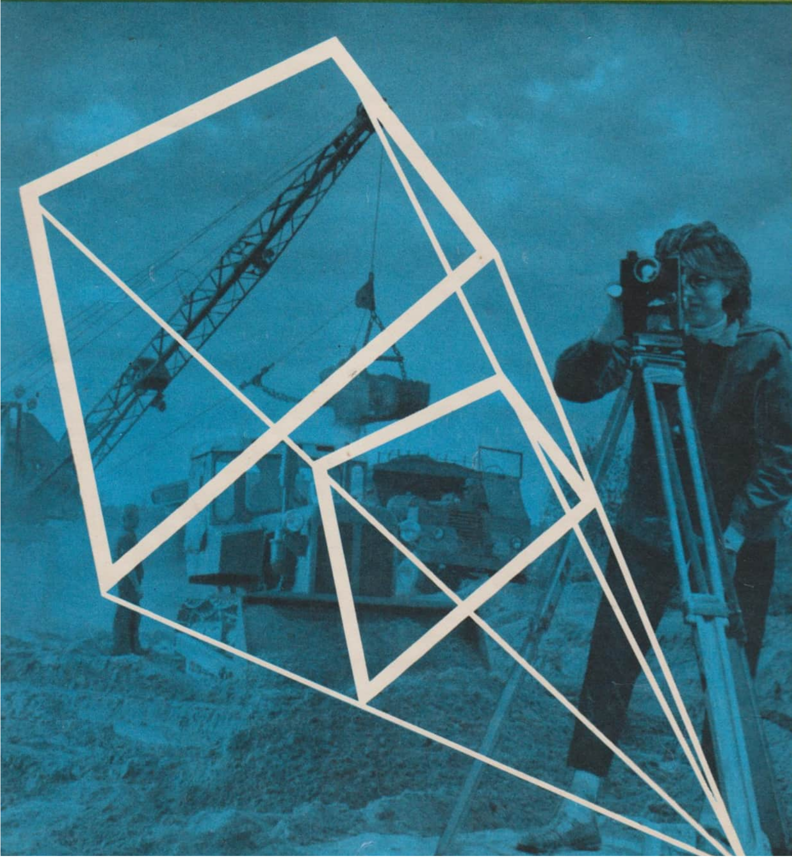
MATHEMATIK 8

OBERSCHULE



MATHEMATIK

Lehrbuch für die Oberschule

Klasse 8

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1965

Verfasser:

Rudolf Bittner — Kapitel A und D
Dipl.-Math. Fritz Homagk — Kapitel B, E und F
Dr. Dieter Ilse, Dipl.-Math. Werner Tietz — Kapitel C
Dr. Hans Wußing — Geschichtliche Überblicke

Für die Kapitel E, F und Y wurden teilweise auch die entsprechenden Abschnitte des Lehrbuches „Rechnen, Messen, Konstruieren, 8. Klasse“ (00 803) bearbeitet.

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Lehrbuch für die allgemeinbildende polytechnische Oberschule bestätigt.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Anneliese Wunderlich (Red.-Ass.)

Einband und Vorsatz: Werner Fahr

Zeichnungen und Graphiken: Klaus Boerger, Heinz Grothmann, Rudolf Schultz-Debowski

Redaktionsschluß: 1. Dezember 1964

ES 11 G. Bestell-Nr. 00 08 01 . Preis: 2,– . Lizenz 203 . 1000/65 (E)

Satz: Landesdruckerei Sachsen, Dresden

Druck: Druckerei Völkerfreundschaft, Dresden

Erläuterungen zur Arbeit mit diesem Buch

Das farbige Griffregister auf dem Außenrand der Seiten dient dem bequemen und schnellen Auffinden der einzelnen Kapitel. Auf dem Vorsatz findest du hierzu eine Übersicht über die einzelnen Kapitel.

Jedes Kapitel ist durch Zwischenüberschriften und durch eine fortlaufende Numerierung mit schwarzen halbfetten Ziffern auf dem linken Rand in kleine Abschnitte untergliedert, die als Lerneinheiten anzusehen sind.

Innerhalb der Lerneinheiten werden die Beispiele, Übungen und Definitionen durch folgende blaue Marken gekennzeichnet:

Definitionen und Sätze	▶
Beispiele	■
Übungen	●

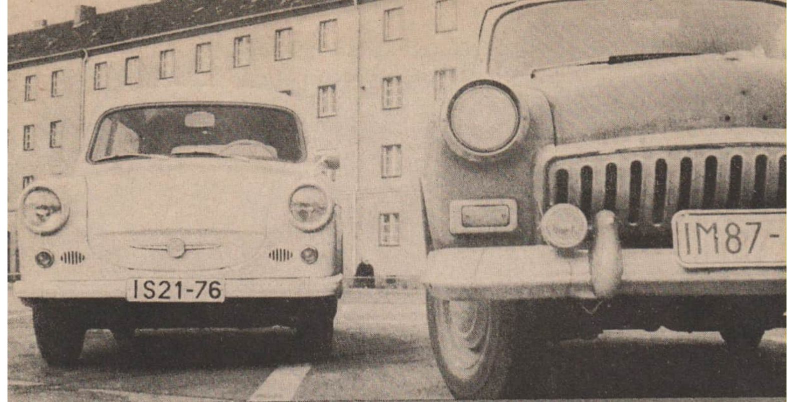
Dabei werden mit vollen Dreiecken solche Definitionen und Sätze gekennzeichnet, die du dir fest einprägen mußt.

Durch die Ziffern in den blauen Marken werden auch die Übungen, Beispiele und Sätze numeriert.

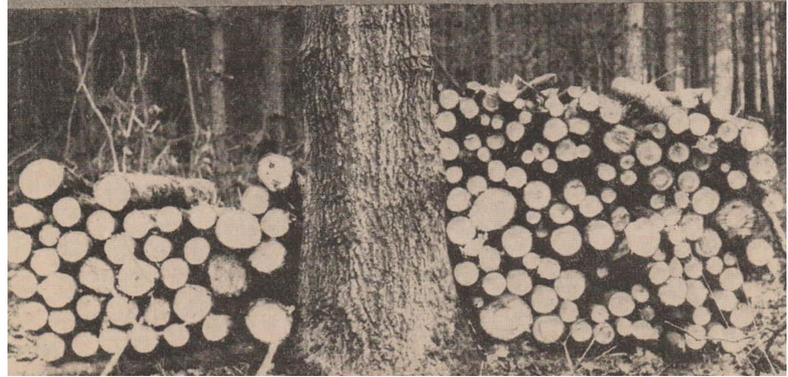
Sämtliche Numerierungen werden jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt. Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnen dann alle Numerierungen von neuem.

Hinweise auf Lerneinheiten (Abschnitte), Beispiele usw. werden im laufenden Text mit dem Buchstaben des betreffenden Kapitels angegeben. Zum Beispiel:

Abschnitt C 23 ist die Lerneinheit 23 des Kapitels C,
Beispiel D 5 ist das Beispiel 5 im Kapitel D,
Übung A 13 ist die Übung 13 im Kapitel A.



$a < b$



A. RECHNEN MIT VARIABLEN

A

Der Variablenbegriff

1 Wir betrachten die Menge aller Städte des Bezirks Rostock und legen fest, daß eine beliebige Stadt des Bezirks Rostock mit dem Zeichen X bezeichnet werden soll. Das Zeichen X steht also für die Stadt *Greifswald* oder für die Stadt *Wismar* oder für die Stadt *Stralsund* usw.

Aus dem Satz:

Die Einwohnerzahl von X ist kleiner als eine Million,

kann man durch **Einsetzen** für X die Sätze erhalten:

Die Einwohnerzahl von *Greifswald* ist kleiner als eine Million,
die Einwohnerzahl von *Wismar* ist kleiner als eine Million,
die Einwohnerzahl von *Stralsund* ist kleiner als eine Million usw.

Für das Zeichen X können wir nach unserer Vereinbarung jede beliebige Stadt des Bezirks Rostock einsetzen. X ist in unserem Beispiel ein Zeichen für eine beliebige Stadt des Bezirks Rostock.

2 Wir betrachten die Menge aller ebenen geometrischen Figuren, die geradlinig begrenzt sind. Wir können z. B. feststellen:

Ein *Dreieck* ist eine ebene, geradlinig begrenzte Figur,
ein ebenes *Viereck* ist eine ebene, geradlinig begrenzte Figur,
ein ebenes *Zehneck* ist eine ebene, geradlinig begrenzte Figur usw.

Wir vereinbaren, daß wir eine beliebige ebene, geradlinig begrenzte Figur mit F bezeichnen wollen. Dann gilt also:

F ist eine ebene, geradlinig begrenzte Figur.

A

Für F können wir jede Figur einsetzen, die eben und geradlinig begrenzt ist. F ist in diesem Beispiel ein Zeichen für eine beliebige ebene, geradlinig begrenzte geometrische Figur.

3 Wir betrachten die Menge aller natürlichen Zahlen:

0 ist eine natürliche Zahl,
1 ist eine natürliche Zahl,
2 ist eine natürliche Zahl usw.

Für natürliche Zahlen gilt der Satz:

Das Doppelte jeder natürlichen Zahl ist eine gerade Zahl.

Verwenden wir das Zeichen a für eine beliebige natürliche Zahl, so lautet der Satz: $2a$ ist eine gerade Zahl.

Ganz gleich, welche natürliche Zahl für a eingesetzt wird, stets gilt dieser Satz. a ist nach unserer Vereinbarung ein Zeichen für eine beliebige natürliche Zahl.

4 In den Abschnitten 1 bis 3 haben wir lateinische Buchstaben verwendet, um beliebige Elemente einer vorgegebenen Menge zu bezeichnen.

1 **Zeichen für beliebige Elemente aus einem fest vorgegebenen Bereich nennt man Variablen.**

Beim Gebrauch von Variablen mußt du dir stets Klarheit über den Bereich verschaffen, aus dem die Elemente entnommen werden, die man durch Variablen bezeichnet.

Zahlenbereiche

5 Der Bereich der natürlichen Zahlen

Wir wollen künftig natürliche Zahlen 0, 1, 2, 3, ... durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnen. Die Gesetzmäßigkeiten der Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen können mit Hilfe dieser Bezeichnungsweise kurz gefaßt werden.

Kommutationsgesetz der Addition:

$\boldsymbol{a + b = b + a}$

In einer Summe darf man die Reihenfolge der Summanden vertauschen.

Diese Beziehung gilt stets, ganz gleich, welche natürlichen Zahlen für a und b eingesetzt werden.

$3 + 5 = 5 + 3$; $345 + 1001 = 1001 + 345$

Assoziationsgesetz der Addition:

$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c}$

In einer Summe darf man die Summanden in beliebiger Reihenfolge zusammenfassen.

Diese Beziehung gilt stets, ganz gleich, welche natürlichen Zahlen für a, b und c eingesetzt werden.

$(3 + 5) + 7 = 3 + (5 + 7) = 3 + 5 + 7$;

$(2 + 1) + 33 = 2 + (1 + 33) = 2 + 1 + 33$

Addition der Zahl 0:

$\boldsymbol{a + 0 = a}$

Wird zu einer natürlichen Zahl die Zahl Null addiert, so erhalten wir die ursprüngliche Zahl.

$5 + 0 = 5$; $101 + 0 = 101$

Kommutationsgesetz der Multiplikation:
In einem Produkt darf man die Reihenfolge der Faktoren vertauschen.

$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$

$3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$; $23 \cdot 54 = 54 \cdot 23$

Assoziationsgesetz der Multiplikation:
In einem Produkt darf man die Faktoren in beliebiger Reihenfolge zusammenfassen.

$\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c}$

$(3 \cdot 7) \cdot 9 = 3 \cdot (7 \cdot 9) = 3 \cdot 7 \cdot 9$; $(10 \cdot 5) \cdot 15 = 10 \cdot (5 \cdot 15) = 10 \cdot 5 \cdot 15$

Multiplikation mit der Zahl 1:
Wird eine Zahl mit 1 multipliziert, erhält man als Produkt die ursprüngliche Zahl.

$\boldsymbol{a \cdot 1 = a}$

$6 \cdot 1 = 6$; $3426 \cdot 1 = 3426$; $0 \cdot 1 = 0$

Distributionsgesetz:

Wird eine Summe mit einer Zahl multipliziert, so wird jeder Summand mit dieser Zahl multipliziert und die Summe der Produkte gebildet.

$\boldsymbol{a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y}$

$3 \cdot (7 + 8) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8$; $15 \cdot (12 + 4) = 15 \cdot 12 + 15 \cdot 4$

1 Stelle einige wichtige Gesetze für die Addition und Multiplikation im Bereich der ganzen Zahlen zusammen! Verwende als Variablen (in diesem Fall Zeichen für ganze Zahlen) kleine lateinische Buchstaben!

6 Der Bereich der rationalen Zahlen

Auch rationale Zahlen werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.
Wir legen nunmehr fest:
Falls nichts anderes gesagt wird, sind ab jetzt kleine lateinische Buchstaben

A

stets Zeichen für beliebige rationale Zahlen. Für die Variablen $a, b, c, \ldots, x, y, z$ können also beliebige rationale Zahlen eingesetzt werden.

In der siebenten Klasse haben wir gelernt:

2 **Jede rationale Zahl läßt sich in der Form $\frac{p}{q}$ darstellen, wobei p und q ganze und teilerfremde Zahlen sind und $q \neq 0$ ist.**

Für die **Addition** von rationalen Zahlen gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

Kommutationsgesetz: $a + b = b + a$

Assoziationsgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

Addition der Zahl 0: $a + 0 = a$

Für die **Multiplikation** von rationalen Zahlen gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

Kommutationsgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziationsgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Multiplikation mit 1: $a \cdot 1 = a$

Distributionsgesetz: $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$

2 Gib für jede dieser Gesetzmäßigkeiten fünf Beispiele an, indem du für die Variablen beliebige rationale Zahlen einsetzt!

Addition und Subtraktion von Variablen

7 Vielfache von Variablen

Um bestimmte Gesetzmäßigkeiten für das Rechnen mit rationalen Zahlen zu beschreiben, verwenden wir als Variablen ebenfalls kleine lateinische Buchstaben.

Dabei bezeichnen wir unterschiedliche rationale Zahlen, die in ein und demselben Zusammenhang auftreten, durch unterschiedliche Variablen und gleiche rationale Zahlen durch gleiche Variablen.

Umgekehrt können wir jedoch für unterschiedliche Variablen gleiche rationale Zahlen einsetzen, während wir für gleiche Variablen die gleiche rationale Zahl einsetzen.

1 Wir wollen die durch folgende Beispiele angegebene Gesetzmäßigkeit allgemein ausdrücken.

$3 + 3 = 2 \cdot 3$

$5 + 5 = 2 \cdot 5$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4}$

$(-0{,}6) + (-0{,}6) = 2 \cdot (-0{,}6)$

$17{,}9 + 17{,}9 = 2 \cdot 17{,}9$

Wir verwenden die Variable a, um diese Gesetzmäßigkeit anzugeben:

$a + a = 2\,a.$

(Bei Verwendung von Variablen wird häufig das Multiplikationszeichen weggelassen.)

Wir können die gleiche Gesetzmäßigkeit auch angeben, indem wir andere Variablen verwenden, z. B.:

$b + b = 2\,b$ oder

$x + x = 2\,x$ usw.

Es ist gleichgültig, welche Variable wir zur Formulierung dieser Gesetzmäßigkeit verwenden.

(3) a) Gib fünf Beispiele für die folgende Beziehung an!

$a + a + a = 3\,a$

b) Gib weitere Möglichkeiten für die Beschreibung dieser Gesetzmäßigkeit an!

Wir wollen die folgende Aufgabe allgemein ausdrücken und Beispiele anführen:

2 Das Dreifache einer rationalen Zahl und das Zweifache einer anderen rationalen Zahl sollen addiert werden.

Wir verwenden für die erste rationale Zahl die Variable a.

Da die zweite rationale Zahl von der ersten verschieden sein soll, bezeichnen wir sie mit b. Für die Summe erhalten wir dann: $3\,a + 2\,b$.

	a	b	$3a + 2b$
(1)	5	2	19
(2)	$\frac{1}{5}$	0,6	1,8
(3)	$-0{,}7$	0	$-2{,}1$
(4)	3	1	11
(5)	$-0{,}2$	$-0{,}3$	$-1{,}2$

8 Wir bilden Summen aus mehreren gleichen Summanden.

$$a + a = 2\,a$$
$$a + a + a = 3\,a$$
$$a + a + a + a = 4\,a$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{\text{Die rationale Zahl } a \text{ steht } n\text{-mal als Summand}} = n\,a$$

Die Zahl n, die hierbei angibt, wie oft die Zahl a als Summand steht, ist eine beliebige natürliche Zahl.

$n\,a$ heißt das n-fache von a.

(4) Gib für die folgenden Behauptungen je fünf Beispiele an!

a) $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n\text{-Summanden}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{natürliche Zahl}}}{n}\,x$

b) $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{natürliche Zahl}}}{m}\,r = \underbrace{r + r + \ldots + r}_{m\text{-Summanden}}$

A

3 **Die natürliche Zahl n, die in der Beziehung $a + a + a + \ldots + a = n\,a$ angibt, wie oft eine Variable a als Summand steht, nennen wir Koeffizient.**

Aufgaben A 1 bis 14

9 Addition von Variablen

Treten in einer Summe gleiche Variablen mit ganzzahligen Zahlenfaktoren auf, so können wir die Summe vereinfachen.

3 $3\,a + 2\,b + 4\,a + b$

Da a und b Variablen für rationale Zahlen sind und für die Addition rationaler Zahlen das Kommutationsgesetz gilt, können wir schreiben:

$3\,a + 4\,a + 2\,b + b$.

Wir nennen diesen Schritt künftig: **Ordnen.**

Diese Summe können wir vereinfachen, denn $3\,a$ bedeutet, daß a dreimal als Summand steht, und $4\,a$ bedeutet, daß a viermal als Summand steht. Für b gilt das Entsprechende.

$$3a + 4a + 2b + b = \underbrace{a + a + a} + \underbrace{a + a + a + a} + \underbrace{b + b} + b$$

$$= \underbrace{a + a + a + a + a + a + a} + \underbrace{b + b + b}$$

$$3a + 4a + 2b + b = \qquad 7a \qquad + \quad 3b$$

Wir erhalten also: $3\,a + 2\,b + 4\,a + b = 7\,a + 3\,b$.

Wir haben hierbei gleiche Variablen mit ganzzahligen Zahlenfaktoren addiert, indem wir ihre ganzzahligen Zahlenfaktoren, also die **Koeffizienten,** addiert haben. Als Ergebnis erhalten wir somit eine Variable, deren Koeffizient die Summe aus den einzelnen Zahlenfaktoren darstellt. Der Zahlenfaktor 1 von Variablen braucht nicht geschrieben zu werden.

10 Treten in einer Summe gleiche Variablen mit rationalen Zahlenfaktoren auf, so können wir nicht immer sagen, daß die Zahlenfaktoren in den einzelnen Summanden angeben, wie oft die Variablen als Summanden stehen.

Wir legen aber fest, daß wir auch diese Zahlenfaktoren zum Unterschied zu den Variablen *Koeffizienten der Variablen* nennen.

Die Addition von Variablen mit beliebigen rationalen Koeffizienten erfolgt dann wie im Beispiel 3.

4
$$0{,}6\,a + (-3)\,b + 0{,}75\,a + \frac{1}{2}\,b =$$

Ordnen: $= \underbrace{0{,}6\,a + 0{,}75\,a} + \underbrace{(-3)\,b + \frac{1}{2}\,b}$

Zusammenfassen: $= \quad 1{,}35\,a \quad + \quad (-2{,}5)\,b$

11 Subtraktion von Variablen

Bei der Subtraktion gleicher Variablen mit rationalen Koeffizienten können wir auf entsprechende Weise verfahren, wie wir aus folgender Übung erkennen.

A

(5) Es ist die Differenz $7{,}2\,x - 2{,}1\,x$ zu bilden.
Übertrage dazu die nebenstehende Tabelle in dein Heft und vervollständige sie!

x	$7{,}2\,x - 2{,}1\,x$	$(7{,}2 - 2{,}1)\,x$
1		
$0{,}5$		
-3		
$-\frac{1}{3}$		

4 **Gleiche Variablen werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Koeffizienten addiert (subtrahiert).**

5 Die Summe $7\,a + 48{,}1\,b - 12\,a - 17 - 0{,}1\,a - 20{,}1\,b + 36$ ist zu vereinfachen.

$$7\,a + 48{,}1\,b - 12\,a - 17 - 0{,}1\,a - 20{,}1\,b + 36 =$$

Ordnen: $= 7\,a - 12\,a - 0{,}1\,a + 48{,}1\,b - 20{,}1\,b - 17 + 36$

Zusammenfassen: $= -5{,}1\,a + 28\,b + 19$

Aufgaben A 15 bis 26

12 Addition und Subtraktion von Summen

Bei der Addition von Summen oder Differenzen schließt man diese in Klammern ein. Die Klammern geben an, welche Summanden zuerst zusammengefaßt werden sollen. Sind keine Variablen enthalten, so kann diese Reihenfolge auch stets eingehalten werden.

6 Zu der Zahl 15 sollen die Summen $12 + 9 - 3$ und $17 + 3$ addiert werden.

$$15 + (12 + 9 - 3) + (17 + 3) =$$
$$= 15 + \quad 18 \quad + \quad 20 \quad = 53$$

13 Treten bei der Addition von Summanden Variablen auf, so muß man die Klammern **auflösen.** Hierbei wendet man das Assoziationsgesetz der Addition an: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$. Steht also vor der Klammer ein Pluszeichen, so können wir die Klammern weglassen. Diese Gesetzmäßigkeit gilt auch, wenn in der Klammer mehr als zwei Summanden stehen.

(6) Überprüfe diese Gesetzmäßigkeit für

a) $5\,a + (7\,b + 3\,a) = 5\,a + 7\,b + 3\,a$ und

b) $5\,a + (7\,b - 3\,a) = 5\,a + 7\,b - 3\,a$,

indem du für die Variablen rationale Zahlen einsetzt!

Übertrage die Tabelle hierzu in dein Heft! Die dritte und die fünfte Spalte berechne nach dem Einsetzen wie in Beispiel 6!

a	b	$5a + (7b + 3a)$	$5a + 7b + 3a$	$5a + (7b - 3a)$	$5a + 7b - 3a$
2	1				
-2	2				
$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{7}$				
$-0{,}1$	2				

A

5 **Wenn vor einer Klammer ein Pluszeichen steht, so kann die Klammer weggelassen werden.** $\boldsymbol{a + (b + c) = a + b + c}$; $\boldsymbol{a + (b - c) = a + b - c}$

7 Die Summe $1{,}5\,x + 3{,}2\,y$, die Differenz $2{,}5\,x - 3{,}1\,y$ und $2\,y$ sind zu addieren.

$(1{,}5\,x + 3{,}2\,y) + (2{,}5\,x - 3{,}1\,y) + 2\,y$

Wir lösen die Klammern auf und fassen gleiche Variablen zusammen.

$1{,}5\,x + 3{,}2\,y + 2{,}5\,x - 3{,}1\,y + 2\,y = 4\,x + 2{,}1\,y$

14 Auch für die Subtraktion von Summen bzw. Differenzen gilt stets, daß zuerst die Operationen in den Klammern auszuführen sind.

8 $23 - (11 + 4) = 23 - 15 = 8$; $23 - (11 - 4) = 23 - 7 = 16$

15 Treten bei der Subtraktion von Summen Variablen auf, so müssen wir die Klammern wieder auflösen. Hierbei hilft uns das Assoziationsgesetz nicht, denn es gilt nur für die Addition.

Einen Weg für das Auflösen der Klammern soll uns die Übung 7 zeigen. Dabei sind vier Fälle zu unterscheiden:

(1) $a - (b + c)$; (2) $a - (b - c)$; (3) $a - (-b + c)$; (4) $a - (-b - c)$

7 Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

(1) $a - (b + c)$:

a	b	c	$(b + c)$	$a - (b + c)$	$a - b - c$
27	6	7			
-113	96	5			
10	-2	9			
12	-6	$-5{,}1$			

(2) $a - (b - c)$:

a	b	c	$(b - c)$	$a - (b - c)$	$a - b + c$
27	6	7			
-113	96	5			
10	-2	9			
12	-6	$-5{,}1$			

(3) $a - (-b + c)$:

a	b	c	$(-b + c)$	$a - (-b + c)$	$a + b - c$
27	6	7			
-113	96	5			
10	-2	9			
12	-6	$-5{,}1$			

A

(4) $a - (-b - c)$:

a	b	c	$(-b-c)$	$a-(-b-c)$	$a+b+c$
27	6	7			
-113	96	5			
10	-2	9			
12	-6	$-5{,}1$			

Aus der Übung 7 erkennen wir, daß wir bei der Subtraktion eine Klammer auflösen können, indem wir an Stelle aller Pluszeichen, die in der Klammer stehen, Minuszeichen und an Stelle aller Minuszeichen, die in der Klammer stehen, Pluszeichen setzen. Wenn unmittelbar vor einer Variablen kein Zeichen steht, so hat man sich dort ein Pluszeichen zu denken.

6 **Wenn vor einer Klammer ein Minuszeichen steht, so muß man beim Auflösen der Klammer die Plus- und Minuszeichen in der Klammer in die entgegengesetzten verändern.**

$a - (b + c) = a - b - c$; $\quad a - (b - c) = a - b + c$

$a - (-b + c) = a + b - c$; $\quad a - (-b - c) = a + b + c$

Diese Gesetzmäßigkeit gilt auch, wenn in einer Klammer mehr als zwei Summanden stehen.

9 Die Klammern in der folgenden Aufgabe sind aufzulösen.

$$5a + 7b - (10a - 8b - 3c) = 5a + 7b - 10a + 8b + 3c$$
$$= -5a + 15b + 3c$$

Aufgaben A 27 bis 31

16 Setzen von Klammern

Man kann auch Klammern setzen.

Soll vor der Klammer ein Pluszeichen stehen, so dürfen die Summanden einer Summe in beliebiger Weise durch Klammern zusammengefaßt werden. Das folgt aus dem Assoziationsgesetz: $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$.

Auch mehr als zwei Summanden dürfen durch Klammern zusammengefaßt werden, wenn vor der Klammer ein Pluszeichen stehen soll.

10 In der Summe $3a + 4b + 17c + 7a + 5b + 4c$ sollen die ersten drei Summanden und die letzten drei Summanden zusammengefaßt werden. Vor den zu setzenden Klammern sollen Pluszeichen stehen.

$$3a + 4b + 17c + 7a + 5b + 4c = (3a + 4b + 17c) + (7a + 5b + 4c)$$

Man könnte auch andere Summanden zusammenfassen, z. B.:

$$3a + 4b + 17c + 7a + 5b + 4c = (3a + 4b) + 17c + (7a + 5b + 4c)$$
$$= 3a + (4b + 17c + 7a + 5b) + 4c$$

17 Soll vor einer zu setzenden Klammer ein Minuszeichen stehen, so müssen wir

A

an Stelle aller Pluszeichen, die durch eine Klammer erfaßt werden, Minuszeichen setzen und an Stelle aller Minuszeichen, die durch eine Klammer erfaßt werden, Pluszeichen setzen.

7 **Wenn beim Setzen einer Klammer vor der Klammer ein Minuszeichen stehen soll, so muß man alle Plus- und Minuszeichen, die von der Klammer erfaßt werden, in die entgegengesetzten verändern.**

$$a - b - c = a - (b + c); \quad a - b + c = a - (b - c)$$
$$a + b - c = a - (-b + c); \quad a + b + c = a - (-b - c)$$

11 In den folgenden Summen sind Klammern so zu setzen, daß davor Minuszeichen stehen.

$$3a + 1{,}5\,b - 2x - 3y = 3a + 1{,}5\,b - (2x + 3y).$$

Es gibt noch verschiedene andere Möglichkeiten, Klammern zu setzen. Gib weitere Möglichkeiten an!

18 Die angegebene Gesetzmäßigkeit für das Setzen von Klammern gilt auch für mehr als zwei Summanden, die durch Klammern zusammengefaßt werden sollen.

Das folgende Beispiel gibt zwei Möglichkeiten an.

12
$$2a - 3b + 5x - 7y + 3z = (2a - 3b) - (-5x + 7y - 3z) =$$
$$= -(-2a + 3b) + (5x - 7y + 3z)$$

Aufgaben A 32 bis 41

19 ZUSAMMENFASSUNG

Klammer auflösen

Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, läßt man diese einfach weg.

Steht ein Minuszeichen vor der Klammer, verändert man die Plus- und Minuszeichen in der Klammer in die entgegengesetzten und läßt die Klammern fort.

Klammer setzen

Soll ein Pluszeichen vor der Klammer stehen, so setzt man einfach die Klammer.

Soll ein Minuszeichen vor der Klammer stehen, so verändert man alle Plus- und Minuszeichen, die in der Klammer stehen sollen, in die entgegengesetzten Zeichen.

Auflösen der Klammer →

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$
$$a - (-b + c) = a + b - c$$
$$a - (-b - c) = a + b + c$$

← Setzen der Klammer

Multiplikation und Division von Variablen

20 Multiplikation von Variablen

8 Rechne die folgenden Produkte mit Hilfe des Rechenstabs aus!

$0{,}67 \cdot 3{,}21$	$0{,}67 \cdot 4{,}82$	$0{,}67 \cdot 5{,}95$
$0{,}67 \cdot 0{,}67$	$0{,}67 \cdot 7{,}78$	$0{,}67 \cdot 8{,}91$
$0{,}67 \cdot 9{,}99$	$0{,}67 \cdot 10{,}45$	$0{,}67 \cdot 15{,}3$

Alle Produkte in Übung 8 enthalten den Faktor 0,67. Der zweite Faktor variiert (er verändert sich). Wir hätten den Auftrag in Übung 8 auch folgendermaßen formulieren können:

Zu berechnen ist

$0{,}67\,a$ mit $a = 3{,}21;\ 4{,}82;\ 5{,}95;\ 0{,}67;\ 7{,}78;\ 8{,}91;\ 9{,}99;\ 10{,}45;\ 15{,}3.$

Auch wenn beide Faktoren variieren, kann man Variablen verwenden.

Für die Produkte $1{,}12\,x;\ 2{,}03\,x;\ 3{,}72\,x$ mit $x = 0{,}23;\ 0{,}57;\ 0{,}89;\ 0{,}93$ können wir schreiben:

Zu berechnen ist $a\,x$ mit

$a = 1{,}12;\ 2{,}03;\ 3{,}72$ und $x = 0{,}23;\ 0{,}57;\ 0{,}89;\ 0{,}93.$

21 Wird keine Einschränkung für die Variablen angegeben, so gibt das Produkt $a\,b$ der Variablen a und b das Produkt zweier beliebiger rationaler Zahlen an. Produkte, in denen Koeffizienten und Variablen als Faktoren auftreten, lassen sich auf Grund des Kommutations- und Assoziationsgesetzes der Multiplikation berechnen.

13 $4{,}5\,a \cdot 2\,b = \underbrace{4{,}5 \cdot 2} \cdot \underbrace{a \cdot b} = 9\,a\,b$

22 Häufig sind Produkte zu bilden, in denen gleiche Faktoren auftreten. In den folgenden Produkten aus drei Faktoren ist ein Faktor konstant. Die anderen beiden variieren, sind aber innerhalb eines Produktes stets gleich.

$0{,}72 \cdot 1{,}23 \cdot 1{,}23$	$0{,}72 \cdot 2{,}48 \cdot 2{,}48$	$0{,}72 \cdot 3{,}61 \cdot 3{,}61$
$0{,}72 \cdot 4{,}67 \cdot 4{,}67$	$0{,}72 \cdot 5{,}89 \cdot 5{,}89$	$0{,}72 \cdot 7{,}77 \cdot 7{,}77$

Zur Abkürzung wenden wir die Potenzschreibweise an.

$0{,}72 \cdot 1{,}23^2$	$0{,}72 \cdot 2{,}48^2$	$0{,}72 \cdot 3{,}61^2$
$0{,}72 \cdot 4{,}67^2$	$0{,}72 \cdot 5{,}89^2$	$0{,}72 \cdot 7{,}77^2$

Unter Verwendung von Variablen läßt sich diese Aufgabe noch kürzer und damit übersichtlicher formulieren, nämlich:

Zu berechnen ist

$0{,}72\,a^2$ für $a = 1{,}23;\ 2{,}48;\ 3{,}61;\ 4{,}67;\ 5{,}89;\ 7{,}77.$

Entsprechend bedeutet z. B. die Schreibweise $2{,}5\,y^3$, daß die Variable y drei-

A

mal als Faktor in dem Produkt steht. Die Variable y kommt in der dritten Potenz vor.

23 Produkte, in denen gleiche Variablen mehrmals als Faktoren auftreten, führen auf **Potenzen.**

Wir betrachten die Multiplikation gleicher Variablen im Zusammenhang:

$$a \cdot a = a^2 \qquad \text{umgekehrt} \qquad b^2 = b \cdot b$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3 \qquad\qquad b^3 = b \cdot b \cdot b$$
$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 \qquad\qquad b^4 = b \cdot b \cdot b \cdot b$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{} = a^n \qquad\qquad b^m = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{}$$

a steht n-mal als Faktor (gelesen: a hoch n)

b steht m-mal als Faktor (gelesen: b hoch m)

In der Potenz a^n nennt man die Variable a die **Basis** und die Variable n den **Exponenten.**

14 a) $x \cdot 2{,}7\,x \cdot 3\,x \cdot 3{,}5\,y \cdot 2\,y = 2{,}7 \cdot 3 \cdot 3{,}5 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$
$= 56{,}7\,x^3\,y^2$

b) $0{,}5\,v^2 \cdot 2{,}2\,s \cdot 5\,w^3 \cdot 2\,v^3 \cdot 10\,s^2 \cdot w^3$
$= 0{,}5 \cdot 2{,}2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot s \cdot s^2 \cdot v^2 \cdot v^3 \cdot w^3 \cdot w^3$
$= 110 \cdot s \cdot s \cdot s \cdot v \cdot v \cdot v \cdot v \cdot v \cdot w \cdot w \cdot w \cdot w \cdot w \cdot w$
$= 110\,s^3 \cdot v^5 \cdot w^6$

24 Bei der Berechnung eines Produktes können Aufgaben der folgenden Art auftreten: $(-1{,}5\,a^2) \cdot (+2{,}7\,x^2) \cdot (-2\,z)$.

Setzt sich das Produkt aus zwei Faktoren zusammen, so treten folgende Fälle auf:

(1) $(+a) \cdot (+b) = +ab$, (3) $(+a) \cdot (-b) = -ab$,
(2) $(-a) \cdot (-b) = +ab$, (4) $(-a) \cdot (+b) = -ab$.

Bei mehr als zwei Faktoren müssen wir das Vorzeichen schrittweise ermitteln.

15 Das Produkt $(-1{,}5\,a^2) \cdot 2\,(-b) \cdot 0{,}5\,(-w^3) \cdot 3\,a^3$ ist zu berechnen. Zuerst bestimmen wir das Vorzeichen des Produktes.

Dann wenden wir das Kommutations- und Assoziationsgesetz an.

$$(-1{,}5\,a^2) \cdot 2\,(-b) \cdot 0{,}5\,(-w^3) \cdot 3\,a^3 = -(1{,}5\,a^2 \cdot 2\,b \cdot 0{,}5\,w^3 \cdot 3\,a^3) =$$
$$= -(1{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot b \cdot w^3) = -4{,}5\,a^5\,b\,w^3$$

25 Division von Variablen

9 Berechne die folgenden Quotienten mit Hilfe des Rechenstabs!

3,25 : 0,88	3,25 : 0,92	3,25 : 1,27
3,25 : 2,39	3,25 : 3,71	3,25 : 4,66
3,25 : 5,55	3,25 : 10,38	3,25 : 15,4

A

Den Auftrag in Übung 9 kann man auch folgendermaßen formulieren:

Berechne die Quotienten $3{,}25 : a$ für $a = 0{,}88$; $0{,}92$; $1{,}27$; $2{,}39$; $3{,}71$; $4{,}66$; $5{,}55$; $10{,}38$; $15{,}4$!

In der Übung 9 war der Dividend stets konstant, und der Divisor variierte. In der folgenden Übung sollen sowohl Dividend als auch Divisor variieren, wobei wieder die Schreibweise mit Variablen angewendet wird.

10 Berechne $a : x$ für $a = 10{,}22$; $12{,}34$; $13{,}7$ und $x = 2{,}35$; $3{,}81$; $4{,}57$; $9{,}5$!

Wieviel Aufgaben sind das?

26 Wird keine Einschränkung vorgenommen, so gibt der Quotient $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ aus den Variablen a und b (für $b \neq 0$) den Quotienten zweier beliebiger rationaler Zahlen an.

Quotienten, in denen Koeffizienten und Variablen auftreten, berechnet man, indem man zuerst die Koeffizienten für sich dividiert, dann die Variablen dividiert und schließlich das Produkt aus beiden Teilergebnissen bildet.

16 $17{,}6\,a : 2{,}77\,b$

Wir bilden den Quotienten aus den Koeffizienten $\frac{17{,}6}{2{,}77} \approx 6{,}35$.

Wir bilden den Quotienten aus den Variablen: $\frac{a}{b}$.

Wir multiplizieren $6{,}35$ mit $\frac{a}{b}$ und erhalten: $6{,}35\,\frac{a}{b}$.

$$17{,}6\,a : 2{,}77\,b = \frac{17{,}6\,a}{2{,}77\,b} \approx 6{,}35\,\frac{a}{b}$$

Bei Anwendungsaufgaben sind mitunter Quotienten zu berechnen, in denen im Dividenden und im Divisor gleiche Faktoren auftreten.

Beispiele dafür sind folgende Aufgaben:

$(13{,}7 \cdot 0{,}24^2) : (3{,}9 \cdot 0{,}24)$ und $(0{,}88 \cdot 12{,}4^2) : (13{,}9 \cdot 12{,}4^3)$.

Verwenden wir Variablen, um solche Aufgaben zu charakterisieren, so erhalten wir für die obigen Aufgaben:

$13{,}7\,x^2 : 3{,}9\,x$ mit $x = 0{,}24$ bzw. $0{,}88\,x^2 : 13{,}9\,x^3$ mit $x = 12{,}4$.

Wie wir bei der Division rationaler Zahlen gelernt haben, kann man gleiche Faktoren im Dividenden und Divisor (im Zähler und Nenner bei Aufgaben in Bruchform) kürzen. Das gleiche können wir beim Rechnen mit Variablen tun:

$$13{,}7\,x^2 : 3{,}9\,x = \frac{13{,}7\,x^2}{3{,}9\,x} = \frac{13{,}7\,x}{3{,}9} \quad \text{bzw.} \quad 0{,}88\,x^2 : 13{,}9\,x^3 = \frac{0{,}88\,x^2}{13{,}9\,x^3} = \frac{0{,}88}{13{,}9\,x}.$$

27 Da Dividend und Divisor auch negativ sein können, müssen wir bei der Ausführung der Division das Vorzeichen des Quotienten ermitteln. Dabei können folgende vier Fälle auftreten, in denen jeweils $b \neq 0$ vorausgesetzt wird.

(1) $(+a) : (+b) = +(a : b)$, (3) $(+a) : (-b) = -(a : b)$,
(2) $(-a) : (-b) = +(a : b)$, (4) $(-a) : (+b) = -(a : b)$.

A

17 a) $(-25\,a) : 5\,b$ mit $b \neq 0$.

$(-25\,a) : 5\,b = -\frac{25\,a}{5\,b} = -5\,\frac{a}{b}$

b) $a : a$ mit $a \neq 0$

$a : a = \frac{a}{a} = 1$

c) $32{,}8\,v^3 w : (-23{,}6\,v\,w^2)$; $(v \neq 0,\; w \neq 0)$

$32{,}8\,v^3 w : (-23{,}6\,v\,w^2) = -\frac{32{,}8\,v^3 w}{23{,}6\,v\,w^2} \approx -1{,}39\,\frac{v^3 w}{v\,w^2} = -1{,}39\,\frac{v^2}{w}$

28 Wegen der Ungleichheit

$$\frac{a}{b} \cdot c \neq \frac{a}{b \cdot c}$$

müssen wir bei der Verwendung des Doppelpunktes als Divisionszeichen zusätzlich Klammern verwenden. Und zwar gilt:

$\frac{a}{b} \cdot c = (a : b) \cdot c$ und $\frac{a}{b \cdot c} = a : (b \cdot c)$.

11 Überprüfe die folgenden Ungleichungen!

a) $(30 : 5) \cdot 4 \neq 30 : (5 \cdot 4)$ b) $(27 : 2) \cdot 9 \neq 27 : (2 \cdot 9)$

12 Wie wir sahen, ist die Aufgabe $a : b \cdot c$ nicht eindeutig. Gilt das auch für $a \cdot b : c$?

13 In welcher Reihenfolge werden die Rechenoperationen in den folgenden Aufgaben ausgeführt?

a) $a\,(b - c)$ b) $(m - n) : p$ c) $(a + b)\,c - d$ d) $a + b \cdot (c - d)$
e) $(a + b) : (a - b)$ f) $(a + b)\,(c - d)$ g) $a - b\,(c + d)$
h) $(x - y)\,z + x$ i) $(a : c)\,(a - b)$ k) $m : (p - q) + n$

Aufgaben A 42 bis 64

29 Multiplikation und Division von Summen

Wir haben gelernt, daß für rationale Zahlen das Distributionsgesetz gilt:

$a\,(b \pm c) = a\,b \pm a\,c$.

Da die Faktoren in einem Produkt von rationalen Zahlen vertauscht werden dürfen, gilt auch $(d \pm e)\,f = df \pm ef$.
Die linke Seite dieser beiden Gleichungen stellt das Produkt aus einer einzelnen Variablen und einer Summe mit zwei Summanden dar.
Eine Summe, die aus zwei Summanden besteht, nennt man auch **Binom**[1].

14 Stelle fest, ob das Distributionsgesetz auch für mehrgliedrige Summen gilt, indem du die Tabelle in dein Heft überträgst und ergänzt!

a	b	c	d	e	f	$a(b+c+d+e+f)$	$ab+ac+ad+ae+af$
2	1,5	3,2	−1,1	0,7	−2,1		
−2	0,7	−1,6	−2,5	3,9	−7,0		
1	$-\frac{2}{3}$	0,62	1,2	−7	$\frac{1}{5}$		

[1] Bi (lat.), doppelt, zwei; nomos (griech.), Gefüge, Glied

8 **Eine Summe von Variablen wird mit einer Variablen multipliziert, indem man jeden einzelnen Summanden mit der Variablen multipliziert und die Summe aus den Produkten bildet.**

A

Dabei ist es gleichgültig, ob die Variablen mit Koeffizienten versehen sind oder nicht, denn die Variablen können beliebige rationale Zahlen sein.

18

a) $(12{,}2\,x + 3{,}7\,y - 5{,}2\,z) \cdot 0{,}1\,a = 1{,}22\,xa + 0{,}37\,ya - 0{,}52\,za$
$= 1{,}22\,ax + 0{,}37\,ay - 0{,}52\,az$

b) $(-0{,}5\,a^2) \cdot (2\,u^2 - 3\,a^3 + w^2 r) = -a^2 u^2 + 1{,}5\,a^5 - 0{,}5\,a^2 w^2 r$

c) $(xy + yz - rs) \cdot (-ab) = -abxy - abyz + abrs$

Aufgaben A 65 bis 75

30 Wir wenden das Distributionsgesetz auf folgenden Fall an:

$$(a \pm b \pm c \pm d) \cdot \frac{1}{x} = a \cdot \frac{1}{x} \pm b \cdot \frac{1}{x} \pm c \cdot \frac{1}{x} \pm d \cdot \frac{1}{x};\ (x \neq 0). \qquad (1)$$

Das ist möglich, weil das Distributionsgesetz für beliebige rationale Zahlen gilt, also auch für den Kehrwert einer rationalen Zahl. (Es muß nur beachtet werden, daß x nicht die Zahl Null sein darf.)
Die Beziehung (1) können wir in folgender Form schreiben:

$$(a \pm b \pm c \pm d) : x = (a : x) \pm (b : x) \pm (c : x) \pm (d : x).$$

Die runden Klammern auf der rechten Seite sollen die einzelnen Summanden deutlicher hervorheben.
Die letzte Beziehung gibt folgende Gesetzmäßigkeit an:

9 **Eine Summe wird durch eine rationale Zahl, die von Null verschieden ist, dividiert, indem jeder einzelne Summand durch die Zahl dividiert und die Summe aus dem Quotienten gebildet wird.**

19

a) $(45\,a - 54\,b) : 9 = 5\,a - 6\,b$

Eine Probe könnte man machen, indem man rechnet:

$(5\,a - 6\,b) \cdot 9 = 45\,a - 54\,b$

b) $(3\,x^2 - 6\,xy + 9\,xz) : (-3\,x) = -x + 2\,y - 3\,z$

Probe: $(-x + 2\,y - 3\,z) \cdot (-3\,x) = 3\,x^2 - 6\,xy + 9\,xz$

c) $(0{,}64\,a^2 b + 0{,}32\,a^3 b^2 - 16\,ab) : (-1{,}6\,ab) = -0{,}4\,a - 0{,}2\,a^2 b + 10$

Kontrolliere stets deine Ergebnisse, auch wenn das nicht ausdrücklich gefordert wird!
Eine Summe wird also gliedweise dividiert. Man bestimmt zunächst das Vorzeichen des jeweiligen Quotienten, dann dividiert man die Koeffizienten,und schließlich werden die Variablen dividiert.

Aufgaben A 76 bis 82

31 Die Multiplikation zweier Binome kann aus dem Distributionsgesetz hergeleitet werden.
Das Produkt $(a + b)\,(c + d)$ soll berechnet werden.

A

Da die Summe zweier rationaler Zahlen wieder eine rationale Zahl ist, setzen wir $(c + d) = m$. Wir erhalten:

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot m = a\,m + b\,m.$$

Nun setzen wir für m wieder $(c + d)$ ein und wenden erneut das Distributionsgesetz an:

$$\begin{aligned} a\,m + b\,m &= a\,(c + d) + b\,(c + d) \\ &= a\,c + a\,d + b\,c + b\,d \end{aligned}$$

Daraus folgt:

10 **Zwei Binome werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden des ersten Faktors mit jedem Summanden des zweiten Faktors multipliziert und die Produkte addiert (bzw. subtrahiert).**

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

15 Berechne folgende Produkte!

a) $(a + b)\ (c - d)$ **b)** $(a - b)\ (c + d)$ **c)** $(a - b)\ (c - d)$

32 Die Gesetzmäßigkeit für das Ausmultiplizieren zweier Binome gilt auch dann, wenn Koeffizienten und mehrere Variablen auftreten. Für die Teilprodukte, die dabei gebildet werden, wollen wir künftig folgende Schreibweise einhalten:

Wir schreiben zuerst den Koeffizienten. Die Variablen ordnen wir alphabetisch.

20 $(2\,a\,x^2 - 3\,a\,b\,y)\ (5\,b - 4\,a\,y^2)$

Das erste Teilprodukt $2\,a\,x^2 \cdot 5\,b$ wird im Kopf ausgerechnet $(10\,a\,x^2\,b)$ und dann geordnet niedergeschrieben $(10\,a\,b\,x^2)$ usw.

$$(2\,a\,x^2 - 3\,a\,b\,y)\ (5\,b - 4\,a\,y^2) = 10\,a\,b\,x^2 - 8\,a^2x^2y^2 - 15\,a\,b^2y + 12\,a^2b\,y^3$$

33 Die Multiplikation zweier beliebiger mehrgliedriger Summen können wir aus der Multiplikation zweier Binome herleiten. Wir können schrittweise die Summanden jeweils so zusammenfassen, daß zwei Binome miteinander zu multiplizieren sind.

So können wir beispielsweise bei der Aufgabe

$(a + b + c) \cdot (x + y + z)$

$a + b = d$ und $x + y = v$ setzen und erhalten dann:

$(d + c)\ (v + z) = d\,v + d\,z + c\,v + c\,z.$

Nun setzen wir wieder die Summen ein und können weiter ausmultiplizieren.

$$\begin{aligned} d\,v + d\,z + c\,v + c\,z &= (a + b)\ (x + y) + (a + b)\ z + c\,(x + y) + c\,z \\ &= a\,x + a\,y + b\,x + b\,y + a\,z + b\,z + c\,x + c\,y + c\,z \\ &= a\,x + a\,y + a\,z + b\,x + b\,y + b\,z + c\,x + c\,y + c\,z \end{aligned}$$

Daraus folgt:

11 **Mehrgliedrige Summen werden miteinander multipliziert, indem jeder Summand des ersten Faktors mit jedem Summanden des zweiten Faktors multipliziert wird und die Produkte addiert (bzw. subtrahiert) werden.**

Aufgaben A 83 bis 89

34 Soll das Produkt mehrerer mehrgliedriger Summen ermittelt werden, so können wir schrittweise zunächst zwei mehrgliedrige Summen miteinander multiplizieren, dann das Ergebnis mit der dritten multiplizieren usw.

21

$$(3 + 2y)(4x - 2y)(3xy + 5) = (12x - 6y + 8xy - 4y^2)(3xy + 5) =$$
$$= 36x^2y + 60x - 18xy^2 - 30y + 24x^2y^2 + 40xy - 12xy^3 - 20y^2$$

Auf Grund des Assoziationsgesetzes ist es gleichgültig, ob erst das Produkt des zweiten und dritten Faktors gebildet und mit dem ersten Faktor multipliziert wird oder ob das Produkt aus dem ersten und zweiten Faktor gebildet und mit dem dritten Faktor multipliziert wird. Setzen wir vorübergehend

$p = 3 + 2y;\quad q = 4x - 2y;\quad r = 3xy + 5,$

so gilt: $\quad p \cdot q \cdot r = (p \cdot q)\, r = p \cdot (q \cdot r).$

35 Ausklammern

Das Distributionsgesetz gibt an, in welcher Weise eine Summe mit einer rationalen Zahl multipliziert wird.
Wir können mit Hilfe dieses Gesetzes auch erklären, wie man eine Summe von Variablen in ein Produkt umformt: $\quad ab + ac = a(b + c).$

Enthalten die Summanden einer Summe gemeinsame Faktoren, so kann man diese **ausklammern,** d. h., gemeinsame Faktoren können vor eine Klammer gesetzt werden. Die Summanden in der Klammer erhalten wir, indem wir jeden der ursprünglichen Summanden durch die gemeinsamen Faktoren dividieren.
Bei allen Aufgaben, bei denen ausgeklammert wird (eine Summe in Faktoren „zerlegt“ wird), kann man eine Probe dadurch vornehmen, daß man das entstandene Produkt wieder ausmultipliziert.

22 $2a + 16ab$

Als gemeinsame Faktoren beider Summanden ermitteln wir 2 und a. Wir können nun diese Summe in Faktoren zerlegen, indem wir einen der beiden gemeinsamen Faktoren oder beide vor die Klammer setzen.

a) $2a + 16ab = 2\,(a + 8ab)$ **b)** $2a + 16ab = a\,(2 + 16b)$
c) $2a + 16ab = 2a\,(1 + 8b)$

23 Aus der Summe $7a^2x - 21ax^2 + 49a^2x^2$ sollen alle gemeinsamen Faktoren ausgeklammert werden.

$7a^2x - 21ax^2 + 49a^2x^2 = 7ax\,(a - 3x + 7ax).$

36 Gemeinsamer Faktor der einzelnen Summanden einer mehrgliedrigen Summe kann auch eine Summe sein. Es wird dann die Summe, die in allen Summanden als gemeinsamer Faktor enthalten ist, ausgeklammert.

24 $(3x - 2y)\,a + (3x - 2y)\,b - (3x - 2y)\,c$.

Der gemeinsame Faktor in dieser Summe ist die Summe $(3x - 2y)$.

$$(3x - 2y)\,a + (3x - 2y)\,b - (3x - 2y)\,c = (3x - 2y)\,(a + b - c)$$

37 Falls nicht alle Summanden einer mehrgliedrigen Summe einen gemeinsamen Faktor enthalten, kann man diejenigen Summanden zu einem Produkt umformen, die einen gemeinsamen Faktor besitzen.

25 Die Summe $xy - xv - cx + cz$ soll nach Möglichkeit umgeformt werden. Die ersten beiden Summanden enthalten den gemeinsamen Faktor x, die letzten beiden den gemeinsamen Faktor c. Wir klammern entsprechend aus:

$$xy - xv - cx + cz = x\,(y - v) + c\,(-x + z).$$

Auch bei derartigen Aufgaben hat man häufig mehrere Möglichkeiten für Umformungen.

Aufgaben A 90 bis 106

38 ZUSAMMENFASSUNG

Ausmultiplizieren

Eine mehrgliedrige Summe wird mit einer Variablen multipliziert, indem man jeden einzelnen Summanden mit der Variablen multipliziert. Zwei mehrgliedrige Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten mehrgliedrigen Summe mit jedem der zweiten multipliziert und die Klammern fortläßt.

Ausmultiplizieren →

$$a\,(b + c) = ab + ac$$
$$a\,(b - c) = ab - ac$$

$$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a + b)\,(c - d) = ac - ad + bc - bd$$
$$(a - b)\,(c + d) = ac + ad - bc - bd$$
$$(a - b)\,(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

← Ausklammern

Ausklammern

Enthalten die Summanden einer Summe gemeinsame Faktoren, so können diese vor eine Klammer gestellt werden, die die Summe umschließt. Man erhält so ein Produkt aus einer Variablen und einer Summe. Ist der gemeinsame Faktor eine Summe, so erhält man ein Produkt aus zwei mehrgliedrigen Summen.

Mehrfache Klammern

39 Manchmal wird es erforderlich, daß Klammerausdrücke erneut in Klammern eingeschlossen werden. Wir wollen in solchen Fällen über die runden Klammern hinaus eckige und geschweifte Klammern verwenden.
Für das Rechnen mit eckigen und geschweiften Klammern gelten die gleichen Rechengesetze wie für das Rechnen mit runden Klammern.

26 Die Summe $3a - 2(5b - c)$ soll mit $3b$ multipliziert werden.
Wir schließen die Summe $3a - 2(5b - c)$ in eckige Klammern ein und setzen den Faktor $3b$ vor oder hinter diese Klammer.

$$[3a - 2(5b - c)]\,3b$$

Wir haben nun zwei Möglichkeiten, diese Klammern zu berechnen.

a) Die Rechnung erfolgt von „innen nach außen", d. h., wir lösen zunächst die runden Klammern auf.

$$[3a - 2(5b - c)]\,3b = [3a - 10b + 2c]\,3b = 9ab - 30b^2 + 6bc$$

b) Die Rechnung erfolgt von „außen nach innen", d. h., wir lösen zuerst die eckigen Klammern auf.

$$[3a - 2(5b - c)]\,3b = 9ab - 6b(5b - c) = 9ab - 30b^2 + 6bc.$$

27 $12x - \{[5z - 2(4x - 3y)] - 3[-4(2z + 3x)]\} = A.$

Es wird der Weg von außen nach innen beschrieben.

Auflösen der geschweiften Klammer:

$$A = 12x - [5z - 2(4x - 6y)] + 3[-4(2z + 3x)]$$

Auflösen der eckigen Klammern:

$$A = 12x - 5z + 2(4x - 6y) - 12(2z + 3x)$$

Auflösen der runden Klammern:

$$A = 12x - 5z + 8x - 12y - 24z - 36x =$$

Ordnen: $= 12x + 8x - 36x - 12y - 5z - 24z$

Zusammenfassen: $= -16x - 12y - 29z$

16 Berechne die Aufgabe im Beispiel 27 noch einmal, indem du von innen nach außen vorgehst! Vergleiche die Ergebnisse!

17 Prüfe die Beispiele 26 und 27 nach, indem du für die Variablen rationale Zahlen einsetzt!

Aufgaben A 107 bis 114

B. ÄHNLICHKEIT

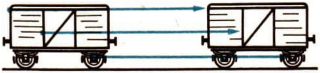
B

Kongruenzabbildungen in der Ebene

1 Verschiebungen in der Ebene

Das Bild B 1 zeigt einen Güterwagen, der ein Stück weitergerollt wurde. Im Verlaufe dieser Bewegung hat sich jeder Punkt des Waggons (außer den sich drehenden Rädern) in einer bestimmten Richtung um eine bestimmte Strecke verschoben. Dabei haben sich die Punkte auf zueinander parallelen Geraden verschoben. Die **Verschiebung** eines Punktes P zu einem Punkt P' hin wird durch einen Pfeil veranschaulicht.

B 1



Das Symbol $\overrightarrow{PP'}$ bedeutet eine Verschiebung von P nach P'. Von einer Verschiebung einer Ebene sprechen wir, wenn alle Punkte in der gleichen Richtung um die gleiche Strecke verschoben werden. Die Verschiebung einer Ebene ist schon festgelegt, wenn wir die Verschiebung $\overrightarrow{PP'}$ eines einzigen Punktes P dieser Ebene nach seinem Bildpunkt P' hin kennen.

Wie finden wir aber die Bildpunkte der anderen Punkte einer Ebene?

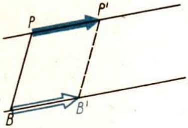
Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall:

Es handelt sich um einen Punkt B, der auf der Geraden PP' liegt.

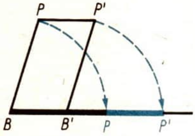
B 2

Wir tragen $\overline{PP'}$ an BP in B an, und zwar so, daß der Pfeil $\overrightarrow{BB'}$ in die gleiche Richtung zeigt wie $\overrightarrow{PP'}$ (Bild B 2).



B 3

Zweiter Fall:
Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden PP'.
Dann ziehen wir durch B die Parallele zu $\overline{PP'}$ und tragen $\overline{PP'}$ auf dieser Geraden von B aus ab, und zwar so, daß der Pfeil $\overrightarrow{BB'}$ in die gleiche Richtung zeigt wie $\overrightarrow{PP'}$ (Bild B 3). Das Viereck $BB'P'P$ muß also ein Parallelogramm bilden.
Im ersten Fall kann man von einem entarteten Parallelogramm sprechen (Bild B 4).
Beim Zusammenklappen fällt $\overline{PP'}$ auf die Gerade BB'.



B 4

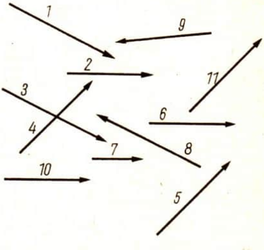
2 Wir haben also mit den beiden Fällen im Abschnitt 1 eine eindeutige Konstruktionsvorschrift kennengelernt. Zu jedem Punkt können wir einen, aber auch nur einen Bildpunkt finden. Zusammenfassend können wir sagen:
Alle Pfeile, die zur gleichen Verschiebung gehören, haben die gleiche Länge und die gleiche Richtung. Durch Angabe eines Pfeils ist eine Verschiebung festgelegt.

1 **DEFINITION: Pfeile, die sowohl in ihrer Länge als auch in ihrer Richtung übereinstimmen, heißen kongruent.**

Die Pfeile im Bild B 3 sind z. B. kongruent:
$\overrightarrow{PP'} \cong \overrightarrow{BB'}$.

2 **GRUNDSATZ: Sind zwei Pfeile kongruent zu einem dritten, so sind sie untereinander kongruent.**

(1) Welche Pfeile im Bild B 5 sind zu welchen Pfeilen kongruent?



B 5

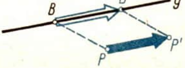
3 Wir werden nun einige Sätze über Verschiebungen in der Ebene kennenlernen.

3 **SATZ: Eine Gerade wird durch eine Verschiebung auf sich selbst oder auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet.**

Beweis:

Erster Fall:

Die Gerade g ist parallel zu dem Pfeil $\overrightarrow{PP'}$, der die Verschiebung darstellt.

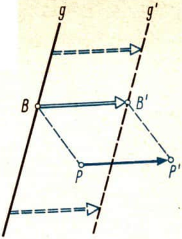


B 6

Dann liegen die Bildpunkte B' eines jeden Punktes B von g wieder auf der Geraden g (Bild B 6).

Zweiter Fall:

Die Gerade g ist nicht parallel zu dem Pfeil $\overrightarrow{PP'}$, der die Verschiebung darstellt. Dann liegen die Bildpunkte B' eines jeden Punktes B von g auf einer Geraden g', die zu g parallel verläuft und die bei Verschiebung der Geraden g um die Entfernung $\overline{PP'}$ in der vom Pfeil angedeuteten Richtung erreicht wird. Das Bild B 7 deutet den Vorgang für das Punktepaar BB' an. Die Spitzen aller Pfeile, die von g ausgehen und die gleiche Richtung und Länge wie $\overrightarrow{BB'}$ haben, liegen auf der zu g parallelen Geraden g'.



B 7

B

4

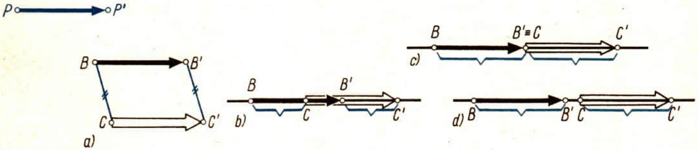
SATZ: Die Bildpunkte B' und C' haben den gleichen Abstand voneinander wie die Punkte C und B.

Beweis (Bild B 8):

Erster Fall:

Der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP'}$ ist nicht parallel zu $\overline{BC'}$ (Bild B 8 a).

Wir zeichnen die zu $\overrightarrow{PP'}$ kongruenten Pfeile mit B und C als Anfangspunkte. Dann sind C, C', B', B die Eckpunkte eines Parallelogramms. Also gilt: $\overline{BC} = \overline{B'C'}$



B 8

Zweiter Fall:

Es gilt: $PP' \parallel BC'$.

Liegt ein Endpunkt des einen Pfeils auf dem anderen Pfeil, liegt z. B. C auf $\overline{BB'}$, dann gilt folgende Überlegung (Bild B 8b):

Die Strecke $\overline{BB'}$ setzt sich aus $\overline{BC}$ und $\overline{CB'}$ zusammen und die Strecke $\overline{CC'}$ aus $\overline{CB'}$ und $\overline{B'C'}$.

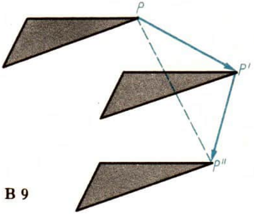
Da $\overline{BB'} = \overline{CC'}$ und $\overline{CB'} = \overline{CB'}$, müssen auch die anderen Teilstrecken kongruent sein.

Fällt der Endpunkt eines Pfeils auf den Anfangspunkt des zweiten (Bild B 8c), so gilt: $\overline{BB'} = \overline{BC} = \overline{CC'} = \overline{B'C'}$.

Haben die Strecken $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ keinen gemeinsamen Punkt, so setzt sich der Abstand $\overline{BC}$ aus den Strecken $\overline{BB'}$ und $\overline{B'C}$ zusammen. Der Abstand $\overline{B'C'}$ setzt sich entsprechend aus $\overline{CC'}$ und $\overline{B'C}$ zusammen. Beide Abstände setzen sich also aus gleich langen Teilstrecken zusammen.

B

Verschiebt man einen Punkt P zweimal durch $\overrightarrow{PP'}$ und $\overrightarrow{P'P''}$, so erhält man die gleichen Bildpunkte durch die Verschiebung, welche durch $\overrightarrow{PP''}$ dargestellt wird (Bild B 9).



B 9

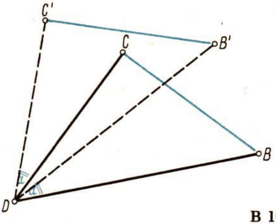
5 **SATZ: Die Hintereinanderausführung zweier Verschiebungen ist wieder eine Verschiebung.**

4 Drehungen in der Ebene

Drehungen sind Bewegungen, bei denen ein Punkt festbleibt. (Zeiger einer Uhr, Zahnräder einer Maschine.)

Durch eine Drehung wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt zugeordnet.

1 Ein Punkt B soll um den festen Punkt D über einen vorgegebenen Winkel α gedreht werden (Bild B 10).



B 10

Wir tragen an $\overrightarrow{DB}$ in D den Winkel α an. Dann tragen wir auf dem freien Schenkel von D aus $\overline{DB}$ ab. Der Endpunkt dieser Strecke ist der gesuchte Bildpunkt B'.

6 **SATZ: Zwei Punkte B und C haben den gleichen Abstand voneinander wie ihre Bildpunkte B' und C'.**

Beweis (Bild B 10):

Wir verbinden B und C mit D und konstruieren B' und C'.

Es gilt nun nach Konstruktionsvorschrift für die Bildpunkte:

$\overline{DB} = \overline{DB'}$; $\overline{DC} = \overline{DC'}$; $\sphericalangle\, BDC = \sphericalangle\, B'DC'$.

Also gilt (sws): $\triangle DBC = \triangle DB'C'$ und damit $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

7 **DEFINITION: Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen mit dem gleichen Drehpunkt ist wieder eine Drehung.**

5 Erweiterung des Winkelbegriffes

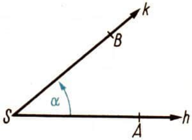
Bei Drehungen unterscheiden wir die positive und die negative Drehrichtung. Die Richtung, die zur Drehrichtung der Uhrzeiger entgegengesetzt ist, nennt man in der Mathematik die **positive Drehrichtung.**

Wir können uns Winkel durch Drehung eines Strahls um seinen Anfangspunkt entstanden denken. Ist h der feste Strahl und k der gedrehte, so wollen wir den Drehwinkel $\sphericalangle\, hk$ nennen (Bild B 11).
Liegen zunächst beide Strahlen übereinander und wird nun der Strahl k in der positiven Richtung gedreht, so entstehen die in der folgenden Tabelle aufgeführten Winkel.

