebrochener rationaler Funktionen sind immer wieder echt gebrochene rationale Funktionen.
- ▶ 2. Die höheren Ableitungen unecht gebrochener rationaler Funktionen sind, falls $m \geq 1$, $n \geq 1$ und $m > n$, zunächst wieder unecht gebrochene rationale Funktionen, ergeben aber schließlich bei höherer Ordnung echt gebrochene rationale Funktionen.

Beispiel 4

Von der echt gebrochenen Funktion $y = \frac{x-2}{x^2+2}$ sind die ersten drei Ableitungen zu bilden.

$$y' = \frac{-x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 2)^2}; \quad y'' = \frac{2x^3 - 12x^2 - 12x + 8}{(x^2 + 2)^3}; \quad y''' = \frac{P_3(x)}{(x^2 + 2)^4}$$

Alle Ableitungen sind wieder echt gebrochene Funktionen.

5. Untersuchen Sie in der gleichen Weise die unecht gebrochene Funktion

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 2}! \text{ Was für Funktionen stellen deren Ableitungen dar?}$$

Aufgaben

1. Bilden Sie von folgenden echt gebrochenen rationalen Funktionen die 1., 2. und 3. Ableitung!

$$\text{a) } y = \frac{5x - 3}{7x^2}$$

$$\text{b) } y = \frac{2x^2 - x}{3x^4 - 2x - 7}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$$

$$\text{d) } y = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{x + 2}$$

$$\text{e) } y = \frac{x \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2}}{3x^2 - 2}$$

$$\text{f) } y = \frac{5}{1+x^2}$$

2. Bilden Sie von folgenden unecht gebrochenen rationalen Funktionen die 1. Ableitung jeweils auf zweierlei Weise, nämlich einmal in der Form $y = \frac{Z(x)}{N(x)}$, dann in der Form $y = g(x) + r(x)$ (Summe aus einer ganzen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion)!

$$\text{a) } y = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{c) } y = 4x + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\text{d) } y = \frac{3}{9 - x^2} + \frac{x}{x - 1}$$

$$\text{e) } y = \frac{x - 5}{x - 1}$$

$$\text{f) } y = \frac{x(3 - 4x)}{2 - 3x^2}$$

3. Wie heißt von folgenden unecht gebrochenen Funktionen die Ableitung, die als erste eine echt gebrochene Funktion ist? Können Sie im voraus angeben, für welche Ableitung das zutrifft?

$$\text{a) } y = \frac{5 - x^2}{3x - 6}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 - 5}$$

$$\text{c) } y = x + \frac{x}{x^2 + 2}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^3 - 27}{x^2}$$

4. Welchen Wert hat die erste und die zweite Ableitung folgender Funktionen an den angegebenen Stellen?

a) $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2,5$; $x_4 = -\frac{7}{2}$

b) $y = \frac{6}{5 - x^2}$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -1,5$

c) $y = \frac{x - 4}{2 - x}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -3$; $x_4 = \sqrt{2}$; $x_5 = -\frac{1}{3}$

5. Welche Steigung hat die Tangente an die Bilder folgender Funktionen im Punkte $P_1(x_1; y_1)$? Unter welchen Winkeln schneidet die Tangente die x - und die y -Achse? Wie heißen die Koordinaten der Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenachsen?

a) $y = \frac{x^2 + 7}{3 + x}$ $P_1(-1; y_1)$; $P_{2;3}(x_2; -16)$ b) $y = \frac{3}{4 - x^2}$ $P_1(3; y_1)$; $P_2(x_2; 1)$

c) $y = \frac{3 + x^2}{4 - x^2}$ $P_1(3; y_1)$; $P_2(x_2; -\frac{4}{3})$

Hinweis: In b) und c) werden die Werte $x_2 < 0$ verlangt!

6. Eine Tangente an die Bilder folgender Funktionen soll die jeweils gegebene Steigung m_1 haben. In welchen Punkten müssen die Tangenten gelegt werden?

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ $m_1 = \frac{1}{2}$; $m_2 = 0$ b) $y = \frac{x^2 - 5}{1 + x}$ $m_1 = 2$; $m_2 = 5$

c) $y = \frac{x^2 - 8}{x - 3}$ $m_1 = \frac{3}{4}$; $m_2 = 0$

7. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die die x -Achse unter dem genannten Winkel α bzw. die y -Achse unter dem Winkel β schneiden. (Die Winkel α und β werden jeweils vom positiven Teil der Achse im mathematisch positiven Sinn gemessen.) In welchen Kurvenpunkten ist das möglich?

a) $y = \frac{x^2 + x + 14}{x + 2}$ $\alpha = 135^\circ$

b) $y = \frac{x^2 - 3}{2x}$ $\beta = 135^\circ$ c) $y = \frac{x - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{x + \frac{1}{2}\sqrt{3}}$ $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 120^\circ$

8. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen und die jeweils genannten Ableitungen Nullstellen besitzen, und bestimmen Sie sie in diesen Fällen!

	Funktion	Ableitung, die auf Nullstellen zu untersuchen ist
a)	$y = \frac{x^2 - 16}{x - 5}$	1. Ableitung
b)	$y = \frac{x^2 - 2}{3 + x^2}$	1. und 2. Ableitung
c)	$y = \frac{x^2 - 24}{x - 5}$	1., 2. und 3. Ableitung

2.8. Untersuchung der ganzen rationalen Funktion

2.8.1. Aufgaben zur Wiederholung

- Geben Sie eine Definition für die Nullstellen einer Funktion $y = f(x)$! Handelt es sich bei den Nullstellen um geometrische oder arithmetische Elemente, um physikalische Größen oder um Zahlenwerte? Wie werden sie bestimmt?
- Im allgemeinen können Sie mit den Ihnen bekannten rechnerischen Methoden die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen nur dann genau bestimmen, wenn der Grad n nicht größer als 2 ist. Nennen Sie einige Sonderformen ganzer rationaler Funktionen höheren als zweiten Grades, deren Nullstellen sich mit den Ihnen geläufigen Mitteln rechnerisch genau bestimmen lassen!

2.8.2. Funktion und Funktionsbild

Durch jede Funktion ist einer vorgegebenen Menge von Werten der unabhängigen Veränderlichen eine ganz bestimmte Menge von Werten der abhängigen Veränderlichen zugeordnet.

Diese zweite Menge wird im folgenden an einigen Beispielen auf Besonderheiten untersucht.

Beispiele 1 bis 4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1) $y = 9$	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	(konstant)								
2) $y = \frac{1}{6}x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
	(proportional zu den x-Werten; erst negativ, dann positiv)								
3) $y = x^2 - 2x + 2$	17	10	5	2	1	2	5	10	17
	(erst kleiner, dann größer werdend; stets positiv)								
4) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$	$-\frac{25}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{25}{3}$	-6	$\frac{7}{3}$
	(erst größer, dann kleiner, dann wieder größer werdend; erst negativ, dann positiv, dann wieder negativ, dann wieder positiv)								

Einen rascheren Überblick über die Besonderheiten der Funktion gibt die graphische Darstellung durch die Gestalt des entsprechenden Funktionsbildes.

Entwerfen Sie die Bilder für die Funktionen (1) bis (4)!

Die Untersuchung einer Funktion kann also auch durch Zeichnen des zugehörigen Bildes und Erörterung seiner Gestalt (**Kurvendiskussion**) erfolgen. Das Bild kann dazu auf zweierlei Weise gezeichnet werden:

fest. Da das Funktionsbild beim Betrachten in Richtung wachsender y -Werte („von unten her“) im Bereich VI konvex, im Bereich VII aber konkav erscheint, sagt man, das Funktionsbild habe bei VI einen **Konvexbogen** und bei VII einen **Konkavbogen**.

An wichtigen und charakteristischen Punkten sind zu erkennen:

4. Die **Schnittpunkte mit der x -Achse**: X_1, X_2, X_3 .

5. Der **Schnittpunkt mit der y -Achse**: Y_1 .

6. Die Punkte H_1 und T_1 , in denen zwei verschiedenartige Monotoniebögen zusammenstoßen. Sie sind **innere lokale** (oder relative) **Extrempunkte** des Funktionsbildes.

Insbesondere heißt H_1 (Übergang eines wachsenden in einen fallenden Monotoniebogen im Sinne zunehmender Argumente) **Hochpunkt** oder **lokaler Maximumpunkt**. Entsprechend heißt T_1 (Übergang eines fallenden in einen wachsenden Monotoniebogen im Sinne zunehmender Argumente) **Tiefpunkt** oder **lokaler Minimumpunkt** des Bildes der Funktion.

Die Formulierung „relativer bzw. lokaler Extrempunkt“ weist darauf hin, daß es sich dabei nicht immer um den Punkt handelt, der im gegebenen Definitionsbereich die überhaupt größte bzw. kleinste Ordinate besitzt. In einem vorgegebenen endlichen Definitionsbereich kann das Bild der Funktion nämlich sehr wohl mehrere lokale Extrempunkte besitzen. Es können auch unter Umständen am Rand des Definitionsbereichs Punkte existieren, deren Ordinaten größer bzw. kleiner als die der lokalen Extrempunkte im Innern des Definitionsbereichs sind. In der Praxis ist es besonders wichtig, unter allen diesen Punkten gerade diejenigen zu bestimmen, die insgesamt gesehen die größte bzw. kleinste Ordinate haben. Sie heißen **globale** (oder absolute) **Extrempunkte**. Für Kurvendiskussionen sind die lokalen Extrempunkte von besonderer Bedeutung.

7. Der Punkt W_1 , in dem ein Konvexbogen und ein Konkavbogen des Funktionsbildes zusammenstoßen. Ein solcher Punkt heißt **Wendepunkt**.

Den geometrischen Besonderheiten der Funktionsbilder entsprechen analytische Eigenarten der Funktion. Es ist wichtig, die Fachbezeichnungen streng auseinanderzuhalten.

Gegenüberstellung entsprechender Begriffe und Fachbezeichnungen	
Funktionsbild	Funktion $y = f(x)$
Beliebiger Punkt P_0 mit der Abszisse x_0 Ordinate y_0	Wertepaar mit dem Argument (der Stelle) x_0 Funktionswert $y_0 = f(x_0)$
Abszisse x_1 des Schnittpunktes X_1 mit der x -Achse	(reelle) Nullstelle x_1 der Funktion; Bedingung: $y_1 = f(x_1) = 0$
Ordinate y_2 des Schnittpunktes Y_2 mit der y -Achse	Funktionswert y_2 für das Argument $x_2 = 0$; Bedingung: $y_2 = f(0)$

Gegenüberstellung entsprechender Begriffe und Fachbezeichnungen	
Funktionsbild	Funktion $y = f(x)$
Lokaler Maximumpunkt mit der Abszisse x_H Ordinate y_H	Lokale Maximumstelle x_H der Funktion Lokaler Maximumwert oder lokales Maximum der Funktion $[y_H = f(x_H)]$
Lokaler Minimumpunkt mit der Abszisse x_T Ordinate y_T	Lokale Minimumstelle x_T der Funktion Lokaler Minimumwert oder lokales Minimum der Funktion $[y_T = f(x_T)]$
Gemeinsame Bezeichnung: Lokaler Extrempunkt mit der Abszisse x_E Ordinate y_E	Gemeinsame Bezeichnung: Lokale Extremstelle x_E der Funktion Lokaler Extremwert oder lokales Extremum der Funktion $[y_E = f(x_E)]$
Wendepunkt mit der Abszisse x_W Ordinate y_W	(keine besondere Fachbezeichnung)
Wachsende oder fallende Monotoniebögen	Intervalle , in denen die Funktion monoton wächst bzw. fällt
Konvex- oder Konkavbögen	Intervalle , in denen die Funktion konvexes bzw. konkaves Verhalten zeigt
Verhalten im Unendlichen	Grenzwert der Funktion für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ $\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2.8.3. Bestimmung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Die Bestimmung ist ohne Anwendung der Differentialrechnung möglich.

Beispiel 5

$$y = f(x) = 0,4x^4 - 0,1x^2 - 1,8$$

a) Schnittpunkt mit der y -Achse

Bedingung: $x_0 = 0$

$$y_0 = 0,4 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 - 1,8$$

$$y_0 = -1,8$$

Ergebnis:

geometrisch (Funktionsbild)

Die Ordinate des Schnittpunktes mit der y -Achse ist $-1,8$ (Abb. 2.7.).

b) Schnittpunkte mit der x -Achse

Bedingung: $y_0 = 0$

$$0 = 0,4x_0^4 - 0,1x_0^2 - 1,8$$

$$x_0^4 - \frac{1}{4}x_0^2 - \frac{9}{2} = 0$$

$$x_{1,2}^2 = \frac{9}{4}; \quad x_{3,4}^2 = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = +\frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_3 \\ x_4 \end{array} \left. \right\} \text{nicht reell}$$

analytisch (Funktion)

Der Funktionswert für das Argument 0 ist $-1,8$.

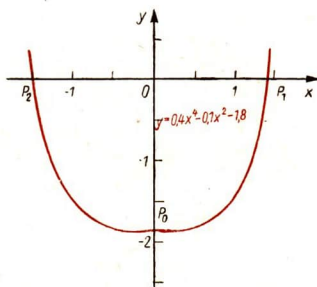


Abb. 2.7.

Da alle Bildpunkte reelle Koordinaten haben und auch bei der Funktion nur reelle Werte untersucht werden sollen, entfallen x_3 und x_4 für die weiteren Untersuchungen.

Berechnet man die Ordinate eines Punktes mit einer etwas größeren und die eines Punktes mit einer etwas kleineren Abszisse als x_1 bzw. x_2 , z. B. $+1$ und $+2$ bzw. -1 und -2 , so erhält man jeweils Ordinaten mit unterschiedlichen Vorzeichen:

$$\text{zu } x_1 \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 0,4 - 0,1 - 1,8 < 0 \\ f(2) = 6,4 - 0,4 - 1,8 > 0 \end{array} \right. \quad \text{zu } x_2 \left\{ \begin{array}{l} f(-1) = f(1) < 0 \\ f(-2) = f(2) > 0 \end{array} \right.$$

Da in diesen Intervallen außer x_1 bzw. x_2 keine weiteren Nullstellen der Funktion liegen, folgt, daß das Funktionsbild in den Punkten $X_1\left(+\frac{3}{2}; 0\right)$ und $X_2\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ jeweils von der einen auf die andere Seite der x -Achse übergeht.

Ergebnis:

geometrisch (Funktionsbild)

Das Bild der Funktion geht zweimal von der einen auf die andere Seite der x -Achse über. Die Abszissen der Schnittpunkte sind $\frac{3}{2}$ und $-\frac{3}{2}$. (Abb. 2.7.)

analytisch (Funktion)

Die (reellen) Nullstellen der Funktion sind $\frac{3}{2}$ und $-\frac{3}{2}$.

Die Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ liefert die Abszissen aller Schnittpunkte, d. h. aller Punkte, die Funktionsbild und Abszissenachse gemeinsam haben. Das sind außer solchen Schnittpunkten, wie sie sich im vorigen Beispiel ergaben, auch solche, in denen das Bild der Funktion nicht von der einen auf die andere Seite der x -Achse übergeht (Berührungspunkte; vgl. dazu auch Abschnitt 2.8.4.).

Beispiel 6

$$y = 2x - 3 - \frac{1}{3}x^2$$

Bedingung: $y_0 = 0$

$$0 = 2x_0 - 3 - \frac{1}{3}x_0^2$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 3$$

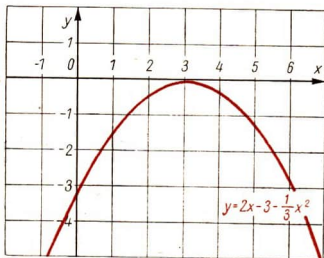


Abb. 2.8.

Eine entsprechende Untersuchung zweier Punkte mit etwas größerer bzw. kleinerer Abszisse ergibt hier Ordinaten mit gleichen Vorzeichen:

$$f(2) = 4 - 3 - \frac{4}{3} < 0 \quad f(4) = 8 - 3 - \frac{16}{3} < 0$$

Ergebnis: Die Nullstellen der Funktion sind $x_1 = x_2 = 3$. Das Funktionsbild hat einen Schnittpunkt mit der x -Achse, in dem es nicht auf die andere Seite der x -Achse übergeht. Die Abszisse dieses Schnittpunktes ist 3. (Abb. 2.8.)

Aufgaben

- Wieviel Schnittpunkte mit der x -Achse und wieviel Schnittpunkte mit der y -Achse kann das Bild einer ganzen rationalen Funktion n -ten Grades höchstens, wieviel muß es mindestens haben?
Anleitung: Bei der Bestimmung der Mindestzahl von Schnittpunkten mit der x -Achse müssen Sie beachten, ob der Grad der zugehörigen Funktion gerade oder ungerade ist.
- Welche Bedingung muß der analytische Ausdruck einer Funktion erfüllen, wenn ihr Bild durch den Koordinatenursprung geht?
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Bilder folgender Funktionen mit den Koordinatenachsen! Zeichnen Sie im Anschluß an die Berechnung die Bilder mit Hilfe einer Wertetabelle!
 - $2x + 3y + 6 = 0$
 - $x - 2 = 0$
 - $y + 2 = 0$
 - $y = 4x^2 + 5x - 6$
- Bestimmen Sie alle Nullstellen und die zum Argument $x = 0$ gehörenden Funktionswerte!
 - $y = 8x - 4x^2$
 - $y = x^3 - 3x^2$
 - $y = x^3 - 3x$
 - $y = x^5 - x^4 - x^3$
 - $2y - x + 3 = 0$
 - $y = x^6 - 5x^3 + 6$

2.8.4. Bestimmung der lokalen Extrempunkte und der Wendepunkte

Die Bestimmung dieser Punkte wird durch den Einsatz der Differentialrechnung erleichtert. Die Abbildung 2.9. zeigt das Bild einer Funktion $y = f(x)$ mit zwei lokalen Extrempunkten. Entsprechend der Definition (vgl. Abschnitt 2.8.2.) werden zunächst die wesentlichen Merkmale eines Monotoniebogens untersucht. Wie aus der Anschauung ohne Beweis entnommen wird, haben innerhalb eines solchen Bogens die Tangenten entweder Neigungswinkel, die sämtlich $\geq 0^\circ$, oder Neigungswinkel, die sämtlich $\leq 0^\circ$ sind. Dabei wird als Neigungswinkel stets der betreffende Winkel α mit $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ bezeichnet. Das bedeutet, daß ihre Steigungen und damit die Werte der ersten Ableitung der betreffenden Funktion in diesem Intervall niemals verschiedene Vorzeichen haben. Es gilt also die **notwendige Bedingung für Monotoniebögen**:

$f'(x) \geq 0$ für alle x im Intervall bei monoton wachsender Funktion

$f'(x) \leq 0$ für alle x im Intervall bei monoton fallender Funktion.

Ohne Beweis sei mitgeteilt, daß diese Bedingung auch **hinreichend** ist, wenn der allgemeine Monotoniebegriff und nicht der der strengen Monotonie zugrunde gelegt wird.

Voraussetzung ist, daß die Funktion innerhalb der betrachteten Intervalle an jeder Stelle differenzierbar ist. Daß das nicht für jede Stelle zutreffen braucht, wurde zum Beispiel für die Funktion $y = f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$ im Beispiel 2 des Abschnitts 2.2.2. gezeigt.

Als **notwendige Bedingung** für die Abszisse x_E eines lokalen Extrempunktes, der als Trennungspunkt zwischen zwei verschiedenartigen Monotoniebögen beiden zugleich angehören muß, folgt daraus sofort:

$$f'(x_E) = 0.$$

Geometrisch bedeutet das, daß in einem lokalen Extrempunkt die Tangente an das Bild der Funktion parallel zur x -Achse (waagrecht) verlaufen muß. Das ist auch in Abbildung 2.9. ersichtlich.

Die Bedingung $f'(x_E) = 0$ ist aber für einen lokalen Extrempunkt **nicht hinreichend**, denn sie kann auch für einen Punkt im Inneren eines Monotoniebogens zutreffen, ohne daß dort ein Übergang in einen anderen Monotoniebogen stattfindet. Die Abbildungen 2.10.a und b zeigen die entsprechenden Bilder. Der betreffende Punkt ist in der Abbildung ein Wendepunkt W , der als Besonderheit

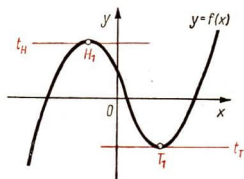


Abb. 2.9.

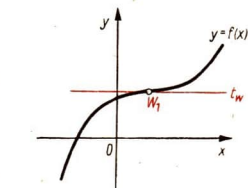


Abb. 2.10. a

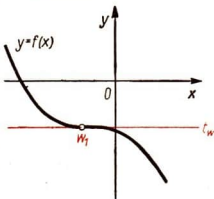


Abb. 2.10. b

eine zur x -Achse parallele Tangente t_w aufweist und deshalb gelegentlich als **Terrassenpunkt** bezeichnet wird.

1. Zeichnen Sie Kurven mit lokalen Extrempunkten und Terrassenpunkten, und verfolgen Sie die Monotoniebögen und das konvexe oder konkave Verhalten in der Umgebung dieser Punkte! Worin besteht der Unterschied bei lokalen Extrempunkten und Terrassenpunkten?

Das Ergebnis dieser Untersuchungen zeigt folgende Übersicht:

	Extrempunkt	Terrassenpunkt (Wendepunkt)
Art des Monotoniebogens (wachsend bzw. fallend)	ändert sich	bleibt gleich
Art des Krümmungsverhaltens (Konvex- bzw. Konkavbogen)	bleibt gleich	ändert sich

Um festzustellen, ob ein Extrempunkt oder ein Terrassenpunkt vorliegt, ist es deshalb vielfach zweckmäßig, die Konvex- bzw. Konkavbögen des Funktionsbildes zu untersuchen. Diese können durch die Änderung der Steigung der Tangente beim Fortschreiten im Sinne wachsender Abszissen beschrieben werden.

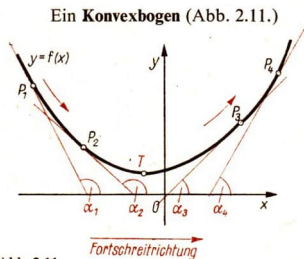


Abb. 2.11.

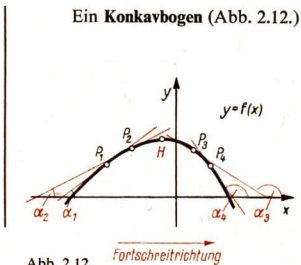


Abb. 2.12.

des Funktionsbildes liegt dort vor, wo im Sinne wachsender Abszissen der Neigungswinkel α der Tangenten in den Bereichen $90^\circ > \alpha \geq 0^\circ$ bzw. $180^\circ \geq \alpha > 90^\circ$ und damit auch $\tan \alpha$

monoton wächst.

monoton fällt.

Sofern die zugrunde liegende Funktion $y = f(x)$ im betrachteten Intervall überall differenzierbar ist, ist der Tangens des Neigungswinkels α überall gleich der ersten Ableitung $y' = f'(x)$ an der betreffenden Stelle. $y' = f'(x)$ muß daher bei einem

Konvexbogen

Konkavbogen

des Bildes von $y = f(x)$ eine
monoton wachsende

Funktion sein. Das Bild von $y' = f'(x)$ muß also einen Monotoniebogen im Sinne
wachsender Werte von y' (Abb. 2.13.)

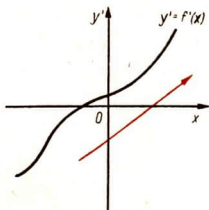


Abb. 2.13.

monoton fallende

fallender Werte von y' (Abb. 2.14.)

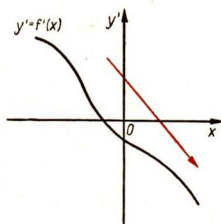


Abb. 2.14.

haben. Infolgedessen gilt, falls $y = f(x)$ zweimal differenzierbar ist, als **notwendige und hinreichende Bedingung für einen**

Konvexbogen:

$$y'' = f''(x) \geq 0$$

Konkavbogen:

$$y'' = f''(x) \leq 0$$

Dies folgt auf Grund der Definition aus der notwendigen Bedingung für Monotoniebögen (S. 121) unter Beachtung von $[f'(x)]' = f''(x)$.

Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann in vielen Fällen entschieden werden, ob das Funktionsbild an einer Stelle x_0 , an der die erste Ableitung verschwindet, einen lokalen Extrempunkt besitzt. Falls nämlich $f''(x_0) > 0$, so ist $f''(x)$ auch noch in einer kleinen Umgebung von x_0 positiv, das Funktionsbild also dort konvex. Daher ist die erste Ableitung $f'(x)$ dort monoton wachsend, mithin links von x_0 wegen $f'(x_0) = 0$ kleiner als Null, rechts von x_0 größer als Null. In diesem Fall ist demnach $f(x)$ in dem links von x_0 gelegenen Teil monoton fallend, in dem rechts von x_0 gelegenen monoton wachsend. Das Funktionsbild hat also zu beiden Seiten des Punktes mit der Abszisse x_0 verschiedenartige Monotoniebögen, links einen fallenden, rechts einen wachsenden. Der Punkt selbst ist also ein lokaler Minimumpunkt; die Funktion hat dort ein lokales Minimum.

● 2. Führen Sie die entsprechenden Überlegungen für einen lokalen Maximumpunkt durch!

Es ergibt sich also folgende **hinreichende Bedingung für lokale, innere Extrempunkte:**
Das Bild der Funktion $y = f(x)$ hat einen lokalen, inneren

Minimumpunkt $T(x_T; y_T)$, wenn gilt:

$$f'(x_T) = 0$$

$$f''(x_T) > 0$$

Maximumpunkt $H(x_H; y_H)$, wenn gilt:

$$f'(x_H) = 0$$

$$f''(x_H) < 0$$

Ergebnisse:

1. Ob ein Funktionsbild in einer Umgebung des Punktes $P_0(x_0; y_0)$ einen Konvexbogen oder einen Konkavbogen hat, ergibt sich, falls $f''(x_0) \neq 0$, aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung wie folgt:

Falls $f''(x_0) > 0$, hat das Bild in einer hinreichend kleinen Umgebung von P_0 einen Konvexbogen.

Falls $f''(x_0) < 0$, hat das Bild entsprechend einen Konkavbogen.

2. Ein Wendepunkt $W(x_W; y_W)$ liegt sicher dort vor, wo ein Konvexbogen des Funktionsbildes in einen Konkavbogen übergeht oder umgekehrt. Das ist immer dann der Fall, wenn die zweite Ableitung der Funktion $y = f(x)$ an dieser Stelle das Vorzeichen ändert. An einer solchen Stelle muß notwendig $f''(x_W) = 0$ gelten. Das ist also unter den obengenannten Voraussetzungen eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes. Diese Bedingung ist allerdings nicht hinreichend. Ohne Beweis sei mitgeteilt, daß mit Sicherheit ein Wendepunkt an der Stelle x_W vorliegt, wenn außer $f''(x_W) = 0$ auch noch gilt $f'''(x_W) \neq 0$. Beides zusammen ist also eine hinreichende Bedingung. Sollte hingegen an einer Stelle x_0 gleichzeitig $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ gelten, so sind besondere Untersuchungen nötig, um den Charakter von Funktion und Funktionsbild an dieser Stelle festzustellen. (Auf diese Untersuchungen wird hier nicht eingegangen.)

3. Ein Punkt $E(x_E; y_E)$ ist für das Funktionsbild sicher dann ein lokaler Extrempunkt, wenn das Funktionsbild in einer Umgebung dieses Punktes einen Konvex- bzw. einen Konkavbogen hat, das heißt, wenn $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$ gilt. Und zwar ergibt sich, falls $f''(x_E) > 0$, ein Tiefpunkt; falls $f''(x_E) < 0$, ein Hochpunkt. Es ist allerdings auch möglich, daß ein solcher Extrempunkt vorliegt, falls $f'(x_E) = f''(x_E) = 0$ gilt. In diesem Falle sind wieder besondere Untersuchungen erforderlich. (Auf diese Untersuchungen wird hier nicht eingegangen.)

Beispiel 7

Von dem Bild der Funktion $y = 30x^5 + 70x^4 + 40x^3 + 1$ sind die lokalen Extrempunkte und die Wendepunkte zu bestimmen.

Zuerst bilden wir die erste, zweite und dritte Ableitung:

$$y' = 150x^4 + 280x^3 + 120x^2$$

$$y'' = 600x^3 + 840x^2 + 240x$$

$$y''' = 1800x^2 + 1680x + 240$$

a) Ermittlung der lokalen Extrempunkte (Bedingung: $y' = 0$):

$$y' = 150x_0^4 + 280x_0^3 + 120x_0^2 = 0$$

$$150x_0^2 \left(x_0^2 + \frac{28}{15}x_0 + \frac{4}{5} \right) = 0$$

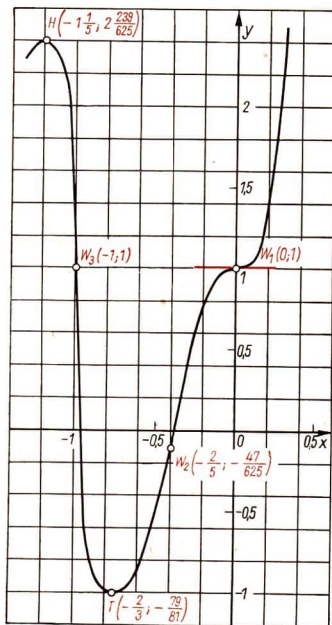
$$x_1 = x_2 = 0 \left| \begin{array}{l} x_0^2 + \frac{28}{15}x_0 + \frac{4}{5} = 0 \\ x_3 = -\frac{2}{3}; \quad x_4 = -\frac{6}{5} \end{array} \right.$$

Durch Einsetzen von $x_1 = x_2$; x_3 ; x_4 in die zweite Ableitung wird untersucht, ob es sich mit Sicherheit um die Abszissen von lokalen Extrempunkten handelt, und ob, falls das der Fall ist, ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vorliegt.

$y'_1 = y'_2 = 0$: nicht sicher, ob ein lokaler Extrempunkt vorliegt

$$y''_3 = 600 \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 840 \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 240 \left(-\frac{2}{3}\right) > 0 \text{ Tiefpunkt}$$

$$y''_4 = 600 \left(-\frac{6}{5}\right)^3 + 840 \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + 240 \left(-\frac{6}{5}\right) < 0 \text{ Hochpunkt}$$



Mit Hilfe des gegebenen analytischen Ausdrucks ergeben sich schließlich die Ordinaten der beiden Extrempunkte (Abb. 2.15.):

$$y_3 = -\frac{79}{81}; \quad y_4 = \frac{1489}{625}.$$

b) Ermittlung der Wendepunkte (Bedingung: $y'' = 0$):

$$y'' = 600x_0^3 + 840x_0^2 + 240x_0 = 0$$

$$600x_0 \left(x_0^2 + \frac{7}{5}x_0 + \frac{2}{5}\right) = 0$$

$$x_5 = 0 \left| \begin{array}{l} x_0^2 + \frac{7}{5}x_0 + \frac{2}{5} = 0 \\ x_6 = -\frac{2}{5}; \quad x_7 = -1 \end{array} \right.$$

Durch Einsetzen von x_5 ; x_6 ; x_7 in die dritte Ableitung läßt sich hier entscheiden, ob es sich mit Sicherheit um die Abszissen von Wendepunkten handelt.

Abb. 2.15.

$$\left. \begin{aligned} y_5''' &= 240 \neq 0 \\ y_6''' &= 1800 \cdot \frac{4}{25} - 1680 \cdot \frac{2}{5} + 240 \neq 0 \\ y_7''' &= 1800 - 1680 + 240 \neq 0 \end{aligned} \right\} \text{Alle drei Werte sind sicher Abszissen von Wendepunkten}$$

Die Ordinaten der drei Wendepunkte ergeben sich aus dem gegebenen analytischen Ausdruck: $y_5 = 1$; $y_6 = -\frac{47}{625}$; $y_7 = 1$.

Wegen $x_5 = x_1 = x_2$ ergibt sich hier ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente (Terrassenpunkt).

Ergebnis (Abb. 2.15.):

geometrisch (Funktionsbild)

Die Kurve besitzt zwei lokale Extrempunkte, einen lokalen Maximumpunkt $H\left(-\frac{6}{5}; \frac{1489}{625}\right)$ und einen lokalen Minimumpunkt $T\left(-\frac{2}{3}; -\frac{79}{81}\right)$ sowie drei Wendepunkte: $W_1(0; 1)$; $W_2\left(-\frac{2}{5}; -\frac{47}{625}\right)$ und $W_3(-1; 1)$. Davon ist W_1 ein Terrassenpunkt.

analytisch (Funktion)

Die Funktion besitzt ein lokales Maximum vom Wert $\frac{1489}{625}$ an der Stelle $-\frac{6}{5}$ und ein lokales Minimum vom Wert $-\frac{79}{81}$ an der Stelle $-\frac{2}{3}$.

3. Untersuchen Sie das Bild der Funktion $y = 4x - 4 - x^2$ auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte, und zeichnen Sie die Kurve! Welche Besonderheiten stellen Sie fest? (Vgl. dazu Beispiel 6 auf S. 120!)

2.8.5. Das Horner'sche Schema

Die Bestimmung der Extrempunkte und Wendepunkte erfordert jeweils auch die Berechnung von Funktionswerten $y = f(x)$ zu bestimmten Argumenten x . Bei komplizierten rationalen oder bei irrationalen Zahlenwerten von x ist die Berechnung des Funktionswertes der ganzen rationalen Funktion nach dem **HORNER'SCHEN RECHENSCHEMA** oft zeit- und arbeitssparend.

Der analytische Ausdruck einer ganzen rationalen Funktion, z. B.

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

kann durch mehrmaliges Ausklammern von x schrittweise in einen Klammerausdruck umgeformt werden, im vorliegenden Beispiel zu

$$y = (ax^2 + bx + c)x + d$$

$$y = [(ax + b)x + c]x + d.$$

Man setzt nunmehr den betreffenden Zahlenwert für x ein und erhält unter abwechselndem Multiplizieren und Addieren schließlich den Funktionswert y . Dabei beginnt man mit der innersten Klammer. Zweckmäßig ist für die Berechnung die Verwendung eines Schemas:

x	a	b	c	d
x_1	a	$\frac{a x_1 + b}{(a x_1 + b)}$	$\frac{(a x_1 + b) x_1 + c}{[(a x_1 + b) x_1 + c]}$	$\frac{[(a x_1 + b) x_1 + c] x_1 + d}{[(a x_1 + b) x_1 + c] x_1 + d}$

Beispiel 8

Die lokalen Extremwerte der Funktion $y = 2x^3 - 9x^2 - 12x + 7$ sind zu bestimmen.

Ableitungen:

$$y' = 6x^2 - 18x - 12 \quad y'' = 12x - 18$$

Ermittlung der lokalen Extremstellen ($y' = 0$):

$$6x_0^2 - 18x_0 - 12 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}; \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

$$y''_1 = 12\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}\right) - 18 = +6\sqrt{17} > 0 \quad \text{Minimum}$$

$$y''_2 = 12\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}\right) - 18 = -6\sqrt{17} < 0 \quad \text{Maximum}$$

Ermittlung der lokalen Extremwerte:

Dazu sollen Näherungswerte für x_1 und x_2 verwendet werden.

$$x_1 \approx 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 4,12 = 3,56 \quad x_2 \approx 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 4,12 = -0,56$$

Um die Extremwerte näherungsweise mit diesen Werten zu errechnen, formen wir den analytischen Ausdruck der Funktion wie folgt um:

$$\begin{aligned} y &= 2x^3 - 9x^2 - 12x + 7 \\ &= (2x^2 - 9x - 12) \cdot x + 7 \\ y &= ([2x - 9] \cdot x - 12) \cdot x + 7 \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir $x_1 \approx 3,56$ für x und rechnen den Ausdruck von innen nach außen aus. Zur Erleichterung dient das HORNERSche Schema.

x	2	-9	-12	7
$x_1 = 3,56$	2	-1,88	-18,69	-59,5 $\approx y_1$

$\xrightarrow{\cdot x_1} \begin{matrix} 7,12 \\ -6,69 \\ -66,5 \end{matrix} \xrightarrow{\cdot x_1} \begin{matrix} -6,69 \\ -18,69 \end{matrix} \xrightarrow{\cdot x_1} \begin{matrix} -66,5 \\ -59,5 \end{matrix}$

Wenn die Teilmultiplikationen (1) $3,56 \cdot 2$; (2) $3,56 \cdot (-1,88)$; (3) $3,56 \cdot (-18,69)$ mit dem Rechenstab ausgeführt werden, ist eine einheitliche Genauigkeit gesichert. Der gleichbleibende Faktor x_1 erlaubt dabei ein sehr rasches Arbeiten. Das Zusammenfassen der untereinander stehenden Summanden kann im Kopf ausgeführt werden, so daß bei der üblichen endgültigen Kurzform des Schemas, die anschließend wiedergegeben wird, ein beachtlicher Zeitgewinn entsteht.

x	2	-9	-12	7
$x_1 = 3,56$	2	-1,88	-18,69	-59,5 $\approx y_1$
$x_2 = -0,56$	2	-10,12	-6,33	10,5 $\approx y_2$

Berechnen Sie $y = x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}$ für $x_1 = -2,17$ mit Hilfe des HORNERSchen Schemas! Dabei ist es erforderlich, fehlende Potenzglieder des Arguments (unter Beifügung des Faktors 0) zu ergänzen, also mit dem Ausdruck

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + \frac{3}{4} \text{ zu arbeiten.}$$

Aufgaben

1. Der Scheitel jeder Parabel, die als graphische Darstellung der Funktion $y = x^2 + px + q$ entsteht, ist ein lokaler Extrempunkt dieses Funktionsbildes. Bestimmen Sie auf diesem Wege die Koordinaten des Scheitels, und vergleichen Sie das Ergebnis mit den früher auf anderem Wege erhaltenen Koordinaten!
2. Verfahren Sie genauso mit der Funktion $y = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$! Wovon hängt es ab, ob sich an der Extremstelle ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ergibt? Was können Sie daraus über die Öffnungsrichtung der zugehörigen Parabel aussagen?
3. Die lokalen Extremstellen einer Funktion sind unter den Nullstellen der ersten Ableitung, die Abszissen der Wendepunkte des zugehörigen Funktionsbildes unter den Nullstellen der zweiten Ableitung zu suchen. Wieviele lokale Extrempunkte und wieviele Wendepunkte kann infolgedessen das Funktionsbild einer ganzen rationalen Funktion 1., 2., 3., 4., ..., n -ten Grades im Höchstfall haben? Wieviele muß es mindestens haben?
4. Bestimmen Sie die lokalen Extrempunkte und Wendepunkte der Bilder folgender Funktionen, und zeichnen Sie danach diese Bilder in dem jeweiligen Bereich! Verwenden Sie zur Berechnung der Ordinaten gegebenenfalls das HORNERSche Schema!

a) $y = x^3 - x - 2$ b) $y = x^4 - 8x^2 + 16$ c) $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$ d) $y = x^2 + 2x - 4$

5. An welchen Stellen haben die folgenden Funktionen lokale Extrema? Von welcher Art sind sie, und wie groß sind die Extremwerte? Welche Punkte der Funktionsbilder sind Wendepunkte?

$$\text{a) } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } y = x^3 - 13x + 27$$

$$\text{c) } y = 30 - 24x + 9x^2 - x^3$$

$$\text{d) } y = 2x^4 - 32x^2 - 10$$

2.8.6. Das Verhalten im Unendlichen

Um das Verhalten eines Funktionsbildes im Unendlichen festzustellen, müssen die Grenzwerte des analytischen Ausdrucks der zugehörigen Funktion für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ ermittelt werden. Für die allgemeine ganze rationale Funktion ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \cdot x^n \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty, \quad \text{falls } n \text{ gerade, bzw.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty, \quad \text{falls } n \text{ ungerade,}$$

folgt schließlich unter Berücksichtigung des Vorzeichens von a_n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty, \quad \text{falls } n \geq 2, \text{ gerade und } a_n > 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \quad \text{falls } n \geq 2, \text{ gerade und } a_n < 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \quad \text{falls } n \text{ ungerade und } a_n > 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty, \quad \text{falls } n \text{ ungerade und } a_n < 0.$$

Geometrisch bedeutet das:

Das Funktionsbild „kommt aus dem Unendlichen“ und „geht ins Unendliche“ auf derselben Seite der x -Achse, falls die ganze rationale Funktion von geradem Grade ist, auf verschiedenen Seiten der x -Achse, falls sie von ungeradem Grade ist.

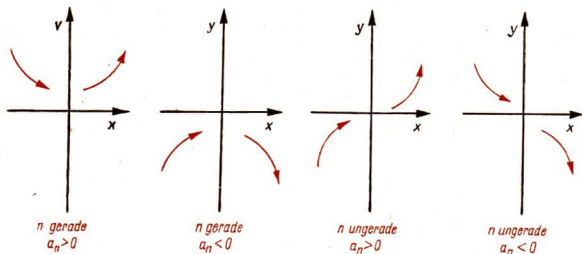


Abb. 2.16.

In welchen Quadranten das im einzelnen stattfindet, hängt vom Vorzeichen des Koeffizienten a_n von x^n ab (Abb. 2.16.).

Beispiele (Abb. 2.17.)

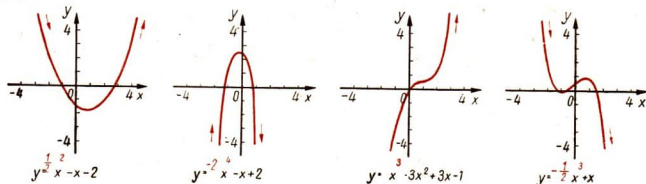


Abb. 2.17.

Zusammenfassung: Die Untersuchung einer ganzen rationalen Funktion an Hand des zugehörigen Bildes umfaßt die Diskussion folgender Besonderheiten:

Gegebene Funktion:

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (k \geq 0, \text{ ganzzahlig})$$

- 1) Schnittpunkt mit der y -Achse
- 2) Schnittpunkte mit der x -Achse
- 3) Lokale innere Extrempunkte
 - Minimumpunkte
 - Maximumpunkte

- $x = 0$ (notwendige und hinreichende Bedingung)
- $y = 0$ (notwendige und hinreichende Bedingung)
- $y' = 0$ (notwendige Bedingung)
- $y' = 0; y'' > 0$ (hinreichende Bedingung)
- $y' = 0; y'' < 0$ (hinreichende Bedingung)

4) Wendepunkte

5) Verhalten im Unendlichen

$$y'' = 0 \text{ (notwendige Bedingung)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y; \lim_{x \rightarrow -\infty} y$$

6) Darüber hinaus können, soweit erforderlich, Einzelpunkte durch ihre Koordinaten festgelegt oder durch y' die Richtungen der Tangenten in einzelnen Punkten bestimmt werden.

● *Untersuchen Sie die Funktion $y = x^4 - 5x^2 + 4$, und zeichnen Sie das zugehörige Bild!*

Aufgaben

1. Vergleichen Sie für das Bild einer ganzen rationalen Funktion n -ten Grades das Verhalten im Unendlichen mit der Höchstzahl und der Mindestzahl an lokalen Extrempunkten und Wendepunkten (Aufgabe 3, S. 128) sowie mit der Anzahl der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (Aufgabe 1, S. 120)!
Formulieren Sie einen Satz, und ziehen Sie daraus Schlüsse für die allgemeine Gestalt dieser Funktionsbilder!
Anleitung: Beachten Sie, ob der Grad der entsprechenden ganzen rationalen Funktion gerade oder ungerade ist!
2. Untersuchen Sie folgende Funktionen durch Zeichnung und Diskussion der zugehörigen Bilder!

a) $y = x^3 - x^2 - 8x$ b) $y = x^4 - 25x^2 + 144$ c) $y = \frac{x^5}{2} - 2x^3$

d) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ e) $y = 3 - 5x - 2x^2$ f) $y = (x + 1)(x - 2)^3$

2.8.7. Anwendungen zur Extremwertbestimmung

Außerordentlich häufig treten in Wirtschaft und Technik Fragen nach der besten (optimalen) Wirkung, der größten (maximalen) Leistung, der kleinsten (minimalen) Abnutzung u. ä. auf. Dabei handelt es sich im mathematischen Sinne um die Ermittlung der Extrema der Funktion, die den betreffenden Sachverhalt charakterisiert. Diese Funktion muß zunächst aus der Aufgabenstellung heraus erkannt und aufgestellt werden, wobei es wichtig ist, den durch die Forderungen der Praxis bedingten Definitionsbereich festzulegen. Als Extremum kommt dabei (im Gegensatz zur Kurvendiskussion) meist das im Innern oder am Rande des Definitionsbereiches gelegene globale Maximum oder Minimum in Frage (vgl. Abschnitt 2.8.2.). Deshalb müssen bei solchen Aufgaben, wenn nicht aus der Problemstellung eindeutig hervorgeht, daß das lokale Extremum zugleich den größten bzw. kleinsten Funktionswert im Definitionsbereich darstellt, noch die Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs bestimmt werden.

Beispiel 9

Aus Baumstämmen, die der Einfachheit halber mit durchgängig gleich großem kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser d) angenommen werden, sollen

Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit geschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite und zum Quadrat der Balkenhöhe (Abb. 2.18.).

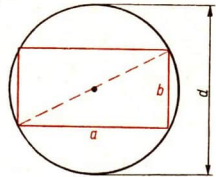


Abb. 2.18.

Aufstellen der Funktion:

Die Größe, die einen Extremwert annehmen soll, muß abhängige Veränderliche werden.¹ Hier ist das die Tragfähigkeit T ($T \cong y$). Eine Größe, die variabel ist und die so bestimmt werden muß, daß sich der geforderte Extremfall ergibt, muß unabhängige Veränderliche werden. Oft sind mehrere Größen variabel, hier Breite a und Höhe b des Balkens. Dann muß eine als unabhängige Veränderliche beibehalten werden (zum Beispiel $a \cong x$), während die anderen (hier: b) mit Hilfe weiterer Beziehungen, die sich aus Text oder Figur ergeben, eliminiert werden müssen.

Ziel:

$$T = f(a)$$

Ansatz:

$$T = p \cdot a \cdot b^2 \quad (p: \text{Materialkonstante, Proportionalitätsfaktor})$$

Eliminiert werden muß die Variable b .

Wegen $b^2 = d^2 - a^2$ ergibt sich:

$$T = p \cdot a \cdot (d^2 - a^2) = f(a).$$

Es ist wichtig, nunmehr den Definitionsbereich der Funktion festzulegen, da dieser auf Grund der Aufgabe meist Beschränkungen unterworfen ist. Hier gilt offenbar: $0 < a < d$.

Jetzt schließt sich die Untersuchung der Funktion auf ein lokales Maximum an.

Funktion:

$$T = p(ad^2 - a^3)$$

¹ Bei den in solchen Anwendungsaufgaben vorkommenden Konstanten und Veränderlichen und demgemäß auch bei den dafür verwendeten Symbolen handelt es sich meist um physikalische Größen. Da aber zum Beispiel die Ableitung nur mit Zahlenwerten ($\text{Zahlenwert} = \frac{\text{Größe}}{\text{Maßeinheit}}$) gebildet werden kann, müßten an sich für die mathematische Bearbeitung des Problems andere Symbole verwendet werden. Um diese doppelte Symbolik zu vermeiden, ist es im allgemeinen üblich, im mathematischen Rechengang die gebräuchlichen Größensymbole (zum Beispiel d für den Durchmesser des Baumstamms) beizubehalten, ihnen aber dabei vorübergehend die Bedeutung von Zahlenwerten zuzuschreiben. So wird auch in diesem und in dem folgenden Beispiel verfahren.

Ableitungen:

$$\frac{dT}{da} = p(d^2 - 3a^2)$$

$$\frac{d^2T}{da^2} = p \cdot (-6a)$$

Aus der zweiten Ableitung folgt, daß im Definitionsbereich ($a > 0$) bei einer positiven Materialkonstanten p lokale innere Extrema nur Maxima sein können.

Bestimmung der Extremstelle:

$$p(d^2 - 3a_0^2) = 0.$$

$$a_1 = +\frac{d}{3}\sqrt{3}; \quad a_2 = -\frac{d}{3}\sqrt{3}$$

Wegen des Definitionsbereiches entfällt a_2 . Zu a_1 werden b_1 und T_1 berechnet:

$$b_1 = \sqrt{d^2 - a_1^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \frac{d}{3}\sqrt{6};$$

$$T_1 = p \cdot \frac{d}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{d^2}{9} \cdot 6 = \frac{2}{9}pd^3\sqrt{3}.$$

Um festzustellen, ob ein lokales Maximum tatsächlich größter Funktionswert im Definitionsbereich ist, müßten noch die Funktionswerte am Rand mit dem lokalen Maximum verglichen werden. Das ist aber nicht möglich, da die Funktion dort nicht erklärt ist. Da aber $\frac{dT}{da} = p(d^2 - 3a^2)$ für $0 < a < a_1$ größer als Null, für $a_1 < a < d$ kleiner als Null ist, die Funktion also links vom Extremum monoton wächst, rechts davon hingegen monoton fällt, ist T_1 tatsächlich der gesuchte größte Funktionswert im angegebenen Definitionsbereich.

Ergebnis:

Der Balken muß so geschnitten werden, daß Breite zu Höhe im Verhältnis $1 : \sqrt{2} \approx 1 : 1,4$ stehen (Abb. 2.19.).

Die Abbildung 2.20. zeigt das Bild der Funktion $T = p(ad^2 - a^3)$ mit $d = 1$ und $p = 0,5$, also für $T = \frac{1}{2}(a - a^3)$. An ihm erkennt man ebenfalls, daß an den Intervallgrenzen keine größeren

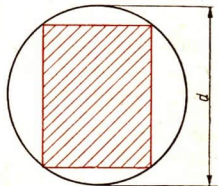


Abb. 2.19.

Funktionswerte als beim lokalen Maximum auftreten.

- Es soll ein Sportplatz, bestehend aus einem möglichst großen rechteckigen Spielfeld mit zwei an den Schmalseiten angesetzten Halbkreisen gebaut werden. Der Platz soll von einer 400-m-Laufbahn umrandet sein. Das zur Verfügung stehende Gelände gestattet aber höchstens eine Spielfeldbreite von 50 m. (Von der Breite der Laufbahn soll abgesehen werden.) Wie ist der Sportplatz anzulegen und wie groß wird das Spielfeld?

Anleitung: Entwerfen Sie eine Figur und bezeichnen Sie alle wichtigen Teile! Was muß abhängige, was unabhängige Veränderliche werden? Im Aufgabentext

finden Sie als Nebenbedingung die Länge der Umrandung. Mit Hilfe dieser Beziehung können Sie eine der zwei unabhängigen Veränderlichen eliminieren (am besten die Spielfeldlänge). Versäumen Sie nicht, den Definitionsbereich festzulegen; Sie benötigen ihn bei der Beantwortung der Frage!

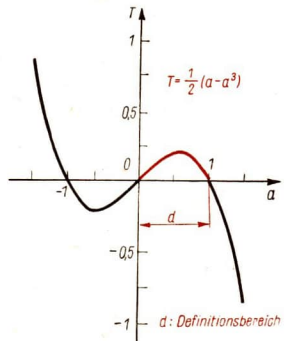


Abb. 2.20.

Bei der Lösung dieses Schülerauftrags erhält man die Funktion $A = f(b) = \frac{bu}{2} - \frac{b^2\pi}{2}$. Sie wird zunächst im Definitionsbereich auf lokale Maxima untersucht:

$$\frac{dA}{db} = \frac{u}{2} - b\pi$$

$$\frac{d^2A}{db^2} = -\pi$$

Der Extremwert ist auf jeden Fall ein Maximum.

$$\frac{u}{2} - b_1\pi = 0$$

$$b_1 = \frac{u}{2\pi}$$

Mit $u = 400$ ergibt sich $b_1 = \frac{200}{\pi} \approx 64$. Da die Funktion auf Grund der Nebenbedingung der Aufgabe nur für $0 < b \leq b_0 = 50$ definiert ist, besitzt die erste Ableitung dort keine Nullstellen. Der größte Funktionswert wird also am Rande des Definitionsbereichs vermutet:

$$A_0 = f(0) = 0$$

$$A_2 = f(b_0) = \frac{b_0 u}{2} - \frac{b_0^2 \pi}{2} = \frac{50 \cdot 400}{2} - \frac{2500\pi}{2} \approx 6050$$

Daß A_2 tatsächlich der größte Funktionswert ist, erkennt man daran, daß wegen $\frac{dA}{db} > 0$ die Funktion im Definitionsbereich monoton steigt.

Ergebnis:

Es muß die volle zur Verfügung stehende Breite $b_0 = 50$ m ausgenutzt werden, um das größtmögliche Spielfeld zu gewinnen. Seine Länge ist dann $l_2 \approx 121$ m, seine Fläche $A_2 \approx 6050$ m².

● Stellen Sie die Funktion graphisch dar, und bestätigen Sie mit Hilfe des Funktionsbildes die Lösung!

Aufgaben

- Wie groß ist der Radius desjenigen Kreissektors, der bei gegebenem Umfang u den größten Flächeninhalt hat? Wie groß ist demzufolge der Zentriwinkel?
- Aus rechteckigen Pappen (Länge a , Breite b) sollen durch Ausstanzen von Quadraten bzw. Rechtecken und Zusammenfalten Kästen von möglichst großem Inhalt **a)** ohne Deckel (Abb. 2.21.a), **b)** mit anhängendem aufliegendem Deckel (Abb. 2.21.b), **c)** mit anhängendem übergreifendem Deckel (Abb. 2.21.c) hergestellt werden. In welchem Verhältnis stehen die Volumina bei **a)** und **b)**?

Anleitung: Lösen Sie die Aufgaben mit allgemeinen Zahlensymbolen, und diskutieren Sie die Lösungen! Setzen Sie dann passende Zahlenwerte ein, und veranschaulichen Sie sich die Ergebnisse, indem Sie die Kästchen herstellen und vergleichen!

