LEHRBUCH DER MATHEMATIK

FÜR DIE GRUNDSCHULE

SIEBENTES SCHULJAHR

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

LEHRBUCH DER MATHEMATIK

FÜR DIE GRUNDSCHULE

7. SCHULJAHR

Mit 138 Abbildungen

VOLK UND WISSEN VERLAG
BERLIN/LEIPZIG
1950

Herausgegeben von der Verlagsredaktion Mathematik unter Mitarbeit von
Werner Kresse und Erich Weis

Best.-Nr. 2044 1.30 DM br. (1.05 DM bei Lieferung über die Schule) · 301.–680. Tausend
Lizenz Nr. 334 · 1000/51-I-41/51
Satz: B. G. Teubner, Leipzig (M 109) – F 527
Druck: Volk und Wissen Verlag, Leipzig (M 242)

INHALTSVERZEICHNIS

A. Die Rechenarten im täglichen Leben

B. Einführung in das Rechnen mit allgemeinen und relativen Zahlen

C. Geometrie

A. Die Rechenarten im täglichen Leben

I. Zur Wiederholung und Übung

1. Addition und Subtraktion

1. a) 725 + 2 309 + 6 440 + 18 239 + 583 + 10 074 + 841

b) 15 682 + 27 945 + 80 604 + 92 315 + 121 604 + 85 567

c) 2 345 679 + 827 503 + 649 268 + 5 738 209 + 993 876

d) 15 962 834 + 17 962 841 + 20 030 605 + 90 563 821

e) 2 341 486 + 19 507 + 810 355 + 6 431 256 + 43 097

f) 2 348 967 + 5 314 + 283 696 + 1 916 305 + 7 855

g) 9 323 + 6 241 593 + 16 607 + 494 832 + 235 741

2. Ordne die Summanden so, daß sich die Aufgabe im Kopf rechnen läßt!

a) 75 + 49 + 25 **b)** 61 + 84 + 39

c) 42 + 61 + 58 **d)** 79 + 34 + 21

e) 230 + 324 + 170 **f)** 165 + 228 + 335

g) 298 + 641 + 402 **h)** 795 + 831 + 205

i) 284 + 116 + 325 + 275 **k)** 501 + 362 + 299 + 438

l) 943 + 622 + 157 + 378 **m)** 866 + 823 + 177 + 234

3. Rechne – soweit möglich – im Kopf!

a) 25 + 35 + 18 + 62 + 74 + 56 + 91 + 69 + 43 + 57

b) 56 + 44 + 39 + 61 + 85 + 65 + 46 + 83 + 44 + 68

c) 75 + 68 + 31 + 29 + 16 + 95 + 14 + 65 + 66 + 92

d) 21 + 65 + 97 + 53 + 21 + 34 + 49 + 51 + 83 + 34

e) 292 + 108 + 634 + 105 + 299 + 310 + 705 + 599 + 360

f) 656 + 344 + 555 + 245 + 708 + 316 + 297 + 106 + 200

g) 1 400 + 2 600 + 7 500 + 400 + 820 + 230 + 110 + 95 + 61

4. a) Addiere die Zahlen der Spalten a bis e!

b) Addiere die Zahlen der Zeilen I bis VII!

	a	b	c	d	e
I	174	2 315	121 315	18 234 916	46 231 458
II	209	6 428	79 006	46 632 582	516 209
III	314	941	235 987	58 291 680	7 428
IV	682	5 556	458 623	21 573 246	5 307 628
V	507	241	345 820	17 345 135	258 096
VI	95	7 810	18 035	9 954 802	59 457 973
VII	41	3 608	19 190	34 176 794	1 008 482

5. a) 58 219 − 13 654 **b)** 43 826 − 17 315 **c)** 92 008 − 46 099 **d)** 65 209 − 59 199

e) 5 632 418 − 1 409 635 **f)** 8 907 432 − 4 573 921 **g)** 16 582 307 − 5 694 598 **h)** 44 531 123 − 12 742 758

i) 2 462 308 − 1 962 109 **k)** 9 215 621 − 5 017 961 **l)** 28 590 032 − 14 628 357 **m)** 64 220 000 − 17 569 609

6. a) 2 305 917 − 192 235 − 16 699 − 144 528 − 99 865

b) 92 654 143 − 6 508 947 − 25 106 213 − 7 455 962 − 6 318 412

c) 31 546 997 − 6 219 456 − 3 317 549 − 322 954 − 766 537

d) 20 000 000 − 5 598 431 − 609 708 − 4 567 318 − 6 293 821

7. Rechne vorteilhaft!

a) 861 − 298 **b)** 2 906 − 497 **c)** 8 320 − 699

d) 946 − 351 **e)** 3 674 − 583 **f)** 6 690 − 594

8. a) 49 621 + 54 916 − 72 365 + 21 605 − 5 407 − 31 641

b) 195 766 + 384 516 − 106 314 + 100 307 + 7 428 − 46 182

c) 629 345 − 48 665 − 13 812 − 41 008 − 6 503 − 8 164

d) 579 123 − 62 985 − 25 298 + 6 315 − 9 984 − 5 687

e) 100 000 − 43 658 + 41 442 − 25 141 − 16317 − 2 128

f) 267 221 − 36 519 − 91 528 + 123 234 − 56 562 − 18 306

9. Subtrahiere in den Zeilen die Zahlen der Spalten I bis III einzeln von den Zahlen der Spalten a bis c, also Spalte I von a, dann von b, dann von c usw.!

a	b	c	I	II	III
56 293	121 448	59 030	21 458	32 659	51 802
265 697	348 004	251 987	143 516	98 644	221 957
50 346 853	26 341 507	19 266 834	18 921 435	6 305 999	7 556 823
78 651 209	63 428 016	59 216 987	43 659 084	59 119 604	36 458 642

2. Multiplikation und Division

1. a) 3 432 · 124 **b)** 6 314 · 265 **c)** 8 904 · 374
d) 9 028 · 564 **e)** 8 926 · 487 **f)** 6 203 · 586
g) 4 837 · 687 **h)** 5 597 · 385 **i)** 7 456 · 932
k) 6 694 · 435 **l)** 8 341 · 916 **m)** 5 007 · 467

2. a) 25 634 · 803 **b)** 46 589 · 907 **c)** 59 274 · 603
d) 19 834 · 5 004 **e)** 23 807 · 6 009 **f)** 28 347 · 3 084
g) 46 997 · 4 034 **h)** 59 982 · 5 302 **i)** 21 354 · 9 603
k) 21 003 · 2 507 **l)** 47 030 · 2 160 **m)** 94 308 · 2 057

3. a) 4 682 037 · 582 **b)** 6 027 558 · 2 946 **c)** 2 340 506 · 4 718
d) 16 246 308 · 4 506 **e)** 8 245 391 · 4 027 **f)** 1 003 008 · 5 009
g) 3 268 044 · 1 235 **h)** 9 456 920 · 8 531 **i)** 4 516 998 · 6 708

4. a) 7 823 · 431 **b)** 99 651 · 821 **c)** 84 037 · 2 391
d) 18 034 · 185 **e)** 66 485 · 194 **f)** 66 438 · 1 203
g) 45 617 · 213 **h)** 41 974 · 514 **i)** 56 297 · 815

5. a) 978 · 14 · 27 **b)** 48 · 21 · 94 **c)** 316 · 68 · 75
d) 43 · 28 · 516 **e)** 506 · 16 · 68 **f)** 35 · 78 · 209
g) 19 · 54 · 66 **h)** 99 · 101 · 25 **i)** 81 · 95 · 317

6. Multipliziere in den Zeilen die Zahlen der Spalten a bis d einzeln mit den Zahlen der Spalten I bis III (vgl. Aufgabe 9 von S. 7)!

a	b	c	d	I	II	III
56 207	2 508 602	193 455	287 314	123	508	241
482 964	3 814 009	256 907	629 091	495	32	617
882 304	5 287 965	310 078	140 753	602	798	509
556 821	9 973 090	874 556	864 296	821	555	827

7. a) 96 485 : 5 b) 56 864 : 4 c) 92 048 : 8 d) 40 104 : 9
e) 73 021 : 3 f) 81 522 : 6 g) 55 475 : 7 h) 74 328 : 8
i) 503 423 : 5 k) 274 386 : 7 l) 357 248 : 6 m) 820 907 : 9

8. a) 931 : 15 b) 6 347 : 21 c) 7 082 : 32 d) 87 453 : 45
e) 2 483 : 59 f) 8 074 : 65 g) 6 324 : 48 h) 59 728 : 73
i) 15 629 : 18 k) 78 332 : 72 l) 56 419 : 94 m) 60 308 : 38

/9. a) 53 261 : 510 b) 46 127 : 223 c) 94 583 : 516
d) 693 482 : 428 e) 842 356 : 816 f) 705 692 : 324
g) 535 002 : 619 h) 902 008 : 704 i) 844 398 : 803
k) 9 204 503 : 226 l) 415 303 : 412 m) 962 457 : 579

10. Dividiere in den Zeilen die Zahlen der Spalten a bis d einzeln durch die der Spalten I bis III (vgl. Aufgabe 9 auf S. 7)!

a	b	c	d	I	II	III
482	6 593	15 869	345 408	8	34	261
563	7 604	28 021	506 456	9	61	506
961	9 514	94 483	709 329	6	75	408
853	2 328	43 657	336 009	5	98	716
709	8 765	55 386	899 001	7	83	358

11. a) $(582 + 374) \cdot 21$ b) $(965 - 496) \cdot 56$ c) $(674 + 582) \cdot 43$
d) $(964 - 528) \cdot 59$ e) $(428 + 396) \cdot 63$ f) $(554 + 293) \cdot 98$
g) $(358 + 479) \cdot 74$ h) $(832 - 216) \cdot 49$ i) $(823 - 465) \cdot 78$

12. a) $(923+518)\cdot(623+141)$ **b)** $(823+567)\cdot(307-218)$
c) $(703+134)\cdot(510-349)$ **d)** $(823-158)\cdot(347-162)$
e) $(756-168)\cdot(112+374)$ **f)** $(923-815)\cdot(342-283)$
g) $(514+328)\cdot(994-338)$ **h)** $(563-248)\cdot(865-375)$
i) $(281+389)\cdot(264-193)$ **k)** $(983-526)\cdot(214+107)$

13. a) $(328+231):65$ **b)** $(645-197):41$
c) $(408+513):72$ **d)** $(927-856)\cdot 31$
e) $(345+219):15$ **f)** $(789-502)\cdot 29$
g) $(562+334):45$ **h)** $(987-285)\cdot 36$
i) $(521-238):54$ **k)** $(243+567)\cdot 52$

14. a) $(945+268):(359-268)$ **b)** $(567-283):(914-864)$
c) $(397+945)\cdot(914-265)$ **d)** $(345+567):(824-716)$
e) $(826+349)\cdot(281-83)$ **f)** $(889+947):(514-216)$
g) $(492-168)\cdot(518-446)$ **h)** $(358+926):(845-695)$
i) $(213+909)\cdot(412-245)$ **k)** $(349+267):(972-841)$

3. Brüche und Dezimalbrüche

1. a) $8\frac{2}{5}+7\frac{3}{5}$ **b)** $9\frac{5}{6}+8\frac{5}{6}$ **c)** $7\frac{5}{9}+9\frac{8}{9}$ **d)** $8\frac{5}{7}+3\frac{4}{7}$ **e)** $6\frac{6}{11}+5\frac{9}{11}$
f) $6\frac{9}{14}+4\frac{5}{14}$ **g)** $8\frac{11}{12}+9\frac{5}{12}$ **h)** $6\frac{9}{10}+8\frac{7}{10}$ **i)** $7\frac{5}{8}+9\frac{7}{8}$ **k)** $4\frac{9}{13}+8\frac{11}{13}$

2. a) $26\frac{9}{25}+18\frac{21}{25}$ **b)** $15\frac{7}{31}+16\frac{19}{31}$ **c)** $46\frac{9}{40}+13\frac{21}{40}$ **d)** $75\frac{5}{42}+11\frac{11}{42}$
e) $64\frac{7}{30}+15\frac{11}{30}$ **f)** $46\frac{17}{19}+26\frac{11}{19}$ **g)** $58\frac{25}{41}+16\frac{35}{41}$ **h)** $69\frac{13}{60}+32\frac{59}{60}$
i) $72\frac{11}{24}+19\frac{19}{24}$ **k)** $81\frac{33}{50}+46\frac{49}{50}$ **l)** $74\frac{9}{35}+25\frac{34}{35}$ **m)** $91\frac{11}{14}+18\frac{13}{14}$

3. a) $96\frac{5}{8}-18\frac{7}{8}$ **b)** $77\frac{9}{10}-25\frac{9}{10}$ **c)** $47\frac{5}{16}-32\frac{9}{16}$ **d)** $51\frac{9}{20}-43\frac{11}{20}$
e) $63\frac{11}{15}-49\frac{14}{15}$ **f)** $84\frac{9}{32}-33\frac{17}{32}$ **g)** $58\frac{5}{24}-43\frac{19}{24}$ **h)** $68\frac{9}{41}-27\frac{19}{41}$
i) $71\frac{11}{21}-23\frac{19}{21}$ **k)** $42\frac{7}{53}-11\frac{8}{53}$ **l)** $67\frac{7}{20}-18\frac{11}{20}$ **m)** $94\frac{4}{23}-16\frac{15}{23}$

4. a) $8\frac{7}{15}+3\frac{9}{30}$ **b)** $11\frac{6}{11}+9\frac{4}{33}$ **c)** $45\frac{7}{8}+9\frac{7}{24}$ **d)** $68\frac{4}{25}+13\frac{16}{75}$
e) $5\frac{5}{6}+17\frac{11}{12}$ **f)** $17\frac{7}{12}+9\frac{11}{24}$ **g)** $46\frac{9}{30}+25\frac{11}{60}$ **h)** $78\frac{8}{21}+6\frac{11}{105}$
i) $65\frac{7}{75}+16\frac{4}{15}$ **k)** $26\frac{5}{27}+18\frac{5}{81}$ **l)** $38\frac{9}{14}+46\frac{5}{28}$ **m)** $66\frac{11}{24}+33\frac{31}{48}$

5. a) $17\frac{5}{6}+12\frac{3}{8}$ b) $35\frac{3}{4}+7\frac{7}{10}$ c) $8\frac{5}{16}+9\frac{7}{18}$ d) $6\frac{5}{12}+8\frac{7}{15}$
e) $36\frac{9}{20}+46\frac{11}{15}$ f) $31\frac{7}{15}+42\frac{9}{25}$ g) $75\frac{9}{16}+8\frac{11}{12}$ h) $50\frac{9}{50}+40\frac{9}{40}$
i) $35\frac{7}{8}+5\frac{9}{28}$ k) $51\frac{5}{24}+48\frac{35}{36}$ l) $65\frac{7}{15}+9\frac{5}{6}$ m) $31\frac{7}{12}+53\frac{11}{18}$

6. a) $49\frac{7}{8}+18\frac{3}{5}$ b) $66\frac{9}{10}+15\frac{3}{11}$ c) $73\frac{1}{6}+15\frac{5}{7}$ d) $98\frac{5}{9}+17\frac{7}{8}$
e) $43\frac{1}{2}+39\frac{7}{13}$ f) $71\frac{5}{9}+16\frac{9}{11}$ g) $46\frac{4}{5}+28\frac{5}{9}$ h) $6\frac{7}{23}+5\frac{4}{15}$
i) $11\frac{11}{20}+12\frac{3}{17}$ k) $48\frac{7}{15}+6\frac{6}{11}$ l) $18\frac{2}{3}+46\frac{7}{10}$ m) $9\frac{5}{11}+16\frac{5}{12}$

7. a) $16\frac{5}{6}-7\frac{5}{12}$ b) $38\frac{9}{16}-14\frac{5}{8}$ c) $78\frac{9}{10}-26\frac{4}{5}$ d) $92\frac{3}{4}-6\frac{5}{12}$
e) $45\frac{4}{15}-26\frac{29}{30}$ f) $57\frac{5}{7}-18\frac{20}{49}$ g) $73\frac{2}{3}-47\frac{11}{15}$ h) $81\frac{1}{13}-16\frac{4}{65}$

8. a) $49\frac{3}{4}-26\frac{1}{6}$ b) $39\frac{8}{9}-26\frac{5}{6}$ c) $90\frac{3}{10}-30\frac{7}{8}$ d) $46\frac{11}{15}-26\frac{4}{25}$
e) $100\frac{1}{10}-5\frac{7}{12}$ f) $84\frac{7}{21}-39\frac{9}{28}$ g) $53\frac{7}{32}-20\frac{5}{24}$ h) $16\frac{11}{65}-15\frac{11}{26}$

9. a) $75\frac{5}{7}-49\frac{2}{3}$ b) $66\frac{6}{11}-59\frac{9}{10}$ c) $38\frac{5}{12}-7\frac{8}{11}$ d) $49\frac{10}{21}-36\frac{5}{16}$
e) $82\frac{9}{30}-41\frac{11}{13}$ f) $43\frac{4}{25}-21\frac{9}{11}$ g) $59\frac{4}{5}-23\frac{11}{12}$ h) $73\frac{5}{13}-47\frac{3}{8}$

10. a) $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{9}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{5}{8}+\frac{2}{9}$
c) $\frac{5}{7}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$ d) $\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{8}{9}$
e) $\frac{7}{10}+\frac{4}{5}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{6}{11}+\frac{5}{7}$ f) $\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{5}{9}$
g) $\frac{7}{12}+\frac{9}{20}+\frac{4}{15}+\frac{3}{4}+\frac{9}{10}+\frac{1}{2}$ h) $\frac{3}{40}+\frac{19}{100}+\frac{7}{30}+\frac{9}{20}+\frac{7}{8}+\frac{9}{25}$

11. a) $26\frac{3}{4}+13\frac{4}{5}+6\frac{3}{7}+15\frac{5}{6}$ b) $48\frac{2}{3}+9\frac{5}{6}+26\frac{9}{10}+7\frac{3}{4}$
c) $47\frac{7}{8}+9\frac{2}{9}+15\frac{9}{10}+6\frac{3}{4}$ d) $53\frac{3}{8}+11\frac{9}{10}+6\frac{7}{12}+14\frac{7}{15}$
e) $63\frac{9}{10}+7\frac{2}{21}+11\frac{9}{11}+8\frac{1}{2}$ f) $96\frac{3}{7}+5\frac{1}{5}+8\frac{1}{6}+13\frac{2}{3}$
g) $91\frac{9}{20}+5\frac{4}{15}+7\frac{5}{6}+9\frac{2}{9}$ h) $10\frac{1}{8}+16\frac{5}{9}+38\frac{1}{23}+17\frac{4}{5}$

12. a) $28\frac{3}{4}-17\frac{5}{8}$ b) $65\frac{3}{7}-18\frac{5}{8}$ c) $49\frac{5}{6}-26\frac{5}{6}$ d) $78\frac{9}{20}-43\frac{5}{7}$
e) $49\frac{4}{5}-26\frac{5}{6}$ f) $99\frac{1}{11}-10\frac{3}{10}$ g) $15\frac{5}{8}-7\frac{6}{7}$ h) $83\frac{3}{5}-26\frac{5}{6}$

13. a) $17\frac{7}{8}+49\frac{7}{9}-26\frac{4}{5}-11\frac{2}{3}$ b) $56\frac{11}{15}+36\frac{3}{4}-25\frac{5}{9}-17\frac{1}{6}$

c) $42\frac{3}{4}+91\frac{3}{11}-17\frac{1}{2}+5\frac{5}{12}$ d) $71\frac{9}{20}-10\frac{9}{10}+3\frac{3}{8}-6\frac{4}{5}$

e) $99\frac{1}{5}-42\frac{7}{8}+6\frac{7}{12}-3\frac{5}{21}$ f) $99\frac{5}{9}+13\frac{5}{6}-42\frac{4}{5}+16\frac{5}{8}$

g) $82\frac{9}{20}-13\frac{7}{12}-16\frac{11}{15}+5\frac{5}{6}$ h) $13\frac{10}{11}+84\frac{1}{2}-19\frac{4}{5}+33\frac{2}{3}$

14. a) $\left(17\frac{3}{4}+29\frac{5}{6}\right)-\left(11\frac{4}{9}+13\frac{4}{5}\right)$ b) $\left(68\frac{5}{7}+11\frac{4}{9}\right)-\left(12\frac{3}{8}+5\frac{4}{5}\right)$

c) $\left(45\frac{1}{2}+54\frac{2}{3}\right)+\left(19\frac{1}{8}-3\frac{1}{5}\right)$ d) $\left(94\frac{5}{8}-46\frac{2}{3}\right)-\left(28\frac{1}{2}-13\frac{4}{5}\right)$

e) $\left(22\frac{6}{7}+43\frac{1}{2}\right)-\left(55\frac{2}{3}-46\frac{1}{11}\right)$ f) $\left(65\frac{1}{2}-23\frac{1}{5}\right)-\left(39\frac{1}{8}-34\frac{1}{5}\right)$

g) $\left(63\frac{3}{8}-42\frac{1}{9}\right)+\left(18\frac{1}{2}-9\frac{11}{12}\right)$ h) $\left(74\frac{9}{20}+21\frac{11}{12}\right)+\left(15\frac{11}{15}+3\frac{3}{11}\right)$

15. a) $\frac{7}{8}\cdot 9$ b) $\frac{8}{9}\cdot 15$ c) $\frac{9}{10}\cdot 15$ d) $\frac{7}{20}\cdot 24$ e) $\frac{6}{11}\cdot 16$

f) $\frac{5}{6}\cdot 18$ g) $\frac{7}{10}\cdot 34$ h) $\frac{11}{12}\cdot 42$ i) $\frac{4}{25}\cdot 45$ k) $\frac{6}{13}\cdot 72$

16. a) $12\cdot\frac{3}{4}$ b) $24\cdot\frac{15}{16}$ c) $19\cdot\frac{5}{6}$ d) $37\cdot\frac{8}{9}$ e) $49\cdot\frac{11}{12}$

f) $81\cdot\frac{8}{9}$ g) $93\cdot\frac{7}{31}$ h) $46\cdot\frac{15}{22}$ i) $84\cdot\frac{7}{18}$ k) $51\cdot\frac{23}{34}$

17. a) $\frac{8}{11}:4$ b) $\frac{5}{12}:3$ c) $\frac{9}{10}:12$ d) $\frac{14}{15}:35$ e) $\frac{11}{20}:16$ f) $\frac{8}{21}:36$

g) $\frac{5}{13}:25$ h) $\frac{18}{17}:40$ i) $\frac{10}{11}:52$ k) $\frac{7}{8}:63$ l) $\frac{5}{19}:11$ m) $\frac{12}{13}:24$

18. a) $4\frac{4}{5}:8$ b) $6\frac{3}{7}:9$ c) $8\frac{1}{8}:13$ d) $12\frac{1}{12}:15$ e) $7\frac{1}{9}:8$ f) $11\frac{1}{3}:6$

g) $10\frac{4}{5}:9$ h) $6\frac{1}{8}:7$ i) $9\frac{1}{6}:5$ k) $8\frac{3}{8}:3$ l) $5\frac{1}{5}:13$ m) $8\frac{1}{8}:5$

19. a) $\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4}$ b) $\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{8}$ c) $\frac{7}{12}\cdot\frac{9}{14}$ d) $\frac{4}{11}\cdot\frac{22}{25}$ e) $\frac{14}{15}\cdot\frac{25}{28}$ f) $\frac{7}{30}\cdot\frac{20}{21}$

g) $\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{15}$ h) $\frac{3}{14}\cdot\frac{26}{27}$ i) $\frac{49}{50}\cdot\frac{34}{35}$ k) $\frac{18}{31}\cdot\frac{8}{9}$ l) $\frac{24}{25}\cdot\frac{15}{16}$ m) $\frac{27}{28}\cdot\frac{7}{9}$

20. a) $\frac{9}{13}\cdot\frac{65}{66}$ b) $\frac{16}{17}\cdot\frac{15}{16}$ c) $\frac{19}{24}\cdot\frac{32}{35}$ d) $\frac{11}{19}\cdot\frac{5}{33}$ e) $\frac{9}{14}\cdot\frac{35}{36}$ f) $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}$

g) $\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11}$ h) $\frac{3}{13}\cdot\frac{4}{15}$ i) $\frac{12}{31}\cdot\frac{17}{36}$ k) $\frac{21}{22}\cdot\frac{24}{25}$ l) $\frac{9}{11}\cdot\frac{22}{27}$ m) $\frac{13}{20}\cdot\frac{64}{65}$

21. a) $2\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot 3\frac{1}{3}$ b) $4\frac{1}{5}\cdot 3\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{11}$ c) $6\frac{2}{3}\cdot 9\frac{9}{10}\cdot 4\frac{5}{22}$

d) $8\frac{1}{4}\cdot 2\frac{1}{11}\cdot\frac{5}{46}$ e) $7\frac{1}{5}\cdot 8\frac{8}{9}\cdot 6\frac{3}{10}$ f) $15\frac{3}{4}\cdot 7\frac{4}{15}\cdot 2\frac{1}{3}$

22. **a)** $6\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}$ **b)** $4\frac{3}{8}:5\frac{5}{6}$ **c)** $9\frac{2}{3}:4\frac{4}{9}$ **d)** $10\frac{1}{5}:3\frac{3}{10}$ **e)** $7\frac{1}{5}:1\frac{5}{6}$
f) $9\frac{2}{7}:1\frac{4}{9}$ **g)** $6\frac{1}{4}:8\frac{1}{3}$ **h)** $12\frac{1}{4}:1\frac{2}{5}$ **i)** $7\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}$ **k)** $6\frac{2}{5}:2\frac{2}{3}$

23. **a)** $\left(5\frac{3}{5}+6\frac{2}{3}\right)\cdot\left(7\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}\right)$ **b)** $\left(3\frac{1}{8}+5\frac{1}{6}\right)\cdot\left(7\frac{1}{2}-5\frac{2}{3}\right)$
c) $\left(9\frac{1}{9}-5\frac{5}{6}\right)\cdot\left(3\frac{2}{5}-1\frac{1}{8}\right)$ **d)** $\left(4\frac{1}{2}+9\frac{2}{11}\right)\cdot\left(6\frac{1}{3}-5\frac{2}{5}\right)$
e) $\left(7\frac{2}{9}-4\frac{5}{8}\right)\cdot\left(3\frac{4}{7}-2\frac{8}{9}\right)$ **f)** $\left(6\frac{1}{5}-4\frac{2}{3}\right)\cdot\left(2\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}\right)$

24. **a)** 26,18 + 9,345 + 126,4 + 19,58 + 3,567 + 8,9
b) 465,9 + 39,586 + 3,71 + 15,820 9 + 46,608 3 + 45,37
c) 289,31 + 46,45 + 18,003 4 + 56,397 + 128,4 + 264,289
d) 573,4 + 289,965 3 − 618,307 − 25,38 + 165,849 6 − 98,23

25. **a)** Addiere die Zahlen der Spalten a bis e!
b) Addiere die Zahlen der Zeilen I bis V!

	a	b	c	d	e
I	296,348	2 345,67	9 623,458 6	16,34	448,036 45
II	16,59	298,5	5 803,045	582,096 4	19,283
III	486,359 3	1 357,094 8	17,23	5,38	4 560,989 7
IV	18,6	617,34	9 560,802 8	16,620 3	425,37
V	46,827	18,2	451,245	6 945,3	26,981 4

26. **a)** 49,5 − 28,13 **b)** 69,45 − 15,234 **c)** 17,5 − 13,609
d) 264,38 − 98,327 **e)** 83,762 − 49,71 **f)** 46,82 − 39,587

27. **a)** 33,5 − 6,5 − 0,028 − 3,56 − 1,295 6 − 4,5
b) 78,34 − 15,9 − 3,8 − 6,492 7 − 4,56 − 9,623
c) 93,745 − 8,2 − 16,34 − 15,826 − 9,030 8 − 4,582 7
d) 29,43 − 6,580 62 − 3,347 − 1,5 − 0,927 6 − 5,548
e) 46,16 − 2,9 − 4,008 3 − 0,068 45 − 1,32 − 7,456 − 0,5

28. **a)** 228,5 km − 169,35 km **b)** 45,29 kg − 41,085 kg
c) 24,5 ha − 13,25 ha **d)** 39,62 ha − 23,45 ha
e) 59,17 hl − 34,98 hl **f)** 93,9 t − 62,088 t
g) 64,32 m² − 49,74 m² **h)** 75,65 DM − 43,75 DM

29. **a)** 46,25 + 9,168 − 40,4 + 68,356 9 − 52,59 − 8,8
b) 19,7 + 83,529 + 74,15 − 81,5 − 14,569 7 − 8,45 − 2,5
c) 63,294 − 46,5 − 10,093 8 + 58,9 + 77,04 − 18,034 7
d) 15,2 + 17,3 + 98,16 − 64,782 3 − 12,06 − 8,887
e) 99,807 − 3,14 + 56,089 − 24,16 + 78,5 − 63,562 3 + 10,003

30. **a)** 6,3 · 9 **b)** 7,8 · 9 **c)** 4,8 · 5 **d)** 13,2 · 8
e) 19,76 · 5 **f)** 66,92 · 11 **g)** 75,92 · 6 **h)** 52,81 · 7
i) 0,538 · 9 **k)** 56,482 3 · 6 **l)** 45,003 · 21 **m)** 9,457 9 · 32
n) 14,42 · 19 **o)** 6,23 · 48 **p)** 5,632 · 97 **q)** 7,58 · 41

31. **a)** 92 · 0,06 **b)** 84 · 0,145 **c)** 73 · 0,82 **d)** 67 · 0,981
e) 43 · 0,91 **f)** 58 · 0,17 **g)** 62 · 0,19 **h)** 23 · 0,96
i) 34 · 0,4 **k)** 83 · 0,328 **l)** 23 · 2,14 **m)** 36 · 3,8
n) 49 · 9,403 **o)** 57 · 2,857 **p)** 64 · 16,43 **q)** 43 · 5,093

32. **a)** 0,8 · 0,6 **b)** 0,4 · 0,6 **c)** 1,3 · 2,5 **d)** 4,5 · 0,09
e) 0,03 · 0,07 **f)** 3,4 · 2,1 **g)** 1,5 · 0,15 **h)** 0,12 · 0,012
i) 1,8 · 0,018 **k)** 16,2 · 0,09 **l)** 4,7 · 0,009 **m)** 2,05 · 0,25
n) 6,3 · 0,09 **o)** 6,5 · 0,09 **p)** 7,82 · 0,3 **q)** 8,07 · 2,4

33. **a)** 5,67 · 3,14 **b)** 14,72 · 26,9 **c)** 9,274 · 0,348
d) 16,2 · 0,849 **e)** 25,8 · 4,732 **f)** 5,080 4 · 0,92
g) 7,65 · 3,21 **h)** 4,8 · 2,8 **i)** 49,203 · 5,36
k) 2,81 · 74,3 **l)** 5,6 · 6,05 **m)** 9,13 · 1,11

34. **a)** 16,3 · 4,5 · 0,19 **b)** 28,2 · 0,45 · 0,32
c) 16,04 · 5,03 · 6,2 **d)** 45,28 · 0,06 · 7,53
e) 0,78 · 0,32 · 0,16 **f)** 0,05 · 0,463 · 0,9
g) 61,3 · 6,13 · 2,58 **h)** 0,12 · 1,2 · 0,012
i) 2,5 · 0,025 · 0,25 **k)** 5,8 · 0,4 · 6,12

35. **a)** 6,4 : 8 **b)** 45,5 : 5 **c)** 13,2 : 8 **d)** 26,4 : 4
e) 71,3 : 3 **f)** 42,6 : 6 **g)** 74,09 : 7 **h)** 15,32 : 5
i) 25,321 : 7 **k)** 9,475 : 8 **l)** 3,82 : 9 **m)** 0,038 4 : 6

36. **a)** 225,4 : 12 **b)** 39,04 : 26 **c)** 43,827 : 35 **d)** 9,03 : 16
e) 78,345 : 65 **f)** 22,478 : 32 **g)** 5,17 : 49 **h)** 5,287 : 71
i) 65,02 : 91 **k)** 75,008 : 43 **l)** 0,05 : 25 **m)** 0,006 : 32

37. **a)** 48 : 0,8 **b)** 59 : 0,9 **c)** 26 : 0,6 **d)** 73 : 0,7
e) 64 : 0,16 **f)** 95 : 0,015 **g)** 32 : 0,048 **h)** 96 : 0,24
i) 75 : 0,035 **k)** 60 : 0,14 **l)** 27 : 0,45 **m)** 100 : 0,09

38. **a)** 65,34 : 1,2 **b)** 24,8 : 3,2 **c)** 16,41 : 0,64 **d)** 15,456 : 2,7
e) 5,03 : 0,065 **f)** 19,7 : 0,85 **g)** 67,3 : 4,08 **h)** 9,9 : 0,001 4
i) 14,5 : 0,74 **k)** 2,3 : 0,048 **l)** 16,5 : 5,5 **m)** 42,834 : 6,3

39. **a)** 3,36 : 0,4 **b)** 2,34 : 0,245 **c)** 3,8 : 0,005 6
d) 2,2 : 0,008 8 **e)** 0,32 : 0,001 28 **f)** 0,001 28 : 0,32

40. Verwandle in einen Dezimalbruch

a) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{7}{10}, \frac{1}{4}, \frac{11}{16}, \frac{5}{32}, \frac{7}{64}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \frac{3}{5}, \frac{3}{8}$

b) $\frac{7}{9}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{11}, \frac{5}{13}, \frac{9}{20}, \frac{11}{12}, \frac{14}{15}, \frac{5}{7}, \frac{4}{17}, \frac{5}{21}, \frac{9}{19}, \frac{2}{9}$

c) $\frac{6}{13}, \frac{5}{17}, \frac{8}{21}, \frac{9}{40}, \frac{17}{50}, \frac{3}{32}, \frac{10}{11}, \frac{14}{25}, \frac{6}{19}, \frac{34}{35}, \frac{3}{19}, \frac{5}{28}, \frac{3}{14}$!

41. **a)** $\frac{5}{8} + 0{,}9$ **b)** $0{,}7 + \frac{3}{4}$ **c)** $\frac{5}{16} + 0{,}074$ **d)** $0{,}95 + \frac{2}{3}$
e) $3\frac{1}{2} + 4{,}567$ **f)** $5{,}8 + \frac{9}{11}$ **g)** $6{,}34 + \frac{7}{8}$ **h)** $3\frac{3}{16} + 0{,}924$
i) $5{,}5 + 6\frac{5}{6}$ **k)** $7\frac{3}{8} + 0{,}02$ **l)** $8\frac{3}{4} + 0{,}2$ **m)** $7{,}06 + 5\frac{5}{8}$

42. **a)** $0{,}32 \cdot \frac{3}{5}$ **b)** $2{,}49 \cdot \frac{2}{25}$ **c)** $6\frac{7}{8} \cdot 0{,}14$ **d)** $2\frac{3}{16} \cdot 0{,}45$
e) $28{,}3 \cdot 7\frac{3}{4}$ **f)** $5\frac{4}{5} \cdot 0{,}12$ **g)** $26\frac{3}{5} \cdot 15{,}47$ **h)** $4{,}5 \cdot 6\frac{2}{3}$
i) $9{,}9 \cdot 9\frac{8}{9}$ **k)** $5{,}31 \cdot \frac{7}{8}$ **l)** $63{,}24 \cdot 1\frac{3}{4}$ **m)** $19{,}3 \cdot 19\frac{1}{2}$

43. **a)** $0{,}96 : \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{4}{5} : 0{,}16$ **c)** $3{,}2 : \frac{7}{8}$ **d)** $\frac{7}{8} : 3{,}2$
e) $46{,}4 : \frac{1}{16}$ **f)** $\frac{3}{8} : 0{,}25$ **g)** $0{,}036 : \frac{3}{5}$ **h)** $\frac{4}{5} : 0{,}048$
i) $9\frac{1}{2} : 3{,}4$ **k)** $17{,}9 : \frac{1}{8}$ **l)** $\frac{5}{16} : 0{,}25$ **m)** $0{,}25 : \frac{5}{16}$

44. **a)** $\left(\frac{3}{5} + \frac{5}{6}\right) \cdot 0{,}9$ **b)** $\left(0{,}29 + \frac{3}{4}\right) : 0{,}8$ **c)** $\left(\frac{5}{8} + 0{,}17\right) \cdot 6{,}2$
d) $7{,}4 \cdot \left(6{,}3 + \frac{5}{12}\right)$ **e)** $\left(19\frac{2}{3} + 7{,}45\right) : 0{,}3$ **f)** $\left(8{,}5 + 3\frac{3}{10}\right) : 0{,}8$

II. Prozentrechnung

4. Die Zahl 100 als Vergleichszahl (Schluß auf und von 100)

Bei einem Leistungswettbewerb errangen von 320 Schülern einer Schule in Wallhausen 48 Schüler einen Preis; von einer anderen Schule in Neuhausen mit 450 Schülern wurden 54 ausgezeichnet. Welche Schule hat danach den größeren Erfolg gehabt?
Ein Vergleich wäre ohne weiteres möglich, wenn von beiden Schulen dieselbe Schülerzahl teilgenommen hätte. Berechne, wieviel von je 100 Schülern der beiden Schulen einen Preis erhalten haben!

Die Zahl 100 wird sehr häufig als Vergleichszahl benutzt.

Aufgaben

Schluß auf 100

1. In einer Hühnerfarm werden 120 Eier in die Brutmaschine gelegt, aus denen 108 Kücken schlüpfen. Eine andere Farm erhält von 150 Eiern 129 Kücken. Welche Farm hat den größeren Erfolg?

2. In einem volkseigenen Gärtnereibetrieb wurden 240 Obstbäume gepflanzt, 12 davon sind nicht „gekommen“. Wieviel Stück würden unter gleichen Bedingungen von 100 gepflanzten Bäumen nicht angewachsen sein?

3. Eine Straße, die gleichmäßig ansteigt, hat auf einer Länge von 960 m eine Steigung von 115,2 m; eine andere Straße hat bei einer Länge von 1 725 m eine Steigung von 138 m. Berechne für jede Straße die Steigung bei 100 m Länge! Welche Straße hat die größere Steigung?

Schluß von 100

4. a) Ein 13jähriger Schüler atmet in einer Stunde etwa $18\frac{1}{2}$ l Kohlensäure aus, ein Erwachsener 25 l. Wieviel l Kohlensäure werden in 1 Std. in einer Klasse ausgeatmet, die aus 34 Schülern und einem Lehrer besteht?

b) Auf 100 l darf die Zimmerluft höchstens $\frac{3}{10}$ l Kohlensäure enthalten. Wieviel l Kohlensäure dürfen in einem Schulzimmer sein, das 9 m lang, 5 m breit und 4 m hoch ist?

c) In 100 l frischer Luft sind $\frac{1}{25}$ l Kohlensäure enthalten. Wie groß ist der Gehalt der Luft des Schulzimmers (Aufg. b) an Kohlensäure vor Beginn des Unterrichts und nach Schluß der Schulstunde (Aufg. a)?

5. Der Prozentbegriff

Beim Aufbau eines Neubauernhofes haben zwei Schulklassen eines Dorfes geholfen. In der einen Klasse beteiligten sich 36 von 40 Kindern, in der anderen 40 von 50. Welche Klasse war aktiver? Die Kinder der zweiten Klasse schienen überlegen, weil sie eine größere Zahl von Helfern stellten. In Wirklichkeit war ihr verhältnismäßiger Anteil geringer. In der ersten Klasse beteiligten sich $\frac{36}{40}$, in der anderen $\frac{40}{50}$ der Kinder. Wenn wir die Brüche vergleichen wollen, müssen wir sie auf den gleichen Nenner bringen. Wir wählen als gemeinsamen Nenner 100.

$$\frac{36}{40} = \frac{90}{100} \qquad \frac{40}{50} = \frac{80}{100}$$

Statt $\frac{90}{100}$ sagen wir auch 90 vom Hundert oder 90 Prozent[1]) und schreiben abgekürzt 90 v.H. oder 90%. Entsprechend sind $\frac{80}{100} = 80\%$.
Wir rechnen also mit der Vergleichszahl 100 und sprechen deshalb von Prozent- oder Vonhundertrechnung. Wenn wir die Vergleichszahl 1000 wählen, sprechen wir von Promillerechnung.
In der ersten Klasse beteiligten sich 36 von 40 Kindern, das waren 90%. Die Zahl 40 nennen wir den **Grundwert**, 90 heißt der **Prozentsatz**, 36 der **Prozentwert**.

Grundwert $\triangleq$ [2]) 100%; 1% $\triangleq \frac{1}{100}$ des Grundwertes.

Beispiel: 1% von 250 DM (Grundwert) $\triangleq \frac{1}{100}$ von 250 DM, also **2,50 DM.**

Aufgaben

1. Berechne 1% von

a) 1 m, 10 m, 100 m, 1 cm, 5 cm, 6 km, 3,4 km, 5,3 m, 8,5 kg;

b) 1 m², 12 a, 7 hl, 20 m, 50 kg, 4 500 dz, 16,8 dz, 325,4 kg, 6,2 t;

c) 9 DM, 35 DM, 210 DM, 12,50 DM, 3,75 DM, 0,50 DM, 0,65 DM!

1) pro centum (lat.): für (von) Hundert.
2) Das Zeichen $\triangleq$ bedeutet „entspricht" bzw. „entsprechen".

2. Schreibe folgende Prozentsätze als Bruchteile des Grundwertes: 1 %, 2 %, 4 %, 5 %, 10 %, 25 %, 50 %, 8 %, 15 %, 45 %, 75 %, 80 %, 86 %!

3. Wieviel Prozent sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{17}{50}$, $\frac{39}{50}$ des Grundwertes?

4. Bestimme die folgenden Hundertsätze als Bruchteile des Grundwertes: $\frac{1}{2}$ %, $1\frac{1}{4}$ %, $2\frac{1}{2}$ %, $3\frac{1}{3}$ %, $3\frac{1}{8}$ %, $4\frac{1}{6}$ %, $6\frac{1}{4}$ %, $8\frac{1}{3}$ %, $12\frac{1}{2}$ %, $16\frac{2}{3}$ %, 20 %, 30 %, $33\frac{1}{3}$ %, $37\frac{1}{2}$ %, 40 %, $66\frac{2}{3}$ %!
Stelle die Ergebnisse zum Einprägen nach folgendem Muster übersichtlich zusammen:

Hundertsatz	1 %	2 %	$2\frac{1}{2}$ %
Bruchteil des Grundwertes	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{40}$

Beachte den Zusammenhang zwischen einzelnen Prozentsätzen (z. B. 50 %; 25 %; $12\frac{1}{2}$ %; $6\frac{1}{4}$ %)!

5. Das Wievielfache des Grundwertes ergeben 100 %, 200 %, 300 %, 500 %, 150 %, 250 %, 125 %, 175 %, 225 %, 360 %, $133\frac{1}{3}$ %, $166\frac{2}{3}$ %?

6. Zeichne ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge!

a) Schraffiere 1 % des Quadratdezimeters!

b) Wie groß ist diese Fläche?

c) Bezeichne 10 % des Quadratdezimeters durch Schraffierung!

7. Zeichne mehrere 10 cm lange schmale Streifen stehend nebeneinander, betrachte sie als Grundwert (100 %) und stelle darin durch Schraffieren anschaulich dar: 5 %, 32 %, 47 %, 50 %, 72 %, 80 %, 92 %! (Prozentstreifen!) Wieviel % bleiben jeweils nicht schraffiert übrig?

8. Zeichne Kreise von 3 cm Radius und betrachte die Kreisflächen als Grundwert!

a) Stelle darin folgende Prozentsätze durch Kreissektoren (Kreisausschnitte) dar (bunt ausmalen!): 50 %, 25 %, $12\frac{1}{2}$ %, 75 %, $33\frac{1}{3}$ %, $16\frac{2}{3}$ %, $66\frac{2}{3}$ %!

b) Wieviel % des Kreises stellt jeweils die Restfläche dar?

6. Berechnung des Prozentwertes

In einem volkseigenen Werk für Maschinenbau wurden die Selbstkosten um 8% gesenkt. Um welchen Betrag fielen sie für einen Pflug, der ursprünglich 350,— DM kostete? Die Lösung ergibt sich durch Schlußrechnung.

$$\begin{aligned} 100\% &\mathrel{\widehat{=}} 350,\!-\ \text{DM} \\ 1\% &\mathrel{\widehat{=}} 3,\!50\ \text{DM} \\ 8\% &\mathrel{\widehat{=}} 28,\!-\ \text{DM} \end{aligned}$$

Die Kostensenkung betrug 28,— DM.

In dieser Aufgabe bezeichnen wir:

350 DM als Grundwert (G)
8% als Prozentsatz (p)
28 DM als Prozentwert (P)

Aus der obigen Schlußrechnung ergibt sich:

$$\boxed{\boldsymbol{P = \frac{G \cdot p}{100}}}$$

Beispiele:

1. Der Lohn eines Formers erhöhte sich durch Leistungssteigerung um 17%. Wie groß war die Erhöhung, wenn vorher 52 DM gezahlt wurden?

   Lösung:

Prozentsatz	Prozentwert
100%	52,— DM
1%	—,52 DM
17%	8,84 DM

   nach der Formel: $P = \frac{52 \cdot 17}{100} = 8,84$

   Die Erhöhung betrug 8,84 DM

   Wenn der Prozentsatz einen „bequemen" Bruchteil von 100 vorstellt, dann braucht zur Berechnung des Prozentwerts der Grundwert nur durch den entsprechenden Teiler dividiert zu werden.

2. Ein Schriftsetzer erhielt infolge Leistungssteigerung eine Lohnerhöhung von 25%. Wie groß war diese, wenn vorher 48 DM gezahlt wurden?

Lösung:

Prozentsatz	Prozentwert
100 %	48 DM
25 % ≙ $\frac{1}{4}$ d. Grdw.	12 DM

Wenn der Prozentsatz kein bequemer Teil von 100 ist, so kann man versuchen, den Prozentsatz in bequeme Teile zu zerlegen.