Spitzer Winkel	$0° < \alpha < 90°$
Rechter Winkel	$\alpha = 90°$
Stumpfer Winkel	$90° < \alpha < 180°$
Gestreckter Winkel	$\alpha = 180°$
Überstumpfer (erhabener) Winkel ..	$180° < \alpha < 360°$
Vollwinkel	$\alpha = 360°$

Zusammenfassend wollen wir feststellen:
Unter $\sphericalangle\, hk$ wollen wir den Teil des Raumes verstehen, der bei positiver Drehung von h bis zum Strahl k überstrichen wird (Bild B 11):

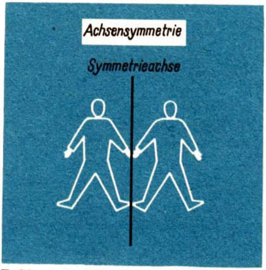
$$\alpha = \sphericalangle\, ASB = \sphericalangle\, hk.$$



B 11

6 Spiegelungen an einer Geraden

8 **DEFINITION: Bei Spiegelungen an einer Geraden liegen das Urbild (der Gegenstand) und das Bild symmetrisch zu einer Geraden. Diese Gerade heißt Symmetrieachse (Bild B 12).**

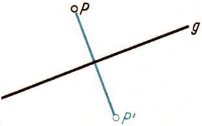


B 12

Spiegelungen sind auch Abbildungen.
Als Beispiel sei die Konstruktion des eindeutig bestimmten Bildpunktes P' zu einem Punkt P in bezug auf die Symmetrieachse g dargestellt.

2 Wir fällen das Lot von P auf g und verlängern das Lot um sich selbst. Der Endpunkt ist der Bildpunkt P', der bei der Spiegelung des Punktes P an der Geraden g entsteht (Bild B 13).

Werden Punkte der Geraden g an der Geraden g gespiegelt, so fallen sie mit ihren Bildpunkten zusammen.



B 13

2 Nenne symmetrische Figuren aus der Geometrie, und bestimme die Symme-

trieachsen! Bestimme das Bild einer Geraden, die parallel zu der Symmetrieachse liegt! Bestimme das Bild einer Geraden, die senkrecht auf der Symmetrieachse steht!

9 **SATZ: Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.**

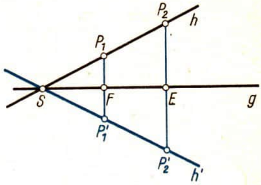
B

Beweis:

(1) Eine zur Symmetrieachse g senkrechte Gerade geht in sich selbst über.

(2) Eine zur Achse g parallele Gerade im Abstand a geht in eine Parallele im Abstand a von der Symmetrieachse über.

(3) Die Gerade h schneide die Symmetrieachse g in S (Bild B 14). Wir wählen einen beliebigen Punkt P_1 von h und bestimmen sein Bild P_1'. Das Lot von P_1 auf g habe den Fußpunkt F. Die Gerade SP_1' soll h' genannt werden.



B 14

Es gilt $\sphericalangle\, P_1SF = \sphericalangle\, FSP_1'$.

Wir fällen nun von einem beliebigen anderen Punkt P_2 von h das Lot auf g, wobei E der Fußpunkt sein soll, und verlängern es bis zum Schnitt mit h'.

Nennen wir den Schnittpunkt P_2'. Dann gilt: $\triangle\ P_2SE \cong \triangle\ SP_2'E$ (wsw).

Also muß gelten $\overline{P_2E} = \overline{P_2'E}$, d. h., P_2' muß das Bild von P_2 sein.

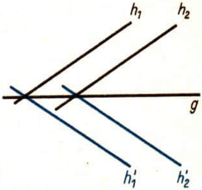
Daher liegt jeder Bildpunkt eines Punktes von h auf ein und derselben Geraden h'.

10 **SATZ: Parallele Geraden haben parallele Geraden als Bilder.**

Beweis:

Die Bilder zweier Geraden h_1 und h_2 sind nach dem Satz 9 wieder Geraden h_1' und h_2' (Bild B 15).

Würden sich h_1' und h_2' in einem Punkt P' schneiden, so wäre der Schnittpunkt das Bild von zwei verschiedenen Punkten. Das ist aber unmöglich, da voneinander verschiedene Punkte verschiedene Bilder haben.



B 15

7 Punktspiegelungen

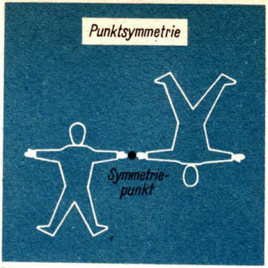
11 **DEFINITION: Eine Abbildung heißt Punktspiegelung, wenn die Bildpunkte auf folgende Weise gefunden werden: Der Punkt P wird mit dem festgewählten Spiegelungspunkt S verbunden und $\overline{PS}$ über S hinaus um sich selbst verlängert.**

Der Endpunkt P' der Verlängerung ist der Bildpunkt von P bei der Spiegelung in S (Bild B 16).

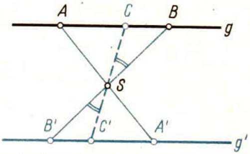
12 **SATZ: Das Bild einer Geraden g ist eine zu ihr parallele Gerade g'.**

Beweis:

Wir zeigen, daß das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist. Wir wählen zwei Punkte A und B von g und konstruieren ihre Bilder A' bzw. B'. Die Gerade $\overline{A'B'}$ nennen wir g' (Bild B 17).



B 16



B 17

Es gilt nun $\triangle\, ASB \cong \triangle\, B'A'S$ (sws) (nach Konstruktion).

Daher gilt: $\sphericalangle\, ABS = \sphericalangle\, SB'A'$.

Diese Winkel sind aber Wechselwinkel an den geschnittenen Geraden g und g', also muß gelten: $g \parallel g'$.

Ist C ein dritter Punkt von g, so verbinden wir ihn mit S und verlängern $\overline{CS}$ über S bis zum Schnitt mit g'. Den Schnittpunkt nennen wir C'.
Es gilt:

$\triangle\, B'C'S \cong \triangle\, SBC$ (wws),

da $\overline{BS} = \overline{B'S}$,

und
$\sphericalangle\, B'SC' = \sphericalangle\, BSC$ (Scheitelwinkel)
$\sphericalangle\, ABS = \sphericalangle\, SB'C'$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)

Es gilt also $\overline{CS} = \overline{SC'}$ und damit ist C' Bildpunkt von C. Der Bildpunkt eines beliebigen Punktes C der Geraden g liegt also auf $A'B'$.

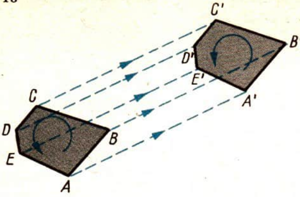
3 Zeige, daß die Bildpunkte B' und C' zweier Punkte B bzw. C den gleichen Abstand voneinander haben wie B und C!

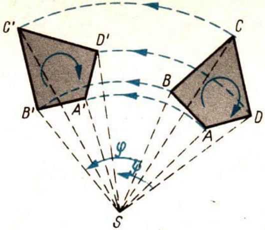
8 ZUSAMMENFASSUNG

Bei Verschiebungen, Drehungen, Geradenspiegelungen und Punktspiegelungen bleibt der Abstand zweier Punkte erhalten. Jede Strecke $\overline{AB}$ ist kongruent zu ihrer Bildstrecke $A'B'$.

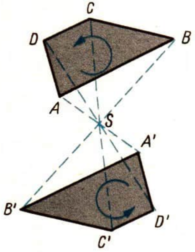
Verschiebungen, Drehungen und Punktspiegelungen lassen den Umlaufsinn in geschlossenen Figuren unverändert (Bild B 18 bis 20). Spiegelungen an Geraden ändern den Umlaufsinn in geschlossenen Figuren (Bild B 21). Man zählt sie nicht zu den Bewegungen in der Ebene.

B 18

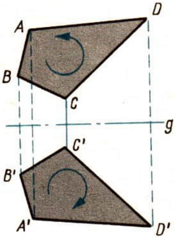




B 19



B 20



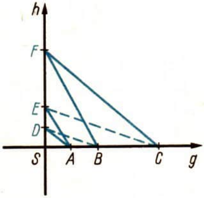
B 21

9 Erweiterung des Satzes von Pascal

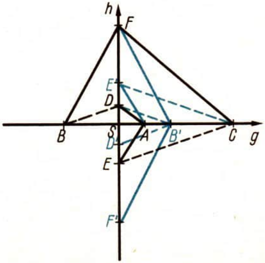
13 **Liegen A, B und C auf einer Geraden g und die Punkte D, E und F auf einer zu ihr senkrechten Geraden h, so folgt aus der Gültigkeit von $AD \parallel CF$ und $AE \parallel BF$ die Gültigkeit von $BD \parallel CE$.**

Beweis:

Liegen alle drei Punkte A, B und C auf einer Seite, etwa rechts von S, so müssen D, E und F auch auf einer Seite von S liegen (Bild B 22).
Liegt etwa D oberhalb von S, so muß wegen $AD \parallel CF$ auch F oberhalb von S liegen. Wegen $BF \parallel AE$ liegt dann auch E oberhalb von S.



B 22



B 23

Für diesen Fall ist der Satz schon in der siebenten Klasse bewiesen worden.

Liegt ein Punkt auf der einen (z. B. der linken) und die beiden anderen auf der anderen (der rechten) Seite von S, so müssen auch die Punkte auf der senkrechten Achse auf beiden Seiten des Punktes S verteilt liegen, da sonst nicht zwei Paare von Strecken parallel sein könnten. Zum Beispiel können zwei Punkte oberhalb und ein Punkt unterhalb von S liegen (Bild B 23). Spiegeln wir die Strecken im linken oberen Teil im Punkt S, so sind die Bilder parallel zu den Strecken.

Die Parallelen zu den gespiegelten Strecken müssen in dem rechten unteren Teil liegen.

Parallele Strecken gehen in parallele Strecken über, wenn wir sie an der Geraden g spiegeln. Spiegeln wir die unterhalb von g gelegenen Streckenpaare nach oben, so sind die Bilder dann, aber auch nur dann parallel, wenn es die ursprünglichen Streckenpaare waren.

Liegen z. B. der Punkt B auf der linken Seite von S und die Punkte A und C auf der rechten, so gilt $AD \parallel CF$ und $AE \parallel BF$.

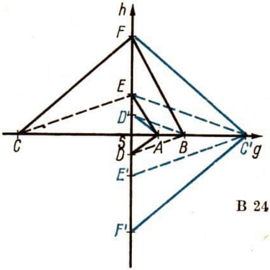
Daraus folgt $AE \parallel F'B'$ (Spiegelung in S) und daraus $AE' \parallel FB'$ (Spiegelung an g).

Nach dem speziellen Satz von Pascal, den wir in der siebenten Klasse kennengelernt haben, gilt dann: $B'D \parallel CE'$ und damit $B'D' \parallel CE$ (Spiegelung an g).
Daraus folgt $BD \parallel CE$ (Spiegelung in S).

Liegt B mit einem der anderen Punkte, etwa A, auf der rechten Seite von S und der andere Punkt (etwa C) auf der linken Seite, so verläuft der Beweis ganz ähnlich.

Es gilt (Bild B 24): $AD \parallel CF$ und $AE \parallel BF$. Also gilt: $AD \parallel C'F'$ (Spiegelung in S). Dann gilt noch: $AD' \parallel FC'$ (Spiegelung an g). Daraus folgt zusammen mit $AE \parallel BF : BD' \parallel C'E$. Nunmehr folgt: $BD \parallel C'E'$ (Spiegelung an g) und daraus (durch Spiegelung in S) $BD \parallel CE$.

Aufgaben B 1 bis 10



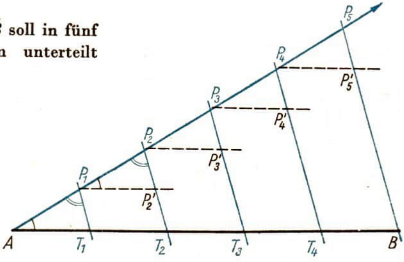
B 24

Kommensurable und inkommensurable Strecken

10 Teilung einer Strecke

Eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ soll in fünf gleich lange Teilstrecken unterteilt werden.

Konstruktion (Bild B 25):



B 25

Durch einen Endpunkt der Strecke $\overline{AB}$ legen wir einen Hilfsstrahl, der nicht auf $\overline{AB}$ liegt. Vom Endpunkt der Strecke (in diesem Fall ist es A) ausgehend, tragen wir nun eine beliebige Strecke fünfmal ab und erhalten die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5.

Dann verbinden wir P_5 mit B und zeichnen die Parallelen zu P_5B durch P_1, P_2, P_3 und P_4. Die Schnittpunkte T_1, T_2, T_3, T_4 mit $\overline{AB}$ sind die gesuchten Teilpunkte.

B

Beweis für die Längengleichheit der Teilstrecken:

Wir zeichnen die Parallelen zu AB durch P_1, P_2, P_3 und P_4.
Es gilt: $\triangle A\,T_1P_1 \cong \triangle P_1P_2'P_2 \cong \triangle P_2P_3'P_3 \cong \triangle P_3P_4'P_4 \cong \triangle P_4P_5'P_5$ (nach Kongruenzsatz wsw).

Dann gilt: $\overline{AT_1} = \overline{P_1P_2'} = \overline{P_2P_3'} = \overline{P_3P_4'} = \overline{P_4P_5'}$
(als gleichliegende Seiten in kongruenten Dreiecken).

Es gilt ferner: $\overline{P_1P_2'} = \overline{T_1T_2}$, $\overline{P_2P_3'} = \overline{T_2T_3}$, $\overline{P_3P_4'} = \overline{T_3T_4}$ und $\overline{P_4P_5'} = \overline{T_4B}$
(als gegenüberliegende Seiten in Parallelogrammen).

Dann gilt aber: $\overline{AT_1} = \overline{T_1T_2} = \overline{T_2T_3} = \overline{T_3T_4} = \overline{T_4B}$.

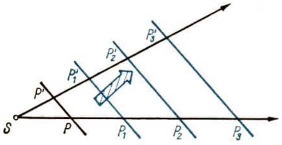
Aufgaben B 11 und 12

4 Beweise die Kongruenz der Dreiecke $A\,T_1P_1$ und $P_1P_2'P_2$ in Bild B 25!

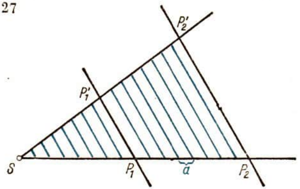
5 Teile eine gegebene Strecke in
a) drei gleich lange Teilstrecken, b) sieben gleich lange Teilstrecken!

6 Begründe die Konstruktion durch den Beweis für die Gleichheit der Längen der Teilstrecken! Beschreibe allgemein die Teilung einer Strecke in n gleich lange Teilstrecken (n ist eine natürliche Zahl größer als 1).

B 26



B 27



11 Wir betrachten nun zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen (Bild B 26). Eine Gerade g schneide die Strahlen in P bzw. P'. Wenn wir diese Gerade parallel zu sich selbst verschieben, so erhalten wir weitere Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, ... bzw. P_1', P_2', P_3' ...

Im Bild B 26 wurde die Verschiebung so vorgenommen, daß die Länge der Strecke $\overline{SP}$ auf dem einen Strahl verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht wird.

7 Untersuche, wie sich die Abstände $\overline{SP'}$, $\overline{SP_1'}$ usw. auf dem zweiten Strahl bei der beschriebenen Verschiebung der Geraden verändern!

Miß hierzu die folgenden Abstände und vergleiche die Verhältnisse!

$\overline{SP'} : \overline{SP_1'}$ und $\overline{SP} : \overline{SP_1}$	$\overline{SP_1'} : \overline{SP_1}$ und $\overline{SP_2'} : \overline{SP_2}$
$\overline{SP'} : \overline{SP}$ und $\overline{SP_2'} : \overline{SP_2}$	$\overline{SP_1'} : \overline{SP_1}$ und $\overline{SP_3'} : \overline{SP_3}$
$\overline{SP'} : \overline{SP}$ und $\overline{SP_3'} : \overline{SP_3}$	$\overline{SP_2'} : \overline{SP_2}$ und $\overline{SP_3'} : \overline{SP_3}$

B

12 Wir wollen versuchen, den folgenden Satz zu beweisen:

Werden zwei von S ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten (Bild B 27), so verhalten sich die Strecken $\overline{SP_1}$ und $\overline{SP_2}$ *wie* die Strecken $\overline{SP_1'}$ und $\overline{SP_2'}$ auf dem zweiten Strahl: $\overline{SP_1} : \overline{SP_2} = \overline{SP_1'} : \overline{SP_2'}$.

Wir setzen voraus, daß $\overline{SP_1}$ und $\overline{SP_2}$ die gemeinsame Maßstrecke a haben. Diese tragen wir, von S ausgehend, so oft ab, bis wir P_2 als Endpunkt erreichen. Erreichen wir P_1 nach n_1-maligem, P_2 nach n_2-maligem Abtragen, so verhält sich die Länge von $\overline{SP_1}$ zu der Länge von $\overline{SP_2}$ wie n_1 zu n_2. Ziehen wir die Parallelen zu $\overline{P_1P_1'}$ durch die Teilpunkte, so wird $\overline{SP_2'}$ in n_2 kongruente Teilstrecken geteilt, von denen n_1 Teilstrecken die Strecke $\overline{SP_1'}$ ergeben. $\overline{SP_1'}$ verhält sich also zu $\overline{SP_2'}$ auch wie n_1 zu n_2.

Wir haben bei dieser Überlegung aber vorausgesetzt, daß wir eine Maßtrecke haben, die auf beiden Strecken, $\overline{SP_1}$ und $\overline{SP_2}$, ohne Rest abgetragen werden kann. Wir müssen also den Satz einschränken und in der folgenden Weise formulieren:

14 **Werden zwei von S ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten (Bild B 27) und haben die beiden Abschnitte $\overline{SP_1}$ und $\overline{SP_2}$ ein gemeinsames Maß m, so verhalten sich die Strecken $\overline{SP_1}$ und $\overline{SP_2}$ wie die Strecken $\overline{SP_1'}$ und $\overline{SP_2'}$ auf dem zweiten Strahl.**

$$\overline{SP_1} : \overline{SP_2} = \overline{SP_1'} : \overline{SP_2'}$$

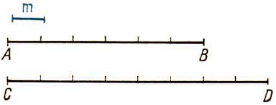
Wir wollen aber den ursprünglichen Satz in voller Allgemeinheit beweisen. Dazu ist es notwendig, daß wir uns genauer mit dem gemeinsamen Maß von Strecken befassen.

Aufgabe B 13

13 Das gemeinsame Maß zweier Strecken

Das Bild B 28 enthält zwei Strecken, $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, sowie eine Einheitsstrecke m. Diese Einheitsstrecke m ist ein gemeinsames Maß für die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Auf $\overline{AB}$ kann man m sechsmal, auf $\overline{CD}$ kann man m achtmal antragen.

B 28



15 **DEFINITION: Eine Strecke m heißt gemeinsames Maß zweier Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, wenn man sie auf $\overline{AB}$ und auch auf $\overline{CD}$ so hintereinander antragen kann, daß bei beiden Strecken kein Rest bleibt.**

Als Maßstrecken verwendet man in der Technik Strecken mit der Länge 1 m bzw. 1 dm, 1 cm oder 1 mm. In der Physik verwendet man noch kleinere Maßstrecken. Diese Maßstrecken nennt man Maßeinheiten für Längenmessungen.

B

16 **DEFINITION: Haben zwei Strecken ein gemeinsames Maß, so nennt man sie kommensurabel oder maßverwandt.**

Haben zwei Strecken kein gemeinsames Maß, so nennt man sie inkommensurabel oder maßfremd.

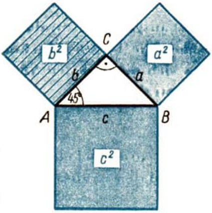
3 Wenn wir beispielsweise den Auftrag erhalten, ein Rechteck mit der Länge 5,4 cm und der Breite 3,1 cm zu zeichnen, so sind Länge und Breite kommensurabel. Ihr gemeinsames Maß ist zwar nicht 1 cm; denn das ist in beiden Strecken nicht ohne Rest enthalten. Aber die Maßstrecke 1 mm ist in der Länge *genau* 54mal und in der Breite *genau* 31mal enthalten. Es bleibt kein Rest.

8 Gegeben sind **a)** zwei Strecken a (5 cm) und b (53 mm), **b)** drei Strecken a (36 mm), b (42 mm) und c (30 mm). Bestimme jeweils die Länge der größten gemeinsamen Maßstrecke!

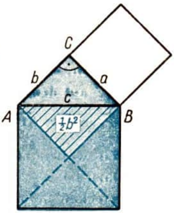
14 Für ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = b$ und der Hypotenuse c kann man leicht beweisen, daß die Gleichung gilt

$a^2 + b^2 = c^2$.

Im Bild B 29 wurden die Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks jeweils nach außen errichtet. Wenn wir aber das Quadrat über der Seite b nach innen einzeichnen (Bild B 30), so sehen wir, daß es die ganze Fläche des Dreiecks und



B 29



B 30

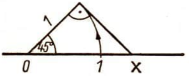
noch einen Teil von c^2 überdeckt. Da $\overline{AB}$ Diagonale in b^2 ist und die Diagonale im Quadrat die Fläche halbiert, ragt genau die Hälfte von b^2 in das Quadrat über der Hypotenuse hinein.

9 **a)** Der wievielte Teil von c^2 ist gleich der Hälfte von b^2?

b) Führe den Beweis aus Abschnitt 14 zu Ende!

15 Wir wollen nun ein Streckenpaar finden, bei dem die beiden Strecken inkommensurabel sind, d. h., es soll keine Maßstrecke geben, die auf beiden Strecken ganzzahlig abgetragen werden kann.

Wir errichten über einer Zahlengeraden ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Länge 1 haben. Die Länge der Einheitsstrecke e, dieser Zahlengeraden, soll also auch die Länge jeder Kathete sein (Bild B 31). Der Punkt A dieses Dreiecks falle mit dem Nullpunkt zusammen. Wir können



B 31

nun zeigen, daß dem Endpunkt der Strecke x, die die Hypotenuse in diesem Dreieck bildet, keine rationale Zahl entspricht. Das ist gleichbedeutend damit, daß die Strecken e und x inkommensurabel sind.

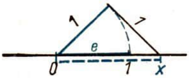
Beweis:

Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Zahl, die dem Endpunkt der Strecke x entspricht. Da sich jede rationale Zahl als Bruch $\frac{u}{v}$, in dem u und v ganze Zahlen mit $v \neq 0$ sind, darstellen läßt, setzen wir also einen Bruch voraus, der gleich x ist. Dann können wir den Bruch so lange kürzen, bis der Zähler u und der Nenner v teilerfremde natürliche Zahlen sind.

Wenden wir die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, die für jedes Dreieck mit $a = b$ und $\gamma = 90°$ gilt, auf das Dreieck in Bild B 32 an, so können wir schreiben:

$1^2 + 1^2 = \left(\frac{u}{v}\right)^2$; denn die Katheten haben beide die Länge 1 und die Hypotenuse x soll gleich dem Bruch $\frac{u}{v}$ sein. Wir vereinfachen die Gleichung:

$$1 + 1 = \frac{u^2}{v^2}$$
$$2 = \frac{u^2}{v^2}$$
$$u^2 = 2v^2.$$



B 32

Aus dieser Gleichung geht hervor:

u^2 ist eine gerade Zahl; denn sie ist das Doppelte einer anderen natürlichen Zahl (v^2).

u ist dann aber auch eine gerade Zahl; denn nur gerade Zahlen ergeben, mit sich selbst multipliziert, eine gerade Zahl.

Damit ist u^2 durch 4 teilbar. Das geht nur, wenn auch v^2 durch 2 teilbar ist. In diesem Fall wäre aber auch v eine gerade Zahl.

Das bedeutet, u und v sind beide gerade Zahlen, d. h., sie müssen beide den gemeinsamen Teiler 2 haben.

Das steht im Widerspruch zu unserer Annahme, daß $\frac{u}{v}$ ein gekürzter Bruch ist.

Unsere Annahme, daß der Strecke x eine rationale Zahl der Geraden zugeordnet ist, stimmt also nicht.

Daraus geht auch hervor, daß die Strecken e und x inkommensurabel sind. Würde es nämlich eine gemeinsame Maßstrecke m für e und x geben, so würde gelten:

$x = n_1 \cdot m$ und $e = n_2 \cdot m$, wobei n_1 und n_2 natürliche Zahlen sind.

Die gemeinsame Maßstrecke m hätte die Länge $\frac{1}{n_2}$; denn die Einheitsstrecke e hat die Länge 1: $e = n_2 \cdot \frac{1}{n_2} = 1$.

Setzen wir in die erste Gleichung $m = \frac{1}{n_2}$ ein, so erhalten wir:

$x = n_1 \cdot \frac{1}{n_2} = \frac{n_1}{n_2}$, also eine rationale Zahl.

Das ist jedoch unmöglich, weil der Strecke x keine rationale Zahl entspricht.

17 **SATZ: Es gibt Punkte auf der Zahlengeraden, denen keine rationalen Zahlen entsprechen. Umgekehrt entspricht aber jeder rationalen Zahl ein Punkt auf der Zahlengeraden.**

B

16 Wir werden die Punkte der Zahlengeraden, denen rationale Zahlen zugeordnet sind, **rationale Punkte** nennen und die Punkte, denen keine rationalen Zahlen zugeordnet werden können, **irrationale Punkte.** Die rationalen Punkte und die irrationalen Punkte füllen die Zahlengerade lückenlos aus. Ein beliebiger Punkt der Zahlengeraden ist also entweder ein rationaler oder ein irrationaler Punkt.

18 **Eine Gerade ist lückenlos mit Punkten besetzt.**
Eine Gerade, auf der man einen Nullpunkt 0 und eine Einheitsstrecke e festgelegt hat, besteht aus rationalen und irrationalen Punkten.

Erweiterung des Bereichs der rationalen Zahlen

17 Den rationalen Punkten der Zahlengeraden sind die rationalen Zahlen zugeordnet. Wir wollen nun versuchen, auch den irrationalen Punkten Zahlen zuzuordnen. Hierzu müssen wir unseren Zahlenbereich wieder erweitern.
Wir nehmen also an, daß es Zahlen gibt, die wir den irrationalen Punkten zuordnen können. Wir nennen sie **irrationale Zahlen.**

4 Die Bilder B 31 und B 32 veranschaulichen die Konstruktion des Punktes X, dem diejenige Zahl x zugeordnet werden kann, deren Quadrat 2 ist.
Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck hat Katheten mit der Länge 1. Folglich führt die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ auf

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 &= c^2 \\ 2 &= c^2. \end{aligned}$$

Das Quadrat der Hypotenuse c, die in diesem Fall die gesuchte irrationale Zahl darstellt, ist gleich 2.

10 Konstruiere den Punkt auf der Zahlengeraden, dem eine Zahl x zugeordnet werden kann, deren Quadrat gleich 8 ist!

18 Für den Endpunkt der Strecke x in den Bildern B 31 und B 32 können wir zwar keine rationale Zahl finden, die diesem Punkt zugeordnet ist, wir können aber rationale Zahlen benutzen, um einen Näherungswert anzugeben.
Wir suchen hierzu rationale Zahlen, die rationalen Punkten in der unmittelbaren Nachbarschaft des irrationalen Punktes zugeordnet sind. Dabei gehen wir schrittweise immer näher an den irrationalen Punkt heran, wir schachteln

ihn ein. (Wir nehmen dabei stets an, daß es überhaupt möglich ist, diesem irrationalen Punkt eine Zahl zuzuordnen.)

5 Gesucht wird eine Näherung für die Zahl x, deren Quadrat 2 ist. $x^2 = 2$

a) Da $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$, liegt die Zahl x zwischen 1 und 2. Wir müssen nun den Bereich zwischen 1^2 und 2^2 untersuchen.

$1{,}1^2$	$1{,}2^2$	$1{,}3^2$	$1{,}4^2$	x^2	$1{,}5^2$	$1{,}6^2$	$1{,}7^2$	$1{,}8^2$	$1{,}9^2$
1,21	1,44	1,69	1,96	2	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61

b) Da $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$, liegt die Zahl x zwischen 1,4 und 1,5.

Auf diese Weise wird die Annäherung schrittweise genauer.

Wegen	folgt
$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$	$1 < x < 2$
$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25$	$1{,}4 < x < 1{,}5$
$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 1{,}42^2 = 2{,}0164$	$1{,}41 < x < 1{,}42$
$1{,}414^2 = 1{,}999\,396 < 2 < 1{,}415^2 = 2{,}002\,225$	$1{,}414 < x < 1{,}415$
$\vdots$	$\vdots$

Diese Annäherung kann man beliebig weit fortsetzen. Wir können uns also der Zahl, die einem irrationalen Punkt zugeordnet werden kann, mit beliebiger Genauigkeit durch rationale Zahlen nähern.

19 Als Länge der Strecke x betrachten wir nun die unendliche Dezimalzahl 1,414 ... Unendliche Dezimalzahlen weisen nach dem Komma unbegrenzt viele Stellen auf.

Formal können wir alle Dezimalzahlen als unendliche Dezimalzahlen auffassen, indem wir beliebig viele Nullen folgen lassen.

Danach ist z. B.: $1{,}2 = 1{,}200\,000\ldots = 1{,}2\overline{0}$.

Unendliche Dezimalzahlen erhalten wir auch, wenn wir $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{7}$ als Dezimalzahlen darstellen.

Wir erhalten: $\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\ldots = 0{,}\overline{3}$

und $\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\,142\,857\ldots = 0{,}\overline{142\,857}$.

Zur Verkürzung der Schreibweise solcher unendlichen Dezimalzahlen, in denen sich eine Ziffer oder eine Zifferngruppe ständig wiederholt, setzt man einen Strich über diese Ziffer bzw. Zifferngruppe. Im Bruch $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ nennt man die Ziffer 3, im Bruch $\frac{1}{7}$ die Zifferngruppe 142 857 die Periode.

Die irrationalen Dezimalzahlen bestehen aber nicht aus Zifferngruppen, die sich ständig wiederholen, sie sind nichtperiodisch. Bei einer weiteren Untersuchung der Zahl x im Abschnitt B 18 würde man niemals auf eine Periode stoßen.

B

19 **DEFINITION: Irrationale Zahlen sind unendliche nichtperiodische Dezimalzahlen.**

Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen den Bereich der reellen Zahlen.

GRUNDSATZ: Jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht eine reelle Zahl, und jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt auf der Zahlengeraden.

Aufgaben B 14 bis 18

20 Auch die Zahl π ist eine irrationale Zahl.

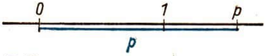
In der Praxis rechnet man stets nur mit genügend genauen rationalen Näherungswerten. Dabei ist es von Fall zu Fall verschieden, wieviel Stellen nach dem Komma man zweckmäßigerweise berücksichtigt.

11 Schreibe **a)** $\frac{31}{7}$, **b)** $\frac{19}{8}$, **c)** $\frac{1}{99}$ als Dezimalbruch, und bestimme die Periode!

12 Bestimme bis auf 5 Stellen genau die Dezimalbruchentwicklung für die reelle Zahl r, deren Quadrat **a)** gleich 3, **b)** gleich 5 ist!

Geometrische Veranschaulichung des Rechnens mit reellen Zahlen

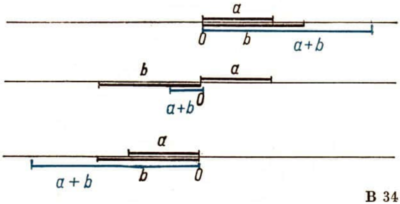
21 Die reellen Zahlen können wir uns veranschaulicht denken als Punkte auf der Zahlengeraden oder als Strecken auf der Zahlengeraden, wobei die Strecken jeweils bei 0 beginnen (Bild B 33).



B 33

Der *Addition* zweier reeller Zahlen entspricht das Hintereinanderantragen (Bild B 34).

Die zweite Strecke (b) wird dabei so längs der Zahlengeraden verschoben, daß der bei 0 liegende Anfangspunkt auf den Endpunkt der ersten Strecke (a) fällt.

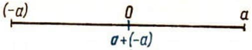


B 34

Die Summe der zu a und b gehörenden reellen Zahlen ist dann die reelle Zahl, die zu der zwischen dem Nullpunkt und dem Endpunkt von b gelegenen Strecke gehört.

Spiegeln wir eine Strecke a am Nullpunkt, so erhalten wir eine Strecke $(-a)$. Die Summe der zu diesen beiden Strecken gehörenden reellen Zahlen ist stets gleich Null (Bild B 35). Für alle von $(-a)$ verschiedenen Strecken b gilt

$a + b \neq 0.$



B 35

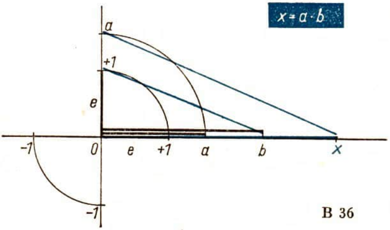
Die *Differenz* $a - b$ erhält man durch Addition von a und $(-b)$:

$a - b = a + (-b).$

Um das *Produkt* $a \cdot b$ der zu den Strecken a und b der Zahlengeraden gehörenden reellen Zahlen zu bilden, zeichnen wir durch den Nullpunkt eine senkrechte Hilfsgerade.

Drehen wir die Zahlengerade um 90° in positiver Richtung, so überträgt sich die Skale der Zahlengeraden auf die Hilfsgerade.

Wir verbinden nun den Punkt $+1$ auf der Hilfsgeraden mit dem Endpunkt von b und zeichnen zu dieser Strecke eine Parallele durch den Endpunkt von a auf der Hilfsgeraden. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Zahlengeraden ist der Endpunkt einer Strecke x (Bild B 36).



B 36

Wären nun e und a kommensurable Strecken, so würde nach Satz B 14 gelten:

$a : 1 = x : b.$

Würde man von dieser Proportion die Produktgleichung bilden, erhielte man

$1 \cdot x = a \cdot b.$

Damit wäre die zu der so konstruierten Strecke gehörende reelle Zahl das Produkt $a \cdot b$. Wir formulieren daher allgemein, d. h. unabhängig davon, ob a und e kommensurabel sind.

20 **DEFINITION: Das Produkt $a \cdot b$ der zu den Strecken a und b gehörenden reellen Zahlen ist wieder eine reelle Zahl. Sie ist einer Strecke zugeordnet, die man folgendermaßen konstruiert:**
Man verbindet den Endpunkt der Strecke b mit dem Endpunkt der Einheitsstrecke auf der Hilfsgeraden und zieht hierzu eine Parallele durch den Endpunkt der Strecke a auf der Hilfsgeraden.
Der Schnittpunkt mit der Zahlengeraden ist der Endpunkt der Strecke, der das Produkt zugeordnet ist.

Die Rechengesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen

22 Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten die gleichen Rechengesetze, die wir schon vom Rechnen mit den rationalen Zahlen her kennen.

Kommutationsgesetz der Addition	$a + b = b + a$
Assoziationsgesetz der Addition	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Kommutationsgesetz der Multiplikation	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziationsgesetz der Multiplikation	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributionsgesetz	$(a + b)\,c = a \cdot c + b \cdot c$

Auf die Beweise dieser Rechengesetze müssen wir an dieser Stelle verzichten.

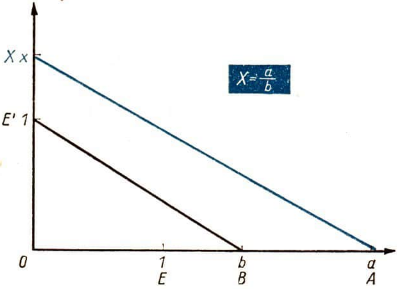
B

23 Die geometrische *Division* von reellen Zahlen führt auf folgende Fragestellung: Gegeben sind zwei Strecken a und b. Gesucht ist eine Strecke x mit $x \cdot b = a$.

Wir konstruieren diese Strecke x auf folgende Weise (Bild B 37): Wir verbinden den Endpunkt B der Strecke b auf der Zahlengeraden mit dem Endpunkt E' der Einheitsstrecke auf der Hilfsgeraden. Zu dieser Verbindungsstrecke ziehen wir durch den Endpunkt A der Strecke a auf der Zahlengeraden eine Parallele. Der Schnittpunkt X dieser Parallelen mit der Hilfsgeraden sei der Endpunkt der bei 0 beginnenden Strecke x.

Für diese Strecke x gilt $x \cdot b = a$ nach der Erklärung der geometrischen Multiplikation von reellen Zahlen. Es gibt also zu je zwei reellen Zahlen a und b den Quotienten $\frac{a}{b}$.

B 37

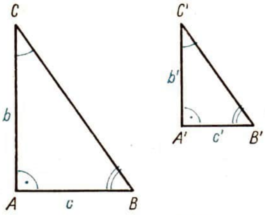


24 Als geometrische Anwendung des Rechnens mit Strecken beweisen wir nun den folgenden Satz:

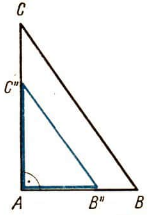
21

SATZ: Sind zwei rechtwinklige Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, die in allen Winkeln übereinstimmen, so sind die Verhältnisse der Längen gleichliegender Katheten gleich. Für die Dreiecke im Bild B 38 gilt danach:

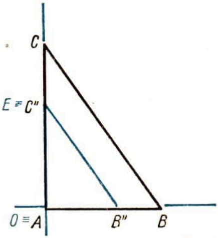
$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$



B 38



B 39



B 40

Beweis:

Wir verschieben das Dreieck $A'B'C'$, so daß die rechten Winkel aufeinanderfallen (Bild B 39). Es gilt dann $CB \parallel C'B'$, da die Stufenwinkel $\sphericalangle\ AB'C'$ und $\sphericalangle\ ABC$ nach der Voraussetzung gleich sind.

Wir fassen nun AB als Zahlengerade und AC als zugehörige Hilfsgerade auf. $\overline{AC''}$ soll die Einheitsstrecke, A der Nullpunkt sein (Bild B 40).

Dann gilt nach der Erklärung der geometrischen Multiplikation: $\overline{OB''} \cdot \overline{OC} = \overline{OB}$; denn $\overline{OC''}$ wurde als Einheitsstrecke, also als 1 angenommen.
Dies kann man als Produktgleichung der folgenden Proportion auffassen:

$\overline{OB} : \overline{OB''} = \overline{OC} : \overline{OC''}$.

Da nun

$\overline{OB} \cong \overline{AB} = c,\ \ \overline{OC} \cong \overline{AC} = b,\ \ \overline{OB''} \cong \overline{A'B'} = c'$ und $\overline{OC''} \cong \overline{A'C'} = b'$

gilt, folgt daraus $a : a' = b : b'$.

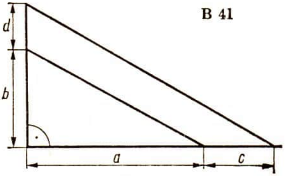
13 Im Bild B 41 seien a, b, c und d gegebene Strecken.

Beweise geometrisch, daß aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ die Gleichung $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ folgt!

14 Leite auf arithmetischem Wege aus der Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ die folgenden Proportionen her:

(1) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ und (2) $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$!

Die Gleichungen (1) und (2) heißen auch Formeln für die *korrespondierende Addition* bzw. *korrespondierende Subtraktion.*



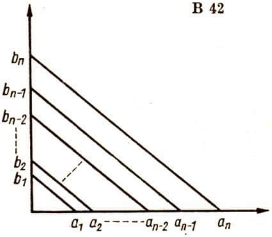
B 41

25 Fortlaufende Proportionen

Statt der Proportionen

$$\begin{aligned} a_1 : b_1 &= a_2 : b_2 \\ a_2 : b_2 &= a_3 : b_3 \\ a_3 : b_3 &= a_4 : b_4 \\ &\vdots \\ a_{n-2} : b_{n-2} &= a_{n-1} : b_{n-1} \\ a_{n-1} : b_{n-1} &= a_n : b_n \end{aligned}$$

schreibt man auch kürzer:



B 42

$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_{n-2} : a_{n-1} : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_{n-2} : b_{n-1} : b_n$ (Bild B 42).
Man nennt diese Gleichung **fortlaufende Proportion.**

Sie wird gelesen: Es verhält sich

a_1 zu a_2 zu a_3 ... zu a_{n-2} zu a_{n-1} zu a_n wie

b_1 zu b_2 zu b_3 ... zu b_{n-2} zu b_{n-1} zu b_n.

Man kann diese fortlaufende Proportion auch in der folgenden Form schreiben:

$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_{n-1} : b_{n-1} = a_n : b_n$.

B

15 **a)** Zerlege die fortlaufende Proportion $a : b : c : d = u : v : x : y$ in einfache Proportionen!

b) Welche einfachen Proportionen lassen sich aus der folgenden fortlaufenden Proportion bilden: $a : u = b : v = c : x = d : y$?

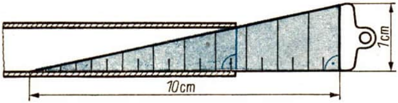
Aufgabe B 19

26 Anwendungen

Der Aufbau einiger Meßgeräte beruht auf der Anwendung des Satzes B 21.

(1) Der **Meßkeil** (Bild B 43) wird zur Messung kleiner Abstände, z. B. des lichten (inneren) Durchmessers von Röhren, verwendet. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke, die in allen Winkeln übereinstimmen, wurden besonders hervorgehoben.

B 43

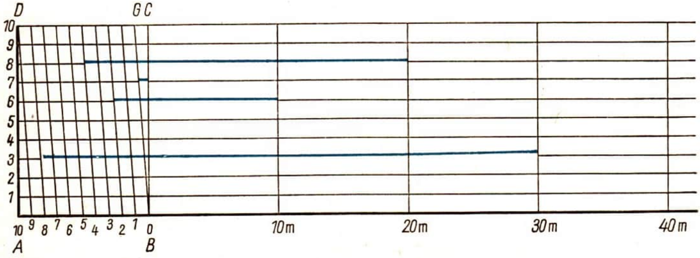


16 **a)** Wie groß ist der lichte Durchmesser der Glasröhre im Bild B 43?

b) Welche Ablesegenauigkeit ist mit dem Meßkeil erreichbar?

(2) Der **Proportionalmaßstab** oder **Transversalmaßstab** ist ein Gerät zur Messung von Strecken, die mit dem Stechzirkel in Zeichnungen oder Geländekarten abgegriffen werden (Bild B 44). Der Kopf des Maßstabes (auf der

B 44



linken Seite) ist ein Rechteck $ABCD$, dessen Länge 10 Einheiten umfaßt und dessen Höhe beliebig lang und in 10 gleiche Teile geteilt ist. Durch die Teilpunkte der Höhe $\overline{AD}$ sind horizontale Parallelen gezogen. Durch Verbindung der Teilpunkte von $\overline{AB}$ mit den um eine Einheit nach links verschobenen Teilpunkten von $\overline{CD}$ erhält man die schrägen Parallelen oder *Transversalen*, nach denen der Maßstab bezeichnet wird. Die Parallelen zur Grundseite $\overline{AB}$ sind von unten nach oben mit 1, 2, ..., 10, die Transversalen von B aus beginnend nach links mit 0, 1, 2, ..., 9 beziffert.

B

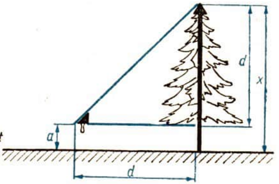
17 **a)** In welchem Maßstab steht der Transversalmaßstab, und wie lang ist das im Dreieck BCG des Bildes B 44 liegende Stück der 7. Horizontalparallelen?

b) In welchem Zusammenhang steht die Bezifferung an den horizontalen Parallelen mit der Länge ihrer Abschnitte im Dreieck BCG?

c) Wie lang sind die eingetragenen Strecken in Wirklichkeit?

(3) Das **Försterdreieck** (Bild B 45) ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, das man zu einer schnellen, näherungsweisen Bestimmung der Höhe von Bäumen, Masten, Türmen usw. benutzt (Bild B 46).

B 45, 46



18 **a)** Die Höhenbestimmung wird auf die Messung einer zugänglichen Größe zurückgeführt. Welche Größe muß gemessen werden?

b) Welchen Zweck hat das an einer Kathete herabhängende Lot?

Ähnlichkeit

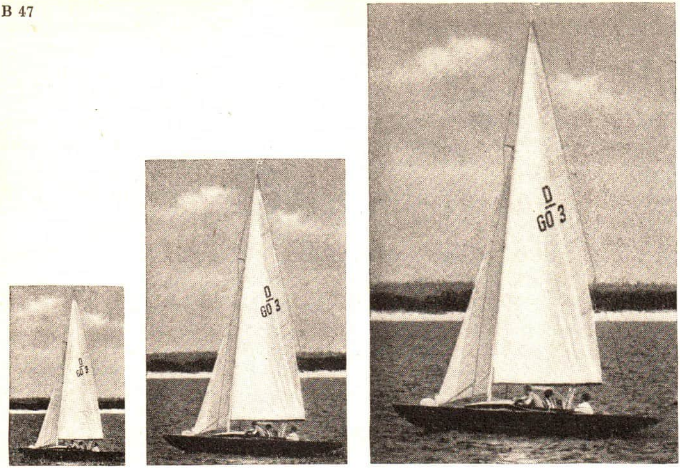
27 Beim Fotografieren und anschließenden Kopieren können wir Bilder erhalten, die mit dem Aufnahmeobjekt in den Größenverhältnissen der einzelnen Maße übereinstimmen.

Genauso verhält es sich mit verschieden großen Fotoabzügen, die mit Hilfe eines Vergrößerungsapparates von einem Negativ angefertigt wurden. Das Segelboot auf dem Bild B 47 hat auf allen Abzügen die gleiche Form. Wählen wir zwei Bilder heraus und bilden die Verhältnisse jeweils aus den Höhen der Masten, aus den Längen der Bootskörper oder aus anderen entsprechenden Maßen, so sind diese Verhältnisse stets gleich. Außerdem stimmen alle einander entsprechenden Winkel überein. In einem solchen Fall spricht man von **Ähnlichkeit.**

Für Dreiecke können wir nach dieser Vorbetrachtung folgendes definieren:

22 **Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie in den Winkeln übereinstimmen und wenn die Verhältnisse aus entsprechenden Seiten stets gleich sind.**

B 47



B

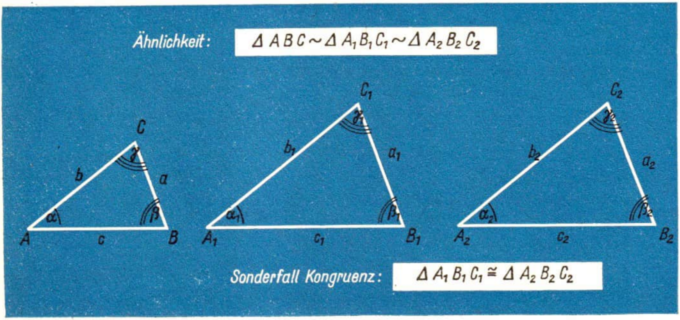
28 Die Seiten der Dreiecke sind proportional zueinander. Man wählt das gleiche Kurzzeichen und schreibt:

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Ist das Verhältnis einander entsprechender Seiten 1, so liegt **Kongruenz** vor. Kongruente Dreiecke sind also stets auch ähnlich.

23 **Die Kongruenz ist ein Sonderfall der Ähnlichkeit.**

B 48



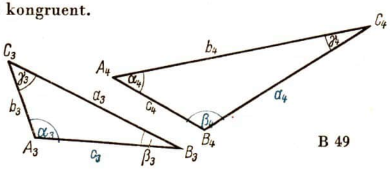
Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ im Bild B 48 sind ähnlich. Demnach gilt:

$$\alpha = \alpha_1;\ \beta = \beta_1;\ \gamma = \gamma_1;\ \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Für die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ gilt

$$\alpha_1 = \alpha_2;\ \beta_1 = \beta_2;\ \gamma_1 = \gamma_2;\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = 1.$$

Diese beiden Dreiecke sind kongruent.
Bei ähnlichen Dreiecken $A_iB_iC_i$ und $A_kB_kC_k$ brauchen jedoch nicht immer die ebengenannten Beziehungen zu bestehen. Die Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$ im Bild B 49 sind gleichfalls ähnlich, aber es gilt:



B 49

$$\alpha_3 = \beta_4;\ \beta_3 = \gamma_4;\ \gamma_3 = \alpha_4;\ \frac{c_3}{a_4} = \frac{a_3}{b_4} = \frac{b_3}{c_4}.$$

29 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Genauso wie man beim Nachweis der Kongruenz zweier Dreiecke nicht alle Stücke einzeln auf Gleichheit prüfen muß, braucht man auch zum Nachweis der Ähnlichkeit nur charakteristische Stücke zu vergleichen.

Wir wollen nun überlegen, welche Bedingungen hinreichend sind, damit zwei Dreiecke ähnlich sind. Wir nennen diese Bedingungen auch *Kriterien für die Ähnlichkeit* von Dreiecken. Sie werden im folgenden in Form der vier Ähnlichkeitssätze dargestellt.

ERSTER ÄHNLICHKEITSSATZ:

24 **Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.**

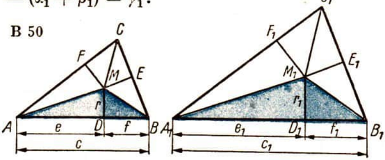
Beweis: Gegeben sind zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, und es soll gelten $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$ (Bild B 50).

Da die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt, gilt auch

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (\alpha_1 + \beta_1) = \gamma_1.$$

Demnach herrscht Übereinstimmung in allen Winkeln. Wir müssen nun noch zeigen, daß die Verhältnisse aus gleichliegenden Seiten gleich sind. Dazu zeichnen

B 50



wir die Winkelhalbierenden in beiden Dreiecken. M und M_1 seien die gemeinsamen Schnittpunkte. Dann fällen wir von M bzw. M_1 die Lote auf die Dreieckseiten. In jedem Dreieck sind die drei Lote gleich lang, da sie gleich dem Radius des Inkreises sind.

B

Jedes Dreieck zerfällt in sechs rechtwinklige Teildreiecke. Zu jedem Teildreieck gibt es ein entsprechendes im anderen Dreieck. Betrachten wir z. B. die einander entsprechenden Dreiecke DBM und $D_1B_1M_1$. Es gilt
$\sphericalangle DBM = \sphericalangle D_1B_1M_1$ und $\sphericalangle BMD = \sphericalangle B_1M_1D_1$.
Nach Satz B 21 gilt dann: $r : r_1 = f : f_1$.
Ebenso können wir für die Dreiecke ADM und $A_1D_1M_1$ die Gültigkeit von

$\sphericalangle MAD = \sphericalangle M_1A_1D_1$ und $\sphericalangle DMA = \sphericalangle D_1M_1A_1$

feststellen.
Also gilt auch: $r : r_1 = e : e_1$.
Dann gelten die entsprechenden Produktgleichungen:

$r \cdot f_1 = r_1 \cdot f$ und $r \cdot e_1 = r_1 \cdot e$.
Durch Addition folgt:

$r f_1 + r \cdot e_1 = r_1 \cdot f + r_1 e$
und nach dem Distributionsgesetz:
$r(f_1 + e_1) = r_1(f + e)$.
Es gilt aber

$c = e + f$ und $c_1 = e_1 + f_1$.
Also gilt nach dem Einsetzen:

$r c_1 = r_1 c$
und damit die Proportion

$$\frac{c}{c_1} = \frac{r}{r_1}.$$
Führen wir nun die gleichen Überlegungen für die anderen beiden Dreieckseiten an, so erhalten wir noch zwei weitere Proportionen:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{r}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{b}{b_1} = \frac{r}{r_1}.$$
Die Verhältnisse aus einander entsprechenden Seiten sind also alle gleich der rationalen Zahl $\frac{r}{r_1}$. Sie sind also untereinander gleich und es gilt:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$
Damit wurde bewiesen, daß im Falle der Übereinstimmung in zwei Winkeln auch eine Übereinstimmung in den drei Seitenverhältnissen folgt. Also sind die betrachteten Dreiecke ähnlich.

ZWEITER ÄHNLICHKEITSSATZ:

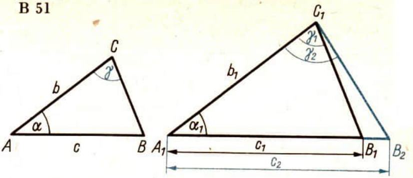
25 **Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen und wenn die Verhältnisse aus einander entsprechenden anliegenden Seiten gleich sind.**

Beweis:
Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, und es soll gelten:

$\alpha = \alpha_1$; $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ (Bild B 51).

Wir müssen nun beweisen, daß noch ein anderes Paar von Winkeln, z. B. γ und γ_1, gleich ist; denn dann haben wir den Fall auf den ersten Ähnlichkeitssatz für Dreiecke (Satz B 24) zurückgeführt.

B 51



Wir führen den Beweis indirekt.

Angenommen, es gilt nicht $\gamma = \gamma_1$. Wir tragen γ an $\overline{A_1C_1}$ in C_1 an. Der freie Schenkel des so entstandenen Winkels γ_2 schneide A_1B_1 in B_2.
Dann stimmen die Dreiecke ABC und $A_1B_2C_1$ in zwei Winkeln überein und sind also nach Satz B 24 ähnlich.

Es gilt daher $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_2}$. Außerdem sollte nach Voraussetzung gelten $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

Daraus folgt $\frac{c}{c_2} = \frac{c}{c_1}$. Diese Gleichung gilt aber nur, wenn $c_2 = c_1$ ist.

Die Punkte B_1 und B_2 müssen also zusammenfallen, ebenso γ_1 und γ_2. Es muß also gelten $\gamma_1 = \gamma_2$. Das steht im Widerspruch zu unserer Annahme, daß $\gamma = \gamma_1$ nicht gilt.

Es gilt damit $\gamma = \gamma_1$. Also sind die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ähnlich.

DRITTER ÄHNLICHKEITSSATZ:

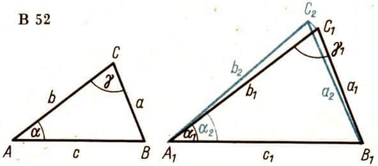
26 **Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Verhältnisse aus den einander entsprechenden Seiten gleich sind.**

Beweis:

Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, und es soll gelten:

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ (Bild B 52).

B 52



Können wir zeigen, daß zwei einander entsprechende Winkel, z. B. α und α_1, gleich sind, so haben wir den Fall auf den zweiten Ähnlichkeitssatz zurückgeführt, und die Dreiecke sind ähnlich.

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß α nicht gleich α_1 ist.

Wir tragen α an $\overline{A_1B_1}$ in A_1 an und erhalten den Winkel α_2. Auf dem freien Schenkel von α_2 tragen wir die Seite b_1 ab und erhalten so den Endpunkt C_2.

Nach dem zweiten Ähnlichkeitssatz ist dann: $\triangle A_1B_1C_2 \sim \triangle ABC$, und es gilt:

$\frac{a}{a_2} = \frac{b}{b_2} = \frac{c}{c_1}$. Nach der Voraussetzung gilt aber auch: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

Daraus folgt: $\frac{a}{a_1} = \frac{a}{a_2}$ und $\frac{b}{b_1} = \frac{b}{b_2}$.

Diese Gleichungen können nur richtig sein, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ ist.

Dann stimmen aber die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_1B_1C_2$ in drei Seiten überein und sind nach dem Kongruenzsatz sss kongruent.

Dann gilt aber $\alpha_1 = \alpha_2$, d. h. $\alpha = \alpha_1$. Das steht in Widerspruch zu unserer Annahme, nach der $\alpha \neq \alpha_1$ sein sollte.

Die Annahme war also falsch. Es gilt $\alpha = \alpha_1$, und damit ist nach dem zweiten Ähnlichkeitssatz (Satz B 25) die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ bewiesen.

VIERTER ÄHNLICHKEITSSATZ:

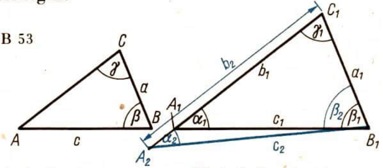
27 **Dreiecke sind ähnlich, wenn die beiden Verhältnisse aus zwei Paaren einander entsprechender Seiten übereinstimmen und die Winkel kongruent sind, die der jeweils größeren Seite gegenüberliegen.**

Beweis: Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, und es soll gelten:

$$a < c; \frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1} \text{ und } \gamma = \gamma_1$$

(Bild B 53).

B 53



Können wir zeigen, daß die Dreiecke in einem weiteren Winkel übereinstimmen, daß beispielsweise $\beta = \beta_1$ ist, so haben wir diesen Fall auf den ersten Ähnlichkeitssatz zurückgeführt.

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß β und β_1 nicht übereinstimmen.

Wir tragen an $\overline{B_1C_1}$ in B_1 den Winkel β an. Der freie Schenkel des so erhaltenen Winkels β_2 schneide A_1C_1 in A_2. Nach dem ersten Ähnlichkeitssatz sind dann die Dreiecke ABC und $A_2B_1C_1$ ähnlich: Es gilt also:

$\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_2} = \frac{b}{b_2}$. Nach der Voraussetzung gilt aber auch: $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}$.

Daraus folgt $\frac{c}{c_1} = \frac{c}{c_2}$. Dies kann nur gelten, wenn c_1 gleich c_2 ist.

Es gilt $c > a$ und wegen $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}$ auch $c_1 > a_1$.

Da nun gilt $a_1 = a_1$, $c_1 = c_2$ und $\gamma_1 = \gamma_1$, so stimmen die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_1C_1$ in zwei Seiten und dem der jeweils größeren Seite gegenüberliegenden Winkel überein. Sie sind nach dem Kongruenzsatz (ssw) kongruent.

Dann gilt $\beta_2 = \beta_1$.

Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme, daß β und β_1 nicht übereinstimmen.

Diese war also falsch, d. h., β_1 und β stimmen doch überein, und die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind einander ähnlich.

30 Das Verhältnis aus zwei entsprechenden Dreiecksseiten wollen wir künftig **Ähnlichkeitsfaktor** f nennen. Dieser Ähnlichkeitsfaktor hat eine ähnliche Bedeutung wie der Proportionalitätsfaktor. Im Falle der Kongruenz liegt der Ähnlichkeitsfaktor 1 vor.

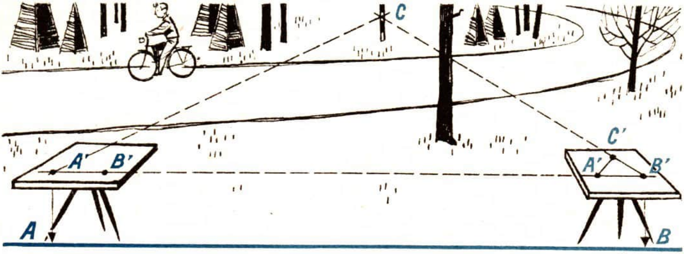
19 Miß die Seiten der Dreiecke in den Bildern B 48, B 49 und B 50 und ermittle jeweils den Ähnlichkeitsfaktor!

Aufgabe B 20

B

31 Eine Anwendung der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke in der Vermessungskunde ist das **Meßtischverfahren**. Es dient der kartographischen Aufnahme eines Geländestücks.

Der Meßtisch besteht aus einer auf einem Dreifuß ruhenden und um eine lotrechte Achse schwenkbaren quadratischen Platte, die mit Zeichenpapier überspannt ist. Mit einer Wasserwaage wird die Tischplatte waagerecht ein-



B 54

gestellt (Bild B 54). In dem aufzunehmenden Gelände sei die waagerechte Entfernung zweier Punkte A und B bekannt. Die *Standlinie* $\overline{AB}$ wird in dem gewünschten Maßstab (gewöhnlich 1 : 25 000) als Strecke $\overline{A'B'}$ auf das Meßtischblatt übertragen. Um die Lage eines dritten Punktes C in der Zeichnung festzulegen, stellt man den Meßtisch zunächst in A so auf, daß A' lotrecht über A liegt und die Richtung von $A'B'$ in die Richtung von AB fällt. Die Richtung von A' nach dem Punkt C legt man in der Zeichnung fest. Dann stellt man den Meßtisch im Punkte B so auf, daß B' lotrecht über B liegt und $B'A'$ mit der Richtung BA zusammenfällt. Die Richtung von B' nach C wird durch den Peilstrahl nach C bestimmt und in der Zeichnung festgelegt. Beide Peilstrahlen schneiden einander in der Zeichnung im Punkte C'. Wiederholt man dieses Verfahren für mehrere Geländepunkte, so erhält man auf dem Meßtischblatt ein ähnliches Bild des Geländes im gewünschten Maßstab.

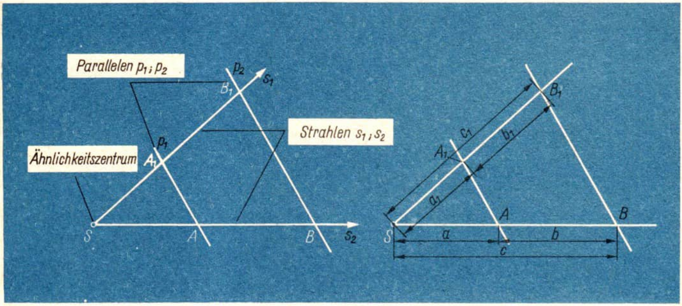
32 Strahlensatz

Wir erweitern nun die Beziehung, die wir im Abschnitt B 24 für rechtwinklige Dreiecke kennengelernt haben (vgl. Satz B 21) auf beliebige Dreiecke.

28 ERSTER TEIL DES STRAHLENSATZES:

Werden zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

B 55

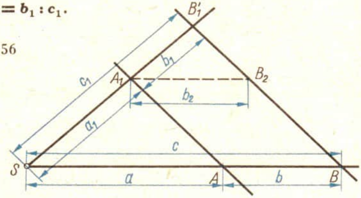


Für die Figur in Bild B 55 gilt demnach:

$$\boldsymbol{a : b = a_1 : b_1;\quad a : c = a_1 : c_1;\quad b : c = b_1 : c_1.}$$

Beweis:

B 56



In der Figur der Abbildung B 56 gilt $b_2 = b$; denn b_2 und b sind Gegenseiten in einem Parallelogramm. Da die schneidenden Geraden parallel sind, gilt

$$\sphericalangle\, SA_1A = \sphericalangle\, SB_1B \text{ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen).}$$

Da A_1B_2 nach Konstruktion parallel zu SB ist, gilt

$$\sphericalangle\, B_1SB = \sphericalangle\, B_1A_1B_2 \text{ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen).}$$

Nach dem ersten Ähnlichkeitssatz für Dreiecke sind dann die Dreiecke SAA_1, SBB_1 und $A_1B_2B_1$ ähnlich. Daraus folgt die behauptete Gleichheit der Proportionen. Die Strecken a und c sowie a_1 und c_1 sind Paare einander entsprechender Seiten in den Dreiecken SAA_1 und SBB_1.

Die Strecken a und b_2 sowie a_1 und b_1 sind Paare einander entsprechender Seiten in den Dreiecken SAA_1 und $A_1B_2B_1$.

Die Strecken b_2 und b_1 sowie c und c_1 sind Paare einander entsprechender Seiten in den Dreiecken $A_1B_2B_1$ und SBB_1.

(20) Bilde die Produktgleichungen der Proportionen

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}, \quad \frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}, \quad \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

und leite aus ihnen die folgenden Proportionen her:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}!$$

B

29 **ZWEITER TEIL DES STRAHLENSATZES:**

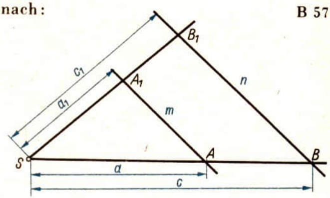
Werden zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die zwischen den Strahlen liegenden Parallelenabschnitte wie die zugehörigen vom Anfangspunkt S gerechneten Abschnitte jedes Strahls.

Für die Figur im Bild B 57 gilt demnach:

$\boldsymbol{a : c = m : n; \quad a_1 : c_1 = m : n.}$

Beweis: Da die schneidenden Geraden parallel sind, gilt $\sphericalangle SAA_1 = \sphericalangle SBB_1$ und damit $\triangle SAA_1 \sim \triangle SBB_1$. Die Strecken a und m sowie c und n sind Paare einander entsprechender Seiten in diesen beiden Dreiecken.

B 57

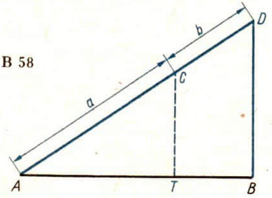


33 Die Teilung einer Strecke

Die Strahlensätze finden Anwendung bei der Teilung einer Strecke $\overline{AB}$ in einem vorgegebenen Verhältnis $a:b$.

Die **innere Teilung** einer Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $a:b$ veranschaulicht das Bild B 58.

B 58

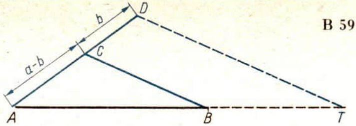


Wir zeichnen einen von A ausgehenden Strahl, der nicht der Geraden AB angehören darf. Dann tragen wir, von A ausgehend, die Strecken a und b hintereinander an, verbinden den Endpunkt D von b mit B und zeichnen die Parallele zu DB durch den Anfangspunkt C von b. Der Schnittpunkt T dieser Parallelen mit $\overline{AB}$ ist der gesuchte Teilpunkt; denn nach dem ersten Teil des Strahlensatzes gilt: $\overline{AT} : \overline{TB} = a : b$.