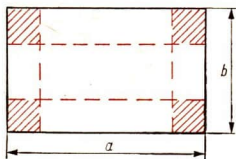


Abb. 2.21. a

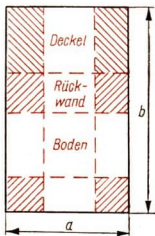


Abb. 2.21. b

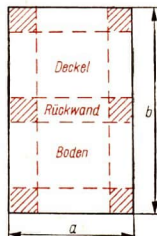


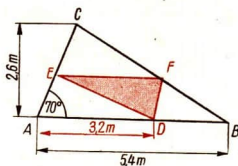
Abb. 2.21. c

- Lösen Sie die Aufgabe 2 für den Fall, daß die zur Verfügung stehenden Pappstücke quadratisch sind!
- Mit 100 m Maschendraht soll ein rechteckiges Tiergehege eingezäunt werden, und zwar **a)** freistehend, **b)** mit einer Seite an eine Mauer angelehnt, **c)** mit zwei Seiten in eine Mauer-ecke eingebaut. Welche Gestalt ergibt jeweils die größte Gehegefläche? In welchem Verhältnis stehen die Flächengrößen bei **a)**, **b)** und **c)**? Fertigen Sie vom Ergebnis maßgerechte Skizzen an!

5. In einen geraden Kreiskegel (Grundkreisdurchmesser d , Höhe h) soll der gerade Kreiszylinder mit größtmöglichem Volumen einbeschrieben werden, das heißt sein Grundkreis soll in der Ebene des Kegelgrundkreises und seine Deckkreisperipherie in der Kegelmantelfläche liegen.
6. Beweisen Sie den folgenden Satz!
Von allen rechtwinkligen Dreiecken mit konstanter Summe (s) der Kathetenlängen (a und b) hat das gleichschenklige den größten Flächeninhalt.
7. In einen geraden Kreiskegel (Grundkreisdurchmesser d ; Höhe h) soll ein zweiter von möglichst großem Rauminhalt so einbeschrieben werden, daß seine Spitze im Mittelpunkt des Grundkreises des ersten Kegels liegt.
8. Jemand steht in einer Entfernung e vom Mittelpunkt einer Kugel entfernt. Bei welcher Größe der Kugel überblickt er die größtmögliche Fläche?
9. Bei einem Arbeitsprozeß in der Industrie fallen dreieckige Blechabschnitte (Grundlinie g ; Höhe h) an. Aus ihnen sollen möglichst große rechteckige Bleche gewonnen werden.
10. Welcher Kreiszylinder hat bei gegebener Oberfläche O das größte Volumen?

11. Ein Dreieck ABC (Abb. 2.22.) soll von D auf \overline{AB} aus so in vier Teildreiecke zerlegt werden, daß \overline{EF} parallel zu \overline{AB} verläuft und das mittlere Dreieck eine möglichst große Fläche bekommt. Bestimmen Sie die Seiten und Winkel dieses Dreiecks zeichnerisch und rechnerisch!

Abb. 2.22.



12. Ein Abwässerkanal hat einen aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis bestehenden Querschnitt. Dieser soll bei feststehendem Umfang u möglichst groß werden.
13. Ein Wasserbehälter besteht aus einem auf der Spitze stehenden Kreiskegel mit aufgesetztem Kreiszylinder. Die Mantellinien vom Zylinder (2 m) und Kegel (6 m) sind vorgeschrieben. Welches Fassungsvermögen ist im Höchstfall möglich?
Anleitung: Wählen Sie die Kegelhöhe als unabhängige Veränderliche!
14. Aus einem Drahtstück von der Länge a soll das Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, der ein möglichst großes Volumen hat und außerdem folgende Bedingungen erfüllt:
 - a) eine Kante doppelt so groß wie eine andere; $a = 72$ cm,
 - b) zwei Kanten gleich lang; $a = 120$ cm.
15. Ein Draht von der Länge l wird zu einem Rechteck gebogen, welches nun um eine seiner Seiten rotiert. Unter welchen Bedingungen hat der entstehende Zylinder a) den größten Mantel, b) das größte Volumen? In welchem Verhältnis stehen Mantelinhalt, Oberflächeninhalt und Volumen von a) und b)?
Anleitung: Lösen Sie die Aufgabe zunächst mit allgemeinen Zahlensymbolen, wählen Sie dann einen geeigneten speziellen Zahlenwert für l und stellen Sie zur Veranschaulichung beide Zylinder aus Papier her!
16. In eine Kugel (Radius R) soll a) der Kreiszylinder, b) der Kreiskegel mit größtmöglichem Volumen einbeschrieben werden.
Anleitung: Wählen Sie jeweils die Höhe des einbeschriebenen Körpers als unabhängige Veränderliche!

17. Eine positive ganze Zahl n ist so in zwei positive Summanden zu zerlegen, daß a) deren Produkt, b) die Summe ihrer Quadrate, c) die Summe ihrer dritten Potenzen ein Extremum wird. Untersuchen Sie, ob in den einzelnen Fällen ein Maximum oder ein Minimum sinnvoll ist!
18. In einem Rechteck soll die längere Seite a um den gleichen Betrag verkürzt werden, um den die kürzere b verlängert wird. Das dadurch entstehende neue Rechteck soll eine möglichst große Fläche haben. Wie groß ist diese?
19. Einer geraden quadratischen Pyramide soll eine quadratische Säule von möglichst großem Volumen einbeschrieben werden.
20. Von einer rechteckigen Glasscheibe ($48 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$) ist an einer Ecke ein dreieckiges Stück so abgesprungen, daß die kürzere Seite um 8 cm und die längere Seite um 10 cm verkürzt werden. Welche größtmögliche rechteckige Glasscheibe läßt sich aus dem Rest schneiden? Wieviel Prozent beträgt der Verlust?

2.9. Untersuchung der gebrochenen rationalen Funktion

2.9.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Auf welche Weise kann man jede unecht gebrochene rationale Funktion auf eine echt gebrochene rationale und eine ganze rationale Funktion zurückführen?
2. Wie läßt sich der analytische Ausdruck einer gebrochenen rationalen Funktion vereinfachen, wenn Zählerfunktion und Nennerfunktion eine oder mehrere gleiche Nullstellen besitzen?

Beispiel:
$$y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^3 - x^2 - 6x}$$

3. Zu welcher Art von Funktionen gehören die Ableitungen gebrochener rationaler Funktionen?
4. Wie nennt man eine Funktion, deren Bild an einer oder mehreren Stellen unterbrochen ist?

2.9.2. Bestimmung charakteristischer Punkte; Pole und Polstellen

Die Formenmannigfaltigkeit der Bilder von gebrochenen rationalen Funktionen ist wesentlich größer als bei ganzen rationalen Funktionen. Die Bestimmung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, der Extrempunkte und der Wendepunkte geschieht in derselben Weise wie bei den ganzen rationalen Funktionen (vgl. Abschnitt 2.8.), für das Verhalten im Unendlichen sind jedoch besondere Überlegungen erforderlich.

- Ermitteln Sie vom Bild der Funktion $y = \frac{x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1}$ die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die Extrempunkte und die Wendepunkte! Ermitteln Sie in wichtigen Punkten auch die Tangentenrichtungen! Zeichnen Sie anschließend das Funktionsbild!

Anleitung: Bedenken Sie, daß eine Nullstelle der Zählerfunktion nur dann Nullstelle der gebrochenen rationalen Funktion ist, wenn sie nicht zugleich Nullstelle

der Nennerfunktion ist, weil die Funktion dort nicht definiert ist! Das ist bei der Bestimmung der Schnittpunkte mit der x -Achse, der Extrempunkte und der Wendepunkte zu beachten.

Bei gewissen gebrochenen rationalen Funktionen kommt es vor, daß bei Annäherung von x an gewisse endliche Stellen x_p sich $\lim_{x \rightarrow x_p} |f(x)| = \infty$ ergibt, zum Beispiel $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$. Man sagt, daß die Funktion an der Stelle x_p einen **Pol** hat. Die Stelle x_p heißt **Polstelle**.

Aus dem analytischen Ausdruck einer gebrochenen rationalen Funktion ergibt sich die Polstelle als Nullstelle der Nennerfunktion wegen $\lim_{N \rightarrow 0} \left| \frac{Z}{N} \right| = \infty$, sofern diese nicht zugleich Nullstelle der Zählerfunktion ist.

Das Funktionsbild nähert sich dort **asymptotisch** einer Geraden, die parallel zur y -Achse verläuft. Dabei ist zunächst zu unterscheiden, von welcher Seite her die Annäherung an diese Asymptote erfolgt:

- a) Annäherung „von links“, das heißt von x -Werten her, die kleiner als die Polstelle sind. Symbol: $\lim_{x \rightarrow x_p - 0} y$; (Fachausdruck: linksseitiger Grenzwert)
- b) Annäherung „von rechts“, das heißt von x -Werten her, die größer als die Polstelle sind. Symbol: $\lim_{x \rightarrow x_p + 0} y$; (Fachausdruck: rechtsseitiger Grenzwert)

Die Annäherung von y kann schließlich dabei gegen $+\infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_p} y = +\infty$) wie in Abbildung 2.23. oder auch gegen $-\infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_p} y = -\infty$) erfolgen.

Danach ergeben sich folgende vier Möglichkeiten (Abb. 2.24. a bis d).

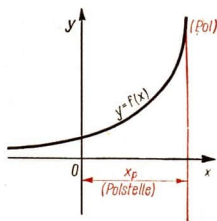


Abb. 2.23.

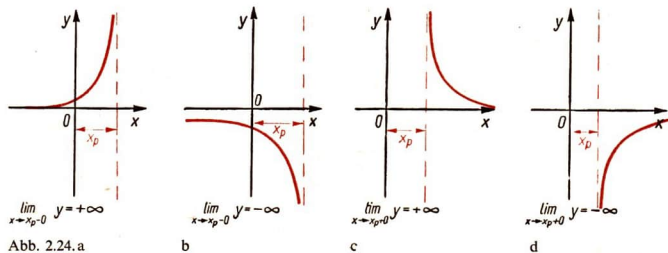


Abb. 2.24. a

b

c

d

Welcher der in Abbildung 2.24.a bis d dargestellten Fälle vorliegt, kann dadurch bestimmt werden, daß man nach Ermittlung der Polstelle x_p die Vorzeichen der Funktionswerte $f(x_p + \varepsilon)$ und $f(x_p - \varepsilon)$ für hinreichend kleine Werte von $\varepsilon > 0$ bestimmt.

Beispiel

$$y = f(x) = \frac{x}{x-1} \quad (\text{Abb. 2.25.})$$

Ermittlung der Polstelle:

$$x_p - 1 = 0$$

$$x_p = 1$$

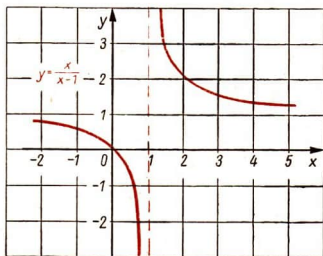


Abb. 2.25.

Untersuchung des Pols:

$$f(1 - \varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon}{-\varepsilon} < 0 \quad \text{für } 0 < \varepsilon < 1; \quad \text{also } \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$$

$$f(1 + \varepsilon) = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} > 0 \quad \text{für } \varepsilon > 0; \quad \text{also } \lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty$$

Untersuchen Sie genauso die Pole der Funktionen

a) $y = f(x) = \frac{2-x}{x^2-6x+9}$ und

b) $y = f(x) = \frac{x+3}{2x^2-x^3}$, und entwerfen Sie Zeichnungen, die der Abbildung 2.25. entsprechen!

Hinweis für b): Soll der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert an der Stelle $x_p = 0$ bestimmt werden, so schreibt man statt $\lim_{x \rightarrow 0+0} y$ bzw. $\lim_{x \rightarrow 0-0} y$ vereinfacht: $\lim_{x \rightarrow +0} y$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -0} y$.

Die Untersuchungen ergeben:

Eine gebrochene rationale Funktion ist an den Polstellen unstetig. Das Bild ist an diesen Stellen „unterbrochen“.

Aufgaben

- Wie viele Schnittpunkte a) mit der y-Achse, b) mit der x-Achse hat das Bild einer gebrochenen rationalen Funktion im Höchstfalle, wie viele hat es mindestens? Gibt es auch Bilder ohne solche Schnittpunkte?
Anleitung: Beachten Sie zur letzten Frage, ob die ganze rationale Zählerfunktion von geradem oder ungeradem Grad ist!

2. Wieviele Pole hat eine gebrochene rationale Funktion im Höchstdfall, wieviele hat sie mindestens? Gibt es auch gebrochene rationale Funktionen ohne (reelle) Pole?
Anleitung: Beachten Sie, ob die ganze rationale Nennerfunktion von geradem oder ungeradem Grade ist!

2.9.3. Verhalten im Unendlichen

Zur Untersuchung des Verhaltens der **echt gebrochenen rationalen Funktion** im Unendlichen soll von dem analytischen Ausdruck

$$y = f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{k=1}^n b_k x^k} \left(\begin{array}{l} a_i, b_i \text{ reell; } a_m \neq 0 \\ \phantom{a_i, b_i \text{ reell; }} b_n \neq 0 \\ \left. \begin{array}{l} m \geq 0 \\ n \geq 1 \end{array} \right\} \text{ ganzzahlig; } m < n \end{array} \right)$$

ausgegangen werden.

Um $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ zu bestimmen, wird jedes Glied der Zähler- und Nennerfunktion durch die höchste Potenz von x , also durch x^n , dividiert:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{a_m}{x^{n-m}} + \frac{a_{m-1}}{x^{n-m+1}} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \frac{b_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{b_2}{x^{n-2}} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}} \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^p} = 0$ ($p > 0$) werden alle Glieder im Zähler und Nenner dieses Ausdrucks Null mit Ausnahme des Gliedes b_n . Daraus folgt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{0}{b_n} = 0$.

Das heißt aber, daß sich das Bild jeder echt gebrochenen rationalen Funktion für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ unbegrenzt der x -Achse nähert. Die x -Achse ist **Asymptote**.

Diese Annäherung kann dabei von oben her (wie in Abb. 2.26.) oder auch von unten her erfolgen; sie kann für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ von derselben Seite (wie in Abb. 2.26.) oder von verschiedenen Seiten her stattfinden. Untersuchungen darüber werden im Einzelfall so durchgeführt, daß man die Vorzeichen von zwei Funktionswerten für hinreichend große und hinreichend kleine Argumente ermittelt.

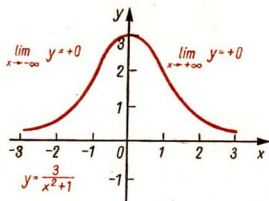


Abb. 2.26.

Beispiel 1

$$y = f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

(Abb. 2.27.)

$$f(x) > 0 \text{ für } x > 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = +0$$

$$f(x) < 0 \text{ für } x < 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -0$$

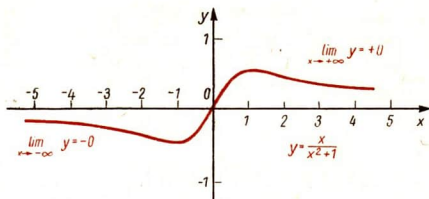


Abb. 2.27.

Beispiel 2

$$y = f(x) = \frac{5}{1-x} \quad (\text{Abb. 2.28.})$$

$$f(x) < 0 \text{ für } x > 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = -0$$

$$f(x) > 0 \text{ für } x < 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +0$$

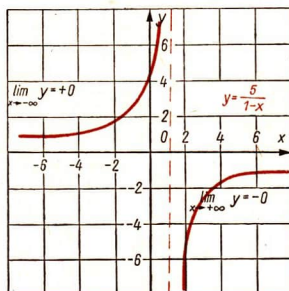


Abb. 2.28.

Das Verhalten einer **unecht gebrochenen rationalen Funktion** $f(x)$ im Unendlichen kann untersucht werden, indem man sie in eine Summe aus einer ganzen rationalen Funktion $g(x)$ und einer echt gebrochenen rationalen Funktion $r(x)$ zerlegt.

Nehmen Sie entsprechende Untersuchungen vor, und überprüfen Sie das folgende Ergebnis!

Das Bild einer unecht gebrochenen rationalen Funktion $f(x)$ und das Bild der bei der Zerlegung abspaltbaren ganzen rationalen Funktion $g(x)$ nähern sich für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ unbegrenzt einander, d. h. die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$ strebt für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ gegen Null. Das Bild von $y = g(x)$ nennt man eine **Asymptotenkurve** des Bildes von $y = f(x)$.

Ermitteln Sie Asymptotenkurven für die Bilder folgender Funktionen!

$$a) y = f(x) = \frac{2x - 3}{x + 2} \quad b) y = f(x) = \frac{x^2 - 24}{x - 5}$$

$$c) y = f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 10x + 5}{5x + 5}$$

● *Untersuchen Sie, von welcher Seite her sich das Bild der Funktion $y = f(x)$ der Asymptotenkurve für $x \rightarrow +\infty$ bzw. für $x \rightarrow -\infty$ nähert! Zeichnen Sie anschließend Funktionsbild und Asymptotenkurve!*

Ergebnis: Alle gebrochenen rationalen Funktionen besitzen Asymptotenkurven, die evtl. Geraden sein können und denen sie sich für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ unbegrenzt nähern.

Zusammenfassung:

Die gebrochenen rationalen Funktionen werden ähnlich wie die ganzen rationalen folgendermaßen untersucht:

Gegebene Funktion:

$$y = f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{k=0}^n b_k x^k} \quad (a_i; b_i \text{ reell; } b_n \neq 0)$$

1) **Schnittpunkt mit der y -Achse**

$x = 0$; $N(x) \neq 0$ (notwendige und hinreichende Bedingung)

2) **Schnittpunkte mit der x -Achse**

$Z(x) = 0$; $N(x) \neq 0$ (hinreichende Bedingung)

3) **Lokale innere Extrempunkte**

$y' = 0$ (notwendige Bedingung)

Minimumpunkte

$y' = 0$; $y'' > 0$ (hinreichende Bedingung)

Maximumpunkte

$y' = 0$; $y'' < 0$ (hinreichende Bedingung)

4) **Wendepunkte**

$y'' = 0$ (notwendige Bedingung)

5) **Pole**

$N(x) = 0$; $Z(x) \neq 0$ (hinreichende Bedingung)

6) **Verhalten im Unendlichen**

$y = f(x) = g(x) + r(x)$ verhält sich für

(Asymptotenkurven)

$x \rightarrow \pm\infty$ genau wie $y = g(x)$

7) Darüber hinaus können, soweit erforderlich, Einzelpunkte durch ihre Koordinaten festgelegt oder durch y' die Richtungen der Tangenten in einzelnen Punkten bestimmt werden.

Aufgaben

1. Unter welcher Bedingung ist bei dem Bild einer unecht gebrochenen rationalen Funktion a) eine Parallele zur x -Achse, b) eine zur x -Achse geneigte Gerade, c) eine Parabel, d) eine Kurve höheren Grades Asymptotenkurve?
Anleitung: Beachten Sie den Grad der Zähler- und der Nennerfunktion!
2. Untersuchen Sie folgende Funktionen durch Zeichnung und Diskussion ihrer Bilder!

$$\text{a) } y = \frac{x^2 + 5x + 22}{x - 2}$$

$$\text{b) } y = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$\text{c) } y = \frac{3}{4 - x^2}$$

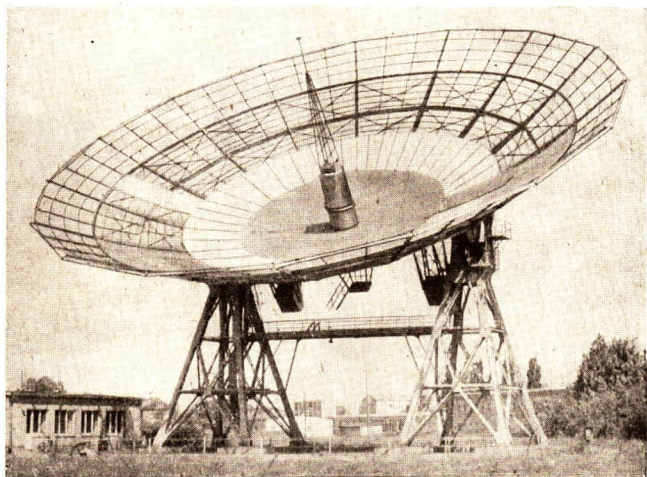
$$\text{d) } y = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$$

$$\text{e) } y = \frac{x^2 + 2}{3 + x^2}$$

$$\text{f) } y = \frac{x}{1 - x^2}$$

3. Untersuchen Sie die durch $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$ (Linsengleichung) definierte Funktion $y = F(x)$! Um was für eine Funktion handelt es sich? Zeichnen Sie die Schar der Bilder für verschiedene positive und negative Brennweiten f !
4. Untersuchen Sie die Funktionen $y = \frac{x^n}{x^2 + 1}$ und $y = \frac{x^n}{x^2 - 1}$! Zeichnen Sie die Bilder für $n = 0, 1, 2, 3, 4$!
5. Ein Abwässerkanal soll einen Querschnitt von 1 m^2 in Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Welche Höhe und Breite muß man ihm geben, wenn die Herstellungskosten möglichst gering sein sollen? Dabei ist zu beachten, daß das Baugelände nur eine Höhe von 90 cm zuläßt.
6. Welche Maße muß man für allseitig geschlossene zylinderförmige Blechdosen von a) 1 l , b) $\frac{1}{2}\text{ l}$, c) $\frac{1}{4}\text{ l}$ Inhalt wählen, wenn der Blechverbrauch möglichst gering sein soll? Ändert sich das Ergebnis, wenn die Dosen oben offen sind?
7. Eine Transportseilbahn soll 25 muldenförmige Lore, die die Gestalt eines länglichen halben Kreiszyinders haben, erhalten. Diese sollen insgesamt 1 m^3 Fassungsvermögen haben. Wie sind sie zu bauen, wenn die Belastung des Trageils möglichst klein werden soll?
8. Eine Streichholzschnitzel muß 50 mm lang sein und soll 25 cm^3 Inhalt haben. Der äußere Teil wird längs einer Schmalseite zusammengeklebt, so daß diese doppelt zu rechnen ist. Welche Maße muß sie bei möglichst geringem Materialverbrauch haben?
9. Ein Wandschrank mit einem Zwischenboden soll insgesamt $0,2\text{ m}^3$ Volumen haben und jedes der durch den Zwischenboden entstehenden Fächer eine Höhe von 25 cm haben. Welche Maße muß er enthalten, wenn er möglichst leicht werden soll und außer der Tür a) eine Rückwand, b) keine Rückwand erhalten soll? (Von der Stärke der Bretter werde abgesehen!) Wie ändern sich die Maße bei 2 Zwischenböden, wenn bei gleichem Gesamtvolumen jedes der jetzt drei Fächer wiederum 25 cm hoch sein soll?
10. Von 24 Elementen mit je 2 V Urspannung und $0,25\ \Omega$ innerem Widerstand sollen bei einem Außenwiderstand von $1,5\ \Omega$ Gruppen parallel geschalteter Elemente so hintereinandergeschaltet werden, daß die Stromstärke ein Maximum wird.
11. Eine Sammellinse mit der Brennweite f erzeugt von einem Gegenstand ein reelles Bild. Bei welcher Gegenstandsweite ist die Entfernung Gegenstand — Bild am kleinsten?
12. Beweisen Sie den folgenden Satz!
Unter allen Rechtecken vom Flächeninhalt A hat das Quadrat den kleinsten Umfang.
13. Einem geraden Kreiszyylinder (Durchmesser d ; Höhe h) soll der Kegel mit kleinstem Volumen umschrieben werden.
14. Unter allen Kugelabschnitten von gegebenem Volumen V soll derjenige bestimmt werden, zu dem die kleinste Kugelkappe gehört. Wie groß muß der Kugelradius gewählt werden?

15. Eine positive Zahl soll so in zwei positive Summanden zerlegt werden, daß die Summe der beiden Quotienten, die man durch Division des einen Summanden durch den anderen erhält, ein Minimum wird.
16. Der Boden eines oben offenen zylindrischen Gefäßes ist eine nach innen gewölbte Halbkugel. Bei welchen Maßen wird das Volumen bei gegebener Oberfläche A_0 ein Minimum?
17. Eine gewisse Menge Wasser hat bei $t_0 = 0^\circ\text{C}$ das Volumen V_0 . Bei der Temperatur t ($0^\circ\text{C} \leq t \leq 25^\circ\text{C}$) hat sie dann das Volumen $V_t = V_0 (1 - 0,0001608 t + 0,0000207 t^2 - 0,0000001 t^3)$. Bestimmen Sie daraus die Temperatur, bei der Wasser die größte Dichte hat!
18. Ein Element von $1,8\text{ V}$ Ursprung und $0,2\ \Omega$ innerem Widerstand erhitzt eine Heizspirale aus einem Widerstandsdraht von der Länge 8 m und dem spezifischen Widerstand $0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$. Welchen Querschnitt muß der Heizdraht haben, um einen möglichst großen Heizeffekt zu ergeben?
19. Einer Halbkugel soll der Kegel mit kleinstem Volumen umschrieben werden. Anleitung: Wählen Sie die Kegelhöhe als unabhängige Veränderliche!
20. Welcher von allen geraden Kreiszyllindern mit gleichem Volumen V hat die kleinste Oberfläche?



3. Einführung in die Integralrechnung

Im Heinrich-Hertz-Institut in Berlin-Adlershof steht das größte Radioteleskop Deutschlands. Dieses Instrument gehört zu den wichtigsten Geräten der Radioastronomie. Die Radioastronomie, ein Teilgebiet der Astronomie, befaßt sich mit den aus dem Weltall kommenden Strahlen im Frequenzbereich der Radiowellen. Das Radioteleskop selbst ist die Antenne des Empfangsgerätes. Sie besteht aus einem parabolisch geformten Reflektor und einem Dipol im Brennpunkt des Reflektors, der die Strahlung aufnimmt. Der Reflektor soll einen gerichteten Empfang ermöglichen, das heißt, aus der von allen Richtungen einfallenden Strahlung wird nur die aus einer bestimmten Richtung einfallende Strahlung untersucht. Je größer das Teleskop ist, desto besser können auch schwache und weit entfernte Strahlungsquellen beobachtet werden. Die Öffnungsfläche des Reflektors ist hierfür von Bedeutung. Die Berliner Parabolantenne hat einen Durchmesser von 36 m. Sie ist im inneren Teil mit Blech, in den äußeren Bereichen wegen des starken Winddrucks mit einem Drahtnetz belegt. Es ist möglich, den Inhalt dieser Fläche, die man sich durch Rotation eines Parabelbogens entstanden denken kann, mit Hilfe der Integralrechnung zu bestimmen.

3.1. Das unbestimmte Integral

3.1.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Geben Sie eine Funktion $y = f(x)$ an, deren 1. Ableitung $y' = 3x^2 + 1$ ist! Gibt es mehrere solcher Funktionen?
2. Differenzieren Sie die beiden Funktionen $y = f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}$ und $y = f_2(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$! vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander!
Geben Sie weitere Funktionen an, deren 1. Ableitung $y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ ist!

3.1.2. Die Umkehrung des Differentiationsprozesses

Hat man zwei Funktionen $y = F_1(x)$ und $y = F_2(x)$, die dieselbe 1. Ableitung $y' = F_1'(x) = F_2'(x)$ haben, so hat die Differenzfunktion

$$(1) \quad y = D(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

die Ableitung

$$(2) \quad y' = D'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) \equiv 0.$$

Offenbar hat jede konstante Funktion $D(x) \equiv C$ die Ableitung 0. Aber es gilt auch umgekehrt, wie ohne Beweis mitgeteilt wird, daß jede Funktion, deren 1. Ableitung identisch verschwindet, konstant ist. Geometrisch bedeutet dieser Sachverhalt, daß jede Kurve, die überall eine horizontale Tangente besitzt, notwendig in jedem ihrer Punkte eine Parallele zur x -Achse ist.

Aus dieser Tatsache folgt, daß zwei Funktionen, die dieselbe 1. Ableitung besitzen, sich nur um eine additive Konstante unterscheiden können, denn aus (1) folgt wegen $D(x) \equiv C$:

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Jetzt wird die Aufgabe gestellt, sämtliche Funktionen $y = F(x)$ zu finden, deren 1. Ableitung gleich der vorgegebenen Funktion $y = f(x)$ ist. Jede derartige Funktion heißt eine **Stammfunktion** der Funktion $y = f(x)$.

Offenbar ist mit $y = F_1(x)$ auch die Funktion $y = F_1(x) + C$ eine Stammfunktion, und nach den obigen Ausführungen kann man jede Stammfunktion $y = F(x)$ von $y = f(x)$ aus irgend einer solchen Stammfunktion $y = F_1(x)$ durch Hinzufügung einer geeigneten Konstanten erhalten.

● *Überzeugen Sie sich, daß diese Feststellung auch für die Aufgabe 2 im Abschnitt 3.1.1. gilt!*

Die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu einer vorgegebenen Funktion $y = f(x)$ nennt man auch das **unbestimmte Integral** der Funktion $y = f(x)$ und schreibt dafür $\int f(x) dx$.

► Unter dem unbestimmten Integral $\int f(x)dx$ versteht man die Gesamtheit aller Funktionen $y = F(x)$, deren 1. Ableitung $F'(x)$ gleich der vorgegebenen Funktion $f(x)$ ist, für die also $F'(x) = f(x)$ gilt.

Differenzieren und (unbestimmt) Integrieren sind zueinander Umkehroperationen in ähnlicher Weise wie Addieren und Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren.

3.1.3. Einfache Integrationsregeln

Auf Grund der Definition des unbestimmten Integrals läßt sich jede gelöste Differentiationsaufgabe auch unter Verwendung des Integralsymbols schreiben.

■ Beispiel 1

$$\frac{d}{dx}(x^5 - 5x^2 + 3x) = 5x^4 - 10x + 3 \quad \left| \int (5x^4 - 10x + 3) dx \right.$$

$$= x^5 - 5x^2 + 3x + C$$

■ Beispiel 2

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad \left| \int \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{x} + C \right.$$

Das gilt auch für die grundlegenden Differentiationsformeln. Die zugehörigen Integrale heißen **Grundintegrale**, zum Beispiel:

$$(1a) \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n \quad \left| \quad (1b) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right.$$

Die Gültigkeit der Beziehung $\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ wurde für alle ganzzahligen Exponenten bewiesen. Das trifft deshalb auch für (1b) zu mit Ausnahme von $n = -1$, da sich in diesem Falle 0 als Nenner ergeben würde. Die Division durch Null ist aber nicht erklärt.

1. Grundintegral:

$$(1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{mit } n \text{ ganzzahlig und } n \neq -1$$

Auch jede Differentiationsregel läßt sich als Integrationsregel schreiben, zum Beispiel:

$$\frac{d}{dx}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx} \quad \left| \quad (2) \int [f_1(x) + f_2(x)] dx \right.$$

$$= \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

(Summenregel)

$$\frac{d}{dx}[a \cdot f(x)] = a \cdot \frac{df(x)}{dx} \quad \left| \quad (3) \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx \right.$$

(konstanter Faktor beim Integrieren)

3.1.4. Integration der ganzen rationalen Funktion

Mit Hilfe der Beziehungen (1), (2) und (3) ist jede ganze rationale Funktion integrierbar.

Gegebene Funktion: $y = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit a_k reell und $n \geq 0$, ganzzahlig

Integral:

$$\begin{aligned}\int_{k=0}^n a_k x^k dx &= \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) dx \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C \\ &= A_{n+1} x^{n+1} + A_n x^n + \dots + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \\ \int_{k=0}^n a_k x^k dx &= \sum_{k=0}^{n+1} A_k x^k \text{ mit } A_k \text{ reell und } n \geq 0, \text{ ganzzahlig}\end{aligned}$$

Ergebnis

Das Integral jeder ganzen rationalen Funktion ist wieder eine ganze rationale Funktion. Ihr Grad ist um 1 größer als der Grad des Integranden, falls dieser nicht identisch Null ist.

Aufgaben

- Die Ableitung einer Konstanten ist Null. Wie lautet das unbestimmte Integral eines konstanten Integranden ($\int c dx$)?
- Was ergibt sich in Aufgabe 1 für $c = 1$? Formulieren Sie das Ergebnis in einem Satz!
- Integrieren Sie!

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \int 2 dx & \text{b)} \int (-3) dx & \text{c)} \int (-x) dx & \text{d)} \int 4x dx & \text{e)} \int (-3x) dx \\ \text{f)} \int (1+2x) dx & \text{g)} \int (x-4) dx & \text{h)} \int (2x-3) dx & \text{i)} \int -(4x-1) dx & \text{k)} \int 2x^2 dx \\ \text{l)} \int (-4x^3) dx & \text{m)} \int 8x^7 dx & \text{n)} \int x^p dx & \text{o)} \int x^{m+1} dx & \text{p)} \int x^{n-1} dx \end{array}$$

- Lösen Sie folgende Integrale, deren Integranden ganze rationale Funktionen sind!

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \int x^{12} dx & \text{b)} \int \frac{3}{4} x^2 dx & \text{c)} \int \frac{x}{10} dx & \text{d)} \int 3 dx & \text{e)} \int \pi dx \\ \text{f)} \int x^{n-1} dx & \text{g)} \int \frac{ax^3}{b} dx & \text{h)} \int \sqrt{a} dx & \text{i)} \int \frac{dx}{2\pi^2} & \text{k)} \int gt dt \\ \text{l)} \int (x^3 - 1) dx & \text{m)} \int (x^2 + ax + b) dx & \text{n)} \int \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right) dx \\ \text{o)} \int (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3) dx & \text{p)} \int (\sqrt{a} - x + \sqrt{b}) dx & \text{q)} \int (x+1)^2 dx \\ \text{r)} \int (1 - 2x - 3x^2)^2 dx & \text{s)} \int (x^2 + x + 1)(x-1) dx & \text{t)} \int (x^2 - 1)(x^2 + 1) dx \end{array}$$

5. Lösen Sie folgende Integrale, deren Integranden einfache echt gebrochene rationale Funktionen sind oder als Summanden enthalten!

a) $\int \frac{dx}{x^3}$ b) $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ c) $\int ax^{-5} dx$ d) $\int \frac{12dx}{5x^5}$ e) $\int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ g) $\int -\left(\frac{7}{x^8} + \frac{5}{x^6} + \frac{3}{x^4}\right) dx$ h) $\int \left(\frac{a}{x^2} + bx + c\right) dx$

i) $\int \frac{dx}{x^2}$ k) $\int \frac{dx}{x^3}$ l) $\int \frac{dx}{x^4}$ m) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ n) $\int \left(x^3 - 1 - \frac{1}{x^3}\right) dx$

o) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ p) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^3 dx$ q) $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^5} dx$ r) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2} dx$

s) $\int \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2} dx$ t) $\int (x^2 + 1) \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx$ u) $\int \frac{a}{x^4} (bx^2 + cx + d) dx$

Anleitung: Bei o) bis u) ist erst durch Auspotenzieren, Ausmultiplizieren bzw. Ausdividieren der Integrand in eine Summe einzelner Potenzfunktionen zu verwandeln.

6. Lösen Sie möglichst geschickt!

a) $\int (a + bx) dx - \int (a - bx) dx$ b) $\int \left(1 - \frac{1}{x} + x^2 - \frac{1}{x^3}\right) dx + \int \left(1 + \frac{1}{x} - x^2 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

7. Die folgenden Funktionen sind zu differenzieren und zu integrieren.

a) $y = x^2 + x - 1$ b) $y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 10$ c) $y = (x^2 + ax + b)(x - c)$

d) $y = \frac{3x^4 + 8x^6 - 9x^8}{6x^{10}}$ e) $y = (2x + 3)^4$ f) $y = (x^2 - 5)(x^2 + 10)$

8. Ermitteln Sie die Funktionen $y = f(x)$, deren erste Ableitungen $y' = f'(x)$ wie folgt gegeben sind!

a) $y' = x^3 - 5$ b) $y' = 5x^4 - \frac{2}{x^3}$ c) $y' = x^3 - x^2 + x - 1$

d) $y' = (x - 2)(x - 3)$ e) $y' = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right)^2$ f) $y' = (2x - 3)(3x - 2)(x + 1)$

9. Der Weg ist das Zeitintegral der Geschwindigkeit ($s = \int v \cdot dt$), wobei die Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit ist. Bestimmen Sie auf diese Weise das Weg-Zeit-Gesetz folgender Bewegungen!

a) Gleichförmige Bewegung: $v = c$ b) Freier Fall: $v = gt$
 c) Lotrechter Wurf nach unten: $v = c + gt$ d) Lotrechter Wurf nach oben: $v = c - gt$
 (Wie hoch liegt im Fall d) der Gipfelpunkt des Wurfes über dem Abwurfpunkt?)

10. Die Geschwindigkeit ist das Zeitintegral der Beschleunigung ($v = \int b dt$), wobei die Beschleunigung eine Funktion der Zeit ist. Bestimmen Sie auf diese Weise die Beziehungen zwischen Geschwindigkeit und Zeit sowie zwischen Weg und Zeit für folgende Bewegungen!

a) Gleichmäßig beschleunigte Bewegung: $b = c$
 b) Gleichmäßig verzögerte Bewegung: $b = -c$
 c) Einfachste ungleichmäßig beschleunigte Bewegung: $b = f \cdot t$
 (f sei dabei eine Konstante, zum Beispiel $0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3}$)

3.2. Das bestimmte Integral

3.2.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Wie kann der Flächeninhalt einer Kreisscheibe mit Hilfe einbeschriebener Vielecke näherungsweise mit beliebiger Genauigkeit ermittelt werden?
2. Kann man bei der Aufgabe in 1 zur näherungsweisen Berechnung des Flächeninhaltes einer Kreisscheibe auch umbeschriebene Vielecke verwenden?

3.2.2. Das bestimmte Integral als Grenzwert von Summen von Produkten

Neben dem unbestimmten Integral, das durch Umkehrung des Differentiationsprozesses gewonnen wird, gibt es noch einen zweiten, auf ganz andere Weise erklärten Integralbegriff, das **bestimmte Integral**.

Es sei $y = f(x)$ eine im Intervall $a \leq x \leq b$ monoton steigende Funktion, die ausschließlich nicht negative Werte annimmt. Das Bild dieser Funktion enthält also keinen Punkt unterhalb der x -Achse.

Im folgenden wird nun das Problem behandelt, den Inhalt des in Abbildung 3.1. rot

gerasterten Flächenstückes zu berechnen. Dazu wird das Intervall $a \leq x \leq b$ durch die Punkte mit den Abszissen

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

in n (nicht notwendig einander gleiche) Teilintervalle zerlegt. Diese Zerlegung wird mit δ_n bezeichnet. Die Länge des i -ten Teilintervalls von δ_n ist $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ mit $i = 1, 2, \dots, n$.

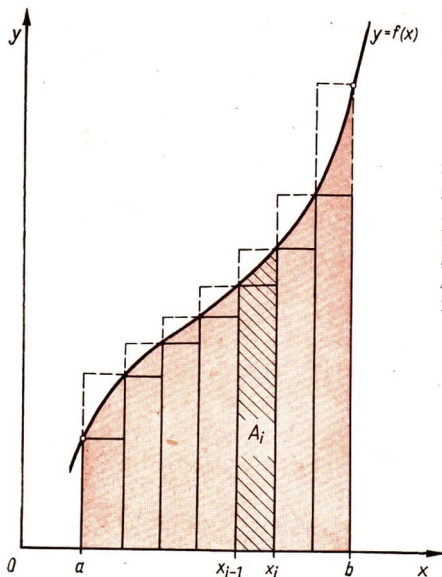


Abb. 3.1.

Die größte dieser Längen Δx_i wird mit δ_n bezeichnet. Die Zahl δ_n wird als Maß für die „Feinheit“ der Zerlegung gewählt. Das ist folgendermaßen zu verstehen: Die Zerlegung δ_{n_1} heißt feiner als die Zerlegung δ_{n_2} , wenn δ_{n_1} kleiner als δ_{n_2} ist. Unter einer Folge beliebig fein werdender Zerlegungen $\{\delta_n\}$ versteht man eine Folge von Zerlegungen $\{\delta_n\}$, bei denen die zugehörigen δ_n eine Nullfolge bilden.

Um den obengenannten Flächeninhalt zu berechnen, werden in der Abbildung 3.1. dem Flächenstück eine Anzahl Rechtecke einbeschrieben und umbeschrieben. Für den Flächeninhalt A_i des in der Figur krummlinig begrenzten Flächenstückes gilt die Ungleichung:

$$f(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i \leq A_i \leq f(x_i) \cdot \Delta x_i.$$

Daher gilt für den Inhalt $A = \sum_{i=1}^n A_i$ des rotgerasterten Flächenstückes die Ungleichung:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i.$$

Die links stehende Summe wird auch als **Untersumme** \underline{I}_n , die rechts stehende Summe als **Obersumme** \overline{I}_n bezeichnet, so daß (3) in die Form

$$(4) \quad \underline{I}_n \leq A \leq \overline{I}_n$$

übergeht.

Für die Differenz aus der Ober- und Untersumme gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\overline{I}_n - \underline{I}_n| &= \overline{I}_n - \underline{I}_n = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \delta_n \\ &= \delta_n \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \delta_n [f(x_n) - f(x_0)] \end{aligned}$$

$$(5) \quad |\overline{I}_n - \underline{I}_n| \leq \delta_n [f(b) - f(a)].$$

Hieraus erkennt man, daß für jede beliebig fein werdende Zerlegungsfolge der letzte Ausdruck in Formel (5) eine Nullfolge bildet. Aus (4) folgen in Verbindung mit (5) die beiden Ungleichungen

$$|A - \underline{I}_n| = A - \underline{I}_n \leq \overline{I}_n - \underline{I}_n \leq \delta_n [f(b) - f(a)]$$

und

$$|\overline{I}_n - A| = \overline{I}_n - A \leq \overline{I}_n - \underline{I}_n \leq \delta_n [f(b) - f(a)],$$

so daß also bei jeder Folge beliebig fein werdender Zerlegungen sowohl die Untersummen als auch die Obersummen dem gemeinsamen Grenzwert A zustreben. Dieser Grenzwert der \overline{I}_n und \underline{I}_n wird das **bestimmte Integral** der Funktion $y = f(x)$ in den Grenzen a bis b genannt und mit

$$\int_a^b f(x) dx \text{ (gesprochen: Integral von } a \text{ bis } b \text{ über } f(x) dx)$$

bezeichnet.¹

Man nennt dabei a und b die **Integrationsgrenzen**, das Intervall $a \leq x \leq b$ das **Integrationsintervall**, $f(x)$ den **Integranden** und x die **Integrationsveränderliche**.

Während das unbestimmte Integral eine Schar von Funktionen darstellt, ist das bestimmte Integral eine Zahl, in der die Integrationsveränderliche natürlich nicht mehr auftritt. Daher ist es gleichgültig, mit welchem Buchstaben die Integrationsveränderliche bezeichnet wird. Es ist also zum Beispiel:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

Beispiel 1

Es soll das Integral $\int_0^3 x dx$ berechnet werden.

Zur Berechnung dieses Integrals kann man sich auf die Unterteilung in gleiche Teile beschränken. Bevor zu einer Unterteilung in n gleiche Teile übergegangen wird, werden die Berechnungen für Unterteilungen in drei bzw. sechs gleiche Teile ausgeführt (Abb. 3.2.).

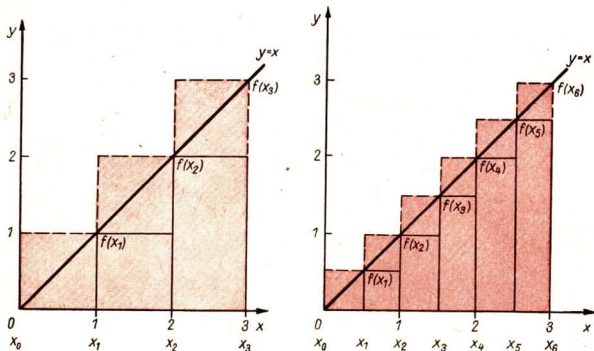


Abb. 3.2.

¹ Bei dieser Erklärung des bestimmten Integrals wird die Erklärung und das Vorhandensein des Flächeninhaltes A eines krummlinig begrenzten Flächenstückes als bekannt vorausgesetzt. Bei einem strengen Aufbau der Integralrechnung hat man jedoch umgekehrt zu verfahren und den Flächeninhalt A durch das betreffende Integral zu erklären. Dann muß man auf anderem Wege zeigen, daß die Ober- und Untersummen bei jeder Folge $\{\delta_n\}$ beliebig fein werdender Zerlegungen einem und demselben Grenzwert zustreben. Dieser Beweis ist jedoch etwas umfangreich und muß daher hier unterbleiben.

1. Unterteilung: $n = 3$; $x_i = \frac{3i}{n} = i$; $\Delta x = \frac{3}{3} = 1$

$$\begin{aligned}\underline{I}_3 &= \sum_{i=1}^3 f(x_{i-1}) \cdot \Delta x = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_3 &= \sum_{i=1}^3 f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6\end{aligned}$$

$3 < A < 6$

2. Unterteilung: $n = 6$; $x_i = \frac{3i}{n} = \frac{1}{2}i$; $\Delta x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\underline{I}_6 &= \sum_{i=1}^6 f(x_{i-1}) \cdot \Delta x = [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)] \cdot \Delta x \\ &= \left(0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{4} = 3,75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_6 &= \sum_{i=1}^6 f(x_i) \cdot \Delta x = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)] \cdot \Delta x \\ &= \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{4} = 5,25\end{aligned}$$

$3,75 < A < 5,25$

n -te Unterteilung: $x_i = \frac{3i}{n}$; $\Delta x = \frac{3}{n} = \delta_n$

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{3(i-1)}{n} \cdot \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{9}{n^2} (i-1) = \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)$$

Das n -te Glied der Summenfolge $\sum_{i=1}^n (i-1)$ erhält man mit Hilfe der Formel

$s_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d]$. Es ergibt sich im vorliegenden Fall:

$$\sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{n}{2} (n-1).$$

Nach dem Einsetzen der Summe in den Ausdruck für die Untersumme erhält man schließlich bei unbegrenzt wachsendem n :

$$\underline{I}_n = \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \rightarrow \frac{9}{2}$$

$$\bar{I}_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{3i}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n}{2} (2+n-1)$$

$$\bar{I}_n = \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{9}{2}$$

Ergebnis:
$$\int_0^3 x \, dx = \frac{9}{2}$$

Beispiel 2

Es ist das Integral $\int_a^b c \, dx$ mit konstantem c zu berechnen. In diesem Fall ist jede Untersumme \underline{I}_n gleich der entsprechenden Obersumme \bar{I}_n :

$$\underline{I}_n = \bar{I}_n = \sum_{i=1}^n c \cdot \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a) = A.$$

Beispiel 3

Es soll nunmehr das Integral

$$\int_a^b x \, dx \quad \text{mit} \quad 0 \leq a < b$$

berechnet werden. Dieses Beispiel hat mit dem Beispiel 1 den Integranden $y = f(x) = x$ gemeinsam. Bei beliebiger Zerlegung gilt:

$$\underline{I}_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_{i-1} \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

$$\bar{I}_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Durch Addition erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} \underline{I}_n + \bar{I}_n &= \sum_{i=1}^n [x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + x_i(x_i - x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) \\ &= (x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + (x_3^2 - x_2^2) + \dots + (x_n^2 - x_{n-1}^2) \end{aligned}$$

$$\underline{I}_n + \bar{I}_n = x_n^2 - x_0^2 = b^2 - a^2$$

Da sowohl \bar{I}_n als auch \underline{I}_n gegen $\int_a^b f(x) \, dx$ strebt, ergibt sich für $n \rightarrow \infty$ die Beziehung:

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b f(x) \, dx = 2 \int_a^b f(x) \, dx = b^2 - a^2$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Beispiel 4

Es sei $v = f(t)$ in $t_1 \leq t \leq t_2$ die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Körpers als Funktion der Zeit gegeben. Denkt man sich das Zeitintervall von t_1 bis t_2 in n gleiche Teilabschnitte der Größe Δt_i zerlegt, so ist die Länge s der in der Zeit $t_2 - t_1$ zurückgelegten Strecke näherungsweise gleich

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t_i,$$

da in den kleinen Zeitintervallen die Geschwindigkeit nahezu konstant ist. Durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhält man die Weglänge:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

3.2.3. Das Rechnen mit bestimmten Integralen

1) Ist c ein beliebiger Wert zwischen a und b , so gilt für $a < b$:

$$(6) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Zur Erläuterung der Gleichung (6) betrachtet man solche Zerlegungen δ_n des Intervalls $a \leq x \leq b$, die alle den Punkt mit der Abszisse c als Teilpunkt haben (Abb. 3.3).

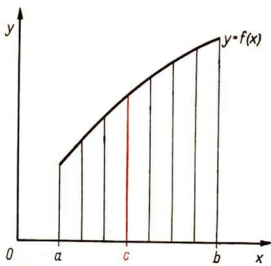


Abb.3.3.

Diejenigen Teilpunkte von δ_n , die zwischen a und c liegen, erzeugen eine Zerlegung δ'_k des Intervalls $a \leq x \leq c$, und diejenigen Teilpunkte von δ_n , die zwischen c und b liegen, erzeugen eine Zerlegung δ'_l des Intervalls $c \leq x \leq b$. Addiert man nun die zu δ'_k und δ'_l gehörenden Untersummen, so ergibt sich die zu δ_n gehörende Untersumme. Läßt man schließlich die Unterteilung beliebig fein werden, so ergibt sich die auch geometrisch einleuchtende Beziehung (6). Sie besagt nämlich, daß der Inhalt des Flächenstückes zwischen der Kurve und der x -Achse in den Grenzen von a bis b gleich der Summe der Inhalte der beiden Flächenstücke zwischen der Kurve und der x -Achse in den Grenzen a und c bzw. c und b ist.

2) Unter dem Integral $\int_a^a f(x) dx$ versteht man den Wert Null.

3) Es soll nun das Integral $\int_a^b f(x) dx$ für den Fall erklärt werden, daß b kleiner als a ist. Die Definition wird so vorgenommen, daß die Relation (6) erhalten bleibt, daß also gilt:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Es wird deshalb definiert:

$$(7) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist schon erklärt, da b kleiner als a ist. Bei dieser Definition gilt (6) auch ohne die Einschränkung $a < b$.

4) Sind $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ zwei in $a \leq x \leq b$ erklärte monoton steigende Funktionen sowie c_1 und c_2 zwei nicht negative Konstanten, so ist auch die Funktion

$$y = f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

im gleichen Intervall monoton steigend, und es gilt:

$$(8) \quad \int_a^b f(x) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx.$$

Diese Relation ergibt sich, wenn man beim Bilden der Ober- und Untersumme beachtet, daß

$$f(x_i) = c_1 \cdot f_1(x_i) + c_2 \cdot f_2(x_i)$$

ist. Im Falle der Obersumme erhält man:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i = c_1 \sum_{i=1}^n f_1(x_i) \cdot \Delta x_i + c_2 \sum_{i=1}^n f_2(x_i) \cdot \Delta x_i$$

und im Falle der Untersumme:

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i = c_1 \sum_{i=1}^n f_1(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i + c_2 \sum_{i=1}^n f_2(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i.$$

In Worten:

Die Obersumme (bzw. Untersumme) von $y = f(x)$ bei der Zerlegung δ_n ist gleich der Summe der c_1 -fachen Obersumme (bzw. Untersumme) von $f_1(x)$ und der c_2 -fachen Obersumme (bzw. Untersumme) von $f_2(x)$ bei der Zerlegung δ_n .

Durch Grenzübergang erhält man daraus die Relation (8).

3.2.4. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

- 1. Was versteht man unter dem arithmetischen Mittel A der n reellen Zahlen y_1, y_2, \dots, y_n ?
- 2. In welcher Größenbeziehung steht A zu dem größten der y_k und dem kleinsten der y_k ?
- 3. Gibt es unter den y_k stets eines, welches gleich A ist?

Es sei wieder $y = f(x)$ eine in $a \leq x \leq b$ erklärte, monoton steigende Funktion. Durch die n äquidistanten¹ Punkte mit den Abszissen

¹ aequus (lat.), gleich; distantia (lat.), Abstand; äquidistant, gleichen Abstand habend.

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n$$

wird eine Zerlegung δ_n des Intervalls $a \leq x \leq b$ vorgenommen. Das arithmetische Mittel der Funktionswerte $y_i = f(x_i)$ ist dann:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \sum_{i=1}^n \left[f(x_i) \cdot \frac{1}{n} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[f(x_i) \cdot \frac{b-a}{b-a} \cdot \frac{1}{n} \right] \\ A_n &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n \left[f(x_i) \frac{b-a}{n} \right]. \end{aligned}$$

Offenbar ist A_n das $\frac{1}{b-a}$ fache der zur Zerlegung δ_n gehörenden Obersumme von $\int_a^b f(x) dx$. Läßt man jetzt die δ_n beliebig fein werden, so strebt A_n gegen den Grenzwert

$$(9) \quad m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

den man als **Mittelwert der Funktion** $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ bezeichnet. Der Wert m ist also gewissermaßen das arithmetische Mittel der Funktionswerte $y = f(x)$ in $a \leq x \leq b$. Da der kleinste Wert von $y = f(x)$ wegen der Monotonie gleich $f(a)$ und der größte gleich $f(b)$ ist, gilt:

$$f(a) \leq A_n \leq f(b)$$

und daher auch

$$f(a) \leq m \leq f(b).$$

Bedenkt man, daß $\int_a^b f(x) dx$ gleich dem Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x)$ in den Grenzen a bis b ist, so ist wegen

$$m(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ in Abbildung 3.4. mit den Seitenlängen $b-a$ und m gleich dem Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x)$. Die beiden rot schraffierten Flächenstücke in Abbildung 3.4. sind inhaltsgleich.

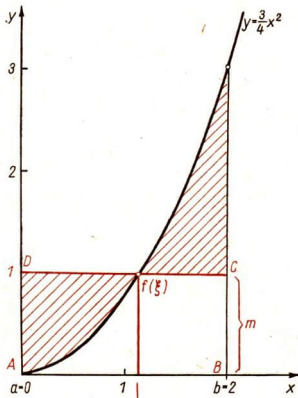


Abb. 3.4.