3. Der Schriftsetzer erhielt 48 DM. Die Lohnerhöhung beträgt 15 %.

Lösung:

Prozentsatz	Prozentwert
100 %	48,– DM
10 %	4,80 DM
5 %	2,40 DM
15 %	7,20 DM

Aufgaben

Berechne:

1. a) 2 %, **b)** 3 %, **c)** 7 %, **d)** 11 %, **e)** 32 % von 500 DM, 350 DM, 72 DM, 9 DM, 700 m, 8 km, 6,3 kg, 27,5 dz, 51,2 t

2.

a) 4 % von 350 DM	**b)** 8 % von 940 DM	**c)** 7 % von 98 t
d) 5 % „ 332 hl	**e)** 9 % „ 780 ha	**f)** 5 % „ 480 m
g) 2 % „ 4 500 hl	**h)** 14 % „ 43 t	**i)** 7 % „ 920 dz
k) 6 % „ 160 km	**l)** 12 % „ 6 320 a	**m)** 11 % „ 820 a
n) 3 % „ 610 t	**o)** 9 % „ 90 kg	**p)** 16 % „ 9 160 kg
q) 23 % „ 6 148 DM	**r)** 16 % „ 14,5 ha	**s)** 29 % „ 84 l

3.

a) 9 % von 8,20 DM	**b)** 5 % von 6,75 dz	**c)** 3 % von 18,7 t
d) 8 % „ 40,5 hl	**e)** 6 % „ 64,50 ha	**f)** 24 % „ 83,9 t
g) 65 % „ 65 m	**h)** 72 % „ 48,3 kg	**i)** 4 % „ 86,32 hl
k) 31 % „ 49,80 DM	**l)** 94 % „ 9,8 l	**m)** 34 % „ 85,6 t
n) 18 % „ 19,3 dz	**o)** 19 % „ 57,8 kg	**p)** 48 % „ 26,5 kg
q) 15 % „ 24,3 ha	**r)** 14 % „ 26,5 ha	**s)** 39 % „ 64 l

4.					
a) 105%	von 70 DM	**b)** 140%	von 13,50 DM	**c)** 220%	von 43 m
110%	„ 4 „	165%	„ 21,60 „	360%	„ 19,700 kg
123%	„ 18 „	200%	„ 6,25 „	425%	„ 7,6 dz

5. a) $\frac{1}{2}$%, **b)** $\frac{1}{3}$%, **c)** [illegible]%, **d)** $\frac{4}{5}$% von 360 DM, 54 hl, $35\frac{1}{2}$ kg, 8,8 ha (Runde auf die übliche Stellenzahl!)

6.					
a) $4\frac{1}{2}$%	von 360 DM	**b)** $2\frac{1}{4}$%	von 160 kg	**c)** $3\frac{1}{3}$%	von 459 hl
d) $5\frac{3}{4}$%	„ 68 l	**e)** $9\frac{1}{4}$%	„ 450 dz	**f)** $6\frac{1}{5}$%	„ 20 ha
g) $4\frac{3}{8}$%	„ 6 300 kg	**h)** $6\frac{7}{10}$%	„ 802 dz	**i)** $12\frac{3}{4}$%	„ 920 kg
k) $11\frac{1}{2}$%	„ 346 DM	**l)** $15\frac{2}{5}$%	„ 2 400 dz	**m)** $24\frac{1}{8}$%	„ 4 730 hl
n) $10\frac{4}{5}$%	„ 310 hl	**o)** $8\frac{3}{4}$%	„ 448 kg	**p)** $3\frac{1}{4}$%	„ 5100 DM
q) $1\frac{1}{2}$%	„ 5 860 DM	**r)** $4\frac{1}{5}$%	„ 920 hl	**s)** $5\frac{1}{2}$%	„ 750 l

7.					
a) 9,5 %	von 860 kg	**b)** 6,25%	von 540 DM	**c)** 8,4 %	von 2 340 hl
d) 2,1 %	„ 750 a	**e)** 5,2 %	„ 340 hl	**f)** 3,45%	„ 460 kg
g) 9,6 %	„ 910 hl	**h)** 5,2 %	„ 820 dz	**i)** 6,4 %	„ 630 DM
k) 4,75%	„ 860 hl	**l)** 8,3 %	„ 120 kg	**m)** 8,3 %	„ 340 l
n) 8,1 %	„ 950 dz	**o)** 8,15%	„ 210 l	**p)** 4,1 %	„ 810 DM
q) 9,5 %	„ 650 kg	**r)** 3,7 %	„ 160 a	**s)** 9,2 %	„ 560 hl

8. a) $1\frac{3}{4}$%, **b)** $4\frac{2}{3}$%, **c)** $3\frac{1}{2}$%, **d)** 4,7% von 210 m, 15 kg, 351 t, 130 l, 5,75 DM! (Schätze zunächst das Ergebnis ab!)

9. Berechne die Prozentwerte als „bequeme" Bruchteile des Grundwertes von folgenden Beträgen:

a) 1%	von 3 650,— DM	**b)** 10%	von 658,40 DM
2%	„ 680,— „	20%	„ 726,60 „
$2\frac{1}{2}$%	„ 1 920,— „	25%	„ 987,40 „
$3\frac{1}{3}$%	„ 480,— „	30%	„ 369,— „
4%	„ 560,— „	50%	„ 1 256,48 „
5%	„ 970,— „	75%	„ 936,80 „
c) 25%	von 460,80 DM	**d)** $33\frac{1}{3}$%	von 6 789,10 DM
75%	„ 938,40 „	$16\frac{2}{3}$%	„ 3 324,— „
20%	„ 279,50 „	$8\frac{1}{3}$%	„ 960,— „
$33\frac{1}{3}$%	„ 602,10 „	$4\frac{1}{6}$%	„ 690,— „
$66\frac{2}{3}$%	„ 240,30 „	$12\frac{1}{2}$%	„ 1 490,— „
$12\frac{1}{2}$%	„ 174,80 „	$6\frac{1}{4}$%	„ 920,— „ !

10. Löse folgende Aufgaben durch geschicktes Zerlegen des Prozentsatzes:

a) 15 %	(= 10 % + $\frac{1}{2}$ von 10 %)	von	524 m³;	36,80 DM;	0,90 DM
b) 9 %	(= 10 % − 1 %)	„	825 DM;	1 045 hl;	345 DM
c) 2,2 %	(= 2 % + $\frac{1}{10}$ von 2 %)	„	725 dz;	187,5 kg;	16,5 t
d) 4,4 %		„	365 DM;	1 225 hl;	31,25 t!

11. Berechne möglichst vorteilhaft

a) 5 %	von	80 DM	**b)** 25 %	von	84,— DM
20 %	„	300 „	$8\frac{1}{2}$ %	„	21,60 „
$12\frac{1}{2}$ %	„	96 „	$6\frac{1}{4}$ %	„	17,44 „
$16\frac{2}{3}$ %	„	750 „	$37\frac{1}{2}$ %	„	3,24 „
$18\frac{3}{4}$ %	„	1 224 „	$33\frac{1}{3}$ %	„	—,75 „
c) 40 %	von	480 kg	**d)** 40 %	von	230 hl
75 %	„	92 kg	$16\frac{2}{3}$ %	„	39 kg
80 %	„	27,300 kg	$6\frac{1}{4}$ %	„	496 t
125 %	„	38,6 dz	$66\frac{2}{3}$ %	„	46,2 dz
250 %	„	43,5 t	$133\frac{1}{3}$ %	„	74,1 kg!

12. a) Wieviel Grad mißt der Winkel, der 1 %, 3 %, 8 %, 15 %, 25 %, 48 %, 63 %, 80 % des Vollwinkels beträgt? (Runde auf ganze Grade!)

b) Zeichne Kreisausschnitte als Schaubilder für 10 %, 28 %, 35 %, 50 %, 67 %!

Anleitung: $1\% \mathrel{\hat{=}} 3{,}6°$; $2\% \mathrel{\hat{=}} 2 \cdot 3{,}6° = 7{,}2° \approx 7°$.

13. Vom Reinertrag volkseigener Betriebe werden 10 % als Rücklage zur Verbesserung der Lebenslage der Arbeiter und Angestellten (Fürsorgekosten, Zuschüsse zu Werkskantinen u. a.), 5 % als Rücklage für Rationalisierung (zweckmäßige Gestaltung der Arbeit) und Erfindungswesen verwendet. Der Rest wird an die Vereinigungen volkseigener Betriebe überwiesen und dient dem weiteren Aufbau der deutschen Friedenswirtschaft.

Verteile nach obigen Angaben

a) 120 000,— DM	**b)** 296 000,— DM	**c)** 167 500,— DM
d) 159 280,— „	**e)** 232 678,— „	**f)** 174 321,50 „
g) 2 324 536,48 „	**h)** 549 396,40 „	**i)** 782 003,75 „ !

14. Man kann die Prozentwerte bei einem bestimmten Prozentsatz aus dem Grundwert nicht nur berechnen, sondern aus einer graphischen Darstellung ablesen.

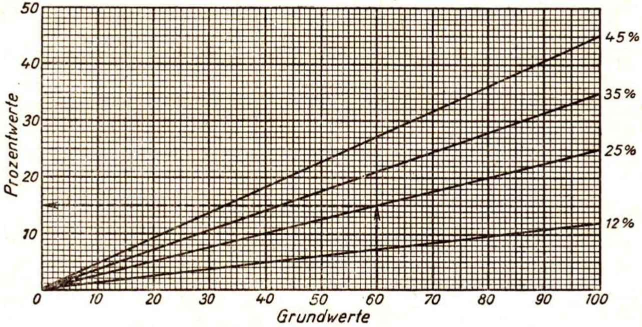


Abb. 1

In Abb. 1 sind die Grundwerte auf der waagerechten Achse angegeben. Zu dem Grundwert 60 gehört bei einem Prozentsatz von 25% der Prozentwert 15. Dieser Wert ist durch eine senkrecht stehende Strecke von 15 mm Länge veranschaulicht. Ebenso kann man bei demselben Prozentsatz zu dem Grundwert 40 den Prozentwert 10 durch eine Strecke von 10 mm veranschaulichen usw. Verbindet man die Endpunkte aller dieser Strecken miteinander, so erhält man eine gerade Linie, weil ein gleichmäßiges Anwachsen der Grundwerte auch gleichmäßiges Wachsen der Prozentwerte nach sich zieht. Die Richtung der Geraden ist durch den Prozentsatz bestimmt. Für die angegebenen Prozentsätze kann man aus der Abb. 1 zu jedem Grundwert den zugehörigen Prozentwert ablesen. Soll für 25% zu dem Grundwert 80 der zugehörige Prozentwert bestimmt werden, so geht man von dem Punkt 80 senkrecht nach oben bis zur Geraden von 25%, geht man von dort waagerecht nach links, so findet man auf der senkrechten Achse den Prozentwert 20.

a) Lies aus Abb. 1 die Prozentwerte für folgende Aufgaben ab:

12 % vom Grundwert 75	25 % vom Grundwert 80
45 % „ „ 40	35 % „ „ 90!

b) Bilde selbst ähnliche Aufgaben!

15. Die Herstellungskosten einer Maschine setzen sich zusammen aus Materialkosten, Fertigungslöhnen und allgemeinen Kosten der Fertigung (sog. Fertigungsgemeinkosten).

Für den Bau einer Werkzeugmaschine wurden aufgewendet:
Materialkosten 126 DM, Fertigungslöhne 234 DM,
Fertigungsgemeinkosten 115% der Fertigungslöhne.
Wie groß sind die Herstellungskosten?

16. In der Nordsächsischen Baumwollspinnerei betrug die monatliche Garnproduktion im September 145 t. Sie stieg bis Ende Dezember um 22%, bis Ende Juni des nächsten Jahres um 55,6% der ursprünglichen Produktion.
a) Wie groß waren die Erhöhungen?
b) Wie groß war die Produktion im Dezember und Juni gegenüber dem Vergleichsmonat?

17. Die Maschinenfabrik Wintershausen VEB[1]) fertigte im vergangenen Jahr 5300 Büromaschinen. Für das kommende Jahr wird die Produktionsauflage um 40% erhöht.
a) Wieviel Maschinen erzeugt der Betrieb im neuen Jahr?
b) Die betrieblichen Kosten betrugen im ersten Jahr 4 240 000,— DM. Wie groß würden sie im zweiten Jahre sein, wenn sie entsprechend der Produktionssteigerung auch um 40% steigen würden?
c) Wie groß war die Kostensenkung, wenn sie im zweiten Jahr nur mit 5 550 000,— DM eingeplant wurden?

18. In einem volkseigenen Betrieb der Metallindustrie entfielen von der Gesamtbelegschaft (1 200 Werktätige)

auf Fertigungsarbeiter	72%
„ Hilfsarbeiter	11%
„ Lehrlinge	7%
„ technisches und kaufmännisches Personal	9%
„ sonstiges Personal	1%

Wieviel Personen entfielen auf die einzelnen Gruppen?

19. Falzziegel verursachen 245% der Kosten gewöhnlicher Ziegelsteine. Gewöhnliche Ziegelsteine kosten je 1000 Stück 42,90 DM.
Wie groß sind die Kosten von 1000 Falzziegeln?

20. Beim Bau eines mehrstöckigen Wohnhauses verteilen sich die Kosten der Arbeiten
auf das „Bauhauptgewerbe", nämlich:
Erdarbeiten zu 3,4%, Maurerarbeiten zu 38,6%, Putzarbeiten zu 12,0%, Zimmererarbeiten zu 14,0%,

1) Abkürzung für „Volkseigener Betrieb".

und auf das „Baunebengewerbe“, nämlich:
Dachdeckerarbeiten zu 2,6 %, Klempnerarbeiten zu 1,3 %, Tischlerarbeiten zu 12,0 %, Schlosserarbeiten zu 2,6 %, Glaserarbeiten zu 0,5 %, Malerarbeiten zu 7,0 %, Ofenarbeiten zu 6,0 %.

a) Stelle diese Verhältnisse in einem Prozentkreis dar!

b) Lege den Teil des Kreises, der dem Bauhauptgewerbe entspricht, rot, den anderen blau an und bestimme in Prozenten den Gesamtanteil der Arbeiten des Bauhaupt- und des Baunebengewerbes!

21. Eine Mitarbeiterin der Deutschen Post sollte 1 600 Briefsendungen in der Stunde verteilen. Im Rahmen eines Wettbewerbs erhöhte sie die Leistung um 87,5 %. Auf wieviel Sendungen belief sich ihre Leistung?

22. Beim Aufbau der Volkswerft Stralsund erfüllte der Nationalpreisträger Paul Sack die Tagesnorm von 600 vermauerten Ziegelsteinen mit 417 %. Wieviel Ziegelsteine vermauerte er täglich?

23. Für das Ausbessern von Sicherungsanlagen der Eisenbahn war eine Arbeitszeit von 3 115 Minuten vorgesehen. Bei der Durchführung wurde durch ein Kollektiv von 3 Kollegen ein Zeitgewinn von 36 % erzielt. In wieviel Minuten wurde die Arbeit geschafft?

24. In der Grube Brückenberg erfüllten drei Aktivisten die Norm von 5 m³ mit 532 %, 475 % bzw. 520 %. Wieviel m³ schaffte jeder einzelne?

25. Ein Drucker steigerte seine Leistung von 650 Drucken je Stunde um 130 %. Wieviel Stück druckte er aus?

7. Berechnung des Prozentsatzes

In einem volkseigenen Betrieb betrugen die Selbstkosten für einen Pflug 350,— DM. Sie konnten um 28,— DM gesenkt werden. Wieviel % betrug diese Preissenkung?

$$350,\!- \text{ DM} \mathrel{\widehat{=}} 100\%$$
$$1,\!- \text{ „} \mathrel{\widehat{=}} \frac{100}{350}\%$$
$$28,\!- \text{ „} \mathrel{\widehat{=}} \frac{100 \cdot 28}{350} = 8\%$$

Die Kostensenkung betrug $\underline{\underline{8\%}}$

Die Berechnung des **Prozentsatzes** erfolgt durch einfache Schlußrechnung.

$$\boxed{p = \frac{100 \cdot P}{G}}$$

Aufgaben

Wieviel % sind

1. a)	15 DM	von	500 DM	**b)**	24 DM	von	200 DM
c)	48 ,,	,,	600 ,,	**d)**	25 ,,	,,	600 ,,
e)	39 kg	,,	400 kg	**f)**	50 hl	,,	700 hl
g)	32 l	,,	960 l	**h)**	42 dz	,,	2 800 dz
i)	3 m	,,	120 m	**k)**	38 t	,,	40 t

2. a)	34 m	von	1 700 m	**b)**	16,50 ha	von	660 ha
c)	5,20 dz	,,	65 dz	**d)**	76 l	,,	95 l
e)	150,8 kg	,,	3 480 kg	**f)**	7,92 km	,,	192 km
g)	0,55 m	,,	18,35 m	**h)**	15,6 g	,,	312 kg
i)	6 Pf	,,	1 DM	**k)**	72 cm	,,	3 m

3. a)	26 kg	von	360 kg	**b)**	49 ha	von	980 ha
c)	35 hl	,,	210 hl	**d)**	83 kg	,,	664 kg
e)	18 DM	,,	3 000 DM	**f)**	14 l	,,	450 l
g)	420 t	,,	650 t	**h)**	850 DM	,,	1 200 DM
i)	569 ha	,,	847 ha	**k)**	931 m	,,	1 640 m

4. a)	14 l	von	2 800 l	**b)**	23 kg	von	1 150 kg
c)	4,7 kg	,,	38 kg	**d)**	9,2 hl	,,	14 hl
e)	0,8 dz	,,	64 dz	**f)**	6,2 g	,,	8 g
g)	2,8 hl	,,	3,5 hl	**h)**	1,5 dz	,,	5 dz
i)	0,9 t	,,	4,1 t	**k)**	9,3 dz	,,	300 dz

5. a)	$5\frac{4}{5}$	von	145	**b)**	$5\frac{5}{8}$	von	90	**c)**	$1\frac{1}{2}$	von	126
d)	$6\frac{3}{4}$	,,	215	**e)**	$1\frac{2}{5}$	,,	70	**f)**	$2\frac{4}{9}$	,,	80

6. a)	58 DM	von	29 DM	**b)**	96 DM	von	32 DM
c)	42 ,,	,,	28 ,,	**d)**	1 000 l	,,	750 l
e)	20.000 dz	,,	9 200 dz	**f)**	65 Mill.	,,	58 Mill.

7. a)	6	von	15	**b)**	80	von	96	**c)**	576	von	450
	15	,,	6		96	,,	80		450	,,	576?

8. Bestimme den Prozentsatz!

	a)	b)	c)	d)
Grundwert	918,50 DM	816,25 m	7 766,45 ha	3,75 hl
Prozentwert	33,75 „	39,18 „	390,5 „	30 „

9. Lies aus Abb. 1 ab, wieviel Prozent **a)** 17,50 DM von 70 DM, **b)** 9,60 DM von 80 DM, **c)** 14 DM von 40 DM, **d)** 40,50 DM von 90 DM betragen!

10. Ein Kreisausschnitt hat den Mittelpunktswinkel 30°, 45°, 60°, 90°, 270°, 36°, 108°, 144°, 200°, 305°. Wieviel Prozent der Kreisfläche stellt jeder Kreisausschnitt dar?

11. Eine volkseigene Maschinenfabrik hat laut Plan im Jahr 1350 Maschinen herzustellen. Im ersten Quartal hat sie bereits 432 Stück fertiggestellt. Wieviel % des Jahressolls betrug diese Produktion?

12. In einem Leipziger volkseigenen Betrieb verdiente ein Montagearbeiter im Zeitlohn 1,52 DM je Stunde. Nach Einführung des Leistungslohnes (Stücklohnes) erhöhte sich sein Lohn auf 2,56 DM. Wieviel Prozent betrug die Erhöhung?

13. Nach einem Leistungswettbewerb von 23 volkseigenen Betrieben in Brandenburg wurde der Produktionswert je Kopf und Tag durchschnittlich von 22,87 DM auf 25,64 DM gesteigert. Wieviel % betrug die Zunahme?

14. Ein Arbeiter in einem mecklenburgischen Torfstich sticht 1 000 Soden (Soden heißt Torfstück) in 3 Stunden. Er steigert seine Leistung durch geschickte Vorbereitung und schafft die Arbeit künftig in 2 Stunden 18 Minuten. Wieviel % beträgt die Zeiteinsparung?

15. Die Produktion von Elektromotoren wurde in einem volkseigenen Betrieb in Neustadt von 6 300 Stück im Jahre 1948 auf 14 000 Stück im Jahre 1950 gebracht. Wieviel % betrug die Zunahme?

16. In der UdSSR sieht der Wirtschaftsplan für 1950 eine Bereitstellung von 158 000 t Wolle durch die Kollektivwirtschaften vor, 1951 eine solche von 188 000 t. Wieviel % beträgt die Zunahme?

17. Die Kollektivwirtschaften der UdSSR sollen ihre Milchbereitstellung von 8 900 000 t des Jahres 1950 im Jahre 1951 auf 10 000 000 t erhöhen, die der Eier von 3 Milliarden Stück auf 4,2 Milliarden Stück. Wieviel % beträgt die Steigerung?

18. Bei der Volkszählung am 29. Oktober 1946 waren in der Deutschen Demokratischen Republik, der damaligen sowjetischen Besatzungszone, von 2,33 Millionen Beschäftigten in der Land- und Forstwirtschaft 1,31 Millionen Frauen, von 3,20 Millionen Beschäftigten in Industrie und Handwerk waren 1,09 Millionen Frauen. Berechne die prozentualen Anteile der Frauen!

19. Durch sinnvolle Einteilung der Arbeitsgänge erreichte ein Zimmerpolier, daß zum Abbinden eines Hauses statt 32 nur 15 Arbeiter benötigt wurden. Wieviel % der Arbeitskräfte waren jetzt nur noch nötig?

20. In einem Kaliwerk beteiligten sich von 1 380 Beschäftigten 550 Arbeiter und Techniker an einem Wettbewerb. Als Ergebnis des Wettbewerbs ergab sich:
Produktionssteigerung an Kalidüngesalz von 91,9 t auf 100,5 t,
Produktionssteigerung an Steinsalz von 429,3 t auf 724,6 t.
a) Wieviel % der Belegschaft beteiligten sich am Wettbewerb?
b) Wieviel % betrug die Produktionssteigerung an Kalidüngesalz?
c) Um wieviel % hat die Erzeugung von Steinsalz zugenommen?

21. Der Aktivist eines Metallgußwerkes entwickelte einen Dreistufenofen, in dem drei Tiegel übereinander angebracht und durch dieselbe Feuerung geheizt werden können. Dadurch bewirkte er, daß nur noch 25 m³ statt 87 m³ Gas und 25 kg statt 68 kg Koks für 100 kg Schmelzguß verbraucht wurden.
a) Wieviel % betrug die Einsparung an Gas?
b) Um wieviel % minderte sich der Verbrauch an Koks?

22. Eine Strumpffabrik erfüllte ihren Jahresplan bereits am 7. November. Wieviel % Zeitersparnis bedeutet diese Übererfüllung? (Rechne das Jahr zu 360 Tg. Eingesparte Zeit: 53 Tg.)

23. Für das Ausmauern von Kochern für die Zellstoffherstellung in einer Papierfabrik wurden von einem Arbeitskollektiv folgende Zeiten benötigt: Kocher 1 braucht 13 Tage statt $20\frac{2}{3}$ Tage, Kocher 2 braucht 4 Tage statt 7 Tage. Um wieviel % wurde bei jedem der Kocher die geplante Zeit verkürzt?

24. Die Landarbeiterin eines volkseigenen Gutes hatte beim Binden von Getreidegarben eine tägliche Norm von 0,45 ha zu erfüllen. Tatsächlich erreichte sie eine Leistung von 0,65 ha. Wieviel % der Norm betrug ihre Leistung?

25. In der Grube Deutschland erfüllten drei Aktivisten die Norm von 4,8 m³ mit 23,7 m³, 22,5 m³ bzw. 21 m³. Wieviel % der Norm erreichte jeder Aktivist?

26. Von drei zur Erholung aufs Land verschickten Kindern hatte das erste vor seiner Abreise 34 kg gewogen, bei seiner Rückkehr betrug die Gewichtszunahme 1,53 kg. Das zweite Kind wog 39,6 kg und nahm 3,3 kg zu, das dritte wog 41,6 kg und nahm 2,6 kg zu. Wieviel % betrug jedesmal die Gewichtszunahme?

8. Berechnung des Grundwertes

In einem volkseigenen Betrieb wurden die Selbstkosten um 8 % vermindert. Dadurch ergab sich für die Selbstkosten eines Pfluges eine Senkung von 28,— DM. Wie hoch waren die Selbstkosten ursprünglich?

$$8\,\% \mathrel{\widehat{=}} 28,\text{— DM}$$
$$1\,\% \mathrel{\widehat{=}} 3,50 \text{ ,,}$$
$$100\,\% \mathrel{\widehat{=}} 350,\text{— ,,}$$

Die Selbstkosten betrugen ursprünglich 350,— DM.
Die Berechnung des G r u n d w e r t e s erfolgt durch einfache Schlußrechnung.

$$\boxed{G = \frac{100 \cdot P}{p}}$$

Aufgaben

1. Von welcher Zahl sind **a)** 1 %, **b)** 3 %, **c)** 5 %, **d)** 9 % gleich 9,12; 123; 14,5; 7,38; 0,03?

2. Berechne den Grundwert!

a) 36 DM ≙ 2 %	**b)** 21 hl ≙ 4 %	**c)** 22 DM ≙ 5 %
d) 35 dz ≙ 10 %	**e)** 43 kg ≙ 20 %	**f)** 37 km ≙ 25 %
g) 35 m³ ≙ 40 %	**h)** 47 t ≙ 50 %	**i)** 65 m² ≙ 60 %
k) 48 km² ≙ 75 %	**l)** 75 a ≙ 80 %	**m)** 55 ha ≙ 90 %

3.

a) 20 hl ≙ $3\frac{1}{3}$ %	**b)** 48 m ≙ $6\frac{1}{4}$ %	**c)** 72 DM ≙ $8\frac{1}{2}$ %
d) 54 km ≙ $11\frac{1}{9}$ %	**e)** 88 kg ≙ $12\frac{1}{2}$ %	**f)** 80 m³ ≙ $16\frac{2}{3}$ %
g) 75 t ≙ $66\frac{2}{3}$ %	**h)** 90 km² ≙ 150 %	**i)** 270 DM ≙ 225 %

4. 60 DM ≙ **a)** 8 %, **b)** 15 %, **c)** 25 %, **d)** 40 %, **e)** $33\frac{1}{3}$ %, **f)** 72 %, **g)** 120 %, **h)** 125 %, **i)** 150 %, **k)** 200 %, **l)** 300 %, **m)** 500 %

5. Berechne den Grundwert!

Prozentsatz	Prozentwert	Prozentsatz	Prozentwert
a) $2\frac{2}{3}$ %	850 kg	f) 75 %	0,6 dz
b) $7\frac{1}{2}$ %	$37\frac{1}{2}$ kg	g) $87\frac{1}{2}$ %	630 l
c) $6\frac{2}{3}$ %	15,216 m²	h) 8 %	73,08 hl
d) $1\frac{1}{4}$ %	5 312 t	i) 6,6 %	24,42 m
e) $5\frac{1}{2}$ %	434,50 ha	k) 50 %	9 076,50 km

6. Von welchem Grundwert betragen

a) 15 % 846 DM
b) 30 % 685,74 m
c) $37\frac{1}{2}$ % 468,015 kg
d) 22 % 790,35 DM
e) $3\frac{1}{2}$ % 246,32 hl
f) $4\frac{3}{4}$ % 706,8 t?

7. Zeichne auf Millimeterpapier ein Schaubild nach dem Muster von Abb. 1 für 30 % und gib an, wie man zu dem gegebenen Prozentsatz den Grundwert findet! Lies den Grundwert zu den Prozentwerten 6 DM, 21 DM, 16,50 DM, 7,80 DM, 28,50 DM aus der Zeichnung ab!

8. Der Haushaltplan für die Länder der Deutschen Demokratischen Republik hatte für 1949 als Ausgaben für Volksbildung 907,8 Mill. DM vorgesehen; das waren 8,4 % der gesamten Ausgaben. Wie groß waren diese?

9. Ein Steuerpflichtiger der Steuerklasse 3 zahlt im Monat 21 DM Lohnsteuer. Das sind 6 % seines Einkommens. Wieviel DM beträgt sein Monatseinkommen?

10. Die Umlaufzeit der Eisenbahnwaggons in den Ländern der Deutschen Demokratischen Republik konnte gegenüber der Norm um $\frac{1}{4}$ Tag verkürzt werden. Das bedeutet eine Einsparung von rund 5,6 %. Wie groß war die Norm? (Auf 2 Stellen genau rechnen!)

11. Das Arbeitskollektiv eines Dachziegelwerkes steigerte seine Leistung um 37,5 % und übererfüllte damit die Wochennorm um 18000 Dachziegel. Wie groß war die Wochennorm?

12. Eine volkseigene Tuchweberei in Cottbus steigerte ihre monatliche Durchschnittsleistung um 2 400 m, das waren 54 % der ursprünglichen Produktion. Wieviel betrug diese?

13. Der Maschinenfabrik Neuenwalde VEB wurden für Betriebserweiterungen von der Vereinigung am 1. Januar 192 000 DM zugeführt. Das waren 16% des ursprünglich zugewiesenen Kapitals. Wie groß war dieses?

14. In Leipzig sind 34 000 Arbeiter in der Metallindustrie beschäftigt. Das sind 42% aller Industriearbeiter in Leipzig. Wie groß ist deren Zahl?

9. Vermehrter und verminderter Wert

Vermehrter Wert

Ein Arbeiter erhielt ursprünglich einen Wochenlohn von 48,— DM. Seine Leistungssteigerung führte zu einer Lohnerhöhung um 12%. Wieviel DM betrug sein neuer Wochenlohn?

Wenn der Grundwert um den Prozentwert vermehrt wird, so sprechen wir von vermehrtem Wert. Dem vermehrten Wert entsprechen also

$$100\% + p\%$$

Ursprünglicher Lohn		Lohnsteigerung		Neuer Lohn
48,— DM	+	5,76 DM	=	53,76 DM
100%	+	12%	=	112%

Um den Grundwert aus dem vermehrten Wert zu bestimmen, stellt man zunächst fest, welcher Prozentsatz diesem Wert entspricht und schließt dann über 1% auf 100%.

Beispiel: Nach einem Zuschlag von 8% zu seinem Grundlohn erhielt ein Arbeiter 55,08 DM. Berechne den Grundlohn (Grundwert)!

Der Gesamtlohn bildet den vermehrten Wert.

$$100\% \quad + \quad 8\% \quad = \quad 108\%$$

Prozentsatz	Prozentwert
108%	55,08 DM
1%	$\frac{55{,}08\ \text{DM}}{108} = 0{,}51$ DM
100%	$\underline{\underline{51,\text{— DM}}}$

Aufgaben

1. Vermehrt man eine Zahl um	14%	27%	42%	65%	87%,
so erhält man	912	$571\frac{1}{2}$	4 586,6	280,5	27,86.

2. Die Zahl 720 ist **a)** um 20%, **b)** um 80% größer als die gesuchte Zahl.

3. Durch Kalidüngungen erhöhte sich die Kartoffelernte eines Bauern um 13,4% und betrug 228,4 dz je ha. Wie hoch war sie auf ungedüngtem Felde?

4. Ein Metallarbeiter montierte in 1 Stunde 27 Metallkästen und erreichte damit 180% der Norm. Wie groß war diese?

5. In einer Ofenanlage des Stahlwerks Riesa wurde an einem Tage eine Stundenleistung von 6,2 t erreicht. Das waren 124,7% der Norm. Wie groß war diese?

6. Die Aktivistin eines Zwickauer Textilbetriebes vollbrachte auf drei mechanischen Webstühlen eine Leistung von 148 000 Schuß (Querfäden) und übererfüllte damit ihre Norm um 111%.

a) Wie groß war die Norm?

b) Wieviel % der Norm betrug die Gesamtleistung?

7. Beim Stanzen von Lötösen (Blechösen — zum Anlöten von Kabelenden) erzielte ein Arbeiter eine Stundenleistung von 2 376 Stück und übererfüllte dadurch die Norm um 69%. Wie groß war die Norm?

8. Drei Aktivisten eines Druckereibetriebes setzten in einer Schicht 13,6 Tabellen und übererfüllten damit die Norm um 98%. Wie groß war sie?

Verminderter Wert

Die Produktionskosten in einer Brikettfabrik betrugen ursprünglich 5,50 DM je t. Durch Leistungssteigerung konnten sie um 4% gesenkt werden. Wie hoch waren sie nunmehr?

Wenn der Grundwert um den Prozentwert vermindert wird, so sprechen wir von vermindertem Wert. Dem verminderten Wert entsprechen also

$$100\% - p\%$$

Ursprüngliche Produktionskosten		Kostensenkung		Gegenwärtige Produktionskosten
5,50 DM	—	–,22 DM	=	5,28 DM
100 %	—	4 %	=	96 %

Um den Grundwert aus dem verminderten Wert zu bestimmen, stellt man zunächst fest, welcher Prozentsatz diesem Wert entspricht, und schließt dann über 1 % auf 100 %.

Beispiel: Die Produktionskosten eines Maschinenteils wurden um 15 % gesenkt. Sie betragen jetzt 39,10 DM. Berechne die ursprünglichen Produktionskosten!

$$100\,\% \quad - \quad 15\,\% \quad = \quad 85\,\%$$

Prozentsatz	Prozentwert
85 %	39,10 DM
1 %	$\frac{39,10}{85}$ DM = 0,46 DM
100 %	46 DM

Aufgaben

1. Die Zahl 720 ist **a)** um 36 %, **b)** um 55 % kleiner als die gesuchte Zahl.

2. Eine Zahl wird um 3 %, 10 %, 24 %, $33\frac{1}{3}$ %, $56\frac{1}{4}$ % vermindert. Wieviel Prozent bedeutet der neue Wert?

3. Die Kosten eines Arbeitsganges sanken trotz erhöhter Lohnanteile um 28 % und betrugen nur noch 61 DM. Wie hoch waren sie vorher?

4. Bei der Produktion von Rechenmaschinen wurde nach Einführung des Leistungslohnes die benötigte Arbeitszeit für das Zusammensetzen der Einzelteile um 37,5 % gesenkt und betrug nur noch 15 Stunden. Wieviel Stunden wurden früher für die Arbeit gebraucht?

5. Die Kosten für die Montage einer Treibriemenanlage sanken um 24 % und betrugen nur noch 57 DM. Wie hoch waren sie vorher?

6. Die Produktionskosten für eine Werkzeugmaschine betrugen nach 9%iger Senkung 637 DM. Wie hoch waren sie früher?

7. Durch einen Wettbewerb wurden die Verwaltungskosten eines Kunststoffbetriebes auf 27 620 DM gesenkt und betrugen nunmehr nur noch 91,6% der ursprünglichen Aufwendungen. Wie groß waren diese?

8. In einer Metallwarenfabrik erfand ein Aktivist eine Neukonstruktion und erreichte dadurch, daß die Materialkosten eines Jahres auf 32 300 DM gesenkt wurden. Das bedeutete eine Einsparung von 32% der ursprünglichen Aufwendungen. Wie groß waren diese?

9. Durch Konstruktion einer Biegevorrichtung für Uhrenbügel erreichte ein Feinmechaniker eine Arbeitszeiteinsparung um 26% und brauchte nunmehr noch 112,3 Min. Wieviel Arbeitszeit war ursprünglich vorgesehen?

10. Die Reparaturzeit einer Lokomotive wurde durch ein Arbeitsaktiv auf 12 Tage gesenkt, während die Norm 17 Tage vorschrieb. Wieviel % Zeitersparnis bedeutete das?

10. Promillerechnung / Versicherungen

Ein Bergarbeiter will bei der Versicherungsanstalt des Landes Sachsen eine Lebensversicherung über 5 000 DM abschließen. Die Versicherungsanstalt verlangt für je 1 000 DM Versicherungssumme einen jährlichen Beitrag von 32 DM. Wieviel DM sind als Beitrag für die Versicherungssumme von 5 000 DM zu zahlen? Als Bezugszahl dient in diesem Fall die Zahl 1 000. Für 32 von Tausend sagt man auch **32 Promille**[1]) und schreibt 32‰.

$$\textbf{Grundwert} \mathrel{\widehat{=}} 1\,000\text{‰};$$
$$1\text{‰} \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{1\,000} \text{ des Grundwertes}$$

Beispiel: Wieviel DM sind 3‰ von 6 000 DM?

$$\begin{aligned} 1\,000\text{‰} &\mathrel{\widehat{=}} 6\,000 \text{ DM} \\ 1\text{‰} &\mathrel{\widehat{=}} 6 \text{ DM} \\ 3\text{‰} &\mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{18 \text{ DM}}} \end{aligned}$$

1) pro mille (lat.): für (von) Tausend.

Aufgaben

1. Berechne 1 ‰ von

a) 6 000 DM	**b)** 700 DM	**c)** 350 DM
8 000 „	600 „	680 „
12 000 „	900 „	870 „ !

2. Wieviel DM sind

a) 3 ‰ von 7 200 DM	**b)** 4 ‰ von 8 900 DM
c) 2 ‰ „ 12 800 „	**d)** 5 ‰ „ 6 400 „
e) 6 ‰ „ 24 700 „	**f)** 7 ‰ „ 9 300 „
g) 4 ‰ „ 46 500 „	**h)** 2 ‰ „ 7 200 „ ?

3. Berechne

a) $3\frac{1}{4}$ ‰ von 120 DM	**b)** $1\frac{1}{2}$ ‰ von 480 DM
c) $6\frac{1}{2}$ ‰ „ 220 „	**d)** $8\frac{1}{3}$ ‰ „ 990 „
e) $2\frac{1}{4}$ ‰ „ 760 „	**f)** $3\frac{1}{5}$ ‰ „ 840 „
g) $4\frac{3}{4}$ ‰ „ 480 „	**h)** $5\frac{1}{4}$ ‰ „ 960 „ !

4. Wieviel ‰ sind

a) 7 DM von 3 500 DM	**b)** 34 DM von 8 000 DM
c) 36 „ „ 4 500 „	**d)** 81 „ „ 13 500 „
e) 48 „ „ 2 400 „	**f)** 18 „ „ 37 800 „
g) 27 „ „ 1 800 „	**h)** 32 „ „ 17 600 „ ?

5.

a) 6 ‰ ≙ 36,— DM	**b)** 9 ‰ ≙ 45,— DM
c) 3 ‰ ≙ 12,— „	**d)** 4 ‰ ≙ 26,— „
e) 5 ‰ ≙ 18,— „	**f)** 6 ‰ ≙ 39,— „
g) 8 ‰ ≙ 26,40 DM	**h)** 5 ‰ ≙ 22,50 DM

Berechne den Grundwert!

6. Nach dem Beitragstarif der Versicherungsanstalt des Landes Sachsen waren früher für Hausratversicherungen (gegen Feuer) zu zahlen:

bei Bauartklasse 1 $\frac{1}{2}$ ‰ bei Bauartklasse 3 $1\frac{1}{2}$ ‰
bei Bauartklasse 2 $\frac{3}{4}$ ‰

Neuerdings wird die Hausratversicherung gegen Feuer verbunden mit einer solchen gegen Einbruch, Diebstahl und Leitungswasserschäden. Die Beiträge sind wie folgt festgesetzt:

bei Bauartklasse 1 $\frac{3}{4}$ ‰ bei Bauartklasse 3 2 ‰
bei Bauartklasse 2 1 ‰

Zu Bauartklasse 1 gehören massive Gebäude aus Stein bzw. Beton, zu Bauartklasse 2 Fachwerkbauten und zu Bauartklasse 3 Lehm- oder Holzbauten.

a) Welche Beiträge waren in den verschiedenen Bauartklassen für eine Hausratversicherung gegen Feuer im Werte von 4 000,— DM, 7 000,— DM, 12 000,— DM zu leisten? Mindestbeitrag 3,— DM.

b) Wie hoch sind die Beiträge bei der verbundenen Hausratversicherung?

7. Wie hoch sind die Beiträge für eine verbundene Hausratversicherung in den einzelnen Bauartklassen bei einer Versicherungssumme von 9 000 DM, 10 000 DM, 12 000 DM, 13 000 DM, 17 000 DM?

8. Ein Neubauer besitzt ein Wohnhaus im Werte von 8 000 DM und eine Scheune im Werte von 3 000 DM. Der Tarifsatz für die Feuerversicherung beträgt für das Wohnhaus 1,2 ‰, für die Scheune 2,3 ‰.
Wieviel hat der Neubauer insgesamt als Beitrag zu zahlen?

9. Ein Bauer hat als Feuerversicherungsprämie für sein Wohnhaus im Werte von 12 000 DM einen Beitrag von $1\frac{1}{4}$ ‰, für seine Scheune im Werte von 2 000 DM $2\frac{1}{2}$ ‰ zu zahlen.

a) Berechne die einzelnen Beiträge!

b) Wie groß ist der Gesamtbeitrag?

c) Welcher durchschnittliche Promillesatz ergibt sich?

10. Die Transportversicherung für eine Sendung Spirituosen im Werte von 2 600 DM beträgt bei einer Entfernung von je 150 km $1\frac{1}{2}$ ‰.

a) Welcher Beitrag ist zu zahlen für den Transport von Brandenburg nach Berlin,

b) von Rostock nach Leipzig?

III. Zinsrechnung

11. Berechnung der Jahreszinsen

Zinsen für ein Jahr

Der Angestellte Karl Sachse hat eine Leistungsprämie von 600 DM erhalten. Er zahlt diesen Betrag bei der Stadtsparkasse ein, die ihn für volkswirtschaftlich wichtige Zwecke weiterverleiht. Sie kann ihm deshalb jährlich **$3\frac{1}{2}$% Zinsen** zahlen, wenn er mit halbjährlicher Kündigungsfrist einverstanden ist (sonst 3%).

Die Ermittlung der Jahreszinsen ist eine Prozentrechenaufgabe. Wir bezeichnen dabei den Grundwert (600 DM) als Kapital, den Prozentsatz ($3\frac{1}{2}$%) als Zinsfuß, den Prozentwert als Zinsen.

Beispiele:

1. Berechne die Jahreszinsen von 5 000 DM zu 3%!

$$\begin{aligned} 100\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 5\,000 \text{ DM} \\ 1\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 50 \text{ DM} \\ 3\,\% &\mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{150 \text{ DM}}} \end{aligned}$$

2. Berechne die Jahreszinsen von 8 000 DM zu $3\frac{1}{2}$%!

$$\begin{aligned} 100\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 8\,000 \text{ DM} \\ 1\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 80 \text{ DM} \\ \tfrac{1}{2}\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 40 \text{ DM} \\ 3\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 240 \text{ ,,} \quad + \\ \hline 3\tfrac{1}{2}\,\% &\mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{280 \text{ DM}}} \end{aligned}$$

3. Es sollen die Jahreszinsen z für das Kapital k zu p% berechnet werden.

$$\begin{aligned} 100\,\% &\mathrel{\widehat{=}} k \text{ DM} \\ 1\,\% &\mathrel{\widehat{=}} \frac{k}{100} \text{ DM} \\ p\,\% &\mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{\frac{k \cdot p}{100} \text{ DM}}} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Zinsformel für Berechnung der Zinsen für ein Jahr:

$$\boxed{z = \frac{k \cdot p}{100}}$$

Aufgaben

1. Berechne die Jahreszinsen zu
a) 2 %, **b)** 3 %, **c)** 4 %, **d)** 5 %, **e)** $2\frac{1}{2}$ %, **f)** $5\frac{1}{2}$ %, **g)** 6 %, **h)** $3\frac{1}{2}$ %,
i) $3\frac{1}{3}$ %, **k)** $4\frac{1}{4}$ %, **l)** $1\frac{3}{4}$ %, **m)** $2\frac{1}{4}$ %, **n)** $2\frac{3}{4}$ %, **o)** $3\frac{1}{4}$ %, **p)** $3\frac{3}{4}$ %
von folgenden Beträgen:

300,–	500,–	800,–	1 200,–	1 600,–	1 900,– DM
640,–	780,–	960,–	1 170,–	1 790,–	1 930,– ,,
962,–	834,–	661,–	1 249,–	1 132,–	2 194,– ,, !

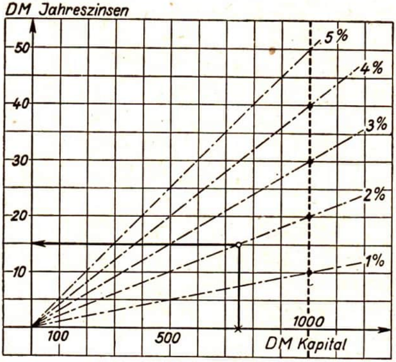


Abb. 2

2. Erkläre, wie man nach Abb. 2 Zinsaufgaben lösen kann! Vgl. S. 22, Aufgabe 14a! Das Beispiel zeigt: 750 DM bringen in 1 Jahr bei einem Zinsfuß von 2 % 15 DM Zinsen.
a) Übertrage die Zeichnung auf Millimeterpapier und verlängere dabei die Achsen für Kapital und Zinsen so weit, daß man die Lösungen der Aufgaben 1 a bis d an der Zeichnung ablesen kann!
b) Überlege, durch welchen Punkt der dicken Strichlinie die „Zinsgerade" für $2\frac{1}{2}$ % gehen muß. Zeichne entsprechend die Geraden für $3\frac{1}{3}$ % und $4\frac{1}{4}$ % und löse die Aufgaben 1 e, i und k durch Zeichnung!

