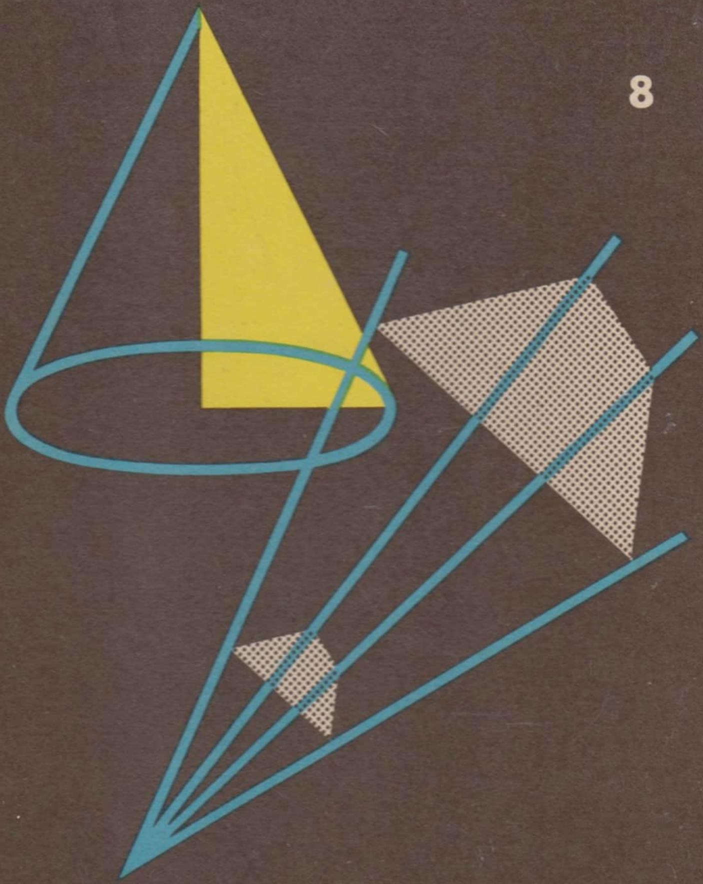
8



Rechnen, Messen, Konstruieren

RECHNEN
MESSEN
KONSTRUIEREN

ACHTES SCHULJAHR

Ausgabe 1959

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1959

Die Abschnitte A, I und A, II wurden von Paul Polster,
der Abschnitt B, III von Kurt Trinks
und die Abschnitte B, IV, B, V und C, VII von Hans Simon verfaßt.
Den Abschnitt C, VI verfaßte Dr. Helmut Klein,
die Abschnitte C, VIII und C, IX Paul Streu, den Abschnitt C, X Doris Singer
und den Abschnitt C, XI Oskar Mader.
Die wissenschaftliche und methodische Bearbeitung
der Abschnitte B, III, C, VIII, C, IX und C, X besorgten
Hannah-Ruth Lohde, Oskar Mader und Paul Polster.

Gemäß der Verordnung vom 14. 8. 1958 über die physikalisch-technischen Einheiten sind alle Angaben in Verbindung mit der Einheit Doppelzentner (dz) *als Dezitonnen* (dt) *aufzufassen.*

Redaktionsschluß: 30. März 1959
Zeichnungen: Kurt Dornbusch und Heinz Grothmann
Umschlaggestaltung: Heinz Unzner

ES 11 G · Bestell-Nr. 00803-2
2.10 DM · Lizenz Nr. 203 · 1000/59(DN)
Satz und Druck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)

A. EINFÜHRENDE WIEDERHOLUNG

I. Zahlen, Maße

1. Verwandlungsübungen

1. **a)** $3{,}263 \cdot 10$ (100, 1000) **b)** $6375 : 10$ (100, 1000)
c) $0{,}0634 \cdot 10$ (10000, 100) **d)** $24{,}73 : 100$ (10, 1000)

2. **a)** $370 \cdot 0{,}1$ (0,01, 0,001) **b)** $1{,}72 : 0{,}1$ (0,01, 0,001)
c) $1295 \cdot 0{,}01$ (0,1, 0,001) **d)** $0{,}635 : 0{,}01$ (0,1, 0,001)
e) $35{,}2 \cdot 0{,}1$ (0,001, 0,01) **f)** $96{,}4 : 0{,}001$ (0,01, 0,1)

3. Nenne die dir bekannten Teilbarkeitsregeln!

4. Untersuche mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, ob die folgenden Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25, 125 teilbar sind!

a) 2112	**b)** 12000	**c)** 6050	**d)** 1230
e) 71160	**f)** 21320	**g)** 1908	**h)** 2168
i) 10080	**k)** 12330	**l)** 10110	**m)** 884745

5. Zerlege die folgenden Zahlen in Primfaktoren und verwende dabei die Potenzschreibweise!

a) 24, 75, 54, 70, 36 **b)** 96, 105, 144, 112, 120
c) 108, 175, 160, 135, 126 **d)** 225, 196, 216, 192, 400

6. Verbinde die nebeneinanderstehenden Zahlenausdrücke durch die Zeichen $>$ oder $<$!

a) $32{,}25 - 46{,}93;\quad -19{,}66 + 26{,}15$
b) $25\frac{1}{2} - 27\frac{3}{4};\quad -18\frac{1}{4} + 16\frac{3}{4}$
c) $2 \cdot (75 - 36) + 15;\quad 3 \cdot (18 - 20) + 60$
d) $4 \cdot \left(14\frac{1}{5} - 12\frac{3}{5}\right) + 3\frac{2}{5};\quad 5 \cdot \left(10\frac{2}{5} - 12\frac{4}{5}\right) + 22\frac{1}{5}$
e) $(-5) \cdot (7{,}2);\quad (-6) \cdot (-5{,}5)$
f) $8 \cdot (-1{,}17);\quad 6 \cdot (-1{,}44)$
g) $(-9) \cdot 8\frac{3}{4};\quad (-12) \cdot 6{,}25$
h) $14\frac{1}{2} \cdot (-1{,}25);\quad (-3{,}75) \cdot 5\frac{1}{2}$
i) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{5};\quad \frac{1}{4} \cdot (-0{,}3)$

7. Verwandle durch Erweitern oder durch Dividieren in endliche Dezimalzahlen!

a) $2\frac{1}{4}$, $6\frac{2}{5}$, $9\frac{3}{8}$, $12\frac{3}{10}$, $15\frac{7}{20}$ b) $7\frac{3}{5}$, $3\frac{3}{4}$, $10\frac{5}{8}$, $13\frac{7}{10}$, $16\frac{9}{25}$

c) $4\frac{1}{5}$, $11\frac{7}{8}$, $18\frac{11}{40}$, $21\frac{49}{50}$, $25\frac{15}{16}$ d) $8\frac{4}{5}$, $5\frac{1}{8}$, $19\frac{23}{40}$, $30\frac{111}{125}$, $22\frac{37}{40}$

8. Verwandle in eine Dezimalzahl! Rechne, bis die Periode erkenntlich ist, höchstens aber bis zur vierten Dezimalstelle, und runde auf 3 Dezimalstellen!

a) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{13}$ b) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{7}{15}$

c) $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{19}$ d) $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{8}{19}$

9. Stelle eine Übersicht über die Längen-, Flächen-, Raum-, Gewichts- und Hohlmaße auf und gib die Verwandlungszahlen benachbarter Maße an!

10. Verwandle folgende Maßangaben in die nächstniedere Maßeinheit!

a)	b)	c)	d)	e)
0,83 m	$6\frac{3}{10}$ dm	0,06 cm²	5 km²	$2\frac{1}{4}$ km²
3 dm	1,8 l	$2\frac{1}{2}$ a	0,625 m³	105 a
1,70 m²	0,17 t	3,575 kg	0,09 a	$6\frac{1}{2}$ dz
34 ha	$28\frac{1}{2}$ g	2,4 dz	2,60 cm²	0,005 ha
5,3 m³	$3\frac{3}{4}$ hl	13,4 t	$4\frac{1}{5}$ g	0,004 t

11. Schreibe in der höheren Maßeinheit:

a)	b)	c)
4 km + 17 m	0,5 t + 0,4 dz	0,5 cm + 7 mm
17 dm + 8 cm	1,8 a + 19 m²	0,2 m² + 20 dm²
8 ha + 5 a	5 km² + 43,5 ha	4,2 m³ + 750 dm³
35 cm² + 25 mm²	6 dm³ + 80 cm³	0,1 dm³ + 80 cm³
7 km² + 6 ha	$\frac{3}{4}$ cm³ + 50 mm³	0,4 hl + 150 l

II. Rechenarten

2. Addition und Subtraktion

1. Rechne vorteilhaft im Kopf!

a) 3,37 + 0,47 + 0,63 b) 34,62 + 15,94 + 30,38 + 39,06

c) 389,42 + 3895 + 610,58 d) 31,487 + 35,75 + 13,513 + 253,25

e) $963 + 14{,}95 + 85{,}05$ f) $196{,}4 + 38{,}473 + 803{,}6 + 2{,}527$
g) $4368 - 3571 + 1632$ h) $83972 + 31845 - 73972$
i) $8374 - 386{,}5 + 1126$ k) $5364 + 12682 - 30364$

2. a) $(+8) + (+5)$ b) $(+7) - (-9) - (+5) + (-8)$
c) $(+8) - (+5)$ d) $(+2) - (+13) + (-14) - (-15)$
e) $(+8) + (-5)$ f) $(+27) - (-29) + (+15) - (+46)$
g) $(+8) - (-5)$ h) $(-3{,}8) + (-7{,}6) - (-6{,}4) - (+9{,}2)$
i) $(-8) + (+5)$ k) $(+0{,}18) - (-0{,}96) + (+1{,}14) + (-0{,}77)$
l) $(-8) - (+5)$ m) $(+4{,}5) + (+6{,}9) - (+8{,}7) - (-5{,}3)$
n) $(-8) + (-5)$ o) $\left(+2\frac{1}{2}\right) - \left(-1\frac{3}{4}\right) + \left(-6\frac{1}{2}\right) - \left(+3\frac{1}{4}\right)$
p) $(-8) - (-5)$ q) $\left(-3\frac{1}{5}\right) + \left(-6\frac{4}{5}\right) - \left(-3\frac{1}{3}\right) + \left(+7\frac{2}{3}\right)$

3. Setze untereinander und ergänze zum Minuenden!
a) 16234,51 DM − 2603,52 DM − 4583,01 DM − 4321,77 DM
b) 65030,41 DM − 6284,98 DM − 1357,98 DM − 5684,24 DM
c) 2749,86 DM − 458,06 DM − 580,27 DM − 653,21 DM − 431,00 DM

4. a) $9\frac{3}{5} + 7\frac{3}{4}$ b) $8\frac{1}{3} + 7\frac{5}{6}$ c) $10\frac{1}{2} + 2\frac{3}{7}$ d) $4\frac{1}{8} + 2\frac{3}{5}$
e) $3\frac{1}{4} + 5\frac{2}{3}$ f) $16\frac{1}{6} + 7\frac{5}{7}$ g) $8\frac{3}{8} + 5\frac{5}{6}$ h) $6\frac{4}{9} - 7\frac{7}{8}$
i) $5\frac{4}{25} - 3\frac{2}{15}$ k) $7\frac{9}{10} + 6\frac{3}{8}$ l) $3\frac{1}{2} - 6\frac{7}{12}$ m) $9\frac{1}{5} - 11\frac{5}{6}$

5. a) $8\frac{5}{12} + 7\frac{8}{15}$ b) $9\frac{7}{20} + 6\frac{3}{4}$ c) $15\frac{11}{12} + 3\frac{4}{30}$ d) $8\frac{7}{26} - 5\frac{5}{13}$
e) $6\frac{3}{11} - 9\frac{5}{12}$ f) $5\frac{11}{15} - 3\frac{7}{45}$ g) $5\frac{3}{25} - 6\frac{7}{50}$ h) $6\frac{7}{40} - 7\frac{3}{28}$
i) $7\frac{6}{7} + 5\frac{5}{8}$ k) $6\frac{5}{9} - 9\frac{5}{6}$ l) $2\frac{5}{9} - 5\frac{17}{36}$ m) $9\frac{11}{18} - 12\frac{9}{16}$

6. a) Welche Zahl muß man um (−5,75) vermehren, um 12,50 zu erhalten?
b) Welche Zahl muß man um (−5,75) vermindern, um 12,50 zu erhalten?
c) Welche Zahl muß man um (−5,75) vermehren, um (−12,50) zu erhalten?
d) Welche Zahl muß man um (−5,75) vermindern, um (−12,50) zu erhalten?

7. Was erkennst du an den beiden folgenden Beispielen?
$8 - 7 \neq 7 - 8$; $8 + (-7) = (-7) + 8$

3. Multiplikation und Division

Rechne im Kopf!

1. **a)** $(+3{,}5) \cdot (+4)$ **b)** $(+3{,}5) \cdot (-7)$ **c)** $(+2{,}3) \cdot (-7)$
d) $(-5{,}6) \cdot (+9)$ **e)** $(-8{,}4) \cdot (+8)$ **f)** $(-0{,}18) \cdot (+3)$
g) $(-7{,}3) \cdot (-6)$ **h)** $(+6{,}8) \cdot (-5)$ **i)** $(+0{,}27) \cdot (+5)$

2. **a)** $(+0{,}8) \cdot (-0{,}8)$ **b)** $(-0{,}4) \cdot (+0{,}7)$ **c)** $(-0{,}7) \cdot (-0{,}6)$
d) $(+0{,}3) \cdot (-0{,}4)$ **e)** $(-0{,}2) \cdot (+0{,}5)$ **f)** $(-0{,}1) \cdot (-1{,}2)$
g) $(+0{,}22) \cdot (+200)$ **h)** $(+0{,}53) \cdot (-30)$ **i)** $(-1{,}80) \cdot (+80)$

3. **a)** $\left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$ **b)** $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$ **c)** $\left(+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$
d) $\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(+\frac{1}{7}\right)$ **e)** $\left(+\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{8}{9}\right)$ **f)** $\left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$
g) $\left(+5\frac{1}{2}\right) \cdot (-4)$ **h)** $\left(-4\frac{1}{3}\right) \cdot (-6)$ **i)** $\left(+3\frac{1}{4}\right) \cdot (+8)$

4. Berechne die folgenden Dreieckflächen!
Über der schriftlichen Lösung ist der Weg des Überschlags zu notieren!
(Das Ergebnis auf zwei Dezimalstellen runden!)

	s	h_s		s	h_s		s	h_s
a)	5,45 m	4,74 m	**b)**	10,64 m	18,35 m	**c)**	35,50 m	19,87 m
d)	7,24 m	9,65 m	**e)**	13,48 m	15,95 m	**f)**	21,94 m	18,59 m
g)	8,15 m	6,14 m	**h)**	26,57 m	17,32 m	**i)**	31,47 m	20,96 m

5. Berechne die folgenden Trapezflächen!

	a	c	h		a	c	h
a)	56,4 m	37,6 m	35,7 m	**b)**	91,7 m	21,9 m	73,1 m
c)	21,9 m	80,1 m	59,1 m	**d)**	30,8 m	44,2 m	85,3 m
e)	37,2 m	48,4 m	60,3 m	**f)**	50,0 m	62,4 m	96,5 m

6. Berechne den Gesamthubraum der Zylinder der folgenden Krafträder und Kraftwagen!

Krafträder

	RT 125	AWO 425	EMW R 35	BK 350
Zahl der Zylinder...	1	1	1	2
Bohrung in mm	52	68	72	58
Kolbenhub in mm ..	58	68	84	65

Personenkraftwagen / Lastkraftwagen

	F 8	F 9	EMW 340	Granit 27
Zahl der Zylinder...	2	3	6	4
Bohrung in mm	76	70	66	85
Kolbenhub in mm ..	76	78	96	118

Rechne im Kopf!

7. a) $(-1{,}6):(+4)$ **b)** $(+5{,}50):(+50)$ **c)** $(+39):(-1{,}3)$
d) $(-4{,}8):(-6)$ **e)** $(+3{,}6):(-1{,}2)$ **f)** $(-50):(+2{,}5)$
g) $(+3{,}5):(-7)$ **h)** $(-9{,}0):(+1{,}8)$ **i)** $(+14{,}4):(+2{,}4)$
k) $(+1{,}80):(+20)$ **l)** $(-7{,}2):(-2{,}4)$ **m)** $(-7):(-2)$

8. a) $\left(-\frac{2}{3}\right):\left(+\frac{1}{2}\right)$ **b)** $\left(-\frac{1}{4}\right):(+2)$ **c)** 0,2 m in 2,4 m
d) $\left(+\frac{1}{2}\right):\left(+\frac{2}{3}\right)$ **e)** $\left(+\frac{2}{3}\right):(-3)$ **f)** 0,4 m in 1,6 m
g) $\left(-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$ **h)** $\left(-1\frac{2}{3}\right):(-5)$ **i)** 0,6 m in 3,6 m
k) $\left(+\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{3}{4}\right)$ **l)** $\left(+\frac{1}{3}\right):(+4)$ **m)** 0,8 m in 4,8 m
n) $\left(-1\frac{1}{4}\right):(-5)$ **o)** $(-2):\left(-\frac{3}{4}\right)$ **p)** 1,2 m in 9,6 m

9. Überschlage vorher die Größenordnung des Ergebnisses!

a) 442,75 DM : 7 **b)** 3,932 km : 4 **c)** 16,478 kg : 2
d) 636,25 DM : 5 **e)** 10,950 km : 6 **f)** 11,370 kg : 6
g) 912,64 DM : 4 **h)** 5,460 km : 5 **i)** 8,750 kg : 5
k) 482,13 DM : 3 **l)** 12,390 km : 7 **m)** 16,184 kg : 8

10. a) 30004 : 72 **b)** 74326 : 87 **c)** 46307 : 54
d) 58616 : 19 **e)** 62745 : 68 **f)** 83576 : 82
g) 123916 : 43 **h)** 500600 : 64 **i)** 485637 : 82
k) 731584 : 95 **l)** 825375 : 25 **m)** 715998 : 98
n) 78234 : 141 **o)** 61508 : 304 **p)** 82716 : 732
q) 284314 : 216 **r)** 284315 : 216 **s)** 700000 : 341
t) 655498 : 987 **u)** 579244 : 809 **v)** 584408 : 638

11. a) $\frac{2{,}2 \cdot 3{,}3}{6{,}8}$ **b)** $\frac{1{,}24 \cdot 3{,}8}{0{,}505}$ **c)** $\frac{0{,}3 \cdot 72{,}8}{2{,}6}$
d) $\frac{8{,}2}{2{,}5 \cdot 3{,}8}$ **e)** $\frac{3{,}6}{2{,}7 \cdot 3{,}6}$ **f)** $\frac{7{,}5}{3{,}5 \cdot 0{,}4}$
g) $\frac{2{,}5 + 3{,}3}{5{,}2}$ **h)** $\frac{17{,}5 - 6{,}1}{2{,}4}$ **i)** $\frac{3{,}8 + 0{,}9}{1{,}01}$
k) $\frac{8{,}4}{2{,}6 + 5{,}2}$ **l)** $\frac{3{,}2}{11{,}4 - 10{,}6}$ **m)** $\frac{7{,}2}{25{,}3 - 7{,}3}$
n) $\frac{4{,}5 - 3{,}2}{1{,}1 + 1{,}5}$ **o)** $\frac{3{,}2 + 2{,}8}{8{,}8 + 0{,}2}$ **p)** $\frac{5{,}4 - 1{,}2}{2{,}2 + 2}$

12. a) Welche Zahl muß ich durch 1,5 dividieren, um 16 zu erhalten?
b) Welche Zahl muß ich mit 1,5 multiplizieren, um 16 zu erhalten?
c) Welche Zahl muß ich durch (—1,2) dividieren, um (—60) zu erhalten?
d) Welche Zahl muß ich mit (—1,2) multiplizieren, um (—60) zu erhalten?

