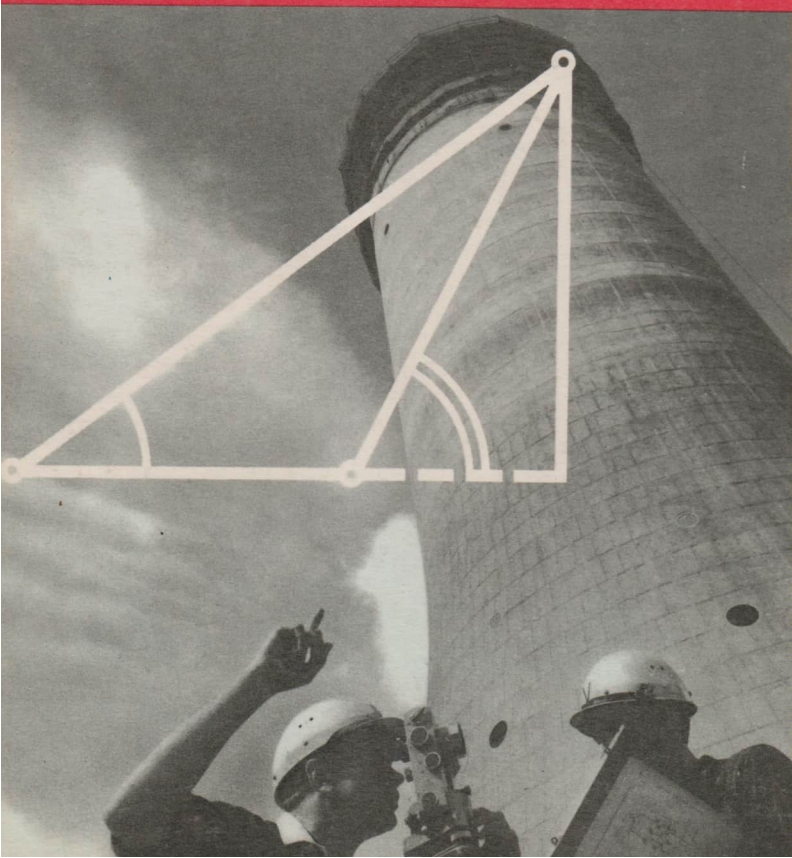
MATHEMATIK 10

Vorbereitungsklassen



Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

Das **Randregister** auf dem Außenrand der Seiten dient dem bequemen und schnellen Auffinden der Kapitel. Auf dem Vorsatz finden Sie hierzu eine Übersicht über die einzelnen Kapitel.
Der Lehrteil gliedert sich in die Kapitel A bis D, der Aufgabenteil in die Kapitel a bis d. Dabei enthält zum Beispiel das Kapitel b die Aufgaben für das Kapitel B im Lehrteil.
Jedes **Kapitel** ist durch Zwischenüberschriften und durch eine fortlaufende Numerierung mit schwarzen halbfetten Ziffern in **Lerneinheiten** untergliedert.
Innerhalb der Lerneinheiten werden die **Beispiele, Übungen** und **Definitionen** durch folgende Marken gekennzeichnet:

■ Beispiele,
● Übungen,
▶ Definitionen und Sätze.

Durch die Ziffern in den Marken werden auch die Übungen, Beispiele und Sätze numeriert. Sämtliche Numerierungen werden jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt. Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnen dann alle Numerierungen von neuem. Hinweise auf Lerneinheiten, Beispiele usw. werden im laufenden Text mit dem Buchstaben des betreffenden Kapitels angegeben.
Zum Beispiel:
Lerneinheit C 11 ist die Lerneinheit 11 des Kapitels C,
Beispiel D 5 ist das Beispiel 5 im Kapitel D,
Übung A 13 ist die Übung 13 im Kapitel A.
Die **Aufgaben** wurden folgendermaßen untergliedert:
Nebeneinanderstehende Aufgaben, wie zum Beispiel die Aufgaben a 87 und a 88, behandeln jeweils das gleiche mathematische Problem und sind im allgemeinen vom gleichen Schwierigkeitsgrad. Die Aufgabenstellungen, die sich unmittelbar über den einzelnen Aufgaben über die ganze Breite der jeweiligen Seite erstrecken, beziehen sich dann auf beide Aufgabengruppen.
Mit kursiver Numerierung wurden **zusätzliche Aufgaben** gekennzeichnet, die sich auf manchen Seiten des Aufgabenteils befinden. Bei diesen Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad im allgemeinen höher als bei den normalen, halbfett numerierten Aufgaben.

Winkelfunktionen A a

Körperberechnung B b

Ebene Trigonometrie C c

Darstellende Geometrie D d

Register Z

MATHEMATIK

Lehrbuch für Klasse 10

Vorbereitungsklassen

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1968

Autoren:
Dietrich Richter – Kapitel A
Prof. Dr. Werner Renneberg, Gerlinde Wußing – Kapitel B, C, b, c
Prof. Oskar Mader – Kapitel D, d
Dietrich Kind – Kapitel a
Dr. Hans Wußing – Historische Abschnitte
Wissenschaftliche Anleitung und Betreuung:
Dr. Dieter Ilse und Dipl.-Math. Werner Tietz

Vom Ministerium für Volksbildung
der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt.

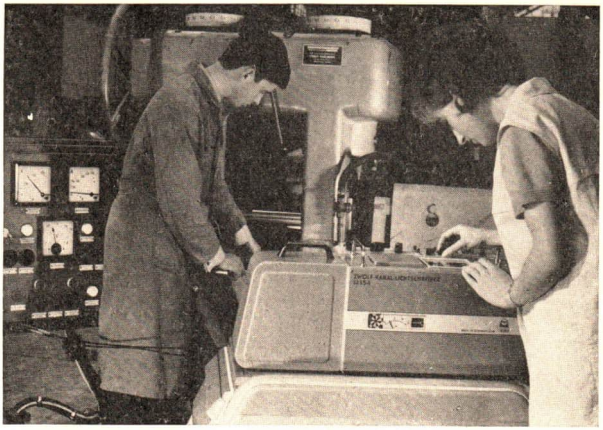
1. Auflage
Ausgabe 1968
Lizenz Nr. 203 · 1000/68 (E)
ES 11G
Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Ausstattung: Joachim Bethmann
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden III/9/1
Gesetzt aus der Bodoni Antiqua
Redaktionsschluß: 1. Februar 1968
Bestell-Nr. 00 10 51–1 · Preis: 3,–

A. Winkelfunktionen

Seite

4 Winkel und Winkelmessung
7 Die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$
8 Spezielle Funktionswerte
9 Graphische Darstellung der Sinus- und Kosinusfunktion
11 Die Funktionen $y = a \sin x$
12 Die Funktionen $y = \sin bx$ $(b \neq 0)$
14 Die Funktionen $y = \sin (x + c)$
15 Die Funktionen $y = a \sin (bx + c)$
16 Superposition von Sinuskurven
18 Die Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$
19 Tangens und Kotangens am Einheitskreis
21 Die Bilder der Tangens- und Kotangensfunktion
22 Symmetrieeigenschaften, gerade und ungerade Funktionen
23 Beziehungen zwischen den Funktionswerten bei gleichem Winkel
25 Spezielle Werte der Winkelfunktionen
27 Komplementwinkelbeziehungen
28 Die Tafeln der Winkelfunktionen
29 Winkel im Intervall $-5° \leqq \alpha \leqq 5°$
30 Quadrantenbeziehungen
31 Gebrauch der Tafeln für beliebige Winkel
33 Bestimmen der Winkel bei gegebenen Winkelfunktionswerten

Zur Überprüfung und Fehlersuche verwendet man vielfach Meßeinrichtungen, die die Meßergebnisse charakteristischer Größen auf einer Bildröhre oder auf einem Papierstreifen als Kurven wiedergeben. Mit diesen Oszillographen kann man schnell wechselnde Vorgänge, z. B. Ströme in elektrischen Anlagen, Kräfte in Maschinen, messen.
Das Bild zeigt ein solches Prüfgerät, in diesem Fall einen Lichtschreiber aus dem VEB Meßgerätewerk Zwönitz, beim Aufzeichnen des Kräfteverlaufs an einem Walzwerk.



A

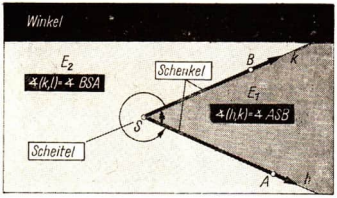
Winkel und Winkelmessung

1

Wir haben **Winkel** durch Drehung eines Strahls in mathematisch positiver Drehrichtung um seinen Anfangspunkt erzeugt. Das *Original h* und das *Bild k* bei einer solchen Drehung bilden ein geordnetes Paar von Strahlen (h, k). Dementsprechend legen wir fest:

1 **DEFINITION: Ein Winkel ist ein geordnetes Paar von Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt.**

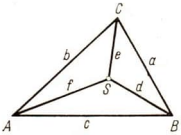
Nach dieser Definition gibt es zu je zwei Strahlen h und k genau zwei Winkel, nämlich die geordneten Paare (h, k) und (k, h).
Denkt man sich eine Drehung, die dem Winkel $\sphericalangle(h, k)$ entspricht, praktisch durchgeführt, so dreht sich dabei der Strahl h im mathematisch positiven Drehsinn um S bis zur Deckung mit k (Bild A 1). Hierbei wird das Gebiet E_1 überstrichen. Im Falle des Winkels $\sphericalangle(k, h)$ dreht sich der Strahl k um S bis zur Deckung mit h, wobei er das Gebiet E_2 überstreicht.



A 1

Auf Grund der Definition einer Funktion als Menge geordneter Paare können wir einen Winkel als geordnetes Paar einer Funktion auffassen; denn bei einer Drehung der Ebene im mathematisch positiven Sinn wird jedem Strahl eindeutig wieder ein Strahl zugeordnet.

(1) Beschreiben Sie im Bild A 2 alle durch je zwei beliebige Strecken bestimmten Winkel **a)** mit dem Scheitel A und **b)** mit dem Scheitel S mittels Drehung, und bezeichnen Sie die Winkel in der im Bild A 1 angegebenen Weise!

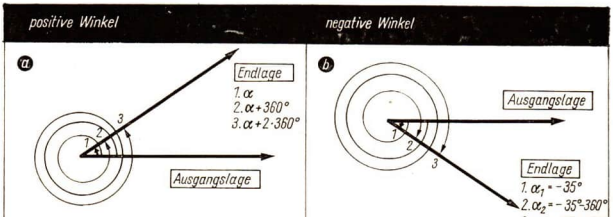


A 2

Jedem Winkel wird eine reelle Zahl als Maß zugeordnet. Der identischen Drehung (die Schenkel des Winkels fallen zusammen) wird die Zahl 0 zugeordnet.
Beim sogenannten **Gradmaß** wird dem Vollwinkel (ein Schenkel hat die Ebene einmal vollständig überstrichen) die Zahl 360 zugeordnet. Dem n-ten Teil eines Vollwinkels wird die Zahl $\frac{360}{n}$ (n reell und größer Null) zugeordnet. Die Einheit des Gradmaßes ist also der 360ste Teil des Vollwinkels und wird mit 1° bezeichnet.
Durch fortgesetzte Konstruktionen von Winkelhalbierenden erhält man Winkel mit den Maßen $90° \frac{1}{2^n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), aus denen man Näherungswinkel für alle Winkel zusammensetzen kann. Auf diese Weise läßt sich jedem Winkel mit beliebiger Genauigkeit ein Maß zuordnen.
Man kann zeigen, daß durch dieses Verfahren jedem Winkel genau eine reelle Zahl zugeordnet wird.

Erweiterung des Winkelbegriffs

1. Ein Strahl möge die Ebene teilweise oder auch ganz zum zweitenmal überstreichen und sich in einer Lage befinden, der bei der ersten Umdrehung das Maß α zugeordnet war[1]. Dann wird dem durch diese Drehung entstandenen Winkel das Maß $\alpha + 360°$ zugeordnet, bei der dritten Umdrehung $\alpha + 2 \cdot 360°$, bei der $(n + 1)$-ten Umdrehung $\alpha + n \cdot 360°$ (Bild A 3 a).
2. Entsteht ein Winkel durch Drehung im mathematisch negativen Drehsinn, so wird dieses durch Vorsetzen eines Minuszeichens vor die Maßzahl gekennzeichnet (Bild A 3 b).



A 3 a A 3 b

Winkel, deren Gradmaße sich nur um ein Vielfaches von 360° unterscheiden, heißen **äquivalente Winkel** und bilden jeweils eine Klasse.
In jeder Klasse äquivalenter Winkel gibt es einen, dessen Maß α zwischen 0° und 360° liegt ($0° \leqq \alpha < 360°$). Das Maß dieses Winkels wird **Hauptwert** der jeweiligen Klasse äquivalenter Winkel genannt.

[1] Wir bezeichnen oft den Winkel selbst und sein Gradmaß durch gleiche Variable (im allgemeinen durch griechische Buchstaben).

A

1 **a)** Winkel von 2652° und 1572° sind äquivalent, denn es ist $2652° - 1572° = 1080° = 3 \cdot 360°$.

b) Winkel von 1370° und 5204° sind nicht äquivalent, denn es ist $5204° - 1370° = 3834°$, und 3834 ist nicht durch 360 teilbar.

c) Winkel von — 3280° und 320° sind äquivalent, denn $320° - (-3280°) = 3600° = 10 \cdot 360°$.

2 Untersuchen Sie, ob Winkel mit folgendem Gradmaß äquivalent sind!

a) 537°; 928°

b) 1370°; 2090°

c) 2783°; — 4583°

d) — 6345°; 8415°

Das **Bogenmaß** arc α (arkus alpha) eines Winkels α ist die Maßzahl der Bogenlänge, die dieser Winkel α als Zentriwinkel in einem Kreis mit dem Radius 1 LE aus dem Kreis ausschneidet. Da hiernach ein Vollwinkel von 360° das Bogenmaß 2π besitzt, ergibt sich für einen beliebigen Winkel vom Gradmaß α die Beziehung $\frac{\alpha}{360°} = \frac{\text{arc}\,\alpha}{2\pi}$.

Hieraus ergeben sich die beiden Umrechnungsformeln

$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180°}\,\alpha$	$\alpha = \frac{180°}{\pi}\,\text{arc}\,\alpha$

Auf Grund dieser Formeln ist *jedem* beliebigen Winkel (auch solchen, deren Gradmaß kleiner als 0° oder größer als 360° ist) umkehrbar eindeutig eine reelle Zahl als Bogenmaß zugeordnet.

2 **a)** $\alpha = 90°$

$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot 90°$

$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\text{arc}\,\alpha \approx 1{,}5708$

b) $\alpha = 1°$

$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot 1°$

$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180}$

$\text{arc}\,\alpha \approx 0{,}0175$

c) $\alpha = 3524°$

$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot 3524°$

Ü: $\frac{3}{200} \cdot 4000 = 60$

$\text{arc}\,\alpha \approx 61{,}67$

d) $\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3}$

$\alpha = 60°$

e) $\text{arc}\,\alpha = 1$

$\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot 1$

$\alpha \approx 57{,}3°$

f) $\text{arc}\,\alpha = -23$

$\alpha = -\frac{180°}{\pi} \cdot 23$

Ü: $\frac{180}{3} \cdot 20 = 1200$

$\alpha \approx -1317°$

Aufgaben a 1 bis 25

Die Funktionen mit den Gleichungen $y = \sin x$ und $y = \cos x$

2

Bei einem auf einer geneigten Ebene befindlichen Körper mit dem Gewicht F_G gelten die folgenden Beziehungen (Bild A 4):

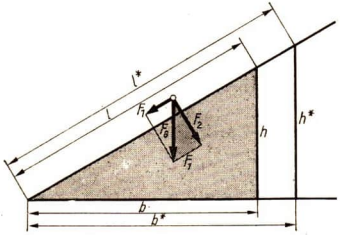
$$\frac{F_1}{F_G} = \frac{h}{l}$$

$$F_1 = \left(\frac{h}{l}\right) \cdot F_G$$

und

$$\frac{F_2}{F_G} = \frac{b}{l}$$

$$F_2 = \left(\frac{b}{l}\right) \cdot F_G$$

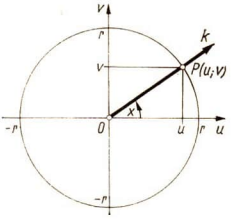


A 4

Hierbei sind F_1 und F_2 die Komponenten des Gewichtes F_G. Diese beiden Komponenten hängen bei gegebenem Gewicht F_G nur vom Winkel ab, unter dem die Ebene geneigt ist. Die Verhältnisse $\frac{h}{l}$ und $\frac{b}{l}$ sind nämlich auf Grund des Strahlensatzes bei gegebenem Winkel konstant $\left(\frac{h}{l} = \frac{h^*}{l^*};\ \frac{b}{l} = \frac{b^*}{l^*}\right)$.

Jedem Winkel ist also jeweils ein bestimmter Wert des Quotienten $\frac{h}{l}$ bzw. $\frac{b}{l}$ zugeordnet, d. h., diese Quotienten sind demnach Funktionen des Winkels. Diese Abhängigkeit der Verhältnisse vom Winkel wird durch keine der uns bisher bekannten Funktionen erfaßt.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit gleichgeteilten Achsen sei ein Kreis mit dem Radius von r Längeneinheiten gegeben (Bild A 5). Der Schenkel k des Winkels $\sphericalangle (u, k)$ mit dem Maß x möge den Kreis im Punkt P schneiden, der die Abszisse u und die Ordinate v besitzt.



A 5

A

2 **DEFINITION:**

$\sin x \underset{\text{Def}}{=} \frac{v}{r}$	$\cos x \underset{\text{Def}}{=} \frac{u}{r}$

(x beliebig reell)
($r > 0$, reell)

Durch die Gleichungen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ sind auf der Grundlage dieser Definition zwei Funktionen bestimmt, nämlich die Menge der geordneten Paare $[x, \sin x]$ bzw. $[x, \cos x]$ mit $-\infty < x < +\infty$. Sie werden **Sinusfunktion** bzw. **Kosinusfunktion** genannt.
Die Definitionsbereiche dieser Funktionen sind Mengen von reellen Zahlen, also keine Winkel. Da aber in diesem Fall die reellen Zahlen als Maßzahlen von Winkeln aufgefaßt werden, kann man diese Funktionen auch **Winkelfunktionen** nennen.

Aufgaben a 26 bis 28

Spezielle Funktionswerte

3

---

3 Die Funktionswerte für $x = \frac{3}{2}\pi$, $x = \pi$, $x = -\frac{\pi}{2}$ sollen ermittelt werden (↗ Bild A 5).

a) $x = \frac{3}{2}\pi$, also $P(0; -r)$

$$\sin x = \frac{v}{r} = \frac{-r}{r} = -1$$

$$\cos x = \frac{u}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

b) $x = \pi$, also $P(-r; 0)$

$$\sin x = \frac{v}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos x = \frac{u}{r} = \frac{-r}{r} = -1$$

c) $x = -\frac{\pi}{2}$, also $P(0; -r)$

$$\sin x = \frac{v}{r} = \frac{-r}{r} = -1$$

$$\cos x = \frac{u}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

3 Begründen Sie in gleicher Weise und unter Nutzung der Kenntnisse über äquivalente Winkel die Angaben der folgenden Tabelle!

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

k	$4n$	$4n+1$	$4n+2$	$4n+3$
$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot 2\pi$	$n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$	$n \cdot 2\pi + \pi$	$n \cdot 2\pi + \frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

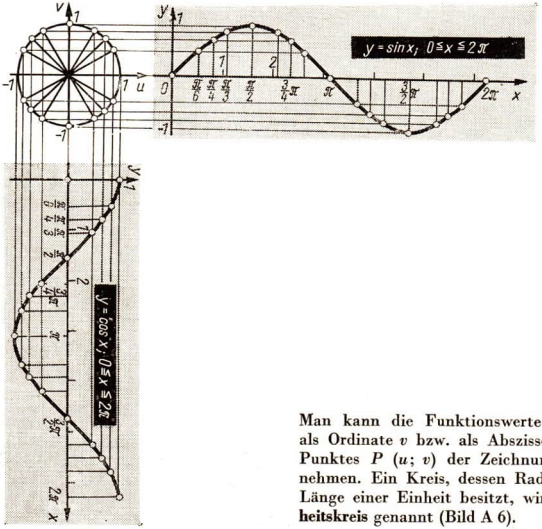
A

Graphische Darstellung der Sinus- und Kosinusfunktion 4

Wir wählen einen Kreis, dessen Radius *eine Längeneinheit* mißt, bei dem also die Maßzahl der Länge des Radius gleich 1 ist ($r = 1$). Dann nehmen die Definitionsgleichungen für den Sinus und den Kosinus eine besonders einfache Form an:

$$\sin x = \frac{v}{r} = \frac{v}{1} = v \qquad \cos x = \frac{u}{r} = \frac{u}{1} = u \qquad (r = 1)$$

A 6

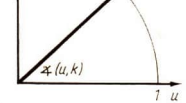


Man kann die Funktionswerte direkt als Ordinate v bzw. als Abszisse u des Punktes P (u; v) der Zeichnung entnehmen. Ein Kreis, dessen Radius die Länge einer Einheit besitzt, wird **Einheitskreis** genannt (Bild A 6).

A

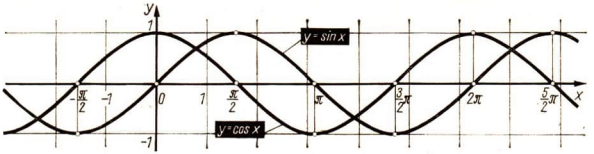
Funktionsverlauf im Grundintervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$				
Definitionsbereich	$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$	$\pi \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi \leqq x \leqq 2\pi$
Wertevorrat von $y = \sin x$	$0 \leqq \sin x \leqq 1$	$1 \geqq \sin x \geqq 0$	$0 \geqq \sin x \geqq -1$	$-1 \leqq \sin x \leqq 0$
Monotonieverhalten von $y = \sin x$	monoton wachsend	monoton fallend	monoton fallend	monoton wachsend
Wertevorrat von $y = \cos x$	$1 \geqq \cos x \geqq 0$	$0 \geqq \cos x \geqq -1$	$-1 \leqq \cos x \leqq 0$	$0 \leqq \cos x \leqq 1$
Monotonieverhalten von $y = \cos x$	monoton fallend	monoton fallend	monoton wachsend	monoton wachsend

Wir untersuchen die genannten Eigenschaften der Sinusfunktion im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$. Bei Vergrößerung des Winkelmaßes x vergrößert sich kontinuierlich die Ordinate v des Schnittpunktes des Schenkels k mit dem Einheitskreis, d. h., die Funktion ist monoton wachsend. Gilt $x < \frac{\pi}{2}$, so ist $v < 1$ und folglich $\sin x < 1$. Gilt $x = \frac{\pi}{2}$, so ist $v = r = 1$ und damit $\sin x = 1$. Da stets gilt $v \leqq r$, ist $\sin x \leqq 1$. Alle reellen Zahlen y $(0 \leqq y \leqq 1)$ werden im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ von der Sinusfunktion tatsächlich angenommen.
Es sei y_0 eine beliebige Zahl aus diesem Intervall. Die Gerade $v = y_0$ schneidet den Kreis (Bild A 7) bzw. berührt ihn im Fall $y_0 = 1$. Durch diesen Schnittpunkt ist der Schenkel eines Winkels $\sphericalangle (u, k)$ eindeutig festgelegt. Zu diesem Winkel gibt es genau eine reelle Zahl x_0 mit $0 \leqq x_0 \leqq \frac{\pi}{2}$ als Bogenmaß dieses Winkels. Diese Zahl x_0 hat die Eigenschaft, daß gilt $\sin x_0 = y_0$. Für äquivalente Winkel erhält man gleiche Funktionswerte, da äquivalenten Winkeln der gleiche Schnittpunkt P mit dem Einheitskreis entspricht.



A 7

In den Intervallen $k \cdot 2\pi \leqq x < (k + 1)\, 2\pi$ (k ganzzahlig) erhalten wir demnach den gleichen Funktionsverlauf wie im Grundintervall $0 \leqq x < 2\pi$ (Bild A 8). Man sagt, die Funktionen sind *periodisch* mit der kleinsten **Periode** 2π. Das kann folgendermaßen ausgedrückt werden:
$\sin (x + k \cdot 2\pi) = \sin x$; $\cos (x + k \cdot 2\pi) = \cos x$



A 8

(4) **Bestimmen Sie im gesamten Definitionsbereich der Sinus- und der Kosinusfunktion deren Wertevorrat und deren Monotonieverhalten!**

(5) **Entscheiden Sie auf Grund Ihrer Kenntnis über den Wertevorrat, welche der folgenden Gleichungen eine Lösung hat!**

a) $\sin x = -3$ **b)** $2 \cos x = \frac{1}{2}$ **c)** $\sin x \cdot \cos x = 0$

d) $4 \sin x + 3 \cos x = 8$ **e)** $-5 \cos x + 4 = 0$ **f)** $\sin x \cdot \cos x = 1$

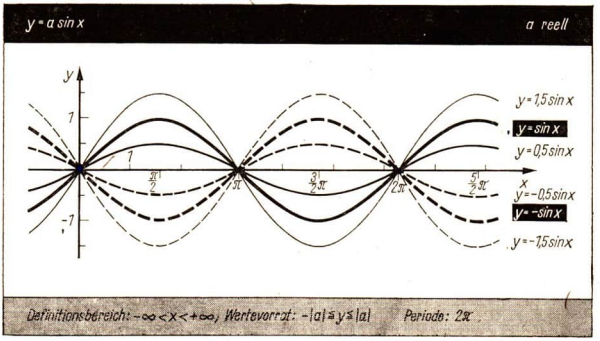
(6) **Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen!**

a) $\sin x = 1$ **b)** $\cos x = 0$ **c)** $\cos x = -1$ **d)** $\sin x = 0$

Aufgaben a 29 bis 36

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \sin x$; a reell

5



A 9

A

(7) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = 2 \sin x$, indem Sie, ausgehend vom Bild der Funktion $y = \sin x$, jeweils die Funktionswerte durch Verdopplung der Ordinaten ermitteln!

(8) Wie erhält man das Bild der Funktionen $y = -\sin x$, $y = 4 \sin x$, $y = -3 \sin x$ aus dem Bild der Sinusfunktion? Orientieren Sie sich am Bild A 9!

(9) Zeichnen Sie folgende Paare von Funktionen im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ in ein gemeinsames Koordinatensystem!

a) $y = \sin x$
$y = -\sin x$

b) $y = 3 \sin x$
$y = -3 \sin x$

c) $y = \frac{1}{3} \sin x$
$y = -\frac{1}{3} \sin x$

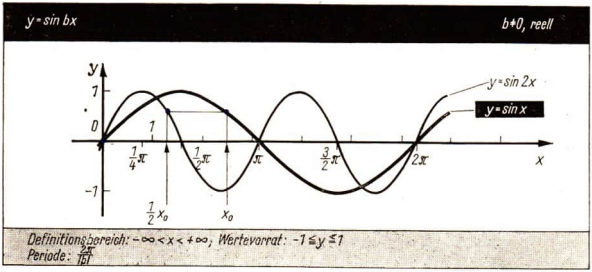
Aufgaben a 37 bis 43

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = \sin bx$; $b \neq 0$ reell

6

---

4 Die Funktion $y = \sin 2x$ soll im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ graphisch dargestellt werden (Bild A 10).



A 10

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Betrachten wir ein beliebiges Argument x_0 des Intervalls, so erkennen wir, daß der Funktionswert, den $y = \sin x$ bei x_0 annimmt, von $y = \sin 2x$ bei $\frac{x_0}{2}$ angenommen wird:

$\sin 2\left(\frac{x_0}{2}\right) = \sin x_0$.

Die kleinste Periode der Funktion $y = \sin 2x$ ist folglich π.

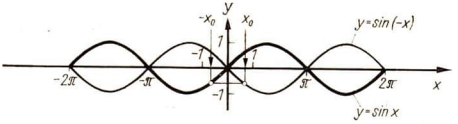
(10) Weisen Sie nach, daß der Funktionswert, der von $y = \sin x$ bei x_0 angenommen wird, von $y = \sin \frac{x}{2}$ bei $2x_0$ angenommen wird! Zeichnen Sie die Funktion im Intervall $-4\pi \leqq x \leqq 4\pi$, und bestimmen Sie die kleinste Periode!

Die kleinste Periode der Funktion $y = \sin bx$; $(b > 0)$ ist $\frac{2\pi}{b}$. Es ist nämlich $\sin b \cdot \left(\frac{2\pi}{b}\right) = \sin 2\pi$, und bei $x = 2\pi$ ist das Grundintervall der Sinusfunktion zu Ende, folglich das Grundintervall von $y = \sin bx$ bei $\frac{2\pi}{b}$.

(11) Bestimmen Sie die kleinste Periode der folgenden Funktionen!

a) $y = \sin 3x$ **b)** $y = \sin \pi x$ **c)** $y = \sin \frac{1}{10}x$ **d)** $y = \sin \sqrt{2}\,x$

[5] Die Funktion $y = \sin(-x)$ soll im Intervall $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ graphisch dargestellt werden (Bild A 11).



A 11

x	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$-x$	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{1}{2}\pi$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	-2π
$\sin(-x)$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

Die Funktion $y = \sin(-x)$ nimmt an der Stelle x_0 den gleichen Funktionswert an, den $y = \sin x$ bei $-x_0$, d. h. für die entgegengesetzte Zahl, annimmt.
Man erhält folglich das Bild von $y = \sin(-x)$ durch Spiegelung von $y = \sin x$ an der y-Achse.
Man erhält allgemein das Bild von $y = \sin(-bx)$ aus dem Bild von $y = \sin bx$ durch Spiegelung an der y-Achse.

(12) Welche kleinste Periode hat die Funktion $y = \sin bx$; $(b < 0)$?

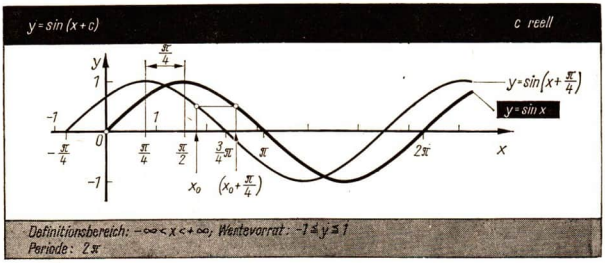
Aufgaben a 44 bis 53

A

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = \sin(x + c)$; (c reell)

7

6 Die Funktion $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ soll im Intervall $-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq 2\pi$ graphisch dargestellt werden (Bild A 12).



A 12

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
$x + \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	0	1	0	-1	0

Die Funktion $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ nimmt schon bei x_0 den gleichen Wert an, der von $y = \sin x$ erst bei $x_0 + \frac{\pi}{4}$ angenommen wird.
Man erhält folglich das Bild von $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, indem man die Sinuskurve um $\frac{\pi}{4}$ in der negativen Richtung der x-Achse verschiebt.

13 **a)** Weisen Sie nach, daß das Bild der Funktion $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ die um $\frac{\pi}{4}$ in der positiven Richtung der x-Achse verschobene Sinuskurve ist!

b) Welche kleinste Periode haben Funktionen mit Gleichungen der Form $y = \sin(x + c)$?

Aufgaben a 54 bis 62

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \sin (bx + c)$

8

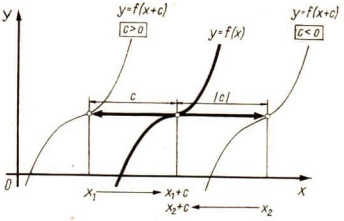
A

In den Lerneinheiten 5 bis 7 wurden Spezialfälle behandelt, für die folgendes gilt:

Der Faktor a bei $y = a \sin x$ bewirkt eine Stauchung oder Streckung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse. Ist $a < 0$, so wird die Sinuskurve zusätzlich an der x-Achse gespiegelt. Die Periode ist unverändert 2π, der Wertevorrat $-|a| \leqq y \leqq |a|$.

Der Faktor b bei $y = \sin bx$ bewirkt eine Veränderung der Periode. Die kleinste Periode ist $\frac{2\pi}{|b|}$. Ist $b < 0$, so muß zusätzlich eine Spiegelung an der y-Achse vorgenommen werden. Der Wertevorrat ist unverändert $-1 \leqq x \leqq 1$.

Der Summand c bei $y = \sin (x + c)$ bewirkt eine Verschiebung der Sinuskurve in Richtung der x-Achse. Die Verschiebung erfolgt um c Einheiten in der negativen Richtung der x-Achse, wenn $c > 0$ ist, und um $|c|$ Einheiten in der positiven Richtung der x-Achse, wenn $c < 0$ ist. Die Periode ist unverändert 2π, der Wertevorrat $-1 \leqq x \leqq 1$. Im Bild A 13 wird das ganz allgemein für Funktionen $y = f(x)$ bzw. $y = f(x + c)$ veranschaulicht.



A 13

7 Die Funktionsgleichung $y = \sin 3 \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ erhält man, indem in der Gleichung $y = \sin 3\,x$ die Variable x durch $x + \frac{\pi}{2}$ ersetzt wird. Also erhält man das Bild der Funktion

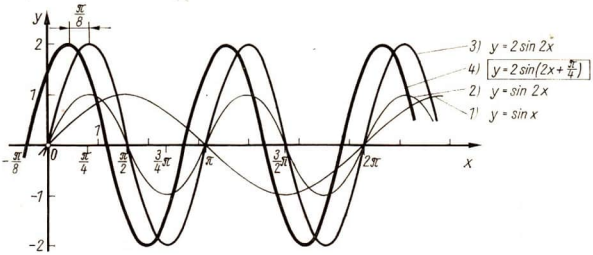
$$y = \sin 3 \left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

indem man das Bild von $y = \sin 3\,x$ um $\frac{\pi}{2}$ in der negativen Richtung der x-Achse verschiebt.

A

8 Die Funktion $y = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ soll im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ graphisch dargestellt werden:

Wir gehen von der Sinuskurve aus und führen nacheinander die Veränderungen aus, die den einzelnen Konstanten entsprechen (Bild A 14).



A 14

a) Wir stauchen die Sinuskurve in Richtung der x-Achse, so daß sich als kleinste Periode π ergibt. Wir erhalten so das Bild der Funktion $y = \sin 2x$.

b) Wir strecken das Bild der Funktion $y = \sin 2x$ in Richtung der y-Achse, so daß sich als Amplitude 2 ergibt. Wir erhalten so das Bild der Funktion $y = 2 \sin 2x$.

c) Wir verschieben das Bild der Funktion $y = 2 \sin 2x$ um $\frac{\pi}{8}$ in der negativen Richtung der x-Achse; denn die Gleichung $y = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ läßt sich umformen zu $y = 2 \sin 2 \left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, woraus man die Verschiebung ablesen kann.

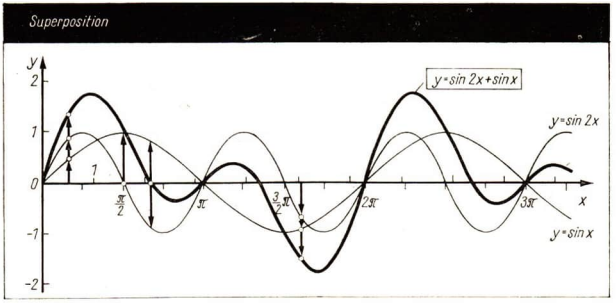
Wir können die angeführten Transformationen auch in anderer Reihenfolge ausführen oder aber die Funktionswerte rechnerisch (unter Benutzung der Tafel) ermitteln.

Aufgaben a 63 bis 65

Superposition von Sinuskurven

9

Aus den beiden Funktionen $y = \sin x$ und $y = \sin 2x$ kann man eine neue Funktion gewinnen, deren Funktionswerte gleich der Summe der Funktionswerte der beiden gegebenen Funktionen sind. Die neue Funktion hat demnach die Gleichung $y = \sin x + \sin 2x$.



A 15

Da die Summanden $\sin 2x$ und $\sin x$ für jede reelle Zahl x existieren, ist diese Funktion für alle reellen Zahlen x definiert. Man sagt, die neue Funktion sei die Summe der beiden gegebenen Funktionen.

Die graphische Darstellung der Funktion $y = \sin 2x + \sin x$ kann in der Weise erfolgen, daß die Funktionen $y = \sin 2x$ und $y = \sin x$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem dargestellt werden und daß die Summe $\sin 2x + \sin x$ zeichnerisch ermittelt wird (Bild A 15). Man spricht bei diesem Verfahren von **Überlagerung (Superposition)** von Sinuskurven.

(14) Stellen Sie die Funktion $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ graphisch dar!

Sinusfunktionen der Form $y = a \sin bx$ kann man zur mathematischen Erfassung periodischer Vorgänge benutzen.

9 **a)** Elongation bei harmonischer Schwingung: $y = y_{max} \sin \omega t$
(y_{max} Amplitude; ω Kreisfrequenz, wobei gilt $\omega = 2\pi f$; t Zeit)

b) Momentanwert der Wechselstromstärke: $I = I_{max} \sin \omega t$
(I Augenblickswert der Stromstärke; t Zeit; I_{max} Maximalwert der Stromstärke)

Häufiger treten in der Praxis jedoch Vorgänge auf, die auf Überlagerungen von Sinusschwingungen beruhen und mathematisch durch Summen von Sinusfunktionen erfaßt werden können.

Durch Überlagerung reiner Sinusschwingungen mit gleicher Frequenz erhält man eine reine Sinusschwingung mit gleicher Frequenz

[↗ Übung A 14: $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$].

Durch Überlagerung reiner Sinusschwingungen mit unterschiedlicher Frequenz erhält man Schwingungen mit veränderlicher Amplitude innerhalb einer Periode (↗ $y = \sin 2x + \sin x$ im Bild A 15).

Aufgaben a 66 bis 68

A

Die Funktionen mit den Gleichungen $y = \tan x$ und $y = \cot x$

10

Aus den beiden Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ bilden wir mit Hilfe folgender Definition zwei weitere Funktionen:

3 **DEFINITION:** $\boxed{\tan x \underset{\text{Def}}{=} \frac{\sin x}{\cos x}}$ $\qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k ganze Zahl)

$\boxed{\cot x \underset{\text{Def}}{=} \frac{\cos x}{\sin x}}$ $\qquad x \neq k\pi$ (k ganze Zahl)

15 Warum sind bei diesen Definitionen für die Maße x der Winkel Einschränkungen erforderlich?

10 a) $\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

b) $\cot \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$

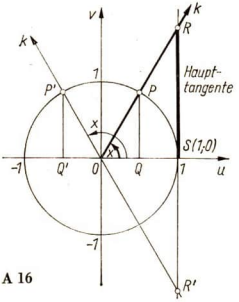
Auf gleiche Weise erhält man die Werte folgender Tabelle.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\tan x$	0	—	0	—	0
$\cot x$	—	0	—	0	—

Tangens und Kotangens am Einheitskreis

11

Die Tangente an den Einheitskreis im Punkt S (1; 0) heißt **Haupttangente** (Bild A 16).



A 16

SATZ: Am Einheitskreis ist tan x gleich der Ordinate des Punktes R, der sich als Schnittpunkt des einen Schenkels k des Winkels (bzw. seiner Verlängerung über 0 hinaus) und der Haupttangente ergibt.

Wir beweisen den Satz
für das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$.
Für das Intervall $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ verläuft der Beweis analog.

1. Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$

Es ist zu zeigen, daß die Ordinate von R gleich $\frac{\sin x}{\cos x}$ ist. Auf Grund des Strahlensatzes gilt

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$$

$$\textbf{(1)} \qquad \overline{RS} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} \cdot \overline{OS}$$

Da $\sin x$ gleich der Ordinate von P und $\cos x$ gleich der Abszisse von P ist, gilt $\overline{PQ} = |\sin x|$ LE, $\overline{OQ} = |\cos x|$ LE.
Da wir einen Einheitskreis gewählt haben, ist $\overline{OS} = 1$ LE. Setzen wir diese Beziehungen in **(1)** ein, erhalten wir:

$$\overline{RS} = \frac{|\sin x| \text{ LE}}{|\cos x| \text{ LE}} \cdot 1 \text{ LE}$$

$$\overline{RS} = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} \text{ LE}$$

Da $\sin x$ und $\cos x$ im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ positiv sind, gilt
$|\sin x| = \sin x$ und $|\cos x| = \cos x$
und folglich

$$\overline{RS} = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ LE},$$

d. h., die Ordinate von R ist gleich $\frac{\sin x}{\cos x}$.

Für $x = 0$ ist $R = S$, d. h. die Ordinate von R gleich 0.

Da für $x = 0$ gilt $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$, ist auch in diesem Fall die Ordinate von R gleich $\frac{\sin x}{\cos x}$.

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist der Schenkel k gleich der positiven Hälfte der v-Achse. Es gibt keinen Schnittpunkt mit der Tangente, d. h. $\tan \frac{\pi}{2}$ ist nicht definiert.

2. *Intervall* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Es ist zu zeigen, daß die Ordinate von R' gleich $\frac{\sin x}{\cos x}$ ist. Auf Grund des Strahlensatzes ist wieder

$$\overline{R'S} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OQ'}} \cdot \overline{OS}$$

$$\overline{R'S} = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} \text{ LE}$$

Da R' unterhalb der x-Achse liegt, ist die Ordinate von R' gleich $-\frac{|\sin x|}{|\cos x|}$.

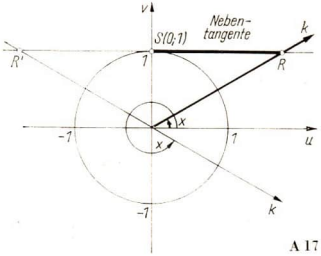
Im Intervall $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ist $\sin x$ positiv und $\cos x$ negativ, folglich gilt $|\sin x| = \sin x$ und $|\cos x| = -\cos x$, und wir erhalten für die Ordinate von R'

$$-\frac{|\sin x|}{|\cos x|} = -\frac{\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Die Tangente an den Einheitskreis im Punkt S (0; 1) heißt **Nebentangente** (Bild A 17).

5 **SATZ: Am Einheitskreis ist cot x gleich der Abszisse des Punktes R, der sich als Schnittpunkt des einen Schenkels k des Winkels (bzw. seiner Verlängerung über 0 hinaus) und der Nebentangente ergibt.**

Dieser Satz soll hier nicht bewiesen werden.



A 17

12

Aus der folgenden Tabelle geht der Funktionsverlauf der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ hervor. Die Tabelle wurde in ähnlicher Weise aufgebaut wie die Tabelle für die Sinus- und Kosinusfunktion auf Seite 10.

	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	π
Wertevorrat von $y = \tan x$	0	$0 < y < +\infty$	—	$-\infty < y < 0$	0
Monotonieverhalten von $y = \tan x$		monoton wachsend		monoton wachsend	
Wertevorrat von $y = \cot x$	—	$+\infty > y > 0$	0	$0 > y > -\infty$	—
Monotonieverhalten von $y = \cot x$		monoton fallend		monoton fallend	

Folgendermaßen können wir uns überlegen, daß *jede* reelle Zahl im Wertevorrat der Tangensfunktion auftritt. Zu jeder beliebig gegebenen reellen Zahl y_0 gibt es auf der Haupttangente an den Einheitskreis einen Punkt R mit dieser Zahl y_0 als Ordinate (Bild A 16). Die durch R und θ gelegte Gerade bildet mit der positiven Richtung der u-Achse einen Winkel x_0, für den gilt: $\tan x_0 = y_0$. Also ist die beliebig gegebene Zahl y_0 ein Wert der Tangensfunktion, liegt also in deren Wertevorrat.
Da y_0 beliebig groß bzw. beliebig klein gewählt werden kann, bedeutet das, daß die Tangensfunktion beliebig große bzw. beliebig kleine Werte annehmen kann. Je weniger sich x von $\frac{\pi}{2}$ bzw. von $-\frac{\pi}{2}$ unterscheidet, desto größer bzw. kleiner werden die Werte von $\tan x$.

Die Bilder der Tangens- und Kotangensfunktion

13

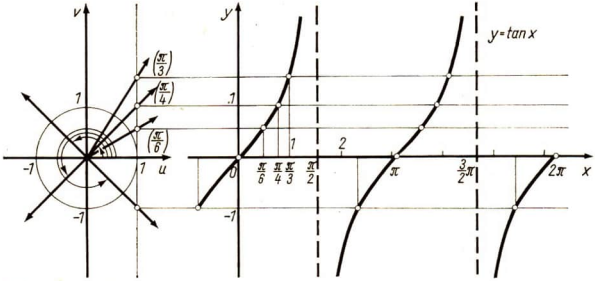
Auf Grund der beiden Sätze A 4 und A 5 kann man die Funktionswerte für die Tangens- und Kotangensfunktion unmittelbar am Einheitskreis entnehmen (Bilder A 18 und A 19).
Aus der Definition folgt:

6 **SATZ: Tangens- und Kotangensfunktion sind periodisch mit der kleinsten Periode π.**
Die für das Grundintervall $0 \leqq x \leqq \pi$ genannten Tatsachen gelten damit in jedem Intervall $k\pi \leqq x \leqq (k+1)\pi$ (k ganzzahlig).

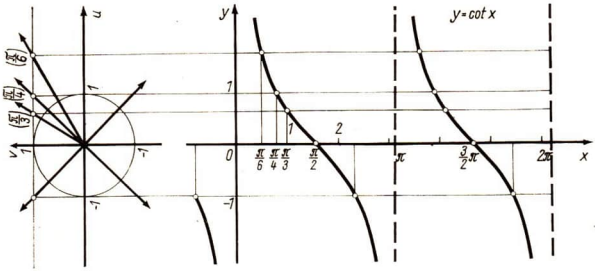
16 **a)** Geben Sie die Monotonieintervalle der Tangens- und Kotangensfunktion an!

b) Beschreiben Sie das Verhalten der Tangensfunktion an den Stellen $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ und der Kotangensfunktion an den Stellen $k\pi$ (k ganzzahlig)!

A



A 18



A 19

(17) Vergleichen Sie die Sinus- und Kosinusfunktion einerseits und die Tangens- und Kotangensfunktion andererseits hinsichtlich ihrer Eigenschaften!

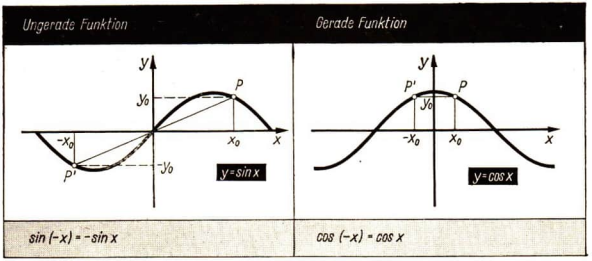
Aufgaben a 69 bis 77

Symmetrieeigenschaften der Funktionsbilder, gerade und ungerade Funktionen

14

$y = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$	ungerade	Zentralsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs
$y = \cot x$	$\cot(-x) = -\cot x$	ungerade	Zentralsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs

$y = \sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$	ungerade	Zentralsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs (Bild A 20)
$y = \cos x$	$\cos(-x) = \cos x$	gerade	Axialsymmetrie bezüglich der y-Achse (Bild A 21)



A 20 A 21

(18) **a)** Beweisen Sie die Beziehungen $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ auf der Grundlage der Definition am Einheitskreis!

b) Folgern Sie aus diesen Beziehungen die Symmetrieeigenschaften der Sinus- und Kosinuskurve!

(19) Beweisen Sie durch Rückgang auf die Definition $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ bzw. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, daß die Tangens- und die Kotangensfunktion ungerade sind: $\tan(-x) = -\tan x$ bzw. $\cot(-x) = -\cot x$!

Beziehungen zwischen den Funktionswerten bei gleichem Winkel

15

---

7 **SATZ: Für alle Zahlen x gilt:**
(1) $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

Beweis: Wir beweisen den Satz für Winkel im ersten Quadranten. Auf Grund des Satzes des PYTHAGORAS gilt im Dreieck $\triangle ODP$ (Bild A 22)

$\overline{PD}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OP}^2$.

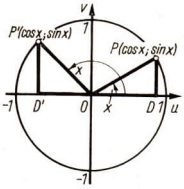
A

Es gilt ferner im Einheitskreis

(2) $\overline{PD} = |\sin x|$ LE

$\overline{OD} = |\cos x|$ LE

$\overline{OP} = 1$ LE



A 22

Da die gleiche Längeneinheit 1 LE vorliegt, können wir mit den Maßzahlen rechnen. Wir setzen die Beziehungen **(2)** in die Gleichung **(1)** ein und erhalten $|\sin x|^2 + |\cos x|^2 = 1^2$.
Wegen $|\sin x|^2 = (\sin x)^2$, $|\cos x|^2 = (\cos x)^2$ geht diese Gleichung über in $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.
Auf Grund der Vereinbarung $(\sin x)^2 = \sin^2 x$ und $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ schreibt man für (1):

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Für die anderen Quadranten verläuft der Beweis analog.

8 **SATZ: Für alle x, für die sowohl die Tangens- als auch die Kotangensfunktion definiert ist, gilt:**

$$\boxed{\tan x \cdot \cot x = 1}$$

Beweis: $\tan x \cdot \cot x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \sin x}$

$= 1$

Auf der Grundlage der beiden Beziehungen
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$
und der Definitionen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ lassen sich die folgenden Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen herleiten:

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\tan^2 x$	$\cot^2 x$
$\sin^2 x$		$1 - \cos^2 x$	$\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\frac{1}{1 + \cot^2 x}$
$\cos^2 x$	$1 - \sin^2 x$		$\frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$
$\tan^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$	$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$		$\frac{1}{\cot^2 x}$
$\cot^2 x$	$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$	$\frac{1}{\tan^2 x}$	

(20) Untersuchen Sie bei allen Beziehungen der Tabelle, welche Einschränkung für die Zahlen x gemacht werden muß!

Wir beweisen die Beziehung

$$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \sin^2 x \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,;\ (k \text{ ganzzahlig})$$

Wir formen um:

$$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1}$$

Aufgaben a 78 bis 89

Spezielle Werte der Winkelfunktionen

16

x	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

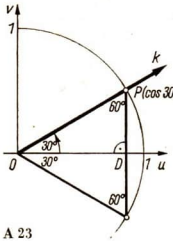
Es werden im folgenden einige Funktionswerte der Tabelle berechnet.

Auf Grund der Definition des Sinus, bezogen auf den Einheitskreis, ist $\sin\frac{\pi}{6}$ bzw. $\sin 30°$ die Ordinate des Punktes P im Bild A 23. Durch Ergänzung zu einem gleichseitigen Dreieck ergibt sich $\overline{PD} = \frac{1}{2}$ LE und folglich $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

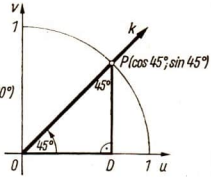
Die Berechnung von $\sin\frac{\pi}{4}$ bzw. $\sin 45°$ erfolgt entsprechend dem Bild A 24. In dem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck $\triangle\, ODP$ ist $\overline{OD} = \overline{DP}$, und auf Grund des Satzes des Pythagoras gilt $\overline{PD}^2 + \overline{OD}^2 = 1\ (\text{LE})^2$.

Wegen $\overline{OD} = \overline{DP}$ folgt

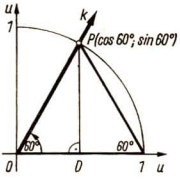
A



A 23



A 24



A 25

$$2\,\overline{PD}^2 = 1\ (\mathrm{LE})^2$$

$$\overline{PD}^2 = \frac{1}{2}\,(\mathrm{LE})^2$$

$$\overline{PD} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ \mathrm{LE} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \mathrm{LE}$$

Folglich ist die Ordinate des Punktes P gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und somit $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Auf Grund des Bildes A 25 ergibt sich für $\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60°$ folgende Rechnung:

$$\overline{PD}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OD}^2$$

$$\overline{PD}^2 = 1\ (\mathrm{LE})^2 - \frac{1}{4}\,(\mathrm{LE})^2 = \frac{3}{4}\,(\mathrm{LE})^2$$

$$\overline{PD} = \sqrt{\frac{3}{4}}\ \mathrm{LE} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{LE}$$

Die Ordinate des Punktes P ist gleich $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, also ist $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Die Werte der anderen Winkelfunktionen können aus diesen Funktionswerten mit Hilfe der Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen berechnet werden.

11 **a)** $\cos^2\frac{\pi}{6} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{6}$

$$\cos^2\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Da die Kosinusfunktion im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ positiv ist, gilt

$$\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

b) $\tan\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

c) $\cot\frac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$

(21) Berechnen Sie die anderen Funktionswerte der Tabelle!