3. Das Land Sachsen nahm 1945 eine 4 %ige Aufbauanleihe auf. Es wurden Anleihestücke zu folgenden Beträgen ausgegeben:
100 DM, 200 DM, 500 DM, 1 000 DM, 5 000 DM und 10 000 DM.
Berechne die Jahreszinsen der einzelnen Anleihestücke!

Zinsen für mehrere Jahre

Wenn die Zinsen für mehrere Jahre zu berechnen sind, dann müssen die Jahreszinsen mit der Anzahl der Jahre multipliziert werden.

Bezeichnen wir die Anzahl der Jahre mit n, so ergibt sich die Formel für Jahreszinsen:

$$\boxed{z = \frac{k \cdot p \cdot n}{100}}$$

4. Berechne die Zinsen von

1 940,–	DM	zu	3 %	in	4	Jahren	
/1 670,–	,,	,,	$3\frac{1}{2}$ %	,,	5	,,	
/780,–	,,	,,	4 %	,,	2	,,	
/2 165,–	,,	,,	5 %	,,	$1\frac{1}{2}$	,,	
/3 486,–	,,	,,	$3\frac{1}{3}$ %	,,	$2\frac{1}{2}$	,,	!

12. Berechnung der Monatszinsen / Von der Sparkasse

Beispiel: Die Feinmechanikerin Lotte Schneider brachte 20 DM zur Sparkasse. Sie erhielt von ihr ein Sparkassenbuch, in das die Einzahlungen und Abhebungen eingetragen werden. Am Schluß des Jahres werden auch die Zinsen zugeschrieben. Wie groß waren die Zinsen für die eingezahlten 20 DM in 7 Monaten bei einem Zinsfuß von $3\frac{1}{2}$ %?

1. Darstellung der Lösung:

Wir berechnen zunächst die Zinsen auf 1 Jahr.

$$\begin{array}{rcl}
100\ \% & \triangleq & 20{,}00 \text{ DM} \\
1\ \% & \triangleq & 0{,}20 \text{ DM} \\
\frac{1}{2}\ \% & \triangleq & 0{,}10 \text{ DM} \\
3\ \% & \triangleq & 0{,}60\ ,, \quad + \\
\hline
3\frac{1}{2}\ \% & \triangleq & 0{,}70 \text{ DM}
\end{array}$$

Die Jahreszinsen betragen also 0,70 DM. Hieraus schließen wir auf die Monatszinsen bzw. auf die Zinsen für 7 Monate:

$$\begin{array}{lll}
\text{Für 12 Monate} & 0{,}70 \text{ DM} & \\
,,\ \ 1 \text{ Monat} & \frac{0{,}70}{12} \text{ DM} & \\
,,\ \ 7 \text{ Monate} & \frac{0{,}70 \cdot 7}{12} \text{ DM} & \approx 0{,}41 \text{ DM}
\end{array}$$

Die Zinsen für 7 Monate betragen $\underline{\underline{0{,}41 \text{ DM}}}$

2. Darstellung der Lösung:

%	DM	Monate
100	20	
$3\frac{1}{2}$	0,70	12
	$\approx \underline{\underline{0,41}}$	7

Bezeichnen wir bei der Berechnung von Monatszinsen die Anzahl der Monate mit m, so ergibt sich folgende Formel:

$$\boxed{z = \frac{k \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}}$$

Aufgaben

1. Drücke 6 Mon., 2 Mon., 3 Mon., 9 Mon., 4 Mon., 5 Mon., 7 Mon., 8 Mon., 11 Mon., $\frac{1}{2}$ Mon., $2\frac{1}{2}$ Mon., $4\frac{1}{2}$ Mon., $6\frac{1}{2}$ Mon., $8\frac{1}{2}$ Mon. als Bruchteile des Jahres aus!

Wieviel Zinsen bringen

2. a) 300 DM zu 4 % in 2 Mon. **b)** 900 DM zu 2 % in 3 Mon.
c) 400 ,, ,, 5 % ,, 5 ,, **d)** 500 ,, ,, 3 % ,, 4 ,,
e) 600 ,, ,, 3 % ,, 3 ,, **f)** 800 ,, ,, $3\frac{1}{2}$ % ,, 5 ,,
g) 1 200 ,, ,, 2 % ,, 2 ,, **h)** 2 500 ,, ,, 4 % ,, 6 ,,
i) 4 300 ,, ,, 3 % ,, 3 ,, **k)** 8 350 ,, ,, $\frac{1}{2}$ % ,, 2 ,,

3. a) 400 DM zu $3\frac{1}{2}$ % in 2 Mon. **b)** 600 DM zu $3\frac{1}{2}$ % in 5 Mon.
c) 875 ,, ,, 4 % ,, 5 ,, **d)** 840 ,, ,, $4\frac{3}{4}$ % ,, 3 ,,
e) 930 ,, ,, $4\frac{1}{4}$ % ,, 6 ,, **f)** 4 600 ,, ,, 3 % ,, 4 ,,
g) 3 560 ,, ,, $2\frac{1}{2}$ % ,, 7 ,, **h)** 8 920 ,, ,, $3\frac{1}{2}$ % ,, 3 ,,
i) 2 840 ,, ,, $2\frac{1}{2}$ % ,, 2 ,, **k)** 6 300 ,, ,, $2\frac{4}{5}$ % ,, 6 ,,

4. Berechne die Zinsen, die eine Sparkasse bei $3\frac{1}{2}$ %iger Verzinsung für

a) 600 DM in 1 Mon. **b)** 400 DM in 3 Mon.
c) 800 ,, ,, 2 ,, **d)** 900 ,, ,, 2 ,,
e) 1 200 ,, ,, 10 ,, **f)** 450 ,, ,, 6 ,,
g) 300 ,, ,, 7 ,, **h)** 840 ,, ,, 2 ,,
i) 720 ,, ,, 5 ,, **k)** 610 ,, ,, 2 ,, zahlt!

5. Wieviel Zinsen bringen

a) 600 DM zu 5 % in 6 Mon.	**b)** 400 DM zu 4 % in 2 Mon.
c) 800 ,, ,, 3 % ,, 3 ,,	**d)** 200 ,, ,, $3\frac{1}{2}$ % ,, 7 ,,
e) 2 500 ,, ,, 2 % ,, 9 ,,	**f)** 340 ,, ,, 5 % ,, 5 ,,
g) 3 100 ,, ,, $4\frac{1}{2}$ % ,, 2 ,,	**h)** 400 ,, ,, $2\frac{1}{2}$ % ,, 11 ,,
i) 675 ,, ,, 3 % ,, 1 ,,	**k)** 960 ,, ,, $3\frac{1}{3}$ % ,, 4 ,, ?

6. Berechne die Zinsen von

a) 4 800 DM zu $3\frac{3}{4}$ % in 6 Mon.	**b)** 9 600,— DM zu 4 % in 3 Mon.
c) 1 250 ,, ,, $3\frac{2}{5}$ % ,, 10 ,,	**d)** 360,— ,, ,, $2\frac{3}{4}$ % ,, 7 ,,
e) 96 ,, ,, $4\frac{1}{2}$ % ,, 2 ,,	**f)** 460,75 ,, ,, $4\frac{1}{4}$ % ,, 6 ,,
g) 6 210 ,, ,, 5 % ,, 9 ,,	**h)** 310,35 ,, ,, $2\frac{3}{4}$ % ,, 2 ,,
i) 75 ,, ,, $4\frac{1}{2}$ % ,, 4 ,,	**k)** 78 350,— ,, ,, $1\frac{4}{5}$ % ,, 6 ,, !

7. Auf wieviel DM wachsen an

a) 400 DM zu 4 % in 9 Mon.	**b)** 900 DM zu 5 % in 2 Mon.
c) 400 ,, ,, $3\frac{3}{4}$ % ,, 3 ,,	**d)** 72 ,, ,, $3\frac{1}{3}$ % ,, 3 ,,
e) 620 ,, ,, 5 % ,, 4 ,,	**f)** 25 ,, ,, 3 % ,, 12 ,,
g) 3 200 ,, ,, $3\frac{1}{5}$ % ,, 1 ,,	**h)** 8 700 ,, ,, $2\frac{2}{3}$ % ,, 6 ,,
i) 640 ,, ,, 4 % ,, 90 Tg.	**k)** 520 ,, ,, 2 % ,, 1 ,, ?

8. Der Angestellte Karl Sachse zahlt eine Leistungsprämie von 600 DM bei der Stadtsparkasse ein und erhält $3\frac{1}{2}$ % Zinsen. Berechne die Zinsen für 5 Monate!

9. Die Landwirtschaftliche Kreditgenossenschaft in Lichtenberg gewährt dem Neubauern Hermann Seifert einen Kredit von 2 800 DM für 18 Monate zu einem Zinsfuß von $4\frac{1}{2}$ %.

a) Wie hoch sind die Zinsen?

b) Welche Zinsermäßigung tritt ein, wenn der Zinsfuß nach 7 Monaten um $\frac{1}{4}$ % gesenkt wird?

10. Ein Arbeiter hat 600 DM auf der Sparkasse. Wieviel Zinsen erhält er jährlich mehr, wenn er statt der vorgeschriebenen Kündigung eine Kündigungsfrist von 6 Monaten vereinbart, wodurch sich der Zinsfuß von $3\frac{1}{2}$ % auf $3\frac{3}{4}$ % erhöht?

13. Einführung in die Berechnung der Tageszinsen

Bei Berechnung der Tageszinsen werden das Jahr zu 360 und der Monat zu 30 Tagen gerechnet.

Die Tageszinsen betragen $\frac{1}{360}$ der Jahreszinsen. Wir können also zunächst die Jahreszinsen berechnen und dann auf die Tageszinsen schließen.

Beispiel: Der Schlosser Karl Reschke zahlt am 14. November 50 DM bei der Sparkasse ein, die den Betrag vom 15. November an zu $3\frac{1}{2}$ % verzinst. Welcher Zinsbetrag wird ihm am Ende des Jahres dafür gutgeschrieben? Es sind die Zinsen für 45 Tage zu berechnen. Man bestimmt zunächst die Jahreszinsen, das ist die Vergütung für 360 Tage, und berechnet daraus die Zinsen für 45 Tage.

Aufstellung:

%	DM	Tage
100	50	
$3\frac{1}{2}$	$\boxed{1,75}$	360
	0,21 875	45
	$\approx \underline{\underline{0,22}}$	

Dieses Beispiel läßt sich verallgemeinern:

Wir wollen die Zinsen für das Kapital k berechnen, das zu p % t Tage lang verzinst wird.

Aufstellung:

100	k	
p	$\frac{k \cdot p}{100}$	360
	$\frac{k \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$	t

Aus dieser Aufstellung sieht man, wie die Dreisätze für die Prozentrechnung (Vollinie) und die Zeitrechnung (Punktlinie) durch die Jahreszinsen miteinander verbunden sind.

Aus obiger Aufstellung ergibt sich die Formel für Berechnung der Tageszinsen:

$$\boxed{z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}}$$

Die Rechnung wird vereinfacht, wenn man die Anzahl der Tage als einen einfachen Bruchteil des Jahres ausdrücken kann.

Beispiele:

$$90 \text{ Tage} = \tfrac{1}{4} \text{ Jahr},$$
$$60 \text{ Tage} = \tfrac{1}{6} \text{ Jahr}.$$

Aufgaben

1. Berechne die Zinsen von

a) 400 DM zu 3 % in 60 Tg.	**b)** 600 DM zu 5 % in 12 Tg.
c) 1 200 ,, ,, $3\frac{1}{3}$ % ,, 45 ,,	**d)** 1 000 ,, ,, $2\frac{1}{2}$ % ,, 120 ,,
e) 750 ,, ,, 4 % ,, 30 ,,	**f)** 1 620 ,, ,, $4\frac{1}{2}$ % ,, 36 ,,
g) 2 400 ,, ,, 5 % ,, 72 ,,	**h)** 550 ,, ,, 6 % ,, 144 ,,
i) 500 ,, ,, 8 % ,, 9 ,,	**k)** 320 ,, ,, 5 % ,, 288 ,, !

2. Drücke als Bruchteile des Jahres aus

a) 90 Tg., 60 Tg., 120 Tg., 36 Tg., 45 Tg., 72 Tg., 28 Tg., 9 Tg., 24 Tg., 144 Tg., 288 Tg., 12 Tg., 1 Mon. 10 Tg., 2 Mon. 12 Tg.;

b) 1 Tg., 2 Tg., 25 Tg., 81 Tg., 17 Tg., 11 Tg., 149 Tg., 301 Tg., 7 Tg., 69 Tg., 71 Tg., 113 Tg., 209 Tg., 110 Tg., 304 Tg.!

Feststellen der Zinstage

Der Monat wird stets zu 30 Tagen, das Jahr zu 360 Tagen gerechnet.

Beispiele:

1. Wenn man Zinstage für die Zeit vom 4. März (3.) bis zum 26. April (4.) zu rechnen hat, so verfährt man wie folgt:

$$\begin{array}{rr} 4 \text{ Mon.} & 26 \text{ Tg.} \\ -3 \;\;,, & 4 \;\;,, \\ \hline 1 \text{ Mon.} & 22 \text{ Tg.} \end{array}$$

   Das ergibt 1 Monat und 22 Tage, also 52 Tage.

2. Zinsen für die Zeit vom 24. August (8.) bis 9. Oktober (10.)

$$\begin{array}{rr} 10 \text{ Mon.} & 9 \text{ Tg.} \\ -8 \;\;,, & 24 \;\;,, \\ \hline 1 \text{ Mon.} & 15 \text{ Tg.} \end{array}$$

   Das ergibt 1 Monat und 15 Tage, also 45 Tage.

Die Sparkassen verzinsen eingezahlte Beträge von dem Werktag an, der dem Einzahlungstag folgt.

Zurückzuzahlende Beträge werden bis zum letzten Werktag vor dem Tag der Rückzahlung verzinst.

3. Wieviel Tage sind es vom

a)	2. Jan.	bis	16. Jan.			**b)**	5. März	bis	26. März		
c)	3. ,,	,,	21. April			**d)**	19. Febr.	,,	30. Mai		
e)	1. April	,,	22. Juni			**f)**	18. Nov.	,,	31. Dez.		
g)	5. Dez.	,,	26. Jan. k. J.			**h)**	3. April	,,	15. Juli		
i)	3. Mai	,,	17. Okt.			**k)**	11. Nov.	,,	2. Febr. k. J.?		

4. Berechne die Tage vom

a)	15. Jan.	bis	7. März	**b)**	9. Okt.	bis	30. Dez.
c)	2. März	,,	25. Aug.	**d)**	12. April	,,	15. Juni
e)	25. Juni	,,	15. Nov.	**f)**	19. Febr.	,,	26. Nov.
g)	10. Mai	,,	28. Sept.	**h)**	8. März	,,	2. Okt.
i)	5. Febr.	,,	1. Dez.	**k)**	20. Dez.	,,	16. März k. J.!

5. Wieviel Zinsen bringen

a)	500 DM	zu	3 %	vom	5. Okt.	bis zum	17. Dez.
b)	600 ,,	,,	4 %	,,	12. März	,, ,,	27. April
c)	1 200 ,,	,,	2 %	,,	4. Jan.	,, ,,	4. März
d)	1 460 ,,	,,	$2\frac{1}{2}$ %	,,	10. Febr.	,, ,,	22. April
e)	6 000 ,,	,,	5 %	,,	11. Juni	,, ,,	26. Juni
f)	700 ,,	,,	4 %	,,	16. Juli	,, ,,	26. Aug.
g)	600 ,,	,,	$3\frac{1}{3}$ %	,,	2. Mai	,, ,,	20. Mai?

14. Berechnung der Tageszinsen durch Zinszahlen

Banken und Sparkassen berechnen die Tageszinsen vielfach durch Anwendung von Zinszahlen und Zinsteilern.

In der Zinsformel $z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ (s. S. **41**!) ordnen wir die Glieder neu und schreiben $z = \frac{k \cdot t}{100} \cdot \frac{p}{360}$. Statt $\frac{p}{360}$ führen wir den Kehrwert $\frac{360}{p}$ ein, müssen also die Multiplikation durch die Division ersetzen; damit erhalten wir

$$z = \frac{k \cdot t}{100} : \frac{360}{p}$$

Das Produkt $\frac{k}{100} \cdot t$ nennt man Zinszahl oder Zinsnummer; $\frac{360}{p}$ bezeichnet man als Zinsteiler oder Zinsdivisor.

Formel für Tageszinsen $= \dfrac{\textbf{Zinszahl}}{\textbf{Zinsteiler}}$ **Zinszahl** $= \dfrac{k}{100} \cdot t$ **Zinsteiler** $= \dfrac{360}{p}$

Beispiel: Berechne 4% Zinsen von 4 881,70 DM für 43 Tage!

$$\frac{k}{100} \cdot t = 48{,}81 \cdot 43 \approx 2\,099; \ \frac{360}{p} = 90; \ z = \frac{2\,099}{90}\,\text{DM} \approx \underline{\underline{23{,}32\,\text{DM}}}$$

Beachte: Pfennigbeträge bleiben bei Anwendung der Formel unberücksichtigt. Die Zinszahl wird auf Ganze gerundet (2 098,83 ≈ 2 099).

Aufgaben

1. a) Stelle eine Tafel der Zinsteiler für folgende Prozentsätze auf: 1%, 2%, 3%, 4%, 5%, 6%, 8%, 9%, 10%, 12%, 15%, 18%, 20%, 24%!

b) Ergänze die Tafel durch folgende Angaben!

%	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$	$7\frac{1}{2}$
Zinsteiler	240	160	144	108	96	80	54	48

2. Wieviel Zinsen ergeben

a) 980 DM zu 6% in 45 Tg. **b)** 1 260 DM zu 4 % in 36 Tg.
c) 3 600 „ „ 3% „ 72 „ **d)** 4 820 „ „ $2\frac{1}{2}$% „ 21 „
e) 9 820 „ „ 2% „ 49 „ **f)** 6 050 „ „ $2\frac{1}{2}$% „ 58 „
g) 16 235 „ „ 5% „ 32 „ **h)** 87 530 „ „ $3\frac{1}{3}$% „ 123 „
i) 90 „ „ 4% „ 15 „ **k)** 75 „ „ $1\frac{1}{2}$% „ 98 „ ?

15. Anwendung der Zinszahlen

Zum Aufbau seines Gehöftes erhielt der Neubauer Felix Richter folgende Darlehen zu 3%:

	Anzahl der Tage bis zum Jahresende:
1 200,— DM am 20. März	280
800,— „ „ 19. Mai	221
900,— „ „ 6. Juli	174
1 000,— „ „ 8. August	142

Welcher Zinsbetrag entsteht bis zum Ende des Jahres?

1. Weg: Einzelberechnung

Bei der Lösung ergeben sich eigentlich vier selbständige Rechenaufgaben, die nach der Formel für Tageszinsen zu lösen sind.

1. a) Berechne die Zinszahlen aus obigem Beispiel!
   b) Ermittle die Zinsen für die einzelnen Darlehensposten!
   c) Ermittle die Summe der Zinsen für den Gesamtbetrag der Darlehensposten!

2. Weg: Summierung der Zinszahlen

2. Suche für diese Aufgabe nach einem kürzeren Weg zur Berechnung der Zinssumme!

$$\text{Gesamtzinsen} = \frac{\textbf{Summe der Zinszahlen}}{\textbf{Zinsteiler}}$$

Begründe diese Formel!

3. Weg: Staffel

Der Neubauer Felix Richter (s. S. 44!) berechnete die Zinsen dadurch, daß er zunächst die Zinszahlen für jeden einzelnen Darlehensposten ermittelte und dann die Summe der Zinszahlen durch den Zinsteiler dividierte.

Richter hätte auch stufenweise vorgehen und den ersten Schuldbetrag bis zu dem Zeitpunkt verzinsen können, in dem der zweite Darlehensposten aufgenommen wurde. Von diesem Tage an hätte er dann die Summe beider Darlehensposten bis zur nächsten Änderung der Schuldhöhe verzinsen müssen usw.

Am 20. März betrug die Schuld 1 200 DM. Sie blieb bis zum 19. Mai, also 59 Tage, unverändert, war also für diesen Zeitraum zu verzinsen. Dann vergrößerte sie sich um 800 DM, also auf 2000 DM, und mußte bis zum 6. Juli, also 47 Tage, verzinst werden. An diesem Tage wurde ein weiteres Darlehen von 900 DM aufgenommen. Zu verzinsen waren nunmehr 2 900 DM bis zum 8. August, also 32 Tage. Jetzt erhöhte sich der Schuldbetrag auf 3 900 DM. Diese Summe war zu verzinsen bis zum 31. Dezember, also 142 Tage.

Die Abrechnung hat folgendes Aussehen:

Datum	Vorgang	Betrag in DM	Zu verzinsen bis	Tage	Zinszahlen
20. 3.	Darlehensaufnahme	1 200,—	19. 5.	59	708
19. 5.	Darlehenserhöhung	800,—			
	Bestand	2 000,—	6. 7.	47	940
6. 7.	Darlehenserhöhung	900,—			
	Bestand	2 900,—	8. 8.	32	928
8. 8.	Darlehenserhöhung	1 000,—			
	Bestand	3 900,—	31. 12.	142	5538
				280	8114

Die Zinsen betragen 67,62 DM.

$$\left(z = \frac{8114}{120} = 67{,}62\right)$$

Diese Berechnungsart ist besonders im Kreditverkehr üblich, seltener im Sparverkehr. Sie hat den Vorteil, daß schon während des Jahres Zinszahlen errechnet werden können, weil sie unabhängig vom Abschlußtermin sind.

Aufgaben

1. Für den Ausbau seines Gehöftes entlieh ein Neubauer am 26. Juli 600,— DM, am 15. August 450,— DM, am 28. August 400,— DM und am 7. September 500,— DM. Er zahlte die ganze Summe mit den Zinsen zu 4% am 10. November zurück. Auf wieviel DM war seine Schuld angewachsen?

2. Ein Betrieb erhielt von einer Bank am 1. Februar ein Darlehen in Höhe von 18 000 DM. Er zahlte davon 4 000 DM am 1. April, 5 000 DM am 15. Mai und den Rest am 25. August zurück. Wieviel DM Zinsen hatte er insgesamt zu zahlen, wenn die Bank eine $4\frac{1}{2}$%ige Verzinsung forderte?

3. Ein Sparbuch weist folgende Vorgänge auf: 15. 1. Einzahlung 150,— DM, 29. 2. Einzahlung 90,— DM, 16. 5. Abhebung 120,— DM, 27. 8. Einzahlung 50,— DM, 19. 10. Abhebung 100,— DM, 16. 11. Einzahlung 30,— DM. Die Sparbeträge werden mit 3% verzinst.

a) Berechne die Zinsen für das Sparkonto bis zum Jahresende!

b) Wie groß ist das Guthaben einschließlich der Zinsen am Jahresende?

4. Hans Fleischer besitzt ein Sparkassenbuch bei der Stadtsparkasse Brandenburg. Die Sparbeträge werden mit 3% verzinst. Berechne die Zinsen!

Beginn bzw. Ende der Verzinsung	Vorgang	Betrag
31. 12.	Anfangsbestand aus dem Vorjahr . .	240,— DM
6. 1.	Abhebung für Schneiderrechnung . .	100,— ,,
19. 3.	Einzahlung einer erhaltenen Prämie	300,— ,,
8. 5.	Einzahlung eines Sparbetrags	80,— ,,
30. 7.	Abhebung für Sommerreise	150,— ,,
24. 11.	Einzahlung eines Sparbetrags	60,— ,,

5. Berechne die Zinsen für das Sparkonto Erich Hempels bei der Stadtsparkasse Plauen bis zum Jahresende! Zinsfuß 3 %.

Beginn bzw. Ende der Verzinsung	Vorgang	Betrag
31. 12.	Anfangsbestand	300,– DM
6. 3.	Abhebung	60,– ,,
19. 4.	Abhebung	50,– ,,
10. 7.	Einzahlung	120,– ,,
24. 11.	Einzahlung	70,– ,,
6. 12.	Abhebung	90,– ,,

16. Berechnung des Zinsfußes

Eine landwirtschaftliche Kreditgenossenschaft erhält für einen Kredit von 6 000 DM im Vierteljahr 60 DM Zinsen. Welchem Zinsfuß entspricht das?

Aufstellung:

%	DM	Jahre
100	6 000	
		1
	60	$\frac{1}{4}$

Zuerst müssen im Dreisatz der Zeitrechnung die Jahreszinsen berechnet werden:

%	DM	Jahre
100	6 000	
	240	1
	60	$\frac{1}{4}$

Nun erst kann die Prozentrechnung folgen:

%	DM
100	6 000
4	240

Beispiel: Zu welchem Zinsfuß ergeben 5 000 DM in 108 Tg. 52,50 DM Zinsen?

Lösung:

Berechnung der Jahreszinsen:

%	DM	Tage
100	5 000	
	175	360
	52,50	108

Die Jahreszinsen betragen 175 DM

Berechnung des Zinsfußes:

%	DM
100	5 000
3,5	175

Der Zinsfuß beträgt 3,5 %

Aus der Aufstellung läßt sich die Formel für Berechnung des Zinsfußes ableiten.

$$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{k \cdot t}$$

Aufgaben

Bei welchem Zinsfuß ergeben

1. a) 300 DM in $\frac{1}{4}$ J. 3,— DM Z.
b) 500 ,, ,, $\frac{1}{4}$ J. 3,75 ,, Z.
c) 200 ,, ,, $\frac{1}{5}$ J. 2,— ,, Z.
d) 650 ,, ,, $\frac{1}{3}$ J. 6,50 ,, Z.
e) 410 ,, ,, $\frac{1}{2}$ J. 6,15 ,, Z.
f) 320 ,, ,, $\frac{1}{4}$ J. 4,— ,, Z.
g) 1 200 ,, ,, 3 Mon. 15,— ,, Z.
h) 2 500 ,, ,, 4 ,, 25,— ,, Z.
i) 60 ,, ,, 5 ,, 0,75 ,, Z.
k) 600 ,, ,, $2\frac{1}{2}$,, 5,— ,, Z.

2. a) 320 DM in 6 Mon. 6,40 DM Z.
b) 480 ,, ,, 1 ,, 1,20 ,, Z.
c) 960 ,, ,, 4 ,, 12,— ,, Z.
d) 6 400 ,, ,, 3 ,, 50,— ,, Z.
e) 72 000 ,, ,, $1\frac{1}{2}$,, 300,— ,, Z.

f)	24 000 DM in	$5\frac{1}{2}$ Mon.	352,— DM	Z.
g)	80 „ „	$2\frac{1}{2}$ „	0,50 „	Z.
h)	60 „ „	9 „	1,50 „	Z.
i)	4 800 „ „	72 Tg.	24,— „	Z.
k)	640 „ „	45 „	3,40 „	Z.?

3. Welchen Teil des Kapitals machen die Jahreszinsen bei 2 %, $2\frac{1}{2}$ %, $3\frac{1}{3}$ %, 4 %, 5 %, $6\frac{1}{4}$ %, $6\frac{2}{3}$ % aus?

4. Berechne den Zinsfuß!

	Kapital	Zeit	Zinsen
a)	1 250 DM	2 Mon.	6,25 DM
b)	4 880 „	6 „	73,20 „
c)	28 860 „	1 „	48,10 „
d)	3 978 „	1 „	15,47 „
e)	960 „	$1\frac{1}{2}$ „	3,30 „
f)	1 320 „	11 „	48,40 „
g)	360 „	$\frac{1}{2}$ „	1,20 „
h)	480 „	$1\frac{1}{2}$ „	3,— „
i)	720 „	$2\frac{1}{2}$ „	3,75 „
k)	900 „	$\frac{1}{2}$ „	1,50 „

5. Zu wieviel % werden

a)	25 DM	verzinst, wenn sich in	144 Tg.	0,30 DM	Z. ergeben
b)	60 „	„ „ „ „	125 „	0,50 „	Z. „
c)	480 „	„ „ „ „	47 „	2,82 „	Z. „
d)	16 000 „	„ „ „ „	37 „	74,— „	Z. „
e)	24 600 „	„ „ „ „	60 „	131,20 „	Z. „ ?

6. Berechne den Zinsfuß für

a) 960 DM, Zinsen vom 20. 6. bis zum 5. 9.: 12,50 DM,

b) 3 700 DM, Zinsen vom 14. 9. bis zum 8. 12.: 51,80 DM,

c) 2 100 DM, Zinsen vom 25. 11. bis zum 5. 5. des folgenden Jahres: 63 DM,

d) 525 DM, Zinsen vom 17. 11. bis zum 9. 3. des folgenden Jahres: 6,86 DM!

17. Berechnung des Kapitals

Wie groß ist eine Einlage, für die bei 3%iger Verzinsung die Sparkasse in 4 Mon. 8,64 DM Zinsen zahlt?

Aufstellung:

%	DM	Monate
100		
3		12
	8,64	4

Es muß wieder mit dem Dreisatz für die Zeitrechnung begonnen werden:

DM	Monate
8,64	4
25,92	12

Dann folgt die Prozentrechnung:

%	DM
3	25,92
100	864,–

Das Kapital beträgt 864 DM

Aus der Aufstellung läßt sich die Formel für die Berechnung des Kapitals ableiten, das bei p% z DM Zinsen in t Tagen bringt.

$$\boxed{k = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}}$$

Aufgaben

1. Welche Einlage bringt zu

a) 4 %	in 5 Mon.	80,– DM Z.		**b)** 3 %	in 2 Mon.	42,– DM Z.	
c) 2 %	„ 6 „	9,60 „ Z.		**d)** 4 %	„ 4 „	12,80 „ Z.	
e) 5 %	„ $2\frac{1}{2}$ „	37,50 „ Z.		**f)** $3\frac{3}{4}$ %	„ 5 „	7,50 „ Z.	
g) $5\frac{1}{2}$ %	„ 2 „	55,– „ Z.		**h)** $4\frac{3}{4}$ %	„ 8 „	15,20 „ Z.	
i) $4\frac{1}{2}$ %	„ 3 „	10,80 „ Z.		**k)** $3\frac{1}{2}$ %	„ 3 „	52,50 „ Z.?	

2. Welches Kapital ergibt zu

a) $4\frac{1}{2}$ %	in 5 Mon.	11,25 DM Z.	**b)** 5 %	in 7 Mon.	26,25 DM Z.
c) $3\frac{1}{3}$ %	„ 5 „	50,– „ Z.	**d)** 4 %	„ $8\frac{1}{2}$ „	272,– „ Z.
e) 5 %	„ 24 Tg.	779,– „ Z.	**f)** $3\frac{1}{2}$ %	„ 54 Tg.	248,64 „ Z.?

3. Welches Kapital ergibt in der Zeit vom

a)	2. April	bis	2. Okt.	bei	4 %	24,—	DM Zinsen
b)	4. März	,,	16. Mai	,,	3 %	3,60	,, ,,
c)	16. Aug.	,,	22. Sept.	,,	5 %	4,50	,, ,,
d)	4. Okt.	,,	22. Okt.	,,	$3\frac{1}{2}$ %	7,50	,, ,,
e)	5. Sept.	,,	5. ,,	,,	$2\frac{1}{2}$ %	12,50	,, ,, ?

4. 600 DM ergeben bei 4%iger Verzinsung im Vierteljahr ebensoviel Zinsen wie ein anderer Betrag bei gleicher Verzinsung in einem Monat. Wie groß ist der Betrag?

18. Berechnung der Zeit

Karl Fischer zahlte für ein Darlehen in Höhe von 2 000 DM bei 4%iger Verzinsung 20 DM Zinsen. Für welche Zeit galt diese Zinszahlung?

Aufstellung:

%	DM	Tage
100	2 000	
4		360
	20	

Man kann nicht mit der Zeitrechnung beginnen, da sowohl die Jahreszinsen als auch die Tage unbekannt sind. Erst durch die Prozentrechnung gewinnen wir die Jahreszinsen und damit den Anschluß an die Zeitrechnung:

%	DM	Tage
100	2 000	
4	**80**	360
	20	**90**

Aus der Aufstellung läßt sich die Formel für die Berechnung der Anzahl Tage ableiten, in der k DM bei p % z DM Zinsen bringen.

$$\boxed{t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{k \cdot p}}$$

Aufgaben

In welcher Zeit ergeben

1. a)	300 DM	zu	4 %	2,40 DM	Z.	**b)**	400 DM	zu	2 %	6,40 DM	Z.
c)	400 ,,	,,	5 %	8,— ,,	Z.	**d)**	300 ,,	,,	5 %	6,— ,,	Z.
e)	800 ,,	,,	2 %	6,40 ,,	Z.	**f)**	500 ,,	,,	$3\frac{1}{2}$ %	3,50 ,,	Z.
g)	200 ,,	,,	$4\frac{1}{2}$ %	4,50 ,,	Z.	**h)**	800 ,,	,,	4 %	9,60 ,,	Z.
i)	60 ,,	,,	3 %	0,54 ,,	Z.	**k)**	70 ,,	,,	3 %	0,80 ,,	Z.

2. a)	300 DM	zu	4 %	6,—	DM	Z.
b)	500 ,,	,,	3 %	5,—	,,	Z.
c)	400 ,,	,,	2 %	2,—	,,	Z.
d)	600 ,,	,,	5 %	7,50	,,	Z.
e)	500 ,,	,,	8 %	10,—	,,	Z.
f)	1 200 ,,	,,	$3\frac{1}{2}$ %	36,—	,,	Z.
g)	220 ,,	,,	3 %	3,30	,,	Z.
h)	810 ,,	,,	2 %	4,05	,,	Z.
i)	6 100 ,,	,,	4 %	124,—	,,	Z.
k)	72 000 ,,	,,	3 %	540,—	,,	Z.?

3. An welchem Tage sind 45 600 DM zu 6 % ausgeliehen worden, wenn sie bis zum 15. Sept. **a)** 798 DM, **b)** 608 DM, **c)** 1 710 DM, **d)** 1 472 DM Zinsen ergeben?

4. In welcher Zeit ergeben 900 DM zu 3 % ebensoviel Zinsen, wie sie derselbe Betrag in 7 Mon. zu 4 % ergibt?

5. In welcher Zeit wachsen

a)	900 DM	bei	4 %	auf	918,—	DM	an
b)	600 ,,	,,	$5\frac{1}{3}$ %	,,	608,—	,,	,,
c)	160 ,,	,,	5 %	,,	162,—	,,	,,
d)	480 ,,	,,	$3\frac{1}{2}$ %	,,	481,40	,,	,,
e)	15 500 ,,	,,	$2\frac{4}{5}$ %	,,	15 717,—	,,	,,
f)	720 ,,	,,	$3\frac{3}{4}$ %	,,	724,50	,,	,,
g)	99 000 ,,	,,	$4\frac{1}{5}$ %	,,	100 380,—	,,	,, ?

19. Endkapital und Anfangskapital

Welches Kapital wächst zu 3% in 7 Mon. auf 2 442 DM an? Das Endkapital 2 442 DM umfaßt das zu suchende Anfangskapital und die Zinsen; es ist also ein vermehrter Wert.

Bei einer Verzinsung von 3% vermehrt sich ein Kapital in 1 Jahr um 3%, in 7 Mon. um $\frac{7 \cdot 3}{12}\% = 1\frac{3}{4}\%$; 100% wachsen also bei 3% in 7 Mon. auf $101\frac{3}{4}\%$ an, und das sind 2 442 DM. Demnach gilt der Dreisatz:

Endkapital:	$101\frac{3}{4}\% \mathrel{\widehat{=}} 2\,442$ DM
Anfangskapital:	$100\ \% \mathrel{\widehat{=}} \underline{\underline{2\,400 \text{ DM}}}$

Aufgaben

1. Welches Kapital wächst

a)	zu	$3\frac{1}{2}$ %	in	9	Mon.	auf	492,60	DM	an
b)	,,	3 %	,,	$4\frac{1}{2}$	,,	,,	606,75	,,	,,
c)	,,	$4\frac{4}{5}$ %	,,	5	,,	,,	357,—	,,	,,
d)	,,	$2\frac{1}{2}$ %	,,	8	,,	,,	91,50	,,	,,
e)	,,	$3\frac{1}{2}$ %	,,	10	,,	,,	123,50	,,	,,
f)	,,	$2\frac{3}{4}$ %	,,	11	,,	,,	492,10	,,	,,
g)	,,	4 %	,,	1	,,	,,	963,20	,,	,,
h)	,,	$1\frac{3}{4}$ %	,,	6	,,	,,	685,95	,,	,, ?

2. Ein am 15. März gewährtes Darlehen wurde mit den fälligen Zinsen zu 4% am 15. November mit 2 060 DM zurückgezahlt. Berechne **a)** das Darlehen, **b)** die Zinsen!

3. Karl Richter nahm am 12. Februar ein Darlehen auf und zahlte es mit den Zinsen zu $4\frac{1}{2}$% am 22. Mai mit 3 037,50 DM zurück.

a) Wie groß war das Darlehen?

b) Wieviel Zinsen wurden gezahlt?

4. Wie groß war das Darlehen, das am 1. Februar ausgeliehen und am 15. September desselben Jahres nebst $3\frac{1}{5}$% Zinsen mit 1 479 DM zurückgezahlt wurde?

IV. Vermischte Aufgaben

20. Aus der Landwirtschaft

1. Von den bei der Enteignung durch die Bodenreform erhaltenen Sämaschinen wurden 3 743 Stück an neue Bauernwirtschaften, 353 Stück an landarme Bauern und 3 820 Stück an die Maschinen-Ausleihstationen (MAS) verteilt.

a) Wieviel % der Sämaschinen wurden den einzelnen Gruppen zugeteilt?

b) Stelle die Ergebnisse zu a) in Kreisausschnitten dar!

2. Durch die Bodenreform wurde der Betrieb des Bauern Karl Hempel in Neudorf auf 7,2 ha vergrößert. 75 % des gesamten Landes waren landwirtschaftliche Nutzfläche, von der 14 % mit Hafer bestellt wurde.
Wieviel % der Gesamtfläche entfielen auf die Haferfelder?

3. Der Neubauer Ernst Krause in Heinersdorf bestellte $2\frac{1}{3}$ ha seines Ackerlandes mit Wintergetreide, $1\frac{3}{4}$ ha mit Sommergetreide, $\frac{1}{5}$ ha mit Zuckerrüben, $1\frac{1}{2}$ ha mit Kartoffeln, 1 ha mit Futterhackfrüchten, $1\frac{1}{4}$ ha mit Grünfutter. Wieviel % des gesamten Ackerlandes betrugen die einzelnen Anbauflächen?

4. Der Bauer Fritz Lindner in Holzhausen nahm zum Bau einer Scheune am 16. Februar ein Darlehen von 4 200 DM auf. Wieviel Zinsen mußte er für das Darlehen bis Ende des Jahres zahlen, wenn der Zinsfuß 4 % betrug?

5. Der Neubauer Bruno Dietze nahm zur Errichtung seines Hofes bei seiner Kreditgenossenschaft folgende Darlehen auf:

am 3. Juli	2 280,— DM
am 9. August ...	1 500,— ,,
am 12. September	920,— ,,
am 4. Oktober ..	640,— ,,

Wie groß ist sein Gesamtdarlehen am 31. Dezember des Jahres einschließlich 4 % Zinsen?

21. Aus volkseigenen Betrieben

1. In der Deutschen Demokratischen Republik bestehen 75 zonale Vereinigungen volkseigener Betriebe (VVB). In ihnen sind 1631 volkseigene Betriebe zusammengefaßt. Davon entfallen auf die Produktionszweige

Kohle	80	Betriebe
Energie	58	„
Metallurgie	42	„
Chemie	143	„
Maschinenbau	580	„
Leichtindustrie	669	„
Steine und Erden	59	„

(Angaben nach dem Stand vom 1. 11. 1948.)

Berechne den prozentualen Anteil der einzelnen Produktionszweige!

2. a) Die Zahl der in diesen Betrieben (s. Aufg. 1!) Beschäftigten betrug nach dem Stand am 1. 11. 1948 für die Produktionszweige

Kohle	107 803	Beschäftigte
Energie	21 196	„
Metallurgie	36 884	„
Chemie	38 252	„
Maschinenbau und Elektrotechnik	177 070	„
Leichtindustrie	181 445	„
Steine und Erden	16 057	„ .

Drücke die Verteilung der Beschäftigten auf die einzelnen Produktionszweige in Prozenten aus!

b) Bis zum 30. 9. 1949 stieg die Zahl der Beschäftigten in den VEB auf 949 475 und betrug 48 % aller in der Industrie in der Deutschen Demokratischen Republik und in Berlin beschäftigten Personen. Wie groß ist deren Zahl? Wieviel Prozent beträgt die Zunahme der Beschäftigten seit 1. 11. 1948?

c) Im Produktionszweig Maschinenbau und Elektrotechnik betrug am 30. 9. 1949 die Zahl der Beschäftigten 302 300. Wieviel Prozent beträgt die Steigerung seit 1. 11. 1948?

3. Die Metallbetriebe Wildenberg zahlten nach Einführung des Leistungslohnes 24 800 DM zum Grundlohn zusätzlich aus. Das waren 40 % des Grundlohnes. Wie groß war der Grundlohn?

4. Nach Senkung der Materialkosten um 7 % betrugen diese in einer volkseigenen Waagenfabrik nur noch 16,40 DM je Waage. Wie hoch waren sie vorher?

5. Ein Stickstoffwerk erfüllte sein jährliches Produktionssoll von 19 200 Tonnen bereits am 16. Oktober.

a) Um wieviel % lag die Leistung über dem planmäßigen Soll? (Rechne das Jahr zu 360 Tagen!)

b) Welche Jahresproduktion erzielte das Werk, wenn die Leistungen anhielten?

6. Das Kraftwerk Böhlen erfüllte das Produktionssoll eines Jahres von 590 Millionen Kilowattstunden bis zum 11. November.

a) Wieviel % betrug die Übererfüllung?

b) Wie groß wäre die Produktion vom 12. November bis zum Jahresende, wenn die Leistung noch um weitere 10 % gesteigert würde?

22. Von den Aktivisten

1. Der Metallarbeiter Steinberg senkte die Arbeitszeit für das Bohren eines Werkstückes von 33 auf 26 Minuten. Um wieviel % wurde bei diesem Arbeitsvorgang die Arbeitszeit gesenkt?

2. Zum Bau eines Teilstückes eines Radioapparates war 0,80 m Schaltdraht nötig. Der Montagearbeiter Hempel ersann eine einfachere Konstruktion und kam nunmehr mit 0,67 m aus. Wieviel % Draht wurde eingespart?

3. Der Arbeiter Paul Hentschel erhielt eine Leistungsprämie von 600 DM, von der er 420 DM am 26. März zur Sparkasse brachte. 120 DM verwendete er im Haushalt, den Rest benutzte er zu einer kurzen Reise.

a) Wieviel % seiner Prämie entfielen auf die einzelnen Verwendungszwecke?

b) Wieviel DM erhielt Hentschel bis zum Ende des Jahres an Zinsen, wenn er am 19. August noch 100 DM und am 18. November noch 65 DM zur Sparkasse brachte, die das Guthaben mit $3\frac{1}{2}$ % verzinste?

4. Sieben Gießereiarbeiter hatten ein Soll von $13\frac{2}{5}$ t Grauguß[1]) zu erfüllen. Infolge sorgfältiger Vorbereitung des Arbeitsprozesses übererfüllten sie dieses Soll um 44 %. Wie groß war die Leistung?

5. In einer Sonderschicht förderten 7 Hauer mit Preßlufthammer 142 m³ Kohle. Das waren 310 % des Solls. Wie groß war das Soll?

6. Der Hauer Franik von der Grube „Brückenberg I" in Zwickau förderte in einer Schicht 26,6 m³ Kohle und übererfüllte damit seine Arbeitsnorm um 430 %. Wie groß war diese?

7. In einer Kohlengrube förderte ein Bergarbeiter über sein Soll hinaus noch $8\frac{1}{3}$ m³ Kohle. Diese zusätzliche Leistung bedeutete 150 % seiner Norm. Wie groß war die Norm?

8. Die Maurer-Aktivistengruppe eines Kommunalen Wirtschaftsunternehmens erhöhte ihre Norm um 27 % auf 940 Ziegel. Wie groß war sie vorher?

9. Im Mansfelder Kupfererzbergbau hatten zwei Aktivistengruppen ein Soll von 12 Wagen mit je $\frac{1}{2}$ t Erz zu erfüllen. Sie bewältigten folgende Mengen:

Tag	Gruppe 1	Gruppe 2
26. 10.	16 Wagen	22 Wagen
27. 10.	18 „	15 „
28. 10.	18 „	20 „
29. 10.	16 „	20 „
30. 10.	18 „	17 „

a) Wieviel % der Norm erreichte jede Gruppe an den einzelnen Tagen?

b) Wieviel % der Norm erreichte jede Gruppe durchschnittlich in den 5 Tagen?

c) Wieviel % der Leistung der 1. Gruppe erreichte die 2. Gruppe an den einzelnen Tagen?

10. Ein Monteur einer Maschinenfabrik in Chemnitz senkte seine Arbeitszeit für eine Montagearbeit von 180 auf 145 Minuten.

a) Wieviel % der Arbeitszeit sparte er ein?

b) Wieviel % der Ausgangsnorm sparte er weiterhin ein, wenn er die neue Zeit noch um 26 % unterschritt?

---

[1]) Grauguß ist die Normbezeichnung für Gußeisen.

11. In einem Betondachsteinwerk erreichte ein Aktivist 184% der Tagesnorm und stellte 295 Betondachsteine her. Ein weiterer Aktivist erreichte 320% und ein dritter 295% der Tagesnorm.

a) Wie groß war die Tagesnorm?

b) Wie groß waren die Leistungen der einzelnen Aktivisten?