4. Formen des Zahlenvergleichs

Beispiel: 24 und 120

a) 24 ist um 96 kleiner als 120	120 ist um 96 größer als 24
b) 24 ist ein Fünftel (der fünfte Teil) von 120	120 ist fünfmal so groß wie (das Fünffache von) 24
c) $24 = \frac{1}{5}$ von $120 = \frac{20}{100}$ von 120	$120 = \frac{5}{1}$ von $24 = \frac{500}{100}$ von 24
$24 = 20\%$ von 120	$120 = 500\%$ von 24
d) $24 : 120 = 1 : 5$	$120 : 24 = 5 : 1$

1. Vergleiche in dieser Weise die folgenden Zahlenpaare!

a) 20 und 200 **b)** 4 und 80 **c)** 18 und 60
d) 12 und 48 **e)** 13 und 39 **f)** 48 und 300

2. Berechne den Wert der folgenden Zahlenverhältnisse (höchstens 3 geltende Ziffern)!

a) $26 : 57$ **b)** $65 : 12$ **c)** $2{,}8 : 20{,}5$ **d)** $36{,}5 : 16{,}1$
e) $119 : 41$ **f)** $178 : 34$ **g)** $6{,}28 : 7{,}04$ **h)** $19{,}74 : 17{,}36$

3. Bestimme den Wert der Unbekannten!

a) $3 : x = 6 : 12$ **b)** $8 : x = 16 : 48$
c) $x : 10 = 12 : 24$ **d)** $x : 14 = 50 : 70$
e) $2\frac{1}{2} : y = 3 : 1\frac{1}{2}$ **f)** $0{,}14 : 1{,}14 = x : 57$
g) $9 : 17 = x : 51$ **h)** $26 : 32 = 52 : x$
i) $3 : 4 = 18 : x$ **k)** $x : 18 = 54 : 108$
l) $32{,}5 : x = 250 : 100$ **m)** $x : 105 = 16 : 24$
n) $8 : 4 = 16 : x$ **o)** $3 : x = 4 : 7$

4. Berechne den Prozentsatz, nachdem du seine Größenordnung durch Überschlag festgestellt hast!

a) 36 DM von 180 DM **b)** 9,2 kg von 36,8 kg **c)** 50 ha von 620 ha
d) 45 hl von 300 hl **e)** 8,4 dz von 60 dz **f)** 40 p von 150 p
g) 90 DM von 150 DM **h)** 5 hl von 700 hl **i)** 30 DM von 40 DM
k) 9,6 t von 320 t **l)** 320 DM von 200 DM **m)** 600 DM von 200 DM
n) 84 kg von 60 kg **o)** 160 DM von 120 DM **p)** 920 DM von 500 DM
q) 74 ha von 30 ha **r)** 900 hl von 240 hl **s)** 246 dz von 450 dz

5. **a)** $4\frac{1}{2}\%$ von 216 g **b)** 25% von 450 DM **c)** 20% von 955 kg
d) $33\frac{1}{3}\%$ von 741 km **e)** 10% von 962 t **f)** $6\frac{1}{4}\%$ von 336 l
g) 75% von 928 DM **h)** $12\frac{1}{2}\%$ von 448 hl **i)** $66\frac{2}{3}\%$ von 459 a
k) 80% von 568 hl **l)** $16\frac{2}{3}\%$ von 396 kp **m)** $8\frac{1}{3}\%$ von 252 DM

6. **a)** 230% von 640 DM **b)** 310% von 862 hl **c)** 560% von 71 l
d) 510% von 980 kg **e)** 750% von 74 DM **f)** 480% von 190 kp
g) 120% von 120 g **h)** 160% von 240 kg **i)** 350% von 530 DM

7. Berechne den Grundwert!
a) 6% ≙ 39 kg **b)** $4\frac{1}{2}$% ≙ 18 hl **c)** $5\frac{1}{2}$% ≙ 27,50 a
d) 5% ≙ 42 DM **e)** $3\frac{1}{3}$% ≙ 20 ha **f)** $1\frac{1}{8}$% ≙ 25 DM
g) $4\frac{4}{5}$% ≙ 24 dz **h)** $5\frac{1}{4}$% ≙ 25,50 DM **i)** 3,1% ≙ 18,6 hl

8. Eine Versammlung von 100 Personen wird auf 95 Personen geschätzt. Eine andere Versammlung von 1995 Personen wird auf 2000 Personen geschätzt. Vergleiche die prozentualen Schätzungsfehler!

9. Beim Entfernungsschätzen nennt jemand 80 m statt 100 m, 170 m statt 150 m, 300 m statt 340 m, 190 m statt 150 m. Vergleiche!

10. Wie lang muß das Modell eines Graugußzylinders von 1200 mm Länge werden, wenn das Schwindmaß von Grauguß 1% beträgt?

11. Die Produktionskosten für eine Werkzeugmaschine betrugen nach 9prozentiger Senkung noch 1274 DM. Wie hoch waren sie früher?

12. Ein Metallarbeiter senkte die Arbeitszeit beim Bohren eines Werkstücks von 33 auf 26 Minuten.
a) Um wieviel Prozent verminderte er seine Arbeitszeit?
b) Welchen Bruchteil der Bohrarbeit an dem Werkstück kann er jetzt in den eingesparten 7 Min. zusätzlich schaffen? Um wieviel Prozent erhöhte er also seine Leistung?

13. Zur Herstellung eines Blechbehälters wurden 2,8 m² Blech verbraucht. Die tatsächlich eingebaute Blechfläche betrug nur 2,5 m². Wieviel Prozent betrug der Verschnitt?

14. 2,5 kg Lagermetall enthalten 1,6 kg Zinn (Sn), 0,5 kg Blei (Pb), 0,3 kg Antimon (Sb) und als Rest Kupfer (Cu). Berechne die Anteile in Prozenten!

15. Weißmetall besteht aus 10% Sn, 15,5% Sb, 1% Cu und dem Rest Pb. Wieviel von jedem Metall werden zur Herstellung von 24 kg Weißmetall gebraucht, wenn beim Schmelzen 3,5% verlorengehen?

5. Verhältnisgleichheit — Produktgleichheit

1. In ein Zahnrad mit 60 Zähnen greift ein zweites mit 72 Zähnen ein. Das erste Zahnrad macht in der Minute 48 Umdrehungen. Wieviel Umdrehungen in der Minute kommen auf das zweite Zahnrad?

2. An ein Zahnrad mit 60 Zähnen, das in der Minute 48 Umdrehungen ausführt, soll ein zweites mit $80\frac{\text{U}}{\text{min}}$ angeschlossen werden. Wieviel Zähne muß es haben?

3. Nimmt man von einer Zahl die Hälfte, vom Rest wieder die Hälfte und von diesem Rest noch einmal die Hälfte, so bleibt nur 1. Wie heißt die Zahl?

4. 23 l Benzin füllen ein zylindrisches Gefäß bis zu einer Höhe von 7,8 cm. Wie hoch stehen in demselben Gefäß 207 l?

5. Ein Personenzug braucht bei $40\frac{\text{km}}{\text{h}}$ Reisegeschwindigkeit für eine Strecke $3\frac{1}{3}$ Std. Wie lange braucht ein D-Zug zur gleichen Strecke bei einer Reisegeschwindigkeit von $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

6. 14^{58} verläßt der Pannonia-Expreß den Dresdner Hauptbahnhof in Richtung Berlin. 2 Min. vorher ist in Berlin ein Personenzug nach Dresden abgefahren. Er benutzt die gleiche etwa 189 km lange Strecke. Welcher von beiden Zügen ist Berlin am nächsten, wenn sie sich treffen?

7. Ihr seid hintereinander angetreten. Du bist der achte von vorn und der zwanzigste von hinten. Wieviel Jungen seid ihr?

8. Eine quadratische Fläche kann mit 288 Fliesen bedeckt werden. Wieviel Fliesen einer anderen Sorte werden benötigt, wenn deren Größe nur $\frac{4}{5}$ der ersten Sorte beträgt?

9. In welcher Zeit können 5000 Personen, die zu einem Sportfest erschienen waren, mit der Straßenbahn (je ein Triebwagen mit 2 Anhängern) im 3-Min.-Verkehr nach der Stadt zurückgebracht werden? Auf der gleichen Strecke können sonst im 15-Min.-Verkehr (1 Triebwagen und 1 Anhänger) in der Stunde 560 Personen befördert werden.

10. Auf 25 mm eines Metallsägeblattes kommen bei grober Teilung 16 Zähne, bei mittlerer Teilung 22 Zähne, bei feiner Teilung 32 Zähne.
    a) Wieviel Zähne haben 300 mm lange Sägeblätter bei den 3 Teilungen?
    b) Wieviel Millimeter (2 Dezimalstellen) kommen auf einen Zahn?

11. Zur Herstellung feinen Milchglases werden zu 15 kg Kiessand 5 kg Pottasche und 1 kg Kreide genommen. Man will 48 kg Milchglas herstellen.

12. Bei einem Fahrrad hat das vorn befindliche größere Kettenrad 48 Zähne, das hintere kleine Kettenrad nur 18. Der Umfang der Laufräder mißt je 2,2 m.
    a) Wieviel Umdrehungen der Laufräder sind für 1 km Wegstrecke nötig?
    b) Wieviel Umdrehungen macht dabei das große Kettenrad?

B. ARITHMETIK

III. Allgemeine Zahlsymbole

6. Zur Einführung allgemeiner Zahlsymbole

1) Ein rechteckiges Stück Ackerland ist 72 m lang und 38 m breit. Um seinen Flächeninhalt zu berechnen, müssen wir bekanntlich die Maßzahlen von Länge und Breite miteinander multiplizieren und dem Produkt die entsprechende Maßeinheit beifügen.

Wir rechnen: $72 \cdot 38 = 2736$; Maßeinheit m^2.

Das Produkt der beiden Maßzahlen gibt uns die Maßzahl des Flächeninhalts des Rechtecks an. Die in Worten ausgedrückte Rechenanweisung können wir in abgekürzter Form schreiben. Dabei verwenden wir für den Flächeninhalt die Abkürzung F, und für die Länge und Breite setzen wir a und b. Daraus ergibt sich $F = a \cdot b$.

Man kann nach dieser Kurzform den Flächeninhalt eines jeden Rechtecks berechnen. Solche allgemeingültigen Rechenanweisungen werden in allen Teilgebieten der Mathematik und in den Naturwissenschaften, besonders in der Physik und in der Chemie, angewendet. Man nennt sie Formeln. Sie geben uns die Möglichkeit, mathematische Zusammenhänge einfach, mit wenigen Zeichen allgemeingültig auszudrücken. Die Zeichen a und b stehen dabei für die zunächst unbestimmten Größen der Länge und Breite. Im Einzelfall setzt man für a und b die gegebenen Zahlen mit ihren Benennungen ein. Davon haben wir bereits in der Geometrie Gebrauch gemacht.

Buchstabenzeichen für Zahlen werden in der Praxis und in der Wissenschaft häufig verwendet. Sie werden vor allem dann benötigt, wenn man vom Einzelfall absehen und eine Berechnung allgemein ausführen will. Daher werden Buchstabenzeichen für Zahlen auch **allgemeine Zahlsymbole** genannt.

2) Wenn wir das Nettogewicht einer Ware mit N, das Verpackungsgewicht (Tara) mit T und das Gesamtgewicht (Brutto) mit B bezeichnen, so gilt die Rechenanweisung

$$N + T = B,$$

das heißt, die Summe aus Nettogewicht und Tara ist gleich dem Bruttogewicht. Auch hier kann man für N und für T irgendwelche Werte einsetzen, durch die B eindeutig bestimmt wird. Wenn man eine solche

Rechenanweisung aufstellt, muß man die Bedeutung der allgemeinen Zahlsymbole angeben. Man muß z. B. sagen, daß w den Prozentwert, p den Prozentsatz und g den Grundwert bedeuten sollen.

In einem Rechenausdruck bedeuten gleiche Symbole auch gleiche Zahlen. Als allgemeine Zahlsymbole wählt man zumeist lateinische Kleinbuchstaben, und zwar entweder die ersten Buchstaben des Alphabets oder für geometrische, physikalische und andere Größen die betreffenden Anfangsbuchstaben (z. B. s für Seite, h für Höhe, t für Zeit von lat. tempus, g für Grundwert, p für Prozentsatz). Für unbekannte Zahlen werden im allgemeinen die letzten Buchstaben des Alphabets, vor allem x, y und z, verwendet.

3) Mit allgemeinen Zahlsymbolen kann man alle Rechenoperationen ausführen, die wir schon vom Rechnen mit bestimmten Zahlen her kennen.

Soll a um 1 vermehrt werden, so erhalten wir $a + 1$. Auf diese Weise können wir von a aus beliebig weit vorwärts und rückwärts zählen.

$$\ldots a - 3,\ a - 2,\ a - 1,\ a,\ a + 1,\ a + 2,\ a + 3 \ldots$$

Die Zahl a liegt also zwischen den Zahlen $a - 1$ und $a + 1$.

Soll a verdoppelt werden, so erhalten wir $2 \cdot a$ (vgl.: Das Doppelte von 5 ist $2 \cdot 5 = 10$). Die Hälfte von a ist $\frac{a}{2}$. Der Ausdruck $x \cdot y \cdot z$ gibt somit das Produkt der Zahlen x, y und z an.

Da für die Multiplikation der uns bekannten Zahlen das Vertauschungsgesetz und das Verbindungsgesetz gelten, kann man auch in Produkten, in denen allgemeine Zahlsymbole auftreten, die Faktoren vertauschen und sie (bei mehreren Faktoren) beliebig zu Teilprodukten zusammenfassen. Es ist $a \cdot 4 = 4 \cdot a$ und $1{,}6 \cdot z \cdot 4{,}5 \cdot x = 1{,}6 \cdot 4{,}5 \cdot z \cdot x = 7{,}2 \cdot x \cdot z$.

Es ist üblich, bei Produkten zunächst die mit Ziffern geschriebenen Faktoren zu einem Teilprodukt zusammenzufassen, das Ergebnis niederzuschreiben und die mit allgemeinen Zahlsymbolen bezeichneten Faktoren alphabetisch geordnet anzufügen (siehe Beispiel).

4) Falls Irrtümer ausgeschlossen sind, kann der Punkt als Multiplikationszeichen weggelassen werden:

$$4 \cdot a = 4a$$
$$7{,}2 \cdot x \cdot z = 7{,}2\,x\,z$$
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = a\,b\,c\,d$$

Merke: Plus- oder Minuszeichen sowie die Divisionszeichen (Doppelpunkt oder Divisionsstrich) dürfen auch beim Rechnen mit allgemeinen Zahlsymbolen niemals weggelassen werden!

Zusammenfassung:

1. Beim Rechnen mit bestimmten Zahlen verwendet man als Symbole die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Beim Rechnen mit allgemeinen Zahlsymbolen verwendet man als Symbole Buchstaben, z. B. a, b, c.

2. **Die Bedeutung der einzelnen allgemeinen Zahlsymbole muß eindeutig festgelegt sein. Daraus ergibt sich, welche Zahlen für das einzelne allgemeine Zahlsymbol eingesetzt werden können.**

3. **Die Wahl der Symbole ist beliebig, jedoch bedeuten in einem Rechenausdruck gleiche allgemeine Zahlsymbole stets die gleiche Zahl. Für verschiedene Zahlen müssen auch verschiedene allgemeine Zahlsymbole gewählt werden.**

Aufgaben

1. Welche Zahl ist

   a) um 1 größer als 23, 99, 1000, a, x, $b + 2$,
   b) um 3 größer als 23, 99, 1000, a, x, $b + 2$,
   c) um a größer als 23, 99, 1000, a, x, $b + 2$,
   d) um $2b$ größer als 17, 28, 62, a, $2a$, b, $2b$?

2. Welche Zahl ist

   a) um 1 kleiner als 23, 99, 1000, a, x, $b + 2$,
   b) um 3 kleiner als 23, 99, 1000, a, x, $b + 2$,
   c) um a kleiner als 23, 99, 1000, a, x, $b + 2$,
   d) um $2r$ kleiner als 49, 51, $2a$, $2r$, $3r$, $2s$?

3. Zwischen welchen beiden benachbarten Zahlen liegen

   a) 3, 9, -12, 0, x, k, b) $a + 2$, $y - 3$, $b - 7$, $x + 9$, $y - 1$, $z - 11$?
   In diesen Aufgaben bedeuten x, k, a, y, b, z ganze Zahlen.

4. Vergleiche die Zahlen!

a)			b)		
18	und	12	a	und	$a + 2$
-6	und	6	$x - 3$	und	$x - 5$
-13	und	-8	$m + 5$	und	$m - 5$
0	und	9	a	und	$a - 4$

5. Zähle von $p - 6$ bis $p + 5$, $b - 7$ bis $b - 12$, $f - 3$ bis $f + 2$, $t + 3$ bis $t - 10$, $3 + s$ bis $-3 + s$, $-6 - x$ bis $1 - x$!

6. Um wieviel ist

   a) $x + 5$ größer als x, $x + 5$ größer als 5, a größer als b,
   b) 7,5 größer als y, y größer als 7,5, $9z$ größer als $4{,}2z$?

7. Um wieviel ist

   a) x kleiner als $x + 7$, $y - 4{,}4$ kleiner als y, $5x$ kleiner als $15x$,
   b) a kleiner als $b + a$, b kleiner als $a + b$, x kleiner als $3x + 3y$?

8. Welche Zahl ist

a) 3mal, 4mal, 9mal, 16mal, 23mal so groß wie 36,
b) 5mal, 12mal, 17mal, 29mal so groß wie x,
c) 4mal, 12mal, $a$mal, $p$mal, $s$mal so groß wie 72,
d) $a$mal, $k$mal, $m$mal, $x$mal, $y$mal so groß wie b?

9. Welche Zahl ist

a) die Hälfte von 3, 8, $25\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{10}$, a, x,
b) der dritte Teil von 12, 36, 111, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{7}$, $2\frac{1}{3}$, b, y,
c) der n-te Teil von 9, 14, 21, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, d, k, n?

10. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats in cm², wenn eine Seite
a) 2 cm, 3 cm, 5 cm, 30 cm, **b)** a cm, x cm, $2y$ cm, $0{,}4y$ cm lang ist?

11. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten
a) 5 cm und 3 cm, 25 cm und 35 cm, 5,6 cm und 7,3 cm,
b) a cm und b cm, 6 cm und d cm, $3{,}5x$ cm und $5{,}6z$ cm?

12. Ein Dreher stellt in einer Schicht durchschnittlich 6 Werkstücke her. Wieviel Werkstücke fertigt er in 5, 2, 6, a Schichten?

13. 1 kg einer Ware kostet 1,12 DM. Wieviel kosten 3 kg, 6 kg, x kg? Welche Werte kann x annehmen?

14. Berechne aus folgenden Angaben den Preis für 1 kg!

a) 3 kg kosten 42,00 DM,	**b)** 27 kg kosten 54,00 DM,
c) 38 kg kosten 104,50 DM,	**d)** 18,500 kg kosten 27,75 DM,
e) 12 kg kosten c DM,	**f)** a kg kosten b DM.

15. Welcher Hektarertrag von Roggen wird erzielt?

a) 17 ha ergeben 374 dz,	**b)** 13 ha ergeben 325 dz,
c) 9 ha ergeben 252 dz,	**d)** a ha ergeben c dz.

16. Berechne den Preis für 8 m Stoff, wenn

a) 3 m Stoff 15 DM kosten,	**b)** 11 m Stoff 79,75 DM kosten,
c) 13 m Stoff e DM kosten,	**d)** f m Stoff e DM kosten.

e) Welcher Preis wäre für g m zu zahlen, wenn f m Stoff e DM kosten?