Aufgaben a 90 bis 121

Komplementwinkelbeziehungen zwischen einer Winkelfunktion und ihrer Kofunktion 17

9 **SATZ: Für alle Zahlen x gilt:**

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Für alle Zahlen x $\left(x \neq k\frac{\pi}{2}\right)$ gilt:

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

Mit der folgenden Vereinbarung erhält der Satz eine oft benutzte sprachliche Formulierung.

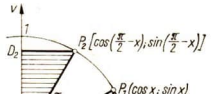
10 **DEFINITION: Zwei Winkel mit den Maßen x_1 und x_2 heißen zueinander komplementär genau dann, wenn gilt $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}$.**

Nach dieser Definition sind Winkel mit den Maßen $\frac{\pi}{2} - x$ und x zueinander **Komplementwinkel**. Der Satz erhält damit folgende Formulierung:

11 **SATZ: Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Kosinus seines Komplementwinkels, der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Komplementwinkels.**
Der Tangens eines Winkels ist gleich dem Kotangens seines Komplementwinkels, der Kotangens eines Winkels ist gleich dem Tangens seines Komplementwinkels.

Man sagt deshalb auch, Sinusfunktion und Kosinusfunktion bzw. Tangensfunktion und Kotangensfunktion sind zueinander komplementäre Funktionen oder **Kofunktionen**.

Wir beweisen den Satz für Argumente x im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (Bild A 26). Es gilt $\triangle\, OD_1P_1 \cong \triangle\, OD_2P_2$, denn es handelt sich um rechtwinklige Dreiecke mit kongruenten Winkeln bei 0. Außerdem ist die Hypotenuse in beiden Fällen gleich dem Radius des Kreises.



A 26

Folglich ist die Abszisse von P_2 gleich der Ordinate von P_1 und die Ordinate von P_2 gleich der Abszisse von P_1.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Den Beweis für beliebige Zahlen x führen wir hier nicht. Auf Grund der Definition von Tangens und Kotangens ergeben sich die Beziehungen für diese Funktion:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Aufgaben a 122 und 123

Die Tafeln der Winkelfunktionen

18

Die Winkelfunktionswerte lassen sich mit Mitteln der Mathematik, über die wir noch nicht verfügen, durch endliche Dezimalbrüche beliebig genau annähern. Die genauen Funktionswerte zu den meisten in der Tafel als endliche Dezimalbrüche gegebenen Argumenten sind irrationale Zahlen. Ausnahmen sind:

$\sin 0° = 0$; $\sin 30° = 0{,}5$; $\sin 90° = 1$
$\cos 0° = 1$; $\cos 60° = 0{,}5$; $\cos 90° = 0$
$\tan 0° = 0$; $\tan 45° = 1$; $\cot 45° = 1$; $\cot 90° = 0$

Obwohl wir also eigentlich z. B. $\sin 35° \approx 0{,}5736$ schreiben müßten, wollen wir doch stets wie bei den Logarithmen das Gleichheitszeichen verwenden. Das Gleichheitszeichen gibt dann die Gleichheit im Rahmen der Genauigkeit der vorliegenden Tafel wieder.

Auf Grund der Komplementbeziehung kann man für die Sinus- und die Kosinusfunktion bzw. für die Tangens- und die Kotangensfunktion jeweils eine gemeinsame Tafel benutzen.

12 Es gilt $\sin 42{,}6° = \cos 47{,}4°$, wegen $42{,}6° + 47{,}4° = 90°$.

(22) Untersuchen Sie, ob die in der Tafel für $\tan 60°$ und für $\sin 60°$ angegebenen Zahlen größer oder kleiner als die genauen Werte sind!

Sind die Winkel im Bogenmaß gegeben, so muß zunächst in das Gradmaß umgerechnet werden, um die Tafel verwenden zu können.

13 $\sin 0{,}2 \approx \sin 11{,}5°$

$\sin 11{,}5° = 0{,}1994$

$\operatorname{arc} \alpha = 0{,}2$

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \operatorname{arc} \alpha$$

$$= 57{,}3° \cdot 0{,}2 = 11{,}46°$$

Für die Logarithmen der Winkelfunktionen gibt es gesonderte Tafeln. In diesen Tafeln sind alle Logarithmen mit negativer Kennzahl auf die Kennzahl — 10 gebracht worden, die aus drucktechnischen Gründen im Tafelwerk fehlt. Es muß dort also jeweils — 10 ergänzt werden. Diese Tafeln ersparen ein zweimaliges Aufsuchen; denn sonst müßten wir zur Ermittlung von $\lg \sin x_1$ zunächst $\sin x_1$ aufsuchen und dann noch den Logarithmus von $\sin x_1$ aus der Logarithmentafel entnehmen.

14 Es ist ein Näherungswert für $\lg \sin 35°$ zu bestimmen.
Wir entnehmen der Tafel für die Logarithmen der Sinusfunktion
$\lg \sin 35° = 9{,}7586 - 10 = -0{,}2414$.
Zu dem gleichen Ergebnis würden wir durch zweimaliges Aufsuchen in zwei Tafeln kommen:
Aus der Tafel der Sinusfunktion entnehmen wir
$\sin 35° = 0{,}5736$.
Aus der Tafel für die Logarithmusfunktion entnehmen wir
$\lg 0{,}5736 = 9{,}7586 - 10$.

23 Begründen Sie, warum man für die Logarithmen der Kosinusfunktion die gleiche Tafel benutzen kann wie für die Logarithmen der Sinusfunktion!

Aufgaben a 124 bis 163

Winkel im Intervall $-5° \leqq \alpha \leqq 5°$

19

---

24 Fertigen Sie nach dem folgenden Schema eine Tabelle an!
($-10° \leqq \alpha \leqq 10°$, Maßzahl von α ganzzahlig)

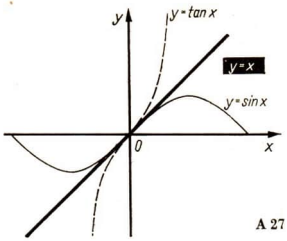
α	$\operatorname{arc} \alpha$	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\operatorname{arc} \alpha - \sin \alpha$	$\operatorname{arc} \alpha - \tan \alpha$

Man kann für dem Betrag nach kleine Winkel α ($-5° \leqq \alpha \leqq 5°$) innerhalb einer vorgegebenen Genauigkeit $\sin \alpha$ und $\tan \alpha$ durch $\operatorname{arc} \alpha$ ersetzen.

Es gilt: $\sin x \approx x \approx \tan x$ für $-0{,}0873 \leqq x \leqq 0{,}0873$

A

Geometrisch bedeutet diese Tatsache, daß die Sinus- und die Tangenskurven in hinreichend kleiner Umgebung des Nullpunktes, d. h. für dem Betrage nach kleine Argumente, angenähert wie $y = x$ verlaufen. Sie schneiden die x-Achse im Nullpunkt unter einem Winkel von 45° (Bild A 27).



A 27

Aufgabe a 164

Quadrantenbeziehungen

20

Zwischen Funktionswerten von Winkeln aus verschiedenen Quadranten gelten die folgenden sogenannten **Quadrantenbeziehungen**:

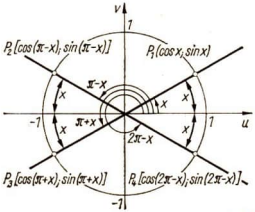
$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cot(\pi - x) = -\cot x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cot(\pi + x) = \cot x$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x \qquad \tan(2\pi - x) = -\tan x$$
$$\cos(2\pi - x) = \cos x \qquad \cot(2\pi - x) = -\cot x$$

$$\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2} \text{ für } \tan x\right)$$
$$\left(0 < x \leqq \frac{\pi}{2} \text{ für } \cot x\right)$$

Der Beweis für die Sinus- und Kosinusfunktion ergibt sich auf Grund der Gleichungen auf Seite 9. Wegen der Symmetrie gelten für die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 folgende Beziehungen (Bild A 28):



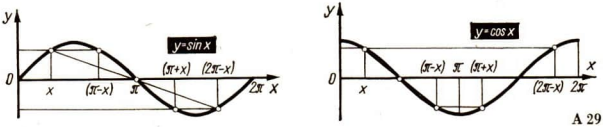
A 28

Durch Vergleich der Koordinaten von P_2 und P_1 ergibt sich:
$\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

Durch Vergleich der Koordinaten von P_3 und P_1 ergibt sich:
$\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

Durch Vergleich der Koordinaten von P_4 und P_1 ergibt sich:
$\sin(2\pi - x) = -\sin x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$.

(25) Entnehmen Sie die Quadrantenbeziehungen der graphischen Darstellung der Sinus- und Kosinusfunktion, indem Sie die Symmetrieeigenschaften der Kurven ausnutzen (Bild A 29)!



A 29

(26) Beweisen Sie durch Rückgang auf die Definition von Tangens und Kotangens (↗ Seite 19, Definition A 3) die Quadrantenbeziehungen für die Tangens- und Kotangensfunktion!

(27) Entnehmen Sie die Quadrantenbeziehungen der graphischen Darstellung der Tangens- und Kotangensfunktion im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$, indem Sie die Symmetrieeigenschaften der Kurven ausnutzen!

Aufgaben a 165 und 166

Gebrauch der Tafeln für beliebige Winkel

21

In der Tafel sind nur die Winkel α im Intervall $\langle 0°; 90° \rangle$ aufgeführt. Falls die Winkelfunktionswerte oder ihre Logarithmen von Winkeln im Intervall $(90°; 360°\rangle$ ermittelt werden sollen, müssen wir zunächst die Quadrantenbeziehungen anwenden. Wir führen dadurch die Funktionswerte im Intervall $(90°; 360°\rangle$ bzw. $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$ auf Funktionswerte von Winkeln im Intervall $\langle 0°; 90°\rangle$ bzw. $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ zurück.

1. Fall: $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$; $(90° \leqq \alpha \leqq 180°)$

15 $\alpha = 145° = 180° - 35°$
$\sin 145° = \sin(180° - 35°) = \sin 35°$
$\cos 145° = \cos(180° - 35°) = -\cos 35°$
$\tan 145° = \tan(180° - 35°) = -\tan 35°$
$\cot 145° = \cot(180° - 35°) = -\cot 35°$

2. Fall: $\pi \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi$; $(180° \leqq \alpha \leqq 270°)$

16 $\alpha = 227° = 180° + 47°$
$\sin 227° = \sin (180° + 47°) = -\sin 47°$
$\cos 227° = \cos (180° + 47°) = -\cos 47°$
$\tan 227° = \tan (180° + 47°) = \tan 47°$
$\cot 227° = \cot (180° + 47°) = \cot 47°$

3. Fall: $\frac{3}{2}\pi \leqq x \leqq 2\pi$; $(270° \leqq \alpha \leqq 360°)$

17 $\alpha = 314° = 360° - 46°$
$\sin 314° = \sin (360° - 46°) = -\sin 46°$
$\cos 314° = \cos (360° - 46°) = \cos 46°$
$\tan 314° = \tan (360° - 46°) = -\tan 46°$
$\cot 314° = \cot (360° - 46°) = -\cot 46°$

Sollen die Winkelfunktionswerte oder ihre Logarithmen von Winkeln über 360° ermittelt werden, so nutzen wir die Periodizität der Winkelfunktionen aus und wenden dann die Quadrantenbeziehungen an.

18 $\alpha = 817° = 2 \cdot 360° + 97°$
$\sin 817° = \sin (2 \cdot 360° + 97°) = \sin 97°$

Im Falle negativer Winkel nutzen wir die Eigenschaft der Winkelfunktionen, gerade bzw. ungerade zu sein.

19 $\alpha = -328°$
$\sin (-328°) = -\sin 328°$ $\quad$ $\tan (-328°) = -\tan 328°$
$\cos (-328°) = \cos 328°$ $\quad$ $\cot (-328°) = -\cot 328°$

Beide Überlegungen werden im folgenden Fall nacheinander angewandt.

20 $\sin (-1990°) = -\sin 1990°$
$= -\sin (5 \cdot 360° + 190°)$
$= -\sin 190°$
$= -\sin (180° + 10°)$
$= -(-\sin 10°)$
$= \sin 10°$

Da die Logarithmusfunktion nur für positive Zahlen definiert ist, existieren die Logarithmen der Winkelfunktionswerte nicht in jedem Fall.

21 **a) Wie lautet der Logarithmus von $\sin 1236°$?**

$\sin 1236° = \sin (3 \cdot 360° + 156°)$
$= \sin 156°$
$= \sin (180° - 24°)$
$= \sin 24°$
$\lg \sin 24° = 9{,}6093-10$
$= -0{,}3907$

b) Wie lautet der Logarithmus von $\tan 854°$?

$\tan 854° = \tan (2 \cdot 360° + 134°)$
$= \tan 134°$
$= \tan (180° - 46°)$
$= -\tan 46°$

Da $\tan 46°$ positiv ist, also $-\tan 46°$ negativ, ist der Logarithmus von $\tan 854°$ nicht definiert.

(28) Welche der folgenden Gleichungen ist lösbar und welche nicht?

a) $\lg \sin x = 4$
b) $\lg \tan x = 4$
c) $\lg \cos x = -0{,}3$
d) $\lg \cot x = 0$
e) $\lg \sin x = -20$
f) $\lg \cos x = 1$

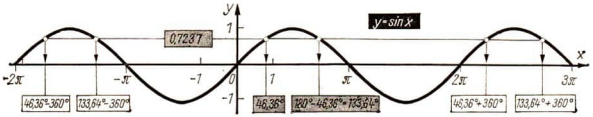
Aufgaben a 167 bis 195

A

Bestimmen der Winkel bei gegebenen Winkelfunktionswerten

22

22 Die Gleichung $\sin x = 0{,}7237$ ist zu lösen (Bild A 30).
Der Tafel für die Sinusfunktion entnehmen wir
$0{,}7230 = \sin 46{,}3°$
$0{,}7237 = \sin x$
$0{,}7242 = \sin 46{,}4°$



A 30

Wir erhalten einen Näherungswert für eine Lösung der Gleichung, indem wir denjenigen Winkel der Tafel wählen, dessen Funktionswert dem vorgegebenen Funktionswert am nächsten liegt, also $x \approx 46{,}4°$. Durch Interpolation kann man die Genauigkeit etwas erhöhen.

$0{,}7242 - 0{,}7230 = 0{,}0012$ entspricht $46{,}4° - 46{,}3° = 0{,}10°$
$0{,}7237 - 0{,}7230 = 0{,}0007$ entspricht $0{,}0y°$

$$\frac{y}{10} = \frac{7}{12}$$

$$y = \frac{7 \cdot 10}{12} = 6$$

Wir erhalten als Näherungswert $x = 46{,}36°$.
Die Gleichung $\sin x = 0{,}7237$ hat jedoch beliebig viele Lösungen. Da die Sinusfunktion die kleinste Periode 2π hat, sind alle Winkel
$x = 46{,}36° + k \cdot 360°$ (k ganzzahlig)
Lösungen der Gleichung. Es gibt außerdem im Intervall $90° \leqq x \leqq 180°$ einen Winkel, für den $\sin x = 0{,}7237$ gilt. Diesen Winkel erhält man durch folgende Überlegung.

Wegen der Quadrantenbeziehung ist $\sin 46{,}36° = \sin(180° - 46{,}36°) = \sin 133{,}64°$. Folglich ist $\sin 133{,}64° = 0{,}7237$ und damit $x = 133{,}64°$ eine weitere Lösung der Gleichung $\sin x = 0{,}7237$.

Alle Winkel
$x = 133{,}64° + k \cdot 360°$ (k ganzzahlig)
sind dann Lösungen der Gleichung. Weitere Lösungen gibt es nicht.

Die Gesamtheit der Lösungen der Gleichung
$\sin x = 0{,}7237$
besteht aus den Winkeln

$$\left.\begin{aligned} x &= 46{,}36° + k \cdot 360° \\ x &= 133{,}64° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\} \text{ (k ganzzahlig)}$$

23 Die Gleichung $\cos x = -0{,}4521$ ist zu lösen (Bild A 31).
Wir ermitteln zunächst eine Lösung für die Gleichung
$\cos \tilde{x} = 0{,}4521$
mit Hilfe der Tafel im Intervall $0° \leqq \tilde{x} \leqq 90°$.

$0{,}4524 = \cos 63{,}1°$
$0{,}4521 = \cos \tilde{x}$
$0{,}4509 = \cos 63{,}2°$

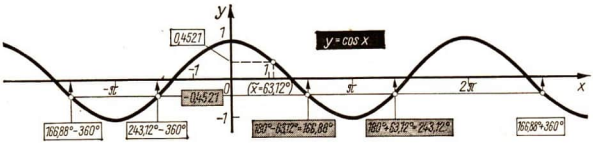
$\tilde{x} \approx 63{,}1°$

mit Interpolation
$\tilde{x} = 63{,}12°$

Interpolation:
$0{,}4524 - 0{,}4509 = 0{,}0015$ entspricht $0{,}10°$
$0{,}4524 - 0{,}4521 = 0{,}0003$ entspricht $0{,}0y°$

$$\frac{y}{10} = \frac{0{,}0003}{0{,}0015}$$

$$y = \frac{3}{15} \cdot 10 = 2$$



A 31

Wegen der Quadrantenbeziehung ist
$\cos(180° - 63{,}12°) = -\cos 63{,}12°$
und
$\cos(180° + 63{,}12°) = -\cos 63{,}12°$

Da $\cos 63{,}12° = 0{,}4521$ gilt, ist
$\cos 116{,}88° = -0{,}4521$
und
$\cos 243{,}12° = -0{,}4521$
und somit sind $x = 116{,}88°$ und $x = 243{,}12°$ Lösungen der Gleichung
$\cos x = -0{,}4521$.

Da die Kosinusfunktion die kleinste Periode 2π besitzt, besteht die Gesamtheit der Lösungen aus

$$\left.\begin{aligned} x &= 116{,}88° + k \cdot 360° \\ x &= 243{,}12° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\} \text{ (k ganzzahlig)}$$

24 Die Gleichung $\tan x = -3{,}435$ ist zu lösen (Bild A 32).
Wir lösen zunächst die Gleichung $\tan \tilde{x} = 3{,}435$ im Intervall $0° \leqq \tilde{x} \leqq 90°$.

$3{,}420 = \tan 73{,}7°$
$3{,}435 = \tan \tilde{x}$
$3{,}442 = \tan 73{,}8°$

$\tilde{x} \approx 73{,}8°$

Interpolation:
$0{,}022 \triangleq 0{,}10°$
$0{,}015 \triangleq 0{,}0y°$

$$\frac{y}{10} = \frac{15}{22}$$

$$y = \frac{15 \cdot 10}{22} \approx 7$$

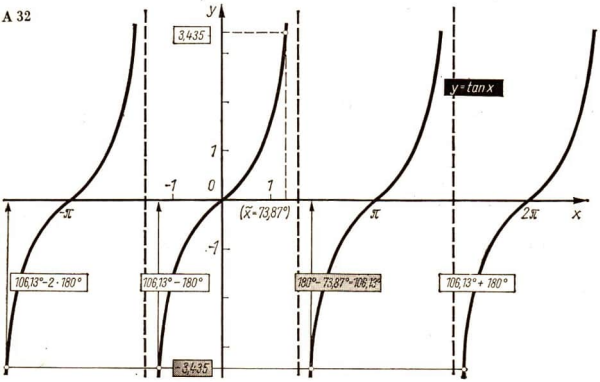
mit Interpolation
$\tilde{x} = 73{,}87°$

Wegen der Quadrantenbeziehung ist
$\tan(180° - 73{,}87°) = -\tan 73{,}87°$.

Da $\tan 73{,}87° = 3{,}435$ gilt, ist
$\tan 106{,}13° = -3{,}435$
und folglich
$x = 106{,}13°$
eine Lösung der Gleichung
$\tan x = -3{,}435$.

Da die Tangensfunktion die kleinste Periode π besitzt, besteht die Gesamtheit der Lösungen aus
$x = 106{,}13° + k \cdot 180°$ (k ganzzahlig)

A 32



25 Die Gleichung $\lg \sin x = -0{,}4230$ ist zu lösen.
Wir betrachten zunächst das Grundintervall $0° \leqq x \leqq 360°$. Als Lösung kommen nur Werte x in Frage, für die $\sin x$ positiv ist, d. h. die im Intervall $0° < x < 180°$ liegen.

A

Zur Anwendung der Tafel wird umgeformt: $-0{,}4230 = 9{,}5770 - 10$
$\lg \sin x = -0{,}4230 = 9{,}5770 - 10$
$x_1 = 22{,}2°$ (ohne Interpolation)
$x_2 = 180° - 22{,}2° = 157{,}8°$
Die Gesamtheit der Lösungen besteht aus
$$\left.\begin{aligned} x &= 22{,}2° + k \cdot 360° \\ x &= 157{,}8° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\} (k \text{ ganzzahlig})$$

26 Die Gleichung $\lg \cos x = -0{,}7385$ ist zu lösen.
Wir betrachten zunächst das Grundintervall $0° \leqq x \leqq 360°$.
Die Kosinusfunktion ist in den Intervallen $0° \leqq x < 90°$ und $270° < x \leqq 360°$ positiv. Umformung zur Anwendung der Tabelle: $-0{,}7385 = 9{,}2615 - 10$
$\lg \cos x = 9{,}2615 - 10$
$x_1 = 79{,}5°$ (ohne Interpolation)
$x_2 = 360° - 79{,}5° = 280{,}5°$
Die Gesamtheit der Lösungen besteht aus
$$\left.\begin{aligned} x &= 79{,}5° + k \cdot 360° \\ x &= 280{,}5° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\} (k \text{ ganzzahlig})$$

27 Die Gleichung $\lg \cot x = 1{,}523$ ist zu lösen.
Wir betrachten zunächst das Grundintervall der Kotangensfunktion $0° < x < 180°$.
Die Kotangensfunktion ist im Intervall $0° < x \leqq 90°$ positiv.
Näherungswert aus der Tafel $x = 1{,}7°$
Die Gesamtheit der Lösungen besteht aus
$x = 1{,}7° + k \cdot 180°$ (k ganzzahlig)

Aufgaben a 196 bis 244

B. Körperberechnung

Seite
38 Zur Wiederholung
40 Pyramidenstümpfe
42 Gerade Kegelstümpfe
44 Kugelteile

B

Für die kurzfristige Lagerung von Zement, Futter, Zuschlagstoffen in Industriebetrieben, in der Landwirtschaft und an Baustellen setzen sich Silos durch, die ein schnelles Füllen und Entleeren ermöglichen. Auch für den Transport zahlreicher Güter werden in immer größerem Umfang Behälter eingesetzt, die ein schnelles wechselseitiges Umsetzen zwischen Lkw, Eisenbahn und Schiff ermöglichen. Dabei kommt es auf eine optimale Konstruktion, d. h. auf ein günstiges Verhältnis von Volumen und Materialaufwand und auf günstige Transportfähigkeit an.

Zur Wiederholung

1

In den Formeln für die Körperberechnung stehen die Variablen für **Größenangaben** (Volumina, Flächeninhalte, Längen). Eine Größenangabe wird formal als Produkt aus *Maßzahl* und *Einheit* aufgefaßt, wobei die Maßzahl von der verwendeten Einheit abhängt.

1 Grundflächeninhalt: $A_G = 1200\ \text{mm}^2 = 12\ \text{cm}^2 = 0{,}12\ \text{dm}^2$

B

Im folgenden bedeuten:

a, b, c	Kanten	A_G	Grundflächeninhalt
h	Körperhöhe	A_M	Mantelinhalt
s	Mantellinie	A_O	Oberflächeninhalt
r	Kreis(Kugel-)radius	V	Volumen (Rauminhalt)
d	Kreis(Kugel-)durchmesser		

Die Formeln zur Körperberechnung können als Funktionsgleichungen aufgefaßt werden.

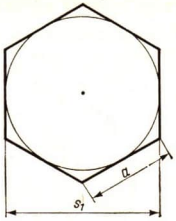
2 **a)** Die Gleichung $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ mit der unabhängigen Variablen r ist die Gleichung einer Potenzfunktion. Durch die Funktionsgleichung werden Zahlen aus dem Definitionsbereich für r eindeutig Zahlen aus dem Wertevorrat für V zugeordnet.

b) In der Gleichung $A_M = 2\pi r h$ treten zwei unabhängige Variablen, r und h, auf. Durch die Funktionsgleichung werden Zahlenpaaren $(r; h)$ aus dem Definitionsbereich eindeutig Zahlen aus dem Wertevorrat für A_M zugeordnet.[1]

Bei der Körperberechnung werden Oberflächeninhalte und Volumina mit Hilfe von **Konstanten** $\left(\text{z. B. } \frac{1}{3}, \pi\right)$ und Streckenlängen errechnet. Für praktische Übungen ist es günstig, solche Formeln zu wählen, bei denen alle erforderlichen Stücke unmittelbar gemessen werden können. So wird beispielsweise beim regelmäßigen sechsseitigen Prisma (Sechskantprofil) statt der Grundkante a die Schlüsselweite s_1 verwendet, die gleich dem Durchmesser des Inkreises ist (Bild B 1).

1 Geben Sie Formeln für den Oberflächeninhalt und das Volumen für **a)** die Kugel, **b)** den Zylinder, **c)** das gerade, regelmäßige sechsseitige Prisma an, und zwar so, daß alle erforderlichen Stücke unmittelbar gemessen werden können!

1 Derartige Funktionsgleichungen werden bis zur 12. Klasse nicht untersucht.



B 1

Bei Berechnungen wird so lange wie möglich nur mit Variablen gearbeitet. Vor dem Einsetzen müssen die Einheiten der Größenangaben aufeinander abgestimmt werden.

B

3 Das Volumen einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche soll genau 1 dm^3 betragen. Die Höhe soll eine Länge von 10 cm haben, eine Grundkante soll eine Länge von 20 cm haben. Es soll die Länge der anderen Grundkante berechnet werden.

Gegeben: $V = 1\ dm^3$; $h = 10\ cm$; $a = 20\ cm$. *Gesucht:* b.

Abstimmen der Einheiten: $V = 1000\ cm^3$, $h = 10\ cm$, $a = 20\ cm$

$$V = \frac{1}{3} A_G\, h \qquad \Big| \qquad A_G = a \cdot b$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$$

$$b = \frac{3\,V}{a \cdot h} = \frac{3 \cdot 1000\ cm^3}{20\ cm \cdot 10\ cm} = \frac{3000}{20 \cdot 10}\ cm = 15\ cm$$

Ergebnis: Die andere Grundkante hat eine Länge von 15 cm.

Aufgaben b 1 bis 6

2

Bei allen Berechnungen mit Näherungswerten (z. B. allen durch Messung ermittelten Größenangaben) richtet sich die Anzahl der geltenden Ziffern im Ergebnis nach der Anzahl der geltenden Ziffern in den Näherungswerten. Der Näherungswert mit der geringsten Genauigkeit entscheidet über die Genauigkeit des Ergebnisses.

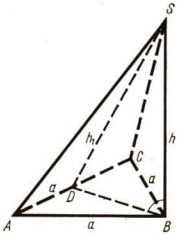
4 Bei einer schiefen Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 6{,}0$ cm ist, befinde sich die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche, in der Höhe $h = 8{,}0$ cm. Es sollen **a)** der Oberflächeninhalt, **b)** das Volumen berechnet werden.

Lösung:
Zur Berechnung des Mantelinhalts wird die Höhe h_1 der einen Seitenfläche benötigt (Bild B 2).

$$h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + h^2 = \frac{3a^2}{4} + h^2$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + h^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 36}{4}\,\text{cm}^2 + 64\,\text{cm}^2}$$

$$= \sqrt{91\,\text{cm}^2} \approx 9{,}539\,\text{cm}$$



B 2

Da im Radikanden zwei geltende Ziffern vorhanden sind, kommen für das Ergebnis ebenfalls zwei geltende Ziffern in Betracht. Bei Zwischenergebnissen ist es jedoch üblich, eine Ziffer mehr zu berücksichtigen.
Ergebnis: $h_1 \approx 9{,}54$ cm.

B

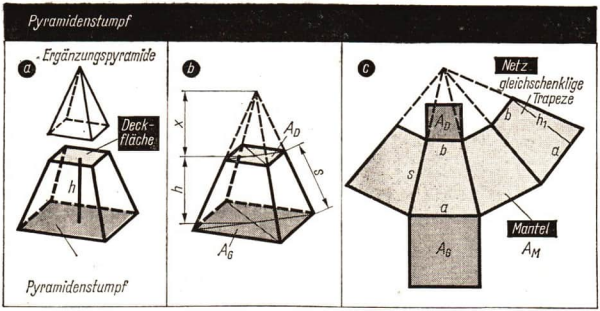
(2) Führen Sie die weitere Berechnung zum Beispiel B 4 selbst durch!

Aufgaben b 7 bis 30

Pyramidenstümpfe

3

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so zerfällt sie in einen **Pyramidenstumpf** und die zum Stumpf gehörende *Ergänzungspyramide* (Bild B 3 a). Der Abstand der Grundfläche von der Deckfläche ist die Höhe h des Pyramidenstumpfes.



B 3

③ Beweisen Sie, daß Grund- und Deckfläche des Pyramidenstumpfes ähnliche Vielecke sind!
Anleitung: Wenden Sie den Strahlensatz auf jedes Strahlenbüschel an, das in einer Seitenfläche liegt!

Für die Berechnung des Oberflächeninhalts A_O und des Volumens V eines Pyramidenstumpfes gilt:

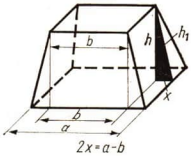
▶ 1 $$\boxed{A_O = A_G + A_D + A_M}$$ $$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D\right)}$$

Die Volumenformel wird hier nicht bewiesen.

④ Drücken Sie mit Worten aus, wie man nach dieser Formel das Volumen eines Pyramidenstumpfes berechnen kann!

5 Der Stumpf einer geraden quadratischen Pyramide habe die Grundkanten $a = 4{,}00$ m, die Deckkanten $b = 2{,}00$ m und die Höhe $h = 1{,}50$ m. Es sollen der Oberflächeninhalt und das Volumen berechnet werden.

Lösung:
Die Flächenhöhe der gleichschenkligen Trapeze kann mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS errechnet werden (Bild B 4).



B 4

$$h_1 = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{2{,}25\ \text{m}^2 + 1\ \text{m}^2} = \sqrt{3{,}25\ \text{m}^2} \approx 1{,}80\ \text{m}$$

$$A_M = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h_1 = 2h_1\,(a+b) = 3{,}60\ \text{m} \cdot 6{,}00\ \text{m} = 21{,}6\ \text{m}^2$$

$$A_O = A_G + A_D + A_M = 16{,}0\ \text{m}^2 + 4{,}0\ \text{m}^2 + 21{,}6\ \text{m}^2 = 41{,}6\ \text{m}^2$$

$$V = \frac{h}{3}\,(A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D)$$
$$= 0{,}50\ \text{m}\ (16{,}0\ \text{m}^2 + \sqrt{16{,}0\ \text{m}^2 \cdot 4{,}0\ \text{m}^2} + 4{,}0\ \text{m}^2)$$
$$= 0{,}50\ \text{m} \cdot 28{,}0\ \text{m}^2 = 14{,}0\ \text{m}^3$$

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt beträgt 41,6 m² und das Volumen 14,0 m³.

⑤ Wie könnten bei einem Stumpf einer geraden gleichseitig-dreieckigen Pyramide der Oberflächeninhalt und das Volumen bestimmt werden?

Aufgaben b 31 bis 35

Gerade Kegelstümpfe

4

Wird ein gerader Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so erhält man einen geraden Kegelstumpf und den Ergänzungskegel des Stumpfes (Bild B 5 a).
Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche ist die Höhe h des Kegelstumpfes. Der Mantel ist in die Ebene abwickelbar (Bild B 5 c). Der Inhalt des Kegelstumpfmantels ist die Differenz der Flächeninhalte zweier Kreissektoren. Dabei ist der eine Sektor die Abwicklung des Mantels des Vollkegels mit dem Radius r_1 und der Mantellinie $(s + s_2)$, der andere ist die Abwicklung des Mantels des Ergänzungskegels mit dem Radius r_2 und der Mantellinie s_2.

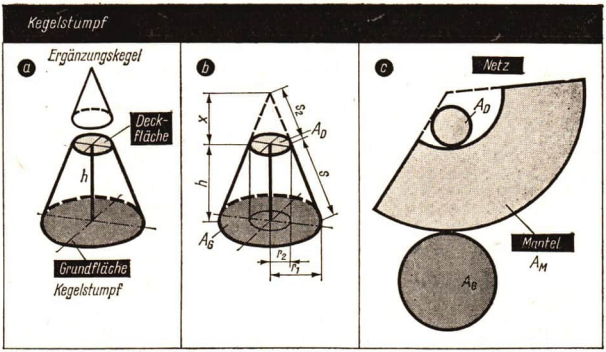
$$A_M = \pi r_1 (s + s_2) - \pi r_2 s_2$$
$$A_M = \pi r_1 s + \pi r_1 s_2 - \pi r_2 s_2 \qquad (1)$$

In dieser Formel kommt die Größe s_2 vor, die am Kegelstumpf nicht auftritt. Sie kann aber eliminiert werden, denn nach dem Strahlensatz gilt die Proportion:

$$r_1 : r_2 = (s + s_2) : s_2$$
$$r_1 s_2 = r_2 s + r_2 s_2 \qquad (2)$$

Wir setzen (2) in (1) ein und erhalten:

$$A_M = \pi r_1 s + \pi (r_2 s + r_2 s_2) - \pi r_2 s_2$$
$$A_M = \pi r_1 s + \pi r_2 s + \pi r_2 s_2 - \pi r_2 s_2$$
$$A_M = \pi r_1 s + \pi r_2 s$$

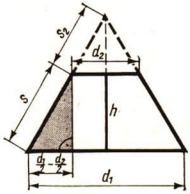


B 5

$$A_M = \pi\, s\,(r_1 + r_2) \text{ oder } A_M = \frac{\pi\, s}{2}\,(d_1 + d_2)$$

(6) Zeichnen Sie die Abwicklung des Kegelstumpfes mit den Radien $r_1 = 3{,}0$ cm, $r_2 = 2{,}0$ cm und der Höhe $h = 4{,}0$ cm! Stellen Sie daraus das Flächenmodell des Kegelstumpfes her!

[6] Der Stumpf eines geraden Kreiskegels (Bild B 6) hat als oberen Durchmesser $d_2 = 108$ mm, als unteren $d_1 = 180$ mm und als Höhe $h = 48$ mm. Es soll der Oberflächeninhalt berechnet werden.



B 6

Lösung:

$$A_O = \frac{\pi}{4}\,d_1^2 + \frac{\pi}{4}\,d_2^2 + \frac{\pi}{2}\,s\,(d_1 + d_2)$$

Die Mantellinie s erhalten wir aus der Beziehung

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2$$

$$s^2 = 48^2\,\text{mm}^2 + \left(\frac{180\text{ mm}}{2} - \frac{108\text{ mm}}{2}\right)^2 = 2304\,\text{mm}^2 + 1296\,\text{mm}^2 = 3600\,\text{mm}^2$$

$$s = 60\text{ mm}$$

$$A_O = \frac{\pi}{4}\cdot 180^2\,\text{mm}^2 + \frac{\pi}{4}\cdot 108^2\,\text{mm}^2 + \frac{\pi}{2}\cdot 60\,(180 + 108)\,\text{mm}^2$$

$$A_O = 25\,450\text{ mm}^2 + 9161\text{ mm}^2 + 27\,140\text{ mm}^2 = 61\,751\text{ mm}^2$$

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt beträgt rund 617,5 cm².

5

Das Volumen des Kegelstumpfes ergibt sich als Differenz der Volumina des zum Stumpf gehörenden Vollkegels und des Ergänzungskegels (Bild B 5 b).

$$V = \frac{\pi}{3}\,r_1^2\cdot(h + x) - \frac{\pi}{3}\,r_2^2\cdot x$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left[r_1^2 h + x\,(r_1^2 - r_2^2)\right]$$

Die Höhe x wird mit Hilfe des Strahlensatzes durch r_1, r_2 und h ausgedrückt:

$$x : r_2 = (h + x) : r_1$$

$$x = \frac{h\cdot r_2}{r_1 - r_2}$$

Damit wird

$$V = \frac{\pi}{3}\left[r_1^2 h + \frac{h r_2}{r_1 - r_2} \cdot (r_1^2 - r_2^2)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left[r_1^2 h + h r_2 (r_1 + r_2)\right].$$

3 $$\boxed{V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \text{ oder } V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)}$$

(7) Setzen Sie in der Volumenformel und in der Mantelinhaltsformel für den Kegelstumpf **a)** $r_1 = r_2$, **b)** $r_2 = 0$! Deuten Sie das Ergebnis!

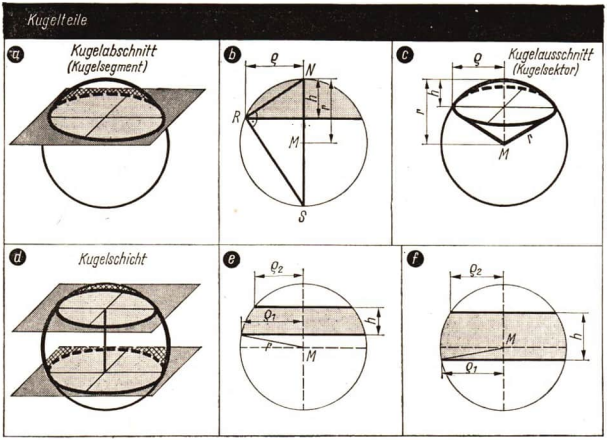
Aufgaben b 36 bis 41

B

Kugelteile

6

Jede Schnittebene durch eine Kugel zerlegt diese in zwei **Kugelabschnitte** oder **Kugelsegmente** (Bild B 7 a). Der krummflächige Teil der Segmentoberfläche heißt **Kugelkappe** oder **Kalotte.**



B 7

Nach dem Höhensatz gilt (Bild B 7 b):
$\varrho^2 = h\,(2r - h)$
und nach Umformung
$h^2 - 2rh + \varrho^2 = 0.$

(8) Lösen Sie die vorstehende Gleichung einmal nach h und dann nach r auf! Begründen Sie, warum sich für h zwei Werte ergeben!

In dieser Lerneinheit werden die Flächeninhalts- und Volumenformeln ohne Beweis mitgeteilt.

4 **Kugelabschnitt:**

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3}\,h^2\,(3r - h) \quad \text{oder} \quad V = \frac{\pi}{6}\,h^2\,(3d - 2h)}$$

5 **Kugelkappe:**

$$\boxed{A_M = 2\pi\,rh \quad \text{oder} \quad A_M = \pi\,dh}$$

(9) Zeigen Sie, daß die Formel für das Kugelvolumen als Spezialfall für $h = 2r$ aus der Formel für das Volumen eines Kugelsegments hervorgeht!

Das Bild B 7 c zeigt einen **Kugelausschnitt** oder **Kugelsektor**. Die Höhe h des Kugelsegments gilt zugleich als Höhe des zugehörigen Kugelsektors.

6 **Kugelausschnitt:**

$$\boxed{V = \frac{2\pi}{3}\,r^2h \quad \text{oder} \quad V = \frac{\pi}{6}\,d^2h}$$

(10) **a)** Für welchen Sektor einer Kugel mit dem Radius r ist der Flächeninhalt einer Kugelkappe flächengleich dem Mantelinhalt seines Ergänzungskegels?

b) Wie nennt man einen Kugelabschnitt, bei dem die Höhe h gleich r ist?
Wie nennt man einen Kugelabschnitt, bei dem die Höhe gleich $2r$ ist?

7

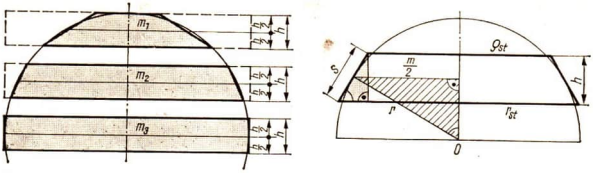
Wird eine Kugel von zwei zueinander parallelen Ebenen geschnitten, so wird der zwischen den Ebenen liegende Körper als **Kugelschicht** bezeichnet (Bild B 7 d). Der gekrümmte Mantel der Kugelschicht heißt **Kugelzone.**

Je nachdem, ob der Mittelpunkt innerhalb oder außerhalb liegt (Bild B 7 e, f), gilt:

$$h = \sqrt{r^2 - \varrho_2^{\,2}} \pm \sqrt{r^2 - \varrho_1^{\,2}} \qquad (\varrho_2 \leqq \varrho_1)$$

7 **Kugelschicht:**

$$\boxed{V = \frac{\pi}{6}\,h\,(3\,\varrho_1^{\,2} + 3\varrho_2^{\,2} + h^2)}$$



B 8

8 **Kugelzone:**

$$\boxed{A_M = 2\pi rh \text{ oder } A_M = \pi dh}$$

B

(11) **a)** Für $\varrho_2 = 0$ wird die Kugelschicht zum Kugelabschnitt.
Bestimmen Sie auf diese Weise sein Volumen!
Anleitung: Drücken Sie ϱ_1 durch die Größen r und h aus (Bild B 7b)!

b) Die Formeln für den Flächeninhalt einer Kugelkappe und einer Kugelzone bei gleicher Höhe h und gleichem Radius r sind gleich. Welche geometrische Bedeutung ergibt sich aus dieser Gleichheit (Bild B 8)?

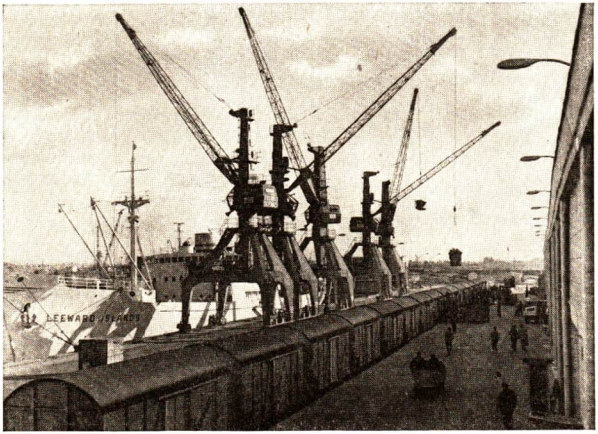
Aufgaben b 42 bis 52

C. Trigonometrie

Seite

48 Anwenden der Winkelfunktionen auf das rechtwinklige Dreieck
50 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck
51 Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck
52 Berechnungen am regelmäßigen n-Eck
53 Anwendungsaufgaben
55 Beliebige ebene Dreiecke, der Sinussatz
57 Die Flächenformeln
59 Der Kosinussatz
60 Berechnungen an beliebigen ebenen Dreiecken
62 Anwendungsaufgaben
64 Zur Geschichte der Trigonometrie

Der Überseehafen Rostock ist mit modernen Drehbockkränen aus dem VEB Kranbau Eberswalde ausgerüstet. Diese Kräne ermöglichen wegen ihrer großen Beweglichkeit einen schnellen Warenumschlag.
Die Tragfähigkeit eines Kranes hängt von der Stellung des Auslegers ab. Die Druck- bzw. Zugkräfte in Ausleger und Abspannseilen ändern ihre Größe bei Veränderung dieser Stellung auch dann, wenn die Belastung des Kranes konstant bleibt. Berechnungen hierzu können wir mit den Mitteln der Trigonometrie durchführen.



C

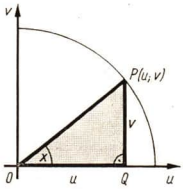
Anwenden der Winkelfunktionen auf das rechtwinklige Dreieck

1

Das Dreieck OQP im Bild C 1 ist rechtwinklig. In bezug auf den Winkel QOP werden $\overline{PQ}$ als **Gegenkathete** und $\overline{OQ}$ als **Ankathete** bezeichnet. Nach den Definitionen A 2 auf Seite 8 gilt dann für spitze Winkel mit dem Maß x:

$$\sin x = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} \qquad (1\,a)$$

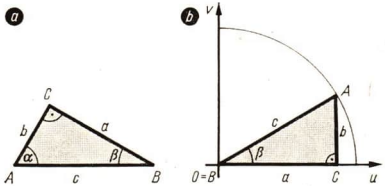
$$\cos x = \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} \qquad (1\,b)$$



C 1

Diese Beziehungen gelten allgemein für rechtwinklige Dreiecke. So kann z. B. das Dreieck ABC im Bild C 2 a so transformiert werden, daß B mit dem Koordinatenursprung O eines rechtwinkligen uv-Koordinatensystems zusammenfällt und a in der positiven u-Achse liegt (Bild C 2 b). Um B wird der Kreis mit dem Radius c gezeichnet. Auf Grund von (1 a) gilt dann: $\sin \beta = \frac{b}{c}$.

(1) Transformieren Sie das Dreieck ABC im Bild C 2 so, daß der Punkt A auf O zu liegen kommt und b in der positiven u-Achse liegt!



C 2

1 **SATZ: Im rechtwinkligen Dreieck ist der *Sinus* eines spitzen Winkels der Quotient aus der Länge der Gegenkathete dieses Winkels und der Länge der Hypotenuse.**

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	$\sin \beta = \frac{b}{c}$

$(\gamma = 90°)$

SATZ: Im rechtwinkligen Dreieck ist der *Kosinus* eines spitzen Winkels der Quotient aus der Länge der Ankathete dieses Winkels und der Länge der Hypotenuse.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$

($\gamma = 90°$)

Da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist, gelten im rechtwinkligen Dreieck unter Benutzung von (1a) und (1b) für spitze Winkel x die Beziehungen

$$\tan x = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}}; \quad \cot x = \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Gegenkathete}} \qquad (2a; 2b)$$

2 **SATZ: Im rechtwinkligen Dreieck ist der *Tangens* eines spitzen Winkels der Quotient aus der Länge der Gegenkathete und der Länge der Ankathete dieses Winkels.**

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$\tan\beta = \frac{b}{a}$

($\gamma = 90°$)

SATZ: Im rechtwinkligen Dreieck ist der *Kotangens* eines spitzen Winkels der Quotient aus der Länge der Ankathete und der Länge der Gegenkathete dieses Winkels.

$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$\cot\beta = \frac{a}{b}$

($\gamma = 90°$)

C

2

Auf Grund der Sätze C 1 und C 2 gelten im rechtwinkligen Dreieck folgende Beziehungen:

3

$a : c = \sin\alpha = \cos\beta$	$b : c = \cos\alpha = \sin\beta$
$a : b = \tan\alpha = \cot\beta$	$b : a = \cot\alpha = \tan\beta$

(jeweils $\gamma = 90°$)

Im rechtwinkligen Dreieck sind im Falle $\gamma = 90°$ die Winkel α und β *Komplementwinkel* (↗ Seite 27, Satz A 10).

(2) Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Formel

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\, c^2 \sin\alpha \, \cos\alpha}$$

berechnet werden kann! Gehen Sie hierzu von der Formel $A = \frac{1}{2}\, ab$ aus, und wenden Sie die im Satz C 1 aufgeführten Formeln an!

Aufgaben c 1 und 2

Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

3

Da im rechtwinkligen Dreieck immer der rechte Winkel gegeben ist, sind zur Berechnung dieses Dreiecks nur noch zwei weitere Stücke nötig. Gehen wir dabei nur von den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ aus, so können wir vier Grundaufgaben unterscheiden, bei denen die Dreiecke eindeutig konstruierbar sind (Kongruenzsätze) und die fehlenden Stücke eindeutig berechenbar sind.

Gegeben sind
1) die Hypotenuse und ein Winkel,
2) eine Kathete und ein Winkel,
3) eine Kathete und die Hypotenuse,
4) die beiden Katheten.

C

(3) Stellen Sie für das Dreieck im Bild C 2a alle möglichen Fälle zusammen!

Die Berechnung wird durch die Verwendung der Logarithmentafel oder des Rechenstabes vereinfacht.

1 (1. Fall der obigen Zusammenstellung):
Gegeben: $c = 51{,}90$ m; $\alpha = 52{,}55°$.
Gesucht: **1)** a (in m); **2)** b (in m); **3)** β (in Grad); **4)** A (in m²).
Lösung: Bei der Genauigkeit von vier geltenden Ziffern ist Tafelrechnen nötig.

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$a = c \cdot \sin\alpha$
$a = 51{,}90 \text{ m} \cdot \sin 52{,}55°$
$a = 41{,}21 \text{ m}$

2) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$b = c \cdot \cos\alpha$
$b = 51{,}90 \text{ m} \cdot \cos 52{,}55°$
$b = 31{,}56 \text{ m}$

3) $\beta = 90° - \alpha$
$\beta = 90° - 52{,}55° = 37{,}45°$

n	$\lg n$
51,90 sin 52,55°	1,7152 0,8998 — 1 } (+)
41,21	1,6150
51,90 cos 52,55°	1,7152 0,7839 — 1 } (+)
31,56	1,4991

4) $A = \frac{1}{2}\,ab$

$A = \frac{1}{2} \cdot 41{,}21\text{ m} \cdot 31{,}56\text{ m}$

$A = 650{,}3\text{ m}^2$

n	$\lg n$
0,5	0,6990 — 1
41,21	1,6150
31,56	1,4991
650,3	2,8131

(+)

Ergebnis: $a = 41{,}21$ m; $b = 31{,}56$ m; $\beta = 37{,}45°$; $A = 650{,}3$ m²

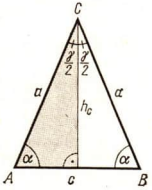
Zur Kontrolle der rechnerisch ermittelten Lösungen kann eine maßstäbliche Zeichnung angefertigt werden. Im vorliegenden Fall empfiehlt sich eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000.

Aufgaben c 3 und 4

Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck

4

Ein gleichschenkliges Dreieck kann durch seine Symmetrieachse in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden (Bild C 3). Die Berechnung fehlender Stücke im gleichschenkligen Dreieck kann also auf die Berechnung der Seiten und Winkel im rechtwinkligen Dreieck zurückgeführt werden.



C 3

2 *Gegeben:* $a = b = 15{,}2$ cm; $\gamma = 76{,}8°$.

Gesucht: **1)** α (in Grad); **2)** c (in cm); **3)** A (in cm²).

Lösung: Bei der Genauigkeit von drei geltenden Ziffern reicht die Genauigkeit des Rechenstabes aus. Deshalb wird das kombinierte Tafel-Stab-Verfahren angewendet.

1) $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$

$\alpha = 90° - 38{,}4° = 51{,}6°$

2) $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} : a = \frac{c}{2a}$

$c = 2a \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$

$c = 2 \cdot 15{,}2\text{ cm} \cdot \sin 38{,}4°$

$c \approx 2 \cdot 15{,}2\text{ cm} \cdot 0{,}621 \approx 18{,}9\text{ cm}$

3) $A = \frac{1}{2}\,ch_c \qquad h_c = a \cdot \sin\alpha$

$A = \frac{1}{2}\,ca \cdot \sin\alpha \approx \frac{1}{2} \cdot 18{,}9\text{ cm} \cdot 15{,}2\text{ cm} \cdot \sin 51{,}6°$

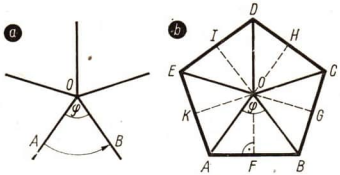
$A \approx \frac{18{,}9 \cdot 15{,}2 \cdot 0{,}784}{2}\text{ cm}^2 \approx 112{,}6\text{ cm}^2$

Ergebnis: $\alpha = 51{,}6°$; $c = 18{,}9$ cm; $A = 112{,}6$ cm²

Aufgaben c 5 bis 9

Berechnungen am regelmäßigen n-Eck
5

Von einem Punkt O aus seien n Strahlen in einer Ebene so gezogen, daß je zwei nebeneinanderliegende Strahlen einen Winkel von $\varphi = \frac{360°}{n}$ miteinander bilden. Wird diese Figur, wie im Bild C 4a angedeutet, um den Punkt O um den Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ gedreht, so geht sie in sich über.



C 4

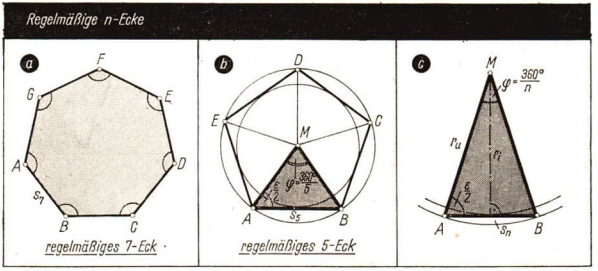
Verbinden wir die im Bild C 4 angegebenen entsprechenden Punkte A, B, C, D, E der Reihe nach miteinander durch Strecken, so entsteht ein Vieleck, in dem alle Seiten und Winkel einander gleich sind, denn sie gelangen durch Drehung um den Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ zur Deckung (Bild C 4b).