Gilt als Sonderfall die Proportion $\overline{AB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{TB}$, so heißt diese Teilung auch **Goldener Schnitt**.

Die **äußere Teilung** einer Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $a : b$ wird im Bild B 59 dargestellt.

Wir zeichnen einen von A ausgehenden Strahl, der nicht der Geraden AB angehören darf. Dann tragen wir von A aus die Strecken a und $a - b$ ab und erhalten D bzw. C als Endpunkte. Dann verbinden wir den Endpunkt C von $a - b$ mit B und zeichnen durch D die Parallele zu CB. Ihr Schnittpunkt T mit der Verlängerung von AB ist der gesuchte äußere Teilpunkt.

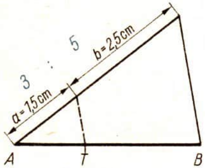


B 59

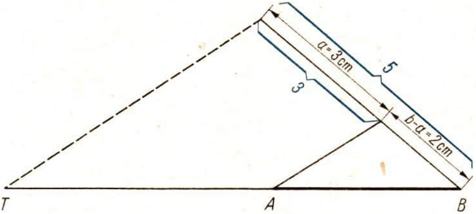
B

Nach dem ersten Teil des Strahlensatzes gilt $\overline{AT} : \overline{BT} = a : b$.

6 Die Bilder B 60 bzw. B 61 zeigen die Teilung einer Strecke $\overline{AB}$ von 36 mm Länge im Verhältnis 3:5 innen bzw. außen.



B 60



B 61

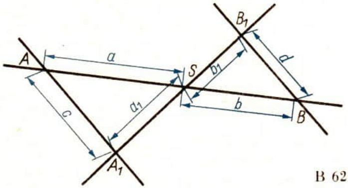
34 Wir verallgemeinern jetzt die beiden Teile des Strahlensatzes.

30 **SATZ: Werden zwei Geraden, die einander in einem Punkt S schneiden, von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Parallelenabschnitte zwischen den Geraden wie die zugehörigen Abschnitte auf jeder der geschnittenen Geraden.**

Für die Figur im Bild B 62 gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{c}{d}.$$

Beweis: Die Strecken a und b, a_1 und b_1 sowie c und d sind Paare einander entsprechender Seiten in den ähnlichen Dreiecken A_1SA und SBB_1.



B 62

21 Ein Geradenbüschel werde von einer Schar von parallelen Geraden geschnitten (Bild B 63). Formuliere die Verallgemeinerung des Strahlensatzes für diesen Fall!

Die Umkehrung des ersten Teils des Strahlensatzes würde lauten:

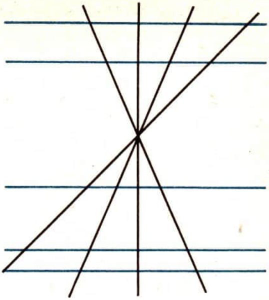
Werden zwei Strahlen von zwei Geraden so geschnitten, daß sich die Abstände

$\overline{SA}$ und $\overline{SB}$ auf dem einen Strahl wie die Abstände $\overline{SA_1}$ und $\overline{SB_1}$ auf dem anderen Strahl verhalten, so sind die Geraden parallel.

22 Beweise diese Umkehrung mit Hilfe des zweiten Ähnlichkeitssatzes!

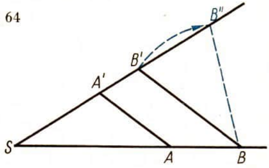
Die Umkehrung des zweiten Teiles des Strahlensatzes würde lauten:

Werden zwei Strahlen von zwei Geraden geschnitten und verhalten sich die Abschnitte $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$ auf einem Strahl wie die entsprechenden zwischen den Strahlen liegenden Abschnitte auf den schneidenden Geraden, so sind die Geraden parallel. Zeige an Hand des Bildes B 64, daß diese Umkehrung im allgemeinen nicht richtig ist!



B 63

B 64



35 Der Aufbau einiger Meßgeräte beruht auf der Anwendung des Satzes B 20. Der **Proportionalzirkel** wird in Konstruktionsbüros zur Verkleinerung bzw. Vergrößerung von gegebenen Strecken in einem gegebenen Maßstab verwendet (Bild B 65). Durch Verschiebung können die Längen der Schenkel auf das gewünschte Verhältnis eingestellt werden. Das Verhältnis $\overline{AB} : \overline{A'B'}$ bleibt auch erhalten, wenn die Schenkel gegeneinander gedreht werden.

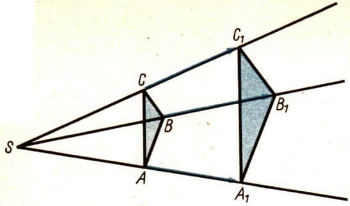
Aufgaben B 21 bis 26

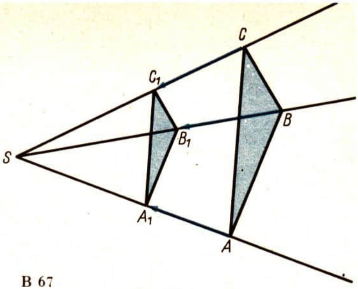
B 65

Ähnlichkeitsabbildungen

36 Eine Abbildung einer Ebene, die jedem Punkt einen Bildpunkt so zuordnet, daß ähnliche Dreiecke wieder in ähnliche Dreiecke übergehen, heißt **Ähnlichkeitsabbildung**. Ein Punkt, der bei der Ähnlichkeitsabbildung gleich seinem Bildpunkt ist, wird **Ähnlichkeitszentrum** genannt. Das Verhältnis $\overline{A_1B_1} : \overline{AB}$ heißt **Ähnlichkeitsfaktor *f***. Es ist für alle Punktpaare gleich.

Bei der **Streckung** entfernen sich alle Punkte vom Ähnlichkeitszentrum (Bild B 66). Der Ähnlichkeitsfaktor ist hier größer als 1; $f > 1$.





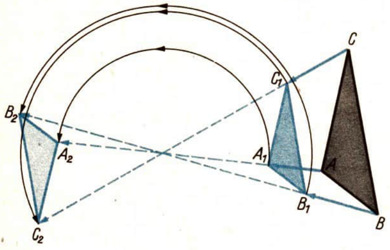
B 66 B 67

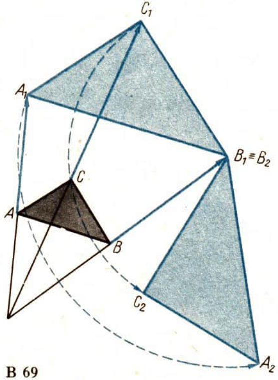
Bei der **Stauchung** nähern sich alle Punkte dem Ähnlichkeitszentrum (Bild B 67). Der Ähnlichkeitsfaktor ist in diesem Fall kleiner als 1; $f < 1$.

Aufgaben B 27 bis 63

Führt man eine Ähnlichkeitsabbildung und eine Kongruenzabbildung hintereinander aus, so erhält man wieder eine Ähnlichkeitsabbildung. Ebenso ergibt die Hintereinanderausführung von mehreren Ähnlichkeitsabbildungen insgesamt wieder eine Ähnlichkeitsabbildung.

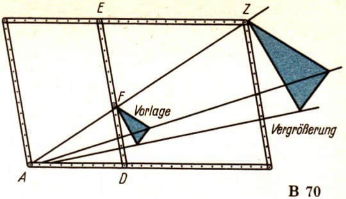
7 Im Bild B 68 wurden hintereinander eine Stauchung und eine Punktspiegelung ausgeführt. Im Bild B 69 wurden hintereinander eine Streckung und eine Drehung um den Punkt B_1 ausgeführt.





B 68 B 69

37 Die im Abschnitt B 36 beschriebene zentrische Streckung und Stauchung wird beispielsweise dann angewendet, wenn von einer Konstruktion eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung angefertigt wird. In Zeichenbüros verwendet man hierbei den **Pantographen** (Storchschnabel). Er besteht aus einem beweglichen Parallelogramm aus flachen Stäben (Bild B 70). Die mittlere Schiene $\overline{ED}$ kann verstellt werden. An dieser Schiene läßt sich der Fahrstift F oder der Zeichenstift Z einsetzen. Die Ecke, die dem Festpunkt A gegenüberliegt, muß den Fahrstift aufnehmen, falls der Zeichenstift auf ED ist. Falls jedoch der Fahrstift auf der Schiene ist, wird der Zeichenstift in dieser Ecke befestigt.



B 70

Der Fixpunkt A ist das Ähnlichkeitszentrum. Durch geeignete Umstellungen der Schiene und der Stifte können verschiedene Streckungs- bzw. Stauchungsverhältnisse eingestellt werden.

38 Bei den Kongruenzabbildungen blieben Umfang und Flächeninhalt erhalten. Jede Figur hat den gleichen Umfang und den gleichen Flächeninhalt wie die Bildfigur. Bei Ähnlichkeitsabbildungen ist das im allgemeinen nicht der Fall.

31 **SATZ: Bei einer Ähnlichkeitsabbildung in der Ebene erhält man den Umfang des Bilddreiecks als Produkt aus dem Umfang des Originaldreiecks und dem Ähnlichkeitsfaktor.**

Beweis:

In den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ sei der Ähnlichkeitsfaktor $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = f$, so daß gilt: $\overline{A_1B_1} = f \cdot \overline{AB}$; $\overline{B_1C_1} = f \cdot \overline{BC}$; $\overline{A_1C_1} = f \cdot \overline{AC}$.
Dem Umfang $u = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ entspricht der Umfang des Bilddreiecks $u_1 = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{A_1C_1}$. Es gilt
$u_1 = f \cdot \overline{AB} + f \cdot \overline{BC} + f \cdot \overline{AC}$, also
$u_1 = f(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})$,
$u_1 = f \cdot u$.

32 **SATZ: Bei einer Ähnlichkeitsabbildung in der Ebene erhält man den Flächeninhalt des Bilddreiecks als Produkt aus dem Flächeninhalt des zugehörigen Originaldreiecks und dem Quadrat des Ähnlichkeitsfaktors.**

Beweis:

In den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ sei der Ähnlichkeitsfaktor $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = f$. Der Flächeninhalt des Originaldreiecks beträgt $A = \frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot h_c$ und der Flächeninhalt des Bilddreiecks $A_1 = \frac{1}{2}\,\overline{A_1B_1} \cdot h_{c_1}$.

Da für die beiden ähnlichen Dreiecke $h_{c_1} = f \cdot h_c$ und $A_1B_1 = f \cdot \overline{AB}$ gilt, erhalten wir nach dem Einsetzen:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot f \cdot \overline{AB} \cdot f \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot f^2 \cdot \overline{AB} \cdot h_c \text{, also}$$

$$A_1 = f^2 \cdot A.$$

Damit ist der Satz bewiesen. Der Flächeninhalt des Bilddreiecks ist das f^2-fache des Flächeninhalts des Originaldreiecks.

Aufgaben B 64 bis 72

39 Übersicht über den Aufbau der Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen 0, 1, 2, 3, ...

Die Addition und die Multiplikation sind uneingeschränkt ausführbar.

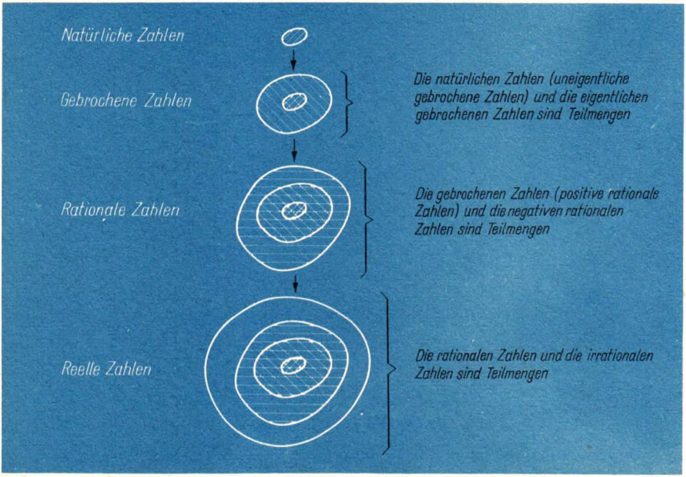
Gebrochene Zahlen

Eine gebrochene Zahl ist die Klasse aller Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen.

Die Addition, die Multiplikation und die Division (mit Ausnahme der Division durch Null) sind uneingeschränkt ausführbar.

Die natürlichen Zahlen sind ein Teilbereich der gebrochenen Zahlen.

B 71



Rationale Zahlen

Eine rationale Zahl ist die Klasse aller derjenigen Differenzen gebrochener Zahlen, die dadurch auseinander hervorgehen, daß man zum Minuenden und zum Subtrahenden die gleiche gebrochene Zahl addiert oder subtrahiert.

Jede rationale Zahl läßt sich in der Form $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ darstellen, wobei p und q ganze Zahlen sind.

Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und die Division (mit Ausnahme der Division durch Null) sind uneingeschränkt ausführbar.
Die gebrochenen Zahlen sind ein Teilbereich der rationalen Zahlen.

Reelle Zahlen

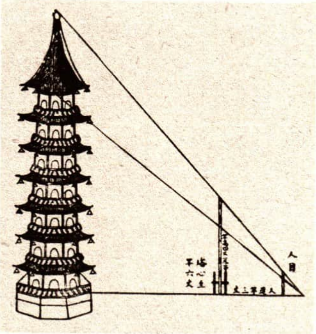
Der Bereich der reellen Zahlen wird von den rationalen Zahlen und den irrationalen Zahlen gebildet.

Irrationale Zahlen sind unendliche nichtperiodische Dezimalzahlen.
Die reellen Zahlen füllen die Zahlengerade lückenlos aus.

Geschichtliche Bemerkungen zur Ähnlichkeitslehre

40 Die Lehre von der Ähnlichkeit ebener geometrischer Figuren gehört zu den Grundlagen der Elementargeometrie und ist schon von den Völkern des Altertums weit entwickelt worden.

Bedeutende Kenntnisse über Dreiecksgeometrie, darunter die Verwendung von Ähnlichkeitsbeziehungen zu Dreieckskonstruktionen, sind uns seit dem 8. Jahrhundert v. u. Z. aus Indien schriftlich überliefert. Im alten China wurden um etwa 1100 v. u. Z. Höhenbestimmungen mit Hilfe der Schattenlänge durchgeführt.



B 72: Höhenbestimmung einer Pagode mit Hilfe ähnlicher Dreiecke. China, 3. Jahrhundert u. Z.

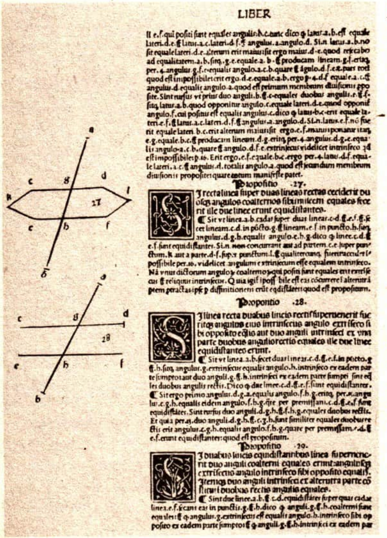
Durch einen historischen Zufall wissen wir, ohne daß uns eine derartige mathematische Abhandlung erhalten geblieben wäre, daß auch die alten Ägypter, die bereits eine Fülle von geometrischen Einzeltatsachen kannten und in der Praxis verwendeten, die Grundgesetze der Ähnlichkeit ebener Figuren benutzt haben. Eine der Grabkammern der Pyramide, die für einen ägyptischen König des 14. Jahrhunderts v. u. Z. bestimmt war, ist unvollendet geblieben. Bei der Ausgrabung fand man die eine Wand mit einem Netz sich quadratisch schneidender Linien bedeckt. In dieses Netz übertrug man von einer Skizze mit einem entsprechend kleineren quadratischen Netz den geplanten Wandschmuck auf die Wand der Grabkammer.

Im 7. Jahrhundert v. u. Z. entwickelten sich in den von Griechen besiedelten Städten der Westküste Kleinasiens und auf den vorgelagerten Inseln mit Handel und Industrie auch bedeutende wissenschaftliche, darunter mathematische Kenntnisse. Auf Reisen nach Mesopotamien und Ägypten lernten die Kaufleute und Gelehrten auch die babylonische und ägyptische Mathematik kennen. THALES VON MILET (etwa 624—548 v. u. Z.), nach dem der THALESsatz am Kreis benannt ist, erfand der Überlieferung nach beim Besuch der ägyptischen Pyramiden ein Verfahren zur Höhenmessung. Er verglich die Schattenlänge eines bekannten Gegenstandes mit der des zu messenden. Auf diese Weise gelang es ihm, die Höhen der Pyramiden zu ermitteln. Diese Methode beruht auf dem Vergleich ähnlicher Dreiecke.

Die griechischen Mathematiker brachten die Fülle der überlieferten und neu gefundenen geometrischen Tatsachen in ein festes System von Sätzen, die der Reihe nach auf Grund genau formulierter Voraussetzungen bewiesen wurden. So schloß z. B. HIPPOKRATES VON CHIOS (um 440 v. u. Z.) aus der Gleichheit der Basiswinkel zweier gleichschenkliger Dreiecke auf die Proportionalität der Seiten. Bereits Ende des 5. Jahrhunderts v. u. Z. waren den griechischen Mathematikern alle Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze am ebenen Dreieck bekannt, man konnte sie beweisen und machte von ihnen bei der Herleitung weiterer Sätze am Dreieck häufigen Gebrauch.

Auf Grund früherer Zusammenfassungen der Geometrie, die allerdings verlorengegangen sind, schrieb der in Alexandria wirkende Mathematiker EUKLEIDES (etwa 365 bis 300)[1] etwa um 320 v. u. Z. eine großangelegte, streng gegliederte und systematisch auf Axiomen und Postulaten aufbauende Darstellung der ebenen und räumlichen Geometrie, die den Titel *Elemente* trägt und aus 13 Büchern besteht. EUKLEIDES definiert ebene, geradlinig begrenzte Figuren folgendermaßen: *Ähnliche geradlinige Figuren sind solche, die, einzeln verglichen, gleiche Winkel und an diesen gleichen Winkeln proportionierte Seiten haben.* Im selben Buch der *Elemente* sind die Ähnlichkeitssätze enthalten. Es wird gelehrt, eine Strecke im gegebenen Verhältnis zu teilen und die vierte Proportionale zu konstruieren, d. h. die Gleichung $a : b = c : x$ geometrisch zu lösen. Dann folgt die Konstruktion der mittleren Proportionalen. Weiterhin folgen die Sätze von dem Verhältnis der Flächen ähnlicher Dreiecke und ähnlicher Polygone.

Indessen war diese hochentwickelte Mathematik unter den Bedingungen der Sklavenhaltergesellschaft durch eine unübersteigbare Kluft von den Bedürfnissen der Praxis getrennt. EUKLEIDES hat absichtlich ohne den geringsten Bezug auf Anwendungen geschrieben. Nirgends wird


LIBER

Propositio .27.

Propositio .28.

Propositio .29.

B 73: Textseite aus einer frühen (1509) lateinischen Druckausgabe der „Elemente" des EUKLEIDES

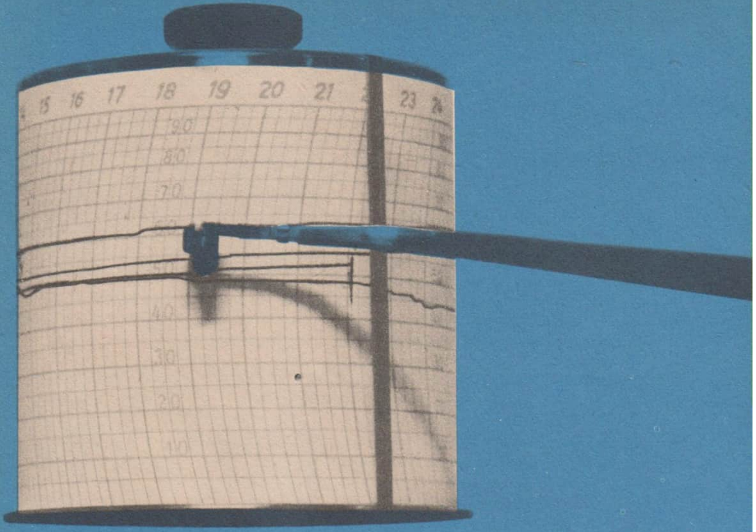
[1] EUKLEIDES wird in der Literatur auch häufig mit seinem latinisierten Namen EUKLID genannt.

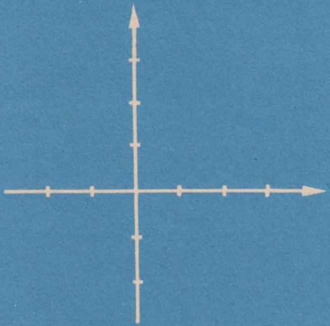
in den *Elementen* z. B. von der Verwendung der Ähnlichkeitslehre zu Vermessungszwecken gesprochen. Erst am Ausgang der Antike hat der Ingenieur HERON VON ALEXANDRIA (um 100 u. Z.) auch die Belange der praktischen Geometrie, darunter der auf der Ähnlichkeit beruhenden Vermessungslehre, in mehreren Schriften berücksichtigt. Die Meßkunst der römischen sogenannten Agrimensoren (d. i. eigentlich Feldmesser) beruhte weitgehend auf empirisch gefundenen Verfahren. Sie reisten im Troß der Heere mit und vermaßen die eroberten Ländereien.

B 74: Richten von Geschützen mit Hilfe geometrischer Instrumente, Europa, Mitte des 16. Jahrhunderts

Der Untergang der Sklavenhalterordnung des römischen Weltreiches führte in Europa zusammen mit der wissenschaftsfeindlichen Haltung der christlichen Kirche zu einem starken Rückgang auch der mathematischen Kenntnisse. Erst vom 14. und 15. Jahrhundert an setzte in Europa ein spürbarer Aufschwung der Wissenschaften, darunter der Mathematik, ein. Die *Elemente* von EUKLEIDES wurden auf Grund der praktischen Anforderungen an die Mathematik zum Gegenstand eines breiten wissenschaftlichen Interesses, sie wurden übersetzt und gedruckt. Die elementare ebene Geometrie wurde notwendigerweise zum Rüstzeug einer Vielzahl von praktischen Berufen. Die Ähnlichkeitslehre wurde von den Festungsbaumeistern, Architekten und darstellenden Künstlern benötigt, aber auch von den Steuermännern der Segelschiffe, die ihre Schiffe nach Übersee in die neu entdeckten Länder führten. Vor allem aber wurde durch die vielfältigen Anforderungen des militärischen und zivilen Vermessungswesens und der Astronomie die Kenntnis der Ähnlichkeitslehre und der Strahlensätze zum Gemeingut einer bedeutenden Anzahl von Menschen der verschiedensten Berufe. Neue Instrumente wurden erfunden, z. B. durch den jüdischen Gelehrten LEVI BEN GERSON (1288—1344) der sogenannte Jakobsstab, ferner astronomische Geräte und Geräte zum Richten der Geschütze. Alle diese Geräte beruhten auf Ähnlichkeitsbeziehungen. Seit dieser Zeit gehört die Ähnlichkeitslehre zum festen Bestandteil der mathematischen Grundausbildung.

B 75: Der Jakobsstab im Gebrauch. Darstellung aus dem Jahre 1531


15 16 17 18 19 20 21 23 24
90
80
70
40
30
20
10



C. LINEARE FUNKTIONEN, LINEARE GLEICHUNGEN

C

Lineare Funktionen

1 Der Funktionsbegriff

Wir haben schon häufig mathematische Sachverhalte betrachtet, in denen Zahlen wieder Zahlen zugeordnet wurden. Wir wollen uns jetzt mit solchen Zuordnungen näher beschäftigen.

Bei proportionalen Größen wird beispielsweise jeder Maßzahl der einen Größe eine Maßzahl der anderen Größe zugeordnet. Dabei erhält man die zugeordnete Maßzahl durch Multiplikation mit dem Proportionalitätsfaktor.

1 Der Benzinverbrauch eines Kraftfahrzeuges ist proportional zur Fahrstrecke. (Hierbei wird allerdings vereinfachend angenommen, daß eine etwa gleichbleibende Geschwindigkeit eingehalten wird, daß kein hügeliges Gelände befahren wird usw.) Obwohl dieser Idealfall natürlich nur in den seltensten Fällen

C 1

vorliegt, betrachtet man den Verbrauch für Berechnungen und Vergleiche der Einfachheit halber als proportional zur Fahrstrecke.

Die folgende Tabelle gibt den Benzinnormverbrauch eines PKW vom Typ Moskwitsch für eine Fahrt von 100 km an:

Entfernung (km)	s	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Benzinverbrauch (l)	m	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2	8,0

Wir hätten in die erste Zeile dieser Tabelle auch beliebige andere Zahlen zwischen 0 und 100 eintragen können, denn jeder zurückgelegten Teilstrecke ist ein bestimmter Benzinverbrauch zugeordnet. Da der Proportionalitätsfaktor 0,08 ist, ist diese Zuordnung gegeben durch die Gleichung

$$m = 0{,}08 \cdot s.$$

C

2 In die folgenden Ungleichungen sollen für x der Reihe nach alle natürlichen Zahlen von 0 bis 10 einschließlich eingesetzt werden. Dann soll für jeden Wert von x diejenige natürliche Zahl berechnet werden, die, für y eingesetzt, die jeweilige Ungleichung erfüllt.

a) $x < y < x + 2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

b) $x < y < x + 3$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1 und 2	2 und 3	3 und 4	4 und 5	5 und 6	6 und 7	7 und 8	8 und 9	9 und 10	10 und 11	11 und 12

In beiden Fällen sind den Werten von x jeweils Werte von y zugeordnet, und zwar in a) jedem Wert von x nur ein Wert von y, in b) jedem Wert von x zwei Werte von y. Die Zuordnung in a) heißt **eindeutig,** weil jedem Wert von x *genau ein* Wert von y zugeordnet ist. Die Zuordnung in b) ist nicht eindeutig. Auch die im Beispiel 1 angegebene Zuordnung ist eindeutig.

In Zukunft werden wir nur eindeutige Zuordnungen betrachten.

3 Jeder reellen Zahl x soll ihr Dreifaches zugeordnet werden.

Diese Zuordnung ist ebenfalls eindeutig. Wie im Beispiel 1 können wir nicht alle möglichen Werte für x aufschreiben, denn es gibt unendlich viele reelle Zahlen. In folgender Tabelle sind einige Zahlen ausgewählt:

x	$-3{,}7$	-1	$-0{,}5$	0	2	7	$\frac{42}{5}$	100
$y = 3x$	$-11{,}1$	-3	$-1{,}5$	0	6	21	$\frac{126}{5}$	300

Im Gegensatz zu Beispiel 1 und 2 können wir hier für x jede beliebige reelle Zahl einsetzen. Aber auch für y treten dabei alle reellen Zahlen auf.

In den Beispielen 1, 2a) und 3 kommen jeweils zwei Mengen A und B von Zahlen vor:

	Menge A	Menge B
Beispiel 1	Alle positiven reellen Zahlen bis 100 einschließlich. Alle diese Zahlen können für s eingesetzt werden.	Alle positiven reellen Zahlen bis 8 einschließlich. Alle diese Zahlen treten als Werte von m auf.
Beispiel 2 a)	Alle natürlichen Zahlen von 0 bis 10 einschließlich. Alle diese Zahlen können für x eingesetzt werden.	Alle natürlichen Zahlen von 1 bis 11 einschließlich. Alle diese Zahlen treten als Werte von y auf.
Beispiel 3	Alle reellen Zahlen. Alle diese Zahlen können für x eingesetzt werden.	Alle reellen Zahlen. Alle diese Zahlen treten als Werte von y auf.

Im Beispiel 3 stimmen die Mengen A und B im Gegensatz zu den Mengen in den Beispielen 1 und 2a) überein.

1 **DEFINITION: Gegeben sei eine Menge A von reellen Zahlen. Wenn jeder Zahl x aus der Menge A eine Zahl y eindeutig zugeordnet ist, so heißt diese Zuordnung eine Funktion.**

2 In der Menge A liegen alle Zahlen, denen eine Zahl zugeordnet wird. Man sagt dazu, daß die Funktion für die Zahlen der Menge A **erklärt** oder **definiert** ist. Alle Zahlen, die als zugeordnete Werte der Funktion auftreten, bilden eine Menge B.

2 **DEFINITION: Wird durch eine Funktion jeder Zahl x aus der Menge A eine Zahl y zugeordnet, so nennt man die Menge A den Definitionsbereich der Funktion und die Menge B der zugeordneten Zahlen den Wertebereich oder den Wertevorrat der Funktion.**

Bei vielen Funktionen stimmen Definitionsbereich und Wertevorrat überein (Beispiel 3).

3 In den Beispielen 1 und 3 sind die Zuordnungen durch die Gleichungen $m = 0{,}08\,s$ bzw. $y = 3\,x$ gegeben. Das ist allerdings nicht bei allen Funktionen möglich.

Für die Variablen s und x in den beiden Gleichungen können wir beliebige Zahlen aus dem Definitionsbereich einsetzen. Dabei ergeben sich die jeweils zugeordneten Werte der anderen Variablen. Welchen zugeordneten Wert man errechnet, hängt also von dem Wert ab, den man einsetzt.

3 **DEFINITION: Ist eine Funktion durch eine Gleichung gegeben, so nennt man diejenige Variable, für die man beliebige Zahlen aus dem Definitionsbereich**

C

einsetzen kann, unabhängige Variable (oft mit x bezeichnet). Die andere Variable heißt abhängige Variable (oft mit y bezeichnet).

Man sagt mitunter auch: y ist eine Funktion von x.

Bei der Behandlung der direkten und indirekten Proportionalität haben wir bereits wichtige Beispiele für Funktionen kennengelernt. Dort wurden eindeutige Zuordnungen, also Funktionen, durch Gleichungen der Form

$y = k \cdot x$ bzw. $y = k \cdot \frac{1}{x}$ angegeben.

4 Eine Zusammenstellung einiger Werte der unabhängigen Variablen und der diesen zugeordneten Werte der abhängigen Variablen wie in den Beispielen heißt **Wertetabelle**. Die meisten Funktionen lassen sich jedoch nicht durch Wertetabellen darstellen; denn Definitionsbereich und Wertevorrat bestehen meist aus unendlich vielen Zahlen. Eine Ausnahme macht das Beispiel 2a). Hier ist die betreffende Funktion durch die Wertetabelle vollständig gegeben, da Definitionsbereich und Wertevorrat nur die endlich vielen in der Wertetabelle auftretenden Zahlen enthalten. Die Wertetabelle im Beispiel 3 gibt dagegen die Funktion nicht vollständig an.

Aufgaben C 1 bis 5

5 ZUSAMMENFASSUNG

Wird jeder Zahl aus einer Menge A eindeutig eine Zahl zugeordnet, so heißt diese Zuordnung eine Funktion. Dabei bilden die Zahlen, die als zugeordnete Werte der Funktion auftreten, eine zweite Menge B. Die Menge A heißt Definitionsbereich, die Menge B Wertebereich oder Wertevorrat der Funktion. Enthält der Definitionsbereich nur endlich viele Zahlen, so kann die Funktion vollständig durch die Wertetabelle dargestellt werden.

Häufig können die Werte einer Funktion mit Hilfe einer Gleichung errechnet werden. Die Gleichung enthält zwei Variablen (meist mit x und y bezeichnet) und heißt Funktionsgleichung.

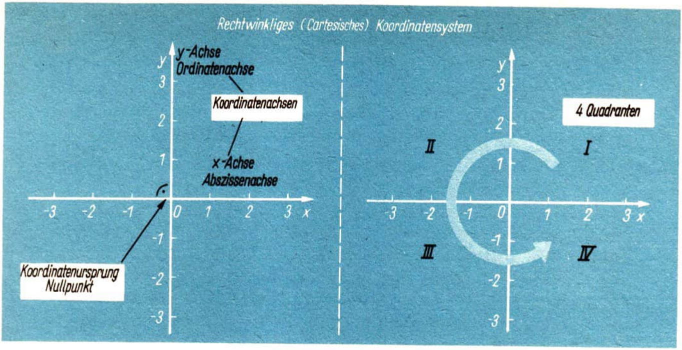
Die eine Variable heißt unabhängige Variable; sie wird oft mit x bezeichnet. Für diese Variable können alle Zahlen aus dem Definitionsbereich beliebig eingesetzt werden.

Die andere Variable heißt abhängige Variable; sie wird oft mit y bezeichnet. Die Werte für die abhängige Variable ergeben sich als Funktionswerte in Abhängigkeit von den für die unabhängige Variable eingesetzten Werten. Dabei nimmt die abhängige Variable alle Werte des Wertevorrats an.

6 Graphische Darstellung von Funktionen

Häufig kann man Funktionen durch eine graphische Darstellung angeben. Hierzu verwendet man ein ebenes **rechtwinkliges Koordinatensystem**, auch Cartesisches Koordinatensystem[1] genannt (Bild C 2).

[1] Cartesius ist der latinisierte Name des französischen Mathematikers René Descartes (1596—1650). Ihm zu Ehren erhielt das rechtwinklige Koordinatensystem seinen Namen.



C 2

Zwei in einer Ebene senkrecht aufeinanderstehende Zahlengeraden bilden die **Koordinatenachsen.**

Die Lage eines jeden Punktes P der Ebene kann durch zwei Zahlen, seine **Koordinaten**, eindeutig angegeben werden. Wir fällen vom Punkt P die Lote auf die **Abszissenachse** und die **Ordinatenachse.** Die Zahlen, die den Fußpunkten der Lote zugeordnet sind, sind die Koordinaten des betreffenden Punktes.

4 Im Bild C 3 wurden folgende Punkte markiert:

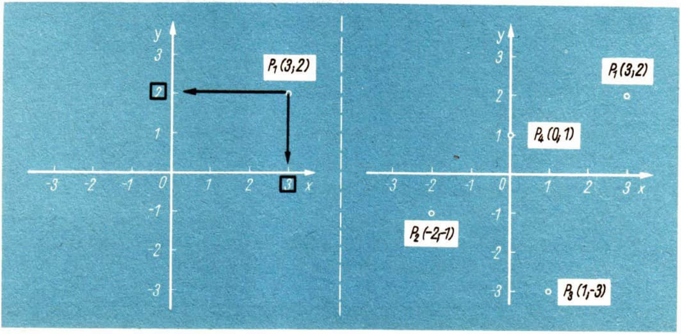
a) P_1 mit der Abszisse 3 und der Ordinate 2. Schreibweise: $P_1\,(3;\,2)$

b) P_2 mit der Abszisse — 2 und der Ordinate — 1. Schreibweise: $P_2\,(-2;\,-1)$

c) P_3 mit der Abszisse 1 und der Ordinate — 3. Schreibweise: $P_1\,(1;\,-3)$

d) P_4 mit der Abszisse 0 und der Ordinate 1. Schreibweise: $P_4\,(0;\,1)$

C 3



Da als Variablen für die Koordinaten von Punkten dieselben Buchstaben benutzt werden wie für die Bezeichnung der Achsen, bezeichnet man einen Punkt P_i mit den Koordinaten x_i und y_i auf folgende Weise: $P_i\,(x_i;\,y_i)$. Wir verabreden also, die Abszisse stets zuerst anzugeben.

4 **DEFINITION: Zwei Zahlen, deren Reihenfolge festliegt, heißen geordnetes Zahlenpaar, kurz Zahlenpaar.**

5 **SATZ: Durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem wird jedem Punkt der Ebene eindeutig ein Zahlenpaar zugeordnet.**

7 Umgekehrt ist es möglich, im rechtwinkligen Koordinatensystem jedem Zahlenpaar eindeutig einen Punkt der Ebene zuzuordnen.

6 **SATZ: Durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem wird jedem Paar reeller Zahlen eindeutig ein Punkt der Ebene zugeordnet.**

Aus den letzten beiden Sätzen folgt, daß die durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem vermittelte Zuordnung zwischen Zahlenpaaren und Punkten der Ebene **umkehrbar eindeutig** oder, wie man auch sagt, **eineindeutig** ist.

1 Zeichne in ein rechtwinkliges Koordinatensystem die folgenden Punkte ein!

$P_1\,(2{,}5;\,3{,}5)$; $P_2\,(-3;\,1)$; $P_3\,(0;\,-4)$; $P_4\,(4;\,-5)$; $O\,(0;\,0)$; $S\,(3;\,1)$; $T\,(1;\,3)$.

Aufgaben C 6 bis 16

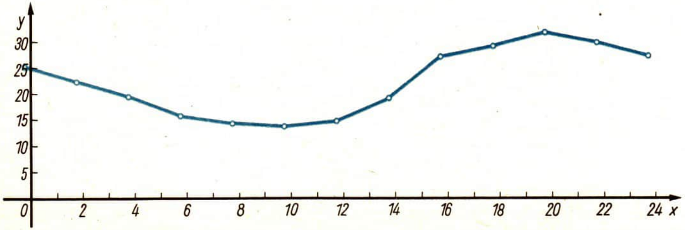
8 Zur graphischen Darstellung einer gegebenen Funktion fertigen wir zunächst eine Wertetabelle für diese Funktion an.

5 Im Laufe eines Sommertages erhielt man durch Messen der Lufttemperatur in zweistündigem Abstand die folgende Wertetabelle:

Uhrzeit	x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatur °C	y	14	11,5	9,5	12	14	22	26,5	27,5	27	25,5	22	19	16

Hier liegt ebenfalls eine Funktion vor. Der Definitionsbereich besteht aus den Zahlen 0, 2, 4, ..., 24. Jeder dieser Zahlen wird eindeutig eine Zahl der zweiten Zeile zugeordnet, die den Wertevorrat der betrachteten Funktion bilden.

C 4



Die so erhaltenen Zahlenpaare veranschaulichen wir durch die ihnen zugeordneten Punkte in einem Koordinatensystem mit passend gewählten Einheiten (Bild C 4). Da die Messungen nur zu den angegebenen Tageszeiten durchgeführt wurden, dürften die eingezeichneten Punkte eigentlich nicht verbunden werden, denn der Temperaturverlauf zwischen den Uhrzeiten ist nicht bekannt. Die verbindenden Geradenstücke machen jedoch die Temperaturveränderung deutlicher sichtbar. Wir hätten die einzelnen Punkte auch durch gekrümmte, ineinander übergehende Kurvenstücke miteinander verbinden können. Die auf den Verbindungsstücken liegenden Punkte geben jedoch auch dann im allgemeinen nicht die zwischen den Meßzeiten herrschenden Temperaturen an.

6 Es soll die graphische Darstellung der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ gezeichnet werden.

Der Definitionsbereich besteht hier aus allen reellen Zahlen. Der Wertevorrat besteht aus allen positiven Zahlen und der Zahl Null, d. h. aus allen nicht negativen reellen Zahlen. Das folgt daraus, daß das Quadrat einer beliebigen reellen Zahl nie negativ ist.

C

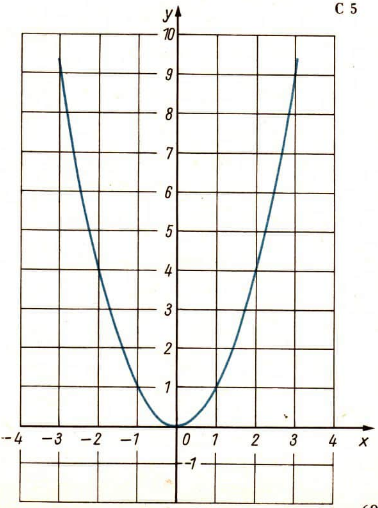
Wir stellen eine Wertetabelle auf und tragen die zugeordneten Punkte in ein Koordinatensystem ein (Bild C 5).

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Die aufgestellte Wertetabelle stellt die betrachtete Funktion nicht vollständig dar. Mit Hilfe der Funktionsgleichung $y = x^2$ können wir nämlich die Koordinaten beliebig vieler Zwischenpunkte ermitteln. Diese liegen aber nicht auf den geradlinigen Verbindungen der eingezeichneten Punkte, sondern auf der in Bild C 5 dargestellten Kurve.

Aufgaben C 17 bis 21

C 5



9 Lineare Funktionen mit der Gleichung $y = mx$ $(m \neq 0)$

Wir betrachten jetzt Funktionen, deren Gleichungen wie bei der direkten Proportionalität die Form $y = mx$ $(m \neq 0)$ haben. Der Definitionsbereich sei die Menge aller reellen Zahlen, und m soll jetzt eine beliebige (also auch negative) von Null verschiedene reelle Zahl sein.

7 Es soll die Funktion mit der Gleichung $y = 2x$ (wir sagen künftig kurz: die Funktion $y = 2x$) graphisch dargestellt werden.

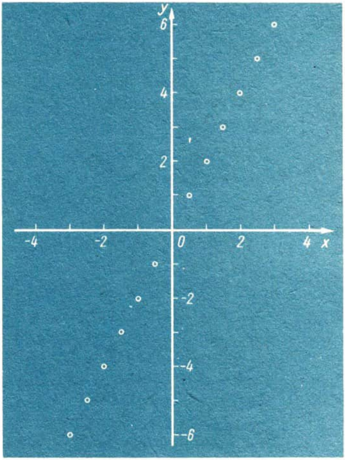
Zunächst stellen wir eine Wertetabelle auf.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

C

Nun tragen wir die Punkte in das Koordinatensystem ein (Bild C 6).

Betrachten wir das Bild C 6, so kommen wir zu der Vermutung, daß alle Punkte auf ein und derselben Geraden liegen. Diese Behauptung muß jedoch bewiesen werden, denn allein mit Hilfe der Abbildung können wir wegen der Zeichenungenauigkeit eine solche Vermutung nicht bestätigen, selbst wenn wir noch weitere Zwischenpunkte einzeichnen. Wir wollen deshalb mit Hilfe unserer Kenntnisse aus der Geometrie einen Beweis führen.



C 6

Behauptung:

7 **Alle Punkte der graphischen Darstellung der Funktion $y = 2x$ liegen auf ein und derselben Geraden, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft.**

Beweis:

1) Durch Einsetzen der Zahl Null für die unabhängige Variable haben wir das Zahlenpaar (0; 0) erhalten, das auch in der Wertetabelle aufgeführt ist. Der Ursprung ist also ein Punkt der graphischen Darstellung.

2) Wir wählen zwei *beliebige* reelle Zahlen a_1 und a_2 und bestimmen durch Einsetzen in die Funktionsgleichung $y = 2x$ die zugeordneten Funktionswerte b_1 und b_2:

$b_1 = 2a_1;\ b_2 = 2a_2.$

Die den Zahlenpaaren $(a_1; b_1)$ und $(a_2; b_2)$ zugeordneten Punkte $R(a_1; b_1)$ und $S(a_2; b_2)$ der graphischen Darstellung sind im Bild C 7a mit den zugehörigen Koordinaten eingezeichnet. Die rechtwinkligen Dreiecke OPR und OQS

sind im Bild C 7b noch einmal dargestellt. Nach der Funktionsgleichung gilt für die Länge ihrer Katheten

im $\triangle\, OPR$: $b_1 = 2\,a_1$ oder $\frac{b_1}{a_1} = 2$,

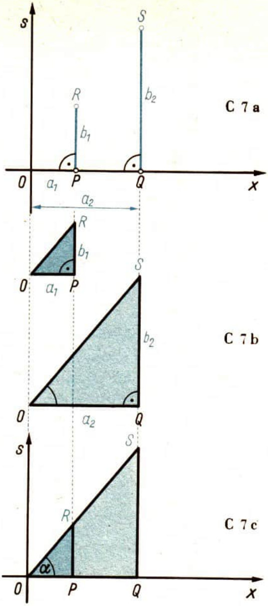
im $\triangle\, OQS$: $b_2 = 2\,a_2$ oder $\frac{b_2}{a_2} = 2$.

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke stimmen also in einem Winkel und im Verhältnis seiner anliegenden Seiten überein.

Nach dem zweiten Ähnlichkeitssatz folgt daraus: $\triangle\, OPR \sim \triangle\, OQS$.

Daher stimmen die beiden Dreiecke in allen Winkeln überein. Es gilt also auch $\sphericalangle\, POR = \sphericalangle\, QOS$.

Die Strecken $\overline{OR}$ und $\overline{OS}$ bilden also beide mit der positiven Richtung der x-Achse den gleichen Winkel α (Bild C 7c), d. h., sie liegen beide auf einer gemeinsamen Geraden. Damit liegen aber auch die beiden Punkte R und S auf einer Geraden durch den Ursprung.



C 7a

C 7b

C 7c

Dieselben Überlegungen, die wir soeben für die beliebig gewählten Punkte R und S der graphischen Darstellung geführt haben, gelten genauso für je zwei beliebige andere Punkte (auch im III. Quadranten). Das bedeutet aber gerade, daß *alle* Punkte der graphischen Darstellung der Funktion $y = 2\,x$ auf derselben Geraden durch den Ursprung liegen.

Damit haben wir die Behauptung bewiesen.

10 Der soeben durchgeführte Beweis läuft genauso ab, wenn wir statt der Funktionsgleichung $y = 2\,x$ eine andere Funktionsgleichung $y = mx$ mit einer beliebigen von Null verschiedenen reellen Zahl m betrachten.

Also liegen die Punkte der graphischen Darstellung jeder Funktion $y = mx$ jeweils auf einer gemeinsamen Geraden. Es genügt daher, zwei Punkte der graphischen Darstellung zu bestimmen, um diese Gerade zeichnen zu können.

Jetzt haben wir also auch die in Klasse 7 aufgestellte Behauptung bewiesen, daß die graphische Darstellung einer direkten Proportionalität Punkte ergibt, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

11 Wir wissen jetzt, daß man bei der graphischen Darstellung einer Funktion

$y = mx$ *nur* solche Punkte erhält, die auf einer bestimmten Geraden liegen. Damit steht aber noch keineswegs fest, daß auch *alle* Punkte der betreffenden Geraden zur graphischen Darstellung der Funktion gehören.

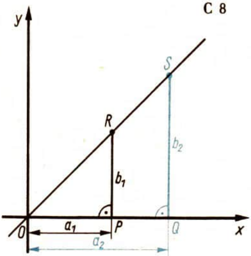
Wir wollen jetzt beweisen, daß dies aber doch der Fall ist, daß also die *Umkehrung* des Satzes C 7 gilt:

Behauptung:

8 **Jeder Punkt der betrachteten Geraden gehört zur graphischen Darstellung der Funktion $y = mx$.**

Beweis:

C 8



Gegeben sei also eine bestimmte Funktion $y = mx$. Wir verbinden die Punkte O und R der graphischen Darstellung durch eine Gerade (Bild C 8). Wir betrachten einen beliebigen, von O und R verschiedenen Punkt $S(a_2; b_2)$ auf dieser Geraden. Da R ein Punkt der graphischen Darstellung der Funktion $y = mx$ ist, erfüllen seine Koordinaten die Funktionsgleichung.

Es gilt also: $b_1 = m\,a_1$ oder $\dfrac{b_1}{a_1} = m$.

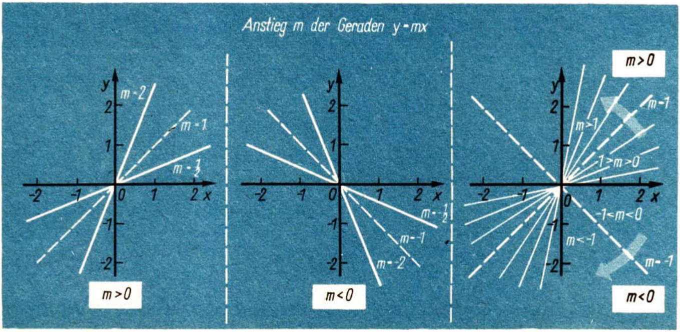
Weiterhin ist $\triangle\, OPR \sim \triangle\, OQS$ (erster Ähnlichkeitssatz). Also gilt auch

$\dfrac{b_2}{a_2} = m$ und damit $b_2 = m \cdot a_2$.

Das bedeutet aber, daß die Koordinaten von S die Funktionsgleichung erfüllen. Der Punkt S gehört also zur graphischen Darstellung der Funktion $y = mx$.

Da der Punkt S ein völlig beliebiger Punkt der Geraden ist, gelten die Überlegungen für *alle* Punkte der Geraden. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

C 9



9 Aus den beiden Behauptungen C 7 und C 8 folgt der Satz:

Die graphische Darstellung einer Funktion, deren Gleichung die Form $y = mx$ ($m \neq 0$) hat, ist eine Gerade durch den Ursprung.

12 Der Verlauf der Geraden hängt vom Koeffizienten m von x ab. Das Bild C 9 veranschaulicht das an folgenden Geraden.

I $y = \frac{1}{2}x \left(m = \frac{1}{2}\right)$ II $y = x$ $(m = 1)$

III $y = 2x$ $(m = 2)$ IV $y = -\frac{1}{2}x \left(m = -\frac{1}{2}\right)$

V $y = -x\ (m = -1)$ VI $y = -2x$ $(m = -2)$

Wir legen fest, den Verlauf der Geraden stets in Richtung wachsender x-Werte, d. h. von links nach rechts, zu betrachten. Dann entnehmen wir dem Bild C 9 folgende **Eigenschaften der Funktionen $y = mx$:**

Ist $m > 0$, so steigt die Gerade vom III. in den I. Quadranten,

ist $m < 0$, so fällt die Gerade vom II. in den IV. Quadranten.

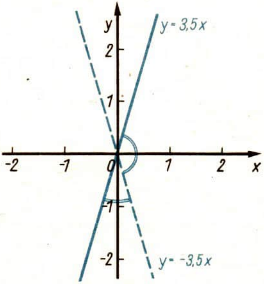
Je größer der Betrag von m ist, desto steiler verläuft die Gerade.

Aus diesen Eigenschaften erkennen wir, daß der Koeffizient m von x ein Maß für das Steigen oder Fallen der Geraden ist.

10 **DEFINITION: Der Koeffizient m heißt der Anstieg der Geraden mit der Gleichung $y = mx$.**

Unterscheiden sich die Anstiege zweier Geraden nur durch das Vorzeichen, so liegen diese Geraden symmetrisch zur x-Achse, aber auch symmetrisch zur y-Achse (Bild C 10).

Aufgaben C 22 bis 27



C 10

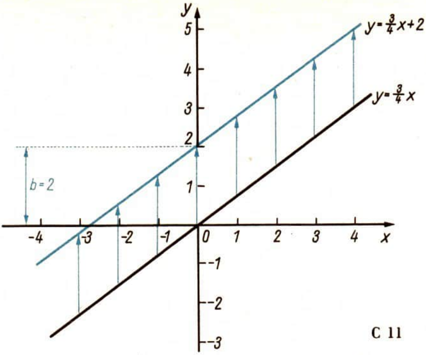
13 Lineare Funktion mit der Gleichung $y = mx + b$ $(m \neq 0,\ b \neq 0)$

8 $y = \frac{3}{4}x + 2$

Schon aus der Gleichung können wir sehen, daß wir die y-Werte dieser Funktion erhalten, indem wir zu den y-Werten der Funktion $y = \frac{3}{4}x$ jeweils 2 addieren.

Wir erhalten also die Punkte der gesuchten graphischen Darstellung, indem wir alle Punkte der Geraden $y = \frac{3}{4}x$ um zwei Einheiten in Richtung der positiven y-Achse verschieben (Bild C 11).

Die graphische Darstellung der Funktion $y = \frac{3}{4}x + 2$ ist also ebenfalls eine Gerade. Sie schneidet die y-Achse im Punkte $+2$ und hat denselben Anstieg wie die Gerade $y = \frac{3}{4}x$, nämlich $m = \frac{3}{4}$.



C 11

In der Funktionsgleichung $y = mx + b$ gibt die Zahl b an, wie weit die zugehörige Gerade gegenüber der Geraden $y = mx$ in Richtung des positiven Teils der y-Achse ($b > 0$) bzw. entgegengesetzt ($b < 0$) verschoben ist.

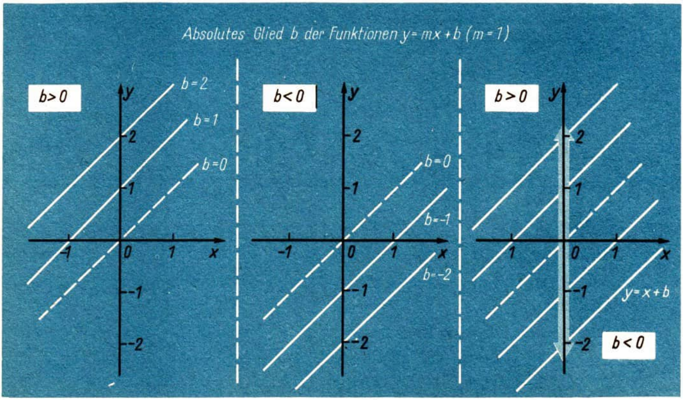
Da die Größe der Verschiebung auch auf der y-Achse abgelesen werden kann, gibt b gleichzeitig an, wo die Gerade $y = mx + b$ die y-Achse schneidet.

Die graphischen Darstellungen aller Funktionen $y = mx + b$ mit demselben Anstieg m stellen eine **Schar** paralleler Geraden dar.

11 **DEFINITION: Eine Funktion, deren Gleichung die Form $y = mx + b$ hat, heißt lineare Funktion.**

Ihre graphische Darstellung ist eine Gerade.

C 12



Der Summand mx heißt das lineare Glied, der Summand b das absolute Glied der Funktionsgleichung.

Die durch Proportionalität gegebenen eindeutigen Zuordnungen sind also spezielle lineare Funktionen, denn sie lassen sich durch Gleichungen der Form $y = mx + b$ mit $m > 0$ und $b = 0$ darstellen.

Sind jedoch bei der Proportionalität für den Definitionsbereich nicht alle reellen Zahlen zugelassen, so erhalten wir als graphische Darstellung keine Gerade als Ganzes, sondern nur Punkte, die allerdings auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir wollen jetzt den Begriff der Proportionalität erweitern, indem wir die Beschränkung des Proportionalitätsfaktors auf positive reelle Zahlen fallenlassen. Damit ist dann jede lineare Funktion $y = mx$ $(m \neq 0)$ eine Proportionalität.

C

14 Die Gleichungen von linearen Funktionen können wir nach den Regeln der Gleichungslehre umformen. Die eindeutige Zuordnung wird dabei nicht verändert.

9 Wir wollen die Funktionsgleichung $y = 3x - 2$ umformen.

$$y = 3x - 2 \quad | \cdot (-5)$$
$$-5y = -15x + 10 \quad | + 15x - 10$$
$$15x - 5y - 10 = 0$$

2 Prüfe durch Einsetzen nach, daß die Gleichung $15x - 5y - 10 = 0$ von denselben Zahlenpaaren erfüllt wird wie die Gleichung $y = 3x - 2$!

12 **DEFINITION: Ist eine Funktionsgleichung nach der abhängigen Variablen aufgelöst, so sagt man, die Gleichung ist in expliziter Form gegeben. In allen anderen Fällen spricht man von impliziter Form.**

10

abhängige Variable	explizit	implizit
y	$y = \frac{3}{7}x + 9$	$y - 9 = \frac{3}{7}x$
s	$s = 4{,}9\,t^2 + 5$	$4{,}9\,t^2 - s = -5$
u	$u = 8 - 4v$	$u - 8 = -4v$

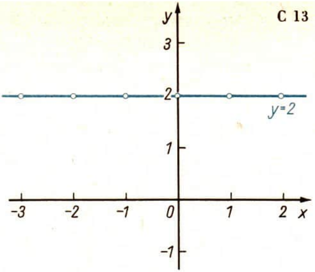
Wenn wir in der Gleichung $y = mx + b$ für m den Wert Null wählen, so erhalten wir spezielle lineare Funktionen.

11 $y = 0 \cdot x + 2$, d. h. $y = 2$

Beim Aufstellen einer Wertetabelle wird jedem Wert von x der Funktionswert 2 zugeordnet:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 0 \cdot x + 2$	2	2	2	2	2

Das Bild C 13 zeigt die graphische Darstellung dieser Funktion. Entsprechendes gilt auch für beliebige andere Werte von b.



C 13

13 **Die graphische Darstellung einer linearen Funktion mit der Gleichung $y = b$ ist eine Parallele zur x-Achse, die die y-Achse im Punkte $(0; b)$ schneidet.**

C

15 Entsprechend ist $x = c$ (c konstante reelle Zahl) die Gleichung einer Parallelen zur y-Achse, die die x-Achse im Punkt $(c; 0)$ schneidet. Die Gleichung $x = c$ (mit x als unabhängiger Variabler) stellt aber keine Funktion dar, denn dem Wert c der Variablen x werden unendlich viele Werte für y zugeordnet. Funktionen sind aber stets *eindeutige* Zuordnungen.

16 ZUSAMMENFASSUNG

Funktionen, deren Gleichungen die explizite Form $y = mx + b$ haben, heißen lineare Funktionen. Dabei bezeichnen m und b feste reelle Zahlen. Die graphischen Darstellungen dieser Funktionen sind Geraden.

Der Anstieg m bestimmt die Richtung der Geraden, das absolute Glied b gibt den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse an.

Ist $b = 0$, so verläuft die Gerade durch den Ursprung. Ihre Gleichung hat dann die Form $y = mx$. Das bedeutet, daß y proportional zu x ist.
Die Proportionalität ist also ein spezieller Fall der linearen Funktion.

Aufgaben C 28 bis 45

Lineare Gleichungen

17 Nullstellen linearer Funktionen

Im Abschnitt über lineare Funktionen haben wir Gleichungen mit zwei Variablen kennengelernt. Durch einfache Umformungen lassen sich diese Gleichungen auf die sogenannte *explizite* Form $y = mx + b$ bringen. Dabei bezeichnen bei einer bestimmten Gleichung die Buchstaben x und y die Variablen und die Buchstaben m und b feste reelle Zahlen, wir sagen auch **Konstanten.**

14 **DEFINITION: Die Funktionsgleichungen der linearen Funktionen heißen lineare Gleichungen mit zwei Variablen.**

Zur graphischen Darstellung der Funktionen haben wir aus diesen Gleichungen Zahlenpaare errechnet und sie zu Wertetabellen zusammengestellt. Alle diese Paare *erfüllen* die jeweilige Gleichung, d. h., sie machen die Gleichung zu einer wahren Aussage, wenn man die Zahlen der Paare für die betreffenden Variablen in die Gleichung einsetzt.

12 Gegeben ist die Gleichung $y = 2x - 4$. Gesucht sind Zahlenpaare, die diese Gleichung erfüllen. **a)** $(-2; -8)$ **b)** $(0; -4)$ **c)** $(2; 0)$

Wir setzen die Zahlen für die betreffenden Variablen ein:

a) $-8 = 2 \cdot (-2) - 4$ **b)** $-4 = 2 \cdot 0 - 4$; **c)** $0 = 2 \cdot 2 - 4$

Es gibt unendlich viele solcher Paare, denn man kann für x jede beliebige reelle Zahl einsetzen und den zugehörigen Funktionswert von y ausrechnen.

15 **DEFINITION: Jedes Zahlenpaar, das eine vorgegebene Gleichung mit zwei Variablen erfüllt, heißt eine Lösung dieser Gleichung.**
Die Menge aller Lösungen heißt die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung.

C

3 Gib jeweils fünf Lösungen der folgenden Gleichungen an!

a) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ **b)** $2x + 3y - 4 = 0$ **c)** $y = 0{,}2\,x + 0{,}7$

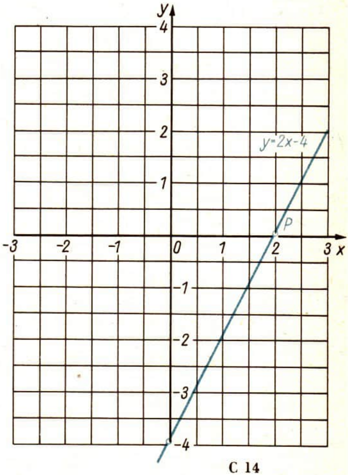
18 Jedem Zahlenpaar der Lösungsmenge ist ein Punkt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem zugeordnet. Die graphische Darstellung einer linearen Funktion ist also nichts anderes als die graphische Darstellung der Lösungsmenge der zugehörigen linearen Gleichung.

Ist in einer linearen Gleichung

$y = mx + b$

der Koeffizient m von Null verschieden, so verläuft die zugehörige Gerade nicht parallel zur x-Achse. Die Gerade schneidet also die x-Achse in genau einem Punkt P.

13 Die Koordinaten desjenigen Punktes P sind zu bestimmen, in dem die zur Gleichung $y = 2\,x - 4$ gehörende Gerade die Abszissenachse schneidet (Bild C 14). Die Ordinate dieses Punktes ist 0, da der Punkt auf der x-Achse liegt.



C 14

Aus der graphischen Darstellung lesen wir die Abszisse $x \approx 2$ ab. (Wegen der Zeichenungenauigkeit haben wir diesen Wert als Näherungswert gekennzeichnet.)

Rechnerisch können wir die Abszisse x des Punktes P genau ermitteln. Der Punkt P hat die Koordinaten x und 0. Da der Punkt P auf der Geraden liegt, gehört das Paar $(x; 0)$ zur Lösungsmenge der Gleichung $y = 2\,x - 4$. Es erfüllt also die Gleichung. Wir erhalten durch Einsetzen folgende **lineare Gleichung mit einer Variablen:**

$0 = 2x - 4.$

Wir lösen nach x auf:

$0 = 2x - 4$	$\mid +4$	*Probe:*
$4 = 2x$	$\mid : 2$	$0 = 2 \cdot 2 - 4$
$2 = x$		$0 = 0$
$x = 2$		

Die Gerade schneidet also die x-Achse im Punkt $P\,(2;\,0)$.
Die Probe zeigt, daß wir durch Einsetzen eine wahre Aussage erhalten.

16 C

DEFINITION: Der Punkt P, in dem die graphische Darstellung einer linearen Funktion die x-Achse schneidet, heißt Nullstelle der Funktion. Dort ist der Funktionswert, d. h. die Ordinate des Punktes P, gleich Null.

Man findet also die Abszisse der Nullstelle, indem man in die Gleichung $y = mx + b$ für y die Zahl Null einsetzt. Dadurch entsteht eine lineare Gleichung mit einer Variablen. Diese wird nach x aufgelöst.

19 ZUSAMMENFASSUNG

Die Funktionsgleichungen der linearen Funktionen $y = mx + b$ $(m \neq 0)$ bezeichnet man auch als lineare Gleichungen mit zwei Variablen (x und y).
Alle Zahlenpaare, die eine lineare Gleichung mit zwei Variablen erfüllen, heißen Lösungen dieser Gleichung. Sie bilden die Lösungsmenge der betrachteten Gleichung.
In der Lösungsmenge einer jeden linearen Gleichung $y = mx + b$ $(m \neq 0)$ liegt genau ein Zahlenpaar $(x;\,0)$. Der diesem Zahlenpaar zugeordnete Punkt heißt Nullstelle der durch $y = mx + b$ $(m \neq 0)$ dargestellten linearen Funktion.
Die Abszisse x der Nullstelle findet man als Lösung der linearen Gleichung $0 = mx + b$ $(m \neq 0)$.
Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen hat unendlich viele Lösungen.
Die lineare Gleichung $0 = mx + b$ $(m \neq 0)$ hat genau eine Lösung.

Aufgabe C 46

20 Rechnerische Lösung linearer Gleichungen mit einer Variablen

Zur Wiederholung

Wir haben in Klasse 7 Regeln für das Umformen von Gleichungen mit einer Variablen kennengelernt. Diese Regeln wurden dort für rationale Zahlen aufgestellt. Sie gelten aber ebenso im Bereich der reellen Zahlen.

1. Vertauscht man die Seiten einer Gleichung, so entsteht eine äquivalente Gleichung.
2. Addiert oder subtrahiert man auf beiden Seiten einer Gleichung eine reelle

Zahl oder ein Vielfaches ax der Variablen x (a reelle Zahl), so entsteht eine äquivalente Gleichung.

3. Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit derselben von Null verschiedenen reellen Zahl, so entsteht eine äquivalente Gleichung.
4. Dividiert man beide Seiten einer Gleichung durch dieselbe von Null verschiedene Zahl, so entsteht eine äquivalente Gleichung.

Dabei heißen zwei Gleichungen äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben.

Aufgaben C 47 und 48

21 *Gleichungen, die Klammern enthalten*

$\boxed{14}$ Gegeben sei die Gleichung

$$x - (8x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 5).$$

Auflösen der Klammern: $x - 8x + 69 + 6x - 50 = 2x - x + 5$

Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} -x + 19 &= x + 5 && \mid -19 - x \\ -2x &= -14 && \mid :(-2) \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 7}} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 7 - (8 \cdot 7 - 69) + (6 \cdot 7 - 50) &= 2 \cdot 7 - (7 - 5) \\ 7 + 13 - 8 &= 14 - 2 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine wahre Aussage.