23. Gewichtsberechnungen

Unter dem **Rein-** oder **Nettogewicht** einer Sendung versteht man das Gewicht des Inhalts ohne die **Verpackung** oder **Tara;** das Gesamtgewicht bezeichnet man als **Roh-** oder **Bruttogewicht.**

Es gilt also

$$\begin{array}{lr} \text{Brutto} & 100\% \\ -\ \text{Tara} & p\,\% \\ \hline \text{Netto} & 100\% - p\,\% \end{array}$$

Die strenge Bestimmung physikalischer Begriffe verlangt, zwischen dem **Gewicht** eines Körpers und seiner **Masse** zu unterscheiden. Das Gewicht ist eine Äußerung der auf den Körper wirkenden Schwerkraft, mithin selbst eine **Kraft,** und wird in Kilopond (kp) bzw. Pond (p) gemessen. Die Masse eines Körpers dagegen ist gekennzeichnet durch die dem Körper eigene **Trägheit.** Sie wird in den bekannten Einheiten Kilogramm (kg) und Gramm (g) gemessen. Das Kilogramm und das Gramm sind also keine Gewichtseinheiten, sondern Masseneinheiten.

Wir haben zu merken:

1 kg ist die Masse von 1 l Wasser bei 4° C
1 g ist die Masse von 1 cm³ Wasser bei 4° C
1 kp ist das Gewicht von 1 l Wasser bei 4° C in Meereshöhe bei 45° nördl. Breite
1 p ist das Gewicht von 1 cm³ Wasser bei 4° C in Meereshöhe bei 45° nördl. Breite

Im Sprachgebrauch des täglichen Lebens wird zwischen Gewicht und Masse im physikalischen Sinne nicht unterschieden. Man spricht meist vom Gewicht, während man die Masse meint und auch ihre Einheiten verwendet. Das gilt insbesondere bei den Ausdrücken Brutto-, Netto- und Taragewicht. Da diese Ausdrücke in der Umgangssprache fest verankert sind, wollen wir sie ebenfalls benutzen, müssen uns aber dabei dessen bewußt sein, daß es sich meist um Massen handelt. Überall, wo in den Aufgaben das Gewicht eines Körpers als Kraft auftritt, werden wir in Zukunft als Einheiten das Kilopond bzw. das Pond verwenden.

Aufgaben

1. Von einer Sendung Ware von 75 kg Bruttogewicht entfallen $6\frac{2}{3}$% auf die Verpackung (Tara). Berechne diese und das Nettogewicht!

2.

	Bruttogewicht	Auf das Bruttogewicht bezogene Verpackung (Tara)	
a)	12 kg	3 %	(2 %; 5 %)
b)	27 ,,	4,5 %	(3 %; 1,5 %)
c)	30 ,,	7 %	(2,5 %; 4 %)
d)	35 ,,	$2\frac{1}{3}$ %	(3 %; 3,5 %)

Berechne in jedem Falle das Gewicht der Verpackung und das Nettogewicht!

3. Eine Kiste mit Obst wiegt 40 kg. Es werden $12\frac{1}{2}$ % auf die Verpackung gerechnet.

4. In 3 Kisten werden insgesamt 108 kg Zucker versandt. Wieviel % des Bruttogewichts wiegen die Kisten, wenn die Sendung 120 kg wiegt?

5. a) Welchen Teil des Bruttogewichts bildet die Tara, wenn sie **1.** 5 %, **2.** $6\frac{1}{4}$ %, **3.** $6\frac{2}{3}$ %, **4.** $8\frac{1}{3}$ %, **5.** $12\frac{1}{2}$ % beträgt?

b) Welchen Teil des Nettogewichts bildet die Tara in den fünf Fällen der Aufgabe a?

6. a) Das Bruttogewicht einer Ware beträgt 180 kg und die Tara **1.** 9 kg, **2.** 6 kg, **3.** 20 kg, **4.** 15 kg, **5.** 18 kg, **6.** 12 kg. Wieviel % beträgt die Tara?

b) Das Bruttogewicht einer Ware beträgt 240 kg und das Nettogewicht **1.** 234 kg, **2.** 232 kg, **3.** 228 kg, **4.** 224 kg, **5.** 220 kg, **6.** 216 kg. Wieviel % beträgt die Tara?

7. Kartoffeln verlieren beim Lagern während des Winters 8 % ihres Gewichts.

a) Wieviel dz kann eine Verteilungsstelle im Frühjahr ausgeben, wenn sie im Herbst 840 dz eingelagert hatte?

b) Wieviel dz hätte sie einlagern müssen, wenn sie im Frühjahr 840 dz hätte ausgeben wollen?

24. Vom Sparen und vom Darlehen

1. Helga Krüger hatte auf der Sparkasse 64 DM. Nach einem Jahr kann sie aus ihrer Heimsparkasse 48 DM dazutun; nach einem halben Jahr bringt sie wiederum 36 DM zur Sparkasse. Auf welche Summe sind ihre Ersparnisse nach einem weiteren halben Jahr angewachsen? Die Sparkasse zahlt $3\frac{1}{2}$ % Zinsen.

2. Frau Schneider spart am 1. Oktober 6,50 DM, am 1. November 12,– DM, am 1. Dezember 7,50 DM, am 1. Januar 5,– DM, am 1. Februar 15,– DM, am 1. März 20,– DM. Welchen Betrag hat sie auf der Sparkasse einschließlich $3\frac{1}{2}$ % Zinsen am 5. Juli zur Verfügung?

3. Stelle den Bestand eines Sparkassenbuches am Jahresschluß mit den 3 %igen Zinsen fest!

Einzahlungen		Auszahlungen	
12. Januar	720,– DM	15. Februar	110,– DM
23. Februar	180,– ,,	4. Mai	280,– ,,
24. April	270,– ,,	6. Juni	140,– ,,
1. Juli	300,– ,,	1. Oktober	50,– ,,
14. November	270,– ,,	4. Dezember	200,– ,,

Berücksichtige dabei, daß die Einzahlungen von dem auf die Einzahlung folgenden Werktage an verzinst werden! Die Zinszahlung läuft bis zum letzten Werktag vor der Auszahlung.

4. Ein Sparkassenbuch weist folgende Eintragungen auf:

Einzahlungen		Auszahlungen	
6. Januar	430,– DM	25. Februar	500,– DM
19. Februar	120,– ,,	10. April	110,– ,,
4. April	210,– ,,	18. Mai	100,– ,,
10. Juni	350,– ,,	16. Juli	65,– ,,
28. Oktober	160,– ,,	23. September	230,– ,,
3. Dezember	240,– ,,	20. Dezember	170,– ,,

Die Verzinsung der Einlagen erfolgt zu 3%.
Stelle den Bestand des Sparkassenbuches am Jahresschluß fest! Beachte die Bemerkung zu Aufgabe 3!

5. In einem Sparkassenbuch sind folgende Einzahlungen und Auszahlungen eingetragen: 17. Februar Einzahlung: 300,– DM, 27. Februar Einzahlung: 250,– DM, 6. April Abhebung: 190,– DM, 8. August Einzahlung: 130,– DM, 25. September Abhebung: 210,– DM, 5. Oktober Abhebung: 60,– DM, 10. November Einzahlung: 140,– DM, 15. Dezember Abhebung: 70,– DM. Welches Guthaben weist das Sparkassenbuch einschließlich 3 % Zinsen am Jahresschluß auf?

6. Konrad Leistner in Schönebeck nahm bei seiner Genossenschaftsbank Kredite auf, die sich wie folgt entwickelten:

Datum	Vorgang	Betrag DM	Zu verzinsen bis	Tage	Zinszahlen
31. 12.	Anfangsschuld aus dem Vorjahr	300,–	6. 2.	36	108
6. 2.	Kreditaufnahme	200,–			
	Bestand	500,–	20. 3.	44	
20. 3.	Kreditaufnahme	600,–			
	Bestand	1 100,–	12. 7.	112	
12. 7.	Rückzahlung	800,–			
	Bestand	300,–	6. 11.	114	
6. 11.	Rückzahlung	200,–			
	Bestand	100,–	31. 12.	54	
				360	

Zinsfuß $4\frac{1}{2}$ %.

a) Ergänze die obige Aufstellung!

b) Wie groß ist der Zinsbetrag?

c) Welchen Betrag einschl. Zinsen ist Leistner also noch schuldig?

7. Karl Fischer steht im Kreditverkehr mit der Landeskreditbank Schwerin. Sein Kredit entwickelt sich wie folgt:

1. 1.	Schuldbetrag aus dem Vorjahr (verzinslich ab 31. 12.)	1 250,–	DM
17. 3.	Rückzahlung	820,–	,,
20. 5.	Neue Kreditaufnahme	700,–	,,
27. 8.	Rückzahlung	500,–	,,
14. 10.	Rückzahlung	300,–	,,

Berechne die Zinsen bis zum 31. 12.! Zinsfuß $4\frac{1}{2}$ %.

B. Einführung in das Rechnen mit allgemeinen und relativen Zahlen

V. Grundrechenarten mit allgemeinen Zahlen

25. Einführung der allgemeinen Zahlen

Wir haben eine Reihe von Aufgaben gelöst, in denen die Jahreszinsen berechnet werden sollten. Die Lösung dieser Aufgaben ließ sich sehr einfach darstellen, indem für die vorkommenden Größen: Zinsen, Kapital und Prozent die Buchstaben z, k, p gesetzt wurden. Dann ergab sich

$$z = \frac{k \cdot p}{100}$$

Auch für die Lösung von Aufgaben zur Berechnung der Tageszinsen wird die Verwendung von Buchstaben in einer Formel angegeben. Wenn die Zahl der Tage durch t bezeichnet wird, heißt sie:

$$z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

In einem Obstverwertungsbetrieb werden Äpfel zum Versand verpackt. Der Betrieb hat Kisten von 10 kg Eigengewicht, die 80 kg Äpfel fassen, und Kisten von 6 kg Eigengewicht, die 65 kg Äpfel fassen, zur Verfügung.
Bestimme jedesmal aus dem Nettogewicht und der Tara das Bruttogewicht der Kisten! Gib eine kurze Merkregel für die Berechnung des Bruttogewichts an! Abgekürzt kann man der Regel die Form geben:

$$N + T = B$$

Hier stehen wieder die Buchstaben N, T und B statt der Zahlen unserer Aufgabe.
Bilde Beispiele, in denen die Tara berechnet wird!
Bilde auch hierfür eine Merkregel mit den Buchstaben N, T und B! Erkläre den Ausdruck

$$B - T = N!$$

Wende diese Regel auf selbsterdachte Beispiele an!
Man kann die Merkregeln für die Berechnung des Flächeninhalts von Quadrat und Rechteck abkürzen, indem man die Maßzahlen der Länge der Seiten mit a bzw. b und die Maßzahl der Fläche mit F bezeichnet. Wie findet man den Umfang des Rechtecks? Bilde auch dafür einen Buchstabenausdruck! $U = \ldots\ldots$

Wie heißt die „Formel“ für den Flächeninhalt des Quadrats bzw. des Rechtecks?

Man benutzt oft Buchstaben zur Bezeichnung von Zahlen, wenn man für viele gleichartige Aufgaben den Lösungsweg angeben will. Die Buchstaben stehen an Stelle von bestimmten Zahlen, sie heißen **allgemeine** Zahlen.

Anmerkung: Als Zeichen für Zahlen werden meistens die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets verwendet. Dabei kann jeder Buchstabe jeden Zahlwert bedeuten. In einem mehrere Buchstaben enthaltenden Zahlenausdruck bezeichnen gleiche Buchstaben denselben, verschiedene Buchstaben dagegen ungleiche Zahlenwerte.

Aufgaben

1. Wieviel m^3 Steinkohle fördern

6	Arbeiter,	wenn	ein	Arbeiter	5	m^3	
17	„	„	„	„	9	„	
25	„	„	„	„	7,8	„	
b	„	„	„	„	*a*	„	fördert?

2. Wieviel DM kostet

1 kg, wenn	27	kg	135,—	DM	
	13	„	78,—	„	
	9	„	12,60	„	
	17	„	8,84	„	
	17	„	*a*	„	
	b	„	*a*	„	kosten?

3. Welchen Ertrag ergibt

1 ha, wenn	17	ha	305	dz	
	13	„	220	„	
	9	„	165	„	
	b	„	*a*	„	Roggen erbringen?

4. In einer Eisengießerei werden die Gießarbeiten im Leistungslohn bezahlt.

Wieviel DM Lohn sind zu zahlen

für	8	Gußstücke,	wenn	für	15	Stück	63	DM	
„	14	„	„	„	9	„	42	„	
„	14	„	„	„	9	„	*a*	„	
„	14	„	„	„	*b*	„	*a*	„	
„	*c*	„	„	„	*b*	„	*a*	„	vergütet werden?

5. Die Herstellungskosten eines Schraubstockes betragen **a)** 7 DM, **b)** 19,50 DM, **c)** h DM. Für allgemeine Verwaltungskosten müssen zugeschlagen werden **a)** 2 DM, **b)** 6,30 DM, **c)** v DM.
Berechne die Selbstkosten s!

6. Das wöchentliche Produktionssoll einer Fahrradfabrik von
a) 176 Stück, **b)** 270 Stück, **c)** 312 Stück, **d)** s Stück
wurde mit
a) 16 Stück, **b)** 56 Stück, **c)** 67 Stück, **d)** a Stück
übererfüllt.
Stelle fest, welche Produktionsleistung (p) sich ergibt!

7. In einem Dorf des Kreises Parchim in Mecklenburg wird der Schweinebestand jedes Neubauern um durchschnittlich
2, 3, e Stück gesteigert.
Wie groß ist die durchschnittliche Steigerung s bei
5, 7, n Neubauern?

8. Welche Zahl ist

a) um 1 größer als 99, 107, 1000, a, h, l, p;
b) um 1 kleiner als 58, 100, b, n, s, t;
c) um 2, 4, 7, 8, 9 größer als x;
d) um 1, 2, 3, 5, 10 kleiner als y?

9. a) Zwischen welchen beiden ganzen Zahlen liegen die ganzen Zahlen k; $k+9$; $k-17$?
b) Zähle von $p-6$ bis $p+5$; $g-3$ bis $g+8$; $a-4$ bis $a+7$!
c) Zähle von r bis $r-8$; $t+3$ bis $t-9$; $z+1$ bis $z-3$!

10. a) Welche Zahl ist größer: $g+5$ oder $g+7$; $g-2$ oder $g-5$; $g-8$ oder $g-11$?
b) Wie groß ist der Unterschied zwischen $b+3$ und b; $c+4$ und $c+9$; $a+8$ und $a-1$; $m-5$ und $m+5$; $p-1$ und $p-9$; $r-3$ und $r-17$?

11. Nenne die auf a (b; $g+4$; $h-2$) folgenden 3 (5, 9) Zahlen, die sich um je 3 (4, 5) unterscheiden!

12. Wie kann man kürzer ausdrücken $3+3+3+3$; $7+7+7$; $a+a$; $b+b+b+b+b$?

13. Welche Zahl ist **a)** doppelt so groß wie r, **b)** 10 mal so groß wie z, **c)** n-mal so groß wie s?

14. Welche Zahl ist **a)** 5 mal so groß wie x, **b)** 6 mal so groß wie n, **c)** a-mal so groß wie 5, **d)** k-mal so groß wie w, **e)** x-mal so groß wie y?

15. Wie groß ist **a)** der 7. Teil von 3, **b)** der 3. Teil von a, **c)** der r-te Teil von 10, **d)** der y-te Teil von x?

26. Auswerten von Buchstabenausdrücken

Der Wert eines Buchstabenausdrucks hängt im allgemeinen davon ab, welche bestimmten Zahlen an die Stelle der Buchstaben gesetzt werden.

Aufgaben

1. Welche Werte haben die Ausdrücke $2n$ und $2n+1$, wenn man für n die ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... einsetzt? Welche Zahlenfolgen erhält man? Welche Zahlen stellen die allgemeinen Zahlenausdrücke $2n$; $2n+1$ vor?

2. Setze in folgenden Buchstabenausdrücken für $l=24$, für $m=20$, für $n=16$, für $p=12$ und für $r=10$ ein und berechne jedesmal den Wert:

a)	b)	c)	d)	e)
$l+m$	$l-m$	$l+m+n$	$l\cdot m$	$l:p$
$l+n$	$l-n$	$l+p+r$	$l\cdot p$	$l:r$
$l+p$	$l-p$	$m+p+r$	$m\cdot r$	$m:n$
$l+r$	$l-r$	$n+l+r$	$m\cdot p$	$m:p$
$m+n$	$m-n$	$l-p-r$	$n\cdot r$	$n:l$
$m+p$	$m-p$	$l+r-m$	$n\cdot p$	$n:p$
$m+r$	$m-r$	$m+n-p$	$r\cdot l$	$r:l$
$n+r$	$n-r$	$n-r+p$	$r\cdot p$	$p:l$!

3. Berechne den Wert folgender Buchstabenausdrücke:

a) $12x$, $16x$, $3x$, $7x$, wenn $x = 7\frac{1}{2}$ ist,

b) $\frac{y}{4}$, $\frac{y}{6}$, $\frac{y}{9}$, $\frac{5y}{18}$, $\frac{11y}{12}$, wenn $y = 36$ ist,

c) $3x + 4y$, wenn $x = 5$, $y = 10$ ist,

d) $5a + 3b - 4c$, wenn $a = 15$, $b = 10$, $c = 5$ ist,

e) $16r - 10s$, wenn $r = 2\frac{1}{4}$, $s = 2{,}5$ ist,

f) $2{,}5m - 1{,}25n + 7{,}5$, wenn $m = 18$, $n = 36$ ist!

4. Setze in dem Ausdruck $y = x + 3$ für x der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... bis 10 und rechne jedesmal den Wert y dazu aus! Stelle die zusammengehörigen Werte in einer Wertetafel nach folgendem Muster zusammen:

x	1	2	3	4	....	10
y	4	5	.	.	....	.

5. Berechne ebenso Wertetafeln für die Ausdrücke:

a) $y = 2x - 1$ **b)** $y = \frac{x}{2} + 4$ **c)** $y = 35 - 3x$!

6. Entwirf Wertetafeln für die folgenden Ausdrücke:

a) $a + 7$ für $a = 0, 1, 2, 3, \ldots$ bis 10
b) $a - 12$ „ $a = 22, 21, 20, \ldots$ „ 12
c) $10e$ „ $e = 1, 2, 3, \ldots$ „ 10
d) $2x + 5$ „ $x = 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \ldots$ „ 5
e) $3c - 4$ „ $c = 2, 3, 4, \ldots$ „ 10
f) $18 - 2d$ „ $d = 1, 2, 3, \ldots$ „ 9
g) $\frac{f}{4}$ „ $f = 1, 2, 3, \ldots$ „ 10
h) $\frac{5}{y}$ „ $y = 1, 2, 3, \ldots$ „ 10!

7. Eine Arbeitsgruppe besteht aus a Arbeitern, von denen jeder einen Wochenlohn von g DM erhält. In der letzten Woche ergab sich ein Leistungszuschlag von 1 DM je Arbeiter. Berechne die Lohnsumme s, die in dieser Woche gezahlt wurde!
Welcher Betrag ergibt sich, wenn die Gruppe aus **a)** 3, **b)** 5, **c)** 12 Arbeitern besteht, jeder einen Grundlohn von **a)** 35 DM, **b)** 44 DM, **c)** 56 DM erhält, zu dem 12 DM, 7 DM, 9,30 DM Leistungszuschlag kommen?

8. Ein Hochofenwerker überbot die Leistungsnorm von n kg je Stunde um p%. Wieviel kg schaffte er in t Stunden?

9. In einem Fabrikbetrieb wurden monatlich im Durchschnitt r Mittagessen-Portionen ausgegeben. Wieviel Portionen sind das **a)** in 1 Jahr, **b)** in t Jahren? Wie lange dauert es, bis k Portionen ausgegeben sind?

Setze in den Buchstabenausdrücken $r = 2\,400$ und $k = 6\,000$. Wie groß ist dann t?
Setze $r = 1\,600$ und $t = \frac{1}{2}$. Wie groß ist dann k?

10. Stelle fest, um wieviel Jahre deine Mutter älter ist als du! Bezeichne dein Alter mit x, das der Mutter mit y und gib den Unterschied als Buchstabenausdruck an! Nun stelle eine Wertetafel her, indem du für dein Alter 1, 2, 3, ... bis 20 einsetzt. Wie alt war danach deine Mutter, als du 1, 6, 10 Jahre alt warst? Wie alt wird sie sein, wenn du 20 Jahre alt bist?

27. Addition und Subtraktion allgemeiner Zahlen

Gib Zahlenbeispiele für das Vertauschungsgesetz der Addition! Man kann die Zahlenbeispiele durch allgemeine Zahlen zusammenfassen in:

$$a + b = b + a$$

Mit diesen Buchstabenausdrücken haben wir dem Gesetz eine kurze und allgemeingültige Form gegeben. Abb. 3 zeigt, wie die Aufgaben $a + b$ und $a - b$ am Zahlenstrahl gelöst werden (Spiegelung am Endpunkte von a).

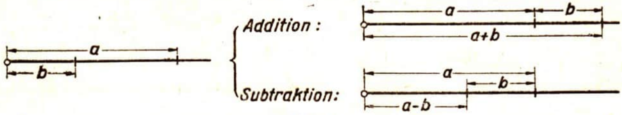


Abb. 3

1. Die Additionsaufgabe: Summand + Summand = Summe

2. Die Subtraktionsaufgabe: Minuend — Subtrahend = Differenz

3. Das Vertauschungsgesetz der Addition:

Der Wert einer Summe ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden:

$\boldsymbol{a + b = b + a}$ (Abb. 4).

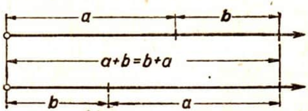


Abb. 4

Anmerkungen:

1. Zusammenfassen gleichartiger Größen:

$$a + a = 2a; \quad 4x + 6x = 10x; \quad 20y - 6y = 14y$$

2. Die Reihenfolge des Addierens und Subtrahierens:

Enthält ein Zahlenausdruck mehr als zwei Posten, von denen ein Teil addiert, der andere subtrahiert werden soll, so spricht man von einer „mehrgliedrig" algebraischen Summe; die Reihenfolge, in der Addieren und Subtrahieren ausgeführt wird, darf man verändern.

$$a + b - c = a - c + b$$

Beispiel: $15b + 9a - 7b - 4a = 15b - 7b + 9a - 4a = 8b + 5a$

3. **Addieren und Subtrahieren von Summen und Differenzen:**

a) $127 + 32 = 127 + (30 + 2) = 127 + 30 + 2 = 159$
$127 + 38 = 127 + (40 - 2) = 127 + 40 - 2 = 165$
$127 - 32 = 127 - (30 + 2) = 127 - 30 - 2 = 95$
$127 - 38 = 127 - (40 - 2) = 127 - 40 + 2 = 89$

b) Klammern, die Glieder einer Summe zusammenfassen, dürfen wegbleiben, wenn folgende Regeln beachtet werden:

I. Eine Klammer, vor der ein Pluszeichen steht, kann ohne weiteres weggelassen werden.

II. Eine Klammer, vor der ein Minuszeichen steht, kann nur dann weggelassen werden, wenn man alle Additions- und Subtraktionszeichen in der Klammer umkehrt.

$a + (b + c) = a + b + c$ $\qquad$ $a - (b + c) = a - b - c$

$a + (b - c) = a + b - c$ $\qquad$ $a - (b - c) = a - b + c$

Man sagt dann, die Klammern sind aufgelöst worden.

Erkläre die Formel $a - (b - c) = a - b + c$ am Zahlenstrahl (Abb. 5)!

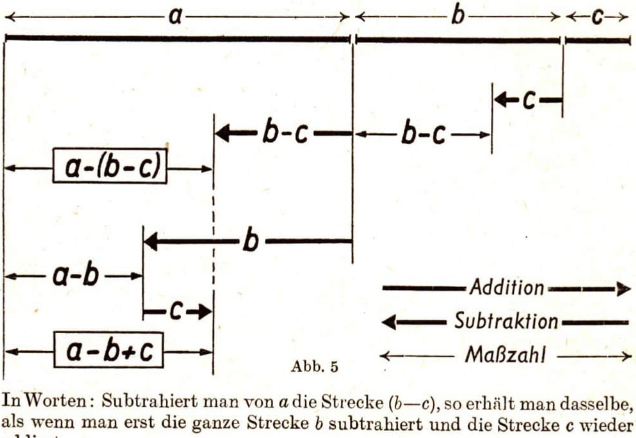


Abb. 5

In Worten: Subtrahiert man von a die Strecke $(b—c)$, so erhält man dasselbe, als wenn man erst die ganze Strecke b subtrahiert und die Strecke c wieder addiert.

c) Rechenvorteile:

Schreibe in den folgenden Aufgaben die zweite Zahl als Summe oder Differenz:

$361 + 99 = 361 + 100 - 1 = 360 + 100 = 460$;
$432 - 98$; $161 + 51$; $246 + 49$; $712 - 198$; $316 + 204$;
$812 - 399$; $812 + 188$; $1453 - 808$; $4379 + 3995$;
$8357 - 4997$!

Aufgaben

1. Löse folgende Aufgaben am Zahlenstrahl:

$3 + 5$, $9 + 7$, $8 + 6$, $4 + 9$, $12 - 9$, $13 - 6$, $14 - 8$, $11 - 7$!

2. Löse folgende Aufgaben auf vorteilhafte Weise:

a) $45 + 32 + 35$ **b)** $53 + 78 + 22 + 47$ **c)** $134 + 97 + 56 + 63$
d) $68 - 26 - 32$ **e)** $96 - 29 - 46 + 24$ **f)** $117 - 33 - 17 - 47$
g) $264 - 49 - 164 - 51$ **h)** $478 - 82 - 43 - 178 - 68$!

Was erkennt man beim Lösen der letzten beiden Aufgaben in bezug auf mehrere Subtrahenden?

3. a) $9x + 3x$ **b)** $15t + 17t$ **c)** $7a + 5a + 3a$
d) $8v + 17v + 12v + 23v$ **e)** $19b + 7b - 9b$
f) $18r - 9r + 12r$ **g)** $28s - 3s - 8s - 12s$
h) $18y + 8a - 8a$ **i)** $15m + 12p - 12p$

Welchen allgemeinen Satz lassen die letzten Aufgaben erkennen?

4. a) $12a + 7b + 3a$ **b)** $29x + 17x + 5y$ **c)** $45d + 38c + 17c$
d) $63x + 17y - 25x$ **e)** $16a - 9a + 13b$ **f)** $28 + 3a - 19$
g) $55r + 16s - 13r + 9s$ **h)** $42b - 19b + 15c - 6c$
i) $17 + 23a - 14 + 31b - 18b - 15a + c$
k) $34x + 11z - 16x + 12y + 13z - 4y - 5x$

5. a) $9\frac{3}{4} - 7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}$ **b)** $6\frac{5}{8} + 2\frac{1}{2} - 3\frac{5}{8}$ **c)** $9\frac{1}{6} - 14\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6}$
d) $7{,}8 + 9{,}7 - 5{,}8$ **e)** $12{,}75 + 2{,}25 - 6{,}47$
f) $16{,}8 + 7{,}02 - 3{,}45$

6. **a)** $4{,}5a + 6{,}3b - 3{,}9a$ **b)** $9{,}3m - 14{,}5n + 8{,}7m$
c) $8{,}8x + 2{,}4y + 2{,}2x$ **d)** $9{,}6u + 15{,}3v - 4{,}7u$
e) $1{,}4x + 2{,}3y - 0{,}9x$ **f)** $5{,}6a - 4{,}13b - 4{,}9a$
g) $4y + 9{,}9z - 2{,}8y$ **h)** $5{,}8v - 2v + 4{,}4w$
i) $16{,}6m + 3{,}15n - 8{,}1m$ **k)** $7{,}4x + 3{,}2y - 6{,}9x$

7. **a)** $4\frac{1}{2}x + 3\frac{2}{3}y + 3\frac{1}{4}x$ **b)** $7\frac{4}{5}a + 3\frac{1}{4}b + 2\frac{2}{5}a$
c) $1\frac{2}{3}m + 5\frac{1}{2}n - \frac{5}{6}m + \frac{3}{4}n$ **d)** $8\frac{4}{5}d + 7\frac{1}{4}e - 5\frac{1}{2}d - 2\frac{1}{2}e$
e) $0{,}8a + 7{,}4b + 0{,}02a$ **f)** $8{,}62c + 9{,}11d - 7{,}18c$
g) $3\frac{1}{2}x + 9{,}2y - 2{,}7x + 1\frac{1}{4}y$ **h)** $9{,}8a + 5\frac{1}{2}a + 92\frac{1}{5}b - 7{,}9b$

8. **a)** $3\frac{3}{4}a + 2\frac{1}{5}b + 6\frac{1}{3}a$ **b)** $9\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}y - 7\frac{1}{5}x$ **c)** $4\frac{1}{4}m - 3\frac{1}{5}n + 1\frac{7}{10}m$
d) $4\frac{7}{8}p - 6\frac{1}{20} + 5\frac{1}{3}p$ **e)** $6\frac{1}{3}a + 5\frac{1}{5}b - 4\frac{1}{8}a$ **f)** $9\frac{7}{9}a - 4\frac{1}{4}b + 6\frac{5}{6}a$
g) $9\frac{4}{9}x + 3\frac{3}{4}y - 4\frac{4}{5}x$ **h)** $8\frac{2}{3}u - 3\frac{1}{3}v + 4\frac{3}{4}u$ **i)** $6\frac{4}{5}x + 8\frac{1}{8} - 5\frac{8}{9}x$

9. **a)** $4\frac{1}{2}a + 3{,}9b - 2\frac{1}{4}a - 3{,}8b$ **b)** $16{,}4x + 9\frac{7}{9}y - 4\frac{3}{4}y - 8{,}9x$
c) $5{,}3m + 8{,}2n + 6{,}7m - 7{,}2n$ **d)** $15{,}3c + 8\frac{3}{4}p - 6\frac{1}{2}c + 9{,}4p$
e) $8\frac{1}{8}x + 5{,}6y - 3\frac{1}{4}y - 4\frac{2}{3}x$ **f)** $7\frac{5}{7}a + 6{,}6b + 8\frac{3}{4}a - 5{,}9b$

10. **a)** $283 + (117 + 89)$ **b)** $546 + (454 - 286)$
c) $975 - (375 + 126)$ **d)** $34{,}8 - (16{,}8 - 7{,}9)$
e) $18\frac{3}{4} + (12\frac{3}{4} - 4\frac{3}{4})$ **f)** $53\frac{5}{9} - (18\frac{3}{8} - 5\frac{4}{9})$

11. Rechne möglichst bequem mit Hilfe von Klammern
a) $345 + 98$ **b)** $478 + 395$ **c)** $78 + 49\frac{3}{4}$ **d)** $77{,}4 + 39{,}9$
e) $286 - 97$ **f)** $743 - 294$ **g)** $1402 - 805$ **h)** $1250 - 446$!

12. Führe das Addieren und Subtrahieren in möglichst vorteilhafter Reihenfolge aus!
a) $15r + 6{,}7s - 2\frac{1}{2}r + 4\frac{2}{3} + 1{,}3s - 3 - 4{,}5r$
b) $a + 15{,}3b - 0{,}7a - 14b + 6\frac{2}{5}c + 2{,}7a - c$
c) $16x + 7{,}9y - 22{,}4x - 3\frac{1}{2}y + 7{,}4x - y + 2\frac{3}{4}$
d) $2u + v - 3{,}8u + 4\frac{1}{4}w + 5{,}8u + 1{,}7v - 3{,}95w$
e) $8{,}4t - 9t + 5\frac{1}{4}p + 2\frac{1}{2}t - p + 8{,}5q + 3{,}7p - 7{,}9q$

13. Einen Zahlenstrahl im großen stellt jede gerade Landstraße mit ihren Kilometersteinen dar. Jemand schreitet auf einer solchen Straße **a)** von Kilometerstein 4,8 **1.** um 3,2 km vorwärts, **2.** um 2,8 km zurück; **b)** von Kilometerstein a **1.** um b km vorwärts, **2.** um c km zurück. Bei welchem Kilometerstein kommt er jedesmal an?

14. Setze in dem Buchstabenausdruck $10x + y$ **a)** $x = 1$ und für y die Zahlen 0, 1, 2, ... bis 9, **b)** $x = 2$ und für y die Zahlen 0, 1, 2, ... bis 9! Welche Zahlenfolgen erhält man?

15. Setze in dem Buchstabenausdruck $100a + 10b + c$

a) $a = 1$, für b nacheinander 0, 1, 2, ... bis 9, für c nacheinander 0, 1, 2, ... bis 9;

b) $a = 2$, für b nacheinander 0, 1, 2, ... bis 9, für c nacheinander 0, 1, 2, ... bis 9!

Welche Zahlenreihen erhält man?

16. In der Summe $a + b$ hat a den Anfangswert 9, b den Ausgangswert 11.

a) a wächst um 1, 2, 3, ... bis 10, b bleibt unverändert;

b) a bleibt unverändert, und b nimmt um 1, 2, ... bis 10 ab;

c) beide Summanden nehmen um 1, 2, ... bis 10 zu;

d) a wächst um 1, 2, ... bis 10, und b nimmt um 1, 2, ... bis 10 ab.

Wie ändert sich jedesmal die Summe?

17. In der Differenz $a - b$ hat a den Ausgangswert 50, b den Anfangswert 13,4.

a) Der Subtrahend bleibt unverändert, der Minuend aber nimmt um 1, 2, ... bis 10 zu;

b) der Minuend bleibt unverändert, der Subtrahend nimmt um 1, 2, 3, ... bis 10 zu;

c) der Minuend nimmt um 1, 2, ... bis 10 zu, der Subtrahend dagegen um ebensoviel ab.

Wie verändert sich jedesmal die Differenz?

28. Multiplikation allgemeiner Zahlen

Wiederhole das Vertauschungsgesetz der Multiplikation und untersuche, ob es auch für mehr als zwei Faktoren Gültigkeit hat!

1. Die Multiplikationsaufgabe:

Faktor • Faktor = Produkt

Ein Produkt aus gleichen Faktoren heißt Potenz: $\boldsymbol{a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4}$

2. Das Vertauschungsgesetz:

Der Wert eines Produktes ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren:

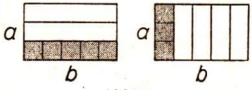


Abb. 6a

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$$

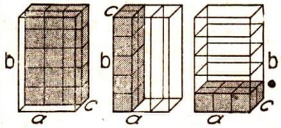


Abb. 6b

$$\boldsymbol{a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a}$$

3. Man kann ein Produkt mit einer Zahl multiplizieren, indem man einen seiner Faktoren mit der Zahl und das Ergebnis mit dem Produkt der anderen Faktoren multipliziert.

Beispiel: $3a \cdot 4b = 3 \cdot a \cdot 4 \cdot b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12ab$

Bemerkung: Vor allgemeinen Zahlen kann das Multiplikationszeichen weggelassen werden.

Aufgaben

1. Schreibe kürzer

a) $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ **b)** $a + a + a + a$ **c)** $4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2$
d) $6b + 6b + 6b$ **e)** $xy + xy + xy$ **f)** $(p + q) + (p + q)$!

Berechne

2. a) $3 \cdot 5a$ **b)** $6 \cdot 4b$ **c)** $4{,}5 \cdot 8x$ **d)** $15x \cdot 6$ **e)** $28y \cdot 4$
f) $46a \cdot 3$ **g)** $5 \cdot 6{,}3x$ **h)** $8{,}4y \cdot 9$ **i)** $13{,}2a \cdot 8$ **k)** $16 \cdot 2{,}3b$
l) $5 \cdot 6{,}6x$ **m)** $9{,}9a \cdot 4$ **n)** $12a \cdot 4{,}5$ **o)** $3b \cdot 6{,}6$ **p)** $5{,}5 \cdot 4x$

3. a) $6x \cdot 5y$ **b)** $12m \cdot 7n$ **c)** $18a \cdot \frac{1}{2}b$ **d)** $1{,}5r \cdot 20s$
e) $3\frac{1}{2}p \cdot 6q$ **f)** $1\frac{1}{2}u \cdot 2\frac{1}{2}v$ **g)** $10{,}6m \cdot \frac{1}{2}s$ **h)** $10u \cdot 15v$
i) $0{,}125y \cdot 8z$ **k)** $4\frac{7}{10}t \cdot 2{,}5u$ **l)** $2a \cdot 3b \cdot 4c$ **m)** $6{,}5x \cdot 4y \cdot 10z$
n) $26m \cdot \frac{1}{2}n \cdot 0{,}1p$ **o)** $100x \cdot \frac{1}{10}y \cdot 0{,}1z$ **p)** $\frac{1}{5}a \cdot 0{,}2b \cdot 50c$

4. a) $4ab \cdot 9mn$ **b)** $5xy \cdot 2{,}3uv$ **c)** $9{,}8 \cdot 3bc$
d) $6{,}3a \cdot 4{,}5bc$ **e)** $9{,}3m \cdot 5no$ **f)** $2{,}2op \cdot 4{,}1qr$
g) $8s \cdot 7{,}4t$ **h)** $8{,}1a \cdot 2{,}2bc$ **i)** $9x \cdot 0{,}4yz$

5. a) $6ik \cdot 3lm$ **b)** $2ab \cdot 3xy$ **c)** $4{,}5uv \cdot 6wx$
d) $2xy \cdot 3z \cdot 4u$ **e)** $14m \cdot \frac{1}{2}uv \cdot 3p$ **f)** $16ab \cdot 7cd$!

6. Berechne vorteilhaft
a) $25r \cdot 72t$ **b)** $15rs \cdot 12tv$ **c)** $2\frac{1}{2}x \cdot 7y \cdot 4z \cdot \frac{5}{7}u$
d) $4\frac{1}{6}c \cdot \frac{2}{3}e \cdot 6f \cdot 3g$ **e)** $2\frac{1}{2}rs \cdot 3\frac{1}{10}y \cdot 4a$ **f)** $6\frac{2}{3}mn \cdot 21b \cdot \frac{1}{2}c$!

7. Schreibe kürzer
a) $5 \cdot 5 \cdot 5$ **b)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
c) $a \cdot a \cdot a \cdot a$ **d)** $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$
e) $(a + b) \cdot (a + b)$ **f)** $(x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y)$
g) $(p - q) \cdot (p - q) \cdot (p - q) \cdot (p - q)$!

8. Wie heißt die Potenz, wenn **a)** 8 sechsmal, **b)** 10 a-mal, **c)** p r-mal als Faktor steht?

9. a) $4x \cdot 3x \cdot x$ **b)** $5a \cdot 2a \cdot 6a$ **c)** $6a \cdot 7b \cdot \frac{1}{2}a$
d) $2x \cdot 0{,}5y \cdot 3y$ **e)** $3ab \cdot ab \cdot 4ab$ **f)** $3xy \cdot 2xy \cdot 0{,}5xy$

29. Multiplizieren von Summen und Differenzen

Zwei Heimarbeiterinnen nähen Arbeitshosen.

In einer Woche stellen durchschnittlich her:

Frau Müller 20 Paar, Frau Schmidt 14 Paar

Wie groß ist die Arbeitsleistung innerhalb von 4 Wochen?

Es ergeben sich zwei Lösungswege:

1. Man addiert die Wochenleistung der zwei Näherinnen und multipliziert die Summe mit 4.
2. Man multipliziert die Wochenleistung jeder Näherin mit 4 und addiert die zwei Produkte.

Beide Wege führen zum gleichen Ergebnis:

$$4\,(20 + 14) = 4 \cdot 20 + 4 \cdot 14$$

In Buchstaben: $$a(b + c) = ab + ac$$

Der Maler Karl Schmidt und seine Frau, die Postarbeiterin Erna Schmidt, verdienen zusammen wöchentlich s DM, wovon u DM auf Frau Schmidt entfallen. Im Sommer setzt Frau Schmidt acht Wochen aus. Mit welchen Einkünften müssen die Eheleute in dieser Zeit auskommen?

$$8\,(s - u) = 8s - 8\,u$$

Auch hier ergeben sich also zwei Lösungswege:

1. Man bildet die Differenz zwischen s und u und multipliziert sie mit 8.
2. Man bildet die beiden Produkte $8 \cdot s$ sowie $8 \cdot u$ und ermittelt deren Differenz.

Man multipliziert eine Summe oder Differenz, indem man jedes Glied einzeln multipliziert und die Teilergebnisse addiert oder subtrahiert.

$\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac}$ (Abb. 7) $\boldsymbol{a(b - c) = ab - ac}$ (Abb. 8)

Veranschaulichung: Abb. 7 und 8.

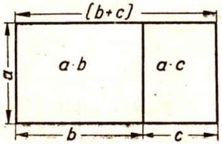


Abb. 7

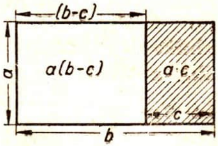


Abb. 8

Aufgaben

1. Berechne auf zweierlei Weise

a) $3\,(5 + 2)$
$9\,(20 + 5)$
$24\,(\frac{1}{4} + \frac{1}{3})$

b) $\frac{3}{4}\,(20 - 4)$
$15\,(0{,}6 - \frac{1}{5})$
$\frac{1}{4}\,(1{,}2 + 20)$

c) $4\,(5 + 6 + 7)$
$17\,(10 - 4 + 3)$
$24\,(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4})$!

2. a) $5\,(a + b)$
$3\,(x - y)$
$12\,(b + c)$
$20\,(m - n)$

b) $15\,(r + t - q)$
$2\,(a + 2b + c)$
$5\,(3a - b)$
$10\,(2x - 3y)$

c) $12\,(3\frac{1}{2}a + 4\frac{1}{4}b)$
$8\,(5\frac{1}{3}e + 2\frac{4}{5}f)$
$15\,(6{,}4r - 4\frac{5}{6}s)$
$9\,(1{,}2r + \frac{1}{3}s - 0{,}1t)$

3. a) $3(x+5)$ **b)** $a(b+c)$ **c)** $11(4a-5y+10)$
$25(y+3)$ $x(y-z)$ $m(n+p-q)$
$7(2x-4)$ $m(4o-9p)$ $r(s-t+u-v)$

4. a) $2b(c+d)$ **b)** $x(2y-z)$ **c)** $2{,}5v(6m+14x-10z)$
$4d(e-f)$ $u(3v-5w)$ $4\frac{1}{2}a(7m-9n+o)$
$5x(a+b)$ $2a(4b-3c)$ $6{,}4o(3p-0{,}8q-\frac{1}{2}r)$

5. a) $3a(a+b)$ **b)** $ab(a-b^3)$ **c)** $4c(2c+9d)$ **d)** $a^2(a^3+b^2)$
$m^2(m+n)$ $o^3(o^2+q)$ $7g(f^3-5g^2)$ $5x(5x^2-10y^3)$

6. a) $(a+b)c$ **b)** $(2a+b)2a$ **c)** $(3x+4{,}5y-2z)3x$
d) $(m+n)m$ **e)** $(4x-3y)2b$ **f)** $(50-3p+6q)4op$
g) $(4x-3y)5xy$ **h)** $(9{,}2a-4b)5b$ **i)** $(6m-4{,}5n+2m)5m$

7. a) $5+3\cdot 9$ **b)** $6\cdot 5-3$ **c)** $4\cdot 2a+3b$ **d)** $7x-5y\cdot 3$
$(5+3)\cdot 9$ $6\cdot(5-3)$ $4(2a+3b)$ $(7x-5y)\cdot 3$

Zahlenrätsel

8. Wenn man die Summe von 12 und 18 mit einer gewissen Zahl multipliziert, so erhält man 90. Wie heißt die Zahl?

9. Wenn man 15 zu einer gewissen Zahl addiert und die Summe mit 5 multipliziert, so erhält man 120!

10. Wenn man von einer Zahl 12 subtrahiert und den Rest dann mit 4 multipliziert, so erhält man 32.

30. Division allgemeiner Zahlen, Summen, Differenzen und Produkte

Dividiere $42:6$; $56:8$; $120:15$! Prüfe die Richtigkeit!
In $84:3=28$ heißt die zu teilende Zahl 84 **Dividend,** der Teiler 3 **Divisor** und das Ergebnis 28 **Quotient.**
In welche beiden durch 8 teilbare Summanden kann man 96 beim Dividieren durch 8 zerlegen? Stelle 96 als eingeklammerte Summe dar und führe die Division der Summanden aus!
Betrachte den Dividenden als Differenz und teile $392:4$; $693:7$; $925:25$!
Bestimme, ohne das Produkt zu berechnen, $(6\cdot 7):3$; $(20\cdot 19):5$; $(15\cdot 28):7$; $(18\cdot 45):9$; $(a\cdot b):c$!
Wieviel ist $0:3$; $0:5$; $0:2\frac{1}{2}$; $0:3{,}5$?
Ist es möglich, einen Betrag unter 0 Personen zu teilen?
Merke: Man kann durch Null nicht dividieren.

1. Die Divisionsaufgabe:

$$\textbf{Dividend} : \textbf{Divisor} = \textbf{Quotient}$$

2. Dividieren ist die Umkehrung des Multiplizierens.

3. Man kann eine Summe oder Differenz dividieren, indem man die einzelnen Glieder dividiert und die Teilquotienten addiert oder subtrahiert.

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$
$$(a - b) : c = a : c - b : c$$

4. Man kann ein Produkt dividieren, indem man nur einen Faktor dividiert und das Ergebnis mit dem anderen Faktor multipliziert.

$$(ab) : c = (a : c)\, b = a \cdot (b : c)$$

Da Multiplikation und Division aus Addition und Subtraktion entstehen, bilden sie höhere Rechenarten als die Addition und Subtraktion. Man bezeichnet Addition und Subtraktion als Rechenarten erster Stufe, die Multiplikation und Division als Rechenarten zweiter Stufe. Bei der Berechnung von Zahlenausdrücken, die durch verschiedene Rechenarten gebildet sind, geht die höhere Rechenart der niederen stets voran, wenn nicht Klammern eine besondere Vorschrift für die Reihenfolge der Berechnung geben. Merke daher: „Punktrechnen geht vor Strichrechnen".