Ein Vieleck, dessen Seiten und Winkel untereinander gleich sind, heißt **regelmäßig**. Dreht man das regelmäßige Vieleck $ABCDE$ um den Punkt O um den Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ oder um Vielfache davon, so gelangen nicht nur seine Seiten und Winkel zur Deckung, sondern es decken sich auch die Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, ..., $\overline{OE}$ und ebenso die von O auf die Seiten gefällten Lote $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, ..., $\overline{OK}$. Der Punkt O ist demnach von allen Eckpunkten und allen Seiten des regelmäßigen Vielecks jeweils gleich weit entfernt.

Allgemein gilt:

4 **Jedem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis umbeschreiben (Umkreis) und ein Kreis einbeschreiben (Inkreis), für den die Seiten Tangenten bzw. Sehnen sind.**

Ein regelmäßiges n-Eck kann in n gleichschenklige, untereinander kongruente Teildreiecke zerlegt werden (Bild C 5). Ein solches Teildreieck wollen wir *Bestimmungsdreieck* des regelmäßigen Vielecks nennen.



C 5

3 *Gegeben* ist die Seite eines regelmäßigen Zwölfecks mit $s_{12} = 6{,}41$ dm.
Gesucht sind: **1)** ε (in Grad); **2)** r_u (in dm); **3)** r_i (in dm); **4)** u_{12} (in dm); **5)** A_{12} (in dm²). (Zur Vereinfachung wird im folgenden $s_{12} = s$ gesetzt.)
Lösung: Wir wenden das Tafel-Stab-Verfahren an.

1) $\frac{\varepsilon}{2} = 90° - \frac{\varphi}{2}$; $\varphi = \frac{360°}{12} = 30°$

$\varepsilon = 180° - \varphi$

$\varepsilon = 180° - 30° = 150°$

2) $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2} : r_u$

$$r_u = \frac{s}{2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}} \approx \frac{6{,}41}{2 \cdot 0{,}259 \text{ dm}} \approx 12{,}4 \text{ dm}$$

3) $\cot\frac{\varphi}{2} = r_i : \frac{s}{2}$

$r_i = \frac{s}{2} \cdot \cot\frac{\varphi}{2}$

$r_i \approx \frac{6{,}41 \cdot 3{,}73}{2}$ dm

$r_i \approx 12{,}0$ dm

4) $u_{12} = 12\,s$

$u_{12} = 12 \cdot 6{,}41$ dm

$u_{12} = 76{,}92$ dm $\approx 76{,}9$ dm

5) $A_{12} = 12 \cdot \frac{1}{2}\, s r_i$

$A_{12} \approx 6 \cdot 6{,}41 \text{ dm} \cdot 12{,}0 \text{ dm} \approx 462 \text{ dm}^2$

Ergebnis: $\varepsilon = 150°$; $r_u \approx 12{,}4$ dm; $r_i \approx 12{,}0$ dm; $u_{12} \approx 76{,}9$ dm; $A_{12} \approx 462$ dm²

Aufgaben c 10 bis 14

C

Anwendungsaufgaben

6

Bei der Lösung von Anwendungsaufgaben mit Hilfe der Trigonometrie sucht man zunächst nach einem für die Berechnung geeigneten rechtwinkligen Dreieck.

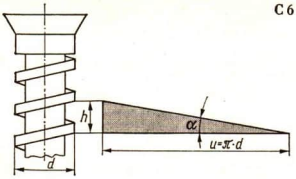
4 Welchen Anstiegswinkel hat eine Schraube mit metrischem Gewinde, deren Gewindedurchmesser $d = 11{,}4$ mm und deren Ganghöhe $h = 2{,}00$ mm beträgt?

Lösung: Aus Bild C 6 ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{h}{\pi d}$$

$$\tan\alpha = \frac{2{,}0\ \text{mm}}{\pi \cdot 11{,}4\ \text{mm}}.$$

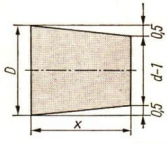
Mit Hilfe des Rechenstabs berechnet man $\tan\alpha = 0{,}0559$ und liest in der Tafel ab: $\alpha = 3{,}2°$.



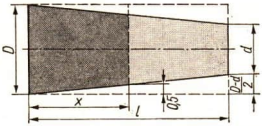
C 6

Ergebnis: Die Schraube hat einen Anstiegswinkel von 3,2°.

In der Technik wird die Gestalt eines konischen Zapfens durch die Fachbezeichnung „Kegel $1 : x$" angegeben. Das bedeutet, daß der Durchmesser D sich auf einer Zapfenlänge von x mm um 1 mm vermindert (Bild C 7a). Der Kegel im Bild C 7b hat die Länge l. Er verjüngt sich von D auf d, d. h. um $(D - d)$. Wendet man den Strahlensatz auf die Figur im Bild C 7b an, so gilt:
$1 : x = (D - d) : l$.



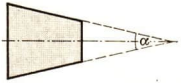
C 7a



C 7b

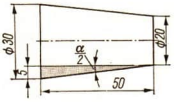
Die Verjüngung beträgt also $v = \dfrac{D - d}{l}$.

Die Gestalt und damit die Verjüngung kann durch den Öffnungswinkel α gekennzeichnet werden (Bild C 8).



C 8

5 Der im Bild C 9 dargestellte Bolzen soll auf einer Drehmaschine gedreht werden. Wie groß ist der Kegelwinkel α?



C 9

Lösung: Allgemein gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{D - d}{2} : l = \frac{1}{2} \cdot \frac{D - d}{l},$$

d. h., der Tangens des halben Kegelwinkels ist gleich der halben Verjüngung.

Im vorliegenden Fall ist $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$.

Aus der Tafel ergibt sich $\dfrac{\alpha}{2} \approx 5{,}71°$ und damit $\alpha \approx 11{,}42°$.

Ergebnis: Der Kegelwinkel beträgt etwa 11,42°.

Aufgaben c 15 bis 50

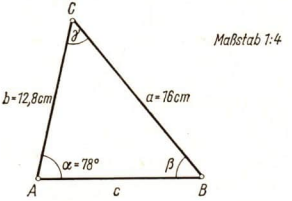
Beliebige ebene Dreiecke, der Sinussatz

7

Jedes ebene Dreieck können wir durch wenigstens eine geeignete Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Wir können also auch jedes nichtrechtwinklige Dreieck mit den bisherigen Mitteln berechnen, indem wir eine solche Zerlegung anwenden.

(4) Entnehmen Sie dem Bild C 10 die Maße eines spitzwinkligen Dreiecks, und berechnen Sie die Länge der Seite c, die Größe der Winkel β und γ sowie den Flächeninhalt A!

Es ist nun rationeller, für die Berechnung beliebiger ebener Dreiecke Sätze und Formeln herzuleiten und anzuwenden, statt die Zerlegung bei jeder Aufgabe von neuem vorzunehmen.



C 10

Betrachten wir also die Zerlegung mit Hilfe der Höhe h_c. Es sind nun drei Fälle zu berücksichtigen (Bild C 11).

1. Fall: $\alpha < 90°$.

Es gelten:

$h_c = a \cdot \sin\beta$ (1)

$h_c = b \cdot \sin\alpha$ (2)

Wir setzen gleich und erhalten:

$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ (3)

oder, als Proportion geschrieben,

$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$. (4)

2. Fall: $\alpha = 90°$.

Es gelten:

$h_c = a \cdot \sin\beta$

$h_c = b$.

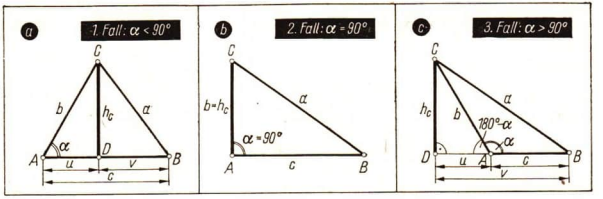
Wir setzen gleich und erhalten:

$a \cdot \sin\beta = b$.

Wir können schreiben:

$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$, denn $\sin\alpha = 1$.

Damit erhalten wir wieder die Gleichungen (3) und (4).



C 11

3. Fall: $\alpha > 90°$.

Es gelten $h_c = a \cdot \sin\beta$ und $h_c = b \cdot \sin(180° - \alpha)$.

Wir setzen gleich und erhalten:

$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin(180° - \alpha)$.

Da $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, erhalten wir wieder die Gleichungen (3) und (4).

Entsprechend finden wir, wenn wir im Dreieck die Höhe h_a bzw. h_b betrachten,

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma \tag{5}$$

bzw.

$$c : a = \sin\gamma : \sin\alpha. \tag{6}$$

Schreiben wir die Proportionen (4) und (5) folgendermaßen:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \tag{4a}$$

und

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \tag{5a}$$

so wird deutlich, daß

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}} \tag{7}$$

oder, als fortlaufende Proportion geschrieben,

$$\boxed{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma} \tag{8}$$

gilt.

Die Gleichungen (7) und (8) werden als **Sinussatz** der ebenen Trigonometrie bezeichnet.

C

5 **SATZ: In jedem ebenen Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.**

Da der Sinus im I. und II. Quadranten positiv ist, gehören zu einem positiven Sinuswert mit Ausnahme von $\sin\varphi = 1$ stets ein Winkel φ_1 im I. Quadranten und ein Winkel φ_2 im II. Quadranten (↗ Seite 33, Beispiel A 22). Beide Winkel sind zunächst als Rechenergebnisse möglich, und es bedarf einer besonderen Untersuchung, ob sie auch beide als Lösungen der betreffenden Aufgabe in Frage kommen. Mit Hilfe des Sinussatzes vereinfacht sich die Berechnung des Dreiecks in der Übung C 4 folgendermaßen:

6 *Gegeben:* $a = 16{,}0$ cm; $b = 12{,}8$ cm; $\alpha = 78°$.

Gesucht: **1)** β (in Grad); **2)** γ (in Grad); **3)** c (in cm).

Lösung:

1) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{12{,}8 \text{ cm} \cdot \sin 78°}{16{,}0 \text{ cm}} = 0{,}8 \cdot 0{,}9781 \approx 0{,}7825$$

$$\beta_1 \approx 51{,}5°;\ \beta_2 \approx 180° - 51{,}5° = 128{,}5°$$

Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt und die Summe $\alpha + \beta_2 = 78° + 128{,}5° = 206{,}5°$ bereits größer als 180° ist, entfällt β_2.

2) $\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1)$
$\gamma_1 = 180° - (78° + 51{,}5°) = 50{,}5°$

3) $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$c = \frac{16{,}0\text{ cm} \cdot \sin 50{,}5°}{\sin 78°}$$

$$c \approx 12{,}6\text{ cm}$$

n	$\lg n$	
16,0 sin 50,5°	1,2041 9,8874 — 10	(+)
Zähler sin 78°	11,0915 — 10 9,9904 — 10	(—)
12,62	1,1011	

Ergebnis: $\beta \approx 51{,}5°$; $\gamma \approx 50{,}5°$; $c \approx 12{,}6$ cm

Aufgaben c 51 und 52

Die Flächenformeln

8

Wir werden nun aus der Flächeninhaltsformel für das Dreieck $A = \frac{1}{2} g h_g$ die Höhe eliminieren, so daß die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks ohne Kenntnis einer der drei Höhen möglich ist.

1. Fall: $\triangle ABC$ *ist spitzwinklig.*

Es gilt $A = \frac{1}{2} a h_a$ und auch $h_a = b \cdot \sin\gamma$.

Durch Substitution erhalten wir

$$\boxed{A = \frac{1}{2} a b \sin\gamma} \qquad (9)$$

2. Fall: $\triangle ABC$ *ist rechtwinklig mit* $\gamma = 90°$.

Es gilt $A = \frac{1}{2} a b$ und $\sin\gamma = \sin 90° = 1$.

Wir sind also in diesem Fall berechtigt,

$$\frac{1}{2} a b = \frac{1}{2} a b \sin\gamma$$

zu setzen. Somit gilt die Gleichung (9) auch im rechtwinkligen Dreieck.

3. Fall: $\triangle ABC$ *ist stumpfwinklig mit* $\gamma > 90°$.

Es gilt $A = \frac{1}{2} a h_a$ und auch $h_a = b \cdot \sin(180° - \gamma)$.

Da $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$, gelangen wir wie im ersten Fall zur Gleichung (9). Entsprechend finden wir, wenn wir nicht von h_a, sondern von h_b bzw. h_c ausgehen:

C

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\, b\, c \sin\alpha} \qquad \text{bzw.} \tag{10}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\, a\, c \sin\beta} \tag{11}$$

6 **SATZ: In jedem Dreieck ist der Flächeninhalt gleich dem halben Produkt aus den Längen zweier Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.**

Ferner gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$\boxed{A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}} \tag{12}$$

$$\boxed{A = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha}} \tag{13}$$

$$\boxed{A = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\sin\gamma \sin\alpha}{\sin\beta}} \tag{14}$$

5 Leiten Sie diese drei Gleichungen her, indem Sie z. B. für Gleichung (12) von Gleichung (11) und Gleichung (6) ausgehen!

C

7 Von einem Dreieck sind gegeben:
$a = 7{,}6$ cm; $\alpha = 27{,}6°$; $\gamma = 129{,}4°$.
Gesucht sind: **1)** β (in Grad); **2)** b (in cm); **3)** c (in cm); **4)** A (in cm²).
Lösung:

1) $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$
$\beta = 180° - (27{,}6° + 129{,}4°) = 23{,}0°$

2) $b = \dfrac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$

$b = \dfrac{7{,}6 \text{ cm} \cdot \sin 23°}{\sin 27{,}6°}$

$b \approx 6{,}41$ cm

n	lg n	
7,6	0,8808	(+)
sin 23°	9,5919 — 10	
sin 27,6°	10,4727 — 10	(—)
	9,6659 — 10	
6,409	0,8068	

3) $c = \dfrac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

$c = \dfrac{7{,}6 \text{ cm} \cdot \sin 129{,}4°}{\sin 27{,}6°}$

$c \approx 12{,}67$ cm

7,6	0,8808	(+)
sin 129,4°	9,8880 — 10	
sin 27,6°	10,7688 — 10	(—)
	9,6659 — 10	
12,67	1,1029	

4) $A = \frac{1}{2}\, a b \sin\gamma$

$$A = \frac{7{,}6\text{ cm} \cdot 6{,}41\text{ cm} \cdot \sin 129{,}4^\circ}{2}$$

$A = 3{,}8 \cdot 6{,}41 \cdot \sin 129{,}4^\circ\ \text{cm}^2$

$A \approx 18{,}82\ \text{cm}^2$

3,8	0,5798
6,41	0,8068
sin 129,4°	9,8880 — 10
	11,2746 — 10
18,82	1,2746

(+)

Ergebnis: $\beta = 23{,}0^\circ$; $b \approx 6{,}4$ cm; $c \approx 12{,}7$ cm; $A \approx 18{,}8\ \text{cm}^2$

6 Konstruieren Sie das Dreieck aus Beispiel C 7, und überprüfen Sie die Ergebnisse!

Aufgaben c 53 bis 57

Der Kosinussatz

9

Sind in einem schiefwinkligen Dreieck die drei Seiten bzw. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, so kann der Sinussatz nicht zur Berechnung der fehlenden Stücke herangezogen werden. In diesem Fall führt die Anwendung eines weiteren trigonometrischen Satzes zum Ziel.

Wir betrachten wieder ein Dreieck ABC und berücksichtigen dabei die drei Fälle: 1. spitzwinkliges Dreieck, 2. rechtwinkliges Dreieck, 3. stumpfwinkliges Dreieck (↗ Bild C 11).

C

1. Fall: $\alpha < 90^\circ$.

Es gelten nach dem Satz des Pythagoras

$h_c^2 = b^2 - u^2$ und $h_c^2 = a^2 - v^2$.

Gleichsetzen und Umordnen ergibt

$b^2 - u^2 = a^2 - v^2$

$a^2 = b^2 + v^2 - u^2$

Wegen $v = c - u$ wird

$a^2 = b^2 + (c - u)^2 - u^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cu$

Da $\cos\alpha = \frac{u}{b}$, also $u = b \cdot \cos\alpha$, erhalten wir

7 $$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha} \qquad (15)$$

2. Fall: $\alpha = 90^\circ$.

Es gilt nach dem Satz des Pythagoras $a^2 = b^2 + c^2$.

Da in diesem Fall $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$, bleibt die Gleichung richtig, wenn wir schreiben:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ$.

Wir kommen also auch in diesem Fall auf die Gleichung (15).

3. Fall: $\alpha > 90°$.

Es gelten nach dem Satz des PYTHAGORAS
$h_c^2 = a^2 - v^2$ und $h_c^2 = b^2 - u^2$.

Wir setzen wieder gleich, ordnen um und erhalten
$a^2 = b^2 - u^2 + v^2$.

Wegen $v = c + u$, also $v^2 = c^2 + 2cu + u^2$, wird
$a^2 = b^2 + c^2 + 2cu$.

Da $\cos(180° - \alpha) = \frac{u}{b}$ und $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, folgt:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Entsprechend finden wir, wenn wir jeweils die Höhe h_a bzw. h_b betrachten:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta} \tag{16}$$

bzw.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma} \tag{17}$$

Die drei Gleichungen (15), (16) und (17) werden als **Kosinussatz** der ebenen Trigonometrie bezeichnet.
Da der Kosinus im I. und II. Quadranten verschiedene Vorzeichen hat, ist die Berechnung eines Dreieckswinkels nach dem Kosinussatz eindeutig.

C

Berechnungen an beliebigen ebenen Dreiecken

10

Das Berechnen der Größe von Seiten und Winkeln in einem beliebigen Dreieck kann je nach der Auswahl der gegebenen Stücke auf vier Grundaufgaben zurückgeführt werden, die auf den vier Kongruenzsätzen beruhen.

Gegeben		Lösungshinweise
eine Seite und zwei Winkel	sww wsw	Sinussatz
zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel	ssw	Sinussatz
zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel	sws	Kosinussatz und Sinussatz
drei Seiten	sss	Kosinussatz und Sinussatz

Bei jeder Aufgabe muß untersucht werden, ob und wie viele Lösungen vorhanden sind (Determination). Die Determination wird erleichtert, wenn man neben dem Rechengang die geometrische Konstruktion ausführt.

Werden die unbekannten Stücke des schiefwinkligen Dreiecks logarithmisch berechnet, so hat der Kosinussatz gegenüber dem Sinussatz den Nachteil, daß die logarithmische Rechnung unterbrochen werden muß. Andererseits hat er aber den Vorteil, daß die Winkelberechnung eindeutig ist.

8 *Gegeben:* $a = 24$ cm; $b = 13$ cm; $c = 15$ cm.

Gesucht: **1)** α; **2)** β; **3)** γ; **4)** A (in cm²).

Lösung:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{169\text{ cm}^2 + 225\text{ cm}^2 - 576\text{ cm}^2}{2 \cdot 13 \cdot 15\text{ cm}^2}$$

$$= -\frac{182}{390} = -\frac{7}{15} = -0{,}4667$$

$$\alpha = 180° - 62{,}18° = 117{,}82°$$

2) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{13\text{ cm} \cdot \sin 117{,}82°}{24\text{ cm}}$$

$$\sin\beta = \frac{13\text{ cm} \cdot \sin 62{,}18°}{24\text{ cm}}$$

$$\beta_1 = 28{,}62°$$

$$\beta_2 = 180° - 28{,}62° = 151{,}38°$$

n	lg n	
13	1,1139	(+)
sin 62,18°	0,9466 — 1	
Zähler	1,0605	(—)
24	1,3802	
sin β	0,6803 — 1	

Der Winkel β_2 entfällt als Lösung, da bereits Winkel α stumpf ist.

3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

$$\gamma = 180° - 146{,}44° = 33{,}56°$$

4) $A = \frac{1}{2} a b \sin\gamma$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 24\text{ cm} \cdot 13\text{ cm} \cdot \sin 33{,}56°$$

$$A \approx 86{,}24\text{ cm}^2$$

n	lg n	
0,5	0,6990 — 1	(+)
24	1,3802	
13	1,1139	
sin 33,56°	0,7426 — 1	
86,24	1,9357	

Ergebnis: $a = 24$ cm; $b = 13$ cm; $c = 15$ cm; $\alpha \approx 117{,}8°$; $\beta \approx 28{,}6°$; $\gamma \approx 33{,}6°$; $A \approx 86$ cm²

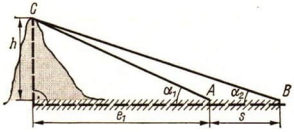
Aufgaben c 58 bis 62

C

Anwendungsaufgaben
11

Ermittlung von Höhenunterschieden

9 Um die Höhe eines Berges zu messen, wird in der Ebene eine Standlinie $\overline{AB} = s = 113$ m abgesteckt, deren Richtung genau auf die Bergspitze hinweist (Bild C 12).



C 12

An den Enden der Standlinie werden die Erhebungswinkel $\alpha_1 = 24{,}29°$ und $\alpha_2 = 19{,}80°$ gemessen. Wie hoch erhebt sich der Berg über der Ebene?

Lösung: Es ist $\tan \alpha_1 = \dfrac{h}{e_1}$ und $\tan \alpha_2 = \dfrac{h}{e_1 + s}$.

Die zweite Gleichung wird nach h aufgelöst, die erste nach e_1.

Wir erhalten

$h = e_1 \cdot \tan \alpha_2 + s \cdot \tan \alpha_2$ und $e_1 = \dfrac{h}{\tan \alpha_1}$.

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$h = \frac{h \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} + s \cdot \tan \alpha_2$$

$$h \left(1 - \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1}\right) = s \cdot \tan \alpha_2$$

$$h = (s \cdot \tan \alpha_2) : \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1}$$

$$h = \frac{s \cdot \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}$$

$$h = \frac{113 \text{ m} \cdot \tan 24{,}29° \cdot \tan 19{,}80°}{\tan 24{,}29° - \tan 19{,}80°}$$

$$\begin{aligned} \tan 24{,}29° &= 0{,}4513 \\ -\tan 19{,}80° &= 0{,}3600 \\ \hline \text{Nenner} &= 0{,}0913 \end{aligned}$$

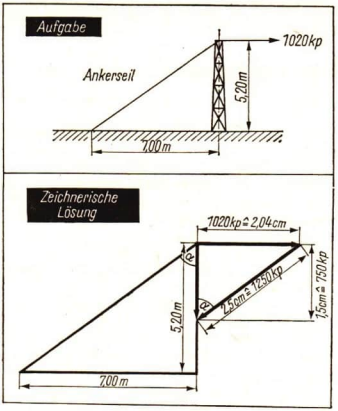
$$h = 201{,}1 \text{ m}$$

n	$\lg n$	
113	2,0531	(+)
tan 24,29°	0,6545 — 1	
tan 19,80°	0,5563 — 1	
Zähler	1,2639	(—)
Nenner	0,9605 — 2	
201,1	2,3034	

Ergebnis: Der Berg erhebt sich rund 201 m über die Ebene.

Bestimmung von Kräften

10 Der 5,20 m hohe Mast am Ende einer elektrischen Grubenbahn ist durch eine waagerechte Seilspannkraft von 1020 kp belastet und durch ein schräges Drahtseil am Boden gegen Biegung verankert (Bild C 13). Es sollen zeichnerisch und rechnerisch ermittelt werden:



C 13

a) die Spannkraft im Ankerseil,

b) die Belastung des Mastfundamentes (Gewicht des Mastes: $F = 800$ kp).

Lösung: Wir rechnen mit dem Stab

$$\tan\alpha = \frac{7{,}00\ \text{m}}{5{,}20\ \text{m}} \approx 1{,}35$$

$$\alpha \approx 53{,}5^\circ$$

a) $\sin\alpha = \dfrac{1020\ \text{kp}}{x}$

$$x = \frac{1020\ \text{kp}}{\sin 53{,}5^\circ} \approx \frac{1020}{0{,}804}\ \text{kp}$$

$$x \approx 1270\ \text{kp}$$

b) $\tan\alpha = \dfrac{1020\ \text{kp}}{y}$

$$y = \frac{1020\ \text{kp}}{\tan 53{,}5^\circ} \approx \frac{1020}{1{,}35}\ \text{kp}$$

$$y \approx 756\ \text{kp}$$

Ergebnis: Die Spannkraft im Ankerseil beträgt 1270 kp. Die Belastung des Mastfundamentes beträgt 1556 kp.

11 *Bestimmung eines Brechungswinkels*

Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel $\alpha = 15^\circ$ aus Luft in Wasser $\left(\text{Brechungszahl } n = \frac{4}{3}\right)$. Berechnen Sie den zugehörigen Brechungswinkel!

Brechungsgesetz: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$

Lösung: $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$

$$\sin\beta = \frac{3 \cdot \sin 15^\circ}{4} \approx 0{,}75 \cdot 0{,}259 \approx 0{,}194$$

$$\beta \approx 11{,}2^\circ.$$

Ergebnis: Der Brechungswinkel beträgt 11,2°.

Aufgaben c 63 bis 122

Zur Geschichte der Trigonometrie

Im Laufe einer langen Zeit ist die Trigonometrie in mühevoller Gedankenarbeit aus der gesellschaftlichen Praxis heraus entwickelt worden.
Vor 4000 Jahren stand die Geometrie im alten Ägypten auf einer schon recht beachtlichen Höhe. Sie war aus der Notwendigkeit heraus entstanden, die durch jährliche Nilüberschwemmungen unkenntlich gewordenen Feldergrenzen jedesmal neu zu vermessen. Die Knotenleine mit Abschnitten von drei, vier und fünf Einheiten war ein wichtiges Hilfsmittel für die Vermessungsarbeiten. Besonders eindrucksvolle Zeugen für den hohen Stand der Ingenieurkunst jener Zeit sind die Pyramiden, die Grabstätten der ägyptischen Könige, deren Bau Hunderttausenden von Sklaven und mit Gewalt zur Arbeit getriebenen Bauern das Leben kostete. Sämtliche Pyramiden weisen übereinstimmende Merkmale auf, woraus auf ein planvolles Arbeiten und hervorragendes meßtechnisches Können geschlossen werden kann. So sind die Seitenflächen der Pyramiden im allgemeinen mit einem Winkel von 52° zur Grundfläche geneigt. Außerdem sind die Pyramiden recht genau nach den Himmelsrichtungen orientiert, und die Kantenlängen ihrer quadratischen Grundflächen weichen nur um einige 10 Zentimeter voneinander ab, obwohl z. B. die größte Pyramide, die um 2680 v. u. Z. gebaute sogenannte Cheopspyramide, eine Seitenlänge von 227,5 m bei einer Höhe von 146,6 m besaß.
Unter den erhaltenen Schriftstücken des alten Ägyptens befinden sich auch einige mathematischen Inhalts. In einem in Moskau aufbewahrten mathematischen Papyrus wird z. B. die Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit quadratischen Deckflächen völlig richtig vorgenommen; dieser mathematische Körper trat als Teil der Verkleidung der Pyramiden auf. Aus den mathematischen Papyri geht auch hervor, daß feste Fachausdrücke für den Begriff „Winkel" und für das Verhältnis von Seitenlängen an Pyramiden existierten, d. h. die ersten Vorstufen trigonometrischer Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.
Auch bei den Chinesen, einem der ältesten Kulturvölker, reichen die geometrischen Kenntnisse, darunter auch trigonometrische, weit zurück. Schon um 1100 v. u. Z. wurden rechte Winkel mit Hilfe des Zahlentripels 3; 4; 5 abgesteckt, Höhen durch Messen der Schattenlänge bestimmt sowie Tiefen- und Entfernungsbestimmungen mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke vorgenommen. Leider sind unsere Kenntnisse über die frühe chinesische Mathematik recht gering, da ein chinesischer Kaiser im Jahre 213 v. u. Z. alle schriftlichen Aufzeichnungen verbrennen ließ. Nur ganz wenige Dokumente sind dieser Zerstörung entgangen.

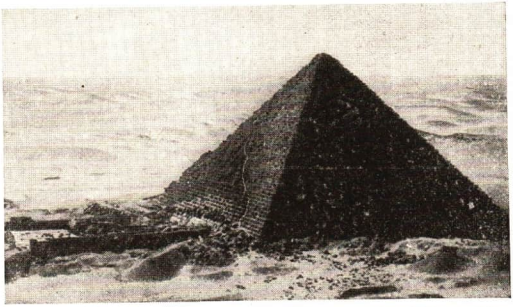


Bild C 14: Pyramide und Totentempel des MYKERIMOS (um 2600 v. u. Z.)

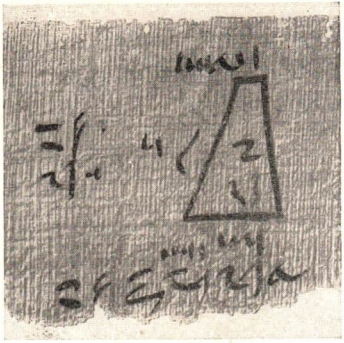


Bild C 15: Originaltext der Pyramidenstumpfaufgabe des Moskauer Papyrus

Bild C 16: Babylonische Keilschrifttafel mit Dreiecksberechnungen

Die babylonische Mathematik stand im Vergleich zu der ägyptischen Mathematik auf einem wesentlich höheren Niveau. Dies betrifft insbesondere die Algebra, aber auch die Geometrie und Trigonometrie. Tontäfelchen mit Keilschrifttexten überliefern uns mathematische Probleme aus einer etwa 5000 Jahre zurückliegenden Zeit. Bewässerungskanäle mußten gebaut werden; denn in Mesopotamien, dem Gebiet zwischen Euphrat und Tigris, war Ackerbau nur bei künstlicher Bewässerung möglich. So wurden für die erforderlichen Dämme die Neigung der Böschung und die Breite der Dammkrone berechnet. Daher spielte in den Rechnungen ein solches Verhältnis von Seitenlängen eine große Rolle, das auf den Kotangens hinausläuft und das als „Böschungswert" bezeichnet wurde.

Derartige Probleme aus der Praxis führten auch zu tiefen theoretischen Einsichten. Die Proportionalität der entsprechenden Seiten in ähnlichen Dreiecken wurde erkannt und der Satz des PYTHAGORAS aufgestellt. Eine enge Verknüpfung der babylonischen Mathematik bestand mit der Astronomie. Von riesigen, zu Tempelanlagen gehörenden Türmen beobachtete man den Himmel und glaubte, aus dem Lauf der Planeten z. B. Anzeichen kommender Dürren oder den Ausgang eines geplanten Kriegszuges ablesen zu können. Auch der berühmte Turmbau von Babel war eine solche „Sternwarte". Zwar wurde die babylonische Astronomie immer stärker mit Aberglauben durchsetzt, d. h., sie wurde vielfach zur Astrologie; aber auch echte astronomische Kenntnisse wurden gewonnen. Über viele Jahrhunderte hinweg fortgesetzte Beobachtungen zeigten die Periodizität der Himmelserscheinungen sowie die regelmäßige Wiederkehr von Sonnen- und Mondfinsternissen und des Zusammentreffens von Planeten in bestimmten Tierkreiszeichen usw. Es sind sogar Zahlentabellen erhalten geblieben, die bei der Berechnung periodischer astronomischer Vorgänge verwendet wurden. Wenn man diese Zahlenwerte — was die damaligen Astronomen natürlich noch nicht taten — in ein Koordinatensystem überträgt, so erhält man ganz deutlich das Bild einer Sinuskurve.

Ungefähr 1000 Jahre vor Beginn unserer Zeitrechnung boten nicht mehr die Binnenländer wie Ägypten und Mesopotamien die günstigsten Entwicklungsbedingungen für Wirtschaft, Handel und Wissenschaft, sondern in Verbindung mit der Entwicklung des Schiffbaues die Küstenländer. Daher wurden die in Griechenland, auf den ägäischen Inseln und in Kleinasien ansässigen griechischen Stämme um die Mitte des 1. Jahrtausends v. u. Z. für den Raum des östlichen Mittelmeeres politisch, ökonomisch und auch auf dem Gebiete der Wissenschaft bestimmend.

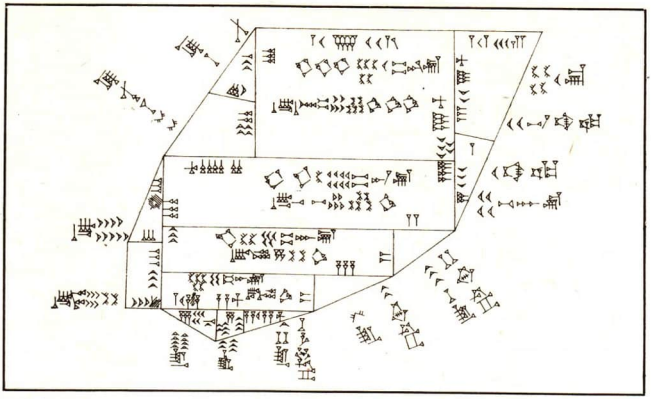


Bild C 17: Babylonischer Felderplan

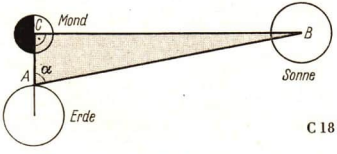
Die griechische Mathematik verdankt ihren engen Beziehungen zu Mesopotamien und Ägypten sehr viel. Ergebnisse wissenschaftlicher Arbeit wurden übernommen und Anregungen für neue Erkenntnisse empfangen. THALES VON MILET (624?–548? v. u. Z.) soll die Höhe der Pyramiden dadurch bestimmt haben, daß er ihre Schattenlänge in dem Augenblick maß, als sein eigener Schatten genauso groß war wie er selbst. In Milet bestimmte er, ebenfalls mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, die Entfernung der Schiffe vom Hafen. Von Babylonien wurden auch die Sonnenuhr, die Zeiteinteilung und der Gnomon übernommen. Der Gnomon, das älteste astronomische Instrument, diente zur Bestimmung der Südrichtung. Ein senkrecht stehender Stab wirft auf eine waagerechte Ebene seinen Schatten und ermöglicht so die Messung der jeweiligen Schattenlänge, die sich bis Mittag verkürzt und dann wieder länger wird. Die Winkelhalbierende jedes Winkels, der von paarweise gleich langen Schatten gebildet wird, erstreckt sich in der Nord-Süd-Richtung. Darüber hinaus ermöglicht der Gnomon die Messung der Sonnenhöhe aus der Länge des Stabes und seines Schattens, was auf den Tangens des Höhenwinkels führt.

Die griechische Mathematik erreichte später eine erstaunliche Höhe. Aber sie geriet mehr und mehr unter den Einfluß der idealistischen Philosophie, insbesondere der Schule PLATONS. Dadurch riß die Verbindung der Mathematik zur Praxis ab. Ja, man hielt es nicht einmal mehr für nötig, die Methoden der praktischen Mathematik, wozu Trigonometrie und Feldmeßkunst gehörten, schriftlich niederzulegen. In der Sklavenhaltergesellschaft galt jede praktische Tätigkeit, sogar die des bildenden Künstlers, trotz der Vorliebe der griechischen Sklavenhalter für Skulpturen, als minderwertig.

Andererseits kann man aus erhalten gebliebenen Bauwerken der griechischen und römischen Antike ersehen, daß die damaligen Ingenieure ein bedeutendes Wissen, auch auf dem Gebiet der praktischen Geometrie, besessen haben. So wurde z. B. um 530 v. u. Z. zur Wasserversorgung der Stadt Samos unter dem Baumeister EUPALINOS ein 1 km langer geneigter Tunnel durch einen Berg gebohrt. Der Stollen wurde von den beiden Eingängen aus vorgetrieben, und die beiden Seiten verfehlten einander nur um 3 m: eine Glanzleistung. Später hat HERON VON ALEXANDRIA (um 100 u. Z.) auch die feldmesserischen Geräte beschrieben, insbesondere den sogenannten Diopter (Sehrohr). Mit Zahnrädern und Schrauben war er in zwei zueinander senkrechten Ebenen verstellbar. Um Höhenunterschiede zu messen, wurde das Gelände genau wie heute mit Meßlatten abgesteckt. Außerordentlich wichtig für den späteren Aufbau einer systematischen Trigonometrie waren Beiträge von ARCHIMEDES (287?–212 v. u. Z.), dem bedeutendsten Mathematiker des Altertums.

Als in den letzten Jahrhunderten vor unserer Zeitrechnung Großreiche und später das römische Weltreich entstanden, stiegen die Anforderungen an die Landvermesser. Diese Vermessungen erforderten verbesserte astronomische Kenntnisse. Die astronomische Forschung erhielt so neue Impulse. In Verbindung damit machte auch die Trigonometrie, das wichtigste mathematische Hilfsmittel der Astronomie, Fortschritte.

ARISTARCHOS (um 270 v. u. Z.) versuchte auf trigonometrischem Wege, das Verhältnis der Entfernungen Erde—Mond und Erde—Sonne zu bestimmen, indem er den Winkel α zwischen Mond, Erde und Sonne bei Halbmond maß, wenn also bei C ein rechter Winkel auftritt. Da er aber α wegen der mangelhaften Instrumente nicht genau bestimmen konnte, erhielt er für dieses Verhältnis nur 1:19 und nicht den richtigen Wert 1:370. HIPPARCHOS (180?—125? v. u. Z.) berechnete eine Sehnentafel, d. h. eine Tafel der Sehnenlängen bei wachsendem Bogen.



C 18

Schließlich faßte PTOLEMAIOS VON ALEXANDRIA (85?—165? u. Z.) alle früheren Ansätze und Methoden der Astronomie in einer Darstellung des geozentrischen Weltbildes zusammen, einem Buch mit dem Titel „Die Große Zusammenstellung". Die Araber verstümmelten später den griechischen Titel zu *Almagest*. Da PTOLEMAIOS weder den Sinussatz noch den Kosinussatz kannte, zerlegte er beliebige Dreiecke in zwei rechtwinklige Dreiecke.

Die Umwandlung der Trigonometrie unter Verwendung der Seitenverhältnisse Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens am rechtwinkligen Dreieck wurde von den arabischen Gelehrten im 9. Jahrhundert vollzogen. Der *Almagest* war schon 833 ins Arabische übersetzt worden. Während in Europa durch den kulturfeindlichen Einfluß der christlichen Kirche auch die Wissenschaften darniederlagen, blühte die arabische Kultur auf. Noch heute spiegeln die Märchen aus 1001 Nacht jene glanzvolle Zeit wider.

Auch die Mathematik, insbesondere Algebra und Trigonometrie, erfuhren eine bedeutende Förderung. TABIT IBN QURRA (826—901) fand den Sinussatz am rechtwinkligen Kugeldreieck. Unter dem Einfluß des großen Astronomen AL-BATTANI (850?—929) entschied man sich endgültig für die Sinus-Trigonometrie. ABU NASR (um 1000) fand den Sinussatz der ebenen Trigonometrie. Das ganze nun geschlossene Lehrgebäude der Trigonometrie wurde schließlich von AT-TUSI (1201 bis 1274) erstmals zusammengefaßt. Auch umfangreiche astronomische und trigonometrische Tafeln wurden berechnet; z. B. tabulierte ULUG BEG (1392—1449) die trigonometrischen Funktionen mit einer Genauigkeit von 17 Dezimalen. Die indische Trigonometrie und Astronomie standen auf einem ähnlich hohen Niveau.

Diese großartigen trigonometrischen Kenntnisse gelangten aber nur zu einem ganz geringen Teil nach Europa, so daß man dort noch einmal von vorn anfangen mußte. Erst im 15. Jahrhundert konnte die europäische Mathematik wenigstens in Teilen die antike Mathematik erreichen und übertreffen. Die neuen Ergebnisse wurden erzielt, weil das gesellschaftliche Leben Probleme aufwarf, deren Lösung auch den Einsatz neuer mathematischer Methoden erforderte. Dies betraf auch die Trigonometrie. Im Schoße der Feudalgesellschaft wuchs eine neue Klasse, die Bourgeoisie, heran. Sie war an der Förderung des Handels interessiert, sie betrieb in ihrem eigenen politischen und ökonomischen Interesse die Kolonisierung, die Erschließung neuer, in Übersee gelegener Märkte. Man fand den Seeweg nach Indien, und man entdeckte einen neuen Erdteil. Der Handel nach Übersee warf ungeheure Profite ab. Die Navigation auf hoher See erfordert aber ein bedeutendes Maß astronomischer und trigonometrischer Kenntnisse.

Auch die Astronomie stellte an die Trigonometrie hohe Anforderungen. Indem man mit verbesserten astronomischen Instrumenten, dem Jakobsstab und dem Mauerquadranten, genaue Messungen am Himmel anstellte, bemerkte man, daß das ptolemäische geozentrische Weltbild nicht richtig sein konnte. Den entscheidenden Schritt, der eine wissenschaftliche Großtat ersten Ranges darstellt, vollzog der polnische Gelehrte NIKOLAUS KOPERNIKUS (1473—1543). In seinem Todesjahr erschien sein wissenschaftliches Hauptwerk *De revolutionibus orbium coelesticum* (d. i. Über die

C

Bild C 19:
Verwendung des von dem jüdischen Gelehrten LEVI BEN GURSON (1288–1344) erfundenen sogenannten Jakobsstabes zur Winkelmessung. –
Aus dem Titelblatt einer Abhandlung (1533) von P. APIAN

Umdrehungen der Himmelskörper), in dem das heliozentrische Weltbild begründet wurde. Freilich erst in einem erbitterten opferreichen Kampf gegen die Kirche – G. BRUNO wurde verbrannt, G. GALILEI wurde bis zu seinem Tode von der Inquisition gefangengehalten – konnte der Wahrheit zum Siege verholfen werden.
Auch die Ausrüstung der Heere mit Kanonen machte die Entwicklung des Vermessungswesens und damit der Trigonometrie dringend notwendig. Um die Geschütze sorgfältig zu richten, bedurfte es

C

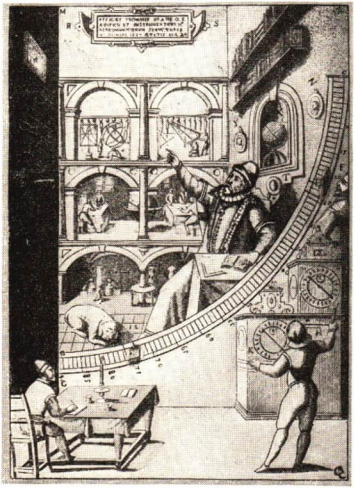
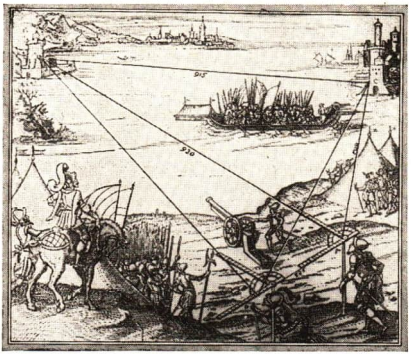


Bild C 20:
Mauerquadrant (gemauerter Viertelkreis mit Winkelteilung). Die Sternhöhe kann gemessen werden, indem der Beobachter durch einen Spalt (links oben) den Stern anvisiert. –
Die Darstellung zeigt den dänischen Astronomen TYCHO BRAHE bei Messungen auf seiner Sternwarte in Uraniborg

Bild C 21:
Militärisches Vermessungswesen. – Abbildung aus L. ZUBLERS Kurzem Bericht von den neuen geometrischen Instrumenten, 1602



genauer Entfernungsbestimmungen im Gelände. Hierzu wurde das *Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten* entwickelt.
Auf Grund dieser und noch anderer praktischer Anforderungen entwickelte sich die Trigonometrie im 15., 16. und 17. Jahrhundert rasch. Schon JOHANNES VON GMUNDEN (1380?–1442), Magister an der Universität Wien, und sein Nachfolger GEORG VON PEURBACH (1423–1461) beschäftigten sich mit der Neuberechnung erweiterter trigonometrischer Tafeln. Dieses umfangreiche Werk vollbrachte schließlich REGIOMONTAN (1436–1476). Von ihm stammen Sinustafeln, die von Minute zu Minute fortschreiten, sowie eine gradweise fortschreitende Tangententafel.
REGIOMONTAN war ohne Zweifel der führende europäische Mathematiker seiner Zeit. In seinem allerdings erst im Jahre 1533 gedruckten Werk *De triangulis omnimodis libri quinque* (Fünf Bücher über alle Dreiecke) faßte REGIOMONTAN alle vorhandenen trigonometrischen Verfahren, Sätze und Hilfstabellen zur Trigonometrie zusammen. Dort wird der Sinussatz ausführlich verwendet und zum erstenmal der Kosinussatz ausgesprochen. Durch REGIOMONTAN war nun auch in Europa die Trigonometrie zu einer einheitlichen Wissenschaft geworden. Dem mathematischen Inhalt nach hatte sie schon damals das heutige Niveau erreicht.
In der Folgezeit wurden die Tafeln noch wesentlich verbessert, so durch den Wittenberger Mathematiker RHAETICUS (1514–1576), den Franzosen VIETA (1540–1603) und den großen Astronomen JOHANNES KEPLER (1571–1630). Seit KEPLER wurden auch die Methoden des logarithmischen Rechnens in der Trigonometrie verwendet.

Bild C 22:
REGIOMONTAN (1436–1476)

Die heute verwendeten Bezeichnungen in der Trigonometrie sind freilich erst in späterer Zeit eingeführt worden. Im wesentlichen haben sich die von dem genialen schweizerischen Mathematiker LEONHARD EULER (1707–1783) verwendeten Bezeichnungen durchgesetzt: π als Maßzahl des Einheitshalbkreises, e für 2,718 ..., a, b, c für die Dreiecksseiten, die Symbole sin, cos, tan für die trigonometrischen Funktionen.
Von den großen Mathematikern und Geodäten des 18. und 19. Jahrhunderts wurde die Trigonometrie als Hilfsmittel der Erdvermessung weiter ausgebaut. So konnte z. B. der Franzose P. L. M. DE MAUPERTIUS (1698–1759) durch Messung eines Längenkreises die Abplattung der Erde an den Polen nachweisen. Neu entdeckte Länder wurden in allen Einzelheiten kartographisch aufgenommen. Der größte deutsche Mathematiker, C. F. GAUSS (1777–1855), entwickelte schließlich noch die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate, mit der es möglich ist, sich in den Schlußberechnungen weitgehend von den unweigerlich auftretenden Beobachtungsfehlern frei zu machen.

Bild C 23:
Tuschzeichnung aus dem 17. Jahrhundert in einer japanischen Darstellung trigonometrischer Verfahren.
Ein Beispiel für die als Ergebnis praktischer Anforderungen entwickelte Trigonometrie anderer Länder

Bild C 24:
LEONHARD EULER
(1707–1783)

Bild C 25:
CARL FRIEDRICH GAUSS
(1777–1855)

D. Darstellende Geometrie

Seite

72 Das räumliche kartesische Koordinatensystem
73 Schrägbilder (Wiederholung)
75 Die Grundgebilde Punkt, Gerade und Ebene
76 Orthogonalität und Parallelität
78 Winkel im Raum
80 Der Begriff „Projektion" (Wiederholung)
82 Eigenschaften der senkrechten Parallelprojektion
82 Die senkrechte Eintafelprojektion – Punkt und Gerade
86 Neigungswinkel einer Geraden – wahre Länge einer Strecke
88 Gegenseitige Lage zweier Geraden
89 Höhenlinien und Fallinien
92 Neigungswinkel einer Ebene – wahre Größe einer ebenen Figur
94 Schnitt einer Ebene mit einer Geraden – Senkrechte und Lot
96 Die senkrechte Zweitafelprojektion – Punkt und Gerade
99 Neigungswinkel einer Geraden – wahre Länge einer Strecke
100 Gegenseitige Lage zweier Geraden
101 Höhenlinien und Frontlinien
105 Neigungswinkel einer Ebene – wahre Größe einer ebenen Figur
106 Gegenseitige Lage zweier Ebenen
109 Schnitt eines Körpers mit einer Ebene

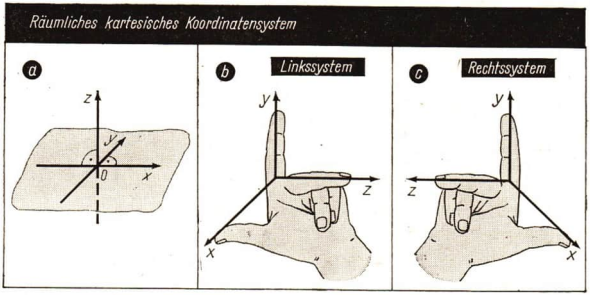
Das photographische Bild entspricht einer Zentralprojektion, bei der das Projektionszentrum ein Punkt im Linsensystem des Photoapparates ist. Bei dieser Projektionsart werden zueinander parallele Geraden, soweit sie nicht parallel zur Bildtafel liegen, nicht als Parallelen abgebildet. Ein solches Bild ist anschaulich, aber wenig geeignet zur schnellen Entnahme der Maße. Aus diesem Grunde wird für technische Zeichnungen eine allerdings wenig anschauliche normierte Parallelprojektion vorgezogen.

D

Das räumliche kartesische Koordinatensystem
1

Die *darstellende Geometrie* hat die Aufgabe, Gesetzmäßigkeiten für die zeichnerische Darstellung räumlicher Gebilde zu untersuchen.
Das Prinzip der darstellenden Geometrie ist die Abbildung von Punkten des Raumes auf die Punkte der Zeichenebene.

Durch ein zweiachsiges kartesisches Koordinatensystem wird jedem Punkt der **Ebene** ein geordnetes **Paar reeller Zahlen** umkehrbar eindeutig zugeordnet. Der Punkt P_i mit der Abszisse x_i und der Ordinate y_i wird wie folgt bezeichnet: $P_i\,(x_i; y_i)$.
Mit Hilfe eines dreiachsigen kartesischen Koordinatensystems (Bild D 1 a) können wir Punkte im **Raum** festlegen. Die erforderliche dritte Koordinatenachse (z-Achse) steht senkrecht auf der Ebene (↗ Lerneinheit D 5), in der die Abszissenachse (x-Achse) und die Ordinatenachse (y-Achse) liegen, und hat den gleichen Ursprung wie diese Achsen. Die ihr entsprechenden Koordinaten werden auch **Koten** genannt (und zwar dann, wenn sie Höhen angeben). Der Punkt P_i mit den Koordinaten x_i, y_i und z_i wird wie folgt bezeichnet: $P_i\,(x_i; y_i; z_i)$.

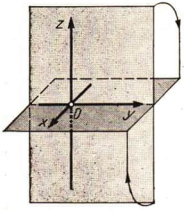


D 1

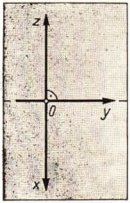
Analog zur Ebene gilt für den Raum der

1 **SATZ: Durch ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem wird jedem Punkt des Raumes ein geordnetes Tripel reeller Zahlen umkehrbar eindeutig zugeordnet.**

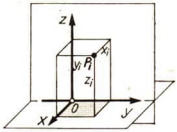
Je nach dem Richtungssinn der dritten Achse (in unseren Überlegungen der z-Achse) in bezug auf das von den beiden anderen Achsen gebildete Achsenkreuz werden zwei Arten dreiachsiger rechtwinkliger Koordinatensysteme unterschieden: **Rechtssysteme** und **Linkssysteme.**



D 2a



D 2b



D 2c

Wenn wir dem Daumen die positive x-Richtung, dem Zeigefinger die positive y-Richtung und dem Mittelfinger die positive z-Richtung zuordnen und diese Finger rechtwinklig gegeneinander spreizen, so gibt die rechte Hand ein Rechtssystem und die linke Hand ein Linkssystem an (Bild D 1 b, c). Das Koordinatensystem im Bild D 1 a ist somit ein Rechtssystem.
In der darstellenden Geometrie werden wir ein Rechtssystem anwenden, bei dem die x,y-Ebene die Grundrißtafel und die y,z-Ebene die Aufrißtafel bildet. Damit fällt die y-Achse des Koordinatensystems mit der Rißachse zusammen, und die x-Achse liegt in Tiefenrichtung (Bild D 2). Das x,y-Achsenkreuz erscheint im Vergleich mit der Lage, die wir beim graphischen Darstellen von Funktionen einhalten, um 90° im Uhrzeigersinn gedreht.
Ist ein Punkt P im Raum gegeben, so finden wir seine Koordinaten, indem wir uns nach Bild D 2 c einen Quader konstruiert denken, dessen Kanten parallel zu den Achsen sind; die Koordinaten entsprechen den Kantenlängen.
Sind die Koordinaten eines Punktes gegeben, so werden durch sie die Kantenlängen des in Bild D 2 c dargestellten Quaders bestimmt. Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge die den Koordinaten entsprechenden Strecken auf den Parallelen zu den Achsen angetragen werden.

(1) Vergleichen Sie die Bestimmung der Koordinaten eines gegebenen Raumpunktes mit der Bestimmung der Koordinaten eines Punktes der Ebene!

