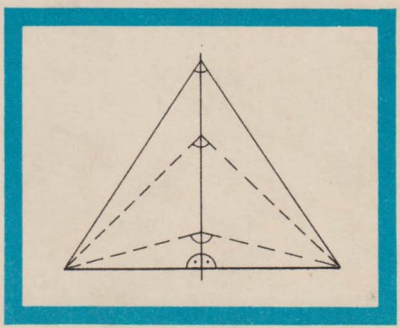
6

Mathematik



Mathematik

EIN LEHRBUCH FÜR DIE OBERSCHULE
SECHSTE KLASSE

Ausgabe 1960

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1963

Den Teil Einführende Wiederholung mit Ausnahme des Kapitels 5 sowie die Abschnitte I—III verfaßten Prof. Max Heinemann und Prof. Karl Pietzker. Die Abschnitte VI und VII verfaßte Hannah-Ruth Lohde, den Abschnitt VIII Doris Singer und den Abschnitt IX Oskar Mader.
Die Abschnitte IV und V wurden von Hannah-Ruth Lohde nach einem Manuskript von Dr. Helmut Klein bearbeitet.

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Lehrbuch für die allgemeinbildende polytechnische Oberschule bestätigt.

Redaktionsschluß: 1. November 1963
Zeichnungen: Deckardt, Dornbusch, Grothmann
Einband: Gerhard Anton

ES 11 G · Bestell-Nr. 000608-5 · 2,— DM · Lizenz Nr. 203/1000/63 (DN)
Gesamtherstellung: VEB Landesdruckerei Sachsen, Dresden, III 9 5 (1205)

EINFÜHRENDE WIEDERHOLUNG

1. Addition und Subtraktion

Kopfrechnen

1. **a)** 7 000 + 8 000 **b)** 13 000 + 19 000 **c)** 240 000 + 180 000
d) 3 500 + 800 **e)** 7 600 + 700 **f)** 13 600 + 500
g) 25 300 + 10 200 **h)** 56 500 + 13 500 **i)** 190 400 + 10 800

2. Setze die Folgen fort (10 Aufgaben)!

a) 200 000 + 300 = 200 300
200 300 + 300
c) 1 600 + 3 500 = 5 100
5 100 + 3 500

b) 400 000 + 6 000 = 406 000
406 000 + 6 000
d) 350 000 + 700 = 350 700
350 700 + 700

3. **a)** 24 000 — 9 000 **b)** 140 000 — 75 000 **c)** 1 000 000 — 360 000
d) 3 000 — 700 **e)** 7 000 — 2 400 **f)** 13 000 — 4 600
g) 8 000 — 600 **h)** 11 000 — 2 100 **i)** 320 000 — 57 600
k) 200 000 — 65 300 **l)** 450 000 — 120 300 **m)** 180 000 — 95 200

4. Setze die Folgen fort (20 Aufgaben)!

a) 250 000 — 3 800 = 246 200
246 200 — 3 800

b) 1 000 000 — 2 700 = 997 300
997 300 — 2 700

5. Erkläre die Ausdrücke „Summe“, „Summand“, „Minuend“, „Subtrahend“ und „Differenz“ an selbstgewählten Beispielen!

6. Eine Summe beträgt 12 500, der eine Summand 850. Wie groß ist der andere Summand?

7. Der Minuend beträgt 13 200, die Differenz 3 700. Wie groß ist der Subtrahend?

8. Die Differenz beträgt 4 600, der Subtrahend 7 900. Wie groß ist der Minuend?

Schriftliches Rechnen

Addiere in den Aufgaben 9 und 10 die Zahlen der einzelnen Zeilen und die Zahlen der einzelnen Spalten!

	A	B	C	D	E
9. a)	546 231	865 567	578 469	2 876 827	442 886
b)	4 635 769	748 874	357 746	638 666	977 847
c)	784 392	562 578	2 777 655	579 996	1 406 292
d)	27 895	867 678	453 564	1 398 623	709 589
e)	956 434	3 333 628	825 745	614 628	1 260 495

	A	B	C	D	E
10. a)	645 398	1 468 536	45 792	7 707	40 809
b)	639 458	547 021	2 589 763	678	8 603 725
c)	67 894	3 673 718	620 458	4 325 671	5 789 234
d)	1 895 467	76 543	278	7 385	4 648 743
e)	2 630 027	983 046	1 654 302	5 974	345 678

11. a) 710 012 — 238 561 **b)** 456 789 — 6 875
c) 870 003 — 67 895 **d)** 688 745 — 234 444
e) 9 876 543 — 861 745 **f)** 2 634 451 — 887 596
g) 3 260 401 — 785 432 **h)** 700 000 — 68 937
i) 3 100 205 — 768 934 **k)** 1 304 501 — 783 654
l) 657 304 — 19 418 **m)** 2 304 080 — 1 976 543

12. a) 234 567 — 607 — 7 826 — 9 548 — 13 265 — 107 654 — 29 876
b) 623 456 — 42 745 — 5 348 — 267 — 165 749 — 98 — 48 888
c) 1 235 501 — 163 973 — 38 254 — 96 419 — 739 — 17 345 — 8 764
d) 2 996 591 — 738 904 — 29 — 613 017 — 546 828 — 4 637 — 97 775
e) 10 350 401 — 4 673 892 — 794 608 — 76 832 — 2 304 059 — 7 821
f) 1 500 000 — 319 458 — 9 732 — 834 — 76 — 723 456 — 65 473

13. a) 26 405 + 103 907 + 780 — 116 546 + 3 765
b) 89 705 + 630 — 7 520 + 156 007 — 16 662
c) 123 456 — 77 865 — 19 753 + 134 567 — 21 926
d) 67 562 — 84 546 + 78 372 — 92 504 + 136 458

2. Multiplikation und Division

Kopfrechnen

1. a) 350 · 4 **b)** 270 · 5 **c)** 180 · 6 **d)** 430 · 3
e) 230 · 7 **f)** 620 · 4 **g)** 780 · 5 **h)** 930 · 5
i) 840 · 8 **k)** 460 · 8 **l)** 540 · 9 **m)** 640 · 7
n) 730 · 8 **o)** 760 · 9 **p)** 820 · 6 **q)** 370 · 8

2. **a)** 2100 · 3 **b)** 1400 · 7 **c)** 3200 · 8 **d)** 4500 · 6
e) 6300 · 5 **f)** 7300 · 3 **g)** 5400 · 5 **h)** 1900 · 6
i) 8100 · 9 **k)** 2800 · 7 **l)** 3600 · 5 **m)** 4200 · 7
n) 5800 · 6 **o)** 7400 · 5 **p)** 9300 · 6 **q)** 6800 · 8

3. Multipliziere nacheinander **a)** 7, **b)** 12, **c)** 25, **d)** 15 mit 10, 20, 30, ..., 90!

4. Dividiere 360 nacheinander durch 6, 8, 9, 12, 15, 20, 40, 60, 80, 90, 18, 24, 36, 72!

5. **a)** 240 : 5 **b)** 372 : 4 **c)** 270 : 6 **d)** 440 : 8
e) 390 : 6 **f)** 600 : 8 **g)** 570 : 6 **h)** 504 : 7
i) 675 : 9 **k)** 750 : 6 **l)** 360 : 15 **m)** 300 : 12
n) 450 : 15 **o)** 540 : 12 **p)** 810 : 15 **q)** 720 : 12

6. **a)** 2100 : 3 **b)** 4200 : 6 **c)** 5600 : 7 **d)** 8100 : 9
e) 7200 : 8 **f)** 3000 : 2 **g)** 2600 : 4 **h)** 3600 : 8
i) 7500 : 6 **k)** 4550 : 7 **l)** 3700 : 5 **m)** 5600 : 4
n) 6440 : 7 **o)** 6750 : 9 **p)** 2490 : 3 **q)** 3720 : 8

7. **a)** 8400 : 12 **b)** 9800 : 14 **c)** 6500 : 13 **d)** 6400 : 16
e) 9100 : 13 **f)** 9600 : 16 **g)** 4200 : 14 **h)** 8400 : 14
i) 1050 : 15 **k)** 1040 : 13 **l)** 1440 : 16 **m)** 1120 : 14

8. Kettenaufgaben

a)	**b)**	**c)**	**d)**
128 : 8	3 · 15	8 · 9	8 · 12
· 5	+ 9	+ 71	+ 36
— 10	: 18	: 13	: 6
: 14	· 7	· 25	· 7
· 21	+ 39	— 65	— 56
+ 105	: 15	: 7	: 14
: 7	+ 18	· 12	· 18
· 5	· 5	: 4	+ 45
+ 60	: 2	+ 8	: 9
: 30	— 25	: 14	— 9

e)	**f)**	**g)**	**h)**
76 + 88	225 : 25	128 · 4	276—155
: 2	· 30	: 8	: 11
· 10	— 72	— 8	· 15
— 560	: 18	: 14	— 9
: 13	· 14	· 21	: 12
· 17	+ 146	+ 98	· 9
— 61	: 15	: 7	+ 63
: 3	· 17	· 5	: 18
— 9	+ 36	+ 66	· 7
: 12	: 4	: 14	+ 11

9. Erkläre an selbstgewählten Beispielen die Ausdrücke „Faktor“, „Produkt“, „Dividend“, „Divisor“ und „Quotient“!

10. Der eine Faktor beträgt 140, das Produkt 980. Wie groß ist der andere Faktor?

11. Ein Faktor ist 51, das Produkt 1530. Wie groß ist der andere Faktor?

12. Der Dividend beträgt 136, der Quotient 17. Wie groß ist der Divisor?

13. Der Divisor ist 120, der Quotient 15. Wie groß ist der Dividend?

Schriftliches Rechnen

14. **a)** 348 · 7 **b)** 2 608 · 9 **c)** 9 849 · 6
d) 83 579 · 8 **e)** 46'053 · 5 **f)** 654 008 · 7
g) 103 080 · 6 **h)** 654 309 · 4 **i)** 476 805 · 8

15. **a)** 729 · 32 **b)** 539 · 54 **c)** 2 608 · 76
d) 3 798 · 87 **e)** 97 604 · 64 **f)** 83 570 · 98
g) 76 041 · 43 **h)** 678 005 · 78 **i)** 792 038 · 95

16. **a)** 488 · 547 **b)** 539 · 867 **c)** 720 · 408 **d)** 860 · 730
e) 654 · 307 **f)** 786 · 590 **g)** 387 · 469 **h)** 970 · 358

17. **a)** 4 075 · 29 **b)** 6 709 · 83 **c)** 9 780 · 75
d) 7 654 · 80 **e)** 7 880 · 37 **f)** 6 578 · 94
g) 7 009 · 86 **h)** 5 034 · 79 **i)** 2 308 · 127
k) 6 074 · 365 **l)** 8 950 · 794 **m)** 2 876 · 895
n) 7 500 · 345 **o)** 4 060 · 705 **p)** 9 370 · 204

18. **a)** 45 672 · 98 **b)** 72 390 · 93 **c)** 457 881 · 93
d) 16 080 · 277 **e)** 40 397 · 460 **f)** 90 807 · 305
g) 8 371 · 9 918 **h)** 72 330 · 5 906 **i)** 13 057 · 8 790
k) 8 509 · 2 007 **l)** 6 087 · 4 305 **m)** 10 409 · 7 080

19. **a)** 84 528 : 2 **b)** 87 453 : 3 **c)** 753 928 : 4
d) 721 895 : 5 **e)** 465 774 : 6 **f)** 164 192 : 7
g) 7 764 216 : 8 **h)** 277 947 : 9 **i)** 2 835 469 : 7

20. **a)** 2 976 : 12 **b)** 4 984 : 14 **c)** 8 749 : 13 **d)** 3 088 : 16
e) 7 140 : 15 **f)** 7 008 : 12 **g)** 9 282 : 13 **h)** 7 854 : 14
i) 9 630 : 15 **k)** 8 608 : 16 **l)** 5 088 : 16 **m)** 8 957 : 13
n) 9 380 : 14 **o)** 7 680 : 12 **p)** 9 152 : 13 **q)** 6 544 : 16

21. **a)** 134 228 : 23 **b)** 17 612 : 37 **c)** 237 150 : 85
d) 505 940 : 41 **e)** 132 384 : 48 **f)** 359 959 : 59
g) 84 135 : 79 **h)** 410 290 : 89 **i)** 467 200 : 64

22. **a)** 65 627 : 899 **b)** 248 651 : 403 **c)** 200 233 : 167
d) 676 053 : 147 **e)** 151 782 : 123 **f)** 427 981 : 139
g) 198 743 : 8 641 **h)** 675 906 : 4 598 **i)** 73 109 : 2 521
k) 241 289 : 2 389 **l)** 548 730 : 2 345 **m)** 211 019 : 2 371

23. **a)** 4 720 : 17 **b)** 6 800 : 19 **c)** 7 375 : 13
d) 9 565 : 18 **e)** 10 000 : 37 **f)** 23 456 : 29
g) 73 030 : 46 **h)** 13 805 : 57 **i)** 200 000 : 64
k) 365 420 : 83 **l)** 760 020 : 74 **m)** 680 541 : 34

24. **a)** 65 174 : 234 **b)** 82 160 : 345 **c)** 762 689 : 457
d) 350 400 : 586 **e)** 602 130 : 674 **f)** 702 030 : 863
g) 800 235 : 766 **h)** 956 430 : 972 **i)** 1 372 514 : 735
k) 1 000 000 : 2 360 **l)** 2 630 450 : 3 425 **m)** 4 780 521 : 4 138

25.

605 358	804 579	10 234 567	25 675 839

Dividiere jede der vorstehenden Zahlen durch **a)** 76, **b)** 387, **c)** 1648, **d)** 3 469!

26. Die einzelnen Aufgaben der folgenden drei Gruppen lassen sich bei richtiger Lösung in bestimmter Weise ordnen.

a) 3 991 · 12
47 400 — 43 409
47 892 + 36 243
1 185 · 40
84 135 : 71

b) 796 104 : 8
100 000 — 37 576
99 513 + 487
62 424 : 1 734
36 · 22 114

c) 41 123 · 695
24 981 054 : 574
43 521 + 3 205 196
28 580 485 — 3 599 431
3 248 717 : 79

3. Rechnen mit benannten Zahlen

1. Welche Geldscheine und Geldmünzen kennst du? Beschreibe sie und ordne sie nach ihrem Wert!

2. Welche Maßeinheiten für Längen sind dir bekannt? Ordne die Einheiten! Nenne Längenmeßinstrumente!

3. Nenne die Maßeinheiten für Flächen! Ordne die Einheiten!

4. Welche Maßeinheiten für Rauminhalte kennst du? Ordne die Einheiten!

5. Mit welchen Maßeinheiten können Warenmengen angegeben werden? Ordne die Einheiten!

6. Welche Maßeinheiten für die Zeit sind dir bekannt?

7. Verwandle die folgenden Maßangaben in die nächstniedere Maßeinheit!

a) 0,75 DM; 4,80 DM; 7,06 DM; 9 DM; 17,04 DM; 0,07 DM; 15,12 DM; 3 DM

b) 3,07 m; 7,84 m; 5,3 cm; 4 dm; 7,6 dm; 2,8 dm; 4,3 cm; 4,07 m; 13 km; 4,085 km; 7,009 km; 14,345 km

c) 4,72 m^2; 8,09 dm^2; 0,45 cm^2; 8 ha; 3,14 a; 25,05 ha; 1,06 km^2; 0,07 a; 12,84 km^2; 6,71 m^2; 0,83 ha; 16 m^2

d) 0,015 m^3; 7,485 dm^3; 7,805 dm^3; 4,025 m^3; 0,09 hl; 12 hl; 1,002 dm^3; 350 cm^3; 4,675 cm^3; 6 m^3; 0,195 cm^3; 3,45 hl
(1 dm^3 $\triangleq$ 1 l; 100 l = 1 hl)

e) 7,486 kg; 0,824 kg; 0,075 kg; 3 kg; 8,19 dt; 12,03 t; 4,50 dt; 9,25 t; 3,406 kg; 6,05 t; 0,76 dt; 2 dt

8. a) Verwandle in Pfennig!
9 DM 35 Pf; 18 DM 9 Pf; $3\frac{1}{2}$ DM; $\frac{3}{4}$ DM; 4 DM 13 Pf; $\frac{3}{10}$ DM

b) Verwandle in Meter!
3 km 26 m; $6\frac{1}{2}$ km; 6 km 4 m; 5 km 2 m; 4 900 cm; $2\frac{3}{4}$ km

c) Verwandle in Ar!
7 ha 8 a; 3 ha 25 a; $3\frac{1}{5}$ ha; 8 ha 64 a; 7 ha 9 a; $\frac{1}{4}$ ha; 82 400 m^2

d) Verwandle in Kubikdezimeter!
4 m^3 875 dm^3; 86 m^3 19 dm^3; 3 m^3 5 dm^3; $\frac{1}{2}$ m^3; $2\frac{3}{4}$ m^3; 42 m^3 4 dm^3; 26 l; 84 l; 56 000 cm^3; 451 000 cm^3; 96 l

e) Verwandle in Minuten!
7 h 28 min; $4\frac{2}{3}$ h; 8 h 30 min; $\frac{1}{2}$ h; 5 h 45 min

9. Verwandle die folgenden Maßangaben in die nächsthöhere Maßeinheit!

a) 136 Pf; 85 Pf; 1 350 Pf; 2 000 Pf; 30 400 Pf; 48 768 Pf

b) 650 cm; 3 700 cm; 30 000 mm; 950 dm; 4 800 mm; 7 200 m

c) 3 500 ha; 34 000 a; 7 100 m^2; 852 500 dm^2; 93 500 cm^2; 62 570 m^2; 192 300 m^2; 17 500 a; 75 000 dm^2; 703 600 ha

d) 50 000 cm^3; 875 000 dm^3; 435 000 mm^3; 75 600 l; 3 000 dm^3; 70 000 cm^3; 153 000 dm^3; 208 000 mm^3; 67 l; 305 l

e) 17 500 kg; 6 050 dt; 750 000 kg; 62 500 kg; 180 kg; 316 000 g; 208 400 g; 30 680 dt; 30 dt; 73 860 g; 820 dt

f) 95 s; 84 min; 40 h; 162 h; 180 min; 105 s; 276 h

Wende bei den folgenden Aufgaben die dezimale Schreibweise an!

10. **a)** 6 m 13 cm + 7 m 25 cm
b) 7 m 59 cm + 95 cm
c) 24 m 17 cm + 3 m 9 cm
d) 12 m 5 cm + 9 m 26 cm
e) 13,75 m + 5,75 m
f) 6,48 m + 7,89 m
g) 24,92 m + 25,98 m
h) 12,19 m + 8,31 m
i) 4,92 m + 3,28 m
k) 46,32 m + 15,47 m
l) 24,75 m — 13 m 22 cm
m) 64 m 42 cm — 14,88 m
n) 27,22 m — 21 m 45 cm
o) 48 m 13 cm — 29 m 45 cm

11. **a)** 5 km 585 m + 6 km 192 m
b) 19 km 498 m + 22 km 747 m
c) 17 m 129 mm + 24 m 206 mm
d) 34 m 465 mm + 79 m 785 mm
e) 5,795 km + 8,56 km
f) 11,538 km + 5,789 km
g) 47,205 km + 41,593 km
h) 36,705 km + 14,116 km
i) 9,245 m + 0,897 m
k) 38,475 m + 43,525 m
l) 8,35 m — 3,26 m
m) 12,04 m — 7,85 m
n) 24,12 m — 18,38 m
o) 6,425 km — 4,318 km
p) 12,138 km — 9,325 km
q) 21,095 km — 13,536 km

12. **a)** 12,56 m — 3 m 85 cm — 4,67 m — 9 dm — 175 cm
b) 15 km — 984 m — 3,286 km — 1 375 m — 8 km 125 m
c) 9,20 m — 0,46 m — 8 dm 3 cm — 67 cm — 1 m 8 cm
d) 36,500 km — 14 km 875 m — 10,879 km — 3 475 m — 865 m

13. **a)** 7 a 54 m^2 + 9 a 25 m^2
b) 15 a 17 m^2 + 5 a 53 m^2
c) 13 a 47 m^2 + 8 a 72 m^2
d) 4 ha 27 a + 6 ha 87 a
e) 2,48 a + 7,34 a
f) 6,52 ha + 4,43 ha
g) 9,15 ha + 7,72 ha
h) 11,41 a + 13,83 a
i) 16,56 a + 27,79 a
k) 44,65 ha + 39,75 ha

14. **a)** 54 ha 23 a + 19,77 ha
b) 36,48 ha + 43 ha 86 a
c) 25,75 ha — 19 ha 85 a
d) 19 a 72 m^2 + 7,52 a
e) 28,51 a + 13 a 27 m^2
f) 63,43 a — 44 a 92 m^2

15. **a)** 63 a 23 m^2 — 19 a 47 m^2 — 26 a 28 m^2 — 15 a 32 m^2
b) 3,51 ha + 39,46 ha — 16,39 ha — 24,54 ha
c) 98,56 a — 13,12 a — 57 m^2 — 83 m^2
d) 75,37 ha — 13 ha 4 a — 45 a — 27 a

16. **a)** 435,156 m^3 + 207,432 m^3
b) 86,739 m^3 + 24,546 m^3
c) 73,058 m^3 — 39,206 m^3
d) 58,157 m^3 — 46,967 m^3
e) 62,403 m^3 — 43,964 m^3
f) 93,084 m^3 — 28,564 m^3

17. **a)** 12 kg 375 g + 5 kg 995 g
b) 47 kg 496 g + 21 kg 774 g
c) 52 kg 665 g + 26 kg 798 g
d) 76 g 286 mg + 78 g 497 mg
e) 8 kg 678 g + 5 kg 67 g
f) 64,058 kg + 57,898 kg

g) 3 t 37 kg + 2 t 986 kg
h) 7,809 t + 5,567 t
i) 14 g 820 mg + 7 g 198 mg
k) 24,891 g + 38,409 g
l) 1 dt 58 kg + 2 dt 75 kg
m) 6,78 dt + 7,89 dt
n) 6 kg 247 g — 2 kg 124 g
o) 23 kg 81 g — 17 kg 902 g
p) 54 kg 312 g — 991 g
q) 524 kg 9 g — 298 kg 807 g
r) 13,375 kg — 7,125 kg
s) 41,225 kg — 27,815 kg
t) 38 kg 115 g — 23,895 kg
u) 82,072 kg — 49 kg 512 g

18. a) 13 t — 765 kg — 1,243 t — 5 678 kg — 4 t 38 kg
b) 82,456 kg — 17 kg 819 g — 24 650 g — 9,878 kg — 14,047 kg
c) 8 t — 639 kg — 123 kg — 2 t 85 kg — 0,765 t
d) 2 780 kg — 15 dt 78 kg — 2 dt 9 kg — 215 kg

19. a) 4 hl 52 *l* + 1 hl 76 *l*
b) 12 hl 23 *l* + 7 hl 78 *l*
c) 18 hl 50 *l* + 10 hl 75 *l*
d) 3 hl 9 *l* + 2 hl 95 *l*
e) 4,95 hl + 3,27 hl
f) 8,96 hl + 5,57 hl
g) 19,46 hl + 7,54 hl
h) 5 hl 7 *l* + 93 *l*
i) 11 hl 86 *l* — 7 hl 59 *l*
k) 17 hl 32 *l* — 9 hl 96 *l*
l) 4 hl 12 *l* — 76 *l*
m) 12,75 hl — 3,87 hl
n) 8,86 hl — 4,25 hl
o) 17,57 hl — 6,92 hl

20.

	A	B	C	D
I	24 kg 225 g	31 kg 382 g	153,027 kg	321 kg 366 g
II	31 kg 718 g	87,265 kg	128,369 kg	222 kg 648 g
III	122,406 kg	9 kg 822 g	25 kg 148 g	42,624 kg
IV	9,057 kg	33 kg 54 g	124 kg 425 g	433,464 kg
V	12 kg 594 g	8 kg 477 g	469,031 kg	279 kg 898 g

a) Addiere die Größen in jeder der Spalten A bis D!
b) Addiere die Größen in jeder der Zeilen I bis V!
c) Subtrahiere von der größten Größe jeder Zeile einzeln die übrigen Größen derselben Zeile!
d) Subtrahiere nacheinander jede Größe von 1 t!

Verwandle in den folgenden Aufgaben, wenn es notwendig ist, die Maßangaben in die nächstniedere Einheit!

21. a) 512 kg · 9
b) 328 *l* · 5
c) 4 826 m · 8
d) 826 dt · 25
e) 205 ha · 49
f) 7 625 km · 87
g) 3,07 DM · 5
h) 8,29 m · 9
i) 12,08 dt · 6
k) 5,95 a · 14
l) 27,16 m² · 45
m) 920,68 DM · 74

22. **a)** 5,25 DM : 5 **b)** 9,31 m : 7 **c)** 13,56 dt : 6
d) 8,45 DM : 13 **e)** 8,64 m : 32 **f)** 8,33 DM : 49
g) 17,43 ha : 21 **h)** 42,84 m^2 : 51 **i)** 67,16 *l* : 73

23. **a)** 25 m in 125 m **b)** 16 cm in 144 cm **c)** 8 dt in 152 dt
d) 48 m^2 in 528 m^2 **e)** 1,20 DM in 7,20 DM **f)** 1,75 m in 5,25 m

24. Eine Pioniergruppe unternahm in den Ferien eine 14tägige Radwanderung durch Mecklenburg. Klaus, der einen Kilometerzähler am Fahrrad hat, notierte sich folgende Entfernungen:

Neubrandenburg — Penzlin — Waren:	44,2 km
Waren — Röbel — Vipperow:	33,5 km
Vipperow — Röbel — Plau:	37,6 km
Plau — Goldberg — Dobbertin:	29,8 km
Dobbertin — Bossow — Krakow:	19,4 km
Krakow — Teterow — Malchin:	

a) Verfolge die Route auf der Karte!
b) Wie lang war die letzte Etappe, wenn die gesamte Strecke 205,5 km betrug?

25. In der folgenden Tabelle werden für einige Jahre die Fangergebnisse unserer Fischereiflotte aufgeführt.

	1951	1955	1956	1957
Seefisch	37 500 t	62 200 t	69 000 t	89 800 t

a) Wieviel Tonnen Seefisch konnten 1957 gegenüber 1951 mehr eingebracht werden?
b) Stelle die Fangergebnisse in einem Streifendiagramm dar! (Maßstab: 10 000 t ≙ 1 cm. Die Zahlen sind auf volle 10 000 zu runden.)

26. Unsere Wirtschaftsplanung setzt der Landwirtschaft das Ziel, den durchschnittlichen Hektarertrag bei Kartoffeln auf 245 dt Kartoffeln je Hektar zu steigern. Im Jahre 1957 wurden in der Deutschen Demokratischen Republik durchschnittlich 180 dt Kartoffeln je Hektar geerntet.
a) Wieviel Dezitonnen Kartoffeln wurden bei diesem Ertrag 1957 auf einem Feld von 14 ha geerntet, und wieviel Dezitonnen sollen künftig erzielt werden?
b) Die LPG „Rotes Banner" in Trinwillershagen will einen noch höheren Ertrag, nämlich 250 dt Kartoffeln je Hektar erreichen. Wieviel Dezitonnen würde diese LPG auf einem 14 ha großen Feld zusätzlich roden?

27. Wieviel Güterwagen mit 15 t Ladefähigkeit sind erforderlich, um 54 600 dt Kartoffeln abzufahren?

4. Rechnen mit Brüchen

1. Bilde je 5 Beispiele **a)** für echte Brüche, **b)** für unechte Brüche, **c)** für gemischte Zahlen!

2. Nenne 10 verschiedene Brüche, die denselben Wert haben wie

a) $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{3}{4}$, **c)** $\frac{5}{6}$, **d)** $\frac{4}{9}$!

3. Drücke **a)** 2 (Ganze), **b)** 5 (Ganze) durch 12 verschiedene Brüche aus! **c)** Bilde weitere Aufgaben dieser Art!

4. Schreibe die folgenden Maßangaben als Bruchteile einer höheren Maßeinheit!

a) 50 cm **b)** 45 min **c)** 12 h **d)** 25 Pf
e) 80 a **f)** 24 dm^2 **g)** 650 dm^3 **h)** 85 *l*
i) 450 kg **k)** 325 g **l)** 24 min **m)** 18 h

5. **a)** Verwandle in unechte Brüche!

$1\frac{3}{4}$, $2\frac{6}{7}$, $3\frac{4}{5}$, $4\frac{7}{8}$, $5\frac{8}{9}$, $6\frac{7}{10}$, $7\frac{7}{12}$, $8\frac{11}{15}$, $9\frac{7}{20}$, $11\frac{5}{24}$

b) Bilde selbst 10 Aufgaben!

6. **a)** Verwandle die folgenden Brüche in ganze oder in gemischte Zahlen!

$\frac{15}{2}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{23}{12}$, $\frac{45}{15}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{51}{3}$, $\frac{133}{19}$, $\frac{45}{7}$, $\frac{100}{13}$, $\frac{90}{17}$, $\frac{108}{9}$

b) Bilde selbst 10 Aufgaben!

7. Erweitere die folgenden Brüche!

a) $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{50}$. Der Nenner des neuen Bruches soll 100 sein.

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{18}$. Der Nenner des neuen Bruches soll 144 sein.

8. Kürze die folgenden Brüche!

a) $\frac{9}{12}$ **b)** $\frac{15}{25}$ **c)** $\frac{14}{21}$ **d)** $\frac{12}{15}$ **e)** $\frac{15}{18}$ **f)** $\frac{18}{24}$ **g)** $\frac{27}{45}$ **h)** $\frac{48}{54}$ **i)** $\frac{24}{36}$
k) $\frac{45}{60}$ **l)** $\frac{36}{54}$ **m)** $\frac{39}{52}$ **n)** $\frac{63}{72}$ **o)** $\frac{36}{96}$ **p)** $\frac{75}{105}$ **q)** $\frac{150}{225}$ **r)** $\frac{640}{880}$ **s)** $\frac{160}{220}$

9. Berechne die folgenden Werte!

a) $\frac{1}{4}$ von 72 **b)** $\frac{1}{5}$ von 270 **c)** $\frac{1}{8}$ von 960 **d)** $\frac{4}{5}$ von 130
e) $\frac{5}{6}$ von 156 **f)** $\frac{7}{10}$ von 780 **g)** $\frac{3}{8}$ von 1240 **h)** $\frac{3}{5}$ von 355
i) $\frac{1}{9}$ von 846 **k)** $\frac{4}{7}$ von 147 **l)** $\frac{3}{4}$ von 96 **m)** $\frac{5}{9}$ von 576

10. Worin besteht der Unterschied zwischen Zehnerbrüchen und Dezimalbrüchen?

11. Erkläre, wie man Dezimalbrüche erweitert und kürzt! Begründe deine Erklärung an Beispielen!

12. **a)** $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}+\frac{5}{8}$ $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$ $\frac{5}{6}+\frac{5}{6}$ $\frac{7}{10}+\frac{9}{10}$ $\frac{11}{12}+\frac{7}{12}$

b) $\frac{17}{25}+\frac{11}{25}$ $\frac{9}{16}+\frac{13}{16}$ $\frac{9}{20}+\frac{17}{20}$ $\frac{11}{18}+\frac{13}{18}$ $\frac{9}{13}+\frac{7}{13}$ $\frac{17}{20}+\frac{13}{20}$

c) $3\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$ $7\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$ $9\frac{5}{6}+\frac{5}{6}$ $11\frac{11}{12}+\frac{5}{12}$ $23\frac{7}{9}+\frac{5}{9}$ $8\frac{6}{7}+\frac{4}{7}$

d) $2\frac{4}{5}+8\frac{4}{5}+\frac{2}{5}$ $7\frac{9}{16}+8\frac{11}{16}+\frac{5}{16}$ $3\frac{7}{12}+\frac{7}{12}+1\frac{1}{12}$ $7\frac{8}{15}+1\frac{4}{15}+2\frac{7}{15}$ $9\frac{19}{30}+\frac{17}{30}+1\frac{11}{30}$ $3\frac{5}{24}+\frac{23}{24}+3\frac{7}{24}$

13. **a)** $\frac{14}{15}-\frac{11}{15}$ $\frac{11}{12}-\frac{5}{12}$ $\frac{13}{20}-\frac{7}{20}$ $\frac{19}{24}-\frac{1}{24}$ $\frac{9}{10}-\frac{3}{10}$ $\frac{19}{25}-\frac{4}{25}$

b) $12-3\frac{3}{4}$ $14-9\frac{6}{7}$ $9-8\frac{7}{12}$ $5\frac{3}{8}-\frac{7}{8}$ $19\frac{7}{18}-\frac{11}{18}$ $23\frac{6}{17}-\frac{14}{17}$

c) $3\frac{1}{6}-2\frac{5}{6}$ $5\frac{4}{9}-1\frac{7}{9}$ $7\frac{2}{5}-\frac{4}{5}$ $5\frac{9}{25}-1\frac{17}{25}$ $6\frac{3}{8}-2\frac{5}{8}$ $27\frac{7}{30}-2\frac{19}{30}$

d) $3\frac{7}{12}-1\frac{11}{12}$ $8\frac{7}{15}-2\frac{13}{15}$ $5\frac{1}{6}-2\frac{5}{6}$ $3\frac{11}{24}-1\frac{19}{24}$ $5\frac{2}{9}-1\frac{8}{9}$ $5\frac{7}{25}-2\frac{17}{25}$

14. **a)** $\frac{7}{12}+\frac{11}{12}-\frac{5}{12}$ **b)** $\frac{3}{7}-\frac{6}{7}+\frac{5}{7}$ **c)** $3\frac{7}{12}-1\frac{11}{12}+\frac{5}{12}$
d) $\frac{4}{9}+\frac{7}{9}-\frac{5}{9}$ **e)** $9\frac{3}{5}-\frac{4}{5}+2\frac{2}{5}$ **f)** $8\frac{3}{10}+\frac{9}{10}+2\frac{7}{10}$

15. Bilde selbst 10 Aufgaben

a) zur Addition zweier gleichnamiger Brüche,
b) zur Subtraktion zweier gleichnamiger Brüche!

5. Aufgaben aus der Geometrie

1. **a)** Wieviel Ecken, Kanten und Flächen hat ein Quader?
b) Wieviel Kanten treffen sich in einem Eckpunkt eines Quaders?
c) Welchen Winkel schließen je zwei Kanten eines Quaders an einem Eckpunkt miteinander ein?
d) Welche Gestalt haben die Begrenzungsflächen eines Quaders?

2. Erkläre, was du unter einer quadratischen Pyramide verstehst!

3. Zeichne nach Schätzung einen gestreckten, einen rechten Winkel, einen Winkel von 45°, von 60°, von 30°! Suche entsprechende Winkel am Zeichendreieck und vergleiche! Miß die geschätzten Winkel mit dem Winkelmesser nach!

4. Zeichne Parallelen im Abstand von **a)** 2 cm, **b)** 3,5 cm, **c)** 1,8 cm!

5. Addiere die folgenden Strecken durch Konstruktion!

a) $AB = a = 2{,}6$ cm; $CD = b = 4{,}6$ cm
b) $AB = a = 4{,}5$ cm; $CD = b = 1{,}3$ cm
c) $AB = a = 3{,}6$ cm; $CD = b = 2{,}9$ cm

6. Konstruiere die Differenz der folgenden Strecken!

a) $AB = a = 7{,}8$ cm; $CD = b = 3{,}6$ cm
b) $AB = a = 9{,}5$ cm; $CD = b = 5{,}5$ cm
c) $AB = a = 10{,}2$ cm; $CD = b = 6{,}8$ cm

7. Zeichne den Grundriß eines Quaders mit den Kanten von 4,5 cm, 3,9 cm und 2,6 cm Länge!

a) Der Quader steht mit seiner größten Fläche auf der Grundrißtafel.
b) Der Quader steht mit seiner kleinsten Fläche auf der Grundrißtafel.

8. Berechne den Rauminhalt und die Oberfläche des Quaders, dessen Kantenlängen in Aufgabe 7 genannt werden!

9. Die Kanten eines quaderförmigen Kartons haben die Längen 24 cm, 16 cm und 14 cm. Ein anderer, würfelförmiger Karton hat eine Kantenlänge von 18 cm.

a) Berechne die Rauminhalte beider Kartons!
b) Welcher Karton hat einen größeren Rauminhalt, und um wieviel Kubikzentimeter übertrifft er den anderen?
c) Wieviel Quadratdezimeter beträgt jeweils die Summe aus der Grundfläche und den Seitenflächen? (Beim quaderförmigen Karton soll die größte Fläche als Grundfläche angenommen werden.)

10. Ein rechteckiges Gemüsefeld eines volkseigenen Gutes hat die Seiten 230 m und 85 m. Berechne die Fläche des Feldes!

11. Das rechteckige Hafenbecken B des neuen Rostocker Überseehafens soll eine Länge von 1 100 m und eine Breite von 180 m erhalten. Wie groß wird die Fläche des Hafenbeckens B werden?

BRUCHRECHNUNG

I. Teilbarkeit der Zahlen

6. Teilbarkeitsregeln

Löse die folgenden Aufgaben!

28 : 4	63 : 7	75 : 5	96 : 8
31 : 4	65 : 7	72 : 5	94 : 8

Wenn wir die Ergebnisse dieser Divisionsaufgaben miteinander vergleichen, stellen wir folgendes fest:

In den Aufgaben der oberen Zeile bleibt nach der Division kein Rest; in den Aufgaben der unteren Zeile bleibt nach der Division ein Rest. Wir können also von der ersten Aufgabe sagen: 28 ist ohne Rest durch 4 teilbar. Man sagt kurz:

28 ist durch 4 **teilbar.**

Bei den Zahlen 44, 54 oder 888 können wir schnell erkennen, ob sie durch 4 teilbar sind oder nicht. Dagegen müssen wir beispielsweise bei der Zahl 17 964 länger rechnen, wenn wir die Teilbarkeit durch 4 feststellen wollen. Aber auch bei solchen großen Zahlen ist es möglich, schnell zu erkennen, ob sie durch einen bestimmten Divisor teilbar sind.

Dazu wollen wir einige Regeln kennenlernen, die uns unnötig langes Dividieren ersparen werden.

1) Teilbarkeit durch 10, 100, 1 000

Schreibe der Reihe nach alle reinen Zehner bis 200 auf! Worin stimmen diese Zahlen überein?

Bilde größere Zahlen mit einer Null in der letzten Stelle!

Prüfe durch Rechnen nach, ob diese Zahlen durch 10 teilbar sind!

Wir können immer feststellen:

Alle Zahlen, deren letzte Ziffer eine Null ist, sind durch 10 teilbar.

Stelle auf ähnliche Weise fest, welche Zahlen durch 100 teilbar sind!

Stelle fest, welche Zahlen durch 1 000 teilbar sind!

2) Teilbarkeit durch 5

Bilde die Zahlenfolge der Fünf bis 100!

Die Zahlenfolge der 5 enthält alle durch 5 teilbaren Zahlen.

Wir können feststellen, daß bei den durch 5 teilbaren Zahlen immer eine Null oder eine Fünf als letzte Ziffer steht. Das ist auch der Fall, wenn wir die Folge der Fünf über 100 hinaus fortsetzen.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn sie auf 0 oder 5 endet.

3) Teilbarkeit durch 2

Untersuche die Zahlen bis 100 auf ihre Teilbarkeit durch 2!

Wie wir bereits wissen, heißen Zahlen, die als letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 haben, **gerade Zahlen.** Wir erkennen, daß alle geraden Zahlen bis 100 durch 2 teilbar sind. Durch 2 sind auch alle geraden Zahlen teilbar, die größer sind als 100.

Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.

4) Teilbarkeit durch 4

Bilde die Folge der Vier bis 100 und vergleiche die Zahlen miteinander!

Wir finden bei den durch 4 teilbaren Zahlen als letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8. Wir können aber nicht sagen, daß alle geraden Zahlen durch 4 teilbar sind. So ist zum Beispiel 36 durch 4 teilbar, aber nicht 26 oder 86. Ebenso läßt sich 20 durch 4 teilen, aber nicht 70 oder 90.

Dagegen läßt sich jede reine Hunderterzahl durch 4 teilen, zum Beispiel 300, 1 400, 7 600, 23 900. Wir brauchen also bei Zahlen, die größer als 100 sind, nur die letzten beiden Stellen auf ihre Teilbarkeit durch 4 zu untersuchen.

Die Zahl 87 748 ist durch 4 teilbar, weil 87 700 als reine Hunderterzahl und auch 48 durch 4 teilbar sind.

Die Zahl 87 778 ist nicht durch 4 teilbar, weil zwar 87 700 durch 4 teilbar ist, nicht aber 78.

Wir müssen deshalb die Folge der Vier bis 100 beherrschen, wenn wir schnell entscheiden wollen, ob eine Zahl durch 4 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden.
Reine Hunderterzahlen sind immer durch 4 teilbar.

5) Teilbarkeit durch 8

Untersuche die reinen Hunderter bis 1 000 auf ihre Teilbarkeit durch 8! Stelle an verschiedenen Beispielen fest, ob reine Tausender durch 8 teilbar sind!

Wir können feststellen, daß erst die reinen Tausender durch 8 teilbar sind.

Wir müssen also immer untersuchen, ob die letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden.

Beispiel: Ist die Zahl 6 748 512 durch 8 teilbar?

Wir zerlegen 6 748 512 in 6 748 000 als reine Tausenderzahl und 512. Die Zahl 6 748 000 ist durch 8 teilbar; denn alle Tausender sind durch 8 teilbar. Die Zahl 512 ist ebenfalls durch 8 teilbar. Also ist auch die Zahl 6 748 512 durch 8 teilbar.

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden.
Reine Tausenderzahlen sind immer durch 8 teilbar.

6) Teilbarkeit durch 9

Wir untersuchen einige Beispiele, um die Teilbarkeitsregel der 9 kennenzulernen. Zu diesem Zweck zerlegen wir die Zahlen in ihre Zehnerstufen.

Beispiel 1: 4 356 : 9

$$4\,356 = 4\,000 + 300 + 50 + 6$$
$$4\,000 : 9 = 444 \text{ Rest 4 Einer}$$
$$300 : 9 = 33 \text{ Rest 3 Einer}$$
$$50 : 9 = 5 \text{ Rest 5 Einer}$$
$$6 : 9 = 0 \text{ Rest 6 Einer}$$

Weil wir erkennen wollen, ob die Zahl 4 356 durch 9 teilbar ist, müssen wir die bei den Teildivisionen entstandenen Reste addieren und untersuchen, ob die Summe der Teilreste durch 9 teilbar ist. Die Summe der Teilreste beträgt 18 Einer. Da 18 durch 9 teilbar ist, muß auch 4 356 durch 9 teilbar sein.

Beispiel 2: 7 813 : 9

$$7\,813 = 7\,000 + 800 + 10 + 3$$
$$7\,000 : 9 = 777 \text{ Rest 7 Einer}$$
$$800 : 9 = 88 \text{ Rest 8 Einer}$$
$$10 : 9 = 1 \text{ Rest 1 Einer}$$
$$3 : 9 = 0 \text{ Rest 3 Einer}$$

Die Addition der Teilreste im 2. Beispiel ergibt die Summe von 19 Einern. Da 19 nicht durch 9 teilbar ist, kann also auch 7 813 nicht durch 9 teilbar sein.

Wir vergleichen nun in beiden Beispielen die Ziffern der Dividenden mit den Resten, die sich bei den Teildivisionen ergeben. Weil die bei den Teildivisionen entstandenen Reste den Ziffern des Dividenden gleichen, brauchen wir die Teildivisionen gar nicht erst durchzuführen. Wir addieren nur die Ziffern des Dividenden ohne Rücksicht auf ihren Stellenwert.

Beispiel 1: $4 + 3 + 5 + 6 = 18$
Beispiel 2: $7 + 8 + 1 + 3 = 19$

Man nennt eine solche Summe die Ziffernsumme oder **Quersumme** einer Zahl. Wir bilden deshalb nur die Quersumme der Zahl und untersuchen, ob sie durch 9 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

7) Teilbarkeit durch 3

Jede durch 9 teilbare Zahl ist auch durch 3 teilbar, aber nicht jede durch 3 teilbare Zahl ist durch 9 teilbar.
Überprüfe diesen Satz an selbstgewählten Beispielen!
Für die Teilbarkeit durch 3 gilt eine entsprechende Regel wie für die 9.

Beispiel 1: 1 317 : 3
Die Quersumme der Zahl lautet:

$$1 + 3 + 1 + 7 = 12$$

Da die Quersumme 12 durch 3 teilbar ist, ist auch die Zahl 1 317 durch 3 teilbar.

Beispiel 2: 5 743 : 3
Wir bilden die Quersumme der Zahl.

$$5 + 7 + 4 + 3 = 19$$

Da die Quersumme 19 nicht durch 3 teilbar ist, ist auch die Zahl 5 743 nicht durch 3 teilbar.
Prüfe durch Rechnen nach!

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

8) Teilbarkeit durch 25

Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 25 teilbare Zahl bilden.
Reine Hunderterzahlen sind immer durch 25 teilbar.

Begründe diese Regel!

Zusammenfassung

1. Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.
2. Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
3. Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden. Reine Hunderterzahlen sind immer durch 4 teilbar.

4. Eine Zahl ist durch **5** teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine Fünf oder eine Null ist.
5. Eine Zahl ist durch **8** teilbar, wenn ihre letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden. Reine Tausenderzahlen sind immer durch 8 teilbar.
6. Eine Zahl ist durch **9** teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
7. Eine Zahl ist durch **10** teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine Null ist.
8. Eine Zahl ist durch **25** teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 25 teilbare Zahl bilden. Reine Hunderterzahlen sind immer durch 25 teilbar.

Aufgaben

1. Stelle fest, ob die folgenden Zahlen durch 2 teilbar sind!

a)	25 036	**b)**	19 747	**c)**	8 300	**d)**	63 528
e)	36 009	**f)**	53 044	**g)**	18 672	**h)**	528 320
i)	10 001	**k)**	2 003	**l)**	3 486 284	**m)**	9 007 675

Ordne die Zahlen in durch 2 teilbare und durch 2 nicht teilbare Zahlen!

2. Stelle fest, welche der folgenden Zahlen durch 5 teilbar sind!

a)	17 375	**b)**	39 706	**c)**	48 250	**d)**	97 874
e)	66 555	**f)**	125 973	**g)**	306 025	**h)**	2 458
i)	17 625	**k)**	4 874 252	**l)**	90 120	**m)**	21 850
n)	45 377	**o)**	8 255	**p)**	7 672 065	**q)**	9 207 308

Ordne die Zahlen in durch 5 teilbare und durch 5 nicht teilbare Zahlen!

3. Untersuche die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 4 und 8!

a)	48	**b)**	42	**c)**	64	**d)**	724
e)	956	**f)**	5 032	**g)**	6 420	**h)**	37 952
i)	3 814	**k)**	49 534	**l)**	360 912	**m)**	73 718
n)	95 392	**o)**	524 598	**p)**	18 408	**q)**	24 607 348
r)	867 584	**s)**	5 781 976	**t)**	400 832	**u)**	3 517 258

4. Untersuche die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 3 und 9!

a)	81	**b)**	45	**c)**	72	**d)**	987
e)	2 469	**f)**	384	**g)**	51	**h)**	6 192
i)	36 477	**k)**	984	**l)**	28 655	**m)**	72 261
n)	6 321	**o)**	9 462	**p)**	361 263	**q)**	224 992
r)	5 931 792	**s)**	7 929	**t)**	9 145 521	**u)**	2 745
v)	4 382 117	**w)**	800 803	**x)**	60 702	**y)**	5 362 098

5. Welche der folgenden Zahlen sind durch 25 teilbar?

a)	76 000	**b)**	7 825	**c)**	89 360	**d)**	667 500
e)	34 567	**f)**	34 875	**g)**	356 465	**h)**	7 864 300

6. Bilde je 10 Zahlen, die

a) durch 2	**b)** durch 3	**c)** durch 4	**d)** durch 5
e) durch 8	**f)** durch 9	**g)** durch 10	**h)** durch 25

teilbar sind!

7. Untersuche mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, ob die folgenden Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 oder 25 teilbar sind!

a) 3 678	**b)** 7 690	**c)** 14 586	**d)** 33 872
e) 67 924	**f)** 7 683 500	**g)** 23 456 100	**h)** 7 653 300
i) 8 896 500	**k)** 977 648	**l)** 7 653 000	**m)** 54 897 225

7. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

1) Wir wollen untersuchen, durch welche Zahlen 20 und 23 teilbar sind. Mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln stellen wir fest, daß 20 durch 1, 2, 4, 5, 10 und 20 teilbar ist. Dagegen ist 23 nur durch 1 und 23 teilbar.

Untersuche entsprechend die Zahlen 12 und 13!

Es gibt demnach Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, zum Beispiel 2, 3, 5, 7, 13, 23. Solche Zahlen nennt man **Primzahlen.** Die Zahl 1 wird nicht als Primzahl bezeichnet.

Warum kann keine gerade Zahl außer 2 eine Primzahl sein?

Alle anderen Zahlen, zum Beispiel 4, 8, 9, 10, 12, 20, nennt man **zusammengesetzte Zahlen.** Sie lassen sich nicht nur durch 1 und durch sich selbst teilen, sondern sie sind auch durch andere Zahlen teilbar. Alle zusammengesetzten Zahlen sind also Produkte, die wir in Faktoren zerlegen können.

Beispiele: $6 = 2 \cdot 3$ $\quad 15 = 3 \cdot 5$ $\quad 35 = 5 \cdot 7$

Es gibt auch zusammengesetzte Zahlen, die sich in mehr als 2 Faktoren zerlegen lassen.

Beispiele: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Zerlegen wir eine zusammengesetzte Zahl in Faktoren, so beginnen wir mit dem kleinsten Teiler, der möglich ist. Beim Zerlegen der Zahl 72 ergibt sich zum Beispiel das folgende Bild:

$$
\begin{aligned}
72 &= 2 \cdot 36 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 18 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\
\hline
72 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3
\end{aligned}
$$

Wir führen das Zerlegen so weit durch, bis sich die gefundenen Faktoren nicht mehr zerlegen lassen. Alle Faktoren sind dann Primzahlen. Die Primzahlen, die sich beim Zerlegen einer Zahl in Faktoren ergeben, nennen wir **Primfaktoren.**

2) Mit Hilfe der Zerlegung in Primfaktoren kann man feststellen, durch welche Zahlen eine gegebene Zahl teilbar ist. Wir haben zum Beispiel die Zahl 72 in die Primfaktoren 2, 2, 2, 3 und 3 zerlegt. Wir fassen nun die Primfaktoren so zusammen, daß die Zahl 72 immer als ein Produkt aus zwei Faktoren erscheint.

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$72 = 8 \cdot 9$$

oder

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$72 = 4 \cdot 18$$

Führe weitere Zusammenfassungen selbst durch und stelle fest, durch welche Zahlen 72 teilbar ist!

3) Teilbarkeit durch 6

Jetzt können wir auch untersuchen, ob Zahlen durch 6 teilbar sind. Die Zahl 6 ist ein Produkt aus den Primfaktoren 2 und 3. Deshalb muß eine Zahl, die durch 6 teilbar ist, sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar sein.

Durch 6 ist jede gerade Zahl teilbar, deren Quersumme durch 3 teilbar ist.

4) Potenzschreibweise

Ein Produkt mit gleichen Faktoren können wir in abgekürzter Form schreiben.

Beispiele: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ (sprich: zwei hoch drei)
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ (sprich: drei hoch vier)
$5 \cdot 5 = 5^2$ (sprich: fünf hoch zwei)

Produkte, die in dieser abgekürzten Form geschrieben werden, nennen wir **Potenzen.** Die kleine hochgesetzte Zahl wird Hochzahl oder **Exponent** genannt. Sie gibt an, wie oft die Grundzahl oder **Basis** als Faktor steht.

Die Zahl 72 hatten wir in Primfaktoren zerlegt. Als Potenzen kurz geschrieben, ergibt sich:

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Unterscheide stets sehr genau die Potenzschreibweise von der Schreibweise bei Multiplikationen!

2^3 bedeutet: Die 2 soll dreimal als Faktor gesetzt werden.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$2 \cdot 3$ bedeutet: Die 2 soll dreimal als Summand gesetzt werden.

$$2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$$

Berechne 2^3, dann $2 \cdot 3$ und vergleiche die Ergebnisse!

Aufgaben

1. Schreibe die folgenden Produkte als Potenzen!

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **b)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
c) $7 \cdot 7 \cdot 7$ **d)** $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
e) $9 \cdot 9 \cdot 9$ **f)** $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
g) $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25$ **h)** $30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30$

2. Rechne die folgenden Potenzen aus!
2^3; 5^2; 3^2; 5^3; 8^3; 10^4; 2^5; 7^3; 3^4; 4^3; 3^5; 7^2; 9^2; 6^2; 2^6; 6^3; 3^6; 5^4; 4^5

3. Bilde selbst 10 Potenzen und rechne sie aus!

4. a) Löse die folgenden Aufgaben und vergleiche die Ergebnisse!
$4 + 4 + 4 + 4 + 4$ $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
b) Schreibe beide Aufgaben in abgekürzter Form!

5. Um wieviel ist 3^6 größer als $3 \cdot 6$?

6. a) Zerlege die Zahlen 2 bis 20 in ihre Primfaktoren!
b) Stelle die Primzahlen im Zahlenbereich von 2 bis 20 zusammen!

7. Zerlege die folgenden Zahlen in Primfaktoren!
25; 27; 42; 45; 48; 54; 64; 81; 100

8. Bestimme die Primzahlen, die zwischen den Zahlen 2 und 100 liegen!
Anleitung:

a) Die erste Primzahl ist 2. Andere gerade Zahlen außer 2 können keine Primzahlen sein. Begründe das!

b) Wir schreiben nun die ungeraden Zahlen von 3 bis 9 in eine Zeile, in die nächste Zeile die ungeraden Zahlen von 11 bis 19, in die folgende Zeile die von 21 bis 29 usw. bis zu der Zeile 91 bis 99. Wir streichen nun jede ungerade Zahl durch, die ein Vielfaches einer schon vorhandenen ungeraden Zahl darstellt (zum Beispiel 9 in der ersten Zeile, weil $9 = 3 \cdot 3$ ist). Durch die Streichungen bleiben in

der Folge der natürlichen Zahlen von 2 bis 100 nur noch die Primzahlen stehen. Die Zahlenfolge wird also „gesiebt". Der griechische Mathematiker **Eratosthenes**, der vor ungefähr 2 100 Jahren lebte, hat dieses Verfahren beschrieben. Man bezeichnet es deshalb als „Sieb des Eratosthenes".

9. Bestimme die Primfaktoren der folgenden Zahlen!
36; 56; 91; 90; 105; 126; 152; 168; 198; 225; 240; 306; 440; 504; 625; 720

10. Ermittle durch Zerlegen in Primfaktoren, durch welche Zahlen
a) 180, **b)** 128, **c)** 372, **d)** 1 400, **e)** 1 440 teilbar sind!

11. Untersuche die folgenden Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 6!

a) 756	**b)** 2 847	**c)** 9 462	**d)** 5 344	**e)** 378 961
f) 214 872	**g)** 7 392	**h)** 30 462	**i)** 44 406	**k)** 97 360

12. Bilde **a)** 5 dreistellige, **b)** 5 vierstellige Zahlen, die durch 6 teilbar sind!

8. Der Hauptnenner

Wir haben schon gelernt, wie man gleichnamige Brüche addieren und subtrahieren kann. Wollen wir dagegen ungleichnamige Brüche addieren oder subtrahieren, so müssen wir sie erst durch Erweitern gleichnamig machen.

Man sagt: Wir suchen für die Nenner der Brüche ein gemeinschaftliches Vielfaches.

Dieses gemeinschaftliche Vielfache ist in den Beispielen 1 und 2 leicht zu finden.

Beispiel 1: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Das gemeinschaftliche Vielfache ist 8, weil der Nenner 4 in dem Nenner 8 enthalten ist.

Beispiel 2: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Das gemeinschaftliche Vielfache für die beiden Nenner ist 12. Wir erhalten es dadurch, daß wir die beiden Nenner miteinander multiplizieren.

Beispiel 3: $\frac{1}{8} + \frac{1}{6}$

Durch Multiplizieren erhalten wir als gemeinschaftliches Vielfaches 48. Es gibt aber ein kleineres gemeinschaftliches Vielfaches für die Nenner 8 und 6, nämlich 24.

Damit wir mit möglichst kleinen Zahlen rechnen können, suchen wir immer das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** der Nenner. Man bezeichnet es als **Hauptnenner.**

Wir finden den Hauptnenner, indem wir die Nenner zunächst in Primfaktoren zerlegen. In dem 3. Beispiel ergibt sich also:

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 6 &= 2 \qquad \cdot 3 \end{aligned}$$

Gleiche Primfaktoren schreiben wir untereinander, wie es in unserem Beispiel beim Primfaktor 2 zu sehen ist. Dadurch erkennen wir leicht, welche Primfaktoren in beiden Nennern enthalten sind. Bei der Berechnung des Hauptnenners bleibt der aus dem Nenner 6 gewonnene Primfaktor 2 unberücksichtigt, weil er schon als Primfaktor des Nenners 8 auftritt.

$$\begin{array}{lll} & 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 & \\ & 6 = 2 \qquad \cdot 3 & \\ \hline \text{Hauptnenner:} & \qquad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24 & \end{array}$$

Die Zahl 24 ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, also der Hauptnenner der beiden Nenner 8 und 6.

Entsprechend können wir auch bei drei und mehr Nennern den Hauptnenner ausrechnen.

Beispiel 4: $\frac{1}{24} + \frac{1}{20} + \frac{1}{18}$

Wenn wir diese drei Nenner miteinander multiplizieren würden, erhielten wir als gemeinschaftlichen Nenner 8 640. Wir würden aber dadurch nach dem Erweitern große Zähler erhalten:

$$\frac{360}{8640} + \frac{432}{8640} + \frac{480}{8640}$$

Wir suchen deshalb den Hauptnenner durch Zerlegen in Primfaktoren.

$$\begin{array}{lll} & 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 & \\ & 20 = 2 \cdot 2 \qquad \cdot 5 & \\ & 18 = 2 \qquad \cdot 3 \quad \cdot 3 & \\ \hline \text{Hauptnenner:} & \qquad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 360 & \end{array}$$

Also ist 360 der Hauptnenner der drei gegebenen Nenner 24, 20 und 18. Nach dem Erweitern erhalten wir nun:

$$\frac{15}{360} + \frac{18}{360} + \frac{20}{360}$$

Neben dieser ausführlichen Schreibweise beim Zerlegen in Primfaktoren können wir auch die Potenzschreibweise verwenden. Wir schreiben dann:

$$\begin{array}{rl} 24 = & 2^3 \cdot 3 \\ 20 = & 2^2 \quad\;\; \cdot 5 \\ 18 = & 2 \cdot 3^2 \\ \hline \text{Hauptnenner:} & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 \end{array}$$

Von den Potenzen, die sich beim Zerlegen ergeben, nehmen wir jeweils die höchste Potenz eines jeden Primfaktors. In unserem Beispiel ist für den Primfaktor 2 die höchste Potenz 2^3, für den Primfaktor 3 finden wir 3^2, und schließlich ist noch der Primfaktor 5 für die Berechnung des Hauptnenners zu berücksichtigen. Durch die Multiplikation $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ erhalten wir den gesuchten Hauptnenner.

Bei einfachen Aufgaben sucht man den Hauptnenner durch Überlegung. Hierbei geht man im Kopf die Zahlenfolge des größten der vorhandenen Nenner durch und vergleicht mit den Vielfachen der anderen Nenner.

Beispiel 5: $\frac{1}{12} + \frac{1}{16}$

Der größere Nenner ist 16. Die Folge heißt: 16, 32, **48**, 64 .... Die Zahl 48 stellt auch ein Vielfaches der Zahl 12 dar. Der Hauptnenner ist 48.

Nach dem Erweitern erhalten wir:

$$\frac{4}{48} + \frac{3}{48}$$

Aufgaben

Bestimme den Hauptnenner der folgenden Nenner!

1. a)	4 und 6	5 und 8	4 und 10	4 und 18	4 und 14
	8 und 9	10 und 15	8 und 12	9 und 12	12 und 15
b)	3 und 4	3 und 5	2 und 6	3 und 8	3 und 9
	4 und 5	7 und 21	2 und 11	5 und 6	4 und 13
c)	4 und 9	9 und 13	5 und 16	7 und 13	15 und 20
	12 und 15	18 und 14	10 und 125	12 und 38	8 und 18
d)	24 und 27	14 und 35	12 und 39	15 und 36	16 und 36
	21 und 35	25 und 35	27 und 36	28 und 35	30 und 36
e)	35 und 40	12 und 40	16 und 44	18 und 48	20 und 45
	24 und 28	42 und 70	45 und 54	60 und 80	78 und 130

2. a)	4, 9 und 24	**b)** 7, 12 und 21	**c)** 9, 10 und 30
d)	8, 24 und 30	**e)** 9, 12 und 18	**f)** 6, 9 und 21
g)	6, 8 und 10	**h)** 12, 16 und 20	**i)** 15, 20 und 30
k)	12, 18 und 24	**l)** 10, 18 und 24	**m)** 15, 20 und 24
n)	25, 30 und 40	**o)** 14, 20 und 25	**p)** 27, 36 und 54
q)	40, 24 und 15	**r)** 28, 35 und 20	**s)** 15, 40 und 48
t)	24, 32 und 60	**u)** 12, 18 und 24	**v)** 16, 64 und 40

3. a) 24, 36 und 48 b) 24, 36 und 60 c) 30, 45 und 75
d) 95, 38 und 57 e) 21, 56 und 35 f) 63, 18 und 14
g) 91, 52 und 78 h) 20, 34 und 85 i) 120, 180 und 72

4. a) 6, 8, 10 und 12 b) 6, 9, 12 und 15
c) 8, 10, 12 und 14 d) 6, 12, 18 und 24
e) 9, 15, 21 und 27 f) 12, 15, 18 und 24
g) 12, 16, 20 und 24 h) 12, 18, 24 und 30

5. a) 6, 8, 10, 12 und 16 b) 6, 10, 15, 21 und 25
c) 9, 12, 15, 20 und 28 d) 10, 14, 18, 24 und 35
e) 16, 27, 12, 9 und 30 f) 5, 16, 15, 8 und 10

II. Rechnen mit gemeinen Brüchen

9. Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Nachdem wir gelernt haben, den Hauptnenner zu suchen, können wir auch ungleichnamige Brüche addieren und subtrahieren.

1) Addition

Beispiel 1: $\frac{5}{8} + \frac{7}{10}$

Wir suchen zunächst den Hauptnenner für die beiden Brüche. Dann erweitern wir die Brüche so, daß sie gleichnamig werden. Die gleichnamigen Brüche können wir addieren.

Hauptrechnung:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{10} = \frac{25}{40} + \frac{28}{40} = \frac{53}{40} = 1\frac{13}{40}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{l|l} 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 & 5 \\ 10 = 2 \quad \cdot 5 & 4 \\ \hline \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40 & \end{array}$$

Damit wir uns das Erweitern erleichtern, schreiben wir in der Nebenrechnung für jeden Nenner die Erweiterungszahl in eine besondere Spalte. Wir finden die Erweiterungszahlen, indem wir jeweils den Hauptnenner durch die Nenner der Summanden dividieren.

Ergibt die Summe der Brüche einen unechten Bruch, so verwandeln wir diesen in eine gemischte Zahl. Wir kürzen, wenn es möglich ist.

Beispiel 2: $\frac{3}{8} + 2\frac{5}{12} + \frac{7}{15} + 3\frac{9}{20}$

Hauptrechnung:

$$\frac{3}{8} + 2\frac{5}{12} + \frac{7}{15} + 3\frac{9}{20}$$
$$= \frac{45}{120} + 2\frac{50}{120} + \frac{56}{120} + 3\frac{54}{120}$$
$$= 5 + \frac{205}{120}$$
$$= 6\frac{85}{120} = 6\frac{17}{24}$$

Nebenrechnung:

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$			15
$12 = 2 \cdot 2$	$\cdot 3$		10
$15 =$	$3 \cdot 5$		8
$20 = 2 \cdot 2$		$\cdot 5$	6
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$			

Für die Addition von Brüchen merken wir uns folgende Arbeitsschritte:

1. Hauptnenner suchen,
2. Erweiterungszahlen bestimmen,
3. Erweitern,
4. Zähler addieren,
5. Ergebnis vereinfachen, z. B. kürzen.