17. Folgende Rechenaufgabe sei gestellt: „Denke dir eine Zahl, zähle 5 hinzu, verdreifache die Summe, ziehe die gedachte Zahl ab und ziehe schließlich 15 ab! Wer richtig gerechnet hat, muß das Doppelte der gedachten Zahl erhalten!“ Weise nach, daß diese Aufgabe bei jeder beliebig gewählten Zahl zum angegebenen Ergebnis führt!

7. Auswertung von Ausdrücken mit allgemeinen Zahlsymbolen

Allgemeine Zahlsymbole stehen für bestimmte Zahlen. Sie sollen einen Rechengang festlegen, der für sehr viele Einzelfälle vorgeschrieben ist. Wollen wir einen Einzelfall berechnen, müssen wir für die allgemeinen Zahlsymbole bestimmte Zahlen **einsetzen.**

Beispiel: Wir berechnen die Fläche eines Rechtecks nach der Formel $F = a \cdot b$. Ein Rechteck wird aus den Seiten $a = 2{,}3$ cm und $b = 1{,}5$ cm gebildet. Berechne die Fläche!

$F = a \cdot b$	$2{,}3 \cdot 1{,}5$
$F = 2{,}3 \cdot 1{,}5\ \text{cm}^2$	23 115
$F = 3{,}45\ \text{cm}^2$	3,45

Die Fläche beträgt $3{,}45\ \text{cm}^2$.

Aufgaben

1. Berechne den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten

a) $a = 4{,}5$ cm, $b = 3{,}8$ cm, b) $a = 1{,}8$ m, $b = 27$ cm,

c) $a = 52{,}3$ mm, $b = 3{,}06$ mm!

2. Setze in die Formel $N + T = B$ für N und T folgende Werte ein und berechne das Bruttogewicht!

a) $N = 26{,}5$ kg, $T = 3{,}0$ kg b) $N = 15{,}8$ kg, $T = 8{,}9$ kg

3. Welchen Wert haben die folgenden Rechenausdrücke, wenn man $l = 24$, $m = 20$, $n = 16$, $p = 12$ und $r = 10$ setzt?

a)	b)	c)	d)	e)
$l + m$	$l - m$	$l + m + n$	$l \cdot m$	$l : p$
$l + n$	$l - n$	$l + p + r$	$l \cdot p$	$l : r$
$l + p$	$l - p$	$m + p + r$	$m \cdot r$	$m : n$
$l + r$	$l - r$	$n + l + r$	$m \cdot p$	$m : p$

4. Setze in die folgenden Rechenausdrücke für a die Zahl 4 und für b die Zahl 6 ein und berechne ihren Wert!

a) $2a + 6$ b) $3b - 9$ c) $4a + 2b$ d) $9a - 3b$

e) $5 + \frac{a}{2}$ f) $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ g) $3\frac{1}{4}a + 2\frac{1}{6}b$ h) $8\frac{2}{3}b - 12a$

5. Setze für die allgemeinen Zahlsymbole die gegebenen Werte ein!

a) $b = 12$: $9b$, $12b$, $21b$, $13\frac{2}{3}b$, $\frac{2}{7}b$, $8{,}75b$, $15\frac{7}{8}b$, $0{,}375b$

b) $x = 36$: $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{10}$, $\frac{3x}{7}$, $\frac{9x}{11}$, $\frac{5x}{18}$, $\frac{23x}{24}$

c) $y = 1\frac{1}{2}$: $4y$, $3\frac{1}{2}y$, $\frac{y}{3}$, $\frac{y}{9}$, $\frac{3y}{5}$, $\frac{12y}{23}$, $\frac{4}{3y}$, $\frac{7}{5y}$

6. $a + b - c$

a)	$a = 25$	$b = 17$	$c = 32$
b)	$a = 14{,}9$	$b = 31{,}07$	$c = 18{,}75$
c)	$a = \frac{2}{3}$	$b = \frac{5}{6}$	$c = \frac{7}{8}$
d)	$a = 10\frac{1}{2}$	$b = 5\frac{7}{9}$	$c = 7\frac{3}{4}$

7. $4x - 3m + 5n$

a)	$x = 10$	$m = 9$	$n = 13$
b)	$x = 15{,}3$	$m = 20{,}4$	$n = 18{,}5$
c)	$x = 6\frac{2}{5}$	$m = 3\frac{3}{4}$	$n = 5\frac{7}{10}$

8. $3\frac{1}{2}v + 8\frac{3}{4}w + 9\frac{5}{6}x - 10\frac{8}{9}y$

a)	$v = 8$	$w = 12$	$x = 6$	$y = 16$
b)	$v = -4$	$w = 8$	$x = -12$	$y = -16$
c)	$v = 1\frac{1}{2}$	$w = 2\frac{2}{3}$	$x = \frac{3}{4}$	$y = 1\frac{1}{2}$

9. Wie groß ist der Wert des Rechenausdrucks $\frac{x}{y}$, wenn für x und y die folgenden bestimmten Zahlen eingesetzt werden?

a) $x = 16$, $y = 144$ **b)** $x = 5$, $y = 4$ **c)** $x = 85$, $y = 17$ **d)** $x = 144$, $y = 12$

e) $x = 2$, $y = \frac{3}{8}$ **f)** $x = 2\frac{5}{11}$, $y = \frac{9}{11}$ **g)** $x = \frac{15}{56}$, $y = \frac{3}{8}$ **h)** $x = 0$, y beliebig (außer Null)

10. In dem Rechenausdruck $y = 4x + 2$ soll x nacheinander die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 annehmen. Zu diesem Zweck legen wir eine Wertetafel folgenden Musters an:

$y = 4x + 2$

x	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+9$	$+10$
y	$+6$	$+10$	$+14$	$+18$	$+22$					

Trage die fehlenden Werte für y ein!

11. Vervollständige nach dem Beispiel der Aufgabe 10 die Wertetafel für $x = a + 3$! Dabei soll a die Werte von -5 bis $+5$ durchlaufen.

$x = a + 3$

a	-5	-4	-3	-2	-1						$+5$
x	-2	-1									

12. Lege für die folgenden Rechenausdrücke Wertetafeln an! Dabei soll x jeweils die ganzen Zahlen von $+1$ bis $+8$ durchlaufen.

a) $y = 2x$ **b)** $y = \frac{4x}{5}$ **c)** $y = \frac{8}{9x}$ **d)** $y = \frac{2x+8}{9}$

e) $y = \frac{10+5x}{7}$ **f)** $y = \frac{25-3x}{12}$ **g)** $y = \frac{8+4x}{2x+5}$ **h)** $y = \frac{16x-15}{24-x}$

13. Zeichne die Strecken $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm und $d = 2$ cm! Konstruiere die Strecke e!

a) $e=a+b$ **b)** $e=a-b$ **c)** $e=a+b-c$ **d)** $e=2d+b$

e) $e=c-2d$ **f)** $e=a-b+2c$ **g)** $e=2a-b$ **h)** $e=2b+2d$

Miß die „Ergebnisstrecke" e und vergleiche das Meßergebnis mit dem rechnerischen Ergebnis!

14. Wir bezeichnen die Länge eines Quaders mit a, die Breite mit b und seine Höhe mit c. Bilde die Formel für den Rauminhalt V und berechne das Volumen folgender Quader!

a) $a = 23$ cm, $b = 14$ cm, $c = 20$ cm
b) $a = 3{,}25$ m, $b = 61{,}3$ dm, $c = 19{,}7$ dm
c) $a = 27$ cm, $b = 316$ mm, $c = 5{,}4$ dm
d) $a = 95{,}1$ dm, $b = 8{,}25$ m, $c = 736$ cm

8. Addition und Subtraktion

In jeder Additionsaufgabe kann man die Summanden vertauschen, ohne daß sich der Wert der Summe ändert:

$3 + 2 = 5, \quad 2 + 3 = 5, \quad$ also $\quad 3 + 2 = 2 + 3,$

$(-8)+(+9)=(+1), \ (+9)+(-8)=(+1),$ also $(-8)+(+9)=(+9)+(-8).$

Mit Hilfe der allgemeinen Zahlsymbole können wir dieses Rechengesetz allgemein darstellen. Wir bezeichnen den einen Summanden mit a, den anderen mit b. Dann gilt stets

$$\boldsymbol{a + b = b + a.}$$

Dieses Rechengesetz ist uns als das **Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz) der Addition** bekannt.

Es sei a irgendeine beliebige Zahl. Sie kann positiv oder negativ oder gleich Null sein. Dann versteht man unter $-a$ die zu a entgegengesetzte Zahl. Ist a positiv, so ist $-a$ negativ; ist a negativ, so ist $-a$ positiv; ist $a = 0$, so ist auch $-a = 0$.

Beispiele: Es sei $a = +5$, dann ist $-a = -5$;
es sei $a = -5$, dann ist $-a = +5$;
es sei $a = 0$, dann ist $-a = 0$.

Das Minuszeichen vor a ist ein Vorzeichen. Es gibt an, daß die zu a entgegengesetzte Zahl gemeint ist.

Wie vor bestimmten Zahlen, so kann man auch vor allgemeinen Zahlsymbolen das Vorzeichen $+$ weglassen, wenn dadurch keine Mißverständnisse möglich sind. $\quad +5 = 5 \qquad +a = a$

Die Subtraktion einer Zahl kann durch die Addition der entsprechenden entgegengesetzten Zahl ersetzt werden. Auf diese Weise erhält man Ausdrücke, die nur Summen enthalten; man nennt sie **algebraische Summen.**

Beispiele:

$$\begin{aligned} 5 - 3 &= 5 + (-3) \\ -2 - 4 &= (-2) + (-4) \\ b - a &= b + (-a). \end{aligned}$$

Zur Unterscheidung von den algebraischen Summen auf den rechten Seiten der Beispiele nennt man die Form auf den linken Seiten „gemischte Ausdrücke".

Bei den algebraischen Summen können die Glieder nach dem Kommutativgesetz vertauscht werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 5a - 9b + 2a &= 5a + (-9b) + 2a \\ &= 5a + 2a \quad + (-9b) \end{aligned}$$

Die Glieder $5a$ und $2a$ unterscheiden sich nur durch die Faktoren 5 und 2; sie sind gleichartig. Dagegen sind die Glieder $5a$ und $9b$ ungleichartig.

Gleichartige Glieder kann man zusammenfassen.

$$\underbrace{a + a + a + a + a}_{5a} \quad + \quad \underbrace{a + a}_{2a} = 7a$$

Wir bilden die Summe (Differenz) gleichartiger Glieder, indem wir die bestimmten Zahlenfaktoren addieren (subtrahieren).

Die Aufgabe ergibt also:

$$5a + (-9b) + 2a = 7a + (-9b)$$

Wird das Ergebnis als gemischter Ausdruck geschrieben, so lautet es:

$$7a - 9b$$

Ungleichartige Glieder können nicht zusammengefaßt werden, da a und b verschiedene Zahlen darstellen. Ohne Kenntnis der Werte dieser Zahlen ist ein weiteres Zusammenfassen nicht möglich.

Wenn in einer Aufgabe mehrere Additionen und Subtraktionen ausgeführt werden sollen, so kann man die Reihenfolge beliebig verändern.

Beispiel: $\quad 6a + 9b + 5c + b - 2a - 4c$

Ordnen: $\quad = \underbrace{6a - 2a} + \underbrace{9b + b} + \underbrace{5c - 4c}$

Zusammenfassen: $\quad = \quad 4a \quad + \quad 10b \quad + \quad c$

Zusammenfassung:

1. **Die Glieder einer Additionsaufgabe können vertauscht werden:** $a + b = b + a$ **(Kommutativgesetz).**
2. **Die zu a entgegengesetzte Zahl ist $-a$. Ist a negativ, so ist $-a$ positiv.**
3. **In einem Ausdruck kann man die Reihenfolge, in der die Additionen und Subtraktionen ausgeführt werden, verändern.**
4. **Gleichartige Glieder können zusammengefaßt werden.**

Aufgaben

1. Setze $a = 2$ cm, $b = 3$ cm und stelle die Rechenvorgänge und Lösungen an der Zahlengeraden dar!

   a) $a + a$ b) $b + b$ c) $a - a$ d) $b - b$
   e) $2a + a$ f) $2b - b$ g) $a + b$ h) $a - b$

2. a) Welche Zahl mußt du von a subtrahieren, um $a - b$ zu erhalten?
   b) Von welcher Zahl mußt du b subtrahieren, um $a - b$ zu erhalten?

3. Welche Differenz ist ihrem absoluten Betrag nach größer,

   a) die der Zahlen 5 und 3 oder die der Zahlen 3 und 5,
   b) die der Zahlen -9 und 4 oder die der Zahlen 4 und -9,
   c) die der Zahlen a und b oder die der Zahlen b und a?

   Mache dir zur Lösung der Aufgaben a) und b) die Beziehungen an der Zahlengeraden klar!

Ordne und fasse zusammen:

4. a) $357 - 69 + 43 + 269 - 15$ b) $478 - 82 - 43 - 178 - 68$
   c) $29 + 7b + 3 + 3b$ d) $65z + 14z - 38 + 20 - 78z + 18$
   e) $84a + 67 - 15a + 33 - 100$ f) $3c + 38 - 17 + 9c - c + 17$
   g) $46x + 86 - 13x + 14 - 30x$ h) $-30k + 98 + 16k + 2 - 99 + 15k$

5. a) $-5x - 12 - 4m - 3x + 1 + 9x - 5m + 10m + 11$
   b) $+7b - 5c - 3b - 9c - 8a + 3c - 7b + 9a$
   c) $27m - 31n + 9x - 31m - 3x + 21n + 5m + 9n - 7x$
   d) $28m + 45n + 73p - 54p - 28n - 53n + 23m - 19p$
   e) $19 - 26x + 15y - 31z + y - 28 + 40z - 30$
   f) $44a + 18d - 12c + 34b - 16a + d + c - 33b$
   g) $18g - 7c + 15i - 4h + 86k - 13k + 24g + 44 - 23i + h$
   h) $r - 19s + 65 + 15t - 13u - s + 36r - 80 - 7u + 85t$

6. a) $6\frac{1}{2}b + 15c - 19d + 3\frac{1}{2}b - 7\frac{3}{4}c + 20d$
   b) $13 + 5\frac{2}{3}p - q + 3\frac{5}{6}r - 6\frac{3}{4} - 1\frac{5}{6}p + 18\frac{7}{8} + 5\frac{1}{6}r$

c) $-\frac{1}{2}v + \frac{5}{7}w + 14\frac{7}{9} - 3\frac{2}{5}x + 7\frac{1}{2}v + 18\frac{2}{7}w + 5\frac{7}{10}x + 5\frac{4}{9}$

d) $14\frac{1}{3}c - 10\frac{1}{2}d + 2\frac{1}{3} - 5\frac{2}{5}e + 14\frac{4}{9}f - 7\frac{1}{6}c + 18\frac{2}{3} - 9\frac{1}{2}d - 6\frac{7}{10}e + \frac{2}{9}f$

7. a) $4\frac{1}{2}x + 3\frac{2}{3}y + 3\frac{1}{4}x$ **b)** $7\frac{4}{5}a + 3\frac{1}{4}b + 2\frac{2}{5}a$

c) $6\frac{4}{5}d + 7\frac{1}{4}e - 5\frac{1}{2}d - 2\frac{1}{2}e$ **d)** $1\frac{2}{3}m + 5\frac{1}{2}n - \frac{5}{6}m + \frac{3}{4}n$

e) $6\frac{4}{5}a - 8\frac{7}{8}b + 15\frac{5}{6}c - 12\frac{1}{3}c + 10\frac{3}{4}b - 3\frac{3}{10}a$

f) $10\frac{7}{9}z + 16\frac{1}{8}x - 30\frac{4}{5}y - 15\frac{3}{4}x + 22\frac{11}{12}x + 3\frac{7}{8}w + 32\frac{1}{2}y + 6\frac{1}{8}w$

8. a) $6{,}5c + 13{,}8d - 4{,}49c$ **b)** $13{,}225x + 10{,}086y - 13{,}22x$

c) $7{,}3a + 1{,}63b + 2{,}96a - 0{,}78b - 8{,}06a$

d) $19{,}0065e - 13{,}618g - 34{,}7586f + 35{,}193f - 16{,}26e + 15{,}518g$

e) $6{,}75a + 1{,}48b + 60c - 3{,}785b + 87{,}3c - 3a - 12{,}678c$

9. Monom und Binom

Der Umfang u eines Rechtecks wird aus den vier Seiten gebildet (Abb. 1).

$$u = a + b + a + b = a + a + b + b = 2a + 2b$$

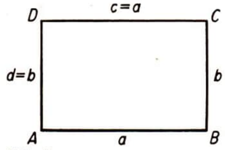


Abb. 1

Der Ausdruck $2a + 2b$ ist eine Summe aus zwei ungleichartigen Summanden. Man nennt einen solchen Ausdruck ein **Binom**. Im Gegensatz dazu nennt man einen eingliedrigen Ausdruck, z. B. a, $3x$ oder pxz, ein **Monom**. Allgemein wird ein mehrgliedriger Ausdruck **Polynom** genannt.

Monome: z. B. $4b$; $\frac{3}{4}x$; $0{,}75y$

Polynome
- Binome: z. B. $2a + b$; $4ab - 3cd$; $\frac{2}{3}x + \frac{y}{5}$
- Ausdrücke, die aus mehr als zwei Gliedern bestehen: z. B. $2a + b - c$; $3{,}9a^2 + 2{,}1ab - 3{,}2a + 0{,}56$

Aufgaben

1. Nenne **a)** 3 Monome, **b)** 3 Binome, **c)** 3 Ausdrücke mit mehr als zwei Gliedern!

2. Bilde mit Hilfe von w, x, $2y$, $3z$ **a)** 3 Monome, **b)** 3 Binome, **c)** 3 Ausdrücke mit mehr als zwei Gliedern!

10. Klammern

In einem Polynom, in dem nur Additionen vorkommen, können die Glieder beliebig zu Teilsummen zusammengefaßt werden **(Assoziativgesetz der Addition)**.

Beispiele: $15 + 8 + 5 = (15 + 8) + 5 = 15 + (8 + 5)$,

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

Enthält dagegen ein Polynom auch Subtraktionen, so können die Glieder nicht beliebig zu Teilausdrücken zusammengefaßt werden.

$$15 - 8 + 5$$

$(15 - 8) + 5$	$15 - (8 + 5)$
$= 7 + 5 = 12$	$= 15 - 13 = 2$

Also: $(15 - 8) + 5 \neq 15 - (8 + 5)$.

Mitunter ist in einem Ausdruck die Bildung von Teilausdrücken von vornherein durch Klammern vorgeschrieben. Die Klammern bedeuten dann, daß erst die von ihnen eingeschlossenen Teilausdrücke zusammengefaßt werden sollen. Man sagt dafür: Die Klammer wird „ausgerechnet".

Beispiel:

$$25 - (8 + 4) =$$
$$25 - 12 = 13$$

Beim Rechnen mit allgemeinen Zahlsymbolen kann man häufig nicht die Klammer ausrechnen, weil sie ungleichartige Glieder enthält. Dann wendet man das „Auflösen" der Klammern an. Betrachten wir hierzu vier Beispiele.

Beispiel 1: Es treten nur Pluszeichen auf.

$$15 + (8 + 5) = 15 + 8 + 5 = 28$$
$$a + (b + c) = a + b + c$$

Wegen des Assoziativgesetzes der Addition

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

kann man die Klammern einfach weglassen.

Beispiel 2: Vor der Klammer steht ein Pluszeichen, in der Klammer steht ein Minuszeichen.

$$15 + (8 - 5)$$
$$a + (b - c)$$

Wir führen die Subtraktion auf die Addition der entgegengesetzten Zahl zurück:

$$15 + (8 - 5) = 15 + [8 + (-5)],$$
$$a + (b - c) = a + [b + (-c)].$$

Damit ist Beispiel 2 auf Beispiel 1 zurückgeführt:

$$15 + (8 - 5) = 15 + [8 + (-5)] = 15 + 8 + (-5) = 15 + 8 - 5$$
$$a + (b - c) = a + [b + (-c)] = a + b + (-c) = a + b - c.$$

Man kann also auch hier die Klammern einfach weglassen.