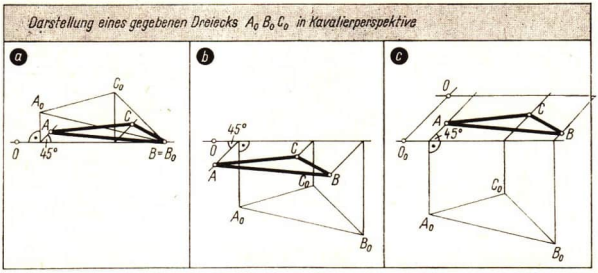
Aufgaben d 1 bis 7

D

Schrägbilder (Wiederholung)

2

Für die Darstellung von Objekten in Kavalierperspektive gelten folgende Regeln:
- Als Bildebene dient die Aufrißtafel.
- Strecken und Figuren, die in der Aufrißtafel oder in einer Parallelebene zu dieser liegen, werden in wahrer Länge bzw. in wahrer Größe abgebildet.
- Strecken senkrecht zur Aufrißtafel werden gegenüber der Richtung, die in der Abbildung der Vertikalen entspricht, unter einem Winkel von 45° und auf die Hälfte verkürzt abgebildet.



D 3

Die Bilder von Strecken, die nicht parallel oder senkrecht zur Aufrißtafel sind, bestimmen wir, indem wir die Endpunkte der abzubildenden Strecken mittels Hilfsstrecken in der Aufrißtafel und senkrecht zur Aufrißtafel, d. h. in Tiefenrichtung, ermitteln (Bild D 3).

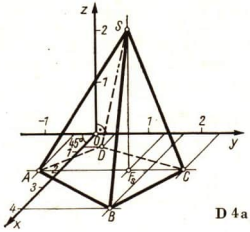
Aufgaben d 8 bis 11

Sind die darzustellenden Gegenstände durch die Koordinaten geeigneter Punkte gegeben, so ist es zweckmäßig, als Hilfsstrecken für die Konstruktion jene Strecken zu wählen, die den Koordinaten entsprechen.

1 *Gegeben:* Die Eckpunkte einer vierseitigen Pyramide durch ihre Koordinaten: A (2; — 0,4; 0), B (4; 1,7; 0), C (2; 2,4; 0), D (0,7; 0,3; 0), S (2; 1,3; 2,8).

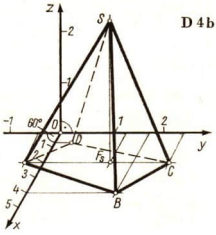
Gesucht: Es ist das Schrägbild dieses Körpers in *Kavalierperspektive* zu entwerfen (Bild D 4 a).

Bemerkung: Die Punkte A, B, C, D haben die Kote 0, sie liegen also in der Grundrißtafel; der Punkt A hat eine negative Ordinate, er liegt (vom Standpunkt des Betrachters aus) links von der x-Achse.



D 4a

Die *Kavalierperspektive* ist ein Sonderfall der Schrägbilddarstellung mit $\alpha = 45°$ und dem Verkürzungsverhältnis $q = 1 : 2$. Wenn wir die Lage des Körpers oder die Richtung der Projektionsstrahlen verändern, erhalten wir verschiedenartige Schrägbilder. Das Bild D 4 b stellt die im Beispiel D 1 angeführte Pyramide im Schrägbild mit dem Winkel $\alpha = 60°$ und dem Verkürzungsverhältnis $q = 1 : 3$ dar.



D 4b

Die Kavalierperspektive eignet sich besonders für das Zeichnen von Gegenständen, bei denen die Vorderansicht (der Aufriß) das Wesentliche enthält. Nach den Regeln der Kavalierperspektive können wir bei entsprechender Wahl des Richtungssinnes der Achsen auch Ansichten von links oder von unten entwerfen.

(2) Stellen Sie einen Würfel in Kavalierperspektive dar entsprechend einer Ansicht **a)** von links oben, **b)** von rechts unten!

Aufgaben d 12 bis 19

Die Grundgebilde Punkt, Gerade und Ebene

3

Im Raum unterscheiden wir als geometrische Grundgebilde **Punkte, Geraden** und **Ebenen.** Der Anschauung entnehmen wir folgende Grundtatsachen:

▶ 2

a) Zwei Punkte, die nicht zusammenfallen (d. h. verschieden sind), bestimmen genau eine Gerade; jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.

b) Eine Gerade, die zwei Punkte mit einer Ebene gemeinsam hat, liegt ganz in dieser Ebene.

c) Drei verschiedene Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen genau eine Ebene; jede Ebene enthält mindestens drei nicht in einer Geraden liegende verschiedene Punkte.

d) Es gibt mindestens vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

e) Zu einer Geraden gibt es durch einen beliebigen Punkt genau eine Parallele.

Bemerkung: Parallele Geraden sind als Geraden gleicher Richtung definiert. Zusammenfallende Geraden sind dementsprechend parallel.

Mit Hilfe dieser Grundsätze können wir feststellen:

Eine Ebene wird bestimmt durch
- drei verschiedene Punkte, die nicht in einer Geraden liegen,
- eine Gerade und einen nicht in der Geraden liegenden Punkt,
- zwei verschiedene Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben,
- zwei verschiedene parallele Geraden.

Über die *gegenseitige Lage* von **zwei verschiedenen Geraden** im Raum gelten folgende Beziehungen:
Zwei verschiedene Geraden liegen entweder in einer Ebene oder nicht. Liegen die Geraden in einer Ebene, dann haben sie entweder genau einen Punkt gemeinsam, d. h., sie **schneiden** einander, oder sie haben keinen Punkt gemeinsam, dann sind sie **parallel.** Der gemeinsame Punkt zweier Geraden heißt **Schnittpunkt.**

▶ 3 **DEFINITION: Zwei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, heißen windschief (oder kreuzend).**

D

Über die *gegenseitige Lage* von **zwei verschiedenen Ebenen** gelten folgende Beziehungen:
Zwei verschiedene Ebenen haben entweder einen Punkt gemeinsam oder keinen Punkt gemeinsam. Haben die Ebenen einen Punkt gemeinsam, dann haben sie auch eine Gerade gemeinsam, d. h., sie **schneiden** einander; die gemeinsame Gerade zweier Ebenen heißt **Schnittgerade**. Haben die Ebenen keinen Punkt gemeinsam, dann sind sie **parallel** (↗ Definition D 7).
Über die *gegenseitige Lage* **einer Ebene und einer Geraden** im Raum gelten folgende Beziehungen:
Entweder die Gerade liegt in dieser Ebene oder sie liegt nicht in dieser Ebene. Liegt die Gerade nicht in dieser Ebene, so haben Gerade und Ebene entweder genau einen Punkt gemeinsam, d. h., sie **schneiden** einander, oder sie haben keinen Punkt gemeinsam. Der gemeinsame Punkt der Ebene und der Geraden heißt **Schnittpunkt**. Haben Ebene und Gerade keinen Punkt gemeinsam, dann sind sie **parallel** (↗ Definition D 10).

Aufgaben d 20 bis 23

4

Wir betrachten Geraden, Ebenen, auch gekrümmte Linien und Flächen als **Punktmengen**. Sie bilden echte Teilmengen des gleichfalls als Punktmenge aufgefaßten Raumes.
Liegt ein **Punkt** P in einer **Geraden** g, so ist P ein Element von g, geschrieben $P \in g$; liegt der Punkt Q nicht in der Geraden g, so ist $Q \notin g$.
Entsprechendes gilt für die Lage eines **Punktes** in bezug auf eine **Ebene**.
Liegt eine **Gerade** g in einer **Ebene** ε, so sind die Punkte der Geraden Elemente von ε und g ist eine echte Teilmenge von ε, geschrieben $g \subset \varepsilon$.
Zwei einander schneidende Geraden g und h haben den Schnittpunkt S gemeinsam. Es ist somit $S \in g$ *und* $S \in h$.
Entsprechend lassen sich die Schnittgerade s zweier Ebenen ε und δ durch
$s \subset \varepsilon$ *und* $s \subset \delta$
und der Schnittpunkt D einer Ebene ε und einer Geraden g durch
$D \in g$ *und* $D \in \varepsilon$ ausdrücken.

D

Orthogonalität und Parallelität

5

---

4 **DEFINITION: Eine Gerade heißt senkrecht zu einer Ebene, wenn sie auf allen Geraden der Ebene, die durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene gehen, senkrecht steht.**

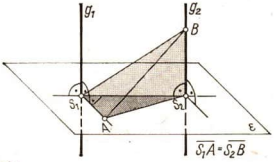
5 **SATZ: Eine Gerade ist senkrecht zu einer Ebene, wenn sie auf zwei Geraden der Ebene, die durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene gehen, senkrecht steht.**

Mit dem Satz D 5 hängen auch die folgenden Sätze zusammen:

- In einem Punkt einer Ebene gibt es nur eine Senkrechte zu dieser Ebene.
- Von einem Punkt außerhalb einer Ebene gibt es nur ein Lot auf die Ebene.

6 **SATZ: Zwei verschiedene Geraden, die auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel.**

Bemerkung (Bild D 5):
Die Geraden g_1 und g_2 haben keinen Punkt gemeinsam; es ist zu zeigen, daß sie in einer Ebene liegen.



D 5

Wir verbinden den Schnittpunkt S_1 von g_1 mit der Ebene ε mit dem Schnittpunkt S_2 von g_2 mit ε und legen in ε durch S_1 die Senkrechte zu S_1S_2. Auf dieser Senkrechten und auf g_2 werden von S_1 bzw. von S_2 gleiche Strecken angetragen, ihre Endpunkte seien A (auf der Senkrechten zu S_1S_2 in ε) und B (auf g_2). Die Dreiecke AS_1S_2 und BS_2S_1 sind kongruent, daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke BS_1A und AS_2B. Da der Winkel BS_2A ein rechter ist, gilt dies auch für den Winkel AS_1B. Die Gerade S_1A steht somit senkrecht auf S_1S_2 (nach Voraussetzung), auf g_1 und auf S_1B; also liegen diese Geraden und damit auch g_1 und g_2 in einer Ebene.
Mit dem Satz D 6 hängt auch der folgende Satz zusammen:

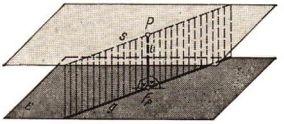
- Steht von zwei parallelen Geraden die eine senkrecht auf einer Ebene, so gilt das auch für die andere.

7 **DEFINITION: Zwei Ebenen heißen parallel, wenn die Lote der einen Ebene zu den Loten der anderen Ebene parallel sind.**

Bemerkung: Zusammenfallende Ebenen sind dementsprechend parallel.

8 **SATZ: Zu einer Ebene gibt es durch einen beliebigen Punkt genau eine Parallelebene.**

Bemerkung (Bild D 6):
Wir fällen das Lot l vom Punkt P auf die Ebene ε und legen durch l eine Ebene; sie schneidet ε in der Geraden g. Die Parallelebene zu ε durch P schneidet die zu ε senkrechte Ebene in der Geraden s, einer Parallelen zu g. Die Annahme mehrerer Parallelebenen führt zu einem Widerspruch mit Satz D 2 e.



D 6

9 **SATZ: Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die Schnittgeraden parallel.**

D

Bemerkung: Die Schnittgeraden zweier verschiedener Parallelebenen mit einer dritten Ebene liegen in einer Ebene und haben keinen Punkt gemeinsam.

10 **DEFINITION: Eine Gerade heißt parallel zu einer Ebene, wenn sie zu einer Geraden in dieser Ebene parallel ist.**

Bemerkung: Liegt die Gerade in der Ebene, dann ist sie dementsprechend auch parallel zur Ebene.

Aufgaben d 24 und 25

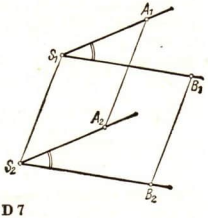
Winkel im Raum

6

---

11 **SATZ: Sind die Schenkel zweier Winkel paarweise parallel und haben sie gleichen Richtungssinn, so sind die Winkel kongruent und liegen in parallelen Ebenen.**

Bemerkung (Bild D 7):
Wir verbinden die Scheitel S_1 und S_2 der beiden Winkel, tragen auf den gleichgerichteten Schenkeln gleiche Strecken an und verbinden die entsprechenden Eckpunkte miteinander. Mit Hilfe der Eigenschaften der dabei entstehenden Parallelogramme kann der Satz bewiesen werden.



D 7

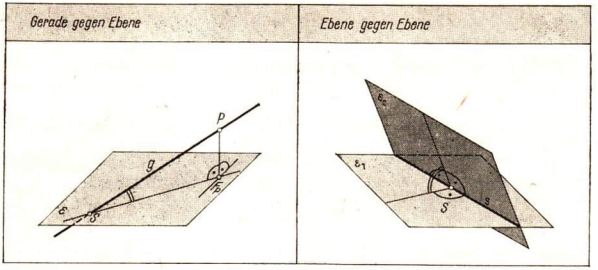
12 **DEFINITION: Als Neigungswinkel einer Geraden g mit einer Ebene ε (g nicht parallel ε) wird der höchstens rechte Winkel bezeichnet, den die Gerade mit jener Geraden der Ebene einschließt, die durch den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene und den Fußpunkt des Lotes von einem Punkt der Geraden auf die Ebene bestimmt ist** (Bild D 8).

Bemerkung: Steht die Gerade auf der Ebene senkrecht, so ist die in der Ebene liegende Bezugsgerade nicht eindeutig bestimmt; der Neigungswinkel ist in diesem Falle ein rechter Winkel (↗ Definition D 4).

13 **SATZ: Wenn eine Gerade parallele Ebenen schneidet, so schneidet sie diese unter gleichen Neigungswinkeln.**

14 **DEFINITION: Als Neigungswinkel zweier nicht paralleler Ebenen wird der höchstens rechte Winkel bezeichnet, den die in den beiden Ebenen liegenden Geraden, die durch einen Punkt der Schnittgeraden der Ebenen gehen und auf dieser Schnittgeraden senkrecht stehen, miteinander einschließen** (Bild D 9).

D



D 8 D 9

Bemerkung: Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein Rechter, so werden die Ebenen als zueinander senkrecht bezeichnet.

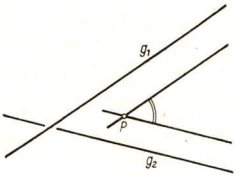
15 **SATZ: Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht jede die Gerade enthaltende Ebene auf jener Ebene senkrecht.**

Mit diesem Satz hängen auch die folgenden Sätze zusammen:

- Stehen zwei Ebenen aufeinander senkrecht, so ist jede zur Schnittgeraden der Ebenen senkrechte Gerade der einen Ebene eine Senkrechte zur anderen Ebene.
- Stehen zwei nichtparallele Ebenen senkrecht auf einer dritten Ebene, so ist ihre Schnittgerade senkrecht zu dieser Ebene.

16 **SATZ: Wenn eine Ebene parallele Ebenen schneidet, so schneidet sie diese unter gleichen Neigungswinkeln.**

17 **DEFINITION: Als Winkel zwischen zwei windschiefen Geraden wird der höchstens rechte Winkel bezeichnet, den die Parallelen zu den zwei Geraden durch einen Punkt des Raumes einschließen** (Bild D 10).



D 10

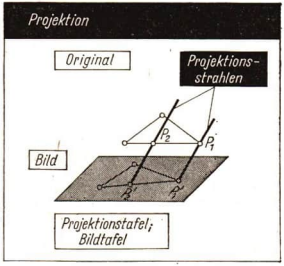
Die Definition gründet sich auf Satz D 11. Der Punkt kann beliebig, z. B. auch auf einer der beiden Geraden, angenommen werden.

Aufgaben d 26 bis 29

Der Begriff „Projektion" (Wiederholung)

7

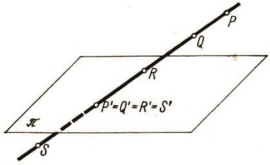
Grundlage der darstellend-geometrischen Abbildung ist die **Projektion.** Hierbei bilden sich die Punkte des Raumes durch gerade Linien, die **Projektionsstrahlen**, auf die Punkte einer Ebene, der **Projektionsebene** oder Bildtafel, ab. Der Schnittpunkt des Projektionsstrahls durch einen gegebenen Punkt P mit der Bildtafel heißt Projektion P' (auch Bildpunkt genannt, Bild D 11). Bei der Abbildung durch Projektion entspricht jedem Punkt P des Raumes genau ein Bildpunkt P' der Bildtafel, d. h., es gilt der



D 11

18 **SATZ: Die Abbildung durch Projektion ist eindeutig.**

Der Punkt P' ist jedoch nicht nur die Projektion des Punktes P. Jeder beliebige Punkt des Projektionsstrahls durch P hat P' zur Projektion (Bild D 12). Dem Punkt P' der Bildtafel ist somit kein bestimmter Raumpunkt eindeutig zugeordnet.



D 12

D

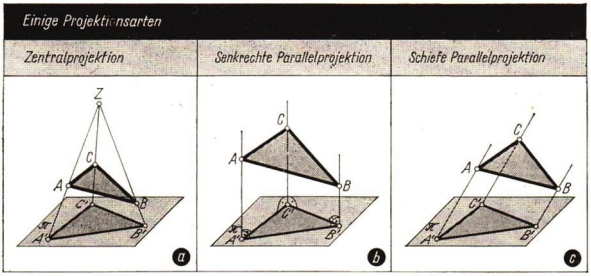
19 **SATZ: Die Abbildung durch Projektion ist nicht umkehrbar eindeutig.**

Es gibt mehrere Projektionsarten.
Bei der **Zentralprojektion** gehen alle Projektionsstrahlen durch einen festen Punkt Z (Bild D 13 a). Bei der **Parallelprojektion** verlaufen die Projektionsstrahlen parallel. Beträgt bei der Parallelprojektion der Neigungswinkel der Projektionsstrahlen 90°, so sprechen wir von **senkrechter Parallelprojektion** (Bild D 13 b). Liegt der Neigungswinkel der Projektionsstrahlen zwischen 0° und 90°, so sprechen wir von **schiefer Parallelprojektion** (Bild D 13 c).
An das Bild eines Gegenstandes stellt man drei Anforderungen:

a) **Anschaulichkeit,** d. h., es soll weitgehend dem Bild entsprechen, wie wir es mit dem Gesichtssinn wahrnehmen können;

b) **Maßgerechtigkeit,** d. h., es soll zur Entnahme der Maße aus der Zeichnung geeignet sein;

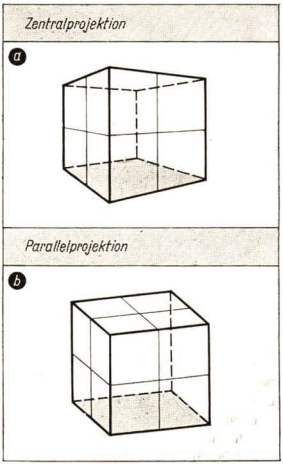
c) **geringe Konstruktionsschwierigkeit.**



D 13

Von einem einzigen Verfahren lassen sich alle drei Forderungen gleichzeitig nur in begrenztem Maße verwirklichen. Deshalb greift man je nach Verwendungszweck auf das eine oder das andere Verfahren zurück.
Die *Zentralprojektion* ist sehr anschaulich, Maße können jedoch nur in besonderen Fällen der Zeichnung unmittelbar entnommen werden. Die Konstruktion ist im allgemeinen schwierig. (Auch die Abbildung mittels einer photographischen Kamera ist, geometrisch betrachtet, eine Zentralprojektion.)

2 Das Bild D 14 a zeigt einen Würfel in Zentralprojektion. Es ist anschaulich, aber die beim Würfel gleich langen Körperkanten werden je nach Lage verschieden lang abgebildet.
Die Parallelprojektion liefert bei allgemeiner Lage der Körper verhältnismäßig anschauliche Abbildungen, die jedoch oftmals verzerrt wirken (Bild D 14 b).
Die Darstellung im Schrägbild ist auf die Abbildung durch *schiefe Parallelprojektion* zurückzuführen.
Die *senkrechte Parallelprojektion* ergibt bei besonderer Lage im allgemeinen Bilder geringer Anschaulichkeit. Die Maße können unmittelbar oder durch einfache Konstruktion entnommen werden.
Die Zeichenverfahren sind verhältnismäßig einfach.



D 14

D

Eigenschaften der senkrechten Parallelprojektion
8

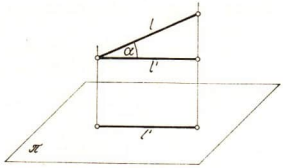
Figuren, die *in der Projektionsebene* liegen, ergeben bei allen genannten Projektionsverfahren Bilder, die mit den Originalen zusammenfallen.
Figuren, die *in Parallelebenen zur Projektionsebene* liegen, ergeben

– bei der Parallelprojektion Bilder, die kongruent zu den Originalen sind,

– bei der Zentralprojektion Bilder, die ähnlich gegenüber den Originalen sind.

Der Vorteil der Parallelprojektion im Hinblick auf die Maßgenauigkeit ist dadurch begründet, daß bei spezieller Lage der Figuren die Bilder und die Originale kongruent sind.
Bei senkrechter Parallelprojektion kommen noch die einfache Konstruktionsweise und die Möglichkeit hinzu, daß Figuren, die auf Grund ihrer geneigten Lage zur Projektionstafel keine kongruenten Bilder ergeben, ohne Mühe in die Parallellage zur Bildtafel gebracht werden können.
Zwischen der Länge des Originals l, der Länge des Bildes l' und dem Neigungswinkel α gegen die Tafel besteht folgender Zusammenhang (Bild D 15):

20 $\boxed{l' = l \cdot \cos\alpha}$



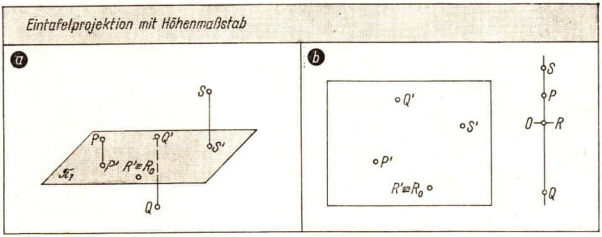
D 15

D

Die senkrechte Eintafelprojektion – Punkt und Gerade
9

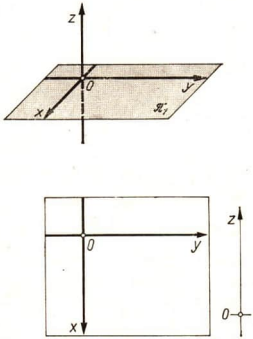
Wird bei der senkrechten Projektion die Bildtafel horizontal angenommen, so sprechen wir vom **Grundrißverfahren**. Wir bezeichnen die Bildtafel als **Grundrißtafel** π_1 und die Projektion des Punktes P als **Grundriß** P'.
Die Abbildung auf die Grundrißtafel π_1 ist nicht eineindeutig (↗ Satz D 19). Deshalb muß die Lage eines Punktes P im Raum außer durch seinen Grundriß P' durch ein zusätzliches Bestimmungsstück angegeben werden. Wir wissen bereits, daß hierfür ein **Höhenmaßstab**, der den Abstand des Raumpunktes von der Grundrißtafel nennt, geeignet ist. Dabei werden Punkten, die *unter der Grundrißtafel* liegen, negative Höhenwerte zugeordnet.

Die Punkte der Grundrißtafel haben die Höhe 0; bei diesen Punkten fallen Grundriß und Original zusammen (Bild D 16). Das Zusammenfallen von Original und Riß wird im Bild oftmals durch die Identitätsbeziehung gekennzeichnet (z. B. $R' \equiv R$, gesprochen: R' identisch R).



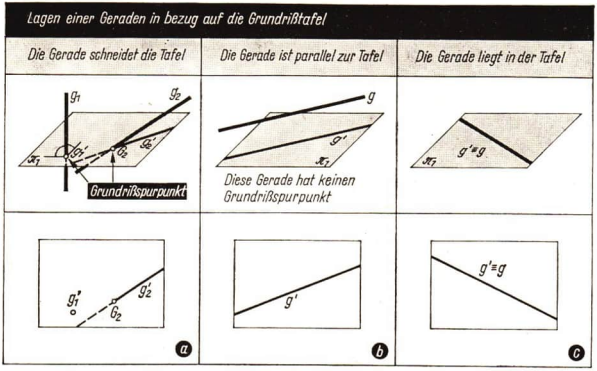
D 16

Ist die räumliche Lage von Punkten durch kartesische Koordinaten angegeben, so legen wir die x,y-Ebene des Koordinatensystems in die Grundrißtafel und lassen die y-Achse vom Standpunkt des Betrachters aus mit ihrem positiven Richtungssinn nach rechts weisen (↗ Lerneinheit D 1). Die z-Koordinate gibt dann die Höhe des Punktes bezüglich der Grundrißtafel (Kote) an; sie wird auf dem Höhenmaßstab angetragen (Bild D 17).



D 17

Aufgaben d 30 bis 35



D 18

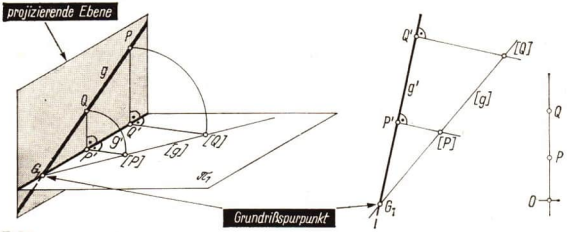
Eine **Gerade** wird im Grundriß als Gerade abgebildet; ausgenommen sind die Geraden, die auf der Grundrißtafel senkrecht stehen (Bild D 18).

21 **SATZ: Der Grundriß einer durch zwei Punkte bestimmten Geraden ist die Verbindungsgerade der Grundrisse dieser zwei Punkte.**

Bemerkung: Fallen die Grundrisse der zwei Punkte zusammen, so ist der gemeinsame Punkt auch der Grundriß der Geraden.

Grundaufgabe: Konstruieren des Grundrißspurpunktes einer Geraden

3 *Gegeben:* Eine Gerade g durch die Grundrisse und die Höhen zweier Punkte P, Q (g nicht senkrecht auf π_1; Bild D 19).
Gesucht: Der Grundrißspurpunkt G_1 von g, d. h. der Schnittpunkt von G und π_1.



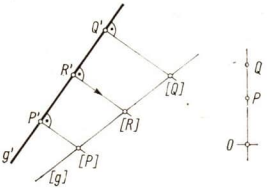
D 19

Vorüberlegung: Die Projektionsstrahlen der Punkte der Geraden g erfüllen eine Ebene, die **projizierende Ebene**. Die projizierende Ebene durch g enthält auch den Grundriß g'. Der Schnittpunkt von g und g' liegt somit auch in dieser Ebene, er ist der gesuchte Spurpunkt G_1. Ebenso sind in der projizierenden Ebene die Projektionsstrahlen PP' und QQ' enthalten.
Um die Konstruktion auf dem Zeichenblatt ausführen zu können, klappen wir die projizierende Ebene in die Grundrißtafel. Bei dieser Klappung bleibt g' (als Klappungsachse) fest. $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$ stehen auf g' senkrecht; diese Beziehung bleibt bei der Klappung erhalten.

Ausführung: Wir zeichnen in den Punkten P' und Q' Senkrechten zu g' und tragen auf diesen Senkrechten die Höhen $\overline{OP}$ bzw. $\overline{OQ}$ auf (unter Beachtung des Richtungssinns der Höhenangaben). Die Punkte, die wir dabei erhalten, sind die Umklappungen der Punkte P und Q, wir bezeichnen sie mit $[P]$ bzw. $[Q]$ (gesprochen: P umgeklappt, Q umgeklappt). Die Verbindungsgerade $[P]$ $[Q]$ ist $[g]$, die Umklappung von g. Der Schnitt von $[g]$ und g' ist der gesuchte Grundrißspurpunkt G_1.

4 *Gegeben:* Eine Gerade g durch zwei Punkte P, Q (Grundrisse, Höhen). Auf g liegt ein dritter Punkt R, dessen Grundriß R' gegeben ist.

Gesucht: Die *Höhe des Punktes R* (Bild D 20).



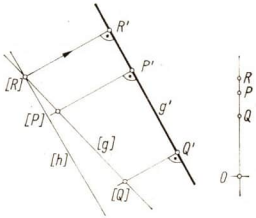
D 20

Vorüberlegung: Die projizierende Ebene durch g enthält außer den Projektionsstrahlen PP' und QQ' auch RR'; die Strecke $\overline{RR'}$ ist die gesuchte Höhe.

Ausführung: Wir konstruieren die Umklappungen $[P]$ und $[Q]$ und damit die Umklappung $[g]$ der Geraden. Der Schnitt von $[g]$ mit der Senkrechten zu g' in R' ist die Umklappung $[R]$; die Strecke $\overline{R'[R]}$ ist die gesuchte Höhe.

5 *Gegeben:* Eine Gerade g durch zwei Punkte P, Q (Grundrisse, Höhen).

Gesucht: Der *Grundriß eines Punktes R* von g, dessen Höhe gegeben ist (Bild D 21).



D 21

Vorüberlegung: In der projizierenden Ebene durch g liegen die Punkte mit der gegebenen Höhe in einer Parallelen zu g', deren Abstand von g' die gegebene Höhe ist. Der Schnittpunkt dieser Parallelen h mit g ist der gesuchte Punkt R. In der Umklappung ist $[h]$ eine Parallele zu g'.

D

Ausführung: Wir konstruieren die Umklappung $[g]$ und zeichnen $[h]$ als Parallele zu g' im entsprechenden Abstand. Der Schnittpunkt von $[g]$ und $[h]$ ist $[R]$; das Lot von $[R]$ auf g' ergibt den gesuchten Grundriß R'.

(3) Unter welchen Bedingungen (Lage der Geraden gegenüber der Grundrißtafel) sind die in den Beispielen D 3 bis D 5 dargestellten Aufgaben nicht oder nicht eindeutig lösbar?

Aufgaben d 36 bis 41

Neigungswinkel einer Geraden – wahre Länge einer Strecke 10

Eine Strecke hat bei der senkrechten Eintafelprojektion als Bild		
eine zu ihr kongruente Strecke, wenn sie eine zur Tafel parallele Lage hat.	eine verkürzte Strecke, wenn sie gegen die Tafel einen Neigungswinkel α mit $0° < \alpha < 90°$ hat.	einen Punkt, wenn sie senkrecht auf der Tafel steht.

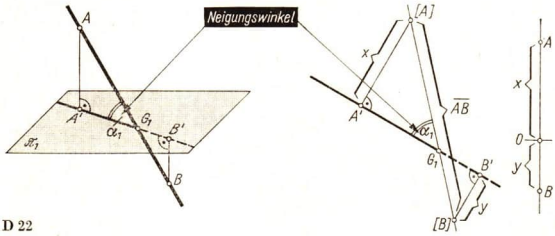
Mit der im Beispiel D 3 erläuterten Methode der Klappung einer projizierenden Ebene durch eine Gerade lassen sich auch die folgenden Grundaufgaben konstruieren.

Grundaufgaben:
Konstruieren des Neigungswinkels einer Geraden gegen die Tafel
Konstruieren der wahren Länge einer Strecke

6 *Gegeben:* Eine Gerade AB durch die Punkte A, B (Grundrisse, Höhen).

Gesucht: Der Neigungswinkel α_1 dieser Geraden gegen die Grundrißtafel und die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ (Bild D 22).

D

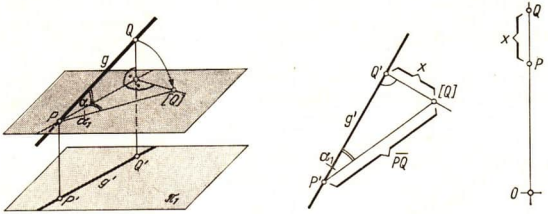


D 22

Liegen die Punkte so im Raum, daß der Grundrißspurpunkt der Geraden weit entfernt ist, kann man sich zur Tafel eine Parallelebene denken und die Klappung der projizierenden Ebene in diese Parallelebene vornehmen. Der Neigungswinkel der Geraden gegen diese Parallelebene ist gleich dem Winkel gegen die Tafel (↗ Satz D 13).

7 *Gegeben:* Eine Gerade PQ durch die Punkte P, Q (Grundrisse, Höhen).

Gesucht: Der Neigungswinkel α_1 dieser Geraden gegen die Grundrißtafel und die wahre Länge der Strecke $\overline{PQ}$ (Bild D 23).



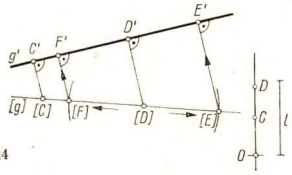
D 23

Vorüberlegung: Es ist zweckmäßig, die Parallelebene durch einen der gegebenen Punkte zu legen.

8 *Gegeben:* Eine Gerade CD durch die Punkte C, D (Grundrisse, Höhen).

Gesucht: Die Grundrisse der Punkte der Geraden, die von D einen gegebenen Abstand l haben (Bild D 24).

Vorüberlegung: Die gesuchten Punkte, die zu beiden Seiten von D liegen, seien E und F. In der Umklappung liegen die Punkte $[E]$ und $[F]$ auf $[g]$; die Strecken $\overline{[D]\,[E]}$ und $\overline{[D]\,[F]}$ haben die gegebene Länge.



D 24

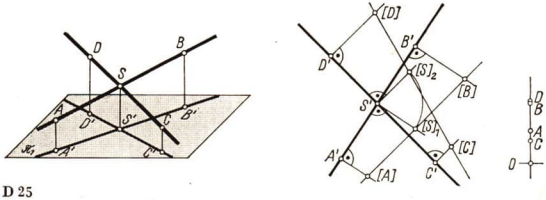
Ausführung: Wir konstruieren $[g]$ und tragen auf $[g]$ von $[D]$ aus die Strecken gegebener Länge ab. Von $[E]$ und $[F]$, die wir erhalten, fällen wir die Lote auf g'. Dadurch werden die Grundrisse und die Höhen der gesuchten Punkte gewonnen.

Aufgaben d 42 bis 46

Gegenseitige Lage zweier Geraden
11

Zwei **einander schneidende Geraden** haben genau einen Punkt, den Schnittpunkt, gemeinsam. Der Grundriß des Schnittpunktes ist der Schnittpunkt der Grundrisse der Geraden (sofern diese Grundrisse nicht zusammenfallen); umgekehrt kann jedoch aus dem Vorhandensein eines Schnittpunktes der Grundrisse zweier Geraden nicht gefolgert werden, daß die Geraden einander schneiden, sie können auch windschief sein.

9 *Gegeben:* Zwei Geraden AB und CD (Grundrisse und Höhen der Punkte).
Es ist zu untersuchen, welche gegenseitige Lage die Geraden haben (Bild D 25).



D 25

Vorüberlegung: Da die Grundrisse der Geraden einander schneiden, können die Geraden nicht parallel sein. Dem Schnittpunkt der Grundrisse $A'B'$ und $C'D'$ ist auf AB ein Punkt, bezeichnet mit P_1, und auf CD ein Punkt, bezeichnet mit P_2, zugeordnet. Fallen P_1 und P_2 zusammen, so schneiden die Geraden einander, fallen P_1 und P_2 nicht zusammen, so sind die Geraden windschief. *Kriterium für das Zusammenfallen dieser Punkte ist die Gleichheit ihrer Höhen.*

D

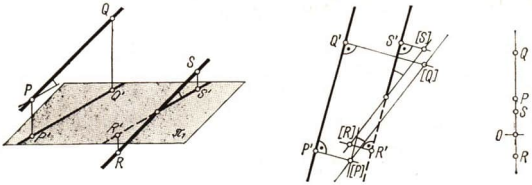
Ausführung: Die projizierenden Ebenen durch AB und CD werden in die Grundrißtafel geklappt; wir ermitteln die Höhen von P_1 und P_2 nach Beispiel D 4 und vergleichen diese Höhen. In diesem Beispiel haben P_1 und P_2 gleiche Höhe, es ist $P_1 = P_2 = S$, d. h., AB und CD schneiden einander in S.

Zwei **parallele Geraden**, die nicht zusammenfallen, haben als Grundrisse entweder zwei parallele Geraden oder eine Gerade oder zwei Punkte.

4 Charakterisieren Sie die Lage der beiden Geraden im zweiten und dritten Fall!

Aus dem Vorhandensein paralleler Grundrisse zweier Geraden kann jedoch umgekehrt nicht gefolgert werden, daß die Geraden parallel sind, sie können auch windschief sein.

D 26



10 *Gegeben:* Zwei Geraden PQ und RS (Grundrisse und Höhen der Punkte).
Es ist zu untersuchen, welche gegenseitige Lage die Geraden haben (Bild D 26).

Vorüberlegung: Da die Grundrisse der Geraden im Bild D 26 parallel sind, können die Geraden einander nicht schneiden. Kriterium für die Parallelität bei parallelen Grundrissen ist, daß die Geraden auch in der Umklappung parallel sind. Dann haben sie auch gleiche Neigungswinkel gegen die Tafel. Schneiden einander die Geraden in der Umklappung, so sind sie windschief.

Ausführung: Die projizierenden Ebenen der Geraden PQ und RS werden in die Grundrißtafel geklappt; wir prüfen nach, ob $[P][Q]$ und $[R][S]$ parallel zueinander verlaufen. Wir vergleichen hierzu die Neigungswinkel gegen die Tafel.

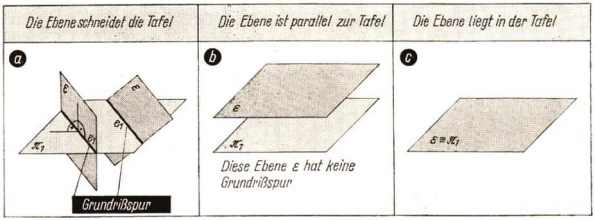
5 Welche gegenseitige Lage können zwei Geraden haben, deren Grundrisse zusammenfallen?

Aufgaben d 47 bis 53

Höhenlinien und Fallinien

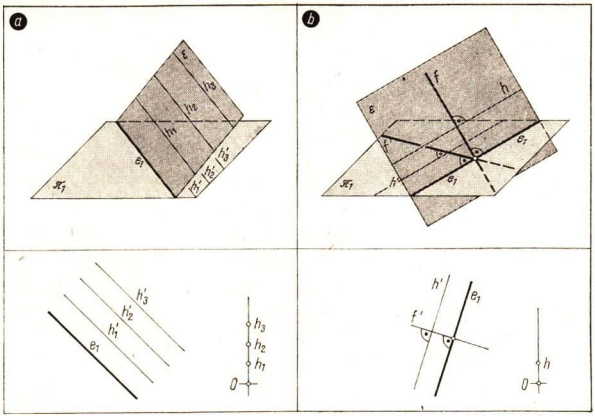
12

Eine Ebene wird im allgemeinen auf die gesamte Grundrißtafel abgebildet, d. h., die Grundrisse der Punkte der Ebene nehmen die ganze Projektionsebene ein. Eine Ausnahme stellen die projizierenden Ebenen dar, deren Grundrisse Geraden sind (Bild D 27). Durch die Grundrißspur allein ist eine Ebene nicht eindeutig



D 27

D



D 28

bestimmt. Deshalb ist es notwendig, noch ein weiteres Bestimmungsstück der Ebene anzugeben. Als ein weiteres Bestimmungsstück der Ebene kann eine Höhenlinie angegeben werden. Eine **Höhenlinie** ist eine Gerade der Ebene, deren Punkte von der Grundrißtafel gleichen Abstand haben, d. h. eine Schnittgerade der Ebene mit einer zur Grundrißtafel parallelen Ebene gegebener Höhe. Wir bezeichnen die Höhenlinien mit h oder mit jener Ziffer, die die Höhe (Kote) angibt.

Die Höhenlinien einer Ebene sind nach Satz D 9 zu deren Grundrißspur parallel, auch ihre Grundrisse sind Parallelen zu dieser Spur. Das Bild D 28 a zeigt die Darstellung einer Ebene durch ihre Grundrißspur und einige Höhenlinien (h_1; h_2; h_3); die Grundrißspur kann als Höhenlinie mit der Kote 0 angesehen werden.

D

6 Fertigen Sie eine dem Bild D 28 a entsprechende Skizze an, und ergänzen Sie die Darstellung der Ebene durch einige Höhenlinien mit negativen Koten!

Außer der Schar der Höhenlinien ist für die darstellende Geometrie noch eine weitere Schar paralleler Geraden der Ebene von Bedeutung: die Fallinien.

Fallinien sind Geraden, die auf der Grundrißspur (und damit auch auf den Höhenlinien) senkrecht stehen. Der Grundriß einer Fallinie ist gleichfalls eine Senkrechte zur Grundrißspur und zu den Grundrissen der Höhenlinien (Bild D 28 b).

Bemerkung: „Höhenlinien" und „Fallinien" werden auch bei gekrümmten Flächen unterschieden, sie sind dann im allgemeinen jedoch keine Geraden. Ein anschauliches Beispiel dafür bilden die Höhenschichtlinien und die Schraffuren bei topographischen Karten.

Aufgaben d 54 bis 57

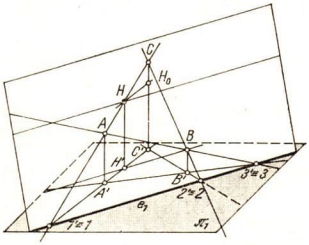
13

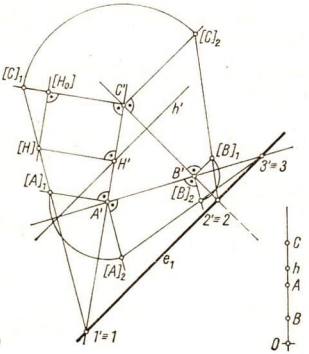
11 *Gegeben:* Eine Ebene durch drei Punkte A, B, C (Grundrisse, Höhen). (Diese Punkte liegen nicht in einer Geraden.)

Gesucht: Die Grundrißspur und eine Höhenlinie (Höhe gegeben) der Ebene (Bild D 29).

Vorüberlegung: Die Spur der Ebene enthält die Spurpunkte der Geraden, die in der Ebene liegen: zu diesen Geraden gehören die Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte. Da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt wird, genügen zur Bestimmung der gesuchten Spur die Grundrißspurpunkte zweier Geraden.
Ist die Spur gefunden, so genügt zur Konstruktion der gesuchten Höhenlinie ein Punkt mit der gegebenen Höhe; durch ihn verläuft die Höhenlinie parallel zur Spur.

Ausführung: Wir konstruieren nach Beispiel D 3 die Grundrißspurpunkte der Geraden AC und BC; die Verbindungsgerade dieser Spurpunkte ist die gesuchte Spur der Ebene. Der Spurpunkt der Geraden AB dient der Kontrolle der Zeichengenauigkeit.
Um den Grundriß der Höhenlinie von gegebener Höhe zu ermitteln, suchen wir auf der Geraden AC den Punkt mit der betreffenden Höhe nach Beispiel D 5 auf; die Parallele zur Spur durch den Grundriß dieses Punktes ist der Grundriß der gesuchten Höhenlinie. Zur Kontrolle der Zeichengenauigkeit kann ein Punkt der betreffenden Höhe auf einer anderen Geraden — etwa BC — herangezogen werden.





D 29

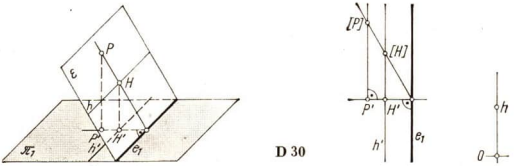
Ist die Ebene durch zwei (einander schneidende oder parallele) Geraden bestimmt, so werden Grundrißspur und Höhenlinien auf die gleiche Art wie im Beispiel D 11 konstruiert. Sind von einer Ebene eine Gerade und ein Punkt außerhalb der Geraden gegeben, so wird durch diesen Punkt und einen bekannten Punkt der gegebenen Geraden eine Hilfsgerade gelegt; damit ist dieser Fall auf die Bestimmung der Ebene durch zwei einander schneidende Geraden zurückgeführt.

(7) Wie wird die Grundrißspur einer Ebene ermittelt, wenn sich die Grundrisse der sie bestimmenden Geraden decken?

Soll von einem Punkt einer gegebenen Ebene, dessen Grundriß bekannt ist, die Höhe gefunden werden, so legt man durch ihn in der Ebene eine Hilfsgerade, die die Spur der Ebene und die gegebene Höhenlinie (oder, falls die Ebene durch zwei Geraden bestimmt wird, diese Geraden) schneidet.

[12] *Gegeben:* 1. Eine Ebene durch ihre Grundrißspur und eine Höhenlinie, 2. der Grundriß eines Punktes P dieser Ebene.

Gesucht: Die Höhe von P (Bild D 30).



D 30

Vorüberlegung: Die als Hilfsgerade gewählte Fallinie der Ebene durch P schneidet die Grundrißspur und die Höhenlinie der Ebene. In der projizierenden Ebene durch diese Fallinie liegt auch der Projektionsstrahl des Punktes P. Aus der Umklappung dieser projizierenden Ebene kann die gesuchte Höhe $\overline{OP}$ entnommen werden.

Ausführung: Die Umklappung der projizierenden Ebene wird nach Beispiel D 3 konstruiert.

Aufgaben d 58 bis 63

D

Neigungswinkel einer Ebene – wahre Größe einer ebenen Figur

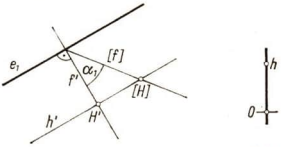
14

Der **Neigungswinkel** einer Ebene gegen die Grundrißtafel ergibt sich nach Definition D 14 als Winkel zwischen einer Fallinie der Ebene und ihrem Grundriß.

Grundaufgabe: Konstruieren des Neigungswinkels einer Ebene gegen die Tafel

13 *Gegeben:* Eine Ebene ε durch ihre Spur e_1 und eine Höhenlinie h.

Gesucht: Der Neigungswinkel α_1 der Ebene gegen die Grundrißtafel (Bild D 31).



D 31

Vorüberlegung: Die projizierende Ebene durch eine Fallinie enthält deren Grundriß und damit auch den gesuchten Neigungswinkel als Winkel zwischen der Fallinie und ihrem Grundriß.

Ausführung: Wir führen die Klappung der projizierenden Ebene durch eine beliebig angenommene Fallinie um deren Grundriß aus.

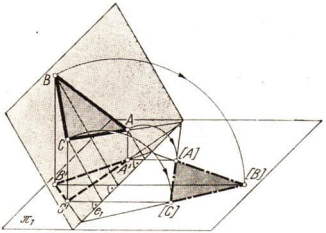
Ebene Figuren, die zur Grundrißtafel keine parallele Lage haben (oder die nicht in der Grundrißtafel liegen), werden nach den Gesetzen der senkrechten Projektion nicht in wahrer Größe abgebildet; für die Lösung von Konstruktionsaufgaben, vor allem für eine Maßentnahme aus der Zeichnung, ist jedoch die Kenntnis ihrer **wahren Größe** erforderlich.

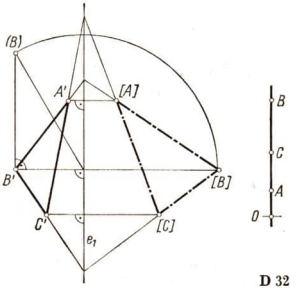
Grundaufgabe: Konstruieren der wahren Größe eines Dreiecks

14 *Gegeben:* Ein Dreieck ABC durch die Grundrisse und Höhen seiner Eckpunkte.

Gesucht: Die wahre Größe des Dreiecks (Bild D 32).

Vorüberlegung: Das Dreieck ABC bestimmt eine Ebene. Wird diese Ebene um ihre Spur in die Grundrißtafel geklappt, so ergibt sich in der Umklappung die Figur in wahrer Größe.





D 32

Bei dieser Klappung bewegen sich die Punkte der Ebene ABC auf Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf der Spur der Ebene ABC stehen und deren Mittelpunkte in dieser Spur liegen (die Spur ist somit Achse dieser Kreise); die Grundrisse der kreisbogenförmigen Bahnen sind Senkrechte zur genannten Spur. Die Punkte der Klappungsachse, d. h. der Spur von ABC, verändern ihre Lage bei der Klappung nicht.

Ausführung: Wir ermitteln nach Beispiel D 11 die Grundrißspur e_1 der Ebene ABC und konstruieren nach Beispiel D 13 die Umklappung der auf e_1 senkrecht stehenden projizierenden Ebene durch einen Punkt der Ebene ABC (im Bild D 32 der Punkt B). In der Umklappung der projizierenden Ebene — die Umklappung von B erhält das Symbol (B) — zeichnen wir die kreisbogenförmige Bahn des Punktes B bei der Klappung der Ebene ABC um e_1; der Endpunkt $[B]$ dieser Klappungsbahn ist der Schnitt des Kreisbogens mit der Senkrechten zu e_1 durch B'.
Haben wir $[B]$ gefunden, so können die Umklappungen weiterer Punkte meist nach folgender Überlegung ermittelt werden:
Die Geraden BC und $B'C'$ schneiden einander in einem Punkte von e_1; durch diesen Punkt geht auch die Gerade $[B][C]$. Die Verbindungsgerade des Schnittpunktes von $B'C'$ mit e_1 und des Punktes $[B]$ ist somit die Gerade $[B]$ $[C]$. Der Schnitt des Lotes von C' auf e_1 mit $[B]$ $[C]$ ergibt den Punkt $[C]$. Der Punkt $[A]$ wird auf die gleiche Weise ermittelt. Das Dreieck $[A]$ $[B]$ $[C]$ gibt die wahre Größe des Dreiecks ABC wieder.

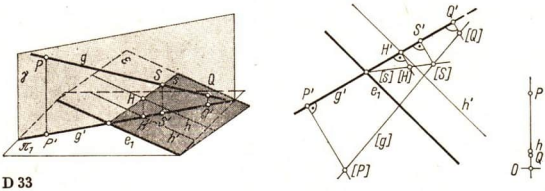
Aufgaben d 64 bis 68

Schnitt einer Ebene mit einer Geraden – Senkrechte und Lot 15

---

15 *Gegeben:* 1. Eine Ebene ε durch ihre Grundrißspur und eine Höhenlinie, 2. eine Gerade g durch zwei Punkte P, Q (Grundrisse, Höhen).

Gesucht: Der Schnittpunkt von g mit ε (Bild D 33).



D 33

Vorüberlegung: Die projizierende Ebene γ durch g schneidet die Ebene ε in der Geraden s; der Schnittpunkt von g und s ist der gesuchte Schnittpunkt S von g und ε.

Ausführung: Wir konstruieren die Umklappung [g] der gegebenen Geraden nach Beispiel D 3 und ermitteln die Umklappung [s] der Schnittgeraden von γ und ε. Der Schnittpunkt von [g] und [s] ist [S], die Umklappung des gesuchten Schnittpunkts. Aus [S] werden S' und die Höhe $\overline{OS}$ gewonnen.

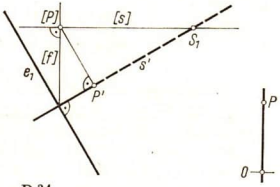
(8) Welche Lage hat im Beispiel D 15 die Gerade g gegenüber der Ebene ε, falls g und s einander nicht schneiden?

Grundaufgabe: Konstruieren der Senkrechten in einem Punkt auf eine Ebene

16 *Gegeben:* Eine Ebene ε durch ihre Spur e_1 und durch einen Punkt P (Grundriß, Höhe).

Gesucht: Grundriß s' und Spurpunkt S_1 der Senkrechten zu ε im Punkt P (Bild D 34).

Vorüberlegung: Die gesuchte Senkrechte liegt in derjenigen projizierenden Ebene durch P, die senkrecht auf e_1 steht. Diese projizierende Ebene schneidet die Ebene in der Fallinie f; die gesuchte Senkrechte s ist nach Definition D 4 auch Senkrechte zu f.



D 34

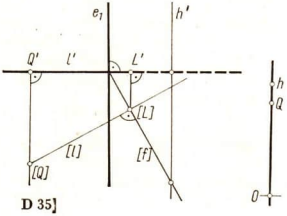
Ausführung: Wir zeichnen durch P' eine Senkrechte zu e_1; sie ist sowohl der gesuchte Grundriß s' als auch der Grundriß f'. Um diese Gerade wird die Klappung der projizierenden Ebene ausgeführt. In [P] wird auf [f] die Senkrechte errichtet; diese Senkrechte ist [s], die Umklappung von s. Der Schnittpunkt von [s] und s' ist der gesuchte Spurpunkt S_1 der Senkrechten.

Grundaufgabe: Konstruieren des Lotes von einem Punkt auf eine Ebene

17 *Gegeben:* 1. Eine Ebene ε durch ihre Spur e_1 und eine Höhenlinie h sowie 2. ein Punkt Q außerhalb der Ebene (Grundriß, Höhe).

Gesucht: Der Grundriß des Lotes l von Q auf ε sowie Grundriß und Höhe des Lotfußpunktes L (Bild D 35).

Vorüberlegung: Das gesuchte Lot l liegt in der projizierenden Ebene durch Q, die senkrecht auf e_1 steht. Diese projizierende Ebene schneidet die Ebene ε in der Fallinie f; l ist das Lot von Q auf f, sein Fußpunkt L ist der Schnittpunkt von l und f.