Aufgaben

Kopfrechnen

1. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$, $\frac{3}{7} + \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{5} + \frac{4}{15}$, $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{10}$, $\frac{2}{9} + \frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{8} + \frac{5}{24}$, $\frac{5}{6} + \frac{5}{12}$, $\frac{4}{5} + \frac{1}{10}$, $\frac{1}{6} + \frac{3}{10}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{7}{9} + \frac{5}{18}$, $\frac{2}{3} + \frac{7}{9}$, $\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$

e) $\frac{3}{5} + \frac{1}{6}$, $\frac{3}{5} + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{6} + \frac{19}{24}$, $\frac{3}{4} + \frac{3}{8}$

2. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{5}{12} + \frac{5}{8}$, $\frac{9}{10} + \frac{5}{6}$, $\frac{3}{8} + \frac{7}{16}$

b) $\frac{4}{5} + \frac{9}{20}$, $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$, $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$, $\frac{2}{7} + \frac{4}{21}$

c) $\frac{4}{5} + \frac{17}{30}$, $\frac{3}{4} + \frac{7}{12}$, $\frac{1}{6} + \frac{5}{18}$, $\frac{1}{7} + \frac{3}{14}$

d) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$, $\frac{8}{15} + \frac{23}{60}$, $\frac{3}{4} + \frac{5}{16}$, $\frac{3}{10} + \frac{7}{40}$

e) $\frac{7}{8} + \frac{2}{3}$, $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, $\frac{1}{2} + \frac{5}{6}$, $\frac{2}{9} + \frac{5}{18}$

Schriftliches Rechnen

3. a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$, $\frac{5}{8} + \frac{7}{20}$, $\frac{19}{24} + \frac{25}{36}$

b) $\frac{9}{10} + \frac{11}{12}$, $\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$, $\frac{11}{15} + \frac{21}{25}$

c) $\frac{11}{15} + \frac{9}{25}$, $\frac{4}{9} + \frac{7}{15}$, $\frac{5}{8} + \frac{7}{10}$

d) $\frac{8}{9} + \frac{7}{8}$, $\frac{13}{28} + \frac{8}{25}$, $\frac{7}{18} + \frac{11}{15}$

e) $\frac{2}{3} + \frac{5}{19}$, $\frac{7}{10} + \frac{29}{50}$, $\frac{11}{12} + \frac{8}{15}$

4. a) $\frac{11}{20}+\frac{17}{35}$ $\quad\frac{17}{20}+\frac{7}{12}$ $\quad\frac{8}{21}+\frac{11}{14}$

b) $\frac{4}{9}+\frac{8}{15}$ $\quad\frac{13}{25}+\frac{57}{100}$ $\quad\frac{11}{30}+\frac{8}{9}$

c) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$ $\quad\frac{17}{30}+\frac{11}{45}$ $\quad\frac{5}{8}+\frac{13}{15}$

d) $\frac{11}{12}+\frac{5}{8}$ $\quad\frac{23}{24}+\frac{7}{9}$ $\quad\frac{15}{26}+\frac{17}{39}$

e) $\frac{5}{24}+\frac{9}{16}$ $\quad\frac{4}{15}+\frac{3}{10}$ $\quad\frac{13}{32}+\frac{19}{24}$

5. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ $\quad\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ $\quad\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ $\quad\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ $\quad\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ $\quad\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$ $\quad\frac{9}{10}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$ $\quad\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{7}{10}$ $\quad\frac{9}{10}+\frac{7}{8}+\frac{4}{5}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{7}$ $\quad\frac{3}{5}+\frac{9}{10}+\frac{11}{18}$ $\quad\frac{3}{8}+\frac{9}{11}+\frac{1}{4}$ $\quad\frac{5}{12}+\frac{4}{9}+\frac{3}{8}$ $\quad\frac{11}{24}+\frac{17}{36}+\frac{7}{9}$

d) $\frac{7}{10}+\frac{9}{14}+\frac{2}{7}$ $\quad\frac{3}{8}+\frac{7}{12}+\frac{11}{20}$ $\quad\frac{11}{15}+\frac{17}{35}+\frac{8}{21}$ $\quad\frac{11}{24}+\frac{19}{32}+\frac{27}{40}$ $\quad\frac{11}{15}+\frac{18}{25}+\frac{4}{5}$

6. a) $1\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ $\quad 4\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$ $\quad 9\frac{1}{2}+\frac{5}{6}$ $\quad 12\frac{3}{8}+\frac{4}{5}$ $\quad 15\frac{9}{10}+\frac{79}{100}$

b) $1\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}$ $\quad 4\frac{3}{5}+3\frac{1}{3}$ $\quad 7\frac{2}{9}+5\frac{4}{5}$ $\quad 10\frac{5}{8}+5\frac{5}{6}$ $\quad 20\frac{5}{7}+18\frac{5}{9}$

c) $4\frac{3}{10}+5\frac{5}{12}$ $\quad 15\frac{9}{10}+12\frac{3}{8}$ $\quad 3\frac{1}{2}+15\frac{7}{15}$ $\quad 35\frac{13}{14}+18\frac{19}{21}$ $\quad 51\frac{8}{9}+38\frac{13}{15}$

d) $17\frac{11}{20}+15\frac{9}{35}$ $\quad 8\frac{14}{15}+38\frac{7}{24}$ $\quad 19\frac{9}{10}+24\frac{53}{100}$ $\quad 35\frac{19}{48}+19\frac{17}{60}$ $\quad 19\frac{13}{16}+83\frac{39}{40}$

7. a)
$$\begin{array}{r} 4\frac{1}{2} \\ +\ 3\frac{3}{4} \\ +\ 9\frac{2}{5} \\ +\ 2\frac{1}{10} \\ +\ 8\frac{9}{20} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 7\frac{3}{7} \\ +\ 29\frac{7}{12} \\ +\ 4\frac{5}{6} \\ +\ 36\frac{3}{4} \\ +\ 9\frac{1}{2} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 3\frac{3}{4} \\ +\ 15\frac{9}{10} \\ +\ 33\frac{11}{15} \\ +\ 8\frac{4}{5} \\ +\ 29\frac{13}{20} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 5\frac{5}{12} \\ +\ 9\frac{3}{8} \\ +\ 27\frac{2}{3} \\ +\ 18\frac{11}{20} \\ +\ 49\frac{1}{6} \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r} 38\frac{9}{25} \\ +\ 5\frac{7}{10} \\ +\ 65\frac{11}{15} \\ +\ 14\frac{5}{8} \\ +\ 9\frac{19}{30} \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r} 15\frac{5}{7} \\ +\ \frac{19}{21} \\ +\ 8\frac{34}{35} \\ +\ 5\frac{17}{20} \\ +\ 12\frac{3}{4} \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{r} 18\frac{4}{5} \\ +\ 9\frac{13}{20} \\ +\ 12\frac{7}{8} \\ +\ 46\frac{11}{15} \\ +\ 23\frac{19}{24} \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{r} 9\frac{3}{20} \\ +\ 17\frac{11}{24} \\ +\ 5\frac{7}{15} \\ +\ 23\frac{5}{12} \\ +\ 7\frac{3}{8} \end{array}$$

8. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{7}{15}+\frac{9}{20}+\frac{5}{8}+\frac{9}{10}$ b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5}+\frac{3}{10}+\frac{5}{12}+\frac{19}{30}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{8}+\frac{11}{20}+\frac{1}{4}+\frac{17}{24}+\frac{5}{6}+\frac{3}{5}$

e) $\frac{4}{7}+\frac{1}{6}+\frac{9}{14}+\frac{5}{12}+\frac{16}{21}+\frac{1}{3}+\frac{7}{8}$

f) $\frac{11}{45}+\frac{7}{12}+\frac{19}{30}+\frac{3}{10}+\frac{5}{6}+\frac{13}{15}$

g) $\frac{5}{16}+\frac{5}{8}+\frac{31}{48}+\frac{8}{15}+\frac{3}{5}+\frac{11}{12}+\frac{11}{24}$

h) $\frac{17}{20}+\frac{37}{50}+\frac{19}{25}+\frac{61}{100}+\frac{5}{8}+\frac{27}{40}$

9. a) $25\frac{3}{4}+18\frac{5}{8}+133\frac{7}{9}+58\frac{11}{12}+255\frac{8}{15}$

b) $34\frac{7}{10}+14\frac{5}{7}+59\frac{4}{5}+16\frac{3}{4}+186\frac{13}{14}$

c) $55\frac{19}{40}+138\frac{17}{25}+249\frac{3}{4}+67\frac{9}{10}+29\frac{41}{50}+349\frac{7}{8}$

2) Subtraktion

Bei der Subtraktion ungleichnamiger Brüche verfahren wir in der gleichen Weise wie bei der Addition.

Beispiel 1: $2\frac{3}{4}-\frac{7}{10}$

Lösung:

$$2\frac{3}{4}-\frac{7}{10}=2\frac{15}{20}-\frac{14}{20}=2\frac{1}{20}$$

Beispiel 2: $7\frac{5}{12}-3\frac{11}{20}$

Lösung:

$$7\frac{5}{12}-3\frac{11}{20}=7\frac{25}{60}-3\frac{33}{60}$$

Wir können $\frac{33}{60}$ nicht von $\frac{25}{60}$ subtrahieren. Deshalb wandeln wir im Minuenden $\left(7\frac{25}{60}\right)$ ein Ganzes in $\frac{60}{60}$ um. Der Minuend lautet dann $6\frac{85}{60}$.

$$6\frac{85}{60}-3\frac{33}{60}=3\frac{52}{60}=3\frac{13}{15}$$

Beispiel 3: $12\frac{3}{4}-3\frac{5}{6}-2\frac{7}{15}-1\frac{7}{20}$

Hauptrechnung:

$$12\frac{3}{4}-3\frac{5}{6}-2\frac{7}{15}-1\frac{7}{20}$$
$$=12\frac{45}{60}-3\frac{50}{60}-2\frac{28}{60}-1\frac{21}{60}$$
$$=6\frac{45}{60}-\frac{50}{60}-\frac{28}{60}-\frac{21}{60}$$
$$=6\frac{45}{60}-\frac{99}{60}=5\frac{105}{60}-\frac{99}{60}=5\frac{6}{60}=5\frac{1}{10}$$

Nebenrechnung:

$4=2\cdot 2$	15
$6=2\cdot 3$	10
$15=3\cdot 5$	4
$20=2\cdot 2\cdot 5$	3
$2\cdot 2\cdot 3\cdot 5=60$	

Stelle die Arbeitsschritte für die Subtraktion ungleichnamiger Brüche auf und vergleiche mit denen der Addition!

Aufgaben

Kopfrechnen

10. a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{5} - \frac{9}{20}$

b) $\frac{5}{6} - \frac{5}{12}$, $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$, $\frac{2}{5} - \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{19}{24} - \frac{5}{8}$, $\frac{4}{5} - \frac{3}{10}$

d) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

e) $\frac{4}{15} - \frac{1}{5}$, $\frac{7}{9} - \frac{2}{3}$, $\frac{1}{15} - \frac{1}{45}$

11. a) $\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$, $\frac{4}{5} - \frac{4}{15}$, $\frac{3}{7} - \frac{4}{21}$

b) $\frac{2}{3} - \frac{4}{9}$, $\frac{4}{5} - \frac{3}{10}$, $\frac{4}{9} - \frac{7}{27}$

c) $\frac{3}{8} - \frac{3}{12}$, $\frac{11}{12} - \frac{1}{6}$, $\frac{7}{8} - \frac{19}{24}$

d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$, $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$

e) $\frac{8}{9} - \frac{1}{3}$, $\frac{5}{6} - \frac{2}{9}$, $\frac{4}{5} - \frac{3}{20}$

Schriftliches Rechnen

12. a) $\frac{9}{10} - \frac{5}{12}$, $\frac{5}{8} - \frac{7}{36}$, $\frac{10}{11} - \frac{9}{10}$

b) $\frac{5}{9} - \frac{3}{16}$, $\frac{19}{20} - \frac{13}{15}$, $\frac{8}{13} - \frac{4}{11}$

c) $\frac{19}{30} - \frac{11}{20}$, $\frac{15}{17} - \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

d) $\frac{7}{15} - \frac{7}{18}$, $\frac{7}{10} - \frac{9}{23}$, $\frac{9}{10} - \frac{2}{15}$

e) $\frac{8}{11} - \frac{5}{7}$, $\frac{8}{15} - \frac{7}{20}$, $\frac{19}{20} - \frac{1}{4}$

13. a) $\frac{15}{28} - \frac{11}{21}$, $\frac{11}{15} - \frac{9}{25}$, $\frac{43}{48} - \frac{23}{36}$

b) $\frac{19}{25} - \frac{22}{45}$, $\frac{9}{10} - \frac{11}{32}$, $\frac{49}{60} - \frac{13}{24}$

c) $\frac{17}{30} - \frac{13}{25}$, $\frac{15}{26} - \frac{17}{39}$, $\frac{47}{48} - \frac{5}{16}$

d) $\frac{15}{16} - \frac{9}{20}$, $\frac{19}{30} - \frac{11}{18}$, $\frac{11}{12} - \frac{6}{11}$

e) $\frac{37}{60} - \frac{8}{45}$, $\frac{23}{24} - \frac{13}{30}$, $\frac{9}{11} - \frac{4}{7}$

14. a) $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ b) $2\frac{1}{3} - \frac{4}{5}$ c) $4\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4}$

d) $12\frac{2}{5} - 8\frac{4}{7}$ e) $8\frac{11}{12} - 5\frac{5}{8}$ f) $4\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$

g) $4\frac{3}{8} - \frac{7}{10}$ h) $5\frac{3}{5} - 2\frac{7}{8}$ i) $25\frac{4}{9} - 14\frac{11}{16}$

k) $15\frac{11}{20} - 10\frac{22}{25}$ l) $2\frac{2}{5} - \frac{7}{10}$ m) $12\frac{5}{9} - \frac{8}{15}$

n) $9\frac{3}{10} - 4\frac{7}{15}$ o) $33\frac{11}{40} - 20\frac{18}{25}$ p) $12\frac{5}{8} - 5\frac{7}{12}$

q) $5\frac{1}{9} - \frac{1}{8}$ r) $18\frac{7}{20} - \frac{19}{30}$ s) $8\frac{7}{12} - 3\frac{8}{9}$

t) $41\frac{9}{11} - 38\frac{7}{8}$ u) $18\frac{7}{15} - 5\frac{5}{12}$ v) $56\frac{5}{18} - 29\frac{7}{30}$

w) $34\frac{5}{18} - \frac{7}{12}$ x) $11\frac{5}{8} - 7\frac{4}{7}$ y) $94\frac{16}{25} - 68\frac{17}{20}$

15. a) $212\frac{4}{5} - 89\frac{3}{8}$ b) $531\frac{11}{32} - 248\frac{17}{24}$ c) $681\frac{11}{15} - 474\frac{17}{20}$ d) $1039\frac{5}{18} - 679\frac{17}{24}$

e) $3451\frac{23}{35}$	f) $2138\frac{14}{25}$	g) $496\frac{17}{25}$	h) $695\frac{17}{25}$
$-1868\frac{44}{49}$	$-1654\frac{29}{40}$	$-121\frac{1}{2}$	$-43\frac{4}{15}$
i) $708\frac{7}{20}$	k) $926\frac{17}{42}$	l) $9866\frac{14}{15}$	m) $6453\frac{2}{32}$
$-534\frac{1}{15}$	$-534\frac{1}{12}$	$-2364\frac{2}{25}$	$-1470\frac{5}{12}$

16. Beschreibe vor dem Rechnen den Lösungsweg!

a) $13\frac{3}{4}+7\frac{1}{2}-12\frac{5}{8}+6\frac{5}{9}-4\frac{7}{12}$ b) $7\frac{2}{3}+4\frac{5}{16}-8\frac{7}{12}+2\frac{3}{8}-2\frac{5}{24}$

c) $20\frac{4}{5}-8\frac{9}{20}-7\frac{3}{4}+15\frac{17}{60}+9\frac{11}{15}$ d) $14\frac{4}{9}-8\frac{13}{24}-3\frac{5}{8}+7\frac{7}{18}-5\frac{11}{12}$

e) $5\frac{5}{7}+13\frac{3}{4}+9\frac{13}{20}-6\frac{4}{5}-11\frac{9}{14}$ f) $15\frac{4}{5}+3\frac{3}{4}-9\frac{7}{10}-3\frac{19}{20}+8\frac{6}{25}$

g) $9\frac{7}{10}+25\frac{3}{8}-4\frac{7}{12}-8\frac{8}{9}+18\frac{5}{6}$ h) $31\frac{2}{3}+13\frac{1}{4}-19\frac{3}{5}+23\frac{8}{9}-17\frac{1}{10}$

17. Der Minuend beträgt $19\frac{5}{6}$, die Differenz $3\frac{4}{9}$. Wie heißt der Subtrahend?

18. Die Differenz beträgt $33\frac{1}{5}$, der Subtrahend ist $12\frac{9}{10}$. Wie heißt der Minuend?

19. Ein Summand ist $44\frac{3}{4}$, die Summe ist $131\frac{5}{8}$. Wie heißt der andere Summand?

20. Von welcher Zahl muß man $14\frac{1}{4}$ subtrahieren, wenn man $91\frac{4}{5}$ übrigbehalten will?

21. Vermindert man eine Zahl um $96\frac{7}{18}$, so erhält man $4\frac{1}{36}$. Wie heißt die Zahl?

22. Vermehrt man eine Zahl um $81\frac{21}{34}$, so erhält man $332\frac{3}{34}$. Wie heißt die Zahl?

23. Berechne **a)** die Summe, **b)** die Differenz der beiden Zahlen $78\frac{29}{54}$ und $47\frac{11}{30}$!

24. Vergleiche die Summe der beiden Zahlen $9\frac{11}{30}$ und $7\frac{8}{25}$ mit ihrer Differenz!

25. Im Schulgarten sollen 3 Beete mit Kohl bepflanzt werden. Für das erste Beet brauchen die Schüler $1\frac{1}{4}$ Schock, für das zweite $\frac{1}{2}$ Schock und für das dritte $\frac{3}{4}$ Schock Kohlpflanzen. Wieviel Schock Kohlpflanzen brauchen die Schüler für die drei Beete? (1 Schock = 60 St.)

26. Im Schulgarten werden von einem Beet $12\frac{1}{2}$ kg Gurken geerntet. Auf einem anderen Beet von der gleichen Größe war besser gedüngt worden. Deshalb konnten von diesem Beet $18\frac{1}{4}$ kg Gurken geerntet werden.

27. Auf einem Tomatenbeet werden an drei aufeinanderfolgenden Tagen $2\frac{1}{2}$ kg, $2\frac{3}{4}$ kg und $1\frac{1}{4}$ kg Tomaten geerntet. Wieviel Kilogramm Tomaten werden an den drei Tagen insgesamt geerntet?

28. Zwei Pioniergruppen haben im Sammeln von Schrott, Altpapier und Knochen einen Wettbewerb abgeschlossen. Die Pioniergruppe der Klasse 5a sammelte im einzelnen im Verlaufe der Wettbewerbswoche $19\frac{3}{4}$ kg Schrott, $21\frac{3}{4}$ kg Papier, $6\frac{1}{2}$ kg Knochen, $6\frac{1}{4}$ kg Schrott, 19 kg Papier und $4\frac{1}{4}$ kg Knochen. Die Pioniergruppe der Klasse 5 b sammelte $15\frac{1}{2}$ kg Schrott, $5\frac{3}{4}$ kg Knochen, $2\frac{1}{4}$ kg Papier, $4\frac{3}{4}$ kg Knochen, $5\frac{1}{2}$ kg Papier und $4\frac{1}{4}$ kg Schrott.

a) Welche Gruppe sammelte mehr Schrott, mehr Papier und mehr Knochen?

b) Wieviel Kilogramm Knochen, wieviel Kilogramm Papier und wieviel Kilogramm Schrott wurden insgesamt von beiden Pioniergruppen abgeliefert?

29. Eine Pioniergruppe wanderte an fünf aufeinanderfolgenden Tagen $13\frac{3}{4}$ km, $15\frac{1}{2}$ km, $2\frac{1}{2}$ km, $14\frac{3}{4}$ km und $12\frac{1}{4}$ km.

Eine andere Gruppe war an fünf aufeinanderfolgenden Tagen $57\frac{1}{2}$ km gewandert.

30. Die Schüler einer 7. Klasse stellen am Unterrichtstag in der Produktion im Laufe eines Jahres einen Zettelkasten, einen Schrankriegel und einen Nuthammer her. Sie benötigen dazu $5\frac{1}{2}$ h $10\frac{1}{4}$ h und $13\frac{3}{4}$ h. Berechne die Gesamtstundenzahl für die drei Arbeiten!

31. Mit Unterstützung des Patenbetriebes wollen die Pioniere einer Klasse ihren Klassenraum streichen. Es werden $\frac{3}{4}$ kg hellblaue, $1\frac{1}{8}$ kg hellgraue und $2\frac{1}{2}$ kg hellrote Farbe benötigt. Berechne den Gesamtbedarf!

32. Der Agronom eines volkseigenen Gutes stellt den Anbauplan auf. Er plant auf einem 20 ha großen Gemüseland für April die Aussaat von 4 ha Möhren, $3\frac{1}{2}$ ha Spinat, $3\frac{1}{4}$ ha Erbsen und $1\frac{1}{2}$ ha Rettichen. Auf dem übrigen Teil muß in diesem Monat der Winterspinat abgeerntet werden. Wie groß ist dieses Feld?

33. Aus einem Schmiedeeisenstück wird eine Achse hergestellt (Abb. 1). Der Rauminhalt des Eisenblocks beträgt $5\frac{1}{2}$ dm³, der Rauminhalt der Achse $3\frac{3}{10}$ dm³. Berechne den Abfall!

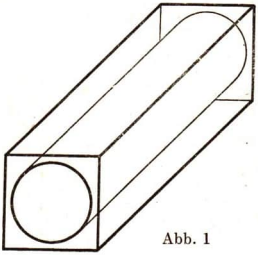


Abb. 1

34. In einer HO-Verkaufsstelle für Molkereiprodukte sind 10 l Sahne vorrätig. Es werden am Vormittag $\frac{1}{8}\,l$, $1\frac{1}{4}\,l$, $\frac{5}{8}\,l$, $\frac{3}{8}\,l$, $\frac{3}{4}\,l$, $\frac{1}{2}\,l$ und am Nachmittag $\frac{3}{4}\,l$, $\frac{1}{8}\,l$, $\frac{1}{4}\,l$, $1\frac{1}{4}\,l$, $\frac{1}{2}\,l$, $1\frac{3}{8}\,l$, $\frac{5}{8}\,l$ verkauft.
Wieviel Liter bleiben übrig?

35. Von einem Ballen Mantelstoff, auf dem noch $17\frac{1}{2}$ m sind, werden nacheinander $2\frac{1}{4}$ m, $3\frac{1}{2}$ m, $4\frac{3}{4}$ m, $2\frac{1}{2}$ m und $3\frac{3}{4}$ m verkauft.

36. Ein Schiff lief in der ersten Stunde $9\frac{1}{2}$ Seemeilen, in der zweiten $11\frac{3}{4}$ Seemeilen und in der dritten Stunde $13\frac{1}{4}$ Seemeilen. Wieviel Seemeilen legte das Schiff in den drei Stunden zurück?
(1 Seemeile = 1 852 m.)

37. Scherzaufgabe: Ein Araber hinterließ seinen 3 Söhnen bei seinem Tode 23 Kamele. Er hatte in seinem Testament bestimmt, daß sein jüngster Sohn die Hälfte, der mittlere ein Drittel und der älteste ein Achtel aller Kamele bekommen sollte. Die Söhne sahen keine Möglichkeit einer solchen Teilung. Sie klagten ihre Not einem alten Nachbarn. Er sagte: „Ich will euch mein einziges Kamel geben, dann habt ihr 24 und könnt teilen.“ Prüfe, ob das Testament überhaupt erfüllt werden konnte!

10. Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl

Beispiel 1: Einige Schüler erhalten vom Werklehrer den Auftrag, die quadratische Platte eines Tisches mit einer Randleiste zu versehen. Für eine Seite werden $\frac{3}{4}$ m Leiste benötigt. Wieviel Meter Leiste sind insgesamt erforderlich?

Lösung:

a) Hans zeichnet eine Strecke von $1\frac{1}{2}$ cm Länge, die $\frac{3}{4}$ m darstellen soll. Da ein Quadrat 4 gleich lange Seiten hat, legt er 4 solcher Strecken anein-

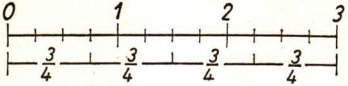


Abb. 2

ander und erhält 3 m (siehe Abb. 2).

b) Hanna meint: „Wir rechnen $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$

$$=\frac{3+3+3+3}{4}=\frac{12}{4}=3.\text{“}$$

c) Gisela sagt: „Da es sich um gleiche Summanden handelt, können wir eine Multiplikationsaufgabe bilden.“

Wir schreiben $\frac{3}{4}\cdot 4$. An Stelle von $\frac{3+3+3+3}{4}$ heißt es dann $\frac{3\cdot 4}{4}$.

$$\frac{3}{4}\cdot 4=\frac{3\cdot 4}{4}=\frac{12}{4}=3$$

Wir multiplizieren also den Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ mit der ganzen Zahl 4 und erhalten $\frac{12}{4}$.

Ergebnis: Es werden 3 m Randleiste benötigt.

Beispiel 2: Eine Pioniergruppe hat 10 Küken, die einen Monat alt sind. Im zweiten Monat verbraucht jedes Küken $\frac{4}{5}$ kg Trockenfutter. Wieviel Kilogramm Trockenfutter werden für die 10 Küken im zweiten Monat verbraucht?

Lösung: $\frac{4}{5}\,\text{kg}\cdot 10=\frac{4\cdot 10}{5}\,\text{kg}=\frac{40}{5}\,\text{kg}=8\,\text{kg}$

Ergebnis: Für 10 Küken werden im zweiten Monat 8 kg Trockenfutter verbraucht.

Wir wollen uns das Rechnen erleichtern. Deshalb kürzen wir, wenn die Möglichkeit gegeben ist, noch vor dem Multiplizieren. Wir führen also die Lösung wie folgt durch:

$$\frac{4}{5}\,\text{kg}\cdot 10=\frac{4\cdot 10}{5}\,\text{kg}=\frac{4\cdot 2}{1}\,\text{kg}=\frac{8}{1}\,\text{kg}=8\,\text{kg}.$$

Beispiel 3: Für einen Anzug werden $3\frac{1}{4}$ m Anzugstoff benötigt. Wieviel Meter Stoff müssen für 6 Anzüge angefordert werden?

Lösung: $3\frac{1}{4}\,\text{m}\cdot 6=\frac{13}{4}\,\text{m}\cdot 6=\frac{13\cdot 6}{4}\,\text{m}=\frac{13\cdot 3}{2}\,\text{m}=\frac{39}{2}\,\text{m}=19\frac{1}{2}\,\text{m}$

Ergebnis: Für 6 Anzüge müssen $19\frac{1}{2}$ m Anzugstoff angefordert werden.

Man multipliziert einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert. Der Nenner bleibt unverändert. Wenn es möglich ist, wird vor dem Multiplizieren gekürzt.

Aufgaben

Kopfrechnen

1. Multipliziere $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{30}$

a) mit 2, **b)** mit 4, **c)** mit 5, **d)** mit 7, **e)** mit 9, **f)** mit 10!

2. Multipliziere

a) $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{4}{19}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{7}{26}$, $\frac{4}{25}$ mit 3;

b) $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{3}{23}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{4}{33}$, $\frac{7}{39}$, $\frac{5}{43}$, $\frac{8}{51}$ mit 5;

c) $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{9}{35}$ mit 8;

d) $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{11}{24}$ mit 12!

Schriftliches Rechnen

3. a) $\frac{8}{21} \cdot 30$	**b)** $\frac{5}{18} \cdot 45$	**c)** $\frac{7}{15} \cdot 33$	**d)** $\frac{7}{9} \cdot 63$
$\frac{11}{16} \cdot 24$	$\frac{8}{25} \cdot 30$	$\frac{6}{7} \cdot 49$	$\frac{13}{14} \cdot 28$
$\frac{11}{12} \cdot 60$	$\frac{15}{34} \cdot 51$	$\frac{2}{15} \cdot 80$	$\frac{9}{20} \cdot 65$
$\frac{9}{10} \cdot 15$	$\frac{5}{6} \cdot 12$	$\frac{7}{8} \cdot 24$	$\frac{14}{25} \cdot 30$
$\frac{7}{36} \cdot 48$	$\frac{19}{45} \cdot 15$	$\frac{17}{20} \cdot 35$	$\frac{8}{25} \cdot 45$
$\frac{10}{27} \cdot 90$	$\frac{16}{17} \cdot 68$	$\frac{5}{16} \cdot 24$	$\frac{8}{9} \cdot 33$
4. a) $\frac{3}{25} \cdot 5$	**b)** $\frac{5}{8} \cdot 4$	**c)** $\frac{11}{15} \cdot 5$	**d)** $\frac{20}{21} \cdot 7$
$\frac{5}{102} \cdot 17$	$\frac{17}{30} \cdot 6$	$\frac{7}{90} \cdot 15$	$\frac{15}{133} \cdot 7$
$\frac{11}{108} \cdot 18$	$\frac{6}{91} \cdot 13$	$\frac{9}{121} \cdot 11$	$\frac{13}{48} \cdot 12$
$\frac{7}{12} \cdot 9$	$\frac{14}{15} \cdot 12$	$\frac{29}{60} \cdot 27$	$\frac{15}{16} \cdot 12$
$\frac{13}{18} \cdot 15$	$\frac{23}{30} \cdot 25$	$\frac{5}{28} \cdot 28$	$\frac{17}{26} \cdot 13$
$\frac{25}{78} \cdot 65$	$\frac{13}{51} \cdot 34$	$\frac{6}{55} \cdot 44$	$\frac{19}{48} \cdot 36$
5. a) $\frac{7}{9} \cdot 39$	**b)** $\frac{9}{16} \cdot 24$	**c)** $\frac{11}{20} \cdot 30$	**d)** $\frac{3}{14} \cdot 21$
$\frac{7}{18} \cdot 24$	$\frac{17}{24} \cdot 30$	$\frac{22}{27} \cdot 24$	$\frac{9}{14} \cdot 36$
$\frac{7}{18} \cdot 22$	$\frac{5}{16} \cdot 34$	$\frac{13}{66} \cdot 36$	$\frac{31}{42} \cdot 56$
$\frac{61}{87} \cdot 54$	$\frac{7}{15} \cdot 25$	$\frac{17}{21} \cdot 49$	$\frac{8}{9} \cdot 42$
$\frac{9}{64} \cdot 28$	$\frac{11}{15} \cdot 35$	$\frac{7}{33} \cdot 55$	$\frac{29}{81} \cdot 54$
$\frac{15}{32} \cdot 24$	$\frac{9}{49} \cdot 42$	$\frac{13}{35} \cdot 25$	$\frac{29}{80} \cdot 48$

6. **a)** $15\frac{5}{7} \cdot 4$ $10\frac{5}{9} \cdot 36$ $13\frac{13}{19} \cdot 7$ $4\frac{11}{14} \cdot 15$ $6\frac{2}{3} \cdot 13$ $19\frac{5}{8} \cdot 12$

b) $12\frac{3}{5} \cdot 12$ $6\frac{5}{12} \cdot 15$ $7\frac{18}{25} \cdot 35$ $3\frac{17}{25} \cdot 15$ $18\frac{4}{7} \cdot 9$ $11\frac{7}{12} \cdot 7$

c) $5\frac{7}{11} \cdot 9$ $7\frac{11}{14} \cdot 9$ $3\frac{7}{12} \cdot 13$ $5\frac{13}{20} \cdot 11$ $5\frac{5}{6} \cdot 10$ $20\frac{9}{10} \cdot 9$

d) $2\frac{7}{19} \cdot 38$ $15\frac{8}{15} \cdot 8$ $6\frac{13}{18} \cdot 15$ $7\frac{2}{3} \cdot 8$ $3\frac{3}{8} \cdot 14$ $6\frac{7}{9} \cdot 21$

7. **a)** $17\frac{2}{9} \cdot 3$ $5\frac{3}{17} \cdot 34$ $5\frac{3}{14} \cdot 21$ $18\frac{16}{49} \cdot 5$ $3\frac{7}{9} \cdot 6$ $9\frac{7}{30} \cdot 20$

b) $14\frac{4}{5} \cdot 5$ $17\frac{3}{8} \cdot 40$ $4\frac{5}{6} \cdot 18$ $14\frac{8}{49} \cdot 7$ $8\frac{8}{15} \cdot 10$ $45\frac{5}{8} \cdot 14$

c) $15\frac{6}{7} \cdot 21$ $3\frac{2}{7} \cdot 14$ $17\frac{2}{15} \cdot 3$ $19\frac{9}{56} \cdot 4$ $8\frac{3}{26} \cdot 13$ $23\frac{11}{20} \cdot 14$

d) $5\frac{11}{13} \cdot 13$ $7\frac{3}{10} \cdot 25$ $24\frac{7}{36} \cdot 4$ $14\frac{5}{8} \cdot 12$ $7\frac{5}{18} \cdot 12$ $65\frac{5}{8} \cdot 4$

8. **a)** $4\frac{5}{6} \cdot 9$ $6\frac{4}{9} \cdot 21$ $8\frac{7}{10} \cdot 15$ $7\frac{15}{16} \cdot 20$ $7\frac{5}{8} \cdot 12$ $21\frac{3}{4} \cdot 14$

b) $3\frac{9}{16} \cdot 24$ $5\frac{7}{8} \cdot 14$ $12\frac{5}{8} \cdot 12$ $4\frac{11}{13} \cdot 18$ $25\frac{14}{15} \cdot 10$ $6\frac{4}{17} \cdot 51$

c) $5\frac{7}{12} \cdot 18$ $19\frac{4}{9} \cdot 10$ $6\frac{12}{13} \cdot 7$ $5\frac{7}{12} \cdot 16$ $9\frac{7}{24} \cdot 15$ $8\frac{8}{33} \cdot 22$

d) $7\frac{7}{9} \cdot 15$ $10\frac{11}{18} \cdot 20$ $5\frac{14}{15} \cdot 12$ $6\frac{5}{8} \cdot 9$ $4\frac{23}{42} \cdot 35$ $3\frac{8}{49} \cdot 35$

9. Bestimme von $3\frac{4}{5}$, $5\frac{5}{6}$, $4\frac{8}{15}$, $9\frac{9}{16}$, $5\frac{11}{18}$, $3\frac{7}{24}$, $6\frac{6}{13}$, $13\frac{16}{21}$

a) das Vierfache, **b)** das Sechsfache, **c)** das Siebenfache,
d) das Neunfache, **e)** das Zwölffache, **f)** das Dreißigfache!

10. Berechne das Dreifache **a)** der Summe, **b)** der Differenz von $7\frac{3}{10}$ und $4\frac{8}{15}$!

11. Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich den 6. Teil davon nehme, erhalte ich $3\frac{5}{6}$. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

12. Petra hat im vergangenen Monat an 17 Tagen je $\frac{3}{4}\,l$ und an 13 Tagen je $1\frac{1}{4}\,l$ Milch geholt. Wieviel Liter Milch hat Petra im vergangenen Monat insgesamt gekauft?

13. Wenn man eine Zahl durch 3 teilt, erhält man $3\frac{5}{8}$. Wie heißt die Zahl?

14. Die 153 Schüler einer Landschule wollen zur Winterfütterung unseres Wildes beitragen. Jeder von ihnen verpflichtet sich, im Herbst $\frac{3}{4}$ kg Eicheln und $1\frac{1}{4}$ kg Kastanien zu sammeln.

a) Wieviel Kilogramm Eicheln und wieviel Kilogramm Kastanien sollen insgesamt gesammelt werden?

b) Nach Abschluß der Sammelaktion ergab sich, daß insgesamt $148\frac{1}{2}$ kg Eicheln und $248\frac{3}{4}$ kg Kastanien gesammelt wurden. Vergleiche Verpflichtung und Sammelergebnis!

15. Wir wollen in unseren Heften keine Seiten beschmieren oder frei lassen. Klaus hat von den 28 Seiten seines Rechenheftes $3\frac{1}{3}$ Seiten nicht ausgenutzt.

a) Wieviel Seiten würden verschwendet werden, wenn alle 36 Schüler der Klasse so nachlässig gearbeitet hätten?

b) Wieviel Hefte ergäbe das?

16. 1 kg Rohkaffee wiegt nach dem Brennen nur noch $\frac{4}{5}$ kg.

a) Wieviel Kilogramm wiegen 3 kg Rohkaffee nach dem Brennen? Um wieviel Kilogramm verringerte sich die Masse?

b) Es werden $\frac{3}{4}$ dt Rohkaffee gebrannt.

17. 1 kg Mehl ergibt $1\frac{1}{3}$ kg Brot.

a) Wieviel Kilogramm Brot kann man aus 63 kg Mehl backen?

b) Wieviel Brote sind das, wenn ein Brot 1 500 g wiegt?

18. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft erntet von 172 ha Getreideanbaufläche durchschnittlich $26\frac{1}{2}$ dt Getreide je Hektar.

a) Wieviel Dezitonnen Getreide erntet sie insgesamt?

b) Etwa $\frac{2}{3}$ der Ernte können sofort gedroschen und abgeliefert werden. Wie groß ist die abgelieferte Getreidemenge?

19. Für die sechs Braunbären eines Tierparks lagert im Vorratsraum Futter für $4\frac{1}{2}$ Tage. Wieviel Tage könnte ein Bär mit dieser Futtermenge gefüttert werden?

20. Zwei Gärtner graben einen Garten in $1\frac{3}{4}$ Tagen um. Wie lange würde ein Gärtner dazu brauchen?

21. In einem Werkstück sollen Bohrungen angebracht werden. Für diese Arbeit wird je Werkstück eine Zeit von $1\frac{1}{2}$ min gebraucht. In welcher Zeit kann demnach ein Arbeiter 70 Werkstücke bearbeiten?

22. Eine Dampfmaschine verbraucht in einer Stunde $\frac{3}{10}$ *l* Schmieröl. Wieviel Liter Schmieröl werden in 3, 4, 5, 7, 9 und 10 Stunden verbraucht?

11. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl

Beispiel 1: Mutter teilt eine Tafel Schokolade in 5 gleiche Teile. $\frac{1}{5}$ davon behält sie selbst. $\frac{4}{5}$ sind für ihre beiden Kinder bestimmt und werden gleichmäßig verteilt.
Wieviel von der ganzen Tafel Schokolade bekommt jedes Kind?

Lösung:

Wenn wir die Tafel Schokolade auseinanderbrechen, sehen wir, daß jedes Kind die Hälfte von den $\frac{4}{5}$, also $\frac{2}{5}$ der ganzen Tafel Schokolade bekommt (Abb. 3).

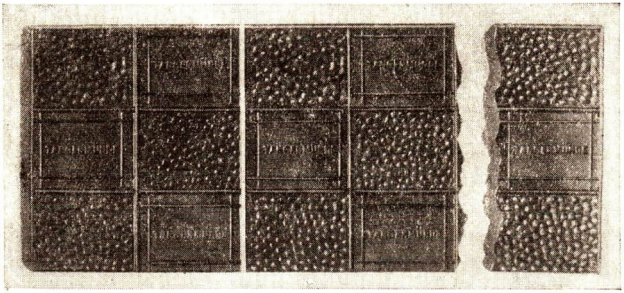


Abb. 3

Wir können die Lösung auch durch Zeichnen der Schokoladentafel finden (Abb. 4).

Die Lösung der Aufgabe $\frac{4}{5} : 2$ können wir uns an einer Strecke veranschaulichen (Abb. 5).

Auch bei dieser Darstellung erhalten wir die gleiche Lösung $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$.

Wenn wir $\frac{4}{5}$ durch 2 teilen sollen, brauchen wir nur den Zähler durch 2 zu teilen.

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4 : 2}{5} = \frac{2}{5}$$

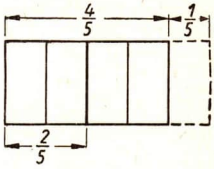


Abb. 4

Beispiel 2: $\frac{3}{4}$ der Schokoladentafel sollen gleichmäßig an 2 Kinder verteilt werden. Welchen Teil der ganzen Tafel erhält diesmal jedes Kind?

Abb. 5

a) Lösung durch Zeichnen:

Es wird in der Aufgabe gefragt, welchen Teil der ganzen Tafel jedes Kind erhält. Deshalb müssen wir bei der Zeichnung auch das fehlende Viertel berücksichtigen. Es

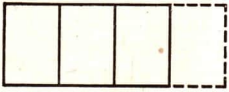
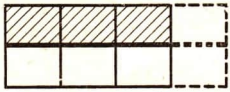


Abb. 6a

Abb. 6b


wurde in der Abbildung 6a gestrichelt hinzugefügt. Beim Halbieren sehen wir, daß jedes Kind $\frac{3}{8}$ der ganzen Tafel erhält (Abb. 6b).

Auch an einer Strecke läßt sich die Lösung der Aufgabe $\frac{3}{4} : 2$ darstellen (Abb. 7).

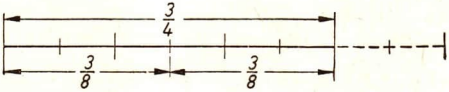


Abb. 7

Wir erhalten also $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

b) Lösung durch Rechnen:

Im 1. Beispiel haben wir den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividiert. Das ist im 2. Beispiel $\left(\frac{3}{4} : 2\right)$ nicht möglich. Wir können aber den Bruch so umformen, daß der Zähler eine durch 2 teilbare Zahl wird. Wir erweitern zu diesem Zweck den Bruch $\frac{3}{4}$ mit 2 und erhalten $\frac{6}{8}$. Jetzt könnten wir die Division wie im 1. Beispiel durchführen. Ausführlich geschrieben ergäbe sich dann:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} : 2 = \frac{3 \cdot 2 : 2}{4 \cdot 2} = \boxed{\frac{3}{4 \cdot 2}} = \frac{3}{8}.$$

Aus dem eingerahmten Bruchausdruck erkennen wir einen kürzeren Lösungsweg. Wir multiplizieren den Nenner mit dem Divisor. Der Zähler bleibt unverändert.

$$\frac{3}{4} : 2 = \boxed{\frac{3}{4 \cdot 2}} = \frac{3}{8}$$

Beispiel 3: Aus $11\frac{3}{5}$ m Fahnentuch sollen 4 gleich große Fahnen angefertigt werden. Wie lang wird jede Fahne?

$$11\frac{3}{5}\,\text{m} : 4 = \frac{58}{5}\,\text{m} : 4 = \frac{58}{5 \cdot 4}\,\text{m} = \frac{29}{5 \cdot 2}\,\text{m} = \frac{29}{10}\,\text{m} = 2\frac{9}{10}\,\text{m}$$

Jede Fahne wird 2,90 m lang.

Man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert. Der Zähler bleibt unverändert. Wenn es möglich ist, kürzt man vor dem Multiplizieren. Gemischte Zahlen werden vorher in unechte Brüche umgewandelt.

Wir vergleichen miteinander

Multiplizieren eines Bruches mit einer ganzen Zahl	Dividieren eines Bruches durch eine ganze Zahl
$\frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$

Aufgaben

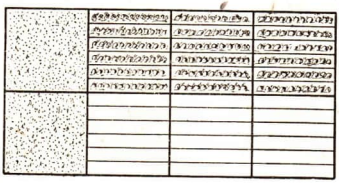
1. Löse die folgenden Aufgaben durch Zeichnen an einer Strecke!

a) $\frac{2}{3} : 3$ **b)** $\frac{3}{5} : 2$ **c)** $\frac{4}{5} : 3$ **d)** $\frac{3}{4} : 2$ **e)** $\frac{3}{4} : 3$

Lösungsbeispiel: $\frac{1}{6} : 2$ *Ergebnis (Abb. 8):* $\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{12}$

2. Die Abbildung 9 stellt die Lösung der folgenden Aufgabe dar: In einem Garten ist $\frac{1}{4}$ als Rasenplatz eingerichtet, von dem Rest

Abb. 8



wird die Hälfte mit Kartoffeln bebaut. Welcher Teil des ganzen Gartens wird mit Kartoffeln bebaut? Lies das Ergebnis aus der Zeichnung ab!

Abb. 9

3. Löse durch eine ähnliche Zeichnung die folgende Aufgabe! Auf einer Hälfte eines rechteckigen Gartens sind Bohnen gelegt. Von der anderen Hälfte wird der dritte Teil mit Erdbeeren bepflanzt. Welcher Teil des ganzen Gartens ist das?

4. Löse auf entsprechende Weise die folgenden Aufgaben!

a) $\frac{4}{5}:3$ **b)** $\frac{2}{3}:4$ **c)** $\frac{3}{4}:3$ **d)** $\frac{5}{6}:4$ **e)** $\frac{3}{5}:2$

Kopfrechnen

5. a) $\frac{1}{2}:5$ **b)** $\frac{2}{3}:3$ **c)** $\frac{3}{4}:5$ **d)** $\frac{1}{6}:4$ **e)** $\frac{2}{9}:5$
f) $\frac{8}{9}:3$ **g)** $\frac{3}{5}:8$ **h)** $\frac{5}{8}:9$ **i)** $\frac{2}{3}:5$ **k)** $\frac{4}{25}:3$
l) $\frac{11}{12}:6$ **m)** $\frac{27}{28}:2$ **n)** $\frac{5}{7}:2$ **o)** $\frac{3}{8}:4$ **p)** $\frac{2}{7}:5$

6. a) $\frac{11}{14}:9$ **b)** $\frac{5}{9}:8$ **c)** $\frac{7}{8}:4$ **d)** $\frac{5}{12}:6$ **e)** $\frac{5}{13}:11$
f) $\frac{7}{8}:5$ **g)** $\frac{7}{9}:8$ **h)** $\frac{9}{10}:5$ **i)** $\frac{3}{7}:4$ **k)** $\frac{11}{12}:9$
l) $\frac{3}{13}:7$ **m)** $\frac{5}{8}:11$ **n)** $\frac{7}{12}:3$ **o)** $\frac{4}{5}:7$ **p)** $\frac{6}{11}:5$

Schriftliches Rechnen

7. a)	$\frac{4}{5}:12$	**b)** $\frac{5}{9}:15$	**c)** $\frac{7}{9}:21$	**d)** $\frac{9}{10}:6$
	$\frac{5}{12}:15$	$\frac{24}{25}:12$	$\frac{9}{13}:15$	$\frac{18}{25}:27$
	$\frac{21}{25}:14$	$\frac{18}{19}:27$	$\frac{6}{7}:24$	$\frac{14}{15}:49$
	$\frac{27}{32}:36$	$\frac{8}{9}:56$	$\frac{36}{37}:54$	$\frac{10}{13}:25$
	$\frac{5}{6}:15$	$\frac{6}{7}:18$	$\frac{9}{11}:12$	$\frac{15}{16}:25$
	$\frac{24}{25}:16$	$\frac{13}{18}:26$	$\frac{7}{11}:14$	$\frac{44}{57}:33$

8. a)	$\frac{24}{25}:36$	**b)** $\frac{7}{9}:49$	**c)** $\frac{24}{25}:48$	**d)** $\frac{25}{34}:65$
	$\frac{16}{17}:48$	$\frac{4}{5}:16$	$\frac{5}{7}:35$	$\frac{22}{25}:44$
	$\frac{18}{23}:45$	$\frac{16}{17}:64$	$\frac{25}{27}:75$	$\frac{21}{23}:70$
	$\frac{5}{7}:20$	$\frac{17}{18}:34$	$\frac{12}{17}:16$	$\frac{7}{9}:49$
	$\frac{6}{7}:33$	$\frac{3}{8}:24$	$\frac{11}{19}:99$	$\frac{6}{11}:36$
	$\frac{24}{29}:16$	$\frac{12}{13}:42$	$\frac{14}{15}:42$	$\frac{19}{20}:38$

9. **a)** $2\frac{1}{4} : 5$ **b)** $5\frac{1}{3} : 3$ **c)** $2\frac{1}{3} : 4$ **d)** $4\frac{1}{4} : 4$

$6\frac{1}{3} : 5$ $5\frac{1}{3} : 5$ $10\frac{1}{2} : 13$ $7\frac{1}{3} : 9$

$9\frac{1}{4} : 10$ $8\frac{1}{5} : 10$ $10\frac{1}{3} : 20$ $15\frac{1}{2} : 25$

10. Lösungsbeispiel: $3\frac{1}{5} : 6 = \frac{16}{5} : 6 = \frac{16}{5 \cdot 6} = \frac{8}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$

a) $3\frac{3}{4} : 5$ **b)** $3\frac{3}{7} : 8$ **c)** $6\frac{3}{4} : 6$ **d)** $5\frac{1}{4} : 7$

$3\frac{6}{7} : 9$ $3\frac{5}{9} : 4$ $6\frac{6}{11} : 8$ $3\frac{4}{15} : 7$

$4\frac{7}{12} : 5$ $2\frac{2}{9} : 5$ $8\frac{1}{6} : 7$ $5\frac{3}{5} : 7$

$5\frac{1}{11} : 14$ $11\frac{5}{9} : 13$ $7\frac{1}{8} : 19$ $10\frac{2}{7} : 12$

$7\frac{1}{2} : 5$ $8\frac{3}{4} : 7$ $9\frac{9}{10} : 11$ $4\frac{3}{8} : 7$

$3\frac{1}{3} : 2$ $5\frac{1}{11} : 8$ $6\frac{1}{8} : 7$ $4\frac{1}{11} : 9$

11. **a)** $7\frac{1}{3} : 58$ **b)** $5\frac{2}{3} : 68$ **c)** $2\frac{1}{2} : 15$ **d)** $6\frac{1}{4} : 20$

$3\frac{3}{4} : 45$ $7\frac{3}{5} : 57$ $8\frac{1}{4} : 44$ $5\frac{4}{9} : 70$

$5\frac{5}{8} : 27$ $10\frac{4}{5} : 72$ $12\frac{2}{3} : 95$ $16\frac{2}{3} : 40$

$14\frac{2}{7} : 75$ $11\frac{1}{9} : 60$ $8\frac{1}{3} : 25$ $6\frac{3}{4} : 18$

$10\frac{1}{5} : 17$ $1\frac{2}{13} : 5$ $3\frac{1}{8} : 5$ $7\frac{1}{7} : 10$

12. **a)** $29\frac{3}{8} : 5$ **b)** $43\frac{3}{7} : 4$ **c)** $69\frac{7}{8} : 13$ **d)** $100\frac{4}{5} : 18$

$87\frac{1}{9} : 16$ $68\frac{1}{3} : 5$ $75\frac{1}{9} : 4$ $90\frac{5}{6} : 5$

$72\frac{1}{3} : 14$ $50\frac{2}{5} : 16$ $92\frac{6}{7} : 15$ $68\frac{2}{5} : 18$

$80\frac{2}{5} : 24$ $53\frac{3}{4} : 25$ $79\frac{1}{3} : 28$ $98\frac{5}{14} : 24$

$125\frac{5}{8} : 60$ $258\frac{1}{11} : 51$ $110\frac{2}{5} : 96$ $356\frac{7}{10} : 87$

13. **a)** Multipliziere jede der folgenden Zahlen mit 3, 8, 15, 24!
b) Dividiere jede der folgenden Zahlen durch 3, 8, 15, 24!

$\frac{17}{30}$; $\frac{72}{95}$; $\frac{45}{64}$; $\frac{57}{80}$; $7\frac{4}{11}$; $9\frac{3}{8}$; $18\frac{4}{9}$; $6\frac{6}{17}$

14. Zu einem Gericht Rotkohl für 3 Personen werden $\frac{3}{4}$ kg Rotkohl, $\frac{1}{4}$ *l* Wasser, $\frac{1}{8}$ *l* Weinessig, 20 g Zucker, 100 g Schmalz, 20 g Salz gebraucht. Es soll **a)** für eine Person, **b)** für 6 Personen, **c)** für 15 Personen, **d)** in einer Werkküche für 450 Personen gekocht werden.

15. **a)** Aus 5 kg Blaubeeren erhält man durch Pressen etwa $3\frac{1}{2}$ *l* Saft. Wieviel Liter Saft erhält man aus 1 kg Blaubeeren?

b) Aus 10 kg Johannisbeeren kann man durch Pressen etwa $6\frac{2}{3}$ *l* Saft gewinnen. Wieviel Saft kann man aus 5 kg Johannisbeeren gewinnen?

c) Aus 5 kg Stachelbeeren erhält man etwa $3\frac{3}{4}$ *l* Saft. Wieviel Liter Saft erhält man aus 1 kg Stachelbeeren?

16. Es wurde geschätzt, daß ein Schüler für das Umgraben eines großen Beetes in unserem Schulgarten $3\frac{1}{4}$ h benötigt. Damit das Beet bald bepflanzt werden kann, werden 3 Schüler beauftragt, das Beet umzugraben. Wieviel Zeit benötigen sie für die Arbeit? Rechne das Ergebnis in Minuten um!

17. Eine Schülergruppe wandert auf einer Ferienwanderung an vier aufeinanderfolgenden Tagen folgende Wegstrecken: $12\frac{1}{2}$ km, $16\frac{3}{4}$ km, $3\frac{3}{4}$ km, $14\frac{1}{2}$ km. Berechne die durchschnittliche Tagesleistung!

18. Acht Klassen einer Schule beteiligten sich am Wettbewerb zum Sammeln von Altmaterial. Sie erzielten ein gutes Sammelergebnis:

Klasse	Schrott in kg	Altpapier in kg	Lumpen in kg
5a	$36\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	$15\frac{1}{4}$
5b	$19\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$12\frac{3}{8}$
6a	21	$\frac{7}{8}$	$20\frac{1}{2}$
6b	$24\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{2}$	11
7a	$16\frac{1}{8}$	$3\frac{3}{4}$	$13\frac{5}{8}$
7b	$45\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$	$9\frac{3}{5}$
8a	$22\frac{7}{8}$	$4\frac{3}{5}$	$14\frac{1}{4}$
8b	$20\frac{5}{8}$	3	$12\frac{3}{4}$

a) Berechne die Gesamtmengen an Schrott, an Papier und an Lumpen, die von der Schule gesammelt wurden!

b) Wieviel Kilogramm Schrott, Papier und Lumpen wurden durchschnittlich von jeder Klasse gesammelt?

19. a) Welchen Wert haben eine punktierte halbe Note, Viertelnote, Achtelnote und Sechzehntelnote?

b) Bestimme in den nebenstehenden Takten (Abb. 10) den Wert der einzelnen Noten!

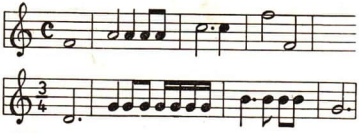


Abb. 10

c) Ergänze die folgenden Notenangaben zu je einem $\frac{4}{4}$-Takt!

1) 2) 3) 4) 5)

d) Ergänze 2 Viertelnoten zum $\frac{4}{4}$-Takt! Die übrigen Noten sollen Achtel- und Sechzehntelnoten sein.

e) Ergänze eine halbe Note und eine punktierte Viertelnote zu einem $\frac{4}{4}$-Takt! Die übrigen Noten sollen Achtel sein.

12. Multiplikation eines Bruches mit einem Bruch

Beispiel 1: Für 1 ha braucht man $1\frac{2}{5}$ dt Roggen als Saatgut. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft will eine Ackerfläche von 12 ha mit Roggen bestellen. Wieviel Dezitonnen Roggen benötigt sie als Saatgut für diese Fläche?

Lösung: $1\frac{2}{5}\,\text{dt} \cdot 12 = \frac{7 \cdot 12}{5}\,\text{dt} = \frac{84}{5}\,\text{dt} = 16\frac{4}{5}\,\text{dt}$

Ergebnis: Für 12 ha Ackerfläche benötigt die LPG $16\frac{4}{5}$ dt Roggen als Saatgut.

Weil wir von einer Einheit (1 ha) auf eine Mehrheit (12 ha) schließen müssen wir multiplizieren.

Beispiel 2: Die benachbarte LPG will eine Ackerfläche von $15\frac{1}{2}$ ha mit Roggen bestellen. Auch sie benötigt für 1 ha eine Saatgutmenge von $1\frac{2}{5}$ dt Roggen. Wieviel Dezitonnen Saatgut braucht die LPG für ihre Ackerfläche?

Lösung: Wir schließen auch bei dieser Aufgabe von einer Einheit (1 ha) auf eine Mehrheit $\left(15\frac{1}{2}\,\text{ha}\right)$. Folglich müssen wir multiplizieren.

$$1\frac{2}{5}\,\text{dt} \cdot 15\frac{1}{2} = \frac{7}{5}\,\text{dt} \cdot \frac{31}{2}$$

Wir wissen noch nicht, was es bedeutet, eine Zahl mit einem Bruch zu multiplizieren. Deshalb überlegen wir: Im Beispiel 1 haben wir das 12fache von $\frac{7}{5}$ dt berechnet. Im Beispiel 2 müssen wir das $15\frac{1}{2}$fache (das $\frac{31}{2}$fache) von $\frac{7}{5}$ dt berechnen. Wir berechnen $\frac{31}{2}$ von $\frac{7}{5}$ dt.

$$\frac{1}{2} \text{ von } \frac{7}{5}\,\text{dt} = \frac{7}{5}\,\text{dt} : 2 = \frac{7}{5 \cdot 2}\,\text{dt}$$

$$\frac{31}{2} \text{ von } \frac{7}{5}\,\text{dt} = \frac{7}{5 \cdot 2}\,\text{dt} \cdot 31 = \boxed{\frac{7 \cdot 31}{5 \cdot 2}}\,\text{dt} = \frac{217}{10}\,\text{dt} = 21\frac{7}{10}\,\text{dt}$$

Ergebnis: Die LPG benötigt für $15\frac{1}{2}$ ha eine Saatgutmenge von $21\frac{7}{10}$ dt Roggen.

Beispiel 3: Von $\frac{3}{4}\,l$ Öl sind $\frac{2}{5}$ verbraucht worden. Wieviel Liter sind demnach verbraucht worden?

Lösung: Wir berechnen $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}\,l$:

$$\frac{1}{5} \text{ von } \frac{3}{4}\,l = \frac{3}{4}\,l : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5}\,l$$

$$\frac{2}{5} \text{ von } \frac{3}{4}\,l = \frac{3}{4 \cdot 5}\,l \cdot 2 = \boxed{\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}}\,l = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 5}\,l = \frac{3}{10}\,l$$

Ergebnis: Es sind $\frac{3}{10}\,l$ Öl verbraucht worden.

Beispiel 4: Die Entfernung zweier Orte beträgt $4\frac{1}{2}$ km. $\frac{2}{3}$ des Weges führen durch Wald. Wieviel Kilometer sind das?

Lösung: Wir berechnen $\frac{2}{3}$ von $4\frac{1}{2}$ km:

$$\frac{1}{3} \text{ von } 4\frac{1}{2}\,\text{km} = \frac{9}{2}\,\text{km} : 3 = \frac{9}{2 \cdot 3}\,\text{km}$$

$$\frac{2}{3} \text{ von } 4\frac{1}{2}\,\text{km} = \frac{9}{2 \cdot 3}\,\text{km} \cdot 2 = \boxed{\frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 3}}\,\text{km} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 1}\,\text{km} = 3\,\text{km}$$

Ergebnis: 3 km des Weges führen durch Wald.

Wenn wir die Aufgaben und ihre Lösung betrachten, stellen wir folgendes fest:

Wir wollten berechnen:	Wir erhielten beim Rechnen den Bruchausdruck:
Beispiel 2: $\frac{31}{2}$ von $\frac{7}{5}$ dt	$\frac{7 \cdot 31}{5 \cdot 2}$
Beispiel 3: $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}\,l$	$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5}$
Beispiel 4: $\frac{2}{3}$ von $4\frac{1}{2}$ km	$\frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 3}$

Wir sehen also aus dem Bruchausdruck, daß wir die „Von-Aufgaben“ als Multiplikationsaufgaben rechnen können. Dabei werden die Zähler miteinander und auch die Nenner miteinander multipliziert. Der umständliche Weg durch Schließen wird überflüssig.

Das Beispiel 2 schreiben wir kurz als Multiplikationsaufgabe:

$$1\frac{2}{5}\,\mathrm{dt} \cdot 15\frac{1}{2} = \frac{7}{5}\,\mathrm{dt} \cdot \frac{31}{2} = \frac{7 \cdot 31}{5 \cdot 2}\,\mathrm{dt} = 21\frac{7}{10}\,\mathrm{dt}$$

Schreibe die Lösung der Beispiele 3 und 4 auch als Multiplikationsaufgaben in dieser kurzen Form!

Man multipliziert einen Bruch mit einem Bruch, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.
Wenn es möglich ist, kürzt man vor dem Multiplizieren.
Gemischte Zahlen werden vor dem Multiplizieren in unechte Brüche verwandelt.

Die Regel läßt sich auch auf das Multiplizieren von Brüchen mit ganzen Zahlen anwenden. Wir haben bereits Brüche mit dem Nenner 1 kennengelernt. So können wir die Aufgabe $\frac{3}{4} \cdot 5$ auch anders schreiben:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 1} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Wir brauchen uns also für das Multiplizieren mit Brüchen nur die hier angegebene, fettgedruckte Regel zu merken.

Kurzform: Bruch mal Bruch $= \dfrac{\text{Zähler mal Zähler}}{\text{Nenner mal Nenner}}$

Aufgaben

Kopfrechnen

1.	a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}$	b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6}$	c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}$	d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4}$	e) $\frac{2}{13} \cdot \frac{2}{5}$
	$\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{15}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{15}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{13}$	$\frac{2}{7} \cdot \frac{6}{7}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{11}$
	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{7}$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11}$	$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$
	$\frac{5}{7} \cdot \frac{6}{11}$	$\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{11}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{11}{17}$	$\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$
	$\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{7}$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{7}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{10}$	$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{4}{13} \cdot \frac{6}{7}$
2.	a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$	b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$	c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}$	d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}$	e) $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}$
	$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{9}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{10}$

3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ b) $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ c) $\left(\frac{4}{9}\right)^2$ d) $\left(\frac{7}{8}\right)^2$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ f) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

Bilde selbst weitere Aufgaben!

Schriftliches Rechnen

Bei den folgenden Aufgaben kürzen wir vor dem Ausrechnen.