Aufgaben

1. a) $6a : 6$ **b)** $9x : 9$ **c)** $16b : 4$ **d)** $15y : 5$
e) $20ab : 4$ **f)** $100yz : 25$ **g)** $z : z$ **h)** $2m : m$

2. a) $3or : 6r$ **b)** $ab : b$ **c)** $ab : a$ **d)** $ab : ab$
e) $32mn : 8m$ **f)** $36pq : 9pq$ **g)** $72stu : 18st$ **h)** $14uv : 7w$

3. a) $\frac{3x \cdot 4}{6}$ **b)** $\frac{15a \cdot 3b}{9}$ **c)** $\frac{6xy \cdot 9z}{x}$ **d)** $\frac{36uv \cdot 3p}{9u}$
e) $\frac{16{,}5xy \cdot 2zv}{11xv}$ **f)** $\frac{48mn \cdot 1{,}5o \cdot 7p}{72mop}$

4. Untersuche, ob die verschieden gesetzten Klammern das Ergebnis ändern!

a) $15u \cdot 6v : 3$ **b)** $(15u \cdot 6v) : 3$ **c)** $15u \cdot (6v : 3)$
d) $144abc : 12b \cdot 3x$ **e)** $(144abc : 12b) \cdot 3x$ **f)** $144abc : (12b \cdot 3x)$

5. Untersuche, ob die veränderte Reihenfolge der Rechenvorgänge einen Einfluß auf das Ergebnis hat!

a) $(84xz : 7z) \cdot 3y$ $(84xz \cdot 3y) : 7z$

b) $(78ab \cdot 6c) : 13b$ $\qquad$ $(78ab : 13b) \cdot 6c$

c) $(87st : 5{,}8t) \cdot 2{,}5v$ $\qquad$ $(87st \cdot 2{,}5v) : 5{,}8t$

Sprich die gewonnene Erkenntnis in einem Merksatz aus!

6. a) $(21 + 35) : 7$ **b)** $(65 - 39) : 13$ **c)** $(7{,}5 + 10 - 2{,}5) : 2{,}5$
d) $(a + b) : 10$ **e)** $(m - n) : 5$ **f)** $(x + 14) : 7$
g) $(y + 50) : 50$ **h)** $(a - b) : a$ **i)** $(m + 1) : m$

7. a) $(3a + 15) : 3$ **b)** $(6x + 18y) : 6$ **c)** $(4a + 1) : 4$
d) $(25 - 6ox) : 5$ **e)** $(px + qx) : x$ **f)** $(ay - by) : y$
g) $(12mn - 16pn) : 4n$ **h)** $(6{,}5xs + 20ps - 1{,}5qs) : 5s$
i) $(125abx - 75aby - 100abz) : 25ab$

VI. Gleichungen

31. Einfache Gleichungen

Eine Tafelwaage, bei der Gleichgewicht herrscht, hat auf ihren beiden Seiten gleiche Gewichtsmengen. In Abb. 9 trägt die linke Waagschale ein 50-g-Gewicht und ein Stück Käse, sein Gewicht sei x g. Die rechte Waagschale dagegen trägt drei 200-g-Gewichte. x ist die unbekannte Größe.

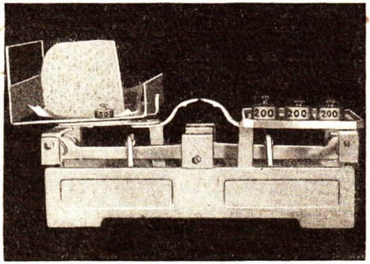


Abb. 9

$$\underset{\text{(linke Waagschale)}}{x + 50} = \underset{\text{(rechte Waagschale)}}{600}$$

Für die Belastung der beiden Waagschalen läßt sich folgende Beziehung aufstellen:

$$x + 50 = 3 \cdot 200$$

$$\text{oder} \quad x + 50 = 600$$

Einen solchen Ausdruck nennt man eine **Gleichung.**

Da in dieser Gleichung der Wert für x bestimmt werden soll, nennt man sie eine Bestimmungsgleichung, x die Unbekannte. Das Bestimmen der Unbekannten x kann man sich an der Waage verdeutlichen: die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn wir links und rechts die gleichen Gewichte zulegen oder auch die gleichen Gewichte herunternehmen.

Die Gleichung
$$x + 50 = 600$$
bleibt deshalb richtig, wenn wir links und rechts 50 subtrahieren:
$$x + 50 - 50 = 600 - 50$$
also
$$x = 550$$

Die Ausgleichsregel: In einer Gleichung darf man auf beiden Seiten gleiche Beträge addieren oder subtrahieren.

Beispiele:

1.
$$\begin{aligned} x + 7 &= 15 \\ x + 7 - 7 &= 15 - 7 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x - 4 &= 17 \\ x - 4 + 4 &= 17 + 4 \\ x &= 21 \end{aligned}$$

Proben:

$$\begin{aligned} 8 + 7 &= 15 \\ 15 &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 21 - 4 &= 17 \\ 17 &= 17 \end{aligned}$$

Aufgaben

1. Ergänze zu „richtigen" Gleichungen

a) $6 + 8 = 7 \ldots$ **b)** $25 - 6 = 8 \ldots$ **c)** $63 - 57 = 4 \ldots$

d) $9 \ldots = 8 + 12$ **e)** $6a = 8a \ldots$ **f)** $3x \ldots = 9x - 5x$

g) $a + 2b = a + b \ldots$ **h)** $c \ldots = b + c$ **i)** $3x + 2 = 2x + x \ldots$!

2. Weise die Richtigkeit der vervollständigten Gleichungen (Aufg. 1e bis i) durch Einsetzen von bestimmten Zahlen für die allgemeinen Zahlen nach! Woran erkennt man, daß man richtig ergänzt hat?

3. Sprich die Gleichung $x + 3 = 10$ in Worten (als Zahlenrätsel) aus! Wie findet man den Wert für x?

4. Bestimme mit Hilfe der Ausgleichsregel den Wert von x!

a) $x + 20 = 50$ **b)** $x - 4 = 16$ **c)** $42 + x = 65$

d) $50 - x = 18$ **e)** $x + 3\frac{1}{3} = 10$ **f)** $100 - x = 66\frac{2}{3}$

g) $60{,}5 - x = 0$ **h)** $2x + 3 = 15$ **i)** $x + 1 = a$

k) $x - 5 = b$ **l)** $x + a = 100$ **m)** $x - c = 50$

n) $x + m = n$ **o)** $x - p = q$ **p)** $x - a = b - c$

Gib auch diese Gleichungen in Worten wieder!

Löse die folgenden Gleichungen unter Anwendung der Ausgleichsregel:

5. **a)** $x + 14 = 32$ **b)** $x + 62 = 118$ **c)** $x + 7{,}2 = 22$
d) $x - 9 = 14$ **e)** $x - 37 = 29$ **f)** $x - 6{,}9 = 5{,}4$
g) $x + 18\frac{1}{2} = 24$ **h)** $5 + x = 39$ **i)** $13\frac{1}{2} + x = 42$
k) $x - 4\frac{2}{3} = 7\frac{1}{6}$ **l)** $x - 16{,}8 = 7{,}6$ **m)** $9{,}3 + x = 18{,}2$

6. **a)** $x + 9\frac{1}{2} = 12 + 3\frac{1}{2}$ **b)** $x - 6{,}9 = 15 - 8{,}1$
c) $x + 3a = 7a$ **d)** $x - 5b = 4{,}7b$
e) $x - 3\frac{1}{2}c = c$ **f)** $2b + x = 3a$
g) $x + 7a = b$ **h)** $x - 4a = 9b$
i) $x + 4a = 11a + 2b$ **k)** $7b + x = 3a + 11b$
l) $a + x = 10a - 7b$ **m)** $x - 4\frac{1}{2}a = a + 1\frac{3}{4}b$
n) $x - 7{,}8b = 2{,}3b - 5a$ **o)** $x - 3{,}4a = 1{,}6a + 5b$

7. **a)** $15 + x = 16\frac{1}{3}$ **b)** $x - 5\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$
c) $12 + x - 4\frac{1}{4} = 8$ **d)** $x - 7\frac{1}{2} = 2{,}9$
e) $x + 16{,}9 = 22{,}3$ **f)** $x + 17{,}9 = 48{,}6$
g) $x - 5{,}6 = 18{,}1$ **h)** $x + 4{,}16 = 16{,}46$
i) $5a + x = 3b$ **k)** $x - 4{,}2c = 3a + 4b$
l) $x + 4{,}8a = 9a - 2b$ **m)** $x - 2\frac{1}{4}a = 5{,}7a + 3b$
n) $2{,}6a + x = 9{,}2a$ **o)** $x + 5{,}5a = 6{,}2a$

8. **a)** $19 + x = 8{,}4$ **b)** $24 + x = 126{,}9$
c) $x + 3\frac{1}{2} = 14$ **d)** $x + 6{,}7 = 19$
e) $x - 5{,}5 = 14{,}5$ **f)** $x - 6{,}1 = 17{,}6$
g) $2\frac{1}{2} + x = 6\frac{3}{4}$ **h)** $9 + x = 14\frac{2}{5}$
i) $x + 4a = 9{,}6a + b$ **k)** $2a + x = 4{,}5a - 3b$
l) $6{,}6a + x = 10a - 2b$ **m)** $x - 3{,}3a = 2{,}7a + 2b$
n) $7{,}3a + x = 8{,}2a$ **o)** $5{,}1a + x = 6{,}1a - 4b$

9. **a)** $x + 5a = 6a - b$ **b)** $5{,}3a + x = 10 + 5b$
c) $19{,}3a + x = 34a$ **d)** $x + 6{,}2m = 39m + n$
e) $x - 2{,}9c = 8{,}3c + 5p$ **f)** $8{,}8r + x = 4s + 24r$
g) $5a + x = b + 6a$ **h)** $x - 9{,}1a = 5b + 10a$
i) $x - 3m = 5m - n$ **k)** $x + 1{,}8c = 6c - p!$

32. Lösung angewandter Aufgaben mit Hilfe von Gleichungen

Eine Zweigstelle der Konsumgenossenschaft Brandenburg verkaufte von der letzten Brotlieferung 123 Brote und besaß nun noch 77. Wieviel Brote waren geliefert worden? Die Anzahl der gelieferten Brote bezeichnet man mit x und stellt fest:

1. Die Lieferung bestand aus x Broten.

2. Dann bildet man durch folgende Überlegung aus den Angaben der Aufgabe eine Gleichung:

Die Zweigstelle verkauft von x Broten 123; sie behält also $(x - 123)$ Brote; das sind noch 77 Brote. Die Gleichung lautet demnach:

$$(x - 123) \text{ Brote} = 77 \text{ Brote}$$

3. Lösung der Gleichung:

$$x - 123 = 77$$
$$x - 123 + 123 = 77 + 123$$
$$x = 200$$

4. Endgültige Antwort: Die Lieferung betrug 200 Brote.

5. Probe:
$$200 - 77 = 123$$
$$123 = 123$$

Aufgaben

1. Ich denke mir eine Zahl, addiere 12 und erhalte 25. Wie heißt die Zahl?

2. Von einer gedachten Zahl subtrahiere ich 26. Es bleibt 24 übrig.

3. Wenn man eine bestimmte Zahl zu 64 addiert, so erhält man 100.

4. Subtrahiert man eine gewisse Zahl von 1000, so erhält man 625.

5. Welche Zahl muß man zu 12 addieren, um 51 zu erhalten?

6. Zu welcher Zahl muß man 28 addieren, um 83 zu erhalten?

7. Von welcher Zahl muß man 54 subtrahieren, um 37 zu erhalten?

8. a) Die Summe zweier Zahlen, von denen die eine 46 beträgt, ist 74 (87, 95, 113). Wie groß ist die andere Zahl?

b) Die Differenz zweier Zahlen beträgt 18; die kleinere Zahl heißt 15 (26, 32, 15,7, $21\frac{3}{4}$). Suche die größere Zahl!

9. Im vergangenen Jahr waren zu Beginn des Schuljahres 29 Jungen in einer Klasse. Im Laufe des Jahres kamen einige Jungen hinzu, so daß es zuletzt 38 waren.

10. In der Nachbarklasse kamen im Laufe des Jahres 4 Jungen hinzu, so daß es zuletzt 38 waren.

11. Auf dem Schulhof spielt eine Anzahl Jungen. Aus einer anderen Klasse kommen 29 hinzu; 16 Jungen laufen weg, später aber kommen 2 wieder zurück, so daß jetzt 60 Jungen auf dem Hofe sind. Wieviel waren anfangs da?

12. Ein Bauer in Lindenthal lieferte im Erntemonat bereits 48,2 dz Getreide ab. Er hatte damit sein Ablieferungssoll bis auf 6,4 dz erfüllt. Wie groß war das Ablieferungssoll?

13. Nach seinem Anbauplan hatte ein Bauer 1,2 ha mit Winterweizen zu bestellen. Die Gesamtfläche des Weizenbaues betrug 1,55 ha. Wieviel ha wurden mit Sommerweizen bestellt?

14. Ein Elektroschweißer erhielt zu seinem Grundlohn einen Leistungszuschlag von 16,50 DM. Der Gesamtlohn betrug 68,20 DM.

15. Die Belegschaft einer Leipziger Eisengießerei wurde um 29 Umschüler verstärkt. 5 davon gingen in ihren alten Beruf zurück. Nach Neueinstellung von 3 Facharbeitern bestand die Belegschaft aus 183 Mitarbeitern. Wie stark war sie am Anfang?

16. Der Anbauplan für das Dorf Sommerfeld in Sachsen sah 390 ha für Getreide, 105,5 ha für Kartoffeln und 76,3 ha für Rüben vor. Wieviel ha entfielen auf Gemüse und sonstige Ackererzeugnisse, wenn das gesamte Ackerland 693 ha betrug?

33. Schriftliche Lösung von Gleichungen

Die Gleichung $7x + 4 = 8 + 5x$ wird in folgender Weise gelöst:

$$\begin{array}{lll|l}
\text{I.} & 7x + 4 & = 8 + 5x & -4 \\
\text{II.} & 7x & = 4 + 5x & -5x \\
\text{III.} & 2x & = 4 & :2 \\
 & x & = 2. &
\end{array}$$

In Gleichung I und II kommen auf jeder Seite unbekannte und bekannte Glieder vor, in Gleichung III dagegen stehen die unbekannten Glieder auf der linken Seite, die bekannten auf der rechten Seite. Gleichung I und II sind ungeordnete Gleichungen, Gleichung III ist eine geordnete Gleichung.

Aufgaben

1. a) $3x + 4 = 2x + 7$ **b)** $5x - 11 = 3x + 13$
c) $15 - 3x = 37 - 4x$ **d)** $9 + 5x - 6 - 3x = 11$
e) $16 + 8x = 25 + 5x$ **f)** $6x - 16 = 20 - 3x$

2. a) $8x + 20 - 4x = 98 - 9x$ **b)** $15x - 29 - 7x = 17 + 4x + 14$
c) $8x = 9x + 17 + 7x - 10x + 31$
d) $8 - 7x + 12 + 9x - 35 + 4x = x$

3. a) $2x - a = b + x$ **b)** $5b - 3x = 3a + b - 4x$
c) $ax + x - 4b = 2b + ax$ **d)** $2x - 4m + bx = x - 3m + bx$
e) $5x - 5a + 3b - x - 7b = 3a + 4b - 7a + 3x$

4. a) $2x + 4 = x + 20$ **b)** $3x - 5 = 2x + 18$
c) $6x + 6 = 5x + 8$ **d)** $26x + 10 = 30 + 25x$
e) $10 + 3x = 2x + 30$ **f)** $9x - 5 = 7x + 45$
g) $8x - 16 = 34 - 2x$ **h)** $6x + 6 = 46 - 4x$
i) $9x + 5 = 4x + 35$ **k)** $45 + 2x = 100 - 8x$

5. a) Addiert man zu einer Zahl ihr Vierfaches, so erhält man 65. Wie heißt die Zahl?

b) Das Zweifache und Fünffache einer Zahl geben zusammen 84. Suche die Zahl!

c) Subtrahiert man vom Siebenfachen einer Zahl 10, erhält man dasselbe, wie wenn man zum Vierfachen der Zahl 17 addiert. Wie heißt die Zahl?

d) Welche Zahl gibt, vermehrt um ihr Doppeltes und Dreifaches, 4 weniger als 100?

e) Zu einer Zahl addiert man ihr Doppeltes, zu der erhaltenen Summe das Doppelte derselben und zu dieser Summe wieder ihr Doppeltes und erhält 8 mehr als 100. Berechne die Zahl!

6. a) Welche Zahl liegt ebensoviel über 4,5, wie sie unter 7,3 liegt?
b) Welche Zahl liegt in der Mitte zwischen 3,9 und 7,3?

7. Bei der Pflichtablieferung für landwirtschaftliche Erzeugnisse konnte die Weizenablieferung durch die $1\frac{1}{2}$fache Menge Hafer ersetzt werden. Wieviel kg Weizen werden durch 600 kg Hafer abgegolten?

8. An Stelle von 100 kg Ölsaaten konnten 200 kg Hülsenfrüchte abgeliefert werden. Wieviel Ölsaaten werden durch 700 kg Hülsenfrüchte ersetzt?

9. Die Ablieferung von 125 kg Winterkartoffeln ersetzte die Juliablieferung von 100 kg Frühkartoffeln. Wieviel Frühkartoffeln entsprechen 12 dz Spätkartoffeln?

10. a) Ein Rechteck ist 5 cm länger als breit und hat einen Umfang von 46 cm. Berechne Breite und Länge des Rechtecks!

b) Ein Rechteck, das einen Umfang von 54 cm hat, ist doppelt so lang wie breit. Berechne Breite und Länge des Rechtecks!

11. Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umfang von 26 cm; ein Schenkel ist um 4 cm länger als die Grundlinie. Berechne Grundlinie und Schenkel!

12. In einem Braunkohlentagebau sind 4 Abraumbagger eingesetzt, die täglich 40 000 m³ Abraum bewegen. Der erste schafft 1 000 m³ mehr als das Doppelte des zweiten, der dritte 1 000 m³ weniger als der zweite und der vierte doppelt soviel wie der dritte.

a) Wieviel m³ Abraum bewegt der zweite Bagger?

b) Wieviel m³ bewegt jeder der übrigen Bagger?

13. In einem Steinkohlenbergwerk werden täglich 1 240 t Dampf zum Betrieb von Fördermaschinen, zur Elektrizitäts- und Preßlufterzeugung gebraucht. Die zur Elektrizitätserzeugung nötige Dampfmenge ist um 40 t kleiner als das Doppelte der zum Betrieb der Fördermaschine benötigten und für die Preßlufterzeugung wird das Doppelte der um 40 t vergrößerten Menge für die Fördermaschine gebraucht.

a) Wieviel t kommen auf die Fördermaschine?

b) Wieviel t dienen zur Elektrizitäts- und Preßlufterzeugung?

14. Eine Maschinenfabrik produzierte im 2. Vierteljahr monatlich durchschnittlich 14 Maschinen mehr, als der Normaldurchschnitt des 1. Vierteljahres ergab. So wurden im 1. Halbjahr insgesamt 282 Maschinen fertiggestellt.

Wie hoch war der Monatsdurchschnitt des 1. Vierteljahres?

VII. Das Rechnen mit relativen Zahlen

34. Einführung der relativen Zahlen

Abb. 10

1. Wir kennen die Gradeinteilung (Skala) auf dem Brettchen des Thermometers (Abb. 10). An einem Dezemberabend zeigt das Thermometer 5° Wärme; in der Nacht fällt es um 9°, wieviel Grad zeigt es also am anderen Morgen an? Für 5° Wärme und 4° Kälte sagt man: Das Thermometer steht auf $+5°$ bzw. $-4°$.
2. Rechne am Zahlenstrahl folgende Aufgaben: $7-4$; $8-7$; $4-4$; $5-9$! Was kann man zu der letzten Aufgabe sagen?

   Um die Aufgabe $5-9=5-5-4=0-4$ am Zahlenstrahl lösen zu können, hat man ähnlich wie bei der Skala des Thermometers den Strahl (Abb. 11) über den Nullpunkt hinaus nach links verlängert, auf dieser Verlängerung von Null aus dieselben Teilstrecken abgetragen, wie wir sie rechts von der Null haben, und die Teilungspunkte mit den Zahlen unserer Zahlenreihe bezeichnet.

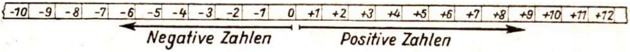


Abb. 11

Der Zahlenstrahl ist auf diese Weise zur **Zahlengeraden** erweitert worden. Um die gleichlautenden Zahlen rechts und links vom Nullpunkt unterscheiden zu können, hat man den Zahlen rechts vom Nullpunkt das Pluszeichen (+) und den Zahlen links vom Nullpunkt das Minuszeichen (—) vorgesetzt und nennt sie relative Zahlen.

Die Zeichen + und — sind als **Vorzeichen** wichtige Bestandteile der relativen Zahlen; sie sagen, ob eine Zahl rechts oder links vom Nullpunkt der Zahlengeraden liegt. Man darf die Vorzeichen nie mit den ebenso aussehenden Rechenzeichen verwechseln.

Erklärungen:

1. Zahlen mit dem Vorzeichen „+" heißen **positive**[1]) **Zahlen,** Zahlen mit dem Vorzeichen „—" heißen **negative**[2]) **Zahlen;** sie werden mit dem gemeinsamen Namen **relative**[3]) **Zahlen** bezeichnet, weil man sie auf Null als Anfangspunkt bezieht.
2. Vorzeichenfreie Zahlen heißen **absolute**[4]) **Zahlen.** Läßt man bei einer relativen Zahl das Vorzeichen weg, so erhält man ihren **absoluten Betrag.**

---

1) pónere (lat.): setzen, aufstellen. 2) negáre (lat.): verneinen.
3) relátio (lat.): die Beziehung, relativus (lat.): bezüglich.
4) absolútus (lat.): unbedingt, losgelöst.

Aufgaben

1. **a)** Das Thermometer fällt von $+3°$ auf $-12°$, **b)** von $+12°$ auf $0°$, **c)** von $+25°$ auf $+13°$, **d)** von $-2°$ auf $-8°$, **e)** von $-13°$ auf $-21°$. Um wieviel Grad ist es in jedem Fall gefallen?

2. Die bisher beobachtete höchste Temperatur der arabischen Wüste betrug $+57°$ C, die tiefste des „sibirischen Kältepols" $-68°$ C. Wie groß ist der Unterschied der beiden Temperaturen?

3. Bei einem Wettlauf sollen die unter dem Durchschnitt von 18 Minuten liegenden Zeiten je Sekunde mit 1 Punkt prämiiert werden, während die Teilnehmer, die längere Zeit benötigen, zwei Punkte je Sekunde einbüßen.

Alfred und zwei seiner Mitschüler nehmen an diesem Wettlauf teil. Alfred braucht dafür 17 Minuten 12 Sekunden, der zweite braucht 17 Minuten 49 Sekunden, der dritte braucht 19 Minuten 2 Sekunden. Berechne die Punktzahl jedes Läufers!

4. Hans ist 4 Monate 3 Tage älter als Klaus und 7 Monate 6 Tage jünger als Hilde. Welcher Altersunterschied besteht zwischen Klaus und Hilde?

5. Die Leistungen eines Arbeitskollektivs blieben im ersten Monat 8 % unter der Norm, wurden aber im zweiten Monat auf 17 % über die Norm gesteigert. Wie groß war der Unterschied?

35. Addition und Subtraktion relativer Zahlen

Das Reinvermögen eines volkseigenen Betriebes (VEB) von 420 000 DM wurde um 26 000 DM erhöht. Gleichzeitig entstanden Verpflichtungen gegenüber der zuständigen Vereinigung volkseigener Betriebe in Höhe von 21 000 DM.

Wie groß war das Reinvermögen am Ende des Jahres? Betrachte bei den Überlegungen Vermögen und Verpflichtungen als relative Größen und gib den Rechenvorgang in mathematischer Schreibweise wieder:

$$(+420\,000) + (+26\,000) + (-21\,000) = (+425\,000)$$

Achte hierbei darauf, daß Vorzeichen und Rechenzeichen zu unterscheiden sind! Man schließt aus diesem Grund das Vorzeichen mit dem absoluten Zahlenwert in eine Klammer ein.

Das Addieren oder Subtrahieren von zwei relativen Zahlen wird in Abb. 12 durch Schreiten auf der Zahlengeraden anschaulich gemacht. Denke dich auf der Zahlengeraden an der Stelle der ersten Zahl stehend. Du stellst dich dort nach der positiven Richtung der Zahlengeraden gewendet auf, wenn die zweite Zahl positiv, nach der negativen Richtung der Zahlengeraden gewendet auf, wenn die zweite Zahl negativ ist. Von dieser Stellung aus gehst du, wenn die beiden Zahlen addiert werden, soviel Schritte vorwärts, dagegen, wenn die Zahlen subtrahiert werden, soviel Schritte rückwärts, als der Betrag der zweiten Zahl angibt. Danach stehst du auf dem Punkt der Zahlengeraden, der das Ergebnis zeigt.

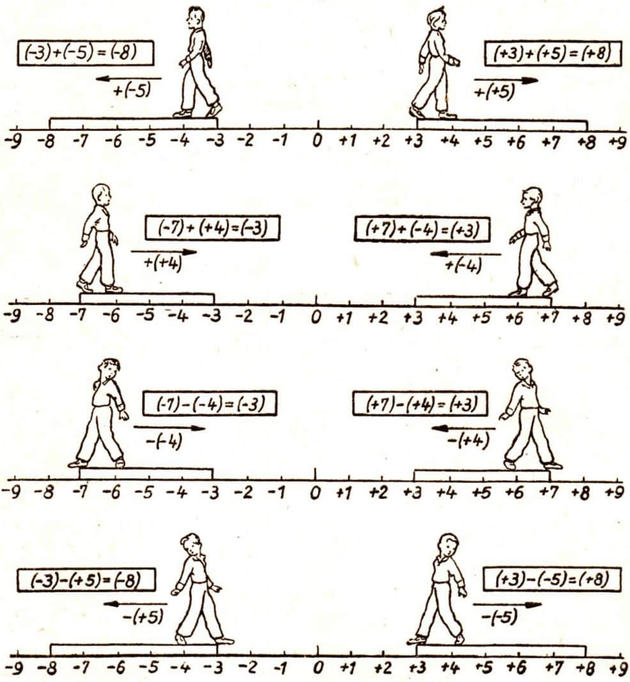


Abb. 12

Führe jede der folgenden Aufgaben so aus, wie es die Abb. 12 für die dort angegebenen Aufgaben zeigt!

$$(+7) + (+2);\ (+4) + (+3);\ (+9) + (+5)$$
$$(-8) + (-4);\ (-3) + (-7);\ (-9) + (-6)$$

Vergleiche $(+7) - (+4) = (+3)$
mit $(+7) + (-4) = (+3)$
und $(-7) - (-4) = (-3)$
mit $(-7) + (+4) = (-3)$!

Zeige, daß jemand, der nach der negativen Richtung der Zahlengeraden gewendet rückwärts schreitet, zu derselben Stelle kommt, wie wenn er nach der positiven Richtung der Zahlengeraden gewendet vorwärts schreitet.

Daraus ergeben sich folgende Regeln:

1. Relative Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addiert, indem man die Summe der absoluten Werte bildet und ihr das gemeinsame Vorzeichen gibt.

$$(+a) + (+b) = +(a+b)$$
$$(-a) + (-b) = -(a+b)$$

2. Relative Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen werden addiert, indem man die Differenz der absoluten Werte bildet und ihr das Vorzeichen der größeren der beiden Zahlen gibt.

$$(+a) + (-b) = +(a-b), \text{ wenn } a > b^{1)}$$
$$(+a) + (-b) = -(b-a), \text{ wenn } b > a$$

3. Eine relative Zahl wird subtrahiert, indem man sie mit umgekehrtem Vorzeichen addiert.

Aufgaben

1. Löse folgende Aufgaben durch Schreiten auf der Zahlengeraden:

a) $(+4) + (+5)$ **b)** $(+10) + (-8)$ **c)** $(-10) + (-5)$
d) $(+3) - (-5)$ **e)** $(-8) - (-6)$ **f)** $(-2) - (+7)$
g) $(-5) + (+9)$ **h)** $(+2) - (-7)$ **i)** $(+6) + (-10)$!

2. Stelle aus zwei Pappstreifen zwei Zahlengeraden mit Zentimeterteilung her, die gegeneinander verschoben werden können (Abb. 13)!

$(+8) + (-5) = +3$

Abb. 13

1) $a > b$ lies: a größer als b.

Bestimme mit dem auf S. 87 abgebildeten „Rechenstab“ die in a) bis p) angegebenen Summen und Differenzen!

Beachte:

Addieren: $a + b$. Erster Summand a oben, zweiter Summand b unten (Null unter Punkt a, ablesen über Punkt b).
Subtrahieren: $a - b$. Minuend a oben, Subtrahend b unten (Punkt b unter Punkt a, ablesen über der unteren Null).

a) $(+2) + (+7)$ **b)** $(+5) + (-8)$ **c)** $(-4) + (+9)$
d) $(-5) + (-4)$ **e)** $(-2{,}5) + (-5)$ **f)** $(-3{,}5) + (+7{,}5)$
g) $(+8{,}5) + (-10)$ **h)** $(-4{,}5) + (-2{,}5)$ **i)** $(+9) - (+4)$
k) $(+6) - (+8)$ **l)** $(-5) - (-3)$ **m)** $(-7) - (+4)$
n) $(-7) - (+9)$ **o)** $(-5{,}5) - (+3{,}5)$ **p)** $(-2{,}5) - (-6{,}5)$

3. Untersuche, ob das Vertauschungsgesetz der Addition auch für relative Zahlen gilt!

Addiere

4. a) $\begin{array}{r} +12 \\ -17 \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} +34 \\ -48 \\ \hline \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} -47 \\ +28 \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} -15 \\ -23 \\ \hline \end{array}$ **e)** $\begin{array}{r} +62 \\ +18 \\ \hline \end{array}$ **f)** $\begin{array}{r} -8 \\ +35 \\ \hline \end{array}$ **g)** $\begin{array}{r} -75 \\ -2 \\ \hline \end{array}$

5. a) $\begin{array}{r} -12x \\ -7x \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} -24y \\ -y \\ \hline \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} +18c \\ -24c \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} -27r \\ -15r \\ \hline \end{array}$ **e)** $\begin{array}{r} -45a \\ +62a \\ \hline \end{array}$ **f)** $\begin{array}{r} +54s \\ -17s \\ \hline \end{array}$

g) $\begin{array}{r} +4{,}5g \\ -5{,}3g \\ \hline \end{array}$ **h)** $\begin{array}{r} -12{,}6a \\ -7{,}8a \\ \hline \end{array}$ **i)** $\begin{array}{r} -9{,}2x \\ +4{,}9x \\ \hline \end{array}$ **k)** $\begin{array}{r} -5\frac{3}{4}y \\ +2\frac{1}{2}y \\ \hline \end{array}$ **l)** $\begin{array}{r} +\frac{2}{3}a \\ -7\frac{3}{8}a \\ \hline \end{array}$!

(Zur Vereinfachung läßt man oft vor positiven Zahlen das Vorzeichen weg.)

Wiederhole die Regeln über die Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen (S. 68), wende sie in den Aufgaben 6 und 7 an!

6. a) $15a + (8a - 7b)$ **b)** $9c - (3c + 8d)$
c) $8m - (-5m + 7n)$ **d)** $(20u + 3v) + (-7u + 9v)$
e) $(15a - 6b) - (18a - 11b)$ **f)** $(-x + y) - (+x - y)$

7. a) $(8a + 9b) + (-5a + 3b) - (-12a + 5b)$
b) $(-10m + 3n - 2) + (8m - 9n + 11) - (-7m + 15n - 7)$
c) $(6u^2 - 11u + 12) - (-5u^2 + 9u - 15) + (14u^2 - 25u - 30)$

Addiere

8. a) $\begin{array}{r} -13\frac{1}{6}b \\ +10\frac{3}{4}b \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} 4x+3y \\ -7x+8y \\ \hline \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} -13a+15b \\ 24a-31b \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} 26c-33d \\ -15c+18d \\ \hline \end{array}$

e) $\begin{array}{r} -8{,}3m+6{,}9n-0{,}7r \\ 12{,}5m-8{,}2n-5{,}2r \\ \hline \end{array}$ **f)** $\begin{array}{r} -5\frac{2}{3}u+6\frac{7}{8}v-3\frac{1}{5}w \\ 6\frac{3}{4}u+6\frac{5}{6}v+3\frac{3}{4}w \\ \hline \end{array}$

9. a) $\begin{array}{r} -5x+13y+7z-6r \\ -15x-9y-12z+9r \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} 5a-9b+30c+25d \\ -12a-18b-16c-41d \\ \hline \end{array}$

c) $\begin{array}{r} -5m^2-11n^2+80-12p \\ +28m^2+18n^2-50-15p \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} 8u^2-9u+30v^2-14v \\ 12u^2-6u-18v^2+26v \\ \hline \end{array}$!

10. Subtrahiere bei den Aufgaben in Nr. 4 die unteren Zahlen von den oberen!

11. Desgleichen bei den Aufgaben in Nr. 5!

12. Desgleichen bei den Aufgaben in Nr. 8!

13. Desgleichen bei den Aufgaben in Nr. 9!

14. a) Setze in dem Ausdruck $y = x + 8$ für x nacheinander -6, -5, bis $+6$ und werte y aus! Stelle die zusammengehörigen Werte von x und y in einer Wertetafel zusammen! (Vgl. Aufg. 4, S. 66!)

b) Verfahre in derselben Weise mit dem Ausdruck $y = x - 5$, für $x = +5$ bis -5!

15. Ein Thermometer zeigt

a)	5° Wärme,	die	Wärme	nimmt	um	8°	zu
b)	18°	„	„	„	„	7°	„
c)	16°	„	„	„	„	9°	ab
d)	4°	„	„	„	„	6°	„
e)	3° Kälte,	„	Kälte	„	„	8°	zu
f)	10°	„	„	„	„	5°	„
g)	17°	„	„	„	„	8°	ab
h)	6°	„	„	„	„	9°	„.

Bilde aus den Angaben Additions- oder Subtraktionsaufgaben mit relativen Zahlen und gib den Stand des Thermometers an!

36. Multiplikation relativer Zahlen

Drücke die Aufgaben $4 + 4 + 4$; $a + a + a + a + a$ und $5 + 5 + 5 + \cdots + 5$ (a Summanden) als Multiplikationsaufgaben aus!

Die Addition gleicher Summanden heißt Multiplikation. Dabei gibt der Multiplikator an, wie oft der Multiplikand als Summand gesetzt werden soll. Diese Erklärung des Multiplizierens setzt voraus, daß der Multiplikator eine absolute Zahl ist. In Aufgaben wie $(-4) \cdot (-6)$ sind beide Faktoren relative Zahlen. Zu ihrer Lösung reicht also die frühere Erklärung des Multiplizierens nicht aus.

Wir müssen festsetzen, wie Multiplikationsaufgaben mit relativen Zahlen gerechnet werden sollen. Weil diese Festsetzung in Einklang stehen soll mit

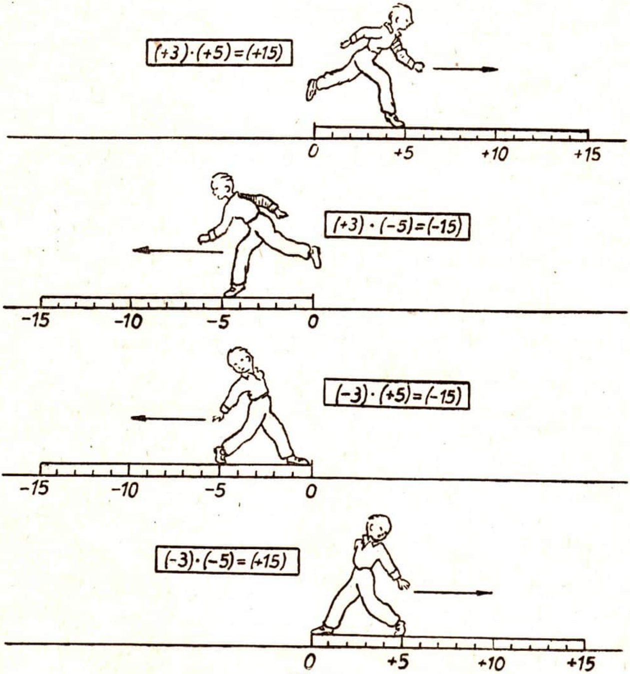


Abb. 14

den Multiplikationsregeln für absolute Zahlen, gehen wir davon aus, daß man die Aufgabe $6 \cdot 4 = 24$ durch Schreiten mit Viermeilenstiefeln veranschaulichen kann (5. Schuljahr). Diese Veranschaulichung erweitern wir für relative Zahlen durch folgende Vorschrift: Wir deuten Multiplizieren als Schreiten mit Schritten von gegebener Länge und Richtung.

Der Multiplikand gibt durch seinen absoluten Wert die Schrittgröße, durch sein Vorzeichen die Art der Aufstellung des Schreitenden am Nullpunkt der Zahlengeraden an. Bei positivem Vorzeichen stellt er sich nach der positiven Richtung, bei negativem nach der negativen Richtung der Zahlengeraden gewendet auf.

Der Multiplikator gibt durch seinen absoluten Wert die Anzahl der Schritte, durch seine Vorzeichen die Richtung an, in welcher das Schreiten erfolgen soll. Bei positivem Vorzeichen des Multiplikators wird von der Ausgangsstellung aus vorwärts, bei negativem rückwärts gegangen.

Verfolge jeden in Abb. 14 dargestellten Rechenvorgang!

$(+3) \cdot (+5)$	bedeutet:	3	Fünferschritte	vorwärts,	Aufstellung nach	rechts,
$(+3) \cdot (-5)$	„ :	3	„	vorwärts,	„ „	links,
$(-3) \cdot (+5)$	„ :	3	„	rückwärts,	„ „	rechts,
$(-3) \cdot (-5)$	„ :	3	„	rückwärts,	„ „	links.

Die Festsetzung ergibt folgende Regel:

Vorzeichenregel:
Zwei Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergeben ein positives Produkt, zwei Faktoren mit ungleichen Vorzeichen ergeben ein negatives Produkt.

$$(+a) \cdot (+b) = +ab \qquad (+a) \cdot (-b) = -ab$$
$$(-a) \cdot (-b) = +ab \qquad (-a) \cdot (+b) = -ab$$

Aufgaben

1. Prüfe, ob das Vertauschungsgesetz der Multiplikation auch für relative Zahlen gilt!

2. **a)** $(-7) \cdot (+3)$ **b)** $(+9) \cdot (+3)$ **c)** $(-9) \cdot (-4)$
d) $(+0{,}8) \cdot (-1{,}2)$ **e)** $(-0{,}13) \cdot (-0{,}8)$ **f)** $(+4{,}5) \cdot (-0{,}9)$
g) $(+13) \cdot (+13)$ **h)** $(-15) \cdot (-15)$ **i)** $(+25) \cdot (-25)$

3. **a)** $(+a) \cdot (+5b)$ **b)** $(+7x) \cdot (+5y)$ **c)** $(+\frac{3}{4}r) \cdot (+\frac{2}{3}s)$
d) $(+7c) \cdot (-8d)$ **e)** $(+1{,}2a) \cdot (-4b)$ **f)** $(+2{,}8x) \cdot (-0{,}6y)$
g) $(-\frac{2}{5}n) \cdot (+\frac{3}{4}m)$ **h)** $(-1{,}5u) \cdot (+7v)$ **i)** $(-\frac{5}{8}a) \cdot (+\frac{3}{4}b)$

4. **a)** $(+x) \cdot (+x)$ **b)** $(+7a) \cdot (+7a)$ **c)** $(-5b) \cdot (+4b)$
d) $(+8y) \cdot (-5y)$ **e)** $(-3\frac{1}{2}z) \cdot (-5z)$ **f)** $(-0{,}8c) \cdot (-1{,}5c)$

5. a) $(+a) \cdot (+2b) \cdot (-c)$ **b)** $(+3x) \cdot (-2y) \cdot (+5y)$

c) $(-9u) \cdot (-1{,}5u) \cdot (-3v)$ **d)** $(-4d) \cdot (+0{,}2d) \cdot (+3d)$

6. a) $(+x) \cdot (-3v) \cdot (+2z)$ **b)** $(+4m) \cdot (-3m) \cdot (-6m)$

c) $(-a) \cdot (+b) \cdot (-4a)$ **d)** $(+5{,}3r) \cdot (-2s) \cdot (-9r)$

e) $(+5m) \cdot (-3m) \cdot (4{,}2m)$ **f)** $(+3\frac{1}{2}a) \cdot (+4b) \cdot (-5b)$

g) $(-8x) \cdot (+9v) \cdot (-6x)$ **h)** $(-4x) \cdot (-9x) \cdot (-0{,}4x)$

i) $(-3d) \cdot (+3d) \cdot (-3d)$ **k)** $(-0{,}1a) \cdot (-0{,}01a) \cdot (40{,}1a)$

7. a) $(+24) \cdot (-6) \cdot (+9)$ **b)** $(-38) + (+7) \cdot (+8)$

c) $(-3) \cdot (+9) + (+5) \cdot (+12)$ **d)** $(-8) \cdot (-10) - (-3) \cdot (-9)$

e) $(+9x) + (-3) \cdot (-4x)$ **f)** $(+5m) \cdot (-2n) - (-3n) \cdot (-2m)$

g) $(-20a) - (+7a) \cdot (-5)$ **h)** $(-9x) \cdot (+7y) + (-8y) \cdot (-11x)$

8. a) Welchen Wert erhält das Produkt $3a^2b$
1. für $a = +4$ und $b = -3$, 2. für $a = +5$ und $b = -1{,}2$?

b) Werte den Ausdruck $y = 4x + 9$ aus, indem man nacheinander für x die Werte -1, -2, -3... bis -10 einsetzt!

c) Stelle eine Wertetafel auf für den Ausdruck $c = 3a - 2b$, wenn a von $+1$ bis $+10$ wächst und b von -1 bis -10 abnimmt!

Anleitung:

a	$+1$	$+2$	$+3$	....	$+10$
b	-1	-2	-3	....	-10
c					

d) Stelle eine Wertetafel für die nach b) zusammengehörigen Werte von x und y auf!

37. Division relativer Zahlen

Löse die folgenden Divisionsaufgaben:

$(+36) : (+9)$ $(+36) : (-9)$

$(-36) : (-9)$ $(-36) : (+9)$

Suche jedesmal als Ergebnis die Zahl, die, mit dem Divisor multipliziert, den Dividenden ergibt! Vergleiche jedesmal das Vorzeichen des Quotienten mit den Vorzeichen von Dividend und Divisor!

Vorzeichenregel:
Der Quotient zweier relativer Zahlen mit gleichem Vorzeichen ist positiv; der Quotient zweier relativer Zahlen mit ungleichen Vorzeichen ist negativ.

$$(+a):(+b) = +(a:b) \qquad (+a):(-b) = -(a:b)$$
$$(-a):(-b) = +(a:b) \qquad (-a):(+b) = -(a:b)$$

Aufgaben

1. a) $(+36):6$ **b)** $(-42):7$ **c)** $150:(-5)$
d) $(-48):(-12)$ **e)** $(-ab):(-b)$ **f)** $(+18mn):(-3m)$
g) $(-3{,}6u^2):(+12u)$ **h)** $(-a^2):(-a)$ **i)** $18a^2b:(-6ab)$

2. a) $(+15ab):(-3a)$ **b)** $(-2{,}4xy):(+0{,}8y)$
c) $(+2\frac{3}{4}mn):(+\frac{3}{4}m)$ **d)** $(-20fg^2):(-5fg)$
e) $(-\frac{5}{6}r^3s):(+\frac{2}{3}r^2s)$ **f)** $(+3{,}25ab):(-a)$
g) $(-6{,}7xy):(-1)$ **h)** $(-9xy^2):(+3xy)$
i) $(+4{,}2xy):(-4{,}2xy)$ **k)** $(-6a^2b:(-2ab)$

3. a) $(40ab-24ac):8a$ **b)** $(+65nx-39ny):(-13n)$
c) $(35rs+56rt):(-7r)$ **d)** $(4\frac{4}{5}mv-3\frac{1}{5}nv):8v$
e) $(6{,}4xy-11{,}2xz):(-1{,}6x)$ **f)** $(+1\frac{1}{9}cd-\frac{2}{3}c):\frac{2}{3}c.$

4. a) $(21x^3+15x^2-9x):3x$ **b)** $(16ab+12ac-20ad):(-4a)$
c) $(5{,}6km+0{,}72k^2m-3{,}2k^2m^2-24km^2):(-0{,}8km)$

5. a) $(42mn-18nr+6n):6n+(45my+27ry-18y):9y$
b) $(1\frac{2}{3}ah+6\frac{1}{4}hr-2\frac{1}{2}h):5h-(3\frac{1}{2}ab-1\frac{1}{4}br+\frac{3}{4}b):(-\frac{3}{8}b)$

6. a) $(2{,}1x^2+0{,}49xy-35x^2y^2+6{,}3x):7x$
b) $(82{,}8a^2b^2+4{,}77ab^2-22{,}5ab+4{,}5a^2b):9ab$
c) $(15{,}6x^2y-25{,}2xy^2-40{,}8x^2y^2):(-12xy)$
d) $(3{,}75mn^2+7{,}5m^2n-9{,}5m^2n^2):(-5mn)$

7. a) $(2{,}75a^2b-4{,}25a^3b^2+6{,}5a^2b^3):25a^2b$
b) $(3{,}24r^3s^2-9{,}16r^2s-2{,}32rs^2):(-0{,}4rs)$
c) $(39{,}6xy^2+46{,}2x^2y-6{,}6x^2y^2):(-0{,}6xy)$
d) $(4{,}32m^2n^2-5{,}4m^3n^2+8{,}22m^2n^3):0{,}6m^2n^2$

C. Geometrie

VIII. Symmetrie

38. Die Symmetrieachse

Wir halten einen linken Schuh, einen rechten Handschuh vor den Spiegel und vergleichen diese Gegenstände mit ihren Spiegelbildern. Betrachte Abb. 15! Welche Wirkung zeigt die Wasserfläche besonders deutlich für das Standbild im Mittelbogen? Betrachte nun das Gebäude allein! Was fällt an der Anordnung der einzelnen Teile auf? Bestimme die Gerade in der Abbildung des Gebäudes, auf die ein Spiegel gesetzt werden muß, damit aus einer Hälfte das ganze Bild entsteht! Pause das Gebäudebild in großen Umrissen durch und bringe rechte und linke Hälfte durch Falten zur Deckung!
Zeichne auf Papier mit Kohle eine krumme Linie und falte das Papier einmal so fest, daß der Kohlestrich abfärbt. Was beobachtet man?
Durchstich ein ebenso gefaltetes Papier mehrfach mit einer Nadel und breite es aus! Untersuche die entstandenen Punkte in ihrer Lage zum Kniff!
Abb. 16 zeigt einen „Falter". Erkläre den Namen und untersuche die

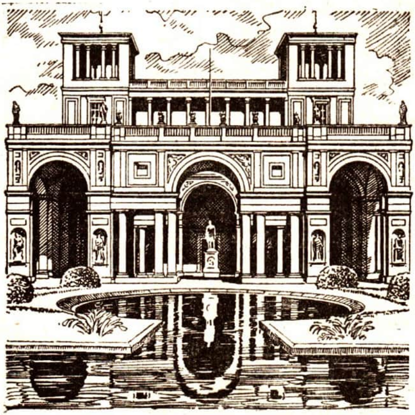


Abb. 15

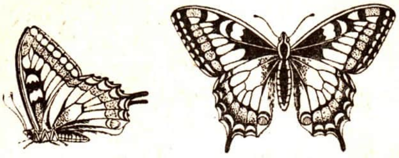


Abb. 16 b

Abb. 17

Form der Flügel und der Flügelzeichnungen! Abb. 17 entstand, indem man ein Stück Papier mit feuchten Tintenklecksen zusammenfaltete und die Kleckse dabei breitdrückte. Gib Punkte an, die beim Entstehen des Bildes übereinanderlagen! Zeige an dem Bild einander entsprechende Strecken!
Stelle durch Falten und Durchstechen zwei symmetrische Punkte her und vergleiche ihre Entfernungen von verschiedenen Punkten der Faltlinie und die an der Faltlinie entstehenden Winkel!
Symmetrie tritt bei räumlichen Gebilden in bezug auf eine spiegelnde Ebene, bei ebenen Figuren in bezug auf eine spiegelnde Gerade auf.