Beispiel 3: Vor der Klammer steht ein Minuszeichen, in der Klammer steht ein Pluszeichen.

$$15 - (8 + 5)$$
$$a - (b + c)$$

Zu dem Ergebnis kann man auf zwei Wegen gelangen:

a) Von 15 sollen 8 und 5, also insgesamt 13, subtrahiert werden.

$$15 - (8 + 5)$$
$$= 15 - 13 = 2$$

b) Von 15 sollen 8 und 5 subtrahiert werden. Also subtrahiert man zuerst 8 und erhält 7. Von 7 subtrahiert man dann 5 und erhält 2.

$$15 - (8 + 5)$$
$$= 15 - 8 - 5 = 2$$

Für den Rechenausdruck mit allgemeinen Zahlsymbolen muß die zweite Form verwendet werden.

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

In diesem Falle kann man also die Klammer nicht ohne weiteres weglassen. Man muß vielmehr beim Auflösen die Addition in der Klammer in die Subtraktion umkehren.

Beispiel 4: Vor der Klammer steht ein Minuszeichen, in der Klammer steht ebenfalls ein Minuszeichen.

$$15 - (8 - 5)$$
$$a - (b - c)$$

Wir überlegen ähnlich wie bei Beispiel 3:

$$15 - (8 - 5) = 15 - 8 + 5,$$
$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Wie im Beispiel 3 muß man beim Auflösen der Klammer die Rechenoperation in der Klammer umkehren.

Vergleichen wir die Beispiele 1 bis 4 miteinander, so stellen wir fest:

Steht vor der Klammer ein Pluszeichen, so kann man die Klammer weglassen. Steht vor der Klammer ein Minuszeichen, so muß man beim Auflösen der Klammer die Zeichen in der Klammer in die entgegengesetzten Zeichen verändern.

Oft haben wir beim Kopfrechnen mit Klammern gerechnet, ohne daß wir uns dessen bewußt waren. Wir haben damit Rechenvorteile ausgenutzt.

Beispiele:

a) $687 + 225 = 687 + (200 + 25) = 687 + 200 + 25 = 887 + 25 = 912$
$$a + (b + c) = a + b + c = (a + b) + c$$

b) $290 + 395 = 290 + (400 - 5) = 290 + 400 - 5 = 690 - 5 = 685$
$$a + (b - c) = a + b - c = (a + b) - c$$

c) $547 - 112 = 547 - (100 + 12) = 547 - 100 - 12 = 447 - 12 = 435$
$$a - (b + c) = a - b - c = (a - b) - c$$

d) $350 - 197 = 350 - (200 - 3) = 350 - 200 + 3 = 150 + 3 = 153$
$$a - (b - c) = a - b + c = (a - b) + c$$

Zusammenfassung:

Beim Auflösen einer Klammer müssen wir folgende Regeln beachten:

$$\boldsymbol{a + (b + c) = a + b + c,}$$
$$\boldsymbol{a + (b - c) = a + b - c,}$$
$$\boldsymbol{a - (b + c) = a - b - c,}$$
$$\boldsymbol{a - (b - c) = a - b + c.}$$

Die Zeichen in der zu bildenden Klammer bleiben unverändert, wenn ein Pluszeichen vor ihr steht, sie sind in die entgegengesetzten zu verändern, wenn ein Minuszeichen davorsteht.

Aufgaben

1. Die Richtigkeit der Klammerauflösung bei der Verwendung allgemeiner Zahlsymbole kann man nachprüfen, indem man bestimmte Zahlen einsetzt. Man berechnet dann den Ausdruck nach beiden Formen des unter Beispiel 3 angegebenen Lösungsweges.

Setze in dem Ausdruck **a)** $a - (b + c)$, **b)** $a - (b - c)$
$a = 5$, $b = 2$ und $c = 1$!

2. **a)** $48 + (24 + 12)$ **b)** $97 - (38 + 15)$
c) $120 - (34 - 17) - (28 - 15)$ **d)** $-17 + (38 - 21) + (16 + 81)$
e) $-(-18 + 26) - (49 + 11) - (333 - 14)$
f) $85 + (16 - 10) - 50 - (23 - 12)$
g) $15 + (18 - 7 + 11) - (26 - 13 + 9)$
h) $(14 - 16 + 21) - (33 - 20 + 6) + 10$

3. Ordne bei den folgenden Ausdrücken die beiden letzten Glieder in eine Klammer ein, vor der einmal ein Pluszeichen und dann ein Minuszeichen steht!

Beispiel: $32 + 8 - 9 = 32 + (\ldots)$ $\quad 32 + 8 - 9 = 32 - (\ldots)$

a) $32 - 8 + 9$ **b)** $58 - 19 + 7$ **c)** $98 - 27 - 12$
d) $5{,}9 + 7{,}8 - 6{,}2$ **e)** $4a + 3b + 6c$ **f)** $9a - 5b + 6c$
g) $7a - 3b - 6c$ **h)** $3a + 5b - 2c$ **i)** $4a - 2b - 3c$

Löse bei den Aufgaben 4 bis 7 zunächst die Klammern auf, ordne nach gleichartigen Gliedern und fasse diese zusammen!

4. a) $15x - (2x + 5)$ **b)** $14a + (15 - 4a)$
c) $38 - (16 + 36)$ **d)** $7b - (3b + a)$
e) $2a + (3a - b)$ **f)** $19y - (18y + z)$
g) $2a + (3a - 4b + c)$ **h)** $(18x + 15z) - (12z + 6x)$

5. a) $10x + (3x - 2y) + (2y - 13x)$
b) $(15a - 26b + 13c) - (12a - 27b + 12c) - b$
c) $(4k + 7l - 5m) + (6k - 5l - 3k) - (-5k + m - 2l)$
d) $(24a + 16b - 13c + 17d) + (-13a + 4b + 20c - 14d)$

6. a) $17\tfrac{7}{8}m - \left(4\tfrac{3}{4}a + 12\tfrac{3}{4}m\right)$
b) $\left(19\tfrac{1}{4}s - 12\tfrac{11}{20}t + 5\tfrac{4}{5}r\right) + \left(-11\tfrac{3}{4}s - 2\tfrac{3}{10}r + 16\tfrac{7}{10}t\right)$
c) $76\tfrac{2}{3}e - \left(-23\tfrac{1}{3}e + 4\tfrac{5}{6}f - 6\tfrac{1}{6}g\right) + \left(-4\tfrac{5}{6}e + 5\tfrac{1}{3}f\right)$

7. a) $15r + (6{,}75 + 2{,}5r) - 9{,}8t - (-10{,}25t + 14{,}95r - 6{,}05s)$
b) $-(15{,}7a + 9{,}85c - 0{,}19b) + (20{,}8a + 1{,}81b + 9{,}85c)$
c) $(7{,}3x - 19{,}5y + 16{,}7z) - (4{,}9x + 2{,}5y + 2{,}6z) + 3{,}4x$
d) $(25{,}7a + 13{,}6b) - (14c + 13{,}2a) - (2{,}3a - 14{,}7b - 13{,}7c)$
e) $(21{,}8k - 15{,}65n + 18{,}05m) - (-15{,}15n + 20k + 18m)$

8. Schreibe die folgenden Aufgaben mit Klammern!

a) Addiere zur Summe der Zahlen 19 und 16 ihre Differenz!
b) Addiere zur Differenz der Zahlen a und b ihre Summe!
c) Subtrahiere von der Differenz der Zahlen a und b ihre Summe!
d) Addiere zur Differenz der Zahlen x und y ihre Differenz!
e) Subtrahiere von der Differenz der Zahlen x und y ihre Differenz!

9. Drücke folgende Rechenausdrücke in Worten aus und vereinfache sie!

a) $x + (x - y)$ **b)** $x - (x + y)$ **c)** $(x + y) + (x + y)$
d) $(x - y) + (x + y)$ **e)** $(x + y) - (x + y)$ **f)** $(x + y) - (x - y)$

11. Multiplikation von Monomen

Ein Produkt aus bestimmten und allgemeinen Zahlsymbolen wird gebildet, indem man zunächst die bestimmten Zahlen multipliziert und dann die allgemeinen Zahlsymbole in alphabetischer Reihenfolge anfügt.

Beispiele:

$$4x \cdot 5 = 20x$$
$$4x \cdot 3y = 12xy$$
$$3a \cdot b \cdot b = 3ab^2$$

Mehrere gleiche Faktoren können als Potenz geschrieben werden.

Bei der Berechnung eines Produktes muß man die Vorzeichenregel beachten.

Beispiele:

$$3a \cdot (-b) \cdot b = -3ab^2$$
$$(+4a) \cdot (-3b) = -12ab$$
$$(-7c) \cdot (-3d) \cdot 4e = 84cde$$

Ein Produkt ist gleich Null, wenn wenigstens ein Faktor gleich Null ist.

Beispiele:

$$3 \cdot 0 = 0 \qquad 0 \cdot 5 \cdot 0 = 0 \qquad a \cdot 0 \cdot 2b \cdot 3c = 0$$

Aufgaben

1. Schreibe die folgenden Summen als Produkte!

a) $3 + 3 + 3 + 3$ **b)** $a + a + a + a + a$
c) $4x + 4x + 4x$ **d)** $rs + rs + rs$

2. Schreibe die folgenden Produkte als Potenzen!

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **b)** $2 \cdot 2 \cdot 2$ **c)** $y \cdot y \cdot y \cdot y$
d) $(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b)$ **e)** $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$ **f)** $2(e+f)(e+f)$
g) $(m-n) \cdot (m-n) \cdot (m-n) \cdot (m-n)$ **h)** $5(x+y)(x+y)$

3. **a)** $3 \cdot 4a$ **b)** $19 \cdot 7b$ **c)** $4x \cdot 6$ **d)** $17r \cdot 9$
e) $24 \cdot 3y$ **f)** $46k \cdot 7$ **g)** $19 \cdot 3{,}8p$ **h)** $14{,}7c \cdot 26$
i) $16\frac{2}{3}mn \cdot 11\frac{7}{10}o$ **k)** $91{,}5ek \cdot 3\frac{2}{5}lo$ **l)** $13\frac{7}{10}cd \cdot 12{,}8ef$ **m)** $26{,}125sr \cdot 15\frac{3}{8}tu$

4. Fasse die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich zusammen!

a) $5a + 5a$ **b)** $a^5 + a^5$ **c)** $5a \cdot 5a$
d) $5a + a^5 + 5a$ **e)** $x + x + 3x + 4x + x$
f) $x \cdot x \cdot 3x \cdot 4x \cdot x$ **g)** $x + x + x^3 + x^4 + x$

5. a) $19ab \cdot 21ac$ b) $35xy \cdot 12yz$ c) $18vw \cdot 71ow$

d) $1\frac{1}{4}ab \cdot 1\frac{3}{5}bc \cdot 2\frac{1}{2}ad$ e) $3\frac{2}{25}xz \cdot 2\frac{3}{11}yz \cdot 6\frac{8}{35}xy$

f) $4\frac{1}{2}am \cdot 2\frac{2}{9}an \cdot 1\frac{3}{4}ap$ g) $19{,}8abc \cdot 12{,}9acd \cdot 8{,}25abd$

6. Vereinfache die folgenden Produkte!

a) $a \cdot (-b)$ b) $(-m) \cdot (-n)$ c) $(-c) \cdot d$

d) $6a \cdot (-4)$ e) $(-9) \cdot (-3b)$ f) $(-12) \cdot (-12x)$

g) $(-8a) \cdot (-7b)$ h) $3c \cdot 9d$ i) $0 \cdot 12y$

k) $(-16abc) \cdot (-3bc)$ l) $13xy \cdot (-13xyz)$ m) $(-4abc) \cdot (-16bcd)$

7. Rechne wie bei Aufgabe 6!

a) $a \cdot (-b) \cdot (-c)$ b) $(-x) \cdot (-y) \cdot (-z)$

c) $(-2m) \cdot 3n \cdot 4p$ d) $5a \cdot (-2b) \cdot 0 \cdot 4d$

e) $(-10m) \cdot 4n \cdot (-3p) \cdot (-5q)$ f) $\left(-3\frac{1}{2}uv\right) \cdot \left(-\frac{13}{14}vw\right) \cdot 5\frac{3}{5}wx \cdot \frac{25}{26}xy$

8. Welche Zahl ist a) um 16 kleiner, b) um 17 größer als das Produkt der Zahlen x und y?

9. Multipliziere das doppelte Produkt der Zahlen a und b mit dem Vierfachen der Zahl a!

10. Multipliziere das Dreifache von x mit dem vierfachen Produkt der Zahlen x und y!

11. Multipliziere das doppelte Produkt der Zahlen y und z mit dem Dreifachen der Zahl y und mit der Hälfte der Zahl z!

12. Division von Monomen

Eine Divisionsaufgabe kann in Bruchform geschrieben werden. Zum Beispiel ist $3:4$ gleichbedeutend mit $\frac{3}{4}$. Das gilt auch, wenn Dividend und Divisor durch allgemeine Zahlsymbole angegeben werden:

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Dem Dividend entspricht der Zähler, dem Divisor der Nenner des Bruches.

Bei der Division ist zu beachten, daß der Divisor nicht gleich 0 sein darf; denn eine **Division durch 0 ist nicht möglich.**

Dividend und Divisor können auch Produkte sein. Treten dabei gemeinsame Faktoren auf, so kann man diese gemeinsamen Faktoren nach den Regeln der Bruchrechnung kürzen.

Beispiel 1:

$25a : 5 = \frac{25a}{5} = \frac{5a}{1} = 5a$ Probe: $5a \cdot 5 = 25 \cdot a = 25a$

Der gemeinsame Faktor 5 im Zähler und Nenner des Bruches wird gekürzt.

Beispiel 2:

$25a : a = \frac{25a}{a} = \frac{25}{1} = 25$, wenn $a \neq 0$ ist. Probe: $25 \cdot a = 25a$.

Der gemeinsame Faktor a im Zähler und Nenner wird gekürzt. (Bedingung: $a \neq 0$)

Beispiel 3: $\frac{a}{a} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot a} = 1$

Eine von Null verschiedene Zahl, durch sich selbst dividiert, ergibt stets 1. Vergleiche $\frac{4}{4} = 1$.

Beispiel 4:

$$25x^2y : 5xy^2 = \frac{25x^2y}{5xy^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y}{5 \cdot x \cdot y \cdot y} = \frac{5x}{y}$$

Probe: $\frac{5x}{y} \cdot 5xy^2 = \frac{5x \cdot 5x \cdot y \cdot y}{y} = 25x^2y$

Auch bei Divisionsaufgaben muß die Vorzeichenregel beachtet werden.

$(-3a^2) : (+4a) = \frac{-3a^2}{+4a} = -\frac{3}{4}a$; $(-3a^2) : (-4a) = \frac{-3a^2}{-4a} = +\frac{3}{4}a$

Aufgaben

1. a) $6a : 6$ b) $9x : 9$ c) $16b : 4$ d) $15y : 5$
   e) $20ab : 4$ f) $144c : 16$ g) $72a : 12$ h) $100yz : 25$

2. a) $z : z$ b) $2m : m$ c) $30bc : 15b$ d) $18ef : 18e$
   e) $24xy : 3y$ f) $22mno : 2mo$ g) $32klm : 32km$ h) $36pq : 9pq$

3. a) $24c : 12c$ b) $1{,}2x : 0{,}6$ c) $8rt : \frac{7}{9}rt$ d) $9{,}6ab : 8ab$
   e) $5\frac{1}{5}b : 13$ f) $8\frac{1}{4}y^2 : 44$ g) $11\frac{1}{3}xy : 17xy$ h) $\frac{5}{8}a^2b : 3\frac{1}{3}b$

4. Vereinfache folgende Quotienten!
   a) $42np : (-6p)$ b) $(-169a^2b^2) : 13ab$
   c) $(-72cd^2) : (-9cd)$ d) $85m^2n^2 : (-17m^2n)$
   e) $\frac{15abc}{-5ab^2c}$ f) $\frac{-104r^2st}{-13rst}$ g) $\frac{-62{,}5e^2fg^2}{0{,}5e^2fg}$ h) $\frac{0{,}9xyz}{-1{,}6x^2y^2}$ i) $\frac{-aby^2}{a^2b^2c^2}$

5. a) $\frac{3x \cdot 2y}{2}$ b) $\frac{36x \cdot 4y}{9}$ c) $\frac{12xy \cdot 3z}{z}$ d) $\frac{27a^2b \cdot 4c}{ac}$

6. a) Dividiere das Produkt der Zahlen 6 und 7 durch 21!
b) Multipliziere die Zahl a mit 9 und dividiere das Produkt durch 18!

13. Verbindung der vier Grundrechenarten

Addition und Subtraktion werden als Rechenarten erster Stufe, Multiplikation und Division als Rechenarten zweiter Stufe bezeichnet. Wegen der Form der Operationszeichen spricht man auch von Strichrechnen und Punktrechnen. Treten in einer Aufgabe mehrere Rechenarten auf, so werden zunächst die Operationen der zweiten Stufe ausgeführt.

Beispiel 1:

$$36 - 10 \cdot 3$$
$$= 36 - 30 = 6$$

Beispiel 2:

$$15a - 3a \cdot 2$$
$$= 15a - 6a = 9a$$

Beispiel 3: $6a \cdot 2c + 3b \cdot 2d + b \cdot 5d - 2a \cdot 5c$

Multiplizieren: $= 12ac + 6bd + 5bd - 10ac$

Ordnen: $= 12ac - 10ac + 6bd + 5bd$

Zusammenfassen: $= 2ac + 11bd$

Beispiel 4: $16a^2b : 4ab - 6ab : 2b + 24ab^2 : 12b^2$

$$= 4a - 3a + 2a$$
$$= 3a$$

Aufgaben

1. a) $34 - 12 \cdot 2 + 16 : 4$ b) $95 : 19 - 33 : 11 + 2 \cdot 5$
c) $144 - 120 : 15 + 4 \cdot 21$ d) $40 - 4\frac{2}{3} \cdot 4\frac{2}{5} + 3\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{5}$
e) $14 + 3\frac{11}{20} : \frac{9}{20} - 6\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$ f) $19{,}75 - 0{,}294 : 14 + 5{,}608 : 0{,}08$

2. a) $15a - 9a : 3$ b) $21x + 3 \cdot 5x$ c) $29y - 20 \cdot y$
d) $4 \cdot 3y - 10y$ e) $16x \cdot 4 + 6x$ f) $8b : 2 - 4b$
g) $13f \cdot 4 + 8f$ h) $42p : 21 - p$ i) $19r \cdot 2s - 38rs$

3. a) $81y : 3 - 17y$ b) $11b : 22 + 1\frac{1}{2}b$ c) $7m - 14m : 2$
d) $14n : 7 - n$ e) $7k : 14 - \frac{k}{2}$ f) $50p - 20p : 20$

4. a) $24a : 12 + 96a : 32$ b) $18b : 6 - 21b : 7$ c) $22x \cdot 2 + 3 \cdot 4x$
d) $30y \cdot 3 - 2y \cdot 5$ e) $28z : 7 + 6 \cdot 4z$ f) $60y : 5y + 8y : 2y$

5. a) $3x \cdot 4y + 2y \cdot z - 5y \cdot 2x + 8z \cdot y$
b) $6m \cdot 3n - 3n \cdot 2m + 3q \cdot 5r - 5r \cdot q$
c) $4a \cdot 2b - 8b \cdot a + 16c \cdot 2d - 2d \cdot 15c$
d) $28e \cdot 4f + 19e \cdot 2f - 15g \cdot 2h + 25h \cdot 2g$
e) $21yz - 13xz + 5z \cdot 3y + 8z \cdot 2x - xz + 24yz$

6. a) $25a^2b : 5ab - 10ab : 2b + 20ab^2 : 5b^2$
b) $60x^2y^2z : 15x^2y + 12x^2y : 3x + 4x \cdot 2y$
c) $8q \cdot 4r + 40q^2rs^2 : 10qs^2 + 36qr^2s : 12qrs - 38qr$
d) $169ab : 13ab - 5ab \cdot 4ab + 9ab \cdot 2a \cdot 5ab + 9a^2b^2$

7. Stelle fest, ob die Klammern das Ergebnis ändern!

a) $12a \cdot 3b : 4$
$(12a \cdot 3b) : 4$
$12a \cdot (3b : 4)$

b) $3\frac{3}{5}x : 3\frac{3}{4}y \cdot \frac{5}{8}z$
$3\frac{3}{5}x : \left(3\frac{3}{4}y \cdot \frac{5}{8}z\right)$
$\left(3\frac{3}{5}x : 3\frac{3}{4}y\right) \cdot \frac{5}{8}z$

8. Löse möglichst vorteilhaft die folgenden Aufgaben!

a) $36b \cdot 13cd : 4b$ b) $104x^2y \cdot 75z^3 : 13xy$
c) $12rst : 32xy \cdot 96xyz$ d) $9{,}7m^2n : 1{,}7rs \cdot 15{,}3rst$
e) $96efg : 16e \cdot 3g$ f) $144x^2y : 6bx - 12xy$
g) $16{,}8a^2b^2c^2 : 2{,}8ab^2 \cdot 3{,}5c^2$ h) $4\frac{1}{5}u^2vw^2 : \frac{16}{55}uw \cdot 1\frac{3}{8}vw$

14. Multiplikation von Polynomen mit Monomen

Beim mündlichen Multiplizieren größerer Zahlen zerlegen wir die Faktoren. Die Aufgabe $5 \cdot 74$ berechnen wir, indem wir 74 in $70 + 4$ zerlegen und die Glieder einzeln mit 5 multiplizieren.

$$5 \cdot 74 =$$
$$5(70 + 4) = 5 \cdot 70 + 5 \cdot 4 = 350 + 20 = 370.$$

Diese Umformung nennt man **Ausmultiplizieren.**

Sie wird durch das **Verteilungs- oder Distributivgesetz** mit allgemeinen Zahlsymbolen ausgedrückt:

$$\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac}$$

Das Distributivgesetz kann man für positive Zahlen a, b und c am Flächeninhalt eines Rechtecks veranschaulichen (Abb. 2).