4. a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{8}$ $\frac{7}{12} \cdot \frac{36}{37}$ $\frac{4}{21} \cdot \frac{63}{65}$ $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ $\frac{25}{38} \cdot \frac{39}{50}$ $\frac{9}{10} \cdot \frac{25}{27}$

b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{12}{13}$ $\frac{5}{17} \cdot \frac{51}{53}$ $\frac{38}{39} \cdot \frac{5}{19}$ $\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{15}$ $\frac{28}{51} \cdot \frac{85}{96}$ $\frac{11}{15} \cdot \frac{25}{44}$

c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{12}$ $\frac{6}{13} \cdot \frac{39}{40}$ $\frac{28}{29} \cdot \frac{5}{14}$ $\frac{9}{11} \cdot \frac{32}{45}$ $\frac{4}{25} \cdot \frac{5}{9}$ $\frac{22}{75} \cdot \frac{25}{33}$

d) $\frac{4}{9} \cdot \frac{18}{25}$ $\frac{57}{59} \cdot \frac{2}{19}$ $\frac{6}{11} \cdot \frac{77}{85}$ $\frac{26}{27} \cdot \frac{16}{39}$ $\frac{16}{17} \cdot \frac{51}{64}$ $\frac{12}{17} \cdot \frac{51}{82}$

5. a) $\frac{21}{38} \cdot \frac{19}{49}$ $\frac{13}{25} \cdot \frac{15}{52}$ $\frac{13}{32} \cdot \frac{48}{65}$ $\frac{21}{44} \cdot \frac{22}{49}$

b) $\frac{33}{34} \cdot \frac{17}{22}$ $\frac{42}{55} \cdot \frac{33}{70}$ $\frac{24}{35} \cdot \frac{55}{84}$ $\frac{48}{65} \cdot \frac{13}{32}$

c) $\frac{16}{45} \cdot \frac{55}{64}$ $\frac{45}{56} \cdot \frac{14}{75}$ $\frac{26}{45} \cdot \frac{35}{39}$ $\frac{38}{49} \cdot \frac{91}{114}$

d) $\frac{41}{45} \cdot \frac{6}{41}$ $\frac{28}{51} \cdot \frac{34}{49}$ $\frac{14}{17} \cdot \frac{34}{35}$ $\frac{19}{60} \cdot \frac{40}{57}$

6. a) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ $3\frac{9}{10} \cdot \frac{31}{39}$ $7\frac{9}{13} \cdot \frac{67}{100}$ $5\frac{1}{11} \cdot \frac{9}{14}$

b) $1\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7}$ $3\frac{7}{11} \cdot \frac{39}{40}$ $9\frac{4}{15} \cdot \frac{137}{139}$ $9\frac{1}{7} \cdot \frac{19}{24}$

c) $2\frac{3}{8} \cdot \frac{17}{19}$ $4\frac{7}{8} \cdot \frac{37}{39}$ $7\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}$ $9\frac{9}{10} \cdot \frac{5}{22}$

d) $2\frac{4}{9} \cdot \frac{13}{22}$ $6\frac{5}{12} \cdot \frac{61}{77}$ $6\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$ $8\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7}$

7. a) $\frac{3}{8} \cdot 3\frac{1}{5}$ $\frac{4}{9} \cdot 1\frac{5}{13}$ $\frac{2}{25} \cdot 16\frac{2}{3}$ $\frac{6}{7} \cdot 4\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{9} \cdot 6\frac{3}{4}$ $\frac{7}{12} \cdot 4\frac{4}{5}$ $\frac{7}{75} \cdot 13\frac{7}{11}$ $\frac{10}{13} \cdot 5\frac{1}{5}$

c) $\frac{5}{7} \cdot 5\frac{1}{4}$ $\frac{3}{16} \cdot 2\frac{2}{23}$ $\frac{8}{9} \cdot 4\frac{1}{2}$ $\frac{9}{11} \cdot 7\frac{6}{7}$

d) $\frac{3}{8} \cdot 3\frac{3}{7}$ $\frac{10}{11} \cdot 3\frac{1}{7}$ $\frac{8}{35} \cdot 6\frac{4}{11}$ $\frac{8}{15} \cdot 7\frac{4}{11}$

8. a) $\frac{5}{24} \cdot 5\frac{1}{3}$ $\frac{1}{18} \cdot 2\frac{1}{13}$ $5\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{40}$ $8\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{35}$

b) $\frac{11}{12} \cdot 3\frac{3}{5}$ $2\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{12}$ $\frac{5}{12} \cdot 4\frac{4}{5}$ $\frac{14}{25} \cdot 5\frac{5}{6}$

c) $9\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{21}$ $3\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{30}$ $6\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{13}$ $11\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{40}$

d) $2\frac{3}{11} \cdot \frac{4}{15}$ $\frac{5}{24} \cdot 2\frac{2}{17}$ $\frac{3}{14} \cdot 9\frac{4}{5}$ $\frac{5}{16} \cdot 9\frac{3}{5}$

9. a) $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{2}$ b) $2\frac{3}{5} \cdot 3\frac{2}{3}$ c) $4\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{3}$ d) $3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3}$

$3\frac{4}{5} \cdot 2\frac{3}{4}$ $6\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{5}$ $5\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3}$ $4\frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{2}$

$3\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{5}$ $7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4}$ $6\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$ $2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{2}{3}$

$5\frac{1}{9} \cdot 1\frac{1}{2}$ $4\frac{2}{3} \cdot 4\frac{2}{5}$ $8\frac{7}{9} \cdot 3\frac{1}{2}$ $4\frac{4}{5} \cdot 4\frac{2}{7}$

$7\frac{1}{8} \cdot 11\frac{1}{3}$ $9\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{19}$ $3\frac{5}{7} \cdot 2\frac{4}{9}$ $5\frac{3}{8} \cdot 8\frac{4}{5}$

10. a) $8\frac{1}{3} \cdot 1\frac{4}{5}$ b) $2\frac{7}{10} \cdot 1\frac{1}{9}$ c) $5\frac{5}{8} \cdot 1\frac{7}{8}$ d) $6\frac{2}{3} \cdot 2\frac{2}{5}$

$5\frac{5}{6} \cdot 1\frac{5}{7}$ $4\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{12}$ $16\frac{2}{3} \cdot 1\frac{7}{10}$ $6\frac{1}{4} \cdot 3\frac{3}{5}$

$4\frac{4}{15} \cdot 3\frac{1}{8}$ $5\frac{5}{12} \cdot 2\frac{2}{15}$ $6\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{15}$ $3\frac{3}{8} \cdot 2\frac{11}{12}$

$5\frac{5}{8} \cdot 2\frac{7}{18}$ $9\frac{4}{5} \cdot 1\frac{3}{7}$ $10\frac{2}{7} \cdot 4\frac{3}{8}$ $4\frac{7}{12} \cdot 7\frac{1}{11}$

11. *Lösungsbeispiel:* $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{9} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 9} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$

a) $1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{7}$ b) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{7} \cdot 1\frac{1}{3}$ c) $1\frac{1}{6} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot 1\frac{1}{3}$

$1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$ $1\frac{19}{21} \cdot 2\frac{11}{12} \cdot 5\frac{2}{5}$ $5\frac{4}{7} \cdot 4\frac{1}{26} \cdot 4\frac{2}{45}$

d) $3\frac{2}{25} \cdot 2\frac{3}{11} \cdot 6\frac{8}{35}$ e) $5\frac{5}{18} \cdot 7\frac{11}{19} \cdot 4\frac{5}{24}$ f) $4\frac{3}{13} \cdot 1\frac{7}{11} \cdot 2\frac{8}{9}$

$4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{9} \cdot 1\frac{3}{4}$ $5\frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{4}$ $7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{5} \cdot 1\frac{2}{3}$

12. a) $1\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{5}$ b) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 6\frac{2}{3}$ c) $10\frac{1}{2} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 5\frac{2}{3}$

$1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4}$ $8\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 12\frac{1}{2}$ $9\frac{1}{2} \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{19}$

$3\frac{1}{5} \cdot 4\frac{1}{6} \cdot 2\frac{2}{5}$ $4\frac{1}{6} \cdot 1\frac{2}{5} \cdot 16\frac{2}{3}$ $22\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{15}$

$5\frac{3}{5} \cdot 7 \cdot 3\frac{4}{5}$ $12\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} \cdot 7\frac{1}{5}$ $28\frac{1}{6} \cdot 3\frac{4}{17} \cdot 1\frac{6}{11}$

13. Aufgaben mit überraschenden Ergebnissen:

a) $24 \cdot 41\frac{2}{3}$ b) $120 \cdot 102\frac{7}{8}$ c) $26\frac{2}{3} \cdot 18\frac{3}{4}$

d) $73\frac{1}{3} \cdot 60\frac{3}{5}$ e) $151\frac{1}{2} \cdot 14\frac{2}{3}$ f) $54 \cdot 6\frac{1}{6}$

g) $3\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9}$ h) $7\frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{25}$ i) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot 1\frac{7}{9}$

k) $10\frac{2}{3} \cdot 60 \cdot 5\frac{2}{5}$ l) $321\frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 5\frac{1}{3}$ m) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{9}$

14. Welche Zahl ist $2\frac{1}{3}$mal so groß wie $4\frac{2}{7}$?

15. Wenn du $3\frac{3}{4}$ mit $2\frac{2}{3}$ multiplizierst, erhältst du gerade die Hälfte der Zahl, die ich mir jetzt gedacht hatte.

16. Heinz wandert in einer Stunde durchschnittlich $4\frac{1}{2}$ km. Wie weit kommt er

a) in $1\frac{1}{2}$ h, **b)** in $2\frac{1}{3}$ h, **c)** in $\frac{3}{4}$ h?

17. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft bebaut $23\frac{1}{2}$ ha Ackerfläche mit Kartoffeln und $26\frac{1}{4}$ ha mit Zuckerrüben. Als Durchschnittsertrag von einem Hektar werden 180 dt Kartoffeln und 392 dt Zuckerrüben erwartet. Wieviel Tonnen Kartoffeln und wieviel Tonnen Zuckerrüben werden voraussichtlich insgesamt geerntet?

18. Wenn Butter aus Milch mit normalem Fettgehalt hergestellt wird, rechnet man mit einer Buttergewinnung von $\frac{1}{25}$ des Milchgewichts. Wieviel Kilogramm Butter können aus $71\frac{1}{2}$ kg Vollmilch mit normalem Fettgehalt gewonnen werden?

19. Beim Räuchern von Schinken verringert sich die Masse um $\frac{1}{5}$. Es wird ein Schinken geräuchert, der **a)** $1\frac{1}{2}$ kg, **b)** $2\frac{1}{4}$ kg, **c)** $3\frac{3}{4}$ kg wiegt. Berechne die Masse jedes geräucherten Schinkens!

20. Eine automatisch arbeitende Maschine fertigt in einer Stunde $1\frac{3}{4}$ kg Muttern. Die Maschine läuft $7\frac{1}{2}$ h in einer Schicht. Wieviel Kilogramm Muttern werden in 3 Schichten mit dieser Maschine hergestellt?

21. Eine Brigade verlegt in einer Stunde $2\frac{1}{2}$ m Erdkabel. Sie hat an einem Tag $7\frac{1}{2}$ h gearbeitet. Wieviel Meter Erdkabel konnten an diesem Tage verlegt werden?

13. Division eines Bruches durch einen Bruch

Vorbereitende Übung:

Rechne die folgenden Aufgaben und vergleiche die Ergebnisse!

15 : 3 30 : 6 45 : 9 60 : 12

Erläutere an diesen Aufgaben den Satz:

Das Ergebnis einer Divisionsaufgabe ändert sich nicht, wenn Dividend und Divisor mit der gleichen Zahl multipliziert werden.

1) Teilen

Beispiel 1: Ein Lastkraftwagen durchfährt eine Strecke von 224 km in 4 h. Wieviel Kilometer fährt er durchschnittlich in einer Stunde?

Lösung: In 4 h durchfährt das Auto 224 km,
in 1 h durchfährt das Auto 224 km : 4 = 56 km.

Ergebnis: Das Auto fährt in der Stunde durchschnittlich 56 km.

Wir haben in der Lösung von der in 4 Stunden zurückgelegten Strecke auf die in einer Stunde zurückgelegte Strecke geschlossen. Wir haben also auf die Einheit geschlossen und mußten dividieren.

Beispiel 2: Ein anderer Lastkraftwagen durchfährt die gleiche Strecke (224 km) in $3\frac{1}{2}$ h. Wieviel Kilometer fährt dieser Wagen durchschnittlich in einer Stunde?

Da wir in diesem Beispiel auch auf die Einheit schließen, bilden wir wieder eine Divisionsaufgabe:

$$224 : 3\frac{1}{2}$$

Durch einen Bruch können wir noch nicht dividieren. Wir wollen uns deshalb einen Lösungsweg suchen.

Beispiel 3: In einer landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaft wird das Grünfutter mit einem Feldhäcksler geerntet. Dabei konnten in $7\frac{1}{2}$ Stunden $2\frac{1}{4}$ ha abgeerntet werden. Wieviel Zeit war für die Bearbeitung von 1 ha nötig?

Lösung: $2\frac{1}{4}$ ha werden abgeerntet in $7\frac{1}{2}$ h

$\frac{9}{4}$ ha werden abgeerntet in $\frac{15}{2}$ h

$\frac{1}{4}$ ha wird abgeerntet in $\frac{15}{2}\,\text{h} : 9 = \frac{15}{2 \cdot 9}\,\text{h}$

$\frac{4}{4}$ ha werden abgeerntet in $\frac{15}{2 \cdot 9}\,\text{h} \cdot 4 = \boxed{\frac{15 \cdot 4}{2 \cdot 9}}\,\text{h}$

$= \frac{10}{3}\,\text{h} = 3\frac{1}{3}\,\text{h} = 3$ Stunden 20 Minuten.

Ergebnis: 1 ha wird in 3 Stunden 20 Minuten abgeerntet.

Beispiel 4: $\frac{3}{8}$ kg Stachelbeeren kosten 0,30 DM. Wie teuer ist 1 kg? (Wir rechnen mit $\frac{3}{10}$ DM.)

Lösung: $\frac{3}{8}$ kg kosten $\frac{3}{10}$ DM.

$\frac{1}{8}$ kg kostet $\frac{3}{10}\,\text{DM} : 3 = \frac{3}{10 \cdot 3}\,\text{DM}$.

$\frac{8}{8}$ kg kosten $\frac{3}{10 \cdot 3}\,\text{DM} \cdot 8 = \boxed{\frac{3 \cdot 8}{10 \cdot 3}}\,\text{DM} = \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 1}\,\text{DM} = \frac{4}{5}\,\text{DM}$.

Ergebnis: 1 kg kostet demnach 0,80 DM.

Im Beispiel 2 wollten wir berechnen, wieviel Kilometer der Lastkraftwagen in einer Stunde fährt. Dazu haben wir eine Divisionsaufgabe gebildet ($224 : 3\frac{1}{2}$).

Im Beispiel 3 errechneten wir ausführlich durch Schließen, in welcher Zeit ein Hektar abgeerntet wird.

Im Beispiel 4 errechneten wir ausführlich durch Schließen den Preis für ein Kilogramm.

Wollen wir wie im Beispiel 2 rechnen, müssen wir dividieren; es ergeben sich dann die folgenden Aufgaben:

Beispiel 3: $7\frac{1}{2}\,\text{h} : 2\frac{1}{4}$

Beispiel 4: $\frac{3}{10}\,\text{DM} : \frac{3}{8}$

Wir multiplizieren in beiden Beispielen die Brüche so, daß der Divisor eine ganze Zahl wird.

Beispiel 3:

$$\frac{15}{2} : \frac{9}{4} = \frac{15 \cdot 4}{2} : \frac{9 \cdot 4}{4} = \frac{15 \cdot 4}{2} : 9 = \boxed{\frac{15 \cdot 4}{2 \cdot 9}}$$

Beispiel 4:

$$\frac{3}{10} : \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 8}{10} : \frac{3 \cdot 8}{8} = \frac{3 \cdot 8}{10} : 3 = \boxed{\frac{3 \cdot 8}{10 \cdot 3}}$$

Die eingerahmten Bruchausdrücke zeigen, daß wir bei dem kurzen Lösungsweg der Division das gleiche Ergebnis wie bei der ausführlichen Lösung mit Hilfe des Schließens erhalten.

Wir erkennen ferner, daß der Dividend unverändert geblieben ist, aber im Divisor ist der Zähler zum Nenner und der Nenner zum Zähler geworden. Zähler und Nenner des Divisors werden vertauscht. Man bezeichnet $\frac{4}{15}$ als den **Kehrwert** von $\frac{15}{4}$. Der Kehrwert des Divisors $\frac{9}{4}$ im Beispiel 3 lautet $\frac{4}{9}$. Den Kehrwert nennt man auch den **reziproken Wert.**

Wir haben damit einen abgekürzten Lösungsweg gefunden, wie wir einen Bruch durch einen Bruch dividieren können.

Beispiel 3: $\frac{15}{2} : \frac{9}{4} = \frac{15 \cdot 4}{2 \cdot 9}$

Beispiel 4: $\frac{3}{10} : \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 8}{10 \cdot 3}$

Nun können wir auch das Beispiel 2 lösen.

Führe die Ausrechnung in der ausführlichen und in der abgekürzten Form selbst durch!

Man dividiert einen Bruch durch einen Bruch, indem man ihn mit dem reziproken Wert des Divisors multipliziert.
Wenn es möglich ist, kürzt man vor dem Multiplizieren.
Gemischte Zahlen müssen erst in unechte Brüche umgewandelt werden.

Diese Regel läßt sich auch auf das Dividieren eines Bruches durch eine ganze Zahl anwenden. Dabei schreiben wir für die ganze Zahl den ihr entsprechenden Bruch mit dem Nenner 1.

Beispiel: $\frac{3}{4} : 5$

Lösung: $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

Wir brauchen uns also für die Division von Brüchen nur folgende Regel zu merken.

Kurzform: Bruch durch Bruch $= \frac{\text{Zähler mal Nenner}}{\text{Nenner mal Zähler}}$

Aufgaben

Kopfrechnen

1.	**a)** $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$	**b)** $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$	**c)** $\frac{1}{6} : \frac{1}{7}$	**d)** $\frac{1}{4} : \frac{5}{8}$	**e)** $\frac{1}{5} : \frac{7}{10}$
	$\frac{1}{6} : \frac{11}{12}$	$\frac{1}{9} : \frac{7}{12}$	$\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} : \frac{2}{3}$
	$\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$	$\frac{5}{7} : \frac{5}{14}$	$\frac{2}{5} : \frac{4}{15}$	$\frac{3}{8} : \frac{3}{16}$	$\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$
	$\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$	$\frac{4}{9} : \frac{1}{3}$	$\frac{6}{7} : \frac{2}{3}$	$\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$	$\frac{5}{6} : \frac{2}{7}$
2.	**a)** $3 : \frac{4}{5}$	**b)** $2 : \frac{3}{8}$	**c)** $5 : \frac{3}{4}$	**d)** $7 : \frac{5}{6}$	**e)** $5 : \frac{2}{3}$
	$9 : \frac{7}{8}$	$8 : \frac{7}{9}$	$10 : \frac{7}{12}$	$6 : \frac{7}{15}$	$12 : \frac{7}{9}$
	$11 : \frac{5}{8}$	$14 : \frac{5}{9}$	$13 : \frac{1}{2}$	$11 : \frac{5}{6}$	$16 : \frac{9}{10}$
	$3 : \frac{14}{15}$	$10 : \frac{5}{7}$	$14 : \frac{9}{10}$	$10 : \frac{7}{9}$	$7 : \frac{5}{12}$
3.	**a)** $5 : \frac{4}{9}$	**b)** $2 : \frac{11}{12}$	**c)** $1 : \frac{7}{15}$	**d)** $8 : \frac{4}{5}$	**e)** $18 : \frac{9}{20}$
	$6 : \frac{7}{10}$	$10 : \frac{5}{16}$	$10 : \frac{8}{15}$	$12 : \frac{7}{8}$	$5 : \frac{15}{17}$
	$9 : \frac{2}{3}$	$12 : \frac{3}{5}$	$7 : \frac{5}{6}$	$8 : \frac{4}{9}$	$2 : \frac{11}{13}$

4. Rechne die nachstehenden Aufgaben aus und schreibe sie mit ihren Lösungen übersichtlich untereinander!

Dividiere 12 nacheinander durch 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$!

Vergleiche die Reihen der Divisoren und der Quotienten!

Schriftliches Rechnen

5. a) $\frac{7}{12}:\frac{5}{6}$ $\frac{5}{9}:\frac{7}{18}$ $\frac{11}{28}:\frac{3}{7}$ $\frac{40}{63}:\frac{8}{9}$

b) $\frac{8}{15}:\frac{3}{5}$ $\frac{12}{13}:\frac{6}{7}$ $\frac{9}{16}:\frac{3}{8}$ $\frac{15}{56}:\frac{3}{8}$

c) $\frac{4}{39}:\frac{9}{13}$ $\frac{59}{90}:\frac{5}{18}$ $\frac{15}{28}:\frac{5}{7}$ $\frac{5}{6}:\frac{25}{72}$

d) $\frac{3}{4}:\frac{5}{12}$ $\frac{19}{40}:\frac{3}{16}$ $\frac{2}{3}:\frac{8}{27}$ $\frac{5}{6}:\frac{10}{11}$

6. a) $1\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$ $4\frac{4}{5}:\frac{3}{5}$ $3\frac{7}{27}:\frac{4}{27}$ $10\frac{4}{5}:\frac{3}{5}$

b) $\frac{6}{7}:5\frac{1}{7}$ $5\frac{4}{9}:\frac{7}{9}$ $4\frac{8}{19}:\frac{14}{19}$ $6\frac{1}{12}:\frac{7}{12}$

c) $\frac{1}{4}:17\frac{3}{4}$ $5\frac{5}{16}:\frac{7}{16}$ $6\frac{1}{4}:\frac{3}{4}$ $2\frac{4}{11}:\frac{2}{11}$

d) $2\frac{5}{11}:\frac{9}{11}$ $2\frac{14}{17}:\frac{16}{17}$ $3\frac{3}{8}:\frac{5}{8}$ $3\frac{11}{20}:\frac{9}{20}$

7. a) $2\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ $3\frac{1}{3}:\frac{7}{10}$ $10\frac{2}{3}:\frac{16}{17}$

b) $1\frac{4}{9}:\frac{1}{5}$ $3\frac{1}{3}:\frac{10}{21}$ $2\frac{1}{12}:\frac{5}{9}$

c) $4\frac{2}{3}:\frac{1}{7}$ $3\frac{1}{5}:\frac{4}{7}$ $5\frac{3}{5}:\frac{7}{25}$

d) $1\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$ $8\frac{4}{5}:\frac{11}{15}$ $6\frac{3}{4}:\frac{9}{16}$

8. a) $\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}:2\frac{3}{7}$ $\frac{7}{48}:2\frac{11}{12}$

b) $\frac{5}{6}:1\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}:3\frac{1}{3}$ $\frac{64}{75}:2\frac{14}{25}$

c) $\frac{7}{9}:1\frac{2}{3}$ $\frac{9}{20}:1\frac{3}{5}$ $\frac{7}{12}:3\frac{5}{6}$

d) $\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}$ $\frac{3}{7}:2\frac{4}{5}$ $\frac{4}{9}:2\frac{2}{15}$

9. a) $1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$ $6\frac{2}{3}:1\frac{2}{3}$ $15\frac{3}{4}:2\frac{1}{4}$ $8\frac{1}{3}:3\frac{1}{3}$

b) $5\frac{1}{3}:1\frac{1}{3}$ $12\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$ $2\frac{3}{5}:18\frac{1}{5}$ $15\frac{2}{5}:2\frac{1}{5}$

c) $3\frac{1}{5}:\frac{3}{5}$ $22\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{8}:1\frac{7}{8}$ $20\frac{5}{8}:3\frac{1}{8}$

d) $1\frac{4}{9}:2\frac{7}{9}$ $37\frac{1}{2}:7\frac{1}{2}$ $5\frac{5}{6}:1\frac{1}{6}$ $3\frac{5}{9}:4\frac{4}{9}$

10. a) $1\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}$ $1\frac{1}{10}:1\frac{5}{6}$ $1\frac{1}{14}:1\frac{1}{7}$

b) $1\frac{1}{3}:2\frac{1}{5}$ $1\frac{1}{4}:1\frac{1}{6}$ $3\frac{1}{3}:1\frac{1}{2}$

c) $1\frac{2}{7}:1\frac{1}{2}$ $1\frac{2}{5}:1\frac{1}{3}$ $5\frac{2}{5}:4\frac{1}{2}$

d) $1\frac{1}{9}:1\frac{1}{4}$ $1\frac{1}{7}:1\frac{1}{4}$ $9\frac{3}{4}:6\frac{1}{2}$

11. a) $2\frac{1}{3}:1\frac{1}{6}$ $7\frac{1}{9}:1\frac{1}{3}$ $7\frac{1}{2}:3\frac{4}{7}$

b) $2\frac{2}{5}:1\frac{1}{10}$ $3\frac{3}{5}:3\frac{3}{4}$ $12\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}$

c) $3\frac{1}{3}:3\frac{1}{6}$ $4\frac{4}{5}:1\frac{2}{3}$ $25\frac{5}{6}:3\frac{2}{3}$

d) $4\frac{2}{7}:1\frac{1}{2}$ $4\frac{1}{6}:1\frac{3}{8}$ $9\frac{3}{8}:4\frac{1}{6}$

12. a) $\frac{5}{12} : \frac{20}{33}$ $\quad \frac{3}{10} : \frac{4}{5}$ $\quad \frac{15}{34} : \frac{10}{17}$ $\quad \frac{7}{9} : \frac{3}{5}$

b) $4\frac{2}{3} : \frac{7}{9}$ $\quad 16\frac{2}{5} : \frac{5}{12}$ $\quad 3\frac{1}{5} : \frac{3}{4}$ $\quad 7\frac{7}{8} : \frac{21}{32}$

c) $5\frac{1}{3} : 3\frac{1}{5}$ $\quad 1\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$ $\quad 3\frac{1}{3} : 1\frac{3}{5}$ $\quad 4\frac{2}{7} : 1\frac{1}{4}$

d) $11\frac{1}{4} : 3\frac{1}{8}$ $\quad 6\frac{4}{9} : 14\frac{1}{2}$ $\quad 19\frac{5}{6} : 1\frac{7}{15}$ $\quad 12\frac{4}{5} : 12\frac{1}{4}$

2) Enthaltensein

Beispiel 1: $4\frac{1}{2}\,l$ Fruchtsaft sollen in $\frac{3}{4}\,l$-Flaschen gefüllt werden. Wieviel Flaschen sind zum Abfüllen des Saftes erforderlich?

Lösung a)

$\frac{3}{4}\,l$ in $4\frac{1}{2}\,l = ?$ mal

$\frac{3}{4}\,l$ in $\frac{9}{2}\,l = ?$ mal

$\frac{3}{4}\,l$ in $\frac{18}{4}\,l = 6$mal

Lösung b)

$\frac{3}{4}\,l$ in $4\frac{1}{2}\,l = ?$ mal

Wir lösen durch Division:

$4\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{9}{2} : \frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 6$

Ergebnis: Es werden sechs $\frac{3}{4}\,l$-Flaschen benötigt.

Beispiel 2: $2\frac{1}{2}\,l$ Milch sollen in Gläser gefüllt werden, von denen jedes Glas $\frac{3}{20}\,l$ faßt. Wieviel Gläser werden benötigt?

Lösung a)

$\frac{3}{20}\,l$ in $2\frac{1}{2}\,l = ?$ mal

$\frac{3}{20}\,l$ in $\frac{5}{2}\,l = ?$ mal

$\frac{3}{20}\,l$ in $\frac{50}{20}\,l = 16\frac{2}{3}$ mal

Lösung b)

$\frac{3}{20}\,l$ in $2\frac{1}{2}\,l = ?$ mal

Wir lösen durch Division:

$2\frac{1}{2} : \frac{3}{20} = \frac{5}{2} : \frac{3}{20} = \frac{5 \cdot 20}{2 \cdot 3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

Ergebnis: Es können 16 Gläser voll gefüllt werden. Das 17. Glas wird nur zu $\frac{2}{3}$ gefüllt.

Wir lösen auch beim Rechnen mit Brüchen eine Aufgabe des Enthaltenseins durch Division.

Aufgaben

13. Wie oft sind enthalten:

a) $\frac{2}{7}$ in $\frac{6}{7}$ **b)** $\frac{7}{45}$ in $\frac{28}{45}$ **c)** $\frac{5}{53}$ in $\frac{20}{53}$ **d)** $\frac{12}{97}$ in $\frac{72}{97}$

e) $\frac{8}{17}$ in $\frac{16}{17}$ **f)** $\frac{15}{19}$ in $\frac{60}{19}$ **g)** $\frac{21}{34}$ in $\frac{42}{34}$ **h)** $\frac{16}{55}$ in $\frac{48}{55}$

14. a) $\frac{3}{4}$ in $3\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ in $6\frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{6}$ in $9\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{9}$ in $5\frac{4}{9}$
e) $\frac{12}{13}$ in $11\frac{1}{13}$ f) $\frac{17}{25}$ in $11\frac{14}{25}$ g) $2\frac{4}{5}$ in $19\frac{3}{5}$ h) $\frac{4}{27}$ in $10\frac{2}{27}$

15. a) $\frac{7}{20}$ hl in 7 hl b) $\frac{4}{25}$ hl in $3\frac{9}{25}$ hl c) $1\frac{1}{4}$ km in $3\frac{1}{8}$ km
d) $2\frac{1}{4}$ kg in $13\frac{1}{2}$ kg e) $1\frac{1}{8}$ ha in $15\frac{3}{4}$ ha f) $3\frac{1}{2}$ m² in $19\frac{1}{5}$ m²
g) $\frac{5}{6}$ h in $6\frac{2}{3}$ h h) $\frac{7}{12}$ Dtzd. in $5\frac{5}{6}$ Dtzd. i) $\frac{3}{8}$ d in $5\frac{1}{4}$ d
k) $2\frac{1}{4}$ h in $4\frac{1}{2}$ h l) $3\frac{1}{2}$ m in $12\frac{1}{4}$ m m) $1\frac{3}{4}$ *l* in $12\frac{3}{5}$ *l*

16. Wie oft sind $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{6}$, $6\frac{1}{4}$, $6\frac{2}{3}$, $8\frac{1}{3}$, $12\frac{1}{2}$, $16\frac{2}{3}$, $14\frac{2}{7}$, $33\frac{1}{3}$ in 100 enthalten?

17. Ich denke mir eine Zahl. $\frac{2}{3}$ davon sind $1\frac{1}{9}$. Wie heißt die Zahl?

18. $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{3}$ einer Zahl betragen zusammen 65.

19. $\frac{1}{3}$ einer Zahl ist um 3 größer als $\frac{1}{4}$ derselben Zahl. Nenne die Zahl!

20. Welche Zahl ist $2\frac{1}{3}$mal so groß wie $4\frac{2}{7}$?

21. $\frac{5}{6}$ einer Zahl beträgt $3\frac{3}{4}$.

22. Eine Konsum-Mostkelterei hat nach dem Plan jährlich 14 770 *l* Kirschmost, 12 110 *l* Johannisbeermost und 17 500 *l* Apfelmost herzustellen. Der Most soll in $\frac{7}{10}$ *l*-Flaschen abgefüllt werden.

a) Wieviel Flaschen müssen für jede einzelne Mostsorte angefordert werden?

b) Wieviel Flaschen werden insgesamt benötigt?

23. Ein Flugzeug der Interflug vom Typ IL 14 legte die Strecke Berlin—Dresden (Luftlinie etwa 160 km) in $\frac{3}{4}$ Stunden zurück. Berechne, wieviel Kilometer das Flugzeug durchschnittlich in einer Stunde geflogen ist!

24. Eine Brieftaube flog die Strecke Berlin—Warschau (rund 520 km Luftlinie) in $5\frac{1}{2}$ h. Wieviel Kilometer legte die Taube durchschnittlich in einer Stunde zurück?

25. Zu einem Anzug mittlerer Größe sind $3\frac{1}{4}$ m Stoff erforderlich. Wieviel Anzüge können aus einem Stoffballen angefertigt werden, auf dem noch a) $34\frac{1}{2}$ m, b) $41\frac{3}{4}$ m sind?

26. Ein Radfahrer stellt fest, daß er 1 km in

a) 4 min, **b)** $3\frac{3}{4}$ min, **c)** $3\frac{1}{2}$ min

fährt. Wieviel Kilometer legt er in 1 h zurück?

27. Der Tank des Außenbordmotors „Nixe" faßt $1\frac{1}{3}$ *l* Brennstoff. Wie lange reicht der Vorrat, wenn der Motor in einer Stunde $\frac{8}{10}$ *l* verbraucht?

28. Ein Schmied benötigt für die Anfertigung eines Radreifens $1\frac{3}{4}$ m Bandstahl. Am Lager sind noch $10\frac{1}{2}$ m Bandstahl vorhanden. Wieviel Radreifen können aus diesem Vorrat angefertigt werden?

14. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Übersichtliche Zusammenstellung der vier Grundrechenarten

Rechnen mit ganzen Zahlen	Rechnen mit Brüchen
Addition	
$3 + 4 = 4 + 3$	$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$
Subtraktion	
$12 - 5 = 7$ *Probe:* $7 + 5 = 12$	$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{20}$ *Probe:* $\frac{1}{20} + \frac{3}{4} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$
Multiplikation	
$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$	a) $\frac{3}{4} \cdot 6 = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{1} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 1} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{5}{8}$

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Division

$12 : 6 = 2$

Probe: $2 \cdot 6 = 12$

a) $\frac{3}{4} : 6 = \frac{3}{4 \cdot 6} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

oder $\frac{3}{4} : \frac{6}{1} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

Probe: $\frac{1}{8} \cdot 6 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{4}{15} : \frac{8}{9} = \frac{4 \cdot 9}{15 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$

Probe: $\frac{3}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{10 \cdot 9} = \frac{4}{15}$

Erkläre die Übersicht! Gib die Regeln und Gesetze an!

1. a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$

2. a) $1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4}$ **b)** $1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}$ **c)** $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4}$ **d)** $1\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4}$

3. Bilde zu 1. und 2. selbst je 10 Beispiele!

Zusammengesetzte Aufgaben

4. a)

$\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$
$\cdot 2$
$: \frac{5}{24}$
$- \frac{1}{3}$
$+ 2\frac{3}{5}$
$- \frac{4}{15}$

b)

$5\frac{3}{4} + 2\frac{5}{6}$
$- 1\frac{1}{3}$
$: 1\frac{1}{2}$
$\cdot 3$
$- 3\frac{4}{5}$
$: 11$

c)

$1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{5}$
$+ \frac{7}{40}$
$\cdot \frac{4}{9}$
$: 3\frac{1}{3}$
$+ \frac{5}{6}$
$: 3\frac{1}{2}$

d)

$\frac{1}{3} \cdot \frac{14}{15}$
$: \frac{7}{90}$
$- \frac{2}{7}$
$: \frac{13}{14}$
$+ 7\frac{4}{13}$
$: 1\frac{10}{39}$

e)

$9\frac{1}{2} - 4\frac{5}{8}$
$: \frac{1}{2}$
$: 9$
$- \frac{3}{4}$
$: 1\frac{1}{9}$
$+ \frac{17}{25}$

f)

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$
$- \frac{3}{5}$
$+ \frac{7}{20}$
$- \frac{5}{12}$
$\cdot 6$
$+ \frac{1}{6}$
$- \frac{4}{15}$

g)

$3 \cdot \frac{1}{12}$
$\cdot \frac{3}{8}$
$+ \frac{21}{32}$
$- \frac{5}{12}$
$\cdot 9$
$- \frac{11}{20}$
$: 7$

h)

$\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$
$\cdot 24$
$: \frac{3}{5}$
$- 2\frac{3}{4}$
$: 1\frac{1}{4}$
$\cdot 10$
$: 4$

i)

$\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$
$: 1\frac{5}{9}$
$+ \frac{13}{28}$
$\cdot \frac{5}{6}$
$: 1\frac{1}{4}$
$+ 2\frac{5}{6}$
$\cdot 12$

k)

$\frac{5}{14} : 1\frac{2}{7}$
$+ \frac{5}{6}$
$: 1\frac{3}{7}$
$+ \frac{5}{6}$
$- \frac{1}{9}$
$\cdot 50$
$\cdot 1\frac{1}{3}$

5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
I	$1\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{4}$	$5\frac{2}{5}$	$7\frac{1}{5}$	$10\frac{1}{8}$	$4\frac{4}{5}$	$6\frac{1}{4}$
II	$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{15}$
III	$2\frac{1}{12}$	$2\frac{5}{12}$	$4\frac{4}{15}$	$10\frac{4}{5}$	$5\frac{5}{8}$	$10\frac{5}{6}$	$3\frac{3}{7}$	$2\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{3}$	$2\frac{3}{5}$

a) Addiere je zwei benachbarte Brüche der Zeilen I (II, III)!

b) Addiere die drei untereinanderstehenden Brüche jeder Spalte!

c) Subtrahiere nacheinander jeden Bruch der Tafel von $20\frac{3}{5}$!

d) Multipliziere je zwei benachbarte Brüche der Zeilen I (II, III) miteinander!

e) Dividiere nacheinander jeden Bruch der Zeile I durch den darunterstehenden Bruch der Zeile II!

f) Dividiere nacheinander jeden Bruch der Zeile II durch den darunterstehenden Bruch der Zeile III!

6. Multipliziere die Differenz der Zahlen $17\frac{3}{5}$ und $5\frac{3}{4}$ mit ihrer Summe!

7. Dividiere die Summe der Zahlen $6\frac{8}{25}$ und $9\frac{1}{10}$ durch das Produkt der Zahlen $\frac{21}{50}$ und 4!

8. Bilde den Quotienten der Zahlen $83\frac{1}{5}$ und $1\frac{23}{25}$ und dividiere ihn durch $\frac{2}{3}$!

9. Ilse ist $10\frac{3}{4}$ Jahre alt.

a) Ihre Schwester Angelika ist $8\frac{1}{2}$ Jahre jünger.

b) Ihr Bruder Max ist $5\frac{3}{4}$ Jahre älter.

c) Ilses Alter beträgt $\frac{3}{4}$ vom Alter ihrer Schwester Bärbel.

Wie alt sind Ilses Geschwister?

10. Scherzaufgabe: Peter ist $11\frac{3}{4}$ Jahre alt. Er fragt seinen Vater: „Wie alt bist du eigentlich?“ Der Vater antwortet: „Wenn du dein Alter verdreifachst, dann durch 4 teilst, $\frac{13}{16}$ Jahre abziehst und nun noch 30 Jahre hinzuzählst, dann weißt du es.“

11. Bei einem Sportfest wurden im 75-Meter-Lauf gute Leistungen erzielt. Die fünf besten Jungen liefen die Strecke in $10\frac{3}{10}$ s, $9\frac{5}{10}$ s, $9\frac{8}{10}$ s, $9\frac{7}{10}$ s, $10\frac{1}{10}$ s. Berechne die durchschnittliche Leistung der fünf Läufer!

12. Die Schnur für ein Lagerzelt soll erneuert werden. Es sind vier Teilschnüre erforderlich. Die Länge jeder Teilschnur beträgt $5\frac{1}{2}$ m. Wieviel Meter Schnur muß die Lagerleitung kaufen?

13. a) Bei einem Gewitter wird von einem Beobachter festgestellt, daß seit dem Aufleuchten des Blitzes 5 s vergangen sind, bis der Donner zu hören ist. Errechne, wie weit das Gewitter vom Beobachter entfernt ist! (Der Schall legt in 1 Sekunde etwa $\frac{1}{3}$ km zurück.)

b) Wieviel Sekunden nach dem Aufleuchten des Blitzes wird man den Donner hören, wenn der Blitz $2\frac{1}{2}$ km entfernt eingeschlagen hat?

14. Beim Bau einer Schule wird für jeden Schüler $1\frac{3}{10}$ m² Fußbodenfläche im Klassenzimmer berücksichtigt. Wie groß muß demnach die Fußbodenfläche eines Klassenzimmers für 40 Schüler sein?

15. a) In einem HO-Warenhaus werden an einem Tage von 5 Ballen Anzugstoff die folgenden Mengen verkauft: $13\frac{3}{4}$ m, $22\frac{1}{2}$ m, 38 m 60 cm, $25\frac{7}{10}$ m und 29,35 m. Berechne, wieviel Meter Anzugstoff an diesem Tag insgesamt verkauft wurden! (Rechne mit gemeinen Brüchen!)

b) Auf einem Ballen sind noch 17 m Anzugstoff. Davon werden für drei Anzüge $3\frac{1}{4}$ m, $3\frac{1}{2}$ m und $3\frac{2}{10}$ m abgeschnitten. Wieviel Meter Stoff bleiben als Rest übrig?

c) Auf einem Ballen sind $27\frac{3}{4}$ m Kleiderstoff. Davon werden fünfmal nacheinander $3\frac{3}{4}$ m Stoff für Kleider verkauft. Wieviel Meter Stoff sind danach noch auf dem Ballen?

16. Ein volkseigener Betrieb soll 256 Sporthemden anfertigen. Für ein Sporthemd werden $3\frac{2}{10}$ m Hemdenstoff benötigt. Wieviel Meter Hemdenstoff müssen für die Anfertigung der Hemden bestellt werden?

17. Bei der Inventur in einer HO-Verkaufsstelle werden die Bestände an Weizenmehl überprüft.

Im Verkaufsraum sind die folgenden Mengen vorhanden:

14 Beutel mit je $\frac{1}{2}$ kg Mehl,
29 Beutel mit je $\frac{3}{4}$ kg Mehl,
37 Beutel mit je 1 kg Mehl und
21 Beutel mit je $1\frac{1}{2}$ kg Mehl.

Im Lagerraum sind außerdem noch $214\frac{1}{4}$ kg Weizenmehl vorrätig.

a) Wie groß ist der Vorrat an Weizenmehl in der HO-Verkaufsstelle?

b) Wieviel Tage reicht der Vorrat an Weizenmehl, wenn täglich im Durchschnitt 47 kg Weizenmehl verkauft werden?

18. Ein Spiralbohrer rückt bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ mm tiefer. In einer Minute macht er 480 Umdrehungen. Welche Lochtiefe kann mit dem Bohrer in einer Minute gebohrt werden?

19. Der Kleinroller „KR 50" verbraucht für 100 km Wegstrecke etwa $2\frac{1}{2}\,l$ Kraftstoff. Wieviel Liter Kraftstoff werden für eine Gesamtstrecke von 720 km verbraucht?

20. Bei der Obsternte wurden in einem Garten durchschnittlich $2\frac{1}{2}$ kg Stachelbeeren je Strauch und durchschnittlich $3\frac{3}{4}$ kg Johannisbeeren je Strauch geerntet. In dem Garten standen 29 Stachelbeersträucher und 23 Johannisbeersträucher. Wie groß war der Ernteertrag an Stachelbeeren und Johannisbeeren?

21. Von 5 Pflaumenbäumen wurden 274 kg Pflaumen geerntet. Aus 150 kg Pflaumen wurde Pflaumenmus gekocht. Beim Einkochen verringert sich die Masse auf $\frac{3}{10}$ der Masse frischer Pflaumen.
Der Rest der Ernte von den 5 Pflaumenbäumen wurde gedörrt. Beim Dörren verlieren die Pflaumen etwa $\frac{5}{8}$ ihrer Masse.
Wieviel Kilogramm Mus und wieviel Kilogramm Backpflaumen wurden aus den geernteten Pflaumen gewonnen?

22. Von Getreide, das als Saatgut anerkannt ist, keimen mindestens $\frac{95}{100}$ der ausgesäten Menge. Auf einem Hektar werden 145 kg anerkannter Saathafer ausgesät. Wieviel Kilogramm werden davon mindestens keimen?

23. Auf einer Grünfutterfläche wird ein Gemisch von $\frac{30}{100}$ Rotklee, $\frac{20}{100}$ Weißklee, $\frac{5}{100}$ Schwedenklee und $\frac{45}{100}$ Raigras ausgesät.

a) Für einen Hektar benötigt man zur Aussaat 21 kg dieses Gemisches. Wieviel Kilogramm von jeder Sorte muß man nehmen, wenn man dieses Gemisch herstellen will?

b) Welche Mengen der einzelnen Sorten braucht man, um ein $3\frac{1}{2}$ ha großes Feld mit Grünfutter zu bestellen?

15. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer ganzen Zahl

Wir haben bereits gelernt: Man multipliziert Brüche mit ganzen Zahlen, indem man den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl multipliziert.

Dezimalbrüche sind auch Brüche, und zwar Zehnerbrüche, die in besonderer Form geschrieben sind. Deshalb können wir aus den Rechenregeln für gemeine Brüche Regeln für das Rechnen mit Dezimalbrüchen herleiten.

Beispiel 1: Große Milchflaschen fassen 0,5 *l*. Wieviel Liter enthalten 9 dieser Flaschen?

Lösung: 1 Flasche enthält 0,5 *l*

9 Flaschen enthalten 0,5 *l* · 9

0,5 läßt sich als Zehnerbruch schreiben: $0{,}5 = \frac{5}{10}$

$$\frac{5}{10}\,l \cdot 9 = \boxed{\frac{5 \cdot 9}{10}}\,l = \frac{45}{10}\,l = 4\frac{5}{10}\,l = 4{,}5\,l$$

Ergebnis: 9 große Flaschen enthalten 4,5 *l* Milch.

Aus dem eingerahmten Bruchausdruck können wir einen kürzeren Weg für die Lösung der Aufgabe herleiten. Wir rechnen bei der Aufgabe 0,5 · 9 wie mit ganzen Zahlen, also 5 · 9. Wir bedenken aber dabei, daß wir 5 **Zehntel** mit 9 multiplizieren und deshalb als Produkt auch wieder Zehntel erhalten müssen, also 45 **Zehntel**:

$$\frac{45}{10} = 4{,}5.$$

Beispiel 2: In der Seeschiffahrt gibt man die Entfernungen in Seemeilen an. Eine Seemeile entspricht einer Strecke von 1,852 km. Wieviel Kilometer legt unser Fährschiff „Saßnitz" auf seiner Fahrt von Saßnitz nach Trelleborg (Schweden) zurück, wenn die Entfernung 57 Seemeilen beträgt?

Überschlag: 2 km · 57 = 114 km

Lösung:

```
 1,852 km · 57
 ------------
  92 60
  12 964
 ------------
 105,564 km
```

Auch hier müssen wir beachten, daß wir 105 564 **Tausendstel** erhalten haben und deshalb von rechts her 3 Stellen hinter dem Komma berücksichtigen müssen.

Da solche großen Entfernungen nicht auf Meter genau angegeben werden, runden wir auf Kilometer.

Ergebnis: Die Fähre legt bei einer Fahrt rund 106 km zurück.

Beispiel 3: $0{,}0038 \cdot 96$

Überschlag: $\frac{40}{10\,000} \cdot 100 = \frac{40 \cdot 100}{10000} = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

Lösung:

$$\begin{array}{r} 0{,}0038 \cdot 96 \\ \hline 342 \\ 228 \\ \hline 0{,}3648 \end{array}$$

Vergleiche in den 3 Beispielen jeweils in der Aufgabe und im Ergebnis die Anzahl der Stellen hinter dem Komma!

Wir stellen fest:

Wenn man Dezimalbrüche mit einer ganzen Zahl multipliziert, läßt man das Komma zunächst unberücksichtigt. Im Produkt muß man jedoch so viel Stellen von rechts nach links abstreichen, wie der Dezimalbruch Stellen hinter dem Komma hat.

Besonders einfach kann man einen Dezimalbruch mit 10, 100, 1 000 usw. multiplizieren.

Beispiel 4: Wir multiplizieren 3,78 a) mit 10, b) mit 100, c) mit 1 000.

Lösung: a) $3{,}78 \cdot 10 = 37{,}80$ b) $3{,}78 \cdot 100 = 378{,}00$

c) $3{,}78 \cdot 1\,000 = 3\,780{,}00$

Wenn wir die Ergebnisse mit dem Dezimalbruch 3,78 vergleichen, erkennen wir, daß

beim Multiplizieren mit ... 10 das Komma um 1 Stelle,
beim Multiplizieren mit ... 100 das Komma um 2 Stellen,
beim Multiplizieren mit ... 1 000 das Komma um 3 Stellen

nach rechts rückt.

Man multipliziert Dezimalbrüche mit 10, 100, 1 000, ..., indem man das Komma 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts rückt.

Dabei ist zu beachten, daß fehlende Stellen beim Dezimalbruch durch Anhängen von Nullen ersetzt werden (Beispiel 4c).

Löse die Aufgabe 3,78 · 10 000 und vergleiche den ersten Faktor mit dem Produkt!

Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer ganzen Zahl

Aufgaben

Kopfrechnen

1. **a)** 0,9 · 4 **b)** 1,3 · 7 **c)** 0,04 · 3 **d)** 0,009 · 5
0,7 · 6 2,4 · 4 0,08 · 12 0,018 · 6
1,2 · 8 0,6 · 18 0,19 · 9 0,025 · 7
1,7 · 6 0,3 · 32 0,27 · 4 0,125 · 9

2. **a)** 0,3 · 9 **b)** 0,06 · 8 **c)** 0,007 · 9 **d)** 1,2 · 9
e) 0,18 · 7 **f)** 0,014 · 9 **g)** 3,04 · 5 **h)** 2,003 · 4
Bilde zu a) bis h) je 10 Beispiele!

3. Multipliziere die folgenden Zahlen nacheinander mit 10, 100, 1 000 und 10 000!

a) 0,783 **b)** 0,564 5 **c)** 0,352 98
d) 0,16 **e)** 0,4 **f)** 0,391
g) 16,349 **h)** 5,827 **i)** 126,31
k) 91,258 03 **l)** 6,670 81 **m)** 55,328
n) 146,34 **o)** 19,19 **p)** 10,3
q) 25,67 **r)** 48,321 **s)** 100,001
t) 203,08 **u)** 0,047 6 **v)** 68,034

4. **a)** 2,4 · 5 (10, 30, 100, 200, 1 000, 2 000)
b) 1,6 · 7 (10, 40, 100, 300, 1 000, 5 000)
c) 0,27 · 3 (10, 40, 100, 400, 1 000, 3 000)

Schriftliches Rechnen

Vergiß nicht, vor dem Rechnen das Ergebnis zu überschlagen!

5. **a)** 8,5 · 3 **b)** 7,9 · 4 **c)** 9,8 · 7 **d)** 4,5 · 9
e) 0,63 · 7 **f)** 0,37 · 9 **g)** 0,89 · 6 **h)** 0,57 · 8
i) 0,047 · 9 **k)** 0,036 · 5 **l)** 0,088 · 6 **m)** 0,023 · 7
n) 3,197 8 · 7 **o)** 0,023 6 · 9 **p)** 0,576 38 · 9 **q)** 15,347 · 8

6. **a)** 0,6 · 37 **b)** 0,8 · 62 **c)** 0,4 · 29
d) 0,5 · 75 **e)** 0,09 · 54 **f)** 0,12 · 81
g) 0,07 · 93 **h)** 0,11 · 46 **i)** 0,003 · 135
k) 0,008 · 68 **l)** 0,013 · 99 **m)** 0,07 · 561
n) 0,78 · 90 **o)** 0,462 · 300 **p)** 0,085 · 120
q) 0,023 4 · 5 000 **r)** 0,026 · 4 000 **s)** 0,0015 · 600

7. **a)** 13,09 · 15 (36; 420; 1 000) **b)** 20,4 · 5 (17; 40; 708)
c) 7,135 · 6 (70; 90; 780) **d)** 39,08 · 3 (67; 201; 900)
e) 67,08 · 5 (20; 75; 608) **f)** 7,684 · 5 (80; 600; 784)
g) 182,4 · 29 (76; 900; 7 000) **h)** 8,932 · 35 (105; 435; 850)

8. **a)** 0,48 DM · 7 (10; 300; 467) **b)** 6,57 m · 4 (30; 100; 84)
c) 3,907 kg · 9 (40; 500; 190) **d)** 1,84 hl · 3 (90; 700; 890)
e) 0,27 a · 6 (70; 800; 705) **f)** 2,63 dt · 8 (50; 400; 307)
g) 16,25 a · 4 (60; 200; 135) **h)** 28,96 hl · 7 (34; 600; 258)
i) 9,425 m³ · 5 (90; 600; 457) **k)** 7,829 t · 2 (64; 860; 783)

9. **a)** 38,48 hl · 54 (87; 235) **b)** 84,64 DM · 48 (96; 287)
c) 97,01 a · 72 (128; 549) **d)** 117,28 dt · 9 (48; 96)
e) 78,625 kg · 95 (234; 657) **f)** 18,438 t · 25 (648; 1 000)
g) 16,83 m² · 84 (186; 500) **h)** 78,96 ha · 74 (238; 650)
i) 238,45 DM · 84 (365; 2 450) **k)** 438,50 m · 75 (87; 576)
l) 58,388 km · 38 (69; 125) **m)** 348,875 m³ · 84 (235; 800)

10. Verwandle vor dem Multiplizieren die folgenden Maßangaben in Dezimalbrüche!

a) 54 a 47 m² · 228 **b)** 69 a 37 m² · 675 **c)** 89 ha 74 a · 369
d) 46 a 85 m² · 775 **e)** 215 ha 29 a · 341 **f)** 876 ha 39 a · 548
g) 624 ha 45 a · 472 **h)** 946 ha 58 a · 560 **i)** 58 ha 78 a · 385
k) 356 hl 24 *l* · 162 **l)** 571 hl 5 *l* · 345 **m)** 956 hl 42 *l* · 509
n) 12 m³ 364 dm³ · 389 **o)** 16 m³ 168 dm³ · 264 **p)** 4 cm³ 39 mm³ · 835
q) 43 kg 75 g · 92 **r)** 46 kg 139 g · 84 **s)** 19 kg 6 g · 405

11. Berechne den Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Seiten 6,0 cm und 4,5 cm lang sind! Prüfe das Ergebnis durch Zeichnen auf Millimeterpapier nach!

12. Berechne die Flächeninhalte der Rechtecke mit den folgenden Seiten!

a) 7,0 cm und 4,8 cm
b) 17,0 dm und 9,5 dm
c) 12,00 m und 8,75 m
d) 20,0 m und 12,5 m
e) 6,0 cm und 38 mm (Flächeninhalt in cm²)
f) 24,0 dm und 165 cm (Flächeninhalt in dm²)
g) 5,00 m und 345 cm (Flächeninhalt in m²)

13. In einer LPG rechnet man mit einem Kartoffelertrag von 195 dt je Hektar. Wieviel Dezitonnen Kartoffeln wird man von einem 8,4 ha großen Feld ernten?

14. Ein Aktivist erzielt durch Anwendung einer neuen Arbeitsweise beim Drehen eine tägliche Einsparung von 3,64 DM. Es arbeiten im Betrieb noch 3 Dreher nach dieser Arbeitsmethode. Wieviel Mark werden insgesamt im Monat (26 Arbeitstage) eingespart?

15. Eine Wandergruppe einer Schule in Berlin plant eine vierzehntägige Wanderung nach dem Thüringer Wald. Die Kosten für Verpflegung, Unterkunft und Fahrt betragen für jeden Teilnehmer 35,85 DM. Wieviel Mark kassiert der Gruppenleiter, wenn 27 Kinder an der Fahrt teilnehmen?

16. Unsere Wirtschaftsplanung stellt der Landwirtschaft das Ziel, bei Getreide einen durchschnittlichen Ertrag von 30,5 dt je Hektar zu erreichen. Die LPG „Rotes Banner" in Trinwillershagen will sogar 40 dt je Hektar erreichen. Wieviel Dezitonnen Getreide könnten zusätzlich auf 125 ha Getreideanbaufläche geerntet werden?

17. Es ist geplant, daß im Jahre 1965 etwa 2,8mal soviel Personenkraftwagen hergestellt werden wie 1958. Im Jahre 1958 wurden in der Deutschen Demokratischen Republik 38 400 Personenkraftwagen produziert. Wieviel Personenkraftwagen sollen im Jahre 1965 gebaut werden?

18. Die Produktion von Waschmaschinen soll sich bis 1965 sogar auf das 4,3fache erhöhen. Im Jahre 1958 wurden 49 800 Waschmaschinen produziert.

19. Im Jahre 1957 lieferte die Sowjetunion an die Deutsche Demokratische Republik rund 1 040 000 t Erdöl. Im Jahre 1965 wird durch die neue Erdölleitung von der Sowjetunion nach Schwedt an der Oder die rund 4,6fache Menge fließen. Wieviel Tonnen Erdöl sollen durch die Leitung im Jahre 1965 gepumpt werden?

16. Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl

Wir wollen Dezimalbrüche durch eine ganze Zahl dividieren und versuchen wieder, mit Hilfe der Rechenregeln für gemeine Brüche einen Lösungsweg zu finden.

Beispiel 1: Michael aus Wismar fuhr mit dem Fahrrad zur Ostseewoche nach Rostock. Er legte die 58,4 km lange Strecke in 4 Stunden zurück. Wieviel Kilometer ist er durchschnittlich in einer Stunde gefahren?

Überschlag: 60 km : 4 = 15 km. Er ist also etwas weniger als 15 km in der Stunde gefahren.

Lösung: Wir berechnen 58,4 km : 4.

$$58{,}4\,\text{km} : 4 = 58\tfrac{4}{10}\,\text{km} : 4 = \frac{584}{10}\,\text{km} : 4 = \boxed{\frac{584:4}{10}}\,\text{km} = \frac{146}{10}\,\text{km} = 14{,}6\,\text{km}$$

Ergebnis: Michael legte in einer Stunde durchschnittlich 14,6 km zurück.

Aus dem eingerahmten Bruchausdruck erkennen wir einen kürzeren Lösungsweg. Wir können einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl dividieren, ohne daß wir vorher den Dividenden in einen Zehnerbruch verwandeln. Wir dividieren wie mit ganzen Zahlen, müssen aber darauf achten, daß wir nicht 584 Ganze, sondern 584 **Zehntel** dividiert haben. Also erhalten wir im Ergebnis wieder **Zehntel**. Aus diesem Grunde setzen wir im Quotienten ein Komma, sobald wir die Einer des Dividenden dividiert haben.

Vergiß nie, im Quotienten ein Komma zu setzen, sobald du die Einer dividiert hast!

58,4 km : 4 = 14,6 km

Probe: 14,6 km · 4 = 58,4 km

$$\begin{array}{l} 58{,}4 : 4 = 14{,}6 \\ \underline{18} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

Beispiel 2: 0,945 : 7

Wir rechnen wieder wie mit ganzen Zahlen und setzen das Komma, sobald wir die null Einer dividiert haben (0 : 7 = 0). Vor dem Rechnen überschlagen wir das Ergebnis.

900 Tausendstel : 7 ≈ 130 Tausendstel

$$\begin{array}{l} 0{,}945 : 7 = 0{,}135 \\ \underline{24} \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

Probe: 0,135 · 7 = 0,945

Aus den Beispielen erkennen wir:

Man dividiert einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl, indem man den Dezimalbruch wie eine ganze Zahl dividiert. Dabei muß im Quotienten ein Komma gesetzt werden, wenn man die Einer des Dividenden dividiert hat.

Beispiel 3: Zwei Freunde wanderten in 4 h eine Wegstrecke von 17,5 km. Wieviel Kilometer legten sie durchschnittlich in 1 h zurück?

Lösung: Wir berechnen 17,5 km : 4.

Dabei müssen wir feststellen, daß nach der Teilbarkeitsregel 175 nicht durch 4 teilbar ist. Wir können aber auch Dezimalbrüche erweitern. In diesem Fall erweitern wir den Dezimalbruch 17,5 mit 100 und erhalten

17,500. Das sind also 17 500 **Tausendstel.** 17 500 ist durch 4 teilbar, im Ergebnis erhalten wir **Tausendstel.**

17,500 km : 4 = 4,375 km

```
17,500 : 4 = 4,375
 15
  30
   20
    0
```

Probe: 4,375 · 4 = 17,500

Ergebnis: Die beiden Freunde wanderten in einer Stunde durchschnittlich 4,375 km.

Wir können die Aufgabe auch rechnen, ohne daß wir den Dezimalbruch vorher erweitern. Wir erweitern einfach den Dezimalbruch, wenn beim Dividieren noch ein Rest verbleibt, immer wieder mit 10. Die Nullen brauchen wir nicht an den Dezimalbruch anzuhängen, sondern wir können sie in unsere Rechenfahne schreiben (an die mit Pfeilen bezeichneten Stellen):

```
17,5 : 4 = 4,375
 15
  30 ←
   20 ←
    0
```

Die Division eines Dezimalbruchs durch 10, 100, 1 000, ... ist sehr einfach. Wir wollen uns die Lösung an den folgenden Beispielen überlegen.

Beispiel 4: Dividiere den Dezimalbruch 0,3 a) durch 10, b) durch 100, c) durch 1 000! (Überschlage vor dem Rechnen das Ergebnis!)

Lösung:
a) 0,3 : 10 = 0,03
b) 0,3 : 100 = 0,003
c) 0,3 : 1 000 = 0,0003

Wenn wir in dem Beispiel 4 die Quotienten mit den Dividenden der Aufgaben vergleichen, sehen wir, daß

beim Dividieren durch ... 10 das Komma 1 Stelle,
beim Dividieren durch ... 100 das Komma 2 Stellen,
beim Dividieren durch ... 1 000 das Komma 3 Stellen

nach links rückt.

Untersuche an einer entsprechenden Aufgabe, um wieviel Stellen das Komma nach links rückt, wenn wir durch 10 000 dividieren!

Man dividiert Dezimalbrüche durch 10, 100, 1 000, ..., indem man das Komma 1, 2, 3, ... Stellen nach links rückt.

Endliche und unendliche Dezimalbrüche

In den Beispielen 1 bis 3 blieb beim Dividieren kein Rest. Wir erhielten als Ergebnis einen Dezimalbruch mit einer bestimmten Anzahl von Stellen hinter dem Komma. Unsere Rechnung führte zu einem Ende. Ein solcher Dezimalbruch heißt **endlicher Dezimalbruch.** Das ist jedoch nicht immer beim Dividieren der Fall, wie uns das Beispiel 5 zeigen wird.

Beispiel 5: Eine Wandergruppe will 14,5 km in 3 Stunden zurücklegen. Wieviel Kilometer muß sie durchschnittlich in 1 Stunde gehen?

Überschlag: 15 km : 3 = 5 km. Sie muß also durchschnittlich etwas weniger als 5 km in 1 h gehen.

Lösung: Wir berechnen 14,5 km : 3.

```
14,5 : 3 = 4,833 3...
 -
  25
  -
   10
   -
    10
    -
     10
     -
      1
```

Die drei Punkte im Quotienten sollen andeuten, daß wir weiterrechnen können und in den folgenden Stellen des Quotienten immer wieder die gleiche Zahl, nämlich 3, erhalten.

Erkläre an den Gliedern der Rechenfahne, daß die Rechnung zu keinem Ende führt!

Wir nennen einen solchen Dezimalbruch einen **unendlichen Dezimalbruch.** Im folgenden Kapitel werden wir solche unendlichen Dezimalbrüche, wie sie beim Dividieren als Ergebnis häufig vorkommen, noch genauer kennenlernen.

Um bei einem unendlichen Dezimalbruch zu einem abgeschlossenen Ergebnis zu gelangen, müssen wir runden. Ob wir auf- oder abrunden, richtet sich jeweils nach der letzten Stelle im Ergebnis. Wir berechnen also in solchen Fällen immer eine Stelle mehr, als im Ergebnis benötigt wird.

Bei dieser Aufgabe runden wir im Ergebnissatz auf eine Stelle hinter dem Komma. Es wird nämlich bei einer Wanderung nicht möglich sein, den stündlichen Weg auf 30 oder gar auf 33 m genau einzuteilen.

Ergebnis: Durchschnittlich müssen 4,8 km in einer Stunde zurückgelegt werden.

Da der Quotient gerundet, also nur angenähert richtig ist, erhalten wir bei der Probe auch nicht genau den Dividenden.

Probe: $4{,}833 \cdot 3 = 14{,}499$

Die Abweichung vom genauen Ergebnis ist in diesem Fall nur sehr klein.

Beispiel 6: Auf einem 3 ha großen Versuchsfeld wurden 98 dt Winterweizen geerntet. Wie groß war der durchschnittliche Ertrag auf einem Hektar?

Überschlag: 90 dt : 3 = 30 dt
Auf einem Hektar wurden etwas mehr als 30 dt Winterweizen geerntet.

Lösung: Wir rechnen: 98 dt : 3.

98 ist nicht durch 3 teilbar. Da wir aber jede ganze Zahl als Dezimalbruch auffassen können, rechnen wir also wie im Beispiel 5:

$98 : 3 = 32{,}666\ldots$ *Probe:* $32{,}666 \cdot 3 = 97{,}998$

$\underline{8}$
$\underline{20}$
$\underline{20}$
$\underline{20}$
$\underline{2}$

Wir wollen das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma runden.

Begründe, warum wir in diesem Beispiel aufrunden!

Ergebnis: Der durchschnittliche Ertrag je Hektar beträgt rund 32,67 dt.

Zusammenfassung:

Als Ergebnis bei der Division kann man einen endlichen oder einen unendlichen Dezimalbruch erhalten. Erhält man im Quotienten mehr Stellen als nötig, so muß man das Ergebnis runden. Das ist besonders bei unendlichen Dezimalbrüchen erforderlich. Die Rundungsregeln für Ganze gelten entsprechend auch für Dezimalbrüche:

Man rundet den Dezimalbruch ab, wenn die Stellenziffer nach der zu rundenden Stelle eine 1, 2, 3 oder 4 ist.

Man rundet den Dezimalbruch auf, wenn die nächste Stellenziffer nach der zu rundenden Stelle eine 5, 6, 7, 8 oder 9 ist.

Aufgaben

Kopfrechnen

1. a) 0,8 : 2 **b)** 2,4 : 2 **c)** 0,08 : 2 **d)** 0,018 : 2
e) 72 : 12 **f)** 7,2 : 12 **g)** 0,72 : 12 **h)** 0,072 : 12

Bilde ähnliche Aufgaben mit Zahlen der Einmaleinsfolgen!