$\boxed{15}$ Gegeben sei die Gleichung:

$$(x - 3)(2x - 5) - 4(x - 2) = 2(x - 1)^2 - 12.$$

Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 6x + 15 - 4x + 8 &= 2(x^2 - 2x + 1) - 12 \\ 2x^2 - 5x - 6x + 15 - 4x + 8 &= 2x^2 - 4x + 2 - 12 \end{aligned}$$

Zusammenfassen:

$$2x^2 - 15x + 23 = 2x^2 - 4x - 10 \quad \mid -2x^2$$

Wir können nun auf beiden Seiten der Gleichung $2x^2$ subtrahieren; denn unabhängig davon, welche Zahl wir für x einsetzen, bedeutet das stets eine Subtraktion derselben Zahl auf beiden Seiten. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} -15x + 23 &= -4x - 10 && \mid +4x - 23 \\ -11x &= -33 && \mid :(-11) \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 3}} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} (3 - 3)(2 \cdot 3 - 5) - 4(3 - 2) &= 2(3 - 1)^2 - 12 \\ 0 \cdot 1 - 4 \cdot 1 &= 2 \cdot 2^2 - 12 \\ -4 &= -4 \end{aligned}$$

Im Beispiel 15 traten Glieder mit x^2 auf. Allerdings konnten wir sie durch Subtraktion wieder beseitigen. Dadurch erhielten wir eine lineare Gleichung. Treten in Gleichungen höhere Potenzen von x auf und lassen sich diese Potenzen nicht beseitigen, so spricht man von **nichtlinearen Gleichungen.** Solche Gleichungen können wir aber mit unseren bisherigen Kenntnissen nicht lösen.

C

16 Gegeben sei die Gleichung

$$(x - 3)(x + 4) = (x - 7)(x - 3).$$

Ausmultiplizieren: $x^2 + 4x - 3x - 12 = x^2 - 3x - 7x + 21$

Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 12 &= x^2 - 10x + 21 &&\mid -x^2 + 10x + 12 \\ 11x &= 33 &&\mid :11 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 3}} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} (3 - 3)(3 + 4) &= (3 - 7)(3 - 3) \\ 0 \cdot 7 &= -4 \cdot 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Wir versuchen nun, einen anderen Lösungsweg für die Gleichung im Beispiel 16 einzuschlagen, indem wir beide Seiten der Gleichung durch den Faktor $x - 3$ dividieren:

$$\begin{aligned} (x - 3)(x + 4) &= (x - 7)(x - 3) &&\mid :(x - 3) \\ x + 4 &= x - 7 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat aber keine Lösung, denn für keine reelle Zahl x gilt $x + 4 = x - 7$. Dagegen hatte die ursprünglich gegebene Gleichung die Lösung 3. Die Gleichungen

$(x - 3)(x + 4) = (x - 7)(x - 3)$ und $x + 4 = x - 7$

sind also nicht äquivalent.

17 **Die beiden Seiten einer gegebenen Gleichung dürfen nicht durch die Variable x dividiert werden. Das trifft auch zu, wenn x im Divisor in Verbindung mit anderen Zahlen oder Variablen steht, z. B. als Faktor oder in einer Klammer.**

Betrachten wir hierzu noch ein weiteres Beispiel.

17 Gegeben sei die Gleichung $x + 2 = x + 3$.

Diese Gleichung hat keine Lösung.

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit x:

$$x(x + 2) = x(x + 3).$$

Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x^2 + 3x &&\mid -x^2 \\ 2x &= 3x &&\mid -3x \\ -x &= 0 &&\mid :(-1) \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 0}} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 0 + 2 &= 0 + 3 \\ 2 &= 3 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine falsche Aussage. Die Zahl 0 ist zwar Lösung der Gleichung $x(x + 2) = x(x + 3)$, aber nicht Lösung der ursprünglich gegebenen Gleichung $x + 2 = x + 3$. Die beiden Gleichungen sind also **nicht äquivalent.**

Die Probe hat also nicht nur den Zweck, die Richtigkeit des Rechenganges zu überprüfen, sondern sie soll auch zeigen, ob alle gefundenen Zahlen wirklich Lösungen der ursprünglich gegebenen Gleichung sind.

Aufgaben C 19 bis 52

22 *Lineare Gleichungen mit Brüchen*

$\boxed{18}$ Gegeben sei die Gleichung $3x - \frac{2x+5}{7} = 16 - \frac{7x+19}{2} - \frac{2x+1}{3}$.

Es treten mehrere Brüche auf. Die Variable x ist aber in allen Brüchen nur jeweils im Zähler enthalten.

Multiplikation mit dem Hauptnenner 42: $$42\left(3x - \frac{2x+5}{7}\right) = 42\left(16 - \frac{7x+19}{2} - \frac{2x+1}{3}\right)$$

Ausmultiplizieren: $$126x - \frac{42(2x+5)}{7} = 672 - \frac{42(7x+19)}{2} - \frac{42(2x+1)}{3}$$

Kürzen: $$126x - 6(2x+5) = 672 - 21(7x+19) - 14(2x+1)$$

Ausmultiplizieren: $$126x - 12x - 30 = 672 - 147x - 399 - 28x - 14$$

Zusammenfassen: $$114x - 30 = -175x + 259 \quad | +175x + 30$$
$$289x = 289$$
$$\underline{\underline{x = 1}}$$

(4) Führe die Probe selbst aus!

In den folgenden Beispielen tritt die Variable auch in Nennern von Brüchen auf.

$\boxed{19}$ Gegeben ist die Gleichung $\frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9}$.

Es treten Brüche auf. Die Variable x ist nur in Nennern enthalten. Wir müssen von vornherein $x \neq 0$ annehmen, da für $x = 0$ die Gleichung keinen Sinn hat.

Multiplikation mit dem Hauptnenner 18 x: $$18x \cdot \frac{9}{x} + 18x \cdot \frac{1}{2} = 18x \cdot \frac{10}{x} + 18x \cdot \frac{4}{9}$$

$$162 + 9x = 180 + 8x \quad | -8x - 162$$
$$\underline{\underline{x = 18}}$$

(5) Führe die Probe selbst aus!

$\boxed{20}$ Gegeben sei die Gleichung $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-7}{x-4}$.

Sie ist eine Proportion, in der die Variable x in den Zählern und Nennern auftritt. Für $x = 2$ und $x = 4$ hat die Gleichung keinen Sinn. Die Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x-2)(x-4)$ bedeutet hier den Übergang zur Produktgleichung.

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-7}{x-4} \quad | \cdot (x-2)(x-4)$$

$$\frac{(x-2)(x-4)(x+3)}{x-2} = \frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{x-4}$$

Kürzen: $(x-4)(x+3) = (x-2)(x-7)$

Das ist die Produktgleichung.

Ausmultiplizieren: $x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 - 7x - 2x + 14$

Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 &= x^2 - 9x + 14 \quad &&| -x^2 + 9x + 12 \\ 8x &= 26 &&| :8 \\ x &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

(6) Führe die Probe selbst aus!

Aufgaben C 53 bis 63

23 Bisher traten in den Gleichungen außer der Variablen x nur reelle Zahlen auf. In den folgenden Gleichungen werden neben x auch andere Variablen (a, b, c, m, n u. a.) vorkommen. Wenn nichts anderes festgelegt ist, wollen wir die Gleichungen jedoch stets nach x auflösen. Die anderen Variablen bezeichnen dann jeweils gegebene reelle Zahlen.

C

[21] Gegeben sei die Gleichung:

$$\begin{aligned} 5x + a &= 2b - 3a \\ 5x &= 2b - 4a \quad | :5 \\ x &= \frac{2b-4a}{5} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{2b-4a}{5} + a &= 2b - 3a \\ 2b - 4a + a &= 2b - 3a \\ 2b - 3a &= 2b - 3a \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist stets eine wahre Aussage, unabhängig von den für a bzw. b eingesetzten Zahlen.

(7) Löse die Gleichung im Beispiel 21 nach a auf und betrachte x und b als fest gegeben!

[22] Gegeben sei die Gleichung $a - bx = cx - d$ (mit $b \neq -c$).

$$\begin{aligned} a - bx &= cx - d \quad &&| -cx - a \\ -bx - cx &= -a - d \end{aligned}$$

Zusammenfassen durch Ausklammern von x:

$$\begin{aligned} x(-b-c) &= -a - d \quad &&| :(-b-c) \\ x &= \frac{-a-d}{-b-c} \\ x &= \frac{a+d}{b+c} \end{aligned}$$

(8) Warum wurde $b \neq -c$ vorausgesetzt? Führe die Probe selbst aus!

Aufgaben C 64 bis 74

24 Graphische Lösung linearer Gleichungen mit einer Variablen

Um eine lineare Gleichung mit einer Variablen graphisch zu lösen, bringen wir sie zunächst durch Umformungen nach den üblichen Regeln auf die Form $0 = mx + b$ bzw. $mx + b = 0$ $(m \neq 0)$. Von dieser Gleichung gehen wir zu der Funktionsgleichung $y = mx + b$ über. Wir wissen, daß es unter den unendlich vielen Zahlenpaaren, die diese Funktionsgleichung erfüllen, genau

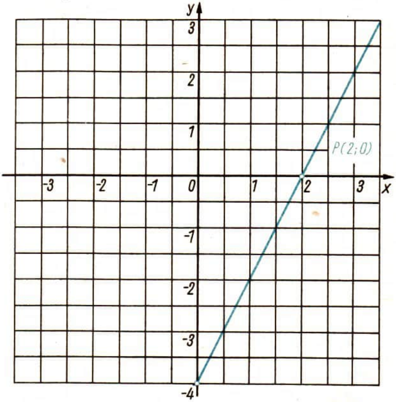
ein Paar der Form (x; 0) gibt. Dieses Zahlenpaar gibt aber die Koordinaten der Nullstelle der Funktion $y = mx + b$ an. Dabei ist x die Abszisse der Nullstelle.
Setzen wir diese Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, so erhalten wir $0 = mx + b$.

Das bedeutet aber, daß die Abszisse x der Nullstelle Lösung der gegebenen linearen Gleichung mit einer Variablen ist.

23 Die Gleichung $2x - 4 = 0$ ist graphisch zu lösen.

a) Übergang zur Funktionsgleichung $y = 2x - 4$.

b) Graphische Darstellung (Bild C 15).



C 15

c) Aus der graphischen Darstellung lesen wir die Abszisse der Nullstelle ab und damit die angenäherte Lösung der gegebenen Gleichung $2x - 4 = 0$:

$x \approx 2$.

Probe: $2 \cdot 2 - 4 = 0$
$0 = 0$

Aus der Probe entnehmen wir, daß wir in diesem Fall genau die Lösung gefunden haben. Wegen der Zeichenungenauigkeit werden wir das jedoch nicht immer erreichen können.

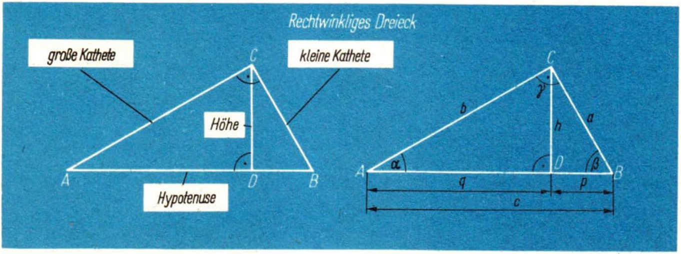
Aufgaben C 75

D. SATZGRUPPE DES PYTHAGORAS, QUADRATZAHLEN UND -WURZELN

D

Sätze, die für rechtwinklige Dreiecke gelten

1 Jedes Dreieck hat drei Höhen. Wenn wir im folgenden von *der* Höhe im rechtwinkligen Dreieck sprechen, meinen wir stets die Höhe vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse. Die **Hypotenusenabschnitte** $\overline{AD}$ bzw. $\overline{DB}$ nennen wir zugehörig zur Kathete $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ (Bild D 1).



D 1

Die Höhe $\overline{DC}$ teilt das Dreieck ABC in zwei weitere rechtwinklige Dreiecke. In der folgenden Tabelle sind die Seiten und Winkel der drei rechtwinkligen Dreiecke zusammengestellt.

	$\triangle ABC$	$\triangle ADC$	$\triangle DBC$
Hypotenuse	AB	AC	BC
Katheten	AC und BC	AD und DC	DC und DB
rechter Winkel	$\sphericalangle BCA$	$\sphericalangle ADC$	$\sphericalangle CDB$
Winkel α	$\sphericalangle CAB$	$\sphericalangle CAD$	$\sphericalangle BCD$
Winkel β.............	$\sphericalangle ABC$	$\sphericalangle DCA$	$\sphericalangle DBC$

1 Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die Winkel α und β in allen drei rechtwinkligen Dreiecken (Bild D 1) vorkommen.

a) Begründe diese Tatsache! **b)** Wiederhole die Ähnlichkeitssätze und überprüfe die drei rechtwinkligen Dreiecke auf Ähnlichkeit!

Die Übung 1 führt zu der Feststellung:

Die drei rechtwinkligen Dreiecke im Bild D 1 stimmen paarweise in den entsprechenden Winkeln überein. Sie sind deshalb paarweise ähnlich.

Es gilt: $\triangle ABC \sim \triangle ADC$; $\triangle ABC \sim \triangle DBC$; $\triangle ADC \sim \triangle DBC$.

D

2 Fertige dir zwei kongruente Modelle eines rechtwinkligen Dreiecks an! Zerschneide ein Modell davon längs der Höhe $\overline{DC}$! Bringe die drei rechtwinkligen Dreiecke paarweise in Ähnlichkeitslage!

2 Mittlere Proportionale

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgen Proportionen.
Die Dreiecke ABC und ADC sind ähnlich. Wir bringen die beiden Dreiecke in Ähnlichkeitslage.

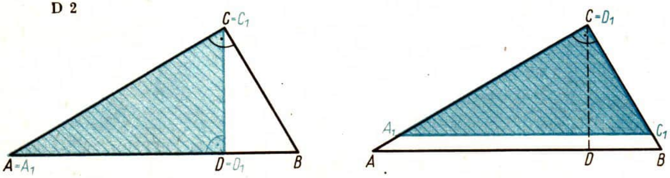
Aus dem Bild D 2 entnehmen wir:

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A_1C_1} : \overline{A_1D_1}$.

Wegen $\overline{A_1C_1} = \overline{AC}$ und $\overline{A_1D_1} = \overline{AD}$ ergibt sich:

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD}. \qquad (1)$$

D 2



1 **Die Hypotenuse im Dreieck ABC verhält sich zur großen Kathete im Dreieck ABC wie die Hypotenuse im Dreieck ADC zur großen Kathete im Dreieck ADC. In der Proportion $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD}$ sind die Innenglieder gleich.**

3 Suche weitere Proportionen und stelle sie übersichtlich zusammen! Verwende zur Veranschaulichung deine Modelle! Kennzeichne die Proportionen, in denen die Innenglieder gleich sind!

2 **DEFINITION: Sind in einer Proportion die Innenglieder gleich, so heißt ein solches Glied mittlere Proportionale.**

Verwendet man für die Bezeichnung der Strecken statt der Endpunkte Variablen für die Maßzahlen der Strecken, z. B. für $\overline{AB}$ die Variable c, (vgl. Bild D 3), so geht die Proportion (1) über in

$$c : b = b : q. \tag{2}$$

4 Schreibe die Proportionen, die du in Übung 3 gebildet hast, in dieser Weise!

Die Zahl b ist also mittlere Proportionale zu den Zahlen c und q. Man nennt b auch das **geometrische Mittel** der Zahlen c und q.
Allgemein gilt:

3 **DEFINITION: Eine reelle Zahl q heißt mittlere Proportionale zu den reellen Zahlen x und y oder geometrisches Mittel der Zahlen x und y, wenn gilt:**

$$\boldsymbol{x : q = q : y.}$$

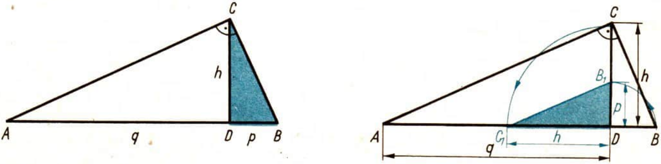
3 Der Höhensatz

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Bild D 3). Wir denken uns das rechtwinklige Teildreieck DBC in die Ähnlichkeitslage DB_1C_1 gedreht. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und DBC folgt:

bei Bezeichnung der Strecken durch ihre Endpunkte:	bei Verwendung von Variablen für die Maßzahlen der Strecken:
$\overline{AD} : \overline{DC} = \overline{DC} : \overline{DB}$	$q : h = h : p$
$\overline{DC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$ (3)	$h^2 = q \cdot p$ (4)

Unter $\overline{DC}^2$ verstehen wir den Flächeninhalt des Quadrates mit der Seite $\overline{DC}$ und unter $\overline{AD} \cdot \overline{DB}$ den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$.

D 3

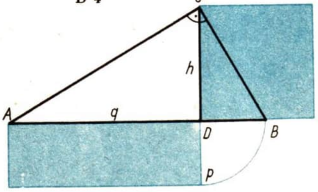


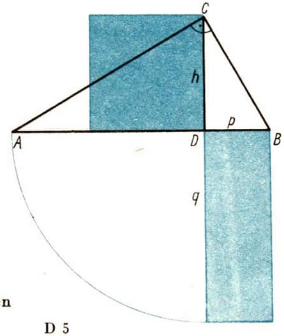
Wir können dann die Gleichung (3) folgendermaßen formulieren (Bilder D 4 und D 5):

HÖHENSATZ:

4 **In jedem rechtwinkligen Dreieck *ABC* ($\sphericalangle BCA = 90°$) ist das Quadrat über der Höhe $\overline{DC}$ flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$.**

D 4





D 5

D

Die Gleichung (4) führt zu einer anderen Formulierung des Höhensatzes:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Maßzahl der Höhe *h* gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der Hypotenusenabschnitte *p* und *q*.

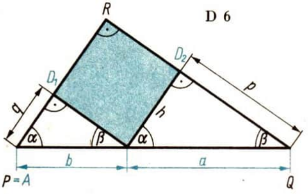
$$h^2 = p \cdot q.$$

Eine weitere Formulierung des Höhensatzes lautet:

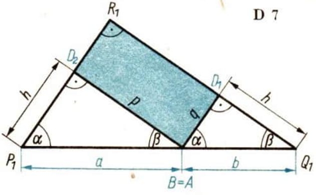
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe mittlere Proportionale zu den Hypotenusenabschnitten $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$.

4 Wir wollen den Höhensatz noch auf einem anderen Wege beweisen. Wir ordnen die beiden Teildreiecke *ADC* und *DBC* nebeneinander wie in den Bildern D 6 und D 7 an und vervollständigen beide Figuren zu größeren rechtwinkligen Dreiecken. Die beiden Hypotenusen der Teildreiecke bilden zusammen in beiden Anordnungen gleich lange Strecken. Es gilt $\overline{PQ} = \overline{P_1Q_1}$. Die beiden Dreiecke PQR und $P_1Q_1R_1$ stimmen weiterhin in den beiden Winkeln α und β

D 6



D 7



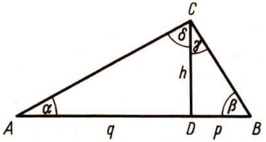
überein. Daraus folgt, daß beide Dreiecke einen rechten Winkel haben und daß beide Dreiecke kongruent sind: $\triangle PQR \cong \triangle P_1Q_1R_1$. Dann sind beide Dreiecke auch flächengleich. Die beiden gegebenen Teildreiecke haben in beiden Figuren jedoch zusammen den gleichen Flächeninhalt. Deshalb müssen die Flächen, die die beiden Anordnungen zu den rechtwinkligen Dreiecken PQR bzw. $P_1Q_1R_1$ ergänzen, flächengleich sein. Daraus folgt:
Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

5 Die Umkehrung des Höhensatzes

5 **Wenn in einem Dreieck die Beziehung $h^2 = p \cdot q$ gilt, so ist das betreffende Dreieck rechtwinklig.**

Beweis:

Im Dreieck ABC gelte $h^2 = p \cdot q$ (Bild D 8). Aus der Proportion $q : h = h : p$ und dem Satz:
„Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen"
folgt: $\triangle ADC \sim \triangle DBC$.

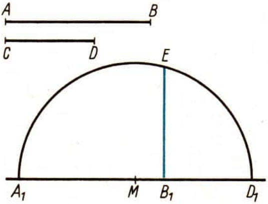


D 8

Dann sind alle entsprechenden Winkel der beiden Dreiecke gleich.

Aus $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$
sowie $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$
folgt $2\gamma + 2\delta = 180°$
bzw. $\gamma + \delta = 90°$.

Damit ist gezeigt: Die Beziehung $h^2 = p \cdot q$ gilt nur für rechtwinklige Dreiecke.
Zusammenfassend können wir also sagen:



D 9

6 **SATZ: Der Höhensatz gilt dann und nur dann, wenn ein Dreieck rechtwinklig ist.**

6 Den Höhensatz wenden wir u. a. an, wenn wir die mittlere Proportionale zu zwei gegebenen Strecken konstruieren oder wenn wir ein gegebenes Rechteck in ein flächengleiches Quadrat (oder umgekehrt) verwandeln sollen.

1 Gegeben seien die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Gesucht ist die mittlere Proportionale.
Konstruktion (Bild D 9):
Wir zeichnen eine Gerade und wählen darauf einen Punkt A_1. Von A_1 aus

D

tragen wir die Strecke $\overline{AB}$ ab. Wir erhalten den Punkt B_1. Von B_1 aus tragen wir die Strecke $\overline{CD}$ ab und erhalten den Punkt D_1. Über der Strecke $\overline{A_1D_1}$ errichten wir den THALESkreis und im Punkt B_1 konstruieren wir die Senkrechte. Der Schnittpunkt der Senkrechten mit der Peripherie des THALESkreises sei E. Dann ist $\overline{B_1E}$ die gesuchte mittlere Proportionale zu den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

2 Ein gegebenes Rechteck $ABCD$ ist in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

Konstruktion:

Wir verlängern $\overline{AD}$ über D hinaus und $\overline{CD}$ über D hinaus. Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{AD}$ tragen wir von D aus die Strecke $\overline{DC}$ ab und erhalten den Punkt E. Über $\overline{AE}$ zeichnen wir den THALESkreis.

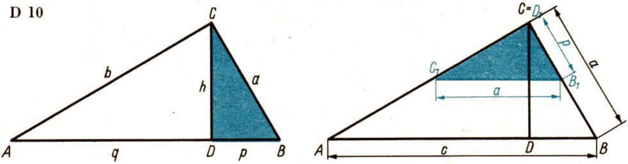
Der Schnittpunkt der Peripherie dieses Halbkreises mit der Verlängerung der Strecke $\overline{CD}$ sei F. Die Strecke $\overline{DF}$ ist eine Seite des gesuchten Quadrates.

7 Der Kathetensatz

In dem rechtwinkligen Dreieck ABC im Bild D 10 werden durch die Höhe $\overline{CD}$ zwei rechtwinklige Teildreiecke gebildet. Die Dreiecke ABC und CDB sind ähnlich. Beide Dreiecke wurden in Ähnlichkeitslage gebracht. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und CDB folgt:

bei Bezeichnung der Strecken durch ihre Endpunkte:	bei Verwendung von Variablen für die Maßzahlen der Strecken:
$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{BD}$	$c : a = a : p$
$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BD}$ (1)	$a^2 = c \cdot p$ (2)

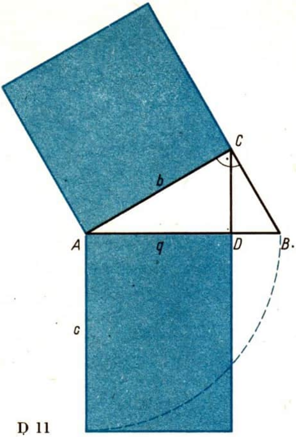
D 10



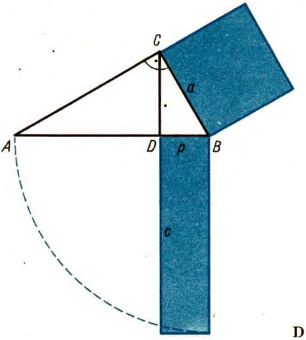
Entsprechend würden wir wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und ADC auch erhalten:

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD}$	$c : b = b : q$
$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$	$b^2 = c \cdot q$

Unter $\overline{BC}^2$ bzw. $\overline{AC}^2$ verstehen wir die Flächeninhalte der Quadrate mit der Seite $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$. Unter $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$ bzw. $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ verstehen wir die Flächeninhalte der Rechtecke mit den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BD}$ bzw. $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$. Die Gleichung (1) führt zu folgender Formulierung des Kathetensatzes (Bilder D 11 und D 12):



D 11



D 12

KATHETENSATZ:

7 **In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt.**

Die Gleichung (2) führt zu einer anderen Formulierung des Kathetensatzes:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Maßzahl der einen Kathete gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der Hypotenuse und des zugehörigen Hypotenusenabschnitts.

$a^2 = c \cdot p; \;\; b^2 = c \cdot q$

Eine weitere Formulierung des Kathetensatzes lautet:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete die mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt.

8 Die Umkehrung des Kathetensatzes

8 **Wenn in einem Dreieck die Beziehung $a^2 = c \cdot p$ oder $b^2 = c \cdot q$ gilt, so ist das betreffende Dreieck rechtwinklig.**

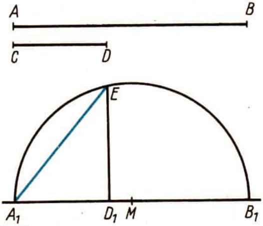
5 Um diesen Satz zu beweisen, kann man den Beweis für die Umkehrung des Höhensatzes sinngemäß übertragen. Führe den Beweis selbständig durch!

Es ergibt sich also zusammenfassend:

9 **SATZ: Der Kathetensatz gilt dann und nur dann, wenn ein Dreieck rechtwinklig ist.**

Den Kathetensatz wenden wir u. a. an, wenn wir die mittlere Proportionale zu zwei gegebenen Strecken konstruieren sollen oder wenn man ein gegebenes Rechteck in ein flächengleiches Quadrat (oder umgekehrt) verwandeln will.

3 Eine Strecke $\overline{AB}$ habe die Länge 4,5 cm und eine Strecke $\overline{CD}$ sei 1,8 cm lang. Es ist die mittlere Proportionale unter Verwendung des Kathetensatzes zu konstruieren.



D 13

Wir zeichnen eine Gerade und wählen darauf einen Punkt A_1 (Bild D 13). Von A_1 aus tragen wir die Strecke $\overline{AB}$ ab und erhalten den Punkt B_1. Über $\overline{A_1B_1}$ zeichnen wir den THALESkreis. Von A_1 aus tragen wir die Strecke $\overline{CD}$ so ab, daß der Punkt D_1, den wir erhalten, im Innern der Strecke $\overline{A_1B_1}$ liegt. Die Senkrechte in D_1 auf $\overline{A_1B_1}$ schneidet den Halbkreis in dem Punkt E. Die Strecke $\overline{A_1E}$ ist die gesuchte mittlere Proportionale zu den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

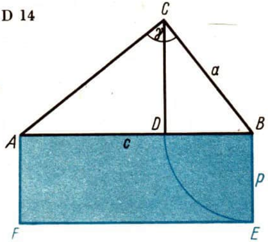
D

4 Ein gegebenes Quadrat mit der Seitenlänge 2,7 cm soll mit Hilfe des Kathetensatzes in ein flächengleiches Rechteck verwandelt werden, dessen eine Seite 4,5 cm lang ist.

Konstruktion (Bild D 14):

Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit folgenden Stücken: $\gamma = 90°$; $a = 2,7$ cm; $c = 4,5$ cm. Hierzu zeichnen wir zunächst die Kathete $\overline{CB}$, tragen in C den rechten Winkel an und schlagen um B einen Kreisbogen mit c. Im Schnittpunkt mit dem freien Schenkel von γ erhalten wir den Punkt A. Dann fällen wir von C auf AB das Lot und erhalten den Fußpunkt D. Wir errichten in B auf AB die Senkrechte und tragen auf dieser die Länge des zu a gehörenden Hypotenusenabschnitts p ab. Wir erhalten so den Punkt E. Wir ergänzen nun die beiden Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BE}$ zu dem Rechteck $AFEB$.

D 14



Bemerkung:

Wenn die geforderte Rechteckseite kürzer als die Kathete ist, muß diese Rechteckseite dem zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt entsprechen. In diesem Fall beginnt man die Konstruktion mit dem Hypotenusenabschnitt, errichtet in einem Endpunkt die Senkrechte und schlägt vom anderen Endpunkt mit der Länge der Kathete einen Kreisbogen. Im Schnittpunkt erhält man dann den Scheitelpunkt des rechten Winkels des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks.

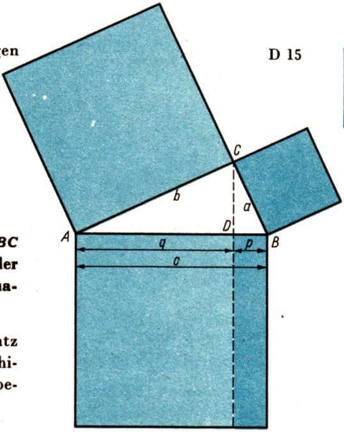
6 **Konstruiere zu einem gegebenen Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm ein flächengleiches Rechteck! Die eine Seite dieses Rechtecks soll eine Länge von 2 cm haben. Es ist der Kathetensatz anzuwenden!**

Aufgaben D 1 bis 8

9 Der Satz des Pythagoras

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Wir konstruieren zu dem Quadrat über der Kathete $\overline{AC}$ und zu dem Quadrat über der Kathete $\overline{BC}$ flächengleiche Rechtecke (Bild D 15). Nach dem Kathetensatz gilt

$$a^2 = c \cdot p$$
$$b^2 = c \cdot q.$$



D 15

Wir addieren die beiden Beziehungen und erhalten

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c\,(p + q).$$

Wegen $p + q = c$ ergibt sich

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}.$$

SATZ DES PYTHAGORAS:

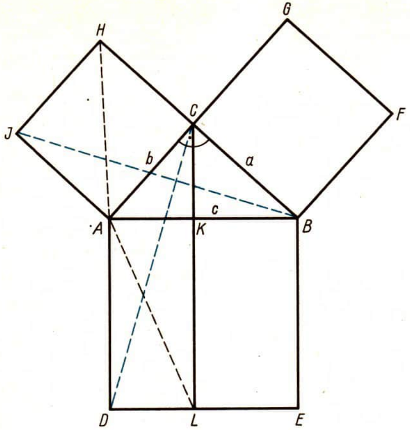
10 **In jedem rechtwinkligen Dreieck *ABC* ($\sphericalangle\ BCA = 90°$) ist das Quadrat der Maßzahl *c* gleich der Summe der Quadrate der Maßzahlen *a* und *b*.**

Dieser außerordentlich wichtige Satz wurde nach dem bedeutenden griechischen Mathematiker PYTHAGORAS benannt.

Auch für diesen Satz läßt sich eine weitere Formulierung angeben, die durch das Bild D 15 veranschaulicht wird:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

10 Wegen der großen praktischen Bedeutung wurden seit der Entdeckung dieses Satzes im Altertum zahlreiche Beweise für diesen Satz angegeben. Aus der Fülle der Beweise geben wir einen an, der lediglich darauf beruht, daß Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe flächengleich sind.



D 16

Wir gehen aus von dem rechtwinkligen Dreieck ABC im Bild D 16.

a) Die Dreiecke ABJ und ADC sind kongruent und damit flächengleich. (Weise die Kongruenz der Dreiecke nach!)
$A_{ABJ} = A_{ADC}$.

b) Die Fläche des Quadrates $ACHJ$ ist doppelt so groß wie die Fläche des Dreiecks ABJ. (Die Dreiecke ABJ und AHJ haben die gemeinsame Grundseite $\overline{AJ}$ und gleich lange Höhen.)
$A_{ACHJ} = 2\,A_{ABJ}$.

c) Die Fläche des Rechtecks $ADLK$ ist doppelt so groß wie die Fläche des Dreiecks ADC. (Die Dreiecke ADC und ADL haben die gemeinsame Grundseite $\overline{AD}$ und gleich lange Höhen.)
$A_{ADLK} = 2\,A_{ADC}$.

d) Aus a) bis c) folgt: $A_{ACHJ} = A_{ADLK}$.

e) Entsprechend läßt sich beweisen: $A_{BFGC} = A_{KLEB}$.

f) Aus d) und e) folgt durch Addition der Beziehungen der Satz des PYTHAGORAS.

11 Für praktische Anwendungen wurde bereits im Altertum die Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS benötigt.

Man kann z. B. durch Längenmessungen feststellen, ob ein Dreieck rechtwinklig ist, wenn man bewiesen hat, daß die Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS gilt. Die **Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS** lautet:

11 **Wenn für ein Dreieck die Beziehung $c^2 = a^2 + b^2$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig.**

Um den Beweis dafür zu führen, bringen wir den Satz in eine andere Form. Man kann sich klarmachen, daß die Formulierung

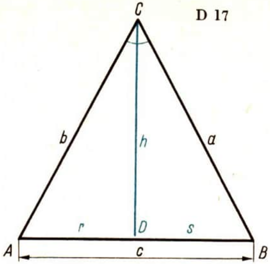
„Wenn ein Dreieck nicht rechtwinklig ist, so ist $c^2 \neq a^2 + b^2$"

dasselbe aussagt wie der Satz 11.

In dieser letzten Form wollen wir die Umkehrung beweisen.

Beweis:

Ein Dreieck ABC (Bild D 17) sei nicht rechtwinklig. Der Winkel mit dem Scheitelpunkt C sei ein beliebiger stumpfer oder spitzer Winkel. Wir konstruieren in diesem Dreieck die Höhe $\overline{CD}$.



D 17

Dann gilt (mit den Bezeichnungen, die in der Figur angegeben sind) nach dem Satz des PYTHAGORAS:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + s^2 \\ b^2 &= h^2 + r^2 \\ \hline a^2 + b^2 &= 2\,h^2 + s^2 + r^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Wir führen eine kurze Zwischenrechnung durch.

$(s + r)\ (s + r) = s^2 + 2\,r\,s + r^2$

Wegen $s + r = c$ folgt

$c^2 = s^2 + 2\,r\,s + r^2$ bzw. $c^2 - 2\,r\,s = s^2 + r^2$

Dieses Ergebnis setzen wir in die Gleichung (1) ein.

$$a^2 + b^2 = 2\,h^2 + c^2 - 2\,rs \qquad (2)$$

Da das Dreieck ABC nicht rechtwinklig ist, gilt der Höhensatz nicht, d. h., es gilt $h^2 \neq r\,s$ und damit auch $2\,h^2 \neq 2\,r\,s$.

Dann ist aber $2\,h^2 - 2\,r\,s \neq 0$ und daraus folgt $a^2 + b^2 \neq c^2$ für ein beliebiges Dreieck, das nicht rechtwinklig ist.

Ist der Winkel bei C spitz, so ergibt sich nämlich $a^2 + b^2 > c^2$. Ist der Winkel bei C stumpf, so ergibt sich $a^2 + b^2 < c^2$.

Wir haben also die Umkehrung des pythagoreischen Satzes unter Verwendung der Umkehrung des Höhensatzes bewiesen.

Zusammenfassend ergibt sich:

12 **SATZ: Ein Dreieck ist dann und nur dann rechtwinklig, wenn die Beziehung $c^2 = a^2 + b^2$ gilt.**

Drei natürliche Zahlen a, b, c, die diese Beziehung erfüllen, heißen **pythagoreische Zahlen.**

7

a) Suche pythagoreische Zahlen und überlege, wie man einen rechten Winkel abstecken kann!

b) Lege aus 12 gleich langen Stäbchen ein rechtwinkliges Dreieck!

Aufgaben D 9 bis 15

12 Quadrieren

In den Sätzen über das rechtwinklige Dreieck kamen verschiedene Zahlen in der zweiten Potenz vor. Suchen wir zu einer reellen Zahl x die Zahl x^2, so müssen wir die Zahl x **quadrieren.**

Die Quadrate natürlicher Zahlen nennt man auch **Quadratzahlen**.

8 Die nebenstehende Tabelle enthält für einige rationale Zahlen die Quadrate dieser Zahlen. Überprüfe die Richtigkeit der angegebenen Quadrate und bestimme selbst zu weiteren Zahlen die Quadrate durch schriftliche Rechnung!

x	x^2
0,12	0,0144
— 0,74	0,5476
5,7	32,49
12,2	148,84
63,9	4083,21

Wenn wir Quadrate berechnen, so bestimmen wir erst einen Näherungswert durch Überschlag. Aus der nebenstehenden Tabelle 1 können wir entnehmen, daß die Quadrate einstelliger Zahlen ein- oder zweistellig sind. Ebenso sehen wir, daß die Quadrate zweistelliger Zahlen drei- oder vierstellig sind.

Tabelle 1

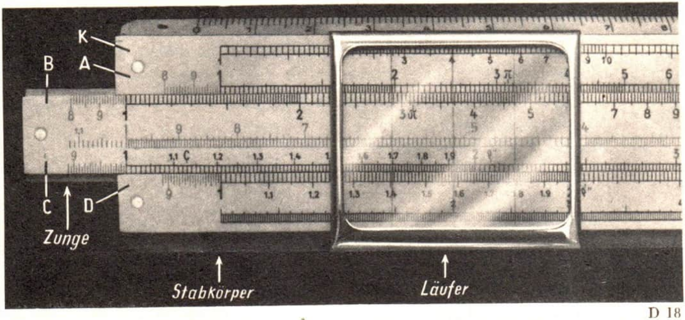
a	a^2
2	4
6	36
2,2	4,84
6,5	42,25
23	529
65	4225

Wir stellen folgende Übersicht zusammen:

Das Quadrat einer	einstelligen Zahl	ist	ein- oder zweistellig
	zweistelligen Zahl		drei- oder vierstellig
	dreistelligen Zahl		fünf- oder sechsstellig
	⋮		⋮
	n-stelligen Zahl		$(2n - 1)$- oder $2n$-stellig

13 Berechnung von Quadraten mit Hilfe des Rechenstabs

Bei vielen praktischen Rechnungen genügt Rechenstabgenauigkeit. Die Quadrate für die Zahlen, die wir auf der Skale D einstellen, finden wir auf der

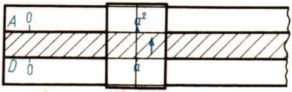


D 18

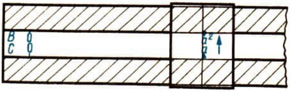
Skale A des Stabes (Bild D 18). Die gesamte Skale A besteht aus zwei gleich langen Abschnitten: der erste umfaßt die Zahlen 1 bis 10, der zweite die Zahlen 10 bis 100.

Die Teilung des zweiten Abschnittes entspricht genau der Teilung des ersten.

Um nun das Quadrat einer Zahl a zu bestimmen, stellen wir die Zahl a mit Hilfe des Läuferstrichs auf der Skale D ein. Auf der Skale A können wir dann unter dem Ablesestrich die Zahl a^2 ablesen (Bild D 19). Zuvor bestimmen wir jedoch einen Näherungswert durch eine Überschlagsrechnung. Die Zunge wird hierzu also nicht benötigt.



D 19



D 20

5 Das Quadrat der Zahl $a = 62{,}5$ ist mit Hilfe des Rechenstabs zu bestimmen.

1. *Schritt:* Ein Überschlag ergibt $a^2 \approx 60 \cdot 60 = 3600$.

2. *Schritt:* Die Ziffernfolge 625 wird auf der Skale D eingestellt. Auf der Skale A wird unter dem Ablesestrich die Ziffernfolge 391 abgelesen.

Ergebnis: $a^2 \approx 3910$

Die gleiche Zuordnung, die zwischen den Zahlen der Skale D und der Skale A besteht, existiert auch für die Zahlen der Skale C und der Skale B. Es sind also die Quadrate für die Zahlen, die auf der Skale C eingestellt werden, auf der Skale B ablesbar (Bild D 20).

14 Für die Überschlagsrechnung beim Quadrieren von Zahlen, die kleiner als 1 sind, wollen wir uns ebenfalls eine Übersicht verschaffen, die eine Ergänzung zur Übersicht im Abschnitt D 12 darstellt.

9 Bestimme das Quadrat der Zahl a für $a = 0{,}23$; $0{,}67$; $0{,}024$; $0{,}068$; $0{,}003$; $0{,}007$!

Wir fassen die Ergebnisse der Übung 9 durch folgende Übersicht zusammen:

gilt für eine Zahl a	so gilt für a^2
$0{,}1 \leqq a < 1$	$0{,}01 \leqq a^2 < 1$
$0{,}01 \leqq a < 0{,}1$	$0{,}0001 \leqq a^2 < 0{,}01$
$0{,}001 \leqq a < 0{,}01$	$0{,}000\,001 \leqq a^2 < 0{,}0001$

15 Berechnung von Quadraten mit Hilfe der Quadrattafel

In den Zahlentafeln finden wir eine Tabelle, die die Quadrate der Zahlen von 1,00 bis 10,09 enthält. (Die meisten dieser Zahlen sind Näherungswerte.)

Die folgende Tabelle 2 zeigt einen Ausschnitt aus dieser Quadrattafel.

Tabelle 2

n	0	1	2	3	4	5	...
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	...
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	...
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	...
4,3	18,49	18,58	**18,66**	18,75	18,84	18,92	
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	...
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	...
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	

D

6 Das Quadrat der Zahl $n = 4{,}32$ soll mit Hilfe der Tabelle 2 bestimmt werden.

1. *Schritt:* Ein Überschlag ergibt: $n^2 \approx 4^2 = 16$.

2. *Schritt:* Die Zahl 4,32 wird in der Tabelle aufgesucht.
Wir gehen in der Zeile $n = 4{,}3$ bis zur Spalte mit der Überschrift 2.
Wir finden dort die Zahl 18,66.

Ergebnis: $n^2 \approx 18{,}66$

16 Die Quadrattafel kann für die Berechnung des Quadrats einer jeden beliebigen Zahl verwendet werden, wenn man sich mit Näherungswerten begnügt. Eine Begründung hierfür werden wir später kennenlernen. Die folgende Übersicht macht aber deutlich, wie wir verfahren müssen:

n	n^2	Näherungswert
0,0432	0,00186624	0,001866
0,432	0,186624	0,1866
4,32	**18,6624**	**18,66**
43,2	1 866,24	1 866
432	186 624	186 600
4320	18 662 400	18 660 000

Die fett gedruckte Zeile gibt das Quadrat an, das wir in der Tabelle finden.

7 Das Quadrat der Zahl $n = 432$ soll bestimmt werden.

1. *Schritt:* Ein Überschlag ergibt: $n^2 \approx 400^2 = 160\,000$.

2. *Schritt:* $4{,}32^2 \approx 18{,}66$
$432^2 \approx 186\,600$

8 Das Quadrat der Zahl $n = 0{,}432$ soll bestimmt werden.

1. *Schritt:* Ein Überschlag ergibt: $n^2 \approx 0{,}4^2 \approx 0{,}16$.

2. *Schritt:* $4{,}32^2 \approx 18{,}66$

$0{,}432^2 \approx 0{,}1866$

Manche Zahlen müssen erst gerundet werden, damit wir die Tabelle benutzen können.

9 $424{,}6^2 \approx 425^2$; $\quad 0{,}4304^2 \approx 0{,}430^2$

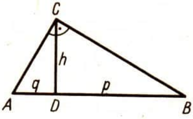
Aufgaben D 16 bis 19

Quadratwurzelziehen

17 Das Wurzelzeichen

Das Bild D 21 zeigt ein rechtwinkliges Dreieck ABC, in dem die Höhe $\overline{CD} = h$ eingetragen ist. Die Länge der Höhe sei zu berechnen. Die Strecken $\overline{AD} = q = 3{,}4$ cm und $\overline{DB} = p = 4{,}7$ cm seien gegeben.

Nach dem Höhensatz gilt: $h^2 = p \cdot q$.



D 21

Wenn wir das Produkt $p \cdot q$ berechnen, erhalten wir mit der Zahl 15,98 die Maßzahl des Flächeninhalts des Quadrats über der Höhe. Wir suchen jedoch nicht h^2, sondern h. Um h zu finden, müssen wir diejenige positive Zahl suchen, die mit sich selbst multipliziert die Zahl 15,98 ergibt. Eine solche Zahl ist näherungsweise 4.

Die Rechenoperation, die man zur Berechnung von h anwenden muß, nennt man **Quadratwurzelziehen.** Als Operationszeichen setzen wir das Zeichen „$\sqrt{\ }$" über die vorgegebene Zahl.

In unserem Fall schreiben wir: $\sqrt{15{,}98} \approx 4$. Die Länge der Höhe beträgt also annähernd 4 cm.

18 Berechnung des geometrischen Mittels

Zur Wiederholung wird noch einmal auf das **arithmetische Mittel** verwiesen:

13 **Das arithmetische Mittel zweier Zahlen a und b wird berechnet, indem man die Summe dieser Zahlen $a + b$ durch 2 dividiert.**

$$m_A = \frac{1}{2}(a + b) \qquad (1)$$

10 a) Stelle die Formel zur Berechnung des arithmetischen Mittels von fünf Zahlen auf!

b) Berechne das arithmetische Mittel der Zahlen 12,3; 17,2; 14,4; 13,8; 15,0!

14 **Das geometrische Mittel zweier Zahlen a und b wird berechnet, indem man die Quadratwurzel aus dem Produkt $a \cdot b$ dieser Zahlen zieht.**

$$m_G = \sqrt{a \cdot b} \qquad (2)$$

Die Berechnung des geometrischen Mittels zweier Zahlen führt also auf das Quadratwurzelziehen.

Das geometrische Mittel bzw. die mittlere Proportionale zu a und b (vgl. Abschnitt D 6) finden wir, wenn wir von der Proportion

$a : x = x : b$

ausgehen. Durch Umformung in

$x^2 = a \cdot b$ und $x = \sqrt{a \cdot b}$

gelangen wir zur Gleichung (2).

(11) Ermittle zeichnerisch das geometrische Mittel der Zahlen $a = 5{,}6$ und $b = 8{,}7$!

19 Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck

D

Im rechtwinkligen Dreieck treten bei der Berechnung von Streckenlängen mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS, des Kathetensatzes und des Höhensatzes folgende Fälle auf, in denen Quadratwurzeln zu ziehen sind:

Berechnung der Höhe (nach dem Höhensatz) $h = \sqrt{p \cdot q}$

Berechnung der Katheten (nach dem Kathetensatz) $a = \sqrt{c \cdot p}$; $b = \sqrt{c \cdot q}$

Berechnung der Hypotenuse (nach dem Satz des PYTHAGORAS) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

(12) Bestimme die Länge der Kathete $\overline{BC}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC, wenn die Hypotenuse $\overline{AB}$ die Länge 4,00 cm und der Hypotenusenabschnitt $\overline{DB}$ die Länge 2,25 cm hat, zeichnerisch und rechnerisch!

(13) In einem Dreieck ABC haben die Katheten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ die Längen 3,2 cm bzw. 3,8 cm. Bestimme die Länge der Hypotenuse $\overline{AB}$ zeichnerisch und rechnerisch!

20 Definition der Quadratwurzel

15 **DEFINITION: Unter der Quadratwurzel aus einer nicht negativen Zahl x (in Zeichen: $\sqrt{x}$) verstehen wir diejenige eindeutig bestimmte nicht negative Zahl y, deren Quadrat gleich x ist.**

Außer der Quadratwurzel aus x gibt es eine weitere Zahl, deren Quadrat gleich x ist. Diese Zahl ist die zu $\sqrt{x}$ entgegengesetzte Zahl $-\sqrt{x}$.

Bei der Ermittlung der Quadratwurzeln führen wir zunächst eine Überschlagsrechnung durch.

(14) Bestimme durch Überschlag einen Näherungswert für $a = \sqrt{x}$!

a) $x = 8{,}5$; $x = 97{,}6$; $x = 150$; $x = 8200$; $x = 41\,000$; $x = 0{,}08$; $x = 0{,}26$

b) $x = 1$; $x = 4$; $x = 9$; $x = 16$; $x = 25$; $x = 576$; $x = 625$

c) $x = 100$; $x = 10\,000$; $x = 1\,000\,000$; $x = 0{,}01$; $x = 0{,}0001$

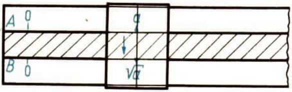
Übersicht über die Stellenwerte von Quadratwurzeln

Die Quadratwurzel aus einer	ein- und zweistelligen Zahl	ist	einstellig
	drei- und vierstelligen Zahl		zweistellig
	fünf- und sechsstelligen Zahl		dreistellig
	⋮		⋮
	$(2\,n - 1)$-stelligen und $2\,n$-stelligen Zahl		n-stellig

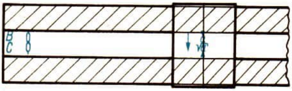
gilt für a	$0{,}01 \leqq a < 1$	so gilt für $\sqrt{a}$	$0{,}1 \leqq \sqrt{a} < 1$
	$0{,}0001 \leqq a < 0{,}01$		$0{,}01 \leqq \sqrt{a} < 0{,}1$
	$0{,}000001 \leqq a < 0{,}0001$		$0{,}001 \leqq \sqrt{a} < 0{,}01$

21 Berechnung von Quadratwurzeln mit Hilfe des Rechenstabs

Um die Quadratwurzel aus einer Zahl a zu bestimmen, stellen wir die Zahl a mit Hilfe des Läuferstrichs auf der Skale A (oder auf der Skale B) ein. Auf der Skale D (bzw. auf der Skale C) können wir dann unter dem Ablesestrich die Zahl $\sqrt{a}$ ablesen (Bilder D 22 und D 23). Zuvor führen wir stets einen Überschlag durch.



D 22



D 23

10 Die Quadratwurzel der Zahl 3699 ist mit Hilfe des Rechenstabs zu bestimmen.

$x = \sqrt{3699}$

1. *Schritt:* Ein Überschlag ergibt: $\sqrt{36\,|\,99} \approx \sqrt{36\,|\,00} = 60$.
(Die Striche zeichnen wir ein, um den Stellenwert der Quadratwurzel deutlicher zu erkennen.)

2. *Schritt:* Die Ziffernfolge 36 | 99 wird auf der Skale A eingestellt. Auf der Skale D wird nun unter dem Ablesestrich die Ziffernfolge 608 abgelesen.

Auch hierbei zeigt uns der senkrechte Strich, der, jeweils vom Komma ausgehend, zwei Ziffern zusammenfaßt, wo wir die betreffende Ziffernfolge aufsuchen. Auf den Skalen A und B gibt es nämlich zwei Punkte, denen die Ziffernfolge 3699 zugeordnet ist. In diesem Falle müssen wir den weiter rechts liegenden Punkt aufsuchen. (Hieße die Ziffernfolge 36990, so würden uns die senkrechten Striche 3 | 69 | 90 auf den weiter links liegenden Punkt verweisen.)

Ergebnis: $\sqrt{3699} \approx 60{,}8$.

15 Bestimme die Quadratwurzel der Zahl 36990 mit Hilfe des Rechenstabs!

11 Es ist $y = \sqrt{b}$ für $b = 0{,}00194$ zu bestimmen.
(Es sollen die Skalen B und C verwendet werden.)

1. *Schritt:* Ein Überschlag ergibt: $\sqrt{0{,}00 \mid 19 \mid 4} \approx \sqrt{0{,}00 \mid 16} = 0{,}04$.

2. *Schritt:* Der Ablesestrich wird über die Ziffernfolge 19 | 40 auf der Skale B gestellt. Unter dem Ablesestrich wird auf der Skale C die Ziffernfolge 440 abgelesen.

Ergebnis: $\sqrt{0{,}00194} \approx 0{,}044$.

D

22 Berechnung von Quadratwurzeln mit Hilfe der Quadrattafel

Die Quadrattafel können wir auch verwenden, um die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl zu bestimmen. Wir müssen dabei den umgekehrten Weg beschreiten, den wir beim Quadrieren gegangen sind.

12 Es ist die Quadratwurzel aus 17,22 mit Hilfe der Quadrattafel zu bestimmen.
$n = \sqrt{17{,}22}$

1. *Schritt:* Ein Überschlag ergibt: $\sqrt{17{,}22} \approx \sqrt{16} = 4$.

2. *Schritt:* Wir suchen in der Tafel die Zahl mit der Ziffernfolge 17 | 22.

Wir finden in der Tafel die Zahl 17,22. Zunächst suchen wir den Zeileneingang auf. Wir finden die Ziffernfolge 41.
Dann suchen wir den Spalteneingang auf und finden die weitere Ziffer 5. Also ist 415 die gesuchte Ziffernfolge.

n	...	5	...
.			
.			
.			
4,1		17,22	...
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	

Ergebnis: $\sqrt{17{,}22} \approx 4{,}15$.

Die Quadratwurzel aus der Zahl 1,722 würde uns auf die Ziffernfolge 1|77|2 führen. Wir finden in der Tafel aber nicht die Zahl 1,722, die wir in diesem Fall aufsuchen müßten. Wir haben dann die Zahl aufzusuchen, die der gesuchten am nächsten kommt. Das wäre die Zahl 1,716.

13 Es ist die Quadratwurzel aus 0,2134 mit Hilfe der Quadrattafel zu bestimmen.

$n = \sqrt{0{,}2134}$

1. *Schritt:* Ein Überschlag ergibt: $\sqrt{0{,}21|34} \approx \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$.

2. *Schritt:* Wir finden in der Tafel die Zahl 21,34. $\sqrt{21{,}34} \approx 4{,}62$

Ergebnis: $\sqrt{0{,}2134} \approx 0{,}462$

23 Häufig werden wir die Ziffernfolge einer Zahl, aus der die Quadratwurzel zu ziehen ist, nicht in der Tafel finden. In diesem Fall suchen wir diejenige in der Tafel enthaltene Ziffernfolge auf, die der gegebenen am nächsten kommt.

14 Es ist die Quadratwurzel aus 83,42 mit Hilfe der Quadrattafel zu bestimmen.

$n = \sqrt{83{,}42}$

1. *Schritt:* Ein Überschlag ergibt: $\sqrt{83{,}42} \approx \sqrt{81} = 9$

2. *Schritt:* Die Ziffernfolge 8342 ist nicht in der Tafel enthalten. Sie liegt zwischen 8336 und 8354, aber näher an 8336.

Ergebnis: $\sqrt{83{,}42} \approx \sqrt{83{,}36} \approx 9{,}13$

Aufgaben D 20 bis 28

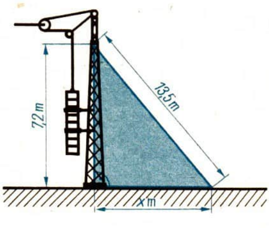
24 Anwendungen

Die Satzgruppe des PYTHAGORAS wird beim Lösen von Aufgaben verwendet, in denen rechtwinklige Dreiecke auftreten. Dabei sind die rechtwinkligen Dreiecke nicht immer unmittelbar erkennbar, sie sind zunächst aufzufinden.

15 Ein Befestigungsseil von 13,50 m Länge soll an einem Oberleitungsmast in einer Höhe von 7,20 m angebracht werden. In welcher Entfernung vom Fußpunkt des Mastes muß das Seil verankert werden?

Lösung:

D 24



Der Mast steht lotrecht auf der Erdoberfläche (Bild D 24). Der Fußpunkt des Mastes und die Befestigungspunkte des Ankerseils bilden ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Längen der Hypotenuse und einer Kathete bekannt sind. Die Länge der anderen Kathete ist gesucht. Wir wenden den Satz des PYTHAGORAS an:

$a^2 + b^2 = c^2$; $c = 13{,}5$ m; $a = 7{,}2$ m.

Wir lösen die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$ nach b auf:

$b^2 = c^2 - a^2$

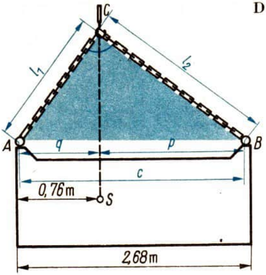
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Einsetzen: $b = \sqrt{13{,}5^2 - 7{,}2^2} = \sqrt{182{,}25 - 51{,}84} = \sqrt{130{,}41} \approx \underline{\underline{11{,}4}}$

Ergebnis:

Das Seil wird etwa 11,4 m vom Fußpunkt des Mastes entfernt verankert.

16 Ein Kasten mit einseitiger Schwerpunktlage hängt an einer gespreizten Kette (Bild D 25). Die Kette bildet am Aufhängepunkt C einen rechten Winkel.



D 25

Welche Länge hat die Kette, wenn der Hakenabstand $\overline{AB}$ eine Länge von 2,68 m hat und der Abstand des Schwerpunktes S von der Kastenwand, über der sich der Haken A befindet, 0,76 m beträgt?

Lösung: Um die Länge der Kette zu berechnen, müssen wir die Teillängen l_1 und l_2 bestimmen. l_1 und l_2 ergeben sich nach dem Kathetensatz, denn das Dreieck ABC ist rechtwinklig, und gegeben sind die Hypotenuse und die Hypotenusenabschnitte.

$l = l_1 + l_2$. Für die Länge l_1 ergibt sich nach dem Kathetensatz:

$l_1^2 = c \cdot q$, also $l_1 = \sqrt{c \cdot q}$.

Für die Länge l_2 ergibt sich entsprechend: $l_2 = \sqrt{c \cdot p}$.

Als Kettenlänge erhalten wir also

$l = \sqrt{c \cdot q} + \sqrt{c \cdot p}$ mit $c = 2{,}68$, $q = 0{,}76$ und $p = 1{,}92$.

Einsetzen:

$$l = \sqrt{2{,}68 \cdot 0{,}76} + \sqrt{2{,}68 \cdot 1{,}92} \approx \sqrt{2{,}04} + \sqrt{5{,}15} \approx 1{,}43 + 2{,}27 = \underline{\underline{3{,}70}}$$

Ergebnis: Die Kette hat eine Länge von 3,70 m.

25 ZUSAMMENFASSUNG

Das Quadratwurzelziehen ist eine Umkehrung des Quadrierens. Die Quadratwurzeln aus beliebigen nichtnegativen rationalen Zahlen sind überwiegend irrationale Zahlen.

Im Bereich der nichtnegativen reellen Zahlen ist das Quadratwurzelziehen stets ausführbar. Irrationale Quadratwurzeln nähert man mit der jeweils erforderlichen Genauigkeit durch rationale Zahlen an.

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie die für das Rechnen mit rationalen Zahlen.

Aufgaben D 29 bis 66

26 Zur Geschichte des pythagoreischen Satzes

Der nach dem griechischen Mathematiker und Philosophen Pythagoras von Samos (etwa 580 bis etwa 500 v. u. Z.) benannte Satz ist einer der zentralen Sätze der Elementargeometrie und wegen seiner Bedeutung zu einem Sinnbild der Mathematik geworden.

Die Entwicklungsgeschichte dieses Satzes reicht bis weit in das zweite Jahrtausend v. u. Z. zurück. Wenn ihn der von Legenden umwobene PYTHAGORAS oder einer seiner Schüler wirklich gefunden haben sollte, so ist er jedoch schon weitaus früher bekannt gewesen. So wissen wir z. B. aus der altägyptischen Mathematik von der Existenz eines besonderen Berufsstandes, der Harpenodapten (Seilspanner), denen die Vermessung und genaue Orientierung der Bauwerke, insbesondere der Pyramiden, nach den Himmelsrichtungen oblagen. Den rechten Winkel steckten sie möglicherweise mit Hilfe einer Schnur ab, die, mit Knoten in gleicher Entfernung versehen, mit den „Seitenlängen" 3, 4 und 5 zu einem Dreieck ausgespannt wurde. Jedenfalls ist die Kenntnis der einfachsten pythagoreischen Zahlentripel 3, 4, 5 und 6, 8, 10 mit Sicherheit verbürgt. Dieselben Tripel waren in der chinesischen Mathematik im 12. Jh. v. u. Z. und zusätzlich das Tripel 15, 36, 39 in der indischen Mathematik aus dem 8. Jh. v. u. Z. bekannt. In Indien wurde der pythagoreische Satz bereits im 5. Jh. v. u. Z. in allgemeiner Form ausgesprochen.

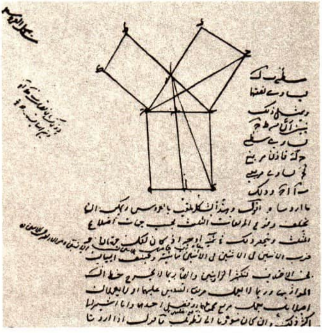
Der strenge Beweis jedoch wurde erst in späterer Zeit durch geometrische Zerlegung angegeben. Durch neuere Forschungen hat sich herausgestellt, daß die babylonischen Mathematiker bereits im 2. Jahrtausend v. u. Z. den pythagoreischen Satz in voller Allgemeinheit kannten.

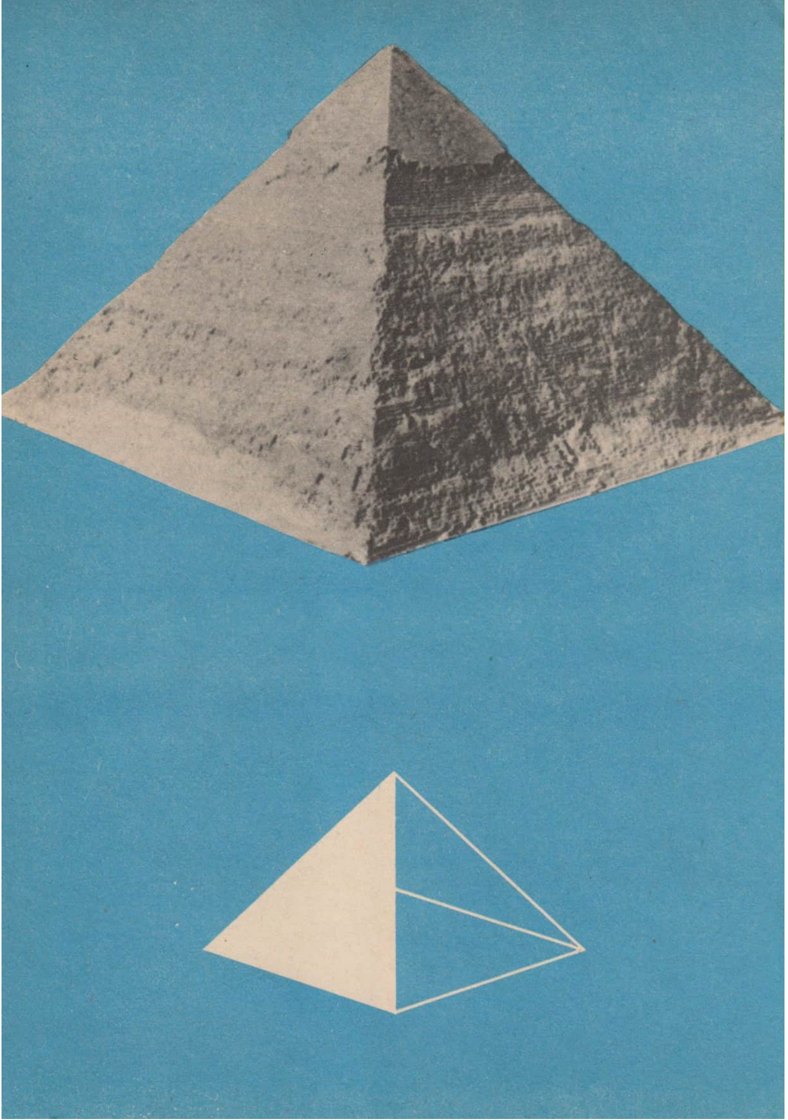
Man kann mit großer Sicherheit annehmen, daß PYTHAGORAS auf seinen Reisen nach Mesopotamien auch mit diesen Ergebnissen der babylonischen Mathematik bekannt geworden ist. Der von PYTHAGORAS gegründete Geheimbund, der in den griechischen Siedlungen Unteritaliens politisch reaktionäre Ziele vertrat, schrieb den Zahlen mystische Kräfte zu. Im Rahmen solcher zahlenmystischer Untersuchungen suchte und fand man schließlich auch einen allgemeingültigen Beweis. Schon die Griechen konnten allerdings nicht mehr auseinanderhalten, wie weit Entdeckung und Beweis des Satzes durch PYTHAGORAS selbst Legende oder Wahrheit sei. In der griechischen Mathematik tritt der Satz in voller Allgemeingültigkeit verbürgt erst mit HIPPOKRATES VON CHIOS (um 440 v. u. Z.) auf. Die schöne Geschichte vom Stieropfer des PYTHAGORAS aus Anlaß der Entdeckung des Satzes ist jedenfalls bestimmt erst viel später erfunden worden und historisch ganz sicher falsch, weil die *Pythagoreer* an die Seelenwanderung glaubten und deshalb keine Tiere töteten, in die sich eventuell die Seele eines Menschen zurückgezogen haben könnte.

Später, im 4. Jh. v. u. Z., ist der Satz des PYTHAGORAS von anderen griechischen Mathematikern in das Lehrgebäude der ebenen Geometrie eingepaßt worden. EUKLEIDES VON ALEXANDRIA (etwa 365 bis etwa 300 v. u. Z.) nahm ihn natürlich als besonders wichtigen Satz in seine berühmten *Elemente* auf; er erscheint dort zusammen mit seiner Umkehrung und wird mit Hilfe der Methode der Flächenverwandlung bewiesen.

Seit dieser Zeit gehört er zum festen Bestandteil der ebenen Geometrie.