D 35

Ausführung: Wir zeichnen durch Q' eine Senkrechte zu e_1; sie ist sowohl der gesuchte Grundriß l' als auch der Grundriß f'. In der Umklappung konstruieren wir [Q] und [f], fällen von [Q] das Lot auf [f] und erhalten damit [L]. Aus [L] ermitteln wir den Grundriß L' und die Höhe $\overline{OL}$.

Aufgaben d 69 bis 78

D

Die senkrechte Zweitafelprojektion – Punkt und Gerade
16

An Stelle des Höhenmaßstabs kann für die Kennzeichnung der Lage eines Punktes gegenüber der Grundrißtafel auch die senkrechte Projektion auf eine zweite, zur Grundrißtafel senkrechte Bildtafel gewählt werden. Diese Bildtafel bezeichnen wir als **Aufrißtafel** π_2 und die Projektion des **Punktes** P auf diese Tafel als **Aufriß** P''.

Für das Zeichnen wird bekanntlich die Aufrißtafel um die Schnittgerade der beiden Bildtafeln, die **Rißachse**, in die Grundrißtafel geklappt.

Dann ergeben sich folgende Sätze:

1. Liegt ein Punkt **über** der Grundrißtafel, so liegt sein Aufriß **über** der Rißachse; liegt ein Punkt **unter** der Grundrißtafel, so liegt sein Aufriß **unter** der Rißachse. Punkte in der Grundrißtafel haben ihren Aufriß in der Rißachse.

   Liegt ein Punkt **vor** der Aufrißtafel, so liegt sein Grundriß **unter** der Rißachse; liegt ein Punkt **hinter** der Aufrißtafel, so liegt sein Grundriß **über** der Rißachse. Punkte in der Aufrißtafel haben ihren Grundriß in der Rißachse.

2. Grundriß P' und Aufriß P'' des Punktes P liegen auf einer zur Rißachse senkrechten Geraden, einer **Ordnungslinie**.

3. Der Abstand des Grundrisses von der Rißachse gibt den Abstand des Punktes von der Aufrißtafel an.

   Der Abstand des Aufrisses von der Rißachse gibt den Abstand des Punktes von der Grundrißtafel an.

Der Anschaulichkeit wegen werden für das Zeichen folgende Vereinbarungen getroffen:

Im Grundriß werden Linien und Flächen von den **über** ihnen liegenden Elementen verdeckt, d. h., die Sichtbarkeit entspricht dem Blick **von oben** gegen die Grundrißtafel.

Im Aufriß werden Linien und Flächen von den **vor** ihnen liegenden Elementen verdeckt, d. h., die Sichtbarkeit entspricht dem Blick **von vorn** gegen die Aufrißtafel.

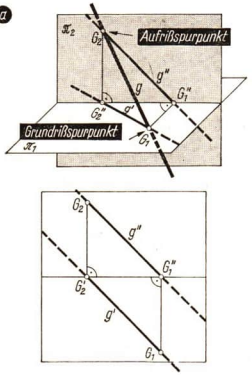
Ist die räumliche Lage von Punkten durch kartesische Koordinaten angegeben, so legen wir die x,y-Ebene des Koordinatensystems in die Grundrißtafel und die y,z-Ebene in die Aufrißtafel (↗ Lerneinheit D 1, besonders Bild D 2).

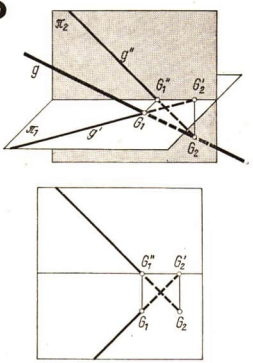
Aufgaben d 79 bis 87

Eine **Gerade** wird im allgemeinen sowohl im Grundriß als auch im Aufriß als Gerade abgebildet, ausgenommen sind die Geraden, die auf einer der Rißtafeln senkrecht stehen (Bild D 36).

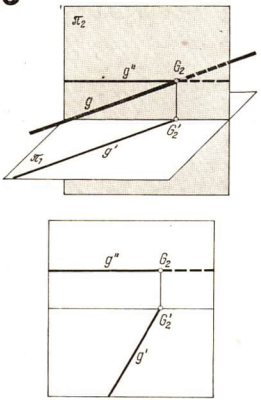
Einige Lagen einer Geraden in bezug auf die Rißtafeln

Die Gerade schneidet beide Tafeln

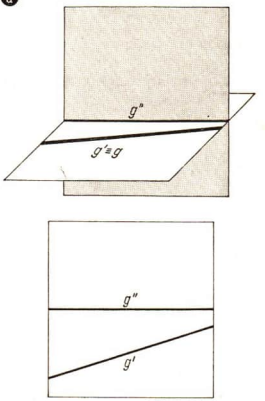




Die Gerade ist parallel zu einer Tafel



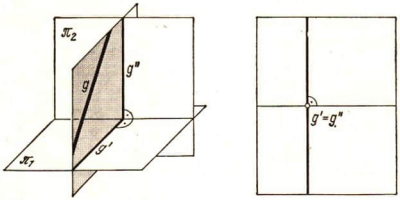
Die Gerade liegt in einer Tafel



D 36

D

Im allgemeinen ist eine Gerade durch ihre Risse eindeutig bestimmt. Eine Ausnahme bilden nur Geraden, deren Risse zusammenfallen und senkrecht auf der Rißachse stehen. Sie liegen in einer zur Rißachse senkrechten Ebene (Bild D 37).



D 37

(9) Zeichnen Sie als Ergänzung die folgenden Lagen einer Geraden!

a) Die Gerade g ist parallel zur Aufrißtafel und steht senkrecht auf der Grundrißtafel.

b) Die Gerade ist parallel zur Rißachse.

Ist eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt, so gilt der

22 **SATZ: Der Grundriß einer durch zwei Punkte bestimmten Geraden ist die Verbindungsgerade der Grundrisse dieser Punkte, ihr Aufriß die Verbindungsgerade der Aufrisse dieser Punkte.**

Bemerkung: Fallen die gleichnamigen Risse der zwei Punkte zusammen, so ist der gemeinsame Punkt auch der entsprechende Riß der Geraden.

Weiterhin gilt der

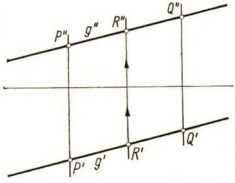
23 **SATZ: Liegt ein Punkt in einer Geraden, so liegen seine Risse in den gleichnamigen Rissen der Geraden.**
Liegen die Risse eines Punktes in den gleichnamigen Rissen einer Geraden, so gehört der Punkt der Geraden an. (Eine Ausnahme bildet der oben erwähnte Fall, ↗ Bild D 37.)

D

18 *Gegeben:* Eine Gerade g durch die Risse zweier Punkte P, Q. Auf der Geraden liegt ein dritter Punkt R, dessen Grundriß gegeben ist.

Gesucht: Der Aufriß dieses Punktes (Bild D 38).

Vorüberlegung: Da R ein Punkt von g ist, liegt sein Aufriß R'' in g''.

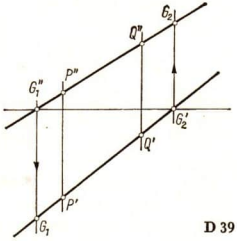


D 38

Ausführung: Wir verbinden P' mit Q' und P'' mit Q'' und erhalten damit die Risse g' und g'' der Geraden g. Wir tragen in g' den gegebenen Grundriß R' ein. Der Schnittpunkt der Ordnungslinie durch R' mit g'' ergibt den gesuchten Aufriß R''.

(10) Lösen Sie die in Beispiel D 18 gestellte Aufgabe, wenn von einem Punkt der Geraden der Aufriß gegeben und der Grundriß gesucht ist!

19 *Gegeben:* Eine Gerade g durch die Risse zweier Punkte P, Q.
Gesucht: Die Spurpunkte G_1 und G_2 dieser Geraden (Bild D 39).



D 39

Vorüberlegung: Der erste Spurpunkt G_1 hat seinen Aufriß G_1'' in der Rißachse; G_1'' ist somit der Schnittpunkt von g'' mit der Rißachse. Der zweite Spurpunkt G_2 hat seinen Grundriß G_2' in der Rißachse, G_2' ist der Schnittpunkt von g' mit der Rißachse.

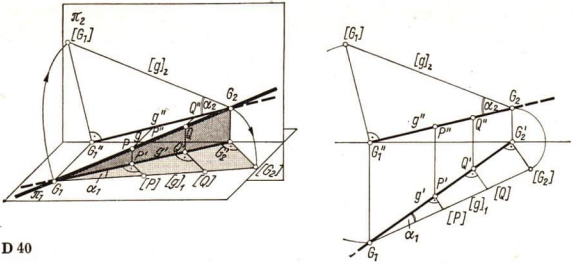
Bemerkung: Die Spurpunkte können auch in den verdeckten Teilen der Rißtafeln liegen; vergleichen Sie hierzu Bild D 36b!

Aufgaben d 88 bis 93

Neigungswinkel einer Geraden – wahre Länge einer Strecke 17

Grundaufgaben: Konstruieren des Neigungswinkels einer Geraden gegen die Tafel. Konstruieren der wahren Länge einer Strecke

20 *Gegeben:* Eine Gerade g durch die Risse zweier Punkte P, Q.
Gesucht: 1. Die Neigungswinkel der Geraden gegen die Rißtafeln sowie 2. die wahre Länge der Strecke $\overline{PQ}$ (Bild D 40).
Vorüberlegung: Die erstprojizierende Ebene durch g enthält den Neigungswinkel α_1 der Geraden g gegen die Grundrißtafel als Winkel zwischen g und g'; die zweitprojizierende Ebene durch g enthält analog den Neigungswinkel α_2 der Geraden g gegen die Aufrißtafel als Winkel zwischen g und g''. Jede der projizierenden Ebenen enthält die Strecke $\overline{PQ}$.



D 40

Ausführung: Die Konstruktion der Neigungswinkel α_1 und α_2 erfolgt auf gleiche Weise wie in Beispiel D 6; die Abstände der umzuklappenden Punkte werden dabei nicht einem Höhenmaßstab, sondern dem betreffenden Riß entnommen.

Die wahre Länge der Strecke $\overline{PQ}$ kann unabhängig voneinander in beiden Rissen durch Umklappung ermittelt werden. Das ermöglicht eine Kontrolle der Zeichengenauigkeit. (Im Bild D 40 wurde nur die Umklappung von $\overline{PQ}$ in die Grundrißtafel angegeben.)

Bei Platzmangel kann die Klappung der projizierenden Ebenen auch in eine Parallelebene zur Rißtafel vorgenommen werden (↗ Lerneinheit D 10, Beispiel D 7).

(11) Führen Sie bei der im Beispiel D 20 gestellten Aufgabe die Konstruktion durch Klappung der projizierenden Ebenen in die Parallelebenen zu den Rißtafeln durch den Punkt P aus!

Aufgaben d 94 bis 97

Gegenseitige Lage zweier Geraden

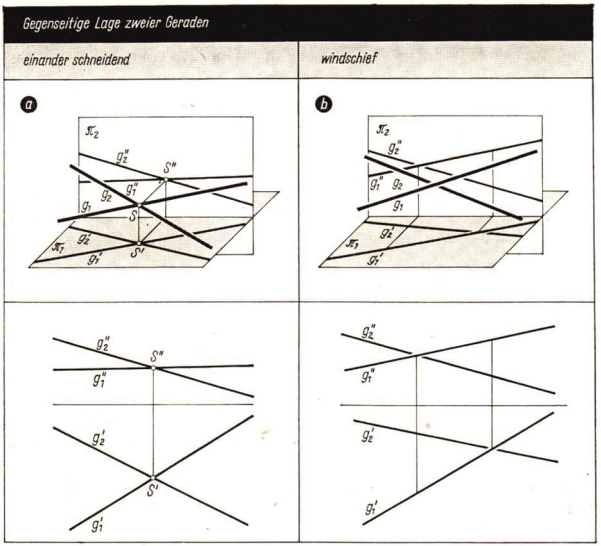
18

Bei zwei **einander schneidenden Geraden** sind der Schnittpunkt ihrer Grundrisse und der Schnittpunkt ihrer Aufrisse die gleich benannten Risse des Schnittpunktes der Geraden; sie liegen auf einer Ordnungslinie (Bild D 41 a).

Liegen der Schnittpunkt der Grundrisse und der Schnittpunkt der Aufrisse zweier Geraden nicht auf einer Ordnungslinie, so entsprechen dem Schnittpunkt der Grundrisse zwei verschiedene Punkte der zwei Geraden; das gleiche gilt für den Schnittpunkt der Aufrisse; die Geraden sind **windschief**. In der Zeichnung wird nach den Regeln der Sichtbarkeit die verdeckt liegende Gerade an der Kreuzungsstelle unterbrochen (Bild D 41 b).

Zwei **parallele Geraden** haben parallele Grund- und parallele Aufrisse, sofern die Risse nicht Punkte sind.

Aufgaben d 98 bis 105



D 41

Höhenlinien und Frontlinien

19

Eine Ebene wird im allgemeinen sowohl auf die gesamte Grundrißtafel als auch auf die gesamte Aufrißtafel abgebildet. Eine Ausnahme stellen die Ebenen dar, die auf einer Rißtafel oder beiden Rißtafeln senkrecht stehen (Bild D 42).

Liegt die Ebene zu keiner der Rißtafeln parallel, so haben die Grundriß- und die Aufrißspur der Ebene

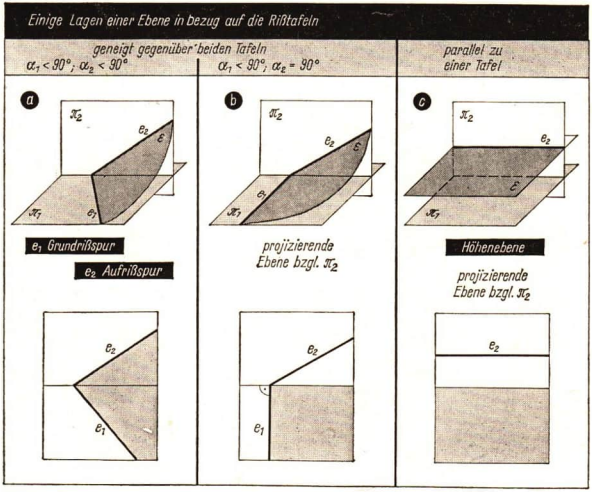
entweder einen Punkt der Rißachse gemeinsam (Bild D 42 a, b)

oder beide Spuren sind parallel zur Rißachse

oder beide Spuren fallen in die Rißachse.

(12) Überlegen Sie sich die Lage der Ebene in bezug auf die Rißtafeln in den beiden zuletzt genannten Fällen!

D



D 42

Liegt die Ebene zur Grundrißtafel parallel, so ist sie eine projizierende Ebene bezüglich der Aufrißtafel und hat keine Grundrißspur. Die Ebene wird in diesem Fall **Höhenebene** genannt (Bild D 42c). Liegt die Ebene zur Aufrißtafel parallel, so ist sie eine projizierende Ebene bezüglich der Grundrißtafel und hat keine Aufrißspur. Sie wird in diesem Fall **Frontebene** genannt.

Durch die Grundriß- und die Aufrißspur ist eine Ebene im allgemeinen eindeutig bestimmt. Eine Ausnahme bilden die Ebenen, die die Rißachse enthalten, d. h., deren Spuren mit der Rißachse zusammenfallen.

D

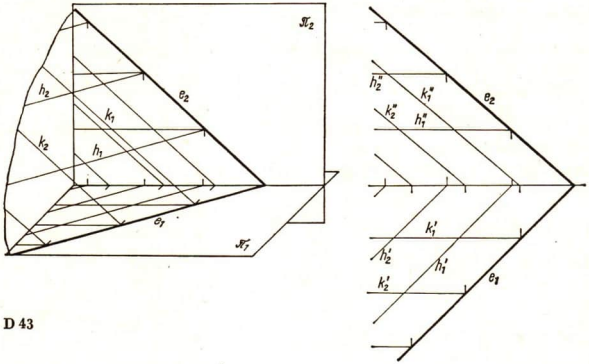
20

Beim Grundrißverfahren haben wir zur Darstellung einer Ebene Höhenlinien, d. h. Parallelen zur Grundrißspur, verwendet. Für das Zweitafelverfahren haben darüber hinaus Geraden eine Bedeutung, deren Punkte von der Aufrißtafel gleichen Abstand haben, d. h. Parallelen zur Aufrißspur. Diese Geraden heißen **Frontlinien**, wir bezeichnen sie mit *k*. Für die Abbildung der Spurparallelen gelten folgende SÄTZE:

24 **Der Grundriß einer Höhenlinie ist parallel zur Grundrißspur, ihr Aufriß ist parallel zur Rißachse.**

Der Aufriß einer Frontlinie ist parallel zur Aufrißspur, ihr Grundriß ist parallel zur Rißachse.

21 Das Bild D 43 zeigt die Darstellung einer Ebene mit Höhen- und Frontlinien. Die Frontlinien dürfen nicht mit den Fallinien der Ebene verwechselt werden; Fallinien sind Senkrechten zur Grundrißspur (↗ Lerneinheit D 12).



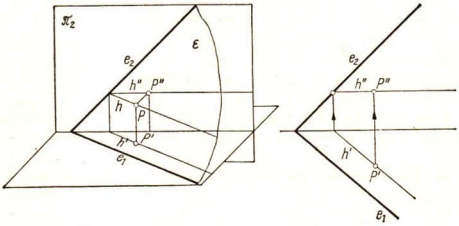
D 43

13 **Bei welcher Lage der Ebene gegenüber den Rißtafeln sind die Frontlinien gleichzeitig Fallinien?**

Höhen- oder Frontlinien können verwendet werden, wenn, wie im folgenden Beispiel, ein Punkt einer gegebenen Ebene bestimmt werden soll.

22 *Gegeben:* 1. Eine Ebene ε durch ihre Spuren e_1, e_2 und 2. der Grundriß eines Punktes P dieser Ebene.

Gesucht: Der Aufriß dieses Punktes P (Bild D 44).



D 44

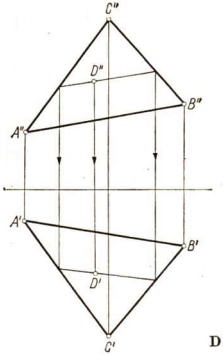
Vorüberlegung: Wird durch den Punkt P in der Ebene ε eine Hilfsgerade gelegt, so enthält ihr Grundriß den Grundriß P' und ihr Aufriß den gesuchten Aufriß P''. Die Spurpunkte dieser Hilfsgeraden liegen auf den gleichnamigen Spuren der gegebenen Ebene. Als Hilfsgerade kann jede für die Konstruktion günstig liegende Gerade gewählt werden.

Ausführung: Wir zeichnen durch P' den Grundriß der Hilfsgeraden (wir wählen eine Höhenlinie), ermitteln ihren Spurpunkt und mit Hilfe dieses Spurpunktes den Aufriß. Der Schnittpunkt der Ordnungslinie durch P' mit dem Aufriß h'' der Höhenlinie ist der gesuchte Aufriß P''.

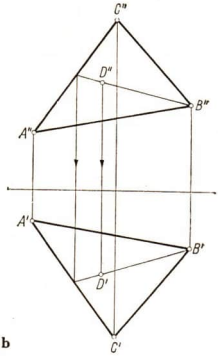
(14) Lösen Sie die in Beispiel D 22 gestellte Aufgabe durch die Annahme
a) einer Frontlinie,
b) einer Fallinie als Hilfsgerade!

23 *Gegeben:* Eine Ebene ABC durch die Risse dieser Punkte und der Aufriß eines weiteren Punktes D dieser Ebene.

Gesucht: Der Grundriß D' des Punktes D (Bild D 45 a).



D 45 a



D 45 b

Vorüberlegung: Eine durch den Punkt D gehende Gerade der Ebene ABC schneidet (mindestens) zwei Verbindungsgeraden der Punkte A, B und C.

Ausführung: Wir zeichnen den Aufriß der Hilfsgeraden durch D'' und bringen ihn mit den Aufrissen zweier Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte zum Schnitt. Durch die Grundrisse dieser Schnittpunkte geht der Grundriß der Hilfsgeraden. Der gesuchte Grundriß D' ist der Schnittpunkt des Grundrisses der Hilfsgeraden mit der Ordnungslinie durch D''. Die Konstruktion vereinfacht sich, wenn, wie in Bild D 45 b, die Hilfsgerade durch einen der gegebenen Punkte gelegt wird.

(15) Lösen Sie die im Beispiel D 23 gestellte Aufgabe mittels einer Frontlinie als Hilfsgerade!

Aufgaben d 106 bis 112

Neigungswinkel einer Ebene – wahre Größe einer ebenen Figur

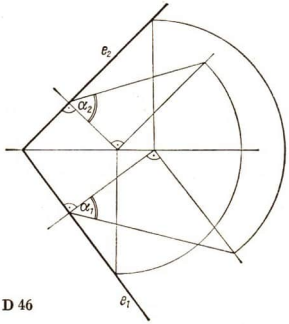
21

Als **Neigungswinkel einer Ebene gegen die Aufrißtafel** bezeichnet man den Winkel zwischen einer in der Ebene liegenden Senkrechten zur Aufrißspur und dem Aufriß dieser Senkrechten.

Grundaufgabe: Konstruieren der Neigungswinkel einer Ebene gegen die beiden Tafeln

24 *Gegeben:* Eine Ebene ε durch ihre Spuren e_1, e_2.

Gesucht: Der Neigungswinkel der Ebene gegen die Grundrißtafel, bezeichnet mit α_1, sowie der Neigungswinkel der Ebene gegen die Aufrißtafel, bezeichnet mit α_2 (Bild D 46).



D 46

Vorüberlegung: Eine projizierende Ebene in bezug auf die Grundrißtafel senkrecht zu e_1 enthält α_1 als Winkel zwischen der Senkrechten zu e_1 und ihrem Grundriß; eine projizierende Ebene in bezug auf die Aufrißtafel senkrecht zu e_2 enthält α_2 als Winkel zwischen der Senkrechten zu e_2 und ihrem Aufriß.

Ausführung: Wir klappen nach Beispiel D 13 die projizierenden Ebenen in die betreffenden Rißtafeln.

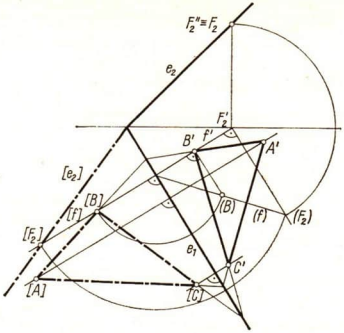
16 Wie läßt sich der Neigungswinkel α_1 gegen die Grundrißtafel bei einer Ebene, die senkrecht auf der Aufrißtafel steht, auf einfache Weise finden?

Grundaufgabe: Konstruieren der wahren Größe eines Dreiecks

25 *Gegeben:* 1. Eine Ebene ε durch ihre Spuren und 2. die Grundrisse der Eckpunkte eines in ε liegenden Dreiecks ABC.

Gesucht: Die wahre Größe von ABC (Bild D 47).

Vorüberlegung: Die Ebene kann entweder in die Grundrißtafel oder in die Aufrißtafel geklappt werden. Da die Grundrisse der Eckpunkte A, B, C des Dreiecks gegeben sind, ist die Klappung in die Grundrißtafel zweckmäßig.



D 47

Ausführung: Wir bestimmen die Spurpunkte der Fallinie f eines der gegebenen Punkte (im Beispiel Punkt B) und konstruieren nach Beispiel D 13 die Umklappung der erstprojizierenden Ebene durch f mit Hilfe des zweiten Spurpunktes von f, der mit F_2 bezeichnet sei. Mittels dessen Umklappung (F_2) wird nun nach Beispiel D 14 die Konstruktion zur Klappung von ε um e_1 ausgeführt; wir erhalten $[F_2]$. Durch diesen Punkt geht $[e_2]$, die Umklappung der zweiten Spur. Weitere Einzelheiten sind aus Bild D 47 zu ersehen (↗ Lerneinheit D 14).
Da eine ebene Figur auch dann in wahrer Größe abgebildet wird, wenn sie parallel zu einer Rißtafel liegt, kann ihre wahre Größe auch durch Drehung ihrer Ebene in eine solche Parallellage ermittelt werden.

Aufgaben d 113 bis 117

Gegenseitige Lage zweier Ebenen

22

D

Schneiden zwei Ebenen einander, so haben sie genau eine Gerade gemeinsam. Für die Konstruktion dieser Schnittgeraden müssen zwei verschiedene Punkte gefunden werden, die beiden Ebenen gemeinsam sind; durch diese Punkte wird die Schnittgerade der Ebenen bestimmt.

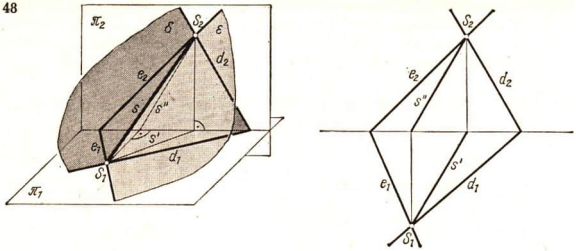
26 *Gegeben:* Zwei nichtparallele Ebenen ε und δ durch ihre Spuren.

Gesucht: Die Risse der **Schnittgeraden** von ε und δ (Bild D 48).

Vorüberlegung: Die Schnittgerade von ε und δ ist durch den Schnittpunkt S_1 ihrer Grundrißspuren e_1, d_1 und den Schnittpunkt S_2 ihrer Aufrißspuren e_2, d_2 bestimmt.
Sind die **Ebenen parallel,** so sind nach Satz D 9 ihre gleichnamigen Spuren parallel, und umgekehrt.

Aufgaben d 118 und 119

D 48

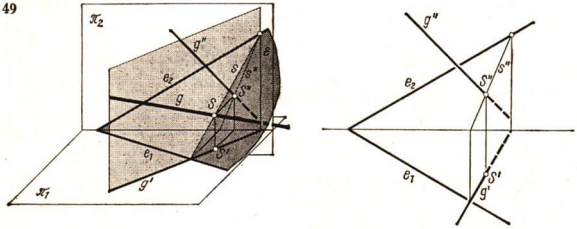


Bei der Bestimmung der **gegenseitigen Lage einer Geraden und einer Ebene** wird durch die Gerade eine Hilfsebene gelegt, die die gegebene Ebene schneidet. Ist die entstehende Schnittgerade parallel zur gegebenen Geraden, so ist nach Satz D 10 die Gerade zur Ebene parallel; schneidet jene Schnittgerade die gegebene Gerade, so ist dieser Schnittpunkt der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene. Damit kann der Schnitt einer Geraden mit einer Ebene auf den Schnitt zweier Geraden zurückgeführt werden.

27 *Gegeben:* 1. Eine Ebene ε durch ihre Spuren e_1, e_2 und 2. eine Gerade g durch ihre Risse.

Gesucht: Der **Schnittpunkt** von g und ε (Bild D 49).

D 49



Vorüberlegung: Wir wählen als Hilfsebene die projizierende Ebene durch g bezüglich der Grundrißtafel. Diese Ebene schneidet ε in der Geraden s. Ihr Grundriß s' fällt mit g' zusammen. Der Schnittpunkt von s und g ist der gesuchte Schnittpunkt von g und ε.

Ausführung: Wir konstruieren den Aufriß s'' der Schnittgeraden der Ebene ε mit der Hilfsebene durch g und bringen s'' mit g'' zum Schnitt. Dadurch erhalten wir den Aufriß S'' des gesuchten Schnittpunktes; sein Grundriß S' liegt auf der entsprechenden Ordnungslinie. Eine Kontrolle der Zeichengenauigkeit ist durch Annahme einer zweiten Hilfsebene möglich.

D

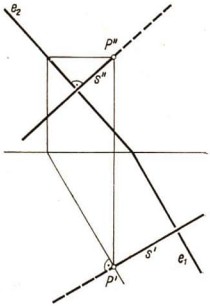
Bei der Konstruktion der Senkrechten in einem Punkt einer Ebene und des Lotes von einem Punkt außerhalb der Ebene auf diese Ebene gehen wir davon aus, daß der Grundriß der Senkrechten auf der Grundrißspur und der Aufriß der Senkrechten auf der Aufrißspur der Ebene senkrecht steht.

Grundaufgabe: Konstruieren der Senkrechten in einem Punkt auf eine Ebene ε

28 *Gegeben:*
1. Eine Ebene ε durch ihre Spuren e_1, e_2 sowie
2. der Grundriß P' eines Punktes von ε.

Gesucht: Die Risse der Senkrechten s auf ε in P (Bild D 50).

Vorüberlegung: Der Grundriß s' geht durch P' und steht auf e_1 senkrecht, der Aufriß s'' geht durch P'' und steht auf e_2 senkrecht.



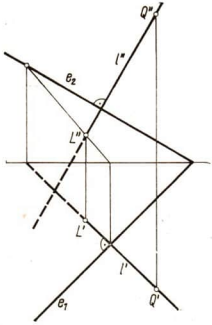
D 50

Ausführung: Wir konstruieren P'' nach Beispiel D 22 und zeichnen durch P' und P'' Senkrechten zu den entsprechenden Spuren von ε. Diese Geraden sind die gesuchten Risse der Senkrechten. (Sichtbarkeit beachten!)

Grundaufgabe: Konstruieren des Lotes von einem Punkt auf eine Ebene

29 *Gegeben:*
1. Eine Ebene ε durch ihre Spuren e_1, e_2 sowie
2. ein Punkt Q außerhalb ε durch seine Risse.

Gesucht: Die Risse des Lotes l von Q auf ε und die Risse des Lotfußpunktes L (Bild D 51).



D 51

D

Vorüberlegung: Der Grundriß l' des gesuchten Lotes geht durch Q' und steht senkrecht auf e_1; sein Aufriß l'' geht durch Q'' und steht senkrecht auf e_2. Der Fußpunkt L ergibt sich als Schnittpunkt von l und ε.

Ausführung: Wir zeichnen durch Q' und Q'' Senkrechten zu den entsprechenden Spuren von ε; diese Geraden sind die Risse des gesuchten Lotes l. Sein Fußpunkt L wird nach Beispiel D 27 als Schnittpunkt von l und ε ermittelt.

Aufgaben d 120 bis 123

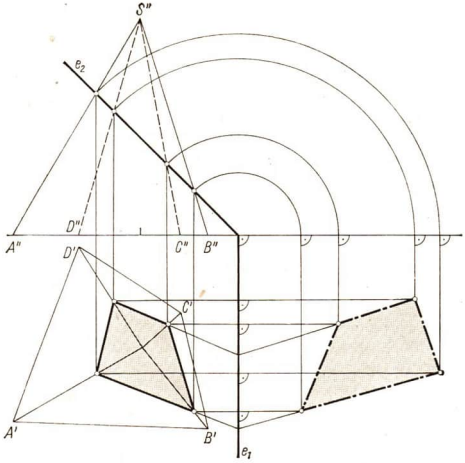
Schnitt eines Körpers mit einer Ebene

23

Der **Schnitt einer Ebene mit einem Körper** kann in der Regel auf den Schnitt von Körperkanten (oder anderer Geraden der Begrenzungsflächen des Körpers) mit der schneidenden Ebene zurückgeführt werden.

30 *Gegeben:* Eine vierseitige Pyramide $ABCDS$ durch ihre Risse sowie eine projizierende Ebene ε bezüglich der Aufrißtafel durch ihre Spuren e_1, e_2. $ABCDS$ wird von ε geschnitten.

Gesucht: Der Grundriß und die wahre Größe der **Schnittfigur** (Bild D 52).



D 52

Vorüberlegung: Die Ebene ε schneidet Körperkanten; ihre Schnittpunkte mit diesen sind die Eckpunkte der Schnittfigur. Durch Klappung von ε in die Grundrißtafel ergibt sich die wahre Größe der Schnittfigur. Da ε eine projizierende Ebene ist, lassen sich Risse und Umklappung der Schnittfigur auf einfache Weise konstruieren.

Ausführung: Wir ermitteln die Aufrisse der Schnittpunkte der Körperkanten mit ε und aus den Aufrissen die zugeordneten Grundrisse. Die Konstruktion zur Klappung von ε um ihre erste Spur e_1 kann der Lage der Ebene wegen in der Aufrißtafel ausgeführt werden, da diese Tafel zu e_1 senkrecht steht.

(17) Überlegen Sie, welche Möglichkeiten zur Kontrolle der Zeichengenauigkeit bei der in Beispiel D 30 beschriebenen Konstruktion bestehen!

Aufgaben d 124 bis 127

D

Aufgaben

Seite

112 a) Winkelfunktionen
128 b) Körperberechnung
134 c) Trigonometrie
150 d) Darstellende Geometrie

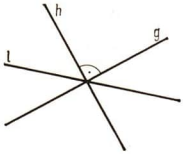
a

a

a) Winkelfunktionen

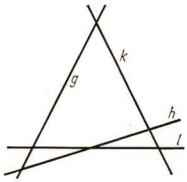
1. Gegeben sind die Geraden g, h, l, die sich in einem Punkt schneiden (Bild a 1). Der Winkel $\sphericalangle (h, l)$ hat das Maß 50°. Bestimmen Sie die Maße der Winkel $\sphericalangle (g, l)$ und $\sphericalangle (l, h)$!

2. Gegeben sind die Geraden g, h, l, k (Bild a 2). Der Winkel $\sphericalangle (l, h)$ habe das Maß 25°, der Winkel $\sphericalangle (l, g)$ das Maß 65° und der Winkel $\sphericalangle (k, h)$ das Maß 80°. Welche Maße haben die Winkel $\sphericalangle (k, l)$ und $\sphericalangle (g, k)$?



a 1

a 2



3. Ermitteln Sie die Größe des Winkels, der durch die Winkelhalbierenden eines Nebenwinkelpaares gebildet wird!

4. Bestimmen Sie in einem Dreieck ABC mit dem Winkel $\gamma = 47°$ das Maß des Winkels $\sphericalangle (h_a, h_b)$!

5. Konstruieren Sie die folgenden Winkel!
a) $\alpha_1 = 60°$ **b)** $\alpha_2 = 30°$
c) $\alpha_3 = 15°$ **d)** $\alpha_4 = 37{,}5°$

6. Konstruieren Sie die folgenden Winkel!
a) $\beta_1 = 90°$ **b)** $\beta_2 = 45°$
c) $\beta_3 = 22{,}5°$ **d)** $\beta_4 = 112{,}5°$

---

1. Konstruieren Sie die Winkel $\gamma_1 = 75°$, $\gamma_2 = 37{,}5°$, $\gamma_3 = 105°$, $\gamma_4 = 82{,}5°$! Geben Sie verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten an!

Bestimmen Sie die Hauptwerte zu den folgenden Winkeln α!

7. **a)** 4380° **b)** 367,5°
c) 2713,4° **d)** — 1573°
e) — 15,7° **f)** — 479,7°

8. **a)** 515,6° **b)** 758,4°
c) 438,5° **d)** — 47,6°
e) 3205,6° **f)** — 3721°

9. Führen Sie in der angegebenen Menge von Winkeln eine Einteilung nach Äquivalenzklassen durch!
{ 48,5°; 1093,6°; 13,6°; — 311,5°; 768,5°; 735,6°; — 1066,4°; 15,6°; 408,5°; 704,4°; 270,5°; 1528,5°; 630,5°; — 1031,5°; — 459,5° }

10. Ermitteln Sie, welche Winkel in der angegebenen Menge jeweils äquivalent sind!
{ 67,5°; — 647,5°; 327,5°; — 1012,5°; 1407,5°; — 3532,5°; 72,5°; 7527,5°; 432,5°; 1012,5° }

Berechnen Sie die Bogenlänge b für einen Kreisbogen mit dem Radius r und dem Zentriwinkel α!

11. **a)** $r = 5$ cm; $\alpha = 40°$
b) $r = 4{,}7$ cm; $\alpha = 15°$

12. **a)** $r = 12{,}8$ cm; $\alpha = 42{,}3°$
b) $r = 2{,}7$ cm; $\alpha = 82{,}7°$

Berechnen Sie den Radius r für einen Kreisbogen b mit dem Zentriwinkel α!

13. **a)** $b = 14{,}8$ cm; $\alpha = 9{,}4°$
b) $b = 24{,}7$ cm; $\alpha = 34°$

14. **a)** $b = 19{,}5$ cm; $\alpha = 183{,}4°$
b) $b = 22$ cm; $\alpha = 90°$

---

2. Fertigen Sie sich eine Übersicht über die Bogenlängen für die Winkelgrößen 1°, 1′, 1″, bei Kreisen mit dem Radius 1 m bzw. 1 km an!
Berechnen Sie auch die Radien der Kreise, für die bei den gegebenen Winkelgrößen die Bogenlänge 1 m ist!

3. Stellen Sie die Bogenlänge eines Kreisbogens in Abhängigkeit vom Zentriwinkel dar! Geben Sie eine graphische Darstellung! Welche Bedeutung hat der Radius?

4. Es gilt $\operatorname{arc} \alpha = f(\alpha)$!
a) Geben Sie die Funktionsgleichung an!
b) Zeichnen Sie die zugehörige Kurve!
c) Lesen Sie aus der graphischen Darstellung Näherungswerte für $\operatorname{arc} \alpha$ ab! ($\alpha = 20°, 30°, \ldots, 340°, 350°, 360°$)

Berechnen Sie das Bogenmaß für die folgenden Winkel!

15. **a)** $\alpha = 15°$ **b)** $\alpha = 72°$ **c)** $\alpha = 42°$ **d)** $\alpha = 18°$

16. **a)** $\alpha = -30°$ **b)** $\alpha = 200°$ **c)** $\alpha = 102°$ **d)** $\alpha = 144°$

Berechnen Sie unter Verwendung der entsprechenden Tafel im Tafelwerk das Bogenmaß für folgende Winkel!

17. **a)** $\alpha = 43{,}78°$ **b)** $\alpha = 72{,}53°$ **c)** $\alpha = 221{,}75°$ **d)** $\alpha = -30{,}45°$

18. **a)** $\alpha = 138{,}09°$ **b)** $\alpha = -47{,}58°$ **c)** $\alpha = 216{,}73°$ **d)** $\alpha = -219{,}05°$

Berechnen Sie das Gradmaß für die folgenden Winkel! (Bemerkung: Die Aufgaben können teilweise auch mit Hilfe der Tafel auf Seite 28 im Tafelwerk gelöst werden.)

19. **a)** $\operatorname{arc} \alpha = 3{,}746$
b) $\operatorname{arc} \alpha = 1{,}476$
c) $\operatorname{arc} \alpha = 0{,}937$
d) $\operatorname{arc} \alpha = 4{,}843$
e) $\operatorname{arc} \alpha = 0{,}84$
f) $\operatorname{arc} \alpha = -0{,}95$

20. **a)** $\operatorname{arc} \alpha = 2{,}734$
b) $\operatorname{arc} \alpha = -5{,}638$
c) $\operatorname{arc} \alpha = -2{,}348$
d) $\operatorname{arc} \alpha = -0{,}375$
e) $\operatorname{arc} \alpha = 0{,}36$
f) $\operatorname{arc} \alpha = 1{,}16$

Bestimmen Sie die Hauptwerte für die folgenden Winkel!

21. **a)** $\operatorname{arc} \alpha = \frac{10\pi}{3}$ **b)** $\operatorname{arc} \alpha = \frac{11\pi}{2}$ **c)** $\operatorname{arc} \alpha = \frac{-7\pi}{4}$ **d)** $\operatorname{arc} \alpha = \frac{22\pi}{3}$

22. **a)** $\operatorname{arc} \alpha = \frac{12\pi}{5}$ **b)** $\operatorname{arc} \alpha = \frac{9\pi}{4}$ **c)** $\operatorname{arc} \alpha = \frac{-7\pi}{5}$ **d)** $\operatorname{arc} \alpha = \frac{17\pi}{4}$

Bestimmen Sie die Hauptwerte der folgenden Winkel! ($\pi = 3{,}14$)

23. **a)** $\operatorname{arc} \alpha = 12{,}35$ **b)** $\operatorname{arc} \alpha = -9{,}43$ **c)** $\operatorname{arc} \alpha = -14{,}75$ **d)** $\operatorname{arc} \alpha = 15{,}89$

24. **a)** $\operatorname{arc} \alpha = -2{,}16$ **b)** $\operatorname{arc} \alpha = 314$ **c)** $\operatorname{arc} \alpha = 21{,}39$ **d)** $\operatorname{arc} \alpha = -1{,}78$

25. Führen Sie in der folgenden Menge von Winkeln eine Einteilung nach Äquivalenzklassen durch!
$\{1{,}35;\ 2{,}38;\ 9{,}80;\ -8{,}94;\ -2{,}76;\ 7{,}63;\ 0{,}84;\ 8{,}66;\ 10{,}77\}$

a

26. Gegeben ist ein u,v-Koordinatensystem und ein Kreis mit dem Radius $r = 5$ cm um O. Entsprechend Bild A 5 auf Seite 7 schneidet der Strahl k den Kreis. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P im Falle $x = 10°, 20°, \ldots, 360°$!

27. Gegeben ist ein x,y-Koordinatensystem und ein Kreis mit dem Radius $r = 5$ cm um O. Bestimmen Sie für die Punkte $P_i = (x_i;\ y_i)$ die zweite Koordinate und den Winkel, den der Strahl $\overrightarrow{OP_i}$; mit der x-Achse bildet!
$P_1 = (3; y_1)$, $P_2 = (4{,}5; y_2)$,
$P_3 = (x_3; 4)$, $P_4 = (x_4; -1{,}5)$
(Achten Sie auf Vollständigkeit der Lösungen!)

28. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius $r = 4$ cm um den Ursprung eines Koordinatensystems. Bestimmen Sie die Intervalle für die Koordinaten der Punkte P_i, wenn P_i die Schnittpunkte der Geraden durch den Koordinatenursprung mit dem Kreis sind! Für die Schnittwinkel der Geraden und der Abszissenachse gilt $0 \leqq \alpha < 2\pi$!

29. Stellen Sie die Abhängigkeit der Fläche A eines Rhombus $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 4$ cm vom Winkel $\sphericalangle\ DAB$ graphisch dar! Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen flächengleiche Rhomben entstehen!

30. Ermitteln Sie durch eine Zeichnung Näherungswerte für die Sinus- und die Kosinusfunktion der Winkel $x = n \cdot \frac{\pi}{12}$ (n ganzzahlig)! Stellen Sie die Ergebnisse in einer Wertetabelle zusammen!

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfällt. Berechnen Sie die Sinus und Kosinus der Winkel α ($0 < \alpha \leqq 2\pi$), die ein Strahl $\overrightarrow{OP}$ mit der u-Achse bildet!
Geben Sie unter Verwendung der Tabelle aus Aufgabe **30** an, in welchen Intervallen die Winkel liegen!

31. **a)** $r = 5$; $P_0\ (3; v_0)$
b) $r = 13{,}5$; $P_0\ (u_0; 4{,}2)$
c) $r = 7{,}3$; $P_0\ (5{,}3; v_0)$
d) $r = 3{,}1$; $P_0\ (-3{,}1; v_0)$

32. **a)** $r = 3{,}6$; $P_0\ (-1{,}5; v_0)$
b) $r = 3{,}4$; $P_0\ (-2{,}5; v_0)$
c) $r = 8{,}4$; $P_0\ (u_0; -2{,}6)$
d) $r = 4{,}7$; $P_0\ (u_0; 3{,}1)$

Ermitteln Sie unter Verwendung der Tabelle aus Aufgabe **30**, in welchen Intervallen die Winkel liegen, die die Strahlen $\overrightarrow{OP_i}$ mit $P_i\ (x_i; y_i)$ mit der x-Achse bilden!

33. **a)** $P\ (2{,}4;\ 3{,}6)$
b) $P\left(-\frac{1}{5}\sqrt{2};\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$
c) $P\ (-4{,}8;\ -5{,}6)$
d) $P\ (\sqrt{5};\ \sqrt{6})$

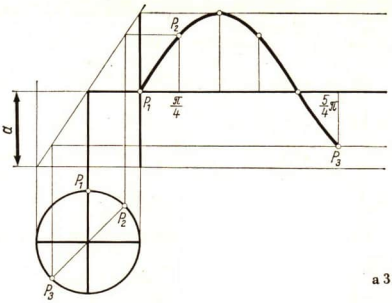
34. **a)** $P\left(\frac{1}{2}\sqrt{3};\ 2\right)$
b) $P\ (0{,}38;\ -0{,}76)$
c) $P\left(\sqrt{2};\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$
d) $P\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6};\ \sqrt{3}\right)$

Bestimmen Sie näherungsweise durch Konstruktion die Winkel x!

35. **a)** $\sin x = 0{,}55$
b) $\cos x = 0{,}3$
c) $\sin x = \frac{8}{10}$
d) $\cos x = -0{,}7$

36. **a)** $\sin x = 0{,}7$
b) $\cos x = 0{,}6$
c) $\sin x = -0{,}4$
d) $\cos x = \frac{5}{8}$

37. Im Bild a 3 wird ein Verfahren zur Konstruktion des Bildes der Funktion $y = a \sin x$ gezeigt.
Beschreiben und begründen Sie dieses Verfahren!



a 3

Konstruieren Sie die Bilder der folgenden Funktionen!

38. a) $y = \frac{1}{2} \sin x$ **b)** $y = -\sqrt{2} \sin x$ **39. a)** $y = \frac{3}{2} \sin x$ **b)** $y = \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin x$

Ermitteln Sie unter Verwendung der in Aufgabe **30** aufgestellten Tabelle die Funktionswerte!

40. a) $y = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3}$ **b)** $y = 0{,}8 \sin \frac{5\pi}{6}$ **41. a)** $y = 1{,}5 \sin \frac{\pi}{12}$ **b)** $y = -\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4}$

Bestimmen Sie unter Verwendung der Tabelle aus Aufgabe **30** die Intervalle, in denen die Winkel φ liegen!

42. a) $2{,}5 = 3 \sin \varphi$ **b)** $2{,}7 = 1{,}9 \sin \varphi$ **43. a)** $0{,}8 = 1{,}5 \sin \varphi$ **b)** $0{,}3 = 2 \sin \varphi$

Konstruieren Sie die Kurven zu den Funktionen mit der Gleichung $y = \sin bx$!

44. a) $b = 2$ **b)** $b = \pi$ **c)** $b = \frac{\pi}{4}$ **45. a)** $b = 0{,}5$ **b)** $b = 3$ **c)** $b = \frac{\pi}{10}$

Bestimmen Sie die Funktionswerte für die Winkel x! (Verwenden Sie die Tabelle aus Aufgabe **30**!)

46. a) $y = \sin \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6}$ **47. a)** $y = \sin 4 \cdot \frac{5\pi}{6}$ **48. a)** $y = \sin 5 \cdot \frac{11\pi}{12}$

b) $y = \sin 3 \cdot \frac{\pi}{12}$ **b)** $y = \sin 5 \cdot \frac{7\pi}{6}$ **b)** $y = \sin 2 \cdot \frac{3\pi}{4}$

Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Winkel x liegen! (Verwenden Sie die Tabelle aus Aufgabe **30**!)

49. a) $0{,}7 = \sin \frac{1}{2} x$ **50. a)** $0{,}45 = \sin 0{,}9x$ **51. a)** $0{,}6 = \sin (-2x)$

b) $0{,}3 = \sin \pi x$ **b)** $0{,}8 = \sin \frac{1}{10} x$ **b)** $0{,}35 = \sin \frac{\pi}{10} x$

Konstruieren Sie die Kurven der Funktionen mit den Gleichungen $y = a \sin bx$!

52. a) $a = 2;\ b = 3$ **b)** $a = -2;\ b = 1{,}5$ **53. a)** $a = 3;\ b = 2$ **b)** $a = \pi;\ b = \frac{\pi}{10}$

---

5. Die Schwingung eines Fadenpendels kann durch die Gleichung $y = y_0 \sin \omega t$ beschrieben werden. Darin bedeuten y die Elongation, y_0 die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und t die Zeit. Geben Sie die Schwingungsgleichung an, und konstruieren Sie die zugehörige Kurve, wenn die Schwingungsdauer $T = 0{,}5$ s und die Amplitude 5,2 mm beträgt!

Konstruieren Sie die Bilder der Funktionen mit den Gleichungen $y = \sin(x + c)$!

54. **a)** $c = \frac{\pi}{6}$ **b)** $c = 0{,}5$ **c)** $c = -\frac{\pi}{3}$ **d)** $c = \frac{5\pi}{12}$

55. **a)** $c = \frac{2\pi}{3}$ **b)** $c = 2$ **c)** $c = -\frac{11\pi}{12}$ **d)** $c = \frac{\pi}{2}$

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen!

56. **a)** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $y = \sin\left(x + \frac{7\pi}{12}\right)$

57. **a)** $y = \sin\left(x + \frac{5\pi}{8}\right)$ **b)** $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{8}\right)$

58. **a)** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = \sin(x + 3\pi)$

Für welche Winkel gilt $y_0 = 1$ und für welche Winkel gilt $y_1 = -1$?

59. **a)** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right)$

60. **a)** $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ **b)** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$

61. **a)** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ **b)** $y = \sin\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$

62. Für eine Funktion $y = \sin(x + c)$ wurden die folgenden Nullstellen ermittelt.

a) $x_0 = \frac{1}{10}\pi + k\pi$ **b)** $x_0 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ **c)** $x_0 = 0{,}5 + k\pi$ **d)** $x_0 = \frac{\pi}{6} + k\pi$ **e)** $x_0 = \frac{\pi}{8} + k\pi$ **f)** $x_0 = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

Geben Sie die Gleichungen der Funktionen sowie die Winkel x_i für die $y_1 = 1$ bzw. $y_2 = -1$ an!

63. Wie erhält man die Bilder der Funktionen mit folgenden Gleichungen aus der Sinuskurve? Bestimmen Sie Wertevorrat und kleinste Periode!

a) $y = 3\sin\left(5x - \frac{3}{4}\right)$ **b)** $y = 2{,}5\sin(\pi x + \sqrt{2})$ **c)** $y = \pi\sin(x - 1)$

Konstruieren Sie die Bilder der Funktionen mit der Gleichung $y = a\sin(bx + c)$!

64. **a)** $a = -2;\ b = 2;\ c = 2$

b) $a = \sqrt{2};\ b = 3;\ c = \frac{\pi}{4}$

c) $a = \sqrt{3};\ b = -1;\ c = -\frac{\pi}{2}$

65. **a)** $a = 1{,}8;\ b = 1{,}5;\ c = \frac{\pi}{3}$

b) $a = -2;\ b = 4;\ c = -\frac{\pi}{8}$

c) $a = 3;\ b = -2;\ c = \frac{3\pi}{4}$

66. Konstruieren Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Kurven für die Funktionen mit den Gleichungen
$y_{\mathrm{I}} = 2\sin 2x$ und $y_{\mathrm{II}} = \sin 2x$!
Bilden Sie die Summe $y_{\mathrm{III}} = y_{\mathrm{I}} + y_{\mathrm{II}}$!
Wie heißt die Gleichung der neuen Funktion? Welchen Wertevorrat hat sie?

67. Konstruieren Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Kurven für die Funktionen mit den Gleichungen

$y_{\mathrm{I}} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ und

$y_{\mathrm{II}} = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$!

a) Bilden Sie die Summe $y_{\mathrm{III}} = y_{\mathrm{I}} + y_{\mathrm{II}}$!

b) Ermitteln Sie aus der Darstellung die Amplitude und die Phasenverschiebung gegenüber der Kurve $y = \sin x$!

c) Geben Sie die Gleichung für die neue Funktion an!

68. Konstruieren Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Kurven für die Funktionen $y_{\mathrm{I}} = \sin x$ und $y_{\mathrm{II}} = \sin(x + \pi)$!

a) Bilden Sie die Summe $y = y_{\mathrm{I}} + y_{\mathrm{II}}$!

b) Geben Sie die Gleichung für die neue Funktion an!

---

6. Konstruieren Sie die Kurven zu den folgenden Funktionen!
Führen Sie die Konstruktionen im Intervall $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ durch!

a) $y = 2 \sin x + \frac{1}{2} \sin x$

b) $y = \frac{1}{3} \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = \sin x + \sin 2x$

d) $y = \sin \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x$

e) $y = \sin \frac{\pi}{4} x + \sin \frac{\pi}{2} x$

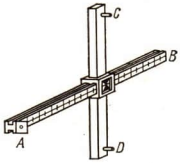
f) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

7. Die Amplitude einer Federschwingung beträgt $a = 52$ mm, die Schwingungsdauer $T = 3$ s.

a) Geben Sie die Gleichung der Schwingung an, und zeichnen Sie die Kurve!

b) Ermitteln Sie aus der graphischen Darstellung die Elongationen für $t_1 = 1{,}5$ s, $t_2 = 2{,}4$ s, $t_3 = 3{,}3$ s, $t_4 = 4{,}2$ s und $t_5 = 5{,}1$ s!
Erläutern Sie Ihr Ergebnis!