2. **a)** 0,4 : 2 **b)** 8,1 : 3 **c)** 0,48 : 4
d) 7,5 : 5 **e)** 0,78 : 6 **f)** 0,98 : 7
g) 10,4 : 8 **h)** 11,7 : 9 **i)** 14,4 : 12
k) 1,68 : 12 **l)** 0,76 : 19 **m)** 0,135 : 15
n) 1,12 : 4 **o)** 1,26 : 14 **p)** 0,144 : 16
q) 0,078 : 6 **r)** 0,112 : 7 **s)** 0,084 : 12
t) 0,136 : 17 **u)** 0,168 : 14 **v)** 2,38 : 14

3. **a)** 36 : 10; 36 : 100; 36 : 1 000 **b)** 3,6 : 10; 3,6 : 100; 3,6 : 1 000
c) 0,36 : 10; 0,36 : 100; 0,36 : 1 000 **d)** 0,036 : 10; 0,036 : 100; 0,036 : 1 000

Bilde selbst ähnliche Aufgaben!

Schriftliches Rechnen

4. **a)** 9,1 : 13 **b)** 0,95 : 19 **c)** 1,35 : 15 **d)** 2,88 : 12
e) 12,8 : 16 **f)** 0,225 : 25 **g)** 0,64 : 16 **h)** 1,17 : 13
i) 1,54 : 14 **k)** 0,084 : 12 **l)** 13,6 : 17 **m)** 0,216 : 24
n) 1,69 : 13 **o)** 4,65 : 15 **p)** 5,61 : 11 **q)** 0,294 : 14

5. **a)** 0,28 : 4 **b)** 2,36 : 4 **c)** 5,792 : 8
d) 8,316 : 4 **e)** 5,895 : 9 **f)** 1,652 : 7
g) 4,057 9 : 7 **h)** 0,059 427 : 9 **i)** 6,3 : 5
k) 7,246 : 5 **l)** 0,592 4 : 5 **m)** 0,625 8 : 5
n) 14,6 : 4 **o)** 1,35 : 4 **p)** 9,504 : 3
q) 0,187 64 : 4 **r)** 91,25 : 8 **s)** 57,123 : 8
t) 4,956 7 : 8 **u)** 0,880 25 : 8 **v)** 36,003 76 : 6

6. Dividiere die folgenden Zahlen durch 10 (100; 1 000; 10 000)!

a) 5 734,5 **b)** 930,21 **c)** 684,34 **d)** 12 487,6
e) 90 345,38 **f)** 82 163,459 **g)** 13,4 **h)** 16,17
i) 28,537 **k)** 6,2 **l)** 9,173 **m)** 0,3
n) 0,18 **o)** 0,613 **p)** 0,004 **q)** 0,103
r) 0,156 **s)** 0,070 3 **t)** 0,145 **u)** 2,076

7. **a)** 73 kg : 2 **b)** 49,374 t : 3 **c)** 375,68 DM : 4
d) 3 498 DM : 5 **e)** 789,36 DM : 6 **f)** 660,24 ha : 7
g) 53,28 dt : 8 **h)** 277,830 kg : 9 **i)** 478,94 hl : 7
k) 940,527 m³ : 9 **l)** 4,062 t : 3 **m)** 345,68 a : 8

8. **a)** 3,468 kg : 20 **b)** 42,354 kg : 90 **c)** 1,260 kg : 70
d) 25,672 kg : 80 **e)** 1,026 t : 30 **f)** 3,978 t : 60
g) 57,942 t : 90 **h)** 39 t : 40 **i)** 52 a : 400
k) 405 a : 900 **l)** 648 a : 800 **m)** 364 a : 700
n) 29 m³ : 4 000 **o)** 57 m³ : 6 000 **p)** 108 m³ : 9 000
q) 51,569 cm³ : 7 000 **r)** 26,478 cm³ : 3 000 **s)** 93,256 cm³ : 8 000

9. **a)** 112,68 : 18 **b)** 40,32 : 24 **c)** 6,507 : 27
d) 91,35 : 29 **e)** 76,88 : 31 **f)** 171,99 : 39
g) 12,138 : 42 **h)** 2,116 8 : 48 **i)** 6,2 : 25
k) 9,5 : 16 **l)** 38,24 : 32 **m)** 57,168 : 64
n) 105,3 : 45 **o)** 8,61 : 56 **p)** 248,16 : 75
q) 73 : 25 **r)** 373 : 25 **s)** 301 : 16
t) 17 : 64 **u)** 2 914 : 50 **v)** 8 056,3 : 35

10. **a)** 73,35 : 225 **b)** 305,36 : 347 **c)** 983,5 : 562
d) 1 066,8 : 635 **e)** 575,12 : 728 **f)** 17,327 2 : 968
g) 1 : 125 **h)** 3 : 125 **i)** 111 : 625
k) 4,05 : 225 **l)** 15,974 : 326 **m)** 49,47 : 51

11. **a)** 219,45 m : 57 **b)** 409,92 DM : 42 **c)** 246,895 kg : 67
d) 314,57 dt : 83 **e)** 241,08 hl : 84 **f)** 1 215,95 DM : 83
g) 349,848 kg : 86 **h)** 844,87 dt : 97 **i)** 262,35 hl : 53
k) 287,28 DM : 38 **l)** 630,176 kg : 94 **m)** 711,56 dt : 94
n) 367,664 t : 176 **o)** 6 538,68 ha : 738 **p)** 353,925 t : 143
q) 317,184 m³ : 354 **r)** 182,646 m³ : 417 **s)** 1 310,531 2 m² : 352
t) 15 895,76 ha : 652 **u)** 7 494,16 ha : 829 **v)** 1 700,11 ha : 197
w) 2 309,624 m³ : 536 **x)** 447,283 2 m² : 182 **y)** 1 358,156 6 m² : 479

12. Dividiere 12 498,935 kg durch **a)** 3, **b)** 74, **c)** 68, **d)** 187, **e)** 830, **f)** 274!

13. **a)** 722,436 km : 156 **b)** 2 143,38 ha : 417 **c)** 8 130 kg : 120
d) 11 t : 120 **e)** 87 216 DM : 600 **f)** 531,042 t : 749
g) 7 680 ha : 170 **h)** 5 006,391 kg : 137 **i)** 6 537,84 hl : 284
k) 974,85 DM : 785 **l)** 33 t : 220 **m)** 7 125,306 t : 491
n) 592,2 t : 140 **o)** 2 244,48 a : 672 **p)** 45 m³ : 250

14. Verwandle vor dem Dividieren die folgenden Maßangaben in Dezimalbrüche!

a) 674 m 88 cm : 76 **b)** 726 km 750 m : 85 **c)** 638 km 166 m : 94
d) 41 a 86 m² : 13 **e)** 63 ha 84 a : 19 **f)** 504 a 75 m² : 75
g) 1 870 hl 8 *l* : 384 **h)** 654 hl 15 *l* : 89 **i)** 490 hl 86 *l* : 54
k) 172 t 95 kg : 231 **l)** 877 kg 713 g : 307 **m)** 638 t 166 kg : 94
n) 250 m³ 299 dm³ : 137 **o)** 169 dm³ 848 cm³ : 126 **p)** 628 cm³ 788 mm³ : 732

15. Wenn ich eine Zahl mit 7 multipliziere und zum Ergebnis noch 11,45 addiere, erhalte ich 100. Nenne die Zahl!

16. Welche Zahl ergibt durch 8 dividiert 4,675?

17. Die sieben besten Springer der Klasse 6a konnten beim Weitsprung die folgenden Leistungen erzielen: 3,32 m, 3,75 m, 3,64 m, 3,42 m, 3,52 m, 3,46 m, 3,90 m. Berechne die durchschnittliche Leistung dieser sieben Springer!

18. Neun Mädchen der Klasse 6b erreichten beim Schlagballweitwurf die folgenden Leistungen: 31,65 m, 33,50 m, 26,95 m, 30,80 m, 27,80 m, 32,20 m, 29,50 m, 31,25 m, 28,30 m. Berechne die durchschnittliche Leistung dieser Mädchen im Schlagballweitwurf!

19. Bilde über sportliche Übungen in deiner Klasse zwei Aufgaben, die den Aufgaben 17 und 18 ähnlich sind!

20. Beim erwachsenen Menschen beträgt ungefähr

die Länge des Kopfes $\frac{1}{8}$, die Länge des Gesichts $\frac{1}{10}$,
die Länge des Oberkörpers $\frac{1}{3}$, die Länge des Unterarms $\frac{1}{4}$,
die Brustweite $\frac{1}{6}$, die Schulterbreite $\frac{1}{4}$,
die Handlänge $\frac{1}{10}$, die Fußlänge $\frac{1}{6}$
der gesamten Körpergröße.

a) Berechne nach diesen Angaben die Größe der einzelnen Körperteile eines Menschen, der 1,80 m groß ist!

b) Miß deine Größe, berechne die einzelnen Körperteile, und vergleiche deine rechnerischen Ergebnisse mit den wirklichen Größen!

21. Ein Rennpferd legte im Trab eine Strecke von 2,100 km in 175 s zurück. Wieviel Meter lief es durchschnittlich in einer Sekunde?

22. Zehn Schüler stellten ihre Körpergröße fest. Sie verwendeten dazu ein Meßband und ein Brettchen. Die Größen sind: 1,32 m, 1,35 m, 1,40 m, 1,38 m, 1,39 m, 1,41 m, 1,40 m, 1,42 m, 1,40 m und 1,43 m. Welche durchschnittliche Größe haben die 10 Schüler? Vergleiche deine Größe mit der durchschnittlichen Größe der 10 Schüler!

23. An eine Markthalle wurden an sechs aufeinanderfolgenden Wochentagen 18,45 dt, 56,75 dt, 39,85 dt, 21,38 dt, 64,75 dt und 67,32 dt Gemüse geliefert. Wieviel Dezitonnen betrug die durchschnittliche Belieferung am Tage?

24. Zwei HO-Verkaufsstellen hatten in der ersten Dezemberwoche an den einzelnen Tagen folgende Umsätze zu verzeichnen:

Verkaufsstelle I:	4 548,67 DM,	5 529,32 DM,	4 952,76 DM,
	5 149,24 DM,	5 388,28 DM,	6 213,37 DM;
Verkaufsstelle II:	3 219,32 DM,	4 648,56 DM,	5 579,82 DM,
	5 286,37 DM,	4 473,59 DM,	5 992,78 DM.

a) Berechne den durchschnittlichen Tagesumsatz jeder Verkaufsstelle!

b) Vergleiche die Wochenumsätze beider Verkaufsstellen miteinander!

25. In einem volkseigenen Gut wurden auf einem Feld von 7 ha Größe 155,8 dt Roggen, auf einem Feld von 14 ha Größe 465,9 dt Weizen geerntet. Errechne die durchschnittlichen Erträge an Roggen und Weizen auf einem Hektar!

26. Eine Möbelfabrik lieferte im I. Quartal 110 Schlafzimmer, im II. Quartal 132 Schlafzimmer, im III. Quartal 105 Schlafzimmer und im IV. Quartal 140 Schlafzimmer an die Großhandelskontore aus. Wieviel Schlafzimmer wurden durchschnittlich im Quartal von der Möbelfabrik geliefert?

17. Umwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt

In der Wirtschaft rechnet man nur noch selten mit gemeinen Brüchen. Deshalb wollen wir untersuchen, wie man gemeine Brüche in Dezimalbrüche umrechnen kann.

Beispiel 1: Verwandle $\frac{3}{8}$ in einen Dezimalbruch!

Wir haben im 5. Schuljahr gelernt, daß $\frac{3}{8}$ das Ergebnis einer Divisionsaufgabe sein kann. Sie lautet 3 : 8. Wir können nun aus dem Bruch wieder die Divisionsaufgabe bilden und rechnen:

$$\begin{array}{l} 3:8 = 0{,}375 \\ \underline{30} \\ \quad \underline{60} \\ \qquad \underline{40} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Ergebnis: Der Bruch $\frac{3}{8}$ ergibt als Dezimalbruch geschrieben 0,375.

Beispiel 2: Verwandle $\frac{4}{9}$ in einen Dezimalbruch!

Wir rechnen

$$\begin{array}{l} 4:9 = 0{,}44\ldots \\ \underline{40} \\ \quad \underline{40} \\ \qquad 4 \end{array}$$

Beispiel 3: Verwandle $\frac{5}{12}$ in einen Dezimalbruch!

$$\begin{array}{l} 5:12 = 0{,}4166\ldots \\ \underline{50} \\ \quad \underline{20} \\ \qquad \underline{80} \\ \qquad\quad \underline{80} \\ \qquad\qquad 8 \end{array}$$

Beispiel 4: Verwandle $\frac{7}{55}$ in einen Dezimalbruch!

$$
\begin{array}{l}
7:55 = 0{,}127\,27\ldots \\
\underline{70} \\
\underline{150} \\
\quad 400 \\
\quad \underline{150} \\
\qquad 400 \\
\qquad \underline{15}
\end{array}
$$

Wir wollen die vier Beispiele miteinander vergleichen. Im ersten Beispiel ist das Ergebnis ein endlicher Dezimalbruch. In den Beispielen 2 bis 4 sind die Ergebnisse unendliche Dezimalbrüche.

In den Beispielen 2 bis 4 kehren im Ergebnis bestimmte Ziffern oder Gruppen von Ziffern immer wieder. Man nennt sie **Perioden.**

Nenne die Perioden der Dezimalbrüche in den Beispielen 2 bis 4!

Wodurch unterscheidet sich die Periode im Beispiel 2 von der Periode im Beispiel 3?

Vergleiche die Perioden der Beispiele 2 und 3 mit der Periode des Beispiels 4!

Für Dezimalbrüche, die eine Periode enthalten, gibt es eine abgekürzte Schreibweise. Man setzt über die Ziffern, die eine Periode bilden, einen waagerechten Strich.

Beispiele:	0,44...	schreibt man $0{,}\overline{4}$	(gesprochen: Null-Komma-Vier; Periode Vier)
	0,4166...	schreibt man $0{,}41\overline{6}$	(gesprochen: Null-Komma-Vier-Eins-Sechs; Periode Sechs)
	0,12727...	schreibt man $0{,}1\overline{27}$	(gesprochen: Null-Komma-Eins-Zwei-Sieben; Periode Zwei-Sieben)
	0,5732121...	schreibt man $0{,}573\,\overline{21}$	(Lies entsprechend den vorhergehenden Beispielen!)
	0,325 345 34...	schreibt man $0{,}325\,\overline{34}$	(Lies entsprechend!)

Untersuchen wir nun noch die Umwandlung von endlichen Dezimalbrüchen in gemeine Brüche!

Umwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt

Beispiele: a) $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ b) $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ c) $0{,}375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$

Da die Stellen hinter dem Komma ohne weiteres den Nenner 10, 100, 1 000 usw. erkennen lassen, brauchen wir die Dezimalbrüche nur als Zehnerbrüche zu schreiben. Der Zehnerbruch wird dann, soweit es möglich ist, gekürzt.

Aufgaben

1. Verwandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalbrüche!

a) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$

b) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{23}{50}$, $\frac{39}{50}$

c) $\frac{4}{25}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{17}{40}$, $\frac{73}{125}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{11}{80}$, $\frac{17}{80}$, $\frac{9}{16}$

d) $\frac{5}{16}$, $\frac{11}{32}$, $\frac{37}{64}$, $\frac{11}{128}$, $\frac{99}{125}$, $\frac{23}{80}$, $\frac{81}{625}$, $\frac{19}{1600}$, $\frac{23}{40}$, $\frac{11}{256}$, $\frac{3}{1250}$, $\frac{9}{160}$

2. Verwandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalbrüche! Rechne bis zur Wiederkehr der Periode!

$\frac{1}{9}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{4}{19}$

3. Verwandle die folgenden Brüche in Dezimalbrüche! Runde auf Hunderttausendstel!

a) $\frac{5}{21}$ b) $\frac{13}{21}$ c) $\frac{17}{23}$ d) $\frac{22}{23}$ e) $\frac{12}{29}$ f) $\frac{18}{31}$

g) $\frac{12}{39}$ h) $\frac{25}{39}$ i) $\frac{19}{27}$ k) $\frac{8}{69}$ l) $\frac{5}{13}$ m) $\frac{9}{14}$

n) $\frac{16}{21}$ o) $\frac{7}{39}$ p) $\frac{9}{13}$ q) $\frac{25}{29}$ r) $\frac{30}{31}$ s) $\frac{9}{17}$

t) $\frac{4}{7}$ u) $\frac{20}{21}$ v) $\frac{19}{23}$ w) $\frac{19}{33}$ x) $\frac{9}{49}$ y) $\frac{35}{121}$

4. Verwandle die folgenden Brüche in einen Dezimalbruch! Brich ab bei der Wiederkehr der Periode!

a) $\frac{7}{18}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{17}{18}$

b) $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$

c) $\frac{1}{30}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{17}{30}$

d) $\frac{2}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{13}{15}$

e) $\frac{5}{22}$, $\frac{13}{22}$, $\frac{17}{22}$, $\frac{8}{33}$, $\frac{25}{33}$

f) $\frac{5}{36}$, $\frac{13}{36}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{7}{48}$

g) $\frac{13}{60}$, $\frac{29}{60}$, $\frac{37}{60}$, $\frac{31}{90}$, $\frac{47}{90}$, $\frac{67}{90}$, $\frac{53}{60}$, $\frac{49}{90}$

h) $\frac{2}{37}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{5}{37}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{11}{37}$, $\frac{17}{28}$, $\frac{9}{28}$, $\frac{9}{14}$

5. Verwandle die folgenden Brüche in einen Dezimalbruch und runde der Benennung entsprechend!

a) $\frac{1}{3}$ DM **b)** $\frac{1}{12}$ DM **c)** $\frac{1}{6}$ DM **d)** $\frac{5}{6}$ DM
e) $\frac{7}{11}$ m² **f)** $\frac{3}{7}$ m **g)** $\frac{3}{13}$ m³ **h)** $\frac{23}{24}$ km
i) $\frac{37}{45}$ t **k)** $\frac{61}{72}$ ha **l)** $\frac{17}{18}$ a **m)** $\frac{13}{15}$ kg

6. Schreibe die folgenden Dezimalbrüche als gemeine Brüche und kürze, soweit es möglich ist!

a) 0,50 0,25 0,75 0,4 0,6 0,35 0,48
0,05 0,65 0,64 0,56 0,84 0,45 0,32
b) 0,125 0,675 0,18 0,655 0,405 5 0,936
0,864 0,175 0,625 0,068 0,005 0,375 4
c) 0,127 5 0,245 0,65 0,984 0,464 0,125 2
0,288 0,324 0,52 0,084 0,375 0,408 0
d) 0,428 5 0,031 2 0,852 5 0,006 4 0,972 0 0,482 75
0,945 0,053 8 0,605 0,485 2 0,326 75 0,092 6

18. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einem Dezimalbruch

Weil Dezimalbrüche nur Zehnerbrüche mit besonderer Schreibweise sind, lassen sie sich auch wie Brüche multiplizieren.

Beispiel 1: Ein Rechteck ist 4,6 cm lang und 2,5 cm breit. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

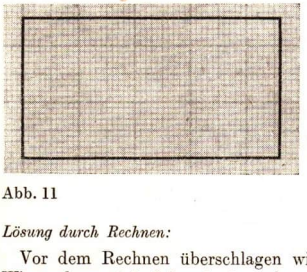


Abb. 11

Lösung durch Zeichnen:

Wir zeichnen das Rechteck auf Millimeterpapier und zählen die Quadratzentimeter und Quadratmillimeter aus (Abb. 11). Das Rechteck mit den Seitenlängen 4,6 cm und 2,5 cm hat einen Flächeninhalt von 1 150 mm² oder 11,50 cm².

Lösung durch Rechnen:

Vor dem Rechnen überschlagen wir das Ergebnis: 5 cm · 2 cm = 10 cm². Wir rechnen 4,6 · 2,5 cm². Zunächst verwandeln wir die Dezimalbrüche in Zehnerbrüche und rechnen mit ihnen.

$$4{,}6 = 4\frac{6}{10} \qquad 2{,}5 = 2\frac{5}{10}$$

$$4\frac{6}{10} \cdot 2\frac{5}{10} = \frac{46}{10} \cdot \frac{25}{10} = \boxed{\frac{46 \cdot 25}{10 \cdot 10}} = \frac{46 \cdot 25}{100} = \frac{1150}{100} = 11{,}50$$

Ergebnis: Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von 11,50 cm².

Der eingerahmte Bruchausdruck zeigt uns den Weg, wie wir zwei Dezimalbrüche miteinander multiplizieren können, ohne sie erst in gemeine Brüche verwandeln zu müssen:

Wir multiplizieren 4,6 mit 2,5 ohne Rücksicht auf das Komma (46 · 25) und streichen im Ergebnis von rechts nach links 2 Stellen ab.

Erläutere an Hand des Rechenganges mit Zehnerbrüchen, weshalb zwei Stellen abgestrichen werden müssen!

Die Multiplikation erhält also folgende Form:

$$\begin{array}{r} 4{,}6 \cdot 2{,}5 \\ \hline 92 \\ 230 \\ \hline 11{,}50 \end{array}$$

Beispiel 2: 1 dt Kartoffeln kostet 9,80 DM. Wie teuer sind 2,5 dt?

Überschlag: 10 DM · 3 = 30 DM.

Lösung: Nachdem wir die Dezimalbrüche in Zehnerbrüche verwandelt haben, rechnen wir mit gemeinen Brüchen:

1 dt kostet $9\frac{80}{100}$ DM,

$$2\frac{5}{10}\,\text{dt kosten } 9\frac{80}{100}\,\text{DM} \cdot 2\frac{5}{10} = \frac{980}{100} \cdot \frac{25}{10}\,\text{DM} = \boxed{\frac{980 \cdot 25}{100 \cdot 10}}\,\text{DM}$$

$$= \frac{24\,500}{1000}\,\text{DM} = 24{,}500\,\text{DM}.$$

Ergebnis: 2,5 dt Kartoffeln kosten 24,50 DM.

Aus dem eingerahmten Bruchausdruck erkennen wir wieder den kürzeren Lösungsweg.

Wir rechnen 9,80 · 2,5 und multiplizieren ohne Rücksicht auf das Komma 980 mit 25.

$$\begin{array}{r} 9{,}80 \cdot 2{,}5 \\ \hline 19\,60 \\ 4\,900 \\ \hline 24{,}500 \end{array}$$

Im Ergebnis streichen wir von rechts nach links drei Dezimalstellen ab. Wir runden den Dezimalbruch im Produkt auf die erforderliche Stellenzahl und erhalten 24,50.

Beispiel 3: 1 m Stoff kostet 2,45 DM. Wieviel Mark kosten 0,75 m?

Lösung: 0,75 m kosten $\frac{75}{100}$ von 2,45 DM.

Wir haben gelernt, daß wir den Bruchteil eines Bruches durch Multiplikation errechnen.

Wir rechnen also 2,45 · 0,75 und multiplizieren wieder ohne Rücksicht auf das Komma.

$$\begin{array}{r} 2{,}45 \cdot 0{,}75 \\ \hline 1\,715 \\ 1225 \\ \hline 1{,}8375 \end{array}$$

Im Ergebnis müssen wir von rechts nach links vier Dezimalstellen abstreichen.

Die Maßeinheit Mark (DM) erfordert nur zwei Stellen nach dem Komma. Deshalb runden wir das Ergebnis.

$$1{,}837\,5 \approx 1{,}84$$

Ergebnis: 0,75 m Stoff kosten 1,84 DM.

Man multipliziert zwei Dezimalbrüche miteinander, indem man sie wie ganze Zahlen multipliziert. Dann streicht man im Ergebnis so viel Dezimalstellen von rechts nach links ab, wie die Faktoren zusammen Stellen hinter dem Komma haben.

Die gleiche Regel gilt auch für die Multiplikation von Dezimalbrüchen mit ganzen Zahlen. *Weise das an Beispielen nach!*

Aufgaben

Kopfrechnen

1. a) 0,1 · 0,1
0,2 · 0,2
bis
0,9 · 0,9

b) 0,1 · 0,01
0,2 · 0,02
bis
0,9 · 0,09

c) 0,01 · 0,01
0,02 · 0,02
bis
0,09 · 0,09

d) 0,1 · 0,17
0,2 · 0,17
bis
0,9 · 0,17

2. a) 0,4 · 0,2
0,7 · 0,5
1,3 · 0,8
2,6 · 0,6

b) 0,03 · 0,07
0,08 · 0,3
0,06 · 1,5
0,05 · 2,1

c) 0,27 · 0,3
0,18 · 0,5
0,17 · 0,9
1,02 · 0,9

d) 0,02 · 0,03
0,09 · 0,07
0,15 · 0,05
0,16 · 0,12

3.

	A	B	C	D	E	F
I	0,3	0,8	0,9	0,5	0,4	0,6
II	0,08	0,02	0,04	0,07	0,09	0,05
III	0,7	1,3	1,4	2,5	1,8	1,5
IV	0,02	0,19	1,16	1,07	1,12	0,11

Bilde selbst mit den Dezimalbrüchen der Tabelle Multiplikationsaufgaben mit zwei Faktoren! Zum Beispiel:

a) Multipliziere jeden Dezimalbruch der Zeilen I bis IV mit dem ersten Dezimalbruch der betreffenden Zeile!

b) Multipliziere jeden Dezimalbruch der Spalten A bis F mit dem obersten Dezimalbruch der betreffenden Spalte!

c) Multipliziere die Dezimalbrüche der Zeile IV mit dem zweiten Dezimalbruch der Zeile I!

4. a) 0,8 · 0,7 · 0,3 **b)** 1,2 · 0,3 · 4 **c)** 0,7 · 1,9 · 0,2

5. Bilde selbst 10 Aufgaben mit 3 Faktoren!

Schriftliches Rechnen

6. a) 37 · 0,6 **b)** 62 · 0,8 **c)** 29 · 0,4
d) 75 · 0,5 **e)** 54 · 0,09 **f)** 81 · 0,12
g) 93 · 0,07 **h)** 46 · 0,11 **i)** 135 · 0,003
k) 68 · 0,008 **l)** 99 · 0,015 **m)** 561 · 0,002
n) 320 · 0,25 **o)** 1 500 · 0,011 **p)** 9 750 · 0,2
q) 5 000 · 0,71 **r)** 2 300 · 0,04 **s)** 6 000 · 0,84

7. a) 0,9 · 0,6 **b)** 0,8 · 0,12 **c)** 0,7 · 0,09
d) 0,18 · 0,4 **e)** 0,6 · 0,024 **f)** 0,045 · 0,07
g) 0,025 · 0,005 **h)** 0,013 5 · 0,06 **i)** 3,5 · 0,4
k) 0,9 · 4,8 **l)** 8,7 · 0,04 **m)** 0,09 · 9,6
n) 0,09 · 1,8 **o)** 7,5 · 0,08 **p)** 4,1 · 0,005
q) 0,008 · 5,8 **r)** 9,3 · 0,52 **s)** 8,7 · 4,9

8. a) 0,18 · 0,6 **b)** 0,9 · 0,25 **c)** 0,7 · 0,95
d) 0,58 · 0,8 **e)** 0,5 · 0,096 **f)** 0,4 · 0,037
g) 0,089 · 0,7 **h)** 0,065 · 0,05 **i)** 0,95 · 0,09
k) 0,12 · 0,015 **l)** 0,084 · 0,009 **m)** 0,15 · 0,074
n) 0,013 · 0,27 **o)** 0,032 · 0,026 **p)** 0,095 · 0,06

9. a) 3,5 · 1,2 **b)** 1,8 · 1,3 **c)** 2,5 · 2,4
d) 1,7 · 1,5 **e)** 1,6 · 0,11 **f)** 0,28 · 1,4
g) 1,8 · 0,18 **h)** 2,4 · 0,17 **i)** 2,1 · 1,5
k) 0,17 · 1,7 **l)** 4,8 · 0,13 **m)** 1,3 · 1,6
n) 6,4 · 1,1 **o)** 0,28 · 2,3 **p)** 7,8 · 0,03
q) 5,6 · 0,012 **r)** 6,8 · 4,3 **s)** 0,58 · 0,32

10. a) 0,31 · 1,4 **b)** 1,5 · 0,15 **c)** 7,6 · 0,012
d) 9,8 · 0,011 **e)** 0,32 · 7,5 **f)** 0,25 · 6,4
g) 2,8 · 0,025 **h)** 5,6 · 0,025 **i)** 0,038 · 0,012
k) 0,098 · 0,07 **l)** 0,076 · 0,009 **m)** 8,7 · 0,006
n) 0,46 · 0,048 **o)** 3,702 · 0,049 **p)** 5,56 · 0,708

11. **a)** 0,48 · 0,57 **b)** 7,85 · 0,32 **c)** 4,346 · 0,87
d) 6,9 · 0,094 **e)** 16,94 · 7,3 **f)** 74,056 · 9,5
g) 17,48 · 0,095 **h)** 425,36 · 4,7 **i)** 85,9 · 6,09
k) 92,473 · 7,35 **l)** 234,26 · 7,4 **m)** 5 248,25 · 0,34
n) 84,356 · 5,08 **o)** 974,23 · 6,42 **p)** 8 234,04 · 0,49

12. **a)** 83,39 · 0,9 **b)** 4,026 · 0,6 **c)** 900,5 · 0,07
d) 676,9 · 0,004 **e)** 3,197 8 · 0,3 **f)** 0,023 69 · 0,5
g) 576,38 · 0,000 8 **h)** 73,483 6 · 0,5 **i)** 0,012 5 · 8,04
k) 55,580 7 · 0,016 **l)** 43,802 · 0,051 **m)** 66,082 3 · 0,047
n) 75,832 · 5,976 **o)** 50,45 · 0,076 9 **p)** 28,638 · 0,037

13. **a)** 0,17 · 3,8 · 5,7 **b)** 112 · 6,6 · 0,07 **c)** 0,11 · 5,7 · 21,2
d) 19,2 · 0,8 · 1,02 **e)** 11,2 · 0,05 · 37 **f)** 0,13 · 20,5 · 0,6
g) 99,9 · 0,9 · 9,9 **h)** 21,3 · 0,3 · 16 **i)** 0,09 · 17,1 · 55

14. Runde die Ergebnisse auf zwei Stellen!

a) 9,38 DM · 7,8 **b)** 16,439 km · 9,64 **c)** 48,39 hl · 18,9
d) 4,956 kg · 5,78 **e)** 435,94 dt · 7,35 **f)** 9,49 ha · 3,489
g) 45,692 m³ · 22,8 **h)** 9,489 t · 0,78 **i)** 394,97 m² · 5,328
k) 0,459 kg · 7,89 **l)** 386,94 DM · 87,96 **m)** 18,96 cm² · 0,794

15.

	a	b	c	A	B	C
I	55,9	123,84	2 345,06	1,2	50,05	0,008 9
II	76,23	296,094	8 604,208	0,14	60,08	0,007 4
III	49,568	158,3	3 957,072	2,4	72,03	0,025
IV	17,49	447,26	563,890 6	0,016	40,8	0,000 93
V	65,08	507,09	45,009	0,029	15,009	0,006

Bilde aus der Tabelle Multiplikationsaufgaben!

Zum Beispiel:

a) Multipliziere in der Zeile I die Dezimalbrüche der Spalten a bis c mit jedem Dezimalbruch der Spalten A bis C!

b) Multipliziere die Dezimalbrüche der Spalte a nacheinander mit den Dezimalbrüchen der Spalte C!

16. **a)** 24,168 · 200 **b)** 469,73 · 8 000 **c)** 0,753 · 3 400
d) 3,946 · 39 000 **e)** 6,9 · 8 400 **f)** 4,785 6 · 256 000
g) 27 500 · 3,76 **h)** 48 300 · 0,948 2 **i)** 372 100 · 6,473 3
k) 195 000 · 123,58 **l)** 380 000 · 0,038 4 **m)** 765 400 · 18,543

17. **a)** $0{,}8^2$ **b)** $3{,}7^2$ **c)** $0{,}48^2$ **d)** $0{,}725^2$ **e)** $18{,}45^2$
f) $0{,}1^3$ **g)** $0{,}37^3$ **h)** $4{,}02^3$ **i)** $16{,}08^3$ **k)** $3{,}047^3$

Runde das Ergebnis auf vier Stellen nach dem Komma, wenn sich mehr Stellen ergeben!

18. Überlege, wie sich die folgenden Aufgaben vorteilhaft rechnen lassen!

a) $47{,}8 \cdot 0{,}9$ **b)** $36{,}78 \cdot 9{,}9$ **c)** $75{,}432 \cdot 0{,}99$
d) $68{,}74 \cdot 4{,}9$ **e)** $128{,}763 \cdot 99{,}8$ **f)** $653{,}47 \cdot 1{,}99$

19. Multipliziere die Summe der beiden Zahlen 178,90 und 148,63 mit ihrer Differenz!

20. Vermindere 437,3 um das 17,5fache von 23,84!

21. 1 m Anzugstoff kostet 28,75 DM. Wie teuer sind 3,15 m?

22. Erkundige dich bei der HO nach Preisen für Kleiderstoffe und berechne, wieviel 4,50 m für ein Kleid kosten! (Wähle fünf verschiedene Stoffe aus!)

23. Bilde selbst ähnliche Aufgaben wie in Aufgabe 22!

24. 1 dt Briketts kostet 3,40 DM. Wie teuer sind

a) 7,25 dt, **b)** 15,8 dt, **c)** 23,78 dt?

25. Ein Klassenzimmer in einem Schulneubau ist 8,45 m lang, 6,80 m breit und 3,60 m hoch. Es ist für 36 Schüler eingerichtet. Wieviel Kubikmeter Raum stehen für jede Person zur Verfügung? (Vergiß den Lehrer nicht!)

26. Ein Mauerziegel ist 24,0 cm lang, 11,5 cm breit und 7,1 cm hoch. Ein Großblockstein für eine Außenwand ist 149 cm lang, 29 cm breit und 118,5 cm hoch. Berechne für beide Baumaterialien den Rauminhalt eines Steines!

27. Eine Betriebssportgemeinschaft (BSG) beabsichtigt, die Rasendecke ihres Sportplatzes durch Aussaat von Grassamen zu erneuern. Die Rasenfläche ist 5 800 m² groß. Wieviel Kilogramm Grassamen müssen besorgt werden, wenn für eine Fläche von einem Ar 1,850 kg Grassamen benötigt werden?

28. Eine Tischtennisplatte hat etwa die folgenden Maße: 2,74 m Länge und 1,53 m Breite. Welche Spielfläche ergibt sich? Runde!

29. Ein Kiefernholzbrett ist 4,65 m lang und 27 cm breit. Der Preis für einen Quadratmeter Kiefernholzbretter beträgt 2,78 DM. Wie hoch ist der Preis für dieses Brett?

30. Ein Raum, der 5,45 m lang und 4,10 m breit ist, soll gedielt werden.

a) Wieviel Quadratmeter Bretter werden für das Dielen benötigt? Wie muß man in diesem Falle runden?

b) Wieviel Meter Fußleisten werden gebraucht, wenn für zwei Türen je 1,18 m wegfallen?

31. In einer Wohnung sollen die Fußböden gestrichen werden. Das Wohnzimmer ist 4,40 m lang und 4,75 m breit, das Schlafzimmer ist 4,25 m lang und 4,25 m breit, die Küche ist 3,80 m lang und 3,25 m breit. Der Anstrich für einen Quadratmeter kostet 1,95 DM. Berechne die Kosten!

32. Ein Industriearbeiter, der aufs Land gegangen war, erhielt ein rechteckiges Stück Ackerland von 21,80 m Breite und 34,60 m Länge als Gartenland. Wie groß war die Gartenfläche, die der Arbeiter erhielt?

33. In einer volkseigenen Gärtnerei sollen

8,20 a mit Erbsen,	3,15 a mit Möhren,
9,25 a mit Bohnen,	4,75 a mit Spinat

bebaut werden.

a) Wie hoch ist der Samenbedarf, wenn auf ein Ar

2,550 kg Erbsensaatgut,	1,040 kg Bohnensaatgut,
0,035 kg Möhrensamen,	0,360 kg Spinatsamen

gerechnet werden?

b) Bei normalen Wachstumsbedingungen werden je Ar im Durchschnitt

0,45 dt Erbsen,	2,15 dt Möhren,
1,05 dt Bohnen,	1,35 dt Spinat

geerntet. Mit welchem Ernteertrag von jeder Sorte ist zu rechnen?

34. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft sparte auf einer Getreideanbaufläche von 150,25 ha durch Verwendung von Traktoren und durch Gerätekopplung 1 384,00 DM an Kosten ein. Wieviel Mark betrug die Kosteneinsparung je Hektar?

19. Division eines Dezimalbruches durch einen Dezimalbruch

1) Teilen

Wir haben schon gelernt, wie man einen Bruch durch einen Bruch dividiert. Dabei haben wir zunächst den Divisor ganzzahlig gemacht.

Den gleichen Weg wählen wir auch bei der Division eines Dezimalbruches durch einen Dezimalbruch.

Beispiel 1: 1,5 m Stoff kosten 5,25 DM. Wie teuer ist 1 m?

Wir rechnen: 5,25 DM : 1,5.

Damit wir im Divisor eine ganze Zahl erhalten, multiplizieren wir den Divisor und den Dividenden mit 10. Wir erhalten dadurch die Aufgabe

52,5 DM : 15.

Diese Aufgabe können wir lösen.

Vor dem Rechnen überschlagen wir das Ergebnis:

$$50 : 15 \approx 3$$

Lösung:

$$52{,}5 : 15 = 3{,}5$$
$$\underline{75}$$
$$0$$

79

Probe: $3{,}5 \cdot 1{,}5 = 5{,}25$

Ergebnis: 1 m Stoff kostet 3,50 DM.

Beispiel 2: Auf einem Feld von 0,85 ha Größe wurden 175,60 dt Kohlrabi geerntet. Wie hoch war der Ertrag je Hektar?

Die Aufgabe lautet: 175,60 : 0,85.

Wir multiplizieren Dividend und Divisor mit 100, um das Komma zu beseitigen.

17 560 : 85

Überschlag: 18 000 : 90 = 200

Lösung:

$$17\,560 : 85 = 206{,}588$$
$$\underline{560}$$
$$\underline{500}$$
$$\underline{750}$$
$$\underline{700}$$
$$20$$

Probe:

$$206{,}588 \cdot 85$$
$$\underline{16\,527\,04}$$
$$\underline{1\,032\,940}$$
$$17\,559{,}980 \approx 17\,560$$

(Da wir die Division vorzeitig abgebrochen haben, kann die Probe nicht zum Ausgangswert führen.)

Das Ergebnis runden wir auf 2 Stellen nach dem Komma.

Ergebnis: Es wurden rund 206,59 dt Kohlrabi je Hektar geerntet.

Wenn wir durch einen Dezimalbruch dividieren, machen wir zunächst den Divisor ganzzahlig. Dazu multiplizieren wir Dividend und Divisor mit 10, 100, 1 000, ... Dann rechnen wir wie bei der Division durch ganze Zahlen.

Aufgaben

Kopfrechnen

1. a) 2 : 0,2
4 : 0,2
bis
20 : 0,2

b) 2 : 0,02
4 : 0,02
bis
20 : 0,02

c) 2 : 0,002
4 : 0,002
bis
20 : 0,002

d) 0,2 : 2
0,4 : 2
bis
2,0 : 2

e) 0,02 : 0,2
0,04 : 0,2
bis
0,20 : 0,2

f) 0,002 : 0,02
0,004 : 0,02
bis
0,020 : 0,02

g) Bilde mit den Zahlen des Einmaleins zwei weitere Folgen der Art, wie sie sich in a) bis f) ergeben!

2. Dividiere 36 durch **a)** 0,2 **b)** 0,3 **c)** 0,5 **d)** 0,06 **e)** 0,09 **f)** 0,04 **g)** 0,12 **h)** 0,018 **i)** 0,000 6 **k)** 0,001 2!

3. Dividiere die folgenden Zahlen durch 1,2!
a) 6 **b)** 36 **c)** 54 **d)** 18 **e)** 108 **f)** 72 **g)** 1,44 **h)** 0,048

4. a) 0,9 : 0,03 **b)** 4,5 : 0,9 **c)** 16,2 : 0,09
d) 2,52 : 1,8 **e)** 4,5 : 0,15 **f)** 0,64 : 0,08
g) 12,8 : 0,16 **h)** 25,6 : 0,04 **i)** 9,6 : 0,12
k) 0,96 : 0,12 **l)** 96 : 0,12 **m)** 14,4 : 1,6
n) 25,6 : 0,8 **o)** 2,56 : 0,8 **p)** 3,72 : 1,2
q) 2,04 : 1,7 **r)** 1,54 : 0,14 **s)** 0,152 : 0,19
t) 1,17 : 0,013 **u)** 1,26 : 0,014 **v)** 1,02 : 0,017

5. Dividiere 7,2 durch die folgenden Zahlen! **a)** 0,08 **b)** 0,9 **c)** 0,18 **d)** 0,024 **e)** 1,2 **f)** 0,006 **g)** 0,003 **h)** 0,009 **i)** 1,8 **k)** 0,012

6. Dividiere 0,68 durch die folgenden Zahlen! **a)** 0,17 **b)** 0,4 **c)** 0,034 **d)** 1,7 **e)** 0,04 **f)** 0,017 **g)** 0,000 2 **h)** 0,004 **i)** 3,4 **k)** 8,16

Schriftliches Rechnen

Beachte, daß bei jeder Divisionsaufgabe stets vor dem Ausrechnen das Ergebnis überschlagen oder geschätzt werden soll!

7. a) 36 : 0,4 **b)** 64 : 0,8 **c)** 85 : 0,5 **d)** 72 : 0,6
e) 84 : 0,7 **f)** 76 : 0,4 **g)** 96 : 1,6 **h)** 68 : 1,7
i) 90 : 1,5 **k)** 65 : 1,3 **l)** 90 : 1,8 **m)** 125 : 2,5
n) 60 : 1,2 **o)** 60 : 1,5 **p)** 60 : 0,12 **q)** 60 : 0,15

8. a) 87,342 : 0,6 **b)** 473,920 : 0,08 **c)** 58,671 : 0,009
d) 11,528 : 0,2 **e)** 587,49 : 0,3 **f)** 6,9785 : 0,05

g) 74,936 : 0,04 h) 53,988 : 0,006 i) 52,325 : 0,7
k) 5,608 : 0,08 l) 4,041 : 0,09 m) 10,101 : 0,003

9. a) 0,569 874 : 0,2 b) 437,568 9 : 0,3 c) 9 348,75 : 0,5
d) 94 738,74 : 0,6 e) 0,038 458 : 0,7 f) 537,648 : 0,8
g) 0,006 873 57 : 0,9 h) 56 793 480 : 0,2 i) 761 952 : 0,03
k) 8 745 835 : 0,005 l) 3 749 585 : 0,07 m) 5 597 838 : 0,000 9
n) 793,547 6 : 0,02 o) 7 643 264 : 0,4 p) 293,847 6 : 0,006

10. a) 3,114 : 0,9 b) 2,58 : 0,6 c) 12,6 : 0,018
d) 0,084 : 0,12 e) 0,175 : 2,5 f) 0,112 : 1,4
g) 16,8 : 0,24 h) 0,135 : 0,45 i) 0,96 : 1,6
k) 0,57 : 1,9 l) 2,07 : 0,023 m) 1,04 : 2,6

11. a) 2,64 : 2,4 b) 15,3 : 0,17 c) 0,305 : 6,1
d) 0,546 : 0,42 e) 1,33 : 1,9 f) 0,148 : 7,4
g) 1,92 : 1,2 h) 0,154 : 0,22 i) 7,56 : 5,4
k) 0,364 : 0,28 l) 27,2 : 1,36 m) 0,068 : 0,34

12. Runde die folgenden Ergebnisse auf drei Stellen nach dem Komma!

a) 54,6 : 0,52 b) 11,9 : 1,75 c) 8,432 : 1,7
d) 12,54 : 6,6 e) 642,8 : 0,87 f) 3,54 : 1,5
g) 2,496 : 0,483 h) 32,204 : 7,13 i) 7,92 : 14,4
k) 455,6 : 0,134 l) 72 : 0,576 m) 0,54 : 0,216
n) 368,1 : 0,075 o) 1,8 : 0,288 p) 178,54 : 0,346

13.

	a	b	c	A	B	C
I	7	8,9	147,23	2	9,4	0,023
II	13	17,2	728,45	3	3,7	0,019
III	124	0,75	102,038	17	0,12	4,782
IV	600	4,38	506,793	25	0,78	3,965

Bilde Aufgaben mit den Zahlen der Tabelle!

Runde unendliche Dezimalbrüche auf drei Stellen hinter dem Komma!

Beispiele:

a) Dividiere die Zahlen der Spalte a durch jede der Zahlen in der Spalte A!

b) Dividiere die Zahlen der Spalte c durch jede der Zahlen in der Spalte B!

c) Dividiere 728,45 durch jede der Zahlen in den Spalten A, B und C!

2) Enthaltensein

Beispiel 1: Berechne, wievielmal 7,5 *l* in 4,5 hl enthalten sind!

Wenn festgestellt werden soll, wie oft die eine Größe in der anderen enthalten ist, so müssen beide Größen die gleiche Benennung haben.

Lösung a)	*Lösung b)*
7,5 *l* in 450 *l*	0,075 hl in 4,5 hl
Wir rechnen mit Hilfe der Division:	Wir rechnen mit Hilfe der Division:
450 : 7,5	4,5 : 0,075
4 500 : 75 = 60	4 500 : 75 = 60

Ergebnis: 7,5 *l* sind in 4,5 hl 60mal enthalten.

Erkläre beide Wege! Welcher Weg ist zweckmäßiger?

Beispiel 2: 40 m³ Schutt sollen abgefahren werden. Der dazu bestimmte Lastkraftwagen kann mit 1,5 m³ beladen werden. Wieviel Fuhren sind notwendig?

Lösung: 1,5 m³ in 40 m³ = ?
Wir lösen die Aufgabe durch Division.
40 : 1,5 = 400 : 15 = 26,66 . . . ≈ 27

Ergebnis: Es sind 26 volle Fuhren und noch eine Restfuhre erforderlich. Der Lastkraftwagen muß also 27mal fahren.

Auch beim Rechnen mit Dezimalbrüchen werden Aufgaben des Enthaltenseins durch die Division gelöst. Dabei muß darauf geachtet werden, daß der Dividend und der Divisor die gleiche Benennung erhalten. Das Ergebnis ist unbenannt.

Aufgaben

Kopfrechnen

14. **a)** 0,3 in 1,2 **b)** 0,4 in 16 **c)** 0,05 in 2,5
d) 0,06 in 5,4 **e)** 1,7 in 85 **f)** 1,3 in 5,2
g) 0,14 in 0,98 **h)** 0,075 in 0,75 **i)** 0,025 in 1,25
k) 3,8 in 22,8 **l)** 0,4 in 3,2 **m)** 0,4 in 0,32
n) Bilde 10 weitere Aufgaben mit Zahlen der Einmaleinsfolgen!

15. **a)** 5 cm in 3 m **b)** 8 Pf in 4,56 DM **c)** 8 *l* in 3,44 hl
d) 7 m² in 1,26 a **e)** 35 g in 7 kg **f)** 18 m in 9 km
g) 0,80 m in 10,40 m **h)** 0,125 kg in 2 kg **i)** 0,300 *l* in 18,300 *l*
k) 0,240 *l* in 14,400 *l* **l)** 0,170 km in 10,200 km **m)** 1,40 a in 0,28 ha
n) 2,5 m in 1 km **o)** 12,5 cm in 1 m **p)** 33,3 cm in 1 m

Schriftliches Rechnen

16. **a)** 9 m in 1,161 km, in 0,792 km, in 1,008 km
b) 13 Pf in 6,24 DM, in 4,29 DM, in 15,21 DM
c) 18 g in 0,342 kg, in 0,504 kg, in 0,738 kg
d) 37 *l* in 3,33 hl, in 5,55 hl, in 9,99 hl
e) 46 m² in 1,476 6 ha, in 2,447 2 ha, in 5,464 8 ha
f) 93 kg in 157,17 dt, in 435,24 dt, in 834,21 dt
g) 2,16 m in 1 740,96 m **h)** 2,70 m in 45,36 m
i) 0,357 m³ in 2,856 m³ **k)** 0,141 5 m³ in 573,075 m³
l) 0,568 t in 35,216 t **m)** 0,710 t in 39,192 t
n) 7,94 a in 365,24 a **o)** 857,52 a in 1 619,76 a

17. Dividiere die Summe der beiden Zahlen 25,6 und 24,96 durch ihre Differenz!

18. Dividiere das Produkt der beiden Zahlen 25,6 und 24,96 durch ihre Differenz!

19. Drei Faktoren ergeben das Produkt 26,173 8. Der erste Faktor heißt 15,72, der zweite 0,45. Wie heißt der dritte Faktor?

20. Berechne die Preise für 1 kg bzw. für 1 m!
a) 2,500 kg kosten 12,50 DM. **b)** 0,800 kg kosten 13,60 DM.
c) 1,40 m kosten 2,10 DM. **d)** 0,75 m kosten 3,75 DM.

21. Es soll eine Turnhalle mit einer Fußbodenfläche von etwa 375 m² gebaut werden. Die Turnhalle soll 24,50 m lang sein. Wie breit muß die Turnhalle sein? (Runde auf zwei Stellen nach dem Komma!)

22. Ein volkseigenes Gut hat auf seinem Gemüseland die folgenden Erträge erzielt:
a) 557,50 dt Weißkraut auf 1,25 ha,
b) 264,50 dt Rotkraut auf 0,75 ha,
c) 638,05 dt Blumenkohl auf 3,5 ha,
d) 392,95 dt junge Pflückerbsen auf 4,65 ha,
e) 215,60 dt junge Pflückbohnen auf 2,45 ha,
f) 1 428 dt Zwiebeln auf 5,8 ha,
g) 407,50 dt Möhren und Karotten auf 1,75 ha,
h) 21,05 dt Erdbeeren auf 0,5 ha.
Berechne die durchschnittlichen Ernteerträge je Hektar!

23. **a)** Ein volkseigenes Gut hatte für die Aussaat auf einer Getreideanbaufläche von 83,4 ha den Betrag von 3 419,40 DM aufzuwenden. Wie groß waren die Kosten je Hektar?
b) Bei der nächsten Aussaat sollen mehr Traktoren verwendet und die Gerätekopplung eingeführt werden. Man rechnet daher für das kommende Jahr nur noch mit Kosten in Höhe von 31,40 DM je Hektar.

Wieviel Mark hat man voraussichtlich für die Bestellung von 86,7 ha auszugeben?

c) Welche Summe wird man voraussichtlich gegenüber dem Vorjahr einsparen, obwohl die zu bestellende Fläche größer ist?

24. Bei der Getreideernte wurden in einer Stunde im Durchschnitt die folgenden Flächen abgemäht:

mit der Hand	0,05 ha,
mit dem Mähbalken	0,45 ha,
mit dem Mähbinder	0,65 ha,
mit dem Mähdrescher	1,8 ha.

Wie lange dauert das Mähen von 5,4 ha Getreide **a)** mit der Hand, **b)** mit dem Mähbalken, **c)** mit dem Mähbinder, **d)** mit dem Mähdrescher?

20. Dezimalbrüche und gemeine Brüche

Löse die Aufgaben 1 bis 5 mit Dezimalbrüchen! Rechne im Ergebnis höchstens bis zur vierten Stelle nach dem Komma und runde auf die dritte Stelle des Dezimalbruches! Überschlage vor dem Rechnen das Ergebnis!

1. a) $\frac{3}{7} + 0{,}7$	**b)** $4\frac{1}{2} + 3{,}68$	**c)** $0{,}9 + \frac{2}{3}$	**d)** $12\frac{5}{7} + 4{,}5$
e) $0{,}6 + \frac{2}{5}$	**f)** $2{,}439 + \frac{3}{8}$	**g)** $1{,}7 + \frac{5}{6}$	**h)** $3\frac{5}{9} + 8{,}436$
i) $1{,}9 + \frac{7}{25}$	**k)** $9\frac{11}{50} + 2{,}6$	**l)** $3\frac{2}{3} + 0{,}89$	**m)** $0{,}39 + \frac{11}{18}$
n) $2{,}75 + \frac{5}{8}$	**o)** $0{,}476 + \frac{17}{20}$	**p)** $3\frac{7}{12} + 1{,}9$	**q)** $8{,}474 + 5\frac{17}{60}$
2. a) $0{,}9 - \frac{4}{5}$	**b)** $0{,}97 - \frac{14}{25}$	**c)** $5\frac{1}{3} - 0{,}79$	**d)** $1{,}381 - \frac{2}{3}$
e) $\frac{11}{20} - 0{,}39$	**f)** $2{,}887 - \frac{39}{50}$	**g)** $7\frac{7}{9} - 4{,}8$	**h)** $5\frac{11}{12} - 2{,}69$
i) $0{,}89 - \frac{3}{4}$	**k)** $6\frac{1}{2} - 3{,}456$	**l)** $10{,}75 - 6\frac{11}{12}$	**m)** $9\frac{4}{11} - 6{,}9$
n) $\frac{19}{25} - 0{,}7$	**o)** $7\frac{3}{4} - 2{,}89$	**p)** $3{,}29 - 2\frac{5}{6}$	**q)** $4{,}359 - 2\frac{5}{7}$
3. a) $\frac{3}{4} \cdot 0{,}21$	**b)** $0{,}412 \cdot \frac{9}{20}$	**c)** $8\frac{4}{5} \cdot 0{,}49$	**d)** $4{,}31 \cdot 3\frac{1}{8}$
e) $6{,}924 \cdot 1\frac{7}{12}$	**f)** $6{,}48 \cdot 2\frac{3}{5}$	**g)** $3{,}2 \cdot 1\frac{1}{3}$	**h)** $4\frac{5}{6} \cdot 0{,}78$
i) $5\frac{5}{9} \cdot 3{,}7$	**k)** $2\frac{5}{7} \cdot 8{,}4$	**l)** $3\frac{11}{12} \cdot 5{,}45$	**m)** $2{,}87 \cdot 3\frac{5}{12}$
4. a) $0{,}84 : \frac{2}{5}$	**b)** $2{,}56 : \frac{16}{25}$	**c)** $1\frac{4}{9} : 0{,}7$	**d)** $19\frac{5}{7} : 2{,}8$
e) $3{,}825 : \frac{1}{2}$	**f)** $5\frac{13}{20} : 0{,}625$	**g)** $6{,}6 : \frac{2}{3}$	**h)** $3{,}9 : 1\frac{5}{12}$
i) $8\frac{3}{4} : 0{,}45$	**k)** $2\frac{3}{4} : 3{,}51$	**l)** $0{,}665 : \frac{7}{9}$	**m)** $8\frac{17}{30} : 5{,}25$

5. Zusammengesetzte Aufgaben:

a) $2{,}5 + \frac{1}{2}$	**b)** $5\frac{1}{4} - 0{,}2$	**c)** $1\frac{4}{5} : 0{,}3$	**d)** $1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4}$	**e)** $11\frac{1}{4} : 9$
$-0{,}9$	$-0{,}02$	$-4{,}5$	$-2{,}75$	$-0{,}75$
$: 3$	$\cdot 4$	$: 5$	$: 0{,}3$	$\cdot 10$
$+0{,}45$	$+3{,}08$	$-\frac{1}{4}$	$-8\frac{7}{10}$	$-3\frac{4}{5}$
$\cdot 10$	$: 2$	$\cdot 100$	$: 10$	$+2{,}4$
$: 5$	$: 4$	$-0{,}7$	$-0{,}03$	$: 0{,}18$
$-0{,}8$	$+1{,}1$	$+\frac{1}{5}$	$: 100$	$: 6\frac{2}{3}$
$: \frac{3}{10}$	$: 10$	$: 0{,}9$	$+0{,}999$	-3

21. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. a) Zu welcher Zahl muß ich 1,2 addieren, um 3,5 zu erhalten?
b) Von welcher Zahl muß 1,2 subtrahiert werden, damit sich 3,6 ergibt?
c) Mit welcher Zahl muß ich 1,2 multiplizieren, um das Produkt 3,6 zu erhalten?
d) Welche Zahl ergibt durch 1,2 dividiert den Quotienten 3,6?
e) Durch welche Zahl ist 3,6 zu dividieren, damit 1,2 im Ergebnis erscheint?
Wähle selbst zwei Dezimalbrüche und bilde entsprechende Aufgaben zu **a)** bis **e)**!

2. Ich denke mir sechs Zahlen ...
a) Wenn ich die erste Zahl durch 2,5 teile, erhalte ich 3,9.
b) Die zweite Zahl mit 3,8 multipliziert ergibt als Produkt 134,508 6.
c) Wenn ich zur dritten Zahl 3,79 addiere, fehlen noch 2,86 an 10.
d) Wird das Dreifache der vierten Zahl um 13,9 vermehrt, so ergibt das gerade 100.
e) Wenn man die fünfte Zahl durch 3,7 und dann das Ergebnis durch 0,8 dividiert, erhält man 3,45.
f) Der Unterschied zwischen dem 5,8fachen und dem 5fachen der sechsten Zahl beträgt 3,2.

3. Setze die fehlenden Zahlen ein!

$25{,}7 + \quad = 73{,}7$	$9{,}4 \cdot \quad = 28{,}2$
$87{,}9 - 26{,}4 =$	$0{,}9 : 0{,}18 =$
$+ 12{,}8 = 30$	$\cdot 7{,}05 = 91{,}65$
$25{,}8 - \quad = 1{,}7$	$28{,}4 : \quad = 7{,}1$
$2{,}5 + 3{,}6 - 2{,}9 + \quad = 12{,}2$	$27{,}5 + \quad - 13{,}1 + 2{,}6 = 17$
$10{,}1 - 2{,}2 + \quad + 3{,}4 = 50$	$59{,}31 + \quad + 42{,}05 = 160{,}5$

4. In sogenannten „Magischen Quadraten“ sind Zahlen so zusammengestellt, daß die Summen der Glieder jeder Zeile, jeder Spalte und sogar

jeder Diagonalen gleich sind. Wegen dieser Besonderheit gab man in alter Zeit diesen Zahlenquadraten das Beiwort „magisch“ (Magie, Zauberkunst), so wie man alles Geistern zuschrieb, was man sich nicht erklären konnte oder was sonderbar erschien.
Im ersten Zahlenquadrat soll die Summe der drei Glieder jeder Zeile, Spalte oder Diagonale 18 sein. In den beiden anderen Zahlenquadraten soll die Summe jeweils 3,4 sein. Setze in die Zahlenquadrate die fehlenden Glieder ein und überprüfe die Summen!

9,6	1,2	
	6,0	

1,6		0,2	1,3
	1		0,8
0,9			
0,4	1,5	1,4	

	1,5	1,4	
	1		0,5
	0,6	0,7	
1,3		0,2	

5. Setze in die folgende Aufgabe die fehlenden Glieder ein!

$$\begin{array}{rcl} 48{,}83 & : & 25{,}7 = \\ - & & - \quad \cdot \\ & - & = 3{,}9 \\ \hline 22{,}23 & : & = \end{array}$$

Aus der sozialistischen Landwirtschaft

6. In einem volkseigenen Gut ist vorgesehen, daß 28,4 ha mit Weizen und 15,9 ha mit Hafer bestellt werden. Für Weizen beträgt der Saatgutbedarf 160 kg je Hektar, bei Hafer 130 kg je Hektar. Berechne die benötigten Saatgutmengen **a)** für Weizen, **b)** für Hafer!

7. Mit einer Kartoffellegemaschine, die von einer Arbeitskraft bedient wird, können in einer Stunde auf 0,5 ha Kartoffeln gelegt werden. Berechne, in welcher Zeit ein Schlag von 8,5 ha mit Kartoffeln bestellt wird!

8. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft hat 12,4 ha mit Weizen und 15,7 ha mit Roggen bestellt. Sie rechnet mit einem Ertrag von 32 dt Weizen und 28 dt Roggen je Hektar.

a) Welche Einnahmen kann sie erwarten, wenn sie für 1 dt Weizen 24,06 DM und für 1 dt Roggen 25,56 DM erhält?
b) Bei vorfristiger Ablieferung wird je Dezitonne 1,80 DM Frühdruschprämie gezahlt. Welche Mehreinnahmen hat die LPG, wenn sie $\frac{3}{4}$ des Getreides vorfristig abliefert?

9. Eine LPG erntet 415 dt Weizen auf 12,8 ha Ackerland. Berechne den Ertrag je Hektar!

10. Ein volkseigener Erfassungs- und Aufkaufbetrieb hatte in der ersten Oktoberwoche die folgenden Kartoffeleingänge und -ausgänge:

Tag	Eingänge in dt	Ausgänge in dt	Bestand in dt
	—	—	116,0
1. 10. 19..	173,2	195,1	
2. 10. 19..	199,1	207,1	
3. 10. 19..	223,4	232,3	
4. 10. 19..	182,5	178,9	
5. 10. 19..	248,9	227,7	
6. 10. 19..	234,5	219,2	

a) Wie groß war der Bestand am Ende eines jeden Tages?
b) Wie hoch waren insgesamt die Kartoffeleingänge und die Kartoffelausgänge?
c) Wieviel Dezitonnen Kartoffeln wurden durchschnittlich jeden Tag ein- und ausgeliefert?

11. Bei einem Versuch ergab es sich, daß durch das Pflügen der Felder im Herbst (Winterfurche) gegenüber dem Pflügen im Frühjahr (Frühjahrsfurche) die folgenden Durchschnittserträge auf 1 ha erzielt werden konnten:

Fruchtart	Ernteertrag bei	
	Frühjahrsfurche	Winterfurche
Hafer	22,53 dt	26,37 dt
Gerste	23,12 dt	27,61 dt
Weizen	23,46 dt	26,76 dt.

a) Berechne die Ertragssteigerung, die durch die Winterfurche erreicht wurde!
b) Wie groß wäre die Ertragssteigerung auf einem Feld von 2,72 ha (10,93 ha, 14,50 ha)?

12. In den landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften wird die Arbeit der Genossenschaftsmitglieder nach Arbeitseinheiten bewertet.

Nach der Anzahl der verrichteten Arbeitseinheiten erfolgt dann die Vergütung in Geld und Naturalien (Getreide, Kartoffeln u. a.). Durch die Übererfüllung des Betriebsplanes konnte in einer LPG die geplante Vergütung der Arbeitseinheiten überboten werden.

	geplante Vergütung	tatsächliche Vergütung
	einer Arbeitseinheit	
Geld	7,50 DM	8,86 DM
Getreide	1,00 kg	1,20 kg
Kartoffeln	2,50 kg	2,70 kg
Grünfutter	25,00 kg	25,00 kg
Ölfrüchte	0,02 kg	0,03 kg

a) Wieviel DM und Naturalien erhielt ein Genossenschaftsbauer, wenn ihm 328 Arbeitseinheiten gutgeschrieben wurden?

b) Wieviel DM und Naturalien erhielt dieser Genossenschaftsbauer über die geplante Vergütung?

13. Bei der Bearbeitung eines Schlages Weizen von 12,5 ha durch die MTS entstanden einer landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaft die folgenden Kosten:

Ziehen der Saatfurche	245,— DM,
Streuen von Dünger.....	75,— DM,
Eggen mit schwerer Egge.....	37,50 DM,
Drillen.....	82,50 DM,
Mähdreschen	262,— DM.

a) Berechne die Bearbeitungskosten für 1 ha Weizen!

b) Die LPG erzielte einen Ertrag von 29,2 dt je Hektar. Welche Summe wurde ihr insgesamt bei einem Preis von 24,06 DM je Dezitonne gezahlt?

14. Bei der Butterherstellung benötigt man für 1 kg Butter 23,1 kg Milch.

a) Im Jahre 1958 wurden in der DDR je Kopf der Bevölkerung 11,9 kg Butter verbraucht. Wieviel Kilogramm Vollmilch waren für diese Buttermenge erforderlich?

b) Durchschnittlich gibt eine Kuh jährlich 3 177 kg Milch (umgerechnet auf normalen Fettgehalt). Wieviel Kilogramm Butter könnten aus dieser Menge hergestellt werden?

15. Bei der Aufzucht von Kälbern werden durchschnittlich 400 kg Vollmilch verbraucht. Bei der Verwendung von Kälpan (einem neuentwickelten Futtermittel) werden nur noch 200 kg Vollmilch benötigt.

a) Wieviel Kilogramm Vollmilch können unter Verwendung von Kälpan bei der Aufzucht von 1 000 Kälbern eingespart werden?

b) Wieviel Kilogramm Butter können aus der eingesparten Milch hergestellt werden, wenn man für 1 kg Butter 23,1 Kilogramm Vollmilch benötigt?

16. Eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft liefert an einen volkseigenen Erfassungs- und Aufkaufbetrieb (VEAB) 547,4 dt Roggen, 128,5 dt Weizen, 96,9 dt Braugerste und 309,3 dt Hafer. Die Erfassungspreise betragen je Dezitonne für Roggen 25,56 DM, Weizen 24,06 DM, Braugerste 36,28 DM, Hafer 24,52 DM.

a) Berechne die Einnahmen für die einzelnen Getreidesorten!

b) Welchen Betrag erhält die Genossenschaft insgesamt?

17. Die Produktionskosten für 1 dt Getreide betrugen in einem Kreis durchschnittlich in den LPG 8,27 DM, bei den Einzelbauern 12,00 DM.

a) Um wieviel DM sind die Produktionskosten je Dezitonne Getreide in den LPG niedriger?

b) Wieviel DM Produktionskosten werden von einer LPG mit 225 ha Getreideanbaufläche eingespart, wenn je Hektar 25,5 dt Getreide gerechnet werden?

c) Wieviel DM Produktionskosten mußte ein werktätiger Einzelbauer mit einer Getreideanbaufläche von 5,8 ha mehr aufbringen, wenn mit einem Ertrag von 24,2 dt je Hektar gerechnet wird?

18. Beim Pflügen mit einem Gespann Pferden werden in einer Schicht (8 Stunden) durchschnittlich 0,4 ha bearbeitet. Mit einem 60-PS-Raupenschlepper kann man in einer Schicht 2,8 ha bearbeiten.

a) Wievielmal so hoch ist die Leistung des Schleppers?

b) Welche Flächen werden bei den beiden Arbeitsverfahren in 1 h gepflügt?

c) Wieviel Zeit benötigten drei Einzelbauern vor ihrem Eintritt in die LPG zum Pflügen ihrer Felder mit Pferden?

d) Wieviel Zeit wird dadurch eingespart, daß diese Felder jetzt in der LPG mit einem Raupenschlepper gepflügt werden? Vervollständige die Tabelle!

	Einzelbauern			insgesamt
	Sievert	Schulze	Bartel	
Ackerfläche	2,50 ha	1,85 ha	2,73 ha	... ha
erforderliche Zeit beim Pflügen mit Gespann	... h	... h	... h	... h
erforderliche Zeit beim Pflügen mit dem Schlepper (auf dem großen Feld)	—	—	—	... h

19. Eine LPG mit einer landwirtschaftlichen Nutzfläche von 900 ha hat 625 Rinder. Berechne, wieviel Rinder die LPG je 100 ha hat! Gib das Ergebnis mit einer Stelle nach dem Komma an! Man bezeichnet diese Vergleichszahl als *100-ha-Besatz* und fügt die Benennung Rinder je 100 ha LN bei.

20. Vergleiche die Rinderbestände zweier landwirtschaftlicher Produktionsgenossenschaften, indem du für beide den Bestand je 100 ha LN berechnest! Die 1. LPG hat 425 Rinder und eine landwirtschaftliche Nutzfläche von 600 ha. Die 2. LPG hat 534 Rinder und eine LN von 800 ha.

21. Im Gesetz über den Siebenjahrplan wird der Landwirtschaft für die Rinderhaltung das Ziel gestellt, einen Rinderbestand von 78,0 Rindern je 100 ha landwirtschaftlicher Nutzfläche zu erreichen. Bei einer LPG belaufen sich die gesamte landwirtschaftliche Nutzfläche auf 650 ha und der Rinderbestand auf 462 Rinder.

a) Wieviel Rinder je 100 ha landwirtschaftlicher Nutzfläche hat diese LPG?

b) Um wieviel Rinder muß sich der Bestand noch erhöhen, damit der im Gesetz zum Siebenjahrplan festgelegte Besatz erreicht wird?

Aus dem Verkehrswesen

22. Kennzeichen und wichtige Maßangaben an den Güterwagen geben Auskunft über ihre Verwendungsmöglichkeiten (Abb. 12). Die folgende Übersicht enthält einige Maßangaben für moderne Großraumgüterwagen.

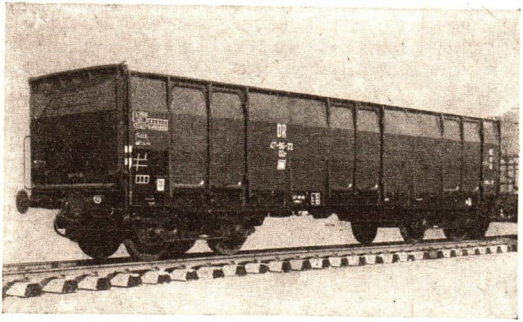


Abb. 12

	Gedeckter Wagen (GG)	Offener Wagen (OOr)	Kühlwagen
Zulässige Belastung	58 t	58 t	36 t
Ladelänge	14,33 m	12,41 m	11,43 m
Ladefläche	37,65 m²	34,00 m²	28 m²
Wageneigenmasse	22 t	19,75 t	30 t
Länge über Puffer	15,74 m	13,74 m	16,33 m

a) Auf einem Abstellgleis steht ein Zug, bestehend aus 5 gedeckten Wagen, 7 offenen Wagen und 2 Kühlwagen. Berechne die Länge des Zuges!

b) Ein mit Kartoffeln beladener offener Güterwagen wird auf einer Eisenbahnwaage gewogen. Wieviel Tonnen Kartoffeln beträgt die Ladung, wenn die Waage 74,5 t anzeigt?

c) Wieviel offene Güterwagen müssen bereitgestellt werden, um 12 000 dt Kartoffeln abzufahren?

d) Welche Länge hätte ein Güterzug, der aus den unter **c)** berechneten Wagen zusammengestellt würde?

e) Berechne aus den Angaben über die Ladefläche und die Ladelänge die Ladebreite der obengenannten Wagentypen!

23. Ein Urlauber aus Thale reist nach Warnemünde. Aus dem Fahrplan notiert er sich:

27,8 km	Thale Hbf. ab 4.42 Halberstadt an 5.28	Personenzug
59,1 km	Halberstadt ab 6.33 Magdeburg an 7.26	D-Zug
293,2 km	Magdeburg ab 8.13 Warnemünde an 13.57	D-Zug

a) Wieviel Kilometer sind zurückzulegen?

b) Wieviel Stunden und Minuten ist der Urlauber unterwegs?

c) Wieviel DM kostet die Fahrkarte für die 2. Klasse, wenn dem Urlauber als FDGB-Mitglied der Fahrpreis ohne D-Zug-Zuschlag um $\frac{1}{3}$ ermäßigt wird? (1 km ≙ 0,08 DM; Zuschläge: Zone I, bis 300 km: 3 DM; Zone II, über 300 km: 5 DM)

24. Das Motorrad „Simson-Sport“ verbraucht im allgemeinen 3,7 *l* Benzin für eine Strecke von 100 km.

a) Wieviel Liter Benzin werden bei diesem Verbrauch für die Strecke Zwickau—Schwerin (400 km) benötigt?

b) Berechne den Verbrauch für eine Fahrt von Potsdam nach Erfurt (250 km)!

25. Für zahlreiche Motoren (Zweitaktmotoren) wird ein Benzin-Öl-Gemisch verwendet. Dabei rechnet man im allgemeinen auf 25 *l* Benzin 1 *l* Motorenöl.

a) Wieviel Liter Öl benötigt man für 1 *l* Benzin? Schreibe diese Menge auch in Kubikzentimetern!

b) Ein Motorradfahrer tankt 5 *l* Benzin. Wieviel Liter Öl muß der Tankwart beigeben?

c) Herbert will seinen Kleinroller KR 50 mit 6 Litern Benzin und der entsprechenden Menge Öl tanken lassen. Kann der Tank, dessen Rauminhalt mit 6,3 *l* angegeben wird, diese Menge fassen?

26. Viele Lastkraftwagen und Omnibusse fahren mit Dieselöl. 1 Liter Dieselöl kostet 0,55 DM. Für Lastkraftwagen vom Typ „Sachsenring S 4 000-1“ wird ein Verbrauch von 15,9 *l* für 100 km angegeben.

a) Wieviel DM kostet das Dieselöl für eine Fahrt von 100 km bei diesem Verbrauch?

b) Wieviel Liter Dieselöl verbraucht der LKW für 1 km Fahrt?

c) Ermittle die Entfernung zweier Orte in deinem Bezirk! Berechne den Verbrauch und den Preis für den Dieselkraftstoff, den man mit dem LKW S 4 000-1 für eine Fahrt aufwenden muß!

27. Der Außenbordmotor „Nixe“ verbraucht in 1 h 0,8 *l* Kraftstoff. Wie hoch ist der Verbrauch bei einer Fahrt von $3\frac{1}{4}$ Stunden?

Mathematische Schüleraufträge

1. Speisekartoffeln haben unterschiedliche Formen und Größen. Aus einer größeren Anzahl Speisekartoffeln soll die Durchschnittsmasse einer Frucht folgendermaßen bestimmt werden:

a) indem eine Kartoffel von durchschnittlicher Größe gewogen wird,

b) indem 10 Kartoffeln einzeln gewogen werden, die Ergebnisse addiert und durch 10 dividiert werden,

c) indem 10 Kartoffeln gemeinsam gewogen werden und das Ergebnis durch 10 dividiert wird.

d) Welches Ergebnis wird der Aufgabe am meisten gerecht und ist dabei am zweckmäßigsten?

2. Stelle die Durchschnittsmasse von weißen Bohnen fest!

3. Stelle fest, wieviel Gramm 1 000 Bohnen, 1 000 Erbsen, 1 000 Linsen wiegen! Diese Mengen nennt man Tausendkornmassen.
4. Bei der Auswahl des Saatgutes wird neben anderen Faktoren auch die Tausendkornmasse der Frucht beziehungsweise des Samens bei den verschiedenen Sorten berücksichtigt.
   a) Ermittle die Werte für die folgende Übersicht!

	1 Bohne	Tausendkornmasse
Sau- oder Puffbohne		
Gartenbohne		
Feuerbohne		

   b) Stelle die Werte der Tausendkornmasse in einer grafischen Darstellung zusammen!

IV. Winkelbeziehungen an Geraden

22. Neben- und Scheitelwinkel

1) Wir zeichnen einen gestreckten Winkel ASB (Abb. 13a) und ziehen von seinem Scheitelpunkt S ausgehend einen beliebigen Strahl. Es entstehen zwei Winkel, die wir Winkel α und Winkel β nennen (Abb. 13b). Sie liegen

Abb. 13a

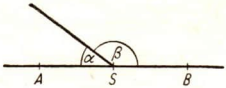


Abb. 13b

nebeneinander, haben den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinsam und bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Sie heißen **Nebenwinkel.** Winkel α ist demnach Nebenwinkel zu Winkel β und umgekehrt Winkel β Nebenwinkel zu Winkel α.

Satz 1: Nebenwinkel betragen zusammen 180°.

Verändern wir durch Drehung des gemeinsamen Schenkels die Größe des Winkels α, so ändert sich dadurch auch die Größe seines Nebenwinkels β.

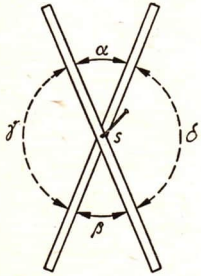


Abb. 14

2) Wenn zwei Geraden einander schneiden, entstehen vier Winkel, deren Scheitel im Schnittpunkt der Geraden liegen. Wir untersuchen die Winkel mit einem Modell (Abb. 14), das wir uns aus zwei Pappstreifen und einer Stecknadel herstellen. Wir drehen die Streifen zunächst so, daß sie senkrecht zueinander stehen. Alle vier Winkel betragen in dieser Stellung 90°. Drehen wir jetzt einen Streifen, so verändern sich einerseits die Winkel α und β und andererseits die Winkel γ und δ um die gleiche Größe. Es haben also sowohl die Winkel α und β als auch die Winkel γ und δ in jeder Stellung der Pappstreifen die gleiche Größe.

Wir können Winkel an einander schneidenden Geraden an vielen Gegenständen des täglichen Gebrauchs erkennen, wie es uns die Abbildungen 15a und 15b an einem zusammenklappbaren Gartentisch veranschaulichen.

Die Winkel α und β in der Abbildung 14 haben einen gemeinsamen Scheitel. Außerdem sind die über S verlängerten Schenkel des Winkels α die Schenkel des Winkels β. Die Schenkel bilden also paarweise je eine Gerade. Solche Winkel nennen wir **Scheitelwinkel.**

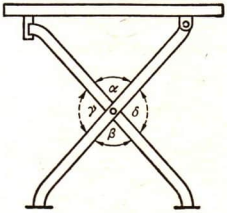


Abb. 15a

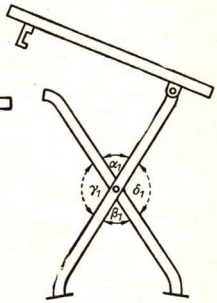


Abb. 15b

Satz 2: Scheitelwinkel sind einander gleich.

3) An unserem Pappmodell, das zwei einander schneidende Geraden darstellt, erkennen wir auch Paare von Nebenwinkeln (Winkel α und δ; Winkel β und γ).

Ist uns also die Größe eines der vier Winkel bekannt, so können wir die Größe der drei übrigen Winkel berechnen.

Aufgaben

1. Die Abbildung 16 zeigt ein Gehrungsmaß, das vom Tischler zum Anreißen und Prüfen von Gehrungen (45°-Winkel) benötigt wird. Gib an, wie groß der Nebenwinkel ist, und fertige dazu eine Skizze an!

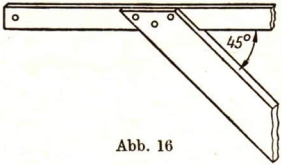


Abb. 16

2. a) Zeige an einem halb geöffneten Fenster die entstehenden Nebenwinkel! Fertige eine Skizze dazu an (4 verschiedene Stellungen des Fensters)! Miß die entstandenen Winkel!

b) Suche weitere Beispiele für Nebenwinkel!

3. Der gemeinsame Schenkel zweier Nebenwinkel α und β wird gedreht. Der Winkel α soll die in der Tabelle angegebenen Werte annehmen. Ermittle zunächst durch Zeichnen und Messen die entsprechende Größe des Nebenwinkels! Prüfe die gemessenen Werte durch Rechnen nach! (Fertige die nachstehende Tabelle im Heft an!)

α	10°	18°	32°	50°	84°	95°	115°	125°	144°	162°
β gemessen										
β berechnet										

4. Zwei Nebenwinkel sind einander gleich. Wie groß ist dann jeder?

5. Zwei Geraden schneiden einander und bilden die Winkel α, β, γ und δ (Abb. 17). Der Winkel α soll nacheinander die Werte 10°, 20°, 30°, ..., 180° annehmen.

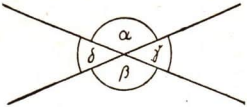


Abb. 17

a) Untersuche mit Hilfe eines Streifenmodells, wie sich die Größe der vier Winkel verändert!

b) Berechne für jeden Wert von α die Werte der Winkel β, γ und δ! Stelle die berechneten Werte in einer Tabelle zusammen!

α	10°	20°	30°	40°	50°	usw.
β						
γ						
δ						

c) Drehe einen Pappstreifen nach Schätzung nacheinander um 10° vom anderen Streifen weg! Prüfe die geschätzte Einstellung jedesmal durch Messen nach!

d) Schätze und miß bei fünf verschiedenen Stellungen der Pappstreifen die Größe des Winkels δ und berechne die Größe der anderen Winkel!

6. Suche auf einem Stadtplan oder einer Landkarte Straßen, die sich wie einander schneidende Geraden kreuzen!

a) Miß einen Winkel und errechne die anderen!

b) Miß die anderen Winkel und vergleiche mit den errechneten Werten!

7. Nenne Gegenstände, die Scheitelwinkel erkennen lassen! (Vgl. Abb. 15!)

8. a) Welche Winkel am Schnittpunkt der vier Geraden in Abbildung 18 sind Scheitelwinkel?

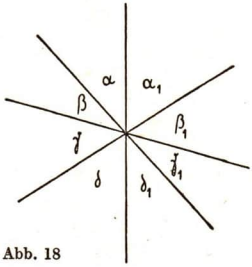


Abb. 18

b) Welche Winkel sind einander gleich?
c) Welche Winkel ergeben zusammen 180°?
d) Miß die Größe der einzelnen Winkel!

9. Die Abbildung 19 stellt die 8 Haupthimmelsrichtungen dar.
a) Nenne Scheitelwinkel!
b) Stelle die Größe der einzelnen Winkel fest!

10. Zeichne einen Winkel $\alpha = 43°$! Verlängere beide Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus!
a) Berechne die Größe der drei anderen Winkel!
b) Miß die drei Winkel und vergleiche die gemessenen Größen mit den errechneten!
c) Zeichne in gleicher Weise einen Winkel $\beta = 107°$! Verlängere ebenfalls seine Schenkel und berechne sowie miß die Größe der entstandenen drei Winkel!

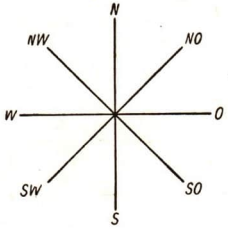


Abb. 19

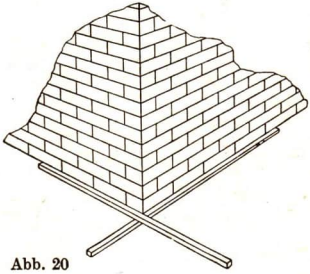


Abb. 20

11. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ! Konstruiere zu jedem Dreieckswinkel je einen Nebenwinkel!

12. Der Winkel, den zwei Mauern miteinander bilden, soll gemessen werden. Benutze dazu zwei Stäbe (Abb. 20)! Wo kannst du den Winkel messen?

13. Miß die Winkel an deinem Zeichendreieck mit dem Winkelmesser! Konstruiere unter Verwendung von Dreieck und Lineal einen Winkel von **a)** 135°, **b)** 150°, **c)** 120°!

23. Stufenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzt liegende Winkel

1) Die Abbildung 21a zeigt zwei Geraden g und g_1, die von einer Geraden g_2 geschnitten werden. An jedem Schnittpunkt entstehen vier Winkel, die mit griechischen Buchstaben bezeichnet sind. Es liegen zwischen den Geraden

die **inneren Winkel** (β, γ, α_1, δ_1) und außen an den Geraden die **äußeren Winkel** (α, δ, β_1, γ_1).

An den geschnittenen Geraden erhalten wir drei verschiedene Arten von Winkeln.

Erklärung:

1. Die Winkel α und α_1 in der Abbildung 21a werden **Stufenwinkel** genannt. Stufenwinkel sind ein äußerer und ein innerer Winkel auf der gleichen Seite der schneidenden Geraden. Auch β und β_1, γ und γ_1, δ und δ_1 sind Stufenwinkel.
2. Die Winkel β und δ_1 heißen **Wechselwinkel.** Wechselwinkel sind entweder zwei äußere oder zwei innere Winkel auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden. Wechselwinkel sind auch γ und α_1, δ und β_1, α und γ_1.

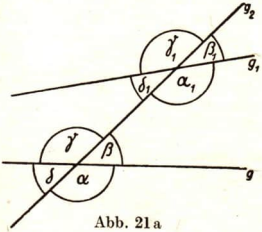


Abb. 21a

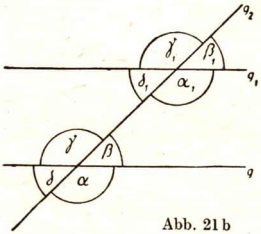


Abb. 21b

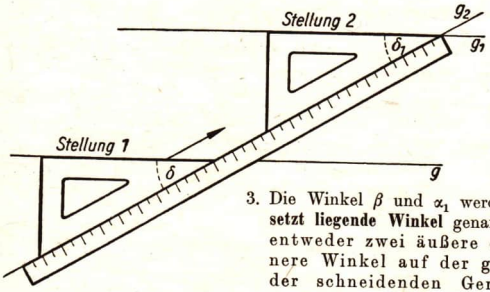


Abb. 22

3. Die Winkel β und α_1 werden **entgegengesetzt liegende Winkel** genannt. Das sind entweder zwei äußere oder zwei innere Winkel auf der gleichen Seite der schneidenden Geraden. Desgleichen sind α und β_1, γ und δ_1, δ und γ_1 entgegengesetzt liegende Winkel.

2) Während die beiden Geraden g und g_1 in der Abbildung 21a zueinander geneigt liegen, sind sie in der Abbildung 21b parallel.

Wir wissen bereits, daß Parallelen mit Zeichendreieck und Lineal gezeichnet werden können (Abb. 22).

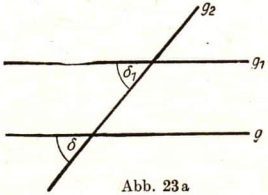


Abb. 23a

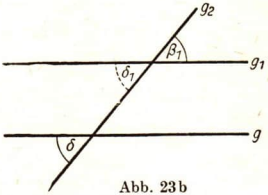


Abb. 23b

Wenn wir die Gerade g parallel zu sich selbst verschieben, bis sie schließlich mit der Geraden g_1 zusammenfällt, hat g die Richtung nicht verändert. Auch die schneidende Gerade g_2 hat die Richtung nicht geändert. Demzufolge decken die Stufenwinkel δ und δ_1 einander. Sie sind also einander gleich (Abb. 23a).

Satz 3: Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind einander gleich.

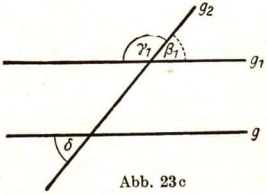


Abb. 23c

Weise die Richtigkeit dieses Satzes für die anderen Paare Stufenwinkel nach!

Betrachten wir die Wechselwinkel δ und β_1. Nach Satz 3 wissen wir, daß δ_1 Stufenwinkel zu δ und gleich groß ist wie dieser. Winkel β_1 ist aber Scheitelwinkel zu δ_1 und deshalb genauso groß wie dieser. Demnach ist Winkel β_1 genauso groß wie δ. Also sind die betrachteten Winkel einander gleich (Abb. 23b).

Untersuche entsprechend die anderen Paare Wechselwinkel!

Satz 4: Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind einander gleich.

Die Winkel δ und γ_1 sind entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen (Abb. 21b und 23c). Der Winkel β_1 — Wechselwinkel zu δ — ist zugleich Nebenwinkel zu γ_1. Demzufolge betragen Winkel β_1 und γ_1 zusammen 180°. Da nach Satz 4 Winkel β_1 genauso groß wie δ ist, können wir auch sagen, Winkel δ und γ_1 betragen zusammen 180° (Abb. 23c).

Untersuche entsprechend die anderen Paare entgegengesetzt liegender Winkel!

Satz 5: Entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen betragen zusammen 180°.

Aufgaben

1. Zeichne Winkel an geschnittenen Parallelen entsprechend der Abbildung 21 b und bezeichne sie mit griechischen Buchstaben!

a) Unterstreiche dann die Buchstaben farbig, wobei für gleich große Winkel die gleiche Farbe zu verwenden ist!

b) Begründe die Gleichheit mit den bekannten Sätzen!

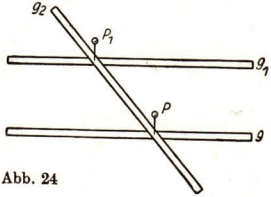


Abb. 24

2. Fertige aus drei Pappstreifen ein Modell (Abb. 24), indem du je zwei Streifen in den Punkten P und P_1 beweglich miteinander verbindest!

a) Beobachte, wie sich die Winkel verändern, wenn du g_2 drehst und g sowie g_1 parallellaufen läßt! Was stellst du fest?

b) Was ergibt sich, wenn g_2 senkrecht auf g und g_1 steht?

c) Beobachte, wie sich die Winkel verändern, wenn du g_2 drehst und g und g_1 nicht parallellaufen läßt!

3. a) Zeichne Winkel an geschnittenen Geraden entsprechend der Abbildung 21 a und miß die Größe der zusammengehörenden Paare Wechselwinkel, Stufenwinkel und entgegengesetzt liegender Winkel!

b) Zeichne Winkel an geschnittenen Parallelen entsprechend der Abbildung 21 b und miß die Größe der zusammengehörenden Paare Wechselwinkel, Stufenwinkel und entgegengesetzt liegender Winkel!

c) Überprüfe die Ergebnisse aus **a)** und **b)** an Hand der entsprechenden Sätze!

4. Zeichne drei Parallelen, die von einer vierten Geraden geschnitten werden! Kennzeichne **a)** alle gleich großen Winkel, **b)** alle Winkel, die einander zu 180° ergänzen!

5. Zeichne zwei parallele Geraden, die von einer dritten Geraden geschnitten werden!

a) Konstruiere zu dieser schneidenden Geraden eine Parallele im Abstand von 3,5 cm!

b) Bezeichne die entstandenen Winkel an den Schnittpunkten der Geraden mit Ziffern! Nenne Paare von Winkelarten, die dir bekannt sind!

6. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC!

a) Konstruiere mit Hilfe von Lineal und Zeichendreieck die Parallele zu AB durch C!

b) Suche Stufenwinkel, Wechselwinkel und entgegengesetzt liegende Winkel!

7. Beschaffe dir einen Winkelpeiler (Abb. 25) und stecke mit Fluchtstäben einen Weg von **a)** 6 m, **b)** 8 m Breite auf dem Schulhof ab!

8. Vielfach können wir an Bauten geschnittene Parallelen erkennen. Die Abbildung 26 zeigt eine alte Scheune in Großenstein, Bez. Gera, die von der Baubrigade der LPG „Rotes Banner" in einen Jungviehoffenstall umgebaut wurde. Suche geschnittene Parallelen!

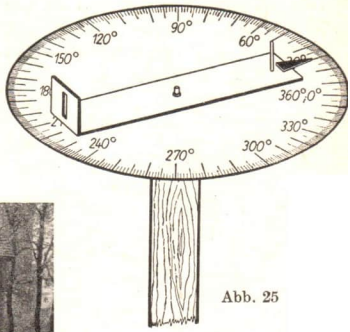


Abb. 25

Abb. 26

9. Nenne Bauwerke oder Gegenstände, an denen geschnittene Parallelen zu finden sind!

V. Achsensymmetrie

24. Einführung in die Achsensymmetrie

1) In der Natur und an von Menschen geschaffenen Werken fallen uns Dinge auf, die sich durch eine gewisse Regelmäßigkeit auszeichnen. So erkennen wir an dem Schmetterling in der Abbildung 27a, daß die Form und die Musterung der linken und rechten Flügel übereinstimmen. Wenn der Schmetterling seine Flügel zusammenlegt, scheint er nur noch einen Flügel zu besitzen (Abb. 27b). Nach dem Zusammenklappen decken die Flügel einander, weil sie die gleiche Größe und die gleiche Gestalt haben. Eine entsprechende Feststellung können wir auch für die beiden Seiten des Scharniers in Abbildung 28

Abb. 27a

Abb. 27b

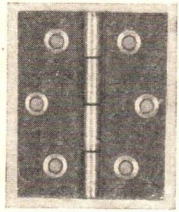


Abb. 28

treffen. Auch sie haben gleiche Größe und gleiche Gestalt und lassen sich durch Umklappen um die Achse zur Deckung bringen. Betrachten wir das Brandenburger Tor (Abb. 29) und das Hochhaus Berlin (Abb. 30a); auch hier erkennen wir Regelmäßigkeiten. Wir wollen diese Eigenschaften näher kennenlernen.

Abb. 29

Die in den Abbildungen 27 bis 30 dargestellten Gegenstände sind in Wirklichkeit Körper. Ihre Abbildungen sind jedoch auf ein ebenes Blatt Papier gedruckt. Sie sind also Figuren in einer Ebene, ebene Figuren. Die Zeichnungen im Heft oder an der Tafel sind auch ebene Figuren. Wir werden uns im folgenden nur mit solchen **ebenen Figuren** beschäftigen.

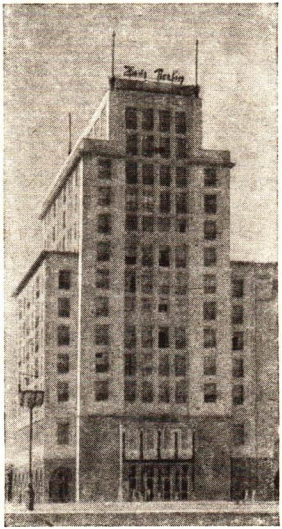


Abb. 30a

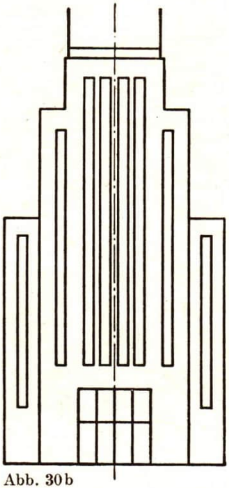


Abb. 30b

2) Beim Scharnier (Abb. 28) decken sich die beiden Teile, wenn wir sie um die Achse zusammenklappen. Auch die Skizze der Fassade des Hochhauses (Abb. 30b) könnten wir so falten, daß sich Teile der Figur genau decken. Die Gerade, um die wir die Figur falten müßten, wird durch eine Strich-Punkt-Linie angegeben. Wir würden beim Falten eine Hälfte um die eingezeichnete Gerade herumklappen, bis sie auf der anderen Hälfte liegt. Durch dieses Umklappen würden wir die Gewißheit gewinnen, daß die beiden Teile der Figur gleiche Gestalt und gleiche Größe haben. Bei oberflächlicher Betrachtung können nämlich geringfügige Abweichungen übersehen werden.

Pause die Abbildung 30b auf ein dünnes Blatt Papier und falte die Figur längs der angegebenen Linie!

3) Wenn man einen Teil einer ebenen Figur um eine Gerade klappt, bis er auf dem anderen Teil liegt, führt man eine Bewegung aus, die man **Umklappung** nennt. Der durchlaufene Winkel beträgt dabei 180°.

Ebene Figuren mit Eigenschaften, wie sie die Abbildungen 27 bis 30 zeigen, nennt man spiegelgleich oder **achsensymmetrisch.** Diese Figuren haben also die folgenden Eigenschaften:

1. Sie bestehen aus zwei Teilen, die die gleiche Gestalt und die gleiche Größe haben.
2. Man kann eine Gerade so einzeichnen, daß sich die beiden Teile der Figur beim Umklappen um diese Gerade genau decken. Diese Gerade wird **Symmetrieachse** genannt.

Erklärung:

Wenn eine ebene Figur in zwei Teilfiguren zerlegt werden kann, die sich beim Umklappen um eine Gerade vollständig decken, nennt man diese Figur achsensymmetrisch. Die Gerade heißt Symmetrieachse.

Abb. 31

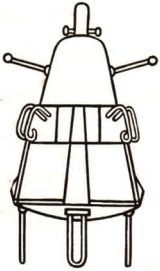


Abb. 32

Aufgaben

1. Sammle verschiedene Blätter und untersuche, ob sie achsensymmetrisch sind! (Vgl. Abb. 31!)
2. Nenne weitere Beispiele aus der Natur, bei denen Achsensymmetrie besteht!
3. Gibt es in deinem Heimatkreis Gebäude, bei denen die Skizze der Fassade eine achsensymmetrische Figur ergibt? (Vgl. Abb. 30b!) Versuche, die Giebelwand eines solchen Hauses aufzuzeichnen! Schneide die Figur aus und zeichne die von dir angenommene Symmetrieachse ein! Prüfe durch Umklappen, ob die Figur achsensymmetrisch ist!

4. a) Die Abbildung 32 stellt eine schematische Zeichnung von Sputnik III dar. Untersuche die Abbildung auf Achsensymmetrie und lege die Symmetrieachse mit Hilfe eines Fadens fest!

b) Suche andere Abbildungen aus der Technik, an denen du Achsensymmetrie findest!

5. a) Zeichne ein beliebiges Dreieck, schneide es aus und stelle fest, ob es achsensymmetrisch ist!

b) Zeichne mit dem Zirkel einen Kreis! Lege durch den Mittelpunkt des Kreises eine Gerade! Schneide die Kreisscheibe aus und klappe sie um diese Gerade!

6. a) Die Abbildungen 33 bis 38 geben verschiedene geometrische Figuren wieder, die auf Achsensymmetrie zu untersuchen sind. Pause die Abbildungen auf dünnes Papier! Gib durch Falten die Symmetrieachsen an!

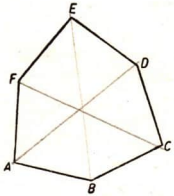


Abb. 33

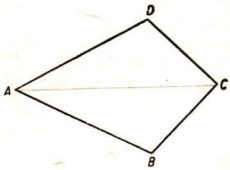


Abb. 34

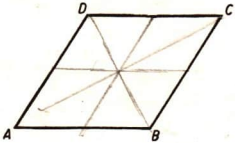


Abb. 35

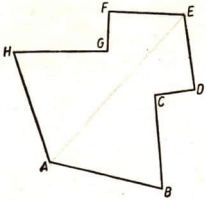


Abb. 36

Abb. 37

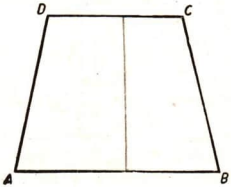


Abb. 38

b) Die Abbildung 39 zeigt der Reihe nach eine Schlitzschraube, eine Sechskantschraube und eine Vierkantschraube. Untersuche die Zeichnungen auf Achsensymmetrie und gib die Symmetrieachsen an!

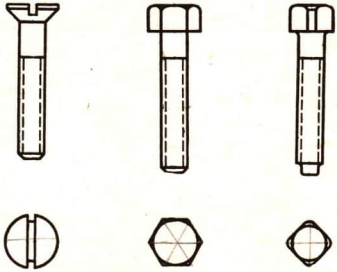


Abb. 39

25. Symmetrisch gelegene Figuren und Punkte

1) Die Abbildungen 40 (chinesischer Scherenschnitt) und 41 zeigen jeweils zwei voneinander getrennte Figuren. Diese haben untereinander gleiche Gestalt und gleiche Größe.

Abb. 40

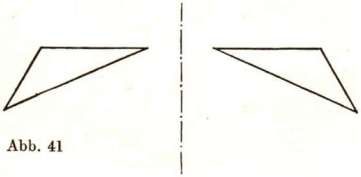


Abb. 41

Es läßt sich eine Gerade zeichnen, die so verläuft, daß sich beim Umklappen um sie die beiden Figuren genau decken. In der Abbildung 41 ist diese Gerade bereits eingezeichnet.

Man sagt, die Figuren liegen achsensymmetrisch zueinander.

Welchen Verlauf müßte die entsprechende Gerade in der Abbildung 40 haben?

Erklärung:

Wenn sich zwei Figuren beim Umklappen um eine Gerade genau decken, nennt man sie achsensymmetrisch zueinander gelegen.

2) Auch für Punkte können wir die Achsensymmetrie erklären. Führen wir in der Abbildung 42 die Umklappung der achsensymmetrischen Dreiecke um die Symmetrieachse s durch, so decken sich jeweils die Punkte A und A',

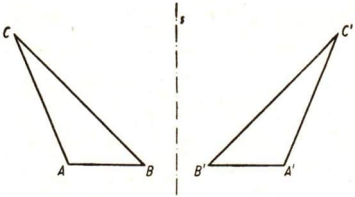


Abb. 42

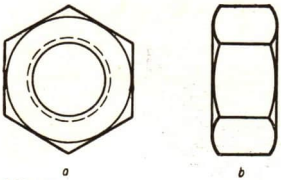


Abb. 43

nächst zeichnen wir die betreffende Teilfigur und die Symmetrieachse. Dann falten wir das Blatt um die Symmetrieachse. Nun können wir die Teilfigur durchpausen oder die Eckpunkte mit einer Nadel durchstechen. Nach dem Durchstechen müssen wir die angerissenen Punkte entsprechend der ersten Teilfigur verbinden. Es ist auch möglich, die zuerst gezeichnete Teilfigur auszuschneiden und nach dem Umklappen an den Rändern nachzuzeichnen.

Aufgaben

1. a) Konstruiere ein Quadrat mit Hilfe von Lineal und Zeichendreieck! Schneide B und B' sowie C und C'. Man sagt: Die Punkte (A und A', ...) liegen achsensymmetrisch in bezug auf die Gerade s.

3) Es gibt auch achsensymmetrische Figuren, bei denen es mehrere Symmetrieachsen gibt. So lassen sich zum Beispiel im Grundriß einer Sechskantmutter (Abb. 43a) mehrere Symmetrieachsen einzeichnen.

4) Symmetrische Bauwerke, Zierformen, Gartenanlagen u. a. findet man häufig (Abb. 44, Kronentor des Dresdner Zwingers). Grundformen dafür entnimmt der Mensch der Natur und entwickelt sie weiter.

Wenn wir achsensymmetrische Figuren zeichnen wollen, können wir verschiedene Verfahren anwenden. Zu-

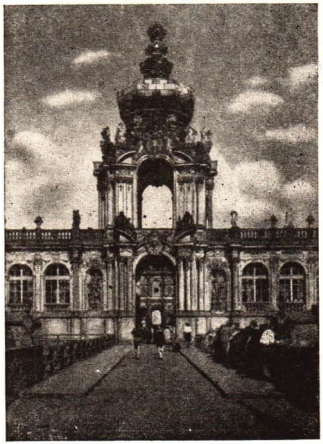


Abb. 44

es aus und prüfe durch Falten, wieviel Symmetrieachsen gezogen werden können! Welche Figuren entstehen durch das Falten?

b) Zeichne einen Kreis und schneide ihn aus! Wieviel Symmetrieachsen gibt es?

c) Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und stelle ein zweites zu ihm achsensymmetrisch gelegenes Dreieck $A'B'C'$ her!

2. Fertige achsensymmetrische Figuren an, indem du Tinte auf ein Blatt Papier tropfen läßt und es dann faltest (Abb. 45, Klecksbild)!

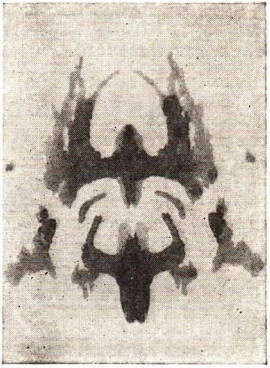


Abb. 45

Abb. 46

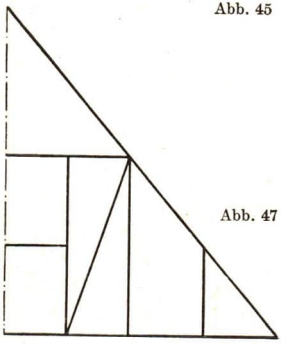


Abb. 47

3. Fertige achsensymmetrische Scherenschnitte mit einer bzw. mehreren Symmetrieachsen an (Abb. 46)!

4. Zeichne ein achsensymmetrisches Muster für eine Gittertür am Garteneingang!

5. Zeichne den Grundriß einer Streichholzschachtel!

a) Gib die Symmetrieachsen im Grundriß an!

b) Stelle eine zum Grundriß achsensymmetrisch gelegene Figur her!

6. Die Abbildung 47 zeigt die rechte Teilfigur und die Symmetrieachse des achsensymmetrischen Fachwerkgiebels eines Hauses. Pause die Zeichnung auf ein Blatt Papier und vervollständige sie!

7. Der achsensymmetrische Grundriß eines Stallgebäudes (Abb. 48) ist zu

vervollständigen. Pause die gegebene Zeichnung auf ein Blatt Papier und zeichne die andere hierzu achsensymmetrische Teilfigur!

8. Ein Futterhäuschen soll hergestellt werden. Fertige dazu eine Zeichnung für die achsensymmetrische Vorderwand an!

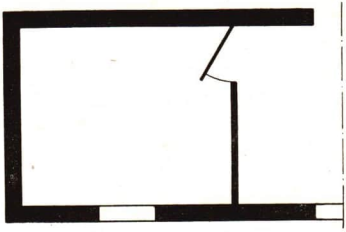


Abb. 48

9. Zeichne eine Strecke AB und eine Symmetrieachse s! Zeichne die zu AB in bezug auf die Symmetrieachse s achsensymmetrische Strecke $A'B'$!
10. Zeichne einen Punkt P und eine Symmetrieachse s! Suche den zu P in bezug auf die Symmetrieachse s achsensymmetrischen Punkt P'!

26. Grundeigenschaften der Achsensymmetrie

Mit Hilfe eines beweglichen Modells werden wir die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren genauer kennenlernen (Abb. 49). Wir zeichnen auf ein Blatt Papier die Symmetrieachse s. Dann falten wir das Blatt um die Achse und durchstechen das Papier mit einer Nadel in einem Punkt. Auf diese Weise erhalten wir zwei in bezug auf die Symmetrieachse s symmetrische Punkte A und B. Dann kleben wir das Blatt Papier auf einen Karton. Durch die Bohrungen in den Punkten A und B wird ein Faden gezogen und an den Enden beschwert. Dadurch ist er immer straff gespannt. Mit einem Holzstäbchen oder einer Nadel kann der Faden auf dem Karton verschoben werden.

1) Wir nehmen mit dem Holzstäbchen einen Punkt P auf der Symmetrieachse an. Danach messen wir die Längen des Fadens zwischen A und P und

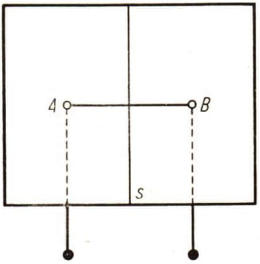


Abb. 49

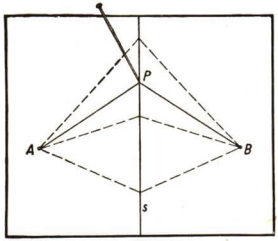


Abb. 50

zum anderen zwischen B und P, das heißt, wir messen die Abstände AP und BP. Dabei stellen wir fest, daß die Abstände etwa gleich sind. Auch wenn wir andere Punkte auf der Symmetrieachse wählen, gelangen wir zu dieser Feststellung (Abb. 50).

Satz 6: Die Abstände eines Punktes der Symmetrieachse von zwei symmetrisch gelegenen Punkten sind einander gleich.

Ermittle auf durchscheinendem Papier zu einem gegebenen Punkt A und der Symmetrieachse s den achsensymmetrischen Punkt B! Wähle dann mehrere Punkte (P_1, P_2, ...) auf der Symmetrieachse und zeichne die Verbindungsstrecken zu den Punkten A und B ein! Falte das Blatt um die Symmetrieachse! Was kannst du über die Verbindungsstrecken AP_1 und BP_1, AP_2 und BP_2 ... aussagen?

Wir versuchen, mit Hilfe unseres Modells Punkte zu finden, die außerhalb der Symmetrieachse liegen und gleiche Abstände von den Punkten A und B haben. Solche Punkte können wir jedoch nicht finden (Abb. 51).

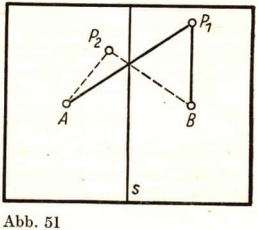


Abb. 51

Satz 7: Jeder Punkt, der von zwei Punkten gleich weit entfernt ist, liegt auf der Symmetrieachse zu diesen Punkten.

2) Wir nehmen mit unserem Holzstäbchen wiederum verschiedene Punkte auf der Symmetrieachse s an, die wir mit P_1, P_2, ... bezeichnen. Bei jeder Stellung an unserem Modell messen wir die Winkel, die von der Strecke AP und der Symmetrieachse s einerseits und von der Strecke BP und der Symmetrieachse s andererseits gebildet werden (Abb. 52).

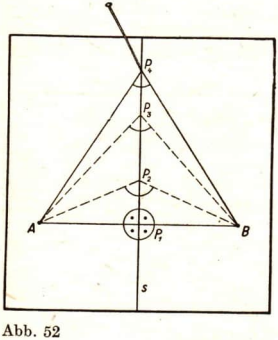


Abb. 52

Satz 8: Verbindet man einen Punkt der Symmetrieachse mit zwei symmetrisch gelegenen Punkten, so schließen die Verbindungsstrecken mit der Achse einander gleiche Winkel ein.

Miß in der bereits verwendeten Zeichnung auf durchscheinendem Papier die Winkelpaare, die die Verbindungsstrecken AP_1 und BP_1, AP_2 und BP_2, ... mit der Symmetrieachse einschließen! Vergleiche die Meß-

ergebnisse mit dem Satz 8! Klappe die Zeichnung um die Symmetrieachse zusammen! Welchen Fall sollte man besonders hervorheben?

3) Wir lassen einen Punkt P auf der Symmetrieachse s unseres Modells wandern. Dabei stellen wir fest: Je kürzer die Verbindungsstrecken zwischen dem Punkt P und den Punkten A und B werden, desto größer werden die von den Verbindungsstrecken und der Symmetrieachse eingeschlossenen Winkel. Bei der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen P und den symmetrisch gelegenen Punkten, nämlich der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten A und B, betragen die Winkel 90°. Sie ergeben zusammen einen gestreckten Winkel (Abb. 52).

Die Verbindungsstrecken AP und BP sind auch in diesem Fall gleich lang, sie betragen also jeweils die Hälfte der Verbindungsstrecke AB. Da die von der Symmetrieachse und der Verbindungsstrecke gebildeten Winkel je 90° betragen, steht die Symmetrieachse senkrecht auf der Verbindungsstrecke AB.

Satz 9: Die Symmetrieachse zu zwei Punkten halbiert die Verbindungsstrecke dieser Punkte und steht auf ihr senkrecht.

4) Wir bringen zwei Punkte A und B durch Klappung um eine Faltgerade zur Deckung. Diese Faltgerade ist die Symmetrieachse s zu den Punkten A und B. Eine andere Symmetrieachse außer s zu diesen Punkten finden wir nicht. Wir haben bei allen Versuchen bisher festgestellt, daß wir zu zwei Punkten immer eine Symmetrieachse finden, aber eben immer nur eine.

Satz 10: Zu zwei Punkten gibt es genau eine Symmetrieachse.

Aufgaben

1. a) Veranschauliche die Sätze 6 bis 10 mit Hilfe eines Modells (Abb. 49)!

b) Fertige für die Sätze 6 bis 10 je eine Zeichnung an und schreibe in Kurzform die Sätze unter die betreffende Zeichnung!

Anleitung: Den Satz 6 kannst du kurz schreiben: $AP = BP$. Zur Darstellung des Satzes 8 bezeichne die Winkel mit α und β!

2. Zeichne eine Gerade s und falte das Blatt Papier um diese Gerade! Durchstich das Papier an zwei beliebigen Punkten! Von den vier Punkten, die du auf diese Weise erhältst, sind je zwei Punkte achsensymmetrisch in bezug auf die Symmetrieachse s. Bezeichne die Punkte linksseitig der Symmetrieachse mit A bzw. B und die entsprechenden rechtsseitig mit A' bzw. B'! Lege durch die Punkte A und B sowie A' und B' je eine Gerade! Erläutere an der Figur die Sätze 6 bis 8!

3. Zeichne nach Abbildung 53 zwei Kreise, deren Mittelpunkte auf der Symmetrieachse s liegen! Prüfe nach,

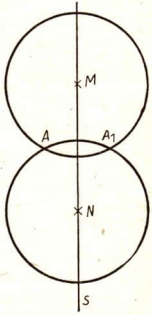


Abb. 53

ob die Schnittpunkte der Kreise A und A_1 achsensymmetrisch zueinander liegen! Führe den Nachweis mit Hilfe der Lehrsätze!

27. Konstruktion symmetrischer Punkte und Figuren

1) Während wir bisher die Aufgaben durch Falten, Durchstechen, Pausen usw. gelöst haben, wollen wir nun die achsensymmetrischen Figuren mit Lineal und Zirkel konstruieren.

1. Aufgabe: Konstruiere zu zwei gegebenen Punkten A und B die Symmetrieachse s!

Lösung a): Wir wissen bereits, daß eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist. Wir wissen außerdem nach Satz 7, daß jeder Punkt, der von zwei Punkten gleich weit entfernt ist, auf der Symmetrieachse zu diesen Punkten liegt. Wir suchen also zwei Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind.

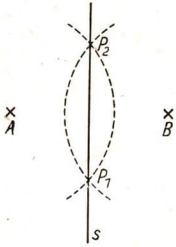


Abb. 54

Wir schlagen um A und B Kreisbögen mit gleichen Radien, die einander in den Punkten P_1 und P_2 schneiden (Abb. 54). Demnach ist $AP_1 = BP_1$ und zugleich auch $AP_2 = BP_2$, da alle Punkte eines Kreises vom Mittelpunkt gleichen Abstand haben. Somit liegen die Punkte P_1 und P_2 gleich weit von A und B entfernt und auf der Symmetrieachse s zu den Punkten A und B. Die durch P_1 und P_2 verlaufende Gerade ist die Symmetrieachse s zu den Punkten A und B, die zu konstruieren war.

Anmerkung: Es ist nicht notwendig, die Kreislinien stets voll auszuzeichnen. Es genügt, die benötigten Teile der Kreislinie zu zeichnen.

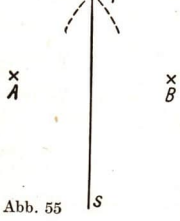


Abb. 55

Zu den Konstruktionsaufgaben ist in Zukunft stets eine Konstruktionsbeschreibung zu geben. Sie muß die wichtigsten Schritte der Konstruktion darlegen.

Konstruktionsbeschreibung: Ich schlage um A und B Kreisbögen mit gleichen Radien, die einander in P_1 und P_2 schneiden. Durch die Schnittpunkte ziehe ich die Gerade. Sie ist die Symmetrieachse s zu den Punkten A und B, die konstruiert werden sollte.

Lösung b): Man kann die Konstruktion auch so ausführen, daß beide Punkte auf der Symmetrieachse (P_1, P_2) entweder oberhalb oder unterhalb der Punkte A und B liegen. Wir schlagen um A und B je einen Kreisbogen mit gleichem Radius. Beide Kreisbögen schneiden einander im Punkt P_1. Mit einem anderen

Radius schlagen wir wiederum je einen Kreisbogen um A und B, wodurch wir den Punkt P_2 finden. Für jeden Punkt gilt, daß die beiden Verbindungsstrecken mit den Punkten A und B gleich sind ($AP_1 = BP_1$ und $AP_2 = BP_2$). Die durch die Punkte P_1 und P_2 verlaufende Gerade ist die verlangte Symmetrieachse s (Abb. 55).

Entsprechend können wir auch bei achsensymmetrischen Figuren die Symmetrieachse konstruieren. Wir brauchen nur zwei zueinander symmetrisch gelegene Punkte auszuwählen und zu ihnen die Symmetrieachse zu zeichnen.

Beispiel: Konstruiere eine Symmetrieachse eines Rechtecks (Abb. 56)! Es genügt, wenn wir die Symmetrieachse zu den Punkten A und B konstruieren. Natürlich kann man auch von den Punkten C und D ausgehen.

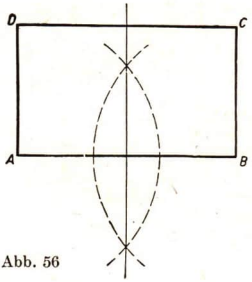


Abb. 56

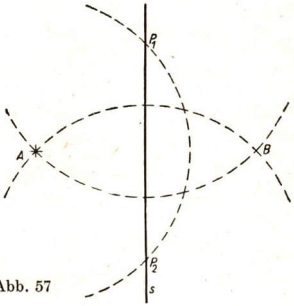


Abb. 57

2. Aufgabe: In einer Zeichnung sind der Punkt A und die Symmetrieachse s angegeben. Der zu A in bezug auf s achsensymmetrische Punkt B ist zu konstruieren.

Lösung a): Nach Satz 6 wissen wir, daß die Abstände eines Punktes der Symmetrieachse von zwei symmetrisch gelegenen Punkten einander gleich sind. Wir müssen zunächst zwei Punkte auf der Symmetrieachse s festlegen und schlagen zu diesem Zweck einen Kreisbogen um A, der die Symmetrieachse in P_1 und P_2 schneidet (Abb. 57).

Der gesuchte Punkt B muß von P_1 bzw. P_2 genauso weit entfernt sein wie der Punkt A (Satz 6). Wir schlagen daher mit unverändertem Radius um P_1 und P_2 Kreisbögen. Sie gehen einmal beide durch den Punkt A. Außerdem schneiden sie einander auf der anderen Seite der Symmetrieachse in einem zweiten Punkt. Dieser ist der gesuchte Punkt B; denn er ist von P_1 und P_2 genauso weit entfernt wie der Punkt A. Punkt B ist also zu Punkt A in bezug auf s achsensymmetrisch.

Konstruktionsbeschreibung: Ich schlage mit beliebigem Radius um A einen Kreisbogen, der die Gerade s in den Punkten P_1 und P_2 schneidet. Mit gleichem Radius schlage ich um P_1 und P_2 Kreisbögen, die einander in A und B schneiden. B ist der zu A achsensymmetrische Punkt, der zu konstruieren war.

Lösung b): Man kann auch bei dieser Konstruktion beide Punkte P_1 und P_2 auf der Symmetrieachse s entweder oberhalb oder unterhalb von A angeben.

Erläutere den Lösungsweg b)!

2) Mit Hilfe der Lösungen der beiden vorgenannten Aufgaben können wir auch schwierigere achsensymmetrische Zeichnungen vervollständigen oder zu ihnen die Symmetrieachse konstruieren.

Die Abbildung 58 zeigt den Grundriß eines Hohlblocksteines. Die Symmetrieachse ist zu konstruieren.

Es genügt auch bei dieser Aufgabe, wenn wir zwei zueinander achsensymmetrische Punkte wählen und zu diesen Punkten die Symmetrieachse konstruieren. Wir können zum Beispiel die beiden oberen äußeren Eckpunkte wählen. Wir verfahren bei der Konstruktion nach dem Lösungsweg b) zur 1. Aufgabe. Die auf diese Weise gefundene Symmetrieachse zu den beiden Eckpunkten ist zugleich die Symmetrieachse zur ganzen achsensymmetrischen Figur.

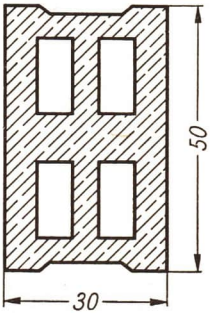


Abb. 58

Aufgaben

Gib für die Aufgaben **1** bis **6** je eine Konstruktionsbeschreibung!

1. Pause die Zeichnung eines Hohlblocksteines (Abb. 58) auf dünnes Papier!

a) Führe die im Text angedeutete Konstruktion der Symmetrieachse durch!

b) Wähle ein anderes Paar von Punkten in dieser Zeichnung und konstruiere auch zu ihnen die Symmetrieachse!
Was muß sich ergeben?

2. Zeichne ein beliebiges Rechteck $ABCD$ mit Lineal und Zeichendreieck! Konstruiere die Symmetrieachsen dieses Rechtecks!

3. Pause
a) die Abbildung 33,
b) die Abbildung 34,
c) die Abbildung 35
ab und konstruiere jeweils die Symmetrieachse!

4. Pause die Abbildung 59 (Dachgiebel) ab und konstruiere die rechte achsensymmetrisch gelegene Teilfigur!

5. Zeichne eine Strecke DE von **a)** 4 cm, **b)** 5,8 cm Länge! Wähle jeweils eine Symmetrieachse s und konstruiere die achsensymmetrische Strecke $D'E'$!

Anleitung: Konstruiere bei **a)** zunächst die symmetrischen Punkte $D'E'$! In der Aufgabe **b)** ist die symmetrische Strecke $D'E'$ mit Hilfe eines symmetrischen Punktes und dem Winkel zwischen der Symmetrieachse und der Verlängerung der Strecke DE (Satz 8) zu konstruieren.

Abb. 59

6. Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und eine Gerade s, die nicht durch M geht! Konstruiere den achsensymmetrisch gelegenen Kreis in bezug auf die Gerade s!

Anleitung: Konstruiere zunächst den zu M symmetrischen Punkt M'! Schlage um M' einen Kreis mit dem Radius des gegebenen Kreises!

7. Zeichne den Grundriß einer quadratischen Pyramide $A'B'C'D'$, deren Grundkante 4,3 cm lang ist! Konstruiere die Symmetrieachsen dieser Figur!

8. Übertrage die Abbildung 47 auf ein Blatt Papier! Konstruiere den zweiten Teil des achsensymmetrischen Fachwerkgiebels!

9. Einige Schüler wollen das Modell einer elektrischen Schaltung anfertigen. Sie verwenden als Grundlage ein Brett. Die notwendigen Bohrungen ordnen sie zur besseren Übersicht achsensymmetrisch zueinander an. Die Abbildung 60 stellt eine Hälfte des Schaltbrettes mit der Symmetrieachse dar. Konstruiere den zweiten Teil der Zeichnung, nachdem du die Abbildung 60 auf ein Blatt Papier übertragen hast!

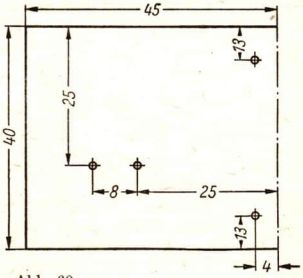


Abb. 60

10. Die Abbildungen 61a und b zeigen eine Flügelmutter von der Seite und von oben gesehen. Übertrage beide Abbildungen auf ein Blatt Papier und konstruiere die Symmetrieachsen!

11. Entwirf die eine Hälfte des Planes für eine achsensymmetrische Gartenanlage! Konstruiere die andere Hälfte!

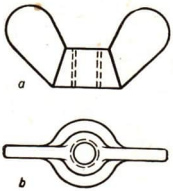


Abb. 61

28. Geometrische Grundkonstruktionen

Die Grundlage für alle geometrischen Zeichnungen bilden die folgenden fünf geometrischen Grundkonstruktionen. Die Kenntnis der Grundeigenschaften der Achsensymmetrie ist Voraussetzung für die Lösung der Grundkonstruktionen.

1) Eine gegebene Strecke AB ist zu halbieren.

Wir verwenden Satz 9: Die Symmetrieachse zu zwei symmetrischen Punkten halbiert die Verbindungsstrecke dieser Punkte und steht auf ihr senkrecht. Wir brauchen also nur die Symmetrieachse zu den Endpunkten der Strecke AB zu konstruieren und haben damit die gegebene Strecke AB halbiert.

2) Zu einer gegebenen Strecke AB ist die Mittelsenkrechte zu konstruieren.

Die **Mittelsenkrechte** ist eine Gerade, die senkrecht durch den Mittelpunkt einer Strecke verläuft. Den Lösungsweg gibt uns wiederum der Satz 9 an. Wir konstruieren die Symmetrieachse zu den Endpunkten der Strecke AB. Sie halbiert diese Strecke und steht auf ihr in ihrem Mittelpunkt senkrecht.

3) In einem gegebenen Punkt D ist auf einer gegebenen Geraden g die Senkrechte zu errichten.

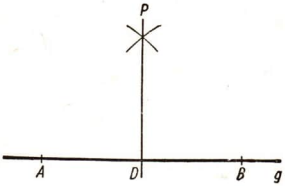


Abb. 62

Wir verwenden wiederum Satz 9. Betrachten wir aber die zu konstruierende Senkrechte als Symmetrieachse, so müssen wir auf der Geraden g zwei Punkte finden, die in bezug auf die Symmetrieachse symmetrisch liegen. Deshalb schlagen wir um D einen Kreisbogen und finden die Punkte A und B auf g. Zu diesen Punkten konstruieren wir die Symmetrieachse, die in D auf g senkrecht steht (Abb. 62). Sie ist die verlangte Senkrechte.

Konstruktionsbeschreibung: Ich schlage um D einen Kreisbogen, der die Gerade g in A und B schneidet. Dann schlage ich um A und um B je einen Kreisbogen mit gleichem Radius. Die Kreisbogen schneiden einander im Punkt P. Ich verbinde P mit D und erhalte dadurch die verlangte Senkrechte in D auf der Geraden g.

4) Von einem gegebenen Punkt P ist auf eine gegebene Gerade g das Lot zu fällen.

Wir betrachten das zu konstruierende Lot als Symmetrieachse zu zwei Punkten. Die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte ist ein Teil der gegegebenen Geraden. P ist ein Punkt der Symmetrieachse und folglich von den beiden symmetrischen Punkten gleich weit entfernt. Wir schlagen deshalb um P einen Kreisbogen, der die Gerade g in den Punkten A und B schneidet. Wir konstruieren zu AB die Symmetrieachse, das heißt, wir konstruieren noch einen Punkt P_1, der ebenfalls von A und B gleich weit entfernt ist. Die Symmetrieachse verläuft durch den Punkt P und bildet mit der Geraden g Winkel von 90° (Satz 9). Also ist die Symmetrieachse zu A und B das verlangte Lot von P auf g. Der Schnittpunkt zwischen dem Lot und der Geraden heißt Fußpunkt des Lotes (Abb. 63).

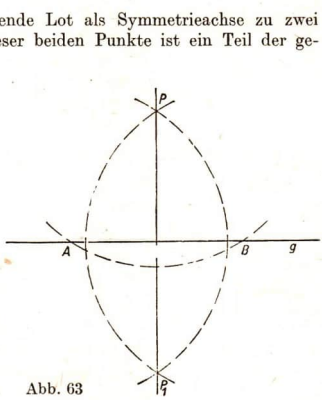


Abb. 63

Konstruktionsbeschreibung: Ich schlage um P einen Kreisbogen, der die Gerade g in A und B schneidet. Mit gleichen Radien schlage ich um A und B Kreisbögen, die einander in P_1 schneiden. Ich verbinde P mit P_1 und erhalte damit das Lot von P auf die Gerade g.

5) Ein gegebener Winkel ist zu halbieren.

Wir verwenden Satz 8: Verbindet man einen Punkt der Symmetrieachse mit zwei symmetrischen Punkten, so entstehen zwei gleich große Winkel zwischen der Symmetrieachse und den beiden Verbindungsstrecken.

Wir betrachten den Scheitel S des Winkels α als einen Punkt der Symmetrieachse. Die Schenkel sehen wir als Verbindungsstrecken zu zwei symmetrischen Punkten in bezug auf die Symmetrieachse an. Wir schlagen um S einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels α in A und B schneidet. Beide Punkte sind von S gleich weit entfernt, und somit liegt der Scheitel des Winkels α auf der Symmetrieachse zu A und B (nach Satz 7). Wir kon-

struieren die Symmetrieachse zu A und B und erhalten damit die **Winkelhalbierende** (Abb. 64).

Konstruktionsbeschreibung:

Ich schlage um den Scheitel S des Winkels α einen Kreisbogen, der die Schenkel in A und B schneidet. Um A und B schlage ich mit gleichen Radien Kreisbögen, die einander in P_1 und P_2 schneiden. Ich verbinde P_1 mit S und erhalte die Winkelhalbierende.

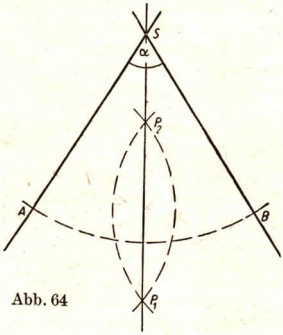


Abb. 64

Aufgaben

1. Es sind die Strecken $a = 3$ cm, $b = 7{,}5$ cm, $c = 13$ cm, $d = 4{,}9$ cm und $e = 1$ cm zu halbieren.
   a) Bestimme zunächst durch Schätzen die Mittelpunkte der Strecken!
   b) Halbiere die Strecken durch Konstruktion! Prüfe die Konstruktion durch Messen nach! Vergleiche die Konstruktion mit der geschätzten Teilung!
   c) Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!
2. a) Teile eine Strecke $a = 13{,}7$ cm der Reihe nach in 2, 4, 8 gleiche Teile!
   b) Gib eine Konstruktionsbeschreibung!
3. Konstruiere mit Lineal und Zeichendreieck ein Rechteck mit den Seiten $a = 6{,}7$ cm und $b = 3{,}3$ cm! Halbiere die Seiten des Rechtecks zunächst durch Schätzen und dann durch Konstruktion!
4. Zeichne ein Paar Scheitelwinkel!
   a) Halbiere nacheinander beide!
   b) Fasse das Ergebnis in einem Satz zusammen!
   c) Gib eine Konstruktionsbeschreibung!
5. Zeichne ein Paar Nebenwinkel!
   a) Halbiere beide Winkel!
   b) Erkläre das Ergebnis in einem Satz!
6. Teile durch wiederholtes Halbieren einen rechten Winkel in acht gleiche Teile!
   a) Miß mit dem Winkelmesser nach!
   b) Beschreibe die Konstruktion!