Bild D 26: Ausschnitt aus einem arabischen Manuskript des 9. Jh. u. Z. zum Satz des PYTHAGORAS



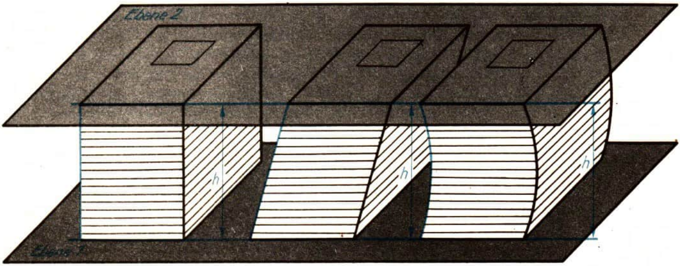


E. STEREOMETRIE

Volumenvergleiche

1 Führe eine Verschiebung an einem Stapel von Heften (Bild E 1) durch! Charakterisiere den entstehenden Körper!

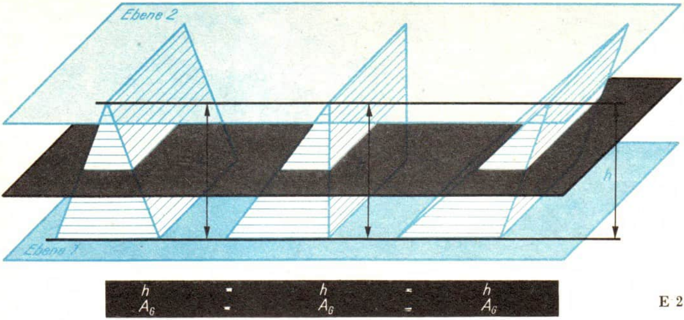
1 Bei der Verschiebung in Übung E 1 bleibt die Höhe unverändert. Entsprechend können wir mit Körpern aus gleichartigen dreiseitigen, fünfseitigen, n-seitigen Blättern verfahren.



$$h = h = h$$
$$A_G = A_G = A_G$$

E 1

Da sich das Volumen der einzelnen Platten durch die Verschiebung nicht verändert, so ergibt sich stets, daß das Volumen aller drei zu vergleichenden Körper gleich ist.



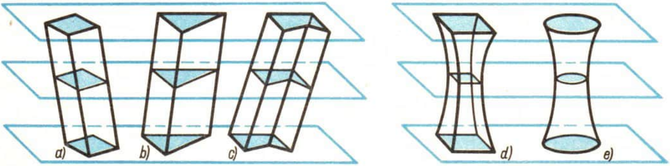
E 2

Nun verwenden wir solche Platten, deren Flächen nach oben zu kleiner werden (Bild E 2). Auch hier ergibt sich durch Veränderung der Lage der Platten keine Änderung des Gesamtvolumens. Voraussetzung ist aber bei all diesen vergleichbaren Plattenstößen, daß sie gleich hoch sind, d. h., daß sie zwischen zwei parallelen Ebenen liegen und daß gleich hochliegende Platten untereinander flächengleich sind.
Wir wollen diese Erkenntnis als Grundsatz formulieren.

1 **Liegen Körper zwischen zwei parallelen Ebenen, und erzeugen zur Grundebene parallele Schnitte in gleichen Höhen flächengleiche Figuren, so sind die Körper volumengleich.**

Diese Erkenntnis wurde erstmals von dem italienischen Mathematiker Bonaventura Cavalieri (1598—1647) geäußert. Man spricht auch vom Prinzip des Cavalieri. Das Prinzip des Cavalieri kann nun auf beliebige Körper angewandt werden. Während die Körper in den Abbildungen E 1 und E 2 durch Verschiebung der Lagen ein und desselben Körpers entstanden sind und uns die Volumengleichheit von vornherein klar war, zeigt das Bild E 3, wie die Volumengleichheit verschiedener gegebener Körper mit Hilfe des Prinzips des Cavalieri überprüft werden müßte. Jeder Schnitt parallel zur Grundfläche muß in gleicher Höhe flächengleiche Querschnittfiguren bei allen Körpern ergeben. Wenn bei einem Körper alle Schnitte kongruente Schnittfiguren ergeben, z. B. beim Prisma, so braucht man bei den einzelnen Körpern nur die Schnittfiguren von einem Schnitt zu vergleichen. Das ist zum Beispiel bei den Körpern (a), (b), (c) in dem Bild E 4 der Fall. Alle anderen Schnitte müssen ja kongruente Schnittfiguren ergeben; denn es sollen Prismen sein. Bei den Körpern (d) und (e) dagegen ändern sich die Schnittfiguren mit der Höhe. Hierbei wäre ein Vergleich aller Lagen erforderlich, was natürlich praktisch nicht durchführbar ist.

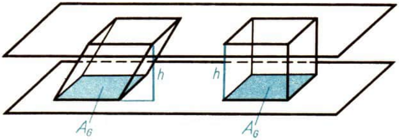
E 3



2 Das Volumen eines schiefen Prismas

Das Prinzip des CAVALIERI können wir anwenden, um das Volumen eines schiefen Prismas zu berechnen. Wir können nämlich das Volumen des schiefen Prismas auf das Volumen eines geraden Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe zurückführen (Bild E 4).

Das Volumen eines geraden Prismas ergab sich als Produkt aus Grundfläche und Höhe. Dementsprechend gilt für das schiefe Prisma und damit also für jedes Prisma:



E 4

2 **SATZ: Die Maßzahl des Volumens eines beliebigen Prismas erhält man als Produkt der Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe.**

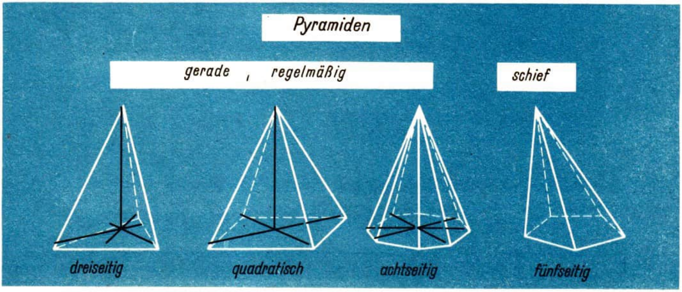
$$V_{\text{Prisma}} = A_G \cdot h$$

Pyramiden

3 Bei dem Wort „Pyramide" denken wir meist an die riesigen Königsgrüfte der alten Ägypter. Sie haben eine quadratische Grundfläche. Die Spitze der Pyramiden befindet sich senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.
Es gibt aber auch Pyramiden, die ein Dreieck, Fünfeck usw. als Grundfläche haben. Sie heißen dreiseitige, fünfseitige, ... Pyramiden. Auch die Spitze braucht nicht senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche zu liegen (Bild E 5).

3 **ERKLÄRUNG: Unter einer *n*-seitigen Pyramide versteht man einen mathematischen Körper, der durch ein *n*-Eck und *n* Dreiecke begrenzt wird. Das *n*-Eck heißt Grundfläche A_G der Pyramide, die *n* Dreiecke bilden den Mantel.**

E 5



E

(2) Zeichne das Netz einer geraden quadratischen Pyramide und fertige ein Modell an (Bild E 6)!

(3) Vergleiche Körperhöhe, Höhe der Seitenfläche und Seitenkanten bei einer quadratischen Pyramide, deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt (Bild E 6)!

(4) Gegeben sei eine quadratische Pyramide, deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt (Bild E 7).

a) Wie viele senkrechte Schnitte durch die Spitze und die Diagonalen der Grundfläche gibt es, und welche Form haben die Schnittflächen?

b) Wieviel Schnitte durch die Spitze gibt es, wenn jeweils die Höhe der entstehenden Schnittfigur gleich der Körperhöhe und die größte Breite gleich der Länge der Grundkante sein soll?

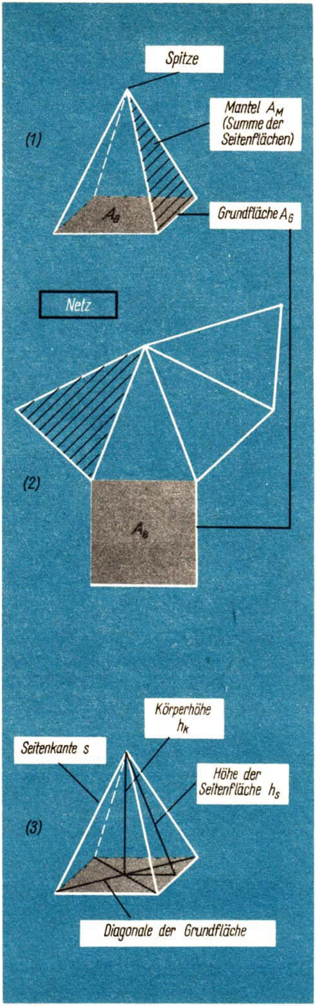
c) Welche Form haben die Schnittflächen der Schnitte parallel zur Grundfläche, und wieviel solcher Schnitte gibt es?

4 Berechnung der Oberfläche einer Pyramide

Die Oberfläche einer Pyramide besteht aus dem Mantel und der Grundfläche.

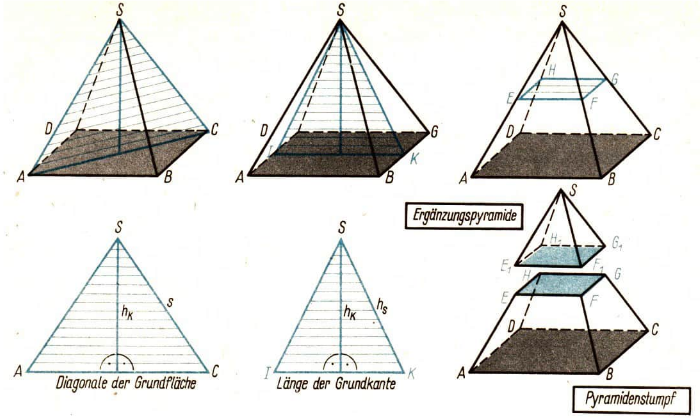
4 **SATZ: Bezeichnen wir die Maßzahl des Flächeninhalts der Grundfläche mit A_G und die Maßzahl des Flächeninhalts der Mantelfläche der Pyramide mit A_M, so ergibt sich die Maßzahl des Oberflächeninhalts A_O als Summe dieser beiden Maßzahlen.**

$$A_O = A_M + A_G$$



E 6

E



E 7

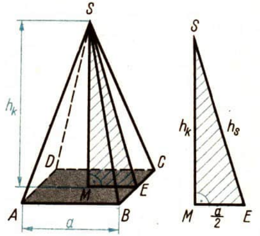
1 Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide mit der Grundkante $a = 12$ cm und der Körperhöhe $h_k = 5$ cm. Welchen Flächeninhalt hat die Oberfläche der Pyramide?

Lösung (Bild E 8):

Gegeben: $a = 12$ cm; $h_k = 5$ cm

Gesucht: A_0; $\quad A_0 = A_G + A_M$

Die Grundfläche ist das Quadrat mit der Seitenlänge a. Der Mantel setzt sich aus vier kongruenten Dreiecken mit der Grundseite a und der zugehörigen Höhe h_s zusammen.



E 8

Grundfläche: a^2; Mantel: $4 \cdot \left(\frac{1}{2} a \cdot h_s\right)$

$$A_0 = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} a \cdot h_s\right)$$

$$A_0 = a^2 + 2\,a\,h_s$$

Berechnung von h_s:

$$h_s^2 = h_k^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h_s = \sqrt{h_k^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$\sqrt{25 + \frac{144}{4}} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$$

Wir erhalten für h_s: $h_s \approx 7{,}8$ cm

Einsetzen:

$$12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 7{,}8 = 331{,}2$$

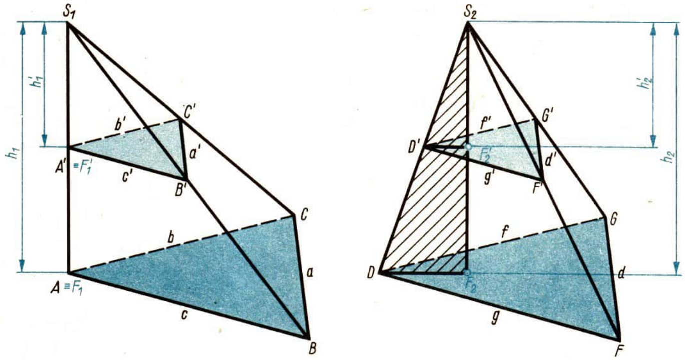
Ergebnis: Der Flächeninhalt der Oberfläche beträgt rund 331 cm^2.

5 Berechnung des Volumens einer Pyramide

Wir berechnen zuerst das Volumen der dreiseitigen Pyramide (des Tetraeders).

5 **SATZ: Haben zwei dreiseitige Pyramiden gleiche Höhe und sind ihre Grundflächen kongruent, so haben beide das gleiche Volumen.**

Wir zeigen, daß parallel zur Grundfläche ausgeführte Schnitte durch beide Pyramiden in gleicher Höhe jeweils kongruente Schnittfiguren ergeben (Bild E 9).



E 9

Im Bild E 9 sind F_1 und F_2 die Höhenfußpunkte auf der Grundebene. F_1' und F_2' sind die Höhenfußpunkte auf der Schnittebene.

Voraussetzung: $\triangle ABC \cong \triangle DFG$; $h_1 = h_2$; $h_1' = h_2'$

Behauptung: $\triangle A'B'C' \cong \triangle D'F'G'$

Beweis:

Wir müssen zeigen, daß die gleichliegenden Seiten in beiden Dreiecken gleich lang sind. Es muß also gelten:

$$\overline{A'B'} = \overline{D'F'};\ \overline{B'C'} = \overline{F'G'};\ \overline{A'C'} = \overline{D'G'}.$$

Betrachten wir die Ebenen durch S_1, F_1 und A, so gilt nach dem Strahlensatz:

$$h_1' : h_1 = \overline{S_1A'} : \overline{S_1A}. \tag{1}$$

In der Ebene durch S_2, D und F_2 gilt:

$$h_2' : h_2 = \overline{S_2D'} : \overline{S_2D}. \tag{2}$$

Wegen $h_1' = h_2'$ und $h_1 = h_2$ gilt dann

$$h_1' : h_1 = h_2' : h_2. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $\overline{S_1A'} : \overline{S_1A} = \overline{S_2D'} : \overline{S_2D}$.

Betrachten wir nun die Ebenen durch S_1, A und B sowie die durch S_2, D und F, so gilt auf ihnen nach dem zweiten Strahlensatz:

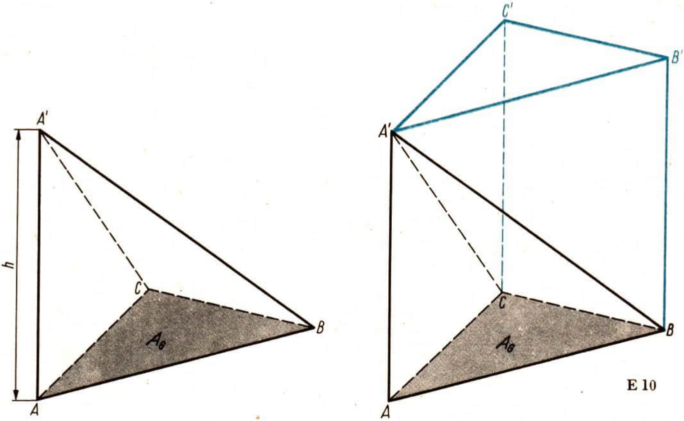
$\overline{S_1A'} : \overline{S_1A} = c' : c$ bzw. $\overline{S_2D'} : \overline{S_2D} = g' : g$.

Dann gilt auch $c' : c = g' : g$, und wegen $c = g$ gilt auch $c' = g'$.

Auf gleiche Art bekommen wir $a' = d'$ und $e' = f'$.

Damit haben wir bewiesen, daß Schnitte durch beide Tetraeder, die parallel zu den Grundflächen und in gleicher Höhe ausgeführt werden, kongruente Schnittflächen ergeben. Damit sind nach dem Prinzip von CAVALIERI die beiden Tetraeder volumengleich.

6 Zur Volumenbestimmung genügt es also, das Volumen von einer einzigen Pyramide mit vorgegebener Grundfläche und Höhe zu bestimmen. Die Volumina aller anderen dreiseitigen Pyramiden mit kongruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind dieser berechneten gleich. Wir wählen eine Pyramide, deren

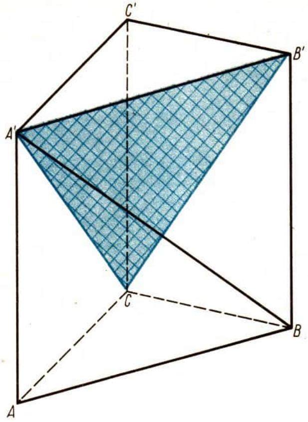


E 10

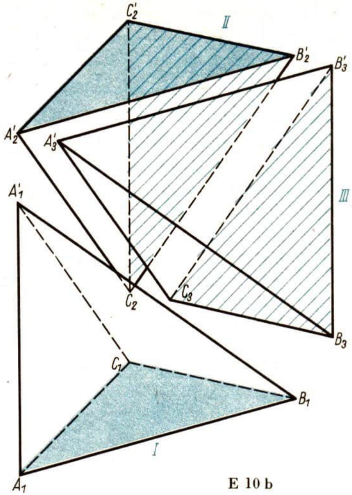
Spitze senkrecht über einem Eckpunkt der Grundfläche liegt (Bild E 10). Im Bild E 10 sei das Dreieck ABC die Grundfläche und A' die Spitze.
Dann errichten wir über B und C eine Senkrechte und tragen $\overline{AA'}$ darauf ab. Die so entstehenden Endpunkte seien B' und C'. Dadurch haben wir die Pyramide zu einem dreiseitigen geraden Prisma ergänzt.
Das Volumen des Prismas beträgt

$V_{\text{Prisma}} = A_G \cdot h$, wobei A_G der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.

Wir teilen den nicht zu der ursprünglichen Pyramide gehörenden Teil des Prismas durch einen Schnitt durch die Eckpunkte A', C und B' in zwei Tetraeder (Bild E 10 a). Insgesamt zerfällt nun das Prisma in drei Tetraeder.



E 10 a



E 10 b

Wir vergleichen zuerst die Tetraeder I und II.

Wir fassen im Tetraeder I das Dreieck $A_1B_1C_1$ als Grundfläche und die Strecke $\overline{A_1A_1'}$ als Höhe auf. Im Tetraeder II fassen wir das Dreieck $A_2'B_2'C_2'$ als Grundfläche und die Strecke $\overline{C_2'C_2}$ als Höhe auf. (Die Grundflächen sind im Bild E 10 b blau gerastert.) Da beide Grundflächen als Grund- bzw. Deckfläche des Prismas kongruent sind und da auch die Höhen gleich lang sind, können wir Volumengleichheit feststellen.

Wir vergleichen nun die Tetraeder II und III.

Wir fassen im Tetraeder II diesmal das Dreieck $C_2B_2'C_2'$ als Grundfläche auf. Im Tetraeder III sei das Dreieck $C_3B_3B_3'$ die Grundfläche. Beide Dreiecke sind kongruent; denn sie sind aus dem Rechteck $CBB'C'$ durch Schnitt längs der Diagonalen $\overline{CB'}$ hervorgegangen. Die Ecke A' ist die gemeinsame Spitze der Tetraeder II und III. Beide müssen also auch in der Höhe übereinstimmen; denn die Höhe beider Pyramiden ist das Lot von der gemeinsamen Spitze auf das Rechteck $CBB'C'$. (Die Grundflächen wurden für diesen Fall blau schraffiert.) Wir können also auch für die Tetraeder II und III Volumengleichheit feststellen.

Wir haben also unser Prisma mit $V_{\text{Prisma}} = A_G \cdot h$ in drei volumengleiche Tetraeder zerlegt. Das Volumen eines jeden der drei Tetraeder muß also ein Drittel des Volumens des Prismas betragen. So hat unsere dreiseitige Ausgangspyramide mit der Grundfläche ABC und der Höhe h das Volumen

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_G \cdot h.$$

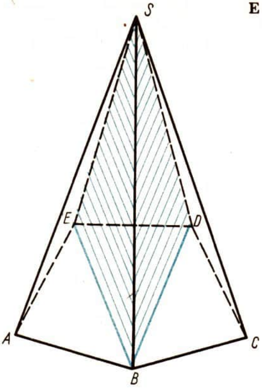
7 Alle n-seitigen Pyramiden können wir in dreiseitige Pyramiden gleicher Höhe zerlegen.

Das Bild E 11 zeigt zum Beispiel die Zerlegung einer fünfseitigen Pyramide in drei dreiseitige Pyramiden. Hierzu zerlegt man die Grundfläche in Dreiecke und bildet die entsprechenden Schnitte.

Das Volumen dieser fünfseitigen Pyramide kann also als Summe der Volumina von drei Tetraedern aufgefaßt werden.

Haben wir die Grundfläche in n Dreiecke zerlegt (bei der Pyramide im Bild E 10 war $n = 3$), die den Flächeninhalt $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ haben, so gilt:

E 11



$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_1\, h + \frac{1}{3} A_2\, h + \frac{1}{3} A_3\, h + \ldots + \frac{1}{3} A_n\, h$$

$$= (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n)\,\frac{h}{3}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_G\, h, \text{ falls } A_G = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n.$$

6 **SATZ: Bezeichnen wir die Maßzahl des Flächeninhalts der Grundfläche mit A_G und die Maßzahl der Länge der Körperhöhe mit h, so ergibt sich die Maßzahl des Volumens als dritter Teil des Produkts dieser Maßzahlen.**

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_G \cdot h$$

2 Gegeben ist eine sechsseitige regelmäßige Pyramide mit der Grundkante $a = 30$ mm und der Körperhöhe $h_k = 7{,}0$ cm. Wie groß ist das Volumen dieser Pyramide?

Lösung (Bild E 12):

Gegeben:

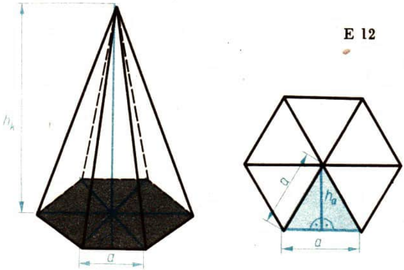
$a = 30$ mm; $h_k = 7{,}0$ cm

Gesucht: $V = A_G \cdot h$

Wir rechnen die Grundkante in Zentimeter um: 30 mm = 3 cm.

Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Kantenlänge a.

E 12



Dieses Sechseck setzt sich aus sechs kongruenten gleichseitigen Dreiecken zusammen, für deren Berechnung die Höhe h_a erforderlich ist.

Berechnung von h_a:

$$h_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h_a = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$h_a = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Berechnung von A_G:

$$A_G = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}a \cdot h_a\right)$$

$$A_G = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$A_G = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$$

Für das Volumen der Pyramide ergibt sich demzufolge:

$$V = \frac{1}{3} A_G h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 h$$

Einsetzen: $0{,}865 \cdot 9 \cdot 7 = \underline{\underline{54{,}495}}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1{,}73}{2} = 0{,}865$$

Ergebnis: Die Pyramide hat ein Volumen von rund 54,5 cm³.

Aufgaben E 1 bis 13

Kegel

8 Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten, so beschreibt das Dreieck einen Körper, den wir als **Kreiskegel** bezeichnen (Bild E 13). Der auf diese Weise entstandene Körper hat als Grundfläche eine Kreisfläche. Das

E 13

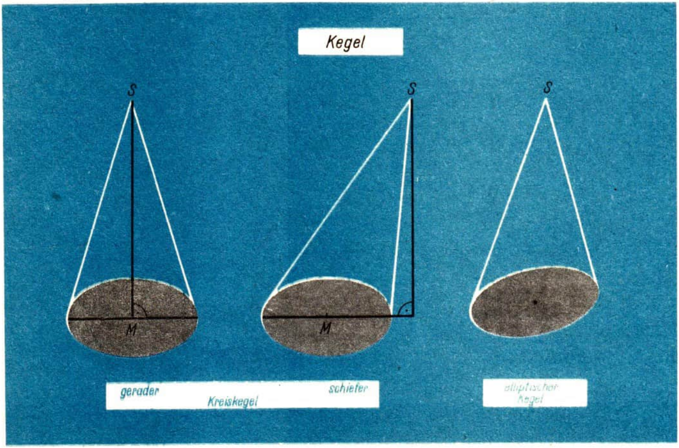
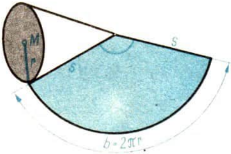


Bild E 13 zeigt u. a. auch einen Körper, dessen Grundfläche eine Ellipse ist.

Beide Körper sind **Kegel.** Wir werden uns in dieser Klasse mit der Berechnung von Kreiskegeln befassen. Wenn also manchmal nur von Kegeln gesprochen wird, sind immer Kreiskegel gemeint.

7 **DEFINITION: Ein Kreiskegel ist ein mathematischer Körper, der durch eine kreisförmige Grundfläche und durch einen Mantel begrenzt wird.**

Der Mantel setzt sich aus den Verbindungsstrecken des Grundkreises mit der Spitze S zusammen. Wenn man ihn abrollt, erkennt man die Form eines Kreisausschnitts (Bild E 14).



E 14

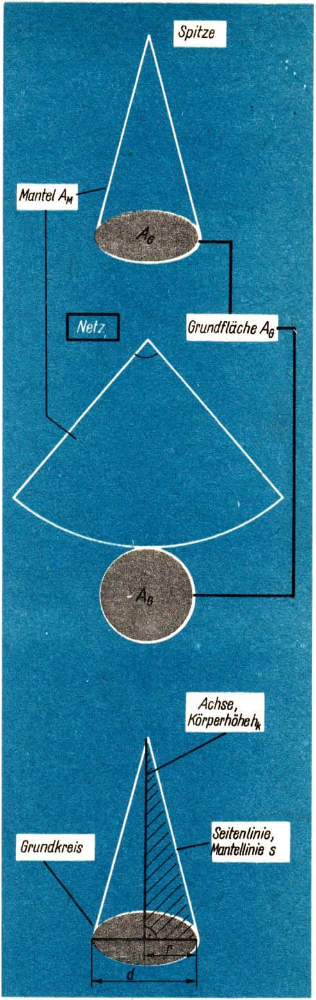
5 Zeichne das Netz eines Kreiskegels und fertige ein Modell an (Bild E 15)!

Hinweis: Beachte, daß der Kreisbogen des Kreisausschnitts, der den Mantel darstellt, die gleiche Länge hat wie der Umfang des Grundkreises!

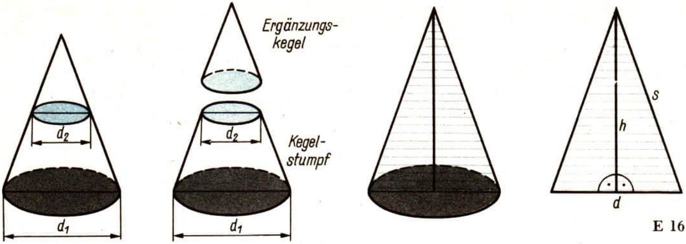
6 Vergleiche Körperhöhe und Mantellinie bei einem Kreiskegel!

a) Beschreibe die Form der Schnittfläche bei Schnitten parallel zur Grundfläche! Wieviel solcher Schnitte gibt es?

b) Welche Form hat die Schnittfläche, falls der Schnitt durch die Achse geht? Wieviel solcher Schnitte gibt es?



E 15



E 16

Das Bild E 16 veranschaulicht einige Schnitte an einem geraden Kreiskegel.

9 Berechnung des Mantels eines Kreiskegels

Der abgewickelte Mantel eines Kreiskegels ist ein Kreisausschnitt, der die Mantellinie s zum Radius hat und dessen Bogen b gleich dem Umfang des Grundkreises ist.
Es gilt

$$s^2 = r^2 + h^2$$
$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

und für den Umfang u der Grundfläche

$$u = 2\pi r.$$

Nun besteht bei konstantem Radius r zwischen der Kreisausschnittfläche und dem Bogen Proportionalität.

Eine Überlegung zeigt: Die Vollkreisfläche (Kreisausschnitt mit dem Öffnungswinkel 360°) πr^2 hat den Umfang (Bogen) $2\pi r$, die Halbkreisfläche $\frac{1}{2}\pi r^2$ hat den Bogen πr, die Viertelkreisfläche $\frac{1}{4}\pi r^2$ hat den Bogen $\frac{1}{2}\pi r$.

Also: Wird die Kreisausschnittsfläche halbiert (geviertelt), so wird auch der Bogen halbiert (geviertelt).

Wir stellen die Proportion auf:

$$\pi s^2 : 2\pi s = A_M : b.$$

Daraus erhalten wir, indem wir gleichzeitig $b = 2\pi r$ setzen (Bild E 14):

$$A_M \cdot 2\pi s = 2\pi r \cdot \pi s^2$$
$$A_M = \frac{2\pi r \cdot \pi s^2}{2\pi s}$$
$$A_M = \pi r s$$

Für den Flächeninhalt des Mantels eines Kreiskegels gilt also:

$$\boldsymbol{A_M = \pi r s;\; A_M = \frac{1}{2}\pi d s.}$$

10 Berechnung der Oberfläche eines Kreiskegels

Die Oberfläche eines Kreiskegels besteht aus dem Mantel und der Grundfläche.

8 **SATZ: Bezeichnen wir die Maßzahl des Flächeninhalts der Grundfläche mit A_G und die Maßzahl des Inhalts der Mantelfläche mit A_M, so ergibt sich die Maßzahl des Oberflächeninhalts A_O als Summe dieser beiden Maßzahlen.**

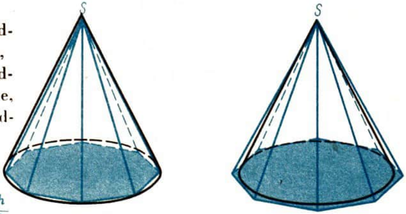
$$A_O = A_M + A_G; \qquad A_O = \pi r (s + r) = \frac{\pi d}{4}(2s + d)$$

11 Berechnung des Volumens eines Kreiskegels

Zeichnet man in den Grundkreis eines Kreiskegels ein inneres regelmäßiges Sehnen-n-Eck und um den Grundkreis ein äußeres Tangenten-n-Eck, und verbindet man die Eckpunkte mit der Spitze S des Kegels, so entstehen eine im Kegel enthaltene und eine den Kegel enthaltende Pyramide (Bild E 17).

Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein:

V_i Volumen der inneren Pyramide,
V_a Volumen der äußeren Pyramide,
V Volumen des Kegels,
A_i Flächeninhalt der Grundfläche der inneren Pyramide,
A_a Flächeninhalt der Grundfläche der äußeren Pyramide,
A_G Flächeninhalt der Grundfläche des Kegels.



E 17

Es gilt:

$$A_i < A_G < A_a \quad \Big| \cdot \frac{h}{3}$$

$$A_i \cdot \frac{h}{3} < A_G \cdot \frac{h}{3} < A_a \cdot \frac{h}{3}$$

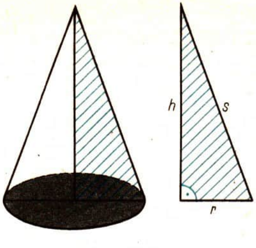
Also gilt auch: $V_i < A_G \cdot \frac{h}{3} < V_a$.

Der Unterschied zwischen der äußeren und der inneren Pyramide wird beliebig klein, falls man für n eine hinreichend große natürliche Zahl wählt. Die Grundflächen der äußeren und der inneren Pyramide nähern sich dann der Kreisfläche. Dann wird auch der Unterschied zwischen V_i und V_a beliebig klein, und es gilt im Grenzfall: $V = \frac{A_G \cdot h}{3}$.

9 **SATZ: Bezeichnen wir die Maßzahl des Flächeninhalts der Grundfläche mit A_G und die Maßzahl der Länge der Körperhöhe des Kreiskegels mit h, so ergibt sich das Volumen als dritter Teil des Produkts dieser Maßzahlen.**

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h; \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 h$$

3 Es sollen das Volumen und der Inhalt der Oberfläche eines geraden Kreiskegels berechnet werden, dessen Grundkreisradius $r = 6{,}0$ cm und dessen Mantellinie $s = 7{,}5$ cm betragen.



E 18

Lösung (*Bild* E 18):

Gegeben: $r = 6{,}0$ cm; $s = 7{,}5$ cm.

Gesucht: V; A_O

Wir berechnen zuerst die Höhe h:

$$h^2 = s^2 - r^2$$

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

Einsetzen: $\sqrt{7{,}5^2 - 6{,}0^2} = \sqrt{56{,}25 - 36} = \sqrt{20{,}25} = \underline{\underline{4{,}5}}$

Ergebnis für h: $\underline{\underline{h = 4{,}5 \text{ cm}}}$

Wir berechnen das Volumen V:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Einsetzen: $\frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}0^2 \cdot 4{,}5 = 54{,}0\,\pi = \underline{\underline{169{,}65}}$ | Zahlentafel: $54\pi = 169{,}65$

Ergebnis: Das Volumen des Kegels beträgt rund 170 cm³.

Wir berechnen den Oberflächeninhalt A_O:

$$A_O = \pi r\,(s + r)$$

Einsetzen: $\pi \cdot 6{,}0\,(7{,}5 + 6{,}0) = 81\,\pi = \underline{\underline{254{,}47}}$ | Zahlentafel: $81\pi = 254{,}47$

Ergebnis: Der Flächeninhalt der Oberfläche beträgt rund 254 cm².

4 Ein zu einem geraden Kegel aufgeschütteter Haufen Sand $\left(\varrho = 1{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ soll mit Lastkraftwagen von 3 t Ladefähigkeit abgefahren werden. Um schnell festzustellen, wieviel Fahrten notwendig sind, wird der Umfang des Grundkreises durch Abschreiten auf 21 m geschätzt und die Höhe des Haufens mit 2,5 m angenommen. Wieviel Fahrten sind erforderlich?

Lösung:

Gegeben: $h = 2{,}5$ m; $u = 2\pi r = 21$ m. *Gesucht:* V; m

Wir berechnen zuerst r: $u = 2\pi r$

$$r = \frac{u}{2\pi}$$

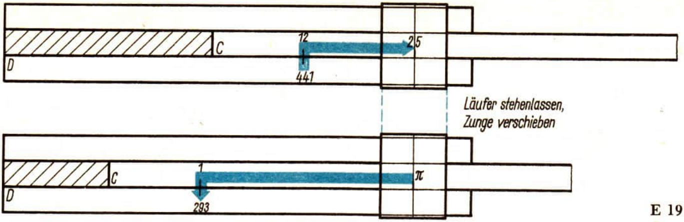
Wir berechnen das Volumen des Sandhaufens V:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{u}{2\pi}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{u^2}{4\pi^2}\,h = \frac{u^2 h}{12\pi}$$

Einsetzen: $\frac{21^2 \cdot 2{,}5}{12 \cdot \pi} = \frac{441 \cdot 2{,}5}{12 \cdot \pi} \approx \underline{\underline{29{,}3}}$

Ergebnis: Das Volumen des Sandhaufens beträgt rund 29,3 m³.

Bei Verwendung des Rechenstabes werden im Falle derartiger Brüche abwechselnd Divisionen und Multiplikationen durchgeführt (Bild E 19).



E 19

C 12 über D 441, Läuferstrich auf C 25, (Läufer stehenlassen) C π unter Läuferstrich, unter C 1 ablesen.

Wir berechnen die Masse m:

$m = \varrho \cdot V$

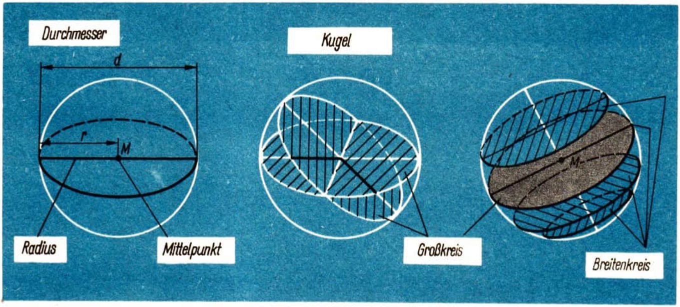
Einsetzen: $1{,}8 \cdot 29{,}3 = \underline{\underline{52{,}74}}$

Ergebnis: Die Anzahl der Fahrten ergibt sich aus der Division $52{,}74 : 3 = 17{,}58$. Es sind etwa 18 Fahrten mit einem Dreitonner erforderlich.

Aufgaben E 14 bis 28

Kugel

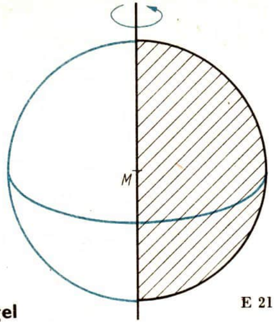
12 Wird ein Kreis um einen seiner Durchmesser gedreht, so beschreibt er eine **Kugel** (Bild E 21).



E 20

Der Mittelpunkt M des sich drehenden Kreises wird zum Kugelmittelpunkt. Da beim Kreis alle Punkte des Umfanges denselben Abstand r vom Mittelpunkt haben, müssen alle Punkte der Kugeloberfläche gleich weit vom Mittelpunkt der Kugel entfernt sein. Deshalb heißt r auch der Radius der Kugel. Durch ihn ist die Kugel eindeutig bestimmt.

10 **DEFINITION: Die Kugel mit dem Radius *r* und dem Mittelpunkt *M* ist ein mathematischer Körper, der von einer gekrümmten Fläche begrenzt wird. Diese Fläche wird von allen Punkten gebildet, die den Abstand *r* von *M* haben.**



E 21

7 **a)** Welche Art von Schnittflächen entstehen bei ebenen Schnitten durch eine Kugel? Lege auch Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel (Bild E 20)!

b) Wie sehen die Schnittflächen aus?

13 Berechnung des Volumens einer Kugel

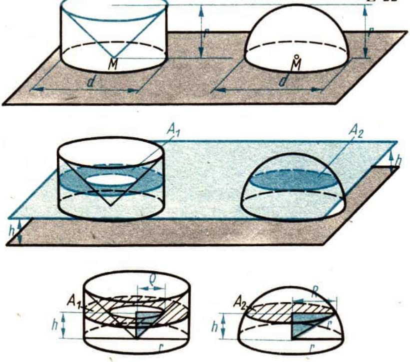
Im Bild E 22 wird ein Zylinder dargestellt, aus dem ein Kegel ausgebohrt wurde. Zylinder und Kegel haben beide den Durchmesser d und die Höhe $\frac{d}{2} = r$. Daneben sehen wir eine Halbkugel, deren Durchmesser ebenfalls d ist. Wir denken uns beide Körper auf einer Ebene stehend und legen parallel zur Grundebene Schnitte durch beide Körper. In Anwendung des Prinzips des CAVALIERI wollen wir nun die Schnittfiguren beider Körper in verschiedenen Höhen vergleichen.

Es gilt $\quad \varrho = h \quad$ und $\quad R^2 = r^2 - h^2.$

Es gilt weiter: $A_1 = \pi r^2 - \pi \varrho^2 = \pi (r^2 - \varrho^2) = \pi (r^2 - h^2)$

$A_2 = \pi R^2 \qquad\qquad = \pi (r^2 - h^2).$

E 22



Nach dem Prinzip von CAVALIERI haben beide Körper das gleiche Volumen.[1]

Falls Zylinder, Kegel und Halbkugel gleiche Höhe und kongruente Grundflächen haben, gilt also:

$V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} = V_{\text{Halbkugel}}$

$\pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3.$

Für das Volumen der Kugel können wir also folgenden Satz formulieren:

11 **SATZ: Für das Volumen einer Kugel gilt:**

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi d^3$$

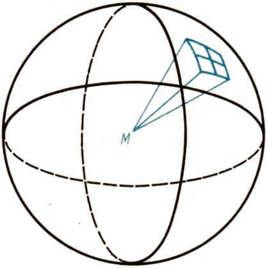
[1] Es sei noch einmal darauf verwiesen, daß wir zwar ständig das Prinzip des CAVALIERI bei der Herleitung der Volumenformeln verwendet haben, daß es aber nicht bewiesen wurde.

14 Berechnung der Oberfläche einer Kugel

Die Kugelfläche läßt sich nicht in die Ebene abwickeln.

Wollen wir die Berechnung der Kugeloberfläche durchführen, so denken wir uns einen regelmäßigen Körper mit n ebenen Flächen der Kugel einbeschrieben. Verbindet man die Eckpunkte dieser Flächen mit dem Mittelpunkt der Kugel, so entstehen n Pyramiden mit den Grundflächen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ und den Höhen $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$ (Bild E 23).

Das Volumen einer Pyramide beträgt $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$.



E 23

Das Volumen aller Pyramiden, also das Volumen des der Kugel einbeschriebenen regelmäßigen Körpers, beträgt

$$V = \frac{1}{3}(A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n).$$

Je größer n wird, um so mehr nähern sich die Höhen dem Werte r:

$$V \approx \frac{1}{3} r (A_1 + A_2 + \ldots + A_n).$$

Die Grundflächen der Pyramiden werden aber immer kleiner, und die Summe der Grundflächen nähert sich der Oberfläche A_O der Kugel:

$$V = \frac{r}{3} \cdot A_O.$$

Ersetzen wir V durch den Wert $\frac{4}{3}\pi r^3$ und vertauschen wir die Seiten, so erhalten wir

$$\frac{r}{3} A_O = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Big| \cdot \frac{3}{r}$$

$$A_O = \frac{4\pi r^3 \cdot 3}{3 \cdot r}.$$

Daraus folgt:

12 **SATZ: Der Flächeninhalt der Oberfläche einer Kugel beträgt:**

$$\mathbf{A_O = 4\pi r^2 = \pi d^2}.$$

5 Berechne das Volumen und die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser 40 cm beträgt!

Lösung:

Gegeben: $d = 40$ cm. *Gesucht:* V; A_O

Wir berechnen das Volumen V:

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3.$$

Einsetzen:	*Zahlentafel:*
$\frac{1}{6}\pi\, 40^3 = \frac{1}{6}\pi\, 64000 \approx 10667\,\pi \approx \underline{\underline{33511}}$	$10\,000\,\pi \approx 31\,416$ $600\,\pi \approx 1\,885$ $67\,\pi \approx 210{,}49$ $10\,667\,\pi \approx 33\,511{,}49$

Ergebnis: $V = 33\,511\ \text{cm}^3 \approx 33{,}5\ \text{dm}^3$

Wir berechnen den Flächeninhalt der Oberfläche. $A_O = \pi\, d^2$

Einsetzen: $\pi\, 40^2 = 1600\,\pi \approx \underline{\underline{5026{,}5}}$

Ergebnis: $A_O \approx 5026{,}5\ \text{cm}^2 \approx 50{,}3\ \text{dm}^2$

Das Volumen der Kugel beträgt rund 33,5 dm³ und der Flächeninhalt der Oberfläche rund 50,3 dm².

Aufgaben E 29 bis 75

15 In der Volumenformel für die Kugel tritt der Radius bzw. der Durchmesser in der dritten Potenz auf. Um die Ermittlung der dritten Potenzen, der sogenannten Kuben, zu erleichtern, enthalten manche Tabellenbücher Tafeln für Kuben, die ähnlich aufgebaut sind wie die Quadrattafel in unseren Zahlentafeln. Auf den Seiten 6 und 7 in den Zahlentafeln ermöglicht die Spalte mit der Überschrift $\frac{\pi}{6}\, n^3$ das unmittelbare Ablesen des Kugelvolumens für Durchmesser mit den Ziffernfolgen 1, 2, 3, ..., 100.

6 Das Volumen einer Kugel mit dem Durchmesser $d = 24$ cm ist zu berechnen.

Gegeben: $d = 24$ cm; *Gesucht:* V; $V = \frac{1}{6}\pi\, d^3$

Berechnung ohne Hilfsmittel	Berechnung mit Hilfe der Zahlentafel
$\frac{1}{6}\pi \cdot 24^3 = \frac{1}{6}\pi \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \approx 4 \cdot 576 \cdot 3{,}14 \approx \underline{\underline{7234{,}56}}$	$\frac{1}{6}\pi \cdot 24^3 \approx \underline{\underline{7238{,}1}}$
Ergebnis: $\underline{\underline{V \approx 7235\ \text{cm}^3}}$	

Die Abweichung im Ergebnis entsteht dadurch, daß in den Zahlentafeln $\pi \approx 3{,}1416$ zugrunde gelegt wurde.

Ist das Volumen einer Kugel bekannt und der Durchmesser bzw. der Radius gesucht, so führt die Umstellung der Formeln auf Kubikwurzeln.

Unter der Kubikwurzel einer nichtnegativen Zahl a (geschrieben: $\sqrt[3]{a}$) versteht man die positive Zahl b, für die gilt: $b^3 = a$.

So führt beispielsweise die dritte Wurzel (die Kubikwurzel) aus 64 auf die Zahl 4; denn es ist $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Stellen wir nun die Formeln für die Berechnung des Volumens einer Kugel um:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3;\quad r^3 = \frac{3V}{4\pi};\quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3;\quad d^3 = \frac{6V}{\pi};\quad d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

Bei der Berechnung spezieller Fälle kann man wieder die Zahlentafeln verwenden.

7 Das Volumen einer Kugel beträgt 321.548 cm^3. Wie groß ist der Durchmesser?

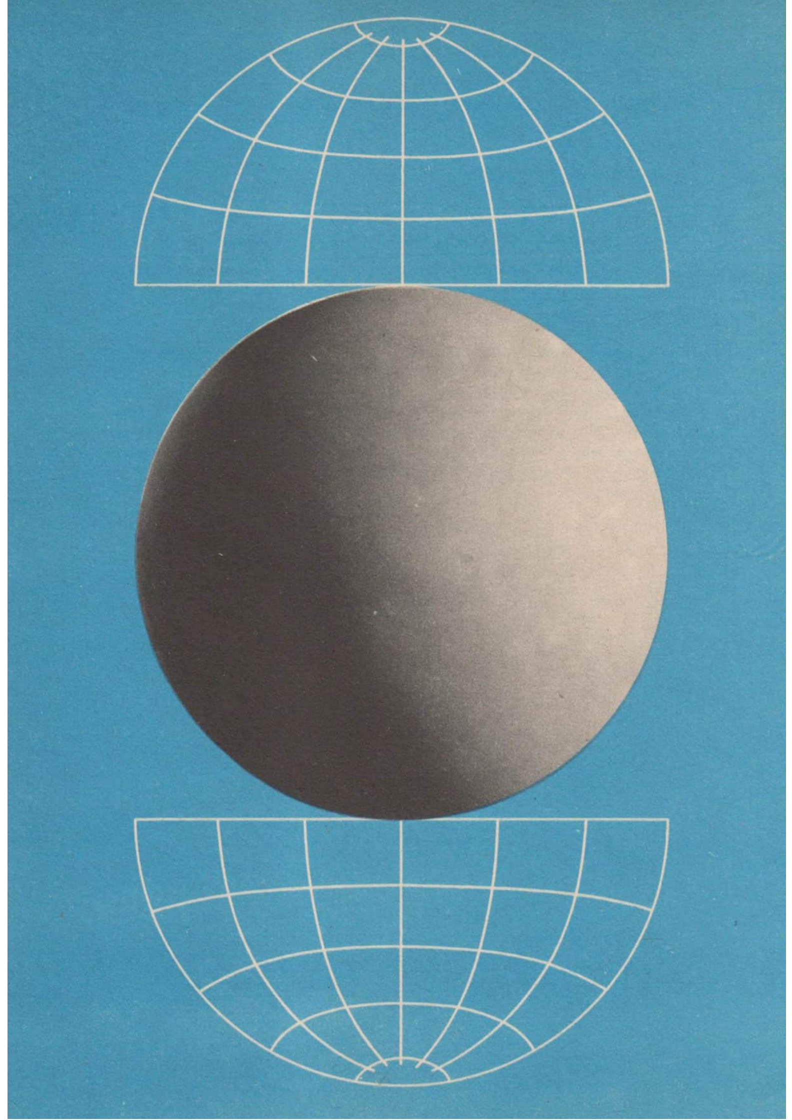
$$V = \frac{1}{6}\pi d^3; \quad d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

Gegeben: $V = 321{,}548\ \text{cm}^3$. *Gesucht:* d

Wir suchen in der Spalte $\frac{\pi}{6} n^3$ der Tabelle in den Zahlentafeln die gegebene Zahl auf und finden für n die Zahl 8,5. (Rückt das Komma in der Zahl der Spalte $\frac{\pi}{6} n^3$ drei Stellen nach links, so rückt es in der Zahl der Spalte n um eine Stelle nach links.)

Ergebnis: $d \approx 8{,}5$ cm

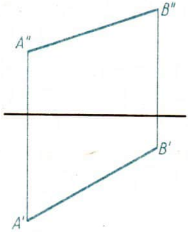
Kubikzahlen und Kubikwurzeln kann man auch mit Hilfe des Rechenstabes näherungsweise ermitteln. Wir benutzen hierzu die Skale K des Rechenstabs (vgl. Bild D 18). Für eine beliebige Zahl, die wir mit Hilfe des Läuferstrichs auf der Skale D einstellen, können wir auf der Skale K die dritte Potenz ablesen. Umgekehrt können wir auch für eine Zahl, die wir auf der Skale K einstellen, auf der Skale D die dritte Wurzel ablesen. Dabei müssen wir entsprechend dem Quadratwurzelziehen, wo wir die Zahl vorher in Gruppen von je zwei Ziffern, vom Komma aus gerechnet, zerlegten, diesmal die Zahl in Gruppen von je drei Ziffern zerlegen.



F. DARSTELLENDE GEOMETRIE

Die wahre Größe von Strecken

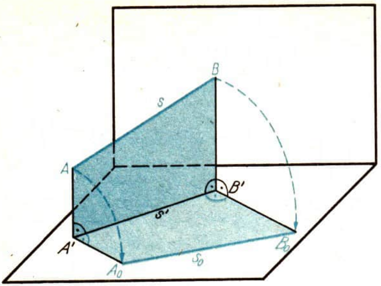
1 Das Bild F 1 zeigt die Grundriß-Aufriß-Darstellung einer Strecke $\overline{AB}$. Wenn wir uns die Lage der Strecke im Raum an Hand dieses Bildes vorstellen, so erkennen wir, daß es sich sowohl im Aufriß als auch im Grundriß um verkürzte Bilder der Strecke $\overline{AB}$ handelt. Die Strecke liegt zu keiner der beiden Rißtafeln parallel. Auch zur Kreuzrißtafel würde sie nicht parallel liegen. In solch einem Fall spricht man von einer **allgemeinen Lage** im Gegensatz zur Parallellage. Wir wollen nun die wahre Größe der Strecke $\overline{AB}$ ermitteln, die im Bild F 1 in der Zweitafelprojektion angegeben ist.



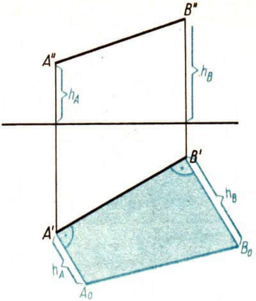
F 1

2 **Umklappen in die Grundrißtafel**

Fällen wir von den Punkten A und B der im Raum befindlichen Strecke $\overline{AB}$ die Lote auf die Grundrißtafel, so erhalten wir das Trapez $AA'B'B$ (Bild F 2). Die Ebene dieses Trapezes steht senkrecht auf der Grundrißtafel. Klappen wir sie in die Grundrißtafel hinein, so gelangt $\overline{AB}$ in die Strecke $\overline{A_0B_0}$, deren Länge gleich der von $\overline{AB}$ ist.
Beim Umklappen geht z. B. der rechte Winkel $AA'B'$ in den rechten Winkel



F 2

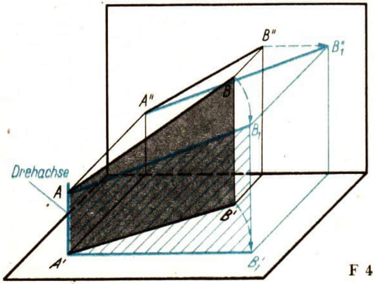


F 3

$A_0A'B'$ über. Zur Konstruktion der wahren Größe errichten wir im Grundriß der Strecke $\overline{AB}$ in Bild F 1 Senkrechten in den Punkten A' und B' auf $\overline{A'B'}$ (Bild F 3). Auf den Senkrechten tragen wir die Höhen der Punkte A und B ab, die wir aus dem Aufriß entnehmen. Damit erhalten wir die Punkte A_0 und B_0 und mit der Verbindungsstrecke $\overline{A_0B_0}$ die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$.

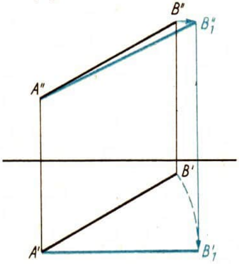
3 Drehen in eine zur Aufrißtafel parallele Ebene

Die Strecke $\overline{AB}$ wird um eine senkrecht zur Grundrißebene verlaufende Achse in eine zur Aufrißebene parallele Ebene gedreht. Im vorliegenden Fall im Bild F 4 wurde um die Achse AA' gedreht, und zwar so weit, bis die Strecke $\overline{AB}$ in Parallellage zur Aufrißtafel, d. h. in die Lage $\overline{AB_1}$, übergeht. Die gedrehte Strecke wird dann im Aufriß in wahrer Größe abgebildet.
Die Ausführung dieser Bewegung im Grund-Aufriß-Bild geschieht folgendermaßen: Die Strecke $\overline{A'B'}$ wird um A' in die zur Rißachse parallele Lage $\overline{A'B_1'}$



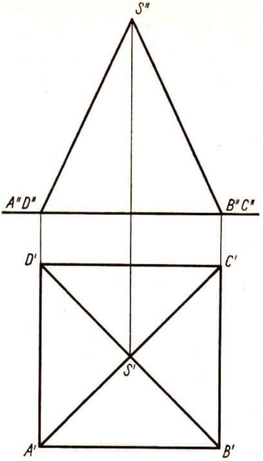
F 4

F 5



gedreht. Im Aufriß wird durch B'' eine Parallele zur Rißachse gezeichnet. Im Schnittpunkt dieser Parallele mit der Ordnungslinie von B_1' erhalten wir den Punkt B_1''. Dann ist die Verbindung von A'' und B_1'' die gesuchte Strecke $\overline{A''B_1''}$ mit der wahren Größe der Strecke $\overline{AB}$ (Bild F 5).

Sowohl das Verfahren der Umklappung als auch das der Drehung läßt sich auch in der Aufrißtafel durchführen.



F 6

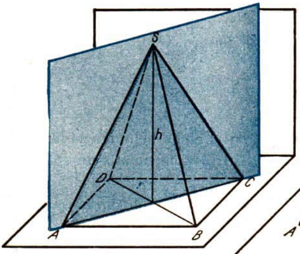
1 Zeichne das Grund-Aufriß-Bild einer beliebigen Strecke in allgemeiner Lage, und ermittle ihre wahre Größe, indem du die Strecke um eine zur Aufrißtafel senkrechte Achse drehst!

1 Das Bild F 6 stellt eine Pyramide im Grund- und Aufriß dar. Es soll die wahre Länge der Seitenkanten ermittelt werden.

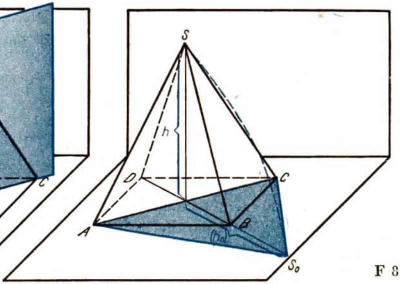
(a) *Konstruktion mit Hilfe der Umklappung*

Wir legen durch eine Kante der Pyramide eine Ebene, die senkrecht auf der Grundrißtafel steht.

Die Schnittgerade dieser Ebene mit der Grundrißebene heißt **Grundrißspur** der Schnittebene. Um diese Grundrißspur klappen wir die Schnittebene in die Grundrißebene (Bild F 7). Dieser Schnitt enthält auch die Höhe der Pyramide. Die Höhe, die aus dem Aufriß in wahrer Größe entnommen werden kann, benutzen wir, um den Punkt S_0 zu finden (Bild F 8). Die entsprechende Kon-

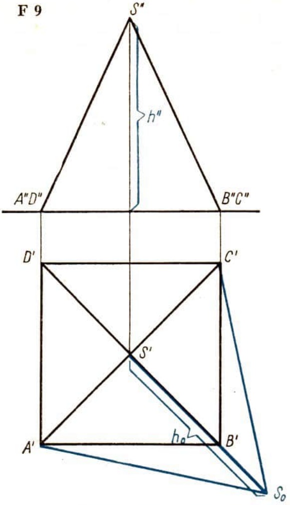


F 7



F 8

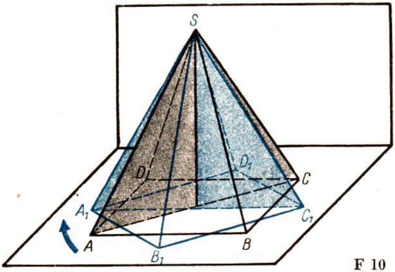
F 9



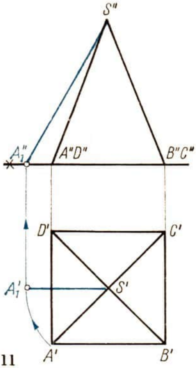
struktion im Grund-Aufriß-Bild zeigt das Bild F 9. Die Strecke $\overline{A'S_0} = \overline{S_0C'}$ ist gleich der wahren Größe der gesuchten Kante $\overline{AS}$.

(b) *Konstruktion mit Hilfe der Drehung*
Wir drehen die Pyramide auf der Grundrißebene so lange, bis die abzubildende Kante parallel zur Aufrißtafel liegt. Das ist gerade dann der Fall, wenn der Grundriß dieser Kante parallel zur Rißachse liegt (Bild F 10).
Wir zeichnen also zuerst den Grundriß in gedrehter Lage und bestimmen den zugehörigen Aufriß. In diesem Aufriß wird die Kante (in Bild F 11 die Kante $\overline{AS}$) in wahrer Größe abgebildet.

Aufgaben F 1 bis 8



F 10



F 11

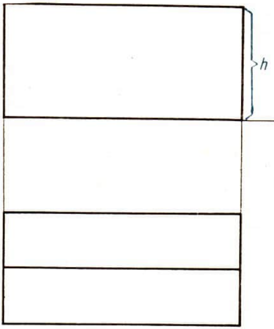
Die wahre Größe ebener Flächen

(2) Gib an, in welcher Lage sich eine ebene Fläche befinden muß, wenn sie **a)** zu ihrem Grundriß, **b)** zu ihrem Aufriß kongruent sein soll!

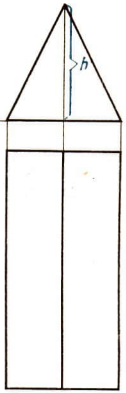
Die wahre Größe ebener Flächen erhalten wir immer dann, wenn die Fläche zu einer Rißtafel parallel liegt. Wir werden deshalb im Falle einer allgemeinen Lage eine solche Parallellage herbeiführen. Hierfür kommen sowohl die Umklappung als auch die Drehung in Betracht.

4 Drehung

Bei Gegenständen, deren Seitenflächen zur Grundrißtafel senkrecht stehen, z. B. bei geraden Prismen, kann durch Drehung des ganzen Körpers die Seitenfläche, deren wahre Größe und Gestalt bestimmt werden soll, in parallele Lage zur Aufrißtafel gebracht werden. Zu diesem Zwecke wird der Grundriß so weit gedreht, bis die Grundrißspur der betreffenden Fläche parallel zur Rißachse liegt. Dies ist im Bild F 12 an einem Modell eines Hauses gezeigt, dessen Giebelwände in wahrer Größe und Gestalt abgebildet werden sollen. Im zugeordneten Aufriß sind dann die Giebelwände in wahrer Größe und Gestalt zu erkennen (Bild F 13).



F 12

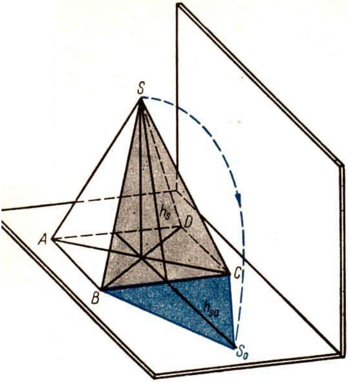


F 13

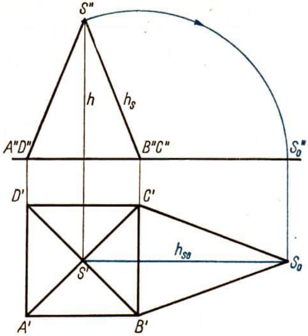
5 Umklappung

Die Drehung des Gegenstandes auf der Grundrißtafel führt nicht unmittelbar zum Ziel, wenn die ebene Figur, deren wahre Größe und Gestalt ermittelt werden soll, gegen die Grundrißtafel geneigt ist. Dies betrifft die Seitenfläche einer auf der Grundrißtafel stehenden Pyramide. In diesem Fall wird die Figur um ihre Grundrißspur in die Grundrißtafel umgeklappt (Bild F 14). Bei der Umklappung beschreibt die Spitze der Pyramide einen Kreisbogen mit der Höhe der Seitenfläche h_s als Radius.

Steht die Ebene der Figur, die umgeklappt werden soll, senkrecht zur Aufrißtafel (dies ist daran zu erkennen, daß die Grundrißspur senkrecht zur Rißachse verläuft), so ist die Umklappung zeichnerisch einfach auszuführen; denn der Weg, den die Spitze der Seitenfläche beschreibt, verläuft parallel zur Aufrißtafel. Er wird im Grundriß als gerade Linie parallel zur Rißachse und im Aufriß als Kreisbogen um den Punkt B'' abgebildet. Die Strecke $\overline{B''S''}$ ist gleich der Flächenhöhe h_s. Bei der Konstruktion wird darum zunächst im Aufriß ein Kreisbogen mit dem Radius $\overline{B''S''}$ um B'' geschlagen und mit der Rißachse zum Schnitt gebracht; denn auf der Rißachse liegt der Aufriß S_0'' des umgeklappten Punktes S_0. Danach wird durch S' eine Parallele zur Riß-



F 14

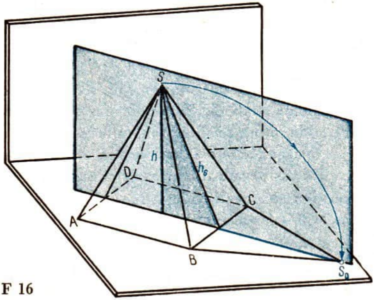


F 15

achse gezeichnet; denn auf dieser liegt der Grundriß S_0' des umgeklappten Punktes S_0. Mit Hilfe der entsprechenden Ordnungslinie wird nun von S_0'' aus der Punkt S_0 ermittelt. Das Dreieck $B'S_0C'$ stellt die umgeklappte Seitenfläche BCS dar (Bild F 15).
Steht die ebene Figur, deren wahre Größe und Gestalt ermittelt werden soll, nicht senkrecht zur Aufrißtafel, so wird der Gegenstand auf der Grundrißtafel so weit gedreht, bis die betreffende Figur gegen die Aufrißtafel eine senkrechte Lage einnimmt. Zeichnerisch wird dies durch Drehung des Grundrisses ausgeführt, bis die Grundrißspur der Figur zur Rißachse senkrecht steht.

6 Es ist noch eine andere Umklappung in die Grundrißtafel möglich. Wir wollen wieder die Seitenflächen einer Pyramide, die aber nicht in der sogenannten Hauptstellung zur Rißachse steht, in wahrer Größe ermitteln. Dazu wäre eine Klappung des Seitendreiecks um $B'C'$ ($B' = B$; $C' = C$) notwendig (Bild F 16). Dieses Dreieck kann man aber nicht unmittelbar umklappen. Wir führen dazu zwei Schritte aus:
(1) Durch die Spitze des Körpers wird ein Schnitt gelegt, der das **Stützdreieck** der Seitenfläche, bestehend aus der Hypotenuse h_s, der Kathete h und der Kathete aus dem Grundriß der

F

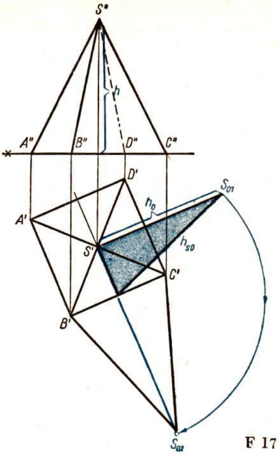


F 16

Flächenhöhe h_s, enthält. Die Höhe h kann aus dem Aufriß entnommen werden. Das Stützdreieck wird um seine Grundrißspur in die Grundrißtafel geklappt (Bild F 17) und ergibt die Flächenhöhe h_s in wahrer Größe.

(2) Nun wird um den Schnittpunkt der Grundrißspur der Seitenfläche BCS mit der Grundrißspur der Schnittebene ein Kreisbogen von der Spitze des umgeklappten Stützdreiecks aus geschlagen und mit der Grundrißspur der Schnittebene zum Schnitt gebracht. Dieser Punkt ist der Eckpunkt S_0 der umgeklappten Seitenfläche $B'C'S_{02}$. Das Dreieck $B'C'S_{02}$ zeigt die Seitenfläche BCS in wahrer Größe und Gestalt (Bild F 17).