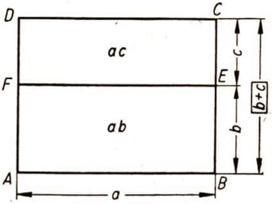


Abb. 2

Das Rechteck $ABCD$ mit dem Flächeninhalt $F = a(b + c)$, setzt sich aus dem Rechteck $ABEF$ mit dem Flächeninhalt ab und dem Rechteck $FECD$ mit dem Flächeninhalt ac zusammen.

Es ist aber

$$ABCD = ABEF + FECD,$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Die Abbildung 3 veranschaulicht die Multiplikation eines Monoms mit einem Binom, das eine Differenz darstellt:

$$\mathbf{a(b - c) = ab - ac.}$$

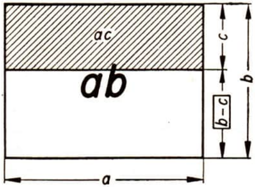


Abb. 3

Die Faktoren a und $(b + c)$ können nach dem Kommutativgesetz vertauscht werden:

$$\mathbf{a(b + c) = ab + ac}$$
$$\mathbf{(b + c)a = ab + ac}$$

$$\mathbf{a(b - c) = ab - ac}$$
$$\mathbf{(b - c)a = ab - ac}$$

Für die Berechnung derartiger Ausdrücke merke dir folgende Regel:

Ein Polynom wird mit einem Monom multipliziert, indem man nacheinander die einzelnen Glieder des Polynoms mit dem Monom multipliziert. Die Vorzeichen werden nach der Vorzeichenregel für die Multiplikation ermittelt.

Beispiele:

$$2a(3b + c) = 6ab + 2ac$$
$$(3b - c)\,2a = 6ab - 2ac$$
$$2a(3b + 2c - d) = 6ab + 4ac - 2ad$$

Aufgaben

1. a) $(a + b)\,14$ **b)** $(6 - y)(-21)$ **c)** $(13 + c)\,d$ **d)** $(a + b)\,4$
e) $12(x - y)$ **f)** $o(m + n)$ **g)** $x(x - y)$ **h)** $b(3a + b)$
i) $(-m)(4n - 3c)$ **k)** $(-10r)(4s + 15t)$ **l)** $18k(3k + 4l)$
m) $(14x - 12y)(-6y)$ **n)** $2\frac{1}{2}a(5a + 3b)$ **o)** $\left(3\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{2}y\right)x$

2. a) $(9x + 12y) \cdot (-3c)$ **b)** $(24ab - 12ac) \cdot 3a$
c) $(-r - 3s) \cdot (-4t)$ **d)** $(-3{,}5m + 0{,}12n) \cdot (-7k)$

e) $(-0{,}6\,x)\cdot(-0{,}8\,xy^2 - 0{,}5\,x^2y)$ **f)** $\left(-5\frac{1}{2}vw^2\right)\cdot(-3wx + 5wy)$

g) $\left(12\frac{2}{3}pq - 3\frac{5}{6}pq^2\right)\cdot 10py$ **h)** $c\cdot(12a^2bc - 16ab^2c)$

3. a) $11(4a - 5y + 10)$ **b)** $m(n + p - q)$

c) $(-r)(s - t + u - v)$ **d)** $(6m + 14x - 10z)\,2{,}5v$

e) $(7m - 9n + 0)\left(-4\frac{1}{2}a\right)$ **f)** $6{,}4o\,(30 - 0{,}8p + 3{,}1q)$

g) $(-3x)(2{,}5x + 2{,}1y - 0{,}5z)$ **h)** $(50 - 3p + 6q)\,4op$

4. Löse bei den folgenden Aufgaben zunächst die Klammern auf, ordne die Glieder und fasse sie zusammen! Beachte dabei, daß man die einzelnen Glieder immer alphabetisch ordnet!

Beispiel:	$2(x - y) - 3(x + y) - 9(x + y) + 12(x - y)$
Auflösen der Klammern:	$= 2x - 2y - 3x - 3y - 9x - 9y + 12x - 12y$
Ordnen:	$= 2x - 3x - 9x + 12x - 2y - 3y - 9y - 12y$
Zusammenfassen:	$= 2x - 26y$

a) $2(a - b) - 4(a + b)$

b) $12(2x + y) + (x - 2y)\,4$

c) $7(-2a + 3b) + 4(-2a + 5b)$

d) $3(a + b) - 6(a - b) + 5(a - b) - 2(a + b)$

e) $4m(-2n - 4k) - 3n(-4m + 6k) + 2k(5m - 6n)$

f) $4x(2x - y) - 3y(6x - 5y) + x(8x - y)$

g) $a(2a - 3b) + b(4a - 7b) - 6(5 - ab)$

h) $\frac{2}{3}a(x - 2y) - \frac{5}{6}x(3a - y) + \frac{7}{12}(12a - 7x)$

i) $0{,}25c(1{,}3d + 4{,}2e) - 0{,}85d(-2{,}7c - 3{,}1e) + 1{,}5e(3{,}8c - 4{,}2d)$

5. a) $(13a + 2b)4a - 3b(-2a - b) - 9b^2 - (6a^2 + 4b^2 - 3ab) + (-a + b)2a$

b) $(8x - y)\,3x + 9xy - (10x^2 + 4y^2 - xy) + 2y(-x + 4y)$

c) $4m(-3m + 2n) + 6mr - (3m^2 + 9mn + mr) - (8m + 4r)\,2n$

d) $(-6f + 3g)4g + (9f - 2g - f^2) + 8f(2f - g) + 3f^2 - 9g^2 - (3g^2 + 4fg - 10f^2)$

15. Division von Polynomen durch Monome

Auch beim Dividieren wenden wir im Kopfrechnen Rechenvorteile an, um uns den Lösungsweg zu erleichtern. Wir wollen z. B. den Quotienten der Zahlen 192 und 16 bestimmen. Der Dividend 192 wird in die Summe 160 + 32 zerlegt und jeder Summand durch den Divisor 16 dividiert. Die Summe der Teilquotienten ergibt die Lösung der Divisionsaufgabe.

$$192 : 16 = (160 + 32) : 16 = \frac{160 + 32}{16} = \frac{160}{16} + \frac{32}{16} = 10 + 2 = 12$$

Schreiben wir dies mit allgemeinen Zahlsymbolen, so ergibt sich:

$$(a+b):c = \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

$$\textbf{Probe:}\quad \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)c = \frac{ac}{c} + \frac{bc}{c} = a+b$$

Wir müssen dabei beachten, daß c nicht gleich Null ist: $c \neq 0$.

Eine entsprechende Form ergibt sich, wenn wir bei der Division 144 : 16 den Dividenden in die Differenz (160 — 16) zerlegen. Minuend und Subtrahend werden durch den Divisor dividiert, und die Differenz der Teilquotienten ergibt dann die Lösung der Aufgabe.

$$144:16 = (160-16):16 = \frac{160-16}{16} = \frac{160}{16} - \frac{16}{16} = 10 - 1 = 9$$

Allgemein gilt: $$(a-b):c = \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

$$\textbf{Probe:}\quad \left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)c = \frac{ac}{c} - \frac{bc}{c} = a-b$$

Beispiele für größere Aufgaben:

$$(24ab - 36bc):12abc = \frac{24ab}{12abc} - \frac{36bc}{12abc} = \frac{2}{c} - \frac{3}{a}$$

Probe: $$\left(\frac{2}{c}-\frac{3}{a}\right)\cdot 12abc = \frac{2\cdot 12abc}{c} - \frac{3\cdot 12abc}{a} = 24ab - 36bc$$

$$(18axz - 27byz + 81ayz):(-9z) = -\frac{18axz}{9z} + \frac{27byz}{9z} - \frac{81ayz}{9z}$$
$$= -2ax + 3by - 9ay$$

Probe: $$(-2ax+3by-9ay)\cdot(-9z) = 18axz - 27byz + 81ayz$$

Ein Polynom wird durch ein Monom dividiert, indem man jedes Glied des Polynoms durch das Monom dividiert. Dabei ist die Vorzeichenregel zu beachten.

Aufgaben

1. Berechne folgende Quotienten und führe jeweils die Probe durch!

a) $(65+39):13$ **b)** $(120-45):15$
c) $(85-34):17$ **d)** $(24x-12y):3$
e) $(63a+77b):7$ **f)** $(32a^2-12b^2):16$
g) $(28+70cy):14$ **h)** $(95by-57cy):19y$
i) $(60ac+108):12$ **k)** $(10ad-35d):5d$
l) $(23x^2+92bx^2):23x^2$ **m)** $(54a^2x-18a^2):9a^2$

2. a) $(-36abx-18bcx):(-18x)$ **b)** $(27m^2+63mn):(-9m)$
c) $(-75c^2x-105cx^2):15cx$ **d)** $(-33a-121a^2):(-11a)$

e) $(48mn^2 + 64m^2n) : (-16mn)$ f) $(40ars - 120brs) : 20rs$
g) $(91rs^2 - 117r^2s) : (-13rs)$ h) $(42e^2f - 98ef) : 14ef$

3. a) $(2xy + xy) : \frac{4}{5}xy$ b) $(10bc + 3cd) : \left(-\frac{1}{2}c\right)$
c) $\left(2\frac{2}{27}cd + 1\frac{5}{27}de\right) : \frac{4}{27}d$ d) $\left(\frac{1}{15}x^2yz + \frac{7}{15}xy^2z\right) : \left(-\frac{3}{5}xyz\right)$

4. a) $(21x^3 + 15x^2 - 9x) : 3x$ b) $(16ab + 12ac - 20ad) : (-4a)$
c) $(5{,}6kn + 0{,}72k^2n - 3{,}2k^2n^2 - 24kn^2) : (-0{,}8kn)$

5. a) $(42mn - 18nr + 6n) : 6n + (45my + 27ry - 18y) : 9y$
b) $\left(1\frac{2}{3}ah + 6\frac{1}{4}hr - 2\frac{1}{2}h\right) : 5h - \left(3\frac{1}{2}ab - 1\frac{1}{4}br + \frac{3}{4}b\right) : \left(-\frac{3}{8}b\right)$

6. a) $(2{,}1x^2 + 0{,}49xy - 35x^2y^2 + 6{,}3x) : 7x$
b) $(82{,}8a^2b^2 + 4{,}77ab^2 - 22{,}5ab - 4{,}5a^2b) : 9ab$
c) $(15{,}6x^2y - 25{,}2xy^2 - 40{,}8x^2y^2) : (-12xy)$
d) $(3{,}75mn^2 + 7{,}5m^2n - 9{,}5m^2n^2) : (-5mn)$

7. Dividiere die Differenz der Zahlen 135 und 75 durch 15 und multipliziere den Quotienten mit der Summe der Zahlen 20 und 5!

8. Dividiere die Summe der Zahlen 99 und 45 durch 12 und multipliziere den Quotienten mit der Differenz der Zahlen 10 und 2!

9. Vermehre $6a$ um 3 und dividiere die Summe durch 3!

10. Dividiere die Differenz der Produkte $18ax$ und $36a^2$ durch $9a$! Welchen Wert darf a nicht haben?

11. Dividiere die Differenz der Produkte x^2y und xy^2 durch das Produkt der Zahlen x und y! Welche Bedingung besteht für die Zahlen x und y?

16. Die Multiplikation von Polynomen mit Polynomen

Der Flächeninhalt eines Rechtecks soll berechnet werden. Die Länge setzt sich aus den Strecken a und b, die Breite aus den Strecken c und d zusammen (Abb. 4a). Wenn alle Maßangaben übereinstimmen, kann man die Beträge in die Flächenformel $F = a \cdot b$ einsetzen:

$$\begin{array}{l} \qquad\text{Länge} \qquad \text{Breite} \\ F = (a + b) \cdot (c + d) \\ F = ac + ad + bc + bd \end{array}$$

Beachte hierbei, daß das a der Flächenformel eine andere Bedeutung hat als das a der Längenangabe!

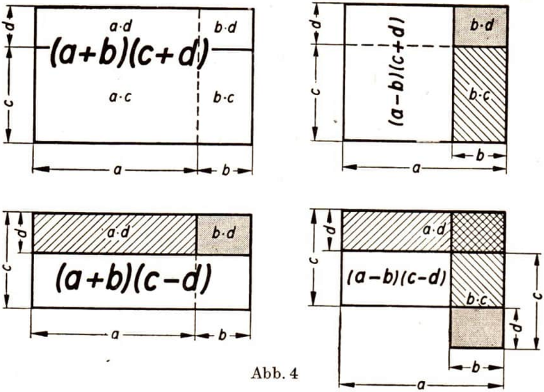


Abb. 4

Enthalten die Klammern Differenzen, so ermittelt man die Vorzeichen der Teilprodukte nach der Vorzeichenregel.

Es ergeben sich beim Ausmultiplizieren von Binomen 4 Fälle, die in der Abbildung 4a bis d geometrisch veranschaulicht werden:

1. $(a+b)\cdot(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$
2. $(a-b)\cdot(c+d) = a(c+d) - b(c+d) = ac + ad - bc - bd$
3. $(a+b)\cdot(c-d) = a(c-d) + b(c-d) = ac - ad + bc - bd$
4. $(a-b)\cdot(c-d) = a(c-d) - b(c-d) = ac - ad - bc + bd$

Mehr als zwei Ausdrücke werden miteinander multipliziert, indem man zunächst das Produkt zweier Faktoren bildet, dieses mit dem dritten Faktor multipliziert und entsprechend fortfährt.

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)(e+f) &= (ac+ad+bc+bd)(e+f)\\ &= ace+acf+ade+adf+bce+bcf\\ &\quad + bde+bdf\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Überprüfe die Richtigkeit der mit allgemeinen Zahlsymbolen ausgedrückten Rechenregel für die Multiplikation eines Binoms mit einem Binom! Setze in die Aufgabe $(a+b)\,(c+d) = ac + ad + bc + bd$ folgende Werte ein!

a) $a = 8, \quad b = 6, \quad c = 7, \quad d = 5$
b) $a = -4, \quad b = +2, \quad c = -3, \quad d = -5$

2. Vereinfache die folgenden Ausdrücke!
a) $7(3m - 5n) + (4n - 5m)\,6 + 2\,(7m + 3n)$
b) $4(7a - 3) - 12a - 3(2b - a) + 21b$
c) $8x(3x - 5y) - 5y(2x - 7y) + 6x(11x - 9y) - 7y(4x - 3y)$
d) $6a(4a - 2b) + (-4a + 2b)\,3b - (a + 5b)\,4a + b(-5a - b)$

3. a) $(12 + 2) \cdot (8 + 3)$ b) $(5 - 4) \cdot (9 + 6)$ c) $(12 + 8) \cdot (6 - 1)$
d) $(8 - 6) \cdot (6 - 3)$ e) $(a + 3)\,(c - 2)$ f) $(m + 4)\,(n + 5)$
g) $(x - 7)\,(5 - y)$ h) $(8 - c)\,(9 + d)$ i) $(2b - 3)\,(4a + 6)$
k) $(9x + 1)\,(3 - 4y)$ l) $(3f + 4g)\,(19 - k)$ m) $(3c - 2d)\,(3a - b)$

4. a) $(6a - 2b)\,(9a - b)$ b) $(5r + 2s)\,(3r + 7s)$
c) $(x - 4y)\,(4y + x)$ d) $(3a + b)\,(3a - b)$
e) $\left(3\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}y\right)(3x + 4y)$ f) $\left(4\frac{1}{3}v + 5w\right)\left(3v + 2\frac{1}{4}w\right)$

5. a) $(3a - 2b + c)\,(4a - 5b)$ b) $(9x - 10y)\,(2x + 3y - z)$
c) $(3q - 2r - 6s)\,(-q + r + s)$
d) $(-4v + 5w - 3x)\,(+4v - 6w + 2x)$
e) $6(bc - 3ad + 4bd - 2ac) + (3a - 2b)\,(4c + d)$

6. a) $(b + 6)\,(b - 5)\,(b - 4)$ b) $(3 + x)\,(6 + x)\,(5 - x)$
c) $(a - 1)\,(a - 2)\,(a - 3)$ d) $(4m + 6)\,(3m - 2)\,(m + 5)$
e) $(3 + 2y)\,(4 + 6y)\,(8 - 3y)$ f) $(3a - b)\,(4a + 2b)\,(a - 6b)$

7. Vergleiche die Ergebnisse der folgenden Aufgaben!
a) $(4a + 2b)\,3$ und $4a + 2b \cdot 3$
b) $(2m - 3n)\,(3m + 2n)$ und $2m - 3n \cdot 3m + 2n$
c) $4(15x - 12y)$ und $4 \cdot 15x - 12y$
d) $(3a + 4b - 2c)\,a + a^2$ und $3a + 4b - 2c \cdot a + a^2$

8. a) $(bc + 2cd - ac) + (2a - 3b)\,(c + d)$
b) $5ax - (3xz + 4yz - 6ay) + (2x - 3y)\,(4a + 5z)$
c) $4a(3a - 2b + 4c) + 3a^2 - 10ab + (6a + 2b)\,(3a + c) - 4bc$
d) $(3x + 9y)\,(2x - 4y + z) + 2\,(4x^2 - y^2 + 3xy) - (8xy + 2yz)$
e) $(a + b)\,(a + b) - 6a^2 + 3b^2 - 9ab - 8a\,(2a + b) + (a + b)(a - b)$
f) $(a + b)\,(a - b) + 19ab + 6a^2 - 12b^2 - (3a + 2b)\,(3a + 2b) + 6b^2$

9. a) Multipliziere die Summe der Zahlen 5 und 3 mit deren Differenz und dividiere das Produkt durch 64!

b) Vermehre a um 3 und multipliziere die Summe mit der Differenz der Zahlen a und 5! Das Produkt sollst du um $8a$ vermindern!

c) Multipliziere die Summe der Zahlen $3a$ und $5b$ mit 3 und subtrahiere vom Produkt $10a$!

d) Multipliziere das Polynom $3xy + 5y^2 - 3yz$ mit 4 und dividiere das Produkt durch $2y$!

e) Multipliziere die Differenz der Produkte $4ab$ und $5bc$ mit deren Summe und dividiere das Produkt durch b^2!