7. Konstruiere mit Zirkel und Lineal Winkel von
   a) 45°, **b)** 135°, **c)** 22,5°, **d)** 67,5°!
   Prüfe die Konstruktion mit dem Winkelmesser nach!
   Anleitung: Konstruiere zunächst einen rechten Winkel, indem du von einem Punkt auf eine Gerade das Lot fällst! Teile den rechten Winkel, bis der geforderte Winkel erreicht ist, bzw. setze Winkel zusammen!
   Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!
8. Zeichne ein Dreieck EFG und fälle das Lot von den Eckpunkten auf die gegenüberliegenden Seiten! Prüfe mit dem Zeichendreieck nach!
   Anmerkung: Verlängere gegebenenfalls die Dreieckseiten!
9. Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt M! Teile die Kreisfläche mit Zirkel und Lineal in vier gleich große Teile!
10. Konstruiere ein Rechteck mit den Seiten $a = 4$ cm und $b = 6$ cm unter Verwendung von Zirkel und Lineal! Gib eine Konstruktionsbeschreibung!
    Anleitung: Wende die Konstruktion der Senkrechten an! Verlängere dazu die Seite AB über die Endpunkte hinaus!

29. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Überlege, ob man einige der fünf Grundkonstruktionen auch mit dem Zeichendreieck ausführen kann!
   Prüfe an Hand von Zeichnungen nach, ob die Konstruktion mit dem Zirkel oder dem Zeichendreieck schneller und besser vorgenommen werden kann!
2. Konstruiere die Parallelen zu einer Geraden g im Abstand von **a)** 4 cm, **b)** 3,2 cm, **c)** 2,6 cm, **d)** 5,2 cm mit Hilfe von Zirkel und Lineal!
   Anleitung: Nimm zwei Punkte auf der Geraden g an und errichte in ihnen jedesmal die Senkrechte auf g! Trage dann die Abstände der Parallelen ab und zeichne die Gerade!
3. **a)** Konstruiere ein Rechteck mit Zirkel und Lineal! Die Seiten des Rechtecks haben eine Länge von 3,6 cm und 5,4 cm.
   b) Konstruiere in diesem Rechteck die vier Winkelhalbierenden!
4. Zeichne ein Dreieck GHI und konstruiere die Mittelsenkrechten seiner Seiten!
5. Überlege, wie zwei Winkel liegen müssen, wenn sie die Symmetrieachse gemeinsam haben sollen! Fertige eine entsprechende Konstruktion an und überprüfe an Hand deiner Zeichnung die Überlegung!

Aus dem Werkunterricht

6. Für die Lehrmittelsammlung werden aus Holz Modelle für den Geometrieunterricht angefertigt. Ein Quader mit den Kantenlängen 22 cm (Länge), 10,5 cm (Breite) und 7 cm (Höhe) soll hergestellt werden. Dazu ist der Grundriß mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

7. Es wird die Aufgabe gestellt, ein Schlüsselbrett herzustellen. Es soll die Länge von 15 cm und die Breite von 5 cm haben.

a) An dem Brett sind 4 Haken in einer Reihe so anzubringen, daß sie einen Abstand von je 3 cm haben. Fertige eine Konstruktionszeichnung mit Hilfe von Lineal und Zirkel an!
Gib in der Zeichnung die Bohrungen für die Haken an, die auf der Mittelsenkrechten der kleineren Seite liegen!

Anleitung: Konstruiere zur Hilfe die Symmetrieachse, die die größere Seite halbiert!

b) Auf der Rückseite des Brettes sind 2 Haken zum Aufhängen einzuschrauben. Sie liegen auf den Winkelhalbierenden der beiden Winkel, die die oberen Eckpunkte als Scheitel haben. Die Bohrungen sind 1,5 cm vom Eckpunkt aus vorzunehmen.
Fertige die Konstruktionszeichnung an!

8. Ein Brett für Garderobenhaken wird vorbereitet. Es soll eine Länge von 40 cm und eine Breite von 9,4 cm haben. Drei Garderobenhaken, die auf der Mittelsenkrechten der kleineren Seite in einem Abstand von je 14 cm angebracht sein sollen, sind vorgesehen. Die Befestigungsschrauben sollen 3 cm rechts bzw. links von den äußeren Haken auf der genannten Mittelsenkrechten eingeschraubt werden.
Konstruiere die Zeichnung für die Vorderseite des Brettes im Maßstab 1 : 2 und markiere die Bohrungen für die Schrauben!

Anleitung: Entwirf zunächst eine Skizze!
Zur Hilfe bei der Konstruktion zeichne die Symmetrieachse, die die längere Seite halbiert, und errichte Senkrechten auf der längeren Seite im Abstand von je 14 cm von der Symmetrieachse!

9. Für den Physikraum wird eine rechteckige Grundplatte von 45 cm Länge und 27,5 cm Breite benötigt. In der Platte sind 2 Löcher so anzubringen, daß jedes im Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender liegt. Konstruiere die Zeichnung dazu im Maßstab 1 : 5!

10. Konstruiere den Grundriß eines Schuhkartons mit Zirkel und Lineal (Maßstab 1 : 3)!

11. In der Station der Jungen Techniker wird ein physikalischer Experimentierkasten gebaut. Er weist eine Einteilung in drei Hauptfächer auf,

die parallel zur Breite getrennt sind. Der Kasten hat eine Länge von 1,10 m und eine Breite von 50 cm. Der linke Abschnitt hat eine Länge von 32 cm, der mittlere eine von 64 cm und der rechte eine von 14 cm. Die Wandstärke beträgt überall 1,5 cm.
Konstruiere den Grundriß im Maßstab 1 : 10! Arbeite mit Zirkel und Lineal!

12. Die Flächen der beiden Teile eines Scharniers sind Rechtecke von 8 cm Länge und 4 cm Breite. Beide Teile sollen je drei Löcher erhalten, die achsensymmetrisch zueinander liegen.

a) Entnimm der Abbildung 65 die Maße und fertige die Konstruktionszeichnung für einen Teil des Scharniers an!

b) Konstruiere den zu diesem Teil symmetrischen!

13. Schienenfahrzeuge laufen auf sogenannten Radsätzen (Abb. 66). Übertrage die Zeichnung und konstruiere die Symmetrieachsen! Wieviel Symmetrieachsen gibt es?

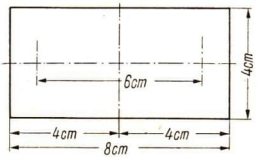


Abb. 65

Abb. 66

VI. Das Dreieck

30. Das Dreieck als Begrenzungsfläche

1) Wir haben mit dem Zeichendreieck gearbeitet und auch Dreiecke gezeichnet, ohne daß wir etwas über die Eigenschaften des Dreiecks wußten. Im folgenden wollen wir unsere Kenntnisse über das Dreieck erweitern; denn das Dreieck und die damit verbundenen Gesetzmäßigkeiten finden vielfache Anwendung.

So wie die Zahlen wurden auch die geometrischen Figuren von den Menschen nicht frei erfunden. In der Natur fanden die Menschen Figuren und Formen in einer großen Vielfalt vor. Im Kampf mit der Natur und bei der Arbeit erkannten sie diese Formen und ihre Eigenschaften und wendeten sie für ihre

Zwecke an. Das geschah dann vor allem bei Landvermessungen, wie sie zum Beispiel von den Babyloniern lange vor dem Jahr 2 000 v. u. Z. und von den Ägyptern vorgenommen wurden. In Ägypten mußten die Landvermessungen nahezu jährlich wiederholt werden, da der Nil regelmäßig über die Ufer trat und die Feldmarkierungen zerstörte. Von den Griechen wissen wir, daß sie zahlreiche Lehrsätze, besonders geometrische Sätze, fanden und das mathematische Wissen erweiterten. Die Mathematiker vieler Völker haben die von ihnen gefundenen und weiterentwickelten mathematischen Gesetze übernommen und auf ihnen aufgebaut.

Wir müssen also stets bedenken, daß für das Wissen, das wir heute erwerben und anwenden, das Schaffen und Können vieler Völker während einer langen Entwicklungszeit notwendig war. Wir müssen weiterhin beachten, daß auch heute viele Wissenschaftler in aller Welt um die Weiterentwicklung der Mathematik bemüht sind. Die Anwendung mathematischer Gesetze nimmt heute in unserem gesamten Leben einen sehr breiten Raum ein. Ohne Mathematik könnten keine Fabriken gebaut werden und keine Maschinen laufen. Ein Triumph der Mathematik ist auch der Bau und der Flug der Sputniks und Luniks, die zur Erforschung des Weltraums mit komplizierten Meßgeräten ausgerüstet sind.

2) Die geometrischen Figuren entstammen also nicht der Phantasie des Menschen, sie haben ihre Vorbilder in der Natur. An dem Flußspatkristall,

Abb. 67

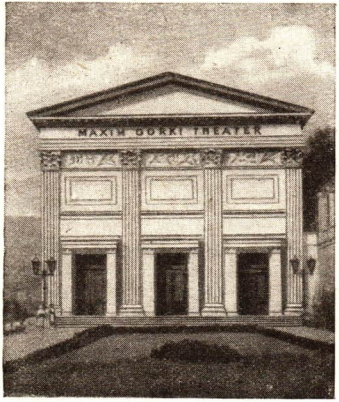


Abb. 68

der in Abbildung 67 gezeigt wird, erkennen wir deutlich mehrere Dreiecke. Dreiecke finden wir auch an Gebäuden, Werkzeugen und Maschinen. Der Dachgiebel eines Hauses, häufig schön verziert (Abb. 68), bildet ein Dreieck. Die Kelle des Maurers hat die Form eines Dreiecks. Dreiecke werden auch häufig aus Balken bzw. Stahlträgern gebildet (Abb. 69). Den Grund dafür werden wir später kennenlernen.

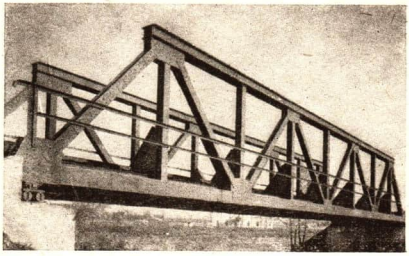
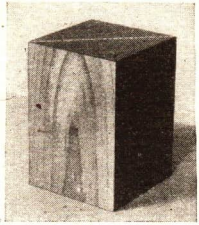


Abb. 69

3) Wir kennen das Dreieck auch schon als Begrenzungsfläche an geometrischen Körpern. Die Abbildung 70 stellt ein quadratisches Prisma dar, bei dem eine Diagonale der Deckfläche markiert wurde. Wenn wir in Richtung dieser Diagonalen senkrecht zur Deckfläche einen Schnitt führen, erhalten wir zwei Körper mit gleicher Gestalt und Größe. Bei diesen Körpern sind die Seitenflächen Rechtecke. Die Grund- und Deckflächen sind jedoch Dreiecke. Diese Körper nennen wir dreiseitige Prismen (Abb. 71).



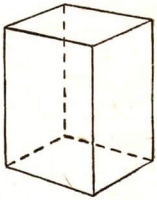
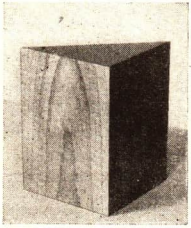


Abb. 70



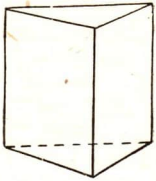


Abb. 71

Dreiecke treten auch als Begrenzungsflächen

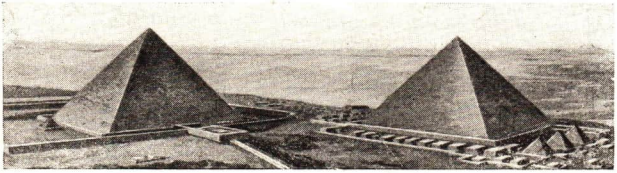


Abb. 72

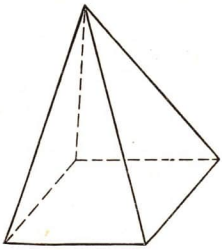


Abb. 73

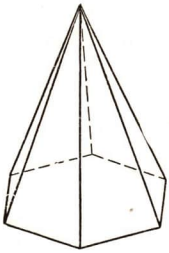


Abb. 74

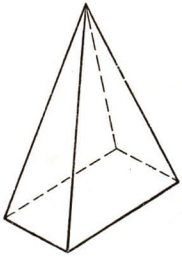


Abb.75

an Pyramiden auf. Berühmt sind die Pyramiden in Ägypten, die vor rund 4 500 Jahren errichtet wurden (Abb. 72). Die Abbildungen 73 bis 75 zeigen verschiedene geometrische Pyramiden. Bei jeder Pyramide werden die Seitenflächen durch Dreiecke gebildet.

Aufgaben

1. Stelle aus Knetmasse ein quadratisches Prisma her!
   a) Markiere eine Diagonale auf der Deckfläche und lege einen Schnitt durch das Prisma, wie er in Abbildung 70 angegeben wird!
   b) Vergleiche die Anzahl der Flächen und Kanten des quadratischen Prismas mit denen des dreiseitigen Prismas!

2. Baue mit Hilfe von Stäbchen und Kügelchen aus Knetmasse quadratische Pyramiden! Wieviel Stäbchen und wieviel Kügelchen werden benötigt? Wieviel Dreiecke begrenzen den Körper?

3. Wieviel Kanten und Flächen stoßen **a)** in der Spitze, **b)** in einer Ecke der quadratischen Pyramide zusammen?

4. Fertige aus Knetmasse zwei gleiche quadratische Pyramiden an! Füge sie so zusammen, daß die Grundflächen aufeinanderstehen! Es entsteht eine regelmäßige vierseitige Doppelpyramide. Der neue Körper wird Oktaeder (Achtflächner) genannt (Abb. 76). Es gibt Kristalle, die die Form eines Oktaeders haben. Was für Flächen begrenzen ein Oktaeder?

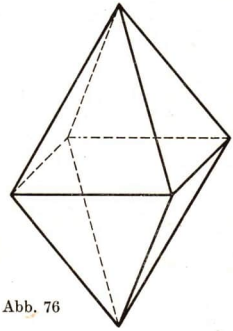


Abb. 76

5. Nenne Gegenstände, die Dreiecke als Begrenzungsflächen aufweisen!

6. Ein Turmdach soll die Form einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide erhalten. Die Seitenflächen werden durch Metallplatten gebildet. Überlege, wieviel Kanten geschweißt werden müssen!

31. Arten der Dreiecke

1) Wir werden im folgenden die Seitenfläche einer regelmäßigen geraden Pyramide genauer untersuchen (Abb. 77a und b).

Das Dreieck hat drei Eckpunkte, die wir mit großen Buchstaben bezeichnen: im allgemeinen mit A, B, C.

Die drei Seiten werden als Strecken meist mit kleinen Buchstaben benannt, und zwar liegt dem Eckpunkt A die Seite a, dem Eckpunkt B die Seite b und dem Eckpunkt C die Seite c gegenüber. Es können aber

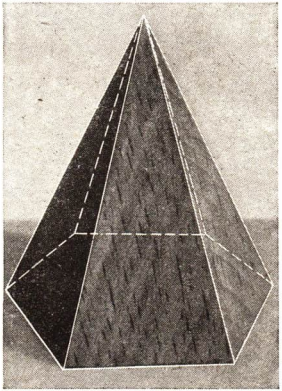


Abb. 77a

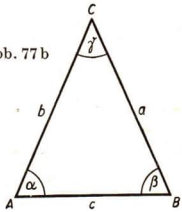


Abb. 77b

auch die Seiten durch die Eckpunkte des Dreiecks bezeichnet werden. Dann ist Seite $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (Abb. 77b).

Die drei Winkel erhalten als Benennung wie üblich kleine griechische Buchstaben. Winkel α hat den Eckpunkt A, Winkel β den Eckpunkt B, Winkel γ den Eckpunkt C als Scheitelpunkt. Jeder Seite liegen zwei Winkel an und ein Winkel gegenüber. Zum Beispiel liegen der Seite a die Winkel β und γ an und der Winkel α gegenüber. Jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen. Zum Beispiel wird der Winkel α von den Seiten b und c eingeschlossen. Die Winkel α, β und γ werden als **Innenwinkel** des Dreiecks bezeichnet.

2) Die Dreiecke, die wir als Begrenzungsflächen an Körpern betrachtet haben, die wir am Zeichendreieck sehen oder die wir auch schon gezeichnet haben, weisen verschiedene Gestalt und Größe auf. Die Dreiecke in den Abbildungen 78 bis 80 fallen uns dadurch auf, daß sie sich in der Länge der Seiten unterscheiden. Das Dreieck mit drei gleichen Seiten (Abb. 78) ist ein **gleichseitiges Dreieck**, das mit zwei gleichen Seiten (Abb. 79) ist ein **gleichschenkliges Dreieck**, das mit drei ungleichen Seiten ist ein **ungleichseitiges Dreieck** (Abb. 80).

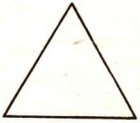


Abb. 78

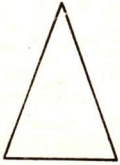


Abb. 79

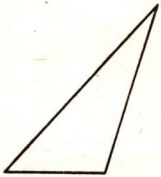


Abb. 80

Bei den Dreiecken, die in den Abbildungen 81 bis 83 dargestellt sind, wollen wir auf die Winkel achten. Das Dreieck mit drei spitzen Winkeln ist ein **spitzwinkliges Dreieck** (Abb. 81). Von den Winkeln des Dreiecks in Abbildung 82 ist einer ein rechter Winkel, die anderen beiden sind spitze Winkel. Das Dreieck ist ein **rechtwinkliges Dreieck**. Das Dreieck in Abbildung 83 hat einen stumpfen Winkel und zwei spitze Winkel, es ist ein **stumpfwinkliges Dreieck**.

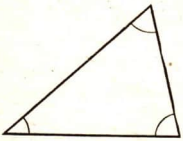


Abb. 81

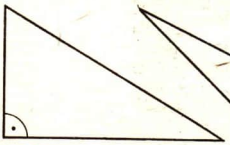


Abb. 82

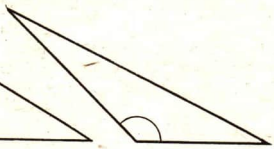


Abb. 83

3) Die Seiten und einige Winkel tragen bei rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecken besondere Bezeichnungen.

Im rechtwinkligen Dreieck heißen die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, **Katheten.** Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypotenuse.**

Im gleichschenkligen Dreieck heißen die gleich langen Seiten **Schenkel.** Sie schneiden einander in der Spitze des Dreiecks. Die der Spitze gegenüberliegende Seite heißt **Basis** oder **Grundlinie.** Die der Basis anliegenden Winkel werden **Basiswinkel** genannt, während der ihr gegenüberliegende Winkel als **Winkel an der Spitze** bezeichnet wird.

Aufgaben

1. Zeichne mit Hilfe des Zeichendreiecks drei rechtwinklige Dreiecke, die verschiedene Lagen haben!
2. Miß die Seitenlängen und Winkelgrößen deines Zeichendreiecks und ordne es in die gegebene Einteilung der Dreiecksarten ein!
3. Um was für ein Dreieck handelt es sich bei der Giebelfläche des Maxim-Gorki-Theaters in Berlin (Abb. 68)?
4. Die Abbildung 84 stellt einen Dachbinder dar, wie er häufig in Lagerhäusern und Scheunen verwendet wird. Was für Dreiecke treten bei diesem Dachbinder auf?

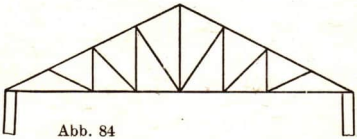


Abb. 84

5. Was für Dreiecke werden in der Stahlkonstruktion (Abb. 69) gebildet? Bedenke, daß die Dreiecke verzerrt erscheinen!
6. An welchen Bauten oder Gegenständen deiner Umgebung findest du Dreiecksformen? Nenne jeweils den Gegenstand, den Verwendungszweck und die Art des Dreiecks!

32. Symmetrieeigenschaften von Dreiecken

Stelle fest, ob unter den verschiedenen Dreiecksarten in den Abbildungen 78 bis 83 symmetrische Figuren enthalten sind!

1) Die Abbildung 68 zeigt ein Gebäude, dessen Giebel ein gleichschenkliges Dreieck ist. Man vermutet auf den ersten Blick, daß das Giebeldreieck eine achsensymmetrische Figur ist. Wir untersuchen die Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks an der Abbildung 85.

In dem gleichschenkligen Dreieck ABC (Abb. 85) bilden die Seiten AC und BC die Schenkel. Da die Spitze C des Dreiecks von den anderen Eckpunkten A und B gleich weit entfernt ist, liegt C auf der Symmetrieachse zu A und B (Satz 7, S. 114). Es ergibt sich, daß die Symmetrieachse die Basis des gleichschenkligen Dreiecks halbiert und auf ihr senkrecht steht (Satz 9, S. 115). Und noch eine Eigenschaft läßt sich feststellen: Der Winkel an der Spitze wird von der Symmetrieachse halbiert; denn die Symmetrieachse schließt mit den Schenkeln einander gleiche Winkel ein (Satz 8, S. 114).

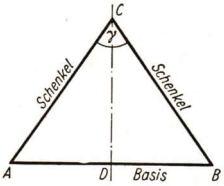


Abb. 85

Wird das Teildreieck ADC um die Symmetrieachse geklappt, so kommen die Punkte A und B, die beiden Schenkel sowie die beiden Basishälften zur Deckung. Es müssen also auch die Basiswinkel gleich groß sein.

Satz 11: Das gleichschenklige Dreieck ist achsensymmetrisch. Die Symmetrieachse geht durch die Spitze, halbiert den Winkel an der Spitze, halbiert die Basis und steht auf ihr senkrecht.

Satz 12: Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich.

2) Wir wollen nun gleichschenklige Dreiecke konstruieren. Wir verfahren ähnlich wie bei der Konstruktion der Symmetrieachse.

Beispiel: Es ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC zu konstruieren. Die Basis beträgt $AB = c = 4$ cm, die Schenkel betragen $a = b = 5$ cm.

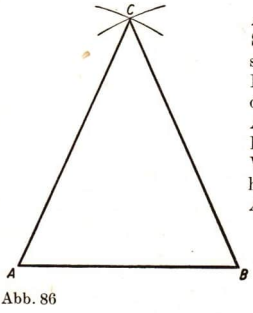


Abb. 86

Lösung: Wir zeichnen die Strecke $AB = c = 4$ cm, nehmen anschließend die Strecke $AC = BC = 5$ cm in den Zirkel und schlagen um A und B Kreisbögen mit diesem Radius. Sie schneiden einander im Punkt C; denn C liegt sowohl auf dem Kreisbogen um A mit dem Radius $AC = b$ als auch auf dem Kreisbogen um B mit dem Radius $BC = a$. Wir verbinden A mit C und B mit C und erhalten das verlangte gleichschenklige Dreieck ABC (Abb. 86).

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = c = 4$ cm. Dann schlage ich mit $a = b = 5$ cm je einen Kreisbogen um A und B und erhalte im Schnittpunkt C. Ich

verbinde A und B mit C und erhalte das verlangte Dreieck ABC.

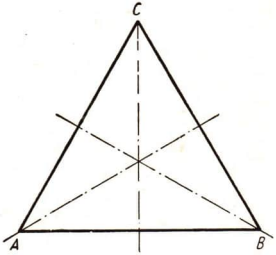


Abb. 87

3) Viele Verkehrszeichen haben die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Untersuchen wir ein gleichseitiges Dreieck auf Achsensymmetrie!
Das gleichseitige Dreieck ist ein besonderes gleichschenkliges Dreieck. In ihm sind nicht nur zwei Seiten (die Schenkel) gleich lang, sondern sogar alle drei Seiten haben die gleiche Länge. Im gleichseitigen Dreieck ist der Punkt C ein Punkt auf der Symmetrieachse zu den Punkten A und B, denn $AC = b$ und $BC = a$ sind gleich lange Seiten, und Satz 7 (Seite 114) ist damit erfüllt. Darüber hinaus können wir auch den Punkt A als einen Punkt auf der Symmetrieachse zu den Punkten B und C auffassen; denn $AB = c$ und $AC = b$ sind gleich lange Seiten, und Satz 7 ist erfüllt. Die entsprechende Feststellung können wir für den Eckpunkt B in bezug auf die Punkte A und C als achsensymmetrisch gelegene Punkte treffen. Es ergibt sich demnach, daß das gleichseitige Dreieck drei Symmetrieachsen hat (Abb. 87). Die drei Symmetrieachsen schneiden einander in einem Punkt.

4) Bei der Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks können wir wieder von der Konstruktion der Symmetrieachse zu zwei Punkten ausgehen.

Beispiel: Im Werkunterricht sollen Verkehrszeichen für ein Spiel im Kindergarten hergestellt werden. Es wird eine Zeichnung für die Schilder in Dreiecksform angefertigt. Die Seite des Dreiecks ist $a = b = c = 6$ cm lang.

Konstruktion: Wir zeichnen die Seite $c = 6$ cm und bezeichnen die Eckpunkte mit A und B. Dann schlagen wir mit c um A und B Kreisbögen. Beide Kreise schneiden einander im Punkt C. Wir verbinden A und B mit C und erhalten das verlangte gleichseitige Dreieck ABC.

Aufgaben

1. Trage in das Modell, das du zur Untersuchung von Symmetrieeigenschaften gebaut hast (Abb. 49), die Verbindungsstrecke AB ein! Du kannst jetzt mit dem Modell verschiedene gleichschenklige Dreiecke bilden, indem du mit einem Stäbchen und dem umgelegten Faden verschiedene Punkte auf der Symmetrieachse festlegst.

a) Verändere durch Verschieben die Dreiecke so, daß der Winkel an der Spitze (Winkel γ) von 170° ab jeweils um 10° kleiner wird! Miß bei

jeder Stellung die Größe der Basiswinkel! (Schätze zunächst die Größe der Winkel, bevor du sie mißt!)

Trage die gemessenen Werte des Winkels an der Spitze und den Basiswinkel in eine Tabelle ein! Was stellst du fest?

Anleitung:

Stellung	γ	$\alpha = \beta$
1	170°	
2	160°	
3	150°	
.	.	
.	.	
.	.	

b) Nimm die Spitze des Dreiecks außerhalb der Symmetrieachse an! Erkläre die Form des Dreiecks und miß die Dreiecksseiten sowie die Winkel!

c) Was für eine Figur erhältst du, wenn die Schenkel genau so lang sind wie die Basis AB?

d) Miß die Länge der Schenkel bei verschiedenen gleichschenkligen Dreiecken! (Veränderungen etwa wie bei Aufgabe **a.**) Vergleiche die Summe der Längen beider Schenkel mit der Länge der Basis! Schreibe diese Vergleiche in eine Tabelle! Vergleiche auch die Summe aus der Länge eines Schenkels und der Basis mit der Länge des anderen Schenkels! Schreibe auch diese Vergleiche in eine Tabelle! Was kannst du feststellen?

2. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus

a) $a = b = 3$ cm und $c = 5$ cm,

b) $a = 4{,}2$ cm und $b = c = 3{,}8$ cm,

c) $a = c = 3{,}1$ cm und $b = 5{,}6$ cm!

d) Gib zu einer Konstruktion die Beschreibung!

e) Ergänze die Konstruktion von **a)** durch die Seitenhalbierende der Seite c! Konstruiere außerdem die Symmetrieachse! Es ist ferner noch die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze zu konstruieren. Was stellst du fest?

3. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck aus einer gegebenen Seite von der Länge

a) 4 cm, **b)** 2,8 cm und **c)** 3,6 cm!

d) Gib zu einer Konstruktion die Beschreibung!

e) Konstruiere zu einem Dreieck die Symmetrieachsen!

4. a) Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus $a = b = 10$ cm und $c = 6$ cm auf Karton! Konstruiere die Symmetrieachse zu diesem Dreieck!

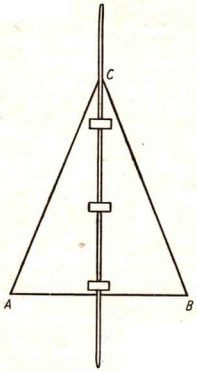


Abb. 88

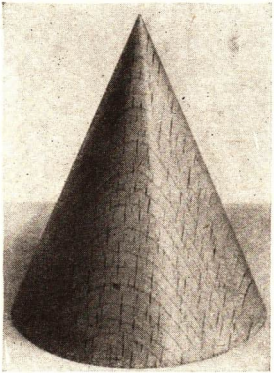


Abb. 89

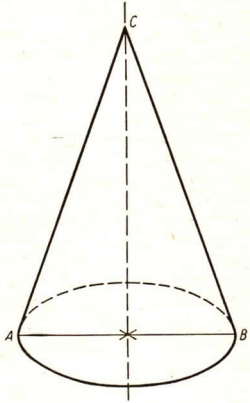


Abb. 90

b) Schneide das Dreieck aus und befestige ein Holzstäbchen so auf der Symmetrieachse, daß es über Spitze und Basis hinausragt (Abb. 88)! Drehe das Modell sehr schnell um diese Achse! Durch die Drehung entsteht ein Körper, den wir **Kegel** nennen. Seine Grundfläche ist ein Kreis (Abb. 89 und 90).

33. Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln des Dreiecks

1) *Zeichne verschiedene Dreiecke, miß die Seiten und vergleiche jeweils die Summe zweier Seiten mit der dritten Seite!*

Bei gleichschenkligen Dreiecken haben wir bereits die Summe zweier Seiten mit der dritten Seite verglichen. Dabei haben wir festgestellt, daß die Summe zweier Seiten in jedem Fall größer als die dritte Seite ist. Das trifft für alle Dreiecke zu. Eine einfache Überlegung soll uns das veranschaulichen.

Die kürzeste Verbindung von A und B ist die Strecke c. Der Weg von A nach B über C, also die Summe der Seiten a und b, muß länger sein als die Strecke $AB = c$.

Satz 13: Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist stets größer als die dritte Seite.

2) Bei gleichschenkligen Dreiecken haben wir bereits die Größe der Winkel notiert. Die Addition der drei Winkel jedes Dreiecks ergab 180°. Geringfügige Ungenauigkeiten (181° oder 179°) sind auf ungenaues Messen zurückzuführen.

Auch wenn wir in Dreiecken, die einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthalten, die Summe $\alpha + \beta + \gamma$ bilden, erhalten wir 180°.

Wir können unmöglich alle Dreiecke, die es überhaupt gibt, auf diese Weise überprüfen. Aus diesem Grunde werden wir im folgenden beweisen, daß in jedem Dreieck die Summe der Innenwinkel genau 180° beträgt. Dabei wenden wir den Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen an. Wir zeichnen ein beliebiges Dreieck ABC. Durch den Punkt C zeichnen wir die Parallele zu der Dreiecksseite AB. Auf dieser Parallelen legen wir links von C einen Punkt D und rechts von C einen Punkt E fest (Abb. 91).

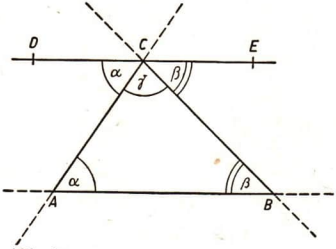


Abb. 91

Wenn wir nun noch die Dreiecksseiten wie in Abbildung 91 verlängern, dann erkennen wir folgendes:

Der Winkel DCA ist Wechselwinkel zu dem Winkel α. (Die schneidende Gerade ist die nach beiden Seiten verlängerte Dreiecksseite AC.) Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind aber einander gleich. Folglich ist der Winkel DCA so groß wie α.

Der Winkel ECB ist Wechselwinkel zu dem Winkel β. (Die schneidende Gerade ist die nach beiden Seiten verlängerte Dreiecksseite CB.) Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind einander gleich. Folglich ist der Winkel ECB so groß wie β.

Die Winkel α, γ und β bilden zusammen bei C einen gestreckten Winkel. Folglich ist $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ oder anders geschrieben $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Satz 14: Im Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

3) Verlängert man in einem Dreieck die Seiten in einer Richtung über den Eckpunkt hinaus (Abb. 92), so entstehen Winkel außerhalb des Dreiecks. Diese Winkel heißen **Außenwinkel** des Dreiecks. Außenwinkel werden also von der Verlängerung einer Dreiecksseite und der jeweils anliegenden Seite gebildet.

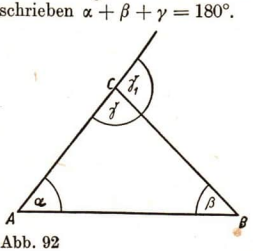


Abb. 92

Wenn wir die Größe des Innenwinkels kennen, können wir den entsprechenden Außenwinkel berechnen.

Begründe nach Abbildung 92, warum $\gamma + \gamma_1 = 180°$ ist! Am Punkt C läßt sich noch ein zweiter Außenwinkel zeichnen, indem man die Seite BC über C hinaus verlängert. Begründe, warum dieser Außenwinkel so groß wie γ_1 ist!

Wir zeichnen durch C zur Seite AB die Parallele. Sie teilt den Außenwinkel γ_1 in zwei Teilwinkel (Abb. 93). Der untere Teilwinkel ist Wechselwinkel zu β und folglich genauso groß wie dieser. Der obere Teilwinkel ist Stufenwinkel zu α und deshalb genauso groß wie dieser.

Folglich ist der Außenwinkel γ_1 gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel α und β:

$$\gamma_1 = \alpha + \beta.$$

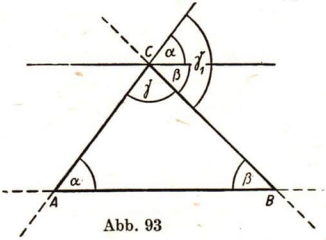


Abb. 93

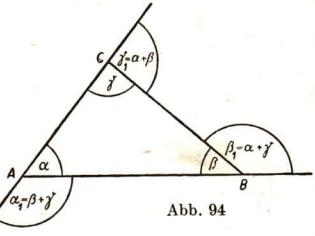


Abb. 94

Satz 15: Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

Wenn wir mit α_1 den Außenwinkel beim Punkt A und mit β_1 den Außenwinkel beim Punkt B bezeichnen, dann können wir entsprechend Satz 15 sagen:

$$\alpha_1 = \beta + \gamma \quad \text{und} \quad \beta_1 = \alpha + \gamma.$$

Die Abbildung 94 zeigt ein Dreieck ABC, in dem alle Außenwinkel eingezeichnet sind. Bildet man die Summe der drei Außenwinkel, so erhält man folgendes Ergebnis:

$$\underbrace{\alpha_1}_{\beta+\gamma} + \underbrace{\beta_1}_{\alpha+\gamma} + \underbrace{\gamma_1}_{\alpha+\beta} = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma.$$

In dieser Summe kommt jeder Innenwinkel doppelt vor. Da die Summe der Innenwinkel 180° ist, beträgt die Summe der Außenwinkel das Doppelte, also 360°.

Satz 16: Die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°.

Aufgaben

1. In einem Dreieck sind zwei Winkel bekannt.
a) $\alpha = 43°$; $\beta = 64°$ **b)** $\gamma = 113°$; $\beta = 24°$
c) $\beta = 74°$; $\gamma = 83°$ **d)** $\alpha = 14°$; $\beta = 63°$
Berechne jeweils den dritten Innenwinkel und die drei Außenwinkel!

2. Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck! Führe an dieser Figur die Beweise für die Sätze
a) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (Satz 14), **b)** $\gamma_1 = \alpha + \beta$ (Satz 15)!

3. **a)** In der folgenden Tabelle ist die Größe der Winkel α und β angegeben. Zu errechnen ist Winkel γ.

α	20°	31°	54°	83°	90°	90°	74°	60°	40°	90°	110°	110°
β	85°	77°	45°	25°	47°	53°	90°	60°	100°	90°	125°	35°
$\alpha + \beta$												
γ												

b) Erläutere besondere Fälle, die sich bei der Berechnung von Winkel γ ergeben!
c) Nenne die Arten der Dreiecke, die nach den angegebenen Winkelgrößen entstehen!

4. Mit zwei Zeichendreiecken sind ohne Verwendung eines Winkelmessers die folgenden Winkel zu zeichnen: **a)** 75°, **b)** 105°.
Hinweis: Verwende ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck und ein ungleichseitiges rechtwinkliges Dreieck! Beachte den Satz über Nebenwinkel!

5. Bilde 8 Beispiele für die Berechnung der Innenwinkel in einem rechtwinkligen Dreieck, indem du die Größe für einen Winkel festlegst!

6. Konstruiere die Summe zweier Winkel nach den folgenden Angaben!
a) $\alpha = 53°$; $\beta = 71°$ **b)** $\beta = 74°$; $\gamma = 92°$ **c)** $\alpha = 64°$; $\gamma = 97°$
Miß die Größe des dritten Winkels mit dem Winkelmesser! Kontrolliere die gemessenen Werte durch Berechnen!

7. Errechne nach der Tabelle in Aufgabe 3 die Außenwinkel der verschiedenen Dreiecke!

8. Führe den Beweis für Satz 15 (Seite 137) auch für die anderen Außenwinkel!

9. Überlege, ob aus den folgenden Strecken Dreiecke konstruiert werden können!
a) $a = 8$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm
b) $a = 8$ cm; $b = 3$ cm; $c = 5$ cm
c) $a = 8$ cm; $b = 2$ cm; $c = 5$ cm

10. Stelle aus Holzleisten, Teilen eines Metallbaukastens oder Pappstreifen ein Gelenkdreieck und ein Gelenkviereck (Abb. 95 und 96) her! Stelle fest, ob die Modelle in ihrer Gestalt verändert werden können!

34. Konstruktion von Dreiecken

An den Modellen, die in den Abbildungen 95 und 96 dargestellt sind, kann man feststellen, daß das Dreieck eine **stabile** Figur ist. Dreiecke finden wir deshalb häufig an Stahlkonstruktionen (Brücken, Hochspannungsmasten, Kränen und Maschinen). Vor der Herstellung der Geräte und Bauwerke sind technische Zeichnungen anzufertigen, nach denen gebaut wird. Das bedeutet, daß Dreiecke konstruiert werden müssen. Wir wollen im folgenden solche Dreieckskonstruktionen kennenlernen.

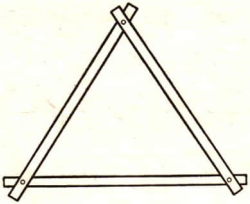


Abb. 95

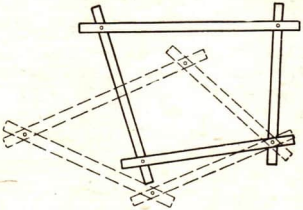


Abb. 96

Die Seiten und Winkel eines Dreiecks nennt man die sechs Stücke.

Für die Konstruktion des Dreiecks braucht man nicht alle sechs Stücke zu kennen. Wir werden sehen, daß bereits die Kenntnis einiger Stücke ausreicht, um die Größe und die Gestalt des Dreiecks genau festzulegen.

Wir haben bereits Dreieckskonstruktionen ausgeführt, bei denen uns die drei Seiten des Dreiecks gegeben waren.

Beispiel: Die Schüler einer Klasse wollen einen Plan von einem Ortsteil entwerfen. An einer Straßenkreuzung muß ein dreieckiges Mittelstück aufgenommen werden. Die Schüler verwenden zur Vermessung ein Meßband, einen Winkelpeiler (vgl. Abb. 25) und Fluchtstäbe. Eine Skizze veranschaulicht den Verlauf der Straßen (Abb. 97). Die Schüler haben verschiedene Möglichkeiten, Stücke zu vermessen und danach das Dreieck zu konstruieren.

1. Konstruktion:

Aufgabe: Es wurden die *Längen der drei Seiten* des Mittelstücks gemessen (Abb. 97). Die Seitenlängen betragen nach Umrechnung im vorgesehenen Maßstab: $a = 4$ cm, $b = 6$ cm und $c = 5$ cm. Konstruiere das Dreieck!

Bevor wir mit der Konstruktion beginnen, zeichnen wir eine Planfigur und veranschaulichen uns so die Möglichkeit der Konstruktion (Abb. 98a). Uns ist die Konstruktion bekannt, und wir wissen, daß Punkt C im Schnittpunkt des Kreisbogens um A (Radius b) mit dem Kreisbogen um B (Radius a) liegt.

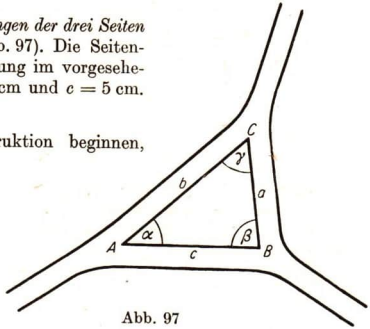


Abb. 97

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = c = 5$ cm. Dann schlage ich um A einen Kreisbogen mit dem Radius $b = 6$ cm und um B einen Kreisbogen mit dem Radius $a = 4$ cm. Beide Kreisbögen schneiden einander in den Punkten C und C_1. Ich verbinde A und B mit C und C_1. Die Dreiecke ABC und ABC_1 entsprechen der Aufgabenstellung (Abb. 98b, Maßstab 1:2). Bemerkung: Es sind durch die Konstruktion zwei Dreiecke entstanden, die achsensymmetrisch zueinander sind. Beim Vergleich mit der Abbildung 97 erkennen wir, daß als Lösung dieser Aufgabe nur das Dreieck ABC anzusehen ist.

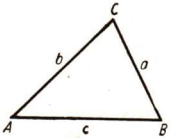


Abb. 98a

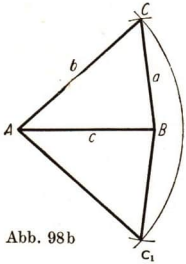


Abb. 98b

2. Konstruktion:

Aufgabe: Die Schüler haben den Winkel $\gamma = 56°$ und die beiden anliegenden Seiten des Mittelstücks (Abb. 97) gemessen. Sie betragen im Maßstab $a = 4$ cm und $b = 6$ cm. Das Dreieck ist aus den gegebenen Stücken zu konstruieren.

Wir überlegen: Es ist ein Dreieck ABC aus *zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel* zu konstruieren. Nach der Planfigur (Abb. 99a) sind die Eckpunkte A und C durch die Seite b gegeben. Der Punkt B wird bestimmt durch den freien Schenkel des Winkels γ, angetragen in C an AC, und durch

den Kreisbogen um C mit dem Radius a. Der Kreisbogen um C schneidet den freien Schenkel von γ in B.

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AC = b = 6$ cm. Den Winkel $\gamma = 56°$ trage ich in C an AC an. Um C schlage ich einen Kreisbogen mit dem Radius $a = 4$ cm, der den freien Schenkel des Winkels γ im Punkt B schneidet. Ich verbinde A mit B und erhalte das verlangte Dreieck ABC (Abb. 99b, Maßstab 1:2).

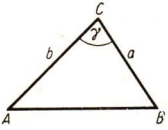


Abb. 99a

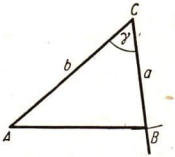


Abb. 99b

3. Konstruktion:

a) Die Schüler haben die Winkel $\beta = 83°$ und $\gamma = 56°$ sowie die Seite a des Mittelstücks der Straßenkreuzung (Abb. 97) gemessen. Die Seite a beträgt im Maßstab $a = 4$ cm. Konstruiere das Dreieck!

Wir überlegen: Es ist ein Dreieck aus *einer Seite und zwei Winkeln* zu konstruieren, und zwar ist es eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln. Aus der Überlegungsfigur (Abb. 100a) entnehmen wir, daß die beiden Eckpunkte B und C durch die Seite a gegeben sind. Den Punkt A finden wir im Schnittpunkt der beiden freien Schenkel der Winkel β und γ.

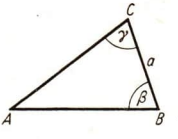


Abb. 100a

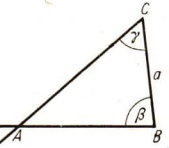


Abb. 100b

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $BC = a = 4$ cm. An BC trage ich in B den Winkel $\beta = 83°$ und in C den Winkel $\gamma = 56°$ an. Die beiden freien Schenkel schneiden einander im Punkt A. Ich verbinde A mit B und C und erhalte das verlangte Dreieck ABC (Abb. 100b, Maßstab 1:2).

b) Ähnlich verläuft die Konstruktion, wenn eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind. Beispiel: Seite a, Winkel α und Winkel β. Diese Aufgabe können wir auf die Aufgabe a) zurückführen, weil wir nach Satz 14 den Winkel γ errechnen können. Wir konstruieren auch hier ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

4. Konstruktion:

Die Schüler haben die Seiten b und c des Mittelstücks der Straßenkreuzung (Abb. 97) sowie den Winkel $\beta = 83°$ gemessen. Die Seiten betragen im

Maßstab: $b = 6$ cm, $c = 5$ cm. Das Dreieck soll konstruiert werden.

Wir überlegen: Es ist ein Dreieck aus *zwei Seiten und dem Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt*, zu konstruieren. Aus der Überlegungsfigur ergibt sich (Abb. 101 a), daß wir bei der Konstruktion mit der Seite beginnen, der der Winkel anliegt. Dadurch erhalten wir die Eckpunkte A und B. Den Punkt C erhalten wir durch den freien Schenkel des Winkels β, angetragen in B an AB, und durch den Kreisbogen um A mit dem Radius b.

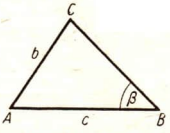


Abb. 101 a

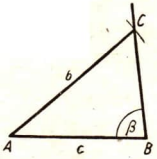


Abb. 101 b

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = c = 5$ cm. Dann trage ich in B an AB den Winkel $\beta = 83°$ an. Ich schlage um A einen Kreisbogen mit dem Radius $b = 6$ cm, der den freien Schenkel von β im Punkt C schneidet. Ich verbinde C mit A und erhalte das verlangte Dreieck ABC (Abb. 101 b, Maßstab 1:2).

Aufgaben

1. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren. Gegeben ist nur ein Stück.

a) $c = 6{,}3$ cm **b)** $\gamma = 68°$

2. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren. Gegeben sind zwei Stücke.

a) $c = 5{,}4$ cm; $\alpha = 35°$ **b)** $a = 3$ cm; $b = 4{,}8$ cm

c) $\alpha = 48°$; $\beta = 65°$

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 4{,}8$ cm; $\alpha = 53°$; $b = 4{,}5$ cm!

a) Beschreibe die Konstruktion!

b) Konstruiere noch ein Dreieck nach diesen Angaben! Was stellst du fest?

Gib zu jeder der Aufgaben **4** bis **7** eine Konstruktionsbeschreibung!

4. Konstruiere Dreiecke ABC aus den folgenden Stücken!

a)	$c = 4{,}8$ cm;	$\alpha = 60°$;	$b = 4{,}8$ cm
b)	$\beta = 32°$;	$a = 5{,}2$ cm;	$c = 4{,}1$ cm
c)	$a = 7{,}5$ cm;	$b = 4{,}5$ cm;	$\gamma = 90°$
d)	$b = 4{,}3$ cm;	$c = 6{,}7$ cm;	$\alpha = 112°$
e)	$\gamma = 72°$;	$a = 4$ cm;	$b = 8$ cm

f) Miß die Winkel und kontrolliere die Winkelsumme!

g) Gib die Arten der konstruierten Dreiecke an!

5. Konstruiere Dreiecke ABC aus den folgenden Stücken!

a) $b = 6$ cm; $\alpha = 20°$; $\gamma = 30°$
b) $a = 7$ cm; $\beta = 43°$; $\gamma = 81°$
c) $c = 4{,}8$ cm; $\alpha = 35°$; $\gamma = 112°$
d) $b = 3$ cm; $\alpha = 64°$; $\beta = 37°$
e) Nenne die Arten der entstandenen Dreiecke!

6. Konstruiere ein Dreieck aus $c = 4$ cm; $\alpha = 43°$; $\beta = 10°$ (20°, 30°, ...)! Miß in jedem Fall bei wachsendem Winkel β die Seiten a und b!

7. Konstruiere Dreiecke ABC aus den folgenden Stücken!

a) $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 6$ cm
b) $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 5$ cm
c) $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 4$ cm
d) $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 3$ cm
e) $c = 5$ cm; $\alpha = 43°$; $a = 2$ cm
f) Was ergibt sich bei den drei Konstruktionen? Erkläre, warum in der 4. Konstruktion, Seite 141, ausdrücklich betont wurde, daß der gegebene Winkel der größeren Seite gegenüberliegt!

8. Konstruiere Dreiecke ABC mit den Stücken:

a) $a = 8$ cm; $b = 3$ cm; $c = 5$ cm
b) $a = 7{,}3$ cm; $b = 4{,}0$ cm; $c = 7{,}3$ cm
c) $a = 6{,}7$ cm; $b = 4{,}2$ cm; $c = 5{,}1$ cm!
d) Wieviel Stücke brauchten in der Aufgabe **b)** nur gegeben zu werden, wenn die Art des Dreiecks genannt wäre? Wie hätte dann die Aufgabe lauten müssen?

9. Entnimm von Gegenständen, die Dreiecke als Begrenzungsflächen haben, oder von Einrichtungen baulicher Art, wie zum Beispiel Gartenzaun, Torflügel, Schuppen mit Fachwerkversteifung usw., Maße für drei Stücke! Konstruiere daraus Dreiecke in geeignetem Maßstab!

10. Verschaffe dir im Patenbetrieb Maßangaben für Werkstücke, die in der Zeichnung durch Dreiecke dargestellt werden! Fertige die Zeichnungen an!

11. Bilde selbst zu jeder der vier Dreieckskonstruktionen eine Aufgabe!

35. Die Höhen im Dreieck

1) In der Zeichnung eines Satteldaches werden häufig die Maße der Grundseite g und der Höhe h des Giebeldreiecks angegeben (Abb. 102a und b). In dem Dreieck, das in den Abbildungen 103a und b gezeigt wird, entspricht die

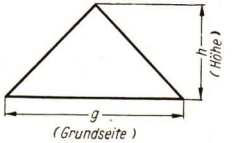


Abb. 102a

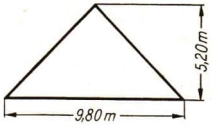


Abb. 102b

Grundseite g der Seite c. Den Abstand des Punktes C zur Grundseite nennen wir **Höhe.** Fällen wir das Lot vom Punkt C auf die gegenüberliegende Seite AB, so erhalten wir in der Strecke $CD = h_c$ die Höhe vom Punkt C aus (Abb. 103b).

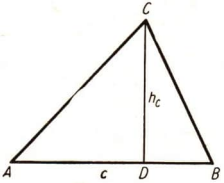


Abb. 103a

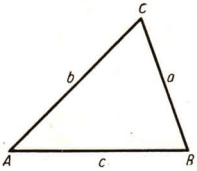


Abb. 103b

Der Punkt D ist der Fußpunkt der Höhe. Auch von den Punkten A und B aus können wir Höhen auf die gegenüberliegenden Seiten konstruieren, wobei die Seite a oder die Seite b die Grundlinie bilden. Zur Unterscheidung verwendet man die Zeichen h_a, h_b und h_c (Abb. 104).

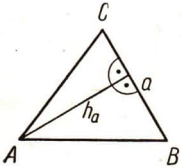


Abb. 104a

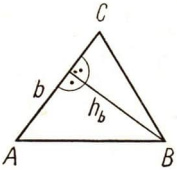


Abb. 104b

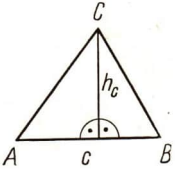


Abb. 104c

2) In stumpfwinkligen Dreiecken liegen zwei Höhenfußpunkte außerhalb des Dreiecks (Abb. 105).

3) In rechtwinkligen Dreiecken fallen zwei Höhen mit den Dreiecksseiten (den Katheten) zusammen (Abb. 106).

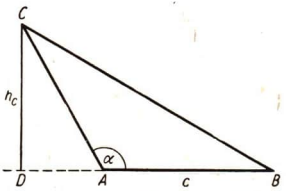


Abb. 105

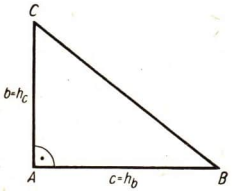


Abb. 106

Aufgaben

1. a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Stücken $c = 8{,}4$ cm; $\alpha = 63°$; $\gamma = 54°$! Konstruiere weiterhin die Höhe h_c, die Symmetrieachse zu den Eckpunkten A und B und beschreibe die Konstruktion!

b) Konstruiere ein weiteres Dreieck ABC aus den unter **1a** gegebenen Stücken! Konstruiere in diesem Dreieck die Winkelhalbierende des Winkels γ, die Symmetrieachse zu den Eckpunkten A und B und beschreibe die Konstruktion!

c) Schneide die beiden Dreiecke aus und klappe jeweils um die Symmetrieachse! Was stellst du fest?

d) Lege die beiden Dreiecke übereinander und vergleiche Gestalt und Größe miteinander!

2. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 47$ mm, $c = 6$ cm und $\gamma = 106°$! Konstruiere die drei Höhen des Dreiecks!

3. a) Ein Dreieck ABC ist zu konstruieren aus $a = b = c = 5{,}8$ cm! Konstruiere die Höhen des Dreiecks! Schneide das Dreieck aus und klappe es um die Höhen! Was stellst du fest? Miß die Länge der Höhen!

b) Konstruiere ein zweites Dreieck nach den angegebenen Stücken in Aufgabe **a)**! Schneide auch dieses Dreieck aus, lege beide Dreiecke übereinander und vergleiche!

4. Konstruiere gleichschenklige Dreiecke mit der Basis $AB = c = 5$ cm und den Höhen $h_c = 1$ cm (2 cm, 3 cm, 4 cm)! Wie ändern sich die Winkel des Dreiecks, wenn h_c größer wird?

Anleitung: Konstruiere zunächst die Basis und ermittle den Fußpunkt der Höhe!

5. Im gleichschenkligen Dreieck liegt eine Höhe auf der Symmetrieachse, und der Fußpunkt halbiert die Basis. Diese Erkenntnis findet Anwendung bei der Setzwaage (Abb. 107). Das Gerät, das vom Bauarbeiter verwendet wird, ist ein hölzernes gleichschenkliges Dreieck, dessen Basismitte gekennzeichnet ist und von dessen Spitze ein Bleilot herabhängt. Erkläre die Anwendung!

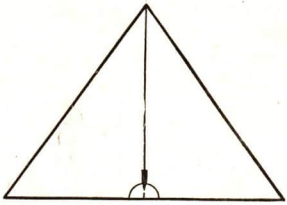


Abb. 107

6. Miß die Seiten des Dreiecks, das in Abbildung 103a dargestellt wird! Konstruiere das Dreieck und die drei Höhen im Maßstab 2:1!

36. Einführung in die Kongruenz

1) In Ausstellungen werden häufig Modelle von Maschinen und Bauten gezeigt, die in jeder Einzelheit den wirklichen Dingen gleichen (Abb. 108). Viele Schüler werden sich schon selbst bemüht haben, in Arbeitsgemeinschaften der Pionierorganisation, vielleicht in der Station Junger Techniker, „naturgetreue" Modelle zu basteln. Modelle haben im allgemeinen die gleiche Gestalt, aber nicht die gleiche Größe wie die Vorbilder. Sie sind den Vorbildern ähnlich.

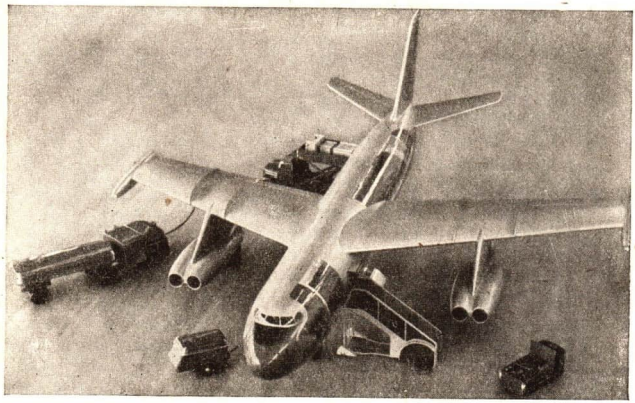


Abb. 108

Figuren, die die gleiche Gestalt haben, müssen also nicht gleich groß sein (Abb. 109 und 110).

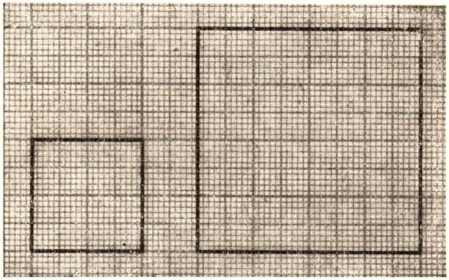


Abb. 109

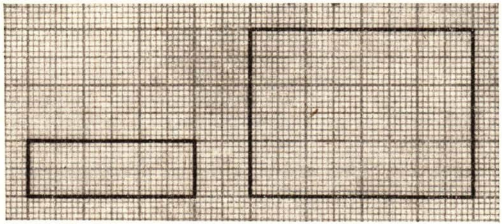


Abb. 110

2) Andererseits brauchen Figuren, die die gleiche Größe haben, nicht von gleicher Gestalt zu sein (Abb. 111).

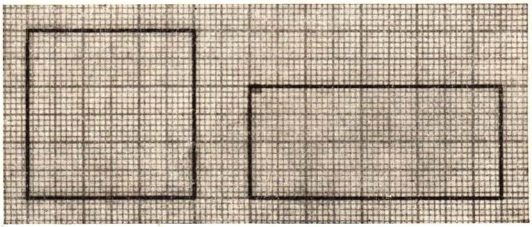


Abb. 111

3) Figuren, die sowohl die gleiche Gestalt als auch die gleiche Größe haben, lernten wir an zueinander achsensymmetrischen Figuren kennen. Beim Umklappen um die Symmetrieachse lassen sich solche Figuren vollständig zur Deckung bringen.

Auch die vier Konstruktionen, die bei der Darstellung der Straßenkreuzung angefertigt werden (Abb. 98 bis 101), haben die gleiche Gestalt und die gleiche Größe. Wenn wir diese 4 Dreiecke ausschneiden und übereinanderlegen, decken sie einander vollständig.

Erklärung:

Figuren heißen deckungsgleich oder kongruent, wenn sie sich vollständig zur Deckung bringen lassen. Das Zeichen für Kongruenz ist $\cong$.

Achsensymmetrisch gelegene Figuren sind immer kongruent, doch befinden sie sich in einer besonderen Lage zueinander.

Beispiele für das Entstehen kongruenter Figuren:

Um bei Papierarbeiten mehrere gleichartige Stücke zu erhalten, legt man mehrere Blatt Papier übereinander und schneidet gemeinsam aus.

In der Druckerei werden mit jeder Druckform viele Seiten bedruckt.

In Bekleidungswerken werden beim Zuschneiden gleichzeitig die Teile für viele Oberhemden, Kleider usw. geschnitten, indem man viele Stoffbahnen übereinander legt.

Erklärung:

Seiten, Winkel oder Punkte, die beim Aufeinanderlegen kongruenter Figuren einander decken, nennt man **gleichliegend** oder **einander entsprechend.**

Satz 17: In kongruenten Figuren sind gleichliegende Seiten und gleichliegende Winkel einander gleich.

Aufgaben

1. Falte ein Blatt Papier mehrfach zusammen!

a) Schneide daraus beliebige kongruente Figuren! Bezeichne gleichliegende Stücke!

b) Schneide aus solch gefaltetem Papier kongruente Dreiecke! Bezeichne gleichliegende Seiten und Winkel durch Buchstaben!

c) Schneide aus gefaltetem Papier kongruente Rechtecke! Bezeichne gleichliegende Stücke! Lege zwei Rechtecke so, daß sie achsensymmetrisch zueinander liegen!

2. Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Stücken $a = 3$ cm; $b = 4{,}2$ cm; $\gamma = 45°$! Konstruiere noch vier weitere Dreiecke aus den gleichen Stücken! Schneide die Dreiecke aus und lege sie aufeinander! Prüfe, ob sie kongruent sind! Kleine Fehler können durch ungenaues Zeichnen oder Messen entstanden sein.

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6$ cm; $b = 33$ mm; $\gamma = 106°$! Konstruiere noch ein Dreieck aus diesen Stücken und untersuche, ob die entstandenen Dreiecke kongruent sind! Miß die gegebenen Stücke in den konstruierten Dreiecken nach!

37. Die Kongruenzsätze

1) Bei der Konstruktion von Dreiecken konnten wir feststellen:

a) Wird für die Konstruktion nur ein Stück gegeben (in Abbildung 112 die Seite $AB = c$), so ergeben sich viele Möglichkeiten für die Lösung. Es wird kein bestimmtes Dreieck festgelegt.

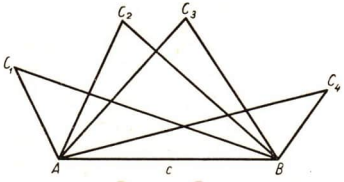


Abb. 112

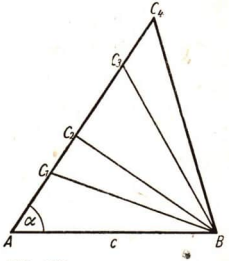


Abb. 113

b) Werden für die Konstruktion zwei Stücke gegeben (in Abbildung 113 die Seite $AB = c$ und der Winkel α), so ergeben sich ebenfalls viele Möglichkeiten. Es wird kein bestimmtes Dreieck festgelegt.

c) Werden für die Konstruktion drei Stücke gegeben, so ergibt sich bei besonderer Auswahl der Stücke ein ganz bestimmtes Dreieck. Bei wiederholter Konstruktion entstehen immer wieder kongruente Dreiecke. Es wird also ein bestimmtes Dreieck festgelegt.

Ferner haben wir durch Untersuchung erkannt, daß kongruente Dreiecke in den gleichliegenden Seiten und den gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (nach Satz 17). Folglich stimmen kongruente Dreiecke in allen sechs gleichliegenden Stücken überein. Wir wollen im folgenden feststellen, in welchen Stücken Dreiecke mindestens übereinstimmen müssen, damit ihre Kongruenz gewährleistet ist.

2) Bei der 1. Konstruktion von Dreiecken haben wir erfahren, daß die Lösung eindeutig ist, wenn die drei Seiten gegeben sind. Wir erhalten immer wieder Dreiecke von gleicher Gestalt und gleicher Größe, wenn wir die Kon-

struktion mit den gegebenen Stücken vornehmen. Die konstruierten Dreiecke sind also kongruent (Abb. 114).

I. Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (*sss*).

3) Bei der 2. Konstruktion von Dreiecken waren uns zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben. Auch hier haben wir feststellen können, daß die Aufgabe eine eindeutige Lösung ergibt. Werden mehrere Dreiecke aus diesen Stücken konstruiert, ausgeschnitten und übereinandergelegt, so decken sie einander vollständig. Sie haben gleiche Gestalt und gleiche Größe (Abb. 115).

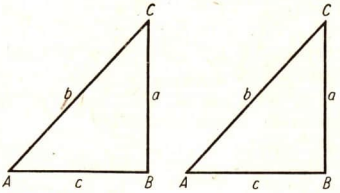


Abb. 114

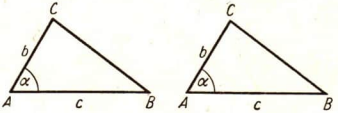


Abb. 115

II. Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (*sws*).

4) Die 3. Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln umfaßt zwei Aufgabenstellungen:

a) Gegeben sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (*wsw*). Die gegebenen Stücke legen das Dreieck eindeutig fest. Werden mehrere Dreiecke so konstruiert, stimmen sie in der Gestalt und der Größe überein (Abb. 116).

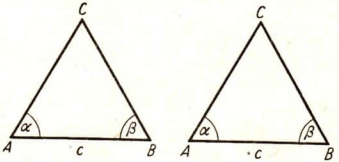


Abb. 116

b) Gegeben sind eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel (*sww*). Auch diese Konstruktion erweist sich als eindeutig. Sie kann auf die erste Aufgabenstellung zurückgeführt werden, indem aus der Summe der Innenwinkel der dritte Winkel berechnet wird (Abb. 117).

III. Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (*sww*).