Aufgaben F 9 bis 15



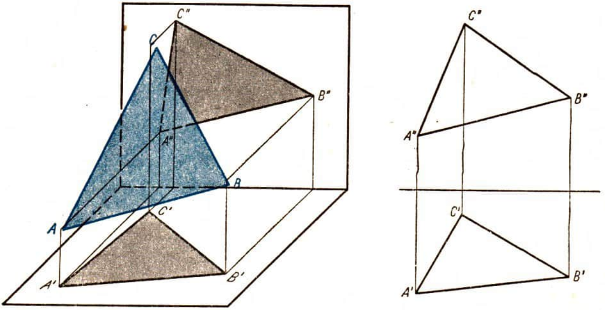
F 17

7 Die wahre Größe eines Dreiecks in allgemeiner Lage

Das Bild F 18 zeigt ein Dreieck in allgemeiner Lage im Schrägriß, wobei auf den Tafeln der Grund- bzw. der Aufriß eingezeichnet ist.

Wir müssen nun das Dreieck so um eine Achse drehen, daß es parallel zur Grundrißebene oder parallel zur Aufrißebene zu liegen kommt.

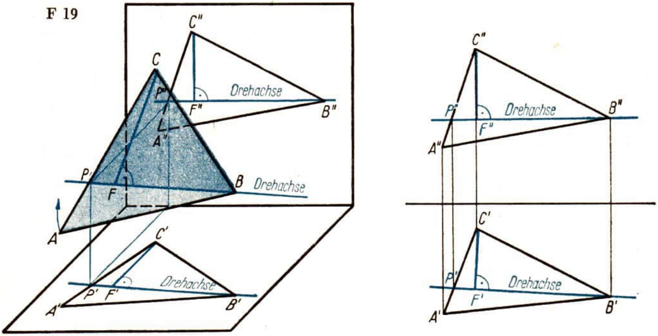
F 18



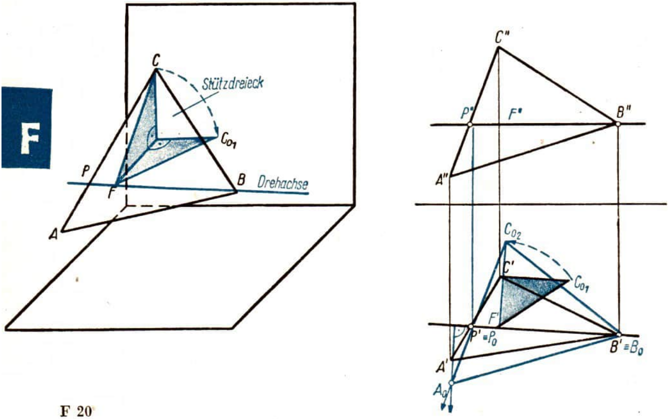
F

Für die Darstellung in den Bildern F 19 und F 20 wurde angenommen, daß das Dreieck parallel zur Grundrißtafel gedreht werden soll. Die Drehachse müssen wir dazu parallel zur Grundrißtafel annehmen. Sie markiert sich also als Höhenlinie auf dem Aufriß durch eine Parallele zur Rißachse. Die Drehachse legen wir durch den Eckpunkt *B* des Dreiecks. Wir erhalten dann noch den Punkt *P*. Dabei wird die Dreieckfläche in zwei Teile zerlegt. Der dunklere Teil bewegt sich bei der Drehung nach unten, der hellere nach oben (Bild F 19).

F 19



Bei der Drehung bewegen sich alle Punkte des Dreiecks auf Ebenen, die senkrecht zur Drehachse liegen. Wir können also die Lote von jedem Eckpunkt auf die Drehachse eintragen und erhalten damit die Radien der Kreise, die



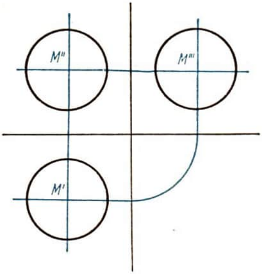
F 20

die Eckpunkte bei der Drehung beschreiben. (Im Bild F 19 wurde das Lot von C auf BP eingetragen. Wir erhalten dort den Fußpunkt F.)

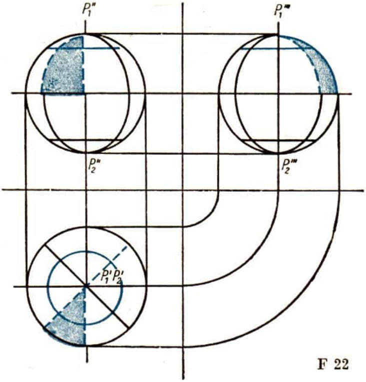
Die Strecke $\overline{CF}$ wird nun auf bekannte Art durch Umklappung eines Stützdreiecks ermittelt (Bild F 20).

8 Die Abbildung einer Kugel in Grund-, Auf- und Kreuzriß

Das Bild einer Kugel ist sowohl im Grundriß als auch im Aufriß und im Kreuzriß ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Kugeldurchmesser ist (Bild F 21).



F 21



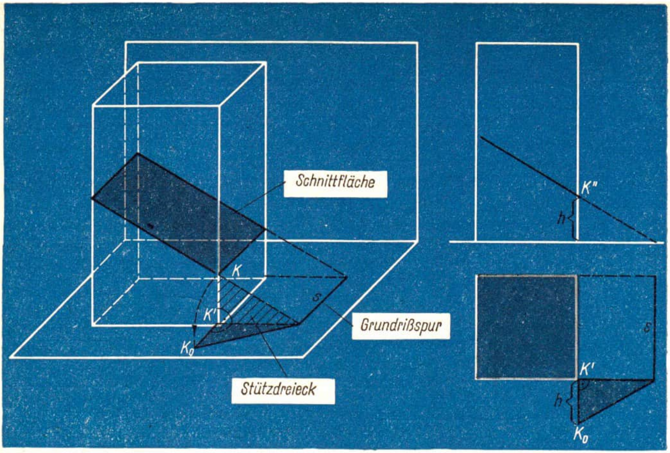
F 22

Wir wollen nun untersuchen, wie die einzelnen Teile der Kugeloberfläche abgebildet werden. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Kugel mit dem in der Erdkunde üblichen Gradnetz (Breiten- und Längenkreise) überzogen. Die angenommene Erdachse soll senkrecht zur Grundrißtafel stehen.

Die drei Risse der Kugel sind im Bild F 22 gezeigt.

Im Grundriß werden die Parallelkreise als konzentrische Kreise abgebildet, der Umriß der Figur ist das Bild des Äquators. Die Längenkreise (Meridiane) erscheinen als Durchmesser. Der Winkel, den zwei Meridiane miteinander einschließen, wird als Winkel zwischen den entsprechenden Durchmessern wiedergegeben.

Im Aufriß und im Kreuzriß werden die Parallelkreise als parallele Sehnen abgebildet, die Meridiane im allgemeinen als Ellipsen, deren große Achsen gleich dem Kugeldurchmesser sind und die mit dem in diesen Rissen senkrecht gezeichneten Durchmesser zusammenfallen. Ausnahmen bilden nur diejenigen Meridiane, die entweder parallel oder senkrecht zu den Bildtafeln sind.



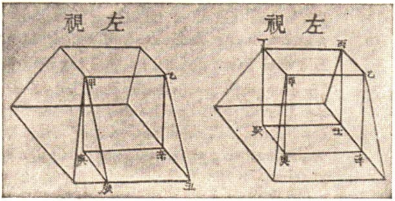
F 23

Zur Geschichte der Stereometrie

9 Die Aufgaben der Volumenbestimmung von Körpern gehören zu denjenigen Problemstellungen, die bereits ganz am Anfang der Geschichte der Menschheit zur Entwicklung mathematischer Kenntnisse geführt haben. Mannigfaltige praktische Probleme gaben dazu Veranlassung. Anfangs wurden Volumina empirisch bestimmt durch Ausmessen mit Wasser oder Sand.

Erst beim Übergang von der Urgesellschaft zur Sklavenhaltergesellschaft lernten die alten Völker, die Volumina der einfachsten Körper zu berechnen. Die altägyptische Mathematik hat es, wie wir aus einem in Moskau aufbewahrten Papyrus erkennen können, im 18. Jahrhundert v. u. Z. sogar bis zur völlig korrekten Berechnung eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grund- und Deckfläche gebracht. Der Rechengang entspricht der Verwendung

F 24: Originaltext der ägyptischen Pyramidenstumpfaufgabe. Auf Papyrus geschrieben.



F 25: Illustration zur Berechnung von Pyramidenstümpfen. Chinesisch, etwa 2. Jahrhundert v. u. Z.

der Formel $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$; wir wissen jedoch nicht, wie dieses Ergebnis gefunden worden ist.

Über die babylonische Mathematik wissen wir sehr viel mehr als über die altägyptische, da eine recht große Anzahl der widerstandsfähigen Tontäfelchen mit mathematischen Texten erhalten geblieben ist. Aus ihnen kennen wir sogar ganz genau die unmittelbaren praktischen Probleme, denen die Geometrie und insbesondere die Berechnungen der Volumina, Oberflächen usw. der verschiedenartigsten Körper ihre Entstehung verdanken. Verlangt wurden die Berechnungen an Dämmen, die in großer Ausdehnung zur künstlichen Bewässerung angelegt wurden. Sie besaßen meist trapezförmigen Querschnitt. Bei diesem praktischen Problem wurde zugleich nach der Anzahl der benötigten Arbeiter bei einer gewissen mittleren Leistung gefragt. Ferner ging es um Berechnungen an ringförmigen Wallbauten, von Tempelfundamenten, von Befestigungsgräben, von Wasseruhren, Brunnenziegeln.

Insgesamt wurde in der babylonischen Mathematik neben dem Volumen von Würfeln und Quadern auch das von Prismen und Zylindern richtig angegeben, bei dem letzteren Volumen allerdings mit dem Näherungswert 3 für π. Dagegen beruhten die Rechenmethoden zur Bestimmung der Volumina von Kegel- und Pyramidenstümpfen auf falschen „Formeln".

Die griechische Mathematik knüpfte an die in Ägypten und Mesopotamien gewonnenen Ergebnisse an, darunter an die stereometrischen Resultate. Selbst der Name „Pyramide" z. B. ist aus der ägyptischen Sprache entlehnt. Von dem großen materialistischen Denker der frühen griechischen Wissenschaft DEMOKRITOS VON ABDERA (etwa 460 bis etwa 370 v. u. Z.) stammt die Angabe des Volumens der Pyramide und des Kegels. DEMOKRITOS vertrat die Ansicht, daß sich die Körper aus kleinsten Teilchen, den Atomen, aufbauen. Diese Betrachtungsweise diente ihm auch bei seinen Überlegungen zur Berechnung des Volumens der Pyramide und des Kegels. Er dachte sich einen Kegel durch Schnitte parallel zur Basis in dünnste Scheiben zerschnitten. Jedoch vermochte es DEMOKRITOS noch nicht, seine richtigen Ergebnisse streng zu beweisen. Dies gelang erst EUDOXOS VON KNIDOS (etwa 408 bis etwa 355 v. u. Z.) und ARCHIMEDES VON SYRAKUS (etwa 287 bis 212 v. u. Z.), indem sie an die Gedanken von DEMOKRITOS anknüpften.

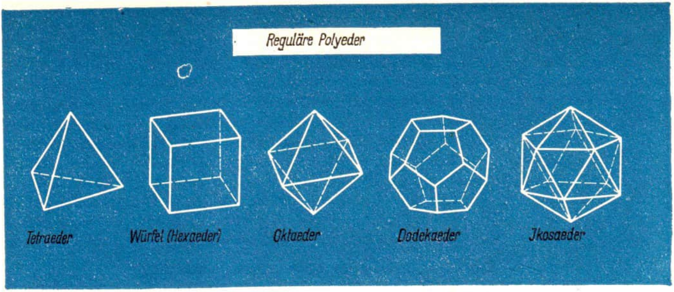
Etwa gleichzeitig mit DEMOKRITOS behandelte auch HIPPOKRATES VON CHIOS (um 440 v. u. Z.) stereometrische Problemstellungen, darunter das Problem der Würfelverdoppelung, das für die Entdeckung der irrationalen Zahlen eine entscheidende Rolle gespielt hat. In der unteritalienischen Schule des Mathematikers ARCHYTAS VON TARENT (428—365 v. u. Z.), der der pythagoreischen Lehre nahestand, sind dann zusammen mit dem Mathematiker THEAITETOS VON ATHEN (etwa 410 bis 368 v. u. Z.) die ***regulären Polyeder***[1], *Würfel*, *Tetraeder*, *Dodekaeder*, *Oktaeder* und *Ikosaeder*, erforscht worden.

F

EUDOXOS VON KNIDOS hat die stereometrischen Einzelresultate in einer größeren Abhandlung zusammengefaßt. Diese hat dann EUKLEIDES (etwa 365 bis etwa 300 v. u. Z.) bei der Abfassung seines berühmten Werkes *Elemente* benutzt. Schließlich hat ARCHIMEDES noch die für die damalige Mathematik außerordentlich schwierige Aufgabe der Berechnung des Kugelvolumens und der Kugeloberfläche bewältigt, beruht sie doch, wie die Berechnung des Kegelvolumens, auf Grenzübergängen.

Man darf aber bei EUKLEIDES nicht wirkliche Berechnungsvorschriften für die Körper und schon gar nicht praktische Anwendungen erwarten. Er war Vertreter der theoretischen Mathematik und betrachtete als Anhänger des idealistischen griechischen Philosophen PLATON (427 bis etwa 347 v. u. Z.) jede Anwendung der Mathematik außer zu philosophischen Zwecken als eine Entweihung der Mathematik. Daher treten bei ihm keine „Formeln" oder direkten Berechnungsvorschriften für Körper auf. So heißt es bei EUKLEIDES:

[1] Polyeder (griech.), Vielflächner



F 26

Kegel und Zylinder von gleicher Höhe verhalten sich dem Volumen nach wie ihre Höhen und solche von gleicher Grundfläche wie ihre Höhen. Kugeln sind in dreifachen Verhältnissen ihrer Durchmesser. (Wir würden sagen: Kugeln verhalten sich wie die Kuben ihrer Durchmesser.)

Erst mit Archimedes setzte sich in der griechischen Mathematik wieder eine Richtung durch, die auch auf die praktischen Probleme einging. Archimedes gab eine wirkliche Berechnung des Volumens und der Oberfläche der Kugel an, indem er die Kugel in Elementarkegel zerlegte, die sämtlich ihre Spitze im Kugelmittelpunkt haben. Bei ihm heißen die entsprechenden Sätze: *Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß wie die Fläche eines ihrer größten Kreise. Der Zylinder, der gleiche Grundfläche besitzt mit einem der größten Kreise einer Kugel, dessen Höhe aber gleich dem Durchmesser der Kugel ist, ist sowohl seinem Inhalte als auch seiner Oberfläche nach* $1\frac{1}{2}$ *so groß wie die Kugel.* Den für diese Sätze benötigten Näherungswert für π hatte Archimedes schon vorher durch die Abschätzung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ bestimmt. Das Grab von Archimedes, der bei der Einnahme der Stadt Syrakus durch die Römer ums Leben kam, war im Altertum mit einer Säule gekennzeichnet, die die Hauptfigur eines der wichtigsten Sätze trug, eine Kugel mit dem umbeschriebenen Zylinder.

Mit Heron von Alexandria (etwa 100 u. Z.) erreichte die praktische Mathematik in der griechischen und römischen Sklavenhaltergesellschaft ihren Höhepunkt. Auch die praktischen Aufgaben der Volumen- und Oberflächenberechnungen wurden von Heron in einer Fülle von Aufgaben behandelt, und zwar Aufgaben über Kegel, Zylinder, Kugel und Kugelsegment im engen Anschluß an Archimedes.

Durch Heron von Alexandria, der sich vor allem für die praktische Anwendbarkeit der Mathematik interessierte, wurden die verschiedenartigsten Körper berechnet oder wenigstens Näherungsverfahren angegeben: Kegelstümpfe, Obeliske, Säulen, Pyramiden, Muscheln, Badewannen, Scheunen, Brunnen, Eimer, Trommeln, Türme, Flöße, Schwimmbecken, Öfen, Fässer, Schiffe, Gewölbe usw.

Somit lagen bereits am Ausgang der Sklavenhaltergesellschaft die Verfahren vor, die ebenflächig begrenzten Körper und die aus ihnen zusammengesetzten sowie eine Anzahl von Körpern mit gekrümmten Oberflächen zu berechnen. Entscheidende Fortschritte bei der mathematischen Bewältigung komplizierterer Körper mit gekrümmten Oberflächen wurden erst im 16. und 17. Jahrhundert erzielt, und zwar mit Methoden der höheren Mathematik.

F

Über die Entwicklung der mathematischen Symbolik

10 Heutzutage erkennt man Mathematikbücher auf den ersten Blick an den dort auftretenden mathematischen Symbolen und Formeln. Doch diese verschiedenen speziellen mathematischen Zeichen sind erst im Laufe der letzten 400 bis 500 Jahre in Gebrauch gekommen.

Ursprünglich wurden die mathematischen Texte ohne Verwendung von Abkürzungen oder Symbolen in der jeweiligen Sprache ausgedrückt, dabei gewannen gewisse Worte den Charakter von mathematischen Fachausdrücken. So bedeutete z. B. das altägyptische Schriftzeichen für „Haufen", „Menge" soviel wie die gesuchte Größe in einer linearen Gleichung, und das Wort für „zerbrechen" war in der altägyptischen mathematischen Fachsprache gleichwertig mit subtrahieren.

Erst am Ende der griechisch-hellenistischen Mathematik bildeten sich Ansätze einer algebraischen Symbolik heraus, am deutlichsten bei DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA (3. Jahrhundert u. Z.). Er kürzte einige häufig gebrauchte Fachausdrücke im Text ab, z. B. die Subtraktion mit dem umgekehrten griechischen Buchstaben Ψ, also durch $\pitchfork$. Diese Ansätze sind jedoch nicht weitergeführt worden, und noch die außerordentlich weit entwickelte Algebra der arabischen Gelehrten drückte alle Regeln vollständig in Worten aus. So kannte z. B. der aus Usbekistan stammende Mathematiker AL-HWARIZMI (gest. um 840) noch keine speziellen Additions- und Subtraktionszeichen, kein Gleichheitszeichen usw.

Die eigentliche Entwicklung der algebraischen Symbolik setzte in Europa im 15. Jahrhundert ein, als mit dem Übergang von der Warenwirtschaft zur Geldwirtschaft auch wesentlich mehr Rechenaufgaben gelöst werden mußten. Überall in den Städten lehrten von den Stadtverwaltungen angestellte sogenannte Rechenmeister das Rechnen. Von den deutschen Rechenmeistern ist ADAM RIES (1492—1559), der im Gebiet des erzgebirgischen Silberbergbaus von Annaberg wirkte, am bekanntesten geworden.

Mit den durch den arabischen Kulturbereich vermittelten indischen Ziffern (die wir deshalb eigentlich fälschlich „arabische Ziffern" nennen) setzten sich nach und nach spezielle Abkürzungen und Symbole durch. Die Mathematiker dieser Zeit, welche den großen Nutzen der Symbolik für die Mathematik erkannt hatten und sehr dringend ihren Lesern deren Verwendung empfahlen, nannten sich *Cossisten*. Mit dem lateinischen Wort „res" (Sache, Ding) wurde in einer Gleichung die Variable bezeichnet, für die Zahlen ermittelt werden sollen. Mit dem lateinischen Wort „census" war das Quadrat der Variablen gemeint. So bedeutete $\frac{\text{12 res et 45}}{\text{1 census et 3 res}}$, in unsere heutige Schreibweise übertragen, den Ausdruck $\frac{12x + 45}{x^2 + 3x}$.

Anfangs erfanden die Cossisten eigene Abkürzungen und Symbole. Erst allmählich wurden einige der Bezeichnungen allgemeingebräuchlich, während andere wieder verschwanden. Der Italiener LUCA PACIOLI (1445—1514) z. B. verwendete die Zeichen $\tilde{p}$ und $\tilde{m}$ für plus und minus als Operationszeichen für Addition und Subtraktion.

Die Zeichen $+$ und $-$ traten erstmals in Deutschland um 1480 und im Druck am frühesten 1489 bei dem böhmischen Cossisten JOHANNES WIDMAN (geb. um 1460) auf. Diese Zeichen sind aus der kaufmännischen Praxis in die Mathematik übergegangen. Mit $+$ und $-$ wurden Übergewicht und Untergewicht auf den Kaufgütern bezeichnet.

Der Multiplikationspunkt war schon 1464 von dem aus Franken stammenden REGIOMONTANUS (eigentlich JOHANNES MÜLLER, 1436—1476), dem führenden Mathematiker Europas des 15. Jahrhunderts, benutzt worden, konnte sich aber erst durch das Wirken des deutschen Mathematikers und Philosophen G. W. LEIBNIZ (1646—1716) durchsetzen. Von ihm stammt eine ganze Reihe von weiteren mathematischen Symbolen, z. B. die Bezeichnung $a:b = c:d$ für die Proportion, und ferner Bezeichnungen der höheren Mathematik. Der Bruchstrich war bei gewöhnlichen Brüchen schon gelegentlich in der indischen Mathematik verwendet worden, in der Mitte des 15. Jahrhunderts wurde er allgemein üblich.

Das Gleichheitszeichen ist 1557 von dem englischen Cossisten und Arzt R. Recorde (etwa 1510—1558) mit der Begründung eingeführt worden, daß „nichts gleicher sein könne als ein Paar paralleler Linien“, doch hat es noch mehr als 150 Jahre gedauert, bis sich dieses Zeichen allgemein durchgesetzt hat. Die Ungleichheitszeichen $>$ und $<$ wurden 1631 von dem englischen Mathematiker Th. Harriot (1560—1621) vorgeschlagen. Die Klammern kamen im Laufe des 16. Jahrhunderts bei den italienischen Cossisten in Gebrauch, z. B. verwendete der Büchsenmeister N. Tartaglia (etwa 1500—1557) 1556 runde Klammern ( ) zur Bezeichnung des Radikanden. Der große französische Algebraiker Francois Vieta (1540—1603) führte 1593 die eckigen und geschweiften Klammern ein.

Die Operation des Quadratwurzelziehens wurde anfangs durch ein davorgesetztes ℞ (von lat. „radix“, Wurzel) bezeichnet, so bedeutet in der Schreibweise von Luca Pacioli z. B. ℞ 48 $\tilde{p}$ 6 den Ausdruck $\sqrt{48} + 6$. Im Jahre 1524 verwendete Adam Ries erstmals handschriftlich den Wurzelhaken $\surd$, und ein Jahr darauf erschien er in dem berühmten Lehrbuch „Coß“ des Deutschen Michael Stifel (etwa 1487—1567) erstmalig im Druck. Der Wurzelhaken $\sqrt{}$ mit dem Querstrich ist jedoch erst später von dem großen französischen Mathematiker und Philosophen Rene Descartes (1596—1650) eingeführt worden, um den Radikanden genau zu bezeichnen. Descartes hat auch die Schreibweise a^2, a^3, a^4, ... für die Potenzen eingeführt.

Gleichzeitig mit besonderen mathematischen Symbolen setzte sich nach und nach auch die Verwendung von Buchstaben zur Bezeichnung von Variablen durch. Francois Vieta führte dieses Prinzip in seinem 1591 verfaßten Buch *Logistica speciosa* erstmals durch. Er bezeichnete Variablen, die den Charakter von Konstanten haben, durch Konsonanten. Dagegen bezeichnete er Variablen, für die Zahlen ermittelt werden sollen, durch Vokale. Unsere heutige Vereinbarung, solche Variablen mit den letzten Buchstaben und die Konstanten mit den ersten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen, stammt von Rene Descartes, der diese Bezeichnungsweise 1637 in seinem für die Geschichte der Mathematik außerordentlich wichtigen philosophischen Werk *Abhandlung über die Methode* (Discours de la methode) verwendet hatte.

AUFGABEN

A. Rechnen mit Variablen

1. Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

a)

a	b	c	$5a + 4b + c$
4	0,5	$\frac{1}{2}$	
8	$\frac{1}{4}$	-2	
-7	-7	-7	
0,7	$-0,1$	-1	
$-\frac{1}{5}$	2	2	

b)

u	v	w	$5u + 4v + w$
4	0,5	$\frac{1}{2}$	
8	$\frac{1}{4}$	-2	
-7	-7	-7	
0,7	$-0,1$	-1	
$-\frac{1}{5}$	2	2	

2. Berechne jeweils **a)** $l + m$, **b)** $l - m$, **c)** $l + m + p$, **d)** $l \cdot m$ und **e)** $l:p$!
Setze dabei nacheinander für l, m bzw. p die folgenden Zahlen ein!

l	35	0,9	$\frac{1}{2}$	-24	2,77	0	-39
m	3	2,7	$\frac{1}{4}$	11	1,86	183	0
p	7	0,3	$\frac{1}{3}$	-16	2,03	-123	$-3,9$

3. Es sei $p + 1$ eine beliebige ganze Zahl. Nenne **a)** die nächsten fünf auf $p + 1$ folgenden ganzen Zahlen, **b)** die fünf vorangehenden ganzen Zahlen!

Gib je zwei Beispiele für **a)** und **b)** an, indem du für p jeweils eine ganze Zahl einsetzt!

4. Für welche ganzen Zahlen n gilt $a \leqq n \leqq b$, wenn

a) $a = 2,7$; $b = 9,8$; **b)** $a = -21$; $b = -15,7$; **c)** $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{15}{22}$?

Y

5. Welche Zahl ist

a) um 1 größer als 23; 99; 1000; a; x; $b + 2$,

b) um 3 größer als 23,7; 99,7; 1000,7; a; x; $b + 2{,}1$,

c) um a größer als -23; -99; 1000; a; x; $b + 2$,

d) um $2b$ größer als $-1{,}7$; 2,8; $\frac{62}{73}$; a; $2a$; b; $2b$?

6. Welche Zahl ist

a) um 1 kleiner als 23; 99; 1000; a; x; $b + 2$,

b) um 3 kleiner als 23,7; 99,7; 1000,7; a; x; $b + 2{,}1$,

c) um a kleiner als -23; -99; 1000; a; x; $b + 2$,

d) um $2b$ kleiner als $-1{,}7$; 2,8; $\frac{62}{73}$; a; $2a$; b; $2b$?

7. Zähle von **a)** $p - 6$ bis $p + 5$; **b)** von $b - 7$ bis $b - 12$; **c)** von $f - 3$ bis $f + 2$; **d)** von $t + 3$ bis $t - 10$; **e)** von $-6 - x$ bis $1 - x$!

8. Bilde die Summe aus dem Dreifachen einer rationalen Zahl a und dem Fünfzehnfachen aus einer anderen rationalen Zahl b! Setze für a Zahlen aus dem Bereich 0,1 bis 7,2 und für b Zahlen aus dem Bereich $-0{,}1$ bis $+0{,}1$ ein! Fertige eine Tabelle an und rechne fünf Beispiele!

9. Gib für die Summe $2{,}7\,x + 3{,}1\,y + 0{,}2\,z$ mindestens fünf Beispiele an! Die Zahlen für die Variablen sollen den folgenden Bereichen entnommen werden:

$1{,}0 < x < 10{,}0$; $0 < y < 1$; $-10 < z < 0$.

10. **a)** Gib fünf Zahlenpaare a, b an, für die die Beziehung $0 \leqq 2{,}3\,a - 1{,}4\,b$ gilt!

b) Für welche x, y, z (fünf Beispiele) gilt die Beziehung $-2 \leqq 1{,}5\,x - 2{,}1\,y + 3\,z \leqq +2$?

11. Formuliere folgende Gesetzmäßigkeit unter Verwendung von Variablen!

Das Produkt einer beliebigen rationalen Zahl, die von Null verschieden ist, mit ihrem reziproken Wert ergibt 1.

Gib mindestens fünf verschiedene Beispiele dafür an!

12. Formuliere die folgende Gesetzmäßigkeit in Worten und gib Beispiele dafür an!

$a - a = 0$ (a rational).

13. Es sei a eine natürliche Zahl. Wie heißt der Nachfolger von a? Gib Beispiele dafür an!

Welche Einschränkung muß für a gemacht werden, wenn jedes a einen Vorgänger besitzen soll?

14. Es seien a und b beliebige rationale Zahlen. Veranschauliche an selbstgewählten Beispielen die Summe $a + b$!

Y

Fasse in den Summen der Aufgaben 15 bis 17 gleiche Variablen zusammen!
Gib für jede Aufgabe ein Beispiel an, indem du für die Variablen rationale Zahlen einsetzt!

15. **a)** $84\,a + 67 - 15\,a + 33 - 100$ **b)** $17\,x + 23\,r + 11\,r + 39\,x + 6r$

c) $46\,x + 86\,b + 14\,b + 11\,x - 57\,x - 100\,b$ **d)** $65\,z + 14\,z - 38 - 78\,z + 20 + 18$

e) $-5\,x - 12 - 4\,m - 3\,x + 1 + 9\,x - 5\,m + 10\,m + 11$

f) $3\,a + 2\,v - 15\,a - 23\,v + 12\,a + 21\,v + t$

16. **a)** $6\frac{1}{3}a + 2\frac{1}{4}g + 2\frac{2}{3}a + 5\frac{1}{4}$ **b)** $4\frac{1}{2}x + 3\frac{2}{3}v + 3\frac{1}{3}x$

c) $1\frac{2}{3}m + 5\frac{1}{2}n - \frac{5}{6}m + \frac{3}{4}n$ **d)** $14\frac{1}{3}c - 10\frac{1}{2}d + 2\frac{1}{5} - 7\frac{1}{6}c + 5\frac{1}{2}d - 2{,}5$

e) $6\frac{4}{5}u + 16\frac{1}{2}v - 30\frac{4}{5}a - 15\frac{3}{4}v + 22\frac{1}{12}v + 32\frac{1}{2}a$

17. **a)** $6{,}5\,r - 1{,}2\,s + 10{,}9\,a + 6{,}5\,r + 4{,}8\,s - 13\,a$

b) $13{,}22\,x - 14{,}56\,y + 15{,}77\,y + 0{,}22 - 3{,}77\,x$

c) $0{,}56\,a + 3{,}25\,x - 5{,}06\,a - 7{,}33\,b + 2{,}01\,a - 0{,}02\,b$

d) $11{,}1 - 2{,}1\,q - 8{,}9 - 0{,}7\,p + 2{,}9 - 0{,}5\,p + 3{,}2\,q$

18. **a)** Die Differenz zweier Zahlen ist gleich r, der Subtrahend gleich a. Bestimme den Minuenden!

b) Das Produkt zweier Zahlen ist gleich 24, einer der Faktoren ist gleich k. Wie lautet der andere Faktor?

c) Der Divisor ist gleich a, der Quotient 3. Bestimme den Dividenden!

19. **a)** Wie läßt sich eine beliebige gerade Zahl angeben?

b) Wie läßt sich eine beliebige ganze Zahl, die durch 5 teilbar ist, angeben?

c) Wie kann man eine beliebige ungerade Zahl angeben?

20. Es ist die Summe **a)** zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen **b)** zweier beliebiger aufeinanderfolgender ungerader Zahlen zu bilden.

Fasse zusammen!

21. **a)** $15\,ab + 4\,ab - 10\,ab$ **b)** $-6\,xy - xy + 8\,xy$

c) $-4\,m^3 + 10\,m^3 - 8\,m^3$ **d)** $-25\,k^4 - 32\,k^4 + 48\,k^4$

22. **a)** $2\,d^2 - 1\frac{1}{2}d^2 - 3\frac{1}{2}d^2$ **b)** $5\,g^4 - 1\frac{1}{2}g^4 + 6\frac{1}{2}g^4$

c) $\frac{3}{4}a^5 - \frac{1}{2}a^5 - \frac{5}{8}a^5$ **d)** $\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^3$

23. **a)** $0{,}8\,c^2 - 1{,}2\,c^2 - 0{,}1\,c^2$ **b)** $1{,}5\,n^6 - 0{,}9\,n^6 + 2\,n^6$

c) $3\,a^3b^2 - 2\,a^3b^2 + 4\,a^3b^2$ **d)** $4\,x^2y - 7\,x^2y + 5\,x^2y$

24. **a)** $11\,x^2 + 4\,x - x^2 - 4\,x$ **b)** $2\,y^2 - 3\,y + 2\,y - y^2$

c) $\frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}r^2 + \frac{1}{3}p$ **d)** $5\,ab - 4\,a^2b^2 - 8\,ab^2 + 3\,ab - ab^2 - 4a^2b^2$

e) $23\,a^2bc + 10\,abc^2 - 15\,a^2bc - abc^2 + 2\,a^2bc + abc^2$

25. **a)** $10\frac{7}{9}z + 16\frac{1}{8}x - 30\frac{3}{4}y - 15\frac{3}{4}x + 22\frac{11}{12}x + 3\frac{7}{8}w + 32\frac{1}{2}y + 6\frac{1}{8}w$

b) $7{,}3\,a + 1{,}63\,b + 2{,}96\,a - 0{,}78\,b - 8{,}06\,a$

c) $6{,}75\,p + 1{,}48\,q + 60\,c - 3{,}785\,q + 87{,}3\,c - 3\,p - 12{,}678\,c$

26. Fasse zusammen und gib je ein Beispiel an, indem du für die Variablen rationale Zahlen einsetzt!

a) $-1\frac{2}{3}ab^3 + 2\,a^3b - 4\frac{1}{2}a^2b - ab^3 - \frac{1}{2}a^2b - a^3b$

b) $-9{,}387\,m - 3{,}89\,n + 8{,}197\,m - 1{,}11\,n - 0{,}002\,m$

27. Übertrage die Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

a)

x	y	z	$2x+3y-z$	$5x+(2x+3y-z)-6z$	$7x+3y-7z$
2	3	5			
2,5	−1	2,5			
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	−1			
10	−10	0			
−0,6	1,2	−1,3			

b)

u	v	w	x	$u-2v+3x$	$-4u+2v-w$	$(u-2v+3x)+(-4u+2v-w)$	$-3u+3x-w$
1	1	2	2				
−3	0	15	1				
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$				
0,7	2	0,9	−1,5				
−2,1	1,9	−3	0,5				

Löse die Klammern in den Aufgaben 28 bis 31 auf und fasse gleiche Variablen zusammen! Gib für jede Aufgabe ein Beispiel an, indem du für die Variablen rationale Zahlen einsetzt!

28. a) $(1{,}5x+3{,}2v)+2{,}3x+1{,}2v$ b) $(2a+4w+5k)+(5w+9k)$
c) $2{,}3t+(4{,}7x-5{,}1v)-4{,}5x-3{,}2v$

29. a) $15x-(2x+5)$ b) $14a+(11-3a)$ c) $38-(16b+36)$
d) $7b-(3b+2a)$ e) $2a+(3a-b)$ f) $19y-(18y+z)$
g) $2a+(3a-4b+c)+3b$ h) $(18u+15w)-(12u+6w)$

30. a) $10x+(3x-2y)+(2y-13x)$ b) $(15a-26b+13c)-(12a-27b+12c)-b$
c) $(4{,}5k+7{,}1m-0{,}5p)+\left(\frac{1}{2}k-\frac{3}{10}m-\frac{1}{8}p\right)-(-k+m-p)$
d) $\left(\frac{24}{5}a-\frac{16}{7}b-\frac{13}{8}c+\frac{17}{5}d\right)+\left(-\frac{19}{5}a+\frac{9}{7}b-\frac{3}{8}c-d\right)$

31. a) $15r+(6{,}75+2{,}5v)-9{,}8t-(-10{,}25t+14{,}95r-6{,}05s)$
b) $-(15{,}7x+9{,}77c-0{,}19a)+(20{,}8a-1{,}81x-9{,}85c)$
c) $(7{,}3x-19{,}5y+16{,}7z)-(4{,}9x+2{,}5y-2{,}6z)+3{,}4x$
d) $(-a^2+7a-12)-(-2a^2+5a-11)-(-3a^2+22a-4)$

Y

Mache dir an verschiedenen Beispielen klar, daß das Quadrat einer Variablen und die Variable selbst nicht zusammengefaßt werden können!

e) $2{,}5x+(0{,}75x-0{,}24y)+0{,}6z+(-3{,}5x+2y)$

32. Setze in den folgenden Aufgaben auf verschiedene Weise Klammern! Gib drei Möglichkeiten an!

a) $3{,}1x-2{,}5y+3{,}6z-17$ b) $\frac{1}{2}u+\frac{1}{3}v-\frac{1}{5}r-\frac{1}{6}s$
c) $-0{,}77h-1{,}92g+3{,}1f-0{,}1d-0{,}2e$ d) $100a+200b-120x-20y-30z$

33. Vervollständige die folgende Tabelle und gib Möglichkeiten für weitere Spalten an!

u	v	w	x	y	$2u-3v+w+$ $+7x-y$	$-(-2u+3v)-$ $-(-w-7x+y)$	$(2u-3v+w)$ $-(-7x+y)$
1	-2	$\frac{1}{2}$	0	$0{,}1$			
-1	$\frac{1}{3}$	-3	-1	2			
$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	$0{,}5$			
2	3	-4	1	-2			

34. a) Stelle $5a^2-2a-3ab+b^2$ als Summe aus zwei Summanden dar, wobei der eine Summand $5a^2-2a$ sein soll!

b) $2x^3+5x^2y-4xy^2-y^3$ soll als Summe (bzw. Differenz) zweier Summanden angegeben werden. Welche Möglichkeiten gibt es?

35. Es sei

$A=5a^4-8a^3b+2a^2b^2,\quad B=-a^4-2a^3b-5a^2b^2,$

$C=-4a^4+10a^3b+3a^2b^2.$

Berechne **a)** $A+B-C$, **b)** $A-B+C$, **c)** $-A-B-C$, **d)** $-A+B+C$!

36. Es sei $X=a^2+b^2-1,\quad Y=a^2-b^2+1,\quad Z=-2a^2-2b^2.$

Berechne **a)** $X-Y-Z$, **b)** $-X+Y-Z$, **c)** $X+Y-2Z$!

Löse in den Aufgaben 37 bis 41 die Klammern auf und fasse zusammen!

37. a) $(15a+2b)+(4a-3b)$ **b)** $(4a^2b-3ab^2)+(-a^2b-2ab^2)$

c) $(x^2+4x-5)+(x^2-3x+2)$ **d)** $(a^2-2ab+b^2)+(a^2+2ab+b^2)$

38. a) $(x^2+2xy+y^2)+(2xy-x^2-y^2)$ **b)** $(5m^2-5m+3)+(-4m^2-5m-3)$

c) $(2a^4+5a^3b-3a^2b^2-ab^3)+(3a^4-8a^3b+2a^2b^2-6ab^3)$

d) $(8a^n-2b^m+c)+(-4a^n-5b^m-c)$

e) $\left(\frac{1}{2}x^4y-\frac{3}{4}\right)+\left(-2\frac{1}{2}x^4y-2\frac{1}{2}\right)$

39. a) $(32c-16d)-(6c-7d)$ **b)** $(11x^3-2x^2)-(x^3-x^2)$

c) $(3a^3b-13b^2)-(3a^3b+6b^2)$ **d)** $(4x^2y+8xy^2)-(3x^2y-5xy^2)$

40. a) $(13n-11y+10z)-(-15n+11y-5z)$

b) $(7m^2-4mn-n^2)-(2m^2-mn+2n^2)$

c) $(1{,}2abc-1{,}6bcd-2{,}4cde)-(-0{,}9abc-bcd)$

d) $\left(\frac{1}{2}xy-\frac{1}{3}yz-ax\right)-\left(\frac{1}{4}xy+\frac{2}{9}yz+ax\right)$

41. a) $\left(\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{2}{3}ab-\frac{2}{3}ac\right)-\left(-\frac{4}{5}ab+\frac{3}{7}x^2y^2-\frac{1}{5}ac\right)$

b) $\left(1\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{8}ab+2\frac{1}{2}ac\right)-\left(0{,}08a^2+0{,}135ab-ac+1\frac{3}{4}bc\right)$

c) $(4a^2-2ab-b^2)-(-a^2+b^2-2ab)+(3a^2-ab+b^2)$

d) $(-8x^3+4x^2-x+1)+(2x^3-3+x^2-6x)-(5x^3-8x^2-3x-1)$

42. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!
Rechne im Kopf oder mit Hilfe des Rechenstabes!

a	b	c	$(3a \cdot 1{,}5b)$	$(3a \cdot 1{,}5b) \cdot 0{,}6c$	$(2a \cdot 3b) \cdot 5c$	$30a^2bc$
-2	2	5				
$\frac{1}{3}$	-8	10				
17	0	$\frac{23}{21}$				
$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{6}$				

Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie! Führe die Rechnungen möglichst zweckmäßig mit Hilfe des Rechenstabes durch!

43.

u	w	$(-38{,}5u^3w^2):[(-2{,}5u^2)(-w)]$	$(-2{,}5u^2)(-w):(-38{,}5u^3w^2)$
2	-1		
-1	2		
1	$0{,}1$		
-1	$-0{,}1$		

44.

x	y	z	$(2{,}5x:3{,}2y)\,1{,}2z$	$2{,}5x:(3{,}2y \cdot 1{,}2z)$	$2{,}5x \cdot 3{,}2y:1{,}2z$
$0{,}5$	2	1			
-1	-2	$0{,}5$			
0	$17{,}3$	$-25{,}4$			
2	-1	3			

45.

a	b	c	$(2{,}73a^2b:1{,}45b)\,2c$	$2{,}73a^2b:(1{,}45b \cdot 2c)$
-1	2	-1		
$\frac{1}{2}$	-4	$0{,}25$		
1	-1	$-\frac{1}{2}$		
-2	-1	-5		

46. Berechne mit Hilfe des Rechenstabes das Produkt $a \cdot b$ für $a = 0{,}33;\ -17{,}6;\ -\frac{3}{5};\ 9{,}67$ und $b = 21{,}3;\ -12{,}4;\ 0{,}056;\ -0{,}61$!

47. Berechne mit Hilfe des Rechenstabes das Produkt $3{,}71a \cdot 42{,}4x$ für $a = 0{,}76;\ -0{,}31;\ 1{,}35;\ 2{,}3$ und $x = 0{,}02;\ -0{,}29;\ -1{,}35;\ 53{,}4$!

48. Berechne mit Hilfe des Rechenstabes!

a) $7{,}25:z$ für $z = -12{,}7;\ 0{,}72;\ -21{,}3;\ \frac{7}{9};\ 0{,}091;\ -0{,}13$

b) $u:v$ für $u = 35{,}4;\ -12{,}3;\ 1{,}09$ und
$v = 42{,}5;\ -21{,}7;\ 1{,}87;\ -0{,}57$

Y

49. **a)** $3{,}1 \cdot 2{,}5\,a$ **b)** $(-5{,}7) \cdot 6{,}3\,b$ **c)** $13{,}2 \cdot 4\,c$ **d)** $14{,}3\,a \cdot 0{,}6$ **e)** $7{,}01\,v \cdot 3{,}5$

50. **a)** $12{,}5\,m \cdot 4{,}6\,n$ **b)** $(-13{,}7)\,x \cdot (-0{,}73\,x)$ **c)** $5{,}2\,y^2 \cdot 0{,}5\,y^3$
d) $4{,}8\,r \cdot \frac{1}{8}$ **e)** $6{,}5\,z \cdot (-8)\,z^2$

51. **a)** $15\,a \cdot 0{,}7\,x \cdot 1{,}2\,a\,x$ **b)** $-0{,}3\,u^2 \cdot 1{,}2\,v^2 \cdot 6\,u\,v$ **c)** $37\,x\,y \cdot 1{,}2\,y^2 \cdot (-2)\,x\,w$

52. **a)** $a\,x^2 \cdot b\,x^3 \cdot a\,b\,x$ **b)** $(-b^3)\,z \cdot (-c^2)\,z^2 \cdot b\,c\,z$ **c)** $2\,a^4 \cdot 3\,a^2 b^2 \cdot 6\,a\,b^4$

53. **a)** $4\,a^2 b \cdot 1{,}5\,c^2 \cdot 0{,}5\,a\,b\,c$ **b)** $2{,}5\,u^2 \cdot 5{,}3\,u\,v \cdot 4\,v^2$ **c)** $13\frac{1}{2}\,x\,y \cdot 3\frac{1}{3}\,x\,z$
d) $4\,x^2 y \cdot 1{,}5\,d^2 \cdot 0{,}5\,x\,y\,d$ **e)** $2{,}5\,a^2 \cdot 5{,}3\,a\,b \cdot 4\,b^2$ **f)** $13\frac{1}{2}\,r\,t \cdot 3\frac{1}{3}\,t\,w$

54. Setze in Aufgabe 53
in **a)** für $a = 2$, $b = -2$ und $c = 1$; in **b)** für $u = 0{,}5$ und $v = -3$;
in **c)** für $x = -2$; $y = 0{,}1$ und $z = \frac{1}{3}$ ein!
Welche Zahlen mußt du in **d)**, **e)** bzw. **f)** einsetzen, damit du dieselben Resultate erhältst wie in **a)** bzw. **b)** bzw. **c)**?

55. **a)** $12\,a\,b \cdot 2{,}5\,a\,c \cdot \frac{2}{3}\,b\,c$ **b)** $0{,}6\,a\,b\,c \cdot \frac{5}{2}\,a\,b \cdot \frac{2}{3}\,b\,c \cdot (-a\,c)$
c) $3\frac{3}{4}\,m\,n \cdot \frac{3}{5}\,a\,b \cdot 4\,m\,b \cdot \left(-\frac{2}{3}\,n\,a\right)$ **d)** $1{,}2\,m\,n \cdot 1{,}5\,n\,m$
e) $(1{,}2\,a)^2 \cdot \frac{3}{5}\,b^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\,c\right) \cdot 1{,}2^2\,a\,b\,c$ **f)** $(0{,}5\,a\,b)^2 \cdot (-4)^2 b\,c^2 \cdot (-a)\,\frac{c}{3}$.

56. **a)** $\frac{4 \cdot (-6) \cdot 3}{5 \cdot 8}$ **b)** $\frac{(-2) \cdot 3 \cdot 4}{-0{,}25}$ **c)** $\frac{9\,a \cdot 4\,c\,d}{-2\,b\,d}$ **d)** $\frac{-1{,}2\,x \cdot 5\,y \cdot z}{0{,}2\,z}$
e) $\frac{-0{,}6\,a \cdot \frac{1}{2}\,b \cdot 10\,c}{-3\,a\,b\,c}$ **f)** $12\,a\,b\,c : 3\,b$

57. **a)** $24\,x\,y\,z : 6\,x\,y$ **b)** $36\,u\,v\,w : 12\,v\,w$
c) $-12{,}7\,m^2 n^3 : 2{,}61\,m\,n^3$ **d)** $28{,}5\,h^4 g : (-14{,}2)\,h^2 g$

58. **a)** $107\,a^4 b^3 c^2 : 56{,}1\,a\,b^2 c$ **b)** $5\frac{1}{5}\,b : 13$ **c)** $8\frac{1}{4}\,y^2 : 44$
d) $11\frac{1}{3}\,x\,y : 17\,x$ **e)** $\frac{5}{8}\,a^2 b : 3\frac{1}{3}\,b$

59. **a)** $42\,n\,p : (-6p)$ **b)** $(-169\,a^2 b^2) : 13\,a\,b$ **c)** $(-72\,c\,d^2) : (-9\,c\,d)$ **d)** $85\,m^2 r^2 : (-17\,m^2 r)$

60. **a)** $\frac{(-36\,a^2 b^2 c) \cdot 50\,m\,n^2}{75\,m \cdot n \cdot 48\,a\,b\,c}$ **b)** $-\frac{125\,x^2\,y\,z\,(-64\,a^2\,b\,c^2)}{32\,a^2\,b\,c\,(-100\,x^2\,y\,z)}$ **c)** $0{,}3\,v \cdot [2{,}5\,w : (-5)]$
d) $\frac{48\,a\,x}{49\,b\,y} \cdot \frac{63\,a\,y}{32\,b\,x}$ **e)** $3\frac{4}{15}\,x\,y \cdot \frac{25\,x}{28\,y}$ **f)** $\frac{45\,a\,c}{56\,b\,d} : \frac{81\,a\,d}{49\,b\,c}$ **g)** $\frac{99\,a\,c}{35\,b} : 5\frac{11}{14}\,a\,b$

61. **a)** $8{,}4\,p^2 q^2 : 10{,}8\,p\,q$ **b)** $8{,}4\,p^2 q^2 : 10{,}8\,p\,q\,r$ **c)** $\frac{21\,x^3 y^3}{7\,x^2 y^2 z}$
d) $3\,x \cdot \frac{7\,a}{12\,b\,x}$ **e)** $\frac{u\,w}{16\,v} \cdot 4\,v\,w$ **f)** $\frac{7\,r\,s}{9\,a\,b^2 c} \cdot 3\,a^2 b^2 c$

62. **a)** $\left(-\frac{21}{25}\,x\,y^2 z^3\right) : \left(-\frac{14}{15}\,x^2\,y\,z^2\right)$ **b)** $(-7\,a^2 b) : (-21\,a\,b^2)$ **c)** $32{,}66\,a\,b : (-7{,}1\,r\,s)$
d) $(3{,}05\,r) : (-3{,}05\,r)$ **e)** $(-1{,}02\,y^2) : (1{,}02\,y)$ **f)** $(-56\,u^2\,v\,w) : (-5{,}6\,u\,v\,w)$

Y

Gib die Reihenfolge der Operationen in den Aufgaben 63 und 64 an!

63. a) $2x^2$ **b)** $3(a^2+b^2)$ **c)** $2a^2-3$ **d)** $3a^2+1$ **e)** $\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ **f)** $(x^2-2y^2):2$

64. a) $(x^2-z^2):z-1$ **b)** $(a+b)(a-b)$ **c)** $\frac{a+b}{a-b}$ **d)** $2xy$

65. Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

a	b	c	d	$(2a^2-b^2+3c)$	$(2a^2-b^2+3c)\cdot 4d$	$8a^2d-4b^2d+12cd$
1	2	2	2			
-1	-2	0	2			
2	1	-3	-2			
-2	-1	5	-3			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	3			

66. a) $(a+3)\cdot 4$ **b)** $(c+8)\cdot 3$ **c)** $(6+d)\cdot 2$ **d)** $(10+m)\cdot 5$
e) $(x-1)\cdot 0{,}4$ **f)** $(2y-5)\cdot\frac{1}{2}$ **g)** $(3p+2q)\cdot 6$ **h)** $(-2m+3n)\cdot 10$

67. a) $(a+b)\cdot m$ **b)** $(a-b)\cdot n$ **c)** $(3c-2d)x$ **d)** $(-4x+5y)\cdot 2z$
e) $5a(6a+3b)$ **f)** $3b(-2a-4b)$ **g)** $-6x(5y-2z)$ **h)** $8k(k+l)$

68. a) $(2a-5b+6c)\cdot(-3)$ **b)** $(3a^2-4a-8)\cdot(-2)$ **c)** $(4x^3+7x^2-x)\cdot(-5)$
d) $(m-n+p)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ **e)** $(17x-12y+3z)(-2xyz)$ **f)** $\frac{3}{2}r^2t\left(8rt-\frac{2}{9}rv+0{,}1tw\right)$

69. a) $(15b+6c)\cdot 4$ **b)** $(-3x)(0{,}5r-0{,}6t)$
c) $\left(\frac{1}{2}i-\frac{1}{4}d+0{,}4a\right)\cdot\frac{2}{5}p$ **d)** $\frac{7}{8}h(2g-2{,}1h^2+0{,}5hg)$

70. a) $\frac{1}{2}(a-2b+c)$ **b)** $\frac{2}{3}(6x+9y-2z)$ **c)** $\frac{3}{4}(8m-v+4n)$
d) $0{,}5(0{,}8x-0{,}6y+0{,}4z)$ **e)** $2\frac{2}{3}(6a-9y+3z)$ **f)** $3\frac{3}{4}(12r-8t+4s)$

71. a) $(2x^3-3x^2+3x-1)\cdot 4x^2y^2$ **b)** $(8a^3-4a^2b^2-3ab^2+5b^3)\cdot(-2a^2b)$
c) $(-2{,}1a^3x+5{,}2a^2x^2-0{,}5ax^3)\cdot(-0{,}3ax^2)$ **d)** $(2{,}25x^2-1{,}5xy+2{,}5y^2)\cdot(-2{,}4xy)$

72. a) $a(a+b)-b(a-b)$ **b)** $3(x+y)+5(x-y)$
c) $2(a-3b)+3(a-2b)$ **d)** $7(2m-3n)+(m+n)\cdot 3$

Y

73. a) $6(3p+4q)-8(5p-q)+(p+q)$ **b)** $0{,}2(x+y)+0{,}4(x-y)-(x+y)-(x-7y)$
c) $-3(a-b)-2(a+b)-(3a-2b)+5(a-2b)$
d) $4(x-y+z)-2(x+y-z)-3(-x-y-z)$

74. a) $2a^2-a(a-5b)-b(a-b)$ **b)** $6m^2-5m(-m+2q)+4m\left(-3m-2\frac{1}{2}n\right)$
c) $5{,}1(2{,}1-0{,}7k+0{,}11x^2)-4{,}3(-1-1{,}3k-0{,}02x^2)$
d) $1{,}4x(0{,}5x-0{,}3y)-5(0{,}4y^2-4xy)+0{,}2y(8y-5x)$
e) $(1{,}5a^2-2{,}15)\cdot 0{,}6a-(3{,}2a-1{,}8)\cdot 0{,}5a^2-1{,}8(2{,}6a^2-1{,}8a+3{,}2)$

75. Zeige, daß die folgende Beziehung für alle rationalen Zahlen gilt!

$3(a-b)-2(a+b)-(4a-5b)+4(a-2b)=a-8b$

Gib zwei Beispiele dafür an, indem du für a und b rationale Zahlen einsetzt!

76. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

a	$2a$	$2a^2$	$2a+2a^2$	$2(a+a^2)$	$\frac{1+a+a^2}{1+a-a^2}$	$\frac{a^2-2a+1}{a+1}$	$2(a-a^2)-(a^2+a):3$
1							
$\frac{1}{2}$							
-2							
$-\frac{1}{2}$							

77. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

m	t	s	a	$(2{,}1m-1{,}2t+0{,}9s)$	$(2{,}1m-1{,}2t+0{,}9s):0{,}3a$	$7\frac{m}{a}-4\frac{t}{a}+3\frac{s}{a}$
2	−2	−3	−3			
−3	5	10	10			
3,7	7,4	0,37	0,37			
0	2	−9	2			

78. a) $(25a^2+30b-40c^2):15$ b) $(16{,}4a^2b-17{,}6a^3b^2+0{,}56ab):(-0{,}56ab)$
c) $(15kmq+6lnpq-kn):3knq$ d) $(12uvw-2uvz+6uvwz):9uv$

79. a) $(64ab+48ac+40ad):8a$ b) $(49xy-35yz-28yw):7y$
c) $(108mnr-96mns+84mnx):12mn$ d) $(105abx-90bdx-75bcx):15bx$

80. a) $(0{,}85uvw^2-0{,}68uv^2w+0{,}51u^2vw):0{,}17uvw$
b) $(1{,}25x^3y^3z^2-0{,}75x^2y^3z^3-0{,}50x^3y^2z^3):0{,}25x^2y^2z^2$
c) $(0{,}9a^2b^3-0{,}6a^3b^2-1{,}2a^2b):0{,}15a^2b^2$

81. a) $(-6x^2y^3c^2-7{,}2x^3y^2c^3+8{,}4x^3y^2c^2):(-1{,}2x^2y^2c^2)$
b) $\left(7\frac{1}{5}a^4b^3+4\frac{4}{5}a^3b^4+9\frac{3}{5}a^4b^4\right):2\frac{2}{5}a^3b^3$
c) $\left(15\frac{5}{6}x^6y^5t^4-14\frac{1}{4}x^4y^5z^6-12\frac{2}{3}x^6y^4t^5\right):4\frac{3}{4}x^4y^4z^4$

82. a) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right):\frac{1}{2}a-\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right):\frac{1}{3}a$
b) $(10mn-12nr+6n):2n-(45am-36ar+9n):9a$
c) $\left(1\frac{2}{3}ah+6\frac{1}{4}hr-2\frac{1}{2}h\right):5h-\left(3\frac{1}{2}ab-1\frac{1}{4}br+\frac{3}{4}b\right):\left(-\frac{3}{8}b\right)$

83. a) $(2a+3{,}1)(2{,}5a-1)$ b) $\left(4x-\frac{1}{2}y\right)\left(4x+\frac{1}{2}y\right)$ c) $\left(3u-\frac{1}{2}v\right)\left(3u+\frac{1}{2}v\right)$
d) $(7n+5m)(7n+5m)$ e) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)$ f) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}y\right)$

84. **a)** $(5m - 3n)(3m - 5n)$ **b)** $(5x + 3y)(12x - 8y)$ **c)** $(6p - 8q)(7q - 3p)$
d) $(5x - 3y)(12x + 8y)$ **e)** $(6p - 8q)(7q + 3p)$ **f)** $(-1{,}2w - 0{,}3y)(-8y - 2w)$

85. Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

x	$(x+4)(x+3)$	$x^2 + 7x + 12$
2		
-2		
0,5		
$-0{,}5$		

x	a	$(2x + a)(3x - 2a)$	$6x^2 - ax - 2a^2$
1	2		
-1	2		
-2	$\frac{1}{2}$		
0,5	-2		

86. **a)** $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ **b)** $(x + 0{,}5)(x + 0{,}2)$ **c)** $(x - 1{,}5)(x + 0{,}4)$
d) $(2x - 0{,}6)(3x + 2{,}5)$ **e)** $(x - 12)(x + 2)$ **f)** $(x - 5)(x - 4)$

87. **a)** $(2n - 3m)(2n - 3m)$ **b)** $(2n + 3m)(2n + 3m)$ **c)** $(2n - 3m)(2n + 3m)$
d) $\left(\frac{15}{8}n - \frac{9}{4}v + 3\frac{3}{5}w\right)\left(\frac{5}{9}w - 8v - 3\frac{1}{5}n\right)$ **e)** $(0{,}77ax - 0{,}63ab)(2{,}1ac + 3ad)$

88. **a)** $\left(1\frac{1}{2}a^3b^2 - \frac{1}{2}\right)\left(1\frac{1}{2}a^3b^2 + \frac{1}{2}\right)$ **b)** $(0{,}4g + 10h)(0{,}4g + 10h)$
c) $\left(\frac{3}{4}x^3y - \frac{1}{3}xy^2\right)^2$ **d)** $(a^2 - z)(a^2 - z)$
e) $2\frac{1}{4}a^6b^2 - \left(8b^2 - 1\frac{1}{2}a^3b\right)^2$ **f)** $(2n - 3m^2)(2n + 3m^2)$
g) $(0{,}3x^2y + 2y^3)^2 - (-0{,}3x^2y - 2y^3)(0{,}3x^2y + 2y^3)$ **h)** $(2p + 3q + 4y)(a - 2x + 3z)$

89. **a)** $(2a - 3b)^2 - (3a - 2b)^2$ **b)** $(2x - 3)^2 - (2 - 3x)^2 - 5 + 5x^2$
c) $(a - 1)(a^2 + 1) - (a^2 - 1)^2$ **d)** $(z^2 - 3)^2 - (z + 3)(z^2 + 4)(z - 1)$

90. Klammere alle gemeinsamen Faktoren aus!

a) $0{,}7a + 0{,}7b$ **b)** $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$ **c)** $xz + xw$
d) $0{,}67a^2 + 2{,}01a$ **e)** $5a^2b - 20b$ **f)** $2{,}8a^3r^2 - 3{,}5a^2r$

91. **a)** $-65nx + 39my$ **b)** $6h - 18gh - 12f$ **c)** $rx - ry + rz$
d) $-96m^2n - 24mn^2 - 120m^2n^2$ **e)** $8ax + 32ay - 88az$
f) $-42a^2bc - 7ab^2c - 49a^2b^2c^2$

Forme in den Aufgaben 92 bis 94 die Summen in Produkte um!

Y

92. **a)** $m(x + y) + n(x + y)$ **b)** $a(m - n) + b(m - n)$
c) $x(a - b) + y(a - b) + z(a - b)$ **d)** $2p(r + 3s) - 3q(r + 3s) + 0{,}7v(r + 3s)$

93. **a)** $2x(3a + 2b) - 3y(3a + 2b) + 5z(3a + 2b)$
b) $(2a + 3b)(a - b) - (a + 2b)(a - b)$
c) $(5l - 3k)(n - o) + (4l - 5k)(n - o)$

94. **a)** $a^2x^2 - b^2x^2 + b^2y^2 - a^2y^2$ **b)** $1{,}8x^3 + 10x^2y + 2{,}7xy^2 + 15y^3$
c) $ax + ay + bx + by + cx + cy$ **d)** $mr - ms + nr - ns + pr - ps$
e) $24a^2b + 36a^2d + 14bc^2 + 21c^2d$ **f)** $2i^2x + 3i^2y - 2j^2x - 3j^2y$

Zerlege in den Aufgaben 95 bis 97 die Summen in Faktoren!

95. **a)** $x^2 + 6x$ **b)** $x^2 + 8x$ **c)** $x^2 - 4x$ **d)** $x^2 - 10x$
e) $y^2 - \frac{2}{3}y$ **f)** $y^2 - 0{,}6y$ **g)** $y^2 + \frac{4}{5}y$ **h)** $y^2 - 0{,}8y$

96. **a)** $z^2 + z$ **b)** $z^2 - z$ **c)** $z^2 - az$ **d)** $z^2 + bz$
e) $2x^2 - 3x$ **f)** $3x^2 - 5x$ **g)** $4x^2 - 6x$ **h)** $6x^2 - 9x$

97. **a)** $1{,}2a^2 + 1{,}5a$ **b)** $1{,}9a^2 - 5{,}7a$ **c)** $2{,}3a^2 - 6{,}9a$ **d)** $2{,}5a^2 + 12{,}5a$

98. Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie!

a	b	$a^2 - b^2$	$(a-b)(a+b)$
12	8		
2,4	1,2		
$-0{,}6$	0,3		

x	y	$x^2 + 2xy + y^2$	$(x+y)(x+y)$
20	1		
20	2		
0,6	0,3		

99.

u	v	$u^2 - 2uv + v^2$	$(u-v)(u-v)$
20	1		
35	3		
70	2		

100. Zeige, daß folgende Beziehungen für alle rationalen Zahlen gelten!
$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

101. Rechne im Kopf!
a) $49 \cdot 51$ **b)** $48 \cdot 52$ **c)** $47 \cdot 53$ **d)** $59 \cdot 61$
e) $58 \cdot 62$ **f)** $(a-1)(a+1)$ **g)** $(a-2)(a+2)$ **h)** $(a-3)(a+3)$
Hinweis: Zerlege $49 \cdot 51$ in das Produkt $(50-1) \cdot (50+1)$ und multipliziere aus!

In den Aufgaben 102 bis 105 sollen im Zähler und Nenner die gegebenen Summen so in Faktoren zerlegt werden, daß gekürzt werden kann!

102. **a)** $\frac{3a - 3b}{6a - 6b}$ **b)** $\frac{3a - 3b}{6a + 6b}$ **c)** $\frac{6ab - 9ab}{8ab - 12ab}$ **d)** $\frac{6p + 4q}{15p + 10q}$
e) $\frac{a + ab}{a - ab}$ **f)** $\frac{a^2 - ab}{a^2 + ab}$ **g)** $\frac{x^3 - x^2}{x^2 + x^3}$ **h)** $\frac{5x^2 + 25x}{10x + 50}$

103. **a)** $\frac{z - y}{x^2 z - x^2 y}$ **b)** $\frac{xy - xz}{y - z}$ **c)** $\frac{12(u^2 - v^2)}{6u^2 z - 6v^2 z}$ **d)** $\frac{14a - 14b}{7a^2 - 7b^2}$
e) $\frac{13 + 13x}{1 - x^2}$ **f)** $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$ **g)** $\frac{2a^2 - 2b^2}{a + b}$

104. **a)** $\frac{6r^2 + 216s^2}{12r + 72s}$ **b)** $\frac{6r^2 - 216s^2}{12r + 72s}$ **c)** $\frac{6r^2 - 216s^2}{12r - 72s}$ **d)** $\frac{6r^2 - 216s^2}{(r - 6s)^2}$
e) $\frac{6ax - 9ay}{18ax - 27ay}$ **f)** $\frac{25a^2 - 36b^2}{5a - 6b}$ **g)** $\frac{2x^2 - 2y^2}{4x^2 + 4y^2}$ **h)** $\frac{16 - 64m^2}{16 - 32m}$

105. **a)** $\frac{xy - y}{xy + y}$ **b)** $\frac{bz - bv}{5z - 5v}$ **c)** $\frac{30a - 60b}{80b - 40a}$ **d)** $\frac{80x - 80}{90 - 90x}$ **e)** $\frac{r - s}{s - r}$

Y

Forme in den Aufgaben 106 bis 109 die Summen in Produkte um!

106. a) $x(a-b)+2(a-b)(a-b)$ b) $2(a-b)^2-(a+b)(a-b)$

c) $x(p-a)+y(a-p)-z(p-a)$ d) $m(n-2)+p(n-2)+2(2-n)$

107. a) $(x+1)(a+b+c)+(x+2)(a+b+c)+(x+3)(a+b+c)$

b) $(2a-b)(x+y-z)-3b(x+y-z)-5c(x+y-z)$

c) $n(u-v+3w)-(n+m)(-u+v-3w)+(2n+m)(u-v+3w)$

d) $(a+b)^3-a(a+b)^2$

108. a) $(p-q)^3+2pq(p-q)$ b) $(x+2y)^3-x^2(x+2y)$

c) x^3-x d) $p^4q^2-p^2q^4$

109. a) $(2x+3)^2-(-2x-3)+2(2x+3)$ b) $16(x-xy)^2-25(x-xy)+x(1-y)$

c) a^3b-ab^3-ab d) $9a^4b^2-18a^3b^3+9a^2b^4$

Löse die Klammern auf und fasse zusammen!