8. Zur Bestimmung der Sternhöhen bzw. der Sternabstände wurde bis ins 18. Jahrhundert hinein der Jakobsstab benutzt (Bild a 4).



a 4

Senkrecht zu einem Stab AB war ein zweiter Stab CD beweglich angebracht. Durch Verschieben des Stabes CD konnte der eine Stern über AB und der zweite über AC oder AD anvisiert werden. Auf dem Stab AB konnte dann der Sternabstand abgelesen werden.

a) Begründen Sie dieses Verfahren zur Winkelmessung!

b) Konstruieren Sie ein Modell für den Jakobsstab!

---

69. Bestimmen Sie aus den Kurven der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$ die Werte für $\tan x = \cot x$!

70. Ermitteln Sie durch Konstruktion eine Wertetabelle für die Tangensfunktion für die Winkelwerte $x = k \cdot 10°$ (k ganzzahlig)!

71. Ermitteln Sie durch Konstruktion eine Wertetabelle für die Kotangensfunktion für die Winkelwerte $x = k \cdot 10°$ (k ganzzahlig), und vergleichen Sie diese mit der Wertetabelle der Tangensfunktion in Aufgabe **70**!

Bestimmen Sie jeweils das Vorzeichen!

72. a) $\tan \frac{\pi}{4}$ **b)** $\cot \frac{13\pi}{2}$

c) $\tan 15° \cdot \cot 210°$

d) $\tan 750° \cdot \tan 320° \cdot \tan 420°$

e) $\cot 210° \cdot \cot 350° \cdot \cot 10°$

73. a) $\tan \frac{7\pi}{4}$ **b)** $\cot \frac{15\pi}{4}$

c) $\tan 250° \cdot \tan 120° \cdot \cot 120°$

d) $\cot 430° \cdot \tan 20° \cdot \cot 790°$

e) $\tan(-70°) \cdot \tan 770°$

a

74. Welche Vorzeichen haben die Funktionswerte von

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\tan(\pi+\alpha)$

und $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$,

wenn $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ gilt?

75. Welche Vorzeichen haben die Funktionswerte von

$\cos(2\pi-\alpha)$, $\cot\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$

und $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$,

wenn $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ gilt?

Für welche Argumente sind die folgenden Terme definiert? In welchen Intervallen sind die Vorzeichen der Terme positiv, in welchen negativ?

76. a) $\tan x \cdot \sin x$ b) $\frac{\sin x}{\tan x}$ c) $\cot x \cdot \cos x$

77. a) $\tan x \cdot \cos x$ b) $\frac{\tan x}{\sin x}$ c) $\tan x \cdot \frac{1}{\cot x}$

Welche der folgenden Funktionen sind gerade?

78. a) $y=\cos x$ b) $y=\tan x$ c) $y=\sin^5 x$ d) $y=\tan^3 x$

79. a) $y=\cos^2 x$ b) $y=\cot^2 x$ c) $y=\sin^2 x$ d) $y=\cot x$

Bestimmen Sie die Funktionswerte für die anderen Winkelfunktionen!

80. a) $\sin x=\frac{4}{5}$ b) $\cos x=\frac{3}{4}$ c) $\tan x=\sqrt{3}$ d) $\cot x=1{,}8$

81. a) $\sin x=-\frac{5}{13}$ b) $\cos x=\frac{\pi}{5}$ c) $\tan x=\pi$ d) $\cot x=15$

82. a) $\sin x=0{,}6$ b) $\cos x=\frac{1}{10}\sqrt{10}$ c) $\tan x=1{,}5$ d) $\cot x=\sqrt{3}$

83. a) $\sin x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\cos x=0{,}7$ c) $\tan x=\sqrt{5}$ d) $\cot x=3$

Vereinfachen Sie die folgenden Terme! (Bestimmen Sie jeweils die Definitionsbereiche!)

84. a) $\sin x \cdot \tan x$ b) $\cos x \cdot \cot x$ c) $\cos x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x}$

85. a) $\sin^2 x+\cos^2 x+\cot^2 x$ b) $1-\sin x \cdot \cot x \cdot \cos x$ c) $(1+\cos x)\cdot\cot^2 x\cdot(1-\cos x)$

86. a) $\frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x}$ b) $\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

87. a) $\tan x \cdot \frac{1}{\sin x}$ b) $\sqrt{1+\tan^2 x}\cdot\sin x$

88. a) $(1+\tan^2 x)(1+\cot^2 x)$ b) $(1-\sin^2 x)\cdot\tan x$

89. a) $\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}$ b) $\cot x-\frac{\cos x}{1+\sin x}$

Berechnen Sie möglichst einfach!

90. a) $\frac{\cot x+\tan x}{\cot x-\tan x}$ für $\tan x=\frac{4}{5}$

b) $\frac{\tan x}{\cot x+\tan x}$ für $\sin x=\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ für $\tan x=\frac{5}{4}$

91. a) $\frac{\cos x+\sin x}{\cot x}$ für $\sin x=\frac{1}{3}$

b) $\frac{\cos x+\sin x}{\tan x}$ für $\cot x=3$

c) $\frac{\sin x\cdot\cot x}{\cos x}$ für $\tan x=0{,}5$

---

9. Beweisen Sie, daß $\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}\cdot\frac{\cot^2 x-1}{\cot x}=c$ für alle x, für die der Ausdruck definiert ist!

10. Beweisen Sie die Identität für $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$!

11. Beweisen Sie die Identität für $\frac{1-\cos x}{1-\sin x}=\frac{1}{\tan x}$!

An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen nicht definiert?

92. a) $y = \frac{1}{1 + \cos x}$ b) $y = \frac{1}{\sin 2x}$ c) $y = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$

93. a) $y = \frac{1}{1 - \sin x}$ b) $y = \frac{\cot x}{1 - \cot x}$ c) $y = \frac{\cos x - 1}{1 + \sin x}$

94. a) $y = \frac{\sin^2 x}{0{,}5 \sin (x - 5{,}5)}$ b) $y = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils den Definitionsbereich!

95. a) $y = \sqrt{\sin x}$ b) $y = \sqrt{\lg \cos x}$ c) $y = 2 \cos x - \sqrt{5}$

96. a) $y = \sqrt{3} - 3 \cos (x + 1)$ b) $y = \sqrt{1 + \tan x}$ c) $y = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$

97. a) $y = \sqrt{|1 - \cos x|}$ b) $y = \sqrt{\tan x} \cdot \sqrt{\cot x}$ c) $y = \sin x - \sqrt{\tan x}$

Ermitteln Sie die größten und die kleinsten Werte der folgenden Funktionen!

98. a) $y = 1 - \sin 3x$ b) $y = \sqrt{2} - \cos 2x$ c) $y = 3 + \frac{1}{2} \sin^2 x$

99. a) $y = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos (x + 1)$ b) $y = \frac{8}{9} (\cos x - \sin x)$ c) $y = \sqrt{\tan \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

---

12. Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich!

a) $y = 2^{\cos x}$ b) $y = 2^{\sin x}$ c) $y = a^{1 - \tan x}$ $(a \neq 0)$ d) $y = b^{0{,}5\,(3 + \sin x)}$ $(b \neq 0)$

Welche der folgenden Funktionen sind gerade und welche ungerade?

100. a) $y = \tan \frac{x}{4}$ b) $y = \frac{x^2 + \cos x}{3}$ c) $y = x^4 + \sin x$

101. a) $y = x^2 + \cos x$ b) $y = \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$ c) $y = \frac{x + \cos x}{x - \cos x}$

102. a) $y = x^3 + \cos x$ b) $y = \sin 3x - \cos 2x$

Für welche Intervalle gelten die folgenden Ungleichungen?

103. a) $\sin x > \frac{1}{2}$ b) $\tan x - 1 > 0$

104. a) $\sin x > \cos x$ b) $\cot x + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$

105. a) $\tan x > \cot x$ b) $\cos x - 1 > \sin x - \frac{1}{2}$

Bestimmen Sie ohne Benutzung einer Tabelle das Vorzeichen der folgenden Terme!

106. a) $\cos 43° - \cos 42°$ b) $\tan 15° - \tan 16°$ c) $\sin \frac{\pi}{3} - \sin 1$

107. a) $\cot 225° - \cot 224°$ b) $\tan 153° - \tan 154°$ c) $\cos 60° - \cos 119°$

108. a) $\sin 330° + \sin 210°$ b) $\tan 153° + \tan 26°$ c) $\sin 1{,}2° - \tan 1{,}2°$

Ermitteln Sie die Intervalle, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind!

109. a) $|\sin x| > \frac{1}{2}$ b) $|\cos x| > \frac{1}{2}$ c) $|\tan x| < 1$ d) $|\cos x| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$

110. a) $|\cos x| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $|\cos 2x| < \frac{1}{2}$ c) $|\cot x| > 1$ d) $|\tan x| > \sqrt{3}$

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen die Monotonieintervalle an!

111. **a)** $y = \sin 2x$ **b)** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $y = \frac{1}{2}\tan x$ **d)** $y = \cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

112. **a)** $y = \frac{1}{5}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = |\sin x|$ **c)** $y = \cot\frac{1}{3}x$ **d)** $y = |\tan x|$

Untersuchen Sie die folgenden Gleichungen auf ihre Lösbarkeit!

113. **a)** $\frac{1}{3}\sin x + 3 = 2$ **b)** $\frac{1}{3}\sin x + 0{,}5 = 1$

114. **a)** $\tan x - \sin x = 14$ **b)** $\cos x - \sin x = 1$

115. **a)** $3\sin x + 4\cos x = 3$ **b)** $\frac{1}{2}\cos 3x = 0{,}75$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

116. **a)** $\sin x = \sin 30°$ **b)** $\cos x = \cos\beta$ **c)** $\tan 1{,}268 = \tan x$

117. **a)** $-\cot\alpha = -\cot x$ **b)** $\sin^2 60° = \sin^2 x$ **c)** $\cos^2 x = \cos^2 a$

118. **a)** $\sin x = -\cos x$ **b)** $\cos x = \sin x$ **c)** $\sin a = \cos x$

119. **a)** $\cot x = \tan 120°$ **b)** $\sin x = \sin a$ **c)** $\cos a = \cos x$

120. **a)** $\tan^2(-a) = \tan^2 x$ **b)** $\cot^2 x = \cos x$ **c)** $\sin^2 x = \cos^2 x$

121. **a)** $\sin x + \cos a = 0$ **b)** $\tan x - \cot x = 0$ **c)** $\tan x + \cot x = 0$

122. Ermitteln Sie die Werte der folgenden Terme!

a) $\sin 45° + \cos 30° - \tan 45° + \cot 135°$

b) $3 - \sin^2\frac{\pi}{3} + 2\cos^2\frac{\pi}{4} + 3\tan^2\frac{\pi}{6}$

c) $\dfrac{4 - 2\tan^2 45° + \cot^4 60°}{3\sin 90° - 4\cos 60° + 4\cot 45°}$

123. Stellen Sie fest, ob der Winkel x die drei Gleichungen gleichzeitig erfüllt!

a) $\sin x = -\frac{12}{13}$; $\cos x = \frac{5}{13}$; $\tan x = -2\frac{2}{5}$

b) $\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos x = -\frac{4}{5}$; $\tan x = \frac{3}{4}$

c) $\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos x = \frac{4}{5}$; $\tan x = -\frac{3}{4}$

Beweisen Sie die Identität in den folgenden Gleichungen!

13. **a)** $\sin(45° + x) = \cos(45° - x)$ **b)** $\cos(45° + x) = \sin(45° - x)$

14. Zeigen Sie, daß $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\beta}{2} - x\right)$, wenn α und β Supplementwinkel sind!

15. Beweisen Sie, daß

$\tan 10° \cdot \tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 40° \cdot \tan 50° \cdot \tan 60° \cdot \tan 70° \cdot \tan 80° = 1$!

Bestimmen Sie die Funktionswerte!

124. **a)** sin 15°
b) sin 43°
c) sin 84°
d) sin 7°

125. **a)** cos 18°
b) cos 89°
c) cos 49°
d) cos 37°

126. **a)** tan 43°
b) tan 24°
c) tan 67°
d) tan 9°

127. **a)** cot 28°
b) cot 34°
c) cot 73°
d) cot 54°

128. **a)** sin 13,5°
b) sin 17,8°
c) sin 34,8°
d) sin 73,6°

129. **a)** cos 43,6°
b) cos 41,7°
c) cos 54,8°
d) cos 9,6°

130. **a)** tan 4,7°
b) tan 39,5°
c) tan 43,8°
d) tan 27,1°

131. **a)** cot 21,4°
b) cot 36,4°
c) cot 57,4°
d) cot 81,3°

132. **a)** sin 42,31°
b) sin 31,84°
c) sin 67,53°
d) sin 5,64°

133. **a)** cos 36,94°
b) cos 53,48°
c) cos 67,59°
d) cos 46,46°

134. **a)** tan 23,75°
b) tan 48,87°
c) tan 13,75°
d) tan 3,68°

135. **a)** cot 49,73°
b) cot 7,69°
c) cot 31,43°
d) cot 83,74°

136. Ermitteln Sie durch Interpolation die Werte für $\tan x$ im Intervall $89{,}00° \leqq x \leqq 89{,}10°$ (von hundertstel zu hundertstel Grad)!
Vergleichen Sie Ihre Werte mit den in der folgenden Tabelle gegebenen Werten, die einer genaueren Tafel entnommen sind!

x	89,00°	89,01°	89,02°	89,03°	89,04°	89,05°	89,06°	89,07°	89,08°
$\tan x$	57,29	57,87	58,46	59,06	59,68	60,31	60,95	61,60	62,27

x	89,09°	89,10°
$\tan x$	62,96	63,66

Begründen Sie die Abweichungen, und ziehen Sie Schlußfolgerungen für die Möglichkeiten, in den verschiedenen Intervallen zu interpolieren!

Ermitteln Sie die Funktionswerte!

137. **a)** sin 0,18
b) sin 0,53
c) sin 0,24
d) sin 1,39

138. **a)** cos 0,47
b) cos 1,34
c) cos 0,37
d) cos 0,97

139. **a)** tan 0,45
b) tan 0,91
c) tan 1,43
d) tan 0,84

140. **a)** sin 0,42
b) sin 0,37
c) tan 0,49
d) cos 0,53

141. **a)** sin 0,345
b) sin 0,673
c) sin 1,473
d) sin 0,945

142. **a)** cos 0,482
b) cos 1,83
c) cos 0,843
d) cos 1,38

143. **a)** tan 0,437
b) tan 0,384
c) tan 1,74
d) tan 1,253

144. **a)** sin 0,734
b) cos 1,95
c) tan 0,497
d) tan 0,376

145. **a)** $\sin \frac{\pi}{10}$
b) $\sin \frac{\pi}{7}$
c) $\sin \frac{3\pi}{20}$
d) $\sin 0{,}07\,\pi$

146. **a)** $\cos \frac{3\pi}{10}$
b) $\cos \frac{2\pi}{7}$
c) $\cos 0{,}02\,\pi$
d) $\cos \frac{\pi}{11}$

147. **a)** $\tan 0{,}04\,\pi$
b) $\tan 0{,}05\,\pi$
c) $\tan \frac{\pi}{8}$
d) $\tan \frac{3\pi}{16}$

148. **a)** $\sin \sqrt{2}$
b) $\sin \frac{1}{2}\sqrt{3}$
c) $\tan \frac{1}{2}\sqrt{2}$
d) $\cot \frac{1}{10}\sqrt{3}$

a

149. a) lg sin 84,5°
b) lg sin 8,9°
c) lg sin 23,4°
d) lg sin 46,7°

150. a) lg cos 9,8°
b) lg cos 83,6°
c) lg cos 67,7°
d) lg tan 23,6°

151. a) lg tan 48,7°
b) lg tan 83,6°
c) lg cot 58,4°
d) lg cot 63,7°

Ermitteln Sie die Logarithmen der Winkelfunktionen für die in den aufgeführten Aufgaben genannten Winkel!

152. Aufgabe 128 **153.** Aufgabe 129 **154.** Aufgabe 130 **155.** Aufgabe 131
156. Aufgabe 132 **157.** Aufgabe 133 **158.** Aufgabe 134 **159.** Aufgabe 135
160. Aufgabe 137 **161.** Aufgabe 138 **162.** Aufgabe 139 **163.** Aufgabe 140

164. Zeichnen Sie in ein gemeinsames Koordinatensystem die Bilder der Funktionen $y = \arcsin x$, $y = \sin x$ und $y = \tan x$ für $-10° < x < 10°$!
Wählen Sie als Einheit 1 LE = 100 mm! Untersuchen Sie insbesondere den Verlauf der Kurven in der Umgebung von $x = 0°$! Begründen Sie Ihre Feststellung!

165. Beweisen Sie die Beziehungen $\sin x = \cos(90° - x)$ und $\tan x = \cot(90° - x)$!
Wie heißen die entsprechenden Beziehungen zwischen $\sin x$ und $\cos(90° + x)$ bzw. $\tan x$ und $\cot(90° + x)$?

166. Leiten Sie Beziehungen zwischen $\sin x$ und $\cos(270° - x)$ bzw. $\cos(270° + x)$ her!

---

16. Stellen Sie in Anlehnung an Aufgabe **166** entsprechende Beziehungen zwischen der Tangens- und der Kotangensfunktion her!

17. Nutzen Sie die in den Aufgaben **165** und **166** sowie *16* gewonnenen Beziehungen zur Bestimmung der Funktionswerte aus!

a) cos 94,9° c) cot 97,3° e) cos 105,6° g) cot 102,6°
b) cos 277,5° d) cot 275,3° f) cos 284,3° h) cot 292,2°

Ermitteln Sie die Funktionswerte!

167. a) sin 150°
b) cos 225°
c) sin (— 30°)
d) cos (— 150°)

168. a) tan 335°
b) cot 210°
c) tan 450°
d) cot 390°

169. a) sin 270°
b) cos 330°
c) sin (— 420°)
d) cos (— 750°)

170. a) tan 120°
b) cot 240°
c) tan (— 225°)
d) cot (— 315°)

171. a) $\sin\frac{13\pi}{10}$
b) $\cos\frac{9\pi}{7}$
c) $\sin\frac{15\pi}{2}$
d) $\cos\frac{7\pi}{3}$

172. a) $\tan\frac{31\pi}{4}$
b) $\cot\frac{23\pi}{5}$
c) $\tan\frac{10\pi}{3}$
d) $\cot\frac{5\pi}{2}$

173. a) $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$
b) $\cos\left(-\frac{13\pi}{2}\right)$
c) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$
d) $\cos\left(-\frac{14\pi}{13}\right)$

174. a) $\tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$
b) $\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
c) $\tan\left(-\frac{15\pi}{8}\right)$
d) $\cot(-0{,}01\pi)$

175. a) sin 234,6°
b) sin 123,7°
c) sin 348,5°
d) sin 516,7°

176. a) cos 438,9°
b) cos 215,7°
c) cos 148,9°
d) cos 276,5°

177. a) tan 193,4°
b) tan 293,4°
c) tan 321,7°
d) tan 299,5°

178. a) cot 367,5°
b) cot 221,4°
c) cot 99,5°
d) cot 187,5°

179. a) $\sin 301{,}7°$ b) $\sin 94{,}3°$ c) $\sin 215{,}6°$ d) $\sin 180{,}9°$

180. a) $\cos 187{,}4°$ b) $\cos 210{,}4°$ c) $\cos 394{,}6°$ d) $\cos 218{,}6°$

181. a) $\tan 154{,}7°$ b) $\tan 324{,}9°$ c) $\tan 215{,}8°$ d) $\tan 91{,}4°$

182. a) $\cot 104{,}6°$ b) $\cot 293{,}5°$ c) $\cot 156{,}5°$ d) $\cot 309{,}7°$

183. Geben Sie die Intervalle an, in denen die Funktion $y = \lg \sin x$ definiert ist! Stellen Sie die Funktion graphisch dar!

184. Untersuchen Sie die Funktionen

a) $y = \lg |\sin x|$, b) $y = \lg |\cos x|$, c) $y = \lg |\tan x|$, d) $y = \lg |\cot x|$!

Geben Sie die kleinste Periode für diese Funktionen an, und zeichnen Sie jeweils die zugehörige Kurve!

Ermitteln Sie die Funktionswerte!

185. a) $\lg \sin 94{,}3°$ b) $\lg |\sin 213{,}5°|$ c) $\lg |\cos 99{,}5°|$ d) $\lg |\cos 231{,}5°|$

186. a) $\lg \tan 87{,}4°$ b) $\lg |\tan 115{,}6°|$ c) $\lg |\sin 316{,}5°|$ d) $\lg |\sin 271{,}6°|$

187. a) $\lg |\tan 297{,}5°|$ b) $\lg \tan 215{,}6°$ c) $\lg |\cot 143{,}6°|$ d) $\lg |\cot 324{,}7°|$

188. a) $\lg \sin 123{,}5°$ b) $\lg \sin 273{,}6°$ c) $\lg \cos 73{,}4°$ d) $\lg \cos 144{,}7°$

189. a) $\lg \cos 253{,}6°$ b) $\lg \cos 328{,}2°$ c) $\lg \cot 137{,}4°$ d) $\lg \cot 183{,}7°$

190. a) $\lg \tan 93{,}7°$ b) $\lg \tan 177{,}6°$ c) $\lg \cot 199{,}6°$ d) $\lg \cot 259{,}7°$

Berechnen Sie die folgenden Terme!

191. a) $\sqrt{\dfrac{\tan^2 30°}{1 + \tan^2 30°}}$ b) $\dfrac{1}{\tan 37{,}5°}$ c) $\dfrac{\sin 34{,}5° \cdot \sin 83{,}6°}{\cos 31{,}4°}$

192. a) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos^2 37°}{\cos^2 37°}}$ b) $\sqrt{1 - \cos^2 31{,}4°}$ c) $\dfrac{\cos 215{,}6° \cdot \tan 94{,}3°}{\sin 15{,}3° + \cos 13{,}7°}$

193. a) $\dfrac{\cot^2 24°}{\sqrt{1 + \cot^2 24°}}$ b) $\dfrac{\sin 83{,}5°}{\sqrt{1 - \sin^2 83{,}5°}}$ c) $\dfrac{\cos 94{,}9° - \tan 0{,}7°}{\cot 51{,}6°}$

194. a) $\dfrac{\tan 24{,}3°}{\sin 17{,}3° \cdot \cos 19{,}5°}$ b) $\dfrac{\cos 83{,}6° \cdot \tan 2{,}4°}{\sin 37{,}1°}$ c) $\dfrac{\tan 94{,}6° + \cot 19{,}4°}{\cos 94{,}6° \cdot \sin 154{,}6°}$

195. a) $\dfrac{\sin 216{,}7° \cdot \cos 67{,}5°}{\cos 37{,}6°}$ b) $\dfrac{\tan 237{,}8° \cdot \cos 48{,}2°}{\cos 184{,}6° \cdot \sin 19{,}7°}$ c) $\dfrac{\cos 93{,}6° \cdot \sin 86{,}4°}{\tan 266{,}4°}$

---

18. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $y = \cos(\pi - 1)$

b) $y = x \cdot \tan x$ für $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $y = \tan(\pi - 2) \cdot \tan(\pi - 3)$

d) $y = \tan x - \cot x$ für $x = \frac{\pi}{5}$

e) $y = x + \sin x$ für $x = 0{,}5$

f) $y = \cos x + \sin x$ für $x = \frac{\pi}{4}$

19. Bestimmen Sie die Funktionswerte!

a) $y = \sin^2 0{,}5 \cdot (\cot^2 0{,}5 - 2)$

b) $y = \dfrac{\cot 0{,}6 \cdot \cos 0{,}6 - \sin 0{,}6}{2 \cos 0{,}6}$

c) $y = \tan 3 + \dfrac{\sin 3}{\cos 3}$

d) $y = \cos(\pi - 0{,}5) \cdot \sin(\pi + 0{,}5)$

20. Prüfen Sie, ob $x = \pi$ Lösung der Gleichung $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$ ist!

21. Weisen Sie nach, daß die Gleichung $\tan x + \cot x = 4$ für $\tan x = 2 \pm \sqrt{3}$ erfüllt ist!

Ermitteln Sie die Argumente ($0° \leqq x \leqq 90°$)!

196. a) $\sin x = 0{,}2470$
b) $\cos x = 0{,}9026$
c) $\tan x = 2{,}050$
d) $\cot x = 2{,}145$

197. a) $\sin x = 0{,}9816$
b) $\cos x = 0{,}6921$
c) $\tan x = 0{,}1871$
d) $\cot x = 3{,}060$

198. a) $\sin x = 0{,}8965$
b) $\cos x = 0{,}8453$
c) $\tan x = 5{,}005$
d) $\cot x = 0{,}9930$

199. a) $\sin x = 0{,}5140$
b) $\cos x = 0{,}9648$
c) $\tan x = 0{,}5300$
d) $\cot x = 0{,}1340$

200. a) $\sin x = 0{,}9580$
b) $\cos x = 0{,}2510$
c) $\tan x = 0{,}3614$
d) $\cot x = 0{,}3435$

201. a) $\sin x = 0{,}7925$
b) $\cos x = 0{,}5123$
c) $\tan x = 3{,}235$
d) $\cot x = 1{,}349$

202. a) $\sin x = 0{,}3582$
b) $\cos x = 0{,}4343$
c) $\tan x = 1{,}205$
d) $\cot x = 0{,}4324$

203. a) $\cos x = 0{,}4825$
b) $\cos x = 0{,}4050$
c) $\tan x = 2{,}150$
d) $\cot x = 0{,}4383$

204. a) $\sin x = 0{,}2831$
b) $\cot x = 0{,}4323$
c) $\cos x = 0{,}4777$
d) $\tan x = 1{,}053$

Ermitteln Sie die Argumente $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$!

205. a) $\sin x = 0{,}1395$
b) $\sin x = 0{,}7141$
c) $\sin x = 0{,}9967$
d) $\sin x = 0{,}0998$

206. a) $\cos x = 0{,}9801$
b) $\cos x = 0{,}7248$
c) $\cos x = 0{,}6216$
d) $\cos x = 0{,}2579$

207. a) $\tan x = 3{,}9033$
b) $\tan x = 1{,}7036$
c) $\tan x = 0{,}6841$
d) $\tan x = 0{,}1923$

208. a) $\sin x = 0{,}4325$
b) $\sin x = 0{,}8437$
c) $\sin x = 0{,}9117$
d) $\sin x = 0{,}1237$

209. a) $\cos x = 0{,}4327$
b) $\cos x = 0{,}2837$
c) $\cos x = 0{,}9514$
d) $\cos x = 0{,}6467$

210. a) $\tan x = 1{,}9173$
b) $\tan x = 0{,}9428$
c) $\tan x = 0{,}0347$
d) $\tan x = 0{,}4391$

211. a) $\sin x = 0{,}4725$
b) $\sin x = 0{,}6328$
c) $\sin x = 0{,}8484$
d) $\sin x = 0{,}2345$

212. a) $\cos x = 0{,}4827$
b) $\cos x = 0{,}1538$
c) $\cos x = 0{,}2345$
d) $\cos x = 0{,}8497$

213. a) $\tan x = 1{,}151$
b) $\tan x = 0{,}4999$
c) $\tan x = 0{,}9432$
d) $\tan x = 0{,}2837$

Ermitteln Sie die Argumente zu den folgenden Funktionswerten im Gradmaß!

214. **a)** $\sin x = 0{,}3716$
b) $\cos x = 0{,}8415$
c) $\tan x = 0{,}9416$
d) $\cot x = -0{,}6899$

215. **a)** $\sin x = 0{,}4328$
b) $\cos x = 0{,}3928$
c) $\tan x = 1{,}243$
d) $\cot x = 0{,}4517$

216. **a)** $\sin x = -0{,}2837$
b) $\cos x = -0{,}6837$
c) $\tan x = -1{,}346$
d) $\cot x = -0{,}3716$

217. **a)** $\sin x = 0{,}9117$
b) $\cos x = -0{,}6713$
c) $\tan x = -0{,}2364$
d) $\cot x = 0{,}6713$

218. **a)** $\sin x = -0{,}4521$
b) $\cos x = 0{,}4823$
c) $\tan x = -0{,}4388$
d) $\cot x = 0{,}9494$

219. **a)** $\sin x = -0{,}8493$
b) $\cos x = -0{,}5714$
c) $\tan x = -1{,}531$
d) $\cot x = -2{,}138$

Ermitteln Sie die Argumente zu den folgenden Funktionswerten im Bogenmaß!
(*Bemerkung:* Hierbei kann die entsprechende Umrechnungstabelle im Tafelwerk benutzt werden.)

220. **a)** $\sin x = 0{,}2860$
b) $\cos x = -0{,}3233$
c) $\tan x = -0{,}2464$
d) $\cot x = 0{,}2377$

221. **a)** $\sin x = 0{,}7030$
b) $\cos x = 0{,}1789$
c) $\tan x = 2{,}2958$
d) $\cot x = 0{,}7712$

222. **a)** $\sin x = -0{,}7568$
b) $\cos x = -0{,}8481$
c) $\tan x = 1{,}5574$
d) $\cot x = 0{,}5403$

223. Suchen Sie im Tafelwerk auf Seite 74 die Formeln für die Steigzeit, die Steighöhe und die Wurfweite auf!
a) Berechnen Sie die Steigzeit, die Steighöhe und die Wurfweite für eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ für die Steigungswinkel $\alpha = 0°, 10°, 20°, \ldots, 90°$!
b) Stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar und deuten Sie die Ergebnisse!

224. Berechnen Sie den Steigungswinkel für ein Geschoß mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 765\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ und einer Schußweite von 1500 m (der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden)!

225. Die Fallbeschleunigung ist von der geographischen Breite abhängig. Es gilt

$$g_\varphi = g_{90}\left(1 - \frac{1}{191}\cdot\cos^2\varphi\right) \text{ mit } g_{90} = 983{,}09\ \mathrm{cm \cdot s^{-2}}.$$

Berechnen Sie für die Breiten $\varphi = 0°, 10°, \ldots, 90°$ die Werte der Fallbeschleunigung!

---

22. Die Gleichung für die harmonische Welle ist:

$$y = y_0 \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right].$$

Darin bedeuten y_0 die Amplitude (der größte Ausschlag) in m, T die Schwingungsdauer in s, λ die Wellenlänge in m, t die Zeit in s. Berechnen Sie das Argument x für die Amplitude zur Zeit $t = 35$ s, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle $c = 78\ \mathrm{ms^{-1}}$ und die Frequenz 9 Hz beträgt!

---

a

Zur Wiederholung

226. In einem Kreis mit dem Radius r ist eine Sehne von der Länge l mit dem zugehörigen Zentriwinkel α gezeichnet. Das Lot vom Kreismittelpunkt halbiert den Zentriwinkel und die Sehne.

a) Stellen Sie die Funktion auf, welche die Beziehung zwischen dem halben Zentriwinkel, der halben Sehne und dem Radius ausdrückt!

b) Wie groß ist in einem Kreis mit dem Radius $r = 7$ cm die Sehne zum Zentriwinkel $\alpha = 20°;\ 40°;\ 140°$?

227. a) Es gilt $\tan x \cdot \cot x = 1$ $(x \neq k \cdot 90°)$. Leiten Sie daraus eine Beziehung zwischen $\lg \tan x$ und $\lg \cot x$ her!

b) Stellen Sie entsprechende Beziehungen für andere Winkelfunktionen her!

228. Bestimmen Sie die Winkel x (im Gradmaß) zu den folgenden Funktionswerten!

a) $\sin x = 0{,}0000238$ **b)** $\tan x = 0{,}0000104$

c) $\sin x = 3{,}76 \cdot 10^{-6}$ **d)** $\tan x = 9{,}83 \cdot 10^{-7}$

229. Durch welche Verschiebung geht die zu der Funktion $y = \cos x$ gehörige Kurve in die zur Funktion $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ über?

230. Die Kurve der Funktion $y = \sin x$ wird um 0,5 in der positiven Richtung der x-Achse verschoben. Sie wird dann weiter im Verhältnis 4:3 senkrecht zur y-Achse gestreckt und schließlich im Verhältnis 3:5 senkrecht zur x-Achse gestreckt.
Geben Sie die Funktionsgleichung an!

231. Berechnen Sie!

$$\left(2 \sin \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(3 \tan \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(2 \cos \frac{\pi}{6}\right)^2 - \left(2 \cot \frac{\pi}{4}\right)^2$$

232. Berechnen Sie!

$$3 \sin^2 \frac{\pi}{2} - \left(2 \tan \frac{\pi}{4}\right)^3 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 3 \cot^3 \frac{\pi}{2}$$

233. Vereinfachen Sie!

a) $(1 + \cos x) \cdot \cot^2 x \cdot (1 - \cos x)$ **b)** $\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} \cdot \tan x \cdot \cot x$

Beweisen Sie die Identität!

234. a) $\cos^4 x + \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$

b) $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2 = 4$

235. a) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$ **b)** $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

236. Der Sinus eines spitzen Winkels eines Parallelogramms ist 0,75. Bestimmen Sie den Kosinus des stumpfen Winkels!

237. Der Kosinus eines der Winkel eines Sehnenvierecks ist $\frac{12}{13}$.
Bestimmen Sie den Sinus des gegenüberliegenden Winkels!

238. Zeigen Sie, daß für alle x des Definitionsbereiches stets $\frac{\cos x + \cot x}{\sin x + \tan x} \geqq 0$ gilt!

239. Welche Bedingungen muß der Parameter a erfüllen, damit die Gleichung $\sin x = \frac{2a - 3}{4 - a}$ lösbar ist?

240. Wie lauten die Lösbarkeitsbedingungen für die Gleichung $\cos x = \frac{5b - 2}{2 - 3b}$?

241. Zeigen Sie, daß $(\tan x + \cot x)^2 \geqq 4$ gilt!

242. Untersuchen Sie Definitionsbereich, Wertevorrat, Periodizität und Nullstellen der Funktion $y = \sin x - \cos x$!
Stellen Sie die Funktion graphisch dar!

243. Bestimmen Sie die Monotonieintervalle für die folgenden Funktionen!

a) $y = \cos 0{,}5x$ **b)** $y = \sin 2x$ **c)** $y = \cos (0{,}3x - 1{,}5\pi)$

244. In welchen Intervallen fallen die folgenden Funktionen monoton?

a) $y = \frac{1}{\sin x}$

b) $y = \frac{1}{\cos x}$

Skizzieren Sie den Verlauf der zugehörigen Kurven!

b) Körperberechnung

b

1. Leiten Sie aus den Formeln für das Prisma spezielle Formeln für den Quader her, der ein Spezialfall des Prismas ist!

2. Leiten Sie aus den Formeln für das Prisma spezielle Formeln für den Würfel her, der ein Spezialfall des Prismas ist!

3. Geben Sie Formeln zur Berechnung des Oberflächeninhalts und des Volumens eines Hohlzylinders an!

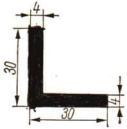
4. Geben Sie Formeln zur Berechnung des Oberflächeninhalts und des Volumens einer Hohlkugel an!

5. Stellen Sie eine Formel auf, mit der das Volumen eines Würfels bei gegebenem Oberflächeninhalt unmittelbar errechnet werden kann!

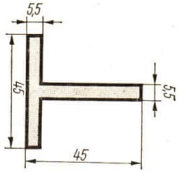
6. Ein Würfel hat ein Volumen von 55 cm^3. Wie groß ist sein Oberflächeninhalt?

7. Wieviel wiegen 13 500 mm L-Stahl 30 mm × 30 mm × 4 mm (Bild b 1)? $\varrho = 7{,}85\ g \cdot cm^{-3}$

8. Wieviel wiegen 12 000 mm T-Stahl 45 mm × 45 mm × 5,5 mm (Bild b 2)? $\varrho = 7{,}85\ g \cdot cm^{-3}$



b 1



b 2

Es handelt sich bei den Bildern b 1 und b 2 um Vergröberungen; denn tatsächlich sind mehrere Ecken abgerundet.

9. Stellen Sie in ein und demselben Achsenkreuz die Abhängigkeit
   a) der Körperdiagonalen c,
   b) des Oberflächeninhalts A_O,
   c) des Volumens V eines Würfels von der Würfelkante x graphisch dar!

10. Beweisen Sie, daß sich die Raumdiagonalen eines Quaders alle in einem Punkte schneiden!

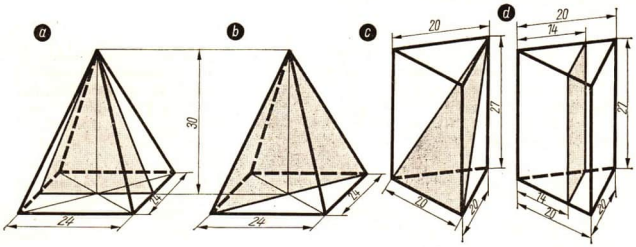
11. Welches Volumen hat ein Sechskantstahl von der Schlüsselweite 90 mm und der Länge 1000 mm?

12. Das Dach eines Schuppens hat die Form einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche. Die Grundkanten sind $a = 8{,}00$ m, $b = 6{,}00$ m, die Höhe $h = 3{,}00$ m. Wieviel Quadratmeter Dachpappe werden zum Decken des Daches benötigt, wenn mit einem Verschnitt von 5 % gerechnet wird?

13. Das Volumen einer geraden quadratischen Pyramide von 15 cm Höhe beträgt 380 cm^3.
   a) Wie groß ist ihr Oberflächeninhalt?
   b) Um wieviel Zentimeter müßte die Höhe verringert werden, damit bei gleichem Grundflächeninhalt der Oberflächeninhalt um 15 % kleiner wird?

Berechnen Sie jeweils den Inhalt der gerasterten Schnittfläche!

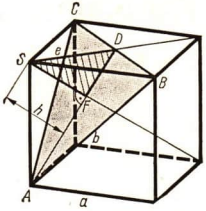
14. a) Bild b 3 a **b)** Bild b 3 c **15. a)** Bild b 3 b **b)** Bild b 3 d



16. Von einem Würfel mit der Kantenlänge a wird eine Ecke durch eine Ebene abgeschnitten, die durch drei dem Scheitelpunkt der Ecke zunächst liegende Eckpunkte des Würfels geht (Bild b 4).

a) Der Flächeninhalt der Schnittfigur und der Abstand des Scheitelpunktes der Ecke von der Schnittebene sind zu berechnen.

b) Wie groß ist das Volumen V_R des Restkörpers?



b 4

17. Weshalb beträgt der Flächeninhalt der Schnittfigur nur ein Viertel des Flächeninhalts der Grundfläche, wenn durch eine Pyramide in halber Höhe ein Schnitt parallel zur Grundfläche geführt wird?

Zur Berechnung eines geraden Kreiszylinders sind von den fünf Größen r, h, A_M, A_O, V jeweils zwei gegeben. Berechnen Sie jeweils die fehlenden drei!

18. a) $r = 4{,}0$ cm, $h = 6{,}5$ m **b)** $r = 3{,}0$ cm, $V = 75$ cm³

19. a) $h = 8{,}0$ m, $A_M = 25$ m² **b)** $V = 25{,}0$ l, $h = 0{,}5$ m

20. Ein zylindrischer Behälter von 1,20 m Durchmesser enthält 3000 kg Natronlauge der Dichte 1,250 g · cm^{-3}. Wie hoch steht die Lauge im Behälter?

21. Ein zylindrisches Standgefäß von 30 mm lichter Weite soll mit Teilstrichen für je 1 cm³ Fassungsvermögen versehen werden. In welchen Abständen voneinander müssen diese angebracht werden?

22. Betrachtet wird eine Schar gerader Kreiszylinder konstanter Höhe h.

a) Geben Sie das Volumen V als Funktion des Mantelinhalts A_M an!

b) Stellen Sie diese Funktion für $h = 2{,}50$ m graphisch dar!

c) Welches Volumen hat ein zylindrischer Kessel von der Länge 2,50 m, dessen Mantel 7,00 m² mißt?

23. Aus einem kreisförmigen Stück Blech von 1,00 m Radius wird ein Stück unter dem Zentriwinkel 135° ausgeschnitten und zu einem Kegel zusammengerollt. Wie groß sind Radius, Höhe und Volumen des entstehenden Kegels?

24. Eine Viertelkreisfläche vom Radius 40 cm wird zu einem Kegelmantel aufgebogen. Wie groß sind **a)** der Grundkreisradius, **b)** die Höhe und **c)** das Volumen des entstehenden Kegels?

b

25. Die handelsüblichen Einfülltrichter sind so geformt, daß sich in ihren kegelförmigen Teil ein kreisrundes Filterpapier nach zweimaligem Falten und anschließendem Öffnen zu einem Kegel glatt einlegen läßt. Die eine Hälfte des eingelegten Blattes besteht dann aus einfachem, die andere Hälfte aus dreifachem Filterpapier. Wie groß müssen Durchmesser und Seitenlänge des kegelförmigen Teiles sein, wenn der Trichter 1 l fassen soll?

Von den drei Größen r, A_O, V einer Kugel ist eine gegeben. Berechnen Sie die anderen!

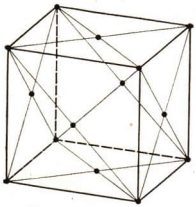
26. a) $r = 4$ cm **b)** $A_O = 1$ dm²

27. a) $r = 0{,}8$ m **b)** $A_O = 0{,}09$ m²

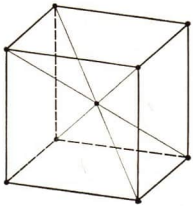
Beweisen Sie, daß die Raumerfüllung bei dichtester Kugelpackung den angegebenen Prozentsatz hat! *Anleitung*: Berechnen Sie das Gesamtvolumen aller Kugeln bzw. Kugelteile im Würfel!

28. Kubisch flächenzentriertes Gitter 74 % (Bild b 5).

29. Kubisch raumzentriertes Gitter 68 % (Bild b 6).



b 5



b 6

(Die großen Punkte deuten die Mittelpunkte der Kugeln an.)

30. Welches Volumen hat eine Kugel von $113\frac{1}{7}$ cm² Oberflächeninhalt? Wie erklärt sich das im ersten Augenblick sonderbar erscheinende Zahlenergebnis? *Anleitung*: Setzen Sie $\pi \approx \frac{22}{7}$!

Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt von dreiseitigen Pyramidenstümpfen, von denen die folgenden Längen bekannt sind!

31. Grundkante: $a = 8{,}0$ cm
Deckkante: $b = 5{,}0$ cm
Höhe: $h = 7{,}0$ cm

32. Grundkante: $a = 7{,}8$ cm
Deckkante: $b = 5{,}9$ cm
Seitenkante: $s = 10{,}4$ cm

33. Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche ein Quadrat von 6,0 cm Seitenlänge und die Seitenkante $s = 5{,}0$ cm. Die Pyramide wird in halber Höhe von einer Ebene durchschnitten. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Pyramidenstumpfes!

---

1. Aus einem rechteckigen Stück Blech von 50 cm bzw. 80 cm Seitenlänge werden aus den Ecken Quadrate von 10 cm Seitenlänge herausgeschnitten. Durch Hochbiegen der überstehenden Teile entsteht ein Kasten von der Form eines Quaders. **a)** Wie groß ist sein Volumen? **b)** Wie ändert sich das Volumen, wenn man für die an den Ecken herausgeschnittenen Quadrate der Reihe nach die Seitenlängen 5 cm, 6 cm, 7 cm und so fort bis 15 cm wählt? **c)** Die Änderung des Volumens ist durch eine graphische Darstellung zu verdeutlichen.

2. Eine hohle kupferne Kugel ($\varrho_2 = 8{,}9\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$) mit $d = 20$ cm äußerem Durchmesser sinkt genau bis zur Hälfte in Wasser ($\varrho_1 = 1\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$) ein. Wie dick ist ihre Wand?

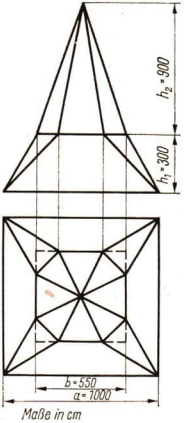
3. Beweisen Sie die Volumenformel des Pyramidenstumpfes!

4. Das Dach eines Turmes, dessen Grund- und Aufriß aus dem Bild b 7 zu ersehen sind, besteht aus einem quadratischen Pyramidenstumpf mit der Grundkante $a = 10{,}00$ m, der oberen Kante $b = 5{,}50$ m und der Höhe $h_1 = 3{,}00$ m. Seine Seitenkanten sind so abgeschnitten, daß aus der oberen Grundfläche ein regelmäßiges Achteck wird. Über diesem Achteck erhebt sich eine gerade achtseitige Pyramide von $h_2 = 9{,}00$ m Höhe.

Gesucht sind

a) das Volumen,

b) der Oberflächeninhalt des Dachraumes.



b 7

---

34. Das Volumen eines Kegels soll durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche halbiert werden. In welcher Höhe muß der Schnitt erfolgen?

35. Der Flächeninhalt des Mantels eines Kegels soll durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche halbiert werden. In welcher Höhe muß der Schnitt erfolgen?

36. Ein Kegel wird durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche so in zwei Teile zerlegt, daß dabei die Körperhöhe halbiert wird. Wie verhalten sich **a)** die Volumina, **b)** die Mantelinhalte beider Körperteile zueinander?

37. Ein Baumstamm von 6,00 m Länge hat einen oberen Umfang von 2,50 m und einen unteren Umfang von 3,20 m (ohne Rinde). Wieviel Festmeter (fm) Holz liefert er?

38. Ein Waldarbeiter mißt mit der Kluppe die Durchmesser eines 10 m langen Baumstammes am oberen und unteren Ende mit 38 cm und 48 cm. Wieviel Festmeter (fm) Holz hat der Baumstamm (auf drei Stellen genau)?

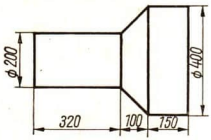
39. Ein 25 m hoher Schornstein hat die Form eines Kegelstumpfes. Die unteren Durchmesser (außen — innen) sind 11,3 m bzw. 3,5 m, die oberen Durchmesser 1,8 m bzw. 1,5 m. Wieviel Kubikmeter Mauerwerk enthält der Schornstein?

Berechnen Sie jeweils das Volumen!

40. Bild b 8

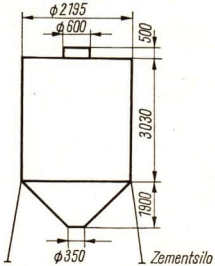
41. Bild b 9

42. Bild b 10

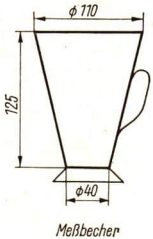


Rohrverbindung

b 8



b 9



b 10

---

5. In der Volumenformel für Kegelstümpfe werden h und r_1 als konstant betrachtet $\left(\text{z. B. } r_1 = 1\text{ dm}, h = \frac{3}{\pi}\text{ dm}\right)$. Die Formel gibt dann für eine Schar von Kegelstümpfen mit gleicher Grundfläche und Höhe das Volumen an.

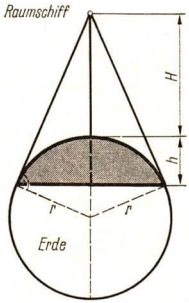
a) Diskutieren Sie die durch diese Gleichung dargestellte Funktion (Definitionsbereich, Wertevorrat, Nullstellen, Umkehrbarkeit)! Stellen Sie die Funktion graphisch dar $\left(V \text{ auf } \frac{1}{10} \text{ verkürzt}\right)$!

b) Beschreiben Sie, wie sich die Gestalt des Körpers mit zunehmendem r_2 ändert!

---

43. Welche Fläche in Quadratkilometern konnte der erste Kosmonaut GAGARIN aus seiner Gipfelhöhe von 302 km übersehen, wenn die Erde als Kugel mit dem Radius 6370 km angenommen wird (Bild b 11)?

Anmerkung: Die Höhe h der Kugelkappe ist nach dem Satz des EUKLID zu berechnen: $r^2 = (r + H)(r - h)$.



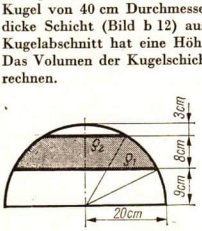
b 11

44. Wie hoch muß eine Rakete steigen, damit von ihr aus $\frac{1}{100}$ der Erdoberfläche im Bild aufgenommen werden kann?

45. Welche Höhe hat eine Kugelzone von 230 dm² Flächeninhalt, wenn der Kugelradius 20 dm ist?

46. Die nördliche gemäßigte Zone der Erde liegt zwischen dem nördlichen Polarkreis und dem Wendekreis des Krebses. Der Abstand der beiden Kreisebenen beträgt rund 3300 km, der Erdradius 6370 km. Welchen Flächeninhalt hat die Zone?

47. Zwei parallele Ebenen schneiden aus einer Kugel von 40 cm Durchmesser eine 8 cm dicke Schicht (Bild b 12) aus. Der erste Kugelabschnitt hat eine Höhe von 3 cm. Das Volumen der Kugelschicht ist zu berechnen.



b 12

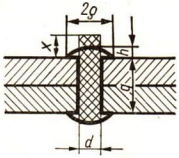
48. Von einer Kugel mit 10 cm Durchmesser sind an zwei gegenüberliegenden Stellen durch parallele Schnitte zwei Kugelsegmente von je 1 cm Höhe abgeschnitten. Wie groß sind für die übrigbleibende Kugelschicht **a)** die beiden Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 der Endflächen, **b)** das Volumen V?

49. Bei der Härteprüfung nach BRINELL wird eine Kugel vom Durchmesser D aus gehärtetem Stahl unter einer Belastung F in eine ebene Fläche des Materials gedrückt. Nach der Entlastung wird der Durchmesser d des Eindrucks ermittelt. Die Härte ist durch die Beziehung $H = \frac{F}{A_M}$ (in kp/mm²) definiert, wo A_M der Oberflächeninhalt der Kalotte ist.

a) Beweisen Sie, daß $H = \frac{2F}{\pi D\,(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$ ist!

b) Welche Brinellhärte hat eine Aluminiumknetlegierung, wenn bei $F = 250$ kp und $D = 5$ mm $d = 2{,}0$ mm gemessen wurden?

50. Beim Nieten wird aus dem überstehenden Teil des zylindrischen Schaftes des Niets ein Körper geformt, der die Form eines Kugelsegments hat (Bild b 13). Warum darf der Niet weder zu kurz noch zu lang sein?



b 13

a) Bestimmen Sie die notwendige Länge l des Schaftes, wenn zwei Bleche mit der Gesamtdicke q verbunden werden (l als Funktion von q, d, ϱ und h)!

b) Berechnen Sie die erforderliche Länge l des Niets, wenn $q = 14$ mm, $d = 7$ mm, $2\varrho = 12$ mm und $h = 3{,}8$ mm sind!

---

6. Beweisen Sie die Volumenformel der Kugelschicht!

Anleitung: Berechnen Sie das Volumen als Differenz zweier Kugelabschnitte!

7. Eine Kugel erhält eine zylindrische Bohrung von 12 cm Länge, deren Achse durch den Kugelmittelpunkt geht. Bestimmen Sie das Volumen des Restkörpers und diskutieren Sie das Ergebnis!

---

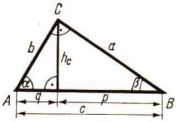
c) Trigonometrie

Berechnen Sie die Seiten, Winkel und Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke ABC ($\gamma = 90°$), von denen folgende Stücke gegeben sind! Welche Grundaufgabe liegt jeweils vor?

1. **a)** $a = 12{,}7$ cm; $b = 4{,}9$ cm
b) $a = 420$ m; $c = 645$ m
c) $c = 125$ m; $\alpha = 35{,}60°$
d) $a = 63$ mm; $\alpha = 40{,}30°$
e) $a = 25{,}0$ m; $A = 420$ m²

2. **a)** $a = 15{,}85$ m; $b = 74{,}54$ m
b) $a = 14{,}54$ cm; $c = 29{,}08$ cm
c) $c = 10{,}50$ cm; $\beta = 40{,}30°$
d) $b = 80{,}70$ m; $\beta = 62{,}30°$
e) $a = 15{,}48$ m; $A = 74{,}52$ m²

In einem rechtwinkligen Dreieck (Bild c 1) sind zwei Stücke gegeben. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt, und konstruieren Sie die rechtwinkligen Dreiecke!



c 1

3. **a)** $c = 18{,}50$ m; $p = 4{,}20$ m
b) $h = q = 3{,}5$ cm
c) $p = 10{,}2$ cm; $\alpha = 37{,}50°$

4. **a)** $c = 18{,}50$ m; $h = 4{,}30$ m
b) $h = 22{,}42$ m; $b = 25{,}30$ m
c) $p = 18{,}18$ m; $q = 3{,}88$ m

In einem gleichschenkligen Dreieck (↗ Bild C 3 auf Seite 51) sind zwei Stücke gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt, und konstruieren Sie die gleichschenkligen Dreiecke!