5) Bei der 4. Konstruktion sind zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben. Mehrere mit diesen Angaben konstruierte Dreiecke stimmen sowohl in der Gestalt als auch in der Größe überein (Abb. 118). Wird jedoch der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist das Dreieck nicht eindeutig festgelegt.

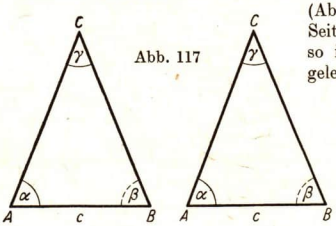


Abb. 117

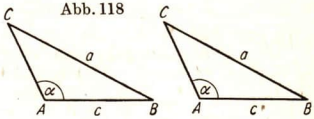


Abb. 118

IV. Kongruenzsatz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (*ssw*).

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck ABC und die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiecks (Abb. 119)!
   a) Es ist zu begründen, daß die Dreiecke ABC und CBF kongruent sind.
   Anleitung: Es entstehen Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.
   b) Nenne weitere Dreiecke dieser Konstruktion, die kongruent sind!

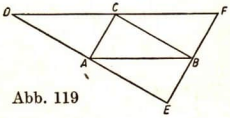


Abb. 119

2. Auf welchem Kongruenzsatz beruht die Verwendung des Zirkels beim Abtragen von Strecken?
3. Es wird festgestellt, daß zu einem Zeitpunkt die Sonnenstrahlen unter einem Winkel von $\alpha = 28°$ auf den Erdboden auffallen. Zu diesem Zeitpunkt konnte der Schatten eines Hochspannungsmastes mit 37 m Länge gemessen werden (Abb. 120).
   a) Rechne die Längenangabe nach einem selbstgewählten Maßstab um und konstruiere das Dreieck! Ermittle aus der Zeichnung die Höhe des Hochspannungsmastes!
   b) Welcher Kongruenzsatz findet Verwendung?

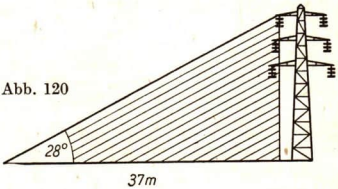


Abb. 120

38. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Konstruiere Dreiecke aus drei gegebenen Stücken!

a) $c = 5{,}2$ cm;	$b = 4{,}3$ cm;	$\alpha = 124°$
b) $a = 3{,}6$ cm;	$b = 4{,}8$ cm;	$c = 6{,}5$ cm
c) $b = 5{,}3$ cm;	$\beta = 46°$;	$\gamma = 105°$
d) $a = 4$ cm;	$b = 5$ cm;	$c = 6$ cm
e) $a = 3{,}8$ cm;	$c = 5{,}9$ cm;	$\gamma = 84°$

2. Welche Größe haben die Strecken bzw. Winkel, die in den Überlegungsfiguren (Abb. 121a bis d) durch Symbole gekennzeichnet sind?
Anleitung: Konstruiere die Dreiecke aus den angegebenen Stücken und entnimm die gesuchten Werte der Zeichnung!

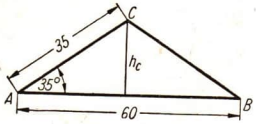


Abb. 121a

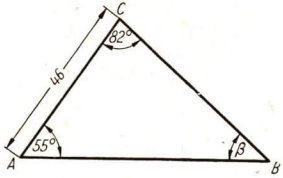


Abb. 121b

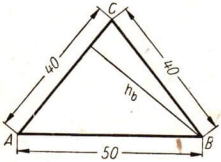


Abb. 121c

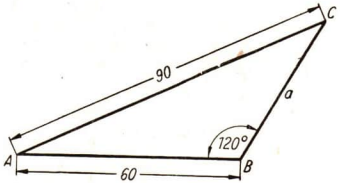


Abb. 121d

3. In einem Dreieck ABC sind gegeben:

a) a, **b)** γ, **c)** β, b.

Welche Stücke sind jeweils außer den gegebenen erforderlich, um das Dreieck genau zu bestimmen? (Es sind mehrere Möglichkeiten vorhanden. Berücksichtige auch die Besonderheit des IV. Kongruenzsatzes!)

4. Elektrische Leitungsmasten aus Holz haben teilweise Verstärkungen in Form von Holzverstrebungen. Auch Masten aus Stahl weisen Gitterkonstruktionen auf.

a) Skizziere derartige Freileitungsmasten aus deiner Umgebung und schraffiere die entstehenden Dreiecke farbig!

b) Welche Arten von Dreiecken sind in deinen Skizzen enthalten?

c) Baue aus Holzleisten oder Teilen eines Metallbaukastens verschiedenartige Leitungsmasten nach und erläutere, warum man dreieckförmige Verstrebungen verwendet!

5. Nenne andere Gegenstände, bei denen Dreiecke verwendet werden! (Vgl. Aufg. 4!)

6. Ein Turmdach von der Gestalt einer geraden regelmäßigen sechsseitigen Pyramide soll mit Metallplatten neu gedeckt werden. Die Kantenlänge der Grundfläche der Turmspitze beträgt 6,70 m, der Winkel an der Basis einer solchen Seitenfläche beträgt 74°.

a) Konstruiere die Zeichnung für eine Platte! Wähle den Maßstab 1:100!

b) Konstruiere die Symmetrieachse in der Zeichnung!

7. Eine LPG hat eine Pferdekoppel, die die Gestalt eines Dreiecks hat. Eine Seite wurde mit 125 m gemessen. Ihr gegenüberliegender Eckpunkt ist der Scheitel eines Winkels von 84°. Eine andere Seite des Dreiecks ist 96 m lang. Konstruiere die Zeichnung dieser Koppel im Maßstab 1:1000!

8. Drei Straßen schließen das Wiesenstück einer LPG ein. Ihre Schnittpunkte bezeichnen wir mit A, B und C. Der Straßenabschnitt AB hat eine Länge von 1,4 km, desgleichen der Abschnitt AC. Der Straßenabschnitt BC hat eine Länge von 0,7 km. Konstruiere das Dreieck, das von den Straßen gebildet wird, im Maßstab 1:20 000! Miß die Größe der Winkel!

9. Es soll die Entfernung zwischen zwei Punkten gemessen werden, zwischen denen ein Hindernis liegt. Von einem dritten Punkt wird die Entfernung zu den beiden Punkten und der Winkel gemessen, unter dem die beiden Punkte angepeilt werden (Abb. 122).

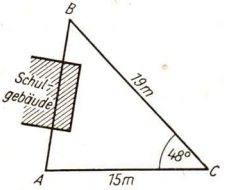


Abb. 122

a) Entnimm der Abbildung 122 die Maße, zeichne das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab und ermittle die Länge von AB!

b) Suche im Gelände zwei Punkte, zwischen denen ein Hindernis liegt! Ermittle die Entfernung der beiden Punkte!

10. Unter der „Sonnenhöhe“ versteht man den Winkel, den die Sonnenstrahlen mit einer waagerechten Ebene bilden. Die Sonnenhöhe kann

man folgendermaßen messen: Man stellt einen Stab senkrecht auf den Erdboden, mißt seine Länge und die Länge seines Schattens. Diese beiden Strecken schließen einen rechten Winkel ein. Nun kann man das Dreieck in einem geeigneten Maßstab konstruieren und aus der Zeichnung die Größe des Winkels, die Sonnenhöhe, entnehmen.

Miß die Sonnenhöhe um 13.00 Uhr, 14.00 Uhr, 15.00 Uhr, 16.00 Uhr und stelle die Werte in einer Tabelle zusammen!

11. Stelle den in der Abbildung 123 dargestellten Winkelpeiler aus einem Winkelmesser und einem Lot her! Mit diesem Gerät kann man zum Beispiel den Winkel messen, den die Peilrichtung zu einer Turmspitze mit der waagerechten Richtung einschließt.

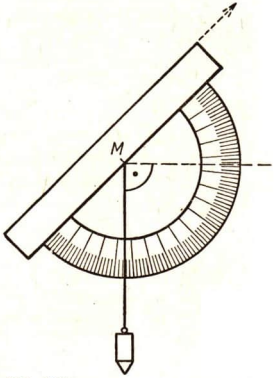


Abb. 123

12. Miß mit Hilfe des in der Aufgabe 11 beschriebenen Winkelpeilers den Winkel, unter dem du **a)** die obere Kante eines Fensters, **b)** die Spitze eines Turmes, **c)** die Spitze eines Telegrafenmastes in bezug auf die waagerechte Richtung siehst!

13. Die Höhe eines Baumes soll festgestellt werden. Wir legen eine Strecke AB fest, messen sie und bestimmen vom Punkt A aus die Größe des Winkels α (Abb. 124). Durch Konstruktion des Dreiecks ABC in einem geeigneten Maßstab können wir die Länge der Strecke BC ermitteln. Wenn wir zu dieser Länge noch die Augenhöhe addieren, so erhalten wir die Höhe des Baumes. Entnimm der Abbildung 124 die Maße, konstruiere das Dreieck in einem geeigneten Maßstab und ermittle die Höhe des Baumes!

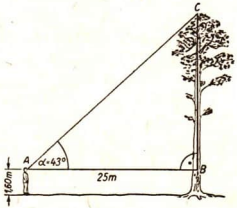


Abb. 124

14. Bestimme mit Hilfe des in der Aufgabe **13** beschriebenen Verfahrens die Höhe einer Fensterbrüstung über dem Erdboden! Kontrolliere das Ergebnis durch Messen eines heruntergelassenen Fadens!

39. Das Parallelogramm

1) Auch das Viereck finden wir in vielfacher Gestalt in der Natur vor. An Kristallen haben wir bereits Dreiecke betrachtet (Abb. 67). Aber auch Vierecke können die Begrenzungsflächen von Kristallen sein.

An Gegenständen des täglichen Lebens, an Maschinen und an Bauten finden wir das Viereck in verschiedener Form als Begrenzungsfläche. Sehen wir uns im Zimmer um, gehen wir mit offenen Augen durch den Patenbetrieb oder durch die Straßen! Wir können überall Flächen sehen, die die Gestalt eines Vierecks haben.

Das Viereck als Begrenzungsfläche an geometrischen Körpern ist uns bereits bekannt: zum Beispiel am Würfel und am Quader (Abb. 125). Diese Begrenzungsflächen sind Quadrate bzw. Rechtecke.

Erläutere die Eigenschaften von Quadrat und Rechteck!

Nenne Unterschiede zwischen beiden Flächen!

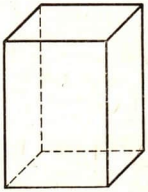


Abb. 125

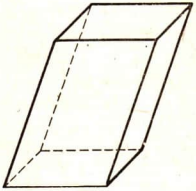


Abb. 126

2) An dem Körper in Abbildung 126 erkennen wir als seitliche Begrenzungsflächen andere Vierecke. Man nennt solche Vierecke **Parallelogramme.**

Erklärung:

Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in dem die gegenüberliegenden Seiten parallel verlaufen.

Die Abbildung 127 stellt ein Gelenkviereck dar, in dem durch belastete Fäden auch die Diagonalen gekennzeichnet werden.

Fertige aus Pappstreifen, Holzleisten oder Teilen eines Metallbaukastens ein bewegliches Rechteck (Gliedervierecк) an! Verschiebe das Modell seitlich! Was kannst du über die Seiten und Winkel des Parallelogramms aussagen? Vergleiche Rechteck und Parallelogramm!

Die Abbildung 128 zeigt ein Parallelogramm mit den vier Innenwinkeln α, β, γ, δ.

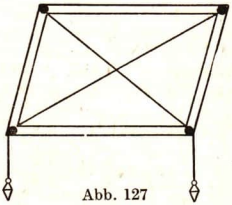


Abb. 127

Verlängert man die Parallelogrammseiten über die Eckpunkte hinaus (Abb. 129), so wird deutlich, daß im Parallelogramm Winkel an geschnittenen Parallelen auftreten. Die Winkelpaare α und β, β und γ, γ und δ, δ und α sind entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen. Entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen betragen zusammen 180°.

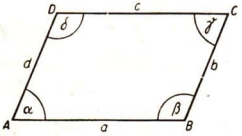


Abb. 128

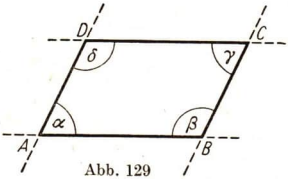


Abb. 129

Satz 18: Im Parallelogramm ist die Summe je zwei benachbarter Winkel 180°.

Wir wollen die gegenüberliegenden Winkel und Seiten im Parallelogramm näher untersuchen. Eine Diagonale teilt das Parallelogramm in zwei Dreiecke: Dreieck ABD und Dreieck BCD (Abb. 130). Nun können wir die Lehrsätze anwenden, die wir über das Dreieck gelernt haben.

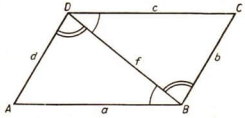


Abb. 130

Beide Dreiecke stimmen in der Seite BD überein (Diagonale). Beide Dreiecke stimmen aber auch in den dieser Seite anliegenden Winkeln überein. Winkel ABD ist genauso groß wie Winkel BDC; denn sie sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen (Satz 4). Auch Winkel ADB ist genauso groß wie Winkel DBC (Wechselwinkel). Da beide Dreiecke in einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind sie nach dem III. Kongruenzsatz kongruent. Kongruente Dreiecke stimmen in allen gleichliegenden Stücken überein. Es sind also im Parallelogramm $ABCD$ die Winkel α und γ sowie die Winkel β und δ paarweise gleich: $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$.

Aus der Kongruenz der Teildreiecke ergibt sich auch, daß die gegenüberliegenden Seiten gleich sind: $AD = BC$; $AB = CD$.

Satz 19: Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel gleich groß.

Satz 20: Im Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Seiten (Gegenseiten) einander gleich.

3) Die Abbildung 131 zeigt ein Parallelogramm, in dem beide Diagonalen eingezeichnet sind. Die Diagonalen schneiden einander im Punkt E. Diesen Schnittpunkt der Diagonalen nennen wir den **Symmetriepunkt** oder auch den Mittelpunkt des Parallelogramms (Abb. 132).

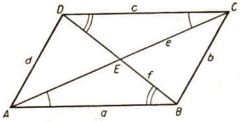


Abb. 131

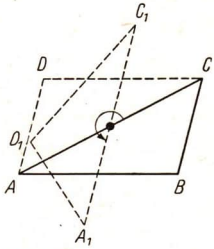


Abb. 132

Die Diagonalen zerlegen das Parallelogramm in vier Teildreiecke, von denen je zwei kongruent sind:
$\triangle ABE \cong \triangle DEC$, $\triangle AED \cong \triangle CEB$.
Auf die Kongruenz der Dreiecke ABE und DEC schließen wir aus folgender Übereinstimmung:

$AB = DC$ (als Gegenseiten im Parallelogramm),
$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECD$ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen),
$\sphericalangle EBA = \sphericalangle EDC$ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).

Die Dreiecke sind also nach dem III. Kongruenzsatz (*wsw*) kongruent.

Weise nach, daß auch die Dreiecke AED und CEB kongruent sind!

Da in kongruenten Dreiecken gleichliegende Stücke gleich groß sind, gilt: $AE = EC$ und $DE = EB$.

Satz 21: Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

Zusammenfassung:

Das Parallelogramm hat folgende Eigenschaften:

a) Gegenseiten sind parallel zueinander.
b) Gegenseiten sind einander gleich.
c) Gegenüberliegende Innenwinkel sind einander gleich; je zwei benachbarte Winkel betragen zusammen 180°.
d) Die Diagonalen halbieren einander.

4) Da im Rechteck die Gegenseiten parallel sind, ist auch das Rechteck ein Parallelogramm. Folglich treffen auch die anderen Parallelogrammeigenschaften (Satz 19 und 20) für das Rechteck zu. Darüber hinaus zeichnet sich das Rechteck durch Besonderheiten aus (z. B. beträgt jeder Winkel 90°).

Das Rechteck ist ein besonderes Parallelogramm.

Stelle fest, ob das Quadrat ein Parallelogramm ist, und vergleiche die Eigenschaften von Quadrat und Parallelogramm!

5) Im Parallelogramm treten zwei verschiedene Höhen auf, die Abstände der beiden Parallelenpaare. In den Abbildungen 133 und 134 wurden die verschiedenen Höhen mit h_a bzw. h_b und die betreffenden Grundlinien mit a bzw. b bezeichnet.

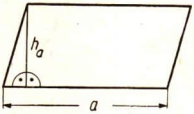


Abb. 133

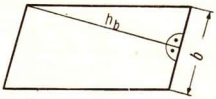


Abb. 134

Aufgaben

1. Die Abbildung 135 zeigt eine Briefwaage. Durch ihre Konstruktion wird erreicht, daß die Waagschale beim Wägen immer in waagerechter Richtung bleibt. Erläutere die Konstruktion! Welche geometrische Figur wurde bei der Konstruktion verwendet?

2. Ein Bücherregal ohne Rück- und Vorderwand hat im Querschnitt die Form eines Rechtecks. Da es schon sehr alt ist, verschiebt es sich seitlich. Was muß man tun, um die seitliche Verschiebung zu verhindern? Fertige eine Skizze an und begründe deinen Vorschlag!

3. Vergleiche die Eigenschaften

a) eines Rechtecks mit denen eines Parallelogramms,

b) eines Quadrates mit denen eines Parallelogramms!

In welchen Eigenschaften stimmen die Figuren überein? Welche Eigenschaften werden darüber hinaus für das Rechteck bzw. das Quadrat gefordert?

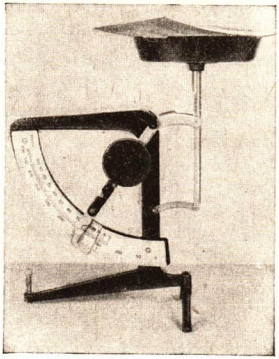


Abb. 135

40. Konstruktion von Parallelogrammen

Für die Konstruktion eines Parallelogramms benötigen wir nicht die Angabe aller Winkel und Seiten. Auf Grund der festgestellten Eigenschaften kommen wir schon mit weniger Stücken aus.

Beispiel: Die Platte für ein Maschinenteil hat die Form eines Parallelogramms. Aus der Zeichnung des Werkstücks entnehmen wir die folgenden Stücke: $a = 4{,}3$ cm; $b = 5{,}8$ cm; $\alpha = 80°$. Das Parallelogramm $ABCD$ ist zu konstruieren.

Wir überlegen: Aus der Überlegungsfigur entnehmen wir (Abb. 136a), daß uns mit den beiden Seiten zugleich auch die anderen beiden Seiten gegeben sind (Satz 20). Aus der Angabe des Winkels α können die anderen Winkel errechnet werden.

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = a = 4{,}3$ cm. Dann trage ich an AB in A Winkel $\alpha = 80°$ und in B Winkel $\beta = 100°$ an. Danach schlage ich um A und B Kreisbögen mit dem Radius $b = 5{,}8$ cm. Der Kreisbogen um A schneidet den freien Schenkel von α in D, und der Kreisbogen um B schneidet den freien Schenkel von β in C. Ich verbinde C mit D und erhalte das verlangte Parallelogramm $ABCD$ (Abb. 136b).

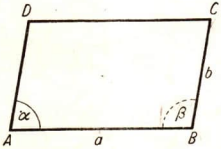


Abb. 136a

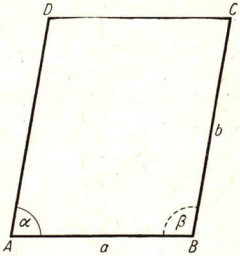


Abb. 136b

Aufgaben

1. Berechne aus dem gegebenen Winkel alle Winkel des Parallelogramms!

a) $\alpha = 63°$ **b)** $\gamma = 112°$ **c)** $\alpha = 94°$ **d)** $\beta = 120°$ **e)** $\delta = 90°$

2. Konstruiere aus den gegebenen Stücken ein Parallelogramm $ABCD$!

a) $a = 5$ cm	**b)** $a = 3{,}8$ cm	**c)** $c = 4{,}9$ cm	**d)** $a = 5{,}4$ cm
$b = 6{,}5$ cm	$b = 4{,}9$ cm	$d = 3{,}2$ cm	$d = 6$ cm
$\alpha = 62°$	$\beta = 112°$	$\gamma = 78°$	$\delta = 142°$

3. Konstruiere aus den gegebenen Stücken ein Parallelogramm!

a) $a = 5$ cm	**b)** $a = 5$ cm	**c)** $a = 5$ cm	**d)** $b = 6$ cm
$b = 6$ cm	$e = 4$ cm	$e = 8$ cm	$e = 12$ cm
$e = 4$ cm	$\beta = 45°$	$f = 6{,}4$ cm	$f = 5$ cm

e) $a = 5{,}2$ cm
$e = AC = 5{,}9$ cm
$h_a = 3{,}1$ cm

f) $a = 2{,}3$ cm
$b = 4{,}9$ cm
$h_a = 4{,}2$ cm

g) $e = AC = 6{,}4$ cm
$f = BD = 3{,}4$ cm
$h_a = 2{,}0$ cm

Gib zu **a)**, **d)** und **g)** je eine Konstruktionsbeschreibung!

4. Bilde selbst 3 Aufgaben, indem du Maße für drei Stücke im Parallelogramm bestimmst!

5. Besorge dir im Patenbetrieb Maße von Werkstücken, die die Gestalt eines Parallelogramms haben, und konstruiere die Zeichnung dazu im geeigneten Maßstab!

41. Das Trapez

1) Die Abbildung 137 zeigt einen Papierkasten. Seine Seitenwände bilden Vierecke, die uns noch nicht bekannt sind. Auch der in Abbildung 138 dargestellte geometrische Körper hat als Seitenflächen solche Vierecke. Man nennt diese Vierecke **Trapeze.**

Welche Eigenschaften der Trapeze kannst du beim Betrachten der Abbildungen 137 und 138 feststellen?

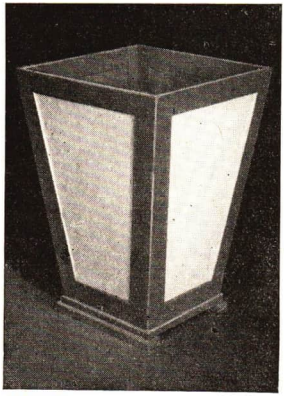


Abb. 137

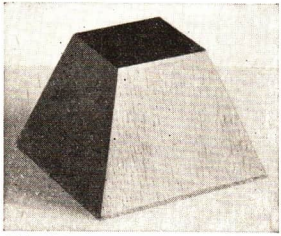


Abb. 138

Erklärung:

Ein Trapez ist ein Viereck, in dem zwei Seiten zueinander parallel liegen.
Die Abbildungen 139 und 140 zeigen verschiedene Trapeze.

Abb. 139

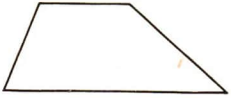
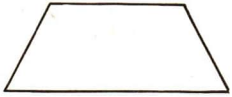


Abb. 140



Die parallelen Seiten eines Trapezes heißen **Grundseiten**, und zwar gibt es eine kleine Grundseite und eine große Grundseite.

Die Seiten, die nicht parallel zueinander sind, nennen wir **Schenkel** des Trapezes. Sind diese Schenkel einander gleich, dann sprechen wir von einem **gleichschenkligen Trapez** (Abb. 140).

Der Abstand der parallelen Seiten heißt **Höhe** des Trapezes.

Im Trapez in der Abbildung 141 wurde an zwei verschiedenen Stellen die Höhe eingezeichnet (Strecke EF bzw. GH).

2) Ein gleichschenkliges Trapez erhält man, wenn in einem gleichschenkligen Dreieck eine Parallele zur Basis eingezeichnet wird (Abb. 142). Fällen wir im Dreieck ABC das Lot von C auf die Basis, so

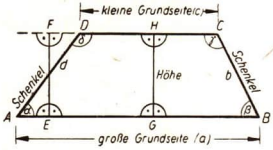


Abb. 141

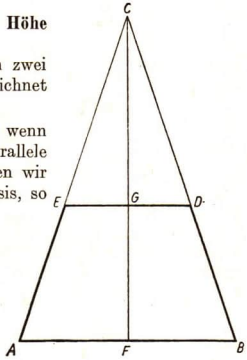


Abb. 142

entstehen gemäß den bekannten Symmetrieeigenschaften im gleichschenkligen Dreieck zwei kongruente Teildreiecke. Auch die Teilflächen des gleichschenkligen Trapezes $AFGE$ und $FBDG$ sind kongruent.

Führe die unter 2) beschriebene Konstruktion durch! Schneide das Trapez aus und falte es um die Symmetrieachse!

Vergleiche die Größe der Strecken EG und DG bzw. AF und BF sowie die Größe der Winkel mit den Scheitelpunkten A und B bzw. E und D!

Satz 22: Das gleichschenklige Trapez ist achsensymmetrisch.
Die Symmetrieachse halbiert die Grundseiten und steht auf ihnen senkrecht.
Die Innenwinkel an den Endpunkten der großen Grundseite sind einander gleich. Entsprechend sind die Innenwinkel an den Endpunkten der kleinen Grundseite einander gleich.

3) Die Erklärung des Trapezes trifft auch auf das Parallelogramm zu. Im Parallelogramm sind darüber hinaus auch die anderen beiden gegenüberliegenden Seiten parallel. Das Parallelogramm ist ein besonderes Trapez.

4) Für die Konstruktion eines Trapezes benötigen wir auf Grund seiner Eigenschaften wiederum nicht alle Winkel und Seiten.

Beispiel: Es soll ein Damm mit einem trapezförmigen Querschnitt gebaut werden (Abb. 143). Die Dammsohle soll 14,40 m breit sein, beide Böschungslängen betragen 8,40 m, und beide Böschungswinkel werden mit 42° angegeben. Die Konstruktion der Zeichnung ist anzufertigen im Maßstab 1 : 300.

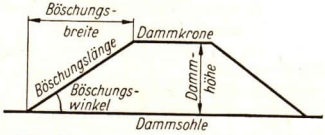


Abb. 143

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne Seite $AB = a = 4{,}8$ cm (Abb. 144). Dann trage ich an AB in A und B den Winkel $\alpha = 42°$ an (gleichschenkliges Trapez). Um A und B schlage ich Kreisbögen mit dem Radius $d = 2{,}8$ cm. Die Kreisbögen schneiden die freien Schenkel der Basiswinkel in C und in D. Ich verbinde C mit D und erhalte das verlangte gleichschenklige Trapez $ABCD$.

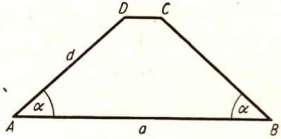


Abb. 144

Aufgaben

1. Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez aus den folgenden gegebenen Stücken: $a = 5{,}2$ cm; $b = 3{,}8$ cm; $\alpha = 73°$! (AB parallel zu CD). Konstruiere die Symmetrieachse und untersuche die Symmetrieeigenschaften des Trapezes!

2. Konstruiere ein Trapez aus den gegebenen Stücken $a = 5$ cm, $d = 3{,}4$ cm, $\alpha = 80°$, $\beta = 60°$!
Beschreibe die Konstruktion!

3. Die Abbildung 145 zeigt die Balkenkonstruktion an einer Brücke. Entnimm der Zeichnung die Maße und konstruiere sie! Welche Figuren erkennst du an der Zeichnung?

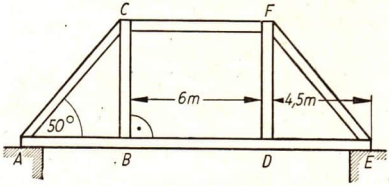


Abb. 145

4. Für den Bau eines Dammes ist eine Zeichnung herzustellen. Es sind die folgenden Stücke bekannt: Dammsohle 13 m, Dammkrone 4 m, Dammhöhe 3,4 m (Abb. 143). Fertige die Konstruktion im geeigneten Maßstab an! (Bedenke: Die Höhe kann überall eingezeichnet werden!)

5. Gräben und Kanäle haben im allgemeinen als Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez (Abb. 146). Die Angaben für die folgenden Kanalbauten sind vorhanden:

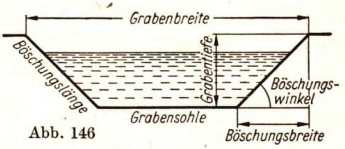


Abb. 146

a) Grabenbreite 5,4 m, Grabentiefe 2,6 m, Böschungslänge 3,2 m;
b) Grabensohle 3,2 m, Grabentiefe 2,2 m, Böschungswinkel 52°.

Fertige die Konstruktionszeichnungen an!
Gib eine Konstruktionsbeschreibung!

6. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ aus den folgenden Stücken! (AB ist parallel zu CD, wir schreiben $AB \parallel CD$.)

a) $c = 4{,}5$ cm; $h = 3{,}0$ cm; $\alpha = 85°$; $\beta = 80°$
b) $a = 5{,}0$ cm; $b = 3{,}3$ cm; $c = 2{,}2$ cm; $h = 3{,}0$ cm
c) $a = 5{,}0$ cm; $d = 4{,}0$ cm; $c = 3{,}0$ cm; $\alpha = 80°$
d) $a = 5{,}0$ cm; $b = 3{,}0$ cm; $c = 4{,}0$ cm; $e = AC = 3{,}3$ cm
e) $a = 6{,}0$ cm; $b = 4{,}0$ cm; $c = 4{,}5$ cm; $f = BD = 6{,}0$ cm
f) $a = 4{,}0$ cm; $d = 3{,}5$ cm; $e = AC = 5{,}5$ cm; $f = 3{,}0$ cm

Gib zu Aufgabe **f)** eine Konstruktionsbeschreibung!

7. Durch den Bau eines Entwässerungsgrabens soll ein Moor trockengelegt werden. Der Graben soll eine Grabensohle von 3,5 m, eine Grabentiefe von 2,3 m und einen Böschungswinkel von 60° haben. Der Querschnitt ist zu konstruieren.

8. Auf einer Blechtafel ist das in der Abbildung 147 gezeichnete Werkstück anzureißen. Entnimm der Abbildung die Maße und fertige die Zeichnung an!
Anleitung: Zerlege die Zeichnung in dir bekannte Figuren und konstruiere entsprechend! Hilfslinien ziehe dünn aus! In technischen Zeichnungen werden alle Längen in Millimetern angegeben!

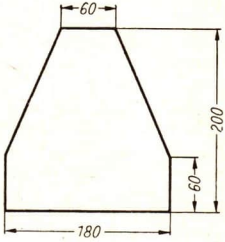


Abb. 147

42. Das Drachenviereck und der Rhombus

1) Bei einem Drachen, wie ihn die Abbildung 148 zeigt, sind jeweils zwei benachbarte Seiten gleich lang. Ein Viereck, für das diese Voraussetzung gilt, nennt man **Drachenviereck.**

Erklärung:

Ein Drachenviereck ist ein Viereck, in dem je zwei benachbarte Seiten gleich lang sind.

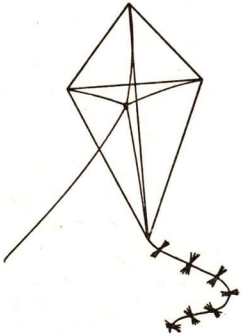


Abb. 148

Wird diese Bedingung für ein Drachenviereck auch von anderen dir bereits bekannten Vierecken erfüllt?

Ist das Drachenviereck eine achsensymmetrische Figur?

In dem Drachenviereck in Abbildung 149 sind die Seiten $AB = a$ und $BC = b$ sowie die Seiten $AD = d$ und $DC = c$ paarweise gleich lang. Die Strecken $AC = e$ und $BD = f$ sind Diagonalen im Viereck $ABCD$.

Die Diagonale $BD = f$ zerlegt das Drachenviereck in zwei kongruente Dreiecke.

Beweise die Kongruenz der Dreiecke ABD und BCD!

Da in kongruenten Dreiecken gleichliegende Stücke einander gleich sind, gilt: $\alpha = \gamma$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB$ und $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$. Das bedeutet, daß die Diagonale f die Winkel β und δ halbiert.

Die Diagonale $AC = e$ zerlegt das Drachenviereck in Abbildung 149 in zwei gleichschenklige Dreiecke. In beiden gleichschenkligen Dreiecken ist $BD = f$ die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze und damit Mittelsenkrechte zur Basis sowie Symmetrieachse. Daraus ergibt sich:

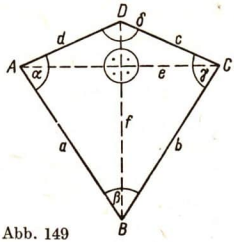


Abb. 149

Satz 23: Im Drachenviereck stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

Zeichne ein Drachenviereck, in dem die Seiten $AB = a$ und $AD = d$ sowie die Seiten $BC = b$ und $CD = c$ paarweise gleich sind. Untersuche diese Figur in gleicher Weise und ermittle, welche Diagonale gleichzeitig Symmetrieachse ist!

2) Die Abbildung 150 stellt ein weiteres Viereck, einen **Rhombus**, dar.

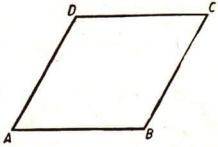


Abb. 150

Erklärung:

Ein Rhombus ist ein Viereck, in dem alle Seiten gleich lang sind.

Wir lernten bereits ein Viereck kennen, bei dem die gegenüberliegenden Seiten gleich sind, das Parallelogramm. Beim Rhombus sind sogar alle vier Seiten gleich; es handelt sich also um ein besonderes Parallelogramm. Darüber hinaus ist der Rhombus ein besonderes Drachenviereck; denn es sind nicht nur die benachbarten Seiten gleich. Der Rhombus vereinigt also alle Eigenschaften des Parallelogramms und des Drachenvierecks.

Nenne die Eigenschaften, die für den Rhombus zutreffen!

Zeichnet man in einem Rhombus die Diagonalen, so entstehen vier kongruente Dreiecke (Abb. 151). Die Dreiecke AED und ABE stimmen zum Beispiel in folgenden Stücken überein: $AD = AB$, $DE = EB$ und $AE = EC$. Sie sind also nach dem I. Kongruenzsatz (*sss*) kongruent. Entsprechendes gilt für die übrigen Dreiecke. Daher sind als gleichliegende Stücke die Winkel, die jeweils von den Diagonalen mit den Seiten des Rhombus eingeschlossen werden, einander gleich.

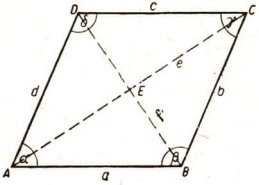


Abb. 151

Satz 24: Im Rhombus halbieren die Diagonalen die Winkel.

Aufgaben

1. Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus den folgenden Stücken!

a) $AB = a = 4{,}2$ cm; $AD = d = 3{,}0$ cm; $\sphericalangle DAB = \alpha = 120°$
b) $AB = a = 5{,}0$ cm; $BC = b = 2{,}8$ cm; $\sphericalangle ABC = \beta = 85°$
c) $AB = a = 3{,}2$ cm; $BC = b = 4{,}0$ cm; $AC = e = 5{,}5$ cm
d) $AB = a = 5{,}2$ cm; $AD = d = 2{,}0$ cm; $AC = e = 3{,}2$ cm

Hinweis: Zeichne jeweils zuerst eine Planfigur! Überlege dann, welche Diagonale gleichzeitig Symmetrieachse ist und wie groß die anderen Viereckseiten sind!

2. Konstruiere Rhomben aus den angegebenen Stücken!

a) $a = 6{,}4$ cm; $\alpha = 62°$ **b)** $b = 5{,}2$ cm; $\gamma = 130°$
c) $a = 4{,}0$ cm; $\alpha = 90°$ **d)** $d = 3{,}5$ cm; $e = 6{,}0$ cm

3. Rhomben werden als Gelenkrhomben zu den verschiedensten Zwecken verwendet. Die Abbildungen 152 und 153 zeigen eine Werkplatzlampe und ein Scherengitter.

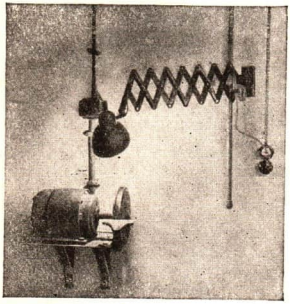


Abb. 152

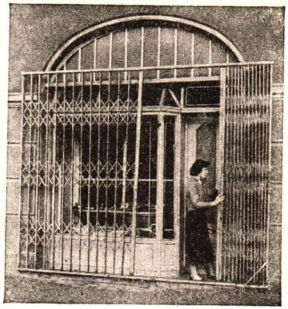


Abb. 153

a) Erläutere Bauweise und Vorteile der in den Abbildungen 152 und 153 dargestellten Einrichtungen! Begründe die Vorteile aus den Eigenschaften des Rhombus!

b) Nenne weitere Beispiele, in denen Gelenkrhomben verwendet werden!

4. Sind folgende Flächen achsensymmetrisch? Nenne die Anzahl der Symmetrieachsen!

a) Ungleichschenkliges Trapez **b)** Rhombus **c)** Rechteck
d) Gleichschenkliges Trapez **e)** Parallelogramm **f)** Quadrat

5. Stelle die Eigenschaften des Drachenvierecks und des Rhombus in einer Übersicht zusammen! (Vergleiche hierzu die Zusammenstellung für das Parallelogramm auf S. 157!)

43. Das unregelmäßige Viereck

1) Trapez, Parallelogramm, Drachenviereck, Rechteck, Rhombus und Quadrat unterscheiden sich in vielen Eigenschaften. Alle diese Figuren sind jedoch Vierecke. Es gibt aber noch andere Vierecke, die man **unregelmäßige Vierecke** nennt. Die Abbildung 154 stellt ein un-

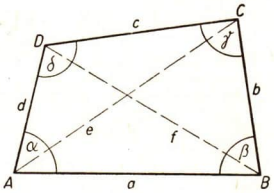


Abb. 154

regelmäßiges Viereck dar, in dem die vier Seiten (a, b, c, d), die vier Winkel (α, β, γ, δ) und die beiden Diagonalen ($AC = e$, $BD = f$) bezeichnet wurden. Die Diagonale e zerlegt das unregelmäßige Viereck in zwei Teildreiecke ABC und ACD. Da in beiden Teildreiecken die Winkelsumme 180° beträgt, ergibt sich für das Viereck in Abbildung 154 eine Winkelsumme von 360°.

2) Bei der Konstruktion von unregelmäßigen Vierecken verfährt man im allgemeinen so, daß zunächst ein Teildreieck konstruiert wird, wie es beim Einzeichnen einer Diagonalen entsteht. Dann konstruiert man den vierten Eckpunkt und verbindet mit den übrigen Punkten.

Beispiel: Ein Feld hat die Gestalt eines unregelmäßigen Vierecks mit den Seitenlängen $AB = 116$ m, $BC = 90$ m, $CD = 78$ m, $AD = 48$ m. Die Seiten AB und AD grenzen an zwei Wege, die sich bei A im Winkel von 100° kreuzen. Das Viereck $ABCD$ ist zu konstruieren (Maßstab 1 : 3 000).

Wir überlegen: Im Viereck sind alle vier Seiten und ein Winkel gegeben. In unsere Überlegungsfigur (Abb. 154) zeichnen wir die Diagonale $BD = f$. Wir beginnen mit der Konstruktion des Dreiecks ABD, da uns für diesen Teil des Vierecks zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Den Punkt C des Vierecks finden wir dadurch, daß wir um B einen Kreisbogen mit b und um D einen Kreisbogen mit c schlagen, die einander im Punkt C schneiden.

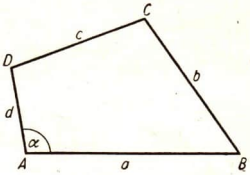


Abb. 155

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = a = 3{,}9$ cm. An AB trage ich in A den Winkel $\alpha = 100°$ an und schlage um A einen Kreisbogen mit dem Radius $AD = d = 1{,}6$ cm. Der Kreisbogen schneidet den freien Schenkel von α im Punkt D. Dann schlage ich um D einen Kreisbogen mit $CD = c = 2{,}6$ cm und einen Kreisbogen um B mit $BC = b = 3{,}0$ cm. Beide Kreisbögen schneiden einander im Punkt C. Ich verbinde C mit B und D und erhalte das verlangte Viereck $ABCD$ (Abb. 155).

Aufgaben

1. Errechne aus den drei gegebenen Viereckswinkeln jeweils den vierten!

a) $\alpha = 68°$; $\beta = 77°$; $\gamma = 115°$ **b)** $\alpha = 73°$; $\beta = 120°$; $\delta = 86°$
c) $\beta = 115°$; $\gamma = 120°$; $\delta = 95°$ **d)** $\alpha = 90°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 110°$
e) $\alpha = 100°$; $\gamma = 85°$; $\delta = 115°$ **f)** $\alpha = 200°$; $\beta = 45°$; $\gamma = 90°$

2. Löse die Aufgabe 1 durch Zeichnung!

3. Wieviel **a)** spitze, **b)** stumpfe, **c)** rechte, **d)** überstumpfe Winkel kann ein Viereck höchstens haben?

4. Es sind die folgenden Stücke für die Konstruktion eines Vierecks $ABCD$ gegeben.

a) $a = 4{,}5$ cm; $b = 4{,}0$ cm; $\alpha = 85°$; $\beta = 75°$; $\gamma = 99°$
b) $a = 4{,}2$ cm; $e = 5{,}2$ cm; $\alpha = 91°$; $\beta = 95°$; $\gamma = 99°$
c) $a = 4{,}3$ cm; $e = 5{,}2$ cm; $f = 4{,}9$ cm; $\alpha = 53°$; $\beta = 111°$

5. Aus einer Metallplatte, die ein unregelmäßiges Viereck darstellt, soll eine rechteckige Platte geschnitten werden. Die Platte hat die Seitenlängen $a = 35$ cm, $b = 48$ cm, $c = 31$ cm, $d = 23$ cm und den Winkel $\delta = 121°$.

a) Konstruiere das Viereck $ABCD$!
b) Zeichne danach die Schnittlinien ein, durch die aus der Platte ein möglichst großes Rechteck entsteht!

6. Konstruiere ein Viereck $ABCD$ aus den folgenden Stücken:
$a = 4{,}4$ cm; $b = 3{,}3$ cm; $e = 5{,}2$ cm; $f = 6{,}5$ cm; $\alpha = 60°$!
Beschreibe die Konstruktion!

44. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Nenne die Eigenschaften der in den Abbildungen 156 bis 164 dargestellten Vierecke!

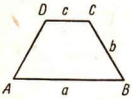


Abb. 156

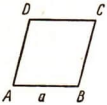


Abb. 157

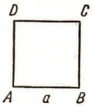


Abb. 158

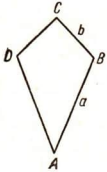


Abb. 159

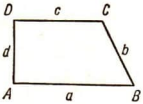


Abb. 160

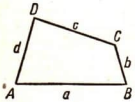


Abb. 161

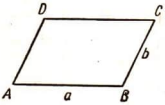


Abb. 162

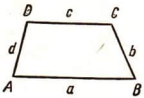


Abb. 163

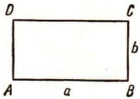


Abb. 164

2. Um welches Viereck handelt es sich bei den folgenden Bedingungen?
a) Alle Seiten sind gleich lang.
b) Alle Winkel sind einander gleich.
c) Die Diagonalen halbieren einander.
d) Zwei Gegenseiten sind zueinander parallel.
e) Die Gegenseiten sind zueinander parallel, und ein Winkel beträgt 90°.
f) Je zwei Gegenseiten sind einander gleich.
g) Je zwei benachbarte Seiten sind einander gleich.

3. Schreibe die Eigenschaften auf, die **a)** alle Vierecke, **b)** Trapez und Parallelogramm, **c)** Rhombus und Quadrat gemeinsam haben!

4. Am Rahmen eines Herrenfahrrades bilden die Verbindungsrohre zwischen Sattel, Tretlager und Lenker ein Viereck.
a) Um was für ein Viereck handelt es sich?
b) Miß die erforderlichen Stücke und konstruiere das Viereck im Maßstab 1 : 10!
c) Wie groß wäre der Winkel, der von dem oberen und dem unteren Verbindungsrohr gebildet würde, wenn man diese Rohre bis zum Schnittpunkt verlängerte?
d) Bestimme auch die Länge der oberen Verbindung vom Sattel bis zu dem Schnittpunkt!

Aus der sozialistischen Industrie

5. Versuche bei einem Gang durch den Patenbetrieb an den einzelnen Arbeitsplätzen Flächen und Körper festzustellen, die du benennen kannst!

6. Ein Werkstück, ein Bohrprisma (Abb. 165), hat als Querschnitt die uns zugewandte Fläche. Zerlege die Fläche so in vier Teilflächen, daß

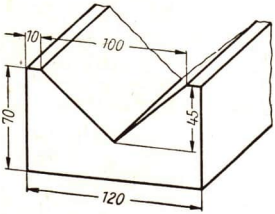


Abb. 165

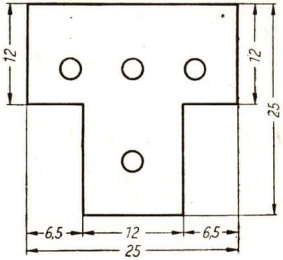


Abb. 166

vier Vierecke entstehen, von denen je zwei kongruent sind! Entnimm der Abbildung 165 die notwendigen Maße und konstruiere die in der Zeichnung angegebene Fläche!

7. Im Bauwesen finden T-Steine aus Ziegelsplittbeton Verwendung (Abb. 166). Konstruiere die Zeichnung, indem du die Fläche in zwei Figuren zerlegst! Die Öffnungen bleiben dabei unberücksichtigt. Entnimm die Maße der Zeichnung (Maßangaben in Zentimetern) und konstruiere im Maßstab 1 : 5!

Abb. 167

Aus dem Werkunterricht

8. Das Sägeblatt eines Fuchsschwanzes ist trapezförmig. Entnimm einem Werkzeug die Maße und konstruiere die Zeichnung des Sägeblattes! (Die Zahnung wird nicht berücksichtigt.)

9. Konstruiere die Seitenfläche eines Werkteils für die einfache Überblattung (Abb. 167)! Zerlege die Fläche in drei geeignete Figuren! Die Maße verschaffe dir von einem Werkteil aus dem Werkunterricht!

Aus der sozialistischen Landwirtschaft

10. Zwei Wiesenstücke der LPG haben die Gestalt unregelmäßiger Vierecke. Die Messung hat folgende Maße der Begrenzungsseiten bzw. Winkel ergeben:

a) $a = 130$ m; $b = 100$ m; $c = 110$ m; $d = 156$ m; $\beta = 108°$;
b) $a = 118$ m; $b = 176$ m; $c = 72$ m; $d = 128$ m; $\gamma = 115°$.

Konstruiere den Plan zu diesen Flächen im Maßstab 1 : 2 000!

11. Eine LPG beschloß, ein in der Nähe liegendes Sumpfgelände zu entwässern. Dazu sollen Entwässerungsgräben angelegt werden, die eine Grabensohle von 0,80 m, eine Grabentiefe von 1,8 m und einen Böschungswinkel von 53° haben werden. Der Querschnitt der Gräben ist ein gleichschenkliges Trapez. Konstruiere die Zeichnung für den Querschnitt im Maßstab 1 : 30!

12. Am Fluß will die LPG einen Damm aufschütten. Er wird 1,50 m hoch aufgeschüttet, die Dammsohle soll 7 m breit und die Dammkrone 5 m breit werden. Konstruiere den Querschnitt des Dammes in geeignetem Maßstab!

13. Konstruiere ein Parallelogramm, von dem die folgenden Stücke gegeben sind!

a) $a = 6{,}4$ cm;	$e = 8{,}2$ cm;	$\alpha = 90°$
b) $a = 4{,}1$ cm;	$e = 2{,}6$ cm;	$f = 4{,}2$ cm
c) $a = 4{,}5$ cm;	$b = 3{,}2$ cm;	$\alpha = 77°$
d) $b = 3{,}5$ cm;	$e = 4{,}5$ cm;	$h_a = 3{,}3$ cm

45. Vorbereitende Übungen

1. Nenne Längenmaße und ihre Umrechnungszahl!

2. Nenne Flächenmaße und ihre Umrechnungszahl!

3. Nenne die Eigenschaften **a)** von einem Quadrat und **b)** von einem Rechteck!

4. Was kannst du bei einem Quadrat und bei einem Rechteck berechnen?

5. Wo kommen Quadrate und wo kommen Rechtecke im täglichen Leben vor?

6. Verwandle in Quadratzentimeter: 29 mm^2; 2,7 mm^2; 4,5 dm^2; 2750 mm^2; 12,3 dm^2; 0,8 dm^2; 556 mm^2, 2 m^2; 0,03 m^2; 162,5 mm^2!

7. Verwandle in Quadratmeter: 9,24 a; 3005 dm^2; 3,61 ha; 72,84 a; 22,564 cm^2; 263,5 cm^2; 28,28 a; 3,5460 ha!

8. Verwandle in Hektar: 23 km^2; 1718 m^2; 3,8 km^2; 0,006 km^2; 428,5 m^2; 560 a; 13 000 m^2; 26,4 a; 3,1 km^2!

9. Verwandle in das nächstkleinere Raummaß: 4 m^3; 8 cm^3; 12 dm^3; 32 dm^3; 12,4 dm^3; 8,64 cm^3; 39,1 dm^3!

10. Verwandle in Kubikmeter: 5000 dm^3; 500 dm^3; 6 300 000 cm^3; 4 dm^3; 8,9 dm^3; 500 000 cm^3; 40,6 dm^3; 3007 dm^3!

11. Verwandle in das nächstgrößere Raummaß: 1000 dm^3; 4000 mm^3; 7864 cm^3; 500,6 dm^3; 3364 mm^3; 6892 dm^3!

12. Die Seite eines Quadrats mißt
a) 37 cm, **b)** 68,9 cm, **c)** 57 mm, **d)** 95,87 cm.
Wie groß sind Umfang und Inhalt?

13. Länge und Breite eines Rechtecks werden gemessen zu
a) 54 cm und 19 cm, **b)** 3,80 m und 68 cm, **c)** 17 cm und 38 mm.
Wie groß sind Umfang und Inhalt?

14. Der Flächeninhalt eines Quadrats soll aus seinem Umfang, der
a) 64 m, **b)** 180 cm, **c)** 42 m, **d)** 630 m, **e)** 1376 m
lang ist, berechnet werden.

15. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den folgenden Seiten?
a) 4,5 cm und 3,5 cm **b)** 52,2 cm und 37,9 cm

16. Berechne den Oberflächeninhalt und den Rauminhalt der Würfel mit den folgenden Kantenlängen!
a) 12 cm **b)** 7 mm **c)** 3,5 m **d)** 1,3 dm

17. Berechne den Oberflächeninhalt und den Rauminhalt der Quader mit den folgenden Kantenlängen!

a) 25 cm, 12 cm und 17 cm
b) 36 cm, 45 cm und 8 cm
c) 2 m, 0,8 m und 1,5 m
d) 5 dm, 20 cm und 4 dm

46. Flächeninhalt und Umfang des Parallelogramms

1) Wir wissen bereits, wie wir den Flächeninhalt von Figuren messen können. Wir legen die Figuren mit Flächeneinheiten, zum Beispiel Quadratzentimetern, aus und stellen fest, wie oft die Flächeneinheit in der Fläche der Figur enthalten ist. Daneben haben wir die Flächeninhalte des Rechtecks und Quadrats rechnerisch bestimmt.

In einem Rechteck bezeichnen wir im allgemeinen die Länge mit a und die Breite mit b. Daher können wir die Flächeninhaltsberechnung eines Rechtecks durch folgende Kurzform (Formel) ausdrücken:

$$A = a \cdot b$$

Da in einem Quadrat Länge und Breite gleich lang sind, können wir beide Seiten mit a bezeichnen. Wir merken uns die Formel:

$$A = a \cdot a \quad \text{oder} \quad A = a^2$$

2) Es soll der Flächeninhalt eines Parallelogramms berechnet werden. Wir zeichnen ein Parallelogramm $ABCD$ (Abb. 168a) und schneiden es aus. Die Höhe h von D auf g teilt das Parallelogramm in zwei Teilfiguren: in ein rechtwinkliges Dreieck und in ein rechtwinkliges Trapez.

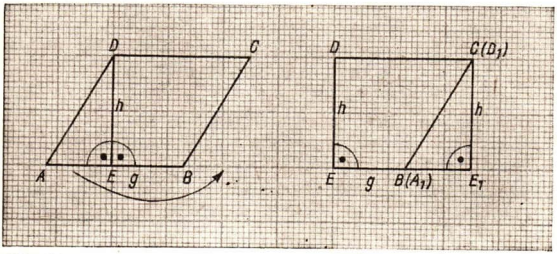


Abb. 168a Abb. 168b

Wir schneiden das Dreieck AED ab und setzen es entsprechend der Abbildung 168b an BC an. Dadurch haben wir das Parallelogramm in ein flächengleiches Rechteck mit der Länge g und der Breite h verwandelt. Mit Hilfe der Kongruenzsätze können wir überprüfen, ob die Verwandlung des

Parallelogramms in das Rechteck richtig ist. Wir müssen nachweisen, daß das Dreieck AED zum Dreieck BE_1C kongruent ist.

Es besteht folgende Übereinstimmung:

$AD = BC$ (als Gegenseiten im Parallelogramm)
$DE = CE_1$ (als Abstand der beiden Parallelen)
$\sphericalangle AED = \sphericalangle BE_1C$ (die Höhen stehen senkrecht auf den entsprechenden Gegenseiten)

Die Dreiecke sind also nach dem IV. Kongruenzsatz (*ssw*) kongruent.

Wir können also den Flächeninhalt des Parallelogramms wie den des Rechtecks berechnen, indem wir die Grundseite mit der zugehörigen Höhe multiplizieren. Man muß von der zugehörigen Höhe sprechen, da es im Parallelogramm zwei verschiedene Höhen gibt (Abb. 133 und 134).

Den Flächeninhalt eines Parallelogramms berechnet man, indem man die Grundseite und die zugehörige Höhe miteinander multipliziert.

$$A = g \cdot h$$

Zur Beachtung: Verwechsle niemals die Höhe h mit den Seiten b und d!

3) Die Abbildung 169 zeigt mehrere Parallelogramme über derselben Grundseite. Alle haben die gleiche Grundseite g und die gleiche zugehörige Höhe h. Für jedes Parallelogramm erhalten wir somit den gleichen Flächeninhalt.

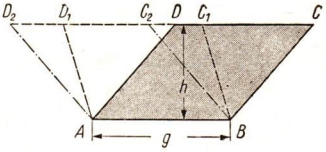


Abb. 169

Wir merken uns:

Parallelogramme mit gleicher Grundseite und mit gleicher Höhe sind flächengleich.

4) Um den Umfang eines Parallelogramms (Abb. 170) zu bestimmen, bilden wir die Summe aus den vier Seiten. Wegen der Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten ergibt sich:

$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

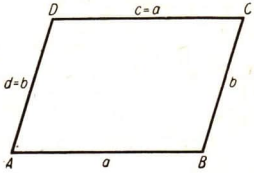


Abb. 170

Beispiel 1: In einem Kulturpark sollen mehrere Beete von der Form eines Parallelogramms bepflanzt werden. Damit der Gärtner die nötigen Pflanzen bereitstellen kann, muß er den Flächeninhalt eines Beetes kennen.

Die Grundseite des Parallelogramms beträgt 3,25 m, und die beiden parallelen Seiten haben einen Abstand von 2,15 m.

Gegeben: $g = 3{,}25$ m; $h = 2{,}15$ m.
Gesucht: A (in m²).

$A = g \cdot h$
$A = 3{,}25 \cdot 2{,}15\ \text{m}^2$ *Überschlag:* $3 \cdot 2 = 6$
$A = 6{,}9875\ \text{m}^2$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} 3{,}25 \cdot 2{,}15 \\ \hline 650 \\ 325 \\ 1625 \\ \hline 6{,}9875 \end{array}$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Beetes beträgt rund 7 m².

Beispiel 2: In einer Hühnerfarm soll ein Hühnerauslauf, der nahezu die Form eines Parallelogramms hat, mit Maschendraht neu eingefaßt werden. Wieviel Meter braucht man davon, wenn die Seiten 18,5 m beziehungsweise 12,8 m lang sind? (Abb. 170.)

Gegeben: $a = 18{,}5$ m; $b = 12{,}8$ m.
Gesucht: u (in m).

$u = 2\,a + 2\,b$
$u = 2 \cdot 18{,}5\ \text{m} + 2 \cdot 12{,}8\ \text{m}$
$u = 37{,}0\ \text{m} + 25{,}6\ \text{m}$
$u = 62{,}6\ \text{m}$

Ergebnis: Man braucht rund 63 m Maschendraht.

Aufgaben

1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms für

a) $g = 24$ cm;	$h = 19$ cm	**b)** $g = 36$ cm;	$h = 12{,}5$ cm
c) $g = 4{,}5$ cm;	$h = 2{,}4$ cm	**d)** $g = 38{,}5$ cm;	$h = 22{,}7$ cm
e) $g = 142{,}5$ cm;	$h = 82{,}4$ cm	**f)** $g = 4{,}5$ cm;	$h = 137$ cm
g) $g = 82{,}75$ m;	$h = 7{,}28$ m	**h)** $g = 7{,}5$ cm;	$h = 5{,}4$ cm?

2. Zeichne ein Parallelogramm mit den Seiten $a = 6$ cm und $b = 4$ cm, die einen Winkel von 60° einschließen! Bestimme die beiden Höhen und berechne den Flächeninhalt auf zweierlei Art! Vergleiche die beiden Ergebnisse!

3. Berechne aus den Maßen den Flächeninhalt der Parallelogramme!

a) $a = 4{,}8$ cm;	$h_a = 3{,}2$ cm	**b)** $c = 7$ cm;	$h_c = 4$ cm
c) $a = 5{,}2$ cm;	$h_a = 10{,}8$ cm	**d)** $b = 3{,}7$ cm;	$h_b = 4{,}1$ cm
e) $a = 3\frac{1}{2}$ m;	$h_a = 1\frac{3}{4}$ m	**f)** $d = 3{,}73$ m;	$h_d = 1{,}88$ m

4. Berechne den Umfang eines Parallelogramms, von dem gegeben sind:

a) $a = 13{,}6$ mm; $b = 29{,}7$ mm
b) $a = 154{,}8$ mm; $b = 237{,}5$ mm!

5. Warum kann man den Umfang eines Parallelogramms nicht berechnen, wenn eine Seite und die zugehörige Höhe gegeben sind?

6. Konstruiere viele flächengleiche Parallelogramme, die in einer Seite übereinstimmen!

Mathematische Schüleraufträge

1. Stelle aus vier gleich breiten Pappstreifen (zwei je 20 cm, zwei je 13 cm lang) und vier Drahtstiften ein Gelenkviereck her, so daß die gegenüberliegenden Pappstreifen gleich lang sind!
   a) Was für ein Viereck entsteht?
   b) Bewege das Viereck und vergleiche die Flächeninhalte der entstehenden Figuren!
   c) Bewege das Viereck und vergleiche die Umfänge der entstehenden Figuren!
   d) Welche Fläche entsteht, wenn ein Winkel 90° wird?
   e) Schreibe die gefundenen Ergebnisse in dein Heft!

2. Bewege dasselbe Gelenkviereck und vergleiche die entstehenden Flächeninhalte mit denen, die in Abbildung 169 zu erkennen sind! Was stellst du fest?

3. Konstruiere auf Zeichenkarton ein Parallelogramm aus $a = 14$ cm, $b = 10$ cm, $\beta = 50°$! Schneide das Parallelogramm aus und verwandle es nach Abbildung 168a und 168b in ein Rechteck!

47. Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks

1) Wir haben bereits erfahren, daß dreieckige Flächen sowohl in der Industrie als auch in der Landwirtschaft häufig auftreten. Wir wollen nun einen Rechenweg für die Berechnung des Flächeninhaltes von Dreiecken finden.

Die Abbildung 171 stellt zwei kongruente Dreiecke ABC bzw. $A_1B_1C_1$ dar. In beiden Dreiecken wurden zur Grundseite $AB = g$ die Höhen h eingezeichnet. Beide Dreiecke können nun so aneinandergelegt werden, wie es in

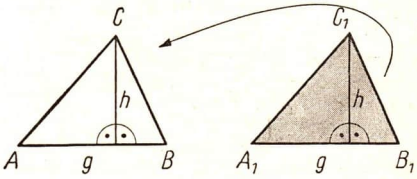


Abb. 171

der Abbildung 172 dargestellt wird. Es entsteht ein Parallelogramm mit der gleichen Grundseite g und der gleichen Höhe h.

Zeichne auf einem Blatt Papier ein beliebiges Dreieck ABC und trage die Höhe zur Seite AB ein! Lege ein zweites Blatt darunter und schneide das Dreieck aus! Du erhältst auf diese Weise zwei kongruente Dreiecke. Lege die Dreiecke entsprechend der Abbildung 172 aneinander!

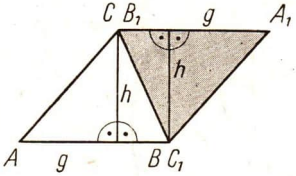


Abb. 172

Wir erkennen: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist halb so groß wie der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das dieselbe Grundseite g und dieselbe zugehörige Höhe h hat.

Da für das Parallelogramm die Formel $A = g \cdot h$ gilt, ergibt sich für das Dreieck die Formel $A = \frac{g \cdot h}{2}$.

Da es in jedem Dreieck drei verschiedene Höhen (h_a, h_b, h_c) gibt, muß wie beim Parallelogramm zur Berechnung der Dreiecksfläche jeweils die zugehörige Höhe bekannt sein. In den Abbildungen 104a, b und c auf Seite 144 wird verdeutlicht, welche Stücke zur Berechnung der Dreiecksfläche jeweils erforderlich sind. Es ergeben sich also drei verschiedene Formeln:

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2}; \qquad A = \frac{b \cdot h_b}{2}; \qquad A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Überprüfe auch diese Formeln durch Ausschneiden zweier kongruenter Dreiecke und entsprechendes Zusammensetzen zu Parallelogrammen!

Die drei verschiedenen Formeln zur Berechnung der Dreiecksfläche faßt man in einer allgemeinen Formel zusammen, in der die jeweilige Dreiecksseite g (Grundseite) und die zu dieser Seite gehörende Höhe h enthalten sind:

$$\boldsymbol{A = \frac{g \cdot h}{2}}$$

Den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet man, indem man eine Seite mit der zugehörigen Höhe multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

2) Die Abbildung 173 zeigt mehrere Dreiecke über derselben Grundseite. Alle haben die gleiche Grundseite g und die gleiche Höhe h. Für jedes Dreieck erhalten wir somit den gleichen Flächeninhalt.

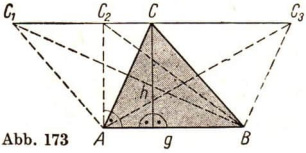


Abb. 173

Wir merken uns:

Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe sind flächengleich.

3) Den Umfang eines Dreiecks berechnen wir, indem wir die Summe der drei Seiten bilden.

$$u = a + b + c$$

Beispiel 1: Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Seite $a = 37$ cm und der zugehörigen Höhe $h_a = 18{,}4$ cm!

Gegeben: $a = 37$ cm; $h_a = 18{,}4$ cm.

Gesucht: A (in cm²).

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Überschlag:

$$\frac{40 \cdot 20}{2} = 400$$

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} 37 \cdot 9{,}2 \\ \hline 333 \\ 74 \\ \hline 340{,}4 \end{array}$$

$$A = \frac{37 \cdot 18{,}4}{2}\ \text{cm}^2$$

$$A = 37 \cdot 9{,}2\ \text{cm}^2$$

$$A = 340{,}4\ \text{cm}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt rund 340 cm².

Beispiel 2: Berechne den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 150 mm beziehungsweise 240 mm lang sind!

Gegeben: $a = 240$ mm; $b = 150$ mm.

Gesucht: A (in cm²).

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$A = \frac{240 \cdot 150}{2}\ \text{mm}^2$$

$$A = 120 \cdot 150\ \text{mm}^2$$

$$A = 18\,000\ \text{mm}^2$$

$$A = 180\ \text{cm}^2$$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks beträgt 180 cm².

Aufgaben

1. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges, **b)** ein rechtwinkliges, **c)** ein stumpfwinkliges Dreieck! Konstruiere durch zwei Eckpunkte die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten! Was für Figuren entstehen? Beweise die Flächengleichheit der entstandenen Dreiecke mit Hilfe der Kongruenzsätze!