110. a) $2a+[3a-(5a-2b+3c)-c]-3a-(a+b-4c)$

b) $2\frac{2}{3}x+\left[4-\left(6\frac{2}{3}x+10\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[-\left(1\frac{2}{3}x-5\right)-2\left(\frac{1}{2}x-7\right)\right]$

c) $1\frac{1}{3}t\left[4\frac{1}{2}t-\left(3\frac{3}{4}s-31\frac{1}{2}\right)\right]-\left[13\frac{1}{3}t-\left(11\frac{3}{7}-8\frac{1}{3}s\right)\right]\cdot 4\frac{1}{5}s$

111. a) $34a^3b^2:[2a(-b)]-54a^4b^3:[(-a^2)(-9b^2)]$

b) $[(-a^2b):(-5a^3b^2)]\cdot 7ab-14a^3b^2:[(-3ab)\cdot(-7a^2b)]$

c) $\left[(a-3b)(a+3b)-\frac{1}{6}(2a-1{,}5b)(3a+6b)\right]:\frac{1}{4}b$

112. a) $\left[5(a+2b^2)(a-2b^2)-\frac{2}{5}(5a-4b^2)(a+12{,}5b)+\frac{3}{5}a\left(\frac{1}{2}a-1{,}2b^2\right)\right]:(-0{,}3a)$

b) $\left[2(x^2-2y)(2x^2+y)-\frac{4}{5}(5x^2-2{,}5y)(x^2+2y)+8x^2y\right]:\left(-\frac{1}{4}xy\right)$

c) $(x+y)[(x+y)(x-2y)]-[(x+2y)(x-2y)]$

113. a) $\frac{3}{4}-\left\{\frac{1}{6}-\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}\right]+\frac{13}{15}\right\}$

b) $(a+b)\left\{-2\left[-2(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)\right]-3\right\}$

c) $70p-\{38q-[(6p+14q)+16p]\}-[18p-(-10p+6q)+14q]$

d) $2{,}6x-\{1{,}8y-[2{,}2x-(y-0{,}6x+1{,}4y)]-(1{,}6x-0{,}2y)\}$

114. Beweise, daß die folgenden Beziehungen für alle rationalen Zahlen gelten!

a) $\{3x^2(a^2+b^2)-3a^2b^2+3[x^2+(a+b)x+ab]\cdot[x(x-a)-b(x-a)]\}:2x^2=1\frac{1}{2}x^2$

b) $\{[ax-2(a+2)]\cdot[a(x-1)+2]+2(-a^2+4)+3a^2\}:(-2ax)=1-\frac{1}{2}ax$

B. Ähnlichkeit

1. Durch welche geometrische Abbildung lassen sich zwei gleichsinnig-kongruente Figuren F und F' derselben Ebene stets zur Deckung bringen? Führe die Abbildung durch!

2. Drehe eine ebene Figur F um ein Zentrum O um 180°! In welcher Beziehung stehen Original F und Bild F' zueinander (vgl. Bild B 20c)?

3. Durch welche geometrische Abbildung lassen sich zwei gleichsinnig-kongruente Figuren derselben Ebene, deren entsprechende Strecken ungleichsinnig-parallel sind, ineinander überführen?

4. Welche Abbildung ist die Umkehrung zur Drehung einer ebenen Figur F um ein Zentrum O um den Winkel **a)** 30°, **b)** 90°, **c)** 180°?

5. Überführe zwei beliebige gleichsinnig-kongruente Figuren F und F' derselben Ebene durch geometrische Abbildungen ineinander! Welche Fälle können auftreten? Welche Abbildungen gehören zu diesen Fällen?

6. Spiegele eine beliebige ebene Figur F **a)** an einer Geraden g_1, **b)** an einer zu g_1 parallelen Geraden g_2, **c)** an einer zu g_1 senkrechten Geraden g_2, **d)** an einer beliebigen Geraden g_4! Welche Bilder ergeben sich in den vier Fällen?

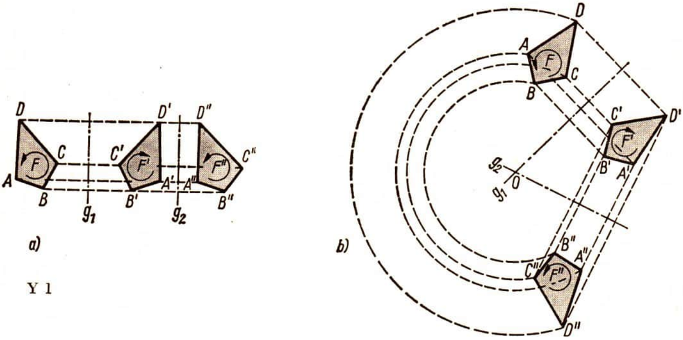
7. Zeichne achsensymmetrische Figuren mit ihren Symmetrieachsen!

8. Spiegele ein beliebiges Dreieck F durch nacheinander ausgeführte Abbildungen

a) an zwei zueinander parallelen Achsen g_1 und g_2,

b) an zwei zueinander senkrechten Achsen g_1 und g_2,

c) an zwei beliebigen, sich schneidenden Achsen g_1 und g_2 derselben Ebene!



Y 1

Durch welche resultierenden Abbildungen lassen sich F und F'' in den drei Fällen ineinander überführen (Bild Y 1)?

9. Gegeben sind zwei kongruente Dreiecke F und F' derselben Ebene.

a) F und F' sind gleichsinnig-kongruent und entsprechende Strecken von F und F' gleichsinnig-parallel (oder F und F' sind gleichliegend-kongruent).

b) F und F' sind gleichsinnig-kongruent, entsprechende Strecken ungleichsinnig-parallel.

c) F und F' sind gleichsinnig-kongruent, entsprechende Strecken nicht parallel.

d) F und F' sind ungleichsinnig-kongruent.

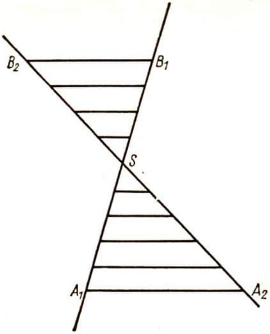
Durch welche geometrische Abbildung wird in jedem Fall F in F' und F' in F übergeführt? Anleitung zu **d)**: Konstruiere zuerst die Achse g der Spiegelung bzw. Schubspiegelung! Wie verläuft g zu den Verbindungslinien entsprechender Punkte (vgl. Bilder B 20 und B 21)?

10. Stelle sämtliche Möglichkeiten der Überführung einer ebenen Figur F in ein kongruentes Bild F' derselben Ebene zusammen! Führe die Abbildungen zeichnerisch durch!

11. Zeichne zwei Strecken, die das gemeinsame Maß **a)** 10 cm, **b)** 1 cm, **c)** 1 mm, **d)** 0,1 mm haben!

12. Welches größte gemeinsame Maß besitzen die folgenden Streckenpaare:

a) 12 cm und 16 cm,
b) 16 mm und 20 mm,
c) 4,4 mm und 4,8 mm,
d) 4,04 mm und 4,08 mm?



Y 2

13. Die Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ (Bild Y 2) seien durch die Parallelen und S in je 9 kongruente Teilstrecken unterteilt.

Beweise:

a) $\dfrac{\overline{SB_1}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{SB_2}}{\overline{A_2B_2}}$, **b)** $\dfrac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}} = \dfrac{\overline{SA_2}}{\overline{SB_2}}$,

c) $\dfrac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}}$, **d)** $\dfrac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \dfrac{\overline{SB_1}}{\overline{SB_2}}$,

e) $\dfrac{\overline{SB_1}}{\overline{SB_2}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}}$!

14. Welches Verhältnis besitzen

a) Diagonale und Seite eines Quadrats,
b) Hypotenuse und Kathete eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks,
c) Höhe und Kathete eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks?

15. Wandle folgende Dezimalzahlen in gemeine Brüche um!

a) $0{,}11$ **b)** $0{,}\overline{1}$ **c)** $0{,}\overline{01}$ **d)** $0{,}\overline{001}$ **e)** $0{,}\overline{0001}$
f) $357 \cdot 0{,}\overline{00001}$ **g)** $771 \cdot 0{,}\overline{001}$ **h)** $37{,}1\,\overline{223}$ **i)** $7{,}3\overline{78}$ **k)** $0{,}31\,\overline{2371}$

16. a) Beweise, daß jede periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl darstellt!
b) Begründe, warum man endliche Dezimalzahlen auch als periodische ansehen darf!

17. Berechne die Dezimalbruchentwicklungen folgender Brüche!

a) $\frac{7}{9}$, **b)** $\frac{3}{11}$, **c)** $\frac{7}{18}$, **d)** $\frac{5}{12}$, **e)** $\frac{7}{24}$, **f)** $\frac{6}{7}$, **g)** $\frac{1}{13}$, **h)** $\frac{18}{19}$

18. Beweise, daß jede rationale Zahl eine periodische Dezimalzahl liefert!

19. Bilde aus den folgenden Proportionen jeweils eine fortlaufende Proportion!

a) $a : b = 3 : 7$; $b : c = 14 : 9$ **b)** $a : b = 6 : 5$; $a : c = 9 : 13$
c) $r : s = 8 : 9$; $t : s = 5 : 6$ **d)** $u : v = 2 : 3$; $v : w = 5 : 6$; $w : x = 9 : 8$
e) $g : h = 5 : 6$; $i : k = 2 : 3$; $k : h = 9 : 8$
f) $a : b = 6 : 7$; $a : c = 8 : 9$; $a : d = 12 : 13$; $d : e = 13 : 4$

20. Wenn die Gleichung $a : b = c : d$ gilt, so läßt sich ein Proportionalitätsfaktor f bestimmen, so daß gilt: $a = f \cdot c$ und $b = f \cdot d$.

a) Ermittle den Proportionalitätsfaktor für die Proportionen
$20 : 30 = 14 : 21$ und $144 : 60 = 12 : 5$!

b) Ermittle den Proportionalitätsfaktor für die fortlaufenden Proportionen
$2 : 3 : 5 = 6 : 9 : 15$ und $4 : 7 : 13 = 8 : 14 : 26$!

21. Es seien a, b und c gegebene Strecken. Teile eine weitere Strecke durch innere Teilpunkte im Verhältnis

a) $3 : 2$, **b)** $4 : 1$, **c)** $1 : 2 : 4$, **d)** $4 : 2 : 1$, **e)** $1 : 2 : 3 : 5$, **f)** $a : b$, **g)** $a : b : c$!

22. Konstruiere die unbekannten Strecken x und y, wobei gelten soll

a) $1:3 = 2:x$, **b)** $a:b = c:x$, **c)** $b:c = c:x$,
d) $x:a = b:c$, **e)** $(a+b):a = b:x$, **f)** $(a-b):a = a:x$!

23. Es seien a, b und c gegebene Strecken. Konstruiere eine Strecke x, für die gilt

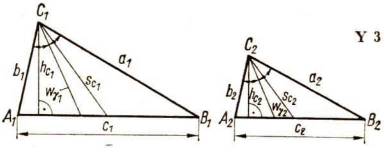
a) $a \cdot x = b \cdot c$, **b)** $a \cdot x = b^2$, **c)** $ax = b\,(a+c)$, **d)** $ax = b\,(a-c)$!

24. Verwandle ein Rechteck mit den Seiten a und b in ein flächengleiches mit einer vorgegebenen Seite c! (Kontrolliere das Ergebnis rechnerisch!)

25. Verwandle ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b in ein flächengleiches mit der einen Kathete c! Bestimme die zweite Kathete durch Konstruktion!

26. Zur Bestimmung der Höhe eines Turmes mißt man seinen Schatten (67,00 m) und außerdem die Länge s des Schattens einer senkrecht stehenden Stange von der Länge l.
Es sei $s = 2{,}31$ m und $l = 1{,}78$ m. Wie hoch ist der Turm?

27. Das Verhältnis irgendzweier entsprechender Strecken ähnlicher Figuren gibt die Vergrößerung (Verkleinerung) an, die die Strecken der Ausgangsfigur erfahren. Diese ist gleich dem Maßstab k, in dem die zweite Figur, das Bild, gezeichnet ist. Was versteht man unter der Angabe: Der Maßstab eines Bildes sei **a)** $\frac{1}{5}$ oder $1:5$, **b)** $\frac{5}{1}$ oder $5:1$, **c)** $\frac{1}{2}$ oder $1:2$, **d)** $\frac{2}{1}$ oder $2:1$, **e)** $1:25000$, **f)** $1:100000$, **g)** $1:300000$, **h)** $1:1000000$?



Y 3

28. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich irgend zwei entsprechende Strecken wie ein Paar entsprechender Seiten. Beweise (Bild Y 3):

$$\frac{h_{c_2}}{h_{c_1}} = \frac{a_2}{a_1} = k, \qquad \frac{w_{\gamma_2}}{w_{\gamma_1}} = \frac{a_2}{a_1}, \qquad \frac{s_{c_2}}{s_{c_1}} = \frac{a_2}{a_1}, \qquad \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1}, \qquad \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{a_2}{a_1}!$$

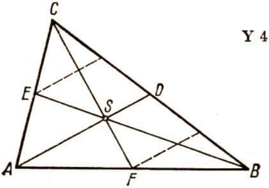
Anleitung zu den Beweisen: Es sind stets Teildreiecke vorhanden, die ähnlich sind und in denen diese Stücke als Seiten liegen.

29. Vergrößere ein gegebenes Dreieck auf das Streckenverhältnis $2:1$! In welchem Verhältnis wird die Fläche vergrößert? Beweise die Flächenvergrößerung auch anschaulich durch Zerlegen der Fläche des Bilddreiecks in vier kongruente Ausgangsdreiecke!

30. Verkleinere ein gegebenes Dreieck auf das Streckenverhältnis $1:2$! In welchem Verhältnis wird die Fläche verkleinert? Beweise die Flächenverkleinerung geometrisch!

31. Beweise: Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

32. Beweise: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt und teilen sich im Verhältnis $2:1$. Der Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks (Bild Y 4).



Y 4

Y

33. Zeichne zwei Dreiecke von verschiedener Größe, die übereinstimmen

a) in zwei Seitenverhältnissen $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = 7 : 4$ und $b_1 : c_1 = b_2 : c_2 = 2 : 3$,

b) im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = 7 : 4, \gamma_1 = \gamma_2 = 70°$,

c) im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite
$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = 2 : 3, \beta_1 = \beta_2 = 60°$!

34. Stelle Ähnlichkeitssätze auf für **a)** gleichseitige, gleichschenklige, rechtwinklige, gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, **b)** Quadrate, Rechtecke, Rhomben, Parallelogramme, Kreise!

35. Sind in einer Proportion $a : b = c : x$ die Glieder a, b und c bekannt, so heißt das unbekannte vierte Glied x die vierte Proportionale zu den bekannten Gliedern.

Zeichne die vierte Proportionale zu

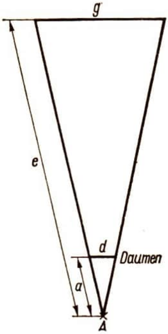
a) $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm und

b) $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3$ cm!

36. Berechne die vierte Proportionale zu

a) 2, 3, 4; **b)** 2, 4, 3; **c)** 3, 2, 4; **d)** 3, 4, 2; **e)** 4, 2, 3!

37. Halte am gestreckten Arm den abgespreizten Daumen lotrecht, schließe das eine Auge und visiere mit dem anderen am Daumen rechts und links vorbei nach einem entfernten Geländestück! Du wirst beobachten, daß ein gewisser Geländestreifen vom Daumen überdeckt wird. Bestimme jetzt die Breite deines Daumens und (mit Hilfe eines Freundes) die Entfernung des Daumens vom offengehaltenen Auge! Das Bild Y 5 zeigt dir zwei Möglichkeiten der Anwendung dieses Verfahrens der „Daumenbreite" (A: Auge; d: Breite des Daumens, a : Abstand des Daumens vom Auge).



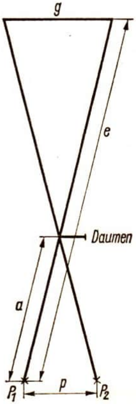
Y 5

a) Kennst du die Entfernung e des beim Visieren überdeckten Geländestücks, so kannst du seine Breitenausdehnung b berechnen.

b) Kennst du die Breitenausdehnung b des überdeckten Geländestücks (oder kannst du sie schätzen), so kannst du die Entfernung des überdeckten Geländestücks berechnen.

Führe das Verfahren praktisch aus und ermittle selbst Zahlenwerte für a, d und e beziehungsweise b!

38. Daumensprung: Halte dazu wie bei Aufgabe 37 deinen Arm mit dem abgespreizten Daumen, diesmal möglichst genau vor die Mitte zwischen deinen Augen! Visiere erst mit dem einen und dann mit dem anderen Auge an demselben Daumenrand (links oder rechts) vorbei nach einem Geländestück, ohne dabei die Armhaltung zu verändern! Der Daumenschatten „springt" um eine gewisse Geländebreite g zur Seite. Jetzt laß von einem Freund noch die Entfernung deiner beiden Pupillen messen! Nun kannst du nach Bild Y 6 dieselben beiden Aufgaben wie in Aufgabe 37 lösen. (P_1, P_2 : die beiden Pupillen; p : ihr Abstand; g : Geländebreite; a und e wie in Bild Y 5). Führe auch dieses Verfahren praktisch durch!



Y 6

Y

39. In einem Dreieck ABC ist die Seite a 36 mm lang, und der Winkel γ beträgt 55°. Durch den Punkt D auf der Seite $\overline{BC}$, der 20 mm von C entfernt ist, wurde zu der Seite c eine Parallele von 30 mm Länge gezogen. Berechne c und überprüfe das Ergebnis durch Konstruktion!

40. Zur Seite c eines Dreiecks ABC ist eine Parallele gezogen. Sie trifft die Seite a in D ($\overline{CD} = 16$ mm; $\overline{DB} = 31$ mm; $c = 56$ mm). Bestimme durch Rechnung und Zeichnung die Länge der Parallelen!

41. In einem Dreieck ABC ist durch den Punkt B' auf AB die Parallele zu BC gezogen. Sie schneidet AC in C' ($a = 50$ mm; $b = 70$ mm; $c = 90$ mm; $\overline{AB'} = 40$ mm). Wie lang sind die Seiten des Dreiecks $AB'C'$ und die des Trapezes $B'BCC'$? Rechne und zeichne!

42. Eine Straße verläuft rechtwinklig zur Blickrichtung. Der Abstand zweier Telefonstangen (Abstand 50 m) wird gerade durch 1 $\left(1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}\right)$ Daumenbreite gedeckt. Wieviel Meter sind es bis zur Straße? Anmerkung: Nimm das Verhältnis der Armlänge a zur Daumenbreite d mit 30 an!

43. Wie breit ist ein Geländestreifen, wenn er in einer Entfernung

von	800	600	850	1000	1200	1000 m
von	1	2	$1\frac{1}{2}$	3	$2\frac{1}{2}$	1 Daumenbreiten gedeckt wird? ($a : d = 30$)

44. Die Bäume einer rechtwinklig zur Blickrichtung führenden Straße haben einen Abstand von 10 m. Ein Daumensprung geht über 5 (8, 9, 16, 12, 20) Bäume. Wieviel Meter sind es bis zur Straße? Anmerkung: Nimm das Verhältnis von Armlänge a zum Augenabstand p mit 10 an!

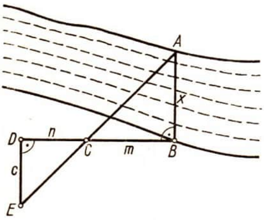
45. Wie breit ist der Geländestreifen, den dein Daumensprung in 600, 1000, 1800, 2800, 3000 m Entfernung überstreicht?

46. Berechne die Breite g des Daumensprunges bei $p = 6{,}5$ cm, $a = 65$ cm und $e = 1000$ m!

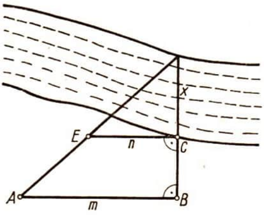
47. Die Bilder Y 7 und Y 8 zeigen, wie man Flußbreiten ermitteln kann. An den mit Kreisen bezeichneten Stellen stehen Fluchtstäbe. Bestimme x durch Zeichnung und Rechnung!

		m	n	c
Bild Y 7:	**a)**	35 m	17 m	8 m
	b)	42 m	12 m	6 m

		m	n	r
Bild Y 8:	**c)**	34 m	24 m	20 m
	d)	30,5 m	24,3 m	16,5 m



Y 7



Y 8

48. Die drei Punkte A, B, C liegen auf einer Karte (Maßstab 1 : 100000) auf einer Geraden. Die Strecke $\overline{AC}$ mißt 5 cm, die Strecke $\overline{AB}$ mißt 3 cm. Am Punkt A steht die Höhenzahl 750 m ü. NN, am Punkt C 650 m ü. NN. Wie hoch darf Punkt B höchstens liegen, wenn A von C aus eingesehen werden kann?

49. Auf einer Fotografie des Völkerschlachtdenkmals wird dessen Höhe mit 8,5 cm gemessen. Wie hoch ist es in Wirklichkeit, wenn der Apparat bei der Aufnahme 160 m von der Mittelebene des Denkmals entfernt war und die Brennweite des Objektivs 15 cm betrug?

50. Steffen hält mit ausgestrecktem Arm (60 cm) ein Zehnpfennigstück so, daß es gerade einen Gasbehälter (Durchmesser 62 m) verdeckt. Wieviel Meter stand er vom Gasbehälter entfernt?

51. Ein Küstenschutzboot steuert bei einer Geschwindigkeit von 10 kn (lies: Knoten) den Kurs N. Um 10.25 Uhr gibt es einem anderen KS-Boot, das zu diesem Zeitpunkt 10 sm in Richtung O von ihm steht, den Befehl, mit 20 kn Geschwindigkeit auf kürzestem Weg zu ihm zu stoßen. Wann treffen die Boote zusammen, und welchen Fahrweg legt jedes von ihnen bis dahin zurück?
Anleitung: Zeichnerische Lösung! 1 kn = 1 sm/h; 1 sm = 1,852 km

52. Das Objektiv einer Kamera für Luftbildaufnahmen hat eine Brennweite von 75 cm. Das Bildformat ist 30 cm × 30 cm. Wie hoch muß das Flugzeug fliegen, damit gerade 1 km² aufgenommen werden kann?

53. **a)** Aus welcher Entfernung müßten wir ein Projektionsbild von der Breite 2 m (1,80 m; 3,50 m; 1,20 m) betrachten, damit es dem Auge genausogroß erscheint wie eine Fotografie von 9 cm Breite in normaler Sehweite (25 cm)?

b) Wie breit müßte jeweils ein Projektionsbild mit der unter **a)** berechneten Entfernung sein, damit es dem Auge genausogroß erscheint wie ein Bild vom Format 24 mm × 36 mm (als Hochbild)?

c) Wie hoch müßte jeweils das Projektionsbild sein?

54. Eine Strecke sei im Verhältnis $a : b$ geteilt, wobei a und b positive ganze Zahlen sind. Wie ändert der Teilpunkt seine Lage, wenn **a)** a zunimmt, während b konstant bleibt, **b)** b zunimmt, während a konstant bleibt?

55. In welchem Verhältnis teilt der Punkt **a)** 50, **b)** 25, **c)** 65 einen mit den Zentimeterzahlen versehenen Meterstab?

56. Zwei Wanderer gehen aus 18 km Entfernung einander entgegen; der eine legt 4 km in der Stunde, der andere 5 km zurück. Wo treffen sie sich?

57. Eine Strecke $\overline{AB}$ habe ein Länge von 10 cm. Auf ihrer Verlängerung über A hinaus liege, von A um 5 cm entfernt, der Punkt C. In welchem Verhältnis stehen die Strecken $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$?

58. Bestimme auf den Verlängerungen der gegebenen Strecke $\overline{AB}$ einen Punkt P so, daß
a) $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$; **b)** $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$; **c)** $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$; **d)** $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$ ist!

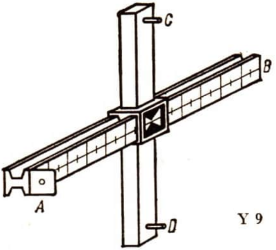
59. Zwei Wanderer, von denen der eine stündlich 4 km, der andere 5 km zurücklegt, gehen in einer Richtung auf einer Straße, die durch die 7 km voneinander entfernten Orte A und B führt; der eine von A, der andere von B aus. Wo holt der eine den anderen ein?

60. Zeige, daß die Diagonalen im Trapez einander im gleichen Verhältnis schneiden! Überlege, in welchem Verhältnis?

61. Gib an, wie groß die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Diagonalen im Trapez ist!

Y

'**62.** Ein schon im Mittelalter bekanntes Gerät zur Höhen- und Entfernungsmessung ist der Jakobstab (Bild Y 9). Auf einem mit Maßeinteilung versehenen Stab $\overline{AB}$ ist ein zu ihm senkrecht stehender Stab $\overline{CD}$ verschiebbar. Die Entfernungen der Marken C und D von der Mittellinie der Meßstange sind gegeben (gewöhnlich gleich 10 Einheiten).

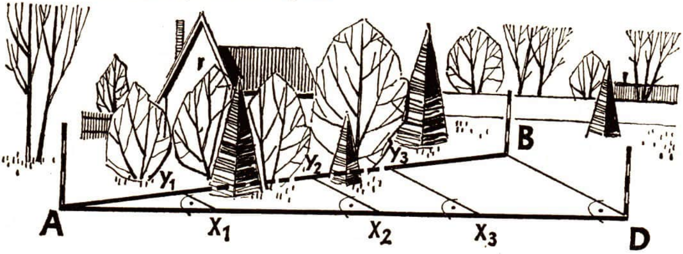


Y 9

a) Um die Höhe eines Turmes zu messen, hält man $\overline{AB}$ in horizontaler Richtung, peilt die Turmspitze durch das Diopter A über die Marke C an und verschiebt den Stab $\overline{CD}$ so lange, bis der Peilstrahl die Turmspitze trifft. Welcher Ähnlichkeitssatz kommt für die Berechnung der Höhe in Anwendung? Welche Größe muß (außer dem am Jakobstab abgelesenen Verhältnis) der Messung zugänglich sein?

b) Bestimme die Höhe und die Entfernung eines unzugänglichen Turmes durch Anpeilen der Turmspitze von zwei hintereinanderliegenden, 29,40 m voneinander entfernten Beobachtungsstellen! Die am Jakobstab abgelesenen Verhältnisse betragen 10 : 21 und 10 : 28.

c) Wie benutzt man den Stab zur Bestimmung waagerechter Entfernungen? Warum arbeitet man dabei mit der ganzen Stablänge $\overline{CD}$?



Y 10

63. Die Strecke $\overline{AB}$ ist wegen eines Gebüsches nicht absteckbar (Bild Y 10). Man kann aber an dem Gebüsch vorbei die Strecke $\overline{AD}$ abstecken, wobei D so gewählt ist, daß $\overline{BD}$ auf $\overline{AD}$ senkrecht steht. Das Bild zeigt nun, wie jetzt ein Abstecken möglich ist.

a) Erkläre und begründe das Verfahren!

b) Wenn nun die Entfernungen $\overline{AX_1}$, $\overline{X_1X_2}$, $\overline{X_2X_3}$ und $\overline{X_3D}$ gleich groß sind, wie groß sind dann die Strecken $\overline{X_1Y_1}$, $\overline{X_2Y_2}$, $\overline{X_3Y_3}$, ausgedrückt durch $\overline{BD}$?

64. Verbinde in einem Dreieck je zwei Seitenmitten miteinander! Warum liegt das entstehende Dreieck zum gegebenen ähnlich? Wo liegt der Ähnlichkeitspunkt? Welche Linien des Ausgangsdreiecks bilden die Ähnlichkeitsstrahlen? Wie groß ist das Ähnlichkeitsverhältnis? Welcher Satz wird durch die Ähnlichkeitslage beider Dreiecke bewiesen?

65. Strecke eine ebene Figur F vom Zentrum O aus im Maßstab

a) $k = \frac{2}{1}$, **b)** $k = \frac{1}{2}$, **c)** $k = \frac{1}{1}$, **d)** $k = -\frac{2}{1}$, **e)** $k = -\frac{1}{2}$, **f)** $k = -\frac{1}{1}$!

Welche Bilder entstehen in den Fällen a), b), c) und d), e), f)?

66. Durch welche Abbildungen kann man zwei ähnlich-liegende Figuren F und F' derselben Ebene ineinander überführen? Führe die Abbildungen zeichnerisch durch!

Maßstab für F': **a)** $k = +\frac{2}{1}$ **b)** $k = +1$ **c)** $k = +\frac{1}{2}$

d) $k = -\frac{2}{1}$ **e)** $k = -1$ **f)** $k = -\frac{1}{2}$

67. Überführe eine ebene Figur F durch zwei nacheinander auszuführende Streckungen vom gleichen Streckungszentrum O aus mit den Maßstäben k_1 und k_2 in ein Bild F''! Durch welche resultierende Abbildung lassen sich die beiden Streckungen in den einzelnen Fällen ersetzen?

a) $k_1 = +\frac{2}{1}$ $k_2 = +\frac{3}{2}$ **b)** $k_1 = -\frac{2}{1}$ $k_2 = -\frac{3}{2}$ **c)** $k_1 = -\frac{2}{1}$ $k_2 = +\frac{3}{2}$

d) $k_1 = +\frac{2}{1}$ $k_2 = -\frac{3}{2}$ **e)** $k_1 = +\frac{2}{1}$ $k_2 = +\frac{1}{2}$ **f)** $k_1 = +\frac{1}{2}$ $k_2 = -\frac{2}{1}$

Y

68. Überführe eine ebene Figur F durch eine Drehstreckung vom Zentrum O aus um den Winkel φ im Maßstab k in ihr Bild F''! Welche Bilder F'' erhalten wir in den einzelnen Fällen? Wie liegen Figur F und Bild F'' zueinander?

a) $\varphi = 90°;\ k = \frac{2}{1}$ **b)** $\varphi = 90°;\ k = \frac{1}{2}$ **c)** $\varphi = 180°;\ k = \frac{2}{1}$

d) $\varphi = 180°;\ k = \frac{1}{2}$ **e)** $\varphi = 90°;\ k = -\frac{2}{1}$ **f)** $\varphi = 90°;\ k = -\frac{1}{2}$

69. Überführe zwei gleichsinnig-ähnliche Dreiecke F und F'' derselben Ebene durch eine geometrische Abbildung ineinander! Welche Abbildung leistet dieses in den einzelnen Fällen? Führe die Abbildung zeichnerisch durch!

a) F und F'' liegen ähnlich, der Maßstab von F'' ist $k = 1$,

b) F und F'' liegen ähnlich, der Maßstab von F'' ist $k = \frac{1}{2}$,

c) F und F'' sind gleichsinnig-ähnlich, entsprechende Strecken von F und F'' aber nicht parallel, der Maßstab von F'' ist $k = 1$.

d) Wie c), aber der Maßstab von F'' ist $k = \frac{1}{2}$.

Anleitung zu c) und d): Konstruiere zuerst das Zentrum O der Abbildung aus zwei Paaren entsprechender Punkte A, A'' und B, B''!

70. Welche Abbildung erhält man für eine ebene Figur F durch eine Drehstreckung von F um den Winkel $\varphi = 0°$ **a)** im Maßstab $k = 1$, **b)** im Maßstab $k = -1$?

71. Überführe ein Dreieck F durch eine Streckspiegelung im Maßstab **a)** $k = \frac{2}{1}$, **b)** $k = \frac{1}{2}$, **c)** $k = -1$, **d)** $k = -\frac{1}{2}$, **e)** $k = +1$ in ein Bild F''! Welche Bilder erhält man?

72. Überführe ein Dreieck F durch zwei nacheinander auszuführende Streckspiegelungen mit den Maßstäben $k_1 = \frac{2}{1}$ und $k_2 = \frac{1}{2}$ und parallelen Achsen g_1 und g_2! Welches Bild F'' erhält man?

C. Lineare Funktionen und Gleichungen

1. Stelle für die durch folgende Gleichungen gegebenen Funktionen Wertetabellen auf! Der Definitionsbereich ist in allen Aufgaben die Menge der reellen Zahlen. Setze für die unabhängige Variable auch negative und gebrochene Zahlen ein!

a) $y = 20 - 4x$ **b)** $y = -2x + 4$ **c)** $y = 2x + 3$

d) $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ **e)** $a = \frac{1}{2}b^2$ **f)** $m = \frac{1}{3}n^3$

g) $y = 5 - 2x - 3x^2$ **h)** $z = 4 - 3v - 4v^3$

2. Bei den folgenden Funktionen ist der Definitionsbereich nicht gleich der Menge der reellen Zahlen. Stelle fest, für welche Zahlen die Funktionen nicht definiert sind, und fertige eine Wertetabelle an!

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{10}{x}$ **c)** $y = \frac{3}{4 - x}$ **d)** $y = \frac{7}{x - 5} + 10$

3. In den folgenden Sachverhalten sind die angegebenen Größen proportional. Bezeichne die Maßzahlen der einen mit x, die der anderen mit y! Gib die Funktionsgleichungen an, und stelle jeweils eine Wertetabelle auf!

a) Ein Brötchen kostet 0,05 MDN. **b)** Ein Bügeleisen verbraucht in $2\frac{1}{2}$ Stunden 1 kWh Elektroenergie. **c)** Aus 5 kg Trauben erhält man 3,5 l Saft. **d)** Ein Abraumbagger in einer Kohlengrube räumt in 20 Minuten 100 t Abraum ab. **e)** Für eine Beeteinfassung braucht man 3 Pflanzen auf je 50 cm.

4. Die Größen in den folgenden Aufgaben sind produktgleich. Bezeichne die Maßzahlen der einen mit x, die der anderen mit y! Gib die Funktionsgleichungen an und stelle jeweils eine Wertetabelle auf!

a) Wenn täglich 15 Briketts verheizt werden, reicht der Vorrat 200 Tage.

b) Man kann ein Stück Land mit den gelieferten Weißkrautpflanzen in Reihen von 50 cm Abstand bei einem Pflanzenabstand von 40 cm bepflanzen.

c) Man kann aus einem Brett 20 Leisten von 9 mm Dicke schneiden.

d) Bei der Einstellung eines regelbaren Widerstandes auf 45 Ω beträgt die Stromstärke 5 A.

5. Gib die Funktionsgleichungen für folgende eindeutige Zuordnungen an und stelle jedesmal eine Wertetabelle auf!

a) Seite und Umfang eines gleichseitigen Dreiecks, **b)** Seite und Umfang eines Quadrats,
c) Seite und Umfang eines regelmäßigen n-Ecks, **d)** Seite und Fläche eines Quadrats,
e) Kante und Oberfläche eines Würfels, **f)** Kante und Volumen eines Würfels.

6. Trage die Punkte mit folgenden Koordinaten in ein Koordinatensystem mit selbstgewählten Einheiten ein!

a) $x = 2; y = 3$ **b)** $x = -1; y = -4$ **c)** $x = 5; y = -4$ **d)** $x = 2; y = 6$
e) $x = -2; y = 6$ **f)** $x = -2; y = -6$ **g)** $x = 2; y = -6$ **h)** $x = 0; y = -3$

7. In der folgenden Aufgabe sind Zahlenpaare in einer Tabelle angeordnet. Zeichne die zugeordneten Punkte in ein Koordinatensystem ein!

x	$-1{,}5$	-5	1	$0{,}5$	0	$\frac{7}{5}$	0	$-3{,}6$	0	3	-3	-3	3
y	3	-2	0	$4{,}3$	$-1{,}7$	$-0{,}2$	0	0	5	3	3	-3	-3

8. Welche Vorzeichen haben die beiden Koordinaten eines Punktes, wenn der Punkt im **a)** ersten Quadranten, **b)** zweiten Quadranten, **c)** dritten Quadranten, **d)** vierten Quadranten liegt?

9. Was kann man über die Koordinaten von Punkten aussagen, die auf den Achsen liegen?

10. Zeichne eine Gerade, die die Punkte mit den Koordinaten
a) $A\,(5; 4)$ und $B\,(-3; -2)$; **b)** $C\,(-4; 2)$ und $D\,(5; -3)$ verbindet!

11. a) Zeichne ein Dreieck mit den folgenden Eckpunktkoordinaten!
$A\,(4; 5)$; $B\,(8; 2)$; $C\,(-6; 3)$

b) Zeichne ein Viereck mit den folgenden Eckpunktkoordinaten!
$A\,(-3; 8)$; $B\,(10; 6)$; $C\,(5; -5)$; $D\,(-7; -4)$

Y

12. a) Gegeben ist der Punkt $A\,(4; 6)$. Zeichne den Punkt B, der in bezug auf die Abszissenachse OX symmetrisch zum Punkt A liegt, und ermittle die Koordinaten dieses Punktes!

b) Zeichne Punkte, die in bezug auf die Abszissenachse paarweise symmetrisch liegen!

13. a) Zeichne den Punkt $A\,(4; 6)$ und den Punkt B, der in bezug auf die Ordinatenachse symmetrisch zum Punkt A liegt! Vergleiche die Koordinaten der beiden Punkte!

b) Zeichne weitere Punktepaare, die symmetrisch zur Ordinatenachse OY liegen! Ermittle ihre Koordinaten!

14. a) Zeichne den Punkt A (3; 7) und den Punkt B, der in bezug auf den Koordinatenursprung symmetrisch zum Punkt A ist! Wodurch unterscheiden sich die Abszissen und die Ordinaten dieser Punkte?

b) Zeichne weitere Punktepaare, die in bezug auf den Koordinatenursprung symmetrisch sind, und vergleiche ihre Koordinaten!

15. In der Ebene liegen die Punkte A (1; 3); B (2; 5); C (1; —3); D (—2; —5); E (—1; 3). Stelle fest, welche Paare dieser Punkte symmetrisch sind in bezug auf:

a) die Abszissenachse; **b)** die Ordinatenachse; **c)** den Koordinatenursprung!

16. a) Zeichne ein Viereck mit folgenden Eckpunktkoordinaten:

A (0; 0); B (1; 3); C (8; 5); D (9; 1)!

Hinweis: Als Einheit ist 1 cm zu nehmen.

b) Ziehe vom Eckpunkt A aus die Diagonale, und berechne, nachdem du die Grundseite und Höhe der erhaltenen Dreiecke mit der Genauigkeit 0,1 cm gemessen hast, ihren Flächeninhalt und den Flächeninhalt des ganzen Vierecks!

c) Zeichne vom Eckpunkt B die zweite Diagonale und ermittle nochmals den Flächeninhalt des Vierecks, nachdem du die entsprechenden Messungen und Rechnungen ausgeführt hast!

d) Berechne das arithmetische Mittel der erhaltenen Ergebnisse und runde das Resultat bis auf zwei geltende Ziffern!

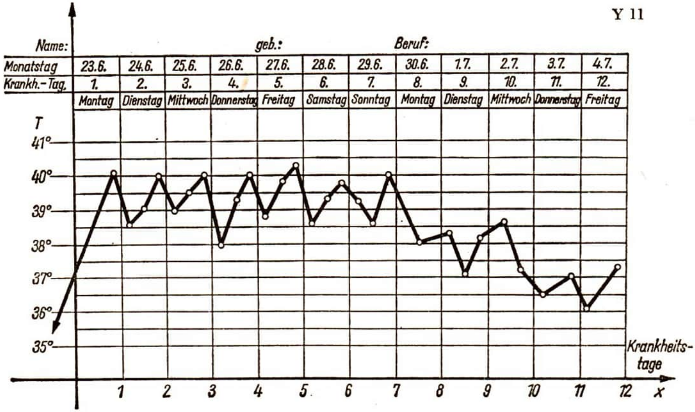
e) Stelle den absoluten und den relativen Fehler der erhaltenen Werte fest, wenn der Flächeninhalt des gegebenen Vierecks 28 cm² ist!

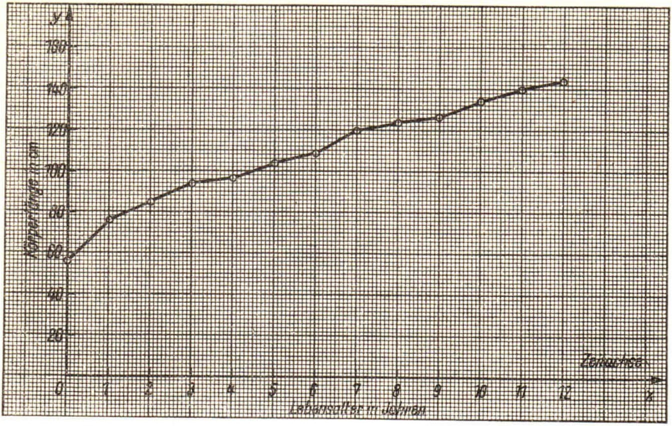
17. Die Messung der relativen Luftfeuchtigkeit an einem Tage ergab die folgende Wertetabelle:

Uhrzeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24 Uhr
rel. Feuchtigkeit	72	73	76	75	68	60	55	53	53	55	60	65	68 %

Stelle die durch die Wertetabelle gegebene Funktion graphisch dar!

Y 11





Y 12

18. **a)** Beim Abbau von Gestein entstehen aus 5 m^3 Gestein 8 m^3 Haufwerk.

b) Eine Schraubenfeder von 30 mm Länge verlängert sich bei einer Belastung von 1 kp um 11 mm, bei einer Belastung von 2 kp um 22 mm; usw.

Bilde die Funktionsgleichung und stelle die Funktionen graphisch dar!

Nimm in b) als abhängige Veränderliche die Gesamtlänge der Schraubenfeder!

19. Entnimm aus den Bildern Y 11 und Y 12 die Koordinaten der Punkte und stelle sie in einer Wertetabelle zusammen!

20. Stelle die Funktionen mit folgenden Gleichungen graphisch dar! Beachte dabei den Definitionsbereich! **a)** $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{3}{4 - x}$

21. Prüfe rechnerisch nach, ob die angegebenen Punkte zur graphischen Darstellung der jeweiligen Funktion gehören!

a) $y = x^2 + 3$; $P_1\,(2;\,7)$; $P_2\,(-1;\,4)$; $P_3\,(0{,}5;\,3{,}5)$; $P_4\,(4;\,20)$

b) $y = -\frac{2}{3x}$; $P_1\,(-1;\,1)$; $P_2\left(2;\,-\frac{1}{3}\right)$; $P_3\left(\frac{1}{3};\,2\right)$; $P_4\left(-\frac{1}{4};\,3\right)$

22. Zeichne die graphischen Darstellungen folgender Funktionen!

a) $y = 4\,x$ **b)** $y = \frac{1}{2}\,x$ **c)** $y = -x$ **d)** $y = 0{,}6\,x$

e) $y = -\frac{1}{3}\,x$ **f)** $y = 1{,}5\,x$ **g)** $y = 0{,}25\,x$ **h)** $y = \frac{3}{7}\,x$

Y

23. Zeichne jeweils in dasselbe Koordinatensystem die graphischen Darstellungen folgender Funktionen!

a) $y = 3\,x$ und $y = -3\,x$ **b)** $y = 0{,}5\,x$ und $y = -0{,}5\,x$

c) $y = \frac{1}{5}\,x$ und $y = -\frac{1}{5}\,x$ **d)** $y = 0{,}1\,x$ und $y = -0{,}1\,x$

24. Zeichne die jeweils symmetrisch zu den Achsen gelegenen Geraden und gib die zugehörigen Funktionsgleichungen an! **a)** $y = \frac{1}{5}x$ **b)** $y = -0{,}3\,x$ **c)** $y = -6\,x$

25. Beweise, daß die zu den Gleichungen $y = mx$ und $y = -mx$ gehörenden Geraden symmetrisch zur x-Achse liegen!

26. Zeichne die Geraden mit den in der folgenden Tabelle angegebenen Anstiegen! Miß die Winkel α, die diese Geraden mit der positiven Richtung der x-Achse bilden und trage sie in die Tabelle ein!

m	0,5	1	1,5	2	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$
α (in Grad)								

Gilt $\alpha \sim m$?

27. Zeichne die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems und die Geraden für $y = x$ und $y = -x$! Dadurch entstehen 8 Achtel der Zeichenebene. Markiere farbig die Achtel, in denen Geraden $y = mx$ verlaufen, für die $|m| > 1$ gilt, andersfarbig diejenigen, in denen die Geraden mit $0 < |m| < 1$ verlaufen!

28. **a)** Setze in $2x + 3y - 6 = 0$ zuerst statt 2, dann statt 3 die Zahl 0! Zeichne die entsprechenden Geraden und schreibe die Gleichungen daran! Sprich das Ergebnis in Worten aus!

b) Zeichne die Geradenschar $y = a$ für verschiedene Werte von a! Sprich das Ergebnis in Worten aus!

29. Gib die Gleichung der linearen Funktion an, die durch die x-Achse dargestellt wird!

30. Stelle die folgenden Scharen von Funktionen graphisch dar!

a) $y + x - b = 0$ **b)** $y - x - b = 0$ **c)** $3y - x - b = 0$ **d)** $2y + x - b = 0$
e) $y - mx - 1 = 0$ **f)** $y - mx + 1 = 0$ **g)** $y - mx + 2{,}5 = 0$ **h)** $y - mx - 2{,}5 = 0$

Anleitung: Setze jeweils für b bzw. m eine Anzahl beliebiger Zahlenwerte ein!

31. Stelle die folgenden linearen Funktionen graphisch dar!

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = 3x$ **d)** $y = \frac{1}{2}x$

e) $y = -x$ **f)** $y = -2x$ **g)** $y = -3x$ **h)** $y = -\frac{1}{2}x$

Wie verlaufen die Geraden? Durch welche Bewegung lassen sie sich ineinander überführen?

32. Stelle die folgenden linearen Funktionen graphisch dar!

a) $y = x$ **b)** $y = x + 1$ **c)** $y = x + 2$ **d)** $y = x + 3$
e) $y = 2x$ **f)** $y = 2x + 1$ **g)** $y = 2x + 2$ **h)** $y = 2x + 3$

Wie verlaufen die Geraden **a)** bis **d)** und **e)** bis **h)** zueinander?
Durch welche Bewegungen lassen sie sich ineinander überführen?

Y

33. Stelle folgende Funktionen graphisch in ein und demselben Koordinatensystem dar!

$y = x + 1;\quad y = 2x + 1;\quad y = 3x + 1$
$y = -x + 1;\quad y = -2x + 1;\quad y = -3x + 1$

Vergleiche die Funktionsgleichungen und die Lage der Geraden!

34. **a)** Schreibe zur nachstehenden Wertetabelle die Funktionsgleichung auf!

x	4	6	-10	-12
y	-2	-3	5	6

b) Zeichne das Bild der gegebenen Funktion!

35. a) Zeichne eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung und den Punkt $M\,(2;\,4)$ geht!
b) Schreibe die Gleichung dieser Geraden auf!

36. Eine Gerade geht durch den Koordinatenursprung und hat den Anstieg 4.
a) Schreibe die Gleichung dieser Geraden auf und zeichne die Gerade!
b) Liegt der Punkt $M\,(2;\,5)$ auf der gegebenen Geraden?

37. a) Zeichne die graphischen Darstellungen der Funktionen $y = 2x + 3$ und $y = -2x + 3$!
b) Nenne gemeinsame Eigenschaften und Unterschiede in den erhaltenen graphischen Darstellungen!

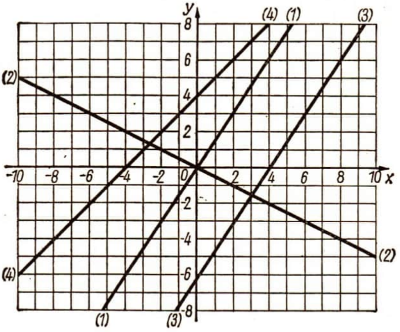
38. Zeichne in ein Koordinatensystem die graphischen Darstellungen folgender Funktionen!
a) $x - y = 0$ b) $x + y = 0$ c) $5x - 2y = 0$ d) $3x - y = 0$
Ermittle für jede Gerade den Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen!

39. Im Bild Y 13 sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem vier Geraden gezeichnet. Schreibe die Gleichung jeder dieser Geraden in der Form $y = mx + b$ auf!

40. Ermittle die Abszissen der Schnittpunkte der graphischen Darstellungen von folgenden Funktionen mit der x-Achse!

a) $y = 2x - 6$
b) $y = 3x + 3$
c) $y = 2x - 1$
d) $y = 2x - 3$

Y 13



41. Wo schneiden die graphischen Darstellungen folgender Funktionen die y-Achse?
a) $y = x - 5$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -4x + 7$ d) $y = -0{,}5x - 2{,}5$

42. Die graphische Darstellung der Funktion $y = 2x + b$ schneidet die Ordinatenachse im Punkt $(0;\,5)$. Ermittle b und zeichne die graphische Darstellung der Funktion!

43. Die graphische Darstellung der Funktion $y = mx + b$ verläuft durch den Punkt $M\,(2;\,3)$ und durch den Punkt $N\,(-5;\,-4)$. Ermittle die Werte m und b und zeichne die graphische Darstellung der Funktion!

44. Bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit v in Metern je Sekunde auf experimentellem Wege in trockener Luft und bei verschiedenen Temperaturen erhielt man die folgende Wertetabelle:

t (in Grad)	−30	−16	−8	−4	0	4	8	12	20	30
$v\left(\text{in } \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	313	323	327	330	332	334	337	339	344	349

Y

a) Zeichne die graphische Darstellung der durch die Wertetabelle gegebenen Funktion!
b) Ersetze die graphische Darstellung näherungsweise durch eine Gerade!
c) Stelle näherungsweise eine Funktionsgleichung auf, nachdem du den Anstieg und die Ordinate für $t = -30$ durch Messung in einer Abbildung (maßstäblich) erhalten hast!

45. Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen!

a) $y = -\frac{1}{2} + 5$ **b)** $2x + 3y - 4 = 0$ **c)** $y = 0{,}2x + 0{,}7$
d) $x - y = 0$ **e)** $x + y = 1$ **f)** $2x + 2y = 2$

Löse die Gleichungen in den Aufgaben 46 bis 63!

46. a) $5x - 3 = 17$ **b)** $5x + 2 + x = 20$ **c)** $18 + 9x = 27 + 5x$

47. a) $9x + 22 - 2x = 100 - 11x - 42$
b) $7{,}3x - 2{,}6 - 8{,}1x + 4{,}1 + 1{,}7x = 2{,}5 + 3{,}8x - 9{,}7$

48. a) $0 = 14 + x - 8x - 3x - 6 + x$ **b)** $9x = 7x + 15 + 5x + 8 - 10x$
c) $6 + 12x - 9 - 8x + 10 + x = 0$ **d)** $\frac{21}{4}x : 1 = 7 : 4$
e) $100 + 2x - 9x + 15 = 10 - 7x + 5 - 11x$

49. a) $(8x + 5) + (5x - 8) + 7 = 10x - (3 - 2x - 8)$
b) $x - (7x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 8)$
c) $7x - (8 + 6x - x) = (5x - 4) - (x - 3x + 9)$

50. a) $(x - 1)(x - 2) = (x - 3)(x + 1)$ **b)** $(x + 3)(2x + 5) = (2x - 1)(x + 7)$
c) $(x + 1)(4x - 25) = (2x - 5)(2x - 8)$
d) $(3x + 1)(4x - 5) - (6x + 1)(x + 1) = (3x - 3)(2x - 1)$

51. a) $(x + 2)^2 - (x + 1)^2 = 9$ **b)** $(x - 2)(x - 4) = (x - 5) \cdot x$
c) $(x - 1)^2 = (7 - x)^2$ **d)** $(8 + x)(x - 1) = (x + 1)(x - 2) + 2$

52. $(x - 3)(x + 4) = x^2 - 9$ (Vgl. Beispiel C 15!)

53. a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} = 11$ **b)** $3 - \frac{3 - 7x}{10} + \frac{x + 1}{2} = 4 - \frac{7 - 3x}{5}$
c) $\frac{5x - 6}{10} - \frac{9 - 10x}{14} = \frac{3x - 4}{5} - \frac{3 - 4x}{7}$
d) $11 - \left(\frac{3x - 1}{4} + \frac{2x + 1}{3}\right) = 10 - \left(\frac{2x - 5}{3} + \frac{7x - 1}{8}\right)$

54. a) $\frac{2x + 3}{4} = \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{3x - 7}{8} = \frac{5}{6}$ **c)** $\frac{34x + 40}{27} = \frac{47}{51}$
d) $\frac{72x + 56}{5} = \frac{32}{105}$ **e)** $\frac{x + 5}{12} = x$ **f)** $\frac{x - 7}{8} = 2x$

55. a) $\frac{x - 18}{25} = \frac{4}{5}x$ **b)** $\frac{2x - 21}{30} = \frac{5}{36}x$ **c)** $\frac{2{,}4x + 4{,}8}{3} = \frac{4}{3}x$

56. a) $\frac{2(3x + 2) - 3(x - 3)}{7} = 4$ **b)** $\frac{3(6 - x)}{5} = x - 7\frac{3}{5}$
c) $\frac{18 + (4x - 8)\,2}{5} = x + 7\frac{3}{5}$ **d)** $\frac{5(3x + 4)}{12} = 2x + \frac{1}{6}$
e) $\frac{12\left(\frac{1}{2} + 2x\right)}{17} = 4x - \frac{16}{17}$ **f)** $\frac{\frac{3}{4}(5x - 5)}{5} = -2x + \frac{1}{10}$

Y

57. **a)** $12 : 8 = 15 : x$ **b)** $3 : 11 = 6{,}3 : x$ **c)** $16{,}8 : 8{,}4 = 4{,}2 : x$
d) $2 : 6 = 6 : x$ **e)** $\frac{5}{4} : \frac{11}{4} = \frac{5}{2} : x$ **f)** $\frac{9}{2} : \frac{12}{7} = \frac{35}{4} : x$

58. **a)** $9{,}5 : 3{,}8 = 3{,}8 : x$ **b)** $2x : 5 = 8 : 10$ **c)** $3x : 80 = 9 : 15$
d) $4{,}2 : 5{,}6 = 2{,}5x : 10$ **e)** $1{,}2 : 1{,}5x = 0{,}5 : 7{,}5$ **f)** $\frac{15}{4} : \frac{25}{6} = \frac{9}{5}x : 2$

59. **a)** $3{,}6x : 24 = 1 : \frac{3}{2}$ **b)** $\frac{9}{2} : \frac{162}{5} = \frac{5}{6} : \frac{3}{4}x$ **c)** $\frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{2} : \frac{3}{8}x$

60. **a)** $(x - 3) : 6 = (x + 6) : 8$ **b)** $(x + 2) : 5 = (x - 4) : \frac{5}{3}$
c) $(x - 0{,}2) : 5{,}1 = (x + 0{,}6) : 5{,}7$ **d)** $\frac{8}{3} : \frac{3}{2} = \left(x + \frac{7}{2}\right) : \left(x - \frac{25}{4}\right)$

61. **a)** $(3x + 8) : (x + 4) = (3x - 7) : (x - 2)$
b) $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)$ **c)** $\frac{7}{3} + \frac{13}{5x} = \frac{13x - 24}{3x} - \frac{37}{20} + \frac{10}{x}$

62. **a)** $\frac{2}{x + 5} = \frac{1}{3}$ **b)** $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{x - 5}{x - 3}$ **c)** $\frac{1}{2} - \frac{7}{2(x + 3)} = \frac{5}{x + 3} + \frac{3}{2(x + 3)}$

63. **a)** $\frac{38}{57} = \frac{x}{6}$ **b)** $\frac{5}{x - 5} = \frac{7}{3x - 7}$ **c)** $\frac{8{,}5}{x} = \frac{5}{4}$
d) $\frac{x + 4}{x + 5} = \frac{7}{8}$ **e)** $\frac{3}{4x + 5} = \frac{2}{2x - 3}$ **f)** $\frac{6}{5x + 2} = \frac{7}{3x + 8}$

In den folgenden Aufgaben sind alle Gleichungen nach x aufzulösen.

64. **a)** $x + a = 100$ **b)** $x - 6 = b$ **c)** $-8 + x = c$
d) $\frac{5}{2} + x = k$ **e)** $0{,}15a = 2x - 1{,}85a$ **f)** $\frac{1}{2}a + 7x = b$

65. **a)** $x + 4a = 11a + 2$ **b)** $3a + 11b = 5b + 3x$
c) $\frac{11}{3}b + \frac{1}{2}x = \frac{13}{2}b$ **d)** $2x - a = 2a + x$ **e)** $x + p = r$

66. **a)** $2x - a = b + x$ **b)** $5b - 3x = 4a + b - 5x$
c) $19a + 26b + 14x + 13b - 33a + 4x = 5x - b + 32a + 10b - x + 30b - 4a$

67. **a)** $0 = 24b + 10c - 19b + 4x - 3c + 5x - 20c - 10x + 5b + 13c$
b) $5x - 5a + 3b - x + 7b = 3a + 4b - 7a + 3x$
c) $10x - 5a + 7b + x = 17x - 3a + 5b - 8x + 4b$

68. **a)** $rx - \frac{9}{2}ar = ar + \frac{7}{4}rb$ **b)** $abx + \frac{14}{5}abe = \frac{101}{10}abe + \frac{5}{2}abf$
c) $5{,}3a^2 + \frac{1}{5}ax = 10a + 5ab$ **d)** $4p^2s + 24p^2r = 3{,}8p^2r + 0{,}1p^2x$

69. **a)** $\frac{7}{4}tx + \frac{9}{2}at = at - \frac{7}{4}bt$ **b)** $-lx + \frac{9}{2}al = al - \frac{7}{4}bl$
c) $5ab^2 + 10a^2b = abx - 9{,}1a^2b$ **d)** $\frac{sx}{12} - \frac{s^2}{2} = \frac{3s^2}{2} - \frac{st}{6}$

70. **a)** $17mx - 3am + 5bm - 8mx + 4bm = 10mx - 5am + 7bm + mx$
b) $9ab - 7b^2 - 11bx + 12b^2 - 5ab - 3bx - ab + b^2 + 11bx = 0$
c) $14abx + 15a^2b - 7ab^2 + abx - 13ab^2 = 19abx + 3a^2b - 12ab^2$

Y

71. a) $2(3a + 10x) + 7(a - x) = 13(a + b)$

b) $3(5x - 7a) + 7(3a - 5b) + 5(3b - 7x) = 0$

c) $mx + nx = a$ d) $ax + bx = m + x$

e) $a(x - 1) - b = x - a$ f) $(a - b)x = 2a - (a + b)x$

72. a) $ab - (x - c) \cdot d = c(d + x)$ b) $(a + b)x - (a - b)x - bx = a + c$

c) $(x - a)(x - b) = x^2 - a^2$ d) $(u - x)(x - 1) = x^2 - 1$

(Vergleiche die Aufgaben 72 c) und d) mit dem Beispiel C 15!)

73. a) $\frac{a}{x} = b$ b) $\frac{x}{a} - b = c$ c) $a - \frac{b}{x} = c$ d) $\frac{a}{x} - 1 = \frac{b}{x} - 9$

74. a) $\frac{a - bx}{c} + x = \frac{cx - b}{c}$ b) $\frac{x + a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x - b}{a} + \frac{a}{b}$

c) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = d$ d) $\frac{ax - b^2}{a} - \frac{a(b - x)}{b} + \frac{b^2}{a} = a$

75. Löse die folgenden Gleichungen graphisch!

a) $4x + 1 = 9$ b) $4x - 3 - 3x - 4 = x - 7$

c) $15(x + 2) = 6(2x + 7)$ d) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$

76. Vermindert man 76 um eine gewisse Zahl, und multipliziert man die Differenz mit 3, so erhält man 210. Wie heißt die Zahl?

77. Helga sagt: „Ich bin fünf Jahre älter als mein Bruder Klaus. Vor vier Jahren war ich gerade doppelt so alt wie er“. Wie alt ist Helga?

78. Die Summe zweier Zahlen ist 20. Multipliziert man die eine Zahl mit 3, und vermindert man die andere Zahl um 16, so erhält man gleiche Zahlen. Wie heißen beide Zahlen?

79. Eine Zahl ist genauso groß wie das Ergebnis, das ich erhalte, wenn ich diese Zahl um 12 vermehre und die Summe halbiere. Wie heißt die Zahl?

80. Dieter ist heute 16 Jahre alt, sein Vater 37 Jahre. In wieviel Jahren wird Dieters Vater gerade doppelt so alt sein wie Dieter?

81. Ich habe mir zwei Zahlen aufgeschrieben, von denen die eine um 2 kleiner ist als die andere. Wenn ich die größere mit 4, die kleinere mit 3 multipliziere und die beiden Produkte addiere, ergibt sich 57. Wie heißen die beiden Zahlen?

82. Ich habe mir eine Zahl notiert. Wenn ich 12 addiere, die entstandene Summe mit 3 multipliziere und vom Produkt 19 subtrahiere, so erhalte ich das um 3 verminderte Vierfache der notierten Zahl. Welche Zahl habe ich mir aufgeschrieben?

83. Wenn man zu jeder der vier Zahlen 42, 30, 46, 33 die gleiche Zahl addiert, kann man eine Proportion bilden.

Y

84. Welche Zahl muß man von 10, 11, 34, 38 subtrahieren, wenn die Differenzen eine Proportion bilden sollen?

85. Welche Ziffer muß man an 1, 2, 7, 12 hängen, damit eine Proportion entsteht?

86. Welche Zahl muß man mit $4\,bc$ multiplizieren, um $104\,b^2c^3d$ zu erhalten?

87. Steffen sagt zu Klaus: „Denke dir eine Zahl, addiere 4, multipliziere das Ergebnis mit 5, subtrahiere 12, zähle 27 hinzu, ziehe das Fünffache der gedachten Zahl ab!“ Ohne daß Klaus ein Schlußergebnis sagte, wußte es Steffen.

88. Steffen sagt: „Denke dir eine Zahl, verdopple sie, zähle 4 hinzu, halbiere das Ergebnis, zähle 7 hinzu, multipliziere das Ergebnis mit 8, ziehe 12 ab, dividiere durch 4, ziehe 11 davon ab!“ Klaus nennt als Ergebnis 18. Steffen rechnet nun (18 — 4) : 2 und sagt: „Du hast dir die Zahl 7 gedacht.“ Wie ist das möglich?

89. In den folgenden Aufgaben ist die Gleichung gegeben. Stelle dazu einen Text in Form eines Zahlenrätsels zusammen! Löse die Gleichungen!

a) $3(5 + 3x) = 10x$ **b)** $4(x - 3) = 9(x - 2)$
c) $12 + 2x = 8(x - 8)$ **d)** $3(2x + 6) = 10x - 10$
e) $4(3x + 7) = 5(4x - 12)$ **f)** $7x = (11 - x)\,6 - 1$

90. Eine LPG bezog insgesamt 119 dt Dünger (Thomasphosphat und Kali) für 996,80 MDN. 1 dt Thomasphosphat kostete 5,20 MDN, 1 dt Kali 9,70 MDN. Wieviel Dezitonnen Dünger jeder Sorte wurden geliefert?

91. Auf einem VEG konnten die Kosten für die Aussaat durch Einsatz von Maschinen um 22,5 % auf 5140 MDN gesenkt werden. Wie hoch waren die Kosten vorher?

92. Ein Rind erhält täglich 25 kg Gärfutter, ein Schwein 12 kg. An 63 Rinder und Schweine werden insgesamt 990 kg je Tag verfüttert. Wieviel Rinder und wieviel Schweine stehen in Futter?

93. Eine 24 cm dicke Wand aus Hohllochziegeln $\left(\text{Dichte } 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right)$ hat die gleiche Wärmedämmfähigkeit wie eine 36,5 cm dicke Wand aus Vollziegeln $\left(\text{Dichte } 1{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right)$.

a) Berechne für jede Ziegelart die Masse eines Wandstücks von 1 m² Fläche!

b) Wieviel Prozent beträgt die Masseersparnis durch das Verwenden von Hohllochziegeln?

94. Eine 3,25 m lange Stahlstange wird in Stücke von 125 mm Länge zersägt. Die Schnittbreite beträgt 3 mm. Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wieviel Prozent die Ausbeute?

95. An einer Stockschere ist der Hebelarm für die Handkraft 500 mm lang. Der Rundstahl wird so eingelegt, daß der Hebelarm für die Schneidekraft 60 mm lang ist. Wie groß ist die Schnittkraft, wenn die Hebelkraft 12 kp beträgt?

96. Bei jeder Schleifscheibe gibt der Herstellerbetrieb neben dem Durchmesser d in mm die höchstzulässige Umfangsgeschwindigkeit v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ an. Beispiel: $d = 30$ mm, $v = 32\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechne daraus die maximale Drehzahl n in Umdrehungen je Minute!

97. Dient eine Scheibe zum Schneiden, so bezeichnet man die Umlaufgeschwindigkeit auch als Schnittgeschwindigkeit. Ergänze die folgende Tabelle!

	a)	b)	c)
Durchmesser d in mm	24		30
Schnittgeschwindigkeit v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	250	380	
Drehzahl n in Umdrehungen je min		1800	2100

98. Ein Stahlseil hat einen Querschnitt von 25 mm². Auf Zug darf es höchstens mit $70\,\frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}$ belastet werden. Wieviel Prozent der Maximalbelastung beträgt ein Zug von 1400 kp?