5. **a)** $a = 25{,}10$ m; $c = 14{,}30$ m
b) $c = 125$ m; $h_c = 85$ m
c) $c = 19{,}64$ m; $\gamma = 55{,}40°$

6. **a)** $a = 3{,}70$ m; $c = 2{,}50$ m
b) $h_c = 4{,}786$ m; $\gamma = 32{,}10°$
c) $c = 75{,}92$ dm; $\alpha = 52{,}62°$

7. Berechnen Sie im Rechteck mit den Seiten $a = 5{,}5$ m und $b = 4{,}2$ m die Winkel, welche die Diagonalen mit den Rechteckseiten bilden, und den von beiden Diagonalen eingeschlossenen Winkel!

8. Von einem Rechteck ist die Diagonale $c = 6{,}50$ m und der von beiden Diagonalen eingeschlossene Winkel $\varepsilon = 55°$ gegeben. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

9. Von einem Rhombus sind die Seite $a = 12{,}5$ cm und der Winkel $\alpha = 45°$ gegeben. Berechnen Sie die Länge der beiden Diagonalen des Rhombus und den Flächeninhalt!

Berechnen Sie Seite, In- und Umkreisradius sowie Flächeninhalt für folgende regelmäßige n-Ecke!

10. **a)** $n = 7$; $s = 13{,}2$ cm
b) $n = 5$; $r_i = 17{,}4$ dm

11. **a)** $n = 10$; $r_u = 23{,}5$ cm
b) $n = 8$; $A = 23{,}47$ m²

12. a) Einem Kreis vom Radius $r = 1{,}00$ dm ist ein regelmäßiges n-Eck *einbeschrieben*. Wie groß sind seine Seite s_n, sein Umfang u_n und sein Flächeninhalt a_n für $n = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$?

b) Einem Kreis vom Radius $r = 1{,}00$ dm ist ein regelmäßiges n-Eck *umbeschrieben*. Wie groß sind seine Seite S_n, sein Umfang U_n und sein Flächeninhalt A_n für $n = 3; 4; 5; \ldots; 10$?

c) Stellen Sie in einem rechtwinkligen Achsenkreuz, bei dem auf der Abszissenachse die Indizes n abgetragen sind, die Größen s_n und S_n, u_n und U_n, a_n und A_n aus Aufgabe **a)** und **b)** in Abhängigkeit von n graphisch dar!

Die Seite eines regelmäßigen n-Ecks sei $s_n = 270$ mm.
Bestimmen Sie die Radien des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Kreises für die folgenden Werte von n!

13. a) $n = 3$ **b)** $n = 5$ **c)** $n = 7$

14. a) $n = 4$ **b)** $n = 6$ **c)** $n = 8$

15. Von einem Drachenviereck $ABCD$ sind die Seiten
$\overline{AB} = \overline{AD} = 6{,}3$ cm
und
$\overline{BC} = \overline{CD} = 2{,}8$ cm
sowie die Diagonale $\overline{DB} = 4{,}2$ cm gegeben. Berechnen Sie die Viereckswinkel, die Winkel, welche die Diagonalen mit den Seiten bilden, und die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$!

16. In einem gleichschenkligen Trapez sind die beiden parallelen Seiten $a = 5{,}25$ cm und $c = 3{,}75$ cm sowie der spitze Winkel $\alpha = 65{,}82°$ gegeben. Berechnen Sie

a) die Viereckswinkel,

b) die Winkel, welche die Diagonalen mit den Seiten bilden,

c) den von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel sowie die Länge

d) der Schenkel,

e) der Höhe (des Abstandes der parallelen Seiten) und

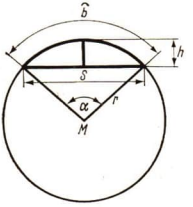
f) der Diagonalen!

C

17. Zwei Kreise berühren einander von außen. Ihre Durchmesser verhalten sich wie **a)** 1 : 2, **b)** 1 : 3, **c)** 1 : 4.
Unter welchem Winkel schneiden die beiden äußeren Tangenten einander?

18. a) Berechnen Sie die zu einem beliebigen Zentriwinkel gehörige Sehne s, den zugehörigen Kreisbogen $\widehat{b}$ und die Pfeilhöhe h (Abstand der Bogenmitte von der Sehne) eines Kreises mit Radius r als Funktionen des Zentriwinkels, und stellen Sie diese Funktionen graphisch dar (Bild c 2)!

b) Wie lauten die analytischen Darstellungen für die Funktionen $s(\alpha)$; $\widehat{b}(\alpha)$ und $h(\alpha)$ im Einheitskreis?



c 2

19. Bei einer schiefen Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 6{,}0$ cm ist, liegt die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche. Die Körperachse schließt mit der Grundfläche den Neigungswinkel $\varphi = 66{,}59°$ ein. Es sind **a)** der Oberflächeninhalt, **b)** das Volumen zu berechnen.

20. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Quadrat mit der Seite $a = 24{,}4$ cm, die Seitenkanten haben eine Neigung von 68,5° gegen die Grundfläche. Es sind **a)** die Seitenkanten, **b)** die Höhe, **c)** das Volumen, **d)** der Oberflächeninhalt der Pyramide zu berechnen.

21. Grund- und Deckfläche eines geraden Pyramidenstumpfes sind Quadrate mit den Seiten 7,5 cm und 3,8 cm. Die Seitenkante bildet mit der Grundfläche einen Winkel von 72°.

a) Wie groß sind Volumen und Oberflächeninhalt des Körpers?

b) Wie ändert sich die Höhe des Pyramidenstumpfes, wenn der Winkel α nicht der Neigungswinkel der Seitenkante mit der Grundfläche, sondern der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche ist?

22. Von einem Pyramidenstumpf kennt man die quadratische Grundfläche ($a = 20$ cm) und die Körperhöhe $h = 6$ cm, außerdem den Winkel $\alpha = 60°$, unter dem die Seitenflächen gegen die Grundfläche geneigt sind.

a) Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt!

b) Wie ändert sich die Kantenlänge der Deckfläche, wenn der Winkel α nicht der Neigungswinkel der Seitenfläche gegen die Grundfläche, sondern der Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Grundkante ist?

Es ist der Neigungswinkel φ einer Mantellinie eines geraden Kreiskegels gegen die Grundfläche zu berechnen, wenn die folgenden Größen gegeben sind.

23. **a)** $r = 4{,}4$ cm; $A_M = 108{,}3$ cm²

b) $s = 7{,}0$ cm; $A_O = 30\,\pi$ cm²

24. **a)** $h = 7{,}9$ cm; $V = 200$ cm³

b) $s = 5{,}18$ cm; $A_M = 44{,}01$ cm²

Öffnungswinkel eines Kegels ist der Winkel an der Spitze des Achsenschnittes.

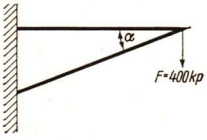
25. Bei einem geraden Kreiskegel ist der Mantelinhalt doppelt so groß wie der Grundflächeninhalt.
Wie groß ist sein Öffnungswinkel?

26. Der Mantelinhalt eines geraden Kreiskegels beträgt 694 cm², sein Öffnungswinkel $\alpha = 34°$. Wie groß sind Grundflächeninhalt und Oberflächeninhalt?

27. Eine kegelförmige Abraumhalde hat bei einem Böschungswinkel von 45° eine Höhe von 23 m erreicht. Geben Sie das Volumen der Abraummenge an!

28. Eine Holzkugel von 8,0 cm Durchmesser wird auf ein kegelförmig zugespitztes Rundholz aufgeleimt. Sie muß deshalb mit einer Aussparung versehen werden, die die Form eines Sektors mit dem Kegelöffnungswinkel 60° hat. Der Materialabfall ist anzugeben.

29. Am äußeren Ende eines Tragarms mit Zugstange hängt eine Last $F = 400$ kp (Bild c 3).



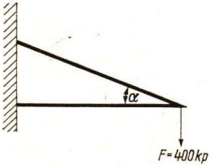
c 3

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Zugstange wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; 45°; 60° der Zugstange gegen den Tragarm!

b) Handelt es sich um Zug- oder um Druckkräfte?

c) Berechnen Sie trigonometrisch die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

30. Am Ende eines Tragarms mit Stütze hängt eine Last $F = 400$ kp (Bild c 4).



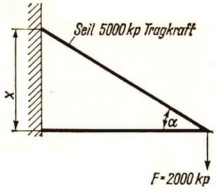
c 4

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Stütze wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; 45°; 60° der Stütze gegen den Tragarm!

b) Werden Tragarm und Stütze auf Zug oder auf Druck beansprucht?

c) Berechnen Sie die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

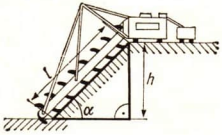
31. Ein Ausleger soll 2000 kp tragen und ist mit einem Seil von 5000 kp Tragfähigkeit abzufangen (Bild c 5).
Wie groß muß das Maß x mindestens werden, wenn die Tragfähigkeit des Seiles nicht überschritten werden soll?



c 5

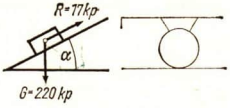
32. In einem Braunkohlentagebau arbeitet ein Eimerkettenbagger im Tiefschnitt (Bild c 6). Die Länge der Eimerleiter sei l, die Höhe der Arbeitsebene h. Welchen Winkel bildet die Eimerleiter mit der Horizontallinie für $l = 29$ m; $h = 15$ m?

33. Ein Förderband von der Länge l bildet mit der Horizontallinie den Winkel α. In welche Höhe wird das Fördergut gebracht, wenn das untere Ende des Förderbandes die Höhe h_1 über dem Erdboden hat? Zahlenbeispiel: $l = 12$ m; $h_1 = 1$ m; $\alpha = 35°$.



c 6

34. Eine Kiste mit einem Gewicht von 220 kp wird mittels einer Schrotleiter abgeladen (Bild c 7).
Bei welchem Winkel α beginnt die Kiste zu gleiten, wenn zur Überwindung der Reibung 17 kp erforderlich sind?



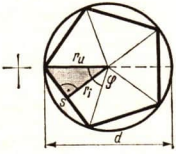
c 7

35. Aus einem Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60$ mm soll ein regelmäßiges Fünfkant gefräst werden (Bild c 8). Bestimmen Sie

a) die Seite s_5 des Fünfkants,

b) den prozentualen Verlust an Querschnittsfläche!

36. Welchen Durchmesser muß ein Rundstahl haben, damit aus ihm ein Sechskant mit 80 cm² Querschnitt gefräst werden kann? Bestimmen Sie den prozentualen Verlust an Querschnittsfläche!



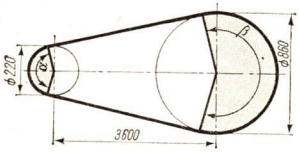
c 8

Berechnen Sie für die folgenden im Bild dargestellten Riementriebe

a) die Umschlingungswinkel α und β,

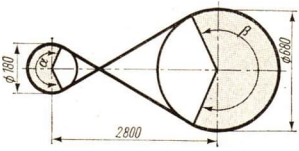
b) die erforderliche Riemenlänge l (102 % des errechneten Ergebnisses)!

37. Offener Riementrieb (Bild c 9).



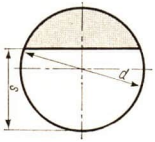
c 9

38. Gekreuzter Riementrieb (Bild c 10).



c 10

Von einer Welle mit dem Durchmesser d (Bild c 11) wird das schraffierte Stück abgefräst. Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?



c 11

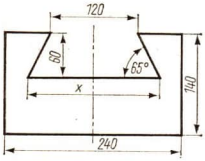
39. **a)** $d = 100$ mm; $s = 75$ mm

b) $d = 160$ mm; Bogenhöhe des abgefrästen Stückes $h = 35$ mm

40. **a)** $d = 100$ mm; $s = 60$ mm

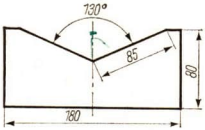
b) $d = 160$ mm; Bogenhöhe des abgefrästen Stückes $h = 20$ mm

41. Berechnen Sie für die in Bild c 12 dargestellte Schwalbenschwanzführung das Maß x!



c 12

42. Berechnen Sie für das in Bild c 13 dargestellte Führungsprisma die fehlenden Maße!



c 13

43. Unter welchem Winkel steigt eine geradlinige Straße gleichmäßig an, wenn zwei Meßpunkte A und B auf ihr 810 m voneinander entfernt liegen (in der Straßenmitte gemessen) und einen Höhenunterschied von 40,80 m gegeneinander aufweisen? Zeichnen Sie einen maßstäblichen Geländeschnitt, und lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch!

Welche Breitenausdehnung hat ein Körper, der einem Beobachter in der Entfernung d unter dem Schwinkel 1° erscheint? (Sehwinkel ist der Winkel, den die Visierlinien nach der Begrenzung des Körpers miteinander bilden.)

44. **a)** $d = 1$ m **b)** $d = 1$ km

45. **a)** $d = 100$ m **b)** $d = 10$ km

46. Ein elektrischer Leitungsmast wirft bei einer Sonnenhöhe von $\alpha = 52{,}7°$ in der Horizontalebene einen $l = 16{,}76$ m langen Schatten. Die Höhe des Leitungsmastes über der Erde ist zu bestimmen. Lösen Sie die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch!

47. Ein 23 m hoher Gittermast einer Hochspannungsleitung wirft in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten. Unter welchem Winkel fallen im Zeitpunkt der Beobachtung die Sonnenstrahlen ein? Lösen Sie die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch!

48. Von einem Standpunkt P aus sieht man einen Turm unter dem Sehwinkel $\alpha = 29{,}82°$. Der Standpunkt P ist horizontal um $d = 240$ m vom Turm entfernt und liegt um $h_1 = 19{,}40$ m höher als der Fuß des Turmes. Wie hoch ist der Turm? Lösen Sie die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch!

49. Eine neue Eisenbahnlinie wird gebaut. Sie verläuft in einer Ebene senkrecht zu einer bereits bestehenden Bahnlinie, über die sie mittels einer Brücke von 8,50 m Höhe geführt werden soll. Wie lang muß die Rampe mindestens sein, wenn der Anstiegswinkel nicht mehr als 1° betragen soll?

---

1. In einem regelmäßigen n-Eck ist **a)** der Umkreisradius r_u, **b)** der Inkreisradius r_i gegeben. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt des regelmäßigen n-Ecks
im Falle **a)** $a_n = n\, r_u^2 \sin \frac{180°}{n} \cdot \cos \frac{180°}{n}$, im Falle **b)** $A_n = n\, r_i^2 \tan \frac{180°}{n}$ ist!

2. **a)** Wie groß ist der Flächeninhalt des Kreissegments zum Zentriwinkel $\alpha = 54°$ in einem Kreis mit dem Radius $r = 1{,}00$ dm?

b) Berechnen Sie die Pfeilhöhe h des Segments in Aufgabe **a)**!

c) Von einem Segment sind die Sehne $s = 5{,}40$ m (Spannweite s) und die Pfeilhöhe $h = 0{,}50$ m (Bogenhöhe h) gegeben. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kreissegments und den zugehörigen Zentriwinkel!

3. Stellen Sie den Flächeninhalt

a) des Sektors zum Bogen $\widehat{b}$ eines Einheitskreises,

b) des gleichschenkligen Dreiecks über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Mittelpunkt des Einheitskreises liegt,

c) des Kreissegments über der Sehne s, das von dem Kreisbogen $\widehat{b}$ begrenzt wird,

als Funktionen des Zentriwinkels α analytisch und graphisch dar!

4. Durch eine Grundkante einer geraden regelmäßigen dreiseitigen Pyramide (Grundkante a, Höhe h) wird eine Ebene gelegt, die mit der Grundfläche den Winkel α bildet. Unter bestimmten Bedingungen zerlegt sie den Körper in zwei Teile.

a) Werden a und α fest gewählt, so sind 1. die Höhe h_1 des unteren Teils, 2. das Volumen V_1 des unteren Teils, 3. das Volumen V_2 des oberen Teils Funktionen von h. Geben Sie Funktionsgleichungen für $h_1 = f_1(h)$, $V_1 = f_2(h)$ und $V_2 = f_3(h)$ an!

b) Diskutieren Sie die Funktionen $h_1(h)$, $V_1(h)$ und $V_2(h)$ ($a = 1{,}00$ dm; $\alpha = 45°$)! Geben Sie Definitionsbereich und Wertevorrat an! Stellen Sie die Funktionen graphisch dar!

Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel der Dreiecke, von denen die folgenden Stücke gegeben sind! Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die Dreiecke konstruieren!

50. **a)** $a = 4{,}0$ cm, $\beta = 43°$, $\gamma = 55°$
b) $c = 1{,}46$ m, $\alpha = 20{,}2°$, $\beta = 74{,}3°$
c) $c = 121{,}56$ cm, $\beta = 13{,}47°$, $\gamma = 101{,}25°$
d) $a = 44{,}8$ cm, $\alpha = 59°\ 10'$, $\beta = 41°\ 18'$

51. **a)** $a = 5{,}6$ cm, $\beta = 83{,}8°$, $\gamma = 26{,}5°$
b) $b = 8{,}5$ cm, $\beta = 44{,}2°$, $\gamma = 54{,}5°$
c) $b = 2{,}389$ km, $\alpha = 39°\ 17'$, $\beta = 68°\ 28'$
d) $c = 64{,}9$ m, $\alpha = 42°\ 43'$, $\gamma = 102°\ 19'$

C

Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt! Achten Sie dabei darauf, ob der gegebene Winkel der größeren oder der kleineren Seite gegenüberliegt!

52. **a)** $b = 3{,}8$ cm, $c = 4{,}5$ cm, $\gamma = 53{,}6°$
b) $a = 7{,}0$ cm, $b = 5{,}8$ cm, $\beta = 43{,}7°$
c) $a = 12{,}51$ m, $b = 27{,}83$ m, $\beta = 109{,}24°$
d) $a = 30{,}4$ cm, $c = 27{,}8$ cm, $\alpha = 67° 23'$

53. **a)** $a = 35{,}75$ m, $c = 26{,}48$ m, $\alpha = 93{,}57°$
b) $a = 32{,}3$ cm, $c = 36{,}6$ cm, $\alpha = 55{,}7°$
c) $b = 4{,}3$ cm, $c = 4{,}6$ cm, $\gamma = 20° 35'$
d) $b = 24{,}9$ m, $c = 17{,}2$ m, $\beta = 117° 4'$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, von dem die folgenden Stücke gegeben sind!

54. **a)** $a = 8{,}7$ cm, $b = 7{,}1$ cm, $\gamma = 44{,}6°$
b) $a = 34{,}76$ m, $\beta = 59° 10'$, $\gamma = 79° 33'$

55. **a)** $a = 52{,}85$ cm, $c = 75{,}23$ cm, $\beta = 56{,}91°$
b) $b = 4{,}475$ km, $\beta = 59{,}27°$, $\gamma = 41{,}31°$

56. Berechnen Sie die Seiten des Dreiecks, von dem $\alpha = 81{,}91°$, $\beta = 41{,}54°$ und $r = 258{,}4$ cm gegeben sind!

Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie die Dreiecksfläche!

57. **a)** $a = 6{,}1$ cm, $c = 4{,}7$ cm, $\beta = 63{,}2°$
b) $b = 17{,}18$ m, $c = 13{,}85$ m, $\alpha = 74{,}32°$
c) $a = 5{,}38$ m, $b = 1{,}97$ m, $c = 4{,}75$ m
d) $a = 27{,}18$ m, $b = 33{,}88$ m, $c = 35{,}03$ m

58. **a)** $a = 123{,}5$ m, $b = 134{,}2$ m, $\gamma = 102{,}16°$
b) $a = 245{,}9$ m, $b = 392{,}5$ m, $\gamma = 47° 43'$
c) $a = 2{,}458$ km, $b = 3{,}019$ km, $c = 1{,}389$ km
d) $a = 8{,}754$ km, $b = 6{,}672$ km, $c = 8{,}386$ km

C

Drei Kreise mit den folgenden Radien berühren einander gegenseitig von außen. Welchen Winkel schließen je zwei Zentralen miteinander ein? (Die Zentrale zweier Kreise ist die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte.)

59. $r_1 = 6{,}5$ cm; $r_2 = 5{,}2$ cm; $r_3 = 3{,}8$ cm

60. $r_1 = 9{,}5$ cm; $r_2 = 7{,}6$ cm; $r_3 = 5{,}1$ cm

61. Ein gleichseitiges Dreieck wird in Kavalierperspektive abgebildet.

a) Bestimmen Sie im Bilddreieck die Winkel 1) darstellend-geometrisch, 2) trigonometrisch!

b) Führen Sie die gleiche Aufgabe an einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Basiswinkel 75° durch!

Von den Endpunkten A und B einer bekannten Basis a werden die Punkte C und D anvisiert und dabei die Winkel CAD, DAB, CBA und DBC gemessen. Es soll hieraus die Länge von $\overline{CD}$ berechnet werden.

62. $a = 60$ m, $\sphericalangle CAD = 52°$, $\sphericalangle DAB = 126° 2'$, $\sphericalangle CBA = 66° 52'$, $\sphericalangle DBC = 34° 52'$

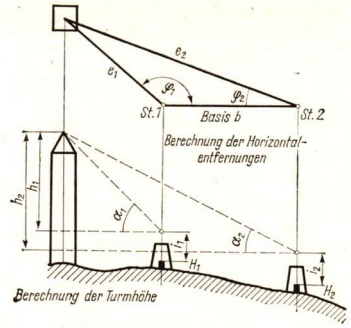
63. $a = 25$ m, $\sphericalangle CAD = 58{,}58°$, $\sphericalangle DAB = 146{,}14°$, $\sphericalangle CBA = 60{,}50°$, $\sphericalangle DBC = 41{,}60°$

64. Berechnen Sie die Horizontalentfernungen e_1 und e_2 eines Turmes von den Standorten St. 1 und St. 2 und die Höhe h der Turmspitze über NN (Bild c 14)!

a) Gemessen sind die Grundlinie $b = 247{,}290$ m, die Horizontalwinkel $\varphi_1 = 110{,}99°$ und $\varphi_2 = 34{,}90°$ (Vorwärtseinschneiden).

b) Gegeben sind die Höhen der Standorte $H_1 = 145{,}02$ m über NN; $H_2 = 139{,}04$ m über NN sowie die Höhen der Meßinstrumente $i_1 = 1{,}30$ m; $i_2 = 1{,}20$ m. Gemessen sind die Höhenwinkel $\alpha_1 = 19{,}12°$ und $\alpha_2 = 12{,}80°$.

c) Beachten Sie die Rechenkontrolle für h!



c 14

Von einem Viereck $ABCD$ seien die folgenden Stücke bekannt. Ermitteln Sie jeweils die Länge der Seite $\overline{CD}$!

65. $\overline{AB} = 85$ m, $\sphericalangle ABC = 57{,}12°$, $\sphericalangle ABD = 34{,}24°$, $\sphericalangle BAC = 44{,}37°$, $\sphericalangle BAD = 122{,}19°$

66. $\overline{AB} = 72$ m, $\sphericalangle ABC = 39° 43'$, $\sphericalangle ABD = 25° 21'$, $\sphericalangle BAC = 62° 5'$, $\sphericalangle BAD = 118° 24'$

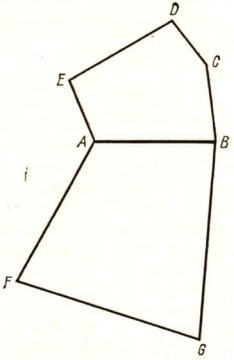
Zwei Straßen stoßen geradlinig unter einem Winkel von 120° aufeinander. Zur Verbesserung der Straßenführung sollen beide durch einen Kreisbogen mit folgendem Radius verbunden werden. Um wieviel Meter wird durch den Bogen der Straßenzug verkürzt?

67. $r = 300$ m

68. $r = 500$ m

69. Von einer Klasse wird ein LPG-Feld vermessen (Bild c 15).
Meßergebnisse:

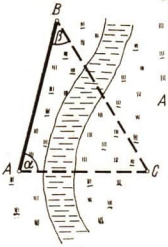
Basis $\overline{AB} = 125$ m;
$\sphericalangle BAC = \alpha_1 = 35{,}1°$; $\sphericalangle ABC = \beta_1 = 87{,}8°$;
$\sphericalangle BAD = \alpha_2 = 58{,}1°$; $\sphericalangle ABD = \beta_2 = 71{,}9°$;
$\sphericalangle BAE = \alpha_3 = 112{,}0°$; $\sphericalangle ABE = \beta_3 = 26{,}1°$;
$\sphericalangle BAF = \alpha_4 = 121{,}0°$; $\sphericalangle ABF = \beta_4 = 33{,}6°$;
$\sphericalangle BAG = \alpha_5 = 64{,}0°$; $\sphericalangle ABG = \beta_5 = 84{,}2°$.
Der Flächeninhalt des Feldes ist zu berechnen.



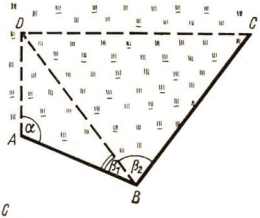
c 15

70. Im Gelände ist eine Basis $\overline{AB} = 225$ m vermessen worden. Ein dritter Punkt im Gelände ist C, der von A und B aus nicht zugänglich ist. Mit dem Theodoliten wurden
$\sphericalangle CAB = \alpha = 75° 20'$ und $\sphericalangle CBA = \beta = 42° 40'$
ermittelt.
Wie lang sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ (Bild c 16)?

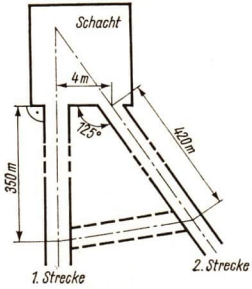
71. Wieviel Hektar Land werden durch die Trockenlegung der in Bild c 17 skizzierten feuchten Wiese $ABCD$ gewonnen?
Bemerkung: $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ sind nicht begehbar.
$\overline{AB} = 470$ m; $\overline{BC} = 675$ m; $\alpha = 115°$; $\beta_1 = 26°$; $\beta_2 = 72{,}5°$.



c 16



c 17



c 18

72. Zwischen zwei durch einen Wald getrennten Orten A und B soll für eine Hochspannungsleitung eine Schneise geschlagen werden. Die Orte A und B liegen gleich hoch und sind von einem in gleicher Höhe liegenden Geländepunkt C aus beide sichtbar. Die Peilstrahlen $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ werden zu 2,380 km und 3,450 km bestimmt. Der Winkel $\sphericalangle ACB$ beträgt 38,7°.

a) Wie groß ist die Horizontalentfernung $\overline{AB}$?

b) In welchen Richtungen von A und B aus ist die Schneise zu schlagen?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

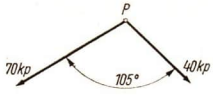
73. In einem Bergwerk sind von derselben Wand eines Schachtes aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Strecken vorgetrieben worden, deren Eingänge um 4,00 m voneinander entfernt liegen (Grundriß der Schachtanlage: Bild c 18). Die erste Strecke ist 350,00 m lang und verläuft senkrecht zur Schachtwand. Die zweite Strecke ist 420,00 m lang und verläuft unter einem Winkel von 125° gegen die Schachtwand. Die Enden beider Strecken sollen durch eine dritte Strecke miteinander verbunden werden.

a) Wie lang wird die Verbindungsstrecke?

b) In welchen Richtungen ist die Verbindungsstrecke von den beiden Streckenenden vorzutreiben, wenn sie von den Endpunkten aus gleichzeitig in Angriff genommen werden soll?

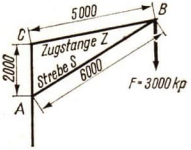
c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

74. Ein Leitungsmast wird unter einem Winkel von 105° mit 70 kp und 40 kp Zug beansprucht (Bild c 19).
Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch Größe und Richtung der Resultierenden!



c 19

75. Ein Drehkran (Bild c 20) trägt am Auslegerkopf B eine Last $F = 3000$ kp. Was für Kräfte treten in der Strebe S und in der Zugstange Z auf? Wie groß sind diese?



c 20

76. Drei Kräfte, $F_1 = 50$ kp, $F_2 = 60$ kp, $F_3 = 80$ kp, deren Wirkungslinien in einer Ebene liegen, greifen in einem Punkt an und halten sich das Gleichgewicht. Welche Winkel schließen ihre Wirkungslinien miteinander ein?

Zur Wiederholung

77. Leiten Sie aus dem Kosinussatz der ebenen Trigonometrie den Satz des PYTHAGORAS her!
Anleitung: Gehen Sie von einem beliebigen ebenen Dreieck ABC aus, und führen Sie es in ein rechtwinkliges Dreieck über ($\gamma = 90°$)!
Weg A: Die Längen der Seiten a und b bleiben unverändert.
Weg B: Die Länge der Seite c wird fest gelassen.

78. In einem beliebigen ebenen Dreieck wird der Winkel α nach dem Kosinussatz berechnet:
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$
Angenommen, a sei die größte Seite des zu berechnenden Dreiecks. In welchen Fällen ist α ein spitzer, ein stumpfer oder ein rechter Winkel?

79. Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h.

a) Leiten Sie Beziehungen her zur Bestimmung der Winkel
(1) zwischen Seitenkante und Grundfläche,
(2) zwischen Seitenkante und Grundkante,
(3) zwischen Seitenfläche und Grundfläche,
(4) zwischen zwei Seitenflächen, die in einer Seitenkante aneinanderstoßen!

b) Diskutieren Sie, ausgehend vom Fall $h = a$, an Hand der von Ihnen aufgestellten Beziehungen, wie sich die vier Winkel ändern, wenn die Höhe h größer (kleiner) wird! Welche Winkel ergeben sich aus den Beziehungen in den Grenzfällen, in denen die Pyramide in ein Prisma bzw. ein Quadrat übergeht?

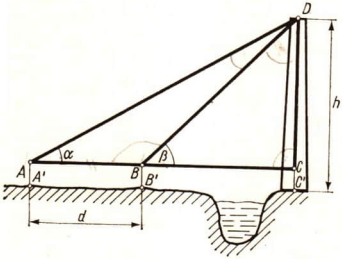
c) Bestimmen Sie die vier Winkel für $a = 4$ cm, $h = 5{,}6$ cm
(1) darstellend-geometrisch, (2) trigonometrisch!

C

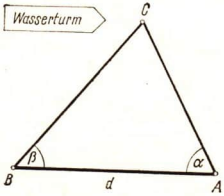
80. Eine gerade regelmäßige dreiseitige Pyramide ($a = 10$ cm; $h = 15$ cm) steht auf der Grundrißebene. Sie wird von einer Ebene geschnitten, die auf der Aufrißebene senkrecht steht und mit der Grundrißebene den Winkel **a)** $\varepsilon = 30°$, **b)** $\varepsilon = 45°$ bildet. Der Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide hat von der Achse den Abstand 10 cm, von der Grundrißspur der Ebene den Abstand 8 cm. Eine Grundkante der Pyramide verläuft parallel zur Grundrißspur der Ebene und ist dieser zugewandt. Bestimmen Sie die Seiten, Winkel und Flächeninhalte der Schnittfiguren (1) darstellend-geometrisch, (2) trigonometrisch!

81. Berechnen Sie die Höhe einer Fabrikesse, deren Standort nicht zugänglich ist (Bild c 21). Die Länge einer Meßstrecke $\overline{AB}$ auf einer Geraden durch den Fuß der Esse ist 52,80 m. Von den Endpunkten der Meßstrecke aus wird die Esse unter Sehwinkeln $\alpha = 15{,}5°$ bzw. $\beta = 19{,}5°$ gesehen. Die Höhe des Instruments zur Winkelmessung beträgt $i = 1{,}05$ m.
Die Höhe der Fabrikesse wurde auf 50 m geschätzt. Wie groß ist der Schätzfehler in Prozent?

82. Die Entfernung eines Wasserturms, dessen Standort unzugänglich ist, wird vom Endpunkt A einer Meßstrecke $\overline{AB} = d$ aus gesucht (Bild c 22). Die Ergebnisse der Messungen sind: $d = 121{,}0$ m; $\alpha = 78{,}75°$, $\beta = 93{,}5°$.
Die Entfernung wurde auf 670 m geschätzt. Geben Sie den Schätzfehler in Prozent an!



c 21



c 22

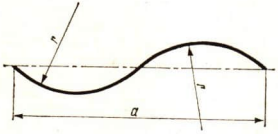
---

5. Beweisen Sie mit den Mitteln der Trigonometrie, daß die Winkelhalbierende im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten teilt!

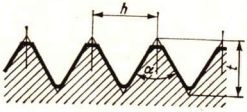
---

83. Bestimmen Sie die gestreckte Länge eines laufenden Meters Wellblech nach Bild c 23!
a) $r = 3{,}2$ cm; $a = 10{,}0$ cm
b) $r = 7{,}2$ cm; $a = 20{,}0$ cm

84. Wie groß ist in dem in Bild c 24 dargestellten Gewindeprofil eines metrischen Gewindes der Flankenwinkel α, wenn $t = 0{,}8660\ h$ ist?



c 23



c 24

85. Unter der Horizontalparallaxe eines Gestirns versteht man den Sehwinkel, unter welchem der Erdradius einem Beobachter vom Gestirn aus erscheinen würde. Berechnen Sie die Horizontalparallaxe des Mondes (Entfernung Erde—Mond $384 \cdot 10^3$ km; Erdradius 6370 km)!

86. Zur Berechnung der Entfernung eines Zieles werden zwei Telegrafenmasten angepeilt, die stets $c = 50$ m Abstand voneinander haben. Der Sehwinkel beträgt 3°. Wie weit ist der Beobachter von den Masten entfernt? (Die Telegrafenleitung soll etwa senkrecht zur Blickrichtung verlaufen.)

87. Eine Schraube ist selbsthemmend, wenn die parallel zur schiefen Ebene wirkende Reibungskraft R gleich oder größer als der Hangabtrieb H ist (Bild c 25).
Wie hoch darf die Ganghöhe h einer Stahlschraube von $d = 52$ mm Durchmesser im Höchstfall sein, damit die Schraube selbsthemmend ist? Der Reibungswinkel von Stahl auf Stahl (bei Ölfettung) ist $\varrho = 8{,}50°$.

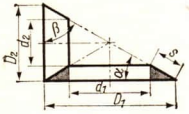
88. Die Achsen zweier Kegelräder stehen aufeinander senkrecht (Bild c 26). Ihre großen Durchmesser sind $D_1 = 150$ mm und $D_2 = 120$ mm. Die Länge der ineinandergreifenden Zähne ist $s = 30$ mm.

a) Welche Neigungswinkel α und β bilden die Mantellinien der beiden Kegelstümpfe mit ihren Grundflächen?

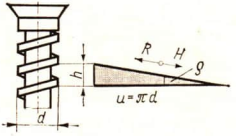
b) Wie groß sind die kleinen Durchmesser d_1 und d_2 der beiden Kegelräder?

c) Wie hoch sind die beiden Kegelräder?

d) Stellen Sie die Kegelräder in einer maßstäblichen Zeichnung dar, und lösen Sie die Aufgabe geometrisch!



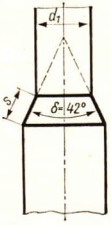
c 25



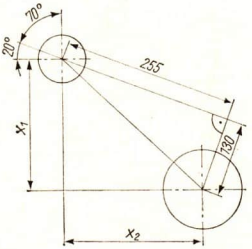
c 26

89. Das Verbindungsstück zweier Rohre ist der Mantel eines Kegelstumpfes (Bild c 27). Berechnen Sie s im Falle $A_2 = 3\,A_1$!

90. Berechnen Sie aus Bild c 28 die für das Anreißen zweier Bohrungen eines Werkstückes notwendigen Maße x_1 und x_2!



c 27



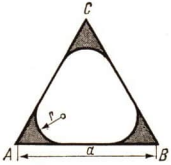
c 28

91. Berechnen Sie im Bild c 29 die gerasterte Abfallfläche für den Fall, daß $r = \frac{a}{6}$ gilt,

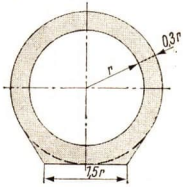
a) ausgedrückt mit Hilfe von a,

b) in Prozenten!

92. Berechnen Sie im Bild c 30 die gerasterte Querschnittsfläche eines Zementrohres!



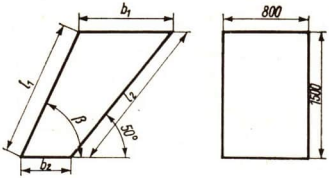
c 29



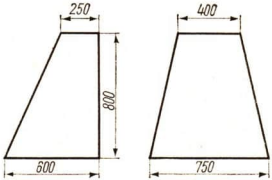
c 30

93. Das Bild c 31 zeigt eine oben und unten offene Schurre. Die (obere) Aufnahmefläche beträgt 0,4 m², die (untere) Abgabefläche beträgt 0,25 m². Berechnen Sie die Maße für b_1, b_2, l_1, l_2, β!

94. Berechnen Sie für die im Bild c 32 dargestellte Rauchabzugshaube die Neigungswinkel der Seitenbleche gegen die Grundfläche!



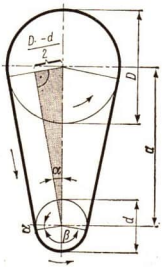
c 31



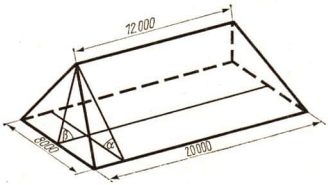
c 32

95. Berechnen Sie für den Keilriementrieb im Bild c 33 den Umschlingungswinkel β im Falle $d = 140$ mm, $D = 224$ mm und $a = 500$ mm!

96. Berechnen Sie für das Walmdach im Bild c 34 die Winkel α und β, die die Dachflächen mit der Bodenfläche bilden! Die Höhe des Daches beträgt 4000 mm.



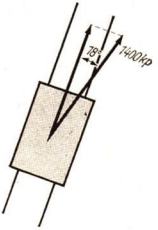
c 33



c 34

97. Ein Eisenbahnwagen wird von einem neben dem Gleis fahrenden Traktor mit einer Kraft von 1400 kp gezogen (Bild c 35). Das Seil bildet mit den Gleisen einen Winkel von 18°. Welche Kraft wirkt in der Bewegungsrichtung? (Projektionssatz beachten!)

98. Eine Kraft vom Betrag 5,2 kp soll in zwei Komponenten zerlegt werden, deren Richtungen aufeinander senkrecht stehen, und eine von ihnen soll mit der Kraftrichtung einen Winkel $\alpha \approx 46°$ einschließen. Berechnen Sie die Beträge der beiden Komponenten!



c 35

99. Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel **a)** $\alpha = 40°$, **b)** $\alpha = 28°$ aus Luft in Wasser. Die Brechungszahl für den Übergang von Luft in Wasser ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{4}{3}$. Berechnen Sie den Brechungswinkel β!

100. Ein Lichtstrahl geht schräg durch eine planparallele Glasplatte. Wie groß ist die seitliche Parallelverschiebung b, wenn die Platte $d = 26$ mm dick ist und die Brechungszahl $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1{,}5$ beträgt? Der Einfallswinkel ist **a)** $\alpha = 30°$, **b)** $\alpha = 60°$.

101. Auf ein Glasprisma $\left(\text{Brechungszahl } n = \frac{3}{2}\right)$, dessen brechende Flächen einen Winkel $\varepsilon = 60°$ bilden, fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel $\alpha_1 = 45°$ ein (Bild c 36).

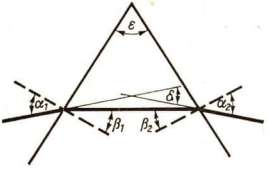
a) Bestimmen Sie geometrisch den Gang des Lichtstrahls!

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Gesamtablenkung δ des Lichtstrahls!

102. Die Sparren $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ eines Dachstuhls schließen mit dem horizontalen Balken $\overline{AC}$ jeweils den Winkel α ein (Bild c 37). Am Endpunkt B greift eine Kraft F an. Bestimmen Sie

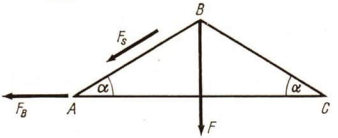
a) die Kraft F_S, deren Richtung entlang dem Sparren $\overline{AB}$ verläuft, und

b) die Kraft F_B, deren Richtung entlang dem Balken $\overline{AC}$ verläuft!



c 36

c 37



103. Ein Ruderer überquert einen Fluß so, daß er das Ruderboot quer zum Fluß stellt und die Ruder mit solcher Kraft bewegt, daß er in stehendem Wasser mit einer Geschwindigkeit $v_1 \approx 0{,}3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ fahren würde. Um welchen Winkel wird das senkrecht zur Strömung bewegte Boot auf dem Flusse abgetrieben, wenn sich dieser mit einer Geschwindigkeit $v_2 \approx 1{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ bewegt?

104. Durch eine Grundkante $a = 6{,}4$ cm eines geraden regelmäßigen dreiseitigen Prismas wird eine Ebene gelegt, die gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\alpha = 51{,}3°$ geneigt ist. Welches Volumen hat die abgeschnittene Pyramide?

105. Bestimmen Sie das Volumen eines Quaders, dessen Raumdiagonale die Länge e hat! Sie bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α, mit der Ebene der größeren Seitenfläche den Winkel β.

Untersuchen Sie in den Aufgaben 106 bis 118 die erhaltene Lösungsformel![1]

106. In einem regelmäßigen dreiseitigen Prisma verlaufe durch eine Seite der Grundfläche eine Ebene, die die Ebene der Grundfläche unter einem Winkel α schneidet. Die Seitenlänge der Grundfläche sei a.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur!

b) Untersuchen Sie die erhaltene Lösungsformel!

107. In einem geraden vierseitigen Prisma sei die Grundfläche ein beliebiges Viereck mit dem Flächeninhalt A_G, der Flächeninhalt der Diagonalenschnitte sei gleich A_1 bzw. A_2, der Winkel zwischen den Diagonalenschnittebenen α. Bestimmen Sie das Volumen des Prismas!

108. Der Flächeninhalt zweier Seitenflächen eines geraden dreiseitigen Prismas sei gleich A_1 bzw. A_2, der Winkel zwischen den Ebenen dieser Seitenflächen gleich α.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Prismas, wenn seine Seitenkante die Länge s hat!

b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Prismas!

Bestimmen Sie in den folgenden beiden Aufgaben den Flächeninhalt der entstehenden Schnittfigur, und untersuchen Sie die Lösungsformel!

109. In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei die Grundkante gleich a, die Seitenkanten schließen mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α ein. Von einem Eckpunkt der Grundfläche verlaufe eine Ebene senkrecht zur gegenüberliegenden Seitenkante. Die Ebene bildet mit den im Eckpunkt zusammenstoßenden Grundkanten gleich große Winkel.

110. In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei der Schnittwinkel zweier benachbarter Seitenkanten gleich α und die Grundkante gleich a. Durch die Diagonale der Grundfläche verlaufe eine Ebene senkrecht zur gegenüberliegenden Seitenkante.

111. In einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide sei die Länge der Seitenkanten gleich s, der Winkel, den diese mit der Ebene der Grundfläche einschließen, gleich α. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur, die durch den Schnitt der Pyramide mit einer Ebene entsteht, die durch die Spitze der Pyramide parallel zu einer Grundkante und unter einem Winkel β zur Ebene der Grundfläche geneigt verläuft! (Betrachten Sie zwei Fälle!)

112. In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide habe die Höhe die Länge h und bilde mit einer Seitenkante den Winkel α. Durch eine der Diagonalen der Grundfläche verlaufe eine Ebene, die mit der Ebene der Grundfläche einen Winkel φ einschließt. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur!

[1] Hier und im folgenden verstehe man unter dem *Untersuchen der Lösungen* Folgerungen aus der Aufgabenstellung. Man bestimme die Menge aller zulässigen Werte der Variablen, das heißt, man erkläre, unter welchen Voraussetzungen Figuren existieren, die in der Aufgabe betrachtet werden.

113. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Quadrat mit der Seite a. Zwei der Seitenflächen stehen senkrecht zur Grundfläche, die beiden anderen bilden mit ihr den Winkel α. Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide!

114. Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Rechteck. Zwei benachbarte Seitenflächen stehen senkrecht zur Grundfläche, die beiden anderen bilden mit ihr die Winkel α bzw. β. Die Höhe der Pyramide sei h. Bestimmen Sie den Mantelflächeninhalt der Pyramide!

115. In einem regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpf seien die Seitenlängen der Grund- und Deckfläche gleich a bzw. b ($a > b$). Der spitze Winkel der Seitenfläche sei α.

a) Bestimmen Sie das Volumen! **b)** Untersuchen Sie die Lösungsformel!

116. In einem Zylinder mit einem Quadrat als Achsenschnitt und dem Radius r der Grundfläche sei ein Punkt auf der Peripherie der Deckfläche mit einem Punkt auf der Peripherie der Grundfläche verbunden. Diese Verbindungsgerade bilde mit der Ebene der Grundfläche den Winkel α.

a) Bestimmen Sie den Abstand dieser Geraden von der Zylinderachse!

b) Untersuchen Sie die Lösungsformel!

117. Einer Kugel mit dem Radius r sei ein Kegel einbeschrieben, dessen Mantellinien mit der Höhe den Winkel α bilden. Bestimmen Sie das Volumen des Kegels!

118. Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der Kugel, die einem Kegel mit der Höhe h und mit dem Winkel φ zwischen Mantellinie und Ebene der Grundfläche einbeschrieben ist!

119. Die Entfernung Sonne–Erde beträgt im Mittel $149 \cdot 10^6$ km, die Entfernung Erde–Mond $384 \cdot 10^3$ km. Der scheinbare Durchmesser der Sonne ist rund 32′, der des Mondes rund 31′. Berechnen Sie aus diesen Angaben den wahren Durchmesser der Sonne und des Mondes!

120. Ein Schiff läuft den folgenden Kurs. Veranschaulichen Sie den Kurs geometrisch!

a) N 45° O **b)** S 60° W **c)** N 30° W **d)** N 30° O

121. An der Küste eines Hafenortes ist eine horizontale Standlinie $\overline{AB} = 830$ m abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wird ein vorüberfahrendes Schiff zum gleichen Zeitpunkt angepeilt. Die Peilrichtungen bilden mit der Standlinie die Winkel $\alpha = 86{,}40°$ und $\beta = 78{,}50°$.

a) In welcher Entfernung von A und B und in welchem Abstand von der Standlinie befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung?

b) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

122. Ein nach Wismar auf geradem Kurs fahrendes Schiff hat eine Geschwindigkeit von 8,5 kn. Vom Schiff aus wird das Leuchtfeuer bei Timmendorf (Poel) unter 32° 50′ und das Leuchtfeuer bei Hohen Wischendorf unter 184° angepeilt (Winkelangaben von N über O). Aus der Seekarte wird die Entfernung Schiff–Timmendorf mit 1,85 sm festgestellt.
In welcher Richtung verläuft die Fahrrinne, wenn 12 min später Timmendorf unter 337° und Hohen Wischendorf unter 268° gesehen werden?

C

d) Darstellende Geometrie

Vorbemerkung: Für das Zeichnen im Übungsheft ist den Koordinatenangaben als Längeneinheit das Zentimeter zugrunde gelegt. Die Angaben sind so getroffen, daß – bei geeigneter Wahl des Koordinatenursprungs auf dem Zeichenblatt – für die Konstruktionszeichnungen im allgemeinen die Seite eines Heftes im Format A 5 ausreicht.

1. Wo liegen die Punkte, deren Abszisse gleich 0 ist?

2. Welche Abszisse haben die Punkte der y,z-Ebene?

3. Welches ist der geometrische Ort aller Punkte mit der Kote 2?

4. Welches ist der geometrische Ort aller Punkte mit der Kote -1?

Welche der folgenden Punkte liegen in einer Koordinatenachse oder in einer von zwei Koordinatenachsen aufgespannten Ebene?

5. $A\,(1;\,0;\,0)$, $B\,(0;\,2;\,3)$, $C\,(3;\,-1;\,0)$, $D\,(0;\,0;\,4)$, $E\,(2;\,4;\,1)$, $F\,(0;\,3;\,0)$

6. $G\,(1;\,0;\,-1)$, $H\,(0;\,0;\,2)$, $I\,(-2;\,-1;\,0)$, $J\,(0;\,-1;\,1)$, $K\,(3;\,-1;\,-1)$, $L\,(0;\,-1;\,0)$

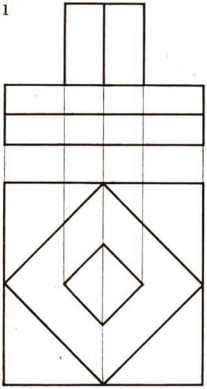
7. Geben Sie die Koordinaten von drei Punkten an, die in einer (beliebig angenommenen) Parallelen

a) zur x-Achse,

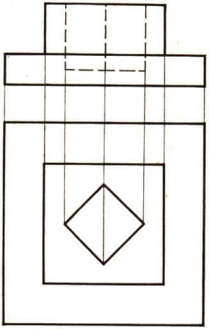
b) zur y-Achse liegen!

Stellen Sie die folgenden in Grund- und Aufriß gegebenen Körper im Schrägbild (Kavalierperspektive) im Maßstab 2:1 dar! Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen!

8. Bild d 1



9. Bild d 2



d

1. Welche Koordinate ist allen Punkten gemeinsam, die diejenige Parallelebene zur x,z-Ebene erfüllen, in der der Punkt P (2; 3; 4) liegt?

2. Geben Sie die Koordinaten dreier Punkte an, die in einer zu keiner Achse parallelen Geraden liegen!

---

10. Zeichnen Sie das Schrägbild (Kavalierperspektive) eines Würfels **a)** in Parallelstellung gegenüber der Bildtafel, **b)** in Über-Eck-Stellung, d. h. gegenüber der Parallelstellung um eine vertikale Achse um den Winkel von 45° gedreht!

11. Zeichnen Sie das Schrägbild (Kavalierperspektive) einer geraden Pyramide mit regelmäßig-dreieckiger Grundfläche in einer Stellung, bei der keine der Grundkanten gegenüber der Bildtafel parallel oder senkrecht ist!

Zeichnen Sie im Schrägbild (Kavalierperspektive) das Achsenkreuz eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems, und tragen Sie die Punkte mit den folgenden Koordinaten ein!

12. A (2; 3; 3), B (0; 3; 5)
C (6; 0; 1), D (5; 8; 0)

13. P (0; 3; — 2), Q (4; 6; 0)
R (— 2; — 4; 1), S (4; 0; — 2)

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{PQ}$ im Schrägbild mit $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$ (Kavalierperspektive) und im Schrägbild mit $\alpha = 60°$; $q = \frac{1}{3}$!

14. **a)** P (4; 0; 2), Q (1; 6; 5)
b) P (0; 0; 5), Q (4; 8; — 2)

15. **a)** P (3; 3; 3), Q (7; 6; — 2)
b) P (— 2; — 4; — 3), Q (8; 8; 6)

16. **a)** Stellen Sie ein gerades Prisma (Kantenmodell) im Schrägbild (Kavalierperspektive) dar, dessen Grundfläche $ABCD$ die Koordinaten
A (5; 1; 0), B (8; 4; 0),
C (6; 8; 0), D (0; 3; 0)
hat und dessen Höhe $h = 6$ beträgt!

b) Stellen Sie denselben Körper im Schrägbild mit $\alpha = 30°$ und $q = \frac{1}{2}$ dar!

c) Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Prismas, indem Sie die erforderlichen Maße näherungsweise aus dem Grundriß des Körpers entnehmen!

17. Von einem schiefen Prisma ist die Grundfläche ABC durch folgende Koordinaten gegeben: A (6; 0; 0), B (8; 3; 0), C (5; 5; 0), von der Deckfläche ist der dem Punkt A entsprechende Punkt D (0; 1; 5) bekannt. Zeichnen Sie das Schrägbild dieses Körpers

a) in Kavalierperspektive, **b)** mit $\alpha = 30°$ und $q = \frac{1}{2}$!

c) Berechnen Sie das Volumen des Prismas, indem Sie die erforderlichen Maße näherungsweise aus dem Grundriß des Körpers entnehmen!

18. Stellen Sie folgende quadratische Pyramide **a)** im Schrägbild mit $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$ (Kavalierperspektive) und **b)** im Schrägbild mit $\alpha = 60°$; $q = \frac{1}{3}$ in beliebiger Stellung zur Bildtafel dar!
Mittelpunkt der Grundfläche M (8; 5; 0),
Länge der Grundkante $a = 5$,
Höhe des Körpers $h = 7$.