2. Begründe mit Hilfe der Kongruenzsätze, daß der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ($\gamma = 90°$) durch $A = \frac{a \cdot b}{2}$ berechnet werden kann!

3. Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke mit den angegebenen Maßen!

a) $a = 37$ mm; $h_a = 42$ mm **b)** $c = 128$ mm; $h_c = 84$ mm
c) $b = 65$ mm; $h_b = 29$ mm **d)** $b = 60$ mm; $h_b = 50$ mm
e) $h_b = 43$ mm; $b = 20$ mm **f)** $a = 124$ mm; $h_a = 49$ mm
g) $h_c = 28$ mm; $c = 40$ mm **h)** $b = 54$ mm; $h_b = 45$ mm

4. Gib den Flächeninhalt der Dreiecke in den Aufgaben 3a bis h in Quadratzentimetern und in Quadratdezimetern an!

5. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 11$ cm, $b = 8$ cm und $c = 6$ cm und bestimme die Längen der drei Höhen aus der Zeichnung! Berechne den Inhalt aus jeder Dreiecksseite und der zugehörigen Höhe und vergleiche die Ergebnisse! Sprich das Ergebnis der Untersuchung in einem Satz aus!

6. Zeichne ein Dreieck aus $a = 60$ mm, $b = 80$ mm, $c = 90$ mm! Zeichne die drei Höhen und berechne den Flächeninhalt auf dreierlei Art! Vergleiche die Ergebnisse!

7. Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den folgenden Angaben!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
c	15 cm	64 cm	27,4 cm	7,28 m	36,7 cm	2,775 m
h_c	22 cm	55 cm	22,5 cm	87,5 m	44,8 cm	3,808 m

8. Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den folgenden Angaben!

a) $a = 4{,}5$ cm, $b = 6{,}4$ cm, $\gamma = 90°$
b) $c = 3$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 90°$
c) $a = 0{,}5$ cm, $c = 0{,}3$ cm, $\beta = 90°$
d) $a = 6{,}4$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $\gamma = 90°$

9. a) Der dreieckige Teil an der Giebelfläche eines Hauses ist 10,50 m breit und 2,75 m hoch. Berechne seinen Flächeninhalt!

b) Diese Fläche soll verputzt werden. Wie hoch werden die Kosten, wenn für das Verputzen 4,50 DM je Quadratmeter berechnet werden?

10. Im Werkunterricht wird ein Werkstück hergestellt, dessen Fläche in der Abbildung 174 dargestellt ist. Berechne den Flächeninhalt!

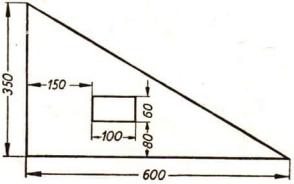


Abb. 174

11. Ein dreieckiges Feld (Seite 295 m, zugehörige Höhe 183 m) soll mit Kunstdünger gedüngt werden. Wieviel Dezitonnen werden benötigt, wenn je Hektar 3 Dezitonnen genommen werden sollen?

12. Zeichne viele Dreiecke, die in einer Seite und dem Flächeninhalt übereinstimmen!

13. Berechne den Umfang eines Dreiecks mit den angegebenen Maßen!

a) $a = 85$ mm; $b = 73$ mm; $c = 47$ mm
b) $a = 123$ mm; $b = 66$ mm; $c = 138$ mm

14. Berechne den Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks mit den angegebenen Maßen!

a) Schenkellänge 88 mm; Basislänge 139 mm
b) Schenkellänge 97 mm; Basislänge 28 mm

15. Berechne den Umfang eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seitenlänge

a) $s = 47$ mm, **b)** $s = 113$ mm, **c)** $s = 56$ mm beträgt!

Mathematische Schüleraufträge

1. Schneide zwei kongruente stumpfwinklige Dreiecke aus und lege sie wie in den Abbildungen 171 und 172 zusammen! Was für eine Figur entsteht?

2. Schneide zwei kongruente gleichseitige Dreiecke aus und lege sie wie in den Abbildungen 171 und 172 zusammen! Was für eine Figur entsteht?

3. Stelle im Werkunterricht verschiedene Dreiecke aus Blech oder aus Holzfaserplatte her! Miß mit der Schieblehre die nötigen Stücke und berechne die Flächeninhalte!

4. Stecke unter Verwendung von Fluchtstäben auf dem Schulhof ein Dreieck ab!

a) Schätze den Flächeninhalt!
b) Miß die Dreiecksseiten und notiere die gefundenen Maße!
c) Ermittle durch Konstruktion im geeigneten Maßstab eine Höhe des Dreiecks! Berechne die wahre Länge!
d) Berechne den Flächeninhalt und vergleiche mit dem geschätzten Ergebnis!

48. Flächeninhalt und Umfang des Trapezes

1) Kanäle und Dämme haben trapezförmige Querschnitte (Abb. 143, 144). Häufig haben Werkstücke und Führungsschienen trapezförmige Flächen oder Querschnitte. Wir wollen die Formel zur Berechnung der Flächeninhalte von Trapezen finden.

Zwei kongruente Trapeze (Abb. 175a und b) können zu einem Parallelogramm zusammengesetzt werden. Man verfährt dabei in der gleichen Weise wie beim Zusammensetzen zweier Dreiecke zu einem Parallelogramm (Abb. 176). Die Grundseite des entstandenen Parallelogramms beträgt $g = a + c$; die Höhe ist h.

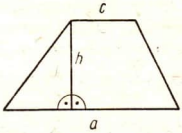


Abb. 175a

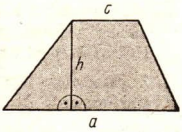


Abb. 175b

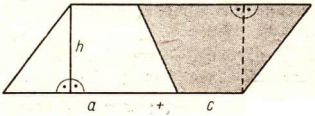


Abb. 176

Das Parallelogramm, das aus zwei kongruenten Trapezen gebildet wurde, hat demnach den Flächeninhalt:
$A = (a + c) \cdot h$.

Der Flächeninhalt des Trapezes ist halb so groß wie der dieses Parallelogramms.

$$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

Den Flächeninhalt eines Trapezes berechnet man, indem man die halbe Summe der Grundseiten mit der Höhe multipliziert.

Wir haben also auch hier Flächen, die wir noch nicht berechnen können (Trapeze), zu einer bereits berechenbaren Fläche (Parallelogramm) zusammengesetzt.

2) Um den Umfang des Trapezes zu berechnen, bilden wir die Summe der vier Seiten.

$$u = a + b + c + d$$

Beispiel: Wie groß ist der Flächeninhalt eines Trapezes, wenn die beiden Grundseiten $a = 64$ mm, $c = 48$ mm und ihr Abstand $h = 27$ mm betragen?

Gegeben: $a = 64$ mm; $c = 48$ mm; $h = 27$ mm.

Gesucht: A (in mm², umrechnen in cm²).

$$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

$$A = \frac{64 + 48}{2} \cdot 27 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{112}{2} \cdot 27 \text{ mm}^2$$

$$A = 56 \cdot 27 \text{ mm}^2$$

$$A = 1\,512 \text{ mm}^2$$

$$A = 15{,}12 \text{ cm}^2$$

Überschlag:
$50 \cdot 30 = 1\,500$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt rund 15 cm².

Beachte: Kürze niemals in Summen! Sondern: Addiere zuerst die beiden parallelen Seiten, so daß ein einfacher Bruch entsteht, den du dann kürzen kannst!

Aufgaben

1. Wie groß ist der Flächeninhalt der Trapeze mit folgenden Seiten?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
a	13 cm	25 cm	54 cm	127 cm	79 mm	8,45 m	35,97 m
c	9 cm	19 cm	46 cm	73 cm	58 mm	3,67 m	19,48 m
h	16 cm	15 cm	33 cm	59 cm	37 mm	5,43 m	23,75 m

2. Berechne den Flächeninhalt folgender Trapeze!

	große Grundseite	kleine Grundseite	Höhe
a)	6,0 cm	25 mm	1,00 dm
b)	2,50 dm	64,0 cm	280 mm
c)	2,00 m	13,0 dm	48 cm
d)	14 cm	27 cm	0,75 m
e)	1,30 m	2,40 m	1,80 m
f)	270 dm	36,0 m	18,0 m

3. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Deiches, dessen Sohle 44 m, dessen Krone 16 m und dessen Höhe 11 m betragen?

4. Welchen Flächeninhalt hat der trapezförmige Querschnitt eines Kanals, der oben 13,80 m, unten 10,40 m breit und der 3,80 m tief ist?

Mathematische Schüleraufträge

1. Zeichne auf Zeichenkarton fünf verschiedene Dreiecke (gleichseitig, gleichschenklig, rechtwinklig, spitzwinklig, stumpfwinklig)! Ziehe jeweils zu einer Seite eine Parallele innerhalb des Dreiecks und schneide die Figuren auseinander! Was für Flächen erhältst du?

2. Aus einem Blechstreifen sollen mehrere Trapeze ausgeschnitten werden. Wieviel Trapeze erhält man, wenn man für die Bearbeitung zwischen den einzelnen Formen 3 mm Zwischenraum zulassen muß?

a) Führe die Aufgabe praktisch durch, indem du Zeichenkarton verwendest! Entnimm die Maße der Abbildung 177!

b) Berechne den Flächeninhalt aller Trapeze und den Abfall!

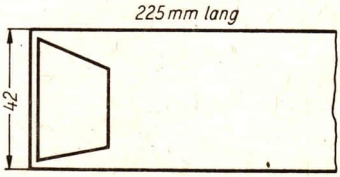


Abb. 177

3. Was für eine Fläche entsteht, wenn bei einem Trapez

a) die kleine und die große Grundseite gleich sind,

b) die kleine Grundseite die Länge Null hat?

49. Der Flächeninhalt von Vielecken

Die landwirtschaftliche Nutzfläche einer neu gegründeten LPG soll festgestellt werden. Aus der Flurkarte werden die einzelnen Flächen im Maßstab entnommen. Häufig haben sie eine unregelmäßige Form (Abb. 178a und b). Man kann den Flächeninhalt jedes beliebigen Vielecks durch Messen einiger Strecken und durch anschließende Rechnung ermitteln. Dazu wird das Vieleck in Figuren unterteilt, deren Flächeninhalt man schon berechnen kann. Es gibt zwei einfache Methoden.

a) Die Dreiecksmethode

Man zerlegt das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke (Abb. 178a). In diesen mißt man jeweils eine Seite und die zugehörige Höhe und berechnet so den Flächeninhalt der einzelnen Dreiecke. Die Summe der Teilflächen ergibt den Flächeninhalt des Vielecks.

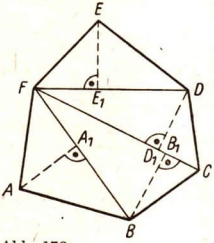


Abb. 178a

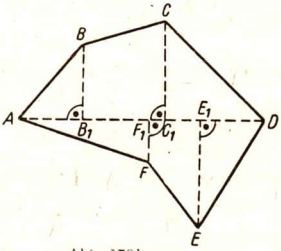


Abb. 178b

b) Die Trapezmethode

Man legt eine Diagonale durch das Vieleck und fällt von allen Eckpunkten die Lote auf diese Diagonale (Abb. 178b). Dadurch entstehen Trapeze und rechtwinklige Dreiecke. Die Lote bilden die kleinen und großen Grundseiten in den Trapezen beziehungsweise eine Seite in den rechtwinkligen Dreiecken. Die zu den einzelnen Teilfiguren gehörenden Höhen werden auf der Diagonalen gemessen. Man berechnet die Teilflächen und erhält als deren Summe den Flächeninhalt des Vielecks.

Aufgaben

1. Ermittle den Flächeninhalt der Vielecke in den Abbildungen 178a und b!

2. Ermittle den Flächeninhalt des in der Abbildung 179 dargestellten Flurstückes (Maße in m)!

3. Pause die Abbildung 180 auf durchsichtiges Papier! Bestimme den Flächeninhalt des Vielecks

a) nach der Dreiecksmethode,

b) nach der Trapezmethode!

Vergleiche die Ergebnisse!

4. Der Fußboden eines Krankenzimmers soll mit Fußbodenbelag be-

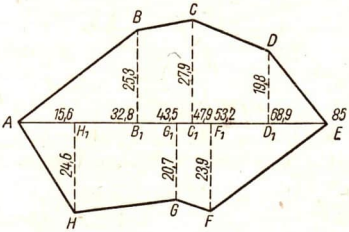


Abb. 179

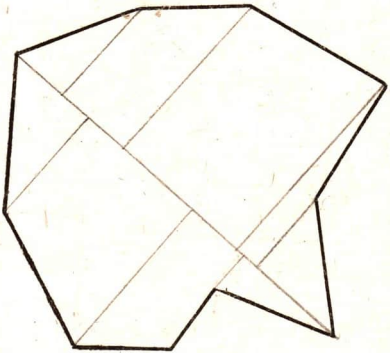


Abb. 180

legt werden. Die Grundfläche des Krankenzimmers zeigt die Abbildung 181.

a) Wieviel Quadratmeter Fußbodenbelag müssen verlegt werden?

b) Wieviel Meter Umrandungsleisten werden benötigt?

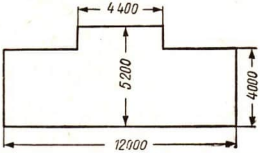


Abb. 181

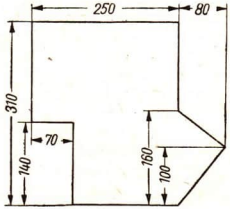


Abb. 182

5. Berechne den Flächeninhalt des in der Abbildung 182 gezeigten Bleches! (Die Maße sind in Millimetern angegeben.)

6. Die Abbildung 183 zeigt die Giebelfläche eines Hauses.

a) Berechne den Flächeninhalt der Giebelfläche!

b) Wieviel DM kostet das Verputzen dieser Fläche, wenn je Quadratmeter 4,50 DM berechnet werden?

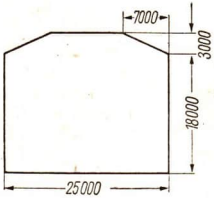


Abb. 183

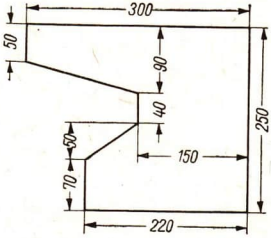


Abb. 184

7. Berechne den Flächeninhalt des in der Abbildung 184 dargestellten Bleches! (Die Maße sind in Millimetern angegeben.)

50. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Zusammenfassende Übersicht

Längenmaße	Flächenmaße	Körpermaße	Hohlmaße
Umrechnungszahl 10	Umrechnungszahl 100	Umrechnungszahl 1 000	Umrechnungszahl 1 000
km	km^2	—	—
100 m	ha	—	—
10 m	a	—	—
m	m^2	m^3	1 000 l = 10 hl
dm	dm^2	dm^3	l
cm	cm^2	cm^3	ml
mm	mm^2	mm^3	—
Hochzahl: 1	Hochzahl: 2	Hochzahl: 3	

Merke:

Strecken haben 1 Ausdehnung — Länge;
Flächen haben 2 Ausdehnungen — Länge und Breite;
Körper haben 3 Ausdehnungen — Länge, Breite und Höhe.

Aus der sozialistischen Landwirtschaft

1. Ein Kartoffelfeld liegt an der Kreuzung zweier Straßen, die einander unter einem spitzen Winkel schneiden. Es hat die Form eines Parallelogramms. Die größeren Seiten sind je 450 m lang, ihr Abstand voneinander beträgt 72 m.
   a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Feldes?
   b) Der Durchschnittsertrag wird mit 210 dt je ha angenommen. Mit wieviel Dezitonnen kann die Ernte vorausberechnet werden?

2. Neben einer Schule soll eine Kleinsportanlage geschaffen werden. Es steht ein Grundstück zur Verfügung, das die Form eines rechtwinkligen Trapezes hat (Maße: große Grundseite 65 m, kleine Grundseite 47 m,

Tiefe 28 m). Die Kleinsportanlage soll auch einen Volleyballplatz (8 m breit, 16 m lang) erhalten.

a) Entwirf eine Skizze!

b) Berechne den Flächeninhalt des ganzen Grundstückes!

c) Berechne den Flächeninhalt des Volleyballplatzes!

d) Berechne die restliche Fläche!

3. Ein Obstgarten hat die Form eines Parallelogramms. Seine Seiten sind 45 m und 65 m lang, der Abstand zweier gegenüberliegender Seiten beträgt 60 m.

a) Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1 000!

b) Wie groß ist die Gartenfläche?

c) Wieviel Quadratmeter Maschendraht mit einer Breite von 1,60 m benötigt man für die Einzäunung? (Runde auf volle 10 m^2!)

4. Von einem Feld wurden 192 dt Kartoffeln geerntet. Das Feld ist dreieckig; eine Seite ist 160 m lang, die gegenüberliegende Ecke ist 120 m von dieser Seite entfernt.

a) Entwirf eine Skizze!

b) Berechne den Flächeninhalt des Feldes!

c) Berechne den Hektarertrag an Kartoffeln!

5. Die Abbildung 185 zeigt den Grundriß einer Viehweide.

a) Miß die Seiten und berechne ihre wahre Größe!

b) Welche Fläche nimmt die Weide ein?

c) Wieviel Meter elektrischer Weidezaun werden für die Einfassung gebraucht?

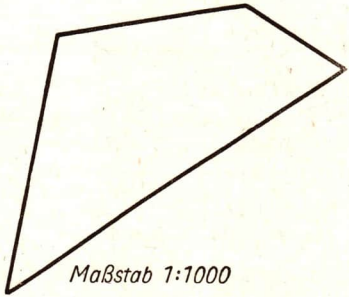


Abb. 185

Aus dem Bauwesen

6. An einem Tage stapelt eine Transportbrigade 80 000 (96 000, 124 000) Ziegel.

a) Berechne die Anzahl der Stapel, wenn 200 Ziegel (250 Ziegel) zu einem Stapel errichtet werden!

b) Die Seitenlänge der Grundfläche eines quadratischen Stapels beträgt 0,55 m. Welche Fläche muß auf der Baustelle für die Ziegel mindestens frei gehalten werden?

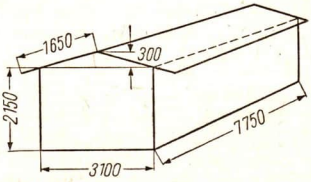


Abb. 186

7. Auf einem Baugelände soll ein Schuppen aus Brettern errichtet werden. Wieviel Quadratmeter Bretter werden dafür mindestens gebraucht, wenn die Fenster nachts durch Fensterläden geschlossen werden? Entnimm die Maße der Abbildung 186!

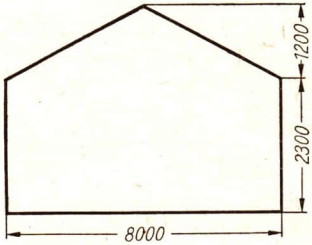


Abb. 187

8. Zeichne den Grundriß eurer Wohnung in selbstgewähltem Maßstab und berechne die gesamte Wohnfläche!

9. Die Giebelwand eines Lagerhauses (Abb. 187) soll mit Mörtel verputzt werden.

a) Wie groß ist die Giebelfläche?

b) Wieviel Kubikmeter Mörtel sind erforderlich, wenn für 1 Quadratmeter Fläche etwa 34 *l* gebraucht werden?

10. Der Fußboden einer Theaterbühne hat die Form eines Trapezes, die vordere Breite ist 12,5 m, die hintere 9,4 m lang. Die Bühne ist 8,1 m tief. Wieviel Quadratmeter sind zu dielen?

Aus der Metallindustrie

11. Ein dreieckiges Eisenblech ist 174 mm hoch, die Grundlinie beträgt 350 mm. Welche Fläche hat das Eisenblech (Ergebnis in Quadratzentimetern)?

12. Ein Eisenblech hat die Form eines Parallelogramms, die langen Parallelseiten sind 125 mm lang, ihr Abstand beträgt 73 mm. Berechne die Fläche in Quadratzentimetern!

13. Berechne den Querschnitt eines Führungsstückes! Entnimm die Maße der Abbildung 188!

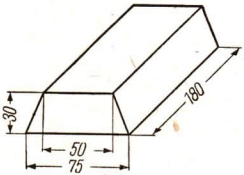


Abb. 188

14. In den Abbildungen 189 bis 192 werden die Querschnitte von Stahlträgern (Profilstählen) dargestellt. Berechne die Flächen aus den Maßangaben und bestimme den Maßstab, in dem die Stähle gezeichnet wurden!

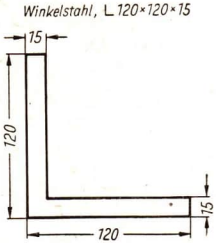


Abb. 189

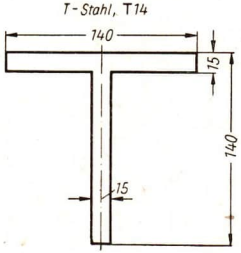


Abb. 190

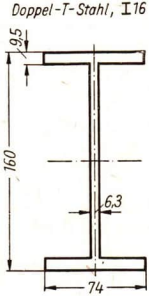


Abb. 191

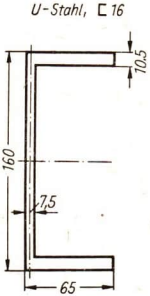


Abb. 192

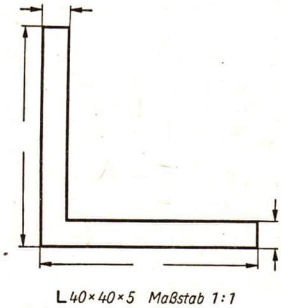
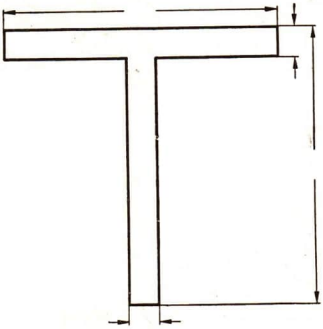


Abb. 193



T 10 Maßstab 1:2

Abb. 194

[20 Maßstab 1:3

Abb. 195

15. Stelle für die Abbildungen 193 bis 196 die Maße mit Hilfe des angegebenen Maßstabes fest! Berechne dann die Querschnittsflächen!

16. Berechne die Fläche des Stahlbleches, das in Abbildung 197 dargestellt wird! In technischen Zeichnungen werden alle Maße in Millimetern angegeben.

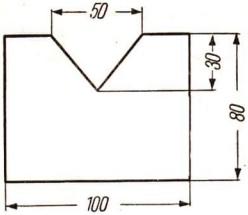


Abb. 197

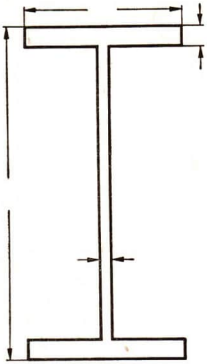


Abb. 196

I 12 Maßstab 1:2

17. Wie groß ist der Querschnitt der Schwalbenschwanzführung der Abbildung 198?

18. Es soll ein Werkzeugkasten aus Eisenblech hergestellt werden. Wieviel Quadratzentimeter Blech werden dazu benötigt? Entnimm die Maße der Abbildung 199! Der Henkel ist ein Streifen von 450 mm Länge und 50 mm Breite.

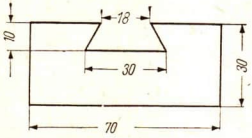


Abb. 198

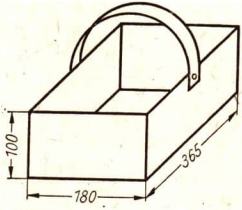


Abb. 199

Aus dem Werkunterricht und der Station „Junge Techniker"

19. Im Werkunterricht werden für die Demonstration am 1. Mai Transparente hergestellt. Wieviel Meter Holzleisten, wieviel Meter Rundstäbe und wieviel Meter Stoff (1,20 m breit) sind für die 12 Transparente erforderlich? Entnimm die Maße der Abbildung 200! Beachte: Die Ecken werden in einfacher Überplattung bearbeitet. Zum Befestigen muß vom Stoff an jeder Seite 10 cm zugegeben werden.

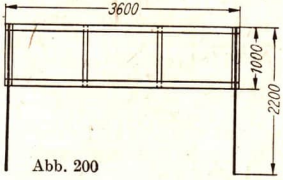


Abb. 200

Material: Holzleisten (25 mm × 40 mm)
Rundstäbe zum Tragen (50 mm ⌀)
Stoff (1,20 m breit)

20. Die Abbildung 201 stellt das Sägeblatt eines Fuchsschwanzes dar. (Die Zahnung wurde nicht berücksichtigt.)

Folgende Maße wurden festgestellt:

	a)	b)
a	110 mm	97 mm
c	45 mm	42 mm
h	400 mm	295 mm

Berechne den Flächeninhalt!

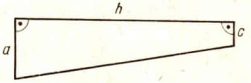


Abb. 201

21. Um an einem Segelflugmodell-Vergleichsfliegen in der Flugmodellklasse A 2 teilnehmen zu dürfen, mußt du ein Segelflugmodell anfertigen, bei dem die Fläche der Tragflügel und die Fläche des Höhenleitwerkes zusammen nicht mehr als 34 dm² Flächeninhalt aufweisen! Überprüfe an deiner Modellskizze (Abbildung 202), ob du am Wettbewerb teilnehmen darfst!

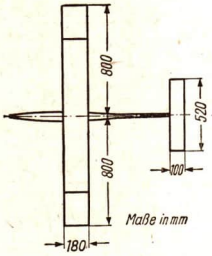


Abb. 202

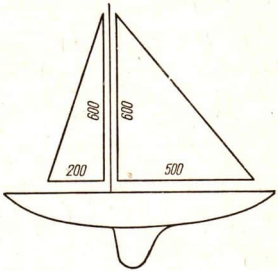


Abb. 203

22. Ähnliche Bestimmungen gelten auch beim Bau von Modellsegelbooten. In der Klasse G (für Anfänger) wirst du mit dem Bau von Bootskörpern vertraut gemacht. Die größte Länge des Bootes darf nicht mehr als 750 mm betragen. Die Segelfläche darf nicht größer als 21 dm² sein. Zur Segelfläche gehören zwei Segel, das Vorsegel und das Hauptsegel (Abbildung 203).

a) Zeichne die Segel im Maßstab 1 : 10!

b) Überprüfe, ob die Segelfläche den Wettbewerbsbestimmungen entspricht!

Mathematische Schüleraufträge

1. Beschaffe dir die Maße eines Normalformatziegels (NF 52) und miß an unverputztem Mauerwerk die durchschnittliche Fugenbreite!

a) Ermittle die fehlenden Maße für den Grundriß (Abb. 204) und fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 10 an!

b) In dieser Form soll ein Pfeiler für einen Zaun in Höhe von 12 Schichten gemauert werden. Welche Höhe hat der Pfeiler und wieviel Steine werden benötigt?

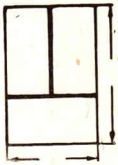


Abb. 204

2. Ermittle die fehlenden Maße für den Grundriß (Abb. 205) und fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 20 an!

Anleitung: Diagonal durchkreuzte Flächen stellen $\frac{3}{4}$-Ziegel dar. Für die Länge dürfen also nur $\frac{3}{4}$ der Länge eines ganzen Normalformatziegels in Rechnung gesetzt werden.

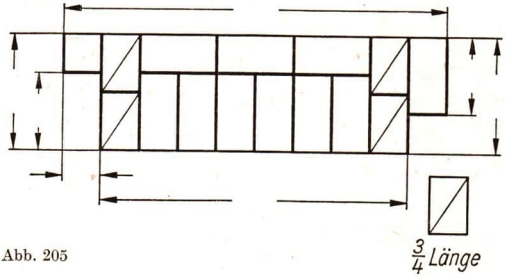


Abb. 205

3. Häufig wird mit den größeren Hohlblocksteinen gemauert, von denen verschiedene Formate (je nach Verwendungszweck) gebräuchlich sind.

a) Vergleiche die Maße des Hohlblocksteines, der in Abbildung 206 dargestellt ist, mit denen eines Normalziegels!

b) Wieviel Schichten Normalziegel werden durch 3 Schichten Hohlblocksteine ersetzt? (Denke daran, daß bei Normalziegeln mehr Fugen auftreten, die beim Vergleich zu berücksichtigen sind!)

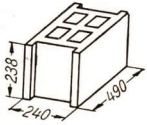


Abb. 206

	Länge	Breite	Höhe
Normalziegel			
Hohlblockstein (Zweikammerstein)			

4. Für das Leben und das Wachstum der Pflanzen haben die Blätter größte Bedeutung. Wir wollen feststellen, wie groß ungefähr der Inhalt der Fläche ist, die alle Blätter einer Pflanze einnehmen.

a) Lege von einer Balkon- oder Zimmerpflanze ein Blatt von mittlerer Größe auf Millimeterpapier, umreiße die Blattfläche und zähle die Fläche aus!

b) Bestimme den Inhalt der gesamten Fläche der Blätter!

c) Ist es wichtig, beim Auszählen des Ausgangsblattes die Quadratmillimeter zu berücksichtigen?

5. Bestimme die durchschnittlichen Blattgrößen von Eichen, Linden, Kastanien, Pappeln, Buchen, Birken und Platanen!
Ordne die Blattgrößen in einer Tabelle!

6. Beim Anlegen von Schonungen wird ein bestimmter Reihenabstand und ein Pflanzabstand eingehalten. Der Pflanzabstand ist die Entfernung von Pflanze zu Pflanze.

a) Ermittle bei einer Schonung den Reihenabstand und den Pflanzabstand!

b) Wieviel Pflanzen stehen auf 1 a? Kann die Zahl genau angegeben werden?

c) Bestimme die Länge und Breite einer kleineren Schonung durch Abschreiten und berechne die Fläche in Ar! Wieviel Pflanzen wurden ungefähr in dieser Schonung angepflanzt?

7. Wir wollen berechnen, wieviel Tonnen Papier für den Druck der neuen Mathematikbücher für die 6. Klasse (ohne Berücksichtigung des Einbandes) bereitgestellt werden mußten und welche Fläche diese Papiermenge einnähme.

a) Stelle fest, wieviel das Mathematikbuch ohne Einband wiegt! (Der Einband wiegt etwa 80 g.)

b) Wieviel Tonnen Papier wurden für die gesamte Auflage von 225 000 St. benötigt?

c) Berechne die Größe eines Blattes (in cm^2), sämtlicher Blätter des Buches (in m^2) und die Papiergröße der gesamten Auflage (in m^2)!

8. Stelle die Abmessungen verschiedener Flachfeilen fest und berechne jeweils die Arbeitsflächen und die Querschnittsflächen! Trage die Ergebnisse in eine Tabelle ein!

	Länge	Arbeitsfläche		Querschnittsfläche	
		Breite	Flächengröße	Höhe des Blattes	Flächengröße
1.					
2.					

9. Berechne die Blattgrößen der Sägen in einem Werkraum und stelle wieder eine Tabelle auf!

IX. Darstellende Geometrie

51. Der Aufriß

Wir stellten bereits Gegenstände durch einen Grundriß dar. Der Grundriß vermittelt uns die Umrisse des Körpers, die wir bei einem Blick von oben (senkrecht zur Bildtafel) wahrnehmen würden. Dabei wurden verdeckte Kanten durch Strichlinien gekennzeichnet.

Aus dem Grundriß können wir aber nicht auf die Höhe des Gegenstandes schließen. Zum Beispiel kann man aus den Grundrissen der beiden Häuser (Abb. 207) nicht ersehen, welche Höhe sie haben. Auch aus den Grundrissen der dreiseitigen Prismen (Abb. 208) kann man die Höhe nicht entnehmen. Deshalb werden Gegenstände, deren Gestalt und Größe aus dem Grundriß allein nicht hervorgeht, noch in einer Ansicht von vorn dargestellt. Diese

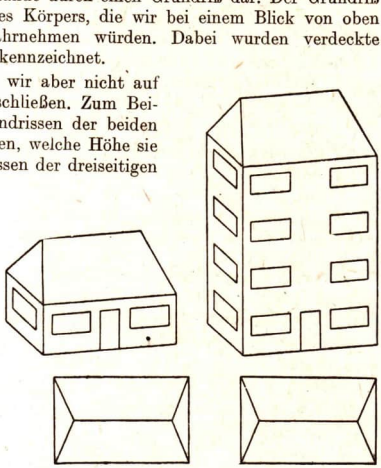


Abb. 207

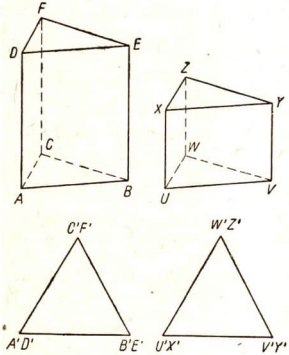


Abb. 208

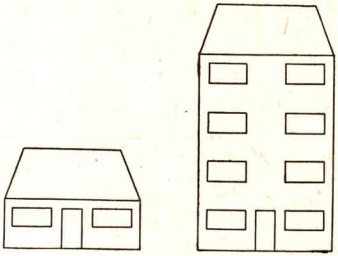


Abb. 209

Zeichnung heißt **Aufriß**. Die Abbildung 209 zeigt die Aufrisse der in der Abbildung 207 dargestellten Häuser.

Wir denken uns hinter dem Gegenstand eine ebene Fläche, die senkrecht zur Grundrißtafel steht, die **Aufrißtafel**. Im allgemeinen nimmt man an, daß sich die Gegenstände in einem bestimmten Abstand vor der Aufrißtafel befinden, diese also nicht berühren (Abb. 210). Der Aufriß wird mit den gleichen Buchstaben oder Ziffern wie das Original bezeichnet, nur werden diesen Bezeichnungen — im Unterschied zum Grundriß — zwei hochgestellte Striche hinzugefügt. Der Aufriß des Punktes A erhält also die Bezeichnung A'' (gesprochen: A-zwei-Strich). Von vorn sichtbare Körperkanten werden mit Vollinien, von vorn nicht sichtbare, verdeckte Kanten mit Strichlinien gezeichnet. Die Abbildung 211 zeigt die bezeichneten Aufrisse der in der Abbildung 208 dargestellten dreiseitigen Prismen.

Liegen Punkte, Linien oder Flächen eines Gegenstandes auf der Aufrißtafel, so fallen Bild und Original zusammen. Bei dem in der Abbildung 212 gezeigten Quader liegt die rückwärtige Kante DH auf der Aufrißtafel. Dies wird durch ein Gleichheitszeichen ausgedrückt: $D'' = D$; $H'' = H$.

Strecken und Flächen, die auf der Aufrißtafel oder parallel zu ihr liegen, werden in wahrer Größe abgebildet. So haben die senkrechten Kanten AE, BF, CG, DH des Quaders in der Abbildung 212 auch im Aufriß die gleiche Länge.

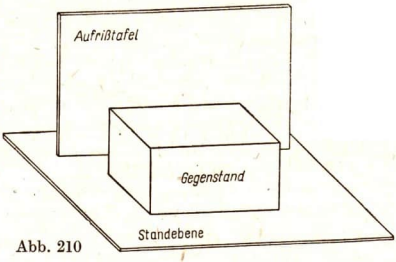


Abb. 210

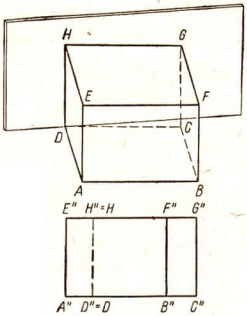


Abb. 212

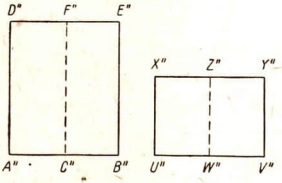


Abb. 211

Strecken, die gegen die Aufrißtafel geneigt sind, werden verkürzt abgebildet. In der Abbildung 212 sind das die Kanten AB, BC, CD, DA an der Grundfläche und die Kanten EF, FG, GH, HE an der Deckfläche des Quaders.

Strecken, die auf der Aufrißtafel senkrecht stehen, werden als Punkte abgebildet. Das wird bei der Abbildung des liegenden dreiseitigen Prismas in der Abbildung 213, dessen Grundfläche auf der Aufrißtafel liegt, deutlich.

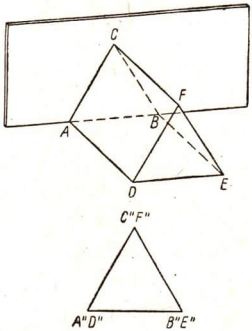


Abb. 213

Aufgaben

1. Fertige ein Quadermodell mit den Kanten 60 mm, 40 mm, 30 mm an! Bezeichne die Eckpunkte! Bringe das Modell in eine parallele Lage zu der Aufrißtafel (Abb. 210) und zeichne den Aufriß! Wie werden die zwölf Kanten und die sechs Flächen des Quaders im Aufriß abgebildet?
2. Fertige das Kantenmodell einer quadratischen Pyramide an! Stelle das Modell so vor die Aufrißtafel, daß die Vorderkante der Grundfläche parallel zu ihr ist! Zeichne den Aufriß! Welche Kanten der Pyramide werden in wahrer Länge abgebildet, welche verkürzt?
3. Zeichne den Aufriß einer quadratischen Pyramide von 5 cm Höhe, deren Kanten an der Grundfläche 3 cm lang sind! Die Pyramide soll mit einer Grundkante parallel zur Aufrißtafel stehen!
4. Die in der Aufgabe **3** beschriebene Pyramide werde in einer Höhe von 3 cm abgestumpft. Zeichne den Aufriß!
5. Zeichne die in der Abbildung 214 dargestellten Häusermodelle im Aufriß (Maßstab 1 : 200)! Die Abbildung 214a zeigt ein Pultdach, 214b ein Walmdach.
6. Zeichne den Aufriß der in der Abbildung 215 (Maße in mm) dargestellten gefrästen Platte in natürlicher Größe!

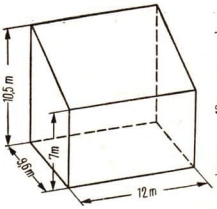


Abb. 214a

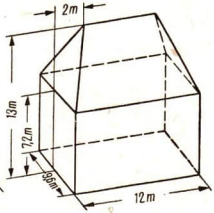


Abb. 214b

7. Zeichne den Aufriß der in der Abbildung 216 (Maße in mm) dargestellten Schwalbenschwanzführung in natürlicher Größe!

8. Schneide verschiedene geometrische Figuren aus Pappe aus und halte sie parallel zur Aufrißtafel! Vergleiche jeweils das Original mit seinem Aufriß!

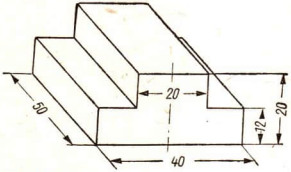


Abb. 215

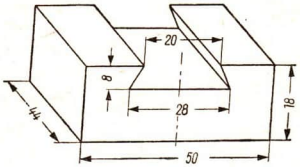


Abb. 216

9. Halte ein Quadrat aus Pappe zunächst parallel zur Aufrißtafel und schwenke es dann um eine senkrechte Kante, bis es senkrecht zur Aufrißtafel steht (Abb. 217)! Wie verändert sich der Aufriß des Quadrats bei dieser Bewegung?

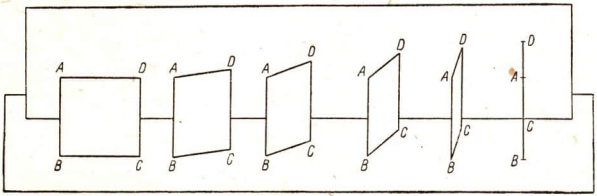


Abb. 217

10. Für die Abbildung von Gegenständen im Grundriß gelten folgende Sätze:

a) Gerade Linien werden im allgemeinen als gerade Linien abgebildet.

b) Strecken, die in der Grundrißtafel liegen oder zu dieser parallel sind, werden in wahrer Größe abgebildet.

c) Strecken, die zur Grundrißtafel geneigt sind, werden verkürzt abgebildet.

d) Gerade Linien, die auf der Grundrißtafel senkrecht stehen, werden als Punkte abgebildet.

e) Parallelen werden als Parallelen abgebildet, falls sie nicht auf der Grundrißtafel senkrecht stehen.

f) Ebene Flächen, die auf der Grundrißtafel senkrecht stehen, werden als gerade Linien abgebildet.

Nenne die entsprechenden Sätze für die Abbildung im Aufriß!

52. Grundriß und Aufriß

Zu jeder Stellung eines Gegenstandes gehören ein bestimmter Grundriß und ein bestimmter Aufriß. Die Abbildung 218 zeigt eine Streichholzschachtel im Grund- und Aufriß bei verschiedenen Stellungen. Die Grundrisse sind in unserem Beispiel stets deckungsgleiche Rechtecke, nur ist die Lage der Figur auf der Grundrißtafel jedesmal anders.

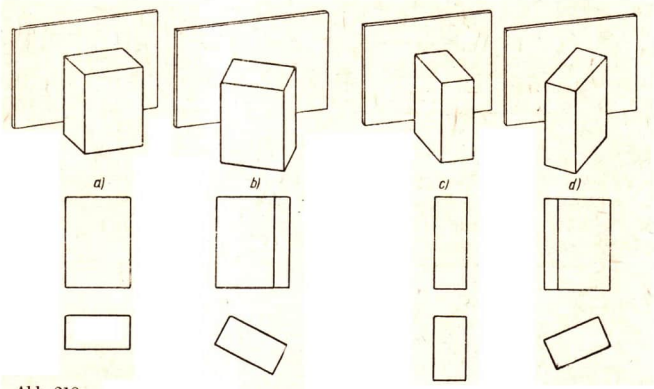


Abb. 218

Zur Darstellung eines Gegenstandes im Grund- und Aufriß müssen wir die beiden zusammengehörenden Risse auf dem Zeichenblatt richtig anordnen. Wir denken uns die Risse auf den beiden Tafeln gezeichnet und die Aufrißtafel um ihre Standlinie so weit nach hinten geklappt, daß sie mit der Grundrißtafel in einer Ebene liegt. Das ist dann die Zeichenebene. In den Abbildungen 219a und b wird dieser Vorgang am Beispiel eines auf der Grundrißtafel stehenden Würfels gezeigt. In der Abbildung 219c sind die beiden zusammengehörenden Risse des Gegenstandes gezeichnet. Die Linie, um die wir uns die Auf-

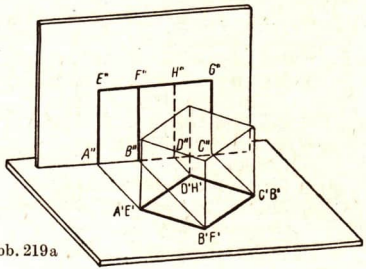


Abb. 219a

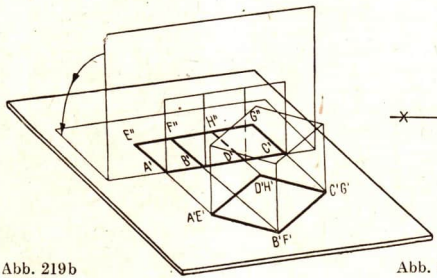


Abb. 219b

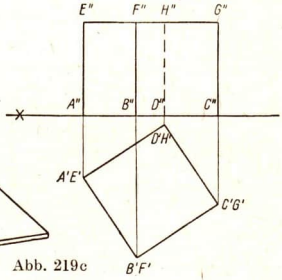


Abb. 219c

rißtafel in die Zeichenebene geklappt denken, heißt **Rißachse** oder kurz **Achse.** In der Rißachse stoßen die Aufrißtafel und die Grundrißtafel aneinander. Die beiden Risse werden so angeordnet, daß Grundriß und Aufriß der einzelnen Punkte des Gegenstandes jeweils auf parallelen, zur Rißachse senkrechten Geraden liegen (Abb. 219c). Diese Geraden heißen **Ordnungslinien**; beim praktischen Zeichnen werden sie als Hilfslinien benutzt.

Der Abstand, den der Aufriß eines Punktes von der Rißachse hat, gibt an, in welcher Höhe der

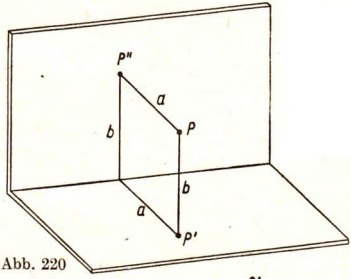
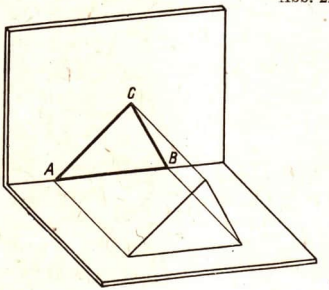


Abb. 220



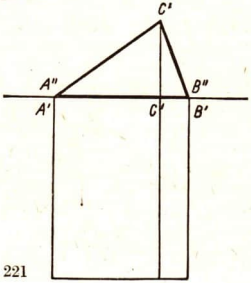


Abb. 221

Originalpunkt über der Grundrißtafel liegt. Ebenso gibt der Abstand des Grundrisses eines Punktes von der Rißachse an, in welcher Entfernung sich der Originalpunkt vor der Aufrißtafel befindet (Abb. 220).

Alle Punkte, Linien und Flächen, die auf der Aufrißtafel liegen, haben ihren Grundriß auf der Rißachse (Abb. 221). Ebenso haben alle Punkte,

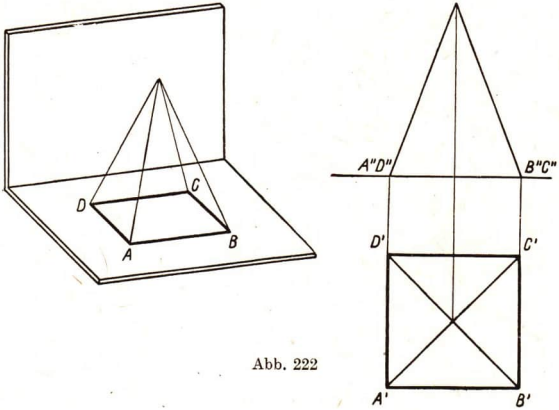


Abb. 222

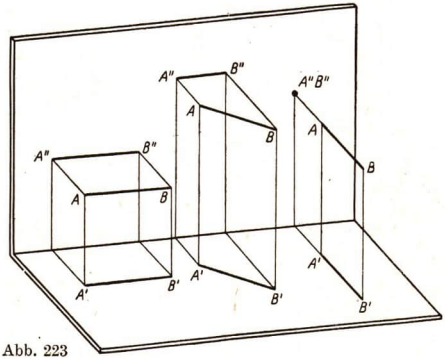


Abb. 223

Linien und Flächen, die auf der Grundrißtafel liegen, ihren Aufriß auf der Rißachse (Abb. 222). Gerade Linien, die parallel zur Grundrißtafel liegen, haben als Aufriß Parallelen zur Rißachse; eine Ausnahme bilden gerade Linien, die senkrecht zur Aufrißtafel stehen (sie werden im Aufriß als Punkte

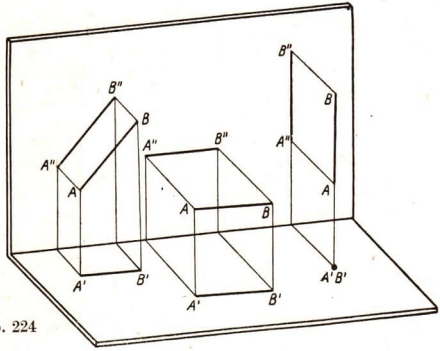


Abb. 224

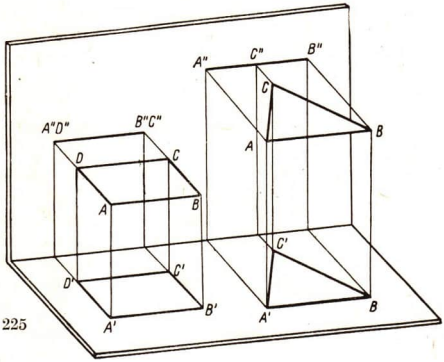


Abb. 225

abgebildet) (Abb. 223). Liegen gerade Linien parallel zur Aufrißtafel, so haben sie als Grundriß Parallelen zur Rißachse, mit Ausnahme der zur Grundrißtafel senkrecht stehenden geraden Linien (Abb. 224). Strecken, die parallel zur Grundrißtafel liegen, werden im Grundriß in wahrer Größe abgebildet.

Ebene Figuren, die parallel zur Grundrißtafel liegen, werden im Aufriß als Strecken abgebildet, die parallel zur Rißachse verlaufen. Sie werden im Grundriß in wahrer Größe und Gestalt abgebildet (Abb. 225). Ebenso werden ebene Figuren, die parallel zur Aufrißtafel liegen, im Grundriß als Strecken abgebildet, die parallel zur Rißachse verlaufen. Sie werden im Aufriß in wahrer Größe und Gestalt abgebildet (Abb. 226).

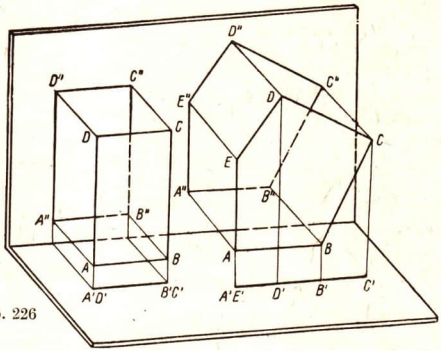


Abb. 226

Zusammenfassung:

Für die Darstellung eines Gegenstandes in Grund- und Aufriß gilt:

1. **Grundriß und Aufriß eines Punktes liegen auf einer zur Rißachse senkrechten Geraden, der Ordnungslinie.**
2. **Die Höhe eines Punktes über der Grundrißtafel wird durch den Abstand seines Aufrisses von der Rißachse dargestellt. Der Abstand eines Punktes von der Aufrißtafel ist gleich dem Abstand seines Grundrisses von der Rißachse.**
3. **Eine zur Grundrißtafel parallele Gerade wird im Aufriß als Parallele zur Rißachse oder als Punkt abgebildet. Eine zur Aufrißtafel parallele Gerade wird im Grundriß als Parallele zur Rißachse oder als Punkt abgebildet.**
4. **Eine zur Grundrißtafel parallele ebene Fläche wird im Aufriß als Parallele zur Rißachse abgebildet; eine zur Aufrißtafel parallele ebene Fläche wird im Grundriß als Parallele zur Rißachse abgebildet.**
5. **Eine Strecke wird auf einer Bildtafel in wahrer Größe abgebildet, wenn sie zu dieser Bildtafel parallel liegt. Eine ebene Figur wird auf einer Bildtafel deckungsgleich abgebildet, wenn sie zu dieser Bildtafel parallel liegt.**

Aufgaben

1. Stelle ein Quadermodell so auf die Grundrißtafel, daß eine Seitenfläche parallel zur Aufrißtafel liegt („Parallelstellung")! Zeichne Grundriß und Aufriß und bezeichne beide Risse!

2. Zeichne die beiden Risse des Modells von Aufgabe **1**, wenn es

a) auf der Grundrißtafel steht und mit einer Fläche an der Aufrißtafel anliegt;

b) mit einer Fläche an der Aufrißtafel anliegt, aber um 1 cm von der Grundrißtafel abgehoben ist;

c) sich in Parallelstellung befindet, seine Grundfläche jedoch von der Grundrißtafel einen Abstand von 1,5 cm und eine Seitenfläche von der Aufrißtafel einen Abstand von 2 cm hat!

3. Ein Würfel *ABCDEFGH* mit der Kantenlänge 3 cm steht auf der Grundrißtafel in Parallelstellung. Der Abstand einer Seitenfläche von der Aufrißtafel beträgt 2 cm. Er wird um seine linke vordere Kante entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gedreht (Abb. 227). Zeichne Grundriß und Aufriß des Würfels

a) in der Ausgangsstellung,
nach einer Drehung von **b)** 30°, **c)** 45°, **d)** 60°, **e)** 90°!

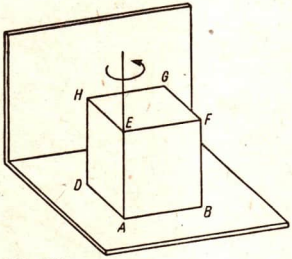


Abb. 227

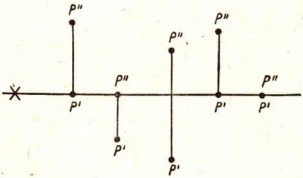


Abb. 228

4. Zeichne Grundriß und Aufriß eines Punktes *P*, der

a) auf der Grundrißtafel liegt und von der Aufrißtafel einen Abstand von 2,5 cm hat,

b) 3,6 cm über der Grundrißtafel und 2,4 cm vor der Aufrißtafel liegt,

c) 3,2 cm über der Grundrißtafel und auf der Aufrißtafel liegt!

5. Welche Lage gegenüber den Bildtafeln haben die in der Abbildung 228 in Grundriß und Aufriß dargestellten Punkte?

6. Zeichne Grundriß und Aufriß einer auf der Grundrißtafel senkrecht stehenden Strecke AB von 5 cm Länge in einem Abstand von 2 cm von der Aufrißtafel!

7. Zeichne Grundriß und Aufriß einer Strecke AB von 4 cm Länge, die in einem Abstand von 2 cm parallel zur Grundrißtafel liegt und gegen die Aufrißtafel um 45° geneigt ist! Der Endpunkt A liegt auf der Aufrißtafel. Fertige zunächst eine anschauliche Skizze an!

8. Zeichne zu den in der Abbildung 229 im Grundriß dargestellten Körpern die Aufrisse! Es ist

a) ein auf der Grundrißtafel stehender Würfel,

b) ein auf der Grundrißtafel stehendes fünfseitiges gerades Prisma von 4,5 cm Höhe,

c) eine Pyramide von 5 cm Höhe,

d) eine Pyramide von 4 cm Höhe.

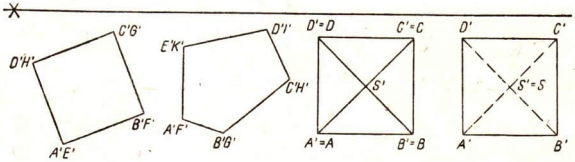


Abb. 229

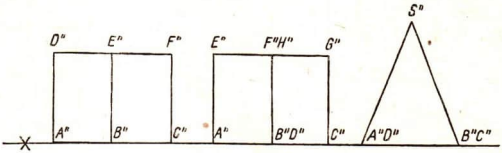


Abb. 230

9. Zeichne zu den in der Abbildung 230 im Aufriß dargestellten Körpern die Grundrisse! Es ist

a) ein Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche,

b) ein Würfel,

c) eine quadratische Pyramide.

10. In den Abbildungen 231a bis d sind verschiedene Grundrisse und Aufrisse eines auf der Grundrißtafel stehenden Würfels gezeichnet, aber falsch angeordnet. Welche Risse gehören zusammen?

11. Von einem Würfel mit einer Ausfräsung ist der Grundriß gegeben (Abb. 232). Zeichne den zugeordneten Aufriß (Maßstab 1 : 2)!

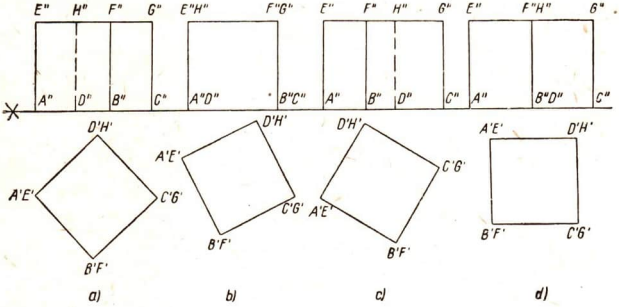


Abb. 231

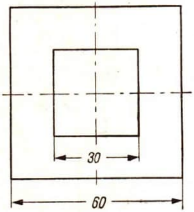


Abb. 232

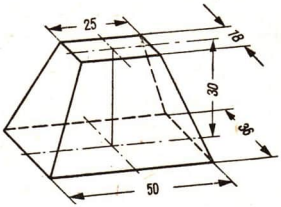


Abb. 233

12. Zeichne Grundriß und Aufriß der in der Abbildung 233 dargestellten abgestumpften Pyramide in natürlicher Größe!

13. Zeichne Grundriß und Aufriß der in den Abbildungen 234a bis c dargestellten Werkstücke (natürliche Größe, mit Rißachse)!

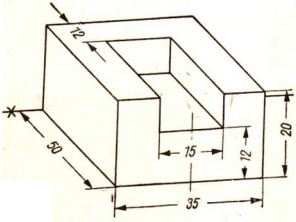


Abb. 234a

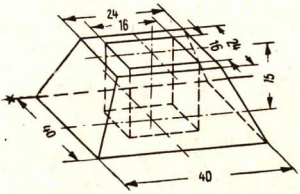


Abb. 234b

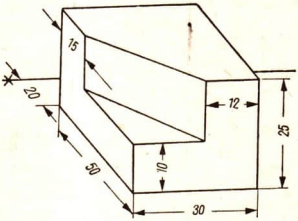


Abb. 234c

53. Grundriß mit Höhenmaßstab

Die Höhen eines im Grundriß dargestellten Gegenstandes können außer durch den Aufriß auch durch einen Höhenmaßstab angegeben werden. In diesem Fall besteht die Abbildung des Gegenstandes aus dem **Grundriß** und dem **Höhenmaßstab**.

Das schief abgeschnittene Prisma (Abb. 235) wurde im Grundriß, Aufriß und durch den Höhenmaßstab dargestellt. Auf den Aufriß kann man in dieser Darstellung verzichten.

Die Abbildung 236 zeigt den Grundriß einer fünfkantigen Pyramide mit dem zugehörigen Höhenmaßstab.

Für Landkarten benutzt man ebenfalls eine Darstellungsform, bei der die Höhen durch Höhenmaße angegeben werden. Hier-

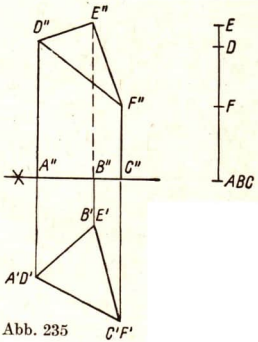


Abb. 235

bei wird meist kein Maßstab beigefügt, sondern alle Punkte gleicher Höhe werden durch sogenannte **Höhenlinien** verbunden und erhalten **Höhenzahlen.** Diese Zahlen bedeuten Meter über dem Meeresspiegel (Normalnull).

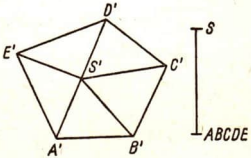


Abb. 236

Die Abbildung 237 zeigt ein Geländemodell im Schaubild und seinen bezifferten Grundriß. Am Modell kann man die Höhenlinien dadurch bestimmen, daß man es in einen flachen Trog stellt und den Trog bis zu den verschiedenen Höhen mit Wasser füllt. Wo die Wasseroberfläche das Modell jeweils trifft, liegt die entsprechende Höhenlinie (Abb. 238).

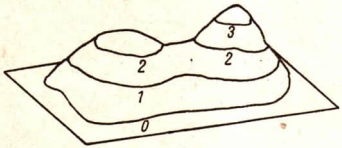
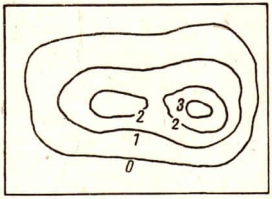


Abb. 237



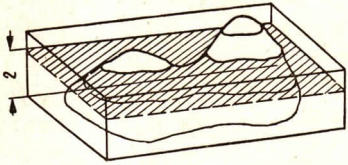


Abb. 238

Aufgaben

1. Stelle einen Quader mit den Kantenlängen 3,2 cm, 4,4 cm und 6 cm jeweils in der gleichen Lage **a)** durch Grundriß und Aufriß, **b)** durch Grundriß mit Höhenmaßstab dar!

2. Zeichne zu den in der Abbildung 214 dargestellten Hausmodellen den Grundriß mit Höhenmaßstab!

3. Stelle die in der Abbildung 239 in Grundriß und Aufriß gegebenen Körper durch den Grundriß mit Höhenmaßstab dar!

4. Eine 6 cm hohe Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von 4 cm Seitenlänge ist, wird in 3 cm Höhe abgestumpft. Der Körper steht auf der Grundrißtafel. Zeichne den Grundriß mit Höhenmaßstab!

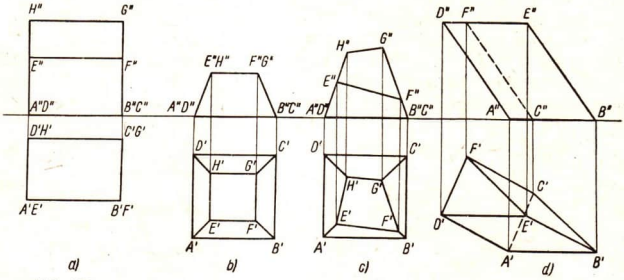


Abb. 239

5. Ein Würfel von 3 cm Kantenlänge ist 1,5 cm von der Grundrißtafel abgehoben. Zeichne den Grundriß mit Höhenmaßstab!

6. Zeichne zu den in der Abbildung 240 im Grundriß mit Höhenmaßstab dargestellten Körpern Grundriß und Aufriß!

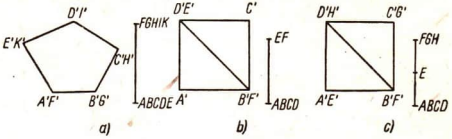


Abb. 240

INHALTSVERZEICHNIS

Einführende Wiederholung

1. Addition und Subtraktion 3
2. Multiplikation und Division 4
3. Rechnen mit benannten Zahlen 7
4. Rechnen mit Brüchen 12
5. Aufgaben aus der Geometrie 13

Bruchrechnung

I. Teilbarkeit der Zahlen

6. Teilbarkeitsregeln 15
7. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen 20
8. Der Hauptnenner 23

II. Rechnen mit gemeinen Brüchen

9. Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche 26
10. Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl 33
11. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl 38
12. Multiplikation eines Bruches mit einem Bruch 44
13. Division eines Bruches durch einen Bruch 49
14. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 56

III. Rechnen mit Dezimalbrüchen

15. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer ganzen Zahl .. 61
16. Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl 65
17. Umwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt 73
18. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einem Dezimalbruch 76
19. Division eines Dezimalbruches durch einen Dezimalbruch ... 82
20. Dezimalbrüche und gemeine Brüche 88
21. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 89

Geometrie

IV. Winkelbeziehungen an Geraden

22. Neben- und Scheitelwinkel 98
23. Stufenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzt liegende Winkel 101

V. Achsensymmetrie

24. Einführung in die Achsensymmetrie 105
25. Symmetrisch gelegene Figuren und Punkte 110
26. Grundeigenschaften der Achsensymmetrie 113

27. Konstruktion symmetrischer Punkte und Figuren 116
28. Geometrische Grundkonstruktionen 120
29. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 123

VI. Das Dreieck

30. Das Dreieck als Begrenzungsfläche 125
31. Arten der Dreiecke 129
32. Symmetrieeigenschaften von Dreiecken 131
33. Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln des Dreiecks 135
34. Konstruktion von Dreiecken 139
35. Die Höhen im Dreieck 144
36. Einführung in die Kongruenz 146
37. Die Kongruenzsätze 149
38. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 152

VII. Das Viereck

39. Das Parallelogramm 155
40. Konstruktion von Parallelogrammen 159
41. Das Trapez 160
42. Das Drachenviereck und der Rhombus 163
43. Das unregelmäßige Viereck 166
44. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 168

VIII. Flächen- und Rauminhaltsberechnung

45. Vorbereitende Übungen 171
46. Flächeninhalt und Umfang des Parallelogramms 172
47. Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks 175
48. Flächeninhalt und Umfang des Trapezes 179
49. Der Flächeninhalt von Vielecken 182
50. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 185

IX. Darstellende Geometrie

51. Der Aufriß 194
52. Grundriß und Aufriß 198
53. Grundriß mit Höhenmaßstab 206

Abbildungsnachweis:

Bildstelle der Reichsbahndirektion Halle (S): Abb. 69
DEWAG, Berlin: Abb. 68, 70a, 71a
Phototechnische Werkstätten Berlin: Abb. 137, 151, 152
Technisches Zentralamt: Abb. 12
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin: Abb. 3, 18, 31, 40, 44, 45, 46, 67, 72, 77a, 89, 135, 138
Zentralbild: Abb. 26, 29, 30a, 32, 108
Die Abbildungen 27a und 27b sind Reproduktionen aus: „Falter bei Tag und Nacht", Neumann-Verlag, Radebeul-Berlin, 1953.