Ist nun die Funktion $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig, so läßt $f(x)$ keinen zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Zwischenwert aus. Es gibt daher eine zwischen a und b gelegene Stelle ξ , $a \leq \xi \leq b$, derart, daß $f(\xi) = m$ ist. Somit kann die Gleichung (9) im Falle einer stetigen Funktion $y = f(x)$ in der Form

$$(10) \quad \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$$

geschrieben werden, wobei ξ eine zwischen a und b gelegene Zahl bedeutet. Diese Aussage wird als **Mittelwertsatz der Integralrechnung** bezeichnet.

Betrachtet man das Integral aus Beispiel 4, so bedeutet hier der Mittelwert von $f(t)$ offenbar gerade die mittlere Geschwindigkeit des sich im allgemeinen ungleichförmig bewegenden Körpers.

3.2.5. Das bestimmte Integral mit veränderlicher oberer Grenze

Ist die Funktion $y = f(t)$ im Intervall $a \leq t \leq b$ monoton steigend, so kann man das bestimmte Integral auch über ein beliebiges Teilintervall von $a \leq t \leq b$ bilden.

Ist zum Beispiel x ein beliebiger Wert aus $a \leq x \leq b$, so wird das Integral

$$y = F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$$

betrachtet. Auf diese Weise ist jeder Zahl x aus $a \leq x \leq b$ genau eine Zahl $y = F_0(x)$ zugeordnet, so daß man eine in $a \leq x \leq b$ erklärte Funktion $y = F_0(x)$ erhält. Es ergibt sich zum Beispiel auf Grund von Beispiel 3 für $a \geq 0$ und $b \geq a$ die in $a \leq x \leq b$ erklärte Funktion:

$$F_0(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^x t dt = \frac{1}{2}(x^2 - a^2).$$

- 4. Welcher Zusammenhang besteht hier zwischen der in $a \leq x \leq b$ erklärten Funktion $F_0(x)$ und dem Integranden?

Hinweis: Differenzieren Sie $F_0(x)$!

3.2.6. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die im vorigen Abschnitt erklärte Funktion $y = F_0(x)$ soll an einer inneren Stelle x_0 ihres Definitionsbereichs auf Differenzierbarkeit untersucht werden. Dazu wird zunächst der Differenzenquotient gebildet und überprüft, ob dieser für $h \rightarrow 0$ einem Grenzwert zustrebt.

$$(11) \quad \frac{F_0(x_0 + h) - F_0(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right].$$

Nach Gleichung (6) gilt für die rechte Seite von (11):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t) dt + \int_{x_0}^a f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{x_0}^a f(t) dt + \int_a^{x_0+h} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich nach dem Mittelwertsatz (10):

$$\begin{aligned} \frac{F_0(x_0 + h) - F_0(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \\ &= \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi) = f(\xi), \end{aligned}$$

wobei ξ eine Stelle zwischen x_0 und $x_0 + h$ ist. Läßt man jetzt h gegen 0 streben (h kann positiv oder negativ sein, es wird nur $h \neq 0$ gefordert), so strebt ξ gegen x_0 . Ist nun $f(x)$ stetig, so strebt $f(\xi)$ gegen $f(x_0)$. Daher strebt der Differenzenquotient auf der linken Seite ebenfalls gegen $f(x_0)$, und es gilt:

$$F_0'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_0(x_0 + h) - F_0(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Die Funktion $y = F_0(x)$ ist also differenzierbar, und ihre 1. Ableitung ist gleich dem Funktionswert des Integranden an der oberen Grenze x . Die Funktion $y = F_0(x)$ ist also eine Stammfunktion des Integranden. Da sich eine beliebige Stammfunktion $y = F(x)$ von $y = f(x)$ nur durch eine additive Konstante von einer anderen derartigen Stammfunktion unterscheiden kann, läßt sie sich in der Form

$$F(x) = F_0(x) + C$$

darstellen.

Beachtet man, daß

$$F_0(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{und} \quad F_0(b) = \int_a^b f(t) dt$$

ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F_0(b) - F_0(a) \\ &= [F(b) - C] - [F(a) - C] \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Diese Erörterungen enthalten den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**:

Voraussetzung: Es sei in $a \leq x \leq b$ die Funktion $y = F(x)$ eine beliebige Stammfunktion der dort stetigen Funktion $y = f(x)$.

Behauptung: Es gilt

$$(12) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Mit Hilfe dieses Satzes ist die Berechnung bestimmter Integrale in vielen Fällen sehr bequem:

► Ein bestimmtes Integral kann berechnet werden, indem man das unbestimmte Integral ausrechnet, in eine seiner Stammfunktionen die Integrationsgrenzen a und b einsetzt und dann die Differenz $F(b) - F(a)$ bildet.

Beim Rechnen mit bestimmten Integralen wird dann oft folgende Schreibweise angewandt:

$$(12a) \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiel 5

$$\int_1^3 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Aufgaben

1. a) $\int_0^7 dx$ b) $\int_{0,5}^{1,5} x dx$ c) $\int_2^5 \frac{1}{2} x dx$ d) $\int_0^2 x^2 dx$ e) $\int_1^3 x^2 dx$
f) $\int_1^4 \frac{x^2}{2} dx$ g) $\int_2^4 3x^2 dx$ h) $\int_2^5 \frac{x^2}{2} dx$ i) $\int_2^5 \frac{x^2}{3} dx$ k) $\int_0^3 (x^2 + 1) dx$
l) $\int_2^4 5x^2 dx$ m) $\int_2^5 5x^2 dx$ n) $\int_2^4 (x^2 - 1) dx$ o) $\int_3^6 \frac{x^3}{2} dx$ p) $\int_0^1 \frac{x^3}{10} dx$
2. a) $\int_0^3 (2x + 5) dx$ b) $\int_2^3 (x^2 + 3) dx$ c) $\int_1^{1,5} (x^2 + x) dx$ d) $\int_0^3 (3x^2 + 4x + 5) dx$
e) $\int_2^4 (7x^2 - 2x + 16) dx$ f) $\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) dx$ g) $\int_0^2 (x^3 + x^2 + x + 1) dx$

3.2.7. Verallgemeinerungen

(Die Ausführungen in diesem Abschnitt werden ohne Beweis gegeben.)

Der Begriff des bestimmten Integrals kann auch für eine beliebige in einem Intervall $a \leq x \leq b$ stetige Funktion $y = f(x)$ erklärt werden, die nicht im ganzen Intervall monoton ist und deren Funktionsbild nicht beständig oberhalb der x -Achse verläuft.

So kann man zum Beispiel die Aufgabe betrachten, den Flächeninhalt unter der Kurve

$$y = f(x) = \frac{5}{12}x^4 - \frac{17}{12}x^2 + 2$$

zwischen den Grenzen $x = -2$ und $x = 2$ zu berechnen (Abb. 3.5.). Ohne hier auf die Einzelheiten einer Intervallzerlegung und die Bildung von Unter- und Obersummen einzugehen, werde nur mitgeteilt, daß dieser Flächeninhalt genau wie in den vorhergehenden Abschnitten mit Hilfe einer Stammfunktion berechnet werden kann. Es gilt also:

$$A = \int_{-2}^2 \left(\frac{5}{12}x^4 - \frac{17}{12}x^2 + 2 \right) dx$$

$$A = \left. \frac{5}{60}x^5 - \frac{17}{36}x^3 + 2x \right|_{-2}^2 = \frac{52}{9}$$

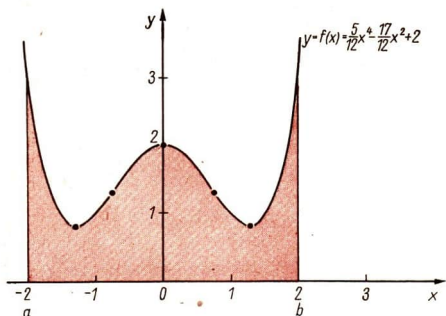


Abb. 3.5.

● 5. Überprüfen Sie die Rechnung in diesem Beispiel!

Allgemein gilt folgendes:

Ist die Funktion $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig und gilt dort $f(x) \geq 0$,

ist ferner $y = F(x)$ eine Stammfunktion von $y = f(x)$,

so ist der Flächeninhalt unter dem Bild der Funktion $y = f(x)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ gleich

$$(13) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

In Abbildung 3.6. wird der Fall betrachtet, daß $f(x)$ negative Werte annimmt. Berechnet man auch hier nach der Formel (13) den Flächeninhalt des Flächenstückes,

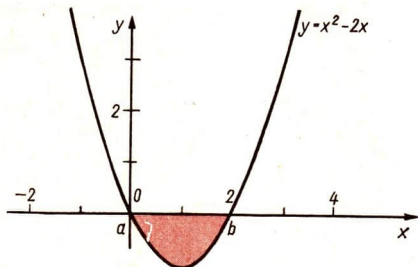


Abb. 3.6.

das das Funktionsbild mit der x -Achse in den Grenzen von a bis b bildet, so erhält man:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left. \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3},$$

also einen negativen Wert.

In der Tat würde man auch, wenn man nach dem Vorbild von Abschnitt 3.2.2. Unter- und Obersummen bildet, für diese Summen negative Werte erhalten, so daß das Integral als Grenzwert einen negativen Wert liefern müßte. Allerdings gibt das Integral dann nicht mehr die Maßzahl A für den Flächeninhalt zwischen dem Funktionsbild und der x -Achse an. Es gilt hier vielmehr:

$$A = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| = - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx.$$

Um den Vorzeichen Rechnung zu tragen, kann man jedoch folgendermaßen vorgehen:

Denkt man sich in den Abbildungen 3.5. und 3.6. den Rand der rot gerasterten Flächen so durchlaufen, daß der begrenzende Teil der x -Achse in Richtung von a nach b durchlaufen wird, so liegt in Abbildung 3.5. das Flächenstück zur Linken und in Abbildung 3.6. zur Rechten.

- **Liegt beim Durchlaufen des Randes eines Flächenstückes in ein und derselben Richtung die Fläche zur Linken, so sagt man, das Flächenstück sei positiv orientiert.**
Liegt die Fläche zur Rechten, so sagt man, das Flächenstück sei negativ orientiert.¹

Unter Benutzung dieser Terminologie kann man folgendermaßen einen sogenannten **vorzeichenbehafteten Flächeninhalt** einführen:

Ist A die Maßzahl des Inhalts eines Flächenstückes, welches ganz oberhalb oder ganz unterhalb der x -Achse liegt, so ist der vorzeichenbehaftete Inhalt des Flächen-

¹ Man kann also ein und dasselbe Flächenstück einmal positiv und einmal negativ orientieren, je nachdem, wie sein Rand durchlaufen wird.

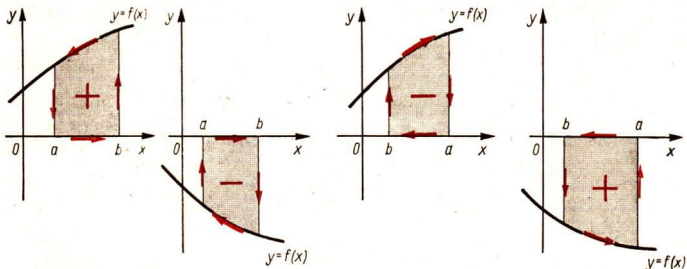


Abb. 3.7.

stückes gleich A , wenn dieses Flächenstück positiv orientiert ist, und gleich $-A$, wenn es negativ orientiert ist. Auf diese Weise ergeben sich die in Abbildung 3.7. dargestellten vier Möglichkeiten.

Mit Hilfe des vorzeichenbehafteten Flächeninhaltes kann das Integral $\int_a^b f(x) dx$ auch als Flächeninhalt gedeutet werden, wenn b kleiner als a ist.

Besteht schließlich ein Flächenstück aus mehreren, teils oberhalb, teils unterhalb der x -Achse gelegenen Teilen, wie es zum Beispiel beim Bild der Sinusfunktion der Fall ist, so versteht man unter dem vorzeichenbehafteten Flächeninhalt I des von a nach b orientierten Flächenstückes die Summe der vorzeichenbehafteten Flächeninhalte der einzelnen, teils oberhalb, teils unterhalb der x -Achse gelegenen Teilstücke.

Unter Verwendung dieses allgemeinen Begriffs des vorzeichenbehafteten Inhaltes I eines von a nach b orientierten Flächenstückes gilt für jede in $a \leq x \leq b$ oder auch in $b \leq x \leq a$ stetige Funktion $y = f(x)$, die dort die Stammfunktion $y = F(x)$ besitzt:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beispiel 6

Es ist das Integral $\int_{-a}^a x^3 dx$ zu berechnen.

$$I = \int_{-a}^a x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-a}^a = \frac{a^4}{4} - \frac{(-a)^4}{4} = 0$$

6. Wie ist es möglich, daß das Integral im Beispiel 6, das doch als Flächeninhalt aufgefaßt werden kann, gleich Null ist?

Schließen Sie auch den Fall $a < 0$ in Ihre Überlegungen ein!

Aufgaben

1. a) $\int_{-2}^0 x dx$ b) $\int_{-3}^3 x^2 dx$ c) $\int_{-3}^2 x^2 dx$ d) $\int_2^{-3} x^2 dx$
e) $\int_{-1}^{-4} \frac{x^2}{2} dx$ f) $\int_{-1}^{1,5} \frac{x^2}{2} dx$ g) $\int_0^{-2} \frac{x^2}{3} dx$ h) $\int_{-1}^{-3} \frac{x^3}{3} dx$
2. a) $\int_{-3}^{-1} (2x + 7) dx$ b) $\int_{-2}^0 (5x + 15) dx$ c) $\int_0^{-2} (5x + 15) dx$ d) $\int_{-1}^{-4} \left(-\frac{x}{2} + 1\right) dx$
e) $\int_{-7}^{-5} (-0,4x - 2) dx$ f) $\int_{-4}^{-1} (x^2 + 3) dx$ g) $\int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx$ h) $\int_{-2}^0 (5x^2 + 15) dx$
i) $\int_2^0 (3x - 7) dx$ k) $\int_1^3 (2x - 9) dx$ l) $\int_4^2 (2x - 9) dx$ m) $\int_{-2}^2 (x^2 - 5) dx$
3. Die Arbeit ist das Wegintegral der Kraft ($W = \int_{s_1}^{s_2} F ds$), wenn die Kraft F als Funktion der Weglänge s gegeben ist und in die Wegrichtung fällt. Bestimmen Sie auf diese Weise die folgenden Arbeitsgrößen!
- a) Konstante Kraft: $F = 10 \text{ N}$; $s = 25 \text{ m}$
b) Hangabtriebskraft auf der geneigten Ebene: $F = G \cdot \sin \alpha$
Gewicht $G = 25 \text{ kp}$; $\alpha = 30^\circ$; überwindener Höhenunterschied $h = 3 \text{ m}$
c) Zugkraft einer Schraubenfeder: $F = k \cdot s$
Federkonstante $k = 0,2 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}$; Federverlängerung S
Berechnen Sie W für eine Federverlängerung von 0 cm auf 10 cm ;
von 5 cm auf 15 cm ;
von 10 cm auf 20 cm usw.!

3.3. Flächeninhaltsberechnung durch Integration

3.3.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Welche geometrische Bedeutung kommt dem bestimmten Integral einer Funktion zu?
2. Von welchen Figuren können Sie den Flächeninhalt mit elementaren Mitteln berechnen?
3. Welche Schwierigkeit ergibt sich bei der Berechnung des Inhalts der Kreisfläche?
4. Wie bestimmt man rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Kurven?
5. Was hat die Vertauschung der Grenzen eines bestimmten Integrals für den Wert des Integrals zur Folge?
6. Welches Gesetz gilt für die Unterteilung des Integrationsintervalls? Kann die Unterteilung auch außerhalb der Integrationsgrenzen vorgenommen werden?

3.3.2. Flächen zwischen Funktionsbildern und Koordinatenachsen

Die Bestimmung des Inhalts einer Fläche, die vom Bild der Funktion $y = f(x)$, der x -Achse und den beiden Parallelen zur y -Achse $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, geschieht durch Berechnung eines Integrals (Abb. 3.8.).

Im Abschnitt 3.1.3. wurde gezeigt, daß der Wert eines bestimmten Integrals mitunter auch eine negative Zahl sein kann. Um die (stets positive) Maßzahl einer Fläche

in solchen Fällen zu bestimmen, muß daher der absolute Betrag des Integrals genommen werden:

$$(14) \quad A_a^b = |I_a^b| = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Daraus folgt, daß zwischen der Aufgabe, den Wert eines bestimmten Integrals zu berechnen, und der Aufgabe, die von Funktionsbild und Koordinatenachse begrenzte Fläche zu ermitteln, wohl unterschieden werden muß.

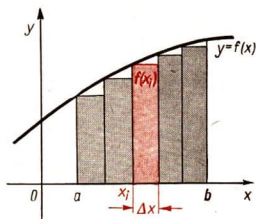


Abb. 3.8.

Überzeugen Sie sich von der Notwendigkeit dieser Überlegung bei der Berechnung der Maßzahl der Fläche, die vom

- Bild der Funktion $y = \frac{1}{4}x^3 - 2$, der x -Achse und den Geraden $x = -2$ und $x = 1$ begrenzt wird, wenn Sie -2 als untere und 1 als obere Grenze nehmen! Auf welche andere Weise könnten Sie auch zu einem positiven Integralwert kommen?

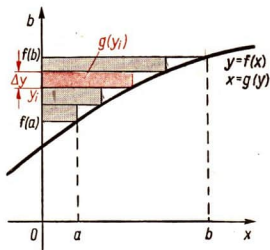


Abb. 3.9.

Auf entsprechende Weise kann man den Inhalt der in Abbildung 3.9. dargestellten Fläche, die von dem Funktionsbild, der y -Achse und den entsprechenden Parallelen zur x -Achse gebildet wird, berechnen:

$$(15) \quad A_{f(a)}^{f(b)} = \left| \int_{f(a)}^{f(b)} x dy \right|.$$

Dabei ist $x = g(y)$ die inverse Funktion zu $y = f(x)$. Also ergibt sich:

$$(15a) \quad A_{f(a)}^{f(b)} = \left| \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy \right|.$$

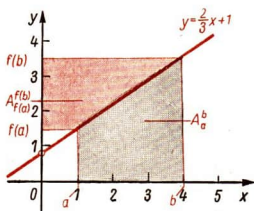


Abb. 3.10.

Aus Abbildung 3.10. folgt für den Fall, daß $y = f(x)$ eine monoton steigende Funktion ist, deren Bild im ersten Quadranten verläuft:

$$(16) \quad A_a^b + A_{f(a)}^{f(b)} = \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy \right| = b \cdot f(b) - a \cdot f(a).$$

- Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Gleichung (16), indem Sie für das Beispiel $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ in den Grenzen $a = 1$ und $b = 4$ die Fläche $A_a^b + A_{f(a)}^{f(b)}$ einmal durch $\left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy \right|$, zum anderen durch $b \cdot f(b) - a \cdot f(a)$ berechnen!

Aus (16) folgt durch Umstellen

$$(16a) \quad A_a^b = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \left| \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy \right|.$$

■ **Beispiel 1**

Die zwischen dem Bild der Funktion $y = \sqrt{x}$ und der x -Achse gelegene Fläche A_a^b soll in den Grenzen von $a = 0$ bis $b = 9$ berechnet werden.

$$A_a^b = \left| \int_0^9 \sqrt{x} dx \right| = \int_0^9 \sqrt{x} dx$$

Da dieses Integral mit den bis jetzt zur Verfügung stehenden Mitteln nicht ausgewertet werden kann, aber die zu $y = \sqrt{x}$ inverse Funktion $x = y^2$ zu integrieren ist, berechnen wir $A_{f(a)}^{f(b)}$ in den Grenzen von $f(a) = 0$ bis $f(b) = 3$ und subtrahieren das Ergebnis von $b \cdot f(b) - a \cdot f(a) = 9 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 27$:

$$A_a^b = 27 - \int_0^3 y^2 dy = 27 - \frac{y^3}{3} \Big|_0^3 = 27 - \frac{27}{3} = 18.$$

Das Funktionsbild zerlegt also die durch die Integrationsgrenzen bestimmte Rechteckfläche in zwei Teile, deren Flächen im Verhältnis

$A_a^b : A_{f(a)}^{f(b)} = 2 : 1$ stehen.

3.3.3. Unterteilung des Integrationsintervalls zur Berechnung von Flächengrößen

Schneidet das Funktionsbild innerhalb des Integrationsintervalls die x -Achse, so ergeben sich bei gleichbleibender Integrationsrichtung Flächenteile mit unterschiedlichem Umlaufsinn, das heißt, der errechnete Integralwert ergibt sich als Maßzahl einer Summe von Flächenstreifen, die teils positiv, teils negativ in die Rechnung eingehen. Der rechnerische Wert stellt also nicht die Flächengröße dar (Abb. 3.11.).

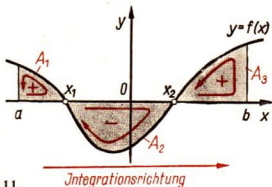


Abb. 3.11.

$$A_a^b \neq I_a^b = \int_a^b f(x) dx$$

In diesem Fall ist das Integrationsintervall an den Schnittpunkten des Funktionsbildes mit der x -Achse zu unterteilen, und die Flächenteile sind einzeln durch die absoluten Beträge der jeweiligen Integralwerte zu berechnen.

$$A_a^b = A_1 + A_2 + A_3 = |I_1| + |I_2| + |I_3|$$

$$A_a^b = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^b f(x) dx \right|$$

Die Zwischengrenzen x_1, x_2, \dots sind die Nullstellen des Integranden, die im Integrationsintervall liegen.

Beispiel 2

Gegebene Funktion: $y = \frac{1}{9}x^3$;

Grenzen: $a = -3$; $b = 3$

a) Wie groß ist der Wert des bestimmten Integrals?

$$I = \int_{-3}^3 \frac{1}{9}x^3 dx = \frac{1}{36}x^4 \Big|_{-3}^3 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

b) Wie groß ist der Inhalt der von Funktionsbild und x -Achse in diesen Grenzen eingeschlossenen Fläche (Abb. 3.12.)?

Nullstelle: $0 = \frac{1}{9}x^3$; $x_1 = 0$

$$A = |I_1| + |I_2| = \left| \int_{-3}^0 \frac{1}{9}x^3 dx \right| + \left| \int_0^3 \frac{1}{9}x^3 dx \right| = \left| \frac{1}{36}x^4 \Big|_{-3}^0 \right| + \left| \frac{1}{36}x^4 \Big|_0^3 \right|$$

$$A = \left| 0 - \frac{9}{4} \right| + \left| \frac{9}{4} - 0 \right| = \left| -\frac{9}{4} \right| + \left| \frac{9}{4} \right| = \frac{9}{2}$$

Ergebnis:

Der Wert des Integrals ist 0, der Flächeninhalt beträgt $\frac{9}{2}$ Flächeneinheiten.

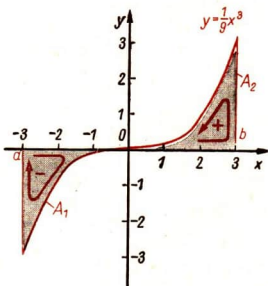


Abb. 3.12.

Aufgaben

- Berechnen Sie die Größen des Flächeninhalts zwischen den Bildern der Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n > 0$; ganzzahlig und der x -Achse jeweils in den Grenzen

x_a	0	1	2	3 ...
x_b	1	2	3	4 ...

und vergleichen Sie für jedes n die Größen der Flächenstücke mit Hilfe einer fortlaufenden Proportion!

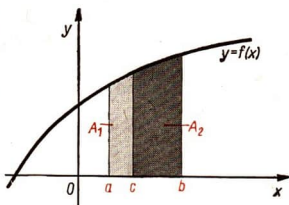
- Lösen Sie Aufgabe 1 für die Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n < -1$; ganzzahlig, wobei das erste Flächenstück in den Grenzen $x_a = 1$ und $x_b = 2$ liegen soll!
Warum müssen hierbei $n = -1$ und $x_a = 0$ ausgeschlossen werden?

3. In der folgenden Tabelle sind jeweils gegeben: der analytische Ausdruck $y = f(x)$ einer Funktion, eine Koordinatenachse und zwei Argumente x_a und x_b dieser Funktion. Es ist die Größe der Fläche zu berechnen, die zwischen dem zu $y = f(x)$ gehörenden Bild und der angegebenen Koordinatenachse liegt und die von den durch die Funktionsbildpunkte $P_1(x_a; \dots)$ und $P_2(x_b; \dots)$ verlaufenden Parallelen zur anderen Achse begrenzt wird.

	$y = f(x)$	Achse	x_a	x_b		$y = f(x)$	Achse	x_a	x_b
a)	$y = \frac{1}{2}x^2$	x	2	6	g)	$y = 6 + x - x^2$	x	-3	4
b)	$y = 2\sqrt{x}$	y	$\frac{1}{4}$	16	h)	$y = (x-1)(x-2)(x-3)$	x	0	4
c)	$y = x^2 + 2$	x	-4	2	i)	$y = \frac{1}{4}x^3 + 2$	y	-1	2
d)	$y = -x^2 + 2$	x	-4	2	k)	$y = \frac{1}{x^3}$	x	-3	-1
e)	$y = 8 - x^3$	x	0	3	l)	$y = \sqrt{\frac{1}{x}}$	y	1	3
f)	$y = \sqrt[3]{1-x}$	y	-7	1	m)	$y = x^4 - 10x^2 + 9$	x	-2	-4

4. In welchem Verhältnis wird der Flächeninhalt des Quadrats $A(0; 0) B(1; 0) C(1; 1) D(0; 1)$ durch die Bilder der Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n > 0$; ganzzahlig geteilt? Stellen Sie die Verhältniszahlen für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ tabellarisch zusammen, und veranschaulichen Sie die Ergebnisse durch Quadrate der gleichen Größe, die durch Parallelen zu einer Quadratseite in diesem Verhältnis geteilt werden!

5. a) Berechnen Sie das Verhältnis der Größen der in Abbildung 3.13. gekennzeichneten Flächenstücke A_1 und A_2 , falls $a < c < b$ und c beliebig zwischen a und b liegt!



- b) Wie lautet das Ergebnis, wenn ein vorgegebenes Teilverhältnis $\lambda = m : n$ die Lage von c nach $(c - a) : (b - c) = m : n$ bestimmt?
c) Was ergibt sich speziell für $\lambda = 1$?

Abb. 3.13.

6. Lösen Sie Aufgabe 5a, b, c für die folgenden speziellen Funktionen und Grenzen!

	$y = f(x)$	a	b	c	λ
1)	$y = \frac{1}{3}x^2 + 1$	1	5	2	
2)	$y = \frac{1}{4}x^3 - 2$	3	9		1:2
3)	$y = \frac{1}{2}x + 2$	2	10		3:1
4)	$y = x$	0	5	3	
5)	$y = -x^2 - 6x - 5$	-5	-1	-4	
6)	$y = 5x^2 - x^3$	0	5		2:3
7)	$y = 10$	-2	10	2	
8)	$y = x^2 + 5x$	-4	-1		1:5

7. Berechnen Sie nach Abbildung 3.13., welchen Wert c annehmen muß, wenn die Größen der Flächenteile A_1 und A_2 in einem vorgeschriebenen Verhältnis $p : q$ stehen sollen! Wählen Sie dazu folgende Zahlenbeispiele und berechnen Sie jedes Beispiel außer für das jeweils angegebene Verhältnis $p : q$ stets auch für $p : q = 1 : 1$!

	$y = f(x)$	a	b	$p : q$		$y = f(x)$	a	b	$p : q$
a)	$y = 6$	2	12	2:3	e)	$y = x^3 - 9x$	-3	0	2:7
b)	$y = \frac{1}{2}x$	0	10	1:4	f)	$y = 9x - x^3$	1	2	3:2
c)	$y = \frac{1}{2}x^2$	-4	4	3:5	g)	$y = x - 1$	1	11	2:1
d)	$y = \frac{1}{4}x^3$	1	5	1:2	h)	$y = 3 - \frac{1}{3}x$	0	9	5:4

Anleitung: Die Unbekannte c ist Integrationsgrenze.

8. Ein Bogenstück des Bildes der Funktion $y = f(x)$ zwischen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ wird parallel zur y -Achse um c verschoben (Abb. 3.14.).
- Wie heißt die Gleichung der verschobenen, zu $y = f(x)$ äquidistanten Kurve?
 - Wie groß ist das zwischen den Bögen gelegene Flächenstück? Fassen Sie das Ergebnis in Worte!
 - Wenden Sie das Ergebnis auf die folgenden speziellen Beispiele an!

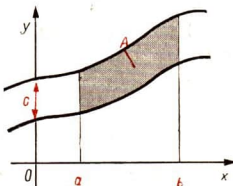


Abb. 3.14.

	$y = f(x)$	a	b	c
1)	$y = 8$	-2	5	3
2)	$y = \frac{1}{2}x$	0	3	8
3)	$y = \frac{1}{10}x^2$	-3	3	-2
4)	$y = x^3$	-5	4	6
5)	$y = 8x - 15 - x^2$	1	7	-4
6)	$y = x^n$	x_1	x_2	$h \begin{cases} n \text{ ganzzahlig} \\ 0 < x_1 < x_2 \end{cases}$

Fertigen Sie jeweils eine Skizze an!

9. Ein Tonnengewölbe hat die in Abbildung 3.15. angegebenen Maße. Die Gewölbedecke ist parabolisch gekrümmt. Der oberen Parabel entspricht die Gleichung $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2,5$.

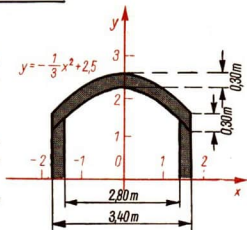


Abb. 3.15.

- Wieviel Kubikmeter Mauerwerk sind je Meter Gewölbelänge (einschließlich der Seitenwände) erforderlich?
- Wieviel Prozent davon entfallen auf die Gewölbedecke?
- Wieviel Kubikmeter Luft sind je Meter Gewölbelänge enthalten?

10. Ein Muldenkipper (Abb. 3.16.) ist 1,20 m lang, 0,80 m tief und hat parabolischen Querschnitt. Bei dem in Abbildung 3.16. eingezeichneten Achsenkreuz entspricht der Parabel die Gleichung $y = 2x^2$. Wie groß ist das Fassungsvermögen?

11. Ein Wasserstollen hat bei parabolischem Querschnitt (Abb. 3.17.) eine Sohlenbreite von 4 m. Der Parabel entspricht bei dem in Abbildung 3.17. eingezeichneten Achsenkreuz die Gleichung $y + \frac{4}{5}x^2 - \frac{16}{5} = 0$.

- a) Wie groß ist der Stollenquerschnitt?
 b) Wieviel Kubikmeter Wasser fließen in jeder Minute durch den Stollen, wenn er bis $\frac{3}{4}$ der Scheitelhöhe gefüllt ist und die Strömungsgeschwindigkeit $3,5 \text{ m s}^{-1}$ beträgt?

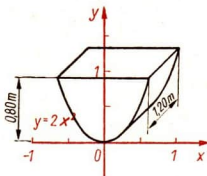


Abb. 3.16.

12. Beweisen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Richtigkeit folgender Flächeninhaltsformeln!

- a) Rechteck: $A = a \cdot b$
 b) Rechtwinkliges Dreieck: $A = \frac{1}{2} a \cdot b$ (a, b Katheten)
 c) Allgemeines Dreieck: $A = \frac{1}{2} g \cdot h$
 d) Trapez: $A = \frac{1}{2} (a + c) \cdot h$
 e) Parallelogramm: $A = g \cdot h$

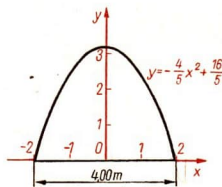


Abb. 3.17.

Anleitung: Wählen Sie als begrenzende Kurven

bei a) die Gerade durch $P_1(0; b)$ und $P_2(a; b)$;

bei b) die Gerade durch $P_1(0; 0)$ und $P_2(a; b)$;

bei c) die Geraden durch $P_1(0; 0)$ und $P_2(z; h)$ bzw. $P_2(z; h)$ und $P_3(g; 0)$ (Additives Zusammensetzen zweier Teilflächen!);

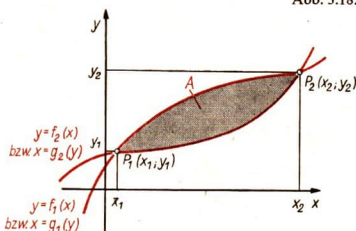
bei d) die Geraden durch $P_1(0; z)$ und $P_2(h; 0)$ bzw. $P_3(0; z + c)$ und $P_4(h; a)$ (Subtraktives Zusammensetzen zweier Teilflächen!);

bei e) die Geraden durch $P_1(0; 0)$ und $P_2(h; z)$ bzw. $P_3(0; g)$ und $P_4(h; z + g)$ (Vgl. hierzu Aufgabe 8.2!)

3.3.4. Allseitig von Funktionsbildern begrenzte Flächen

Haben die Bilder zweier Funktionen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ mindestens zwei Punkte gemeinsam, so begrenzen die zwischen zwei benachbarten gemeinsamen Punkten gelegenen Kurvenbögen ein Flächenstück. Die Berechnung seiner Größe kann auf die Berechnung der Flächen zwischen den Kurven und einer Koordinatenachse zurückgeführt werden. Die

Abb. 3.18.



Integrationsgrenzen sind dabei meistens durch die Koordinaten der Schnittpunkte gegeben, und zwar bei Begrenzung durch die x -Achse durch die Abszissen, bei Begrenzung durch die y -Achse durch die Ordinaten (Abb. 3.18.).

Für die Berechnung mit Hilfe der x -Achse gilt

$$(17) \quad A = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} [f_1(x) - f_2(x)] dx,$$

wobei das zu berechnende Flächenstück vollständig oberhalb der x -Achse gelegen und die Bezeichnung $f_1(x)$ und $f_2(x)$ so gewählt sei, daß im betrachteten Intervall gilt:

$$f_1(x) \geq f_2(x).$$

Besonders wichtig ist der Fall, daß eins der begrenzenden Funktionsbilder eine Gerade, das Flächenstück also ein Segment ist.

Beispiel 3

Der Flächeninhalt des durch die Gerade $y = x + 2$ von der Parabel $y = x^2$ abgeschnittenen Segmentes S ist zu berechnen (Abb. 3.19.).

Schnittpunktsbestimmung:

$$y_0 = x_0 + 2$$

$$y_0 = x_0^2$$

$$\frac{x_0^2}{x_0^2} = \frac{x_0 + 2}{x_0 + 2}$$

$$x_0^2 - x_0 - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad | \quad x_2 = 2$$

$$y_1 = 1 \quad | \quad y_2 = 4$$

Berechnung des Segments:

$$S = \int_{-1}^2 [(x + 2) - x^2] dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + 2x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^2$$

$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right)$$

$$S = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2}$$

Ergebnis: Der Inhalt der Segmentfläche beträgt $\frac{9}{2}$ Flächeneinheiten.

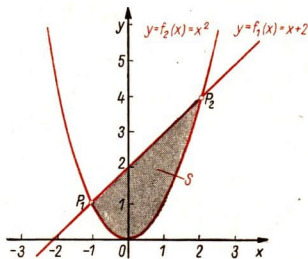


Abb. 3.19.

Während die Größe jeder bis zur Koordinatenachse reichenden Fläche von der Lage des Funktionsbildes im Koordinatensystem abhängt, ist die Größe eines allseitig von Funktionsbildern begrenzten Flächenstückes von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Man kann infolgedessen das Flächenstück durch eine Parallelverschiebung stets so verlegen, daß es vollständig oberhalb der x -Achse liegt (Abb. 3.20.). Dann ist eine Unterteilung des Integrationsintervalls (vgl. Abschnitt 3.3.3.) nicht nötig.

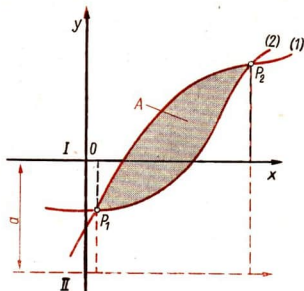


Abb. 3.20.

Die begrenzenden Kurven und die Schnittpunkte werden dargestellt

vor der Verschiebung durch:

$$(1) y = f_1(x)$$

$$(2) y = f_2(x)$$

$$P_1(x_1; y_1)$$

$$P_2(x_2; y_2);$$

nach der Verschiebung durch:

$$(1) y = f_1(x) + a$$

$$(2) y = f_2(x) + a$$

$$P_1(x_1; y_1 + a)$$

$$P_2(x_2; y_2 + a).$$

Da die oben genannten Bedingungen nach der Verschiebung erfüllt sind, kann jetzt Formel (17) angewendet werden, und der Flächeninhalt ergibt sich wie folgt:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(f_1(x) + a) - (f_2(x) + a)] dx = \int_{x_1}^{x_2} [f_1(x) - f_2(x)] dx.$$

► Bei der Berechnung der Größe von allseitig von Funktionsbildern begrenzten Flächenstückchen ist es in keinem Fall erforderlich, das Integrationsintervall an den Nullstellen zu unterteilen.

Die Berechnung des Flächeninhalts durch Integration bezüglich der y -Achse kann unter entsprechenden Voraussetzungen folgendermaßen erfolgen:

$$(17a) A = \int_{y_1}^{y_2} g_2(y) dy - \int_{y_1}^{y_2} g_1(y) dy = \int_{y_1}^{y_2} [g_2(y) - g_1(y)] dy.$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Inhalte der Flächenstücke zwischen den Bildern der folgenden Paare von Funktionen!

	$y = f_1(x)$	$y = f_2(x)$		$y = f_1(x)$	$y = f_2(x)$
a)	$y = x^2$	$y = x^4$	e)	$x = y^2 - 1$	$x = 1 - y^2$
b)	$y^2 = 4x$	$y^2 = 12x - 72$	f)	$y = \frac{1}{2}x^2$	$y = -x^2 + 6$
c)	$y = x^3 + 7$	$y = x^3 - x^2 + 3x + 5$	g)	$y = ax^2$	$x = ay^2$
d)	$y = x^3$	$y = \frac{1}{4}x^5$	h)	$y = ax^3$	$x = ay^3$

Anleitung: Entwerfen Sie jeweils eine Skizze, und beachten Sie die Bedingungen für Formel (17) bzw. (17a) und gegebenenfalls die Symmetrieverhältnisse!

2. Berechnen Sie die Inhalte der Segmente, die von den Bildern der Funktionen $y = f(x)$ durch die jeweilige Gerade abgeschnitten werden!

	$y = f(x)$	Gerade		$y = f(x)$	Gerade
a)	$y = x^2$	$y = 4$	e)	$y = \frac{16}{25}x^2$	$5y - 8x = 0$
b)	$y^2 = 2x$	$y = x - 4$	f)	$y = x^3 - 8$	$y = 4x - 8$
c)	$y^2 = 2px$	$x = \frac{p}{2}$	g)	$y = 3 - \frac{1}{2}x^4$	$y = 3 - 4x$
d)	$y = x^2$	$x + y = 2$	h)	$y = x^n - c$ ($n > 0$; ganzzahlig)	$y = mx - c$

Anleitung: Entwerfen Sie jeweils eine Skizze, und beachten Sie die Bedingungen für Formel (17) bzw. (17a) und gegebenenfalls die Symmetrieverhältnisse!

3. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das durch Teile der Bilder der Funktionen $y = 9 - x^2$ und $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ begrenzt wird!

Führen Sie die Berechnung einmal mit Unterteilung, einmal ohne Unterteilung des Integrationsintervalls an den Nullstellen durch! Vergleichen Sie die Ergebnisse, und begründen Sie die Übereinstimmung mit dem Umlaufsinn der Flächenstücke! Zeichnen Sie die Figur!

4. Durch Bögen der vier Parabeln $y = x^2$; $y = -x^2$; $x = y^2$; $x = -y^2$ wird eine vierteilige Rosette begrenzt. Berechnen Sie deren Fläche!

Anleitung: Zeichnen Sie die Rosette, und beachten Sie für die Flächenberechnung die Symmetrieverhältnisse!

5. a) Vergleichen Sie die Inhalte der im ersten Quadranten liegenden Segmente der Bilder der Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n > 1$; ganzzahlig, die durch die Gerade $y = x$ abgeschnitten werden, tabellarisch und graphisch!
b) Welchem Grenzwert streben die Segmentgrößen für $n \rightarrow \infty$ zu?
6. a) Wie groß sind die Inhalte der im ersten Quadranten gelegenen Flächenstücke, die von den Bildern der Potenzfunktionen $y = x^{n-1}$ und $y = x^n$ mit $n > 1$; ganzzahlig, begrenzt werden?
b) Vergleichen Sie die einzelnen Flächeninhalte tabellarisch und graphisch!
c) Welchem Grenzwert streben die Flächengrößen für $n \rightarrow \infty$ zu?

3.4. Volumenberechnung durch Integration

3.4.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Das Volumen einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil des Volumens eines Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.
2. a) Was versteht man unter Dreh- oder Rotationskörpern?
b) Nennen Sie Rotationskörper!
Was für Figuren müssen dabei jeweils rotieren und wie muß die Rotationsachse verlaufen?

3.4.2. Das Prinzip der Volumenberechnung durch Integration

Im folgenden werden die Flächeninhaltsberechnung und die Volumenberechnung durch Integration einander gegenübergestellt.

Flächenberechnung

Volumenberechnung

Der Grundgedanke der Berechnung enthält drei Schritte:

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) Die Zerlegung der Fläche in Flächenelemente in Form von Rechtecken (Abb. 3.21.): | <ol style="list-style-type: none"> 1) Die Zerlegung des Körpers in Volumenelemente in Form von Prismen (Abb. 3.22.): |
|---|---|

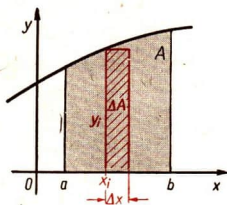


Abb. 3.21.

$$\Delta A = y_i \cdot \Delta x.$$

- 2) Die Summation aller Flächenelemente:

$$\sum y_i \cdot \Delta x.$$

- 3) Die Bildung des Grenzwerts dieser Summe für $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum y_i \cdot \Delta x = \int_a^b y \, dx.$$

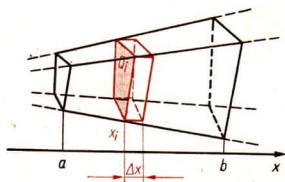


Abb. 3.22.

$$\Delta V = Q_i \cdot \Delta x.$$

- 2) Die Summation aller Volumenelemente:

$$\sum Q_i \cdot \Delta x.$$

- 3) Die Bildung des Grenzwerts dieser Summe für $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum Q_i \cdot \Delta x = \int_a^b Q \, dx.$$

Voraussetzung für diese Schritte ist, daß

y als Funktion von x bekannt ist:

$$y = f(x).$$

Q als Funktion von x bekannt ist:

$$Q = \varphi(x).$$

Dann ergibt sich mit $a < b$:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$V = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Die aus der Stereometrie bekannten Volumenformeln können nun wie folgt mit Hilfe der Integralrechnung hergeleitet werden.

1) Prisma (Abb. 3.23.):

Grundfläche A ; Höhe h .

Querschnittsfunktion:

$$Q = \varphi(x) = \text{const.} = A$$

$$\text{Volumenberechnung: } V = \int_a^{a+h} A dx = Ax \Big|_a^{a+h} = A(a+h) - Aa = A \cdot h$$

$$\text{Kreiszyylinder als Spezialfall: } A = \frac{d^2 \pi}{4}; \quad V = \frac{d^2 \pi}{4} h.$$

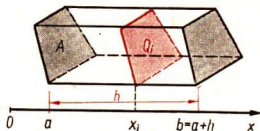


Abb. 3.23.

2) Pyramide (Abb. 3.24.):

Grundfläche A ; Höhe h .

Die x -Achse soll mit der Pyramidenhöhe zusammenfallen, die Spitze liege im Nullpunkt. Für einen Querschnitt Q_i in einer beliebigen Entfernung x_i von der Spitze gilt dann:

$$Q_i: A = x_i^2: h^2.$$

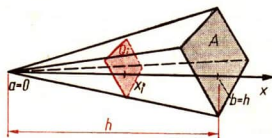


Abb. 3.24.

$$\text{Die Querschnittsfunktion lautet also: } Q = \varphi(x) = \frac{A}{h^2} \cdot x^2.$$

$$\text{Volumenberechnung: } V = \int_0^h \frac{A}{h^2} x^2 dx = \frac{A}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{A \cdot h^3}{h^2 \cdot 3} = \frac{1}{3} Ah.$$

$$\text{Kreiskegel als Spezialfall: } A = \frac{d^2 \pi}{4}; \quad V = \frac{d^2 \pi}{12} h.$$

3) Pyramidenstumpf (Abb. 3.25.):

Grundfläche A_1 ; Deckfläche A_2 ; Höhe h .

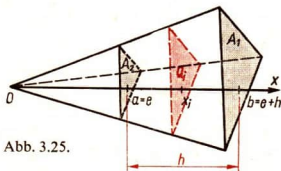


Abb. 3.25.

Die Querschnittsfunktion bleibt im wesentlichen die gleiche; es ändern sich lediglich die Bestimmungsstücke und die Integrationsgrenzen. Man führt dazu vorübergehend die Entfernung e der Deckfläche von der Spitze (das heißt vom Nullpunkt) ein und erhält als Querschnittsfunktion $Q = \varphi(x) = \frac{A_2}{e^2} \cdot x^2$.

● *Führen Sie die Volumenberechnung selbständig durch! Eliminieren Sie hierbei nach der Integration die Hilfsgröße e mit Hilfe einer Proportion, die die Größen $\sqrt{A_1}$ und $\sqrt{A_2}$ enthält!*

3.4.3. Der Satz des Cavalieri

Der italienische Mathematiker BONAVENTURA CAVALIERI (1591–1647), ein Schüler GALILEIS, stellte 1635 in einem Werk die Behauptung auf, daß zwei beliebig gestaltete Körper dann gleiches Volumen haben, wenn sie bei gleich großen Grundflächen und Höhen in jeder beliebigen Zwischenhöhe gleich große Querschnittsflächen besitzen. Dieser Aussage liegt offenbar der Grundgedanke der Volumenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung zugrunde, nämlich der Aufbau des Körpers aus Volumenelementen, deren Dicke beim Grenzübergang gegen Null strebt. Da der exakte Rechenweg des Integrierens aber zu CAVALIERIS Zeit noch nicht bekannt war, konnte er seine Behauptung nicht beweisen, und die Aussage hatte infolgedessen damals den Charakter eines Axioms.

Erst mit den Mitteln der Integralrechnung und einer Klärung des Volumenbegriffs konnte die Behauptung bewiesen und zum Satz erhoben werden.

Gegeben seien zwei beliebig gestaltete Körper (Abb. 3.26.a und b). Für den Körper I (Abb. 3.26.a) gelte $Q = \varphi_1(x)$, so daß sich das

Volumen zu $V_I = \int_0^H \varphi_1(x) dx$ ergibt.

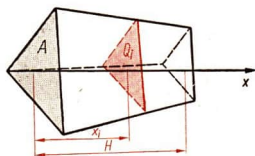
Für den Körper II (Abb. 3.26.b) gelte $q = \varphi_2(x)$,

so daß sich das Volumen zu $V_{II} = \int_0^h \varphi_2(x) dx$ ergibt.

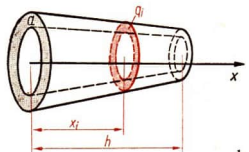
Wird jetzt nach CAVALIERIS Satz die gleiche Größe der Querschnittsflächen in jeder beliebigen Entfernung x_i von der Grundfläche vorausgesetzt, also $Q_i = q_i$, so folgt daraus:

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x).$$

Da auch die Höhen als gleich vorausgesetzt waren, also $H = h$, so sind auch die Grenzen der beiden Integrale und damit die Integrale selbst gleich.



a



b

Abb. 3.26.

$$\int_0^H \varphi_1(x) dx = \int_0^h \varphi_2(x) dx, \quad \text{also}$$

$$V_I = V_{II}.$$

Der Satz des CAVALIERI ist ein Hilfsmittel zur Herleitung von Volumenformeln komplizierterer Körper.

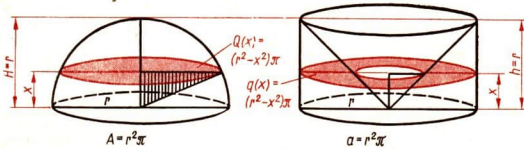


Abb. 3.27.

Beispiel 1

Das Volumen für die Halbkugel ist zu bestimmen (Abb. 3.27.).

Wegen $H = h = r$, $A = a = r^2\pi$ und $Q(x) = q(x) = r^2\pi - x^2\pi$ ist nach dem Satz des CAVALIERI das Volumen der Halbkugel gleich der Differenz der Volumina des Kreiszyinders und des Kreiskegels, also

$$V_{\text{Halbkugel}} = r^2\pi \cdot r - \frac{1}{3}r^2\pi r = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

3.4.4. Das Volumen von Rotationskörpern

Ein Rotationskörper entsteht, wenn ein Flächenstück Φ um eine Achse rotiert (Abb. 3.28.). Alle Querschnitte sind in diesem Falle Kreisflächen, deren Radius jeweils der Abstand des betreffenden Punktes P der Umrandungskurve von der Drehachse ist. Wählt man als Drehachse die

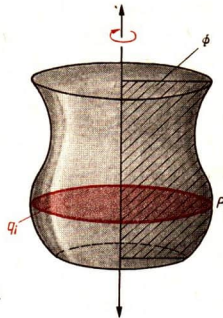


Abb. 3.28.

y -Achse

| x -Achse

eines Koordinatensystems und ist das Bild der Umrandung durch $x = g(y)$ mit $y_1 \leq y \leq y_2$ bzw. $y = f(x)$ mit $x_1 \leq x \leq x_2$ gegeben, so ist der Radius der Querschnittsfläche (des Kreises)

die Abszisse $x = g(y)$

| die Ordinate $y = f(x)$.

Als Querschnittsfunktion ergibt sich dann

$$q = x^2 \pi = [g(y)]^2 \pi \quad | \quad Q = y^2 \pi = [f(x)]^2 \pi.$$

Dann erhält man für das Volumen des Rotationskörpers

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} [g(y)]^2 dy$$

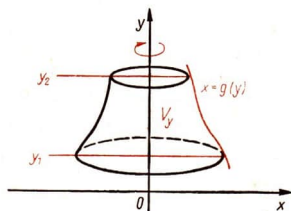


Abb. 3.29. a

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx.$$

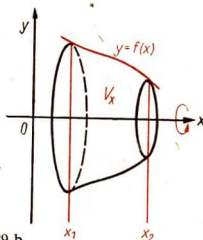


Abb. 3.29. b

Beispiel 2

Die Strecke $P_1(1; 4) P_2(5; 2)$ rotiere a) um die x -Achse; b) um die y -Achse. Man bestimme und vergleiche die Volumina der beiden entstehenden Kreiskegelstümpfe.

Eine Gleichung der Geraden, auf der $\overline{P_1 P_2}$ liegt, ergibt sich mit Hilfe der Zweipunktgleichung der Geraden zu

$$(y - 4)(5 - 1) - (x - 1)(2 - 4) = 0.$$

Daraus folgt

$$F(x, y) \equiv x + 2y - 9 = 0.$$

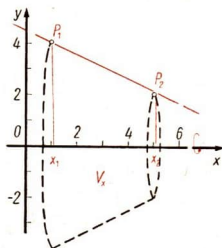


Abb. 3.30.

a) Rotation um die x -Achse (Abb. 3.30.): $V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx$

$$y = f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 5$$

$$V_x = \pi \int_1^5 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_1^5 (x^2 - 18x + 81) dx$$

$$V_x = \frac{\pi}{4} \left(\frac{x^3}{3} - 9x^2 + 81x\right) \Big|_1^5 = \frac{448}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{112}{3} \pi \approx 117$$

b) Rotation um die y -Achse (Abb. 3.31.): $V_y = \pi \int_{y_2}^{y_1} [g(y)^2] dy$

$$x = g(y) = 9 - 2y; \quad y_2 = 2; \quad y_1 = 4$$

$$V_y = \pi \int_2^4 (9 - 2y)^2 dy = \pi \int_2^4 (81 - 36y + 4y^2) dy$$

$$V_y = \pi \left(81y - 18y^2 + \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{62}{3} \pi \approx 65$$

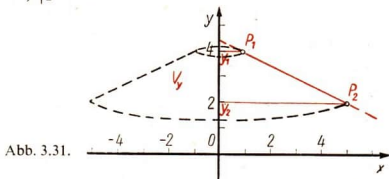


Abb. 3.31.

Ergebnis: Der erste Kegelstumpf hat ein Volumen von rund 117 Volumeneinheiten, der zweite ein Volumen von rund 65 Volumeneinheiten.

Aufgaben

1. Leiten Sie die Volumenformeln für

a) den Kreiszylinder, b) den Kreiskegel, c) den Kreiskegelstumpf mit Hilfe der Rotationskörperformel her!

Anleitungen: zu b) Legen Sie die Spitze des Kegels in den Koordinatenursprung! Wie heißt dann die Gleichung der Mantellinie? Beachten Sie, daß in ihr die Bestimmungsstücke des Kegels r bzw. d und h als Konstanten vorkommen müssen!

Zu c) Legen Sie die Mantellinie durch $P_1(0; r_1)$ und $P_2(h; r_2)$!

2. Leiten Sie die Volumenformel für die Kugel her, indem Sie diese als Rotationskörper auffassen!

Anleitung: Legen Sie den Mittelpunkt des Kreises in den Koordinatenursprung, so daß sich die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ergibt, und berechnen Sie zunächst das Volumen der Halbkugel!

Zur Herleitung der Kreisgleichung (Abb. 3.32.):

Jeder Punkt $P(x; y)$ der Kreisperipherie hat vom Mittelpunkt den konstanten Abstand r , so daß stets gilt $x^2 + y^2 = r^2$.

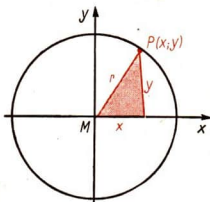


Abb. 3.32.

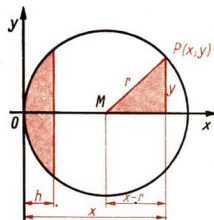


Abb. 3.33.