19. Stellen Sie folgende gerade regelmäßig-sechseckige Pyramide (Kantenmodell) bei beliebiger Stellung gegenüber der Bildtafel im Schrägbild (Kavalierperspektive) dar!
Mittelpunkt der Grundfläche M (6; 6; 0),
Radius des Umkreises der Grundfläche
$r = 3$,
Höhe des Körpers $h = 6$.

d

20. Gegeben sind vier Punkte, die nicht einer Ebene angehören und von denen keine drei in einer Geraden liegen. Wie viele Geraden und wie viele Ebenen sind durch diese Punkte bestimmt?

21. Gegeben sind fünf Punkte, die nicht einer Ebene angehören und von denen keine drei in einer Geraden liegen. Wie viele Geraden und wie viele Ebenen sind durch diese Punkte bestimmt?

22. Weshalb haben Stative für Vermessungsgeräte meist drei, Tische aber meist vier Beine?

23. Gegeben sind drei Geraden durch einen Punkt, die nicht in einer Ebene liegen. Wie viele Ebenen werden durch sie bestimmt?

24. Wie viele Senkrechten kann man in einem Punkt einer Geraden auf dieser errichten?

25. Wie viele Lote kann man von einem Punkt außerhalb einer Geraden auf diese fällen?

26. Zeigen Sie an einem Freihandmodell, daß der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene der kleinste Winkel ist, den die schneidende Gerade mit einer durch den Schnittpunkt gehenden Geraden der Ebene einschließen kann!

27. Zeigen Sie an einem Freihandmodell, daß es bei jedem beliebigen Schnitt einer Geraden mit einer Ebene mindestens eine Ebene durch die schneidende Gerade gibt, die auf der gegebenen Ebene senkrecht steht!

28. Geben Sie an Hand des Schrägbildes eines dreiseitigen geraden Prismas Beispiele für Paare windschiefer Kanten, die einander unter einem rechten Winkel kreuzen!

29. Gegeben sind zwei windschiefe Geraden. Zeigen Sie an einem Freihandmodell, daß es eine Gerade gibt, die beide gegebenen Geraden unter einem rechten Winkel schneidet!

---

3. Zeichnen Sie im Schrägbild (Kavalierperspektive) einen Würfel mit abgestumpften Ecken! Wählen Sie (auf der Grundlage von Skizzen) eine Stellung des Körpers gegenüber der Bildtafel, bei der die Flächen gut sichtbar sind!

4. Zeichnen Sie **A** ein dreiseitiges Prisma und **B** einen Würfel im Schrägbild, bezeichnen Sie die Kanten, und geben Sie an, welche Kantenpaare **a)** parallel verlaufen, **b)** windschief sind, **c)** einander schneiden!

---

d

Zeichnen Sie Grundriß und Höhenmaßstab der folgenden Punkte!

30. $A\,(3;\,1;\,4)$, $B\,(4;\,0;\,0)$, $C\,(0;\,-1;\,2)$, $D\,(2;\,-3;\,-1)$

31. $A\,(1;\,0;\,1)$, $B\,(3;\,4;\,0)$, $C\,(-2;\,2;\,2)$, $D\,(3;\,4;\,-1)$

32. Zeichnen Sie den Grundriß der Strecke $\overline{PQ}$ und den Höhenmaßstab ihrer Endpunkte!

a) $P\,(2;\,1;\,4)$, $Q\,(3;\,5;\,-1)$,

b) $P\,(3;\,-2;\,5)$, $Q\,(1;\,6;\,0)$

33. Zeichnen Sie den Grundriß des Dreiecks ABC und den Höhenmaßstab seiner Eckpunkte!

a) $A\,(4;\,1;\,3)$, $B\,(3;\,7;\,0)$, $C\,(1;\,4;\,2)$

b) $A\,(5;\,-1;\,-2)$, $B\,(6;\,4;\,3)$, $C\,(-2;\,2;\,-2)$

Zeichnen Sie den Grundriß der dreiseitigen Pyramide $ABCD$! Beachten Sie dabei die Sichtbarkeit (die Körper sind als Flächenmodelle aufzufassen)!

34. a) $A\,(6;\,1;\,2)$, $B\,(7;\,8;\,4)$, $C\,(1;\,4;\,1)$, $D\,(5;\,5;\,6)$

b) $A\,(7;\,2;\,4)$, $B\,(4;\,4;\,2)$, $C\,(6;\,8;\,4)$, $D\,(9;\,5;\,7)$

35. a) $A\,(5;\,2;\,2)$, $B\,(7;\,7;\,4)$, $C\,(0;\,4;\,1)$, $D\,(5;\,4;\,0)$

b) $A\,(1;\,1;\,1)$, $B\,(6;\,6;\,6)$, $C\,(6;\,1;\,6)$, $D\,(1;\,6;\,1)$

5. Zeichnen Sie den Grundriß mit Höhenmaßstab einer auf der Grundrißtafel stehenden vierseitigen Pyramide, die in halber Körperhöhe abgestumpft ist (Daten beliebig)!

6. Zeichnen Sie den Grundriß mit Höhenmaßstab eines dreiseitigen schiefen Prismas (Daten beliebig)!

Bestimmen Sie den Grundrißspurpunkt der Geraden AB!

36. a) $A\,(2;\,1;\,5)$, $B\,(6;\,6;\,2)$
b) $A\,(1;\,0;\,4)$, $B\,(4;\,7;\,-2)$

37. a) $A\,(6;\,3;\,1)$, $B\,(1;\,5;\,6)$
b) $A\,(1;\,1;\,-2)$, $B\,(4;\,3;\,5)$

38. Es ist der Punkt der Geraden AB zu bestimmen, dessen Höhe $h = 4$ beträgt.
$A\,(3;\,1;\,-1)$, $B\,(4;\,7;\,6)$

39. Es ist der Punkt der Geraden CD zu bestimmen, dessen Höhe $h = 3$ beträgt.
$C\,(4;\,5;\,2)$, $D\,(1;\,1;\,-2)$

Ermitteln Sie aus den Koordinaten der Punkte A und B, ob die Gerade AB gegenüber der Grundrißtafel eine besondere Lage (Parallelität, Orthogonalität) einnimmt!

40. a) $A\,(4;\,1;\,4)$, $B\,(1;\,1;\,0)$
b) $A\,(2;\,4;\,0)$, $B\,(2;\,4;\,5)$
c) $A\,(0;\,0;\,3)$, $B\,(0;\,6;\,3)$
d) $A\,(3;\,5;\,-1)$, $B\,(3;\,5;\,4)$

41. a) $C\,(2;\,5;\,-1)$, $D\,(7;\,5;\,4)$
b) $C\,(6;\,1;\,0)$, $D\,(6;\,1;\,5)$
c) $C\,(2;\,-2;\,-2)$, $D\,(2;\,4;\,-2)$
d) $C\,(0;\,6;\,2)$, $D\,(5;\,6;\,2)$

Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Geraden AB gegen die Grundrißtafel!

42. a) $A\,(2;\,2;\,5)$, $B\,(6;\,7;\,2)$
b) $A\,(1;\,1;\,4)$, $B\,(4;\,8;\,-2)$

43. a) $A\,(8;\,2;\,1)$, $B\,(1;\,5;\,6)$
b) $A\,(1;\,-1;\,-2)$, $B\,(4;\,2;\,5)$

Bestimmen Sie die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$!

44. a) $A\,(4;\,1;\,2)$, $B\,(1;\,8;\,5)$
b) $A\,(1;\,3;\,0)$, $B\,(1;\,3;\,6)$
c) $A\,(1;\,2;\,6)$, $B\,(6;\,8;\,0)$

45. a) $A\,(0;\,2;\,-2)$, $B\,(6;\,7;\,4)$
b) $A\,(1;\,4;\,3)$, $B\,(5;\,0;\,3)$
c) $A\,(1;\,0;\,-3)$, $B\,(1;\,0;\,3)$

46. Auf der Geraden AB ist vom Punkt B aus in fallendem Richtungssinn eine Strecke von der Länge $l = 5$ anzutragen. Bestimmen Sie Grundriß und Höhe des zweiten Endpunktes der Strecke!

a) $A\,(4;\,1;\,0)$, $B\,(8;\,8;\,5)$
b) $A\,(2;\,-1;\,-1)$, $B\,(1;\,8;\,4)$

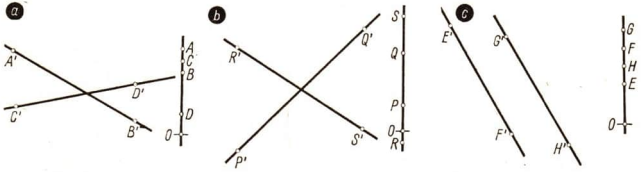
---

7. Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Spurpunkte aller Geraden durch den Punkt $A\,(5;\,5;\,4)$, die gegen die Grundrißtafel unter einem Winkel von 45° geneigt sind!

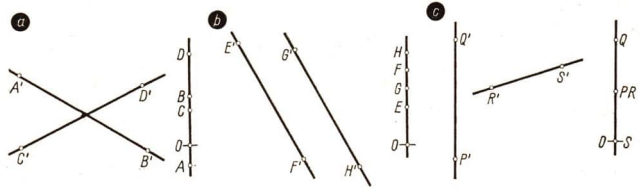
8. Die Strecke mit den Endpunkten $R\,(1;\,9;\,4)$ und $S\,(8;\,2;\,0)$ wird von R aus im Verhältnis 3 : 4 geteilt. Bestimmen Sie den Grundriß des Teilungspunktes!

Ermitteln Sie die gegenseitige Lage zweier Geraden bei den in den folgenden Bildern angegebenen Fällen!

47. Bilder d 3 a, b, c



48. Bilder d 4 a, b, c

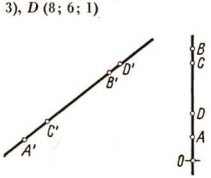


Gegeben ist das Geradenpaar AB und CD. In welchem der folgenden Fälle schneiden die Geraden einander, in welchen sind sie windschief? Zeichnen Sie die Grundrisse der Geraden!

49. **a)** A (6; 1; 0), B (0; 6; 4), C (4; 2; 4), D (2; 5; 3)
b) A (6; 1; 0), B (2; 9; 4), C (1; 2; 3), D (7; 8; 1)

50. **a)** A (6; 0; 0), B (0; 6; 3), C (4; 1; 4), D (5; 5; 3)
b) A (7; — 1; 0), B (3; 7; 4), C (2; 0; 3), D (8; 6; 1)

51. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden AB und CD bei der im Bild d 5 gekennzeichneten Lage der Grundrisse dieser Geraden!



d 5

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden AB und CD!

52. A (5; 1; 5), B (2; 7; 2), C (4; 3; 1), D (3; 5; 5)

53. A (2; 1; 1), B (2; 9; 3), C (2; 7; 0), D (2; 3; 4)

---

9. Gegeben sind eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Punkt C. Es ist der Spurpunkt der Geraden durch den Punkt C zu bestimmen, welche $\overline{AB}$ in ihrem Mittelpunkt schneidet.

---

54. Von einer Ebene sind die Grundrißspur und ein Punkt mit der Höhe $h = 4$ gegeben (Annahme der Grundrisse dieser Bestimmungsstücke beliebig).
Zeichnen Sie die Höhenlinien der Ebene für $h = 1; 2; 3; 4; 5$!

55. Von einer Ebene sind ein Punkt der Grundrißspur und die Höhenlinie mit der Höhe $h = 4$ gegeben (Annahme der Grundrisse dieser Bestimmungsstücke beliebig).
Zeichnen Sie die Spur und die Höhenlinien für $h = 1; 2; 3; 4; 5$!

56. Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide $ABCS$.

a) Zeichnen Sie den Grundriß des Körpers einschließlich der Höhenlinien für die Höhen $h = 1; 2; 3; 4; 5$ auf den Seitenflächen!
$A\,(4; 1; 0)$, $B\,(6; 6; 0)$, $C\,(0; 5; 0)$, $S\,(3; 4; 6)$

b) Betrachten Sie die Höhenlinien für die Höhe $h = 4$ als Schnittfigur eines Schnittes parallel zur Grundrißtafel! Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes und des Restkörpers!

57. Gegeben ist eine vierseitige Pyramide $ABCDS$.

a) Zeichnen Sie den Grundriß des Körpers einschließlich der Höhenlinien für die Höhen $h = 1; 2; 3; 4; 5; 6$ auf den Seitenflächen!
$A\,(4; 0; 0)$, $B\,(8; 3; 0)$, $C\,(5; 8; 0)$, $D\,(1; 4; 0)$, $S\,(5; 4; 7)$

b) Betrachten Sie die Höhenlinien für die Höhe $h = 3$ als Schnittfigur eines Schnittes parallel zur Grundrißtafel! Vergleichen Sie die Volumina des dadurch entstehenden Pyramidenstumpfes und des Restkörpers miteinander!

58. Die Grundrisse zweier einander schneidender Geraden fallen zusammen. Welche Lage gegenüber der Grundrißtafel hat die Ebene, die durch diese Geraden bestimmt wird?

59. Die Grundrisse zweier paralleler Geraden fallen zusammen. Welche Lage gegenüber der Grundrißtafel hat die Ebene, die durch diese Geraden bestimmt wird?

Gegeben ist eine Ebene durch zwei Spurpunkte G_1, H_1 und einen weiteren Punkt P. Es sind jene Punkte auf der Geraden G_1P und H_1P zu bestimmen, welche die Höhe h haben.

60. $G_1\,(6; 2; 0)$, $H_1\,(6; 8; 0)$, $P\,(1; 5; 6)$, $h = 4$

61. $G_1(6; 1; 0)$, $H_1(1; 7; 0)$, $P(1; 2; 2)$, $h = -1$

62. Gegeben sind 1. eine Ebene durch zwei Punkte G_1, H_1 ihrer Grundrißspur und einen weiteren Punkt P sowie 2. der Grundriß $A'B'$ einer Geraden AB der Ebene. Es sind der Spurpunkt von AB und die Höhen von A und B zu bestimmen.
$G_1\,(10; 1; 0)$, $H_1\,(1; 9; 0)$, $P\,(5; 3; 1)$, $A'\,(3; 1; 0)$, $B'\,(4; 5; 0)$

63. Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Seite AB in der Grundrißtafel liegt (Daten beliebig). Zeichnen Sie in den Grundriß der Figur einen Raster von Höhen- und Fallinien im Abstand von 1 Einheit ein; dabei soll eine Fallinie durch C gezeichnet werden!

---

10. Bestimmen Sie die Grundrißspur der Ebene DEF!

a) $D\,(0; 4; 3)$, $E\,(5; 6; 1)$, $F\,(0; 7; 5)$

b) $D\,(4; 3; 4)$, $E\,(8; 1; 5)$, $F\,(2; 4; 0)$

---

64. Gegeben ist eine Ebene durch die Spurpunkte $G_1\,(1; 1; 0)$, $H_1\,(6; 7; 0)$ und einen weiteren Punkt $C\,(5; 2; 4)$. Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Ebene gegen die Grundrißtafel!

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Bestimmen Sie die wahre Größe dieser Figur und den Neigungswinkel ihrer Ebene gegen die Grundrißtafel!

65. a) $A\,(6; 3; 1)$, $B\,(4; 8; 0)$, $C\,(1; 5; 6)$

b) $A\,(3; 3; 2)$, $B\,(8; 6; 2)$, $C\,(3; 7; 5)$

c) $A\,(6; 2; 1)$, $B\,(1; 7; 2)$, $C\,(2; 6; 6)$

66. a) $A\,(7; 4; 2)$, $B\,(4; 2; 1)$, $C\,(3; 6; 0)$

b) $A\,(6; 3; 2)$, $B\,(1; 8; 0)$, $C\,(2; 7; 5)$

c) $A\,(4; 2; 1)$, $B\,(6; 7; 1)$, $C\,(2; 7; 6)$

d

67. Ein pyramidenförmiges Zelt mit quadratischer Grundfläche ist aus Bahnen zusammengesetzt, welche die Form gleichseitiger Dreiecke mit 2,5 m Seitenlänge haben. Wie hoch ist die Zeltspitze, welche Neigung haben die Seitenwände des Zeltes gegenüber der Standfläche? Welchen Raum umschließt das Zelt? Lösen Sie die Aufgabe zeichnerisch und rechnerisch!

68. Auf der Grundrißtafel steht eine gerade quadratische Pyramide (Länge der Grundkanten $a = 4$, Höhe des Körpers $h = 5$). Bestimmen Sie die wahre Größe ihrer Seitenflächen, den Neigungswinkel der Seitenflächen und den Neigungswinkel α der Seitenkanten gegenüber der Grundrißtafel!

---

11. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Grundrißspur und eine Höhenlinie (Annahme der Daten beliebig). Klappen Sie die Ebene in die Grundrißtafel um! Zeichnen Sie eine beliebige Figur in die umgeklappte Ebene ein und bestimmen Sie durch Rückklappung den Riß der Figur!

12. Eine Ebene enthält ein Quadrat. Die Ebene wird um ihre Grundrißspur gedreht, so daß ihr Neigungswinkel gegenüber der Grundrißtafel **a)** 30°, **b)** 60°, **c)** 75° beträgt. Zeichnen Sie die Grundrisse des Quadrats für die unter **a)** bis **c)** angegebenen Lagen der Ebene! (Annahme der Daten beliebig, jedoch soll keine Quadratseite parallel zur Spur der Ebene sein.)

Gegeben sind 1. eine Ebene durch zwei Spurpunkte A, B und eine Höhenlinie, die durch den Punkt C der Ebene geht, sowie 2. eine Gerade DE. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene!

69. A (8; 2; 0), B (1; 9; 0), C (1; 6; 1), D (3; 1; 1), E (4; 8; 5)

70. A (1; 1; 0), B (7; 8; 0), C (5; 2; 3), D (6; 2; 2), E (2; 7; 6)

71. Bestimmen Sie den Schnittpunkt einer Geraden mit einer projizierenden Ebene (Daten beliebig)!

72. Bestimmen Sie den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Parallelebene zur Grundrißtafel (Daten beliebig)!

73. Gegeben ist eine Ebene durch die Spurpunkte G_1 (6; 1; 0), H_1 (2; 9; 0) und einen weiteren Punkt P (2; 3; 1). In P ist die Senkrechte zur Ebene zu errichten und von P aus in steigendem Richtungssinn eine Strecke von der Länge $l = 5$ anzutragen.

74. Gegeben ist eine Ebene durch die Spurpunkte G_1 (1; 1; 0), H_1 (9; 5; 0) und durch einen weiteren Punkt P (2; 4; 4). Im Punkte Q (5; 3; z) der Ebene sind auf einer Senkrechten zur Ebene nach beiden Seiten Strecken von der Länge $l = 4$ anzutragen.

75. Gegeben ist eine Ebene durch die Spurpunkte G_1 (1; 2; 0), H_1 (7; 6; 0) und einen weiteren Punkt P (2; 5; 2). Vom Punkt A (4; 2; 3) ist das Lot auf die Ebene zu fällen. Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes!

76. Gegeben ist eine Ebene durch die Spurpunkte G_1 (1; 8; 0), H_1 (9; 2; 0) und einen weiteren Punkt P (5; 3; 2). Es ist der Abstand des Punktes Q (6; 6; 6) von der Ebene zu bestimmen.

Eine dreiseitige Pyramide ist durch die Eckpunkte A, B, C ihrer Grundfläche und die Spitze S gegeben. Bestimmen Sie Höhe und Höhenfußpunkt des Körpers!

77. A (1; 2; 0), B (7; 8; 0) C (7; 2; 6), S (1; 8; 6)

78. A (4; 2; 1), B (7; 9; 1) C (2; 6; 5), S (8; 4; 5)

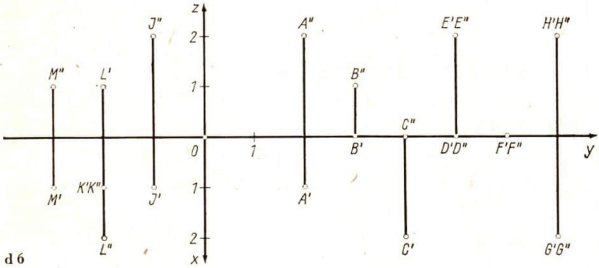
d

Zeichnen Sie den Grundriß und Aufriß der folgenden Punkte!

79. $A\,(2;\,2;\,4)$, $B\,(2;\,4;\,2)$, $C\,(3;\,0;\,0)$, $D\,(0;\,3;\,0)$, $E\,(-1;\,3;\,0)$, $F\,(2;\,-1;\,-2)$, $G\,(0;\,0;\,-2)$, $H\,(-1;\,-3;\,-2)$

80. $A\,(1;\,0;\,1)$, $B\,(1;\,1;\,0)$, $C\,(0;\,1;\,1)$, $D\,(-2;\,2;\,2)$, $E\,(4;\,3;\,1)$, $F\,(4;\,-3;\,-1)$, $G\,(-4;\,3;\,-1)$, $H\,(0;\,-1;\,0)$

81. Welche Koordinaten haben die in Bild d 6 angegebenen Punkte?



d 6

82. Wo liegen die Aufrisse aller Punkte der Grundrißtafel?

83. Wo liegen die Grundrisse aller Punkte der Aufrißtafel?

84. Zeichnen Sie die Risse der Strecke $\overline{AB}$!

a) $A\,(2;\,1;\,3)$, $B\,(5;\,6;\,5)$

b) $A\,(1;\,4;\,2)$, $B\,(6;\,1;\,2)$

c) $A\,(2;\,4;\,-1)$, $B\,(7;\,5;\,3)$

d) $A\,(-1;\,1;\,-2)$, $B\,(1;\,8;\,-1)$

85. Zeichnen Sie die Risse des Dreiecks KLM!

a) $K\,(4;\,1;\,2)$, $L\,(5;\,8;\,3)$, $M\,(1;\,5;\,6)$

b) $K\,(4;\,-2;\,2)$, $L\,(2;\,8;\,6)$, $M\,(0;\,3;\,0)$

c) $K\,(5;\,4;\,0)$, $L\,(0;\,7;\,9)$, $M\,(3;\,9;\,6)$

d) $K\,(7;\,0;\,7)$, $L\,(5;\,8;\,-1)$, $M\,(0;\,4;\,7)$

86. Zeichnen Sie die Risse der dreiseitigen Pyramide $ABCD$!

a) $A\,(7;\,2;\,2)$, $B\,(7;\,6;\,4)$, $C\,(5;\,10;\,2)$, $D\,(1;\,4;\,8)$

b) $A\,(6;\,2;\,6)$, $B\,(8;\,4;\,8)$, $C\,(4;\,8;\,4)$, $D\,(2;\,6;\,2)$

87. Zeichnen Sie die Risse eines schiefen Prismas mit der Grundfläche ABC und der Deckfläche DEF; gegeben sind die Punkte A, B, C und der dem Punkt A der Grundfläche entsprechende Punkt D der Deckfläche! Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Prismen, indem Sie die Maße der Zeichnung entnehmen!

a) $A\,(6;\,1;\,0)$, $B\,(3;\,8;\,0)$, $C\,(1;\,5;\,0)$, $D\,(8;\,2;\,6)$ – Kantenmodell

b) $A\,(0;\,0;\,0)$, $B\,(4;\,5;\,0)$, $C\,(-1;\,7;\,0)$, $D\,(3;\,2;\,5)$ – Flächenmodell

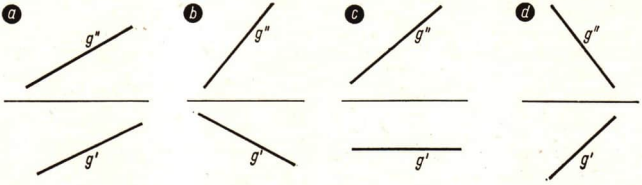
---

13. Wo liegen die Punkte im Raum, bei denen Grundriß und Aufriß zusammenfallen?

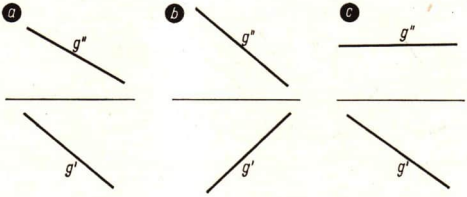
14. Wo liegen die Punkte im Raum, bei denen Grundriß und Aufriß den gleichen Abstand von der Rißachse haben, aber nicht zusammenfallen?

Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden g bei der in den folgenden Bildern gekennzeichneten Lage der Geraden!

88. Bilder d 7a bis d



89. Bilder d 8a bis c



Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden PQ!

90. **a)** $P\,(1;\,2;\,2)$, $Q\,(7;\,7;\,6)$
b) $P\,(4;\,1;\,1)$, $Q\,(1;\,8;\,6)$
c) $P\,(4;\,3;\,0)$, $Q\,(2;\,6;\,2)$

91. **a)** $P\,(6;\,0;\,4)$, $Q\,(2;\,6;\,2)$
b) $P\,(2;\,2;\,4)$, $Q\,(2;\,2;\,-1)$
c) $P\,(3;\,2;\,2)$, $Q\,(-1;\,8;\,5)$

Ermitteln Sie aus den Koordinaten der Punkte R und S, ob die Gerade RS gegenüber den Rißtafeln eine besondere Lage (Parallelität, Orthogonalität) einnimmt!

92. **a)** $R\,(4;\,1;\,6)$, $S\,(4;\,7;\,6)$
b) $R\,(8;\,5;\,-1)$, $S\,(0;\,5;\,2)$
c) $R\,(4;\,3;\,1)$, $S\,(4;\,3;\,6)$

93. **a)** $R\,(0;\,1;\,1)$, $S\,(0;\,8;\,1)$
b) $R\,(8;\,1;\,4)$, $S\,(2;\,7;\,4)$
c) $R\,(0;\,6;\,1)$, $S\,(7;\,6;\,1)$

Gegeben sind die Spurpunkte G_1 und G_2 einer Geraden g. Es sind Grundriß und Aufriß von g zu zeichnen und die Neigungswinkel von g gegenüber den Rißtafeln zu bestimmen.

94. **a)** $G_1\,(1;\,4;\,0)$, $G_2\,(0;\,8;\,4)$
b) $G_1\,(2;\,6;\,0)$, $G_2\,(0;\,9;\,-2)$

95. **a)** $G_1\,(2;\,5;\,0)$, $G_2\,(0;\,7;\,7)$
b) $G_1\,(-2;\,8;\,0)$, $G_2\,(0;\,5;\,5)$

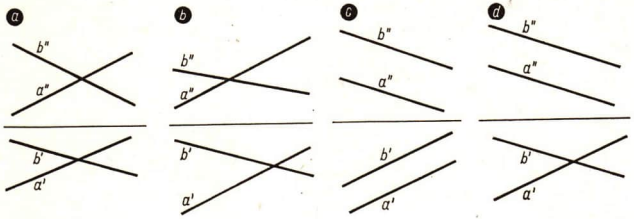
Bestimmen Sie die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$!

96. **a)** $A\,(1;\,6;\,5)$, $B\,(3;\,0;\,0)$
b) $A\,(2;\,2;\,0)$, $B\,(2;\,2;\,5)$
c) $A\,(8;\,1;\,1)$, $B\,(3;\,7;\,1)$
d) $A\,(2;\,0;\,3)$, $B\,(2;\,8;\,-1)$
e) $A\,(5;\,6;\,-1)$, $B\,(7;\,3;\,4)$

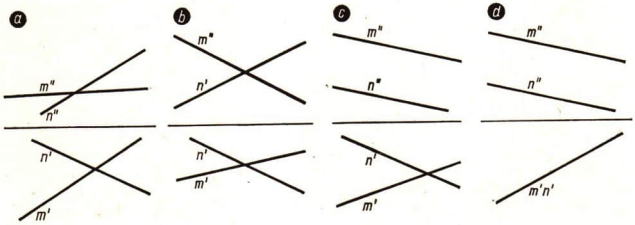
97. **a)** $C\,(2;\,4;\,2)$, $D\,(7;\,6;\,0)$
b) $C\,(6;\,4;\,-2)$, $D\,(6;\,4;\,4)$
c) $C\,(0;\,0;\,0)$, $D\,(5;\,6;\,5)$
d) $C\,(2;\,8;\,-1)$, $D\,(8;\,0;\,-1)$
e) $C\,(3;\,1;\,7)$, $D\,(3;\,7;\,0)$

Ermitteln Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden a, b bzw. m, n bei den in den folgenden Bildern gekennzeichneten Lagen der Grund- und Aufrisse der Geraden!

98. Bilder d 9a bis d



99. Bilder d 10a bis d



Gegeben ist das Geradenpaar AB und CD. Zeichnen Sie die Risse der Geraden, und stellen Sie fest, ob es unter den genannten Fällen einander schneidende Geraden gibt!

100. **a)** $A\,(6;1;2)$, $B\,(0;6;6)$, $C\,(4;2;6)$, $D\,(3;5;4)$

b) $A\,(6;1;1)$, $B\,(2;9;5)$, $C\,(1;2;4)$, $D\,(7;8;2)$

c) $A\,(1;2;1)$, $B\,(5;4;6)$, $C\,(1;2;1)$, $D\,(2;8;4)$

101. **a)** $A\,(7;-3;-1)$, $B\,(3;5;3)$, $C\,(2;-2;2)$, $D\,(8;4;0)$

b) $A\,(2;1;1)$, $B\,(2;9;3)$, $C\,(2;7;0)$, $D\,(2;3;4)$

c) $A\,(4;0;-1)$, $B\,(6;4;0)$, $C\,(3;-2;3)$, $D\,(5;2;1)$

Zur Geraden PQ ist durch den Punkt R die Parallele zu legen. Gesucht sind die Risse der Parallelen.

102. **a)** $P\,(4;2;2)$, $Q\,(0;6;4)$, $R\,(4;4;1)$

b) $P\,(5;2;5)$, $Q\,(1;7;1)$, $R\,(3;3;6)$

103. **a)** $P\,(5;-1;2)$, $Q\,(-1;5;6)$, $R\,(2;2;2)$

b) $P\,(4;1;4)$, $Q\,(1;6;1)$, $R\,(2;4;4)$

104. Können zwei Geraden, deren Grundrisse oder deren Aufrisse zusammenfallen, windschief sein?

105. Können von zwei verschiedenen Geraden sowohl die Grundrisse als auch die Aufrisse zusammenfallen?

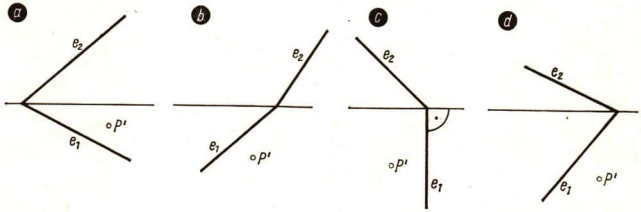
106. Welche Lage gegenüber den Rißtafeln hat die Ebene, die durch zwei parallele Geraden bestimmt wird, deren Aufrisse zusammenfallen?

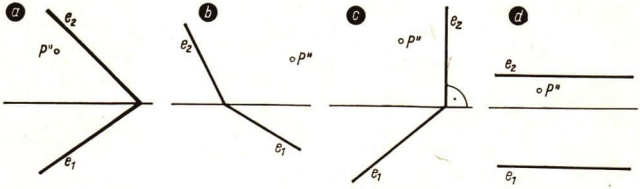
107. Welche Lage gegenüber den Rißtafeln hat die Ebene, die durch zwei einander schneidende Geraden bestimmt wird, deren Grundrisse zusammenfallen?

d

108. Gegeben sind eine Ebene durch ihre Spuren und der Grundriß eines Punktes P dieser Ebene. Bestimmen Sie den Aufriß dieses Punktes in den im Bild d 11 angegebenen Fällen!

109. Gegeben sind eine Ebene durch ihre Spuren und der Aufriß eines Punktes P dieser Ebene. Bestimmen Sie den Grundriß dieses Punktes in den in Bild d 12 angegebenen Fällen!





110. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren (Daten beliebig). Zeichnen Sie in diese Ebene ein Dreieck ein, **a)** dessen Aufriß, **b)** dessen Grundriß Sie willkürlich wählen!

111. Gegeben sind eine Ebene durch ihre Spuren und der Grundriß einer Geraden in dieser Ebene. Bestimmen Sie den Aufriß der Geraden (Daten beliebig)!

112. Gegeben sind eine Ebene durch ihre Spuren und der Aufriß einer Geraden in dieser Ebene. Bestimmen Sie den Grundriß der Geraden (Daten beliebig)!

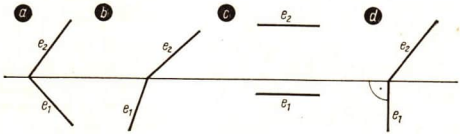
---

15. Zeichnen Sie die Risse des Parallelogramms $ABCD$, von dem die Koordinaten dreier Eckpunkte gegeben sind!

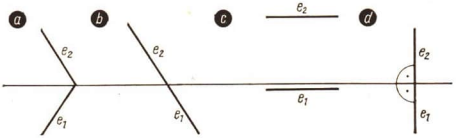
a) A (6; 3; 1), B (1; 5; 6), C (4; 8; 0) **b)** B (7; 4; 2), C (5; 9; — 1), D (3; 6; 3)

In den folgenden Bildern ist jeweils eine Ebene durch ihre Spuren e_1, e_2 gegeben. Gesucht sind die Neigungswinkel α_1, α_2 gegen die Rißtafeln.

113. Bilder d 13a bis d

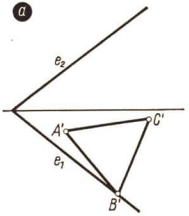


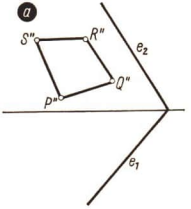
114. Bilder d 14a bis d

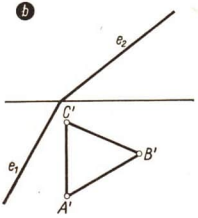


115. In einer Ebene liegt ein Dreieck *ABC* (Bilder d 15 a und b). Bestimmen Sie seine wahre Größe!

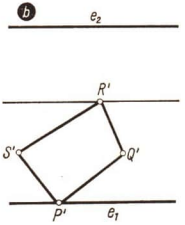
116. In einer Ebene liegt ein Viereck *PQRS* (Bilder d 16 a und b). Bestimmen Sie seine wahre Größe!







d 15



d 16

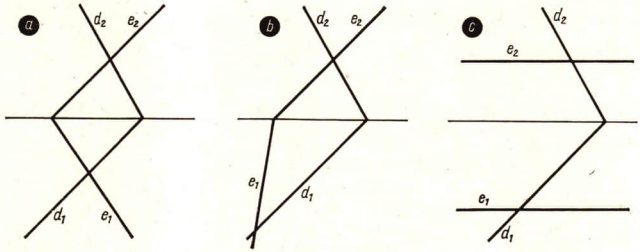
117. Nehmen Sie eine nichtprojizierende Ebene an, zeichnen Sie ihre Spuren und bestimmen Sie die Risse eines in dieser Ebene liegenden Quadrats (allgemeine Lage, Seitenlänge beliebig)!

---

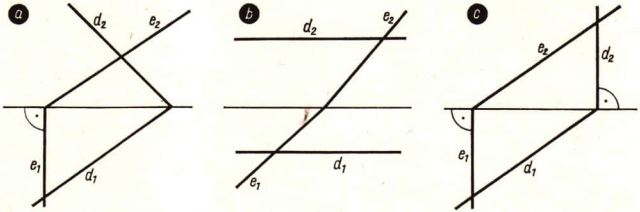
16. Nehmen Sie eine nichtprojizierende Ebene und einen Punkt in dieser Ebene an. Dieser Punkt sei Mittelpunkt eines regelmäßigen Sechsecks, das in dieser Ebene liegt. Bestimmen Sie die Risse dieser Figur!
(Daten beliebig)

In den folgenden Bildern sind jeweils zwei Ebenen durch ihre Spuren e_1, e_2, d_1, d_2 gegeben. Ermitteln Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen bei den gekennzeichneten Lagen!

118. Bilder d 17a bis c



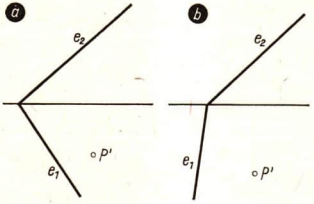
119. Bilder d 18a bis c



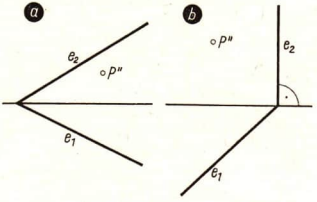
d

In den folgenden Bildern sind jeweils 1. eine Ebene durch ihre Spuren e_1, e_2 und 2. ein Riß eines Punktes P dieser Ebene gegeben. Gesucht ist die Senkrechte auf die Ebene in diesem Punkt.

120. Bilder d 19a, b



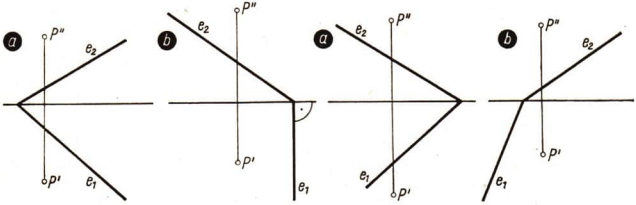
121. Bilder d 20a, b



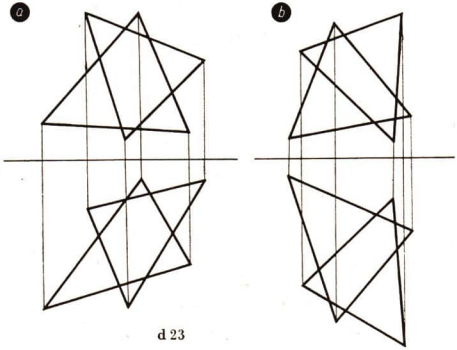
In den folgenden Bildern sind jeweils 1. eine Ebene durch ihre Spuren e_1, e_2 und 2. ein Punkt P durch seine Risse P', P'' gegeben. Gesucht sind Fußpunkt und Länge des Lotes von diesem Punkt P auf die gegebene Ebene.

122. Bilder d 21 a, b

123. Bilder d 22 a, b

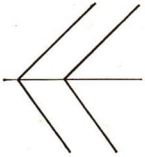


17. Gegeben sind zwei Dreiecke ABC und DEF nach der Skizze in den Bildern d 23 a und b. Bestimmen Sie den Schnitt der beiden Figuren!



d 23

18. Gegeben sind zwei parallele Ebenen durch ihre Spuren (Bild d 24). Es ist der Abstand dieser Ebenen zu bestimmen.



d 24

19. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Gesucht ist die Senkrechte in seinem Schwerpunkt.
A (1; 1; 1), B (6; 7; 0), C (0; 4; 4)
Bemerkung: Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der drei Schwerlinien, d. h. der Verbindungsgeraden der Seitenmitten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten.

124. Ein vierseitiges gerades Prisma wird von einer gegen seine Grundfläche um 30° geneigten Ebene geschnitten. Bestimmen Sie die wahre Größe der Schnittfigur (Daten beliebig, Schnittebene senkrecht zur Aufrißtafel)!

125. Ein dreiseitiges schiefes Prisma wird von einer gegen seine Grundfläche um 45° geneigten Ebene geschnitten. Bestimmen Sie die wahre Größe und die Risse der Schnittfigur (Daten beliebig, Schnittebene senkrecht zur Aufrißtafel)!

126. Eine dreiseitige Pyramide wird von einer gegen seine Grundfläche um 45° geneigten Ebene abgestumpft. Bestimmen Sie die Risse und die wahre Größe der Schnittfigur (Daten beliebig, Schnittebene senkrecht zur Aufrißtafel)!

127. Eine fünfseitige Pyramide wird von einer gegen seine Grundfläche um 60° geneigten Ebene abgestumpft. Bestimmen Sie die Risse und die wahre Größe der Schnittfigur (Daten beliebig, Schnittebene senkrecht zur Aufrißtafel)!

---

20. Bestimmen Sie die wahre Größe des Schnittes eines geraden Kreiszylinders mit einer gegenüber seiner Grundfläche um 60° geneigten Ebene!
(Daten beliebig, Schnittebene senkrecht zur Aufrißtafel.)

Zur Wiederholung

128. Stellen Sie den im Bild d 25 im Maßstab 1:2 abgebildeten Körper

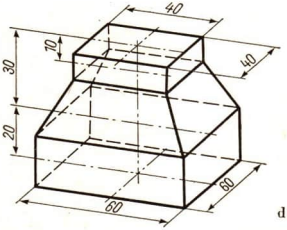
a) im Schrägbild mit $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ (Kavalierperspektive),

b) im Schrägbild mit $\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{3}$,

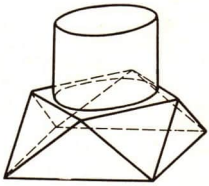
c) in Zweitafelprojektion dar!

129. Zeichnen Sie das Schrägbild in Kavalierperspektive des im Bild d 25 im Maßstab 1:2 dargestellten Körpers, und zwar in Übereckstellung zur Bildtafel!

130. Das Bild d 26 stellt einen Körper in Kavalierperspektive im Maßstab 1:2 dar. Stellen Sie den Körper in Zweitafelprojektion im Maßstab 2:1 dar!



d 25


d 26

131. Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Geraden PQ gegen die Grundrißtafel und die wahre Länge der Strecke $\overline{PQ}$!

a) $P\,(1;\,2;\,4)$, $Q\,(7;\,6;\,4)$

b) $P\,(7;\,0;\,0)$, $Q\,(2;\,8;\,-2)$

132. Eine dreiseitige Pyramide ist durch die Eckpunkte A (4; 2; 1), B (7; 9; 1), C (2; 6; 5 ihrer Grundfläche und die Spitze S (8; 4; 5) gegeben. Bestimmen Sie das Schrägbild dieses Körpers in Kavalierperspektive! Beziehen Sie auch einen Teil des Achsenkreuzes in die Schrägbilddarstellung ein!

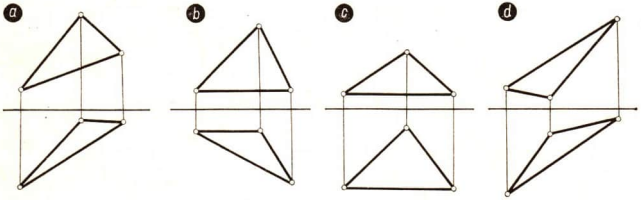
133. Auf einer Ebene, gegeben durch die Spur und eine Höhenlinie, steht ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist. Der Mittelpunkt der Grundfläche ist P. Zeichnen Sie den Grundriß des Körpers! (Daten beliebig.)

134. Ermitteln Sie aus den Koordinaten der Punkte P und Q, ob die Gerade PQ gegenüber der Grundrißtafel oder der Aufrißtafel eine besondere Lage hat (Parallelität, Orthogonalität)!

a) P (2; 0; 4), Q (3; 0; 1)

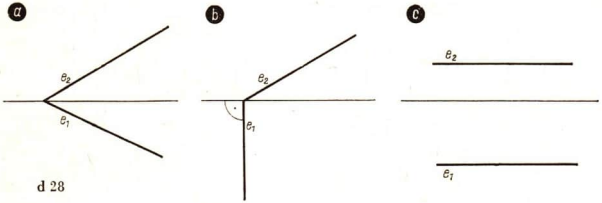
b) P (—1; 5; 3), Q (—1; —1; 7)

135. In den Bildern d 27 a bis d ist jeweils eine Ebene durch die Grund- und Aufrisse dreier Punkte (eines Dreiecks) bestimmt. Ermitteln Sie die Spuren der Ebene bei den gekennzeichneten Lagen!



d 27

136. In den Bildern d 28 a bis c ist jeweils eine Ebene durch ihre beiden Spuren gegeben. Konstruieren Sie für jeden Fall die Neigungswinkel α_1 und α_2!



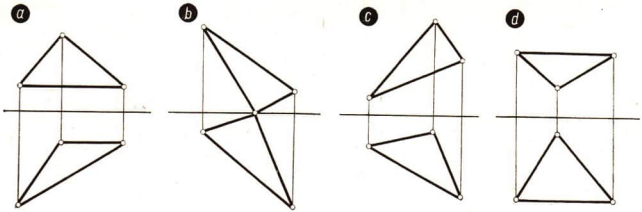
d 28

137. In den Bildern d 29 a bis d wurde jeweils ein Dreieck im Zweitafelverfahren dargestellt.

a) Ermitteln Sie die wahre Größe der Dreiecke!

b) Bestimmen Sie jeweils den Neigungswinkel, den die Ebene, die durch das Dreieck bestimmt wird, mit der Grundrißtafel bildet!

c) Bestimmen Sie jeweils den Neigungswinkel, den die Ebene, die durch das Dreieck bestimmt wird, mit der Aufrißtafel bildet!



d 29

138. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Bestimmen Sie die wahre Größe dieser Figur und die Neigungswinkel ihrer Ebene gegen die Rißtafeln!

a) $A\,(7;\,4;\,2)$, $B\,(3;\,9;\,-1)$, $C\,(0;\,4;\,6)$

b) $A\,(6;\,3;\,2)$, $B\,(1;\,8;\,0)$, $C\,(2;\,7;\,5)$

c) $A\,(2;\,2;\,1)$, $B\,(5;\,2;\,5)$, $C\,(7;\,2;\,3)$

d

Register

äquivalente Winkel A Seite 5
Ankathete C Seite 48
Aufriß D Seite 96
Bestimmungsdreieck C Seite 52
Bogenmaß A Seite 6
Drehung A Seite 4
Ebene D Seite 75 f.
  projizierende – D Seite 85
Einheitskreis A Seite 9
Eintafelprojektion D Seite 82 ff.
Fallinien D Seite 89 f.
Frontebene (–linie) D Seite 101 f.
Gegenkathete C Seite 48
Geordnetes Paar A Seite 4, 8; D Seite 72
Gerade D Seite 75, 84, 96 f.
Gradmaß A Seite 5
Größen B Seite 38
Grundrißspurpunkt D Seite 84
Haupttangente A Seite 19
–wert A Seite 5
Höhenebene D Seite 102
–linien D Seite 89 f., 101
–maßstab D Seite 82
identische Drehung A Seite 5
irrationale Zahlen A Seite 28
Kalotte B Seite 44
Kavalierperspektive D Seite 73 f.
Kegelstumpf B Seite 42 f.
Kofunktionen A Seite 27
Komplementwinkel **A Seite 27**; C Seite 49
Konstante B Seite 38
Kosinus
–funktion **A Seite 8**; C Seite 49
–satz C Seite 59 f.
Kotangensfunktion **A Seite 20 f.**; C Seite 49
Koten D Seite 72
Kugel
–abschnitt B Seite 44 f.
–ausschnitt B Seite 45
–kappe B Seite 44 f.
–schicht B Seite 45
–segment B Seite 44 f.
–sektor B Seite 45
–zone B Seite 45 f.
Maß eines Winkels A Seite 5
Maßeinheit B Seite 38
Näherungswert B Seite 39
Nebentangente A Seite 20
negative Winkel A Seite 5
Neigungswinkel **D Seite 78**, 82, 86 f., 92, 99, 105
Ordnungslinie D Seite 96
Orthogonalität D Seite 76
parallel D Seite 75 f.
Parallelprojektion D Seite 80 f.
Periode **A Seite 10**, 13, 21
Projektion D Seite 80
–sebene D Seite 80, 82
–sstrahlen D Seite 80
projizierende Ebene D Seite 85
Punkt D Seite 75, 82, 96
Pyramidenstumpf B Seite 40 f.
Quadrantenbeziehung A Seite 30
Rechtssystem D Seite 72
regelmäßiges Vieleck C Seite 52 f.
Rißachse D Seite 96
schneiden D Seite 75 f.
Schnitt eines Körpers D Seite 109
Schnittgerade (–punkt) D Seite 75 f., 106
Schrägbild D Seite 73 f.
Sinus
–funktion **A Seite 8**; C Seite 48
–satz C Seite 55
Spur D Seite 89
–punkt D Seite 84
Strecke D Seite 85
  wahre Länge einer – D Seite 86 f., 99
Superposition A Seite 16 f.
Tafeln der Winkelfunktionen **A Seite 28**, 31
Tangensfunktion **A Seite 19**; C Seite 49
Überlagerung A Seite 17
wahre Größe
– eines Dreiecks D Seite 93 f., 105
– einer Schnittfigur D Seite 109
– einer Strecke D Seite 86 f., 99
windschief **D Seite 75**, 79, 100 f.
Winkel **A Seite 4**; D Seite 78
–funktionen A Seite 7 ff.
–funktionstafeln A Seite 28, 31
–maß A Seite 5
  (Gradmaß A Seite 5)
  (Bogenmaß A Seite 6)
  Komplement– A Seite 27
  negative – A Seite 5
Zentralprojektion D Seite 80 f.
Zweitafelprojektion D Seite 96 ff.

Z

Abbildungsnachweis

Außentitel: Zentralbild
Zwischentitel: Kap. A: CHRISTOPH GEORGI, Schneeberg/Erzgeb.; Kap. B: Zentralbild; Kap. C: H. DREYER, Berlin-Köpenick; Kap. D: M. SEIFERT, Berlin
C 14: Reproduktion aus G. STEINDORFF: *Die Kunst der Ägypter*, Leipzig 1928
C 15: Reproduktion aus O. NEUGEBAUER: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, 1. Band, Vorgriechische Mathematik, Berlin 1934
C 16: Reproduktion aus O. NEUGEBAUER, *Mathematische Keilschrifttexte*, zweiter Teil: Register, Glossar, Nachträge, Tafeln; Berlin 1935
C 17: Reproduktion aus A. EISENLOHR, *Ein altbabylonischer Felderplan*, Leipzig 1896
C 19: Reproduktion des Titelblattes einer Abhandlung von PETER APIAN (1533)
C 20: Reproduktion aus C. KING: *The history of the telescope*
C 21: Reproduktion aus D. E. SMITH, *History of mathematics*, Vol. 1, 1922
C 22: Reproduktion aus PRESTAGE, *Die portugiesischen Entdecker*, Bern—Leipzig—Wien 1936
C 23: Reproduktion aus SMITH and MIKAMI: *A history of Japanese mathematics*
C 24: Reproduktion aus A. WOLF: *A history of science*, 18. Jh., London, sec. edition
C 25: Museum für deutsche Geschichte

Z

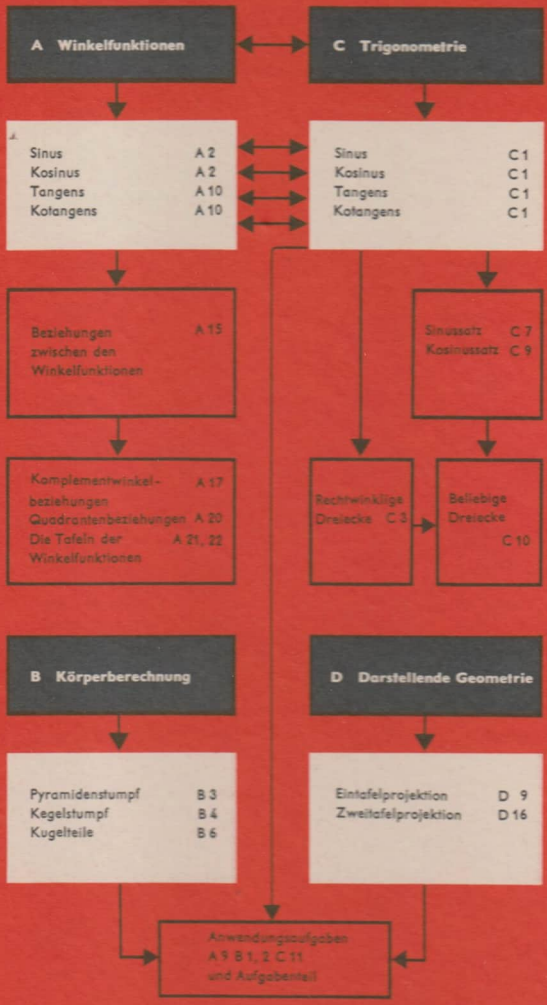
A a Winkelfunktionen

B b Körperberechnung

C c Ebene Trigonometrie

D d Darstellende Geometrie

Z Register


A Winkelfunktionen
C Trigonometrie
Sinus A 2
Kosinus A 2
Tangens A 10
Kotangens A 10
Sinus C 1
Kosinus C 1
Tangens C 1
Kotangens C 1
Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen A 15
Sinussatz C 7
Kosinussatz C 9
Komplementwinkel-beziehungen A 17
Quadrantenbeziehungen A 20
Die Tafeln der Winkelfunktionen A 21, 22
Rechtwinklige Dreiecke C 3
Beliebige Dreiecke C 10
B Körperberechnung
D Darstellende Geometrie
Pyramidenstumpf B 3
Kegelstumpf B 4
Kugelteile B 6
Eintafelprojektion D 9
Zweitafelprojektion D 16
Anwendungsaufgaben
A 9 B 1, 2 C 11
und Aufgabenteil