10. Drücke die folgenden Rechenanweisungen mit Worten aus und vereinfache sie soweit wie möglich!

a) $(4x + 3y)\,6 : 12$ **b)** $(2a + 3b)(2a - 3b) + 6a^2$

17. Die binomischen Formeln

Wir haben gelernt, wie mehrgliedrige Ausdrücke miteinander multipliziert werden. Drei besondere Fälle wollen wir uns gut einprägen:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Kurzform:

1. $\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
2. $\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
3. $\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

Mit Hilfe dieser binomischen Formeln kann man in besonderen Fällen das Rechnen beschleunigen.

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2\quad a \quad b + b^2$$

$$(3m - 3n)^2 = (3m)^2 - 2 \cdot 3m \cdot 3n + (3n)^2 = 9m^2 - 18mn + 9n^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2\quad a \quad b + b^2$$

$$(5r + 6s)(5r - 6s) = (5r)^2 - (6s)^2 = 25r^2 - 36s^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

In dem folgenden Beispiel muß man beachten, daß das Symbol a in der Formel eine andere Bedeutung besitzt als in der Aufgabe (desgl. b).

$$(4a + 7b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 7b + (7b)^2 = 16a^2 + 56ab + 49b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2\quad a \quad b + b^2$$

Mit Hilfe der binomischen Formeln ergeben sich oft Rechenvorteile. Wir betrachten dazu einige Beispiele:

$$34^2 = (30+4)^2$$
$$(30+4)^2 = 30^2 + 2\cdot 30\cdot 4 + 4^2 = 900 + 240 + 16 = 1156$$
$$58^2 = (60-2)^2$$
$$(60-2)^2 = 60^2 - 2\cdot 60\cdot 2 + 2^2 = 3600 - 240 + 4 = 3364$$
$$23\cdot 17 = (20+3)(20-3)$$
$$(20+3)(20-3) = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$$

Aufgaben

1. **a)** $(m+n)^2$ **b)** $(r+3)^2$ **c)** $(a+9)^2$ **d)** $(2+x)^2$
e) $(2b+6)^2$ **f)** $(3y+z)^2$ **g)** $(c-d)^2$ **h)** $(k-4)^2$
i) $(s-l)^2$ **k)** $(9-p)^2$ **l)** $(4c-12)^2$ **m)** $(6e-f)^2$

2. **a)** $(c+3)(c-3)$ **b)** $(19-a)(19+a)$ **c)** $(x+15)(x-15)$
d) $(x-y)(x+y)$ **e)** $(3a+4)(3a-4)$ **f)** $(2d+b)(2d-b)$

3. **a)** $(4a+3b)^2$ **b)** $(3a+2b)(3a-2b)$ **c)** $(2x-3z)^2$
d) $(11m+12n)^2$ **e)** $(2x-4y)(2x+4y)$ **f)** $(9r-10s)^2$

4. **a)** $\left(4\frac{1}{2}a-2b\right)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{3}b+9\right)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x\right)$
d) $\left(2b+\frac{a}{2}\right)^2$ **e)** $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$ **f)** $\left(\frac{2}{3}y+\frac{3}{4}z\right)^2$

5. **a)** $(0{,}3c-0{,}1)^2$ **b)** $(2{,}7+1{,}9x)^2$
c) $(0{,}9x-2{,}5y)(0{,}9x+2{,}5y)$ **d)** $(2{,}1a+1{,}6m)^2$
e) $\left(0{,}75e-3\frac{3}{4}f\right)^2$ **f)** $(7{,}6c+5{,}8d)(7{,}6c-5{,}8d)$

Löse die Aufgaben 6 bis 9 mit Hilfe der binomischen Formeln!

6. 31^2, 42^2, 52^2, 43^2, 54^2, 65^2, 53^2, 61^2, 62^2, 71^2, 72^2, 83^2, 93^2, 102^2

7. 29^2, 37^2, 48^2, 39^2, 49^2, 57^2, 68^2, 59^2, 67^2, 78^2, 87^2, 98^2, 108^2, 119^2, 137^2

8. $43\cdot 37$, $49\cdot 51$, $52\cdot 48$, $42\cdot 58$, $64\cdot 76$, $71\cdot 69$, $85\cdot 95$, $97\cdot 83$, $109\cdot 111$

9. 37^2-17^2, 36^2-19^2, 43^2-21^2, 51^2-6^2, 63^2-58^2, 60^2-38^2

10. Vereinfache die folgenden Rechenausdrücke soweit wie möglich!
a) $(x+y)^2+(x-y)^2$ **b)** $(3a-2b)^2-(a+4b)^2+6ab-b^2$
c) $(6m-2n)^2-(9m^2-10mn-n^2)+(m+5n)^2$

d) $(7c + 4d)^2 - (3c + 2d)(3c - 2d) - (c - 5d)^2 + 19c^2 - d^2$

e) $(6r - 5s)(6r + 5s) - (6r - 5s)^2 - (6r - 5s) + (6r + 5s)^2$

f) $(4p + 3q)(9p - 2q) - (p + 6q)^2 - (p + q)(6p - 5q)$
$+ (9p + 2q)^2 - 16p^2 + 11q^2$

g) $\left(2\frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 1\frac{1}{2}z\right)^2 + \left(2y + 3\frac{1}{4}z\right)^2$
$- (15y^2 + 16yz - 9z^2)$

h) $(3a - 0{,}6d)^2 - (1{,}5a + 2{,}1d)(1{,}5a - 2{,}1d) + (2{,}8a + 2{,}5d)^2$
$- (3{,}9a^2 - 6{,}7ad + 4{,}3d^2)$

11. a) Quadriere die Summe der Zahlen m und n und vermindere das Produkt um das doppelte Produkt dieser beiden Zahlen!

b) Multipliziere die Summe der Zahlen r und s mit deren Differenz!

18. Das Ausklammern von Faktoren

Im Kapitel 14 lernten wir das Ausmultiplizieren kennen.
Wir wollen nun die Umkehrung hierzu lernen, das Ausklammern.

Ausmultiplizieren	Ausklammern
$a(b + c) = ab + ac$	$ab + ac = a(b + c)$
$2a(3a + 5b) = 6a^2 + 10ab$	$6a^2 + 10ab = 2a(3a + 5b)$

Beim Ausklammern wird aus einer Summe ein Faktor, der in allen Summanden enthalten ist, herausgestellt. Die Summe wird in Klammern gesetzt.

Probe: Das Ergebnis wird überprüft, indem man wieder ausmultipliziert. Wende die Probe stets an, da häufig die Vorzeichen verändert werden müssen!

Beispiele:

1. $48a^2bc - 108ab^2c - 132a^2b^2 = 12ab(4ac - 9bc - 11ab)$
2. $ab + b = b(a + 1)$. Beachte, daß b als $1 \cdot b$ betrachtet werden kann!

Der ausgeklammerte Faktor kann auch ein Polynom sein.

3. $(3a - b)c + (3a - b)d = (3a - b)(c + d)$

Mitunter enthalten nicht alle Glieder einen gemeinsamen Faktor.

4. $xy - xz - ax + az$

Aus den beiden ersten Gliedern klammern wir den Faktor x aus:

$$xy - xz - ay + az = x(y - z) - ay + az.$$

Die beiden letzten Glieder enthalten den gemeinsamen Faktor a. Wenn wir jedoch eine Klammer bilden wollen, die mit der eben entstandenen $(y - z)$ übereinstimmen, muß der Faktor $-a$ ausgeklammert werden:

$$xy - xz - ay + az = x(y - z) - a(y - z).$$

Von der Richtigkeit überzeugen wir uns durch die Probe:

$$-a(y - z) = -ay + az.$$

Die beiden Summanden $x(y - z)$ und $-a(y - z)$ enthalten den gemeinsamen Faktor $(y - z)$. Diesen Faktor klammern wir jetzt aus:

$$x(y - z) - a(y - z) = (x - a)(y - z).$$

Also ist
$$xy - xz - ay + az = (x - a)(y - z).$$

Zusammenfassung:

1. **In einem Polynom kann man Faktoren, die in allen Gliedern enthalten sind, ausklammern.**
2. **Man klammert einen Faktor aus, indem man jedes Glied durch diesen Faktor dividiert, das Ergebnis in Klammern einschließt und den Faktor vor oder hinter die Klammer setzt.**

Aufgaben

Klammere gemeinsame Faktoren aus!

1. a) $6a + 6b$ **b)** $15x + 15y$ **c)** $ab + ac$
d) $7a^2 + 4a$ **e)** $5a - 20b$ **f)** $28a + 35b$
g) $-65ax + 39by$ **h)** $5a + 20b - 10d$ **i)** $ax - ay + az$
k) $24am - 16an - 32ao$ **l)** $50mn + 25m - 75n$

2. a) $8ax + 32ay - 88az$ **b)** $24by^2 - 120b^2y + 72bz$
c) $-13ab - 14b^2 - 16bc$ **d)** $63ce + 35ef - 70eg$
e) $25ab + 5ac - 10ad$ **f)** $-18abc + 20bcd - 22cde$
g) $96m^2n - 24mn^2 - 120m^2n^2$ **h)** $-42a^2bc - 7ab^2c - 49a^2b^2c^2$

Zerlege die Ausdrücke in den Aufgaben 3 bis 5 mit Hilfe der binomischen Formeln in Faktoren!

Beispiel: $16 + 8x + x^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + x^2 = (4 + x)^2$

3. a) $a^2 - 2ab + b^2$ **b)** $a^2 - b^2$ **c)** $a^2 + 2ab + b^2$
d) $9 - 6x + x^2$ **e)** $y^2 + 22y + 121$ **f)** $49c^2 - 64d^2$
g) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ **h)** $x^2 + 10xy + 25y^2$ **i)** $a^2 - 169$

4. a) $\frac{a^2}{9} - 3\frac{1}{3}a + 25$ b) $\frac{x^2}{4} + xy + y^2$ c) $\frac{4}{9}a^2 - b^2$
d) $324m^2 - 361n^2$ e) $\frac{121}{25}a^2 - 13\frac{1}{5}ab + 9b^2$ f) $x^2 - \frac{1}{4}$
g) $a^2 - 1$ h) $1 - 16b^2$ i) $a^2 - 2a + 1$

5. a) $x^2 - 4x + 4$ b) $1 + 5\frac{1}{2}y + 7\frac{9}{16}y^2$ c) $\frac{100}{9}r^2 - \frac{49}{25}s^2$
d) $9a^2 - 6ab + b^2$ e) $x^2 - 8x^2y + 16y^2$ f) $1 - \frac{9}{16}z^2$
g) $9a^2b^2 + 24ab^2x + 16b^2x^2$ h) $16m^2n^2 - 48amn + 36a^2$

6. a) $3(a + x) + 4(a + x)$ b) $(x + z)\,9 - (x + z)\,11$
c) $x(a - b) - y(a - b) + z(a - b)$ d) $3a(2m - n) - (2m - n)4b$
e) $(4x^2 + y)\,6b + (4x^2 + y)\,2a$ f) $4m(2a - 3b) + 3n(3b - 2a)$

7. a) $ac + bc + ad + bd$ b) $am - an - bm + bn$
c) $8ax - 12bx - 20ay + 30by$ d) $3ab + 9bc - 14dx + 21ex$

19. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Die folgenden Paare von Ausdrücken sollen durch das Gleichheitszeichen verbunden werden. Stelle jeweils fest, womit der zweite Ausdruck multipliziert werden muß, damit er dem ersten gleichgesetzt werden kann!

Lösungsbeispiel: $3a^2bc^2$ und abc; $3a^2bc^2 = abc \cdot 3ac$

a) $6x^2yz$ und $2xz$ b) $35mno^3$ und $7no^2$
c) $3\frac{3}{4}vw^3x$ und $1\frac{7}{8}vw^2$ d) $8\frac{1}{3}a^4de^2$ und $3\frac{1}{3}a^2e^2$
e) $20\frac{5}{8}x^4y^3z^2$ und $3\frac{1}{8}x^3y^2z$ f) $7\frac{1}{9}prs^4$ und $1\frac{1}{3}rs^2$

2. Welchen Wert nimmt x an, wenn $x = a - (b + c)$ gelten soll?
a) $a = 25,\quad b = 10,\quad c = 5$ b) $a = 12,\quad b = 15,\quad c = 3$
c) $a = 7\frac{7}{8},\ b = 13\frac{4}{5},\ c = 2\frac{1}{2}$ d) $a = 16{,}05,\ b = 21{,}15,\ c = 5{,}1$

3. a) Vermehre $3a$ um die Summe der Zahlen $2a$ und $3b$!
b) Vermindere die Summe der Zahlen $4b$ und $2c$ um die Differenz der gleichen Zahlen!
c) Vermehre die Summe der Zahlen $13x$ und $11y$ um die Differenz der Zahlen $19y$ und $14z$!

4. Kürze die folgenden Brüche!

a) $\frac{65xy}{104y}$ b) $\frac{85a^2cd}{17ad}$ c) $\frac{21r^2st^3}{63r^2s}$ d) $\frac{70a^2xz^2}{126ax^2z}$ e) $\frac{96c^2de^2}{30d^2ef}$ f) $\frac{12a^2bc}{40cde^2}$

5. Multipliziere aus und fasse zusammen!

a) $6(2x+4y)+9(3x-4y)-3(4x-5y)$
b) $12(-4a+3b)-6(3a-4b)-9(a-b)$
c) $5a(-2c-3d)-4c(3a+4d)+5d(2a-5c)$
d) $\frac{2}{3}r(5s+4t)-\frac{5}{6}t(-r-3s)+\frac{1}{3}s(4r-2t)$
e) $(0{,}15x-2{,}25y)\,3{,}81z+1{,}65y(-1{,}36x+4{,}76z)$
$-(4{,}23y+2{,}15z)\,0{,}85x$

6. Forme die folgenden Ausdrücke in Produkte bzw. in Potenzen um!

a) $x^2-bx-3x+3b$ b) $mx+ma+nx-na$
c) $81ab+27bc+45bd-189bf$
d) $36a^2-49b^2$ e) $81x^2-180xy+100y^2$ f) $\frac{4}{9}m^2-\frac{16}{25}n^2$
g) $225b^2+90bx+9x^2$ h) $0{,}16a^2-0{,}49c^2$ i) $\frac{a^4}{49}-\frac{y^4}{25}$
k) $169n^2-\frac{1}{16}v^2$ l) $36abc-72abd+144abe-108abf$
m) $\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{15}xy+\frac{4}{25}y^2$ n) $30am-15a-24bm+12b$

7. Wende die binomischen Formeln an!

a) $(1+x)^2$ b) $(a-9)^2$ c) $(12-c)(12+c)$
d) $(3a+x)^2$ e) $(4ax+9by)^2$ f) $(19uv-23vw)^2$
g) $\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{3}{5}b\right)$ h) $\left(\frac{4}{5}z-\frac{2}{5}y\right)^2$ i) $\left(2x-2\frac{1}{2}y\right)^2$
k) $\left(\frac{3}{4}n+3m\right)^2$ l) $(x+y)^2+(x-y)^2$
m) $(u-v)^2-(u+v)^2$ n) $(2a+6)^2-(6+2a)^2$
o) $(1-9y)^2+(9y+1)^2$ p) $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\left(a-\frac{b}{2}\right)^2$

8. Vereinfache die folgenden Ausdrücke!

a) $(9a-3b)^2-(15a^2-3ab-6b^2)+(2a-b)^2+(a-4b)(a+4b)$
b) $-(9m^2-16mn+25n^2)+(3m-4n)^2-(2m+n)^2$
$+(m-8n)(m+8n)$
c) $(8u+v)(8u-v)-20u^2-(3uv+6v^2)+(2u+3v)^2-(3u-2v)^2$
d) $(5z-13y)^2-(3z+12y)(3z-12y)-y(288y-90z)$
e) $(u+v)^2-(u-v)^2+2(u+v)(u-v)+4v^2$
f) $(3a+4b)^2+(3a-4b)^2+7(a+b)(a-b)$

9. Kürze die folgenden Quotienten soweit wie möglich!

a) $15ab : (-3a)$ **b)** $(-2{,}4xy) : 0{,}8y$

c) $2\frac{3}{4}mn : \frac{3}{4}m$ **d)** $(-20fg^2) : (-5fg)$

e) $(6{,}4xy - 11{,}2xz) : (-1{,}6x)$ **f)** $\left(1\frac{1}{9}cd - \frac{2}{3}c\right) : \frac{2}{3}c$

10. a) $(104mp - 65mr) : (-13m) - (105np - 165nr) : 15n$

b) $(3ab - 2bc)\,a : ab + 27(a - c) - (15ad + 21cd) : 3d$

c) $(2{,}1x^2 + 0{,}49xy) : x + (35x^2y^2 + 6{,}3x) : 7x$

d) $(9{,}6a^2b - 8{,}4ab^2) : (-12ab) + (36a^2b^2 - 60ab) : 1{,}2ab$

11. a) Vermehre das Dreifache der Zahl a um b, dividiere die Summe durch das Produkt aus der Zahl 6 und der Zahl c!

b) Vermindere die Zahl x um das Fünffache der Zahl y und dividiere die Differenz durch die Summe aus der Zahl m und dem Doppelten der Zahl n!

c) Das um 10 verminderte Produkt der Zahlen e und d wird durch das vierfache Produkt der Zahlen a und b dividiert.

12. Formuliere folgende Rechenanweisungen in Worten!

a) $\frac{a+b}{c}$ **b)** $\frac{4x+y}{xy}$ **c)** $\frac{x}{y} - a$ **d)** $ab + \frac{c}{d}$

13. Bilde die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten aus den Zahlen

a) 18 und 5; **b)** 10 und 12; **c)** a und 3; **d)** 5 und x;
e) x und y; **f)** $10ab$ und $12ab$; **g)** $6x^2y$ und $3x^2y$!

14. Vereinfache!

a) $(4a - 3b + 2c) - (12a - 10b + c)$

b) $(18c - 15d + 21e - 9f) + (15c - 13d + 19e + 10f) - (c + d - 3e)$

c) $26r - (15r + 12t) - (s - 11t) + (4r + 5s) - 10s + 21t$

d) $20v - 10w + (24x + 19y - 15z) - 18w\,(11v + 4x + 88z)$

e) $10\frac{3}{4}m - 9\frac{5}{8}n - \left(4\frac{6}{7}o - 10\frac{3}{4}n\right) + \left(9\frac{3}{5}m - 8\frac{13}{14}o - 4\frac{7}{10}m + 1\frac{5}{12}n\right)$

f) $35{,}5i + (19{,}3k - 4{,}8l + 9{,}6m) - (4{,}4m + 3{,}9i) - (6{,}7k - 9{,}2l)$

15. Vereinfache die folgenden Ausdrücke!

a) $6a(3b - 2c + 4d) - 4b(3a + 4c - d) + 5c(2a - 3b + 6d)$

b) $17b(-3x + 4y - 6z) - (-9x - 5y + z)\cdot 15b - 84bx - 143by$

c) $35pr + 19ps - 3s\,(14p + 15r) + 21ps + 3(s + 10p)\,18ps$

16. a) Stelle eine Formel für die Berechnung der Wichte γ auf! (Verwende für das Gewicht und das Volumen die Kurzzeichen G und V.)

b) Welche Zahlen können für G und V eingesetzt werden?

c) Ermittle die Formel zur Berechnung des Volumens eines Quaders, wenn a, b und c die Kantenlängen sind! Wie berechnet man die Wichte eines quaderförmigen Körpers?

d) Ein Stab von der Form eines Quaders hat die Maße $a = b = 15$ mm, $c = 160$ mm; er wiegt 220 p. Wie groß ist die Wichte des Materials und um welches Material könnte es sich handeln?