3. Leiten Sie die Volumenformel für das Kugelsegment $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ auf zwei Arten her!

a) Kreis in Mittelpunktslage (Abb. 3.32.; $x^2 + y^2 = r^2$)

b) Kreis in Scheitellage (Abb. 3.33.; $x^2 - 2rx + y^2 = 0$)

Zur Aufstellung der Scheitelgleichung: Das rechtwinklige Dreieck hat diesmal die Katheten y und $(x - r)$.

Warum muß in der Scheitelgleichung des Kreises das absolute Glied fehlen?

c) Welche Herleitung der Volumenformel ist rationeller?

4. Leiten Sie die Volumenformel für die Kugelschicht $V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ auf zwei Arten her!

a) Kreis in Mittelpunktslage (Abb. 3.32.: $x^2 + y^2 = r^2$)

Anleitung: Bezeichnen Sie die untere Grenze zunächst mit z ! Am Ende müssen z und r wieder eliminiert werden; dazu stehen die Beziehungen zur Verfügung (Abb. 3.34.):

$$(1) \quad \begin{array}{l} z^2 = r^2 - r_1^2 \quad | - \\ (z+h)^2 = r^2 - r_2^2 \quad | + \end{array}$$

$$(2) \quad 2zh = r_1^2 - r_2^2 - h^2$$

Benutzen Sie zur Elimination von z^2 Gleichung (1), zur Elimination von z Gleichung (2)!

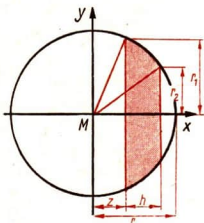


Abb. 3.34.

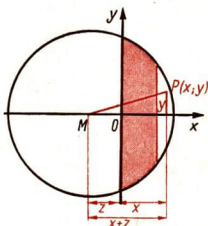


Abb. 3.35.

b) Kreis in solcher Lage, daß der Mittelpunkt des größeren Begrenzungskreises der Kugelschicht im Ursprung liegt (Abb. 3.35.).

Anleitung: Bezeichnen Sie den Abstand des Mittelpunkts vom Ursprung zunächst wieder mit z ! Das rechtwinklige Dreieck hat dann die Katheten y und $(x+z)$. Folglich ergibt sich für die Kreisgleichung:

$$(x+z)^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2 - 2xz - z^2.$$

Zur Elimination von z am Ende der Berechnung des Integrals stehen wieder die Beziehungen (1) und (2) von Aufgabe 4a zur Verfügung.

c) Vergleichen Sie beide Herleitungen! a) hat einen einfacheren Integranden als b), dafür hat b) die einfacheren Grenzen. Welcher Weg ist rationeller?

5. Lassen Sie die durch $y = x^2$ gegebene Parabel a) um die y -Achse und b) um die x -Achse rotieren! Es entstehen zwei verschiedene Rotationsparaboloide.

a) Berechnen Sie ihre Volumina, wenn beide die gleiche Höhe h haben!

- b) In welchem Verhältnis stehen diese Volumina?
 c) Welches Volumenverhältnis ergibt sich, wenn die Umrandungskurve der rotierenden Flächen in beiden Fällen im gleichen Punkt endet?
6. Die Flächen, die von den Bildern der Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n > 0$; ganzzahlig, der x -Achse und einer Parallelen zur y -Achse umrandet werden, rotieren um die x -Achse.
- a) Vergleichen Sie die Volumina der entstehenden Rotationskörper, wenn Sie alle von gleicher Höhe h wählen!
 b) Was ergibt sich speziell für $h = 1$?
 c) Welchem Grenzwert strebt die Folge dieser Volumina für $n \rightarrow \infty$ zu?
7. a) In welcher Höhe muß das Rotationsparaboloid ($y = x^2$; Rotation um die y -Achse) unterteilt werden, wenn die Volumina der entstehenden Teile im Verhältnis $m : n$ stehen sollen?
 b) Was ergibt sich speziell für $m : n = 1 : 1$?
8. Das Bogenstück vom Scheitel der Parabel, die durch $y^2 = 4x$ gegeben ist, bis zum Punkt mit der Ordinate 8 begrenzt zusammen mit der y -Achse und der Geraden $y = 8$ ein Flächenstück, das um die y -Achse rotiert. In welchem Verhältnis steht das Volumen des entstehenden Rotationsparaboloids zum Volumen des umschriebenen Kreiszyinders?
9. Werden von gekrümmten Kurven durch Geraden Segmente abgeschnitten und rotieren diese um eine Achse, so entstehen Rotationskörper, die man sich aus Teilkörpern subtraktiv zusammengesetzt denken kann (Abb. 3.36.a bis c).
 Das Volumen dieser Körper läßt sich entsprechend durch Zusammensetzen berechnen. Führen Sie das für folgende Beispiele durch! Verschaffen Sie sich dazu jeweils zunächst durch eine Skizze eine Vorstellung von der Gestalt des entstehenden Körpers!

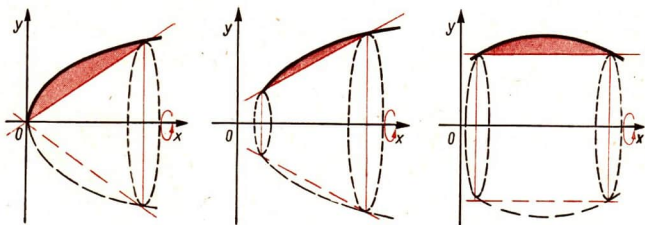


Abb. 3.36.

	Umrandungskurve	schneidende Gerade	Rotationsachse
a)	$y^2 = 4x$	$y = x$	x -Achse
b)	$x^2 + y^2 = 25$	$x + y = 5$	y -Achse
c)	$x^2 + y^2 = r^2$	$y = \frac{r}{2}$	x -Achse
d)	$y = \frac{1}{2}x^2$	$4x - 2y - 3 = 0$	beide Achsen
e)	$y = \frac{1}{2}x^3$	$y = 2x$	x -Achse
f)	$y = x^3 - 8$	$y = 4x - 8$	x -Achse

10. Ein Porzellantiegel hat die äußere Höhe $H = 10$ cm und die Dichte $\rho_p = 2,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Seine äußere und seine innere Begrenzung entstehen durch Drehung zweier Parabeln, die durch die Gleichungen $y = \frac{1}{10}x^2$ und $y = \frac{1}{10}(x^2 + 10)$ gegeben sind, um die y -Achse. Er ist bis zur Höhe $h = 2$ cm (gemessen vom äußeren Parabelscheitel aus) mit Quecksilber ($\rho_Q = 13,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$) gefüllt.

- a) Welche Masse besitzt der Tiegel samt Füllung?
 b) Wie tief taucht er beim Schwimmen im Wasser ein?

11. Ein Graphittiegel für chemische Versuche hat den in Abbildung 3.37. schematisch dargestellten Achsenschnitt (Maße in Millimeter). Die seitlichen Begrenzungen dieses Achsenschnittes sind in Wirklichkeit Parabelbögen. Die Gleichungen dieser Parabeln lauten bei der angegebenen Lage des Koordinatensystems $x^2 = \frac{15}{2}y + 625$ und $x^2 = \frac{20}{3}y + \frac{1100}{3}$. Der Tiegel ist bis 2 cm unter dem Rand mit flüssigem Zinn gefüllt ($\rho_{\text{Graphit}} = 2,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $\rho_{\text{Zinn}} = 7,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$). Bestimmen Sie die Masse des Tiegels mit Inhalt!

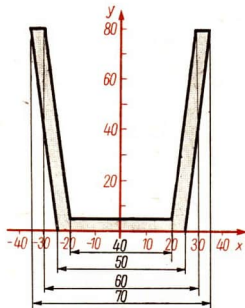
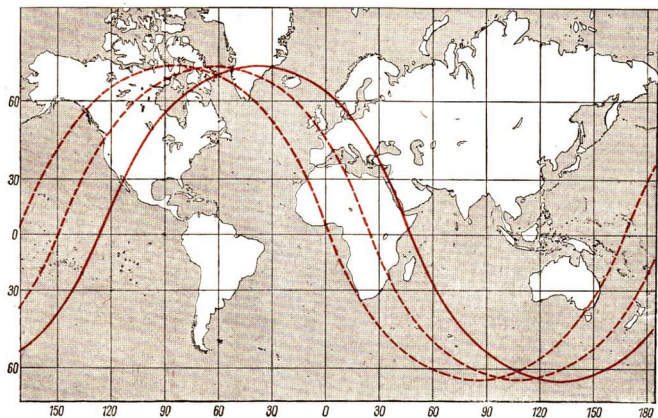


Abb. 3.37.



4. Analytische Geometrie

Der erste Gruppenflug der beiden sowjetischen Kosmonauten Major A. G. NIKOLAJEW und Oberstleutnant P. R. POPOWITSCH im August 1962 war ein bedeutendes Ereignis in der Geschichte der Weltraumfahrt. Am 11. 8. 1962 um 9.30 Uhr MEZ startete Major NIKOLAJEW mit der *Восток III* und führte 16 Erdumkreisungen durch, bevor ihm am 12. 8. 1962 um 9.02 Uhr MEZ Oberstleutnant POPOWITSCH mit der *Восток IV* folgte.

Projiziert man eine solche Flugbahn auf die Erdoberfläche und zwar so, daß die Projektionsstrahlen auf den Erdmittelpunkt gerichtet sind, so kann man u. a. ablesen, welche Gebiete überflogen wurden und welche Neigung die Satellitenbahn zur Ekliptik besitzt. Das Kapitelbild stellt eine solche Projektion dar, auf der drei aufeinander folgende Erdumkreisungen abgebildet sind. Da sich während der verschiedenen Umkreisungen der Bewegungsablauf regelmäßig wiederholt und die Neigung sich nicht ändert, unterscheiden sich die Projektionen der einzelnen Umkreisungen in ihrer Form nicht voneinander. Lediglich eine Verschiebung zeichnet sich ab, die auf die Erddrehung zurückzuführen ist. Man kann also mit Hilfe des Gradnetzes aus der Projektion auch die Umlaufzeit des Raumschiffes errechnen und einen Fahrplan für den weiteren Flug aufstellen.

Die analytische Untersuchung geometrischer Figuren und Gebilde (zum Beispiel Kurven, Flächen, Ebenen), also die Anwendung rechnerischer Verfahren auf geometrische Probleme, ist Aufgabe der analytischen Geometrie.

4.1. Punkt und Strecke

4.1.1. Koordinaten eines Punktes in der Ebene

- Beschreiben Sie den Aufbau eines kartesischen Koordinatensystems! Was versteht man unter der Abszisse, der Ordinate, was unter den Koordinatenachsen?

Die Lage eines beliebigen Punktes P in der Ebene läßt sich mit Hilfe eines Koordinatensystems bestimmen.

Als Koordinatensystem können zwei Geraden verwendet werden, die einander im Punkt O schneiden (Abb. 4.1.).

Vom Punkt O aus wird auf jeder Achse eine Einheit abgetragen. Mit den Endpunkten der Einheitsstrecken erhält man E_x und E_y . Ist P in der Abbildung 4.1. ein beliebiger Punkt der Ebene, so kann man durch P je eine Parallele zu jeder Achse legen. Die Schnittpunkte begrenzen auf den Achsen Abschnitte, denen reelle Zahlen,

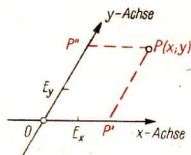


Abb. 4.1.

die Maßzahlen x bzw. y der Abschnitte $\overline{OP'}$ und $\overline{OP''}$, zugeordnet werden können. Man nennt diese Zahlen die Koordinaten des Punktes P und schreibt $P(x; y)$.

Nach diesem Verfahren werden jedem Punkt der Ebene eindeutig zwei Zahlen x und y zugeordnet. Umgekehrt entspricht jedem Zahlenpaar ein Punkt.

- Erklären Sie für ein solches Koordinatensystem die Begriffe „positiver und negativer Drehsinn“ sowie „Quadrant“! Stellen Sie eine Tabelle auf, aus der für Punkte in den vier Quadranten die Vorzeichen der Koordinaten ermittelt werden können!

Meistens werden rechtwinklige Koordinatensysteme verwendet. Es gibt jedoch auch Aufgaben, für die schiefwinklige Koordinatensysteme vorzuziehen sind.

Aufgaben

- Gegeben sind durch die Maßzahlen von Strecken die Zahlen a und b . Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Koordinatensystem die folgenden Punkte!
 $P_1(a; b)$; $P_2(a; a)$; $P_3(-b; -b)$; $P_4(-a; b)$; $P_5(a; -b)$;
 $P_6(a + b; a)$; $P_7(a + b; a - b)$; $P_8(a - b; b - a)$;
 $P_9(a - b; -a - b)$
- Die Eckpunkte eines Dreiecks ABC sind $A(4; 5)$, $B(1; 1)$ und $C(6; -4)$. Welche Koordinaten haben die Eckpunkte des zum Dreieck ABC in bezug auf die y -Achse symmetrischen Dreiecks $A'B'C'$?
- Ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ hat die in Abbildung 4.2. dargestellte Lage. Die Länge der Seiten ist 4. Welche Koordinaten haben die Eckpunkte?

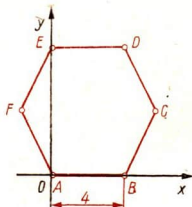


Abb. 4.2.

4.1.2. Verschiebung und Drehung des Koordinatensystems

Die Abbildung 4.3. enthält in der Ebene des xy -Koordinatensystems den Punkt $\bar{O}(a; b)$ als Ursprung eines weiteren Koordinatensystems, dessen ξ -Achse und η -Achse parallel und gleichgerichtet zur x - bzw. y -Achse sind. Die Längeneinheiten stimmen in beiden Systemen überein.

Für die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P(x; y)$ gilt dann (Abb. 4.3.):

$$(1a) \quad x = a + \xi \quad ; \quad (1b) \quad y = b + \eta.$$

Umgekehrt gelten die entsprechenden Transformationsgleichungen

$$\xi = x - a \quad ; \quad \eta = y - b.$$

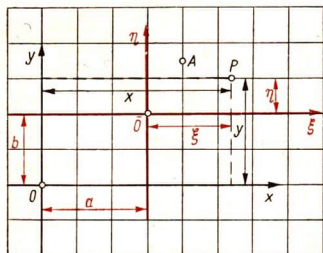


Abb. 4.3.

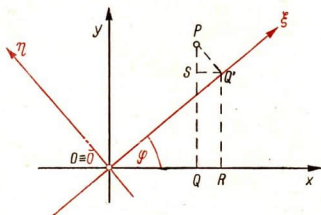


Abb. 4.4.

Man spricht im vorliegenden Fall von einer **Verschiebung** oder **Translation** des Koordinatensystems.

Beispiel 1

Ein Punkt A habe im xy -System die Koordinaten 4 und 3,5. Der Ursprung des $\xi\eta$ -Systems hat in bezug auf das xy -System die Koordinaten 3 und 2. Die Koordinaten des Punktes A im $\xi\eta$ -System sind dann 1 und 1,5.

Außer der Translation ist eine Lageveränderung des Koordinatensystems in der Ebene auch durch **Drehung** oder **Rotation** um den Koordinatenanfangspunkt möglich. Die dafür geltenden Transformationsgleichungen lassen sich aus Abbildung 4.4. herleiten.

Das xy -System wird um den Ursprung im mathematisch positiven Sinn um den Winkel φ gedreht und geht in das $\xi\eta$ -System über. Es gelten dann folgende Beziehungen:

$$\overline{PQ} = y; \quad \overline{OQ} = x; \quad \overline{PQ'} = \eta; \quad \overline{OQ'} = \xi$$

$$\text{und } \overline{Q'R} \perp \overline{OR}; \quad \overline{Q'S} \perp \overline{PQ}; \quad \sphericalangle QOQ' = \sphericalangle QPQ' = \varphi.$$

Damit wird:

$$x = \overline{OQ} = \overline{OR} - \overline{QR} = \overline{OR} - \overline{Q'S}; \quad y = \overline{PQ} = \overline{QS} + \overline{PS} = \overline{Q'R} + \overline{PS};$$

$$(2a) \quad x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \quad (2b) \quad y = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.$$

Mit diesen Formeln kann man die Koordinaten eines Punktes im $\xi\eta$ -System in die Koordinaten im xy -System überführen.

Die Umkehrformeln, die entweder aus (2) oder mit Hilfe geometrischer Überlegungen hergeleitet werden können, lauten:

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi; \quad \eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

● Beweisen Sie die Umkehrformeln zu (2)!

In der Abbildung 4.5. geht das $\xi\eta$ -System aus dem xy -System durch Translation um a bzw. b und anschließende Drehung um φ hervor. Für den Fall, daß sich die Transformation aus Translation und Drehung zusammensetzt, gelten die Gleichungen:

$$(3a) \quad x = a + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi;$$

$$(3b) \quad y = b + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.$$

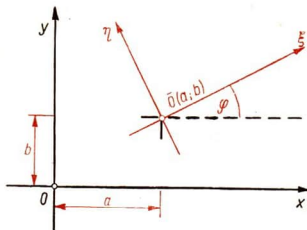


Abb. 4.5.

4.1.3. Länge und Richtung einer Strecke

Jede Strecke kann durch zwei voneinander verschiedene Punkte, ihre Endpunkte, eindeutig bestimmt werden. In der Abbildung 4.6. sind $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ die Endpunkte einer Strecke. Um die Länge s dieser Strecke zu ermitteln, werden die senkrechten Projektionen von P_1 und von P_2 auf die x -Achse eingezeichnet. Da das Dreieck P_1RP_2 rechtwinklig ist, ergibt sich nach dem Satz des PYTHAGORAS:

$$s = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(\overline{P_1R})^2 + (\overline{P_2R})^2}.$$

Wegen $\overline{P_1R} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{OQ_2} - \overline{OQ_1} = x_2 - x_1$ und $\overline{P_2R} = \overline{P_2Q_2} - \overline{Q_2R} = y_2 - y_1$, ergibt sich durch Einsetzen der gefundenen Werte:

$$(4) \quad s = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Die Herleitung der Formel (4) erfolgte für den ersten Quadranten. Die Formel gilt aber für jede beliebige Lage der Punkte P_1 und P_2 .

Für den Sonderfall, daß einer der beiden Punkte mit dem Ursprung $O(0; 0)$ zusammenfällt und der andere die Koordinaten x_1 und y_1 hat, erhält man

$$(4a) \quad s = \overline{OP} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

● Leiten Sie die Formel mit Hilfe geometrischer Überlegungen her!

Beispiel 2

Wie lang ist die Strecke mit den Endpunkten $P_1(5; -1)$ und $P_2(-3; 5)$?

$$s = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(-3 - 5)^2 + (5 + 1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + 6^2}$$

$$s = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100}$$

$$s = 10$$

Zur Bestimmung der Richtung einer Strecke legt man zunächst einen Durchlaufsin fest. In der Abbildung 4.6. wird zum Beispiel festgelegt, daß die Strecke $\overline{P_1P_2}$ von P_1 nach P_2 durchlaufen werde. Damit ist jeder Strecke ein positiver Durchlaufsin, nämlich der von P_1 nach P_2 , zugeordnet. Dann ist $\overline{P_1P_2}$ eine gerichtete (orientierte) Strecke. Man schreibt kurz $\overrightarrow{P_1P_2}$ und spricht: Strecke von P_1 nach P_2 .

Die Richtung einer gerichteten Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ erhält man, indem ein Strahl mit dem Anfangspunkt O von der positiven Richtung der x -Achse ausgehend im mathematisch-positiven Sinn gedreht wird, bis er mit der Strecke gleichgerichtet ist (Abb. 4.6.). Als Richtungswinkel bezeichnet man den Winkel φ ($0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$). Aus Abbildung 4.6. ergeben sich zur eindeutigen Bestimmung des Richtungswinkels φ zwei Gleichungen:

$$(5a) \quad \cos \varphi = \frac{x_2 - x_1}{s} \quad \text{und} \quad (5b) \quad \sin \varphi = \frac{y_2 - y_1}{s}.$$

Begründen Sie, weshalb für (5a) und (5b) die Bedingung $s \neq 0$ gilt!

Wenn einer der beiden Punkte mit dem Koordinatenursprung $O(0; 0)$ zusammenfällt und der andere Endpunkt der Strecke die Koordinaten x_1 und y_1 hat, erhält man

$$(6a) \quad \cos \varphi = \frac{x_1}{s} \quad \text{und} \quad (6b) \quad \sin \varphi = \frac{y_1}{s}.$$

Beispiel 3

Der Richtungswinkel der Strecke aus Beispiel 2 ist zu ermitteln.

$$s = 10$$

$$\cos \varphi = \frac{-8}{10} = -0,8; \quad \sin \varphi = \frac{6}{10} = 0,6$$

Ergebnis: Der Richtungswinkel φ beträgt rund 143° .

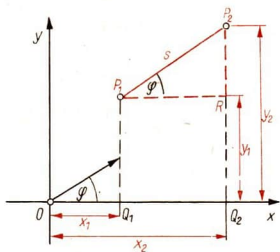


Abb. 4.6.

Aufgaben

1. Berechnen Sie den Abstand der folgenden Punkte vom Koordinatenursprung!
- a) $P(3; 4)$ b) $P(3; -4)$ c) $P(6; 8)$ d) $P(-6; -8)$ e) $P(5; -12)$
 f) $P(-4; 5)$ g) $P(3; -7)$ h) $P(3,1; -4,2)$ i) $P\left(-2\frac{1}{4}; 3\frac{1}{3}\right)$ k) $P(0; 4)$
 l) $P(-5; 0)$ m) $P(a; b)$ n) $P(a; -a)$ o) $P(a-b; a+b)$ p) $P(3a; -3a)$
2. Berechnen Sie die Länge s der Strecke P_1P_2 !

	a)	b)	c)	d)	e)
P_1	(1; 2)	(2; 2)	(3; 8)	(-6; -2)	(1,5; 33,1)
P_2	(4; 6)	(5; 6)	(-3; 8)	(0; 6)	(15,7; -2,8)

	f)	g)	h)	i)
P_1	$\left(1\frac{1}{2}; -3\frac{1}{4}\right)$	(a; b)	(-m; n)	(a + b; a - b)
P_2	$\left(3\frac{1}{3}; 4\frac{1}{8}\right)$	(b; a)	(m; -n)	(a - b; a + b)

Zeichnen Sie die Strecke P_1P_2 in ein Koordinatensystem, und prüfen Sie durch Messen das Ergebnis!

3. Ermitteln Sie die Richtung der Strecken $\overrightarrow{P_1P_2}$ in Aufgabe 2a bis e rechnerisch und zeichnerisch!
4. Berechnen Sie den Abstand der Punkte $A(x_1; y_1)$ und $B\left[\frac{2(x_1 + ay_1)}{1 + a^2}; \frac{2a(x_1 + ay_1)}{1 + a^2}\right]$!
5. Berechnen Sie die Seitenlängen der Dreiecke, deren Eckpunkte A, B und C folgende Koordinaten haben!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	(0; 0)	(-1; -1)	(9; 0)	(11; 46)	(a; b)	(a + b; a + b)
B	(25; 0)	(3; -5)	(-5; 0)	(21; 16)	(a; -b)	(-a - b; -a - b)
C	(0; 33)	(3; 7)	(0; 12)	(-9; 21)	(0; -b)	(a + b; -a - b)

Prüfen Sie die Ergebnisse durch eine Zeichnung nach!

6. Untersuchen Sie, von welcher besonderen Art die Dreiecke sind, deren Eckpunkte die folgenden Koordinaten haben!
- a) $A(0; 2); B(1; -2); C(-3; -1)$ b) $A(3; 3); B(-1; 1); C(1; -2)$
 c) $A(4; 2); B(-2; 2); C(1; -5)$ d) $A(2; 3); B(4; 1); C(4; 5)$
 e) $A(3; 0); B(3; 7); C(-5; 0)$ f) $A(-1; 6); B(2; -3); C(8; -1)$
7. Zeigen Sie, daß das von den Eckpunkten $A(-1; -\sqrt{2}), B(\sqrt{2}; -1)$ und $C(2 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 1)$ gebildete Dreieck gleichschenkelig ist!

8. Zeigen Sie, daß das Dreieck mit den Eckpunkten $A(1; 2)$, $B(3; -1)$ und $C\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2}; \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ gleichseitig ist!
9. Zeigen Sie, daß das von den Eckpunkten $A\left(1+\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ und $C\left(1; \frac{1}{2}\right)$ gebildete Dreieck rechtwinklig ist! Wo liegt der rechte Winkel?
10. Untersuchen Sie, von welcher besonderen Art die Vierecke sind, deren Eckpunkte die folgenden Koordinaten haben!
- a) $A(1; 3)$; $B(2; 1)$; $C(5; 2)$; $D(4; 4)$ b) $A(1; 2)$; $B(6; 2)$; $C(5; 4)$; $D(2; 4)$
 c) $A(2; 2)$; $B(3; -1)$; $C(0; -2)$; $D(-1; 1)$ d) $A(m; 0)$; $B(0; m)$; $C(-m; 0)$; $D(0; -m)$
11. Berechnen Sie die Längen der von den Eckpunktpaaren $A(1; 5)$, $B(8; 6)$ und $C(4; 2)$, $D(5; 9)$ bestimmten Strecken, und erklären Sie das Ergebnis geometrisch!

4.1.4. Koordinaten des Teilpunktes einer Strecke

Ebenso, wie man eine gerichtete Strecke betrachten kann, ist es auch möglich, gerichtete Geraden einzuführen. Sind P_1 und P_2 zwei Punkte der Geraden g , so kann man auf g etwa dadurch einen positiven Durchlaufssinn $\overrightarrow{(P_1P_2)}$ einführen, daß man denjenigen Durchlaufssinn von g zum positiven erklärt, bei dem ein die Gerade g beständig in dieser Richtung durchlaufender Punkt P zuerst nach P_1 und dann nach P_2 gelangt. Ist jetzt P ein Punkt, der auf P_1 folgt, so soll unter $\overline{P_1P} = d$ der Abstand des Punktes P von P_1 verstanden werden. Folgt aber P_1 auf P , so soll $\overline{P_1P} = -d$ sein, wobei $d > 0$ den Abstand von P und P_1 bedeutet. Bei dieser Festsetzung gilt dann offenbar $\overline{PP_1} = -\overline{P_1P}$. Ist jetzt T ein beliebiger von P_1 und P_2 verschiedener Punkt der Geraden durch P_1 und P_2 mit dem Durchlaufssinn $\overrightarrow{(P_1P_2)}$ und bedeutet λ den Quotienten $\frac{\overline{P_1T}}{\overline{TP_2}}$, so sagt man, T teile die Strecke im Verhältnis λ und nennt λ das Teilverhältnis. Liegt T zwischen P_1 und P_2 (innere Teilung, Abb. 4.7.), so ist λ positiv. Liegt aber T außerhalb der Strecke $\overline{P_1P_2}$ (äußere Teilung, Abb. 4.8.), so ist λ negativ.

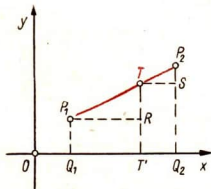


Abb. 4.7.

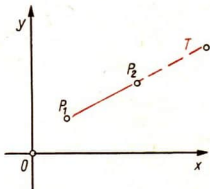


Abb. 4.8.

Die Punkte T, P_1 und P_2 liegen in Abbildung 4.7. alle im ersten Quadranten. Die senkrechten Projektionen der Punkte T, P_1 und P_2 auf die x -Achse seien T', Q_1 und Q_2 . Die Parallelen zur x -Achse durch P_1 bzw. T schneiden $\overline{T'T'}$ bzw. $\overline{P_2Q_2}$ in R bzw. S . Es werden nun die Dreiecke RTP_1 und STP_2 betrachtet. Diese Dreiecke sind einander ähnlich und man erhält:

$$\frac{\overline{P_1T}}{\overline{TP_2}} = \frac{\overline{P_1R}}{\overline{TS}} = \frac{\overline{Q_1T'}}{\overline{T'Q_2}} = \frac{x_T - x_1}{x_2 - x_T} = \lambda.$$

Daraus erhält man die Abszisse des Teilpunktes T und durch entsprechende Überlegungen auch die Ordinate

$$(7a) \quad x_T = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad (7b) \quad y_T = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

● Führen Sie die Überlegungen zur Berechnung der Ordinate selbständig durch!

Die Herleitung der Formeln (7a) und (7b) wurde an Hand einer Figur vorgenommen, die ganz im ersten Quadranten liegt. Sie gilt aber für jede beliebige Lage der Punkte T, P_1 und P_2 .

Für $\lambda = 1$ erhält man die Koordinaten des Mittelpunktes $M(x_m; y_m)$ der Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$(8) \quad x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

● Prüfen Sie durch Rechnung nach, daß (8) tatsächlich die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{P_1P_2}$ sind!

Aufgaben

- Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecken an, deren Endpunkte folgende Koordinaten haben!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
P_1	(6; 6)	(4; 12)	(0; 6)	(-2; -6)	(-1; -1)	(a; 0)	(a; b)
P_2	(2; 2)	(2; 15)	(4; 2)	(-3; 4)	(3; -3)	(a; b)	(c; d)

Konstruieren Sie die Mittelpunkte der Strecken der Aufgaben a) und f)!

- Konstruieren Sie den Mittelpunkt der Strecke zwischen dem Koordinatenursprung und dem Punkt $P_1(x_1; y_1)$ bzw. $A(7; 9)$, und geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes an!
- Verlängern Sie die Verbindungsstrecken des Koordinatenanfangspunktes mit den Punkten $A(-3; 2)$, $B(3; 3)$, $C(4; -6)$ und $P_1(x_1; y_1)$ nach beiden Seiten um sich selbst! Welches sind die Koordinaten der Endpunkte? Wie lang sind die Strecken? Welchen Richtungswinkel haben die gerichteten Strecken \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} und $\overrightarrow{OP_1}$?

- Gegeben sind die Punkte $A(-1; -3)$ und $B(2; -1)$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der auf der Verlängerung der Strecke \overline{AB} symmetrisch zu A in bezug auf B ist!
- Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch die Koordinaten des Teilpunktes T , der die gerichtete Strecke \overrightarrow{OP} mit $P(8; -3)$ im Verhältnis a) $\lambda = -4$ und b) $\lambda = 3$ teilt!
- Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Teilpunkte T_1 und T_2 , die die Strecke $\overline{P_1P_2}$ mit $P_1(1; 1)$ und $P_2(7; 4)$ im Verhältnis $\lambda = -2$ bzw. $\lambda = 2$ teilen! Prüfen Sie durch eine Zeichnung das Ergebnis nach!
- Halbieren Sie die Seiten des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(1; 2)$, $B(6; 1)$ und $C(2; 5)$, und weisen Sie nach, daß das von den Seitenmitten gebildete Dreieck Seiten hat, die halb so groß wie die Seiten des ursprünglichen Dreiecks sind! Prüfen Sie das Ergebnis durch eine Zeichnung nach! Zeigen Sie rechnerisch und elementargeometrisch, daß die Aussage auch für ein beliebiges Dreieck gilt!
- Bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch die Längen der Seitenhalbierenden im Dreieck mit den Eckpunkten $A(1; 1)$, $B(7; 2)$, $C(2; 7)$!
- Die Koordinaten des Schwerpunktes eines Systems materieller Punkte mit den Massen 1 und den Koordinaten $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, ..., $A_n(x_n; y_n)$ sind:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}; \quad y_s = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Welche Koordinaten haben die Schwerpunkte

- des Systems mit den Eckpunkten $(1; 2)$, $(6; 1)$ und $(2; 5)$,
- des Systems mit den Eckpunkten $(1; 3)$, $(2; 1)$, $(5; 2)$ und $(4; 4)$?

4.1.5. Flächeninhalt eines Dreiecks

Ein Dreieck ist durch die Koordinaten seiner Eckpunkte $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ und $P_3(x_3; y_3)$ bestimmt. Um den Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ durch die Koordinaten der Eckpunkte darzustellen, fällt man von P_1 , P_2 und P_3 die Lote auf die x -Achse (Abb. 4.9.) und erhält so die Trapeze $Q_1Q_3P_3P_1$, $Q_3Q_2P_2P_3$ sowie $Q_1Q_2P_2P_1$. Bezeichnet man die Trapezflächen mit A_1 , A_2 und A_3 und die Inhalte dieser Flächen mit I_1 , I_2 und I_3 , so gilt für die Dreiecksfläche in Abbildung 4.9.:

$$I = I_1 + I_2 - I_3.$$

Unter Verwendung der Koordinaten der Eckpunkte können die Inhalte der Trapezflächen nun folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$I_1 = \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1); \quad I_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3);$$

$$I_3 = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1).$$

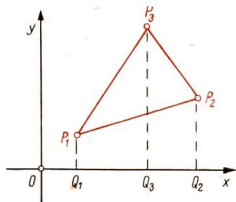


Abb. 4.9.

Als Flächeninhalt I für das Dreieck $P_1P_2P_3$ ergibt sich somit

$$I = \frac{1}{2} [(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_2 + y_1)(x_1 - x_2)]$$

oder

$$(9) \quad I = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

Die Formel (9) gilt auch, wenn die Punkte P_1 , P_2 und P_3 nicht alle im ersten Quadranten liegen.

Es ist jedoch folgendes zu beachten. Die rechte Seite von (9) gibt (vgl. auch Abschnitt 3.2.7.) den sogenannten vorzeichenbehafteten Flächeninhalt an. Vertauscht man nämlich etwa P_2 und P_3 miteinander, so erhält man:

$$\begin{aligned} I_{132} &= \frac{1}{2} [x_1(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_3)] \\ &= -\frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = -I_{123}. \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich, daß I genau dann positiv ist, wenn bei derjenigen Durchlaufung des Dreiecks, bei der die Punkte P_1, P_2, P_3 in der angegebenen Anordnung aufeinander folgen, die Fläche zur Linken liegt, wenn also das Dreieck positiv orientiert ist!

Für die Maßzahl A des (nicht vorzeichenbehafteten) Flächeninhaltes gilt schließlich:

$$(10) \quad A = |I| = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

Beispiel 4

Es ist die Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$ mit $P_1(5; -1)$, $P_2(-3; 5)$ und $P_3(-6; -4)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [5(5 + 4) - 3(-4 + 1) - 6(-1 - 5)] \\ A &= 45 \end{aligned}$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Flächen der Dreiecke mit den folgenden Eckpunkten!

- a) $P_1(1; 1)$; $P_2(5; 4)$; $P_3(2; 6)$ b) $P_1(4; 3)$; $P_2(-4; 3)$; $P_3(-4; -3)$
c) $P_1(0; 0)$; $P_2(6; 8)$; $P_3(13; 5)$ d) $P_1(0; 0)$; $P_2(x_2; y_2)$; $P_3(x_3; y_3)$

Zeichnen Sie die Dreiecke, und überprüfen Sie die gefundenen Ergebnisse!

- Ein Streckenzug ist durch die Punkte $A(0; 4)$, $B(1; 6)$, $C(4; 3)$ und $D(6; 7)$ bestimmt. Wie groß ist das Flächenstück, das von der y -Achse, der x -Achse, dem Streckenzug und dem Lot von D auf die x -Achse begrenzt wird?
- Die Eckpunkte eines Siebenecks sind $A_1(-7; -4)$, $A_2(-2; 6)$, $A_3(3; 0)$, $A_4(6; -2)$, $A_5(2; 7)$, $A_6(-4; 4)$ und $A_7(-1; 2)$.
Zeichnen Sie diese Figur in ein Koordinatensystem!
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Siebenecks!
- Geben Sie die Bedingung dafür an, daß drei Punkte $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ und $P_3(x_3; y_3)$ auf einer Geraden liegen!

4.2. Die Geradengleichungen

1. Wiederholen Sie, was Sie über lineare Funktionen gelernt haben!

2. Welche Bilder erhält man bei der graphischen Darstellung der Funktionen $y = x$, $y = 3x$, $y = 3x + 4$ und $y = -3x - 4$? Zeichnen Sie die Funktionsbilder!

3. Welche Bedeutung haben die m und n bei der Funktion $y = mx + n$?

4. Stellen Sie eine Tabelle zusammen, in der folgendes enthalten ist:

a) die Größe des Winkels, den die Gerade, die durch die Funktion $y = mx$ dargestellt wird, mit der x -Achse bildet und

b) der Verlauf der Geraden, wenn m die folgenden Werte annimmt?

$$0 < m < 1; \quad m = 1; \quad m > 1; \quad 0 > m > -1; \quad m = -1; \quad m < -1.$$

Jede Gerade in der Ebene ist entweder durch einen Punkt der Geraden und ihre Richtung oder auch durch zwei Punkte der Geraden eindeutig bestimmt. Man erhält, wenn man diese beiden Fälle betrachtet, die Hauptformen der Geradengleichung.

4.2.1. Die Punktgleichung der Geraden

Die Gerade g in Abbildung 4.10. verläuft durch den festen Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und bildet mit der x -Achse in ihrer positiven Richtung den Richtungswinkel α . Um diesen Winkel α muß die x -Achse im mathematisch positiven Sinn gedreht werden, wenn sie parallel zur Geraden g verlaufen soll. Der Wert $m = \tan \alpha$ ist die **Steigung** der Geraden.

Für einen beliebigen von $P_1(x_1; y_1)$ verschiedenen Punkt $P_2(x_2; y_2)$, der auf der Geraden g liegt, gilt dann:

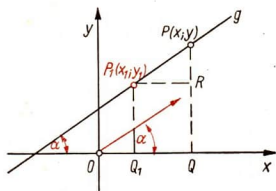


Abb. 4.10.

$$\frac{\overline{P_2R}}{\overline{P_1R}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha = m, \text{ falls } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ ganzzahlig, ist.}$$

● *Begründen Sie die Einschränkung!*

Sieht man P_2 als veränderlichen (laufenden) aber von P_1 verschiedenen Punkt von g an, also $P_2 = P(x; y) \neq P_1$, so erhält man (Abb. 4.10.)

$$(11) \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

und nach Multiplikation mit $(x - x_1)$ die **Punktgleichung der Geraden**

$$(12) \quad y - y_1 = m(x - x_1).$$

Für (12) kann die Einschränkung $P \neq P_1$ aufgehoben werden, so daß die Koordinaten aller Punkte P der Geraden der Gleichung (12) genügen.

■ Beispiel 5

Es ist die Gleichung der Geraden g aufzustellen, die durch den Punkt $P_1(5; -1)$ und die Steigung $m = -\frac{3}{4}$ bestimmt ist.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 5)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

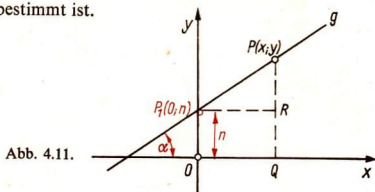


Abb. 4.11.

● *Leiten Sie die Punktgleichung für den Sonderfall her, daß die Gerade durch den Punkt $P_1(0; n)$ und den Winkel α festgelegt ist (Abb. 4.11.)! Der Punkt $P(x; y)$ sei wieder ein variabler Punkt der Geraden.*

Als Ergebnis dieses Schülersauftrages erhalten Sie die **Normalform der Geradengleichung**:

$$(13) \quad y = mx + n.$$

4.2.2. Die Zweipunktegleichung der Geraden

Die Gerade g in Abbildung 4.12. verläuft durch die festen Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ mit $P_1(x_1; y_1) \neq P_2(x_2; y_2)$. Zieht man den variablen Punkt $P(x; y)$ hinzu, so gilt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{P_1S}} = \frac{\overline{P_2R}}{\overline{P_1R}}.$$

Drückt man die Strecken mit Hilfe der Koordinaten aus, so erhält man

$$(14) \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

falls $x_1 \neq x_2$ und

$P(x; y) \neq P_1(x_1; y_1)$ ist.

Durch Umformung erhält man hieraus

$$(14a) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

und schließlich die

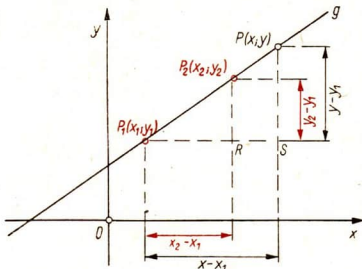


Abb. 4.12.

Zweipunktgleichung der Geraden

$$(14b) \quad (y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

In (14b) können die Einschränkungen von (14) aufgehoben werden, so daß die Koordinaten aller Punkte P der Geraden der Gleichung (14b) genügen. Aus (14a) erkennt man leicht, daß gilt:

$$(15a) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

und

$$(15b) \quad n = y_1 - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}, \quad \text{falls } x_1 \neq x_2 \text{ ist.}$$

Wenn $x_1 = x_2$ bzw. $y_1 = y_2$ gilt, so verläuft die Gerade parallel zur y -Achse bzw. x -Achse. Die Gleichung der Geraden lautet dann $x = x_1$ bzw. $y = y_1$.

Beispiel 6

Es ist eine Gleichung der Geraden g aufzustellen, die durch die Punkte $P_1(5; -1)$ und $P_2(-3; 5)$ bestimmt wird.

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

$$(y + 1)(-3 - 5) - (x - 5)(5 + 1) = 0$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

Leiten Sie die Zweipunktgleichung der Geraden für den Sonderfall her, daß der eine Punkt $P_1(0; b)$ auf der y -Achse und der andere Punkt $P_2(a; 0)$ auf der x -Achse liegt (Abb. 4.13.)!

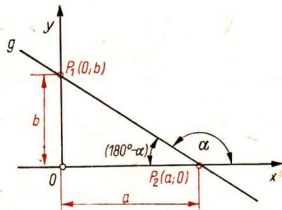


Abb. 4.13.

Sind die beiden Punkte P_1 und P_2 vom Ursprung verschieden, so erhalten Sie als Ergebnis des Schülerauftrags die **Achsenabschnittsgleichung der Geraden**

$$(16) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

● Erläutern Sie die Bedeutung von a und b insbesondere für das Zeichnen der Geraden!

In der folgenden Übersicht werden die bisher behandelten Geradengleichungen zusammengestellt:

Form der Geradengleichung	Formel	Bestimmungsstücke
Punktgleichung	$y - y_1 = m(x - x_1)$	fester Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und Steigung $m = \tan \alpha$
Sonderfall der Punktgleichung mit $P_1(0; n)$	$y = mx + n$ (m, n beliebig reell)	Punkt $P_1(0; n)$ und Steigung m
Sonderfall der Punktgleichung mit $P_1(0; 0)$	$y = mx$	Punkt $P_1(0; 0)$ und Steigung m
Zweipunktgleichung	$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$	zwei feste Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$
Achsenabschnittsgleichung	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Achsenabschnitte a und b [Punkte $P_1(a; 0)$ und $P_2(0; b)$]

4.2.3. Die allgemeine Geradengleichung

Wie bereits aus der Lehre von den Funktionen bekannt ist, läßt sich eine beliebige Gleichung ersten Grades zwischen den Veränderlichen x und y stets auf die Form

$$(17) \quad Ax + By + C = 0$$

bringen, wobei für das folgende noch vorausgesetzt werden soll, daß A und B nicht gleichzeitig Null sind. Man bezeichnet die Gleichung $Ax + By + C = 0$ als **allgemeine Geradengleichung**.

Aus der Zweipunktgleichung

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

erhält man sie, wenn man $A = -(y_2 - y_1)$, $B = x_2 - x_1$ und $C = x_1y_2 - x_2y_1$ setzt. Also läßt sich jede Gerade in der Form (17) darstellen.

Um zu zeigen, daß auch (17) stets eine Gerade darstellt, sobald nicht A und B gleichzeitig Null sind, werden zwei Fälle unterschieden:

1) $B \neq 0$; 2) $B = 0$, dann ist $A \neq 0$.

Im Fall 1) erhält man, indem man beide Seiten von (17) durch B dividiert, die Gleichung

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Das ist aber die Gleichung einer Geraden in der Form $y = mx + n$ mit der Steigung $m = -\frac{A}{B}$ und dem Abschnitt $n = -\frac{C}{B}$ auf der y -Achse.

Im Fall 2) erhält man aus (17) die Gleichung $x = -\frac{C}{A}$, durch die eine Parallele zur y -Achse dargestellt wird.

Multipliziert man beide Seiten von (17) mit einer beliebigen von Null verschiedenen reellen Zahl k , so entsteht die Gleichung

$$(17a) k \cdot Ax + k \cdot By + k \cdot C \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

mit

$$(17b) A_1 = kA, B_1 = kB \text{ und } C_1 = kC,$$

die dieselbe Gerade darstellt. Man kann umgekehrt zeigen, daß zwei Gleichungen $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, bei denen die Koeffizienten nicht proportional sind, d. h., für die keine Relation der Form (17b) besteht, zwei verschiedene Geraden darstellen.

4.3. Zwei Geraden

4.3.1. Schnittpunkt zweier Geraden

Die Gleichungen

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ und } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

seien die allgemeinen Gleichungen zweier Geraden.

Wenn die Geraden einen Punkt $P_0(x_0; y_0)$ gemeinsam haben, so müssen dessen Koordinaten beiden Gleichungen genügen. Man erhält also für x_0 und y_0 die folgenden beiden Bestimmungsgleichungen:

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$$

$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich, falls $A_1B_2 \neq A_2B_1$ ist, die Schnittpunktkoordinaten:

$$(18) \quad x_0 = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \quad y_0 = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

● *Führen Sie die Berechnungen von x_0 und y_0 durch!*

Ohne den Beweis auszuführen, sei bemerkt, daß im Falle $A_1 B_2 = A_2 B_1$ die beiden betrachteten Geraden zueinander parallel sind. Sie haben dann entweder gar keinen gemeinsamen Punkt oder unendlich viele gemeinsame Punkte.

■ **Beispiel 1**

Es soll der Schnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_2 bestimmt werden, die durch die Gleichungen $3x + y - 7 = 0$ und $2x - y - 3 = 0$ gegeben sind.

$$x_0 = \frac{1 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-7)}{3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$y_0 = \frac{2 \cdot (-7) - 3 \cdot (-3)}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Der Schnittpunkt ist $P_0(2; 1)$.

■ **Beispiel 2**

Die durch die Gleichungen $3x + 5y - 3 = 0$ und $6x + 10y + 7 = 0$ gegebenen Geraden sind auf Schnittpunkte zu untersuchen.

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) = (3 \cdot 10 - 5 \cdot 6) = 0$$

Die Geraden verlaufen parallel und wegen

$$6x + 10y + 7 \equiv 2[3x + 5y - 3] + 13$$

können nicht beide Gleichungen durch ein Wertepaar x_1, y_1 gleichzeitig erfüllt werden, also existiert kein Schnittpunkt.

4.3.2. Parallelität und Orthogonalität zweier Geraden

Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn ihre Richtungswinkel α_1 und α_2 einander gleich sind. Im Falle $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ sind daher zwei Geraden genau dann parallel, wenn die Steigungen m_1 und m_2 gleich sind. Entsprechend ergibt sich für die Orthogonalität zweier Geraden, die einander im Punkt S schneiden mögen,

$$\alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2) = 90^\circ$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 - 90^\circ.$$

Man betrachtet dazu das Dreieck QRS in Abbildung 4.14. Hieraus ergibt sich dann, falls $\alpha_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}\tan \alpha_1 &= \tan (\alpha_2 - 90^\circ) \\ &= -\tan (90^\circ - \alpha_2)\end{aligned}$$

und weiter,

$$\begin{aligned}\tan \alpha_1 &= -\cot \alpha_2 \\ &= -\frac{1}{\tan \alpha_2}.\end{aligned}$$

Sind die beiden zueinander orthogonalen Geraden in der Form

$$\begin{aligned}y &= m_1 x + n_1 \quad \text{und} \\ y &= m_2 x + n_2\end{aligned}$$

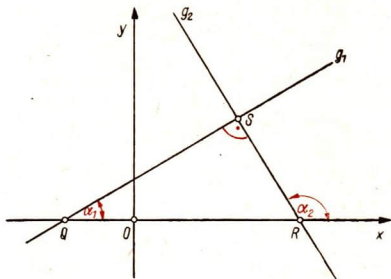


Abb. 4.14.

darstellbar, so stehen sie dann und nur dann aufeinander senkrecht, wenn gilt:

$$(19) \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{oder} \quad m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Beispiel 3

Die Steigung der Geraden $3x + 5y + 10 = 0$ ist $m_1 = -\frac{3}{5}$. Die Gerade $10x - 6y + 11 = 0$ hat die Steigung $m_2 = \frac{5}{3}$. Die beiden Geraden stehen senkrecht aufeinander.

Aufgaben

- Wie ändert sich m in der Gleichung einer Geraden $y = mx$, wenn die Gerade um den Koordinatenursprung gedreht wird?
- Es ist eine Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch den Punkt P_1 geht und von der die Steigung m bekannt ist.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
P_1	$(0; -1,5)$	$(3; 4)$	$(-6; -6)$	$(-8; -9)$	$(3; 3)$	$(-5; 8)$
m	-3	2,5	1	-1	0,5	$-\frac{3}{4}$

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem!

- Ermitteln Sie für die durch folgende Gleichungen gegebenen Geraden die Schnittpunkte mit der y -Achse und die Richtungswinkel!

$$\text{a) } y = 2x + 3 \quad \text{b) } y = x - \frac{1}{3} \quad \text{c) } y = -\frac{x}{3} + 5 \quad \text{d) } y = ax + b$$

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem!

Bestimmen Sie auch die Schnittpunkte der Geraden mit der x -Achse!

4. Eine Gerade hat die Steigung $m = 3$ und schneidet auf der y -Achse vom Nullpunkt aus die Strecke a) 1, b) 3, c) -3 , d) -4 , e) 5 ab. Wie lauten die Gleichungen der Geraden? Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem!

5. Eine Gerade geht durch den Punkt $P(3; 4)$ und hat die Steigung a) 2, b) 1, c) $\frac{1}{2}$, d) $-\frac{1}{2}$. Wie lautet die Gleichung der Geraden?

6. In welchen Punkten schneiden die folgenden Geraden die Koordinatenachsen?

a) $16x + 10y - 32 = 0$

b) $-9x - 8,1y + 18 = 0$

c) $\frac{x}{4,3} + \frac{y}{3,7} = 1$

d) $y = -11,4x + 7,5$

e) $\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{y}{3\sqrt{2}} = 1$

Wie groß sind die Steigungen der Geraden?

7. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die durch den Ursprung und durch den Punkt

a) $P_1(3; 4)$, b) $P_2(-2; 3)$, c) $P_3\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, d) $P_4(2,2; 3,3)$, e) $P_5(-10,5; 3,0)$, f) $P_6(a; -a)$,

g) $P_7(a; a)$, h) $P_8(-a; b)$ geht!

8. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
P_1	(5; 6)	(-3; -4)	(2; 3)	$\left(2; -\frac{1}{2}\right)$	(1; 4)	(a; a)	(0; a)
P_2	(7; 8)	(3; 4)	(3; 2)	$\left(-3; \frac{1}{3}\right)$	(-1; -2)	(b; b)	(a; 0)

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem! Wie groß sind die Abschnitte auf den Achsen? Stellen Sie die Achsenabschnittsgleichungen auf!

9. Ein Dreieck wird gebildet von den Punkten $A(2; 6)$, $B(1; 1)$ und $C(0; 5)$.

a) Stellen Sie die Gleichungen der Geraden auf, auf denen die Dreiecksseiten liegen!

b) Ermitteln Sie die Innenwinkel des Dreiecks mit Hilfe der Richtungswinkel der Geraden! Zeichnen Sie das Dreieck in ein Koordinatensystem, und prüfen Sie die Ergebnisse!

10. Ermitteln Sie die Gleichungen der Geraden, auf denen die Seiten eines Rhombus liegen, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und dessen Diagonalen mit den Achsen zusammenfallen! Die Länge der Diagonalen auf der x -Achse sei $2a$ und auf der y -Achse $2b$. Wie groß sind die Seiten des Rhombus?

11. Wie lautet die Gleichung der Geraden, deren Abschnitte auf der x - und der y -Achse a) 2 bzw. 3, b) 3 bzw. -2 , c) 5 bzw. -6 , d) a bzw. a , e) $-a$ bzw. a sind?

12. Es sind die Geraden, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind, mit Hilfe der Achsenabschnitte zu zeichnen.

a) $4x + 3y - 12 = 0$

b) $\frac{3}{2}x - 3 = y$

c) $x + \frac{y}{2} = 1$

d) $\frac{x}{3} - y = 1$

e) $3x + \frac{y}{2} = 1$

f) $x + y = 1$

g) $x - y = 1$

h) $3x + 3y = 1$

13. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Konstanten a und b in der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und der Steigung m der Geraden?

14. Die Geradengleichungen a) der Aufgabe 2 und b) der Aufgabe 7 sind in die allgemeinen Geradengleichungen und in die Achsenabschnittsgleichungen überzuführen!
15. Führen Sie die Geradengleichungen a) $Ax + By + C = 0$ und b) $y = mx + n$ in die Achsenabschnittsgleichung über!
Unter welchen Bedingungen ist die Achsenabschnittsgleichung nicht anwendbar?
16. Es ist jeweils der Schnittpunkt der folgenden Geraden zu bestimmen, sofern die Geraden nicht parallel verlaufen.

a) $y = \frac{5}{3}x - 1$ b) $x + y - 2 = 0$ c) $4,5x + 3,3y = 18,9$

$y = \frac{-4}{5}x + 6\frac{2}{5}$ $x + 3y - 10 = 0$ $3x - y = 3$

d) $y = x + 3$ e) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ f) $3x + 5y - 10 = 0$

$y = -x - 8$ $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ $3,3x + 5,5y + 8 = 0$

g) $\frac{y-1}{x-1} = 3$ h) $0,8x + 0,4y - 1,2 = 0$ i) $y = mx + n$

$\frac{y-2}{x-2} = 1$ $2x + y - 3 = 0$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Die Rechnungen sind durch Zeichnungen zu überprüfen.