99. Als Übersetzung i zweier miteinander kämmender Zahnräder bezeichnet man das Verhältnis der

Drehzahl n_1 des treibenden Rades zur Drehzahl n_2 des getriebenen Rades: $i = \frac{n_1}{n_2}$. Die Motordrehzahl eines Kraftwagens beträgt 3200 Umdrehungen je Minute. Die Gelenkwelle hat in den einzelnen Gängen folgende Drehzahlen: 1. Gang 930 Umdrehungen je Minute, 2. Gang 1890 Umdrehungen je Minute, 3. Gang 3200 Umdrehungen je Minute, R-Gang 830 Umdrehungen je Minute. Wie groß sind die Übersetzungen $x : 1$ in den einzelnen Gängen?

100. Bei einer Lösung gibt die Prozentzahl meist die Masse des gelösten Stoffes in 100 Masseteilen der Lösung an. Es soll eine 15prozentige Natronlauge hergestellt werden. Wieviel Gramm Ätznatron (NaOH) sind in 250 g Wasser zu lösen?

101. 120 g Kochsalzlösung enthalten 20 g Kochsalz. Wievielprozentig ist die Lösung?

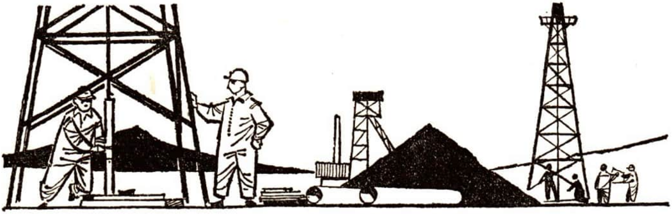
102. In der Versandabteilung eines volkseigenen Kalkstickstoffbetriebes werden 100 kg Kalkstickstoff mit einem Stickstoffgehalt von 24 % angefordert. Es ist aber nur Kalkstickstoff mit einem Gehalt von 21 % vorhanden. Wieviel Kilogramm dieses Düngemittels muß das Werk verschicken, damit die geforderte Stickstoffmenge geliefert wird?

103. Eine Bohrung im Oelsnitzer Revier, bei der der Ansatzpunkt des Bohrloches 415,00 m ü. NN lag, ergab folgende Schichtung:

Gesteinsart	Mächtigkeit
Lockeres Gebirge	46,00 m
Rotliegendes	396,00 m
Kohlengebirge	183,00 m
Phyllit (Urtonschiefer)	15,00 m

a) Welche Tiefe erreichte das Bohrloch?

b) Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen NN und den einzelnen Schichtfugen?



Y

104. Eine Grube förderte in einem Jahr 907 200 t Kohle. Außerdem mußten in der Minute durchschnittlich 8,750 m^3 Wasser gehoben werden.

a) Wieviel Kubikmeter Wasser kamen auf jede Tonne geförderter Kohle (1 J. = 360 Tg.)?

b) Für die Wasserhaltung wurden im Jahr 453 600 MDN ausgegeben. Mit welchem Betrag belasten diese Kosten jede Tonne Kohle?

105. Eine Kreiselpumpe fördert in der Minute 5,4 m^3 Wasser. Sie drückt es in eine Rohrleitung von 9 dm^2 Querschnitt. Welche Geschwindigkeit hat das Wasser in der Rohrleitung?

106. An einem im Gleichgewicht befindlichen zweiseitigen Hebel mit Hebelarmen von 21 cm und 9 cm Länge ist eine Last um 60 p größer als die andere. Berechne beide Lasten!

107. Brauneisenstein enthält etwa 60% Eisen. Wieviel Tonnen Brauneisenstein sind nötig, um 20 t Roheisen mit einem Kohlenstoffgehalt von 4% herzustellen?

108. Wieviel Wasser muß im Gradierwerk aus je 100 kg einer 7prozentigen Sole verdunsten, damit die Sole 25prozentig wird?

109. Um Weichlot herzustellen, wurden 12 kg Zinn (Sn), 0,6 kg Antimon (Sb) und 27,4 kg Blei (Pb) zusammen eingeschmolzen.

a) Berechne die Massenanteile als Prozente der Gesamtmasse!

b) Wieviel Kilogramm Weichlot entstehen bei einem Schmelzverlust von 3%?

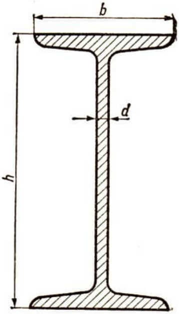
110. Duraluminium, eine Legierung von stahlähnlicher Festigkeit und Härte, setzt sich aus 4% Kupfer (Cu), 1% Mangan (Mn), 0,5% Magnesium (Mg) und 94,5% Aluminium (Al) zusammen. Unter Berücksichtigung von 1,5% Abbrand sind 250 kg Duraluminium herzustellen.

111. Invarstahl (Stahl mit 36% Nickel) eignet sich wegen seiner geringen Veränderung bei Temperaturschwankungen für Präzisionsinstrumente und -maßstäbe. 3 Präzisionsmaßstäbe von je 2,57 kg sind herzustellen. Wieviel Kilogramm Stahl und Nickel sind erforderlich, wenn mit einem Abbrand und Gießverlust von 0,7% zu rechnen ist?

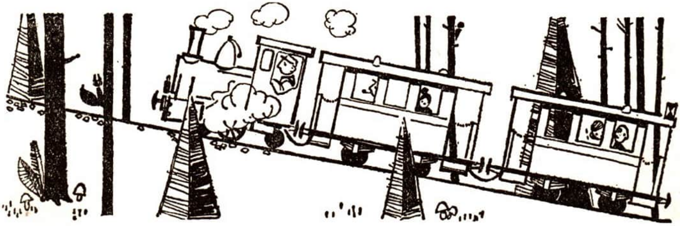
112. Die langen Seiten zweier flächengleicher Rechtecke sind 8,5 cm bzw. 11,9 cm lang. Die kurzen unterscheiden sich um 1,4 cm. Wie groß sind sie?

113. Ein Rechteck ist 2 cm länger als breit. Vergrößert man jede Seite um 4 cm, so wächst sein Inhalt um 72 cm². Berechne die Seiten!

114. In welchem Flächenmaßstab wird ein Kleinbildnegativ (24 mm × 36 mm) vergrößert, wenn eine Vergrößerung im Format 6 cm × 9 cm hergestellt wird?



Y 14



Y

115. Wie groß ist die Breite b und die Dicke d des in Bild Y 14 wiedergegebenen Stahls I 50 (I lies: Doppel-Te), wenn die Höhe h 500 mm beträgt? Ermittle den Maßstab aus der Abbildung!

116. Die Bahnstrecke von Schierke nach dem Brocken hat im Mittel eine Steigung von 1:30 bei einer Länge von rund 13,5 km. Der Bahnhof Schierke liegt 680 m ü. NN. Berechne die Höhe der Endstation auf dem Brocken! Zeichne ein „Steigungsdreieck" mit dem Kathetenverhältnis 1:30, und überzeuge dich, daß es bei dem gerundeten Meßwert 13,5 km gleichgültig ist, ob man ihn tatsächlich als Fahrtstrecke (Hypotenuse) oder als waagerechte Entfernung (größere Kathete) ansieht!

117. Die Schwingungszahlen der Töne jeder Dur-Tonleiter stehen im Verhältnis 24:27:30:32:36:40:44:48. Der Kammerton a_1 hat die Schwingungszahl 440 Hz. Bestimme die Schwingungszahlen für die C-Dur-Tonleiter!

118. Die folgenden Gleichungen sind jeweils nach der in Klammern angegebenen Variablen aufzulösen.

a) $A = a \cdot b$ (a) **b)** $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ (h_c) **c)** $m = \varrho \cdot V$ (ϱ) **d)** $P : G = p : 100$ (G)

e) $P : G = p : 100$ (p) **f)** $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (β) **g)** $v = \frac{s}{t}$ (s) **h)** $v = \frac{s}{t}$ (t)

119. Wie lange braucht ein Kraftwagen mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, um einen 2 Stunden früher abgefahrenen Kraftwagen, der mit der Geschwindigkeit $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, einzuholen?

120. Ein Autobus hatte vor einem später abgefahrenen Motorrad einen Vorsprung von 3 km. In welcher Entfernung vom Abfahrtsort holte das Motorrad den Bus ein, wenn sich ihre Geschwindigkeiten wie 8 : 5 verhielten?

121. Eine Anekdote erzählt von einem Postmeister, den jemand fragte, wieviel Pferde der Herr X zum Wechseln auf der Poststation bestellt hatte. Er sagte:

„Mit der Hälfte der bestellten Pferde und einem halben fährt Herr X selbst. Mit der Hälfte des Restes und einem halben fährt sein Vertreter, mit der Hälfte des bleibenden Restes und einem letzten halben fahren die Diener. Das übrig bleibende letzte Pferd benutzt der Vorreiter.“ Wieviel Pferde waren bestellt?

Y

D. Satzgruppe des Pythagoras

1. Welche Länge hat die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ABC? Gegeben sind die Hypotenusenabschnitte $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$.

$\overline{AD}$	2,0 cm	3 cm	3,5 cm	2,5 cm	4,1 cm
$\overline{BD}$	2,5 cm	3 cm	3,0 cm	4,5 cm	2,2 cm

2. Welche Länge hat die Kathete $\overline{AC}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC? Gegeben sind die Hypotenuse $\overline{AB}$ und der Hypotenusenabschnitt $\overline{AD}$.

$\overline{AB}$	5 cm	6,1 cm	5,7 cm	4,9 cm	3,7 cm
$\overline{AD}$	2 cm	4,7 cm	2,8 cm	1,3 cm	1,7 cm

3. Welche Länge hat die Kathete $\overline{BC}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC? Die Hypotenuse $\overline{AB}$ und der Hypotenusenabschnitt $\overline{DB}$ sind gegeben.

$\overline{AB}$	7 cm	6,5 cm	5,3 cm	5,4 cm	4,8 cm
$\overline{DB}$	3 cm	2,1 cm	4,5 cm	2,7 cm	3,2 cm

4. Welche Länge haben die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $\sphericalangle BCA = 90°$, die auf Grund des Höhen- oder Kathetensatzes aus den folgenden Angaben gefunden werden können?

$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
		3,0 cm	4,0 cm		
	3,9 cm		5,1 cm		
6,2 cm				3,5 cm	
5,5 cm					4,1 cm
		2,1 cm			4,9 cm
	5,0 cm			5,4 cm	

5. Konstruiere zu einem gegebenen Quadrat $ABCD$ ein flächengleiches Rechteck $PQRS$, wenn eine Rechteckseite vorgegeben ist! Ermittle die Länge der fehlenden Rechteckseite!

$\overline{AB}$	4 cm	5,6 cm	3,4 cm	2,9 cm	6,1 cm
$\overline{PQ}$	3 cm	4,1 cm	4,8 cm	3,2 cm	3,7 cm

6. Konstruiere zu einem gegebenen Rechteck $ABCD$ ein flächengleiches Quadrat! Ermittle die Länge einer Quadratseite!

$\overline{AB}$	1,5 cm	2,4 cm	2,8 cm	4,9 cm	5,0 cm
$\overline{AD}$	3,7 cm	3,1 cm	2,2 cm	3,6 cm	4,0 cm

7. Ermittle das geometrische und das arithmetische Mittel $m_G = \sqrt{ab}$ bzw. $m_A = \frac{a+b}{2}$ zu den Zahlen a und b!

a	2	3	4,8	10,6	92,7
b	4	5	4,6	5,8	12,9

Welche Möglichkeiten hast du, um die mittlere Proportionale zu konstruieren?

8. Konstruiere die mittlere Proportionale zu den Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$!

$\overline{PQ}$	3,0 cm	2,9 cm	4,9 cm	1,2 cm	6,9 cm
$\overline{RS}$	3,4 cm	5,3 cm	3,7 cm	2,8 cm	4,5 cm

9. Konstruiere ein Quadrat, das flächengleich der Summe zweier Quadrate ist, deren Seiten die Länge 4,2 cm bzw. 3,9 cm haben!

10. Zwei Quadrate haben Flächen von 36 cm² bzw. 25 cm². Konstruiere ein Quadrat, dessen Fläche gleich der Differenz der gegebenen Quadrate ist!

11. Ermittle die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ABC, wenn die Längen der Katheten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bekannt sind!

$\overline{AC}$	4,0 cm	5,0 cm	3,8 cm	2,7 cm	1,6 cm
$\overline{BC}$	4,4 cm	3,2 cm	4,9 cm	0,9 cm	3,7 cm

12. Die Strecken mit den Maßzahlen a, b, c, h, p und q sollen für ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle\, BCA = 90°$ angegeben werden. Gegeben sind:

a) $p = 1{,}5;\quad q = 3{,}7$ **b)** $h = 4{,}3;\quad q = 3{,}1$ **c)** $h = 2{,}5;\quad p = 2{,}2$
d) $c = 4{,}7;\quad q = 2{,}8$ **e)** $c = 7{,}3;\quad a = 4{,}2$ **f)** $b = 5{,}1;\quad q = 3{,}6$
g) $b = 4{,}2;\quad h = 3{,}0$ **h)** $b = 1{,}5;\quad c = 2{,}8$ **i)** $a = 2{,}4;\quad c = 3{,}9$

13. Die Längen der drei Seiten eines Dreiecks betragen 9 cm, 12 cm und 16 cm. Ist das Dreieck rechtwinklig?

14. Konstruiere ein Quadrat, das der Summe der Quadrate über den Strecken von 3,8 cm und 4,5 cm Länge flächengleich ist!

15. Stelle die im Kapitel D behandelten Sätze über das rechtwinklige Dreieck ABC zusammen, wenn $\sphericalangle\, CAB = 90°$ gilt!

Bestimme in den Aufgaben **16** und **17** die Quadrate der folgenden Zahlen zuerst mit Hilfe des Rechenstabs und dann mit Hilfe der Quadrattafel in den *Zahlentafeln*! Vergleiche die Ergebnisse!

16. a) 1,7 **b)** 2,6 **c)** 3,8 **d)** 4,1 **e)** 5,5 **f)** 6,9 **g)** 7,8

17. a) 25,7 **b)** 7,2 **c)** 8,3 **d)** 9,4 **e)** 36,1 **f)** 99,9 **g)** 77,2

Bestimme in den Aufgaben **18** und **19** die Quadrate folgender Zahlen mit Hilfe der Zahlentafel!

18. a) 1,07 **b)** 19,5 **c)** 294,3 **d)** 0,35 **e)** 0,054 **f)** 0,54 **g)** 5,04

19. a) 61,87 **b)** 77,7 **c)** 832 **d)** 9,16 **e)** 22,25 **f)** 53,1 **g)** 5,31

Ermittle in den Aufgaben **20** und **21** zuerst mit Hilfe des Rechenstabs, dann mit Hilfe der Quadrattafel die Quadratwurzeln der folgenden Zahlen! Vergleiche die Ergebnisse!

Y

20. a) 1,102 **b)** 5,06 **c)** 1576 **d)** 0,249 **e)** 0,31 **f)** 488 600 **g)** 63,63

21. a) 63,36 **b)** 7921 **c)** 0,996 **d)** 22,5 **e)** 7569 **f)** 829,4 **g)** 31 680

Bestimme in den Aufgaben **22** und **23** die Quadratwurzeln folgender Zahlen mit Hilfe der Zahlentafel!

22. a) 3,062 **b)** 510,8 **c)** 823,75 **d)** 1592 **e)** 0,19 **f)** 1,9 **g)** 19

23. a) 0,0029 **b)** 35,52 **c)** 4199 **d)** 56,10 **e)** 0,736 **f)** 7,36 **g)** 736

Ermittle zuerst das Quadrat und dann die Quadratwurzel für die Zahlen in den Aufgaben **24** bis **28**!

24. **a)** 1,42 **b)** 2,55 **c)** 3,65 **d)** 4,75 **e)** 5,61 **f)** 53,0 **g)** 5,3

25. **a)** 6,93 **b)** 7,77 **c)** 8,22 **d)** 9,99 **e)** 10,02 **f)** 78,5 **g)** 1

26. **a)** 11,2 **b)** 19,8 **c)** 20,6 **d)** 21,2 **e)** 28,5 **f)** 10 **g)** 20

27. **a)** 31,4 **b)** 42,5 **c)** 53,6 **d)** 64,8 **e)** 75,0 **f)** 26,08 **g)** 26,1

28. **a)** 86,5 **b)** 97,5 **c)** 101 **d)** 10,1 **e)** 1,01 **f)** 0,101 **g)** 500

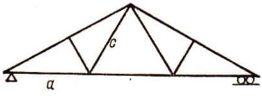
29. Wie lang sind die Diagonalen **a)** eines Quadrates mit der Seite $a = 29$ cm, **b)** eines Rechtecks mit den Seiten $a = 25{,}4$ cm und $b = 19{,}3$ cm?

30. Ein Pionier läßt seinen Drachen steigen, so hoch es sein 87 m langer Bindfaden zuläßt. Sein Freund, der 50 m von ihm entfernt steht, sieht den Drachen senkrecht über sich. Welche Höhe über dem Erdboden hat der Drachen erreicht? (Der Durchhang der Drachenschnur wird vernachlässigt.)

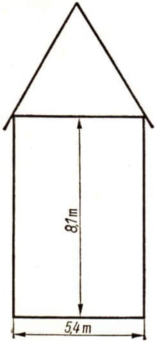
31. Eine Telegrafenstange ist durch ein Drahtseil befestigt, dessen Verankerung in der Erde vom Fußpunkt der Stange 7,50 m entfernt ist. Bis zur Drahtbefestigung beträgt die Höhe der Stange schätzungsweise 6 m. Wie lang ist das Drahtseil?

32. Eine 8,5 m lange Leiter wird so an eine Hauswand gestellt, daß ihr Fuß 3,20 m absteht. Wie hoch reicht die Leiter an der Wand hinauf?

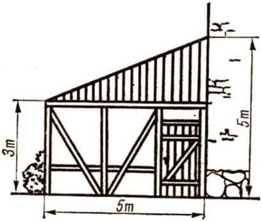
33. Die Giebelseite eines Hauses, die der Wetterseite zugekehrt ist, muß neu verputzt werden. Der Dachgiebel hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Entnimm die Maße dem Bild Y 15, und berechne die Kosten des Verputzens, wenn 1 m² 6,40 MDN kostet!



Y 17



Y 15

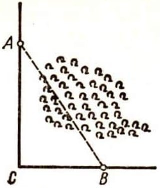


Y 16

34. An eine 12 m lange Hauswand wird ein Schuppen mit einem einfachen Pultdach gebaut. Berechne nach den Maßen im Bild Y 16, **a)** wie lang die schräg verlaufende Dachkante wird, **b)** wieviel Quadratmeter Bretter zum Bedecken des Daches erforderlich sind!

35. Wie groß sind bei dem Dachbinder im Bild Y 17 die Firsthöhe und die Sparrenlängen, wenn $a = b = c = 1{,}5$ m gilt?

36. Die Punkte A und B (Bild Y 18) liegen auf zwei Straßen, die einander rechtwinklig schneiden; sie sollen durch einen Weg verbunden werden. Wegen eines dazwischenliegenden Gehölzes kann die Strecke $\overline{AB}$ nicht gemessen werden. Man mißt $\overline{AC}$ zu 550 m und $\overline{BC}$ zu 380 m. Berechne $\overline{AB}$!



Y 18

37. Um einen quadratischen Dorfplatz wurden von Jungen Pionieren Pappeln im Abstand von 3,00 m gepflanzt. Der Dorfplatz ist 18 225 m² groß. **a)** Wie lang ist die Seite des Dorfplatzes? **b)** Wieviel MDN erhielt die Pioniergruppe für ihre Gruppenkasse, wenn sie je Bäumchen 0,32 MDN erhielt?

38. Die Diagonale eines quadratischen Platzes ist 184 m lang. Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt des Platzes?

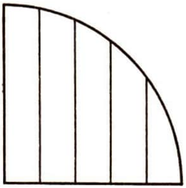
39. Die Diagonalen eines Rhombus sind 42,4 cm bzw. 35,2 cm lang.
a) Wie groß ist der Umfang? **b)** Wie groß ist der Flächeninhalt?

40. Der Durchmesser eines Kreises hat eine Länge von 18 cm. Parallel zu ihm werden Sehnen im Abstand von jeweils 2 cm gezeichnet. Bestimme die Längen der Sehnen!

41. Um den Flächeninhalt einer Kreisfläche näherungsweise zu bestimmen, kann man die Trapezmethode anwenden.

Man teilt einen Viertelkreis in Streifen durch eine Schar paralleler Sehnen mit gleichem Abstand. Man bestimmt dann die Länge der Sehnen und berechnet den Flächeninhalt der einzelnen Trapeze bzw. des Dreiecks (Bild Y 19).

Berechne einen Näherungswert, indem du von einem Kreis mit einem Radius von 10 cm Länge ausgehst und Sehnen im Abstand von 2 cm ziehst!


Y 19

42. In einem Kreis mit dem Radius von 10 cm Länge ist eine Sehne von 14 cm Länge gelegt. Welchen Abstand hat sie vom Mittelpunkt des Kreises?

43. Von einem Punkt P wird an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\overline{MB}$ eine Tangente gelegt (B ist der Berührungspunkt). Welche Länge hat die Strecke $\overline{BP}$, wenn gilt:

a) $\overline{PM} = 13$ cm und $\overline{MB} = 5$ cm,

b) $\overline{PM} = 25$ cm und $\overline{MB} = 7$ cm?

44. Welche Entfernung hat ein Punkt P vom Mittelpunkt M eines Kreises mit dem Radius von 10 cm Länge, wenn die von ihm an den Kreis gelegte Tangente eine Länge von 15 cm hat?

Y

45. Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Höhe gegeben. Ihre Länge beträgt 5,7 cm. Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?

46. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem haben vier Punkte die folgenden Koordinaten: $P_1\,(15;\,2)$, $P_2\,(1;\,2{,}4)$, $P_3\,(7;\,8)$, $P_4\,(x;\,y)$.
Berechne die Entfernung der Punkte vom Ursprung des Koordinatensystems!

47. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte A und B durch ihre Koordinaten x_1 und y_1 bzw. x_2 und y_2 gegeben.

Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist zu berechnen!

	Punkt A		Punkt B	
	x_1	y_1	x_2	y_2
a)	12	9	36	16
b)	6	14,8	10,4	3,1
c)	2,18	5,14	0,41	1
d)	— 1,1	2,3	2,1	2
e)	— 0,5	— 0,7	1,5	2,3

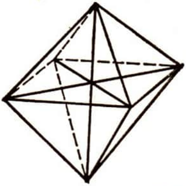
48. Eine Leiter soll 14,5 m hoch reichen, während ihr Fuß 2,5 m von der Wand abstehen soll. Wie lang muß die Leiter sein?

49. Ein Weg, der für eine kartographische Aufnahme vermessen werden soll, steigt auf 33,00 m insgesamt um 4,60 m an. In die Karte wird nicht der Weg selbst, sondern seine Projektion auf die Horizontalebene eingetragen. Wie lang ist diese Projektion?

50. Die Spitze eines kegelförmigen Daches soll 7,50 m über der Grundfläche liegen, die einen Durchmesser von 5,40 m hat. Wie lang müssen die Dachsparren geschnitten werden?

51. Wie läßt sich die Länge einer Strecke $\overline{AB}$ ermitteln, die selbst nicht unmittelbar gemessen werden kann, deren Endpunkte aber zugänglich sind?

52. Ein **Oktaeder** ist ein regelmäßiger Körper mit drei gleich langen, paarweise aufeinander senkrecht stehenden Achsen (Bild Y 20).
a) Welche Form haben die Seitenflächen? **b)** Bestimme die Länge der Kanten eines Oktaeders, bei dem die Körperachsen eine Länge von 12 cm haben!

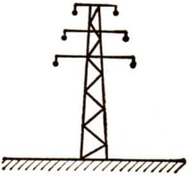


Y 20

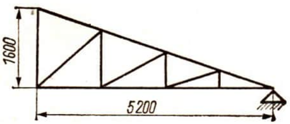
53. Ein Hochspannungsleitungsmast hat eine Höhe von 18 m und trägt in Abständen von je 4,1 m drei parallele Querträger von 5,2 m; 7,8 m und 10,4 m Länge, an deren Enden an 1,5 m langen Isolatoren die Kabel hängen (Bild Y 21). Welche Abstände haben die einzelnen Leitungen voneinander?
Berechne alle möglichen Abstände!

54. Bestimme die Länge des Obergurts, der Diagonalen und der Senkrechten der in den Bildern Y 22 a und b dargestellten Dachbinder! Die Maßzahlen sind in Millimetern angegeben.

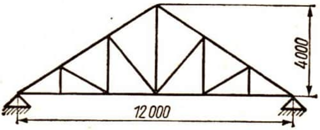
55. Zum Schleifen eines Spiralbohrers von 20 mm Durchmesser soll eine Lehre angefertigt werden. Berechne h für die im Bild Y 23 eingetragenen Maße!



Y 21



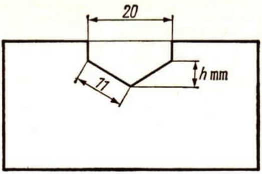
Y 22 a



Y 22 b

Y

56. Ein Maisfeld in der Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 200 m und einer Kathete von 120 m erbrachte 900 dt Silomais. Wieviel Silomais wurde je Hektar geerntet?



Y 23

57. Mit einem 10,50 m langen Höhenförderer wird eine Strohmiete errichtet. Welche Höhe hat die Miete erreicht, wenn noch ein 1,50 m langer Teil des Gerätes über die obere Kante der Miete hinausragt und der Abstand zwischen Gerät und Miete 3,25 m beträgt.

a) Löse die Aufgabe durch eine maßstäbliche Zeichnung!

b) Kontrolliere dein Ergebnis durch Rechnung!

58. Ein Kraftwerk wird von einem See her durch eine sechsfache Rohrleitung gespeist, für deren Hauptpunkte folgende Angaben gelten:

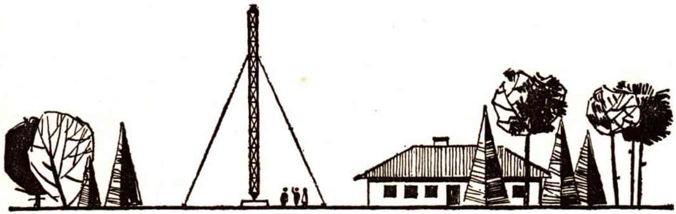
	Mündung am Turbinenhaus	Knickpunkt 1	Knickpunkt 2	Knickpunkt 3	Anfang am Wasserschloß
Waagerechte Entfernung vom Turbinenhaus	0	127,5 m	171,0 m	235,5 m	354,0 m
Höhe über NN	603,0 m	618,0 m	649,5 m	711,0 m	783,0 m

a) Zeichne einen Längsschnitt durch das Leitungssystem im Maßstab 1:5000 mit der Höhenlinie 600 über NN als Bezugslinie!

b) Berechne die Längen der Teilstücke der Leitung, die Gesamtlänge der Leitung und die Länge der Luftlinie vom Anfang bis zur Mündung!

59. Ein Antennenmast wird durch vier Abspannseile in 55 m Höhe gehalten. Die Verankerungen der Abspannseile bilden die Eckpunkte eines Quadrates. Die Länge eines jeden Seiles beträgt 85 m. In welcher Entfernung vom Fußpunkt des Antennenmastes sind die Seile verankert?

Y



60. Ein Waldstück hat die Gestalt eines unregelmäßigen Siebenecks mit den Eckpunkten A, B, ..., G. Die Koordinaten der Eckpunkte werden einem Meßtischblatt entnommen (ohne die ersten beiden Ziffern).

	A	B	C	D	E	F	G
x	84,21	84,62	85,08	85,33	85,96	85,50	84,54
y	32,15	32,74	32,58	32,88	31,94	31,52	31,40

Das Waldstück soll umzäunt werden. Stelle den Umfang des Waldstückes fest!

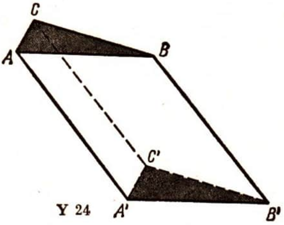
61. An zwei gegebene Kreise, deren Radien 49 mm bzw. 17 mm betragen, sind die gemeinsamen äußeren Tangenten zu ziehen. Die Entfernung der beiden Kreismittelpunkte ist 130 mm. Welche Entfernung haben die Berührungspunkte der Tangenten mit den Kreisen?

62. Errichte über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gleichseitige Dreiecke! Gilt ein dem pythagoreischen Satz entsprechender Satz?

63. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Über einer Seite des Dreiecks ist ein Parallelogramm zu errichten. $AA'B'B$ seien die Eckpunkte des Parallelogramms (Bild Y 24). A' und B' sollen außerhalb des Dreiecks liegen. Das Dreieck ABC ist so zu verschieben, daß es in die Lage $A'B'C'$ kommt.

a) Beweise den Satz: Das Parallelogramm $AA'B'B$ ist flächengleich der Summe der Parallelogramme $AA'C'C$ und $BCC'B'$ (Satz des Pappus).

b) Beweise: Der Satz des Pythagoras ist ein spezieller Fall des Satzes von Pappus.



Y 24

64. Es sollen die folgenden Beziehungen gelten: $x = u \cdot v$; $\quad y = \frac{u^2 - v^2}{2}$; $\quad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$.
Zeige, daß x, y, z ein pythagoreisches Zahlentripel bilden (u und v sind beliebige natürliche Zahlen)!

65. Die Länge der Raumdiagonalen eines Würfels ist zu bestimmen. Die Kantenlänge des Würfels betrage 10 cm.

E. Stereometrie

1. Berechne Oberfläche und Volumen

a) einer quadratischen Pyramide (Grundkante 6 cm, Körperhöhe 24 cm);

b) einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche (Grundkante 12 m bzw. 8 m, Körperhöhe 16 m);

c) einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide (Grundkante 5 cm, Körperhöhe 3 cm)!

2. Baue als Kantenmodell eine Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck und deren Seitenflächen ebenfalls gleichseitige Dreiecke sind! Einen solchen regelmäßigen Körper nennt man Tetraeder. Berechne die Höhe, die Oberfläche und das Volumen eines Tetraeders, dessen Kantenlänge $a = 8$ cm ist!

3. Baue als Kantenmodell eine Doppelpyramide! Die Grundfläche ist ein Quadrat, und die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke. Dieser Körper heißt Oktaeder. Berechne Höhe, Oberfläche und Volumen eines Oktaeders mit der Seitenkante $a = 6$ cm!

4. Ein Quarzkristall besteht aus einem sechsseitigen Prisma (Seitenkante 6,2 cm, Grundkante 1,7 cm) und zwei auf dessen Grundflächen stehenden sechsseitigen Pyramiden (Seitenkante 2,5 cm). Er wiegt 145 g. Wie groß ist die Dichte von Quarz?

5. Manche Salze kristallisieren in der Form von Oktaedern, zum Beispiel Alaun. Welche Masse hat ein Alaunkristall, wenn seine Seitenkante 4,6 cm beträgt $\left(\varrho = 1{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$?

6. Ein Turmdach soll mit Dachziegeln neu gedeckt werden. Die Turmspitze hat die Form einer quadratischen Pyramide, sie ist 14,20 m hoch, die Grundkante mißt 8,60 m. Wie groß sind **a)** eine Seitenkante, **b)** die Höhe einer Dachfläche, **c)** die gesamte Dachfläche? **d)** Wie hoch werden die Kosten, wenn der Preis für 1 m² 7,85 MDN beträgt?

7. Ein Laubendach in Form einer quadratischen Pyramide mit 1,80 m langer Grundkante und 1,35 m Seitenhöhe wird mit Dachpappe gedeckt. Wieviel Quadratmeter werden benötigt?

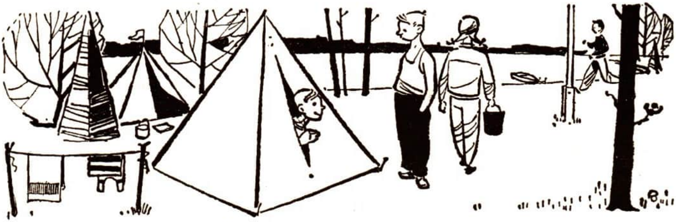
8. Ein Turm wird durch eine regelmäßige sechsseitige Pyramide abgeschlossen. Eine Grundkante mißt 2,50 m, die Höhe der Seitendreiecke beträgt 3,75 m. Der Turm wird mit Zinkblech neu abgedeckt. Wieviel Quadratmeter Zinkblech sind erforderlich, wenn für das Zusammenfügen und für Abfall 5% gerechnet werden müssen?

9. Ein quadratischer Turm von 8,20 m Grundkantenlänge hat als Abschluß eine 11,25 m hohe Pyramide. Berechne die Größe des Dachraumes!

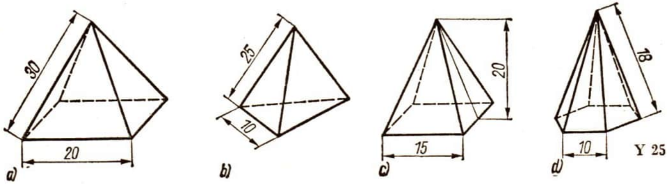
10. Ein Turm, der die Gestalt eines quadratischen Prismas hat, endigt in einer quadratischen Pyramide. Sein Umfang mißt 12 m, die Seitenflächenhöhe des Daches 5,75 m.

a) Stelle durch eine maßgerechte Zeichnung die Höhe der Turmspitze fest und prüfe das Ergebnis durch Rechnung nach!

b) Wieviel MDN kostet das Decken des Daches, wenn für 1 m² Schieferdach 7,50 MDN zu zahlen sind?



11. Ein Zelt, das am Boden 11 m Umfang hat, hat die Gestalt einer quadratischen Pyramide. Seine Höhe beträgt 1,60 m. Berechne den Luftraum, den das Zelt umschließt!



Y 25

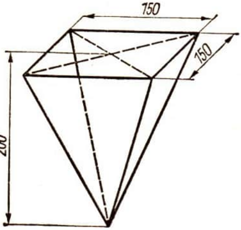
Y

12. Die Pyramiden in den Bildern Y 25 a bis d sind regelmäßig und gerade.

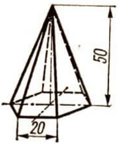
a) Berechne jeweils die Oberfläche! **b)** Berechne jeweils das Volumen!

13. Berechne für die regelmäßigen Pyramiden in den Bildern Y 26 a und b

a) die Länge der Seitenkanten,
b) die Länge der Höhen der Seitenflächen,
c) das Volumen!



Y 26 a



Y 26 b

14. Berechne Oberfläche und Volumen eines geraden Kegels!

a) $r = 4$ cm, $h = 6$ cm
b) $d = 1{,}6$ dm, $h = 2{,}0$ dm

15. Berechne Mantel und Volumen eines geraden Kegels!

a) $d = 10$ cm, $h = 40$ cm
b) $r = 40$ mm, $h = 9{,}0$ cm

16. Berechne Mantel, Oberfläche und Volumen eines geraden Kegels, der 2,50 m hoch ist und einen Grundkreisradius von 1,80 m hat!

17. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b wird um die Kathete a gedreht. Wie groß sind Oberfläche und Volumen des entstehenden Kegels?

a) $a = 8$ cm; $b = 6$ cm **b)** $a = 24$ cm; $b = 7$ cm **c)** $a = 15$ cm; $b = 8$ cm

18. Im Werkunterricht soll aus Blech das Modell eines Kegels ($r = 9$ cm, $s = 15$ cm) für die Lehrmittelsammlung hergestellt werden. Wieviel Material brauchst du, wenn 10% für Verschnitt gerechnet werden müssen?

19. Berechne das Volumen der folgenden Trichter, (ohne Ansatzrohr)!

d	22,0 cm	24,0 cm	27 cm
h	26,5 cm	27,5 cm	29 cm

20. Aus Blechscheiben mit dem Durchmesser von 5 cm sollen Trichter hergestellt werden, und zwar sollen Kreisausschnitte mit den Zentriwinkeln 90°, 180° und 270° zu Trichtern gebogen werden. Wie hoch werden die verschiedenen Trichter und wie groß wird ihr Volumen?

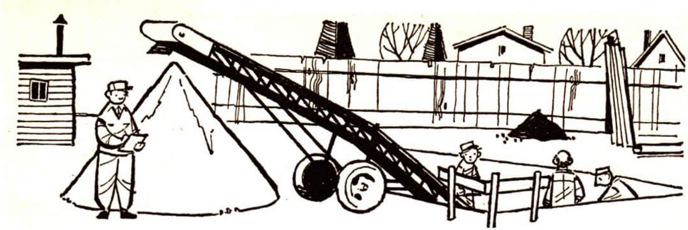
21. Bei der Arbeit mit dem Förderband bilden sich Abraumkegel. Berechne die Volumina folgender Kegel:

d	9,0 m	10,0 m	12 m	16 m
h	1,5 m	2,5 m	4 m	8 m

22. Ein kegelförmiger Haufen Sand soll durch Lastwagen abgefahren werden. Der Umfang des Kegels wurde durch Abschreiten auf 22 m geschätzt, die Höhe auf etwa 2 m. Wieviel Fuhren ergeben sich bei der Verwendung von 3-Tonnern? (1 m³ wiegt 1800 kg)

23. Ein rundes Spitzzelt hat einen Durchmesser von 4,00 m und ist 5,00 m hoch. Wie groß ist die Bodenfläche? Berechne den Rauminhalt! Seine Seitenlinie mißt 5,39 m. Wieviel Zeltplanenstoff wurde für das Zelt gebraucht?

Y



24. Auf einem zylindrischen Turm mit 11 m Umfang ist ein 6 m hohes kegelförmiges Dach gesetzt und mit Blech beschlagen worden. Für 1 m² werden einschließlich Arbeitslohn 5,60 MDN berechnet. Wie teuer wurde das Dach?

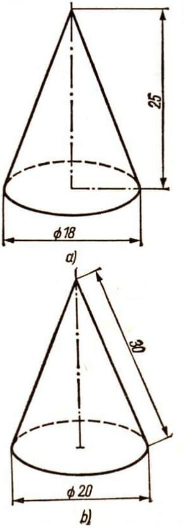
25. Ein kegelförmig aufgeschütteter Sandhaufen ist 2,10 m hoch und hat am Boden einen Umfang von 24,84 m. Wieviel Kubikmeter Sand enthält er, und wie groß ist seine Masse, wenn 1 m³ trockener Sand 1800 kg wiegt?

26. Bestimme nach den Maßen, die in den Bildern Y 27 a und b gegeben sind, für beide Kreiskegel den Mantel!

27. Der Umfang des Grundkreises eines Kreiskegels beträgt 64 cm. Seine Mantellinie ist 70 cm lang. Ermittle den Inhalt der Oberfläche des Kreiskegels!

28. Berechne die Volumina der Kreiskegel in den Bildern Y 27 a und b!

Y 27



29. Eine Kugel hat den Radius **a)** $r = 15{,}4$ cm, **b)** $r = 32{,}5$ cm. Wie groß ist der Inhalt der Oberfläche?

30. Berechne Oberflächeninhalt und Volumen der folgenden Kugeln!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
d	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m

Stelle die Lösungen übersichtlich zusammen und sprich das Ergebnis in einem Satz aus!

31. Eine Kugel hat den Oberflächeninhalt **a)** $A_0 = 616\ \text{cm}^2$, **b)** $A_0 = 55{,}44\ \text{cm}^2$. Wie groß ist ihr Volumen? $\left(\text{Für } \pi \text{ benutze den Näherungswert } \frac{22}{7}!\right)$

32. Wie groß ist der Oberflächeninhalt, und welche Masse besitzt eine Kugel aus folgendem Material?

	Dichte	Halbmesser
a) Buchsbaumholz	$1{,}15\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	40 cm
b) Sandstein	$2{,}33\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	9 cm
c) Messing	$8{,}40\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	6 cm
d) Elfenbein	$1{,}92\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	5 cm

33. Der Umfang einer Kugel beträgt 157 cm. Wie groß ist **a)** ihr Durchmesser, **b)** ihr Oberflächeninhalt, **c)** ihr Volumen?

34. Aus einem Holzwürfel mit der Kante $a = 28$ cm wird eine Kugel so gedreht, daß der Abfall möglichst gering wird. Wieviel Kubikzentimeter beträgt der Abfall?

35. Ein gefüllter Ballon hat einen Radius $r = 2{,}1$ m. Wieviel Kubikmeter Raum schließt er ein?

36. Aus einem Marmorwürfel von 60 cm Kantenlänge soll eine möglichst große Kugel ausgehauen werden. Wieviel beträgt der Abfall? Wie schwer ist die fertige Kugel? $\left(\text{Dichte: } \varrho = 2{,}6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}!\right)$

37. **a)** Wieviel Kugeln mit dem Durchmesser $d = 3$ cm können aus einem Bleirohr von 1,80 m Länge, 3 cm Wanddicke und 9 cm innerem Durchmesser hergestellt werden, wenn beim Schmelzen 4 % verlorengehen?

b) Welche Masse hat jede Kugel, wenn die Dichte des Bleis $11{,}35 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ist?

38. Wieviel Kugeln von 10 mm Durchmesser kann man aus 5 kg Blei gießen?

39. Wieviel wiegt eine eiserne Hohlkugel, die einen äußeren Durchmesser von 15 cm und eine Wanddicke von 1 cm hat? (Entwirf eine Skizze!)

40. Eine zum Kugelstoßen verwendete Kugel wiegt 7,25 kg und hat einen Umfang von 391 mm, wenn sie aus Stahl besteht. Enthält sie eine Bleifüllung, so beträgt der Umfang 346 mm. Der Stahlmantel dieser Kugel ist rund 7 mm dick. Die Dichte des Bleis beträgt $11{,}35 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

a) Berechne den Durchmesser der Stahlkugel und die Dichte des Stahls!

b) Berechne den Durchmesser der Kugel mit Bleifüllung!

c) Berechne die Masse des Stahlmantels und der Bleifüllung dieser Kugel!

41. Ein Schlagball hat eine Masse von 90 g und einen Umfang von 22 cm. Berechne den Durchmesser und die Dichte des Balles!

42. Kannst du eine Korkkugel tragen, die einen Durchmesser von 1 m hat $\left(\varrho = 0{,}24 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$?

43. Ein kugelförmiger Turmkopf von 60 cm Durchmesser soll neu vergoldet werden. Wieviel Quadratmeter Fläche müssen bearbeitet werden?

44. Wieviel Kubikmeter enthält das 0,5 m dicke Mauerwerk einer halbkugelförmigen Kuppel (innerer Durchmesser 12 m)?

45. Ein eiserner Wasserbehälter besteht aus einem Zylinder, der unten durch eine Halbkugel abgeschlossen ist. Der zylindrische Teil des Behälters ist 1,80 m hoch, sein Grundkreis hat 2,00 m Durchmesser (lichte Weite). **a)** Wieviel Hektoliter Wasser faßt dieser Behälter? **b)** Wie groß ist die Benetzungsfläche des Behälters?

46. **a)** Wieviel Milliliter (ml) Wasser faßt eine halbkugelförmige Schöpfkelle von 9 cm Durchmesser?

b) Wieviel Liter Wasser faßt ein halbkugelförmiger Waschkessel von 90 cm Durchmesser?

c) Vergleiche die gefundenen Werte!

47. Die Lunge des Menschen besteht aus rund 1,6 Milliarden Bläschen. Jedes hat einen Durchmesser von rund 0,2 mm. **a)** Berechne die Oberfläche 1. eines Bläschens, 2. aller Bläschen! **b)** Vergleiche die Gesamtoberfläche mit einer dir bekannten Fläche!

48. Der Radius der Erde wird mit 6370 km angegeben. Berechne unter der Voraussetzung, daß die Erde eine Kugel ist, **a)** den Umfang eines Längenkreises der Erdkugel, **b)** ihre Oberfläche, **c)** ihren Rauminhalt!

Y

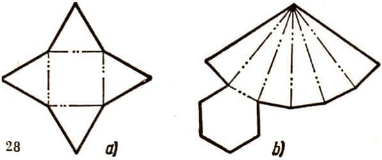
49. Vergleiche Oberfläche und Volumen des Mondes mit den bei der Erde berechneten Größen, wenn sein Durchmesser mit 3476 km bestimmt wurde!

50. Der Radius der Sonne beträgt 695 400 km. **a)** Bestimme ihr Volumen! **b)** Wieviel Erdkugeln haben zusammen das gleiche Volumen wie die Sonne?

51. Ein großer Schulglobus hat einen Durchmesser von 84 cm. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Oberflächen, **b)** die Inhalte von Globus und Erdkugel zueinander?

52. Bei einem im Maßstab 1:100 gehaltenen Modell eines Planetariums hat der Grundkreis der halbkugelförmigen Kuppel den Umfang $u = 39$ cm. Berechne den wirklichen Durchmesser der Kuppel!

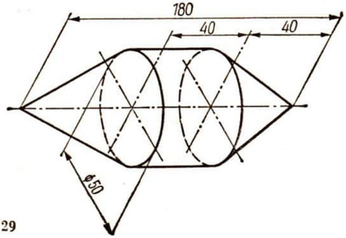
53. Im Bild Y 28 sind Netze regelmäßiger Pyramiden gegeben. Ermittle die Oberflächen und die Volumina der Pyramiden, indem du die erforderlichen Konstruktionen und Messungen durchführst!



Y 28

54. Ermittle das Volumen des Körpers nach den Maßen, die im Bild Y 29 gegeben sind!

55. Berechne die Volumina der Körper, deren Maße in den Bildern Y 30 a und b gegeben sind, wobei $a = 345$ mm; $b = 122$ mm; $d = 140$ mm gilt!



Y 29

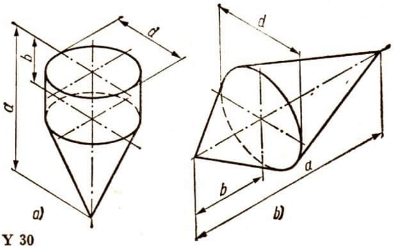
56. Bestimme die Volumina der Körper, die in den Bildern Y 31 a und b gegeben sind!

57. Die größte der Pyramiden bei Giseh (Ägypten) ist die Cheopspyramide. Ihre Grundfläche war nach der Vollendung ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 233 m; ihre Höhe betrug 146 m.

a) Welche Fläche bedeckte die Pyramide?

b) Berechne die Größe einer Seitenfläche sowie die des Mantels!

c) Die Seitenflächen sind mit polierten Marmorplatten abgedeckt. Um einen Quadratmeter Marmor zu polieren, werden 6 Arbeitsstunden benötigt. Wieviel Mann würden gebraucht, um alle Platten in einem Jahr (bei 300 Arbeitstagen zu je 8 h) zu polieren?



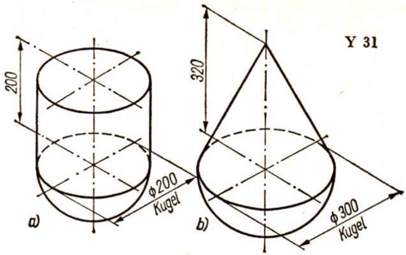
Y 30

Y

d) Berechne das Volumen der Pyramide!

e) Über viertausend Jahre war die Pyramide der Witterung ausgesetzt, so daß sie jetzt noch eine Seitenlänge von 227 m und eine Höhe von 137 m hat. Wie groß ist ihr Volumen jetzt?

f) Um wieviel Prozent ist die Pyramide durch die Verwitterung kleiner geworden?



Y 31

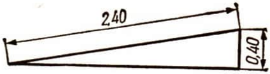
58. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Volumina, **b)** die Mäntel, **c)** die Oberflächen eines Zylinders, einer Halbkugel und eines Kegels von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche?

59. Wie groß ist die Diagonale **a)** eines Rechtecks von 58,3 m Länge und 36,4 m Breite, **b)** eines Quadrates von 17,5 m Seitenlänge?

60. Ein Bleiwürfel von 5 cm Kantenlänge soll in eine regelmäßige vierseitige Pyramide von 8 cm Höhe umgegossen werden. Berechne die Grundkante a!

61. Der Durchmesser eines Freiballons beträgt 22 m. **a)** Wieviel Quadratmeter Stoff braucht man zu seiner Hülle? **b)** Wieviel Kubikmeter Raum schließt er in gefülltem Zustand ein?

Y 32



62. Eine neue Laderampe soll errichtet werden (Bild Y 32). Wie lang ist der Rampenfuß?

63. Ein 6,50 m hoher Mast soll durch einen Balken abgestützt werden, der 2,00 m von seinem Fußpunkt entfernt verankert werden soll. Wie lang ist der Balken, wenn er 1,50 m unter der Spitze des Mastes befestigt wird?

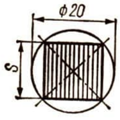
64. Eine kegelförmige Abraumhalde hat bei einem Böschungswinkel von 45° eine Höhe von 23 m. Berechne die Abraummenge!

65. Ein zylinderförmiger Schwimmer von 88 cm Länge und 18 cm Durchmesser ist an beiden Enden halbkugelförmig abgeschlossen. Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen des Schwimmers!

66. An ein Stück Rundstahl von 70 mm Durchmesser ist eine 150 mm lange Spitze angeschmiedet. Die Gesamtlänge des Werkstücks beträgt 170 mm. **a)** Berechne die Masse $\left(\varrho = 7{,}85\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ des Werkstücks! **b)** Da das Werkstück galvanisiert werden soll, ist der Oberflächeninhalt zu berechnen.

Y

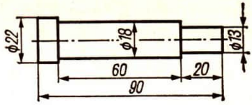
67. An eine Spindel mit dem Durchmesser $d = 20$ mm ist der größtmögliche Vierkant in einer Länge von 15 mm anzufräsen (Bild Y 33). Wie groß ist der Abfall?



Y 33

68. Für die Kugellager einer Serie feinmechanischer Geräte werden 2000 Stahlkugeln von 1,0 mm

Durchmesser benötigt. Welche Masse $\left(\varrho = 7{,}85\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ haben die Stahlkugeln?



Y 34

69. Berechne Volumen und Werkstoffmenge eines Bolzens aus Stahl! Entnimm die Maße dem Bild Y 34!

70. In welchem Verhältnis stehen Oberfläche und Volumen zweier Würfel, deren Kanten 5 cm bzw. 15 cm lang sind? Stelle das Ergebnis übersichtlich zusammen und sprich es in einem Satz aus!

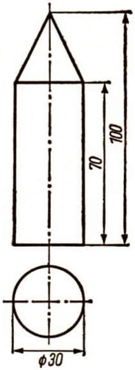
71. Ein Stück Rundstahl wird zum Teil kegelförmig abgedreht. Wieviel Prozent beträgt der Abfall? Entnimm die Maße dem Bild Y 35!

72. In einem Getreidesilo ist Weizen annähernd kegelförmig aufgeschichtet. Der Durchmesser der Anhäufung beträgt etwa 5 m, seine Höhe etwa 2 m.

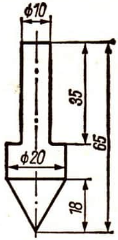
a) Wieviel Kubikmeter Weizen liegen ungefähr in der Anhäufung?

b) Wieviel Dezitonnen Weizen sind das? (1 dt $\triangleq$ 0,14 m^3.)

73. Berechne die Masse des Spitzsenkers mit Zylinderschaft aus Schnellstahl $\left(\varrho = 8{,}1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$! Entnimm die Maße dem Bild Y 36!



Y 35



Y 36

74. Aus Blech soll ein Trichter von 15 cm Durchmesser (ohne Ansatzrohr) angefertigt werden, der ein Volumen von 2 dm^3 besitzt.

a) Wie groß ist die Mantellinie?

b) Wieviel Quadratzentimeter Blech sind erforderlich?

75. Ein Senkblei besteht aus einem Zylinder von der Höhe $h = 140$ mm und dem Durchmesser $d = 50$ mm und aus einem aufgesetzten Kegel, dessen Höhe $h_1 = 30$ mm beträgt. Berechne die Masse des Körpers $\left(\varrho = 11{,}34\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$!

76. Berechne die Massendifferenz zwischen 1000 Stahlkugeln, deren Durchmesser 1 mm beträgt, und einem Stahlwürfel mit der Kantenlänge von 10 mm $\left(\varrho = 7{,}85\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$!

Y

77. Die Masse einer Kreisscheibe (Durchmesser $d = 200$ mm) soll durch Ausbohren von vier gleich großen kreisförmigen Löchern um $\frac{1}{4}$ verringert werden. Berechne den Durchmesser der Löcher!

78. Der Mantel eines 16 m hohen und 24 m weiten (äußere Weite!) Gasbehälters wird mit Mennige grundiert und dann dreimal mit Ölfarbe gestrichen. 1 m^2 wird mit 3,80 MDN berechnet. Bestimme die Kosten für den Anstrich!

79. Ein Wasserleitungsrohr aus Grauguß ist 5,25 m lang und besitzt einen Umfang von 2,20 m. Es wiegt 1220 kg. Die Dichte von Grauguß beträgt 7,25 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Wie dick ist die Wand des Rohres?

80. Wieviel Kilogramm Kupfer sind zur Herstellung eines 8500 km langen Leitungsdrahtes erforderlich, wenn er einen Durchmesser von 1 mm (1,2 mm; 0,8 mm) besitzen soll und die Dichte des Kupfers $8{,}9\,\frac{g}{cm^3}$ ist?

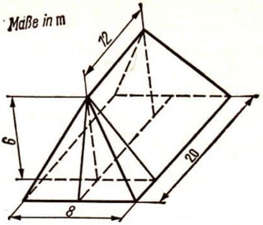
81. Ein Walmdach hat die im Bild Y 37 angegebenen Maße in Metern.

a) Zerlege mit Hilfe von zwei geeigneten Schnittebenen den Dachraum in Körper, für die Formeln bekannt sind, und berechne das Volumen des Daches!

b) Zeichne den Grundriß und Aufriß des Walmdaches und bestimme daraus die Höhen der Dachflächen!

c) Berechne die Flächenhöhen und vergleiche die Ergebnisse mit den durch die Zeichnung gefundenen Werten!

d) Berechne, wie groß die mit Ziegeln zu deckenden Dachflächen sind!



Y 37

82. Das Walmdach eines Hauses von $a = 25$ m Breite und $b = 14$ m Tiefe ist unter dem Neigungswinkel $\alpha = 60°$ gegen alle Seiten aufgesetzt.

a) Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Höhe des Daches fest!

b) Zerlege den Dachraum durch zwei Ebenen, die senkrecht zum Dachfirst durch dessen Endpunkte gelegt werden, in Körper mit bekannten Inhaltsformeln und berechne das Volumen des Daches!

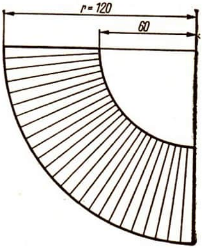
c) Zeichne den Grundriß und Aufriß des Walmdaches in geeignetem Maßstab!

83. Der im Bild Y 38 dargestellte Viertelkreisring läßt sich zum Mantel eines Kegelstumpfes formen und ist der Zuschnitt zum Mantel eines Bechers.

a) Berechne die Durchmesser seines Grund- und seines Deckkreises!

b) Zeichne mit Hilfe der berechneten Durchmesser den Achsenschnitt des Kegelstumpfes und miß seine Höhe aus!

c) Berechne diese Höhe mit Hilfe der Durchmesser!



Y 38

F. Darstellende Geometrie

Y

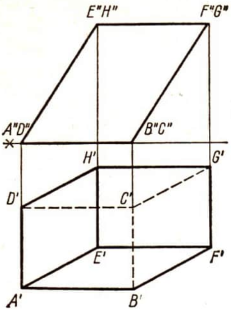
1. Bestimme die wahre Länge der Seitenkanten einer quadratischen Pyramide, deren Kanten an der Grundfläche 4,0 cm lang sind und deren Höhe 5,6 cm beträgt!

2. Bestimme die wahre Länge der Kanten des im Bild Y 39 gegebenen schiefen Prismas!

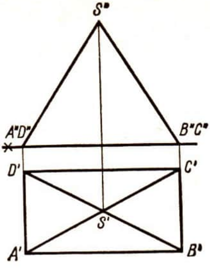
3. Bestimme die wahre Länge der Seitenkanten der im Bild Y 40 gegebenen vierseitigen Pyramide

a) durch Drehung des ganzen Körpers, **b)** durch Drehung einer Kante allein,

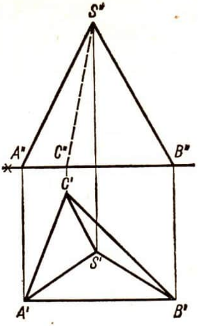
c) durch Umklappung!



Y 39



Y 40



Y 41

4. Zeichne das Netz der im Bild Y 41 in Grundriß und Aufriß dargestellten unregelmäßigen dreiseitigen Pyramide!

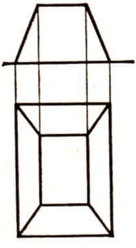
5. Bestimme die wahre Länge der Seitenkanten der im Bild Y 42 gezeigten abgestumpften Pyramide!
Bemerkung: Bei der Drehung einer Seitenkante allein braucht nicht die Höhe des Vollkörpers als Drehachse zu dienen!

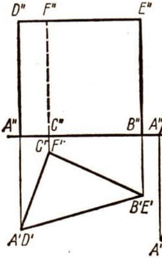
6. Vergleiche die beiden Verfahren, die wahre Größe einer Strecke zu bestimmen, und beschreibe, welche Bewegung das Dreieck bei der Drehung in die zur Aufrißtafel parallele Lage ausführt!

7. Zeichne Grundriß und Aufriß einer geraden quadratischen Pyramide mit gegebenen Kantenlängen (Grundkante $a = 4$ cm; Seitenkante $s = 5$ cm) in Parallelstellung!
Anmerkung: Die wahre Größe der Kanten ist gegeben. Zu bestimmen sind die Risse (Umkehrung der Aufgabe, die wahre Größe einer durch ihre Risse gegebenen Strecke zu bestimmen).

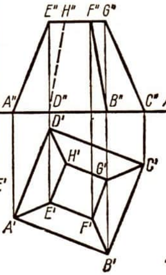
8. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der Seitenflächen des im Bild Y 43 gegebenen Prismas!

Y 42

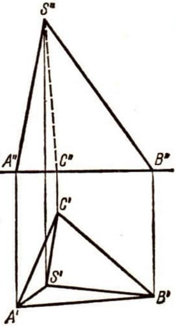




Y 43



Y 44



Y 45

9. Zeichne das Netz der im Bild Y 44 in Grundriß und Aufriß dargestellten abgestumpften Pyramide!

10. Zeichne das Netz der im Bild Y 45 in Grundriß und Aufriß dargestellten unregelmäßigen dreiseitigen Pyramide!

11. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der Seitenflächen des schiefen Prismas, das im Bild Y 46 dargestellt ist!

12. Zeichne das Netz des im Bild Y 47 im Grundriß gegebenen 5 cm hohen schiefen Prismas!

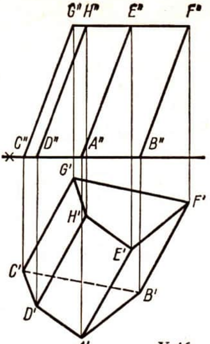
13. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der im Bild Y 48 in Grundriß und Aufriß dargestellten ebenen Figuren!

14. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der Schnittfläche des im Bild Y 49 dargestellten schief abgeschnittenen Würfels!

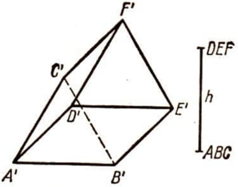
15. Zeichne eine Kugel ($d = 7$ cm) mit einem Gradnetz von 30° zu 30° in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß (Kugelachse senkrecht zur Grundrißtafel)!

16. Zeichne eine Kugel mit Äquator und Polen, wenn ihre Achse
   a) parallel zur Aufrißtafel, gegen die Grundrißtafel unter 60° geneigt ist,
   b) parallel zur Kreuzrißtafel, gegen die Grundrißtafel unter 45° geneigt ist,
   c) parallel zur Grundrißtafel und parallel zur Aufrißtafel ist!

17. Eine Halbkugel ($d = 6{,}4$ cm) wird in 2,4 cm Höhe parallel zur Grundfläche abgeflacht. Zeichne die drei Risse des entstehenden Körpers!

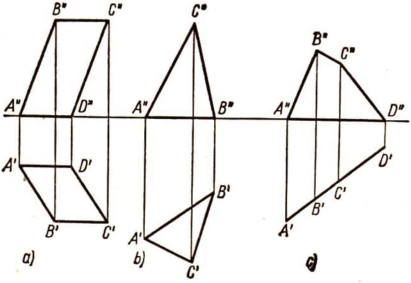


Y 46

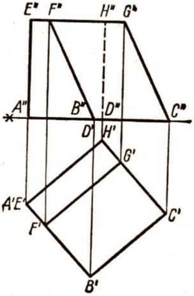


Y 47

18. Eine Kugel ($d = 5{,}6$ cm) wird längs ihrer senkrechten Achse zylindrisch ($d_1 = 4{,}2$ cm) durchbohrt. Zeichne den ringförmigen Restkörper in Grundriß und Aufriß!



Y 48



Y 49

REGISTER

A

B

C

Wie findest du was?

Angenommen, du willst wissen, was eine „Streckung" ist. Du suchst das Stichwort und findest: „Streckung **B** Seite 55". Der Buchstabe **B** sagt dir, daß du die Information im Kapitel **B** findest. Du suchst mit Hilfe der Marken auf der linken Seite das Kapitel **B** und schlägst die Seite 55 auf.
Manche Wörter stehen auch in Wortverbindungen, z. B. „Koordinatenachsen". Du suchst das Wort „Koordinaten", dann die Zeile „—achsen" und findest: „Kapitel **C** Seite 67".
Für einige Begriffe wurde auch noch der zugehörige Merksatz angeführt. Beim Wort „Anstieg" findest du z. B. den Hinweis: „**C** Seite 73, ▷ 10". Der Begriff wird also im Kapitel **C** auf Seite 73 behandelt. Im Satz C 10 wird der Begriff „Anstieg" definiert.

D

E

F

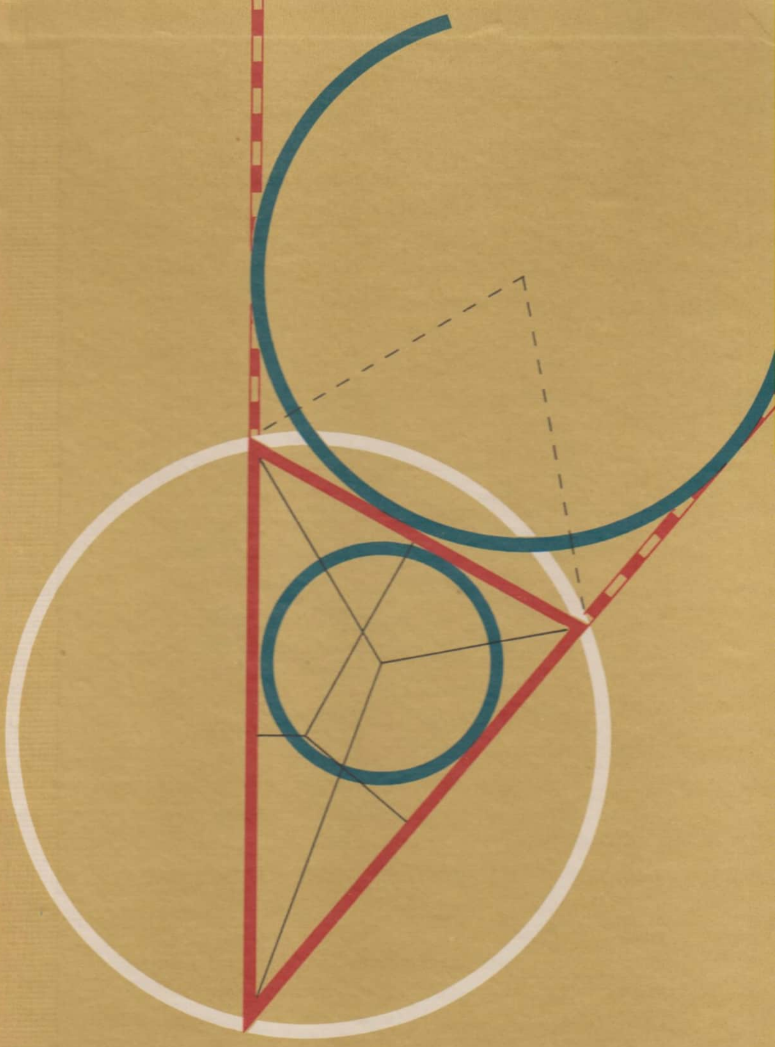
Y

Z

Z

Bildnachweis

Bild B 49: Sport-Echo/Bach
Bild B 72: Reproduktion aus: J. Needham: *Science and Civilisation in China*, Vol. III, Cambridge 1959, S. 30.
Bild B 73: Reproduktion aus: Euklid, Opera, Venedig 1509.
Bild B 74: W. H. Ryff: *Geometrische Büchsenmeisterei*, Nürnberg 1547, Vol. XX.
Bild B 75: J. Köbel: *Der Stab Jakob*, Frankfurt am Main 1531.
Bild D 32: J. Needham: *Science and Civilisation in China*, Vol. III, Cambridge 1959, S. 22.
Bild D 33: D. E. Smith: *History of Mathematics*, Vol. I, 1923, S. 173.
Bild E 32: J. Needham: *Science and Civilisation in China*, Vol. III, Cambridge 1959, S. 97.
Bild E 33: O. Neugebauer: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Bd. I, Berlin 1943, S. 127.



00 08 01 - 1