17. Nach dem Hebelgesetz ist bei Gleichgewicht das Produkt aus der ersten Kraft P_1 und deren Kraftarm a_1 gleich dem Produkt aus der zweiten Kraft P_2 und deren Kraftarm a_2.

a) Stelle die Formel auf!

b) Überlege, welche Bedeutung negative Werte von P_1, P_2, a_1 und a_2 haben! Stelle dazu die Kräfte P_1 und die Last P_2 als Pfeile dar und deute eine negative Hebelarmlänge als Drehung des Hebelarms um 180°!

c) Welche der Zahlen P_1, P_2, a_1 und a_2 können den Wert Null annehmen?

IV. Lineare Gleichungen

20. Aufgaben zur Wiederholung

1. a) Die Gleichung $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ können wir auch in der Form $120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ schreiben. Auf Grund welchen Gesetzes aus der Gleichungslehre ist das möglich?

b) Bilde andere Gleichungen dieser Art!

2. Aus der Gleichung $144 = 12 \cdot 12$ kann man folgende neue Gleichungen herleiten:

a) $150 = 12 \cdot 12 + 6$

b) $140 = 12 \cdot 12 - 4$

c) $1440 = 12 \cdot 120$

d) $72 = 12 \cdot 6$

Wie lautet das Grundgesetz der Gleichungslehre, das bei der Bildung der Gleichungen benutzt wurde? Bilde weitere Beispiele!

3. a) Was verstehst du unter einer Bestimmungsgleichung? Bilde solche Gleichungen!

b) Erkläre die Grundregel: Beim Lösen einer Bestimmungsgleichung muß man die Unbekannte isolieren!

c) Welche Schritte müssen nacheinander durchgeführt werden, um eine Bestimmungsgleichung nach der Unbekannten aufzulösen?

4. Bei den folgenden Bestimmungsgleichungen sind die angegebenen Lösungen ermittelt worden. Überprüfe, ob die Lösungen richtig sind! In den Fällen, bei denen dies nicht der Fall ist, bestimme die richtige Lösung!

a) $15x = 57 - 9x + 5x; \quad x = 3$

b) $14 - 8x = 19 - 3x; \quad x = 1$

c) $29\frac{1}{4}x + 14\frac{1}{3} = 32\frac{5}{6}x; \quad x = 4$

d) $x = 91 - 76x - 35 + 27x + 47 + 9x + 33 + 7x; \quad x = 4$

e) $51x - 45 + 71 - 9x = x - 145 + 39 - 47x; \quad x = 1\frac{1}{2}$

5. Löse folgende Bestimmungsgleichungen und mache jeweils die Probe!

a) $17 - 5x = 3x - 23$ **b)** $9{,}8 - 0{,}9x = 0{,}4x + 0{,}7$

c) $7{,}3x - 2{,}6 - 8{,}1x + 4{,}1 + 1{,}7x = 2{,}5 + 3{,}8x - 9{,}7$

d) $19x - 17 - 3x + 7{,}2 = 12 + 9x - 25 + 4x + 83$

e) $5\frac{1}{4}x : 1 = 7 : 4$ **f)** $3\frac{1}{3}x = 4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{2}x$

21. Das Lösen von Bestimmungsgleichungen (Erweiterungen)

Wir wollen uns jetzt Bestimmungsgleichungen zuwenden, die als gegebene Größen auch allgemeine Zahlsymbole enthalten.

1) Der Koeffizient (Zahlenfaktor) von x ist eine bestimmte Zahl.

Beispiel: $5x + a = 2b - 3a \quad | -a$

Ordnen: $5x = 2b - 4a \quad | :5$

Isolieren: $x = \frac{2b-4a}{5}$

Probe: Linke Seite: $5 \cdot \frac{2b-4a}{5} + a = 2b - 4a + a = 2b - 3a$

Rechte Seite: $2b - 3a$

Vergleich: $2b - 3a = 2b - 3a$

2) Die Unbekannte x ist mehrmals enthalten und hat gleiche allgemeine Zahlsymbole als Koeffizienten.

Beispiel: $2mp - 3{,}5mx = 8mq - 5{,}5mx - 4mp \quad | -2mp + 5{,}5mx$

Ordnen: $-3{,}5mx + 5{,}5mx = 8mq - 4mp - 2mp$

Zusammenfassen: $2mx = 8mq - 6mp \quad | :2m$

Isolieren: $2mx : 2m = (8mq - 6mp) : 2m$

$$x = 4q - 3p$$

Probe: Linke Seite: $2mp - 3{,}5m(4q - 3p) = 2mp - 14mq + 10{,}5mp$
$= 12{,}5mp - 14mq$

Rechte Seite: $8mq - 5{,}5m(4q - 3p) - 4mp = 8mq - 22mq$
$+ 16{,}5mp - 4mp = 12{,}5mp - 14mq$

Vergleich: $12{,}5mp - 14mq = 12{,}5mp - 14mq$

3) Die Unbekannte x ist mehrmals enthalten und hat verschiedene allgemeine Zahlsymbole als Koeffizienten.

Beispiel: $x - 5a - 5ax + 1 = -6a + 7b - 6ax + bx - 6b$
$| + 5a - 1 + 6ax - bx$

Ordnen: $x - 5ax + 6ax - bx = -6a + 7b - 6b + 5a - 1$

Zusammenfassen: $x + ax - bx = -a + b - 1$

Wir können die Unbekannte x leicht isolieren, wenn sie nur in einem Glied als Faktor enthalten ist. Das erreichen wir durch Ausklammern.

$$x(1 + a - b) = -a + b - 1$$

Der Koeffizient von x ist $(1 + a - b)$. Er wird durch Division beseitigt.

Isolieren: $x = \frac{-a+b-1}{1+a-b}$

Der Bruch auf der rechten Seite läßt sich kürzen, wenn im Zähler (oder im Nenner) -1 ausgeklammert wird.

$$x = \frac{-(1+a-b)}{1+a-b}$$

$$x = -1$$

Probe: Linke Seite: $-1 - 5a - 5a \cdot (-1) + 1$
$= -1 - 5a + 5a + 1 = 0$

Rechte Seite: $-6a + 7b - 6a \cdot (-1) + b \cdot (-1) - 6b$
$= -6a + 7b + 6a - b - 6b = 0$

Vergleich: $0 = 0$

4) Die Bestimmungsgleichung enthält Klammern.

Beispiel 1: $x - (8x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 5)$

Auflösen der Klammern: $x - 8x + 69 + 6x - 50 = 2x - x + 5$

$$
\begin{array}{lrcl|l}
\textit{Zusammenfassen:} & -x + 19 & = & x + 5 & -19 - x \\
\textit{Ordnen:} & -2x & = & -14 & :(-2) \\
\textit{Isolieren:} & x & = & 7 &
\end{array}
$$

Probe: Linke Seite:

$$
\begin{aligned}
& 7 - (8 \cdot 7 - 69) + (6 \cdot 7 - 50) \\
&= 7 - (56 - 69) + (42 - 50) \\
&= 7 - (-13) + (-8) = 7 + 13 - 8 = 12
\end{aligned}
$$

Rechte Seite: $2 \cdot 7 - (7 - 5) = 14 - 2 = 12$

Vergleich: $12 = 12$

Beispiel 2: $3(2x + 9) - 9(4 + x) = 3(5 + x) - 2(x + 6)$

Ausmultiplizieren: $6x + 27 - 36 - 9x = 15 + 3x - 2x - 12$

$$
\begin{array}{lrcl|l}
\textit{Ordnen und} & -3x - 9 & = & 3 + x & -x + 9 \\
\textit{Zusammenfassen:} & -4x & = & 12 & :(-4) \\
\textit{Isolieren:} & x & = & -3 &
\end{array}
$$

Probe: Linke Seite:

$$
\begin{aligned}
& 3 \cdot \big(2 \cdot (-3) + 9\big) - 9 \cdot \big(4 + (-3)\big) \\
&= 3(-6 + 9) - 9 \cdot (4 - 3) = 3 \cdot 3 - 9 \cdot 1 = 0
\end{aligned}
$$

Rechte Seite:

$$
\begin{aligned}
& 3 \cdot \big(5 + (-3)\big) - 2\big((-3) + 6\big) \\
&= 3 \cdot (5 - 3) - 2(-3 + 6) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0
\end{aligned}
$$

Vergleich: $0 = 0$

Zuerst werden stets die Klammern beseitigt. Das geschah im Beispiel 1 durch Auflösen und im Beispiel 2 durch Ausmultiplizieren.

Beispiel 3: $(8 - x)(x - 5) = (6 - x)(x - 4)$

Ausmultiplizieren: $8x - 40 - x^2 + 5x = 6x - 24 - x^2 + 4x$

$$
\begin{array}{lrcl|l}
 & -x^2 + 13x - 40 & = & -x^2 + 10x - 24 & \\
\textit{Ordnen und} & & & & + x^2 + 40 - 10x \\
\textit{Zusammenfassen:} & 3x & = & 16 & :3 \\
\textit{Isolieren:} & x & = & 5\tfrac{1}{3} &
\end{array}
$$

Probe: Linke Seite: $\left(8 - \frac{16}{3}\right) \cdot \left(\frac{16}{3} - 5\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$

Rechte Seite: $\left(6 - \frac{16}{3}\right) \cdot \left(\frac{16}{3} - 4\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

Vergleich: $\frac{8}{9} = \frac{8}{9}$

Bei diesem Beispiel ist neu, daß sich beim Ausmultiplizieren zweimal x^2 ergab. Diese beiden Glieder haben sich allerdings „weggehoben". Wäre das nicht der Fall gewesen, so hätten wir die Gleichung mit unseren bisherigen Kenntnissen nicht lösen können.

5) Die Bestimmungsgleichung enthält einen größeren Bruch.

Beispiel: $$5x + 7 = \frac{17 \cdot (17 + x)}{19}$$

Wir beseitigen den Bruchstrich, indem wir beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner des Bruches multiplizieren:

$$\begin{aligned} 5x + 7 &= \frac{17(17+x)}{19} && \Big| \cdot 19 \\ 19(5x+7) &= \frac{17(17+x)}{19} \cdot 19 \\ 19(5x+7) &= 17(17+x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textit{Ausmultiplizieren:} & 95x + 133 &= 289 + 17x && \Big| -17x - 133 \\ &\textit{Ordnen und Zusammenfassen:} & 78x &= 156 && \Big| : 78 \\ &\textit{Isolieren:} & x &= 2 \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $5 \cdot 2 + 7 = 10 + 7 = 17$

Rechte Seite: $\frac{17(17+2)}{19} = \frac{17 \cdot 19}{19} = 17$

Vergleich: $17 = 17$

6) Die Bestimmungsgleichung hat die Form einer Proportion.

Beispiel: $4 : (x - 3) = 3 : (x - 5)$

$$\begin{aligned} &\textit{Produktgleichung:} & 4 \cdot (x - 5) &= 3 \cdot (x - 3) \\ &\textit{Ausmultiplizieren:} & 4x - 20 &= 3x - 9 && \Big| + 20 - 3x \\ &\textit{Ordnen:} & 4x - 3x &= -9 + 20 \\ && x &= 11 \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $4 : (11 - 3) = 4 : 8 = \frac{1}{2}$

Rechte Seite: $3 : (11 - 5) = 3 : 6 = \frac{1}{2}$

Vergleich: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Hierbei beginnt das Umformen mit dem Aufstellen der Produktgleichung. Die Probe muß aber trotzdem an der Ausgangsform, also der Proportion, durchgeführt werden.

7) Die Bestimmungsgleichung steht in der Bruchform der Proportion.

Beispiel: $$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-7}{x-4}$$

Die Gleichung zwischen zwei Brüchen wird in eine Verhältnisgleichung umgeformt, wobei die Glieder der Proportion in Klammern zu setzen sind.

$$(x+3):(x-2) = (x-7):(x-4)$$

$$\begin{array}{rcl|l} (x+3)(x-4) & = & (x-2)(x-7) & \\ x^2+3x-4x-12 & = & x^2-2x-7x+14 & -x^2+2x+7x+12 \\ 8x & = & 26 & :8 \\ x & = & 3\frac{1}{4} & \end{array}$$

Die Probe ist an der Ausgangsform durchzuführen:

Linke Seite: $$\frac{3\frac{1}{4}+3}{3\frac{1}{4}-2} = \frac{6\frac{1}{4}}{1\frac{1}{4}} = \frac{25\cdot 4}{4\cdot 5} = 5$$

Rechte Seite: $$\frac{3\frac{1}{4}-7}{3\frac{1}{4}-4} = \frac{-3\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{15\cdot 4}{4\cdot 3} = 5$$

Vergleich: $5 = 5$

Zusammenfassung:

1. **Eine Bestimmungsgleichung wird aufgelöst, indem die Unbekannte auf einer der beiden Seiten isoliert wird. Das geschieht schrittweise durch Umformen der Gleichung. Die Schritte werden zweckmäßigerweise in folgender Reihenfolge durchgeführt:**

   a) **Beseitigen von größeren Bruchstrichen bzw. Ersetzen der Proportion durch die Produktgleichung,**

   b) **Beseitigen von Klammern,**

   c) **Zusammenfassen der Glieder auf jeder der beiden Seiten,**

   d) **Ordnen der Glieder und erneutes Zusammenfassen,**

   e) **Isolieren von x.**

2. **Nach der Ermittlung der Lösung muß deren Richtigkeit durch die Probe überprüft werden. Diese ist stets an der Ausgangsform der Gleichung durchzuführen.**

Aufgaben

In den folgenden Aufgaben sind alle Gleichungen nach x aufzulösen.

1. a) $x + a = 100$ b) $x - 6 = b$ c) $-8 + x = c$

d) $2\frac{1}{2} + x = k$ e) $0{,}15a = 2x - 1{,}85a$

f) $\frac{1}{2}x + 7a = b$ g) $x + 4a = 11a + 2$

h) $3a + 11b = 5b + 3x$ i) $3\frac{2}{3}b + \frac{1}{2}x = 6\frac{1}{2}b$

k) $2x - a = 2a + x$ l) $x + p = r$

2. a) $2x - a = b + x$ b) $5b - 3x = 4a + b - 5x$

c) $19a + 26b + 14x + 13b - 33a + 4x$
$= 5x - b + 32a + 10b - x + 30b - 4a$

d) $0 = 24b + 10c - 19b + 4x - 3c + 5x - 20c$
$- 10x + 5b + 13c$

e) $5x - 5a + 3b - x - 7b = 3a + 4b - 7a + 3x$

f) $10x - 5a + 7b + x = 17x - 3a + 5b - 8x + 4b$

3. a) $rx - 4\frac{1}{2}ar = ar + 1\frac{3}{4}rb$ b) $abx + 2\frac{4}{5}abe = 10\frac{1}{10}abe + 2\frac{1}{2}abf$

c) $5{,}3a^2 + \frac{1}{5}ax = 10a + 5ab$ d) $4p^2s + 24p^2r = 3{,}8p^2r + 0{,}1p^2x$

e) $1\frac{3}{4}tx + 4\frac{1}{2}at = at - 1\frac{3}{4}bt$ f) $-lx + 4\frac{1}{2}al = al - 1\frac{3}{4}bl$

g) $5ab^2 + 10a^2b = abx - 9{,}1a^2b$ h) $\frac{sx}{12} - \frac{s^2}{2} = \frac{3s^2}{2} - \frac{st}{6}$

4. a) $17mx - 3am + 5bm - 8mx + 4bm = 10mx - 5am + 7bm + mx$

b) $9ab - 7b^2 - 11bx + 12b^2 - 5ab - 3bx - ab + b^2 + 11bx = 0$

c) $14abx + 15a^2b - 7ab^2 + abx - 13ab^2 = 19abx + 3a^2b - 12ab^2$

5. a) $(8x + 5) + (5x - 8) + 7 = 10x - (3 - 2x - 8)$

b) $x - (7x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 8)$

c) $7x - (8 + 6x - x) = (5x - 4) - (x - 3x + 9)$

d) $x - (7x - 6b - 9a) + (6x - 5b) = 2x - (x - 8a)$

e) $(7m - 5x) - (5n - 17x) - (8x + 7m - 5n) = 0$

f) $51 - [14x - (3x - 2)] = 12x - [(4x + 3) - 6]$

g) $6x - [5x - (3x + 2q)] = 7p + [12q - (6x - 3p)]$

h) $8r - \{6x - [3r - (2 + 5s)]\} = 4x - \{2r + [2x - (3x + 8s)]\}$

6. a) $(x - 1)(x - 2) = (x - 3)(x + 1)$

b) $(x + 3)(2x + 5) = (2x - 1)(x + 7)$

c) $(x + 1)(4x - 25) = (2x - 5)(2x - 8)$

d) $(3x + 1)(4x - 5) - (6x + 1)(x + 1) = (3x - 3)(2x - 1)$

e) $(x + 2)^2 - (x + 1)^2 = 9$ f) $(x - 2)(x - 4) = (x - 5) \cdot x$

g) $(x - 1)^2 = (7 - x)^2$ h) $(8 + x)(x - 1) = (x + 1)(x - 2) + 2$

7. a) $\frac{2x+3}{4} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{3x-7}{8} = \frac{5}{6}$ c) $\frac{34x+40}{27} = \frac{47}{51}$

d) $\frac{72x+56}{5} = \frac{32}{105}$ e) $\frac{x+5}{12} = x$ f) $\frac{x-7}{8} = 2x$

g) $\frac{x-18}{25} = \frac{4}{5}x$ h) $\frac{2x-21}{30} = \frac{5}{36}x$ i) $\frac{2{,}4x+4{,}8}{3} = \frac{4}{3}x$

8. a) $\frac{2(3x+2)-3(x-3)}{7} = 4$ b) $\frac{3(6-x)}{5} = x - 7\frac{3}{5}$

c) $\frac{18+(4x-8)2}{5} = x + 7\frac{3}{5}$ d) $\frac{5(3x+4)}{12} = 2x + \frac{1}{6}$

e) $\frac{12\left(\frac{1}{2}+2x\right)}{17} = 4x - \frac{16}{17}$ f) $\frac{\frac{3}{4}\left(5x-5\right)}{5} = -2x + \frac{1}{10}$

9. a) $12 : 8 = 15 : x$ b) $3 : 11 = 6{,}3 : x$

c) $16{,}8 : 8{,}4 = 4{,}2 : x$ d) $14a : 21b = 26a^2b : x$

e) $2 : 6 = 6 : x$ f) $9{,}5 : 3{,}8 = 3{,}8 : x$

g) $1\frac{1}{4} : 2\frac{3}{4} = 2\frac{1}{2} : x$ h) $4\frac{1}{2} : 1\frac{5}{7} = 8\frac{3}{4} : x$

10. a) $2x : 5 = 8 : 10$ b) $3x : 80 = 9 : 15$

c) $4{,}2 : 5{,}6 = 2{,}5x : 10$ d) $3\frac{3}{4} : 4\frac{1}{6} = 1\frac{4}{5}x : 2$

e) $3{,}6x : 24 = 1 : \frac{3}{2}$ f) $1{,}2 : 1{,}5x = 0{,}5 : 7{,}5$

g) $\frac{9}{2} : \frac{162}{5} = \frac{5}{6} : \frac{3}{4}x$ h) $\frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{2} : \frac{3}{8}x$

11. a) $(x - 3) : 6 = (x + 6) : 8$

b) $(x + 2) : 5 = (x - 4) : \frac{5}{3}$

c) $(x - 0{,}2) : 5{,}1 = (x + 0{,}6) : 5{,}7$

d) $5\frac{1}{3} : 1\frac{1}{2} = \left(x + 3\frac{1}{2}\right) : \left(x - 6\frac{1}{4}\right)$

e) $(3x + 8) : (x + 4) = (3x - 7) : (x - 2)$

f) $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)$

12. a) $\frac{38}{57} = \frac{x}{6}$ b) $\frac{5}{x-5} = \frac{7}{3x-7}$ c) $\frac{8{,}5}{x} = \frac{5}{4}$

d) $\frac{x+4}{x+5} = \frac{7}{8}$ e) $\frac{3}{4x+5} = \frac{2}{2x-3}$ f) $\frac{6}{5x+2} = \frac{7}{3x+8}$

13. a) $0{,}75p^2q : 0{,}5pr = 1{,}5q^2 : x$ b) $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{c}{d} : x$

c) $9rs^2t : 12rst = 12rst : x$ d) $2a^2 : 0{,}2a^2 = 0{,}2a^2 : x$

22. Der Grad der Bestimmungsgleichung; die Bezeichnung der Unbekannten

1) Man unterscheidet Bestimmungsgleichungen danach, in welcher höchsten Potenz die Unbekannte vorkommt.