17. Die Gleichungen der Geraden, auf denen die Seiten eines Dreiecks liegen, lauten $y = 3x - 4$, $4y - x + 4 = 0$ und $y + 2x - 2 = 0$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte! Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden, auf denen die Seitenhalbierenden liegen, und deren Schnittpunkt! Prüfen Sie das Ergebnis durch eine Konstruktion nach!
18. Die Seiten eines Dreiecks werden von den folgenden Geraden gebildet.
a) $3x + 4y - 52 = 0$; $4x - y - 6 = 0$; $x - 5y + 8 = 0$
b) $y = 7 - 3x$; $x = 3y - 1$; $x + 7y + 11 = 0$
Die Koordinaten der Eckpunkte sind rechnerisch und zeichnerisch zu bestimmen.
19. Stellen Sie eine Gleichung der Parallelen durch $P_1(x_1; y_1)$ zu einer gegebenen Geraden g auf!
a) $P_1(5; 3)$; $2x - 3y - 12 = 0$ b) $P_1(-2; -3)$; $5x - 6y - 27 = 0$
c) $P_1(-2; 2)$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ d) $P_1(3; 3)$; $y = 2x - 3$
e) $P_1(a; -a)$; $Ax + By + C = 0$
Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem, und konstruieren Sie die Parallelen!
20. Der Punkt $P(2; 3)$ liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 1$. Stellen Sie eine Gleichung der in dem Punkt auf der Geraden errichteten Senkrechten auf! Konstruieren Sie diese Senkrechte!
21. Vom Punkt $P(1; 2)$ ist auf die Gerade $2y - 4x - 8 = 0$ das Lot gefällt. Wie lautet die Gleichung des Lotes? In welchem Punkt trifft das Lot die Gerade? Führen Sie die Konstruktion durch!

22. Wie lautet die Gleichung des Lotes vom Koordinatenursprung auf die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$?
23. Berechnen Sie den Abstand des Nullpunktes von den Geraden mit den folgenden Gleichungen!
- a) $x + y = 1$ b) $y = -\frac{x}{2} + 4$ c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ d) $4x + 3y + 5 = 0$
24. Welchen Abstand haben die Parallelen $2y - x - 6 = 0$ und $y = \frac{x}{2} - 4$ voneinander?
25. Ermitteln Sie von dem Dreieck mit den Eckpunkten $A(-1; -3)$, $B(2; -1)$, $C(3; 3)$
- die Gleichungen der Geraden, auf denen die Seiten liegen,
 - die Längen der Seiten und die Form des Dreiecks,
 - die Gleichungen der Geraden, auf denen die Mittelsenkrechten liegen,
 - die Gleichungen der Geraden, auf denen die Höhen liegen und
 - den Radius des Umkreises!
 - Lösen Sie die gleiche Aufgabe für das Dreieck mit den Eckpunkten $A(9; 0)$, $B(-5; 0)$, $C(0; 12)$!
26. Es sind folgende Sätze der Planimetrie analytisch zu beweisen.
- Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.
 - Die Seitenhalbierenden schneiden einander in einem Punkt.
 - Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in einem Dreieck teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1.
(Legen Sie das Koordinatensystem möglichst zweckmäßig fest!)
27. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $x - 2y - 5 = 0$ und $2x + 3y - 3 = 0$ und durch den Punkt $P(1; 2)$ geht, auf!
28. Was können Sie über die gegenseitige Lage der folgenden Geraden aussagen?
- a) $9x - 15y + 7 = 0$ und $3x - 5y + 4 = 0$ b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$ und $4x - 2y - 1 = 0$
- c) $9x - 6y + 3 = 0$ und $2x + 3y - 5 = 0$

4.4. Anwendungsaufgaben

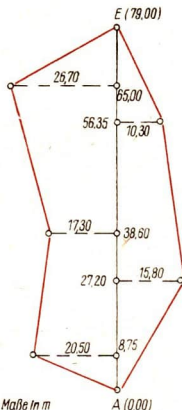
In der Geodäsie werden die Punkte eines als eben angesehenen Gebietes auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen. Man kann so Vermessungen von kleinen Geländeteilen durchführen, ohne große Verzerrungen befürchten zu müssen. Ein solches Koordinatensystem ist aber so orientiert, daß die positive Richtung der x -Achse mit der Nord-Richtung übereinstimmt, also mit irgendeinem Meridian, während die positive Richtung der y -Achse nach Osten zeigt.

In den folgenden Aufgaben wird dieses System angenommen.

- Worin unterscheidet sich das geodätische Koordinatensystem vom kartesischen Koordinatensystem?
- Ein Punkt P hat folgende geodätische Koordinaten.
 - $x_1 = 2153,7$ m; $y_1 = 3288,3$ m b) $x_2 = 537$ m; $y_2 = 2,3$ km
 - $x_3 = 4,5$ km; $y_3 = 2355$ m

In welcher Richtung vom Nullpunkt des Koordinatensystems liegt der Punkt?
 Welchen Winkel bildet die Richtung vom Nullpunkt zum Punkt P mit der Nord-Süd-Richtung?
 Welchen Abstand hat der Punkt vom Nullpunkt?

3. Zwei Punkte P_1 und P_2 haben die geodätischen Koordinaten $x_1 = 1700$ m; $y_1 = 2500$ m und $x_2 = 350$ m; $y_2 = 5200$ m. Welcher Punkt liegt nördlicher bzw. östlicher? Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden Punkten? In welcher Richtung liegt der Punkt P_2 von P_1 aus?
 Geben Sie den Winkel an, den $\vec{P_1P_2}$ mit der Nord-Richtung bildet!
4. Von einem Punkt P_1 mit den geodätischen Koordinaten $x_1 = 1380$ m und $y_1 = 1800$ m liegt ein Punkt P_2 1,5 km entfernt. Welche Koordinaten hat P_2 , wenn $\vec{P_1P_2}$ mit der Nord-Richtung einen Winkel von 50° bildet?
5. Bei der Landesvermessung wird bei kleineren Flächen, bei denen die Eckpunkte der zu vermessenden Fläche markiert sind, eine Abszissenlinie (Abszissenachse) so festgelegt, daß sie die Fläche entweder in der Mitte oder diagonal durchschneidet. Auf der Abszissenlinie werden die Abszissen der Eckpunkte gemessen, senkrecht dazu die Ordinaten.



Maße in m

Abb. 4.15.

- a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des in Abbildung 4.15. wiedergegebenen Grundstückes!
- b) Berechnen Sie den Umfang der Fläche!
6. Bei der Aufnahme (Vermessung und Bestimmung der Koordinaten) einer Landstraße erhält man einen Polygonzug, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben (Maßangaben in m): $A(0,00; 0,00)$, $B(87,00; 54,40)$, $C(153,60; 44,00)$, $D(206,40; 25,00)$, $E(303,50; 33,80)$ und $F(352,00; 0,00)$
 - a) Berechnen Sie die Länge der Landstraße!
 - b) Die Landstraße ist 5,5 m breit. Sie soll asphaltiert werden. Es ist näherungsweise zu ermitteln, wieviel Quadratmeter Straße asphaltiert werden müssen!

Auch in der Topographie verwendet man neben geographischen und polaren Koordinaten das in der Geodäsie übliche Koordinatensystem. Auf topographischen Karten, die u. a. auch bei der Nationalen Volksarmee verwendet werden, befindet sich ein Gitternetz. Durch dieses Netz wird die Karte in Planquadrate eingeteilt. Jedes Planquadrat kann genau angegeben werden, und zwar mit dem Hochwert (x -Wert) und dem Rechtswert (y -Wert) der südwestlichen Ecke. Mit Hilfe des Gitternetzes und seiner Bezifferung am Blattrand lassen sich also sowohl Geländeobjekte nach ihren Koordinaten in die Karte eintragen als auch die Koordinaten auf der Karte dargestellter Objekte bestimmen. Meist arbeitet man dabei mit dem Planzeiger.

Die Koordinaten eines Punktes erhält man, indem man seinen senkrechten Abstand von der südlichen horizontalen Gitterlinie zum x -Wert und seinen senkrechten Abstand von der westlichen vertikalen Gitterlinie zum y -Wert des Planquadrats addiert. Die Koordinaten für einen Kartenpunkt setzen sich also aus den Koordinaten der südwestlichen Ecke seines Planquadrats und den senkrechten Abständen von der

südlichen und der westlichen Gitterlinie des Planquadrats additiv zusammen. Zur Bezeichnung der Planquadrate werden gewöhnlich die sogenannten verkürzten Koordinaten benutzt, bei denen man die ersten beiden Ziffern der Koordinaten wegläßt.

In Abbildung 4.16. ist der x -Wert des Planquadrats 5524, der y -Wert 3417, kurz sagt man: Planquadrat 24-17. Der Punkt P_1 hat die Koordinaten $x_1 = 5524520$ m und $y_1 = 3417350$ m, die verkürzten Koordinaten sind $x_1 = 24520$ m und $y_1 = 17350$ m.

In den folgenden Aufgaben werden verkürzte Koordinaten angegeben. Die Maßangaben erfolgen in Metern.

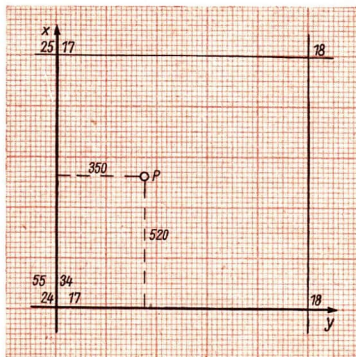
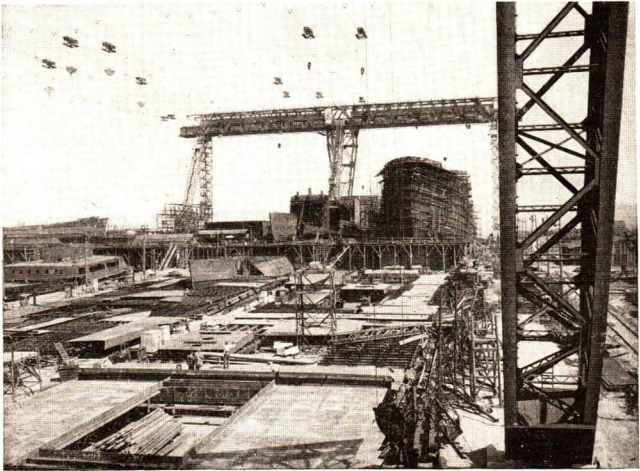


Abb. 4.16.

7. Zwei Objekte P_1 und P_2 haben auf einer topographischen Karte die Koordinaten $P_1 : x_1 = 24500 ; y_1 = 17300$ und $P_2 : x_2 = 32900 ; y_2 = 19200$.
Wie weit sind die Objekte voneinander entfernt?
In welcher Richtung liegt P_2 von P_1 aus?
8. Im Manöver befinde sich die Stellung einer Einheit der Nationalen Volksarmee im Punkt A (10500; 18300), eine feindliche Stellung im Punkt B (29500; 19900).
Wie weit ist die feindliche Stellung entfernt?
In welcher Richtung liegt sie?
9. Ein Melder der Nationalen Volksarmee soll eine Meldung vom Ort A (9300; 1100) nach dem Ort B (12000; 2600) bringen.
Wie weit (Luftlinie) sind die Orte voneinander entfernt?
In welche Richtung muß der Melder laufen?
10. Ein Geschütz steht am Ort A (12500; 13500). Das Ziel befindet sich am Ort B (25300; 18200).
Welche Zielrichtung muß angegeben werden?
Welche Entfernung liegt vor?
11. Eine Einheit der Nationalen Volksarmee macht einen Geländemarsch, Ausgangspunkt ist der Ort A (2500; 3600). Die Einheit marschiert 2,5 km in Richtung Nordost und anschließend 10 km in Richtung Nord.
Welche Koordinaten hat der Ort, den sie erreicht?
12. Bestimmen Sie mit Hilfe einer topographischen Karte die Koordinaten einiger Geländeobjekte!
Messen Sie die Entfernung zweier Objekte!
Prüfen Sie den gemessenen Wert durch eine Rechnung nach!
Tragen Sie Punkte, von denen die Koordinaten bekannt sind, in eine topographische Karte ein!



5. Vektorrechnung

Die Kabelkrananlage der Warnowwerft, eine der größten in Europa, ist ein weithin sichtbares Wahrzeichen von Warnemünde. Hier werden die bekannten 10000 t Frachtschiffe und die Kohle- und Erzfrachter gebaut. Die Laufkatzen des Kabelkrans können zur Montage der Schiffsteile auf der Helling je nach der erforderlichen Tragfähigkeit einzeln oder in Gruppen eingesetzt werden. Die bei der Belastung der Drahtseile auftretenden Zugkräfte werden von den beiden Stahlportalen abgefangen. Insbesondere die nach innen gerichteten Stützpfiler tragen zur Stabilität der Konstruktion bei.

Vor dem Bau einer solchen Anlage sind umfangreiche statische Berechnungen erforderlich, das heißt, die durch Eigengewicht, Belastung und Winddruck auftretenden Kräfte müssen ermittelt werden, um eine ausreichend starke und auch zweckmäßige Konstruktion einzuplanen.

Die Ermittlung dieser Kräfte erfolgt teils rechnerisch, zu einem wesentlichen Teil jedoch auch zeichnerisch. Die Kräfte werden in solchen Zeichnungen durch Pfeile, man sagt auch Vektoren, gekennzeichnet. Die mathematische Grundlage für diese Arbeiten stellt die Vektorrechnung dar.

5.1. Vektoren

5.1.1. Skalare und vektorielle Größen

Physikalische Größen, die durch die Angabe einer reellen Zahl in Verbindung mit einer Maßeinheit bereits vollständig bestimmt sind, heißen **skalare¹ Größen**, zum Beispiel Zeit, Temperatur, Dichte, Arbeit. Das Rechnen mit **Skalaren** erfolgt nach den Regeln für reelle Zahlen. Ihnen stehen physikalische Größen gegenüber, für deren vollständige Kennzeichnung auch die Richtung von Bedeutung ist, zum Beispiel Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft. Solche Größen heißen **vektorielle² Größen**.

Zur Klärung des Vektorbegriffs werde eine Ebene mit allen ihren Punkten geradlinig um ein Stück verschoben. In Abbildung 5.1. ist eine derartige **Verschiebung** oder **Translation** für drei beliebige Punkte P_1, P_2, P_3 der Ebene wiedergegeben. Eine solche Verschiebung läßt sich durch Vektoren beschreiben. Ein Vektor ist durch drei Bestimmungsstücke festgelegt (Abb. 5.2.):

1. **Länge** oder **Betrag**, 2. **Richtung**, 3. **Durchlaufsin**.

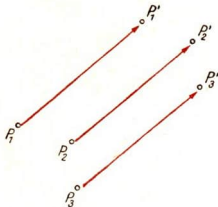


Abb. 5.1.

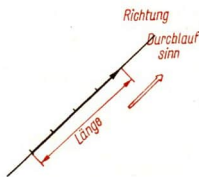


Abb. 5.2.



Abb. 5.3.



Abb. 5.4.

Der Vektor wird durch einen Pfeil dieser Länge, dieser Richtung und dieses Durchlaufsinnes dargestellt. Die Lage des Anfangspunktes des Pfeiles ist dabei gleichgültig (Abb. 5.3.).

Vektoren werden mit kleinen oder großen Frakturbuchstaben bezeichnet: $a, b, c \dots$; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$

Mit $|a|$ bezeichnet man die Länge des Vektors a (gelesen: Betrag von a). Das Symbol \overrightarrow{AB} bedeutet diejenige Verschiebung, die den Punkt A nach B bringt. In Abbildung 5.4. ist $\overrightarrow{AB} = c$.

Zur Kennzeichnung eines Vektors genügt ein einziges Symbol oder ein einzelner Pfeil. Man sagt in diesem Fall, der Vektor wird durch Aufzeigen angegeben. Bei Verwendung von Zahlen bedarf es statt des einen Symbols der Angabe der drei Be-

¹ scalae (lat.), Leiter

² vehere (lat.), fahren

stimmungsstücke (des Betrages, der Richtung und des Durchlaufsinnes). Dabei können Richtung und Durchlaufsinne oft durch eine gemeinsame Bestimmungsgröße ersetzt werden.

■ Beispiel 1

Vektor a vom Betrag 2 und der Richtung 225° (Abb. 5.5.). Die Winkelangabe folgt den üblichen Festlegungen im ebenen kartesischen Koordinatensystem.

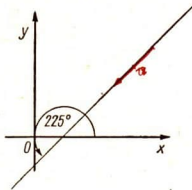


Abb. 5.5.

Vorgänge, bei denen Größe und Richtung wichtig sind, werden durch Vektoren dargestellt.



Abb. 5.6.

■ Beispiel 2

Weg b einer gleichförmigen Bewegung (Fahrzeug, strömende Flüssigkeit od. dgl.) (Abb. 5.6.).

Allgemeiner gefaßt kann man mit einem Vektor auch die Verschiebung des Raumes mit allen seinen Punkten beschreiben.

▶ Ein Vektor beschreibt eine geradlinige Verschiebung aller Punkte des Raumes.

Umgekehrt kann ein Vektor durch die Translation aller Raumpunkte mit Hilfe des Vektorbegriffs eindeutig bestimmt werden.

5.1.2. Freie und gebundene Vektoren

Man unterscheidet Vektoren, die parallel zu sich im Raum verschoben werden können (**freie Vektoren**) und solche, die an einen Punkt, eine Linie oder eine Ebene gebunden sind (**gebundene Vektoren**).

An einen Punkt sind die ortsgebundenen Vektoren oder **Ortsvektoren** gebunden (Abb. 5.7.). Ein Beispiel aus der Physik ist der Weg. In Abbildung 5.7. ist A der Anfangspunkt.



Abb. 5.7.



Abb. 5.8.

Die **liniengebundenen** oder **linienflüchtigen Vektoren** dürfen nur auf ihrer Trägergeraden verschoben werden (Abb. 5.8.). Ein Beispiel hierfür ist der an eine Wirkungslinie gebundene Kraftvektor.

Freie Vektoren können durch gebundene Vektoren repräsentiert werden, zum Beispiel durch einen Ortsvektor; doch sind beide nicht identisch.

5.1.3. Gleiche Vektoren

Man definiert, daß zwei Vektoren genau dann gleich (oder äquivalent) heißen, wenn sie in allen ihren Bestimmungsstücken übereinstimmen. Pfeile, die in ihrer Richtung und Länge übereinstimmen, können als Darstellungsformen ein und desselben Vektors aufgefaßt werden. Zwei ungleiche Vektoren brauchen sich nicht in allen Bestimmungsstücken zu unterscheiden; es genügt bereits die Abweichung in einem einzigen dieser Bestimmungsstücke.

Beispiel 3

Zwei freie Vektoren a und b gleicher Richtung und gleichen Durchlaufsinns, aber verschiedenen Betrages sind ungleich: $|a| \neq |b|$.

Beispiel 4

Zwei ortsgebundene Vektoren, die denselben freien Vektor repräsentieren, aber verschiedene Anfangspunkte haben, sind ungleich:

1. Geben Sie die Bedingungen an, unter denen a) linienflüchtige Vektoren, b) Ortsvektoren gleich sind!
2. Alle Vektoren in Abbildung 5.9. seien a) Ortsvektoren, b) linienflüchtige Vektoren, c) freie Vektoren. Welche Vektoren sind in jedem der drei Fälle gleich?

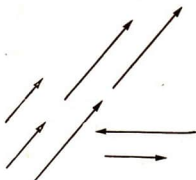


Abb. 5.9.

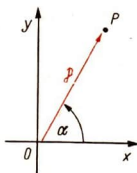


Abb. 5.10.

5.1.4. Spezielle Vektoren

Ortsvektoren im Nullpunkt sind Vektoren, deren Anfangspunkt im Ursprung eines Koordinatensystems liegt (Abb. 5.10.). Man benutzt diese, um ihre Endpunkte festzulegen. Durch $|p|$ und den Richtungswinkel α ist der Vektor $\vec{OP} = p$ und damit auch der Punkt P eindeutig festgelegt.

Als Nullvektor o bezeichnet man den freien Vektor mit dem Betrag Null und beliebiger Richtung. Man bezieht also in den Begriff „Verschiebung des Raumes“ auch den Fall ein, bei dem alles in Ruhe bleibt.

Keht man bei einem Vektor $\vec{AB} = c$ den Durchlaufsinn um, so erhält man den Vektor, der B in A überführt (Abb. 5.11.).

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = (-c)$$

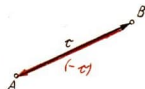


Abb. 5.11.

Es kann also jede Verschiebung a durch eine Verschiebung $(-a)$ rückgängig gemacht werden (Abb. 5.12.). Der freie Vektor $(-a)$ hat den gleichen Betrag und die gleiche Richtung wie der freie Vektor a , aber entgegengesetzten Durchlaufsinne. Der Vektor $(-a)$ heißt deshalb **entgegengesetzter Vektor** zu a .

Jeder Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**. Der Einheitsvektor, der dieselbe Richtung und denselben Durchlaufsinne wie ein Vektor $a \neq 0$ hat, wird mit a° bezeichnet (gelesen: Einheitsvektor zu a) (Abb. 5.13.).



Abb. 5.12.



Abb. 5.13.

Aufgaben

- Stellen Sie die geradlinige Verschiebung der Ebene in sich, bei welcher der Punkt P in den Punkt \bar{P} übergeht, als Vektor dar! Bestimmen Sie Betrag und Richtungswinkel!
 - $P_1(3; 4)$; $\bar{P}_1(5; 6)$
 - $P_2(1; 3)$; $\bar{P}_2(-3; 5)$
- Der Vektor v vom Betrag $|v|$ und der Richtung φ bringe den Punkt P nach \bar{P} . Bestimmen Sie \bar{P} zeichnerisch und rechnerisch!
 - $P_1(4; 4)$
 - $P_2(-4; 3)$
 - $P_3(2; -3)$

$|v_1| = 3$; $\varphi_1 = 60^\circ$ $|v_2| = 5$; $\varphi_2 = 230^\circ$ $|v_3| = 6,5$; $\varphi_3 = 310^\circ$
- Zeichnen Sie den Ortsvektor im Nullpunkt $\vec{OP} = \tau$ aus den Koordinaten seines Endpunktes P , und bestimmen Sie Betrag $|\tau|$ und Richtungswinkel φ aus der Zeichnung sowie durch Rechnung!
 - $P_1(3; 4)$
 - $P_2(-2; 4,5)$
 - $P_3(3; -4)$
 - $P_4(-3; -1)$
- Zeichnen Sie den Ortsvektor im Nullpunkt τ mit dem Betrag $|\tau|$ und dem Richtungswinkel φ ! Bestimmen Sie die Koordinaten seines Endpunktes zeichnerisch und rechnerisch!

	a)	b)	c)	d)
$ \tau $	4	5	6,2	3,5
φ	50°	30°	165°	225°

- Zeichnen Sie den Ortsvektor im Nullpunkt τ mit dem Betrag 4,5 und der Richtung 110° !
 - Welchen Punkt P bestimmt τ ?
 - Drehen Sie τ zuerst um 80° , dann weiter um 100° ! In welche Bildpunkte P_1 bzw. P_2 geht P über?
- Stellen Sie die folgenden reellen Zahlen als Vektoren τ mit dem Betrag $|\tau|$ und der Richtung $\varphi = 0^\circ$ bzw. $\varphi = 180^\circ$ dar!
 - 4
 - 7
 - $-\frac{3}{2}$
 - $2\sqrt{3}$
- Zeichnen Sie den Ortsvektor a mit dem Anfangspunkt $A(3; -2)$, dem Betrag $|a| = 3$ und dem Richtungswinkel $\varphi = 80^\circ$! Verschieben Sie ihn parallel zu sich selbst so, daß sein Anfangspunkt nach $(-2; -3)$ kommt! Welche Koordinaten erhält sein Endpunkt?
- Zeichnen Sie den Vektor $-v$ zum gegebenen Vektor v ! Geben Sie Betrag und Richtungswinkel an!
 - $|v_1| = 3$; $\varphi_1 = 0^\circ$
 - $|v_2| = \sqrt{3}$; $\varphi_2 = 180^\circ$
 - $|v_3| = 4,3$; $\varphi_4 = 235^\circ$

5.2. Addition und Subtraktion von Vektoren

5.2.1. Vektoraddition

Zwei Verschiebungen a und b führen nacheinander ausgeführt zum gleichen Ziel wie eine gewisse dritte Verschiebung c .

Graphisch ergibt sich der Vektor c durch Aneinandersetzen der Vektoren a und b unter Beachtung von Richtung und Durchlaufsinne (Abb. 5.14.a). Die Resultante c schließt dann als dritte Seite das Dreieck. Sie verbindet den Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des zweiten. Der Anfangspunkt von a ist der Anfangspunkt des Vektors c , und der Endpunkt von b ist sein Endpunkt. Der so erklärte Vektor c wird als Summe der Vektoren a und b bezeichnet, wofür man schreibt:

$$(1) \quad c = a + b.$$

Die Zusammensetzung der Vektoren a und b in umgekehrter Reihenfolge (Abb. 5.14.b)

$$\bar{c} = b + a$$

führt zum gleichen Summenvektor, denn nach den Sätzen über das Parallelogramm und den Festlegungen über die Gleichheit von Vektoren ist \bar{c} gleich c (Abb. 5.15.).

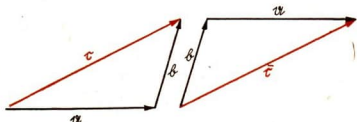


Abb. 5.14.a

Abb. 5.14.b

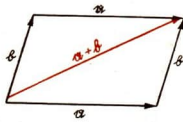


Abb. 5.15.

Für die additive Verknüpfung zweier Vektoren gilt das kommutative Gesetz:

$$(2) \quad a + b = b + a.$$

Die Analogie des kommutativen Gesetzes der Vektoraddition zu dem entsprechenden Gesetz für Zahlen: $a + b = b + a$ ist offensichtlich.

Für jeden Vektor a gilt:

$$a + 0 = a.$$

Der Summenvektor kann zeichnerisch oder rechnerisch ermittelt werden.

Beispiel 1

Die Vektoren $|a| = 2,8$; $\varphi = 48^\circ$ und $|b| = 6,6$; $\psi = 193^\circ$ sind zu addieren. *Zeichnerische Lösung* (Abb. 5.16.):

$$a + b = \bar{s}$$

Rechnerische Lösung: Die Vektoren a und b bilden ein Parallelogramm mit den Seiten 2,8 und 6,6 Längeneinheiten und den Winkeln

$$(193^\circ - 48^\circ) = 145^\circ \quad \text{und} \\ (180^\circ - 145^\circ) = 35^\circ.$$

Der Betrag des Summenvektors \vec{s} ergibt sich als Länge e der einen Diagonalen des Parallelogramms. Man berechnet sie trigonometrisch nach dem Kosinussatz:

$$e^2 = 2,8^2 + 6,6^2 - 2 \cdot 2,8 \cdot 6,6 \cos 35^\circ \\ = 7,84 + 43,56 - 36,96 \cdot 0,8192 \\ = 51,40 - 30,28$$

$$e^2 = 21,12$$

$$e \approx 4,6.$$

Um den Richtungswinkel des Summenvektors zu bestimmen, berechnet man den Winkel $(a, \vec{s})^1$ nach dem Sinussatz:

$$\sin(\vec{s}, b): \sin 35^\circ = 2,8 : 4,6$$

$$\sin(\vec{s}, b) = \frac{2,8 \cdot 0,5736}{4,6} \approx 0,3491$$

$$\sphericalangle(\vec{s}, b) = 20,43^\circ \approx 20,4^\circ \quad \text{oder} \\ 180^\circ - 20,4^\circ = 159,6^\circ.$$

Da aber der kleineren Seite $|a|$ ein kleinerer Winkel gegenüberliegt, muß $\sphericalangle(\vec{s}, b) < 35^\circ$ also $\sphericalangle(\vec{s}, b) \approx 20,4^\circ$ sein.

Der Richtungswinkel ist rund $(48^\circ + 124,6^\circ) = 172,6^\circ$.

Ergebnis: Der Summenvektor $\vec{s} = a + b$ hat näherungsweise den Betrag 4,6 und näherungsweise den Richtungswinkel $172,6^\circ$.

Beispiel 2

Auf dem Deck eines festliegenden Schiffes geht ein Fahrgast vom Punkt A aus zum Punkt B' in einer halben Minute (Abb. 5.17.). Bewegt sich das Schiff gleichförmig, so ändern die Punkte A und B' ihre Lage in bezug auf

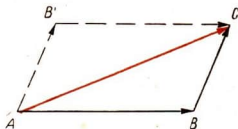


Abb. 5.17.

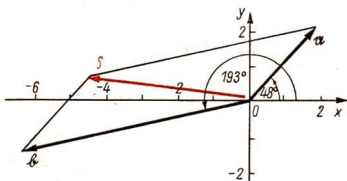


Abb. 5.16.

¹ Mit dem Symbol $\sphericalangle(a, b)$ bezeichnet man den Winkel, um den man den Vektor a im mathematisch positiven Sinn drehen muß, damit er in den Vektor b übergeht.

die Ufer, während der Fahrgast das Deck überquert; A mag inzwischen nach B , B' nach C gekommen sein. Der Fahrgast führt dann zwei Bewegungen gleichzeitig aus: seine eigene bezüglich des Deckes und die des Schiffes bezüglich der Ufer. Beide Bewegungen zusammen bringen ihn in einer halben Minute von A nach C . Diesen Punkt hätte er auch erreicht, wenn er zunächst eine halbe Minute lang stillgestanden hätte (wobei ihn die Schiffsbewegung nach B gebracht hätte), dann aber bei stillstehend gedachtem Schiff das Deck von B nach C (in einer halben Minute) überquert hätte.

Man kann die Bewegungen durch Vektoren darstellen und diese additiv zusammensetzen, um die resultierende Bewegung zu erhalten. Es ist

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}.$$

5.2.2. Addition mehrerer Vektoren

Die Summe dreier Vektoren a , b und c ,

$$a + b + c,$$

bedeutet, daß zuerst die Verschiebung a , dann die Verschiebung b , dann die Verschiebung c ausgeführt wird. Die Abbildung 5.18. zeigt, daß man zu dem gleichen Ergebnis kommt, wenn die Summe $(a + b)$ mit c oder wenn a mit der Summe $(b + c)$ additiv verknüpft wird. Die Reihenfolge, in der Vektoren addiert werden, kann also verändert werden:

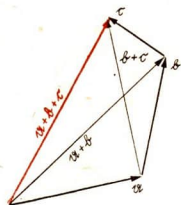


Abb. 5.18.

$$(3) \quad (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.$$

● *Untersuchen Sie auch den Fall $(a + c) + b$!*

Für die additive Verknüpfung von Vektoren gilt das assoziative Gesetz. Aus der Beziehung (3) geht die Analogie zum Gesetz der Assoziativität für die Addition von Zahlen hervor:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Das assoziative Gesetz der Vektoraddition gilt auch für Vektoren im Raum.

Die Bezeichnung Addition und die Verwendung des Operationszeichens $+$ für die beschriebene Verknüpfung von Vektoren sind dadurch gerechtfertigt, daß für sie Gesetze gelten, die den Gesetzen für das Rechnen mit Zahlen entsprechen. Vektoren können in gewissem Umfang als Rechengrößen verwendet werden.

Wir vervollständigen jetzt die Definition des Vektors.

► Ein Vektor kann durch eine Verschiebung aller Punkte des Raumes beschrieben werden. Er wird mit einem Frakturbuchstaben, z. B. a , bezeichnet. Für Vektoren legt man besondere Verknüpfungsgesetze fest.

Die addierten, aneinandergereihten Vektoren bilden einen **Vektorzug** oder ein **Vektoreck**. Zum Beispiel bilden in Abbildung 5.18. a und b oder b und c Vektordreiecke, a , b und c ein Vektorviereck. Die Verbindungslinie des Ausgangspunktes mit dem Endpunkt des letzten Vektors, dem Schlußpunkt, bestimmt die Vektorsumme. Diese Vektorsumme wird auch **Schlußvektor** des Vektorecks genannt. Fallen Schlußpunkt und Ausgangspunkt zusammen, dann ist der Schlußvektor der Nullvektor. In diesem Falle ist das Vektoreck geschlossen, im anderen Falle offen. Es können auch mehr als drei Vektoren additiv verknüpft werden. In den Abbildungen 5.19. a und b sind vier Vektoren einer Ebene zu einer Summe vereinigt:

$$a + b + c + d = \bar{s}.$$

Die Vektoren a und b werden zu einer Summe \bar{s}_1 , \bar{s}_1 und c zu einer Summe \bar{s}_2 , \bar{s}_2 und d schließlich zur Summe \bar{s} vereinigt (Abb. 5.19. a). Anstatt die Summe \bar{s} mit Hilfe von Einzelsummen \bar{s}_1 , \bar{s}_2 zu bilden, ist es einfacher, die Vektoren a , b , c , d aneinanderzureihen (Abb. 5.19. b).

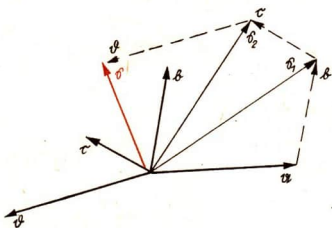


Abb. 5.19.a

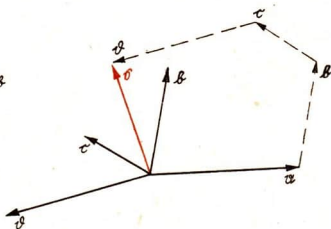


Abb. 5.19.b

Die Abbildung 5.20. gibt einen **geschlossenen Vektorzug (Polygonzug)** wieder:

$$a + b + c + d = 0.$$

Beziehungen dieser Art sind die Grundlage für viele vektoriell geführte Beweise geometrischer Lehrsätze.

- Fertigen Sie ein Modell an, das das assoziative Gesetz der Addition für Vektoren im Raum veranschaulicht!

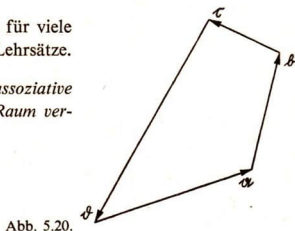


Abb. 5.20.

5.2.3. Vektorsubtraktion

- Erläutern Sie in Gegenüberstellung zur Addition die Fragestellung bei der Subtraktion!

Addition: $a + b = x$; Subtraktion: $b + x = a \rightarrow x = a - b$ (a, b und x sind reelle Zahlen).

- ▶ Die Differenz zweier Vektoren a und b ist diejenige Verschiebung c , die zu der Verschiebung b hinzukommen muß, um zu demselben Ergebnis zu kommen, das die Verschiebung a liefert (Abb. 5.21).

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \quad \text{oder} \quad \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Die Abbildung 5.22. zeigt, daß die Subtraktion des Vektors b gleichwertig ist mit der Addition des entgegengesetzten Vektors $(-b)$:

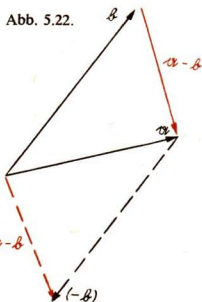
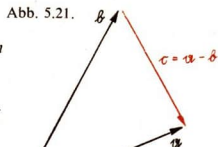
$$\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Insbesondere ist:

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Ferner ist:

$$\vec{a} - \vec{0} = \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}.$$



Die Symbole a, b bedeuten nicht Zahlen, sondern Tätigkeiten, nämlich Verschiebungen. Es sind Tätigkeiten, die man

1. nacheinander ausführen kann (Summenvektor $a + b$),
2. lassen kann (Nullvektor 0),
3. rückgängig machen kann (entgegengesetzter Vektor $-a$).

Aufgaben

1. Addieren Sie die Vektoren a und b ! Bestimmen Sie Betrag und Richtungswinkel des Vektors $a + b$ zeichnerisch und rechnerisch!

a) $ a_1 = 5, \varphi_1 = 0^\circ$	b) $ a_2 = 2, \varphi_2 = 90^\circ$	c) $ a_3 = 1, \varphi_3 = 90^\circ$
$ b_1 = 4, \varphi_1 = 180^\circ$	$ b_2 = 3, \varphi_2 = 270^\circ$	$ b_3 = 1, \varphi_3 = 180^\circ$
2. Addieren Sie die folgenden Ortsvektoren im Nullpunkt!

a) $ r_1 = 4, \varphi_1 = 0^\circ$	b) $ r_1 = 2,5, \varphi_1 = 80^\circ$	c) $ r_1 = 5, \varphi_1 = 0^\circ$
$ r_2 = 3, \varphi_2 = 30^\circ$	$ r_2 = 5, \varphi_2 = 220^\circ$	$ r_2 = 2, \varphi_2 = 240^\circ$
		$ r_3 = 2, \varphi_3 = 120^\circ$
3. Die drei Vektoren a, b und c sollen ein geschlossenes Dreieck mit gleichem Umlaufsinn bilden. Welche Gleichung bringt das zum Ausdruck?
4. Bestimmen Sie einen dritten Vektor c so, daß $a + b + c$ der Nullvektor ist!

a) $ a_1 = 4, \varphi_1 = 90^\circ$	b) $ a_2 = 6, \varphi_2 = 80^\circ$	c) $ a_3 = 4, \varphi_3 = 30^\circ$
$ b_1 = 3, \varphi_1 = 0^\circ$	$ b_2 = 8, \varphi_2 = 180^\circ$	$ b_3 = 7, \varphi_3 = 210^\circ$

5. Stellen Sie die Seiten des Dreiecks OPQ als Vektoren $\vec{OP} = c$, $\vec{PQ} = a$ und $\vec{QO} = b$ dar (Abb. 5.23.)! Welches ist ihre Summe? Verschieben Sie die drei Vektoren in den Koordinatenursprung O , und geben Sie die Winkel an, die sie miteinander bilden, wenn α , β und γ die Dreieckswinkel mit den Scheiteln O , P bzw. Q sind!

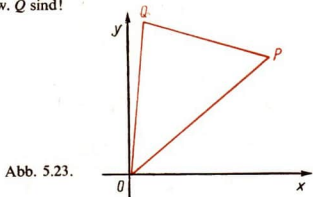


Abb. 5.23.

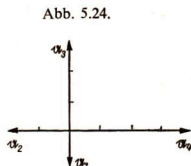


Abb. 5.24.

6. Die vier Vektoren a_1 , a_2 , a_3 und a_4 in Abbildung 5.24. liegen in einer Ebene und haben die Beträge 1, 2, 3 bzw. 4 Einheiten. Jeweils benachbarte Vektoren schließen rechte Winkel ein. Bestimmen Sie zeichnerisch den Schlußvektor!
7. Die sechs Vektoren in Abbildung 5.25. liegen in einer Ebene. Ihre Beträge sind abwechselnd 6 und 2 Einheiten. Jeweils zwei benachbarte Vektoren schließen einen Winkel von 60° ein. Bestimmen Sie zeichnerisch den Schlußvektor!
8. Zwei entgegengesetzt gerichtete Vektoren a_1 und a_3 haben die Beträge 1 bzw. 3 Einheiten, ein dritter Vektor a_2 mit dem Betrag 2 steht auf ihnen senkrecht. Bestimmen Sie die Vektorsumme!

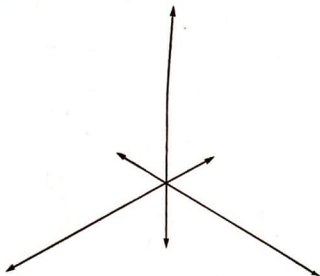


Abb. 5.25.

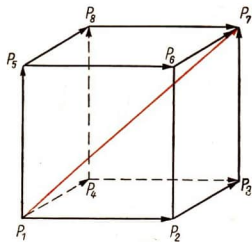


Abb. 5.26.

9. Acht Punkte P_1, \dots, P_8 sind die Ecken eines Würfels (Abb. 5.26.). Stellen Sie die Raumdiagonale P_1P_7 vektoriell als Summe je dreier Kanten des Würfels dar! Geben Sie alle Möglichkeiten an!
10. Bestimmen Sie die Differenz $a - b$ zeichnerisch und rechnerisch!
- | | |
|--|--|
| a) $ a_1 = 4$, $\varphi_1 = 0^\circ$ | b) $ a_2 = 4$, $\varphi_2 = 0^\circ$ |
| $ b_1 = 2$, $\varphi_1 = 0^\circ$ | $ b_2 = 2$, $\varphi_2 = 60^\circ$ |
| c) $ a_3 = 5$, $\varphi_3 = 135^\circ$ | d) $ a_4 = 3,5$, $\varphi_4 = 180^\circ$ |
| $ b_3 = 3$, $\varphi_3 = 260^\circ$ | $ b_4 = 5,6$, $\varphi_4 = 0^\circ$ |

11. Ein Punkt O werde durch den Vektor \mathbf{a} nach A , durch den Vektor \mathbf{b} nach B verschoben. Welcher Vektor bringt den Punkt B nach A ?
12. Ein Motorboot hat stromabwärts die Geschwindigkeit $v_1 (v_1 = 8,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$, stromaufwärts $v_2 (v_2 = 6,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v des Bootes gegenüber dem Strom und die Geschwindigkeit v_s des Stromes zeichnerisch und rechnerisch!
13. Ein Boot überquert senkrecht zum Ufer mit der Geschwindigkeit $v (v = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$ einen 108 m breiten Strom und wird bis zur Landung um 30 m abgetrieben. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_s des Stromes zeichnerisch und rechnerisch!
14. Am gemeinsamen Angriffspunkt O greifen die Kräfte $\mathbb{F}_1 (P_1 = 750 \text{ kp})$ und $\mathbb{F}_2 (P_2 = 1230 \text{ kp})$ an, die miteinander einen Winkel von 53° bilden. Wie groß ist die resultierende Kraft? Welche Winkel bildet sie mit den einzelnen Kräften?
Lösen Sie die Aufgabe a) zeichnerisch, b) trigonometrisch!
15. Bestimmen Sie die resultierende Beschleunigung \mathbf{b} , die eine Masse m erfährt, wenn auf sie zwei Kräfte, \mathbb{F}_1 und \mathbb{F}_2 , gleichzeitig wirken! Unabhängig voneinander würden sie der Masse die Beschleunigung $b_1 (b_1 = 3,6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2})$ in Richtung 10° bzw. $b_2 (b_2 = 4,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2})$ in Richtung 75° erteilen.
16. Ein Leitungsmast wird in der Horizontalebene unter einem Winkel von 105° mit 70 kp bzw. 40 kp Zug beansprucht. Bestimmen Sie die resultierende Kraft a) zeichnerisch, b) rechnerisch!

5.3. Multiplikation mit skalaren Faktoren

5.3.1. Vervielfachung eines Vektors

- Nennen Sie den Strahlensatz, und erläutern Sie ihn an Hand einer Zeichnung!
- In einer Ebene sei der Vektor \mathbf{a} gegeben. Bilden Sie zeichnerisch folgende Summen:

$$a) \mathbf{a} + \mathbf{a}, \quad b) \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}, \quad c) \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}, \quad d) (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a})!$$

An Stelle der Summen $\mathbf{a} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}$, $(-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a})$ schreibt man in Analogie zum Rechnen unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole $2\mathbf{a}$, $3\mathbf{a}$, $4\mathbf{a}$, $3(-\mathbf{a})$.

Durch Multiplikation mit einer Zahl wird ein Vektor vervielfacht.

- ▶ Ist t eine positive Zahl, so versteht man unter $t\mathbf{a}$ einen Vektor \mathbf{b} , der dieselbe Richtung, denselben Durchlaufsinne und den t -fachen Betrag hat wie \mathbf{a} .

Die Erklärung gilt allgemein für Vektoren im Raum.

Demnach ist $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ ein Vektor, für den Richtung und Durchlaufsinne mit denen des Vektors \mathbf{a} übereinstimmen und für den gilt (Abb. 5.27.):

$$|\mathbf{b}| = t|\mathbf{a}|.$$

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar kann geometrisch als **Streckung** gedeutet werden.

Ist t eine negative Zahl, so soll \mathbf{b} dieselbe Richtung und den t -fachen Betrag, aber den entgegengesetzten Durchlaufsinne

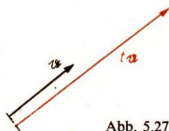


Abb. 5.27.

wie a haben. Insbesondere entsteht aus dem Vektor a durch Multiplikation mit (-1) der entgegengesetzte Vektor: $(-1)a = -a$.

Die Vektoren a und $b = ta$ sind in ihren Richtungen gleich, und sie haben gleichen oder entgegengesetzten Durchlaufsinne, je nachdem ob t positiv oder negativ ist.

Es wird noch festgesetzt:

$$at = ta$$

und

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = o.$$

Jeder Vektor kann als Vielfaches seines Einheitsvektors dargestellt werden, wenn als Vervielfacher sein Betrag genommen wird:

$$(1) \quad a = |a| a^\circ.$$

Daraus folgt, daß auch jeder Einheitsvektor als Vielfaches eines beliebigen Vektors ungleich o dargestellt werden kann, der mit ihm in Richtung und Durchlaufsinne übereinstimmt:

$$a^\circ = \frac{1}{|a|} a = \frac{a}{|a|}.$$

Die Vervielfacher sind dabei stets positive Zahlen. Läßt man negative Zahlen zu, so kann ein Vektor a auch als Vielfaches des Einheitsvektors dargestellt werden, der dem entgegengesetzt gerichteten Vektor $-a$ entspricht, mit a also nur noch in der Richtung, aber nicht mehr im Durchlaufsinne übereinstimmt:

$$a = -|a|(-a)^\circ.$$

Für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar gelten folgende Gesetze:

1. Assoziationsgesetz (Abb. 5.28.)

$$r(ta) = t(ra) = (rt)a = rta;$$

2. Erstes Distributionsgesetz (Abb. 5.29.)

$$(r + t)a = ra + ta;$$

3. Zweites Distributionsgesetz (Abb. 5.30.)

$$r(a+b) = ra + rb.$$

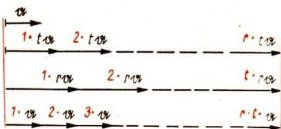


Abb. 5.28.

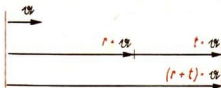


Abb. 5.29.

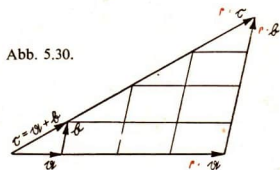


Abb. 5.30.

Nach dem Strahlensatz wird der Vektor $c = a + b$ in demselben Verhältnis vergrößert wie die Vektoren a und b .

1. Formulieren Sie die drei Gesetze in Worten!
2. Warum gibt es zwei Distributionsgesetze? Erläutern Sie den Unterschied zwischen den beiden Gesetzen!

Die Vektoren a und b , die durch Multiplikation mit einer Zahl auseinander hervorgehen, sind voneinander abhängig. Es ist

$$b - ta = 0.$$

Auch die Vektoren der Seiten eines Dreiecks sind voneinander abhängig:

$$a + b + c = 0.$$

Sind zwei Vektoren gegeben, zum Beispiel a und b , so ist der dritte eindeutig bestimmt. In diesem Falle ist

$$c = 0 - a - b.$$

Bei Vektoren, die in dieser Weise voneinander abhängen, gibt es eine Summe geeignet gewählter Vielfacher derselben, die dem Nullvektor gleich ist. Dabei sind aber nicht alle Koeffizienten gleichzeitig Null. Die Vielfachen lassen sich zu einem geschlossenen Polygonzug anordnen.

Zwei Vektoren a_1 und a_2 , für die gilt

$$(2) \quad t_1 a_1 + t_2 a_2 = 0,$$

wobei t_1 und t_2 nicht gleichzeitig Null sind, sind parallel, wenn der Nullvektor als parallel zu jedem Vektor aufgefaßt wird. Aus (2) folgt nämlich

$$a_2 = \frac{-t_1}{t_2} a_1 \quad \text{oder} \quad a_1 = \frac{-t_2}{t_1} a_2.$$

Sind $a_1 \neq 0$ und $a_2 \neq 0$ nicht parallel, so ist Gleichung (2) nur durch $t_1 = t_2 = 0$ zu erfüllen.

Jeder Vektor v einer Ebene kann durch zwei nicht zueinander parallele Vektoren a_1 und a_2 (mit $a_1 \neq 0$ und $a_2 \neq 0$) in der Form

$$v = t_1 a_1 + t_2 a_2 \quad \text{mit } t_1 \text{ und } t_2 \text{ reell}$$

dargestellt werden.

Im Raum kann jeder vom Ursprung ausgehende Ortsvektor v durch drei beliebige nicht in einer Ebene liegende Ortsvektoren a_1 , a_2 und a_3 (mit $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ und $a_3 \neq 0$) in der Form

$$v = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 \quad \text{mit } t_1, t_2 \text{ und } t_3 \text{ reell}$$

dargestellt werden.

5.3.2. Anwendungen

Mit Hilfe der Vektorrechnung können z. B. Sätze aus der Planimetrie bewiesen werden.

Beispiel 1

Satz: Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

Beweis (Abb. 5.31.): (Die Seiten und Diagonalen des Parallelogramms werden als Vektoren dargestellt.)

Der Vektor \vec{AM} ist ein Vielfaches des Vektors \vec{e} , ebenso der Vektor \vec{BM} ein Vielfaches des Vektors \vec{f} : $\vec{AM} = r\vec{e}$; $\vec{BM} = t\vec{f}$. Die Zahlen r und t sind unbekannt. Das Dreieck ABM kann nun als geschlossener Vektorzug folgendermaßen dargestellt werden:

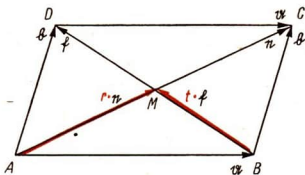


Abb. 5.31.

$$(3) \quad a + t\vec{f} - r\vec{e} = \vec{0}.$$

Entsprechend gilt für das Dreieck CDM :

$$(4) \quad a - (1-r)\vec{e} + (1-t)\vec{f} = \vec{0}.$$

Man subtrahiert die Gleichung (4) von der Gleichung (3)

$$t\vec{f} - r\vec{e} + (1-r)\vec{e} - (1-t)\vec{f} = \vec{0}$$

und erhält nach Umformung

$$(5) \quad (2t-1)\vec{f} - (2r-1)\vec{e} = \vec{0}.$$

Da \vec{e} und \vec{f} nicht parallel sind, müssen die Koeffizienten von \vec{e} und von \vec{f} gleich Null sein [vgl. (2)].

Daraus folgt

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{2}.$$

Es ist also $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{e}$ und $\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{f}$.

Beispiel 2

Satz: Die Seitenhalbierenden im Dreieck teilen einander im Verhältnis 1:2.

Beweis (Abb. 5.32.): Wir setzen $\vec{SE} = r\vec{1}_a$ und $\vec{SD} = t\vec{1}_c$ mit den Unbekannten r und t .

Im Dreieck ABC ist

$$(6) \quad a + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

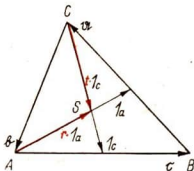


Abb. 5.32.

Auch die Umfänge der Dreiecke CSE , ADS und ASC werden als geschlossene Vektorzüge dargestellt:

$$(7) \quad r \vec{f}_a + \frac{1}{2} \vec{a} + (1-t) \vec{f}_c = \vec{0},$$

$$(8) \quad \frac{1}{2} \vec{c} - t \vec{f}_c - (1-r) \vec{f}_a = \vec{0},$$

$$(9) \quad \vec{b} + (1-r) \vec{f}_a - (1-t) \vec{f}_c = \vec{0}.$$

Aus den vier Gleichungen wird nun eine neue Gleichung durch folgende Verknüpfungen gebildet: $(7) + (7) + (8) + (8) + (9) - (6)$.

$$2r \vec{f}_a + 2(1-t) \vec{f}_c - 2t \vec{f}_c - 2(1-r) \vec{f}_a + (1-r) \vec{f}_a - (1-t) \vec{f}_c = \vec{0}$$

$$(3r-1) \vec{f}_a - (3t-1) \vec{f}_c = \vec{0}.$$

Da \vec{f}_a und \vec{f}_c nicht parallel sind, müssen die Koeffizienten von \vec{f}_a und \vec{f}_c gleich Null sein [vgl. (2)].

Daraus folgt

$$r = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{3}.$$

Es ist also $\vec{SE} = \frac{1}{3} \vec{f}_a$ und $\vec{SD} = \frac{1}{3} \vec{f}_c$.

Aufgaben

- Konstruieren Sie zu einem gegebenen Vektor \vec{a} (mit Hilfe des Strahlensatzes) die folgenden Vielfachen!
 - $0,7\vec{a}$
 - $1,5\vec{a}$
 - $2,2\vec{a}$
 - $-1,8\vec{a}$
- Gegeben seien der Vektor \vec{a} und die Zahl t . Berechnen Sie $\vec{b} = t\vec{a}$!
 - $|\vec{a}_1| = 3, \varphi_1 = 60^\circ, t_1 = 5$
 - $|\vec{a}_2| = 2, \varphi_2 = 120^\circ, t_2 = 3$
 - $|\vec{a}_3| = 4, \varphi_3 = 45^\circ, t_3 = \frac{2}{3}$
 - $|\vec{a}_4| = \frac{5}{4}, \varphi_4 = 60^\circ, t_4 = -\frac{4}{5}$
- Gegeben sind zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} , deren Richtungen nicht parallel sind.
 - Zu dem Vielfachen $u\vec{a}$ ist das gleiche Vielfache des Vektors \vec{b} zu konstruieren.
 - Zu \vec{a}, \vec{b} und $u\vec{a}$ ist das Vielfache $\frac{1}{u} \vec{b}$ zu konstruieren.
- Zeichnen Sie Figuren zu den beiden Vektorgleichungen

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0} \quad \text{und} \quad t(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4) = \vec{0},$$
 und geben Sie ihren geometrischen Inhalt an!
- a) Konstruieren Sie zu zwei nichtparallelen Vektoren \vec{a} und \vec{b} folgende Vektoren

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{c}_u = u\vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{c}_v = \vec{a} + v\vec{b}; \quad \vec{c}_{uv} = u\vec{a} + v\vec{b}!$$
 (Die Skalare u und v werden beliebig, aber fest gewählt.)

- b) Zeigen Sie zeichnerisch und rechnerisch, daß die Spitzen der Vektoren c , c_u , c_v , c_{uv} ein Parallelogramm bilden!
6. Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die folgenden Sätze!
- a) Halbieren in einem Viereck die Diagonalen einander, so ist es ein Parallelogramm.
- b) Die Verbindung der Mittelpunkte zweier Dreieckseiten ist zur dritten parallel und halb so groß wie diese.
- c) Die Verbindung der Seitenmitten eines beliebigen Vierecks ergibt ein Parallelogramm.
7. Beweisen Sie vektoriell die Umkehrung zu dem Satz der Aufgabe 6b)!
8. In einem Parallelogramm wird eine Ecke mit der Mitte einer nicht von dieser Ecke ausgehenden Seite verbunden. Die Verbindungsgerade teilt die nicht von dieser Ecke ausgehende Diagonale im Verhältnis $1 : 2$. Beweisen Sie diesen Satz a) geometrisch, b) vektoriell!
9. Beweisen Sie vektoriell den Satz: Im Trapez ist die Verbindung der Mittelpunkte der beiden nichtparallelen Seiten parallel zu den parallelen Seiten und halb so groß wie deren Summe!
10. Beweisen Sie die Strahlensätze und ihre Umkehrungen mit Hilfe der Vektorrechnung!