Erklärungen

1. Sind zwei Bilder in einer Ebene so gezeichnet, daß das eine aus dem anderen durch Spiegelung an einer Geraden hervorgeht, so nennt man sie **spiegelgleich** oder **symmetrisch.**

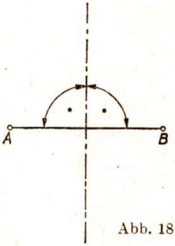


Abb. 18

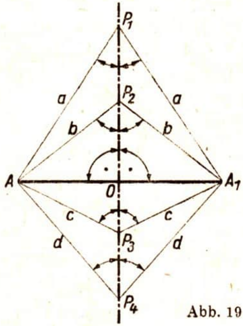


Abb. 19

2. Symmetrische Bilder können durch Umklappen um eine gerade Linie, die **Symmetrieachse,** zur Deckung gebracht werden. Man nennt sie daher **achsensymmetrisch** oder **achsenspiegelig.**

> **1. Die Symmetrieachse halbiert die Verbindungsstrecke symmetrischer Punkte und steht senkrecht auf ihr (Abb. 18).**
>
> **2. Jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zwei symmetrischen Punkten gleich weit entfernt (Abb. 19).**
>
> **3. Verbindet man einen beliebigen Punkt der Symmetrieachse mit zwei symmetrischen Punkten, so entstehen an der Achse gleiche Winkel (Abb. 19).**

Aufgaben

1. Falte ein Stück Papier einmal und schneide ein Muster aus! Breite jetzt das Papier aus und zeige den Verlauf der Symmetrieachse! Gib Punkte an, die beim Ausschneiden übereinanderlagen!

2. Vervollständige die Wappenbilder der Abb. 20!

3. Zeichne die Symmetrieachsen eines Quadrats, eines Rechtecks, eines Kreises!

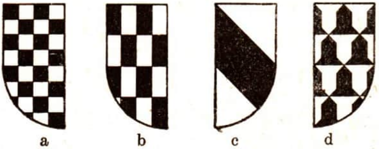


Abb. 20

4. Zeichne einen Winkel, schneide ihn aus und stelle durch Falten seine Symmetrieachse her!

5. a) Suche bei dem in Abb. 21 dargestellten Scherenschnitt die Symmetrieachsen auf! Wieviel sind es?

b) Verbinde auf einer Pauszeichnung der Abb. 17 spiegelgleiche Punkte. Was beobachtet man?

6. Gegeben sind zwei Punkte A und B. Zeichne ihre Symmetrieachse (Abb. 22)!

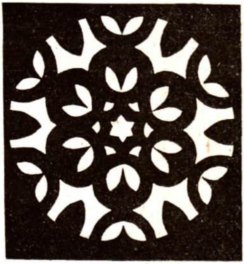


Abb. 21

7. Gegeben ist eine Gerade g und außerhalb ein Punkt P. Zeichne den zu P in bezug auf g symmetrischen Punkt!

8. Zeichne zu einer Strecke AB die in bezug auf eine Gerade g symmetrische Strecke, wenn

a) die Verlängerung von AB die Gerade g unter einem spitzen Winkel schneidet,

b) die Verlängerung von AB die Gerade g unter einem rechten Winkel schneidet,

c) die Strecke AB mit der Geraden g gleichgerichtet ist!

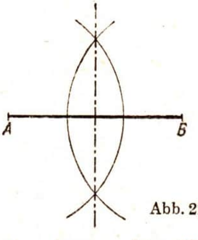


Abb. 22

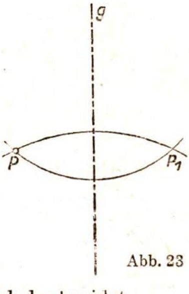


Abb. 23

9. Gegeben ist ein Dreieck und eine Gerade, die die Verlängerungen der Dreiecksseiten schneidet. Zeichne das in bezug auf die Gerade symmetrische Dreieck!

10. Gegeben sind ein Kreis und eine Gerade g, die den Kreis nicht schneidet. Zeichne den in bezug auf g als Achse symmetrischen Kreis!

11. Ein Kreis schneidet eine Gerade g. Zeichne den in bezug auf g als Achse symmetrischen Kreis!

39. Gleichschenkliges Dreieck / Grundaufgaben

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, schneide es aus und falte es so, daß die Schenkel aufeinanderfallen! Klappe es wieder auseinander und vergleiche die an der Symmetrieachse entstandenen Winkel, die Teile der von der Achse geschnittenen Grundseite des Dreiecks und die Winkel an ihr (Abb. 24[1])!

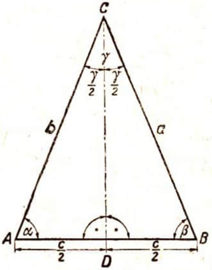


Abb. 24

> **1. Jedes gleichschenklige Dreieck besitzt eine Symmetrieachse.**
> **2. Die Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks halbiert den Winkel an der Spitze sowie die Grundseite (Basis) und steht senkrecht auf ihr.**
> **3. Die Winkel an der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks, die „Grundwinkel“ (Basiswinkel), sind gleich.**
> **4. Die Verbindungsgerade der Spitzen zweier gleichschenkliger Dreiecke mit gemeinsamer Grundseite (Drachenviereck) ist die Symmetrieachse der beiden Dreiecke (Abb. 19).**

Aufgaben

Grundaufgaben, mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal zu lösen.

1. Halbiere eine gegebene Strecke!

Anleitung: Betrachte die gegebene Strecke als gemeinsame Grundlinie zweier gleichschenkliger Dreiecke (Abb. 22)!

2. Halbiere einen gegebenen Winkel!

Anleitung: Betrachte den Winkel als Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks (Abb. 25)!

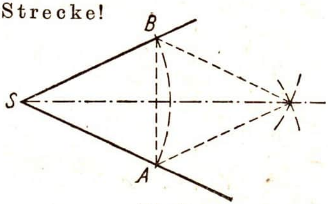


Abb. 25

1) Rechte Winkel werden in Zeichnungen häufig durch einen Punkt bezeichnet.

3. Errichte auf einer Geraden g im Punkt P die Senkrechte!

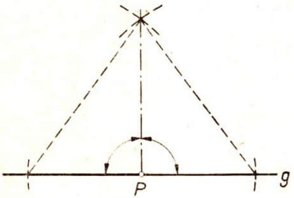


Abb. 26

Anleitung: Betrachte P als Mittelpunkt der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks (Abb. 26)!

4. Fälle auf eine Gerade g von einem außerhalb liegenden Punkt P das Lot!

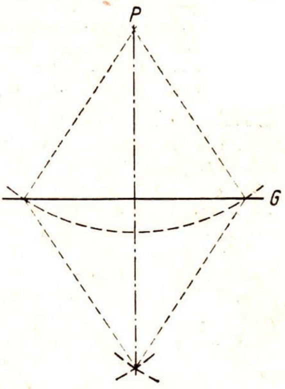


Abb. 27

Anleitung: Betrachte P als Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks und wende Satz 4 an (Abb. 27)! Die Länge des Lotes bezeichnet man als die Entfernung des Punktes P von der Geraden g.

Zeichenübungen, nur mit Zirkel und Lineal zu lösen.

5. Teile eine gegebene Strecke in 4 (8, 16) gleiche Teile!

6. Teile einen gegebenen Winkel in 2 (4, 8) gleiche Teile!

7. Zeichne einen rechten Winkel durch Halbieren eines gestreckten!

8. Zeichne einen Winkel von 45° ($22\frac{1}{2}$°, 135°)!

9. Halbiere in einem Dreieck die Seiten und verbinde ihre Mitten mit den Eckpunkten!

10. Halbiere in einem Dreieck die Winkel!

11. Fälle in einem spitzwinkligen Dreieck die Lote von den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten!

40. Bestimmungslinien

Zeichne im Atlas um den Heimatort als Mittelpunkt in richtigem Maßstab Kreise mit den Halbmessern 75 km, 150 km, 375 km! Welche Eigenschaften haben alle Orte, die auf einer solchen Kreislinie liegen?

Mitten über dem Anrichtetisch des Wohnzimmers soll ein Bild aufgehängt werden. Ein Junge soll dem Vater dabei helfen und das Bild an die Wand halten, damit er die passende Stelle für den Bildnagel finden kann. Auf welcher Linie muß er die Bildöse bewegen?

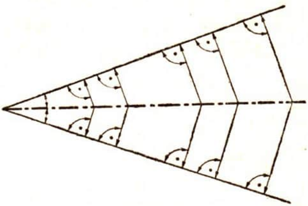


Abb. 28

Erklärung: Wenn alle Punkte einer Linie eine bestimmte Bedingung erfüllen, der kein Punkt außerhalb der Linie genügt, nennt man die Linie **Bestimmungslinie** (geometrischen Ort).

Bestimmungslinien:

1. Der Kreis ist die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von einem Punkt, dem Mittelpunkt, die gleiche Entfernung haben.

2. Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von den Endpunkten der Strecke gleich weit entfernt sind.

3. Die Winkelhalbierende ist die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von den Schenkeln des Winkels die gleiche Entfernung haben (Abb. 28).

Aufgaben

1. Zwei Punkte A und B sind 5 cm voneinander entfernt.

a) Bestimme einen Punkt, der von A 4,5 cm und von B 3 cm entfernt ist! Wieviel solcher Punkte gibt es?

b) Bestimme die Entfernungen der gefundenen Punkte von der Strecke AB!

2. Rechts und links einer Bahnstrecke liegen zwei Orte A und B (Abb. 29). Ein gemeinsamer Bahnhof soll gebaut werden, der von den beiden Orten gleich weit entfernt ist. Stelle durch eine Zeichnung fest, wo der Bahnhof angelegt werden muß!

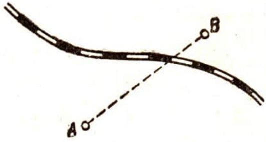


Abb. 29

3. a) Auf einer gegebenen Kreislinie wird ein Punkt gesucht, der von den Endpunkten einer bestimmten Strecke AB gleich weit entfernt ist!

b) Unter welchen Bedingungen gibt es zwei Lösungen oder nur eine oder gar keine? Zeichne!

4. a) Zeichne zwei einander unter einem Winkel von 60° schneidende Straßen (als Geraden) und auf einer der beiden Straßen einen Punkt A, der von der Straßenkreuzung 200 m entfernt ist (Maßstab 1 : 10 000)!

b) Bestimme einen Punkt auf der nicht durch A gehenden Straße so, daß er von A $\frac{1}{2}$ km entfernt ist! (Wieviel Lösungen?)

c) Bestimme einen anderen Punkt so, daß er von beiden Straßen gleich weit und von A 300 m entfernt ist! (Beachte wieder verschiedene Lösungsmöglichkeiten!)

5. Zeichne mit Hilfe einer Tasse einen Kreis und ermittle seinen Mittelpunkt!

Anleitung: Zeichne Sehnen in den Kreis! Auf welchen Bestimmungslinien liegt der Mittelpunkt?

41. Anwendungen

Zeichenübungen

1. In einem Rechteck hat die Seite a die Länge 5 (4; 7) cm, die Seite b ist 3 (5; 2) cm lang. Zeichne, zuerst nach Augenmaß, dann mit dem Zirkel den Umfang des Rechtecks als Strecke!

2. Nach einer 15 cm langen Vorlage soll ein Stickmuster (Abb. 30) auf einen Gürtel übertragen werden. Schätze zuerst, wie oft man das Muster anlegen muß; dann miß nach!

Abb. 30

Gleichschenkliges Dreieck

3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus
a) $c = 5$ cm und $\alpha = 75°$ b) $c = 6$ cm und $\gamma = 45°$
c) $b = 6$ cm und $\gamma = 67\frac{1}{2}°$ d) $a = 8$ cm und $\beta = 52\frac{1}{2}°$!
(Bezeichnungen s. Abb. 24!)

4. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck so, daß das im Dreieck liegende Stück der Symmetrieachse $CD = 3$ cm und $c = 8$ cm ist!

5. a) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel einen rechten Winkel einschließen!

b) Betrachte seine Grundlinie als Symmetrieachse und zeichne sein Spiegelbild! Wie heißt die Figur, die dadurch entsteht?

6. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck und seine Symmetrieachsen!

7. Zeichne über derselben Grundseite mehrere gleichschenklige Dreiecke nach beiden Seiten und verbinde ihre Spitzen miteinander! Wie ändern sich die Winkel, wenn die Schenkel länger werden?

8. Wir wollen einen Drachen bauen, 80 cm lang und 60 cm breit; der Querstab soll 25 cm von der Spitze entfernt angebracht werden. Entwirf eine Zeichnung im Maßstab 1 : 10!

9. Acht gleiche Drachenvierecke sollen mit den kurzen Seiten zu einer Windrose zusammengesetzt werden. Berechne erst den Winkel, den die kurzen Seiten miteinander bilden! Nimm die längere Seite dreimal so lang wie die kurze!

Spiegelungen

10. Lege ein Quadrat vor einen aufrecht stehenden Spiegel! Verdecke das Quadrat so, daß man nur sein Spiegelbild sieht, und zeichne nach dem Spiegelbild eine Diagonale! Was beobachtet man?

11. a) Vervollständige die Figuren der Abb. 31 durch Spiegelung an den Strichpunktlinien! Es ergeben sich verschiedene Dachgiebelformen.

b) Zeichne in Anlehnung an Abb. 31 andere rechtwinklige Dreiecke und vervollständige sie durch Spiegelung zu Dachgiebelformen!

In der Technik werden Symmetrieachsen durch Strichpunktlinien dargestellt.

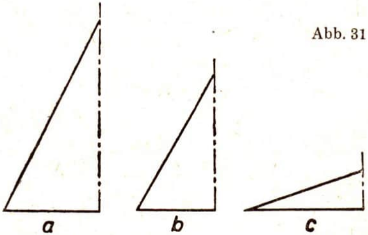


Abb. 31

12. a) Zeichne die Abb. 32 und 33 in doppelter Größe in das Heft und ergänze sie durch Spiegelung an der strichpunktierten Achse!

b) Zeichne weitere „halbe“ Blätter und Schmetterlinge; ergänze sie durch Spiegelung an der Symmetrieachse!

Abb. 32

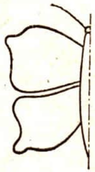


Abb. 33

13. Stelle einen randlosen Spiegel senkrecht so auf die Kantenmuster der Abb. 34, wie die Geraden AB, CD, EF usw. angeben! Zeichne die sich ergebenden Eckenmuster!

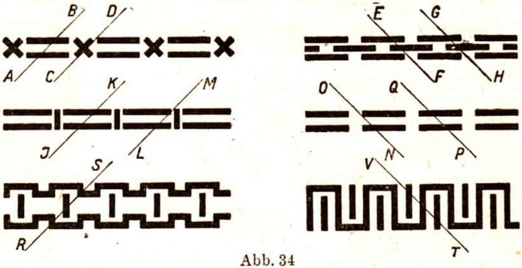


Abb. 34

14. a) Vervollständige die Schnittmuster in den Abb. 35 und 36!

b) Zeichne in Anlehnung an die Abb. 35 und 36 die Hälften weiterer Schnittmuster und vervollständige sie!

Abb. 35

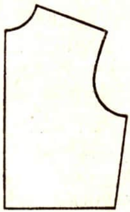


Abb. 36

IX. Winkelbeziehungen an Geraden

42. Neben- und Scheitelwinkel

Betrachte eine geöffnete Schere! Die Schneiden der Scherenblätter bilden Winkel miteinander! Ersetze die Scherenblätter durch zwei Papierstreifen und verbinde sie miteinander in ähnlicher Weise, wie die Blätter bei der Schere verbunden sind (Abb. 37)! Drehe den einen Papierstreifen und beobachte die entstehenden Winkel nach Anzahl und Größe!
Zeichne statt der Papierstreifen zwei einander schneidende Gerade!

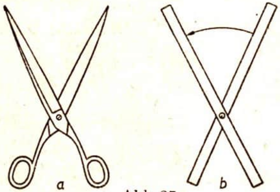


Abb. 37

Erklärungen

Durch zwei einander schneidende Gerade entstehen vier Winkel.

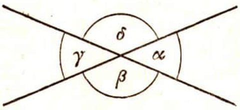


Abb. 38

In Abb. 38 heißen die beiden Winkel, die nur den Scheitel gemeinsam haben (α und γ; β und δ), **Scheitelwinkel;** je zwei Winkel, die außerdem einen Schenkel gemeinsam haben (α und β; β und γ; γ und δ; α und δ), **Nebenwinkel.** Zwei Winkel mit gemeinsamem Scheitel heißen Scheitelwinkel, wenn die Verlängerungen der Schenkel des einen über den Scheitel hinaus die Schenkel des anderen Winkels sind; sie heißen Nebenwinkel, wenn sie einen Schenkel gemeinsam haben und die anderen Schenkel eine Gerade bilden.

1. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich 180° oder 2 *R*.
2. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Aufgaben

Nebenwinkel

1. Ein Winkel ist **a)** 46°, **b)** 87°, **c)** 124°, **d)** 153°, **e)** 24° 15′, **f)** 65° 45′, **g)** 98° 24′, **h)** 133° 36′, **i)** 162° 52′ groß. Wie groß ist der Nebenwinkel?

2. Verlängere die eine Seite eines Quadrats oder Rechtecks! Was für Nebenwinkel entstehen?

3. Laß Nebenwinkel dadurch entstehen, daß man ein Buch, eine Tür, einen Fensterflügel öffnet! Schätze und miß die entstehenden Nebenwinkel!

4. Pedale und Tretkurbel eines Fahrrades bilden Nebenwinkel (Abb. 39). Beobachte, wie sich die Größe eines Winkels beim Drehen der Kurbel ändert und welchen Einfluß diese Veränderung auf die Größe seines Nebenwinkels hat!

5. Stelle über die Größe zueinander gehörender Nebenwinkel eine Wertetafel auf! Stelle die Größe der Winkel durch dazu passende Strecken dar! (Z. B. 10° durch eine Strecke von 5 mm Länge.) Zeichne aus den beiden Strecken, die zueinander gehörende Nebenwinkel angeben, Rechtecke! Laß jedesmal zwei Rechteckseiten an demselben Punkte beginnen (Abb. 40)!

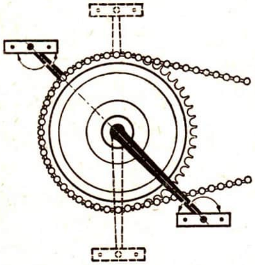


Abb. 39

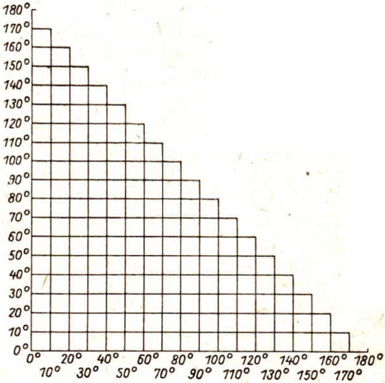


Abb. 40

a) In welchem Fall entsteht ein Quadrat?

b) Was entsteht, wenn man die rechten oberen Ecken aller Rechtecke miteinander verbindet?

6. Zeichne die Halbierenden zweier Nebenwinkel! Was kann man feststellen?

7. Von zwei Nebenwinkeln ist der eine halb so groß wie der andere. Wie groß ist jeder?

Scheitelwinkel

8. Zeichne einen Winkel von beliebiger Größe! Wie entsteht sein Scheitelwinkel?

9. Nenne Geräte, an denen Scheitelwinkel vorkommen!

10. Zeichne die Spiegelachsen zweier einander schneidender Geraden!

11. Zeichne Skizzen von Straßenkreuzungen des Heimatortes!

43. Winkelmessungen im Freien

Zur Messung von Winkeln im Gelände kann man ein einfaches Gerät verwenden, das Abb. 41 zeigt. Es hat eine Vorrichtung, die aus einem feinen Schlitz in einer Holzplatte besteht, dem gegenüber am anderen Ende eines drehbaren Lineals ein dünner Metallstift angebracht ist. Wie stellt man die Vorrichtung auf ein bestimmtes Ziel im Gelände ein? Wie muß man das Lineal auf der mit einer Gradeinteilung versehenen Kreisscheibe befestigen, um den Winkel zwischen zwei verschiedenen Richtungen zu messen? Fertige selbst ein solches Gerät an, das auf einem Photostativ aufgestellt werden kann!

Aufgaben

Messen und Abstecken von Winkeln im Gelände

1. Vorübung. **a)** Mittels Stecknadeln sind auf einer Pappunterlage o. ä. zwei Richtungen festzulegen, d. h. „auszufluchten“!

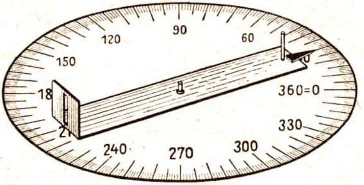


Abb. 41

b) Wie mißt man mit einem Gerät, wie es Abb. 41 zeigt, den Winkel zwischen diesen Richtungen?

c) Gib auf einer Pappe eine bestimmte Richtung durch eine Gerade und auf dieser einen Punkt an! Wie fluchtet man mit dem in b) genannten Gerät eine Richtung aus, die mit dieser Geraden im angegebenen Punkt einen Winkel von 90° und

d) einen Winkel von 54° bildet?

2. a) Wir wollen mit dem in Abb. 41 dargestellten Gerät den Winkel messen, den zwei vorher durch Fluchtstäbe festgelegte Richtungen im Gelände miteinander bilden. Erkläre, wie das zu machen ist!

b) Von einem Punkt einer auf dem Schulhof (Turnplatz) ausgefluchteten Richtung aus soll eine zweite Richtung ausgefluchtet werden, die mit der ersten einen Winkel von 65° bildet. Wie geschieht das?

3. Man halte ein Lineal mit ausgestrecktem Arm senkrecht vor sich hin! Betrachte mit einem Auge Gegenstände hinter dem Lineal! Die Sehstrahlen, die von dem Auge ausgehen und die Seitenkanten des Lineals berühren, schließen den „Sehwinkel" ein, unter dem man das Lineal sieht (Abb. 42). Nähere das Lineal dem Auge und beobachte die Gegenstände hinter dem Lineal! Was kann man feststellen?

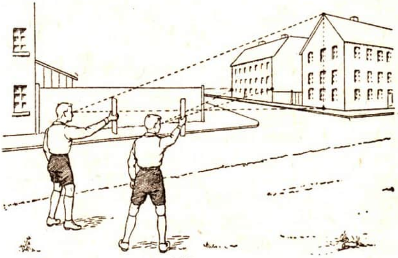


Abb. 42

4. a) Fertige eine maßstäbliche Zeichnung, nachdem vorher die Länge des Armes und die Breite des Lineals gemessen sind! Unter welchem Winkel wird das Lineal gesehen?

b) Unter welchem Sehwinkel sieht man die Gegenstände, die von dem Lineal gerade verdeckt werden?

5. Stelle dich auf dem Schulhof mit ausgestrecktem Arm und dem senkrecht gehaltenen Lineal vor ein nach dem Hof gehendes Fenster, gehe so weit zurück, daß das Lineal gerade das Fenster verdeckt!

6. Halte statt des Lineals den Daumen der ausgestreckten Hand senkrecht aufwärts und stelle fest, wie weit man zurückgehen muß, damit das Fenster vom Daumen verdeckt wird!

7. Der Sehwinkel, unter dem der Daumen bei vorgestrecktem Arm erscheint, heißt D a u m e n b r e i t e (Abb. 43). Miß die Länge des Armes und die Breite des


Abb. 43

Daumens und stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung fest, wie groß die Daumenbreite ist!

8. Stelle auf dieselbe Weise fest, wie groß der Winkel ist, unter dem bei vorgestrecktem Arm **a)** die geballte Faust, **b)** die Spanne der Hand gesehen wird!

9. Vergleiche die gemessenen Winkel mit folgenden Angaben: der Daumen eines Erwachsenen deckt bei vorgestrecktem Arm ungefähr einen Sehwinkel von 2°, die Faust 10°, die Spanne etwa 20°!

44. Parallele Geraden

Beobachte den Winkel zwischen dem Leitungsdraht und dem Stromabnehmer einer elektrischen Straßenbahn! Wenn der Stromabnehmer an

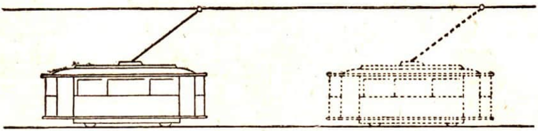


Abb. 44

dem Draht entlang gleitet (Abb. 44), ändert der Stromabnehmer seine Richtung nicht, solange der Abstand des Drahtes von den Schienen sich nicht ändert.

Beobachte ebenso den Winkel zwischen den Leiterholmen und den Führungsschienen, wenn die Leiter am Regal entlang verschoben wird (Abb. 45)!

Erklärung: Zwei Geraden, die eine festliegende Gerade unter gleichen Winkeln schneiden, heißen gleichgerichtet oder **parallel.** Man kann die Parallelen durch Verschieben längs einer Geraden zur Deckung bringen (Parallelverschiebung).

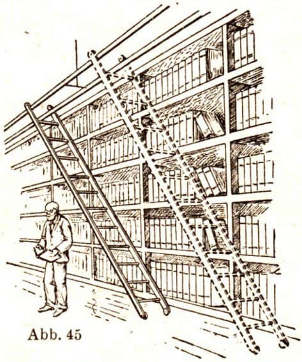


Abb. 45

1. Parallele Geraden haben überall gleichen Abstand.

2. Durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt kann man zu dieser Geraden nur eine Parallele ziehen.

Aufgaben

1. Nenne Gegenstände, an denen man parallele Linien findet!

2. Stelle durch zweimaliges Falten eines rechteckigen Papierblattes Kniffe her, die dem Rande des Papiers parallel laufen!

3. **a)** Zeichne mit Zeichendreieck und Lineal parallele Linien, indem das Zeichendreieck längs des Lineals verschoben wird (Abb. 46)!
b) Benutze zum Zeichnen von Parallelen das Doppellineal (Abb. 47)!

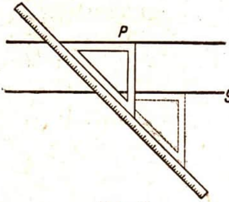


Abb. 46

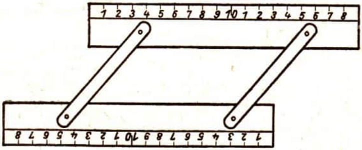


Abb. 47

4. Zeichne parallele Linien nach Augenmaß und prüfe nach!

5. Zeichne eine Gerade und ziehe im Abstand von 4 cm die Parallelen zu der Geraden!

6. Zeichne mit Lineal und Zeichendreieck durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele!

7. Bei der Eisenbahn beträgt die Spurweite eines Gleises 1,435 m. Zeichne eine 9 m lange Gleisstrecke mit 11 Schwellen in der „Draufsicht", wenn die 1. Schwelle 0,3 m vom Ausgangspunkt entfernt liegt und die Abstände der 11 Schwellen (als Strecken zu zeichnen) 0,8 m, 0,9 m, 5mal 1 m, 0,9 m, 0,8 m, 0,3 m betragen (Maßstab 1 : 50)!

8. Zeichne ein Rechteck aus $a = 2$ cm; $b = 7$ cm! Zeichne durch die Ecken des Rechtecks parallele Linien, die mit der Richtung der Seite a Winkel von $45°$ bilden, mache sie 1 cm lang und verschiebe das Rechteck längs dieser Parallelen!

9. Zeichne eine Schar paralleler Geraden! Eine andere Schar paralleler Geraden zeichne so, daß sie die zuerst gezeichneten Parallelen senkrecht schneiden! Aus welcher Art von Figuren besteht das entstandene „Netz"?

10. a) Führe die Aufgabe 9 so aus, daß ein Netz von Quadraten entsteht (Millimeterpapier)!

b) Zeichne das Netz so, daß der Eindruck eines Geflechtes entsteht!

11. Das Getreide, die Kartoffeln, die Rüben stehen in langen parallelen Reihen auf dem Feld. Wie kommen diese Reihen zustande?

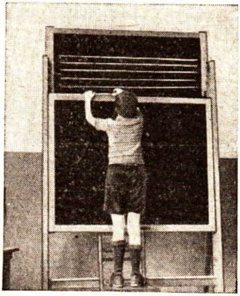


Abb. 48

12. Wir wollen parallele Linien auf die Tafel zeichnen! Gib nach Abb. 48 an, unter welchen Umständen die Parallelen mit Hilfe einer anderen Tafel gezeichnet werden können!

13. Warum können parallele Geraden einander nicht schneiden?

45. Winkelpaare an Parallelen

Schreibe die Buchstaben, die Abb. 49 zeigt, recht groß nach! Worauf muß man achten? In welchem Falle wirken sie unschön?

Abb. 49

Stelle eine Pause der Winkel am oberen Schnittpunkt in Abb. 50 her und verschiebe die Pause längs der schneidenden Geraden h, bis der obere Schnittpunkt auf den unteren fällt! Welche Winkel fallen aufeinander?

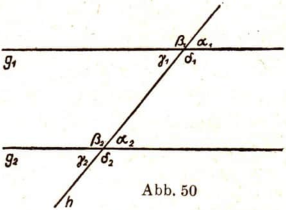


Abb. 50

Erklärungen

Wenn zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten werden, so entstehen **Stufenwinkel** und **Wechselwinkel** (Abb. 51 und 52).

Stufenwinkel liegen auf gleichen Seiten der schneidenden und der geschnittenen Geraden.

Wechselwinkel liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden und der geschnittenen Geraden.

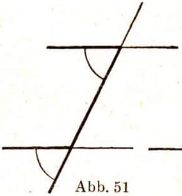


Abb. 51

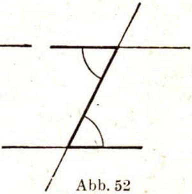


Abb. 52

1. Stufenwinkel an Parallelen sind gleich.
2. Wechselwinkel an Parallelen sind gleich.
3. Sind Stufenwinkel gleich, so sind die geschnittenen Geraden parallel.
4. Sind Wechselwinkel gleich, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Begründung zu 1 und 2: Verschiebt man die eine Parallele längs der schneidenden Geraden parallel mit sich selbst bis auf die andere, so fallen die Stufenwinkel aufeinander; die Wechselwinkel werden zu Scheitelwinkeln.

Aufgaben

Überlegungen

1. Nenne in Abb. 53 **a)** verschiedene Paare gleicher Winkel, **b)** verschiedene Winkel, die einander zu 180° ergänzen!

Anmerkung: Winkel an parallelen Geraden, die einander zu 180° ergänzen, heißen entgegengesetzt liegende Winkel.

2. Lege zwei Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln ineinander oder nebeneinander und vergleiche ihre Größe! Welche Fälle muß man unterscheiden?

Anleitung: Verlängere die Schenkel, bis sie einander schneiden!

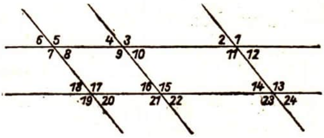


Abb. 53

3. Zeichne zwei Paare paralleler Geraden, die einander schneiden! Was gilt von je zwei Winkeln in dem durch die Parallelen abgegrenzten Viereck, die **a)** einander gegenüberliegen, **b)** benachbart sind? Begründe die Feststellungen!

Zeichenübungen

4. Ziehe zur Geraden g durch den Punkt P außerhalb der Geraden die Parallele!

1. Lösung: Verschiebe das Zeichendreieck am festliegenden Lineal (Abb. 46)! Begründe das Verfahren!

2. Lösung: Bestimme einen zweiten Punkt, der den gleichen Abstand von g hat!

5. Errichte im Punkt P auf der Geraden g die Senkrechte unter Benutzung von Lineal und Zeichendreieck!

Lösung: Verschiebe das Zeichendreieck, wie es Abb. 54 andeutet! Begründung!

6. Zeichne nach Abb. 55 die Senkrechte von P auf g!

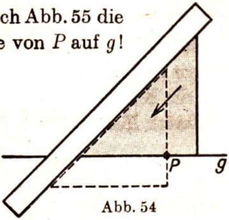


Abb. 54

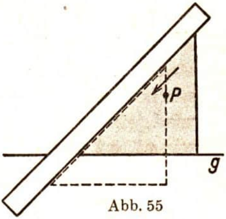


Abb. 55

7. **Straßenanlage.** Eine geradlinige Hauptverkehrsstraße ist insgesamt 14 m breit. Die Gehwege sind je 2,20 m breit. In der Mitte des Fahrdammes laufen zwei Gleise der elektrischen Straßenbahn; die äußeren Schienen liegen 2,60 m von der Bordkante entfernt. Die Spurweite eines Gleises beträgt 1,42 m. Zeichne 30 m Länge dieser Straße in der „Draufsicht“ (Maßstab 1 : 200)!

8. **Schublehre.** Abb. 56 zeigt eine Schublehre. Sie dient zum Messen der Dicke von Stäben und anderen Gegenständen.

a) Beschreibe, wie sie verwendet wird (Parallelverschiebung)!

b) Die Messung eines Stabes ergibt, daß er 4 cm dick ist. Zeichne die Stellung des Schiebers!

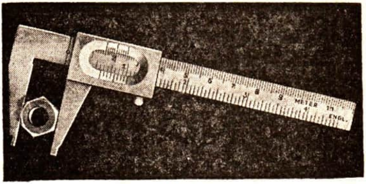


Abb. 56

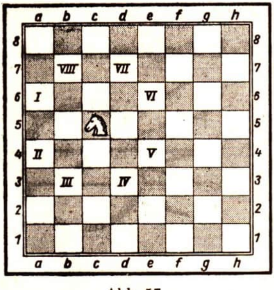


Abb. 57

46. Vermischte Aufgaben

1. Zeichne das Bild eines Schachbretts (Abb. 57), in dem ein Feld als 1 cm² wiedergegeben ist; bezeichne die senkrechten Streifen mit den Buchstaben $a, b, c \ldots h$, die waagerechten Streifen mit den Ziffern 1, 2, 3, … 8! Welchen Zweck hat diese Benennung?

2. Suche nach Aufgabe 1 die Felder *e* 5, *f* 3, *g* 2, *h* 5, *c* 6 auf!

3. Verwende ein Blatt Millimeterpapier und schreibe die Buchstaben *a*, *b*, *c*, . . . und die Ziffern 1, 2, 3, . . . nicht an die Streifen wie bei Aufgabe 1, sondern an die Endpunkte der Strecken! Was wird jetzt an Stelle der bezifferten Felder durch Bezeichnungen wie *a* 1, *c* 3 usw. bestimmt?

4. Zeichne zwei einander unter einem Winkel von 50° schneidende Strecken von 6 cm Länge so, daß je zwei Endpunkte in einer Waagerechten liegen! Zeichne von den Endpunkten der Strecken und ihrem Schnittpunkt aus Strecken von 5 cm Länge so, daß sie alle die gleiche Richtung haben und gegen die Waagerechte Winkel von 30° bilden! Verbinde die Endpunkte dieser Strecken sinngemäß miteinander! Dadurch wird der Eindruck eines räumlichen Gebildes hervorgerufen.

5. a) Fertige unter Verwendung von Scharen paralleler Linien, die einander schneiden, den Entwurf zu einer Buchhülle an!

b) Verwende parallele Linien zum Zeichnen eines Musters für eine Handarbeitstasche!

6. Die Spurweite der Gleise bei der Eisenbahn beträgt in Deutschland 1,435 m. Bei Doppelgleisen muß von Gleismitte zu Gleismitte eine Entfernung von 3,5 m vorhanden sein.

a) Zeichne eine zweigleisige Strecke in der Draufsicht für eine Länge von 20 m (Maßstab 1 : 200)!

b) Zeichne eine zweigleisige Strecke von 1 500 m Länge in Draufsicht im Maßstab 1 : 10 000 und zeichne ein Vor- und Hauptsignal ein! Das Vorsignal muß 700 m vom Hauptsignal entfernt sein.

7. Zeichne die Warnzeichen bei Eisenbahnübergängen nach Abb. 58!

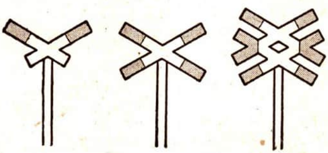


Abb. 58

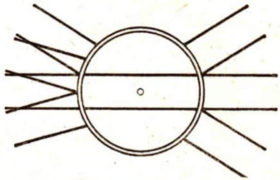


Abb. 59

8. Abb. 59 zeigt uns die Drehscheibe eines Strahlengleises. Um welche Winkel muß die Scheibe gedreht werden, damit Gleisverbindungen hergestellt werden können? Wieviel durchgehende Verbindungen sind möglich?

9. Zeichne die in Abb. 60 dargestellte Egge in der Draufsicht! Zeichne die von dem bewegten Gerät hervorgerufenen Rillen und miß die Winkel, die sie mit den Seiten der Egge bilden!

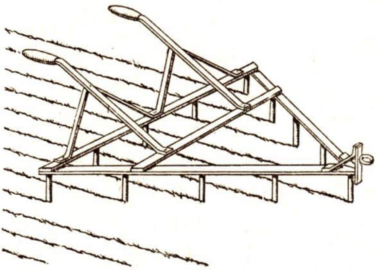


Abb. 60

10. Ein Schiff kann mit Hilfe des Kompasses in einer bestimmten Himmelsrichtung fahren. Diese Himmelsrichtung heißt Kurs des Schiffes. Die Windrose eines Schiffskompasses ist in 360° geteilt. Gezählt wird von der Nord-Südrichtung nach Osten und Westen, jedesmal von 0° bis 90° (Abb. 61). Statt von NO-Richtung spricht man von N 45° O, statt SSW sagt man S $22\frac{1}{2}$° W.

a) Stelle eine Zeichnung dazu her!

b) Gib fünf Skizzen von Schiffskursen und bezeichne jedesmal den Kurs!

Abb. 61

11. „Peilen" bedeutet in der Seemannssprache, mit dem Kompaß die Richtung feststellen, in der ein Gegenstand gesehen wird. Auf einem nach N 20° O steuernden Schiff peilte man ein Feuerschiff in N 65° O. Fertige eine Zeichnung dazu und gib an, in welcher Richtung das Schiff vom Feuerschiff aus gesehen wurde!

12. Aus einer Entfernung von 5,85 sm (1 sm = 1,852 km) wurde ein Schiff in S 37° O gepeilt. Gib in einer maßstäblichen Zeichnung den Standort des Schiffes an!

X. Das Dreieck / Vermessungen

47. Die Winkel des Dreiecks

Die Winkelsumme im Dreieck

1. Schneide ein genügend großes Dreieck (Packpapier!) aus, reiße seine Ecken ab und lege sie mit den Spitzen aneinander! Was für ein Winkel entsteht?
2. Zeichne mehrere Dreiecke von verschiedener Form! Miß jedesmal die drei Winkel und zähle zusammen!
3. Zeichne die Summe der Winkel eines Dreiecks, indem man sie aneinander anträgt!
4. Falte ein Dreieck so, daß die drei Eckpunkte auf einen Punkt der Grundseite zu liegen kommen!
5. Verlängere die Seiten eines Dreiecks über ihre Eckpunkte hinaus!
   a) Was kann man über die entstandenen Winkel aussagen?
   b) Wieviel Nebenwinkel hat jeder Dreieckswinkel?
   c) Wieviel der Größe nach verschiedene Nebenwinkel sind entstanden?

Erklärungen

1. Jedes Dreieck hat drei Winkel, die man auch als **Innenwinkel** bezeichnet.
2. Die Nebenwinkel der Innenwinkel heißen **Außenwinkel.** Weil je zwei Außenwinkel gleich sind, sagt man: Das Dreieck hat drei Außenwinkel (Abb. 62).

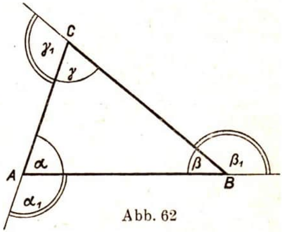


Abb. 62

1. Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei Rechten.
2. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

Beweis zu 1: Man zieht im Dreieck ABC (Abb. 63) zu AB durch C die parallele Gerade; es entstehen die Winkel δ und ε.

Nun ist

$\varepsilon = \alpha$ (Wechselwinkel an Parallelen)

und

$\delta = \beta$ (Wechselwinkel an Parallelen).

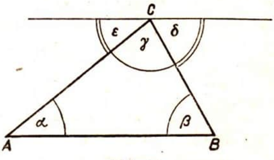


Abb. 63

Man hat also gewissermaßen alle drei Dreieckswinkel in C vereinigt. Sie ergeben zusammen einen gestreckten Winkel. Daraus folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$

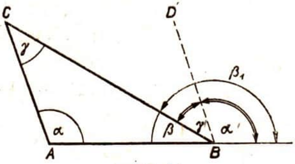


Abb. 64

Beweis zu 2: Im Dreieck ABC (Abb. 64) ergänzt β die Summe $\alpha + \gamma$ zu $2R$ (Satz 1). β ergänzt auch den Außenwinkel β_1 zu $2R$, weil β und β_1 Nebenwinkel sind. Folglich muß β_1 gleich $(\alpha + \gamma)$ sein.

Aufgaben

Innenwinkel

1. In einem Dreieck ist $\alpha = 65°$; β nimmt folgende Werte an: $5°$, $15°$, $25°$, ... Welche Werte ergeben sich für γ? Stelle sie mit denen von β in einer Tafel zusammen und beachte die Änderungen!

2. Zeichne zwei beliebige Winkel, die Winkel in einem Dreieck werden sollen, und stelle durch Zeichnung den zugehörigen dritten Winkel fest! Worauf ist zu achten? Miß die Winkel, bilde ihre Summe und berechne den Fehler!

3. Von den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks sind zwei bekannt. Berechne den dritten!

a) $\alpha = 56°$, $\beta = 47°$ **b)** $\alpha = 82°$, $\beta = 58°$

c) $\beta = 94°$, $\gamma = 39°$ **d)** $\beta = 28°$, $\gamma = 75°$

e) $\alpha = 18°$, $\gamma = 81°$ **f)** $\alpha = 119°$, $\gamma = 46°$

Winkel in besonderen Dreiecken:

Das gleichschenklige Dreieck

4. Begründe folgende Sätze!

a) Im gleichschenkligen Dreieck sind durch einen Winkel auch die übrigen bestimmt.

b) Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie ein Grundwinkel.

5. In einem gleichschenkligen Dreieck mißt ein Grundwinkel **a)** $28°$, **b)** $49°$, **c)** $64°$, **d)** $76°$. Wie groß ist der Winkel an der Spitze und wie groß sind die Außenwinkel?

6. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt **a)** 132°, **b)** 98°, **c)** 67°. Bestimme die Innenwinkel und die anderen Außenwinkel!

7. Der Winkel γ an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nimmt folgende Werte an: 5°, 10°, 15°, ... Stelle die dazugehörigen Werte von α fest!

Das rechtwinklige Dreieck

8. Warum kann ein rechtwinkliges Dreieck nur einen rechten Winkel enthalten?

9. Zeichne verschiedene rechtwinklige Dreiecke und halbiere die spitzen Winkel! Die Winkelhalbierenden bilden stets denselben Winkel miteinander. Begründe dies! Wie groß ist dieser Winkel?

Das gleichseitige Dreieck

10. Zeichne mehrere gleichseitige Dreiecke, miß die Winkel und begründe die Feststellung!

11. Zeichne mit Lineal und Zirkel einen Winkel von 60° (30°, 15°, 75°)!

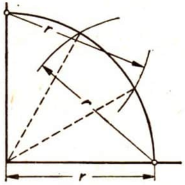


Abb. 65

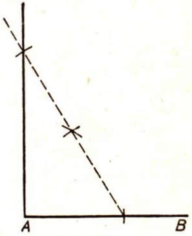


Abb. 66

12. Ein rechter Winkel ist in drei gleiche Teile zu teilen (Abb. 65)!

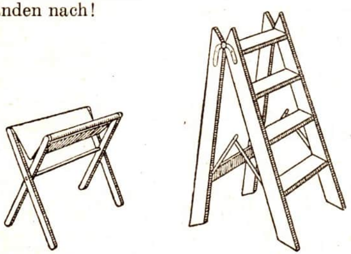
13. Errichte in einem Endpunkt der Strecke AB mit Lineal und Zirkel die Senkrechte! Abb. 66 zeigt ein Verfahren. Begründe es!

Anmerkung: In Abb. 65 und 66 wurden die Kreisbogen mit gleichem Radius geschlagen.

48. Der erste Kongruenzsatz

Schneide drei verschieden lange Pappstreifen aus und verbinde sie durch Heftzwecken zu einem Dreieck! Stelle fest, ob die Dreiecksform verändert werden kann! Stelle auf dieselbe Weise ein Viereck zusammen und untersuche es auf seine Beweglichkeit! Füge einen Streifen hinzu, der

zwei gegenüberliegende Ecken verbindet! Was kann man nun feststellen?
Abb. 67 zeigt Gegenstände unserer Umgebung, die durch Herstellen eines Dreiecks starr gemacht werden. Weise das bei den einzelnen Gegenständen nach!



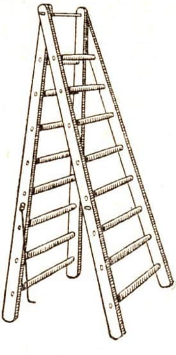


Abb. 67 a b c

Steckt auf dem Schulhof ein Dreieck mit Fluchtstäben ab (Abb. 68)! Meßt die Seiten des Dreiecks und zeichnet es in verkleinertem Maßstab! Meßt mit dem Peilgerät (Abb. 41) die Winkel des Dreiecks und bildet ihre Summe!
Meßt an der Zeichnung die Winkel des Dreiecks und prüft nach, ob sie mit denen des auf dem Hofe abgesteckten Dreiecks übereinstimmen!

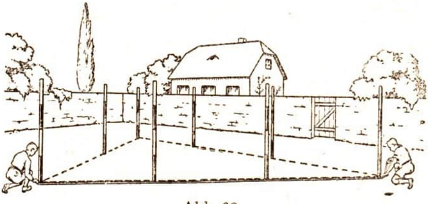


Abb. 68

Schneidet die gezeichneten Dreiecke aus und legt sie zum Vergleichen aufeinander!

Erklärungen

Dreiecke heißen **deckungsgleich** oder **kongruent**[1]), wenn sie so aufeinandergelegt werden können, daß ihre Seiten und Winkel sich decken. Das Zeichen für deckungsgleich ist $\cong$; man schreibt kurz $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
Die Seiten und Winkel eines Dreiecks nennt man seine Stücke. Abb. 69 zeigt, wie sie bezeichnet werden.

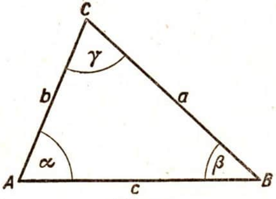


Abb. 69

1) congrúere (lat.): übereinstimmen.

Strecken und Winkel, die beim Aufeinanderlegen zusammenfallen, heißen entsprechende oder **gleichliegende** Stücke.

In deckungsgleichen Dreiecken sind gleichliegende Stücke gleich.

Ist eine Seite a größer als eine Seite b, so schreibt man $a > b$, ist a kleiner als b, so schreibt man $a < b$.

Grundaufgabe: Zeichne ein Dreieck aus den drei Seiten!

Beispiel: $a = 2{,}9$ cm; $b = 3{,}2$ cm; $c = 4{,}1$ cm.

Ausführung (Abb. 70): Ich zeichne auf einer Geraden UV die Strecke $AB = 4{,}1$ cm. Ich schlage um A den Kreis mit dem Radius $b = 3{,}2$ cm und um B den Kreis mit dem Radius $a = 2{,}9$ cm. Beide Kreise schneiden einander in C und C_1. Ich verbinde C und C_1 mit A und B.

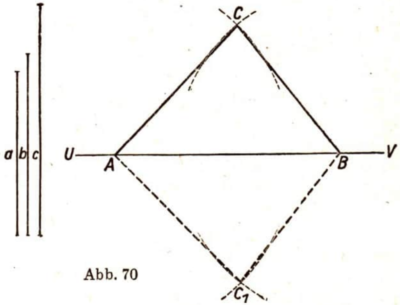


Abb. 70

Ausführbarkeit:

Zu $\triangle ABC$ gehört ein symmetrisches ABC_1. Beide Dreiecke sind kongruent.

Wäre $a + b = c$, so lägen AC und BC auf AB; an Stelle von einem Dreieck wäre eine Strecke entstanden. Wäre $a + b < c$, so würden sich die Kreise überhaupt nicht schneiden. Es muß also immer $a + b > c$ sein, damit ein Dreieck gezeichnet werden kann. Daraus ergibt sich auch, daß $a > c - b$ sein muß.

1. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte Seite. Der Unterschied zweier Seiten eines Dreiecks ist kleiner als die dritte Seite.

2. Erster Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (sss).

Grundaufgabe:

Trage an eine Gerade g in einem ihrer Punkte P einen gegebenen Winkel α (Abb. 71a) an!

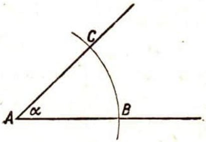


Abb. 71a

Ausführung:
Verfahre nach Abb. 71b!

Bemerkung:
Die Zeichnung liefert vier Lagen für den Winkel. Beweise die Richtigkeit!

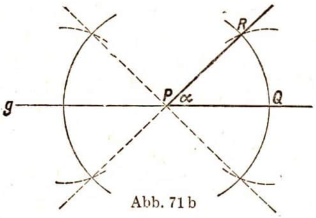


Abb. 71 b

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck aus

a)	$a = 3{,}7$ cm	$b = 4{,}5$ cm	$c = 6{,}8$ cm
b)	$a = 3{,}8$ cm	$b = 2{,}4$ cm	$c = 4{,}7$ cm
c)	$a = 6{,}5$ cm	$b = 7{,}4$ cm	$c = 2{,}8$ cm
d)	$a = 4{,}2$ cm	$b = 6$ cm	$c = 5{,}5$ cm!

Miß die Winkel!

2. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus

a) $a = b = 4{,}8$ cm $c = 8{,}1$ cm

b) $a = b = 7{,}6$ cm $c = 2{,}7$ cm!

3. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck aus

a) $a = b = c = 5{,}3$ cm **b)** $a = b = c = 6{,}4$ cm!

49. Der zweite Kongruenzsatz

Zwischen den Endpunkten einer Strecke BC liegt ein Haus, so daß die Strecke nicht zugänglich ist (Abb. 72). Gib nach dem Bild an, welche Strecken gemessen werden können! Welcher Winkel kann außerdem mit dem Peilgerät gemessen werden?

Es sei gemessen worden:

$$AC = 50 \text{ m};$$
$$AB = 80 \text{ m};$$
$$\sphericalangle BAC = 40°.$$

Zeichne im Maßstab 1 : 1 000 zunächst AC! Die Bestimmungslinien für B sind erstens der Kreis um A mit $r = 8$ cm und zum anderen der Schenkel des an CA in A angetragenen Winkels $CAZ = 40°$. Stelle nun aus der Zeichnung die Länge von BC fest!

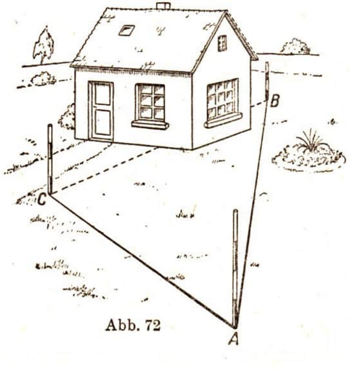


Abb. 72

Grundaufgabe: Zeichne ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel!

Beispiel: $b = 3{,}6$ cm; $c = 4{,}5$ cm; $\alpha = 74°$.

Beschreibe die Ausführung nach Abb. 73!

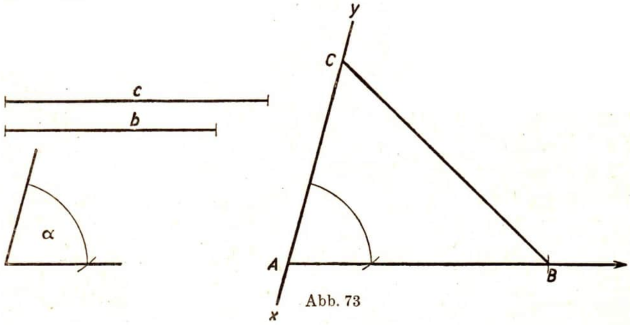


Abb. 73

> **Zweiter Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (*sws*).**

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck aus

a) $a = 4{,}9$ cm	$b = 3{,}6$ cm	$\gamma = 112°$
b) $b = 3$ cm	$c = 9$ cm	$\alpha = 40°$
c) $a = 5{,}3$ cm	$c = 6{,}7$ cm	$\beta = 76°$
d) $b = 4{,}8$ cm	$a = 5{,}1$ cm	$\gamma = 65°$!

Miß die übrigen Stücke des Dreiecks!

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus folgenden Stücken, wobei die Seite c dem rechten Winkel gegenüberliegen soll:

a) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm **b)** $a = 5{,}4$ cm, $b = 6{,}9$ cm!

3. Zeichne eine Reihe von Dreiecken aus $b = 4$ cm, $c = 6$ cm und $\alpha = 10°$, $20°$, $30°$, … $170°$! Wie ändert sich die Seite a bei wachsendem α?

4. Ein Radfahrer fährt, um von einem Ort A nach einem Ort B zu gelangen, zu dem der direkte Weg über einen steilen Berg führt, auf ebenen, geraden Straßen zuerst in $2\frac{1}{2}$ Stunden nach einem dritten

Ort C und von da in $1\frac{3}{4}$ Stunden nach B. Stelle nach einer maßstäblichen Zeichnung fest, wie weit A in der Luftlinie von B entfernt ist, wenn die beiden Straßen in C unter einem Winkel von 52° zusammenstoßen und der Radfahrer in einer Stunde 15 km zurücklegt!

50. Der dritte Kongruenzsatz

Ein Eckpunkt eines zu vermessenden Dreiecks ist infolge eines Hindernisses (Zaun) nicht zugänglich und soll von einer Standlinie aus bestimmt werden (Abb. 74). Gib nach dem Bild an, welche Winkel außer der Standlinie gemessen werden können!

Die hier durchgeführte Vermessung heißt „Vorwärtseinschneiden".

Es sei: $AB = 46$ m; $\sphericalangle ABC = 73°$; $\sphericalangle BAC = 48°$; zeichne im Maßstab 1 : 1 000 zunächst AB! Die Bestimmungslinien für C sind die Schenkel AX und BY der an AB in A und B angetragenen Winkel $BAX = 48°$ und $ABY = 73°$. Stelle auf Grund der Zeichnung die Längen AC und BC fest!

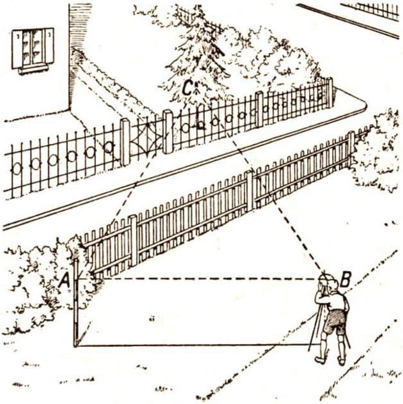


Abb. 74

Grundaufgabe:

Zeichne ein Dreieck aus einer Seite und zwei Winkeln!

Beispiele:

1. $c = 4$ cm; $\alpha = 42°$; $\beta = 75°$.

Beschreibe die Ausführung nach Abb. 75!

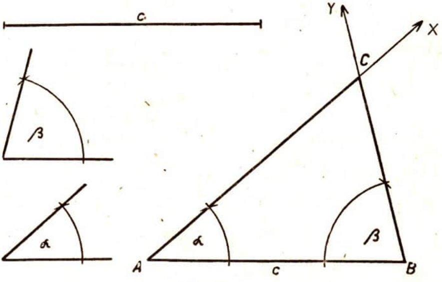


Abb. 75

2. $c = 4$ cm; $\alpha = 42°$; $\gamma = 67°$.

Die Ausführung ist auf zwei Arten möglich. Wird zunächst aus den gegebenen Größen für α und γ der Winkel β bestimmt, so gibt das vorangehende Beispiel die Lösung an. Wenn nur die gegebenen Stücke verwendet werden, zeigt Abb. 76 die Ausführung: Ich zeichne $AB = 4$ cm. An AB trage ich in $A \sphericalangle BAX = 42°$, an AX in einem beliebigen Punkt P $\sphericalangle APY = 67°$ an. Ich ziehe zu PY durch B die Parallele, die AX in C schneidet.

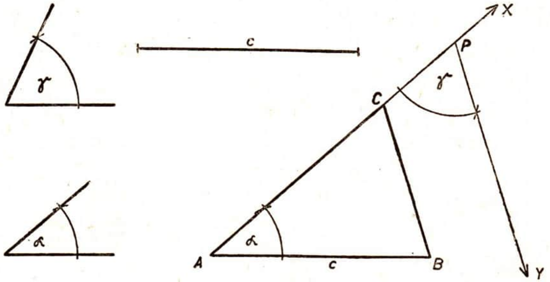


Abb. 76

> **Dritter Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (*sww* und *wsw*).**

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck aus

a) $a = 9$ cm	$\beta = 75°$	$\gamma = 52\frac{1}{2}°$
b) $c = 12$ cm	$\gamma = 105°$	$\beta = 37°$
c) $b = 4{,}7$ cm	$\beta = 100°$	$\gamma = 65°$
d) $c = 5{,}4$ cm	$\alpha = 25°$	$\beta = 70°$!

Miß die übrigen Stücke des Dreiecks!

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus

a) $a = 7$ cm $\alpha = 68°$ **b)** $c = 10$ cm $\beta = 37°$!

3. Auf eine 7 m hohe Brücke soll eine Fahrrampe geführt werden. Man läßt sie unter dem Winkel $\alpha = 5°$ gegen die Waagerechte ansteigen. Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Länge der Fahrrampe fest!

4. Wenn die Sonne unter dem Winkel $\alpha = 38°$ gegen die Waagerechte gesehen wird, wirft eine Telegraphenstange einen Schatten von $l = 10{,}5$ m Länge. Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Höhe der Stange fest!

51. Der vierte Kongruenzsatz

Betrachte Abb. 77! Die Lage und die Entfernung der Punkte A und B seien aus der Karte bekannt. Punkt C soll in die Karte eingetragen werden. Gib an, welche Strecken außer AB und welche Winkel im Dreieck ABC gemessen werden können! Nach der Karte ist $AB = 83$ m. Es sei gemessen: $BC = 45$ m; $\sphericalangle BCA\,(\sphericalangle\gamma) = 83°$. Zeichne im Maßstab 1 : 1 000 zunächst BC. Die Bestimmungslinien für A sind 1. der Schenkel des in C an BC angetragenen Winkels $\gamma = 83°$ und 2. der Kreis um B mit dem Radius AB. Stelle mit Hilfe der Zeichnung die Länge von AC und die Größe des Winkels CAB fest!

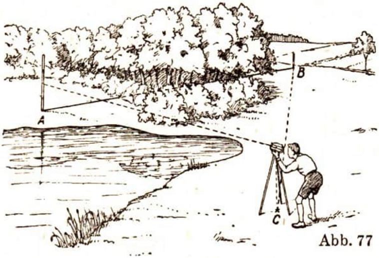


Abb. 77

Grundaufgabe: Zeichne ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite!

Beispiel:

$a = 2{,}6$ cm
$b = 3{,}2$ cm
$\beta = 105°$

Beschreibe die Ausführung nach Abb. 78! Gib an, warum nicht zwei Lösungen möglich sind!

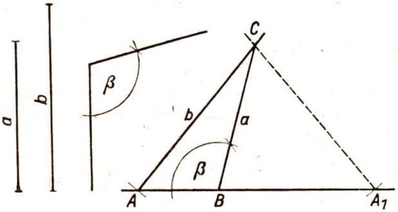


Abb. 78

Vierter Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen (*ssw*).

Betrachtung:

Es soll untersucht werden, ob man auch kongruente Dreiecke erhält, wenn zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren gegeben sind.

Gegeben sind:

$a = 2{,}8$ cm; $c = 4$ cm;
$\alpha = 41°$ $(a < c)$.

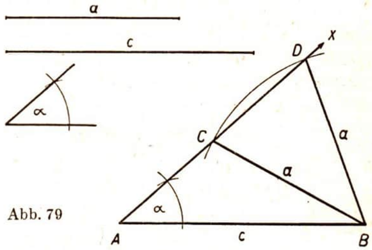


Abb. 79

Ausführung:

Ich zeichne (Abb. 79) $AB = c$ und trage in A an AB Winkel $BAX = \alpha$ an. Ich schlage um B mit a den Kreis, der BX in C und D schneidet. Ich erhalte die beiden Dreiecke ABC und ABD; jedes enthält die gegebenen Stücke, die Dreiecke sind aber nicht kongruent. Die Lösung der Aufgabe ist nicht eindeutig bestimmt.

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck aus

a) $b = 6$cm $c = 4$cm $\beta = 120°$ **b)** $a = 1{,}8$cm $c = 4{,}1$cm $\gamma = 79°$
c) $a = 3{,}5$cm $b = 2$cm $\alpha = 69°$ **d)** $c = 3{,}9$cm $b = 3$cm $\gamma = 82\frac{1}{2}°$!

Miß die dritte Seite und die anderen Winkel!

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus

a) $b = 5$ cm $c = 6$ cm **b)** $a = 6$ cm $c = 10$ cm!

3. Zeichne ein Dreieck aus: $c = 4{,}5$ cm; $a = 4$ cm; $\alpha = 50°$! Vergleiche die Länge der dem Winkel α gegenüberliegenden Seite a mit der Länge der Seite c, die dem Winkel anliegt! Stelle fest, wieviel Lösungen diese Aufgabe hat!

4. Zwei Orte A und B sind 7 km voneinander entfernt. Ein dritter Ort C ist von B $4\frac{1}{2}$ km entfernt. Die Blickrichtung von C nach A bildet mit CB einen Winkel von 82°. Stelle durch eine Zeichnung fest, wie weit C von A entfernt ist!

5. Durch Abschreiten stellt man fest, daß zwei Seiten eines dreieckigen Weideplatzes 172 m und 88 m lang sind. Der Winkel, den die kürzere Seite mit der dritten bildet, wird mit 95° gemessen. Zeichne den Weideplatz im geeigneten Maßstab und bestimme, wie lang die dritte Seite ist!

52. Besondere Linien im Dreieck

Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC (Abb. 80) und in ihm a) die Senkrechte h_c von C auf AB, b) die Winkelhalbierende w_γ von $\sphericalangle \gamma$, c) die Verbindungsstrecke s_c von C mit der Mitte F von AB!

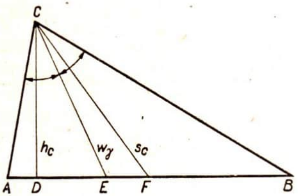


Abb. 80

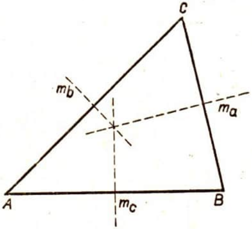


Abb. 81

Zeichne in einem spitzwinkligen Dreieck a) die Senkrechten von den Ecken auf die Gegenseiten, b) die Verbindungsstrecken von den Ecken mit den Seitenmitten, c) die drei Winkelhalbierenden! (Drei gesonderte Zeichnungen!) Was beobachtet man?

Zeichne in einem Dreieck zu je zwei Eckpunkten die Symmetrieachsen! (Abb. 81.)

Erklärungen

1. Das Stück der Senkrechten von einer Dreiecksecke bis zur Gegenseite heißt **Höhe.**
2. Das Stück der Halbierenden eines Dreieckswinkels bis zur Dreiecksseite heißt **Winkelhalbierende.**
3. Die Verbindungsstrecke einer Dreiecksecke mit der Mitte der Gegenseite heißt **Seitenhalbierende.**
4. Die Senkrechte in der Mitte einer Dreiecksseite heißt **Mittelsenkrechte.**

Jedes Dreieck hat drei Höhen (h_a, h_b, h_c), drei Winkelhalbierende (w_α, w_β, w_γ), drei Seitenhalbierende (s_a, s_b, s_c) und drei Mittelsenkrechte.

Welche Bedeutung haben die angehängten kleinen Buchstaben?

Auch Höhen, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende eines Dreiecks können als Strecken unter den drei gegebenen Stücken sein, aus denen ein Dreieck gezeichnet werden soll. Dagegen sind die in Abb. 81 mit m_a, m_b, m_c bezeichneten Mittelsenkrechten unbegrenzt.

1. Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. Dieser ist von den Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt. Er ist der Mittelpunkt des Umkreises (Abb. 82).

2. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt (Abb. 83).

3. Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. Dieser ist von den Seiten gleich weit entfernt. Er ist der Mittelpunkt des Inkreises (Abb. 84).

4. Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. Dieser ist auf jeder Seitenhalbierenden von der Ecke doppelt so weit entfernt wie von der Seitenmitte. Er heißt der Schwerpunkt (Abb. 85).

Beweis zu 1 (Abb. 82): Der Schnittpunkt M von je zwei der Mittelsenkrechten ist von allen drei Ecken gleich weit entfernt; also muß er auch auf der dritten Mittelsenkrechten liegen.

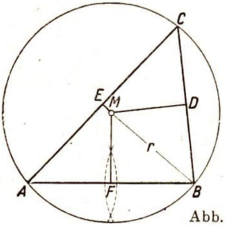


Abb. 82

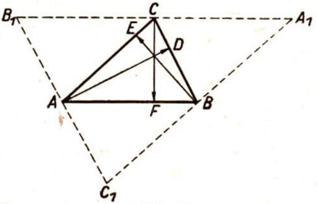


Abb. 83

Beweis zu 2 (Abb. 83): Zeichnet man im Dreieck ABC die Höhen und zieht durch die Ecken die Parallelen zu den Gegenseiten, bis sie einander schneiden, so entstehen drei neue Dreiecke, die dem Dreieck ABC kongruent sind. Die Höhen des Dreiecks ABC sind die Mittelsenkrechten des großen Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ und schneiden einander deshalb in einem Punkt.

Beweis zu 3 (Abb. 84): Zieht man je zwei Winkelhalbierende, so ist ihr Schnittpunkt O von den drei Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt und muß daher auch auf der dritten Winkelhalbierenden liegen. Der Beweis zu 4 wird später nachgeholt.

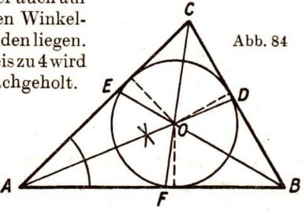


Abb. 84

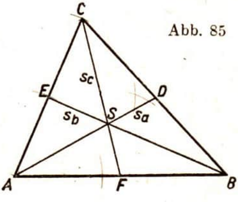


Abb. 85

Beispiel für eine Dreieckskonstruktion: Ein Dreieck ist zu zeichnen aus: $c = 10$ cm; $a = 7$ cm; $s_c = 6$ cm.

1. Es wird als Planfigur ein beliebiges Dreieck gezeichnet, in dem die gegebenen Stücke besonders kenntlich gemacht werden (Abb. 86). An dieser Planzeichnung untersuchen wir, mit Hilfe welcher Teildreiecke und Bestimmungslinien das gesuchte Dreieck aufzubauen ist.
2. Plan: Das Teildreieck BCD kann aus $BC = a$, $CD = s_c$, $DB = \frac{c}{2}$ nach der Grundaufgabe sss gezeichnet werden. Bestimmungslinien für A: 1. die Verlängerung von BD über D hinaus, 2. der Kreisbogen um B mit c.

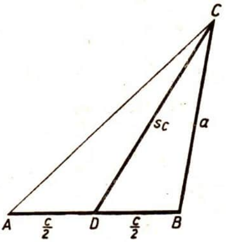


Abb. 86

3. Ausführung: Ich zeichne eine Strecke $DB = 5$ cm. Mit $s_c = 6$ cm zeichne ich um D und mit $a = 7$ cm um B Kreise, die einander in C schneiden. BD verlängere ich über D hinaus. Um B zeichne ich mit $c = 10$ cm den Kreis, der die Verlängerung von BD in A schneidet. A wird mit C verbunden.
4. Nachbetrachtung: Die Aufgabe kann gelöst werden, wenn die Summe zweier Seiten des Teildreiecks BCD größer ist als die dritte Seite.

Anmerkung: Nach diesem Muster ist jede Dreieckskonstruktion durchzuführen.

Aufgaben

1. Zeichne je ein spitz-, recht- und stumpfwinkliges Dreieck! Zeichne jedesmal die drei Mittelsenkrechten, bis sie einander schneiden, und schlage um den Schnittpunkt den Kreis, der durch die drei Ecken geht! Man nennt ihn den Umkreis des Dreiecks. Sein Radius wird mit r bezeichnet.

2. Zeichne in je einem spitz-, recht- und stumpfwinkligen Dreieck die drei Höhen und bestimme jedesmal ihren Schnittpunkt!

3. Zeichne in je einem spitz-, stumpf- und rechtwinkligen Dreieck die drei Winkelhalbierenden und in jedem Fall den Kreis, der die drei Seiten berührt! Man nennt ihn den Inkreis des Dreiecks. Sein Radius wird mit ϱ bezeichnet.

Stelle den Plan auf und zeichne nach ihm ein Dreieck aus

4. $a = 3{,}5$ cm	$b = 3$ cm	$r = 2$ cm
5. $b = 2{,}5$ cm	$c = 4{,}9$ cm	$r = 2{,}5$ cm
6. $c = 5{,}4$ cm	$\alpha = 21°$	$r = 3$ cm
7. $a = 6$ cm	$h_c = 5$ cm	$b = 7$ cm
8. $a = 8$ cm	$h_c = 6$ cm	$\gamma = 75°$
9. $a = 7$ cm	$h_c = 3$ cm	$\gamma = 45°$
10. $a = 8$ cm	$h_a = 5$ cm	$\gamma = 67{,}5°$
11. $c = 6$ cm	$h_c = 5{,}5$ cm	$a = 7$ cm
12. $\gamma = 75°$	$w_\gamma = 5$ cm	$a = 7$ cm
13. $\alpha = 67{,}5°$	$w_\alpha = 7$ cm	$c = 9$ cm
14. $\beta = 105°$	$w_\beta = 5$ cm	$c = 8$ cm
15. $a = 4{,}5$ cm	$b = 6{,}6$ cm	$s_a = 6{,}4$ cm
16. $c = 7$ cm	$\alpha = 70°$	$s_c = 5{,}4$ cm
17. $b = 4{,}8$ cm	$h_c = 4$ cm	$s_b = 6$ cm!

53. Vermessungs- und Ortungsaufgaben

1. Bestimme die Breite eines Flusses von einem seiner Ufer aus (Abb. 87)! Hart am jenseitigen Ufer steht ein Baum (oder ein

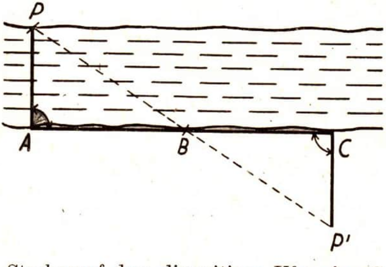


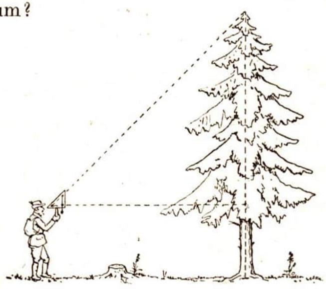
Abb. 87

Pfahl) P. Stecke auf dem diesseitigen Ufer eine Gerade ab und bestimme auf ihr mit Hilfe des Peilgeräts den Punkt A und außerdem den Punkt B so, daß $\sphericalangle\, PAB = R$ ist! Dann stecke auf der Geraden die der Strecke AB gleiche Strecke BC ab und lege das Dreieck ABP auf das diesseitige Ufer um!

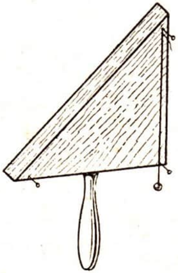
Beispiel: $AB = 84$ m; $\sphericalangle\, ABP = 55°$ (Zeichnung 1 : 1000).

2. Bestimme die Höhe eines Baumes (Turmes, Hauses) unter Benutzung eines Försterdreiecks (Abb. 88a und b)! Welche Strecke entspricht der Höhe des Baumes? (Augenhöhe berücksichtigen!) Warum?

Abb. 88



a



b

3. Auf einem nach N 20° O steuernden Schiff peilte man das Feuerschiff von Borkum in N 65° O und kam nach einer Fahrt von 3,8 sm (1 sm = 1 852 m) dem Feuerschiff am nächsten (Abb. 89). Stelle durch eine maßstabgerechte Zeichnung fest, in welchem Abstand das Schiff an dem Feuerschiff vorbeifuhr!

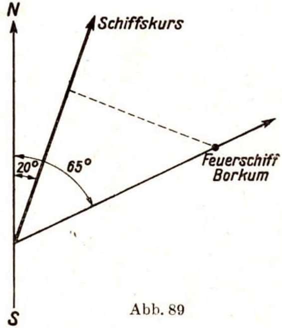


Abb. 89

4. Auf einem nach N 13° O fahrenden Schiff wurde das Feuer von Helgoland in N 44° O und dann nach einer Fahrt von 7,5 sm in S 37° O gepeilt. Stelle fest, in welchen Entfernungen vom Feuer die Peilungen vorgenommen wurden!

5. Auf einer waagerechten Straße, in deren Richtung der Gipfel eines Berges sichtbar ist, wird an zwei aufeinanderfolgenden Punkten A und B, deren Entfernung voneinander 120 m beträgt, der Gipfel des Berges unter den Erhebungswinkeln $\alpha = 30°$ und $\beta = 32°$ gesehen. Entnimm einer Zeichnung im Maßstab 1 : 10 000, wie hoch der Berg ist!

6. Durch einen Berg soll zwischen den Punkten A und B ein Tunnel gebaut werden. Es ist festzustellen, wie lang der Tunnel wird und in welchen Richtungen der Bau erfolgen muß, wenn er von beiden Seiten her gleichzeitig beginnt.

Man bestimmt im anschließenden Gelände einen Punkt C so, daß von ihm A und B zugänglich sind. Die Strecken AC und BC werden um sich selbst über C hinaus verlängert bis A_1 und B_1. Gib an, welche Dreiecke dann kongruent sind! (Nach welchem Kongruenzsatz?)

Löse die Aufgabe durch eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000, wenn durch Messen bestimmt wurden

a) $AC = 55$ m $\quad BC = 80$ m $\quad \sphericalangle ACB = 115°$!

b) $AC = 76$ m $\quad BC = 110$ m $\quad \sphericalangle ACB = 85°$!

7. Man will wissen, wie hoch eine Bergkuppe über die Ebene emporragt (Abb. 90 a). Der Fußpunkt der zu bestimmenden Höhe ist nicht zugänglich. Man steckt in der Ebene eine auf die Bergkuppe zulaufende Standlinie AB ab (Abb. 90 b) und mißt die Erhebungswinkel α und β bei A und B. Die Höhe $CD = h$ entnimmt man einer maßstabgerechten Zeichnung.

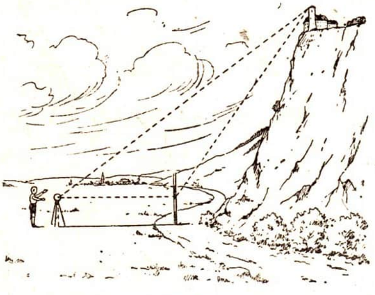


Abb. 90 a

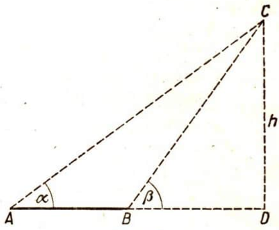


Abb. 90 b

Beispiele:

a) $AB = 65$ m, $\sphericalangle \alpha = 32°$, $\sphericalangle \beta = 48°$, Augenhöhe $= 1{,}35$ m

b) $AB = 140$ m, $\sphericalangle \alpha = 18°$, $\sphericalangle \beta = 33°$, Augenhöhe $= 1{,}25$ m

8. Steht am Fluß (Teich oder See) ein Turm oder ein hohes Haus, dessen Höhe man kennt, so bestimmt man die Breite des Flusses (Teiches oder Sees) nach Abb. 91.

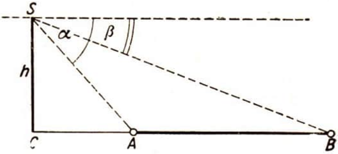


Abb. 91

Man mißt mit dem Winkelmesser die Senkungswinkel α und β, die die Peilstrahlen zum nahen und fernen Ufer mit der Waagerechten bilden. Aus einer Zeichnung im geeigneten Maßstab kann man die Breite (AB) feststellen.

Beispiele: **a)** $h = 24\,\text{m}$, $\sphericalangle\,\alpha = 65°$, $\sphericalangle\,\beta = 28°$
b) $h = 32\,\text{m}$, $\sphericalangle\,\alpha = 72°$, $\sphericalangle\,\beta = 38°$

XI. Das Viereck

54. Parallelogramme

Stelle nach Abb. 92 ein bewegliches Viereck aus je zwei gleich langen Stäben her und bilde die Diagonalen durch gespannte Fäden! Verändere die Gestalt des Vierecks, vergleiche seine Winkel und beobachte die Diagonalen! Fertige Zeichnungen dazu an!

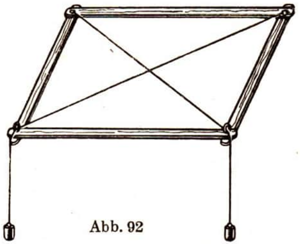


Abb. 92

Erklärungen:

Ein Viereck heißt **Parallelogramm** [1]), wenn zwei Paar Gegenseiten parallel sind.

Die Verbindungsstrecken zweier nicht benachbarter Ecken eines Vielecks heißen **Diagonalen.**

1. Im Parallelogramm ist die Summe je zweier Nachbarwinkel gleich 180°.
2. Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.
3. Im Parallelogramm sind die Gegenseiten gleich.
4. Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

1) parállelos (gr.): gleichlaufend; to gramma (gr.): der Buchstabe, die Schrift, die Zeichnung (vgl. Grammatik).

Anleitung zu den Beweisen: Weise nach, daß jede Diagonale ein Parallelogramm in zwei deckungsgleiche Dreiecke zerlegt!

Beide Diagonalen zerlegen das Parallelogramm in vier Dreiecke, von denen je zwei kongruent sind. Weise auch das nach (Abb. 93)!

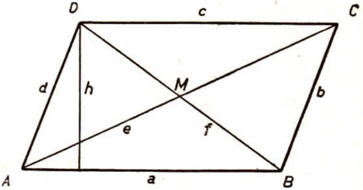


Abb. 93

Aufgaben

Zeichne ein Parallelogramm aus

1. a) $a = 5$ cm $b = 6$ cm $e = 4$ cm
b) $a = 5$ cm $e = 4$ cm $\beta = 45°$

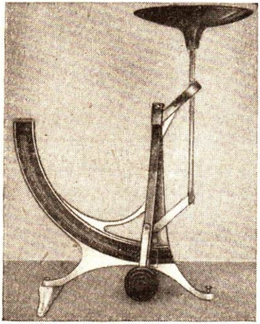
2. a) $a = 5$ cm $e = 8$ cm $f = 6{,}4$ cm
b) $b = 6$ cm $e = 12$ cm $f = 5$ cm

3. a) $a = 5{,}5$ cm $e = 8$ cm $\sphericalangle CMD = 75°$
b) $a = 6{,}5$ cm $f = 10$ cm $h = 3{,}5$ cm

Bezeichnung der Stücke s. Abb. 93!

4. a) $a = 5$ cm $e = 4$ cm $\sphericalangle ACB = 82°$
b) $e = 8$ cm $f = 6{,}4$ cm $\sphericalangle CMD = 105°$!

5. Abb. 94 stellt eine Briefwaage und Abb. 95 eine Tafelwaage schematisch dar. Wie wird in beiden Fällen erreicht, daß die Schalen beim Wägen immer die waagerechte Richtung behalten? Begründe die Antwort mit den Eigenschaften des Parallelogramms!



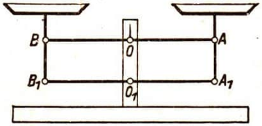


Abb. 95

Betrachte auch die Aufhängevorrichtung einer Fahrradlampe!

Abb. 94

6. Zeichne die Eisenbahnschranke (Abb. 96) im geöffneten Zustand bei einem Winkel von 65° (Länge 8 m, Höhe 1,20 m)!

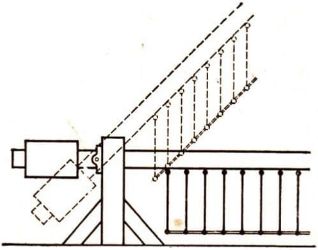


Abb. 96

7. a) Untersuche, ob ein Parallelogramm Symmetrieachsen hat, ob also kongruente Teile des Parallelogramms durch Umklappen um die Achse zur Deckung gebracht werden können!

b) In Abb. 93 kann das Dreieck ACD durch Drehen in der Ebene des Parallelogramms $ABCD$ mit dem Dreieck ABC zur Deckung gebracht werden. Gib den Drehpunkt an! Wie groß ist der Drehwinkel?

8. Verbinde Punkte der Gegenseiten eines Parallelogramms durch eine Strecke, die durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, und beweise, daß diese Strecke durch den Schnittpunkt halbiert wird!

9. Ebene Figuren, die mit sich selbst zur Deckung kommen, wenn sie in ihrer Ebene um einen Punkt O eine Drehung von 180° ausgeführt haben, heißen punktsymmetrisch oder zentralsymmetrisch in bezug auf den Punkt O. O heißt Mittelpunkt oder Symmetriezentrum des Gebildes. Welche Eigenschaft ergibt sich daraus für das Parallelogramm?

10. Betrachte die Punkte der Gegenseiten in Aufgabe 8 als Punkte, die zum Mittelpunkt des Parallelogramms symmetrisch sind. Was geschieht also mit der Verbindungsstrecke spiegelgleicher Punkte zentralsymmetrischer Figuren durch das Symmetriezentrum?

55. Umkehrungen

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn
a) die Gegenseiten einander gleich sind,
b) zwei Gegenseiten gleich und parallel sind,
c) die Diagonalen einander halbieren.

Anleitung zu den Beweisen: Durch den Nachweis kongruenter Dreiecke (Abb. 93) ergibt sich die Gleichheit zweier gegenüberliegender Winkel.

Aufgaben

1. Zeichne ein Parallelogramm, fälle vom Schnittpunkt der Diagonalen die Lote auf die Seiten und verbinde je zwei benachbarte Fußpunkte! Was für ein Viereck entsteht? (Beweis!)

Zeichne ein Parallelogramm aus

2. a) $a = 5$ cm $e = 4$ cm $\sphericalangle ACB = 82°$
b) $e = 8$ cm $f = 6{,}4$ cm $\sphericalangle AMB = 105°$
Bezeichnung der Stücke s. Abb. 93!

3. a) $a = 5$ cm $f = 6{,}4$ cm $\sphericalangle AMB = 75°$
b) $e = 7$ cm $\sphericalangle AMB = 85°$ $h_a = 4{,}4$ cm!

4. Zeichne ein durch den Winkel $\alpha = 75°$ und die Seiten $a = 6$ cm und $b = 5$ cm bestimmtes Parallelogramm als Viereck mit **a)** paarweise parallelen Gegenseiten, **b)** paarweise gleichen Gegenseiten, **c)** einem Paar paralleler und gleicher Gegenseiten, **d)** einem Paar paralleler und einem Paar gleicher Gegenseiten!

56. Allgemeines Trapez und allgemeines Viereck

Stelle aus vier verschieden langen Stäben oder Pappstreifen ein Viereck her und verbinde die Stabenden gelenkig miteinander (Gelenkviereck)! Halte eine Seite als Grundseite fest und verschiebe die anderen! Wie kann man das Gelenkviereck versteifen?
Versuche, das Gelenkviereck so zu verformen, daß zwei Seiten parallel verlaufen!

Erklärungen:
Ein Viereck ist durch vier in einer Ebene liegende Punkte bestimmt.
Ein Viereck heißt **Trapez,** wenn zwei Gegenseiten parallel sind.
Die parallelen Gegenseiten heißen Grundseiten oder Grundlinien, die nicht parallelen Schenkel.
Die Verbindungslinie der Mitten der Schenkel heißt Mittellinie des Trapezes.
Der Abstand der Grundlinien wird als Höhe bezeichnet.

1. Ein Viereck ist durch 5 Stücke bestimmt.
2. Die Summe der Winkel eines Vierecks ist gleich vier Rechten.
3. Zieht man in einem Trapez durch die Mitte eines Schenkels die Parallele zu den Grundseiten, so ist diese Parallele die Mittellinie des Trapezes.
4. Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich der halben Summe der Grundseiten.

Anleitung zu den Beweisen:
Zu 1 und 2: Jedes Viereck wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite zerlegt.
Zu 3 (Abb. 97): Aus der Deckungsgleichheit der Dreiecke BFH und CFG folgt $BF = FC$.

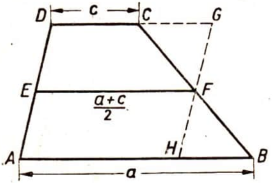


Abb.97

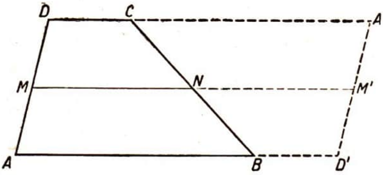


Abb.98

Zu 4 (Abb.98): Dreht man das Trapez um N als Mittelpunkt um 180° (Punktspiegelung), so entsteht das Parallelogramm $AD'A'D$, in dem MM' durch N halbiert wird. Es ist $MM' = AD' = AB + CD = a + c$; folglich ist $MN = \frac{a+c}{2}$.

Grundaufgabe: Teile eine Strecke AB in n (beliebig viele) gleiche Teile (Abb. 99)!

Ausführung: Lege durch A eine Gerade in beliebiger Richtung, trage auf ihr von A aus hintereinander n gleiche Strecken ab, verbinde den Endpunkt B' des letzten Abschnitts mit B und zeichne zu der Verbindungslinie durch die übrigen Endpunkte die Parallelen! Der Beweis ergibt sich aus Satz 3. Führe ihn!

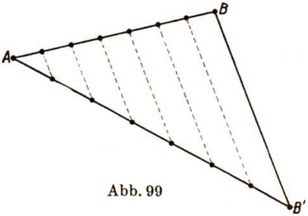


Abb. 99

Aufgaben

1. Zeichne ein Viereck aus den Stücken

a)	$a = 5$ cm	$b = 4$ cm	$d = 6$ cm	$\alpha = 112\frac{1}{2}°$	$\beta = 75°$
b)	$a = 6$ cm	$b = 5$ cm	$c = 3$ cm	$d = 7$ cm	$e = 7$ cm
c)	$a = 5$ cm	$b = 4$ cm	$c = 8$ cm	$e = 7$ cm	$\alpha = 120°$
d)	$a = 3$ cm	$b = 4$ cm	$c = 6$ cm	$e = 4{,}5$ cm	$f = 7$ cm
e)	$a = 6{,}3$ cm	$b = 3{,}4$ cm	$\alpha = 54°$	$\beta = 70°$	$\gamma = 145°$
f)	$a = 5$ cm	$e = 6{,}7$ cm	$f = 5{,}8$ cm	$\alpha = 84°$	$\beta = 72°$!

Zeichne ein Trapez aus

2. a)	$a = 4$ cm	$c = 2{,}5$ cm	$d = 3$ cm	$\alpha = 85°$
b)	$a = 8$ cm	$b = 6$ cm	$d = 5$ cm	$\delta = 100°$

3. a) $a = 5$ cm $\quad d = 3$ cm $\quad \alpha = 80°$ $\quad \beta = 60°$
b) $a = 6$ cm $\quad c = 4$ cm $\quad d = 4{,}5$ cm $\quad e = 5{,}5$ cm!

4. Abb. 100 zeigt ein sog. Gaffelsegel, das am Mast zwischen zwei Rundhölzern, der Gaffel und dem Großbaum, an einem von der Mastspitze zur Gaffelmitte führenden Seil aufgehängt ist. Es hat folgende Ausmaße: Gaffel 3 m lang, Stützpunkt der Gaffel 2 m unterhalb der Mastspitze, Halteseil 1,8 m lang, Großbaum 4 m lang (senkrecht zum Mast), Großbaumstütze 6 m unter der Mastspitze. Zeichne das Segel im Maßstab 1 : 100!