5.4. Komponenten von Vektoren

5.4.1. Zerlegen eines Vektors in Komponenten

Zwei Vektoren kann man additiv zu einer Summe zusammensetzen. Umgekehrt kann man einen Vektor in zwei Summanden zerlegen. Das ist auf vielfältige Weise möglich. Ein Beispiel wird in Abbildung 5.33. dargestellt:

$$c = d + e = f + g = \dots$$

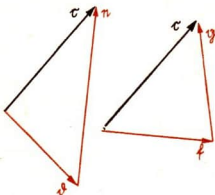


Abb. 5.33.

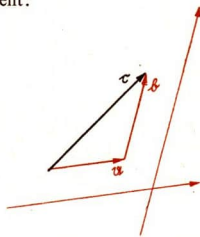


Abb. 5.34.

Die Vektoren d und e , f und g usw., in die der Vektor c zerlegt wird, heißen Komponenten des Vektors c . Sind die Richtungen der Komponenten vorgeschrieben und voneinander verschieden, so ist, wenn auch noch der Durchlaufsinne der Komponenten vorgeschrieben wird, die Zerlegung eines Vektors in Komponenten eindeutig (Abb. 5.34.):

$$(1) \quad c = a + b.$$

Die Zerlegung eines Vektors in Komponenten hat besonders für die physikalischen Anwendungen große Bedeutung.

5.4.2. Komponentendarstellung eines Vektors

Soll ein Vektor c in zwei Komponenten a und b zerlegt werden, so können Richtung und Durchlaufsinne der Komponenten durch zwei nicht parallele Einheitsvektoren a° und b° festgelegt werden. Die Einheitsvektoren a° und b° nennt man **Basisvektoren**; sie bilden ein **Basissystem**. Die Komponenten a und b werden in dieser Darstellung nach (1) durch Vielfache der entsprechenden Einheitsvektoren gebildet. Für die Maßzahlen verwendet man dabei als neue Symbole Antiquabuchstaben: a, b . Die Gleichung (1) geht dann über in

$$(2) \quad c = a + b = aa^\circ + bb^\circ.$$

Man nennt a und b die **Koordinaten**, $a = aa^\circ$ und $b = bb^\circ$ die **Komponenten** des Vektors c in bezug auf das Basissystem (a°, b°) . Die Gleichung (2) heißt **Komponentendarstellung** des Vektors c .

In dem *Parallelkoordinatensystem* der Abbildung 5.35. sind die **Einheitsvektoren** auf den Achsen e_1 und e_2 die **Basisvektoren**. Hat ein vom Nullpunkt ausgehender Ortsvektor p die Koordinaten p_1 und p_2 , so sind seine Komponenten p_1e_1 und p_2e_2 . Entsprechend lauten für den Vektor a in Abbildung 5.36. die Komponenten a_1e_1 und a_2e_2 , wenn a_1 und a_2 die Koordinaten von a sind.

Im allgemeinen brauchen $|e_1|$ und $|e_2|$ nicht gleich zu sein. Stehen die Basisvektoren a° und b° aufeinander senkrecht und haben sie gleiche Einheiten,

$$|a^\circ| = |b^\circ| = 1,$$

so heißt das Basissystem **orthonormiert**. Die weiteren Betrachtungen werden in orthonormierten Basissystemen durchgeführt.

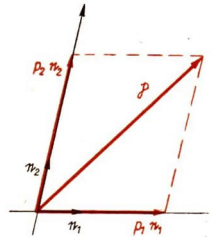


Abb. 5.35.

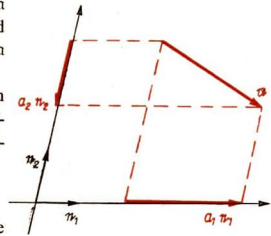


Abb. 5.36.

5.4.3. Orthonormiertes Rechtssystem

Ein eindimensionales x -Koordinatensystem besteht aus einer Geraden, auf der die x -Richtung festgelegt ist (Abb. 5.37.). Bezeichnet man den Einheitsvektor in der x -Richtung mit i , so läßt sich der eindimensionale Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1}$ durch $\xi_1 = x_1 i$ darstellen. Der freie eindimensionale Vektor a ist dann

$$a = a_x i.$$

Abb. 5.37.



Ein zweidimensionales xy -Koordinatensystem wird aus zwei einander schneidenden Geraden gebildet. Schneiden die Geraden einander unter 90° , so sind zwei Systeme möglich (Abb. 5.38. und 5.39.). Im folgenden wird für die Darstellung von Vektoren in Komponenten dasjenige verwendet, bei dem der positive Teil der x -Achse durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im mathematisch positiven Sinn in den positiven Teil der y -Achse über-

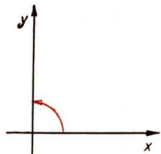


Abb. 5.38.

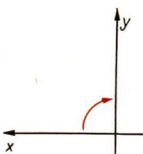


Abb. 5.39.

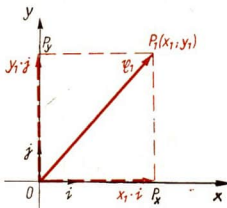


Abb. 5.40.

geführt wird. Die Abbildung 5.40. stellt einen Ortsvektor im xy -Koordinatensystem dar. Durch die Verschiebung $\overrightarrow{OP_1}$ wird der Ursprung O nach P_1 gebracht. Der Vektor $\overrightarrow{OP_1} = \underline{r}_1$ legt den Punkt P_1 fest. Über die Projektion des Vektors auf beide Koordinatenachsen erhält man zwei Komponenten:

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{P_xP_1}$$

oder

$$(3) \quad \underline{r}_1 = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j}.$$

Man schreibt symbolisch: $\underline{r}_1 = (x_1; y_1)$.

Die Koordinaten des Vektors $\underline{r}_1 = (x_1; y_1)$ sind gleich den kartesischen Koordinaten des durch ihn dargestellten Punktes P_1 . Als weiteres Beispiel wird in Abbildung 5.41. ein freier Vektor \underline{a} im xy -Koordinatensystem dargestellt.

$$(4) \quad \underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j}.$$

Darin sind a_x und a_y die Koordinaten des Vektors \underline{a} . Die Angabe von Koordinaten ist eine zweite Möglichkeit für die zahlenmäßige Festlegung eines Vektors. In diesem Fall lautet die Angabe: $\underline{a} = (a_x; a_y)$.

Dreidimensionale xyz -Koordinatensysteme werden in Abbildung 5.42. dargestellt. Bei dem einen wird die positive Richtung auf der z -Achse durch die Bewegung einer Rechtsschraube festgelegt, wenn der positive Teil der x -Achse auf kürzestem Wege in den positiven Teil der y -Achse übergeführt wird (Abb. 5.42. a).

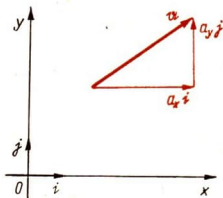


Abb. 5.41.

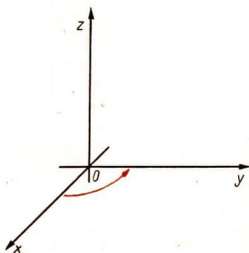


Abb. 5.42.a

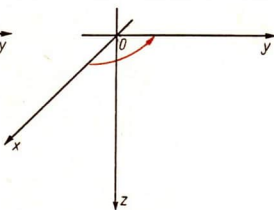


Abb. 5.42.b

Bei dieser Anordnung der Koordinatenachsen spricht man von einem **orthonormierten Rechtssystem**. Im räumlichen Koordinatensystem werden die Einheitsvektoren auf der x -, y - und z -Achse beziehentlich mit i , j und f bezeichnet (Abb. 5.43.). Der Punkt P_1 sei durch die Koordinaten x_1, y_1, z_1 gegeben. Er kann durch den dreidimensionalen Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1} = \underline{r}_1$ festgelegt werden. Entsprechend der Darstellung eines Vektors im zweidimensionalen Koordinatensystem erhält man bei dem **Ortsvektor** \underline{r}_1 im Raum folgende Darstellung (Abb. 5.44.):

$$(5) \quad \overrightarrow{OP_1} = \underline{r}_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 f.$$

Für den freien **Vektor** \underline{a} gilt:

$$(6) \quad \underline{a} = a_x + a_y + a_z = a_x i + a_y j + a_z f.$$

Abgekürzt schreibt man: $\underline{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

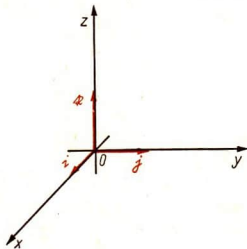


Abb. 5.43.

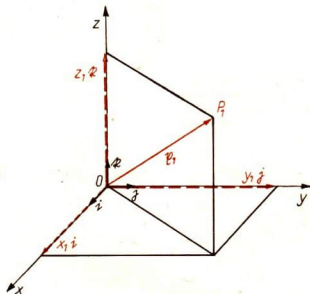


Abb. 5.44.

Die möglichen Bestimmungen des Ortsvektors ξ_1 und die Punkte der Ebene bzw. des Raumes entsprechen einander umkehrbar eindeutig.

Ist P ein veränderlicher Punkt, so wird der Ortsvektor mit ξ bezeichnet; seine Koordinaten sind die Variablen x und y bzw. x, y und z .

- 1. Stellen Sie ein Modell des orthonormierten Rechtssystems her!
- 2. Stellen Sie in diesem System a) einen Ortsvektor, b) einen freien Vektor nebst den Komponenten modellmäßig dar!

5.4.4. Addition und Vervielfachung von Vektoren in Komponentendarstellung

Die Summe zweier Vektoren a und b ergibt sich zu (Abb. 5.45.):

$$a + b = a_x i + a_y j + b_x i + b_y j$$

$$a + b = (a_x + b_x) i + (a_y + b_y) j.$$

- ▶ Zwei Vektoren werden addiert, indem man ihre Komponenten addiert.

Die Differenz zweier Vektoren a und b ergibt:

$$a - b = a_x i + a_y j - (b_x i + b_y j)$$

$$a - b = (a_x - b_x) i + (a_y - b_y) j.$$

- ▶ Zwei Vektoren werden subtrahiert, indem man ihre Komponenten subtrahiert.

Der Vektor $\overrightarrow{P_1 P_2}$, der den Punkt P_1 mit dem Ortsvektor $\xi_1 = (x_1; y_1)$ nach dem Punkt P_2 mit dem Ortsvektor $\xi_2 = (x_2; y_2)$ bringt, ist $\xi_2 - \xi_1$ und hat die Koordinaten $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ (Abb. 5.46.).

Es gilt also:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \xi_2 - \xi_1$$

$$(7) \quad \xi_2 - \xi_1 = (x_2 - x_1) i + (y_2 - y_1) j.$$

Für das t -fache eines Vektors a gilt (Abb. 5.47.):

$$t a = t(a_x i + a_y j) = t a_x i + t a_y j.$$

- ▶ Ein Vektor wird mit der Zahl t vervielfacht, indem man jede seiner Komponenten mit t vervielfacht.

- Führen Sie die entsprechenden Aufgaben für Vektoren im Raum durch!

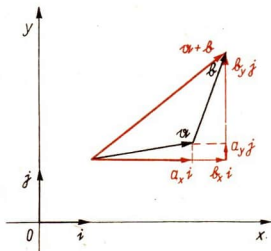


Abb. 5.45.

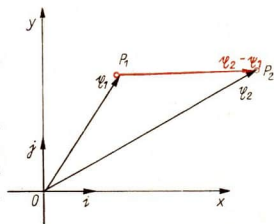


Abb. 5.46.

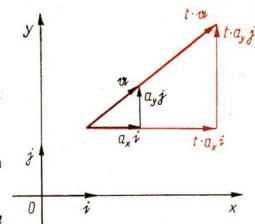


Abb. 5.47.

5.4.5. Projektion von Vektoren

Unter der Projektion P_1 eines Punktes P auf eine Ebene E versteht man den Schnittpunkt der zu E senkrechten Geraden durch P mit E (Abb. 5.48.).

Unter der Projektion P_1 eines Punktes P auf eine Gerade g des Raumes versteht man den Schnittpunkt der zu g senkrechten Ebene durch P mit g (Abb. 5.49.). Liegt die Gerade g in der Ebene E_1 , so entsteht die Projektion als Schnittpunkt der Spurgeraden (der projizierenden Ebene in E_1) mit g . In Abbildung 5.50. wurden auf diese Weise der Anfangs- und der Endpunkt eines Vektors v auf die Gerade g projiziert.

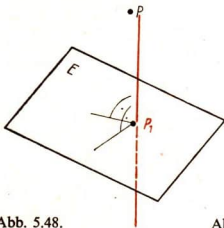


Abb. 5.48.

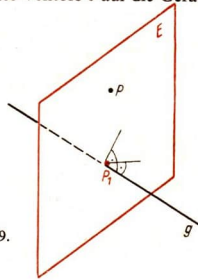


Abb. 5.49.

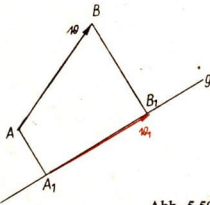


Abb. 5.50.

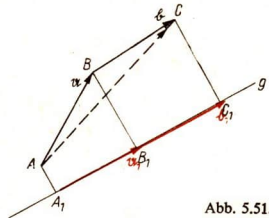


Abb. 5.51.

Die Projektion eines Vektors $v = \overrightarrow{AB}$ sei durch $v_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ gegeben. Es soll die Projektion $(a + b)_1$ der Summe zweier Vektoren a und b ermittelt werden. (In Abbildung 5.51. wurden die beiden Vektoren a und b auf eine Gerade g in der Ebene projiziert.) Ist

$$a = \overrightarrow{AB}, \quad b = \overrightarrow{BC}, \quad \text{also} \quad a + b = \overrightarrow{AC},$$

so ist

$$(8) \quad a_1 = \overrightarrow{A_1B_1}, \quad b_1 = \overrightarrow{B_1C_1} \quad \text{und} \quad (a + b)_1 = \overrightarrow{A_1C_1} = a_1 + b_1.$$



Projektionssatz

Die Projektion der Summe zweier Vektoren ist gleich der Summe ihrer Projektionen.

Die Komponenten eines Vektors in einem orthonormierten Rechtssystem sind die Projektionen des Vektors auf die Richtungen i, j, k .

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel, die der Ortsvektor $\vec{r} \neq 0$ mit den Vektoren i, j, k bildet, so gilt im Raum (Abb. 5.52.):

$$(9) \quad x = |\vec{r}| \cos \alpha_1; \quad y = |\vec{r}| \cos \alpha_2; \quad z = |\vec{r}| \cos \alpha_3$$

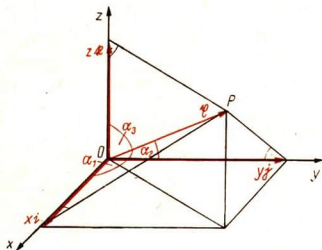


Abb. 5.52.

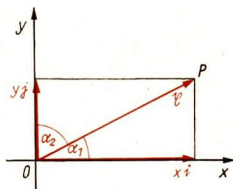


Abb. 5.53.

und in der Ebene (Abb. 5.53.):

$$(10) \quad x = |\vec{r}| \cos \alpha_1; \quad y = |\vec{r}| \cos \alpha_2.$$

Die drei Zahlen

$$(11) \quad \cos \alpha_1 = \frac{x}{|\vec{r}|}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{y}{|\vec{r}|}; \quad \cos \alpha_3 = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

werden als **Richtungskosinus des Vektors \vec{r}** bezeichnet.

5.4.6. Neigungswinkel des Ortsvektors gegen die x-Achse

Nach (3) lautet die Komponentendarstellung des Ortsvektors $\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1$ in der Ebene

$$\vec{r}_1 = x_1 i + y_1 j.$$

Schließt der Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1}$ mit der x-Achse den Winkel α ein, so gilt mit Benutzung der Beziehungen (10):

$$\vec{r}_1 = [|\vec{r}_1| \cos \alpha] i + [|\vec{r}_1| \cos (90^\circ - \alpha)] j,$$

$$(12) \quad \vec{r}_1 = [|\vec{r}_1| \cos \alpha] i + [|\vec{r}_1| \sin \alpha] j.$$

Ist $\overrightarrow{OP_1}$ ein Einheitsvektor \vec{r}_1^0 , so gilt wegen $|\vec{r}_1^0| = 1$:

$$(13) \quad \vec{r}_1^0 = (\cos \alpha) i + (\sin \alpha) j.$$

5.4.7. Anwendungen

Bei Rechnungen mit Winkelfunktionen ergibt sich oft die Aufgabe, den Sinus oder Kosinus einer Winkelsumme durch Sinus- und Kosinusfunktionen der Summanden auszudrücken. Dazu dienen folgende Beziehungen:

$$(14) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$(15) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Die Beziehungen (14) und (15) heißen **Additionstheoreme der Sinus-** bzw. **Kosinusfunktion**.

Diese Additionstheoreme können mit Hilfe der Vektorrechnung bewiesen werden.

Am Einheitskreis werden die Einheitsvektoren $\vec{OA} = a^\circ$, $\vec{OB} = b^\circ$ und $\vec{OC} = c^\circ$ eingeführt (Abb. 5.54.). Ihre Richtungen sind in bezug auf die positive x -Achse beziehentlich durch die Winkel α , $\alpha + \beta$ und $90^\circ + \alpha$ gegeben.

Schreibt man die drei Einheitsvektoren nach (13) in Komponentendarstellung, so erhält man:

$$(16) \quad a^\circ = (\cos \alpha) i + (\sin \alpha) j,$$

$$(17) \quad b^\circ = [\cos(\alpha + \beta)] i + [\sin(\alpha + \beta)] j,$$

$$(18) \quad c^\circ = [\cos(90^\circ + \alpha)] i + [\sin(90^\circ + \alpha)] j,$$

$$c^\circ = (-\sin \alpha) i + (\cos \alpha) j.$$

Andererseits kann b° auch im orthonormierten Basissystem (a°, c°) dargestellt werden:

$$(19) \quad b^\circ = (\cos \beta) a^\circ + (\sin \beta) c^\circ.$$

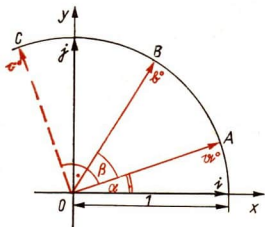


Abb. 5.54.

Gleichsetzen der rechten Seiten der Beziehungen (17) und (19) führt zu:

$$(20) \quad [\cos(\alpha + \beta)] i + [\sin(\alpha + \beta)] j = \cos \beta a^\circ + \sin \beta c^\circ.$$

Nun werden (16) und (18) in (20) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & [\cos(\alpha + \beta)] i + [\sin(\alpha + \beta)] j \\ &= [\cos \beta \cos \alpha] i + [\cos \beta \sin \alpha] j - [\sin \beta \sin \alpha] i + [\sin \beta \cos \alpha] j. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Beziehungen (14) und (15).

● Für die Sinus- bzw. Kosinusfunktion der Winkeldifferenz gelten folgende Formeln:

$$(21) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$(22) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Leiten Sie diese Formeln aus den Beziehungen (14) und (15) her, indem Sie $\alpha + \beta = \gamma$; $\alpha = \delta$; $\beta = \gamma - \delta$ setzen und nach $\sin(\gamma - \delta)$ bzw. $\cos(\gamma - \delta)$ auflösen!

Aufgaben

1. Die Seiten eines Quadrats (Abb. 5.55.) und die Verbindungsstrecken seines Mittelpunktes mit den Ecken bilden die Vektoren \vec{s}_i, \vec{r}_i ($i = 1; 2; 3; 4$). Stellen Sie die Vektoren \vec{s}_i, \vec{r}_i durch die Basisvektoren a) \vec{s}_1 und \vec{s}_2 , b) \vec{r}_1 und \vec{r}_2 dar! Fertigen Sie jeweils eine Komponententabelle der acht Vektoren an!

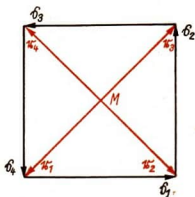


Abb. 5.55.

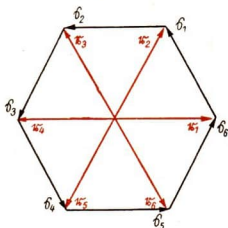


Abb. 5.56.

2. Stellen Sie die Vektoren der Abbildung 5.56. durch die orthonormierten Basisvektoren e_1, e_2 dar!
3. Zeichnen Sie in der xy -Ebene mit den Basisvektoren i, j die Ortsvektoren mit den folgenden Koordinaten! a) $a_1 = (4; 2)$ b) $a_2 = (-2; 3)$ c) $a_3 = (-1; -5)$ d) $a_4 = (3; -4)$ e) $a_5 = (-2; 4)$ f) $a_6 = (2; -4)$ g) $a_7 = (-4; -2)$ h) $a_8 = (-4; 2)$ i) $a_9 = (4; -2)$ k) $a_{10} = (2; 4)$ l) $a_{11} = (-2; -4)$
Stellen Sie Vergleiche zwischen ihnen an!
4. Stellen Sie die folgenden Vektoren als Summe ihrer Komponenten dar!
a) $|a| = 5; \varphi = 30^\circ$ b) $|b| = 4; \varphi = 60^\circ$ c) $|c| = 6; \varphi = 135^\circ$ d) $|b| = 3,5; \varphi = 160^\circ$
5. Gegeben sei der Punkt $P(x; y)$ mit dem Ortsvektor p . Welche Komponenten hat p ?

	a)	b)	c)	d)
x	3	-2	2,8	-1,5
y	2	6	-4,1	-3,5

6. Ermitteln Sie Betrag und Richtungswinkel der folgenden Vektoren!
a) $a = 2i + 3j$ b) $b = 2i - j$ c) $c = -3i - 2j$
7. Geben Sie den Ortsvektor p des Punktes $P(x; y; z)$ in Komponentendarstellung an!

	a)	b)	c)
x	3	-2	4,5
y	2	6	-3,2
z	-2	-1	0,8

8. Stellen Sie die Vektoren mit den Koordinaten $(\pm a; \pm b)$ dar und verbinden Sie ihre Spitzen!

a	0	1	2	3	4	5
b	5	4	3	2	1	0

Wie hängen a und b zusammen?

9. a) Stellen Sie die Vektoren mit den Koordinaten $(\pm x; \pm y)$ dar, wenn der Reihe nach $x = 5; 3; 3; 1; 0$ und $y = 0; 1; 3; 3; 5$ sind!
- b) Welche Komponenten haben die Seitenvektoren der entstandenen Figur, wenn sie entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn durchlaufen werden?
- c) Was ist mit den erzeugenden Vektoren zu tun, um eine Figur zu erhalten, die im Verhältnis 3 : 2 vergrößert bzw. im Verhältnis 1 : 2 verkleinert ist?
10. Stellen Sie die Verschiebung des Punktes P nach dem Punkt \bar{P} als Vektor \bar{v} dar! Geben Sie \bar{v} in Komponentendarstellung an!
- a) $P_1(3; 2)$ b) $P_2(1; 2,5)$ c) $P_3(1,5; -2)$ d) $P_4(-3; -2; 1)$
 $\bar{P}_1(7; 8)$ $\bar{P}_2(-3; 3)$ $\bar{P}_3(-2,3; -7)$ $\bar{P}_4(4; -6; 2)$
11. Zeichnen Sie zum gegebenen Vektor \bar{v} den Vektor $-\bar{v}$! Geben Sie seinen Betrag und seinen Richtungswinkel sowie die Komponenten beider Vektoren an!
- a) $|\bar{v}_1| = 3; \varphi_1 = 0^\circ$ b) $|\bar{v}_2| = \sqrt{3}; \varphi_2 = 180^\circ$ c) $|\bar{v}_3| = 3,5; \varphi_3 = 270^\circ$
12. Addieren Sie die Vektoren \bar{a} und \bar{b} bzw. \bar{a} , \bar{b} und \bar{c} zeichnerisch, und überlegen Sie die rechnerische Bestimmung der Komponenten des Summenvektors an Hand der Zeichnung!
- a) $\bar{a}_1 = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ b) $\bar{a}_2 = -4,7\bar{i} - 3,2\bar{j}$ c) $\bar{a} = -2,5\bar{i} + 1,9\bar{j}$
 $\bar{b}_1 = 2\bar{i} + \bar{j}$ $\bar{b}_2 = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ $\bar{b} = -1,6\bar{i} - 3,8\bar{j}; \bar{c} = 4,5\bar{i} + 3,1\bar{j}$
13. Addieren Sie die folgenden Vektoren! Die Komponenten der Summe sind aus der Zeichnung und durch Rechnung zu bestimmen.
- a) $|\bar{a}_1| = 2, \varphi_1 = 90^\circ; |\bar{b}_1| = 3, \psi_1 = 270^\circ$
b) $|\bar{a}_2| = 2,9, \varphi_2 = 25^\circ; |\bar{b}_2| = 3,7, \psi_2 = 85^\circ$
14. Die durch den Vektor \bar{v} dargestellte Verschiebung bildet den Punkt P auf den Punkt \bar{P} ab. Bestimmen Sie die Lage des Bildpunktes zeichnerisch und rechnerisch (Koordinaten von \bar{P} und Komponenten seines Ortsvektors \bar{p})!
- a) $P_1(-3; 2); \bar{v}_1 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{3}; \frac{5}{2}\right)$ b) $P_2(-1,5; 4); \bar{v}_2 = (-2,2; -6,1)$
15. Ermitteln Sie die Komponenten der Summe \bar{s} der Vektoren \bar{a} und \bar{b} im Raum, die durch ihre Komponenten a_x, a_y, a_z bzw. b_x, b_y, b_z gegeben sind!

	a)	b)	c)
a_x	2 i	4,5 i	-3,2 i
a_y	3 j	-2,6 j	5,0 j
a_z	4 f	1,5 f	-4,8 f
b_x	3 i	-3,0 i	2,0 i
b_y	2 j	5,2 j	-6,4 j
b_z	f	-0,8 f	2,2 f

Zeichnen Sie Figuren in genormter dimetrischer Parallelprojektion!

16. Bilden Sie die Differenz $\bar{b} = \bar{a} - \bar{b}$ der Vektoren \bar{a} und \bar{b} aus Aufgabe 15a) bis c)!
17. Stellen Sie den Vektor $\bar{v} = (2,25; -3,75)$ mit Hilfe des Einheitsvektors in der Richtung von \bar{v} dar!
18. Stellen Sie den Vektor $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ mit Hilfe des Einheitsvektors in der Richtung von \bar{a} dar!

19. Ermitteln Sie den Betrag des Ortsvektors $\vec{p} = p_x + p_y + p_z$ und die Winkel, die er mit den Basisvektoren i, j, k bildet!
Welcher Punkt P des Raumes wird durch \vec{p} festgelegt?
- a) $p_1 = 2i + 3j + k$ b) $p_2 = 3i - 4j - 2k$ c) $p_3 = -4i - 3j + 5k$
- Kontrollieren Sie die Ergebnisse darstellend-geometrisch!
20. Gegeben sind drei Vektoren im Raum durch ihre Koordinaten:
 $a_1 = (3; -1; 2)$, $a_2 = (4; 0; 1)$, $a_3 = (-1; 7; 1)$.
Berechnen Sie $a_1 - a_2 + 3a_3$!
21. Gegeben sind die Vektoren $a = (-2; 4; 1)$, $b = (5; 1; -3)$, $c = (1; -3; 4)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren
- a) $p_1 = 2a + 4b - 3c$, b) $p_2 = 3a + 2b + c$ und c) $p_3 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c$!
22. Ein Vektor hat die Koordinaten $A_x = 7; A_y = A_z = 4$.
Bestimmen Sie seine Länge und seine Richtungskosinus!
23. Zerlegen Sie den Vektor a mit $a = 5$ in zwei Komponenten, die mit der Richtung von a die Winkel 30° und 45° bilden!
Lösen Sie die Aufgabe a) zeichnerisch, b) trigonometrisch!
24. a) Zerlegen Sie den Vektor $p_1 = (-19; 5; 11)$ nach den Vektoren $a = (-2; 4; 1)$ und $b = (5; 1; -3)$!
- b) Versuchen Sie, auch den Vektor $p_2 = (10; 13; -5)$ nach denselben Vektoren zu zerlegen!
Was besagt das Ergebnis in dem einen und in dem anderen Falle?
25. Die Anfangspunkte sowie die Endpunkte zweier Vektoren a und b seien durch Strecken miteinander verbunden. Die Mittelpunkte der beiden Verbindungsstrecken seien Anfangs- und Endpunkt eines Vektors c .
Beweisen Sie, daß der Vektor c derselbe bleibt, wenn die Vektoren unabhängig voneinander parallel zu sich verschoben werden!
26. Eine Kraft \mathfrak{R} ($|\mathfrak{R}| = 280 \text{ kp}$) wird in zwei Komponenten zerlegt, deren Richtungen mit der Richtung von \mathfrak{R} die Winkel 35° und 15° bilden. Wie groß sind die Komponenten?
Lösen Sie die Aufgabe a) geometrisch, b) trigonometrisch!
27. Eine Laterne wiegt 5 kp . Sie hängt an zwei Drahtseilen, die mit der Waagerechten Winkel von 30° bilden (Abb. 5.57.). Wie groß ist die Zugkraft in den Seilen?
28. An der Spitze eines Gerüsts, dessen Maße der Abbildung 5.58. zu entnehmen sind, ist ein Seil befestigt, an dessen Ende mit einer Kraft \mathfrak{F} gezogen wird.
Bestimmen Sie Größe und Art der Beanspruchung der Stangen!

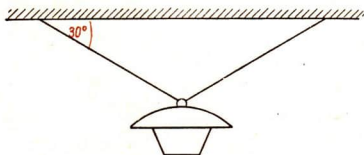


Abb. 5.57.

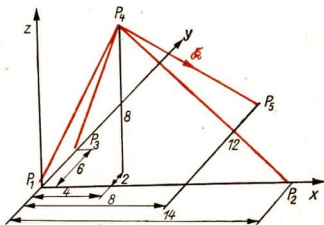


Abb. 5.58.

29. Die Kraft \mathfrak{R} ($|\mathfrak{R}| = 376 \text{ kp}$) ist in zwei Komponenten \mathfrak{P}_1 ($|\mathfrak{P}_1| = 212 \text{ kp}$) und \mathfrak{P}_2 ($|\mathfrak{P}_2| = 298 \text{ kp}$) zerlegt worden. Welche Winkel bilden die Komponenten mit der Kraft \mathfrak{R} ? Lösen Sie die Aufgabe a) geometrisch durch Vektoraddition, b) trigonometrisch!
30. Ein Tragarm von 2,00 m Länge wird von einer Zugstange gehalten, die 1,00 m oberhalb des Trägers befestigt ist (Abb. 5.59.). Am äußeren Ende des Tragarmes hänge eine Last von 200 kp. Zu bestimmen sind die auf den Tragarm und auf die Zugstange wirkenden Teilkräfte. Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Komponentendarstellung!

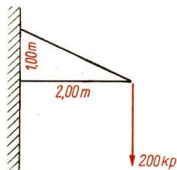


Abb. 5.59.

5.5. Anwendung von Vektoren in der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes

5.5.1. Strecke

- Leiten Sie zur Wiederholung folgende Formeln aus der analytischen Geometrie her!

- Formel für die Länge einer Strecke $\overline{P_1P_2}$, die durch die Koordinaten ihrer Endpunkte gegeben ist..
- Formeln für die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{P_1P_2}$.
- Formeln für die Koordinaten des Teilpunktes T , der die Strecke $\overline{P_1P_2}$ im Verhältnis $\frac{P_1T}{TP_2} = \lambda$ teilt.

Im folgenden werden wichtige Formeln aus der analytischen Geometrie unter Verwendung der vektoriellen Schreibweise hergeleitet.

1) Entfernung zweier Punkte. Gegeben seien in der Ebene die Punkte P_1 und P_2 mit den Ortsvektoren ξ_1 und ξ_2 (Abb. 5.46.). Nach Gleichung (7) im Abschnitt 5.4.4. ist

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \xi_2 - \xi_1 = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j}.$$

Der Betrag dieses Vektors ist die Entfernung l der Punkte P_1 und P_2 :

$$(1) \quad l = |\xi_2 - \xi_1|.$$

In kartesischen Koordinaten ist

$$(1a) \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Im Raum ergibt sich:

$$\xi_2 - \xi_1 = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} + (z_2 - z_1) \mathbf{k};$$

$$(1b) \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2) Mittelpunkt einer Strecke. Gegeben sei in der Ebene die Strecke $\overline{P_1P_2}$ durch die Ortsvektoren ξ_1 und ξ_2 ihrer Endpunkte. Gesucht wird der Ortsvektor ξ_m des Mittelpunktes M (Abb. 5.60.). Man drückt den Vektor $\overrightarrow{P_1M}$ doppelt aus:

$$\overrightarrow{P_1M} = \xi_m - \xi_1 = \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1).$$

Daraus folgt:

$$(2) \quad \xi_m = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$$

oder

$$(2a) \quad x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Diese Beziehung gilt auch für den Mittelpunkt einer Strecke $\overline{P_1P_2}$ im Raum. Dann gilt:

$$(2b) \quad x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

In Koordinatendarstellung lautet die Gleichung (2) in der Ebene daher

$$x_m \mathbf{i} + y_m \mathbf{j} = \frac{x_1 + x_2}{2} \mathbf{i} + \frac{y_1 + y_2}{2} \mathbf{j}.$$

Der Mittelpunkt einer Strecke wird in vektorieller Form durch eine einzige Gleichung dargestellt. In der koordinatenmäßigen Darstellung sind in der Ebene zwei, im Raum drei Gleichungen erforderlich. Das gilt auch für andere Beziehungen der analytischen Geometrie.

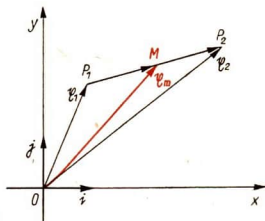


Abb. 5.60.

5.5.2. Parameterdarstellung der Geraden

● *Leiten Sie zur Wiederholung die Punktgleichung, die Zweipunktgleichung sowie die Sonderformen der Geradengleichung her!*

Im folgenden werden die Geradengleichungen in vektorieller Form hergeleitet.

1) Gleichung der Geraden durch den Koordinatenursprung.

Die Richtung der Geraden g sei durch den ebenen gebundenen Vektor \mathbf{a} gegeben (Abb. 5.61.), der g in sich selbst verschiebt. Dann verschiebt auch jedes Vielfache $t\mathbf{a}$ von \mathbf{a} die Gerade in sich selbst (t reelle Zahl).

Ein auf der Geraden laufender Punkt P habe den veränderlichen Ortsvektor ξ . Alle Punkte

$$(3) \quad \xi = t\mathbf{a},$$

die durch Verschiebung um $t\mathbf{a}$ aus dem Koordinaten-

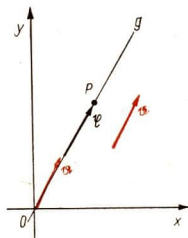


Abb. 5.61.

ursprung O entstehen, liegen auf der Geraden g . Umgekehrt kann auf diese Weise jeder Punkt der Geraden g erreicht werden.

Die Zahl t stellt in der Gleichung (3) neben dem veränderlichen Vektor ξ die zweite Veränderliche dar; sie wird als **Parameter** bezeichnet. Die Gleichung (3) heißt deshalb **Parameterdarstellung einer Geraden durch den Koordinatenursprung**. Der Vektor a heißt **Richtungsvektor** der Geraden g .

Wir gehen zur Koordinatendarstellung über. Ist α der Richtungswinkel des gegebenen Vektors a , so gilt nach Beziehung (12) im Abschnitt 5.4.6.:

$$a = |a| \cos \alpha \, i + |a| \sin \alpha \, j$$

$$\xi = ta = t|a| \cos \alpha \, i + t|a| \sin \alpha \, j.$$

Ferner ist

$$\xi = xi + yj.$$

Damit wird

$$xi + yj = t|a| \cos \alpha \, i + t|a| \sin \alpha \, j.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$x = t|a| \cos \alpha \quad \text{und} \quad y = t|a| \sin \alpha.$$

Durch Division kann aus diesen beiden Gleichungen t eliminiert werden, falls $\cos \alpha \neq 0$:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = m,$$

$$(3a) \quad y = mx.$$

2) Punktgleichung. Die Gerade g sei durch den Punkt P_1 mit dem Ortsvektor ξ_1 und einen freien Vektor, den Richtungsvektor $a = (a_x, a_y)$, bestimmt (Abb. 5.62.). Der beliebige Punkt P der Geraden mit dem veränderlichen Ortsvektor ξ entsteht aus P_1 durch Verschiebung um ta .

Durch Vektoraddition ergibt sich

$$(4) \quad \xi = \xi_1 + ta.$$

Die Gleichung (4) ist eine **Punktgleichung der Geraden in Parameterdarstellung** (t ist Parameter).

Die Beziehung (4) gilt auch für eine Gerade im Raum.

Wir gehen zur Koordinatendarstellung über.

Als Vektordifferenz geht (4) über in

$$(5) \quad \xi - \xi_1 = ta.$$

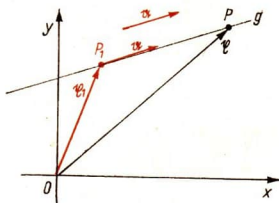


Abb. 5.62.

Die Komponentendarstellung heißt dann

$$(6) \quad \vec{x} - \vec{x}_1 = (x - x_1) \mathbf{i} + (y - y_1) \mathbf{j}.$$

Bildet der Richtungsvektor \mathbf{a} mit der positiven Richtung der x -Achse den Winkel α , so lautet seine Komponentendarstellung:

$$(7) \quad \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} = |\mathbf{a}| \cos \alpha \mathbf{i} + |\mathbf{a}| \sin \alpha \mathbf{j}.$$

Nun werden (6) und (7) in (5) eingesetzt:

$$(x - x_1) \mathbf{i} + (y - y_1) \mathbf{j} = t a_x \mathbf{i} + t a_y \mathbf{j}.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$x - x_1 = t a_x \quad \text{und} \quad y - y_1 = t a_y.$$

Man eliminiert t und erhält, falls $\cos \alpha \neq 0$,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a_y}{a_x} = \frac{|\mathbf{a}| \sin \alpha}{|\mathbf{a}| \cos \alpha} = \tan \alpha = m,$$

schließlich

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

die Punktgleichung der Geraden in kartesischer Form.

Auch die umgekehrte Aufgabe kommt vor: Aus der kartesischen Form ist die vektorielle Form herzuleiten.

Beispiel 1

Eine Gerade g sei durch einen Punkt P_1 und den Richtungsvektor \mathbf{a} gegeben.

Gegeben: $P_1(7; -3); \quad m = -1,5$

Gesucht: Punktgleichung in vektorieller Form

Der Ortsvektor \vec{x}_1 des Punktes P_1 hat die Komponentendarstellung:

$$\vec{x}_1 = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}.$$

Wir bestimmen die Komponenten des Richtungsvektors \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}.$$

$$\text{Es ist } m = -1,5 = -\frac{3}{2} = \frac{-3}{2} = \frac{a_y}{a_x}.$$

Daraus folgen:

$$a_y = -3r \quad \text{und} \quad a_x = 2r.$$

Dabei ist r eine beliebige reelle von Null verschiedene Zahl. Für $r = 1$ ergibt sich:

$$a_y = -3; \quad a_x = 2.$$

Nunmehr kann die gesuchte Komponentendarstellung niedergeschrieben werden:

$$a = 2i - 3j.$$

Die Gerade ist also bestimmt durch den Ortsvektor $\xi_1 = 7i - 3j$ und den Richtungsvektor $a = 2i - 3j$. Ihre Punktrichtungsgleichung heißt:

$$\xi = 7i - 3j + t(2i - 3j).$$

3) Zweipunktgleichung. Die Gerade g sei durch die Punkte P_1 und P_2 mit den Ortsvektoren ξ_1 bzw. ξ_2 bestimmt (Abb. 5.63.). Die Richtung der Geraden g ist durch den Vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \xi_2 - \xi_1$ bestimmt. Der variable Punkt P mit dem Ortsvektor ξ entsteht aus P_1 durch Verschiebung um $t(\xi_2 - \xi_1)$. Durch Vektoraddition erhalten wir:

$$(8) \quad \xi = \xi_1 + t(\xi_2 - \xi_1).$$

Die Gleichung (8) ist eine **Parameterdarstellung der Zweipunktgleichung der Geraden.**

Die Beziehung (8) gilt auch für eine Gerade im Raum.

Jedem Punkt der Geraden $\xi = \xi_1 + t(\xi_2 - \xi_1)$ ist ein bestimmter Parameterwert t zugeordnet. Man erhält die Ortsvektoren beliebiger Geradenpunkte, wenn t beliebige reelle Werte durchläuft.

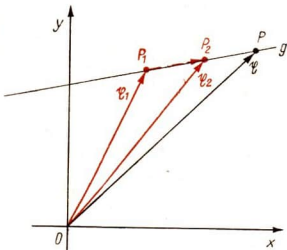


Abb. 5.63.

Beispiel 2

Gegeben: $\xi_1 = -3i + 7j$; $\xi_2 = 5i - 2j$

Geradengleichung:

$$\xi = -3i + 7j + t(5i - 2j + 3i - 7j)$$

$$\xi = -3i + 7j + t(8i - 9j)$$

in Komponenten:

$$xi + yj = (-3 + 8t)i + (7 - 9t)j,$$

$$x = -3 + 8t; \quad y = 7 - 9t$$

Wertetafel:

t	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{3}$	+1	+2	+10
x	-19	-7	-3	$-\frac{1}{3}$	+5	+13	+77
y	+25	$+11\frac{1}{2}$	+7	+4	-2	-11	-83

Für $t = 0$ ergibt sich \underline{x}_1 mit den Koordinaten $(-3; 7)$, für $t = 1$ ergibt sich \underline{x}_2 mit den Koordinaten $(5; -2)$.

4) Parallele zur x-Achse: $\alpha = i$, also $\underline{x} = \underline{x}_1 + t i$

x-Achse selbst: $\underline{x}_1 = 0$, also $\underline{x} = t i$

5) Parallele zur y-Achse: $\alpha = j$, also $\underline{x} = \underline{x}_1 + t j$

y-Achse selbst: $\underline{x}_1 = 0$, also $\underline{x} = t j$.

6) Schnittpunkt zweier Geraden.

Beispiel 3

Zwei Geraden werden durch jeweils zwei Punkte der Geraden bestimmt, und zwar g_1 durch $P_1(2; 2)$ und $P_2(7; 6)$; g_2 durch $P_3(3; 5)$ und $P_4(6; 1)$. Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes?

Die zugehörigen Ortsvektoren in Komponentendarstellung lauten:

$$\underline{x}_1 = 2i + 2j; \underline{x}_2 = 7i + 6j; \underline{x}_3 = 3i + 5j; \underline{x}_4 = 6i + j.$$

Daraus ergeben sich die Zweipunktgleichungen der Geraden.

$$g_1: \underline{x} = 2i + 2j + r(5i + 4j)$$

$$g_2: \underline{x} = 3i + 5j + t(3i - 4j)$$

Der Ortsvektor \underline{x}_s des Schnittpunktes S muß beide Gleichungen erfüllen:

$$(9) \underline{x}_s = 2i + 2j + r_s(5i + 4j)$$

$$(10) \underline{x}_s = 3i + 5j + t_s(3i - 4j).$$

Durch Eliminieren von \underline{x}_s erhält man ein Gleichungssystem mit den beiden Parametern r_s und t_s als Unbekannten:

$$2i + 2j + r_s(5i + 4j) = 3i + 5j + t_s(3i - 4j)$$

oder

$$(2 + 5r_s)i + (2 + 4r_s)j = (3 + 3t_s)i + (5 - 4t_s)j.$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$2 + 5r_s = 3 + 3t_s$$

$$2 + 4r_s = 5 - 4t_s.$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen:

$$r_s = \frac{13}{32} \quad \text{und} \quad t_s = \frac{11}{32}.$$

Aus (9) wird nun der Ortsvektor des Schnittpunktes berechnet:

$$\underline{x}_s = 2i + 2j + \frac{13}{32}(5i + 4j),$$

$$\underline{x}_s = \frac{129}{32}i + \frac{29}{8}j.$$

Der Schnittpunkt ist: $S\left(4\frac{1}{32}; 3\frac{5}{8}\right)$.

● Führen Sie die Berechnung des Schnittpunktes in der Koordinatenform durch!

5.5.3. Parameterdarstellungen der Ebene

Im Abschnitt 5.5.2. wurden Gleichungen der Geraden in der Ebene in vektorieller Form hergeleitet. Die entsprechende Aufgabe im Raum ist die Herleitung von **Ebenengleichungen**.

1) Punktrichtungsgleichung. Eine Ebene sei gegeben durch einen festen Punkt P_1 mit dem Ortsvektor \underline{x}_1 und zwei freie nicht parallele Vektoren \underline{a} und \underline{b} , für die $\underline{a} \neq \underline{0}$ bzw. $\underline{b} \neq \underline{0}$ gilt. Die freien Vektoren bewirken nur eine Verschiebung der Ebene in sich. Ist P ein beliebiger Ebenenpunkt mit dem veränderlichen Ortsvektor \underline{x} , so läßt sich eine beliebige Verschiebung der Ebene in sich, die P_1 nach P bringt, in der Form

$$\underline{x} - \underline{x}_1 = r\underline{a} + s\underline{b}$$

darstellen (Abb. 5.64.). Umgekehrt verschiebt jeder solcher Vektor die Ebene in sich.

$$(11) \quad \underline{x} = \underline{x}_1 + r\underline{a} + s\underline{b}.$$

Diese Parameterdarstellung der Ebenengleichung heißt **Punktrichtungsgleichung der Ebene**. Die beiden Richtungsvektoren \underline{a} und \underline{b} legen die Richtung der Ebene fest, r und s sind die beiden Parameter.

- 1. Vergleichen Sie Gleichung (11) mit Gleichung (4)!
- 2. Wie heißt die Punktrichtungsgleichung einer Ebene, die den Koordinatenursprung enthält?

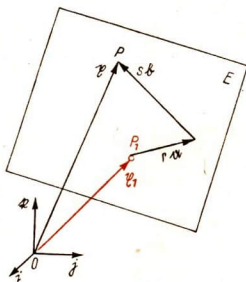


Abb. 5.64.

2) Dreipunktegleichung. Eine Ebene sei gegeben durch die drei paarweise voneinander verschiedenen festen Punkte P_1 , P_2 und P_3 mit den Ortsvektoren \underline{x}_1 , \underline{x}_2 bzw. \underline{x}_3 (Abb. 5.65.). Die Ebenenpunkte P_2 und P_3 bestimmen die Gerade g_1 in der Ebene:

$$\underline{x} = \underline{x}_2 + t(\underline{x}_3 - \underline{x}_2).$$

Auf der Geraden g_1 wird ein beliebiger Punkt X_0 durch den Ortsvektor

$$\xi_0 = \xi_2 + t_0(\xi_3 - \xi_2)$$

festgelegt. Der Punkt X_0 bestimmt mit P_1 eine in der gleichen Ebene liegende Gerade g_2 :

$$\xi = \xi_1 + r(\xi_0 - \xi_1)$$

$$(12) \quad \xi = \xi_1 + r[\xi_2 + t_0(\xi_3 - \xi_2) - \xi_1].$$

Wandert X_0 auf der Geraden g_1 , so muß t_0 wieder durch den variablen Parameter t ersetzt werden. Dann überstreicht die Gerade g_2 die gesamte Ebene, und (12) gilt für jeden Punkt der Ebene. Wir formen um:

$$\xi = \xi_1 + r(\xi_2 - \xi_1) - rt(\xi_2 - \xi_3).$$

Setzen wir $-rt = s$, so ergibt sich:

$$(13) \quad \xi = \xi_1 + r(\xi_2 - \xi_1) + s(\xi_2 - \xi_3).$$

Die Beziehung (13) heißt **Dreipunktegleichung der Ebene**.

Die Ortsvektoren ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind gegebene Größen, ξ ist der Vektor des variablen Ebenenpunktes, r und s sind die beiden Parameter.

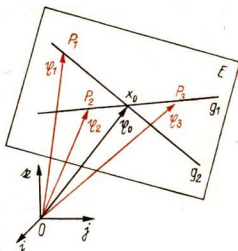


Abb. 5.65.

● Stellen Sie die Parameterdarstellungen der Gleichungen der Geraden im Raum und der Ebene in einer Übersicht zusammen!

● Stellen Sie folgende Modelle her!

1. Eine Gerade im Raum, die durch den Ortsvektor eines Geradenpunktes und den Richtungsvektor gegeben ist, nebst dem Ortsvektor eines variablen Geradenpunktes.
2. Eine Gerade im Raum, die durch die Ortsvektoren zweier Geradenpunkte gegeben ist, nebst dem Ortsvektor eines variablen Geradenpunktes.
3. Eine Ebene, die durch den Ortsvektor eines Ebenenpunktes und zwei Richtungsvektoren bestimmt ist, nebst dem Ortsvektor eines variablen Ebenenpunktes.
4. Eine Ebene, die durch die Ortsvektoren dreier Ebenenpunkte bestimmt ist, nebst dem Ortsvektor eines variablen Ebenenpunktes.

Aufgaben

1. Wie groß ist die Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2 ?

Gegeben sind die Ortsvektoren der Punkte.

a) $\xi_1 = 17i + 11j$; $\xi_2 = -7i + 4j$ b) $\xi_1 = 13i - 6j$; $\xi_2 = i - j$

Gegeben sind die Koordinaten der Punkte.

c) $P_1(1; 2)$; $P_2(4; 6)$ d) $P_1(-7; -8)$; $P_2(-1; 0)$ e) $P_1(1; 1; 1)$; $P_2(3; 4; 5)$

2. Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 , deren Endpunkte durch ihre Ortsvektoren bzw. ihre Koordinaten gegeben sind, sowohl vektoriell als auch koordinatenmäßig!
- a) $\vec{x}_1 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\vec{x}_2 = 8\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ b) $\vec{x}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; $\vec{x}_2 = 6\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 c) $P_1(-2; -6)$; $P_2(-3; 4)$ d) $P_1(0; 8; 9)$; $P_2(14; 4; 2)$
3. Teilen Sie die Strecke P_1P_2 im Verhältnis $p:q$, und bestimmen Sie den Teilpunkt vektoriell und koordinatenmäßig!
- a) $P_1(6; 6)$, $P_2(2; 2)$; $p:q = 1:4$ b) $P_1(3; 2)$, $P_2(8; 7)$; $p:q = 3:2$
4. Teilen Sie den Vektor \overrightarrow{AB} , der durch die Ortsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} des Anfangs- und Endpunktes gegeben ist, im Verhältnis $\lambda = \frac{2}{3}$!
- a) $\mathbf{a} = (2; 3; 5)$; $\mathbf{b} = (6; 1; 2)$ b) $\mathbf{a} = (3; 2; 6)$; $\mathbf{b} = (8; 6; 1)$
5. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABC ?
- a) $A(8; 5)$, $B(2; -3)$, $C(-3; 7)$ b) $A(-8; -9)$, $B(3; 5)$, $C(-3; 6)$
 c) $A(2; 3; 5)$, $B(3; 2; 6)$, $C(6; 1; 2)$
6. Ermitteln Sie den Ortsvektor und die Koordinaten des Schwerpunktes im Dreieck $P_1P_2P_3$ vektoriell!
- a) $P_1(2; 3)$; $P_2(8; 7)$; $P_3(4; -5)$ b) $P_1(3; 4)$; $P_2(9; -6)$; $P_3(-1; 8)$
7. Ermitteln Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ABC aus den Eckpunkten!
- a) $\mathbf{a} = (-4; -3; 1)$ b) $\mathbf{a} = (-3; -2; 1)$
 $\mathbf{b} = (10; 1; 1)$ $\mathbf{b} = (7; 4; 1)$
 $\mathbf{c} = (4; 5; 1)$ $\mathbf{c} = (3; 6; 1)$
8. Durch Parallelverschiebung geht das kartesische xy -Koordinatensystem in das kartesische $\xi\eta$ -Koordinatensystem über. Die Verschiebung des Ursprungs sei durch den Vektor \vec{x} gegeben. Leiten Sie für einen gegebenen Punkt P_1 den Zusammenhang zwischen
- a) seinen Ortsvektoren \vec{x}_1 und $\vec{\xi}_1$,
 b) seinen Koordinaten x_1, y_1 und ξ_1, η_1 in beiden Systemen her!
9. Führen Sie die Untersuchung wie in Aufgabe 8 für den Raum durch! Veranschaulichen Sie die Translation an einem Modell!
10. Gegeben sind der Punkt P_1 und der Richtungsvektor \mathbf{a} . Stellen Sie die Punktrichtungsgleichung der Geraden in Parameterdarstellung auf!
11. Gestalten Sie in den folgenden Aufgaben die vektorielle Form in die Koordinatenform um! Gegeben sind ein Punkt und der Richtungsvektor \mathbf{a} .
- a) $P_1(0; 0)$; $\mathbf{a} = (1; -1)$ b) $P_1(-6; -6)$; $\mathbf{a} = (1; 1)$ c) $\vec{x}_1 = -8\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$; $\mathbf{a} = (-1; 1,5)$
12. Eine Gerade mit dem Richtungsvektor $-\frac{1}{2}$ soll durch den Punkt $P_1(-2; 0)$ gehen. Wie lautet ihre Punktrichtungsgleichung in vektorieller Form?
13. Wie lautet die Punktrichtungsgleichung der Parallelen durch den Punkt $P_1(5; 3)$ zu der Geraden $2x - 3y = 12$ in Parameterdarstellung?
14. Ein Dreieck habe die Ecken $A(2; 3)$, $B(3; -5)$, $C(8; 7)$. Stellen Sie für die Dreiecksseiten die Parameterdarstellungen der Zweipunktgleichung auf!

15. Drei Geraden g_1, g_2, g_3 sind durch den Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse und den Richtungsvektor gegeben.
Ermitteln Sie die Eckpunkte des Dreiecks, das die Geraden bilden (Ortsvektoren und Koordinaten)!

	Schnittpunkt	Richtungsvektor
g_1	$R_1(0; 4)$	$a_1 = (6; -4)$
g_2	$R_2(8; 0)$	$a_2 = (-8; 16)$
g_3	$R_3(0; 8)$	$a_3 = (5; 3)$

16. Die Gerade g geht durch den Punkt $P_1(2; -1; 4)$ und hat den Richtungsvektor $a = (1; 2; 3)$.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Geradenpunkte für die ganzzahligen Parameterwerte $-3 \leq t \leq 5$!
17. Die Gerade g ist durch den Punkt $P_1(4; 3)$ und den Richtungsvektor $a = (3; -1)$ gegeben.
- Geben Sie die Parameterdarstellung in vektorieller Form und in Koordinatenform an!
 - Für welche Parameterwerte t ergeben sich die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen?
 - Was erhalten Sie, wenn Sie aus den Parametergleichungen den Parameter eliminieren?
18. Gegeben sind der Punkt $P_1(3; 2; -1)$ und der Richtungsvektor $a = (-1; 1; -1)$.
- Wie lautet die Punktgleichung der gegebenen Geraden in Vektorform?
 - Zerlegen Sie den Ortsvektor \underline{r} des laufenden Geradenpunktes nach den orthonormierten Basisvektoren!
 - Geben Sie die Koordinaten des laufenden Geradenpunktes in Parameterform an!
 - Ermitteln Sie die Koordinaten der Spurpunkte der Geraden in der xy -, yz - und zx -Ebene (P' , P'' , P''')!
 - Wie lauten die Parameterdarstellungen der Projektionen der Geraden auf die Koordinatenebenen?
 - Zeichnen Sie eine Figur in standardisierter dimetrischer Parallelprojektion!
 - Isolieren Sie den Parameter aus einer Koordinatengleichung und setzen Sie den Wert in die beiden anderen ein! Was stellen diese Gleichungen dar? Wieviel Paare solcher Gleichungen gibt es im allgemeinen?
19. Der Punkt $P_1(2; 3; 7)$ und die Vektoren $a = (-1; 2; 3)$ und $b = (3; -1; 2)$ bestimmen die Ebene E .
- Wie lautet die Parametergleichung der Ebene E in Vektorform?
 - Schreiben Sie die Parameterdarstellung mit Hilfe von Koordinaten!
 - Ermitteln Sie die Gleichungen der Spurgeraden s_1 in der yz - und s_3 in der zx -Ebene sowohl in Parameterform als auch parameterfrei!
 - Welche Richtungsvektoren haben die Spurgeraden?
 - Zeichnen Sie die Figur in standardisierter dimetrischer Parallelprojektion!
20. Die Punkte P_1, P_2, P_3 bestimmen die Ebene E . Stellen Sie die Dreipunktgleichung der Ebene E auf!
- $P_1(1; 0; 0), P_2(0; 1; 0), P_3(0; 0; 1)$
 - $P_1(0; 0; 0), P_2(3; -1; 2), P_3(-2; 3; -1)$
 - $P_1(4; 5; 6), P_2(-2; -3; -1), P_3(0; 7; -8)$

5.6. Skalarprodukt

5.6.1. Einführung

- Der Angriffspunkt einer konstanten Kraft K lege unter Überwindung eines Widerstandes einen geradlinigen Weg s in Richtung der Kraft zurück. Wie ermittelt man die Arbeit?
- Bildet eine Kraft mit dem Weg den Winkel γ , so ist nur ihre Komponente in Richtung des Weges wirksam.
- 1. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Komponenten einer Kraft von 3 kp in Richtung des Weges für die Winkel $\gamma = 0^\circ; 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ; 90^\circ$!
- 2. Berechnen Sie die Arbeit für den Weg 5 cm mit den unter 1 angegebenen Bedingungen!
- 3. Stellen Sie die Ergebnisse graphisch als Flächeninhalte von Rechtecken dar!

Gegeben sei ein geradliniges Wegstück durch Länge und Richtung; es läßt sich durch den Vektor \vec{s} darstellen (Abb. 5.66.). Auf einen Körper am Ausgangspunkt von \vec{s} wirke die konstante Kraft \vec{F} . Sie bildet mit \vec{s} den Winkel γ . Wie ermittelt man die erforderliche Arbeit W , wenn der Körper um die Strecke $|\vec{s}| = s$ mit der Kraft \vec{F} verschoben wird?

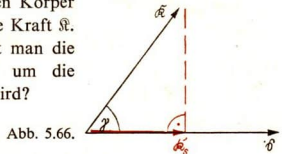


Abb. 5.66.

Die Kraft \vec{F} und der Weg \vec{s} sind vektorielle Größen; sie sind durch Größe und Richtung bestimmt. Die mechanische Arbeit W dagegen ist als eine Form der Energie eine skalare Größe; sie ist durch eine Zahl (Skalar) bestimmt. Die erforderliche Arbeit soll ermittelt werden. Fällt die Richtung der Kraft mit der Richtung des Weges, längs dessen sie wirkt, zusammen, so ist die Arbeit gleich dem Produkt aus dem Betrag dieser Kraft und dem Betrag des Weges:

$$(1) \quad W = |\vec{F}| |\vec{s}| = Ks.$$

Sind Krafrichtung und Wegrichtung verschieden, so wird nur die in Richtung des Weges \vec{s} wirkende Komponente \vec{F}_s der Kraft \vec{F} wirksam. Ihr Betrag ist

$$|\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cos \gamma = K \cos \gamma.$$

Damit ergibt sich allgemein für die gesuchte Arbeit:

$$(2) \quad W = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \gamma = Ks \cos \gamma.$$

Die Arbeit ist also gleich dem Produkt aus den Beträgen der beiden Vektoren \vec{F} und \vec{s} und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels γ . Die produkt-

artige Verknüpfung der beiden Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ergibt nicht wieder einen Vektor, sondern eine Zahl (einen Skalar).

Rechnerische Ausdrücke nach Art der Beziehung (2), die mit Hilfe zweier Vektoren gebildet werden, kommen in der Mathematik oft vor. Ein Ausdruck wie in (2) heißt **skalares Produkt** der Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} . Man schreibt

$$W = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}.$$

► Erklärung 1

Unter dem Skalarprodukt zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren \mathfrak{a} und \mathfrak{b} versteht man die Zahl c , die gleich ist dem Produkt aus den Beträgen $|\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{b}|$ und dem Kosinus des von \mathfrak{a} und \mathfrak{b} eingeschlossenen Winkels $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \gamma$.

Es ist

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = c$$

und

$$(3) \quad c = |\mathfrak{a}| |\mathfrak{b}| \cos (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = ab \cos \gamma.$$

► Das skalare Produkt eines beliebigen Vektors mit dem Nullvektor ist Null.

Die durch die Erklärung 1 festgelegte Verknüpfung der Vektoren \mathfrak{a} und \mathfrak{b} ist eindeutig. Im allgemeinen sind \mathfrak{a} und \mathfrak{b} Vektoren des Raumes.

● Deuten Sie das skalare Produkt geometrisch!

5.6.2. Grundgesetze des Skalarproduktes

- 1. Nennen Sie mit Hilfe allgemeiner Zahlensymbole die Rechenregeln für die Multiplikation von Zahlen!
- 2. Welche Folgerung ziehen Sie aus der Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$?
- 3. Erläutern Sie die Division von Zahlen als Umkehrung der Multiplikation!

1) Das **Kommutationsgesetz** der Multiplikation gilt auch für das skalare Produkt.

$$\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} &= |\mathfrak{b}| |\mathfrak{a}| \cos (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \\ &= |\mathfrak{a}| |\mathfrak{b}| \cos [-(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})] \\ &= |\mathfrak{a}| |\mathfrak{b}| \cos (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \\ \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} &= \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Die Analogie des kommutativen Gesetzes für das skalare Produkt zweier Vektoren zu dem entsprechenden Gesetz für Zahlen $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$ ist offensichtlich.

● Erläutern Sie das Kommutationsgesetz für Vektoren in der Ebene durch eine Zeichnung!

2) Die Gleichung $a \cdot b = 0$ hat nicht notwendig zur Folge, daß $a = 0$ oder $b = 0$ gilt. Es kann auch der Fall $\cos(a, b) = 0$, das heißt $\sphericalangle(a, b) = 90^\circ$ vorliegen.

Ist Winkel (a, b) $\left\{ \begin{array}{l} \text{spitz} \\ \text{rechtwinklig} \\ \text{stumpf} \end{array} \right\}$, so ist $a \cdot b$ $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right\}$,

unter der Voraussetzung, daß $|a| \neq 0$ und $|b| \neq 0$.

Die Beziehung

$$(4) \quad a \cdot b = 0$$

ist also die Bedingung für die **Orthogonalität** zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren a und b . In dieser Eigenschaft unterscheidet sich das Skalarprodukt zweier Vektoren vom Produkt zweier Zahlen. Außerdem ist das Produkt zweier Zahlen wieder eine Zahl, während das skalare Produkt zweier Vektoren nicht wieder einen Vektor ergibt.

● Ermitteln Sie das Skalarprodukt $a \cdot b$ für $\gamma = 0^\circ$ und $\gamma = 180^\circ$!

3) Für die **Multiplikation des Skalarproduktes mit einer Zahl** gilt:

$$(5) \quad t(a \cdot b) = a \cdot (tb) = (ta) \cdot b.$$

Beweis: Ist $t > 0$, so ist tb ein Vektor, der dieselbe Richtung, denselben Durchlaufsinne und den t -fachen Betrag hat wie der Vektor b .

Es ist

$$|tb| = t|b|.$$

Ferner gilt:

$$\cos(a, tb) = \cos(a, b).$$

Folglich ist

$$a \cdot (tb) = t|a| |b| \cos(a, b) = t(a \cdot b).$$

Ist aber $t < 0$, so hat tb den entgegengesetzten Durchlaufsinne wie b . Dann ist

$$|tb| = -t|b| \quad \text{und} \quad \cos(a, tb) = \cos(a, -b),$$

woraus

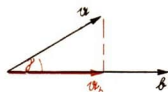
$$a \cdot (tb) = -t|a| |b| [-\cos(a, b)] = t(a \cdot b)$$

folgt.

4) **Skalares Produkt und Projektion.** In das skalare Produkt soll nunmehr die Projektion des einen Vektors auf den anderen eingeführt werden. Es sei a_b die Projektion des Vektors a auf den Vektor b (Abb. 5.67.). Für den Projektionsvektor gilt:

$$(6) \quad |a_b| = |a| |\cos \gamma| = \frac{|a \cdot b|}{|b|} = |a \cdot b^\circ|.$$

Abb. 5.67.



Ebenso ist

$$|b_a| = |b| |\cos \gamma| = \frac{|a \cdot b|}{|a|} = |b \cdot a^\circ|.$$

Unter Verwendung von (6) werden

$$|a_b| |b| = |a \cdot b| \quad \text{und} \quad |b_a| |a| = |a \cdot b|.$$

Da a_b und b (bzw. b_a und a) Vektoren gleicher Richtung sind, deren Durchlaufsinn bei positivem Skalarprodukt ($a \cdot b$), d. h. $0^\circ \leq \gamma < 90^\circ$, gleich und bei negativem Skalarprodukt ($a \cdot b$), d. h. $90^\circ < \gamma \leq 180^\circ$ entgegengesetzt ist, erhält man schließlich:

$$(7) \quad a \cdot b = a_b \cdot b.$$

Ebenso ist

$$(8) \quad a \cdot b = a \cdot b_a.$$

► Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist gleich dem Skalarprodukt aus der Projektion des einen Vektors (auf den anderen) und dem anderen Vektor.

Ein entsprechender Satz gilt für Vektoren im Raum.

5) Das **Distributionsgesetz** gilt auch für die skalare Multiplikation.

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Der Beweis wird im folgenden auf den Fall beschränkt, daß a , b und c in ein und derselben Ebene liegen. Nach dem Projektionsatz [Beziehung (8) im Abschnitt 5.4.5.] gilt (Abb. 5.68.):

$$(9) \quad s_c = a_c + b_c,$$

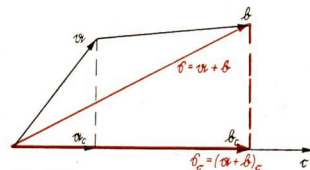


Abb. 5.68.

wenn $a_c = |a_c|$, $b_c = |b_c|$ und $s_c = |s_c|$ die Beträge der Projektionen der Vektoren a , b bzw. des Summenvektors s auf den Vektor c sind. Gleichung (9) wird mit dem Betrag des Vektors c multipliziert:

$$(10) \quad c \cdot s_c = c \cdot a_c + c \cdot b_c.$$

Unter Verwendung von (7) und (8) ergibt sich, falls $\sphericalangle(c, s)$, $\sphericalangle(c, a)$ und $\sphericalangle(c, b)$ spitze Winkel sind:

$$c \cdot s_c = c \cdot s_c = c \cdot s,$$

$$c \cdot a_c = c \cdot a_c = c \cdot a,$$

$$c \cdot b_c = c \cdot b_c = c \cdot b.$$

Setzt man nun in (10) ein, so erhält man

$$c \cdot \vec{s} = c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b}$$

oder

$$(11) \quad c \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b}.$$

● *Beweisen Sie das Distributivgesetz für den Fall der Abbildung 5.69.! Beachten Sie dabei, daß Winkel (c, b) stumpf ist!*

Das Distributivgesetz gilt auch bei allgemeiner räumlicher Lage der Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Wir erkennen die Analogie zum Distributivgesetz für rationale Zahlen:

$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}.$$

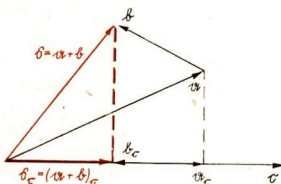


Abb. 5.69.

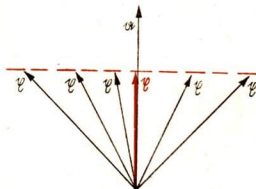


Abb. 5.70.

6) Es gibt keine „skalare Division“ von Vektoren.

Es sei

$$(12) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{z} \quad \text{und} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0.$$

Dann ist auch

$$(13) \quad \vec{a} \cdot t\vec{c} = 0.$$

Die Gleichungen (12) und (13) werden addiert und das distributive Gesetz (11) angewendet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot t\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} + t\vec{c}) = \vec{z}.$$

Die Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{z}$ hat also, wenn sie überhaupt eine Lösung hat, mehrere Lösungen. Alle Vektoren

$$(14) \quad \vec{x} = \vec{b} + t\vec{c}$$

mit beliebigem reellem t sind Lösungen. Sie haben alle die gleiche Projektion auf den Vektor \vec{a} (Abb. 5.70., gezeichnet für den ebenen Fall).

Im Gegensatz zum Rechnen mit Zahlen gibt es keine „skalare Division“ von Vektoren.

7) Das Assoziativgesetz hat für die skalare Multiplikation keinen Sinn, da das skalare Produkt zweier Vektoren kein Vektor ist. Es ist $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ im allgemeinen nicht gleich $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$, denn $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ist ein Vielfaches von \vec{c} , während $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ ein Vielfaches von \vec{a}

ist. In dieser Hinsicht unterscheidet sich das Skalarprodukt von der Multiplikation mit Zahlen.

- *Stellen Sie in einer Übersicht die Grundgesetze der skalaren Multiplikation von Vektoren den entsprechenden Rechengesetzen mit Zahlen gegenüber! Aus der Übersicht soll hervorgehen, welche Rechengesetze gelten bzw. nicht gelten und welche Besonderheiten auftreten.*

Die Tatsache, daß die Grundgesetze der beschriebenen Verknüpfung von Vektoren in vielen den Rechenregeln für die Multiplikation von Zahlen ähnlich sind, begründet die Bezeichnungen „multiplikative Verknüpfung“ und „Produkt“.

8) Das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst ergibt

$$(15) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$$

wegen $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$. Für $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ wird auch das Symbol a^2 geschrieben.

9) Das skalare Produkt eines Einheitsvektors mit sich selbst ist

$$(16) \quad \mathbf{a}^\circ \cdot \mathbf{a}^\circ = |\mathbf{a}^\circ| |\mathbf{a}^\circ| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

10) Die skalaren Produkte der Basisvektoren mit sich selbst sind

$$(17) \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1; \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

Ferner ist

$$(18) \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0; \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Da die Basisvektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen, wird zum Beispiel

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{i}| |\mathbf{j}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

- *Stellen Sie ein Modell her, das das Distributionsgesetz bei allgemeiner räumlicher Lage der Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} veranschaulicht!*

5.6.3. Koordinatendarstellung des Skalarproduktes

- *Das Distributionsgesetz lautet in erweiterter Form:*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}.$$

Zeigen Sie rechnerisch, daß aus den Gesetzen über die skalare Multiplikation diese Gleichung folgt!

Die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} seien in Komponentendarstellung gegeben:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}; \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

Das Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist dann

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}).$$

Unter Anwendung des Distributionsgesetzes in erweiterter Form sowie der Beziehungen (17) und (18) ergibt sich

$$(19) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Die Beziehung (19) ist die **Koordinatendarstellung des Skalarproduktes**. Man braucht also nicht erst auf die Definition des Skalarproduktes zurückzugehen, sondern bildet gleich die Summe der Produkte entsprechender Koordinaten.

Inbesondere ist

$$(20) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\mathbf{a}|^2$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Durch Anwendung der Regel (19) ergeben sich ferner die Beziehungen

$$(21) \quad a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}; \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}; \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

5.6.4. Winkel zwischen zwei Vektoren

Aus der Definitionsgleichung des skalaren Produktes (3) ergibt sich der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} :

$$(22) \quad \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|},$$

in Koordinatendarstellung:

$$(23) \quad \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}.$$

5.6.5. Richtungskosinus

Aus (22) kann man die Richtungskosinus eines freien Vektors herleiten, die für den Sonderfall des Ortsvektors bezüglich des Nullpunktes [Beziehung (11) im Abschnitt 5.4.6.] zur Anwendung gelangen.

Die Winkel, die der Vektor \mathbf{a} beziehentlich mit \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} bildet, seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Wir setzen in (22) für \mathbf{b} der Reihe nach \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ein und verwenden (21). Es ergeben sich die Beziehungen

$$(24) \quad \cos \alpha_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{a}.$$

Es soll nun die Summe der Quadrate der Richtungskosinus gebildet werden. Zur Umformung dienen die Beziehungen (20) und (15). Es wird dann

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = \frac{a_x^2}{a^2} + \frac{a_y^2}{a^2} + \frac{a_z^2}{a^2} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{a^2} = \frac{|\mathbf{a}|^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

► Die Summe der Quadrate der Richtungskosinus jedes von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vektors ist gleich 1.

5.6.6. Ausblick auf das Vektorprodukt

- *Wie lautet das Hebelgesetz, wenn die Richtungen der Kraft und des Hebelarms aufeinander senkrecht stehen?*

In der Physik wird außer dem Skalarprodukt eine weitere produktartige Verknüpfung zweier Vektoren verwendet. Ein Beispiel hierfür ist das Drehmoment.

An den Hebelarm \vec{r} greift die Kraft \vec{K} so an, daß \vec{r} und \vec{K} den Winkel γ miteinander bilden (Abb. 5.71). Gesucht ist das Drehmoment der Kraft \vec{K} in bezug auf den Drehpunkt O .

Nur die zu \vec{r} senkrechte Komponente \vec{K}_s der Kraft \vec{K} ist wirksam. Ihre Größe ist $|\vec{K}_s| = |\vec{K}| \sin \gamma$. Die Größe des Drehmoments ergibt sich nach dem Hebelgesetz zu:

$$(25) \quad M = |\vec{r}| |\vec{K}_s| = |\vec{r}| |\vec{K}| \sin \gamma$$

$$M = rK_s = rK \sin \gamma.$$

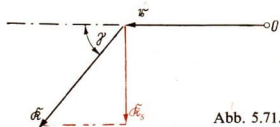


Abb. 5.71.

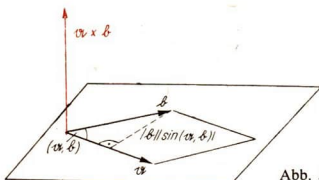


Abb. 5.72.

Ist $\gamma = 90^\circ$, so wird $M = rK$.

Das Drehmoment bedarf zu seiner vollständigen Bestimmung außer der Größe noch der Angabe des Drehsinnes. Es kann durch einen Vektor \mathfrak{M} in folgender Weise dargestellt werden. Der Betrag $|\mathfrak{M}| = M$ von \mathfrak{M} ist durch die Gleichung (25) gegeben. Die Richtung von \mathfrak{M} wird so festgelegt, daß sie parallel zur Drehachse ist (in Abbildung 5.71. senkrecht zur Zeichenebene). Der Durchlaufsinne werde so festgesetzt, daß die Drehung des Vektors \vec{r} um den Winkel γ in die Richtung von \vec{K} eine Rechtschraubung ist. In Abbildung 5.71. weist der Vektor \mathfrak{M} nach oben (in der Zeichnung nicht wiedergegeben).

Der Betrag von \mathfrak{M} ist nach der Beziehung (25) gleich der Maßzahl des Flächeninhaltes eines Parallelogramms mit den Beträgen $|\vec{r}|$ und $|\vec{K}|$ der Vektoren \vec{r} bzw. \vec{K} als Seiten.

Das Drehmoment ist also ein Vektor, der sich durch eine neue produktartige Verknüpfung der Vektoren \vec{r} und \vec{K} ergibt. Dieses Produkt heißt **vektorielles Produkt** oder **Vektorprodukt**. Man schreibt symbolisch $\mathfrak{M} = \vec{r} \times \vec{K}$ (gelesen: Vektorprodukt aus \vec{r} und \vec{K} oder \vec{r} Kreuz \vec{K}).

► Erklärung 2

Das vektorielle Produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier von $\vec{0}$ verschiedener Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist ein Vektor vom Betrag $|\vec{a}| |\vec{b}| |\sin(\vec{a}, \vec{b})|$. Falls der Betrag positiv ist, steht er auf \vec{a} und \vec{b} senkrecht und \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Abb. 5.72.). Das vektorielle Produkt aus Nullvektor und einem beliebigen Vektor ist der Nullvektor.

Der in den Raum weisende Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} stellt den Flächenumlaufsinn des von \mathbf{a} und \mathbf{b} gebildeten Parallelogramms dar (Abb. 5.73. und 5.74.). Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist

$$|\vec{S}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\sin(\alpha, \mathbf{b})| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Da $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cdot \sin(\alpha, \mathbf{b})$ und

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cdot \sin(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \text{ ist,}$$

muß wegen $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ und $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

sein.

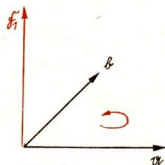


Abb. 5.73.



Abb. 5.74.

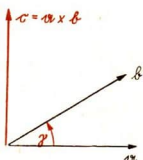


Abb. 5.75.

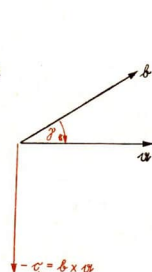


Abb. 5.76.

Während \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand angeordnet sind (Rechtssystem), folgen \mathbf{a} , \mathbf{b} und $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ aufeinander wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der linken Hand (Linkssystem) (Abb. 5.75. und 5.76.). Für das Vektorprodukt gilt also das kommutative Gesetz nicht.

Sind \mathbf{a} und \mathbf{b} zwei von \mathbf{o} verschiedene nicht zueinander parallele Vektoren des Raumes, so wird durch diese, wie man sagt, ein Parallelogramm (bzw. eine Ebene) aufgespannt. Der Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ gibt die Stellung des Parallelogramms im Raum an; er wird deshalb als **Stellungsvektor** der Ebene bezeichnet.

- Ist der Produktvektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ein freier Vektor?
- Stellen Sie ein Modell des Vektorproduktes her!

5.6.7. Anwendungen

- Wie lautet der Kosinussatz der ebenen Trigonometrie, und bei welchen Dreiecksberechnungen wird er angewandt?

Das skalare Produkt wird beim Beweis von Lehrsätzen aus der Planimetrie und Trigonometrie angewandt.

Beispiel 1

Satz: Die Winkelhalbierenden von Nebenwinkeln stehen aufeinander senkrecht.

Beweis: Die Winkelhalbierende zu zwei Vektoren a und b wird durch einen Vektor w dargestellt und mit Hilfe der Einheitsvektoren a° und b° bestimmt. Diese Einheitsvektoren spannen einen Rhombus auf, in dem w eine Diagonale (Abb. 5.77.) ist. Bei Nebenwinkeln ergibt sich (Abb. 5.78.):

$$w_1 = a^\circ + b^\circ,$$

$$w_2 = a^\circ - b^\circ.$$

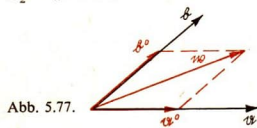


Abb. 5.77.

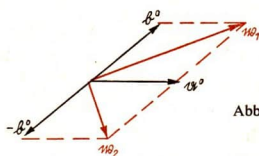


Abb. 5.78.

Das skalare Produkt wird gebildet:

$$\begin{aligned} w_1 \cdot w_2 &= (a^\circ + b^\circ) \cdot (a^\circ - b^\circ) \\ &= a^\circ \cdot a^\circ - a^\circ \cdot b^\circ + b^\circ \cdot a^\circ - b^\circ \cdot b^\circ \end{aligned}$$

$$w_1 \cdot w_2 = 1 - 1 = 0.$$

Da $w_1 \neq 0$ und $w_2 \neq 0$, bringt die Gleichung $w_1 \cdot w_2 = 0$ zum Ausdruck, daß die Winkelhalbierenden aufeinander senkrecht stehen.

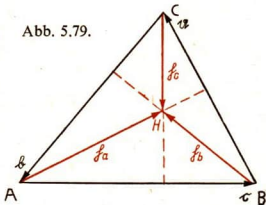
Beispiel 2

Satz: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in ein und demselben Punkt.

Beweis: Die Seiten des Dreiecks ABC werden durch die Vektoren a , b , c dargestellt (Abb. 5.79.). Die Höhen h_a und h_c schneiden einander in H . Ist H ein Eckpunkt, so ist die Behauptung richtig. Ist aber H kein Eckpunkt, so ist H auch von B verschieden. Dann sei

$$\vec{CH} = h_c; \quad \vec{AH} = h_a \quad \text{und} \quad \vec{BH} = h_b \neq 0.$$

Abb. 5.79.



Da die Vektoren c und h_c beziehungsweise a und h_a aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$(26) \quad c \cdot h_c = 0$$

und

$$(27) \quad a \cdot h_a = 0.$$

Behauptet wird jetzt, daß die Vektoren \vec{h}_b und \vec{b} aufeinander senkrecht stehen. Das ist wegen $h_b \neq 0$ und $b \neq 0$ genau dann der Fall, wenn

$$(28) \quad \vec{b} \cdot \vec{h}_b = 0.$$

Im Teildreieck BCH ist

$$\vec{h}_c = \vec{h}_b - \vec{a}.$$

Weiterhin ist im Teildreieck ABH

$$\vec{h}_a = \vec{c} + \vec{h}_b.$$

Indem man in die Voraussetzungen (26) und (27) einsetzt, erhält man:

$$c \cdot (\vec{h}_b - \vec{a}) = c \cdot \vec{h}_b - c \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{und}$$

$$a \cdot (\vec{c} + \vec{h}_b) = a \cdot \vec{c} + a \cdot \vec{h}_b = 0.$$

Addition beider Gleichungen ergibt nach Umformung

$$\vec{h}_b \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{h}_b \cdot (-\vec{b}) = -\vec{h}_b \cdot \vec{b} = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung (28). Die Vektoren \vec{h}_b und \vec{b} stehen also ebenfalls aufeinander senkrecht, d. h., die dritte Höhe geht durch den Schnittpunkt der beiden anderen.

Beispiel 3

Der Kosinussatz ist zu beweisen.

In jedem Dreieck gilt, wenn die Seiten entsprechend Abbildung 5.80. durch Vektoren dargestellt werden, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ oder

$$(29) \quad \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}.$$

Jede Seite der Gleichung (29) wird skalar mit sich selber multipliziert.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2$$

und weiter

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

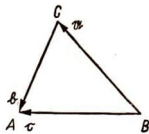


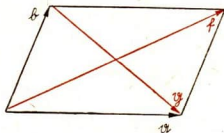
Abb. 5.80.

Aufgaben

- Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren a und b !
a) $|a| = 3$; $\varphi = 30^\circ$ b) $|a| = 4$; $\varphi = 10^\circ$ c) $|a| = 2,5$; $\varphi = 200^\circ$ d) $|a| = 3,2$; $\varphi = 140^\circ$
 $|b| = 4$; $\psi = 45^\circ$ $|b| = 3$; $\psi = 70^\circ$ $|b| = 2$; $\psi = 290^\circ$ $|b| = 2,3$; $\psi = 240^\circ$
- a) Gegeben seien zwei beliebige Vektoren a und b . Konstruieren Sie die Projektionen a_b und b_a des einen auf den anderen Vektor!
b) Es ist $a_b = \lambda b$ bzw. $b_a = \mu a$. Wie groß sind λ bzw. μ , wenn a und b und der Winkel zwischen a und b als bekannt vorausgesetzt werden?
Welche Beziehung besteht zwischen beiden Proportionalitätsfaktoren?
- Wie hängt der Wert des Skalarproduktes $a \cdot b$
a) vom Betrag a des Vektors a ,
b) vom Richtungswinkel φ_1 des Vektors a ab,
wenn die übrigen Bestimmungsstücke der beiden Vektoren konstant sind?
Veranschaulichen Sie die funktionalen Beziehungen für die folgenden Zahlenfälle geometrisch!
 α) $\varphi_1 = 0^\circ$; $\varphi_2 = 60^\circ$; $b = 3$ β) $a = 2$; $\varphi_2 = 0^\circ$; $b = 2,5$ γ) $a = 1,5$; $\varphi_2 = 45^\circ$; $b = 2$
- Es sei v ein Vektor in der von i und j aufgespannten Ebene.
Welche Bedeutung hat $i \cdot v$, wenn v mit i den Winkel γ bildet?
Welche Bedeutung hat $j \cdot v$?
- Unter welchen Bedingungen wird das Skalarprodukt negativ?
- Warum können drei Vektoren nicht skalar miteinander multipliziert werden?
- Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren a und b !
a) $a = 2i + 3j$ b) $a = 3i - 2j$ c) $a = (-3; -4; -3)$
 $b = 3i + 4j$ $b = 6i + 4j$ $b = (-5; 6; 4)$
d) $a_x = 2,9i$; $a_y = -1,6j$; $a_z = 4,8f$
 $b_x = 6,2i$; $b_y = 4,3j$; $b_z = -6,4f$
- Vereinfachen Sie den Ausdruck $(a + b)^2 - (a - b)^2$!
- Was bedeutet $(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ geometrisch?
- Wie groß ist der Winkel, den zwei Vektoren des Raumes a und b miteinander bilden?
a) $a = (2; 2; 1)$ b) $a = (1; 1; 1)$ c) $a = (2; 2; 2)$
 $b = (4; 10; 8)$ $b = (3; 3; 3)$ $b = (-3; -3; -3)$
d) $a = 2i + j - 2f$
 $b = (2 + 2\sqrt{3})i + (1 - 2\sqrt{3})j - (2 - \sqrt{3})f$
Zeichnen Sie Figuren in standardisierter dimetrischer Projektion!
- Bestimmen Sie die Richtungskosinus für folgende Vektoren!
a) $a_1 = (3; 4; 0)$ b) $a_2 = (2; 3; 4)$ c) $a_3 = (5; 4; 3)$
- Gegeben sind die Vektoren
 $a = i + 5j$; $b = i + j + 2f$; $v = 2i + 2j + f$.
Bestimmen Sie die Projektionen der drei Vektoren a , b und $a + b$ auf den Vektor v , und rechnen Sie nach, daß die Summe der Projektionen von a und b gleich der Projektion von $a + b$ ist!

13. Beweisen Sie vektoriell den Satz:
Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht!
14. Beweisen Sie vektoriell den Satz des THALES!
15. Beweisen Sie vektoriell die Sätze am rechtwinkligen Dreieck (Satz des PYTHAGORAS, Kathetensatz, Höhensatz!).

Abb. 5.81.



16. Im Parallelogramm (Abb. 5.81.) gilt:

$$f^2 + g^2 = 2(a^2 + b^2).$$

- a) Beweisen Sie diese Beziehung!
- b) Wie groß ist die Differenz der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogramms?
17. Bestimmen Sie im Einheitswürfel vektoriell die Winkel zwischen den Kanten und den Raumdiagonalen und die Winkel zwischen den Raumdiagonalen unter sich!
Wählen Sie das zugrunde zu legende Koordinatensystem zweckmäßig! Vergleichen Sie das vektorielle Verfahren mit den Methoden der ebenen Trigonometrie bzw. mit denen der darstellenden Geometrie!
18. Ein Tetraeder sei gegeben durch die Eckpunkte $P_1(0; 0; 0)$, $P_2(5; 2; 0)$, $P_3(2; 5; 0)$, $P_4(3; 3; 6)$. Bestimmen Sie
- a) die Längen der Kanten,
b) die Größen der Winkel zwischen den Kanten,
c) die Koordinaten der Kantenmittelpunkte,
d) die Schnittpunkte der Verbindungsstrecken von je zwei Mittelpunkten gegenüberliegender Kanten,
e) die Vektoren dieser Verbindungsstrecken, ihre Längen und die Winkel zwischen ihnen!
19. Die Endpunkte einer Strecke seien durch die Ortsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} gegeben. Wie lautet die Bedingung für den Ortsvektor der Punkte auf der Mittelsenkrechten der gegebenen Strecke?
20. Beweisen Sie vektoriell: In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate der Seiten und der Quadrate der Diagonalen viermal so groß wie die Summe der Quadrate der beiden Verbindungsstrecken der Mitten der gegenüberliegenden Seiten und des Quadrates der Verbindungsstrecke der Diagonalenmitten!
21. Welche Arbeit ist erforderlich, wenn ein Körper längs des Weges \vec{s} um $|\vec{s}| = s$ durch eine Kraft \vec{F} verschoben werden soll?
- a) $|\vec{s}| = 3$; $\varphi = 60^\circ$ b) $|\vec{s}| = 2$; $\varphi = 60^\circ$
 $|\vec{F}| = 2$; $\psi = 60^\circ$ $|\vec{F}| = 3$; $\psi = 90^\circ$
- c) $|\vec{s}| = 3,4$; $\varphi = 45^\circ$ d) $|\vec{s}| = 87$; $\varphi = 156^\circ$
 $|\vec{F}| = 5,6$; $\psi = 90^\circ$ $|\vec{F}| = 120$; $\psi = 80^\circ$
- Bei den Beispielen a) bis c) ist die Einheit der Längenmessung 1 m, die Einheit der Kraftmessung 1 kp, bei der Aufgabe d) sind die entsprechenden Einheiten 1 cm bzw. 1 p.
22. Eine Kraft sei durch den Vektor $\vec{F} = (5; 10; 15)$ dargestellt. Welche Arbeit ist erforderlich, um den Angriffspunkt $(1; 0; 3)$ der Kraft bis zum Punkte $(3; -1; -6)$ zu verschieben, wenn auf jeder Koordinatenachse die Einheit der Längenmessung 1 m und die Einheit der Kraftmessung 1 kp ist?

23. Bei der Konstruktion von Behältern für den chemischen Apparatebau ist der Winkel zwischen den beiden Strecken AB und CB aus Abbildung 5.82. zu bestimmen.

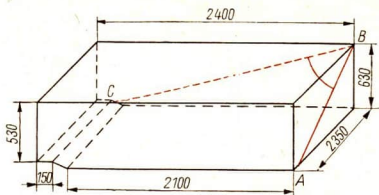


Abb. 5.82.

24. Bestimmen Sie die Vektorprodukte $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ und $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} !

- a) $|\mathbf{a}| = 5; \quad \varphi = 135^\circ$ b) $|\mathbf{a}| = 4,2; \quad \varphi = 270^\circ$
 $|\mathbf{b}| = 4,2; \quad \psi = 270^\circ$ $|\mathbf{b}| = 7; \quad \psi = 300^\circ$
c) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ d) $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}; \quad \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

5.7. Anwendung des Skalarproduktes in der analytischen Geometrie

5.7.1. Allgemeine Gleichung der Geraden

● Wie lautet die allgemeine Gleichung der Geraden?

In der Punktgleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a}$$

sind Richtung und Durchlaufsinne der Geraden durch den Richtungsvektor \mathbf{a} bestimmt. Nunmehr soll die Richtung der Geraden g in der Ebene durch einen Vektor \mathbf{n} festgelegt werden, der auf g senkrecht steht (Abb. 5.83.). Diesen Richtungsvektor nennt man **Normalvektor** der Geraden g . Wie lautet für diesen Fall die Geradengleichung in vektorieller Form?

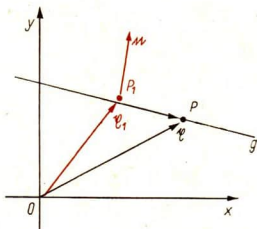


Abb. 5.83.

Gegeben sind also ein Punkt P_1 der Geraden g mit dem Ortsvektor \mathbf{x}_1 und ein Normalvektor \mathbf{n} . Der variable Punkt der Geraden sei P mit dem veränderlichen Vektor \mathbf{x} . Da die Vektoren $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ und \mathbf{n} aufeinander senkrecht stehen, ist ihr Skalarprodukt gleich Null:

$$(1) \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 0.$$

Die Gleichung (1) wird in die koordinatenmäßige Form umgestaltet. Sind n_x und n_y die Koordinaten des Normalvektors \mathbf{n} , so ist

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}.$$

Ferner gilt nach (9) im Abschnitt 5.5.2.

$$\underline{x} - \underline{x}_1 = (x - x_1) \mathbf{i} + (y - y_1) \mathbf{j}.$$

Daraus ergibt sich in Verbindung mit (1):

$$(2) \quad \begin{aligned} n_x(x - x_1) + n_y(y - y_1) &= 0 \\ n_x x + n_y y - (n_x x_1 + n_y y_1) &= 0. \end{aligned}$$

Das ist die gesuchte Koordinatendarstellung; sie hat die bekannte Form

$$(3) \quad Ax + By + C = 0.$$

Umgekehrt stellt jede Gleichung der Form (3), bei der A und B nicht gleichzeitig Null sind, eine Gerade mit dem Normalvektor $\mathbf{n} = (A; B)$ dar. Ist dann etwa $A \neq 0$, so erfüllen die Koordinaten des Punktes

$$\underline{x}_1 = \left(-\frac{C}{A}; 0 \right)$$

die Gleichung (3), und diese läßt sich dann umformen in (2):

$$A \left(x + \frac{C}{A} \right) + B(y - 0) = 0.$$

5.7.2. Hessesche Normalform der Geradengleichung

Vervielfacht man in (1) den Normalvektor bzw. multipliziert man in (2) die Koeffizienten mit derselben Zahl, so wird immer noch dieselbe Gerade g dargestellt. Jede Gerade hat also unendlich viele Gleichungen der Form (1), die sich durch Betrag und Durchlaufsinne des Normalvektors \mathbf{n} unterscheiden. Wählt man diejenigen unter ihnen aus, für die der Normalvektor den Betrag 1 hat, so wird die allgemeine Gleichung (1) durch Übergang zum Einheitsvektor $\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ des Normalvektors normiert. Nun werden beide Seiten von (1) durch $|\mathbf{n}|$ dividiert¹, wodurch (1) in $\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_1) = 0$ oder

$$(4) \quad \mathbf{n}^\circ \cdot (\underline{x} - \underline{x}_1) = 0$$

übergeht. Da aber mit \mathbf{n}° auch $\mathbf{n}_1^\circ = -\mathbf{n}^\circ$ ein Einheitsvektor in der Normalenrichtung ist, ist $\mathbf{n}_1^\circ \cdot (\underline{x} - \underline{x}_1) = 0$ eine von (4) verschiedene Normalform dieser Art. Um die Darstellung eindeutig festzulegen, denkt man sich die durch (1) dargestellte Gerade g orientiert und versteht unter der positiven Normalenrichtung diejenige, die aus der Richtung von g durch Drehung um 90° entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn hervorgeht. Ist dann \mathbf{n}° der Einheitsvektor, der in Richtung der positiven Normalen weist, so heißt (4) die **HESSESche Normalform** der orientierten Geraden g .

¹ Offenbar muß $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ sein, da sonst (1) keine Geradengleichung ist.

Aus Gleichung (3) kann die Koordinatendarstellung der HESSESchen Normalform gewonnen werden. Für die orientierte Gerade ist $n = \pm(A; B)$ und $|n| = \sqrt{A^2 + B^2}$. Die Division von (3) durch $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ ergibt

$$(5) \quad \pm \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Dabei ist das Vorzeichen nach der oben getroffenen Festsetzung zu wählen. Durch Einführen des Abstandsvektors l erhält man die HESSESche Normalform in einer anderen Gestalt (Abb. 5.84.). Der Abstandsvektor l habe die Länge l (gleich dem Abstand der Geraden vom Ursprung). Im Fall $l \neq 0$ habe er dieselbe Richtung wie n° , während sein Durchlaufsinn so gewählt werde, daß l von der Geraden nach der dem Ursprung abgewandten Seite weist. Bedeutet schließlich l° den zu l gehörenden Einheitsvektor, so kann man (4) in der Form

$$(6) \quad l^\circ \cdot \underline{x} - l^\circ \cdot \underline{x}_1 = 0$$

schreiben.

Nun ist das Skalarprodukt $l^\circ \cdot \underline{x}_1$ gleich dem Skalarprodukt aus der Projektion von \underline{x}_1 auf l und dem Vektor l° . Im vorliegenden Fall ist der Projektionsvektor von \underline{x}_1 auf l° gleich dem Lotvektor l (Abb. 5.85.), da bei dem festgesetzten Durchlaufsinn von l die Vektoren l und \underline{x}_1 einen spitzen Winkel bilden.

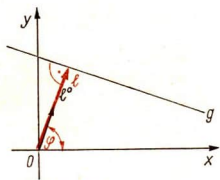


Abb. 5.84.

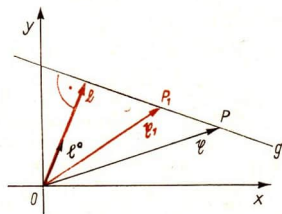


Abb. 5.85.

Es gilt also

$$l^\circ \cdot \underline{x}_1 = l^\circ \cdot l = |l^\circ| |l| \cos 0^\circ = 1 \cdot l \cdot 1 = l.$$

Man setzt in (6) ein und erhält

$$(7) \quad l^\circ \cdot \underline{x} - l = 0.$$

Hat l die Richtung φ , so wird nach Gleichung (13) im Abschnitt 5.4.6.:

$$l^\circ = \cos \varphi i + \sin \varphi j.$$

Damit lautet die Koordinatendarstellung des skalaren Produktes $l^\circ \cdot \underline{x}$ in (7):

$$(8) \quad l^\circ \cdot \underline{x} = x \cos \varphi + y \sin \varphi.$$

Man erhält die HESSEsche Normalform der Geradengleichung in der Gestalt:

$$(9) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - l = 0.$$

Die Gleichungen (7) bzw. (9) sind die HESSEsche Normalform der (nicht orientierten) Geraden g , wenn g nicht durch den Ursprung geht.

5.7.3. Abstand eines Punktes von einer Geraden

Der Punkt $P_0(x_0; y_0)$ mit dem Ortsvektor \underline{x}_0 habe von der Geraden g mit der HESSEschen Normalform in der Gestalt $\mathbf{l}^\circ \cdot \underline{x} - l = 0$ den (vorzeichenbehafteten) Abstand d .¹

Für die Bestimmung des Abstandes d bildet das Skalarprodukt $\mathbf{l}^\circ \cdot \underline{x}_0$ den Ausgangspunkt. Das Skalarprodukt ist gleich der Länge der Projektion von \underline{x}_0 auf die Richtung von \mathbf{l}° . Nach Abbildung 5.86. ist die Länge der Projektion gleich der Summe der Längen des gesuchten Abstandes und des Lotes vom Ursprung auf die Gerade.

Es gilt also

$$(10) \quad \mathbf{l}^\circ \cdot \underline{x}_0 = d + l$$

$$d = \mathbf{l}^\circ \cdot \underline{x}_0 - l.$$

Schreibt man das Skalarprodukt $\mathbf{l}^\circ \cdot \underline{x}_0$ unter Beachtung von (8) in Koordinatendarstellung, so erhält man

$$(11) \quad d = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - l.$$

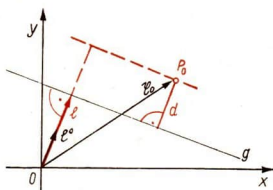


Abb. 5.86.

Im Fall $l \neq 0$ wird d positiv, wenn der Punkt P_0 und der Koordinatenursprung auf verschiedenen Seiten der Geraden g liegen, im anderen Fall wird d negativ. Im Fall $l = 0$ hängt das Vorzeichen von d von der dann willkürlichen Wahl des Durchlaufsinns von \mathbf{l} ab.

Beispiel 1

Gegeben sind die Gerade $g: 2x + 2y - 5 = 0$ und der Punkt $P_0(3; 3)$. Der Abstand d des Punktes P_0 von der Geraden g ist zu bestimmen.

Lösung: Die Geradengleichung wird auf die HESSEsche Normalform gebracht:

$$\frac{2x + 2y - 5}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Der Abstand ergibt sich zu

$$d = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 5}{2\sqrt{2}} = \frac{7}{4}\sqrt{2}.$$

¹ Der Abstand $d \neq 0$ des Punktes \underline{x}_0 von g wird dabei als positiv gezählt, wenn \underline{x}_0 auf derselben Seite von g liegt, auf die \mathbf{l} weist, anderenfalls wird er negativ gezählt.

Aufgaben

- Ermitteln Sie den Abstand des Punktes $P_0(-3; -3)$ von der Geraden $g: 2x + 2y - 5 = 0$!
- Führen Sie die Herleitung der Formel (11) für den Abstand eines Punktes von einer Geraden an Hand einer Zeichnung für den Fall durch, daß der gegebene Punkt und der Koordinatenursprung auf der gleichen Seite der Geraden liegen!
- Deuten Sie die Beziehung (11) für $d = 0$!
- Gegeben sind der feste Punkt $P_0(3; 6)$ und der Normalvektor $n = (4; 3)$ der Geraden g .
 - Wie lauten die allgemeine Gleichung und die Hesseschen Normalformen der Gleichung der Geraden g in vektorieller Form und in Koordinaten?
 - Wie heißt der Vektor des Ursprungs lotes?
 - Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung von der Geraden g ?
 - Welches sind die Koordinaten des Lotfußpunktes?
- Wie lauten in vektorieller und koordinatenmäßiger Gestalt die Hesseschen Normalformen der Geraden, die durch die Punkte P_1 und P_2 gehen?
 - $P_1(3; 7), P_2(9; -2)$
 - $P_1(-5; 9), P_2(3; 16)$
- Bringen Sie die folgenden Gleichungen von Geraden auf die Hessesche Normalform in vektorieller und koordinatenmäßiger Gestalt!
 - $x + y = 5$
 - $x - y = 2\sqrt{2}$
 - $2x + 3y = 6$
- Wie lautet die Hessesche Normalform der beiden Geraden, die durch den Punkt $P(4; 5)$ gehen und vom Ursprung den (nicht vorzeichenbehafteten) Abstand $l = 2$ haben?
- Legen Sie durch den Punkt a) $P_1(2; 3)$, b) $P_2(2; -3)$ eine Gerade, die vom Koordinatenursprung den Abstand 1 hat!
- Geben Sie die Bedingungen an, unter denen die beiden Geraden
$$n_1 \cdot (x - x_1) = 0 \quad \text{und} \quad n_2 \cdot (x - x_2) = 0$$
 - einander schneiden,
 - parallel sind,
 - identisch sind!
- Der Koordinatenursprung sei Mittelpunkt eines regelmäßigen
 - Sechsecks mit der Seite a ,
 - Fünfecks mit dem Inkreisradius g ,
 - Achtecks mit dem Umkreisradius r .Ein Eckpunkt liege auf der positiven x -Achse. Wie heißen die Gleichungen der Seiten des regelmäßigen Vielecks?
- Zur Geraden $x \cos \varphi + y \sin \varphi - l = 0$ sind im Abstand q beiderseits die Parallelen gezogen. Wie heißen ihre Gleichungen?
- Berechnen Sie den Abstand des Punktes P_l von der Geraden g_l !
 - $P_1(1; 2); \quad g_1: x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ - 1 = 0$
 - $P_2(-1; -1); \quad g_2: x + y = 1$
- Wie weit ist der Punkt $P_1(7; 5)$ von der Geraden entfernt, die durch die Punkte $P_2(8; 3)$ und $P_3(4; 6)$ geht?
- Wie lang sind die Höhen eines Dreiecks mit den Ecken
 - $A(-1; 4), B(3; 1), C(7; 5)$;
 - $A(-3; -6), B(5; -2), C(7; 8)$?
- Auf der Geraden $g_1: 2x - y = 16$ ist der Punkt zu bestimmen, der von dem Punkte $P(2; -2)$ und der Geraden $g_2: 12x + 3y = 10$ gleich weit entfernt ist.

5.7.4. Allgemeine Gleichung der Ebene

Eine Ebene E ist durch einen Punkt P_1 und durch den Stellungsvektor \mathbf{n} bestimmt, der auf allen Geraden der Ebene senkrecht steht (Abb. 5.87.). Ist \mathbf{r}_1 der Ortsvektor des gegebenen Punktes P_1 , \mathbf{r} der veränderliche Ortsvektor eines weiteren Punktes P der Ebene, so steht der Vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ auf \mathbf{n} senkrecht. Das skalare Produkt der beiden Vektoren ist also Null:

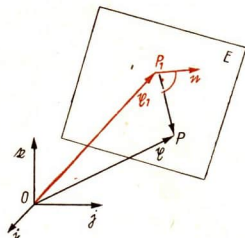


Abb. 5.87.

$$(12) \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0.$$

Die Beziehung (12) heißt **allgemeine Gleichung der Ebene E** . Die Koordinatenform der allgemeinen Ebenengleichung erhält man, wenn das skalare Produkt $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ in Koordinatendarstellung geschrieben wird. Der Stellungsvektor \mathbf{n} habe die Koordinaten A, B, C ; dann wird

$$(13) \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0.$$

Setzt man $-(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = D$, so ergibt sich

$$(14) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

als allgemeine Gleichung der Ebene in Koordinatenform.

Umgekehrt stellt jede Gleichung der Form (14), bei der A, B, C nicht gleichzeitig Null sind, eine Ebene mit dem Stellungsvektor $\mathbf{n} = (A; B; C)$ dar. Denn ist etwa $A \neq 0$, so erfüllen die Koordinaten des Punktes

$$P_1 \left(-\frac{D}{A}; 0; 0 \right)$$

die Gleichung (14), und diese läßt sich dann umformen in:

$$(15) \quad A \left(x + \frac{D}{A} \right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0.$$

Aufgaben

1. Worin unterscheiden sich die Gleichungen (12) und (1)?
2. Welche Bedeutung haben in (14) a) die Koeffizienten, b) das Absolutglied?
3. Die Projektion von \mathbf{r}_1 auf \mathbf{n} sei $(\mathbf{r}_1)_n$. Zeigen Sie, daß (15) $D = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_1)_n$ gilt!
4. Welche Bedeutung hat die Projektion $(\mathbf{r}_1)_n$?

5. Stellen Sie eine Beziehung für die Ebene E auf, die der für die Gerade g gültigen Beziehung (7) analog ist!
6. Leiten Sie aus den Beziehungen (13) bzw. (14) die Gleichungen der Geraden senkrecht zu dem Vektor $\mathbf{n} = (A; B; 0)$ her!

5.7.5. Hessesche Normalform der Ebenengleichung

Vervielfacht man in (12) den Vektor \mathbf{n} bzw. multipliziert man in (13) die Koeffizienten mit derselben Zahl, so wird immer noch dieselbe Ebene E dargestellt. Jede Ebene hat also unbegrenzt viele Gleichungen. Sie unterscheiden sich voneinander durch Länge und Durchlaufsinns des Stellungsvektors bzw. in der Koordinatenform (13) durch einen gemeinsamen Faktor in den Koeffizienten.

Es werden nun unter den Ebenengleichungen $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 0$ diejenigen ausgewählt, für die der Stellungsvektor \mathbf{n} die Länge 1 hat. Das geschieht durch Division beider Seiten der Gleichung (12) durch $|\mathbf{n}|$. (Dabei muß \mathbf{n} ungleich 0 sein.) Dann geht (12)

$$\text{in } \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 0 \text{ oder in}$$

$$(16) \quad \mathbf{n}^\circ \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 0$$

über. Da aber mit \mathbf{n}° auch $\mathbf{n}_1^\circ = -\mathbf{n}^\circ$ ein Einheitsvektor in der Richtung des Stellungsvektors ist, ist $\mathbf{n}_1^\circ \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ eine von (16) verschiedene Normalform dieser Art. Um die Darstellung eindeutig festzulegen, denkt man sich die Ebene orientiert, indem man den einen Umlaufsinn in dieser Ebene als den positiven auszeichnet.

Unter der positiven Richtung der Normalen versteht man dann diejenige, bei der diese Drehrichtung und \mathbf{n} eine Rechtsschraube (vgl. Abschnitt 5.6.6.) bilden. Ist \mathbf{n}° der Einheitsvektor, der in Richtung der positiven Normalen weist, so heißt (16) die **HESSESche Normalform der orientierten Ebene E** .

Aus der Gleichung (14) kann die Koordinatendarstellung der HESSESchen Normalform gewonnen werden. Für die Ebene E ist $\mathbf{n} = \pm(A; B; C)$ und $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Die Division von (14) durch $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ergibt:

$$(17) \quad \pm \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$

wobei das Vorzeichen geeignet zu wählen ist.