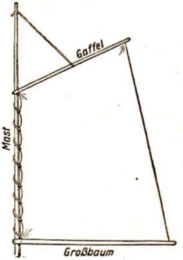


Abb. 100

5. Die Entfernung zweier Punkte X und Y, die wegen eines Hindernisses (Berg, See o. dgl.) nicht unmittelbar gemessen werden kann, läßt sich auf folgende Weise bestimmen: Zwei Punkte P und Q werden so ausfindig gemacht (Abb. 101), daß von ihnen aus X und Y angepeilt, also $\sphericalangle XPY = \alpha$ und $\sphericalangle XQY = \beta$, ferner die Strecken $PX = a$, $QX = b$, $\sphericalangle PXQ = \varepsilon$ gemessen werden können. Ermittle durch Zeichnung die Länge von XY für den Fall, daß $a = 270$ m, $b = 135$ m, $\alpha = 95°$, $\beta = 84°$, $\varepsilon = 112°$ gemessen wurde!

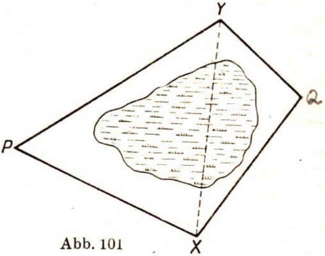


Abb. 101

6. Sind von den Endpunkten einer ihrer Länge nach bekannten Standlinie AB aus zwei Punkte X und Y sichtbar, so kann die Entfernung XY durch Vorwärtseinschneiden ermittelt werden, auch wenn die Punkte X und Y nicht zugänglich sind (Abb. 102). Von den Endpunkten der Standlinie AB werden die Punkte X und Y angepeilt und $\sphericalangle XAB = \alpha_2$, $\sphericalangle YAB = \alpha_1$, $\sphericalangle XBA = \beta_1$ und $\sphericalangle YBA = \beta_2$ gemessen. Bestimme durch Zeichnung die Entfernungen XY, AX und BX für den Fall, daß $a = 155$ m, $\alpha_1 = 42°$, $\alpha_2 = 124°$, $\beta_1 = 33°$, $\beta_2 = 105°$ gemessen wurde! (Maßstab 1 : 2000.)

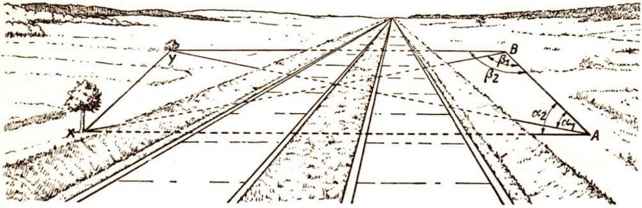


Abb. 102

7. Löse die gleiche Aufgabe wie 6. für den Fall, daß X und Y auf verschiedenen Seiten der Standlinie liegen!

8. Durch einen Bergrücken, von dem in Abb. 103 das Viereck $ABCD$ einen lotrechten Schnitt wiedergibt, soll von A nach B eine Rohrleitung vorgetrieben werden. Um ihre Länge und Steigung zu bestimmen, werden die Entfernungen $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ und in D der Senkungswinkel δ_1 für A und der Erhebungswinkel δ_2 für C, schließlich in C der Senkungswinkel γ_1 für B gemessen. Bestimme durch Zeichnung die Länge der Rohrleitung und ihren Neigungswinkel gegen die Waagerechte für den Fall, daß $b = 650$ m, $c = 940$ m, $d = 570$ m, $\sphericalangle\,\delta_1 = 67°$, $\sphericalangle\,\delta_2 = 18°$ und $\sphericalangle\,\gamma_1 = 56°$ gemessen wurde!

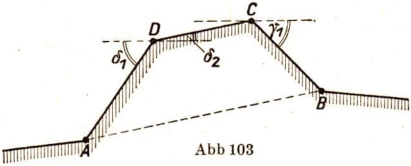


Abb 103

9. Betrachte ein Dreieck als den Grenzfall eines Trapezes, dessen eine Grundseite zu Null zusammengeschrumpft ist. Zeichne die Verbindungslinie der Mitten zweier Dreiecksseiten und beweise, daß sie gleich der halben dritten Seite ist!

10. Beweise, daß der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks von den Mitten der Seiten halb so weit entfernt ist wie von der gegenüberliegenden Ecke!

a) In Abb. 104a sind AD und CF einander in S schneidende Seitenhalbierende des Dreiecks ABC, die Punkte E_1, D und F_1 teilen die Seite BC in vier gleiche Strecken. Beweise, daß $F_1F \parallel AD$ ist! Zeichne durch E_1 die Parallele zu AD, die CS in E schneidet, und weise nach, daß E und S die Strecke CF in drei gleiche Teile zerlegen!

b) Benutze Abb. 104b und verwende dieselbe Überlegung wie bei der 9. Aufgabe!

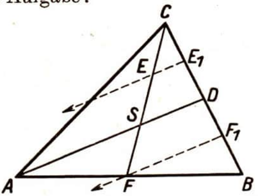


Abb. 104a

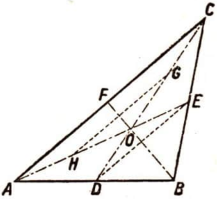


Abb. 104b

57. Rhombus, Drachenviereck und gleichschenkliges Trapez

Falte ein Blatt Papier einmal zusammen und durchstich es! Falte es auseinander, lege durch die beiden Durchstichpunkte eine Gerade, falte das Papier längs der Geraden zusammen und durchstich es zum zweiten Male in der ersten Faltlinie! Breite es wieder aus, beschreibe die durch die Durchstichpunkte gebildete Figur und gib ihre Symmetrieeigenschaften an!

Durchstich ein einfach gefaltetes Papier, wähle auf der Faltlinie zwei beliebige Punkte und verbinde jeden der Durchstichpunkte mit ihnen! Welches Spielzeug hat die gleiche Gestalt? Gib die Symmetrieeigenschaften der Figur an!

Durchstich ein einfach zusammengefaltetes Papier zweimal, verbinde die einander benachbarten Punkte, beschreibe die entstandene Figur und ihre Symmetrieeigenschaften! An welchen Gegenständen der Umgebung finden wir solche Figuren?

Erklärungen:

1. Der **Rhombus** ist ein Viereck mit zwei aufeinander senkrechten, durch die Eckpunkte gehenden Symmetrieachsen (Abb. 105).
2. Das **Drachenviereck** ist ein Viereck mit einer durch zwei gegenüberliegende Ecken gehenden Symmetrieachse (Abb. 106).

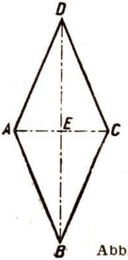


Abb. 105

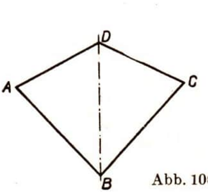


Abb. 106

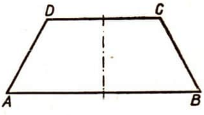


Abb. 107

3. Das **gleichschenklige Trapez** ist ein Viereck mit einer Symmetrieachse, die nicht durch die Eckpunkte geht.
Die symmetrisch liegenden Seiten heißen Schenkel des Trapezes (Abb. 107).

> **1. Die vier Seiten des Rhombus sind gleich lang.**
> **2. Je zwei Gegenseiten des Rhombus sind parallel.**
> **3. In dem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander, halbieren einander und die Winkel an den Ecken.**
> **4. Das Drachenviereck hat zwei Paare gleich langer, benachbarter Seiten und ein Paar gleicher, gegenüberliegender Winkel.**
> **5. Das gleichschenklige Trapez hat ein Paar gleich langer Seiten.**

Anleitung zu den Beweisen: Die Sätze folgen aus der Symmetrie.

Aufgaben

Zeichenübungen

Die Benennung der Stücke ist dieselbe wie in Abb. 93.

Zeichne einen Rhombus aus

1. a) $e = 7$ cm $f = 6$ cm **b)** $e = 6$ cm $a = 5$ cm

2. a) $e = 8$ cm $\alpha = 75°$ **b)** $a = 6{,}2$ cm $\alpha = 105°$!

3. Zeichne mit Hilfe eines Rhombus durch einen Punkt P die Parallele zu einer Geraden g (ohne Benutzung des Zeichendreiecks)!

4. Zeichne ein Drachenviereck $ABCD$ aus
a) $a = b = 3$ cm $c = d = 4$ cm $\gamma = 45°$
b) $a = b = 4{,}2$ cm $d = c = 2{,}5$ cm $\alpha = 106°$!

5. Zeichne ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ aus
a) $a = 5$ cm $b = 4$ cm $\beta = 60°$
b) $a = 4$ cm $d = 3$ cm $\delta = 105°$
c) $a = 4{,}5$ cm $b = 3$ cm $h = 2{,}8$ cm!
(h ist der Abstand der parallelen Seiten.)

Beweise die Sätze:

6. Die Seitenmitten eines Rhombus sind die Ecken eines Rechtecks.

7. Die Seitenmitten eines Rechtecks sind die Ecken eines Rhombus.

8. Im gleichschenkligen Trapez sind die Winkel an jeder der Grundseiten gleich.

9. Im gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen gleich.

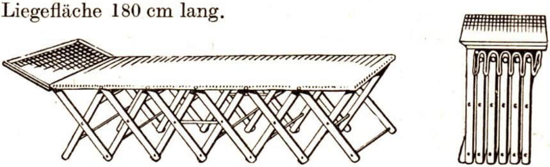
Anwendungen

10. An Hauseingängen und Läden findet man hin und wieder Scherengitter, die nach den Seiten zusammengeschoben werden können.

a) Zeichne ein Scherengitter, das geschlossen ist!

b) Zeichne es so, daß der Eingang zur Hälfte freigegeben wird! Wie ändern die Gelenkrhomben ihre Gestalt?

11. „Nürnberger Schere". Abb. 108a und b zeigt die Verwendung der Gelenkrhomben („Nürnberger Schere") bei einem zusammenlegbaren Bettgestell. Jede Verstrebung ist 48 cm, die waagerechte Liegefläche 180 cm lang.



a Abb. 108 b

a) Welchen Vorteil gewährt die Einrichtung?

b) Führe andere Beispiele für die Verwendung von Gelenkrhomben an!

12. Der Durchmesser einer Kaffeekanne beträgt unten 21 cm und oben 12 cm; der obere Rand ist von dem unteren 35 cm entfernt. Zeichne den Längsschnitt durch die Kaffeekanne (ohne Tülle und Henkel) im Maßstab 1 : 2!

13. Die in Abb. 109 gezeichnete Weichensignallaterne zeigt dem Lokomotivführer, daß die Weiche auf das durchgehende Gleis gestellt ist. Zeichne die Scheibe dieser Laterne nach Abb. 109 im Maßstab 5 : 1!

14. Stelle die Maße zu einem Waschkorb, wie ihn Abb. 110 darstellt, im Haushalt fest und zeichne seine Vorder- und seine Seitenfläche im Maßstab 1 : 10!

Abb. 109

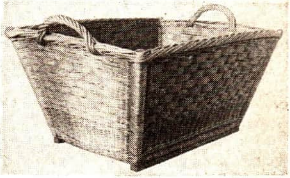


Abb. 110

15. Den Querschnitt eines Eisenbahndammes zeigt Abb. 111. Entnimm ihm die Maße und zeichne den Querschnitt im Maßstab 1 : 100!

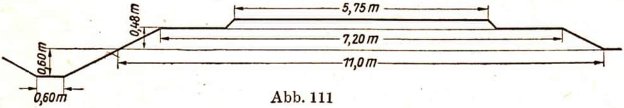


Abb. 111

16. Zeichne den Schnitt durch die Flußstrecke der Schwebebahn Wuppertal (Abb. 112) in doppelter Größe! Gib die Größe der nicht eingetragenen Maße an!

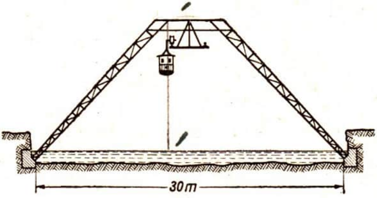


Abb. 112

58. Rechteck und Quadrat

Quader und Würfel zeigen Sonderformen des Parallelogramms; gib Namen, Form und Begrenzung dieser Körperflächen an!

Erklärungen:

1. Ein Parallelogramm mit gleichen Winkeln heißt **Rechteck.**
2. Ein Parallelogramm mit gleichen Winkeln und Seiten heißt **Quadrat.**

Im Rechteck sind die Diagonalen gleich und halbieren einander.

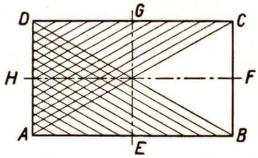


Abb. 113

Anleitung zum Beweis (Abb. 113):

Durch Spiegelung an der Achse HF geht $\triangle ABD$ über in $\triangle ACD$.

Im Quadrat sind die Diagonalen gleich; sie stehen senkrecht aufeinander, halbieren einander und die Winkel.

Aufgaben

Die Benennung der Stücke zeigt Abb. 93.

Zeichne ein Rechteck aus

1. **a)** $a = 6$ cm $b = 5$ cm **b)** $a = 5{,}5$ cm $e = 6{,}5$ cm

2. **a)** $e = 7$ cm $\sphericalangle AMB = 75°$ **b)** $a = 5$ cm $\sphericalangle AMB = 150°$!

3. Zeichne im Maßstab 1 : 100 eine 4 m hohe und 7 m lange Wand und auf ihr den Punkt P, der von der unteren Seite 1 m und von der linken Seite 2 m entfernt ist!

4. Zeichne ein Quadrat mit der Seite 5 cm und in ihm einen Punkt P so, daß er von zwei Seiten gleich weit entfernt ist, von einer der anderen 1,2 cm! (2 Fälle!)

5. Weise nach, daß die vier Winkelhalbierenden eines Rechtecks ein Quadrat begrenzen!

6. Die obere und die untere Leiste der Lattentür in Abb. 114 sind 20 cm breit und haben 90 cm Abstand, die Strebe ist 20 cm breit, die Latten sind 7 cm breit. Die Tür ist 1,40 m breit und 1,80 m hoch. Fertige eine maßstäbliche Zeichnung an!

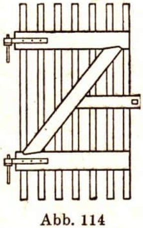


Abb. 114

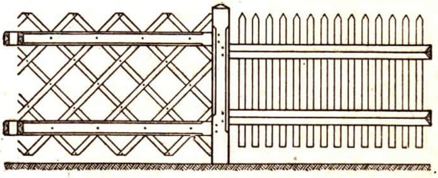


Abb. 115

7. In Abb. 115 sind zwei Zaunarten im Maßstab 1 : 50 dargestellt. Zeichne mit den aus diesem Bild entnommenen Maßen die Zäune im Maßstab 1 : 20!

8. Eine Gerade AB trifft auf ein Haus. Man soll ihre Verlängerung jenseits des Hauses bestimmen (Abb. 116). Beweise auf Grund des Bildes, daß E ein Punkt der Geraden ist!

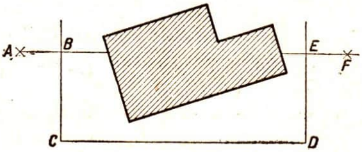


Abb. 116

9. a) Untersuche in den verschiedenen Vierecken die Symmetrieeigenschaften!

(Rhombus vereinigt in sich die Symmetrien des Drachens mit denen des Parallelogramms usw.)

b) Untersuche die Eigenschaften der Diagonalen!
(Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen; im gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen gleich lang usw.)

c) Untersuche die Eigenschaften der Symmetrieachsen bei Drache, Rhombus, Quadrat einerseits und beim gleichschenkligen Trapez, Rechteck, Quadrat andererseits!

59. Dreiecke und Vierecke in der Technik

a) Dreiecke

1. Die Balkenkonstruktion eines Satteldaches besteht aus einer Reihe gleicher, zueinander parallel gestellter Dachbinder (Abb. 117).

Zeichne im Maßstab 1 : 100 einen solchen Dachbinder; der die Auflager A_1 und A_2 verbindende und die Spannweite messende Dachbalken ist 10 m und die

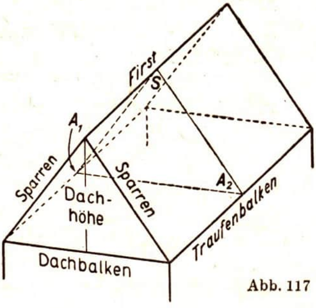


Abb. 117

Sparren sind je 6 m lang. Bestimme aus der Zeichnung die Dachhöhe, den Winkel an der Spitze S des Binders und die Neigungs- oder Böschungswinkel der Sparren!

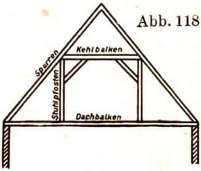


Abb. 118

2. Konstruiere den Dachbinder eines Satteldaches bei einem 10 m breiten Haus nach folgenden Angaben (Abb. 118): Sparrenlänge 7 m, Stuhlpfosten 3 m. Maßstab 1 : 100. Miß die Kehlbalkenlänge und die Winkel!

3. Die Scheune eines Neubauernhofes ist 8 m breit und bis zum Dachfirst 8 m hoch. Das Dach beginnt 3 m über dem Erdboden. Zur Konstruktion des Dachbinders verbinde die Mittelpunkte der Sparren untereinander durch den Kehlbalken und durch schräge Streben mit der Mitte des Dachbalkens! Zeichne den Binder im Maßstab 1 : 100 und miß die Balkenlängen!

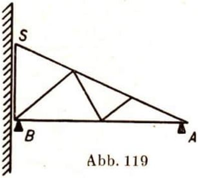


Abb. 119

4. Ein an eine Wand angebauter Schuppen hat ein Pultdach (Abb. 119) von $AB = 6$ m Breite mit $AS = 7$ m langen Sparren, die durch Stützstreben gegen Durchbiegungen gestützt werden. Bestimme aus einer Zeichnung in geeignetem Maßstab die Länge der Stützstäbe!

5. Der Abstellplatz für Wagen wird durch ein Vordach (oder Kragdach) geschützt (Abb. 120).

a) Zeichne seinen Dachträger, wenn das Dach $AB = 8$ m vorsteht und eine Höhe $AS = 3$ m hat!

b) Bestimme die Länge aller Streben und die Neigung des Daches!

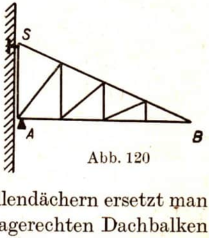


Abb. 120

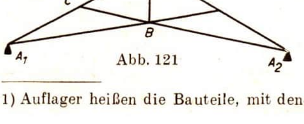


Abb. 121

6. Bei Hallendächern ersetzt man den waagerechten Dachbalken zwischen den Auflagern[1]) durch einen gebrochenen Linienzug

1) Auflager heißen die Bauteile, mit denen die Hauptträger auf den Stützen ruhen.

(z. B. $A_1 B A_2$ in Abb. 121 und 122 und $A_1 B_1 B_2 A_2$ in Abb. 123 und 124), den man den Untergurt nennt, zum Unterschied von dem Obergurt $A_1 S A_2$. Beim einfachen Dachbinder (Abb. 121) verbindet der Stützbalken die Mitte C des Sparrens mit B. Zeichne im Maßstab 1 : 200 einen Binder von 20 m Spannweite, wenn der Obergurt eine Neigung $\alpha = 28°$, der Untergurt eine solche von $\beta = 10°$ hat!

7. Ein einfacher Dachbinder hat die Maße: Spannweite $2l = 26$ m, Länge des Obergurtes $2a = 29{,}6$ m, des Untergurtes $2b = 26{,}4$ m. Zeichne als Strichpunktlinie die Symmetrieachse des Binders, miß die fehlenden Stablängen und die Neigungen der Gurtstangen!

8. Bei einem einfachen Dachbinder (Abb. 121) ist die halbe Sparrenlänge $CS = 3{,}5$ m, die Höhenstrebe $BS = 2{,}5$ m und die Stützstrebe $BC = 3$ m lang. Bestimme aus der Zeichnung die Spannweite und die Länge des Untergurtes sowie die Neigungen beider Gurtungen!

9. Beim englischen Dachbinder (Abb. 122) werden Ober- und Untergurt in gleiche Abschnitte zerlegt. Zeichne den Dachbinder nach den Angaben der Aufgabe 7!

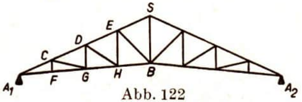


Abb. 122

10. Der belgische Dachbinder (Abb. 123) besteht aus dem gleichschenkligen Dreieck $B_1 B_2 S$ und den stumpfwinkligen Dreiecken $A_1 B_1 S$ und $A_2 B_2 S$, die noch durch Stützbalken unterteilt sind. Zeichne den Dachbinder im Maßstab 1 : 200, wenn die Spannweite 24 m, die Längen der Schenkel SB_1 und SB_2 6 m, die Höhe von S 7 m und die von B_1 und B_2 2 m über der Waagerechten $A_1 A_2$ betragen!

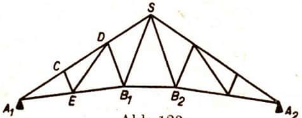


Abb. 123

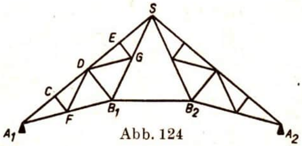


Abb. 124

11. Ein Haus von 14 m Breite hat einen Wiegmannbinder (Abb. 124), der aus einem spitzwinkligen und zwei stumpfwinkligen gleichschenkligen Dreiecken mit gleichen, 5 m langen Schenkeln besteht. Der Sparrenwinkel an der Spitze des Binders beträgt 100°. Die Stützbalken zerlegen die Sparren in gleiche Abschnitte.

a) Zeichne den Binder im Maßstab 1 : 100!

b) Bestimme aus der Zeichnung die unbekannten Längen!

c) Miß die Neigungswinkel der Balken A_1B_1 und B_1S gegen die Waagerechte!

12. Eine Fabrikhalle, die Oberlicht braucht, hat ein Sheddach (Sägedach) (Abb. 125) mit steilstehender Verglasung. Der dreiteilige (in B_1 und B_2 oft durch Säulen gestützte) Dachbinder (Abb. 126), dessen Spannweite 18 m, dessen Fensterhöhe A_1S 3 m und dessen Sparrenneigung 30° beträgt, muß gut verstrebt sein.

a) Fertige die Zeichnung eines Dachbinderdreiecks mit den angegebenen Stützstreben im Maßstab 1 : 100!

b) Bestimme die Längen der Sparren und der Streben!

c) Zeige, daß die Dachsparren hier rechtwinklig zur Fensterseite stehen!

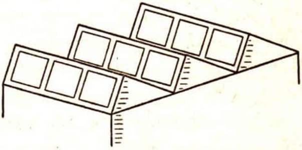


Abb. 125

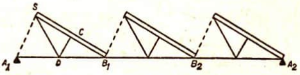


Abb. 126

b) Vierecke

13. Bilde nach Abb. 127 ein Viereck $ABCD$ aus vier Stäben eines Metallbaukastens (oder aus Holz- oder Pappstreifen, die an ihren Enden durchbohrt und mit Drahtstiften verbunden sind), die der Reihe nach $a = 16$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm, $d = 7$ cm lang sind!

a) Untersuche, welche verschiedenen Formen das Viereck annehmen kann!

b) Stelle insbesondere fest, ob folgende Fälle eintreten können: $c \parallel a, d \parallel b, b \perp a, d \perp a, c \perp b, d \perp c$!

c) Welche anderen Sonderfälle treten noch auf?

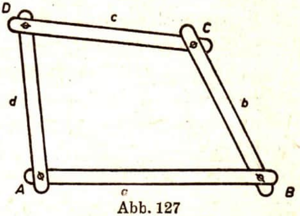


Abb. 127

14. a) Halte den Stab $AB = a$ fest (s. Aufg. 13) und untersuche, welche Bahn die Ecke C durchläuft!

b) Laß C diese Bahn vom höchsten bis zum tiefsten Punkt durchwandern!

c) Zeichne im Maßstab 1 : 2 verschiedene Formen dieses Vierecks!

15. a) Verfahre entsprechend mit der Ecke D (s. Aufg. 14) und zeichne wieder einige dieser Vierecksformen!

b) Wodurch unterscheiden sich die Bahnen der Ecken D und C?

16. Auf welche Weise könnte man eine der Vierecksformen unbeweglich (starr) machen?

Solche Untersuchungen sind Grundlagen für das Verständnis technischer Konstruktionen, die trotz Auftretens von Druck- und Zugkräften Figuren von fester und bestimmter Form sein sollen. Eine Figur heißt statisch fest oder statisch bestimmt, wenn sie vom Gesichtspunkt der Statik (der Gleichgewichtslehre) aus unveränderlich ist.

17. Führe die Untersuchungen der Aufgaben 14 bis 16 durch, wenn die Maße der Stäbe abgeändert werden in $a = 11$ cm, $b = 5$ cm, $c = 11$ cm, $d = 8$ cm!

18. Bilde **a)** aus 5 verschieden langen Stäben ein Fünfeck, **b)** aus 3 verschieden langen Stäben ein Dreieck!

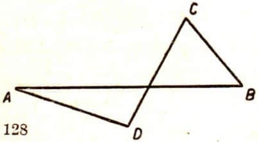


Abb. 128

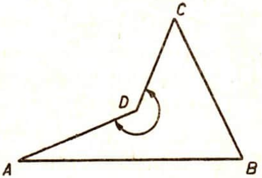


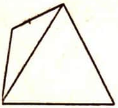
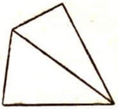
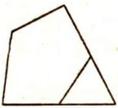
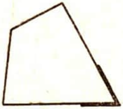
Abb. 129

1. Ein aus 4 Stäben gebildetes Viereck ist keine statisch bestimmte Figur, sondern ein Gelenkviereck.

2. Wenn sich bei einem aus 4 Stäben hergestellten Gelenkviereck 2 Stäbe kreuzen, so ist es ein überschlagenes Viereck geworden (Abb.128).

3. Wenn ein Viereck einen Innenwinkel hat, der größer als 180° ist, so hat es an dieser Stelle eine eingesprungene Ecke (Abb.129).

4. Das Dreieck ist eine statisch bestimmte Figur. Ein Gelenkviereck geht in eine statisch feste Figur über, wenn man einen fünften Stab einzieht oder in mindestens einer Ecke einen festen Winkel (Winkeleisen) anbringt (Abb.130 a bis d). Ein solcher Querstab, der zwei gegenüberliegende Ecken verbindet, heißt Diagonalstab (Abb.130 a und b). In der Statik wird die Zerlegung in Dreiecke bevorzugt.

Abb.130a)  b)  c)  d) 

19. Nenne technische Bauten, bei denen Vierecke in Dreiecke aufgegliedert sind! Zeichne drei solche Ansichten!

20. Welche Versteifungsarten des Vierecks sind angewendet bei **a)** einer Stall- oder Bodentür, **b)** bei Dachbindern, **c)** bei Brückenträgern, **d)** bei Fenster- oder Bilderrahmen, **e)** bei festen Kisten, **f)** bei gut gearbeiteten Kästen, **g)** bei Stühlen innerhalb des Sitzrahmens und an den Beinen?

21. Zeichne den Brückenträger der Abb. 131 im Maßstab 1 : 500 für den Fall, daß die Spannweite 45 m, die Höhe in der Symmetrielinie (die sog. Pfeilhöhe) 10 m, die beiden anderen lotrechten Streben je 9 m und 7 m lang sind! Die Vierecksfelder sind durch Diagonalstreben aufgeteilt.

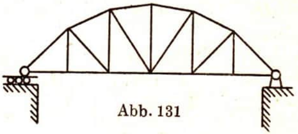


Abb. 131

22. Über einen Bahneinschnitt, der oben 12 m breit ist, führt eine Brücke. In je 2 m Abstand befinden sich senkrechte Streben. Die mittlere ist 3,5 m, die beiden anderen auf jeder Seite sind 3 m und 2 m lang.
a) Zeichne die Trägerkonstruktion im Maßstab 1 : 100!
b) Jedes der 4 Trapeze hat die kleinere Diagonale als Diagonalstab; bestimme ihre Längen!

23. Wie läßt sich aus 4 Stäben ein Gelenkparallelogramm herstellen?
a) Nenne Beispiele (Apparate oder Geräte), bei denen Gelenkparallelogramme verwendet sind!
b) Untersuche, welche verschiedenen Formen das Gelenkparallelogramm annehmen kann!
c) Warum wird die Tisch- und Bettwäsche nach dem Waschen und vor dem Plätten gestreckt? (Denke an die Fadenrichtungen des Gewebes!)

24. Die Eigenschaft des Gelenkparallelogramms soll untersucht werden.
a) Halte die Seite AB waagerecht! Wie bewegt sich dann die gegenüberliegende Seite? Welche Bahnen beschreiben die Ecken C und D?
b) Halte DA genau vertikal! Welche Richtung hat dann die Seite CB?
c) Verfahre ebenso mit einem gewöhnlichen Gelenkviereck und vergleiche es mit dem Gelenkparallelogramm!

25. a) Welcher geometrische Lehrsatz findet bei der Konstruktion der folgenden Geräte Anwendung: 1. Parallelenlineal, 2. Briefwaage, 3. Zweitafelwaage, 4. Nähkasten mit herausklappbaren Oberteilen.

b) Entwirf von diesen Geräten schematisierte Zeichnungen (Skizzen in einfachen Strichen) oder baue einfache Anschauungsmodelle!

26. Abb. 132 zeigt den Arbeitstisch eines Zahnarztes. Erkläre die Konstruktion!

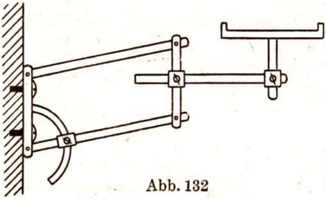


Abb. 132

a) Zeichne von ihm drei verschiedene Stellungen in einer einzigen schematisierten Zeichnung für den Fall, daß der an der Wand befestigte Arm 30 cm, der andere 70 cm, der waagerechte Stab 40 cm, der Tisch 30 cm und sein Fußstiel 20 cm lang sind!

b) Wie groß ist der Höhenunterschied, den der Tisch bei diesen Maßen erhalten kann? Wird ein so großer Höhenunterschied immer nötig sein? Wie wird man also in Wirklichkeit die Maße abändern?

27. Abb. 133 zeigt eine Werkplatzlampe.

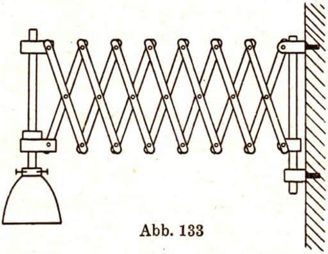


Abb. 133

a) Wie kann sie bewegt werden? Wodurch unterscheidet sich ihre Konstruktion von der des Arbeitstisches beim Zahnarzt? Welche Gelenke bleiben immer in derselben Höhe? An welches Kinderspielzeug erinnert die Konstruktion?

b) Welche besondere Form von Gelenkparallelogrammen liegt hier vor? Welche Diagonaleneigenschaften hat dieses Parallelogramm? Denke dir die Diagonalen gezogen und überzeuge dich davon, daß diese Diagonaleneigenschaft die mathematische Grundlage der Konstruktion der Werkplatzlampe ist!

c) Auf welche (ungefähre) Länge ist der Lampenarm ausziehbar, wenn er aus 10 Paar Stäben von 40 cm Länge besteht?

d) Welche Form hat die Fläche, die das Gitter der Stäbe außen abgrenzt? Erkläre die Wirkungsweise der Scherengitter, die an Schaufenstern und Straßenbahnen verwendet werden!

28. Über Wasserstraßen in Brandenburg und Mecklenburg führen oft Klappbrücken. Stelle in einer einfachen Strichzeichnung die Grundlage einer Klappbrücke dar oder baue ein einfaches Anschauungsmodell davon!

29. Manche Brücken haben eine geradlinige obere Gurtung (AB in Abb. 134). Die Brückenträger haben dann die Form eines Rechtecks oder eines Trapezes und heißen Fachwerkträger. Abb. 134 zeigt einen solchen mit (senkrechten) Pfosten; diese können aber auch wegbleiben.

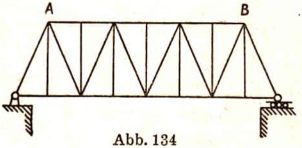


Abb. 134

a) Zeichne einen rechteckigen Fachwerkträger mit 5 (inneren) Pfosten, wenn die Spannweite 30 m und die Pfostenlänge **3 m** beträgt und in jedem Feld ein Diagonalstab ist!

b) Zeichne einen trapezförmigen Fachwerkträger von 24 m Spannweite ohne Pfosten, wenn die gleichseitigen Dreiecke, aus denen er besteht, 6 m lange Schenkel haben!

30. Ein Gasometer läuft in einer 20 m hohen Eisenkonstruktion. Zwei benachbarte senkrechte Träger besitzen einen Abstand von 5 m. Nach der Höhe zu sind in je 4 m Abstand Querträger gezogen und in den so entstandenen Rechtecken die beiden Diagonalen.

a) Zeichne die Stahlkonstruktion für zwei benachbarte Träger im Maßstab 1 : 200!

b) Bestimme die Länge der Diagonalstäbe!

31. Ein Futterplatz für Vögel, der eine Breite von 30 cm und eine Tiefe von 20 cm hat, soll ein Dach erhalten.
Wir wählen **1.** ein Pultdach, das vorn 15 cm, hinten 25 cm hoch steht, **2.** ein Satteldach, das außen 15 cm, im First 20 cm hoch ist.

a) Zeichne die Seitenansicht im Maßstab 1:2!

b) Zeichne die Draufsicht (senkrecht von oben gesehen) im Maßstab 1:2!

c) Fertige aus Postkarten oder Papier und Stäbchen ein Modell im Maßstab 1:5 an!

32. Ein Haus ist 20 m lang, 12 m breit und in der Front 10 m hoch. Das Haus hat ein Satteldach. Jede Gratkante des Dachgiebels ist 14 m lang.

a) Stelle ein Modell im Maßstab 1:200 her!

b) Zeichne das Hausmodell senkrecht von oben gesehen auf seine Grundebene als Zeichentafel (Abb. 135)! Gib dazu zunächst auf der Bildtafel die rechteckige Grundfläche $ABCD$ des Modells an! Dann halte den Bleistift an die Traufen FG und HE des Daches! Wie liegt die rechteckige Dachbodenfläche $EFGH$ zur Grundfläche $ABCD$? Wo entsteht das Bild $E'F'G'H'$ der Dachbodenfläche bei der senkrechten Draufsicht? Halte nun den Bleistift in die Lage des Dachfirstes JK, fälle Lote von Punkten des Dachfirstes nach der Bildtafel! Wo liegen die Bildpunkte, insbesondere die Bilder J' und K' von J und K?

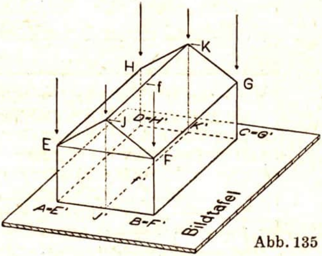


Abb. 135

Warum wirkt die so entstandene senkrechte Draufsicht des Hauses wenig anschaulich? Können wir aus ihr die wahren Längen der Grate oder der Höhen, die wirklichen Größen der Dachflächen oder ihrer Böschungswinkel entnehmen?

c) Aus der Zeichnung lassen sich wahre Größen von Strecken und Winkeln ermitteln. Die Giebelwand $ABFJE$ kann, um ihre Grundkante AB in die Bildtafel umgelegt, in der richtigen Größe gezeichnet werden. Stelle das Modell auf die Draufsichtzeichnung und überlege, welche Bahnen die Punkte E, F und J bei dieser Umlegung durchlaufen! Führe diese Umlegung durch Kippen des Modells aus! Wie lassen sich die „umgelegten Punkte“ E_0, F_0, J_0 ohne Benutzung des Modells, aber mit Verwendung der in der Aufgabe gegebenen Stücke zeichnen?

d) Auch die Frontfläche $BCGF$ und die benachbarte Dachfläche $FGKJ$ sollen in die Bildtafel umgelegt werden. Um welche Grundkante erfolgt die Umlegung der Frontfläche und welche Bahnen durchwandern die Punkte F und G dabei? Zeichne die Umlegung F_0G_0! Wie kann man nun die rechteckige Dachfläche in wahrer Größe als $F_0G_0K_0J_0$ zeichnen? Welche Stelle der Zeichnung gibt die wirkliche Größe der Böschungswinkel der Dachflächen an? Wie hoch über der Grundfläche liegt die Giebelspitze J?

Die einfachste bildliche Darstellung von Körpern ist die senkrechte Eintafelprojektion. Der Gegenstand wird durch Projektionsstrahlen, die zur Bildtafel senkrecht stehen, auf diese abgebildet. Von den Bezeichnungen der Punkte des Gegenstandes durch A, B, P und der Streben durch a, b, s werden die der Bilder oder Projektionen nur durch Strichanzeiger unterschieden. Die Bilder heißen A', B', P', a', b', s'.
Alle Ebenen, die zur Bildtafel parallel laufen, und alle in ihnen gelegenen Figuren erscheinen in wahrer Form und Größe. Alle Ebenen, die zur Bildtafel senkrecht stehen, und alle in ihnen gelegenen Figuren erscheinen als gerade Linien. Um sie in wahrer Größe darzustellen, legt man sie in die Bildtafel um. Diese „umgelegten Punkte und Strecken“, die man auch die „Umlegungen“ nennt, kennzeichnet man durch angehängte Null-Anzeiger: $A_0, B_0, P_0, a_0, b_0, s_0$.

33. a) Fertige im Maßstab 1 : 250 das Modell eines Hauses mit Walmdach (Abb. 136) an! Maße: Länge $l = 14$ m, Breite $b = 9$ m, Wandhöhe $w = 6{,}25$ m, Firstlänge $f = 7{,}5$ m, Abstand des Firstes von der Traufenkante 8,0 m.

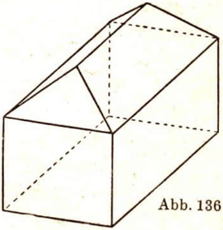


Abb. 136

b) Abb. 137 zeigt die senkrechte Eintafelprojektion des Walmdaches, nämlich das Traufenrechteck $ABCD$ und die Projektion $E'F'$ des Firstes sowie die Projektionen g' der Grate g. Außerdem sind die Umlegungen ABF_0E_0 und ADE_{00} der beiden Dachflächen gezeichnet. Wie werden sie gefunden? Zeichne selbst!

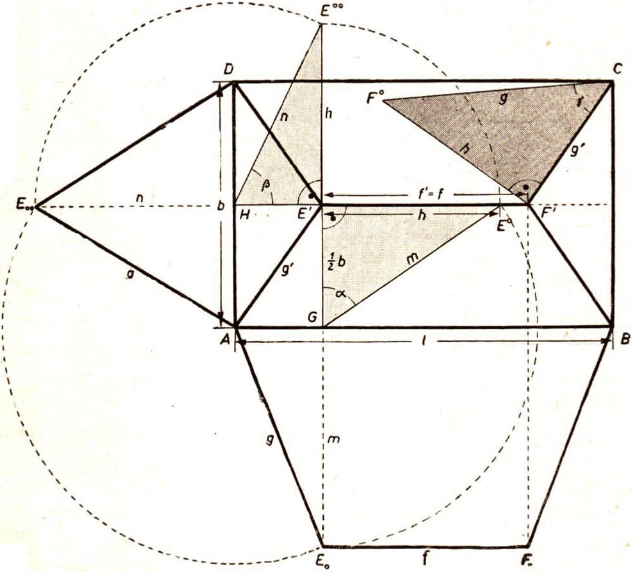


Abb. 137

c) Um die Böschungswinkel α und β der Dachflächen zu bestimmen, kann man die Stützdreiecke $E'GE^0$ und $E'HE^{00}$ zeichnen. Ebenso wird der Neigungswinkel γ des Grates g durch das Stützdreieck $CF'F$ bestimmt, das in der Zeichnung als $\triangle CF'F^0$ an CF' herangelegt worden ist.

d) Fertige ein Klappmodell des Walmdaches an und klebe die drei Stützdreiecke mit Klebefalzen so auf, daß sie aufrecht gestellt werden können und die hochgeklappten Dachflächen wirklich stützen!

34. Der Querschnitt eines Deiches ist ein gleichschenkliges Trapez (Abb. 138). Seine Sohle mißt 36 m, seine Krone 10 m, seine Höhe 7,50 m.

a) Zeichne den Querschnitt im Maßstab 1 : 300 (1 : 400)!

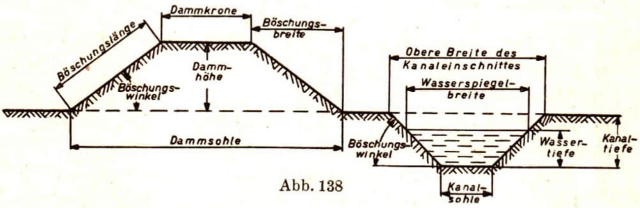


Abb. 138

b) Bestimme aus der Zeichnung die Böschungslänge und den Böschungswinkel!

c) Fertige von dem Deich für ein beliebig langes Stück die senkrechte Eintafelprojektion und ein Papiermodell an!

35. Stelle in folgender Weise sog. Böschungskörper her:

a) Laß durch einen festgehaltenen Trichter feinen Sand oder Kies, Mehl oder Erbsen senkrecht herunterfallen! Beobachte, in welcher Körperform sich die Stoffe schichten!

b) Verfahre ebenso, bewege aber während des Schüttens den Trichter möglichst gleichmäßig an einer geraden Führungsschiene entlang! Welche Form nimmt jetzt die Umrißlinie der Grundfläche des Böschungskörpers an, und wie ist dieser oben gestaltet?

Lose aufgeschüttetes Material schichtet sich bei gleicher Beschaffenheit (z.B. Korngröße, Feuchtigkeit) stets in demselben Böschungswinkel gegen die Grundfläche. Verschiedene Materialien haben verschiedene Böschungswinkel. Bei allen Materialien ist der natürliche Böschungswinkel kleiner als 45°, und zwar bei loser Schüttung etwas kleiner als bei festgedrückter, in feuchtem Zustand meist kleiner als in trockenem.

Beispiele in Durchschnittswerten

Lose Schüttung		Festgedrückte Schüttung	
Sand, feucht 27°, trocken	32°	Sand, Kies	35° bis 42°
Kiesel	36°	Gesteinschotter	38° bis 40°
Getreidekörner	40°	Koks	40° bis 45°
Koks	35° bis 40°	Lehm, feucht 25°, trocken	40° bis 45°

c) Nimm eine geradlinig begrenzte Papptafel und streiche mit ihr in Richtung des Böschungskammes über diesen hinweg, daß oben eine ebene horizontale Fläche als Krone entsteht!

d) Vergleiche bei demselben Material die Böschungswinkel an den verschiedenen Stellen!

36. a) Ein Damm soll einen natürlichen Böschungswinkel erhalten und 2 m hoch werden. Um welchen Betrag wird dann seine Sohle mindestens breiter als seine Krone?

b) Der am Abhang eines Berges entlangführende Weg wurde ausgebessert. Dabei stach man den „gewachsenen" Boden sehr steil ab (etwa 70°). Schon nach wenigen Wochen war die Böschung eingefallen. Warum hielt der Boden anfangs, und warum stürzte er bald ein? Wie kann man sich gegen Einsturz schützen?

37. An einer um 30° geneigten Bergwand soll ein Weg angelegt werden, dessen horizontale 4 m breite Gehfläche zur einen Hälfte durch Einschnitt in die aufsteigende Bergwand, zur anderen Hälfte durch Aufschüttung an der abfallenden Bergwand gewonnen werden soll. Die neuen Böschungen betragen 45°.

a) Zeichne den Querschnitt im Maßstab 1 : 200!

b) Fertige ein Modell an!

38. Ein Bahneinschnitt ist 12 m tief. Sein Böschungswinkel beträgt 55°, die Schlenbreite zur Aufnahme der Eisenbahngleise 2,80 m. Zeichne den Querschnitt im Maßstab 1 : 200!

39. Damit ein Kanal über eine tiefgelegene Landfläche schleusenlos geführt werden konnte, war es nötig, ihn in einen Damm einzubetten. Der Damm hat eine Sohlenbreite von 70 m, eine Höhe von 12 m und beiderseitige Böschungen von 40°. An beiden Rändern der Dammkrone sind eine 10 m breite Grünfläche und ein 3 m breiter Weg angelegt. Der Kanaleinschnitt hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes von 5,50 m Tiefe und 45° Böschungswinkel.

a) Zeichne den Querschnitt im Maßstab 1 : 500!

b) Bestimme die Breite der Kanalsohle und des Wasserspiegels, wenn dieser 3,50 m hoch steht!

40. Ein Wassergraben hat den Querschnitt eines gleichschenkligen Trapezes. Seine obere Breite beträgt 3 m, der Böschungswinkel 60°, die Einschnittiefe 1,50 m.

a) Zeichne den Querschnitt im Maßstab 1 : 50!

b) Fertige die senkrechte Eintafelprojektion und ein Modell an!

41. Es wird ein 3 m tiefer und 1 m breiter Graben ausgehoben, der mit Bohlen (30 mm stark, 35 cm breit) und mit Rundhölzern (Durchmesser 15 cm) behelfsmäßig versteift wird. Zeichne den Querschnitt der Versteifung (1 : 20), wenn die oberste Bohle parallel zur Straße in deren Höhe, die zweite 1,50 m unter der ersten beginnt! Die Rundhölzer werden an senkrecht stehenden Bohlen eingetrieben.

42. Ein Bergwerksstollen wird mit Rundholz (Durchmesser 20 cm) verzimmert. Die Sohlenbreite beträgt 2,50 m, die Höhe 2,00 m, die Neigung der Stützen gegen die Sohle 75°. Zeichne die Verzimmerung! Maßstab 1 : 25 (1 : 50).

Die Vorlagen zu den Abbildungen stammen von

Pressefoto Röhnert, Berlin (56, 94),
Bildstelle des Volk und Wissen Verlages (9, 48).