Die Hessesche Normalform der Gleichung einer nicht orientierten Ebene, die nicht durch den Ursprung geht, und der Beziehung (9) für die Gerade analog ist, erhält man mit Hilfe des Abstandsvektors l . Darunter wird ähnlich wie im Fall der Geraden in der

Ebene derjenige Vektor \vec{l} verstanden, der die gleiche Richtung wie die Ebenennormale hat und so orientiert ist, daß er, als ebenengebundener Vektor aufgefaßt, vom Ursprung weg weist (Abb. 5.88.). Sein Betrag l ist gleich dem Abstand der Ebene vom Ursprung. Weiter sei \vec{l}° der zu \vec{l} gehörige Einheitsvektor $\vec{l}^\circ = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\vec{l}}{l}$ und die Richtungskosinus von \vec{l}° seien $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$.

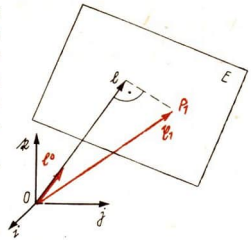


Abb. 5.88.

Die Beziehung (16) wird nun in die Form (18) umgestaltet:

$$(18) \quad \vec{l}^\circ \cdot \vec{x} - \vec{l}^\circ \cdot \vec{x}_1 = 0.$$

Der Projektionsvektor $(\vec{x}_1)_l$ von \vec{x}_1 auf \vec{l}° ist gleich dem Lotvektor \vec{l} , da \vec{x}_1 und \vec{l} einen spitzen Winkel bilden. Es gilt:

$$(19) \quad \vec{l}^\circ \cdot \vec{x}_1 = \vec{l}^\circ \cdot (\vec{x}_1)_l = \vec{l}^\circ \cdot \vec{l} = |\vec{l}^\circ| |\vec{l}| \cos 0^\circ = 1 \cdot l \cdot 1 = l.$$

Schreibt man das Skalarprodukt $\vec{l}^\circ \cdot \vec{x}$ in Koordinatendarstellung, so erhält man wegen

$$\vec{l}^\circ = \cos \alpha_1 \vec{i} + \cos \alpha_2 \vec{j} + \cos \alpha_3 \vec{k} \quad \text{und}$$

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

schließlich

$$(20) \quad \vec{l}^\circ \cdot \vec{x} = x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3.$$

Die Beziehungen (19) und (20) kann man in (18) einsetzen. Es ergibt sich dabei

$$(21) \quad x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 - l = 0.$$

Aufgaben

1. Leiten Sie (21) aus (17) her!
2. Stellen Sie die HESSESchen Normalformen der Geradengleichung und der Ebenengleichung in vektorieller und koordinatenmäßiger Gestalt einander gegenüber!

5.7.6. Abstand eines Punktes von einer Ebene

Der Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0)$ mit dem Ortsvektor \vec{x}_0 habe von der Ebene E mit der HESSESchen Normalform in der Gestalt $\vec{l}^\circ \cdot \vec{x} - l = 0$ den vorzeichenbehafteten Abstand d . (Vergl. auch mit dem Abschnitt 5.7.3.!)

Für die Bestimmung des Abstandes d bildet das Skalarprodukt $\vec{l}^\circ \cdot \vec{x}_0$ den Ausgangspunkt. Der Betrag des Skalarproduktes ist gleich der Länge

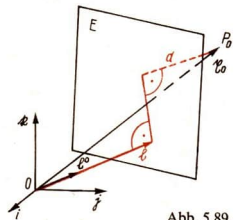


Abb. 5.89.

der Projektion von ξ_0 auf l° (Abb. 5.89.). Seine Koordinatendarstellung lautet

$$l^\circ \cdot \xi_0 = x_0 \cos \alpha_1 + y_0 \cos \alpha_2 + z_0 \cos \alpha_3.$$

Nun ist

$$d = l^\circ \cdot \xi_0 - l \quad \text{oder}$$

$$(22) \quad d = x_0 \cos \alpha_1 + y_0 \cos \alpha_2 + z_0 \cos \alpha_3 - l.$$

Und zwar ist d positiv, wenn der Punkt P_0 und der Koordinatenursprung auf verschiedenen Seiten der Ebene E liegen, im anderen Falle negativ.

Beispiel 2

Gegeben sind die Ebene $E: 2x + 2y + z - 5 = 0$ und der Punkt $P_0(3; 3; 2)$. Die Länge des Lotes von P_0 auf E ist zu bestimmen.

Lösung: Die Ebenengleichung wird auf die HESSESche Normalform gebracht:

$$\frac{2x + 2y + z - 5}{3} = 0.$$

Der Abstand des Punktes P_0 von der Ebene E ist dann

$$d = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 - 5}{3} = 3.$$

Ergebnis: Die Länge des Lotes beträgt 3 Längeneinheiten.

Aufgaben

- Welchen Abstand hat der Punkt $P_0(-3; -3; -2)$ von der Ebene $E: 2x + 2y + z - 5 = 0$? Fertigen Sie zu diesem und zu dem im Text gegebenen Beispiel Zeichnungen an!
- Deuten Sie die Beziehung (22) für $d = 0$!
- Gegeben seien der feste Punkt $P_1(1; 2; 3)$ und der Stellungsvektor $\mathbf{n} = (3; 2; \sqrt{3})$ der Ebene E .
 - Wie lauten die allgemeine Gleichung und die HESSESchen Normalformen der Gleichung der Ebene E in Vektorform und in Koordinatenform?
 - Wie heißt der Vektor des Ursprungslotes?
 - Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung von der Ebene E ?
 - Welches sind die Koordinaten des Lotfußpunktes?
- Welche Ebene steht auf dem Vektor $\mathbf{n} = (1; 2; 1)$ senkrecht und geht durch den Punkt $P(2; 4; 3)$?
- Geben Sie die Bedingungen an, unter denen die beiden Ebenen $\mathbf{n}_1 \cdot (\xi - \xi_1) = 0$ und $\mathbf{n}_2 \cdot (\xi - \xi_2) = 0$
 - einander schneiden,
 - parallel sind,
 - identisch sind!
- Welchen Abstand hat der Punkt $P(3; 7; -6)$ von der Ebene E , die den Koordinatenursprung enthält und den Stellungsvektor $\mathbf{n} = (-1; -2; 3)$ besitzt?
- Gegeben sind die Ebene $E: x - 2y - 2z + 5 = 0$ und der Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\xi_0 = (-3; -2; -3)$. Bestimmen Sie Richtung, Länge und Fußpunkt des Lotes von P_0 auf E !

8. Gegeben sind die Ebene E durch den Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x}_0 = (3; 5; 7)$ und den Stellungsvektor $\vec{n} = (1; 2; 2)$ sowie die Gerade g durch den Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x}_1 = (1; 2; 5)$ und den Richtungsvektor $\vec{a} = (3; 4; 2)$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt von E und g !
9. Drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} seien durch Pfeile repräsentiert, die von demselben Punkt ausgehen. Geben Sie in Vektorsymbolik die Bedingung dafür an, daß die Endpunkte dieser drei Pfeile in einer Geraden liegen!
10. Bestimmen Sie den Schwerpunkt eines Dreiecks aus den Eckpunkten mit den folgenden Ortsvektoren!
- a) $\vec{a} = (-4; -3; 1)$ b) $\vec{a} = (-3; -2; 1)$
 $\vec{b} = (10; 1; 1)$ $\vec{b} = (7; 4; 1)$
 $\vec{c} = (4; 5; 1)$ $\vec{c} = (3; 6; 1)$
11. Gegeben sind zwei Ebenen $2x - y + z = 2$ und $-3x + 2y - z = -2$. Wie lautet in vektorieller Schreibweise die Gleichung ihrer Schnittgeraden?
12. Wie groß ist der Winkel, den die Ebenen $x + 2y + z = 4$ und $x + y - 3z = -1$ miteinander bilden?
13. Welche Richtungskosinus hat die Gerade $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = z-2$?
14. Welchen Abstand hat der Punkt $x = 2, y = 1$ von den Geraden $3x + 4y - 2 = 0$, $4x - 3y + 3 = 0$ und $5x - 2 = 0$, und welche Bedeutung hat er für das von ihnen gebildete Dreieck?
15. Gegeben sind eine Ebene $E: 3x - 2y + z = 0$ und ein Vektor $\vec{a} = (8; -3; -2)$. Welcher Vektor ist gleich der Projektion des Vektors \vec{a} in die Ebene E ?
16. Bestimmen Sie den Vektor \vec{a} , der aus dem Vektor $\vec{a} = (6; -\sqrt{2}; -6)$ durch Spiegelung an der Ebene $x - 2y + z = 1$ entsteht?
17. Bestimmen Sie den Vektor \vec{a} , der aus dem Vektor $\vec{a} = (-2; 14; -8)$ durch Spiegelung an der Geraden $x = 1 + 2t; y = -1 + t; z = 3 - t$ entsteht!

5.7.7. Der Kreis

Ist der Koordinatenursprung der Mittelpunkt eines Kreises und r der Radius dieses Kreises, so besagt die Gleichung $|\vec{x}| = r$ oder

$$(23) \quad \vec{x}^2 = r^2,$$

daß der laufende Punkt $P(x; y)$ mit dem veränderlichen Vektor \vec{x} die Entfernung r vom Koordinatenursprung hat, also auf dem Kreis um O liegt (Abb. 5.90.). Die Beziehung (23) ist eine Gleichung des Kreises in vektorieller Form, denn umgekehrt genügt jeder Punkt des Kreises der Gleichung (23). Die Koordinatenform der Kreisgleichung gewinnt man über die Koordinatendarstellung des veränderlichen Vektors \vec{x} :

$$\vec{x} = xi + yj.$$

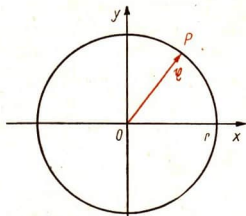


Abb. 5.90.

Das skalare Produkt des Vektors ξ mit sich selbst ergibt

$$\xi \cdot \xi = x^2 + y^2,$$

und in Verbindung mit (23) erhält man

$$(23a) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Für einen beliebigen Punkt $M(a; b)$ als Kreismittelpunkt mit dem Ortsvektor m und dem Radius r des Kreises verändert sich die Kreisgleichung (23) zu

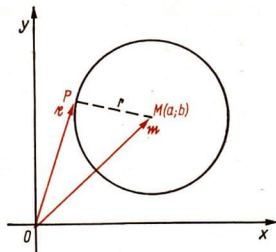


Abb. 5.91.

$$(24) \quad (\xi - m)^2 = r^2 \quad (\text{Abb. 5.91}).$$

Die Beziehung (24) ist die allgemeine Gleichung des Kreises in vektorieller Form. Es ist $|\xi - m| = r$. Die Koordinatenform der allgemeinen Kreisgleichung erhält man, wenn die Vektordifferenz $\xi - m$ in Koordinatendarstellung gebildet und dann das skalare Produkt dieses Vektors mit sich selbst berechnet wird.

Man erhält auf diese Weise:

$$(24a) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

- Führen Sie die Berechnung der allgemeinen Kreisgleichung in Koordinatenform selbst durch!

5.7.8. Die Kugel

Ist der Koordinatenursprung der Mittelpunkt und r der Radius einer Kugel, so besagt die Gleichung $|\xi| = r$ oder

$$(25) \quad \xi^2 = r^2,$$

daß der Punkt $P(x; y; z)$ mit dem veränderlichen Vektor ξ die Entfernung r vom Koordinatenursprung hat, also auf der Kugel mit dem Mittelpunkt O liegt. Die Beziehung (25) ist eine Gleichung der Kugel in vektorieller Form, denn umgekehrt genügt jeder Punkt der Kugel der Gleichung (25). Die Koordinatenform der Kugelgleichung wird über die Koordinatendarstellung des veränderlichen Vektors, also

$$\xi = xi + yj + zf,$$

gebildet. Das skalare Produkt dieses Vektors mit sich selbst ergibt dann

$$\xi \cdot \xi = x^2 + y^2 + z^2$$

und in Verbindung mit (25)

$$(25a) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Für einen beliebigen Punkt $M(a; b; c)$ als Kugelmittelpunkt mit dem Ortsvektor \mathbf{m} und dem Kugelradius r verändert sich die Kugelgleichung (25) zu

$$(26) \quad |\underline{x} - \mathbf{m}|^2 = r^2.$$

Die Beziehung (26) ist die allgemeine Gleichung der Kugel in vektorieller Form. Es ist $|\underline{x} - \mathbf{m}| = r$. Als Koordinatenform der allgemeinen Kugelgleichung erhält man

$$(26a) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

● *Leiten Sie die Koordinatenform der allgemeinen Kugelgleichung her, indem Sie die Vektordifferenz $\underline{x} - \mathbf{m}$ in Koordinatendarstellung bilden, dann das skalare Produkt dieses Vektors mit sich selbst ermitteln und schließlich in (26) einsetzen!*

Aufgaben

1. Worin unterscheiden sich die Gleichungen (25) und (26) von den Gleichungen (23) bzw. (24)?
2. Wie lautet die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r in Vektorform und in Koordinatenform?
 - a) $M(0; 0)$, $r = 5$
 - b) $M(5; 0)$, $r = 7$
 - c) $M(12; -5)$, $r = 13$
3. Bestimmen Sie die Mittelpunkte und die Radien der Kreise, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind!
 - a) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 26 = 0$
 - b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 19 = 0$
 - c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$
4. Wie lautet die Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r in Vektorform und in Koordinatenform?
 - a) $M(0; 0; 0)$, $r = 6$
 - b) $M(0; 3; 3)$, $r = 8$
 - c) $M(2; -3; -5)$, $r = 9$
5. Bestimmen Sie die Mittelpunkte und die Radien der Kugeln, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind!
 - a) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + z - 1 = 0$
 - b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - z = 0$
 - c) $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$
 - d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y - 2z + 1 = 0$

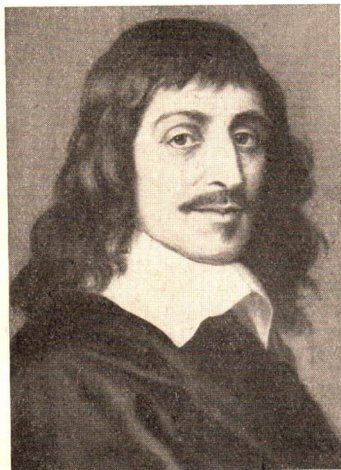


Abb. 6.1. RENÉ DESCARTES (1596–1650)

DISCOURS
DE LA METHODE

Pour bien conduire sa raison, & chercher
la vérité dans les sciences.

PLUS

LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.

ET

LA GEOMETRIE.

Qui sont des essais de cete METHODE.



A LEYDE

De l'Imprimerie de IAN MAIRE.

MDCCXXXVII.

Avec Privilège.

Abb. 6.2. Titelblatt des *Discours de la methode*

6. Zur Geschichte der analytischen Geometrie und der Differential- und Integralrechnung

In den republikanischen Niederlanden erschien 1637 ein Buch, das die Entwicklung der europäischen Philosophie und Mathematik nachhaltig beeinflusste, der *Discours de la methode* (Abhandlung über die Methode, Abb. 6.2.). Der Autor hatte sich wegen der darin geführten Angriffe gegen Mystizismus und christlichen Dogmatismus gehütet, seinen Namen zu nennen, war doch im Jahre 1600 der mutige Denker GIORDANO BRUNO in Rom lebendig verbrannt worden, und der große Naturforscher GALILEO GALILEI befand sich seit 1633 in Gefangenschaft der Inquisition, weil er sich dem kopernikanischen Weltbild angeschlossen hatte.

In Freundeskreisen aber wußte man, daß RENÉ DESCARTES (Abb. 6.1.) den *Discours* verfaßt hatte. DESCARTES, der 1596 im nördlichen Frankreich, in der Normandie, geboren wurde, hatte sich nach einem Rechtsstudium und nach Teilnahme an den ersten Kämpfen des 30jährigen Krieges 1628 in die befreiten republikanischen Niederlande zurückgezogen, um unbehelligt von kirchlichen Angriffen sein Weltbild ausarbeiten zu können. Auch in Holland sah sich DESCARTES später erneuten

Angriffen der philosophischen Dunkelmänner ausgesetzt und nahm 1649 eine Einladung an den schwedischen Hof nach Stockholm an. Dort ist er 1650 gestorben.

DESCARTES hatte sich nicht getäuscht: Der *Discours* und seine anderen Werke wurden auf den päpstlichen Index (der verbotenen Bücher) gesetzt, da in ihnen der im Sinne der Kirche verbrecherische Versuch unternommen wurde, die Welt aus den Gesetzen der Mechanik zu erklären, nicht aber aus dem Willen Gottes. Die Existenz des Menschen hatte DESCARTES nicht aus einem göttlichen Schöpfungsakt hergeleitet, sondern aus seiner Fähigkeit zu denken, und dafür die Formel geprägt: Cogito, ergo sum: Ich denke, also bin ich. Überhaupt: Nicht göttlicher Offenbarung, der Bibel also, komme bei der Wahrheitsfindung die entscheidende Rolle zu, sondern der ratio, der Vernunft, dem Denken. Daher komme es darauf an, klare Begriffe und möglichst allgemeine Bezeichnungs- und Schlußweisen zu schaffen. Um den Nutzen dieser Methoden zu demonstrieren, wandte sie DESCARTES im *Discours* auf die Optik, auf die Wissenschaft von den Meteoren und auf die Geometrie an. Jener dritte Teil des *Discours* mit dem Titel *La géométrie* stellt einen der wesentlichsten Beiträge zur Begründung der analytischen Geometrie dar. Er beginnt nach Einführung einer Einheitsstrecke mit der Feststellung, daß jede Strecke als Zahl aufgefaßt werden kann. Mit diesem Grundgedanken kann die Arithmetisierung der Geometrie vollzogen, können geometrische Untersuchungen rechnerisch geführt werden.

Die Verschmelzung geometrischen und algebraischen Denkens in Verbindung mit dem funktionalen Denken hat sich als ein mächtiges Hilfsmittel zur Erforschung und Erfassung der objektiven Realität erwiesen. Die Entstehungszeit der analytischen Geometrie charakterisiert zusammen mit der in der zweiten Hälfte desselben Jahrhunderts erfolgten Herausbildung der Methoden der Differential- und Integralrechnung den Übergang zur modernen Mathematik der veränderlichen Größen.

Dieser Übergang von der Mathematik der Statik zur Mathematik der funktionalen Beziehungen ist keineswegs durch Zufall eingetreten, etwa durch das unvermittelte Auftreten einzelner mathematischer Genies. Vielmehr spiegelt diese Entwicklungsrichtung der Mathematik auf ihre Weise die allgemeine gesellschaftliche Entwicklung wider. Im europäischen Frühkapitalismus entstanden Manufakturen, deren höhere Produktivität auf der verstärkten Arbeitsteilung und auf der Verwendung von Maschinen beruhte. Daher bestand ein starkes gesellschaftliches Interesse an der Konstruktion aller möglichen Mechanismen; ganz typisch war dabei die sich aufdrängende Untersuchung der Kraft- und Energieverhältnisse gegeneinander beweglicher Teile von Maschinerien. Die Mathematiker dieser Periode standen unter dem Eindruck jener technischen Großanlagen: der Wasserhebemaschinen, Schleusen (Abb. 6.3.), Windmühlen, Pumpwerke, Papiermühlen, der Pochmühlen zum Zerkleinern der Erze, der Walkmühlen des Textilgewerbes, der Seilzugaggregate, der mit Treträdern betriebenen Kräne. So drängte die Entwicklung der Produktionsinstrumente zu einer Weiterentwicklung des theoretisch-mechanischen Denkens und folgerichtig auch der mathematischen Methoden. KARL MARX hat diesen Prozeß mit folgenden Worten ausgedrückt: „Sehr wichtig wurde die sporadische Anwendung der Maschinerie im 17. Jahrhundert, weil sie den Mathematikern jener Epoche Anhaltspunkte und Reiz-

mittel zur Schöpfung der modernen Mechanik darbot.“¹

Die sich formierende neue Klasse, die Bourgeoisie, hatte in den Naturwissenschaften ein Mittel erkannt, die Produktion in ihrem Interesse auf eine höhere Stufe der Produktivität und Organisationsform zu heben. Auf der Grundlage eines sprunghaft gestiegenen gesellschaftlichen Interesses an den Naturwissenschaften entwickelten sich viele Zweige der Naturwissenschaften sehr rasch, insbesondere Mechanik, Optik, Astronomie und Hydromechanik. Zugleich erhielten die Naturwissenschaftler eine neue gesellschaftliche Stellung. GIORDANO BRUNO mußte den Scheiterhaufen besteigen, GALILEI starb im Gewahrsam der Inquisition und DESCARTES in der Emigration, NEWTON aber wurde Präsident der Royal Society, einer vom britischen König privilegierten wissenschaftlichen Gesellschaft, und wurde geadelt.

Zu Beginn des 17. Jahrhunderts wurden die Grundlagen der klassischen Naturwissenschaft gelegt. Ihr Wesen besteht neben der wissenschaftlichen Methode des Experiments in der Verschmelzung qualitativer und quantitativer Untersuchungen, das heißt in dem Bestreben, das Naturgeschehen durch Zahlenwerte zu erfassen. Insbesondere von Mechanik und Astronomie ergingen starke Impulse und Anforderungen an die Mathematik. Bald wurde sichtbar, daß die Mathematik nicht mehr dabei stehenbleiben konnte, Zustände zu beschreiben, sondern daß es darauf ankam, die sich vollziehenden Veränderungen zu erfassen. Hier erwiesen sich insbesondere die Fallbewegung und die Bewegung der Planeten als Schlüsselprobleme.

Die geistige Bewältigung mechanischer Bewegungsabläufe in Form neuer Rechnungsarten war die zentrale Aufgabe der Mathematiker eines ganzen Jahrhunderts. Männer wie GALILEO GALILEI, JOHANNES KEPLER, PIERRE FERMAT und RENÉ DESCARTES, BONAVENTURA CAVALIERI, BLAISE PASCAL, CHRISTIAAN HUYGENS, JOHN WALLIS, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ und ISAAC NEWTON, JAKOB und JOHANN BERNOULLI – um nur die Sterne erster Größe am mathematischen Himmel zu nennen – vollzogen

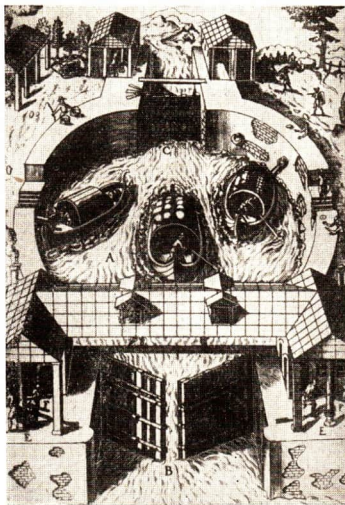


Abb. 6.3. Frühe italienische Schiffsschleuse (1607)

¹ KARL MARX: *Das Kapital*. Band I, Dietz Verlag, Berlin 1951, S. 365.

jenen von der gesellschaftlichen Entwicklung getragenen Umschwung im mathematischen Denken, gleich revolutionär in der Zielstellung und in den Methoden. Am durchgreifendsten haben die funktionale Denkweise, das methodische Verfahren der analytischen Geometrie und die Ausbildung der infinitesimalen Methoden den Charakter der Mathematik umgestaltet und damit zugleich wesentliche Züge der modernen Mathematik geformt.

Für die Begründung der analytischen Geometrie bildeten eine Reihe wichtiger mathematischer Erkenntnisse und Methoden die Grundlage, auf denen RENÉ DESCARTES und PIERRE FERMAT aufbauen konnten. So hatte sich bereits die Verwendung von Symbolen in der Mathematik durchgesetzt. Insbesondere wurden Buchstaben zur Bezeichnung von Zahlen oder Größen benutzt. Auch graphische Darstellungen verschiedenartiger Quantitäten wurden schon von NICOLE ORESME (1323?–1382) angegeben. Da aber die Verbindung von Rechnung mit Geometrie und funktionalem Denken fehlte, kann man diese Ansatzpunkte nicht als analytische Geometrie bezeichnen.

Koordinatensysteme waren schon lange vorher in Gebrauch gekommen. Der Astronom, Mathematiker und Geograph PTOLEMAIOS (85?–165?) hatte geographische Länge und Breite benutzt, und seit der Renaissance wurden „Koordinatensysteme“ in der Architektur und beim perspektivischen Zeichnen verwendet.

Die aus der Antike übernommenen und die neu gefundenen Ergebnisse zur Geometrie sind zu Anfang des 17. Jahrhunderts verschiedentlich zusammengefaßt worden. Diesen Darstellungen mangelte es aber an einer neuen Methode, die es ermöglichte, die fast unübersehbar gewordene Fülle von Sätzen nach einem einheitlichen Verfahren zu gewinnen.

Als erster tat diesen Schritt PIERRE FERMAT (Abb. 6.4.), der 1601 in der Nähe von Toulouse als Sohn eines reichen Lederhändlers geboren wurde. FERMAT hatte die Rechtswissenschaften studiert, wurde 1631 Rat am Gericht in Toulouse und starb 1665. Seine Stellung ließ ihm viel Zeit für mathematische Studien. In der Zahlentheorie, der Differential- und Integralrechnung sowie für die analytische Geometrie hat er Bahnbrechendes geleistet. Aber er publizierte nur ungern. Seine wichtigste Abhandlung zur analytischen Geometrie mit dem Titel *Ad locos planos et solidos isagoge* (Einführung in die ebenen und räumlichen geometrischen Örter) erschien erst 1679 im Druck, obwohl es feststeht, daß sie vor 1637, also vor dem Erscheinen der *Geometrie* von DESCARTES, fertiggestellt und in Mathematikerkreisen bekannt war. In diesem Werk wird das Prinzip der analytischen Geometrie erstmals ausgesprochen: „Sobald in einer Schlußgleichung zwei



Abb. 6.4. PIERRE FERMAT (1601–1665)

unbekannte Größen auftreten, hat man einen Ort, und der Endpunkt der einen Größe beschreibt eine gerade oder krumme Linie . . .“

An der Gleichung der Geraden sei FERMATS Methode verdeutlicht. Zum Verständnis sei darauf hingewiesen, daß FERMAT nach dem Vorbild von VIETA die bekannten Größen mit Konsonanten, die unbekannt mit Vokalen bezeichnet. In der Abbildung 6.5. sei „ NZM eine der Lage nach gegebene Gerade, N ein fester Punkt auf ihr. \overline{NZ} sei die eine unbekannte Größe A , und die an sie

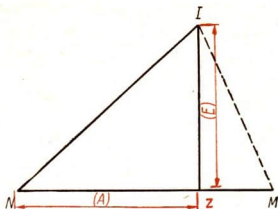


Abb. 6.5. Zur Behandlung der Geradengleichung durch FERMAT

unter dem gegebenen Winkel \overline{NZI} angesetzte Strecke \overline{ZI} sei gleich der anderen unbekannt Größe E . Wenn dann $\overline{DA} = \overline{BE}$, so beschreibt I eine der Lage nach gegebene Gerade“. Anschließend führt FERMAT den Beweis.

Koordinatenachsen treten also in der *Isagoge* nicht auf. Auch die analytische Geometrie des Raumes wird nicht behandelt, sondern nur ebene geometrische Örter. Da FERMATS Abhandlung erst so spät erschien, hat die weitere Entwicklung der analytischen Geometrie nicht an die *Isagoge* angeknüpft, sondern an die *Geometrie* von DESCARTES. Daher kommt es, daß wir heute noch, so wie es DESCARTES getan hat, die unbekannt Größen mit x, y, z , den letzten Buchstaben des Alphabets, bezeichnen. Freilich hat das Studium der *Geometrie* den Zeitgenossen große Schwierigkeiten bereitet; bald nach 1637 wurden ausführliche Kommentare angefertigt, die teilweise den eigentlichen Umfang weit überschritten.

Auch bei DESCARTES ist das heute nach ihm benannte kartesische Koordinatensystem noch nicht vorhanden, er verwendete nur eine feste Koordinatenachse. Übrigens stellten negative Gleichungswurzeln für ihn keine Lösung dar. Er wies sie als „falsche Wurzeln“ zurück. Dagegen entwickelte er erste Vorstellungen einer räumlichen analytischen Geometrie, ein Gedanke, der am Ende des 17. Jahrhunderts von JOHANN BERNOULLI (1667–1748) durchgebildet wurde.

DESCARTES hatte das schon früher gebrauchte Wort „Ordinate“ übernommen und das Wort „Abszisse“ (d. i. Abgeschnittene) geprägt, der Ausdruck „Koordinaten“ wurde indessen erst 1694 von LEIBNIZ gebraucht. Ihre heutige Form hat die analytische Geometrie erst im 18. Jahrhundert, insbesondere durch das Wirken des genialen schweizer Mathematikers LEONHARD EULER (1707–1783), erhalten.

Die Methoden der Differential- und Integralrechnung wurden gleichfalls im 17. Jahrhundert entwickelt. Auch hierbei bildete die gesellschaftliche Entwicklung die Triebkraft zur Wiederbelebung und Vertiefung der bereits in früherer Zeit vereinzelt erzielten Ergebnisse der Infinitesimalrechnung. Aus der Antike waren Verfahren zur Inhaltsbestimmung auch krummlinig begrenzter Flächen überliefert worden. So hatte der größte hellenistische Mathematiker ARCHIMEDES von Syrakus (287?–212 v. u. Z.) u. a. das Parabelsegment durch Einbeschreiben einer Folge von Dreiecken quadriert, das heißt eine bestimmte Integration geleistet (Abb. 6.6.). Er hatte bewiesen, daß „der Inhalt jedes Parabelsegmentes um ein Drittel größer ist als das Dreieck, das mit ihm

gleiche Grundlinie und Höhe hat“. Zum Beweise hatte er die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots$ bestimmt.

Dieses von ARCHIMEDES verwendete Verfahren, krummlinig begrenzte Flächen durch eine unbeschränkt zunehmende Folge von ein- und umbeschriebenen geradlinig begrenzten und daher leicht berechenbaren Flächen anzunähern, geht auf einen anderen bedeutenden griechischen Mathematiker zurück, auf EUDOXOS von Knidos (408?–355? v. u. Z.). Es erhielt im 17. Jahrhundert, als man es in Europa wieder kennengelernt und auch auf andere Flächeninhaltsberechnungen angewendet hatte, den Namen „Exhaustionsverfahren“. ¹ Durch die Entwicklung der Mechanik rückten gerade diese Vorstufen der Integralrechnung in den Vordergrund des Interesses der Mathematiker. Der niederländische Mathematiker SIMON STEVIN (1548–1620), der führend am Befreiungskampf der Niederlande teilgenommen hat, beschäftigte sich mit der Schwerpunktsbestimmung von Schiffskörpern. Um 1640 gab der Schweizer PAUL GULDIN (1577–1643) die nach ihm benannten Regeln zur Schwerpunktsbestimmung von Rotationskörpern an, die indessen schon der Mathematiker PAPPUS (um 320 u. Z.) in geometrischer Form ausgesprochen hatte. Durch die Entwicklung der frühkapitalistischen Wirtschaft waren Bestimmungen von Waren nach Menge und Gewicht immer häufiger geworden. Dabei bereiteten die Angaben des Rauminhalts von Hohlkörpern, insbesondere von Fässern,

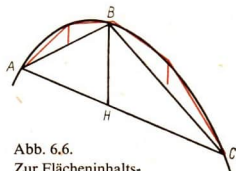


Abb. 6.6.
Zur Flächeninhaltsberechnung des Parabelsegmentes nach der Exhaustionsmethode



Abb. 6.7. Visierer bei der Bestimmung des Rauminhaltes von Fässern. Titelholzschnitt eines Visierbüchleins aus dem 15. Jahrhundert

große Schwierigkeiten. Dieses sogenannte Visieren galt im 15. und 16. Jahrhundert als eine große Kunst; es erforderte in der Tat die Beherrschung einer Fülle von empirischen Faustregeln. Zur Unterweisung hatten verschiedene Autoren eine ganze Reihe von sogenannten „Visierbüchlein“ verfaßt (Abb. 6.7.). Aus Anlaß der guten Weinernte im Jahre 1612 hatte auch JOHANNES KEPLER sich mit der Faßmessung beschäftigt, um optimale Faßformen zu finden. Im Jahre 1615 erschien seine *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Neue Rauminhaltsbestimmung von Weinfässern). Dort nahm KEPLER die Rauminhaltsbestimmung

¹ exhaurire (lat.), ausschöpfen

aller möglichen Rotationskörper vor, darunter auch von Fässern, und gab neue praktische Meßmethoden an. KEPLERS Untersuchungen knüpften an Archimedische Gedankengänge an.

Die KEPLERSchen Methoden wurden von dem italienischen Gelehrten BONAVENTURA CAVALIERI (1598?–1647) weitergeführt (Abb. 6.8.). Durch ihn wurde der schon von KEPLER in der Mathematik heimisch gemachte Begriff der Indivisiblen¹ zur Grundlage einer durchgängigen Methode. Das Indivisible entspricht einer Art Differential; CAVALIERI vergleicht die Seiten eines Buches mit den Indivisiblen, deren Gesamtheit dann den Körper, das Buch, ausmache.

Die mit der Indivisiblenmethode erzielten Erfolge legte CAVALIERI in einem 1635 erschienenen Buch mit dem Titel *Geometria ...* (Geometrie der stetigen Indivisiblen, nach einer gewissen neuen Methode dargelegt) nieder. In diesem Werk findet sich auch das CAVALIERISCHE Prinzip ausgesprochen, freilich in einer etwas anderen als der heute verwendeten Form.

Ein anderer auch als Physiker bedeutender Schüler GALILEIS, EVANGELISTA TORRICELLI (1608–1647), quadrierte auf elf verschiedene Weisen nach der Exhaustionsmethode die Parabel. Mit der Quadratur der Zyklode übertraf er bereits die aus der Antike bekannten Sätze. Eine völlige Sensation aber löste es aus, als er bei der Kubatur des Rotationshyperboloids fand, daß ein sich ins Unendliche erstreckender Körper einen endlichen Rauminhalt besitzt. Denn in der Tat ist



Abb. 6.8. BONAVENTURA CAVALIERI (1598?–1647)

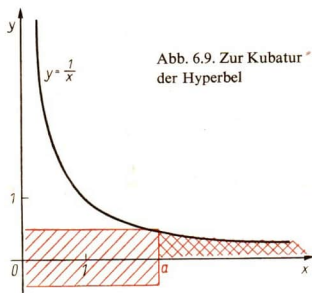


Abb. 6.9. Zur Kubatur der Hyperbel

$$\pi \int_a^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \frac{1}{a},$$

also gleich dem Volumen des Zylinders (Abb. 6.9.).

¹ indivisibiles (lat.), unteilbar

Schon CAVALIERI hatte die mit dem Begriff der Indivisiblen und der Vorstellung der „Gesamtheit“ verbundenen logischen Schwierigkeiten empfunden. Die Indivisiblenmethode wurde daher stark umstritten, von DESCARTES zum Beispiel völlig abgelehnt. Dazu kam, daß bei CAVALIERI alle mathematischen Schlüsse in geometrischer Form gezogen werden mußten, also recht schwer überblickbar waren. Eine ganze Generation von Mathematikern hat an der Verbesserung der Indivisiblenmethode gearbeitet; das Ergebnis bestand in einer Arithmetisierung der Indivisiblen. Jener große Fortschritt der rechnerischen Handhabung der ersten Grenzübergänge ist hauptsächlich von einem Engländer geleistet worden, von JOHN WALLIS (1616–1703). Verbunden mit der Verwendung algebraischer Symbole und Bezeichnungen – das Zeichen ∞ stammt von ihm – war er imstande, nach unserer heutigen Sprechweise die Integration der allgemeinen Potenzfunktion

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \quad \text{mit } m > 0, \text{ ganzzahlig,}$$

zu leisten. Ja, er dehnte diese Formel durch eine großangelegte Induktion sogar auf alle rationalen Exponenten $m \neq -1$ aus. Als erster besaß WALLIS auch eine klare Vorstellung von der Konvergenz einer Zahlenfolge. Er verwendete die Formulierung, daß „der Unterschied (zweier Größen) kleiner wird als jede nur angebbare Größe“. Das Wort Konvergenz freilich ist zuerst von dem Schotten JAMES GREGORY (1638 bis 1675) in die mathematische Literatur eingeführt worden. Während die Mathematiker der Neuzeit auf einige Vorarbeiten zur Integralrechnung zurückgreifen konnten, hatte die Antike keine Vorstufen zur Differentialrechnung herausgebildet. Das „differentialle Denken“ wurde vielmehr erst durch die Entwicklung der klassischen Mechanik erzwungen, insbesondere durch die Behandlung des Tangentenproblems und der Fallbewegung. So behandelte beispielsweise TORRICELLI die Konstruktion von Tangenten an Kurven mit dem Kräfteparallelogramm, indem er geometrische Kurven als

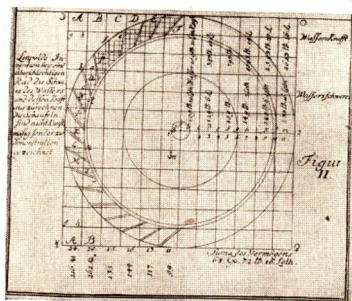


Abb. 6.10. Aus JACOB LEUPOLD'S *Theatrum machinarum*, Leipzig 1724

Kurven wirklicher Bewegungen von Körpern unter dem Einfluß von Kräften auffaßte. Ein Beispiel für die Ansätze des differentiellen Denkens bei der Behandlung eines praktischen Problems zeigt die Abbildung 6.10. Noch ohne Verwendung der zu diesem Zeitpunkt bereits vorliegenden Infinitesimalrechnung wird die von einem überschlächtigen Wasserrad verrichtete Arbeit berechnet, indem das Wasser in den einzelnen Kammern in kleine Volumenelemente zerlegt und durch Summation ihrer Drehmomente das Gesamtdrehmoment berechnet wird. Der Nieder-

länder ISAAC BEECKMANN (1588–1637), ein Bekannter von DESCARTES, leitete das Gesetz der Fallbewegung her, indem er folgende Annahmen machte: 1. Eine einmal erzeugte Geschwindigkeit besteht unverändert fort, solange es keine äußeren Ursachen gibt, die sie vernichten (Trägheitsgesetz). 2. Die Schwerkraft wirkt nicht kontinuierlich, sondern so, daß sie jeweils nach Verlauf eines gewissen Zeitabschnittes dem fallenden Körper gewissermaßen einen Ruck gibt (differentielle Kraftwirkung). Jeweils nach der Zeitspanne τ wird eine Geschwindigkeit γ erzeugt. Bei vorausgesetzter Ruhe wird also im ersten Zeitabschnitt τ der Weg $\gamma\tau$ zurückgelegt, im zweiten der Weg $2 \cdot \gamma\tau$, . . . , im n -ten Zeitabschnitt der Weg $n_1 \cdot \gamma\tau$. Nach der Zeit $t_1 = n_1 \cdot \tau$ wird also der Gesamtweg

$$s(t_1) = \gamma\tau(1 + 2 + \dots + n_1) = \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}\gamma\tau,$$

nach der Zeit $t_2 = n_2 \cdot \tau$ also der Gesamtweg

$$s(t_2) = \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}\gamma\tau$$

zurückgelegt. Als Verhältnis dieser Wege findet man dann

$$\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{n_1(n_1 + 1)}{n_2(n_2 + 1)} = \frac{t_1^2 + t_1\tau}{t_2^2 + t_2\tau}.$$

Nun vollziehe man den Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$, den gedanklichen Übergang zur kontinuierlich wirkenden Schwerkraft – BEECKMANN tat dies in geometrischer Form –, man erhält

$$\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{t_1^2}{t_2^2},$$

d. h. daß beim freien Fall aus der Ruhelage sich zwei Fallstrecken verhalten wie die Quadrate der benötigten Fallzeiten. Und dies ist das Fallgesetz.

Das Tangentenproblem ist zunächst hauptsächlich in den Kreisen der französischen Mathematiker studiert worden, insbesondere von ROBERVAL (1602–1675), von BLAISE PASCAL (1623–1662) und von dem aus den Niederlanden stammenden, aber hauptsächlich in Paris wirkenden CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695). Die bedeutendsten Fortschritte erzielte jedoch PIERRE FERMAT. Von ihm stammt zugleich eine allgemeine Methode, Maxima und Minima von ganzen rationalen Funktionen zu bestimmen, eine Untersuchungsrichtung, die sich auch durch das Studium der Kurve größter Schußweite aufgedrängt hatte. Diese Methode hat FERMAT später auch auf Wurzelfunktionen ausgedehnt und 1662 auf die Lichtbrechung angewendet. Er kam zu dem Ergebnis, daß „die Entfernungen bei geringstem Widerstand in kürzester Zeit durchlaufen werden“ (FERMAT'Sches Prinzip).

Somit lagen bereits Mitte des 17. Jahrhunderts sehr gute Ergebnisse zur späteren Differentialrechnung und Integralrechnung vor. Beide Gebiete schienen aber gänzlich Verschiedenes zu behandeln. Als erster erfaßte der britische Mathematiker,

Philologe und Theologe ISAAC BARROW (1630–1677) den gegenseitigen Zusammenhang des Tangentenproblems mit der Flächeninhaltsbestimmung; er erkannte, daß sich, wie wir heute sagen, Differenzieren und Integrieren gegenseitig aufheben. Durch ihn wurde ISAAC NEWTON während seiner Studienzeit in Cambridge in die mathematischen Studien eingeführt, durch seine Vermittlung auch 1669 Professor der Mathematik in Cambridge.

NEWTON (Abb. 6.11.) war am 4. Januar 1643 in Woolsthorpe, nahe der Stadt Grant-ham geboren worden und verdankte es einsichtsvollen Verwandten, daß ihm Schulbesuch und Universitätsstudium ermöglicht wurden. Er entwickelte sich zu einem überragenden Astronomen und Experimentalphysiker, vollendete den Aufbau der klassischen Physik und starb, nachdem er 1703 zum Präsidenten der Royal Society, der Londoner Akademie, gewählt worden war, hochgeehrt im Jahre 1727. Er war unstrittig einer der bedeutendsten Mathematiker; man verdankt ihm höchst wichtige algebraische Untersuchungen, die noch tiefer den Gang der Entwicklung der Mathematik beeinflussende Durchbildung der Potenzreihenmethode zur Reihenentwicklung von Funktionen und eine besondere, fruchtbare Form der Differential- und Integralrechnung, die sogenannte Fluxionsrechnung.

NEWTON ging von Grundvorstellungen der Mechanik aus. Er nahm eine absolute, stetig verlaufende Zeit an, die er als Argument aller der Veränderlichen auffaßte, die physikalische Veränderungen beschreiben. Solche stetig sich ändernden „fließenden Größen“ nannte er Fluente, deren Geschwindigkeiten Fluxion. Dabei bezeichnete er die Fluxion einer Fluente x mit darübergesetztem Punkt, also bedeutet \dot{x} die Fluxion der Fluente x . Der Übergang von x zu \dot{x} entspricht der Differentiation nach der Zeit, der umgekehrte Weg der Integration, der Bestimmung der Stammfunktion (oder allgemein der Lösung von Differentialgleichungen). Der dritte wichtige Begriff der NEWTONSchen Infinitesimalrechnung war das „Moment“; das ist der „gerade noch wahrnehmbare Zuwachs einer Größe“, das dem heutigen Differential entspricht und von Newton mit o bezeichnet wurde. Dann ist oz das Moment der Fluente z . Trotz aller von NEWTON auch erkannten gedanklichen Schwierigkeiten der Fluxionsrechnung besaß er damit ein hervorragendes mathematisches Werkzeug zur Behandlung physikalischer und astronomischer Probleme. Mit ihm vermochte NEWTON zum Beispiel aus den KEPLERSchen Gesetzen der Planetenbewegung das Gravitationsgesetz herzuleiten.

Der Vorzug der NEWTONSchen Fluxionsrechnung bestand in ihrer engen Bindung an die Physik. Aber die Bezeichnungen waren noch zu wenig durchgebildet. Daher kommt es, daß sich die von G. W. LEIBNIZ gewählten geschickteren Bezeichnungen für die Differential- und Integralrechnung durchgesetzt haben, wie überhaupt LEIBNIZ mit DESCARTES und LEONHARD EULER zu den Schöpfern der heutigen mathematischen Symbolik gehört.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (Abb. 6.12.) war 1646, am Ende des 30jährigen Krieges, als Sohn eines Professors der Moral an der Leipziger Universität in Leipzig geboren worden. Nach einem Rechtsstudium in Leipzig und Jena trat er in die Dienste des Kurfürsten von Mainz, der ihn 1672 in diplomatischer Mission nach Paris



Abb. 6.11. ISAAC NEWTON (1643-1727)



Abb. 6.12. GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ
(1646-1716)

schickte. Die Jahre 1672 bis 1676, die er dort, in einem der Zentren der europäischen Naturwissenschaft und Mathematik, zubrachte, stellen die eigentliche mathematische Periode im Schaffen des sehr vielseitigen Gelehrten LEIBNIZ dar. In Paris wurde er in die Gedanken der neuen Infinitesimalmathematik eingeführt, arbeitete die schon erschienene Literatur gründlich durch und entwickelte sich in ganz kurzer Zeit zu einem der führenden Mathematiker Europas. Trotz aller Anstrengungen konnte er indes als Nichtadeliger und Ausländer in Paris nicht Fuß fassen; er war schließlich noch froh, im Dienste des Herzogs von Hannover unterzukommen. Dort ist er rastlos tätig gewesen, als Bibliothekar, als Autor vieler bedeutender philosophischer Werke, als Historiograph, als Organisator der Wissenschaft. So wurde 1710 hauptsächlich durch seine Initiative nach Londoner und Pariser Vorbild in Berlin eine Societät der Wissenschaften gegründet, aus der die heutige Deutsche Akademie der Wissenschaften hervorgegangen ist. Jedoch gestalteten sich die Verhältnisse für LEIBNIZ in Hannover immer ungünstiger. Ziemlich vereinsamt starb er 1716; kein Mitglied des Hofes befand sich im Trauergefolge. Der umfassendste Gelehrte seiner Zeit, so sagte ein Zeitgenosse, wurde wie ein Straßenräuber begraben.

Es steht heute fest, daß LEIBNIZ unabhängig von NEWTON selbständig zur Ausbildung seiner Differential- und Integralrechnung gekommen ist und daß der zwischen den Anhängern von LEIBNIZ und NEWTON geführte Prioritätsstreit den Verdiensten von LEIBNIZ nicht gerecht geworden ist. Noch in Paris erkannte LEIBNIZ den gegenseitigen Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung und erfand im Spätherbst 1675 den Calculus, ein System von Bezeichnungen der Infinitesimalrechnung. Auf einem vom 29. Oktober 1675 datierten Zettel notierte er: „Es wird nützlich sein,

statt der Gesamtheiten des CAVALIERI: also statt „Summe aller y^c von nun an $\int y \, dy$ zu schreiben. Hier zeigt sich endlich die neue Gattung des Kalküls, die der Addition und Multiplikation entspricht. Ist dagegen $\int y \, dy = \frac{y^2}{2}$ gegeben, so bietet sich so-

gleich das zweite auflösende Kalkül, das aus $d\left(\frac{y^2}{2}\right)$ wieder y macht. Wie nämlich

das Zeichen \int die Dimension vermehrt, so vermindert sie das d . Das Zeichen \int aber bedeutet eine Summe, d eine Differenz.“ (Deutsche Übersetzung)

Erst in Hannover kam er, nachdem er brieflich schon Mitteilungen an seine Fachkollegen hatte ergehen lassen, dazu, seine Methode zu publizieren, insbesondere in einem Zeitschriftenartikel aus dem Jahre 1684, der den Titel *Nova methodus . . .* (Eine neue Methode für Maxima und Minima sowie für Tangenten . . . und eine merkwürdige Art des Kalküls dafür) trug. Hierin werden die Differentiationsregeln für Summe und Differenz, für Produkt und Quotient ausgesprochen sowie $dy = 0$ bzw. $d^2y = 0$ als Bedingungen für Extrempunkte bzw. Wendepunkte angegeben. Dort treten zum erstenmal die Symbole dx , dy im Druck auf, das Integralzeichen im Druck erstmals 1686. LEIBNIZ selbst hat die Worte Differential und Differentialrechnung geprägt, das Wort *Integral*¹ wurde von JOHANN BERNOULLI vorgeschlagen.

Interessanterweise ist sowohl die NEWTONSche Fluxionsrechnung wie die LEIBNIZSche Differentialrechnung von den Vertretern des extremen philosophischen Idealismus scharf bekämpft worden, in England beispielsweise von Bischof BERKELEY – ein weiteres Beispiel der Wissenschaftsfeindlichkeit des Idealismus.

Trotz aller Angriffe und trotz logischer Schwierigkeiten, die mit den noch unexakten LEIBNIZSchen Begriffen verbunden waren, setzte sich die Differentialrechnung außerordentlich rasch durch, und zwar auf Grund ihrer überwältigenden Erfolge. Nur in England hielt man während des 18. Jahrhunderts an der NEWTONSchen Fluxionsrechnung fest. Auf dem europäischen Kontinent dagegen übernahm man die LEIBNIZSchen Bezeichnungen. Durch das Wirken der Brüder JOHANN BERNOULLI (1667–1748) und JAKOB BERNOULLI (1655–1705), durch LEONHARD EULER (1707–1783), der u. a. auch viele Jahrzehnte an der Petersburger Akademie der Wissenschaften tätig war, durch J. L. LAGRANGE (1736–1813), durch P. S. LAPLACE (1749–1827), die die herausragendsten Vertreter einer Vielzahl schöpferischer Mathematiker waren, wurde die Differentialrechnung und Integralrechnung im 18. Jahrhundert weiter ausgebaut. Die logischen Schwierigkeiten bei der Grundlegung der Infinitesimalrechnung wurden allerdings erst im 19. Jahrhundert bewältigt, insbesondere auf Grund der Untersuchungen des böhmischen Philosophen und Mathematikers B. BOLZANO (1781–1848), des russischen Mathematikers P. L. TSCHEBYSCHEW (1821–1894), des französischen Mathematikers A. L. CAUCHY (1789–1857) und des deutschen Mathematikers K. WEIERSTRASS (1815–1897).

Durch CAUCHY und insbesondere von dem deutschen Mathematiker B. RIEMANN wurde in der Mitte des 19. Jahrhunderts auch eine neue Einsicht in das Wesen der

¹ integer (lat.), ganz

Integralrechnung erzielt. Sie war, seit LEIBNIZ, zunächst als Umkehrung der Differentialrechnung aufgefaßt worden. CAUCHY und RIEMANN aber zeigten, wie man das Integral als Grenzwert einer Summe definieren, das heißt, die Integralrechnung ohne Differentialrechnung aufbauen kann.

Die Infinitesimalrechnung ist bereits im 18. Jahrhundert zur Lösung einer Vielzahl praktischer Probleme benutzt und bald auch als außerordentlich wichtiges Hilfsmittel für die Naturwissenschaften erkannt worden. Aber erst mit dem Einsetzen der industriellen Revolution zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurde sie auch zum Handwerkszeug der Ingenieure. Schrittmachend war hier für ganz Europa die während der Revolutionszeit in Paris 1794 gegründete Ecole polytechnique, die erste Technische Hochschule, an der u. a. LAGRANGE und CAUCHY lehrten. Nach Pariser Vorbild wurden dann später in ganz Europa technische Bildungsstätten eingerichtet, und nach dortigem Muster wurde die Differential- und Integralrechnung fester Bestandteil der Ingenieur-Ausbildung.

Abbildungsnachweis

- Abb. 1.0. Freie Welt
- Abb. 2.0. Horst E. Schulze
- Abb. 3.0. Deutsche Akademie der Wissenschaften (Heinrich-Hertz-Institut)
- Abb. 5.0. DEWAG-Dresden
- Abb. 6.1. Zentralbild
- Abb. 6.2. Reproduktion des Titelblatts des *Discours de la methode*
- Abb. 6.3. Reproduktion aus R. Payne: *The Canal Builders*. New York 1959, S. 83.
- Abb. 6.4. Deutsche Fotothek Dresden
- Abb. 6.7. Reproduktion aus U. Forti: *Storia della tecnica*. Florenz 1957, S. 43.
- Abb. 6.8. Reproduktion aus D. E. Smith: *History of Mathematics*, Vol. I (1923), S. 363.
- Abb. 6.10. Reproduktion aus J. Leupold: *Theatrum machinarum generale*. Leipzig 1724, Tabula LXIII, Fig. 2.
- Abb. 6.11. und 6.12. Volk und Wissen

INHALTSVERZEICHNIS

1. Schluß von n auf $n + 1$, binomischer Satz, elementare Folgen und Reihen ...	3
1.1. Über mathematische Beweisverfahren	4
1.2. Permutationen	26
1.3. Der binomische Satz	34
1.4. Elementare Folgen und Reihen	42
2. Differentialrechnung	69
2.1. Grenzwerte von Zahlenfolgen und von Funktionen	70
2.2. Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten	81
2.3. Geometrische und physikalische Deutung des Differenzenquotienten und der Ableitung	86
2.4. Rechnen mit Differentialquotienten	89
2.5. Die Ableitungen der Potenzfunktion $y = x^n$ für ganzzahlige Exponenten	95
2.6. Ganze rationale Funktionen	103
2.7. Gebrochene rationale Funktionen	108
2.8. Untersuchung der ganzen rationalen Funktion	115
2.9. Untersuchung der gebrochenen rationalen Funktion	137
3. Einführung in die Integralrechnung	145
3.1. Das unbestimmte Integral	146
3.2. Das bestimmte Integral	150
3.3. Flächeninhaltsberechnung durch Integration	164
3.4. Volumenberechnung durch Integration	174
4. Analytische Geometrie	183
4.1. Punkt und Strecke	184
4.2. Die Geradengleichungen	193
4.3. Zwei Geraden	197
4.4. Anwendungsaufgaben	202
5. Vektorrechnung	205
5.1. Vektoren	206
5.2. Addition und Subtraktion von Vektoren	210
5.3. Multiplikation mit skalaren Faktoren	216
5.4. Komponenten von Vektoren	221
5.5. Anwendung von Vektoren in der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes	232
5.6. Skalarprodukt	242
5.7. Anwendung des Skalarproduktes in der analytischen Geometrie	255
6. Zur Geschichte der analytischen Geometrie und der Differential- und Inte- gralrechnung	267