Beispiele:

Gleichung	höchste Potenz	Bezeichnung
$3x - 5 = \frac{1}{2}x + 10$	x	Bestimmungsgleichung 1. Grades oder lineare Bestimmungsgleichung
$6x - 2x^2 + 18 = 0$	x^2	Bestimmungsgleichung 2. Grades oder quadratische Bestimmungsgleichung
$1{,}5x^3 - 3x = 15 + x^2$	x^3	Bestimmungsgleichung 3. Grades

Wir lernen im 8. Schuljahr nur Bestimmungsgleichungen 1. Grades kennen. Auch das 3. Beispiel aus **4)** und das Beispiel aus **7)** im Kapitel 21 sind Gleichungen 1. Grades, weil sich das quadratische Glied x^2 weghebt.

2) Die Unbekannten werden meist mit den allgemeinen Zahlsymbolen x, y oder z bezeichnet. Wir haben bisher stets x als die Unbekannte betrachtet. Mitunter kommt es aber vor, daß die Unbekannte durch ein anderes allgemeines Zahlsymbol dargestellt wird.

Beispiel: **Die Unbekannte sei x.**

$$\begin{aligned} 3x + a &= 2b & &\mid -a \\ 3x &= 2b - a & &\mid :3 \\ x &= \frac{2b-a}{3} \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $3 \cdot \frac{2b-a}{3} + a$
$= 2b - a + a = 2b$

Rechte Seite: $2b$

Vergleich: $2b = 2b$

Wäre in dieser Aufgabe a oder b die Unbekannte, hätten wir die Gleichung nach a bzw. b auflösen müssen.

Die Unbekannte sei a.

$$\begin{aligned} 3x + a &= 2b & &\mid -3x \\ a &= 2b - 3x \end{aligned}$$

Die Unbekannte sei b.

$$\begin{aligned} 3x + a &= 2b & &\mid :2 \\ \frac{3x+a}{2} &= b \\ b &= \frac{3x+a}{2} \end{aligned}$$

Werden z. B. Bestimmungsgleichungen nach Berechnungsformeln wie $F = a \cdot b$ oder $F = \frac{g \cdot h}{2}$ aufgestellt, so muß man jeweils nach der gesuchten Größe auflösen. Um Unklarheiten zu vermeiden, muß man dabei stets festlegen, welches Zahlsymbol die Unbekannte darstellt.

23. Das Lösen von Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Bestimmungsgleichungen

Wiederholungsbeispiel:

Die Deutsche Demokratische Republik steht an der Spitze der Kaliförderung in der Welt. Von rund 1600000 t reinem Kali (das ist etwa 25% der Weltförderung), die im Jahre 1957 abgebaut werden konnten, wurde das 1,6fache des Eigenverbrauchs exportiert. Wieviel Tonnen beträgt der Eigenverbrauch?

Wir lösen solche Aufgaben in einzelnen Arbeitsschritten.

a) Wir überschlagen zunächst im Kopf das Ergebnis: Da rund das $1\frac{1}{2}$fache des Eigenverbrauchs exportiert wird, verhält sich der Eigenverbrauch zur exportierten Menge wie $2:3$. Der Eigenverbrauch beträgt also rund $\frac{2}{5}$ der abgebauten Menge. Das sind $\frac{2}{5}$ von rund 1500000 t, also etwa 600000 t.

b) Wir bezeichnen den Zahlenwert der gesuchten Größe, das heißt die Menge des Eigenverbrauchs, mit x und fügen die entsprechende Benennung dazu: Es werden x t Reinkali in der DDR verbraucht.

c) Alle anderen Angaben des Aufgabentextes, soweit sie für die Lösung von Bedeutung sind, werden in mathematische Zeichen übertragen. Dabei versuchen wir eine der vorkommenden Größen zweimal auszudrücken:
Wenn der Eigenverbrauch x t beträgt, ist der 1,6mal so große Export $1{,}6x$ t. Beide zusammen müssen die Förderung ergeben. Diese ist also $x\,\mathrm{t} + 1{,}6x\,\mathrm{t}$. Andererseits ist sie aber nach den Angaben des Aufgabentextes 1600000 t. (Die Zahlenangabe 25% und die Jahreszahl 1957 sind für die Berechnung ohne Bedeutung.)

d) Die beiden Angaben, die dasselbe bedeuten, können wir als Bestimmungsgleichung niederschreiben. Sind alle Benennungen in Übereinstimmung, so schreiben wir die Gleichung nur mit den Zahlenwerten. In unserem Falle bedeuten $x\,\mathrm{t} + 1{,}6x\,\mathrm{t}$ einerseits und 1600000 t andererseits dasselbe, nämlich die geförderte Kalimenge. Da alle Größen in Tonnen angegeben sind, schreiben wir die Zahlenwertgleichung
$$x + 1{,}6x = 1600000$$
und lösen sie nach x auf.

$$2{,}6x = 1600000$$
$$x = 1600000 : 2{,}6$$
$$x \approx 615380$$

Die Division ergibt an sich einen periodischen Dezimalbruch, doch ist es nötig, ihn sinnvoll zu runden.

e) Wir vergleichen mit dem anfangs notierten Ergebnis des Überschlags. Wir stellen dabei die Übereinstimmung in der Größenordnung fest. Jetzt erfolgt die Probe am Text:
Die exportierte Menge beträgt $1{,}6 \cdot 615380\,\text{t} \approx 984610\,\text{t}$. Zusammen mit dem Eigenverbrauch von 615380 t ergibt das $1599990\,\text{t} \approx 1600000\,\text{t}$, wie es die Aufgabe verlangt.

f) Ergebnissatz: Im Jahre 1957 betrug der Eigenverbrauch an Reinkali in der DDR rund 615000 t.

Bei der Lösung von Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Bestimmungsgleichungen müssen wir also folgende Arbeitsschritte ausführen:

a) Überschlagen des Ergebnisses im Kopf und Niederschreiben des ermittelten Wertes.

b) Festlegen der Unbekannten x einschließlich ihrer Benennung.

c) Übertragen aller wichtigen Angaben der Aufgabe in mathematische Zeichen, wobei eine Größe auf zweierlei Weise ausgedrückt werden muß.

d) Niederschreiben dieser beiden gleichwertigen Ausdrücke als Bestimmungsgleichung, wobei bei gleichen Benennungen nur mit den Zahlenwerten gearbeitet wird, und Auflösen dieser Gleichung nach x.

e) Vergleichen des Rechenergebnisses mit dem Ergebnis des Überschlags und Bestätigen durch die Probe an Hand des Aufgabentextes.

f) Ergebnissatz.

Aufgaben

Zahlenrätsel

1. Vermindert man 76 um eine gewisse Zahl, und multipliziert man die Differenz mit 3, so erhält man 210. Wie heißt die Zahl?

2. Helga sagt: „Ich bin fünf Jahre älter als mein Bruder Klaus. Vor vier Jahren war ich gerade doppelt so alt wie er." Wie alt ist Helga?

3. Die Summe zweier Zahlen ist 20. Multipliziert man die eine Zahl mit 3, und vermindert man die andere Zahl um 16, so erhält man gleiche Werte. Wie heißen die beiden Zahlen?

4. Eine Zahl ist ihrem Wert nach genauso groß wie das Ergebnis, das ich erhalte, wenn ich diese Zahl um 12 vermehre und die Summe halbiere. Wie heißt die Zahl?

5. Dieter ist heute 16 Jahre alt, sein Vater 37 Jahre. In wieviel Jahren wird Dieters Vater gerade doppelt so alt sein wie Dieter?

6. Ich habe mir zwei Zahlen aufgeschrieben, von denen die eine um 2 kleiner ist als die andere. Wenn ich die größere mit 4, die kleinere mit 3 multipliziere und die beiden Produkte addiere, ergibt sich 57. Wie heißen die beiden Zahlen?

Anleitung: Wenn du eine der beiden Zahlen als Unbekannte x festlegst, genügt es nicht, nur von „der einen Zahl" zu sprechen. Du mußt dich vielmehr entscheiden, ob du die „kleinere" oder die „größere" mit x bezeichnen willst. Löse zur Übung die Aufgabe auf zwei Wegen!

7. Ich habe mir eine Zahl notiert. Wenn ich 12 addiere, die entstandene Summe mit 3 multipliziere und vom Produkt 19 subtrahiere, so erhalte ich das um 3 verminderte Vierfache der notierten Zahl. Welche Zahl habe ich mir aufgeschrieben?

8. Wenn man zu jeder der vier Zahlen 42, 30, 46, 33 die gleiche Zahl addiert, kann man eine Proportion bilden.

9. Welche gleiche Zahl muß man von 10, 11, 34, 38 subtrahieren, wenn die Reste eine Proportion bilden sollen?

10. Welche gleiche Ziffer muß man an 1, 2, 7, 12 hängen, damit eine Proportion entsteht?

11. Welche Zahl muß man mit $4bc$ multiplizieren, um $104b^2c^3d$ zu erhalten?

12. Steffen sagt zu Klaus: „Denke dir eine Zahl, addiere 4, multipliziere das Ergebnis mit 5, subtrahiere 12, zähle 27 hinzu, ziehe das Fünffache der gedachten Zahl ab!" Ohne daß Klaus ein Schlußergebnis sagte, wußte es Steffen.

13. Steffen sagt: „Denke dir eine Zahl; verdopple sie, zähle 4 hinzu, halbiere das Ergebnis, zähle 7 hinzu, multipliziere das Ergebnis mit 8, ziehe 12 ab, dividiere durch 4, ziehe 11 davon ab!" Klaus nennt als Ergebnis 18! Steffen rechnet nun $(18 - 4) : 2$ und sagt: „Du hast dir die Zahl 7 gedacht." Wie ist das möglich?

14. In den folgenden Aufgaben ist die Bestimmungsgleichung gegeben. Stelle dazu einen Text in Form eines Zahlenrätsels zusammen und berechne x!

a) $3(5 + 3x) = 10x$ **b)** $4(x - 3) = 9(x - 2)$

c) $12 + 2x = 8(x - 8)$ **d)** $3(2x + 6) = 10x - 10$

e) $4(3x + 7) = 5(4x - 12)$ **f)** $7x = (11 - x)\,6 - 1$

Aus der sozialistischen Landwirtschaft

15. Zwei MTS-Traktoristen, Ernst und Günther, erreichten zusammen eine Jahresleistung von 2628 ha mittleres Pflügen, Ernst insgesamt 64 ha mehr als Günther. Welche Jahresleistung erreichte jeder?

16. Die Reparaturwerkstatt einer MTS hatte während des Winters 124 Zweischar- und Dreischarpflüge instand zu setzen, wobei insgesamt 262 Schare nachzusehen waren. Wieviel Pflüge von jeder Art mußten repariert werden?

17. Eine LPG bezog insgesamt 119 dz Dünger (Thomasphosphat und Kali) für 996,80 DM. 1 dz Thomasphosphat kostete 5,20 DM, 1 dz Kali 9,70 DM. Wieviel Doppelzentner Dünger jeder Sorte wurden geliefert?

18. Auf einem VEG konnten die Kosten für die Aussaat durch Einsatz von Maschinen um 22,5% auf 5140 DM gesenkt werden. Wie hoch waren die Kosten im Vorjahr?

19. Ein Rind erhält täglich 25 kg Gärfutter, ein Schwein 12 kg. Wieviel Rinder und wieviel Schweine stehen in Futter, wenn an die 63 Tiere insgesamt 990 kg je Tag verfüttert werden?

Aus der sozialistischen Industrie

20. Eine 24 cm dicke Wand aus Hohllochziegeln $\left(\text{Wichte } 1{,}2\,\frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}\right)$ hat die gleiche Wärmedämmfähigkeit wie eine 36,5 cm dicke Wand aus Vollziegeln $\left(\text{Wichte } 1{,}8\,\frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}\right)$.

a) Berechne für jede Ziegelart das Steingewicht einer Wand von 1 m² Fläche!

b) Wieviel Prozent beträgt die Gewichtsersparnis durch das Verwenden von Hohllochziegeln?

21. Eine 3,25 m lange Stahlstange wird in Stücke zu 125 mm zersägt. Die Schnittbreite beträgt 3 mm. Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wieviel Prozent die Ausbeute?

22. An einer Stockschere ist der Hebelarm für die Handkraft 500 mm lang. Der Rundstahl wird so eingelegt, daß der Hebelarm für die Schneidekraft 60 mm lang ist. Wie groß ist die Schnittkraft, wenn die Hebelkraft 12 kp beträgt?

23. Bei jeder Schleifscheibe gibt der Herstellerbetrieb neben dem Durchmesser d in mm die höchstzulässige Umfangsgeschwindigkeit v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ an.

Beispiel: $d = 30$ mm, $v = 32\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechne daraus die maximale Drehzahl n in $\frac{\text{U}}{\text{min}}$!

24. Dient die Scheibe zum Schneiden, so bezeichnet man die Umlaufsgeschwindigkeit auch als Schnittgeschwindigkeit. Berechne die Werte für die offenen Felder der folgenden Tabelle!

	a)	b)	c)
Durchmesser d in mm	24		30
Schnittgeschwindigkeit v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	250	380	
Drehzahl n in $\frac{\text{U}}{\text{min}}$		1800	2100

25. Ein Stahlseil hat einen Querschnitt von 25 mm². Auf Zug darf es höchstens mit 70 kp/mm² belastet werden. Wieviel Prozent der Maximalbelastung beträgt ein Zug von 1400 kp?

26. Beim Training auf dem 8,730 km langen Sachsenring fuhr die IFA RT 125 eine Runde in 4 Min. 41 Sek. Berechne die durchschnittliche Geschwindigkeit in km/h!

27. Für das vordere Blattfederpaket des PKW IFA F 9 sind von Stabstahl (45 mm × 5 mm) 14 Lagen mit folgenden Rohmaßen zu schneiden: 1. Lage 915 mm, 2. Lage 1120 mm, 3. Lage 1062 mm, 4. Lage 1070 mm, 5. Lage 892 mm, 6. Lage 784 mm. Die folgenden Federlagen sind jeweils 70 mm kürzer als die vorhergehenden.
Wie groß ist das Gewicht des Federpakets $\left(\gamma = 7{,}85\,\frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}\right)$, wenn für die Verbindung der Einzelteile 0,550 kp hinzuzurechnen sind?

28. Als Übersetzung i zweier miteinander kämmender Zahnräder bezeichnet man das Verhältnis der Drehzahl n_1 des treibenden Rades zur Drehzahl n_2 des getriebenen Rades: $i = \frac{n_1}{n_2}$. Die Motordrehzahl eines Kraftwagens beträgt $3200\,\frac{\text{U}}{\text{min}}$. Die Gelenkwelle hat in den einzelnen Gängen folgende Drehzahlen: 1. Gang $930\,\frac{\text{U}}{\text{min}}$, 2. Gang $1890\,\frac{\text{U}}{\text{min}}$, 3. Gang $3200\,\frac{\text{U}}{\text{min}}$, R-Gang $830\,\frac{\text{U}}{\text{min}}$. Wie groß sind die Übersetzungen $x:1$ in den einzelnen Gängen?

29. Der Gefrierpunkt des Kühlwassers kann durch Zusatz von Frostschutzmitteln herabgesetzt werden. Beispiel:

Gefrierpunkt	Wasser : Frostschutzmittel (in Raumteilen)	Verhältnis
−12° C	5 : 1	5
−15° C	5 : 2	2,5
−17° C	7 : 3	
−20° C	2 : 1	
−25° C	6 : 4	

a) Ergänze die fehlenden Werte!

b) Ein Kraftfahrzeug soll bei einer Temperatur von mindestens $-25°$ C ($-30°$ C) eingesetzt werden. Das Kühlsystem faßt 12 l (25 l). Wie ist zu mischen?

30. Ein gläsernes Meßgefäß (Pyknometer), das genau 50 ml faßt, wiegt 32,4 g. Nach dem Einfüllen einer Schwefelsäure werden 114,6 g als Gewicht festgestellt.

a) Bestimme die Dichte dieser Säure!

b) Die Dichte einer Kalilauge ist mit $1{,}1\ \frac{g}{ml}$ angegeben.
Wieviel Gramm wiegt das gefüllte Pyknometer?

31. Bei einer Lösung gibt die Prozentzahl meist die Gewichtsmenge des gelösten Stoffes in 100 Gewichtsteilen der Lösung an. Es soll eine 15prozentige Natronlauge hergestellt werden. Wieviel Gramm Ätznatron ($NaOH$) sind in 250 g Wasser zu lösen?

32. 120 g Kochsalzlösung enthalten 20 g Kochsalz (Natriumchlorid $NaCl$). Wievielprozentig ist die Lösung?

33. In der Versandabteilung eines volkseigenen Kalkstickstoffbetriebes werden 100 kg Kalkstickstoff mit einem Stickstoffgehalt von 24% angefordert. Es ist aber nur ein Kalkstickstoff mit einem Gehalt von 21% vorhanden. Wieviel Kilogramm dieses Düngemittels muß das Werk verschicken, damit die geforderte Stickstoffmenge geliefert wird?

34. Bohrung im Oelsnitzer Revier (Erzgebirge). Ansatzpunkt des Bohrloches 415,00 m ü. NN:

Gesteinsart	Mächtigkeit
Lockeres Gebirge	46,00 m
Rotliegendes	396,00 m
Kohlengebirge	183,00 m
Phyllit (Urtonschiefer)	15,00 m

a) Welche Tiefe erreichte das Bohrloch?

b) Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen NN und den einzelnen Schichtfugen?

35. Eine Grube förderte in einem Jahr 907200 t Kohle. Außerdem mußten in der Minute durchschnittlich 8,750 m³ Wasser gehoben werden.

a) Wieviel Kubikmeter Wasser kamen auf jede Tonne geförderter Kohle (1 J. = 360 Tg.)?

b) Für die Wasserhaltung wurden im Jahr 453600 DM ausgegeben. Mit welchem Betrag belasten diese Kosten jede Tonne Kohle?

36. Eine Kreiselpumpe fördert in der Minute 5,4 m^3 Wasser. Sie drückt es in eine Rohrleitung von 9 dm^2 Querschnitt. Welche Geschwindigkeit hat das Wasser in der Rohrleitung?

37. An einem zweiseitigen Hebel mit den Hebelarmen 21 cm und 9 cm ist eine Last um 60 p größer als die andere. Berechne beide Lasten!

38. Brauneisenstein enthält etwa 60% Eisen. Wieviel Tonnen Brauneisenstein sind nötig, um 20 t Roheisen mit einem Kohlenstoffgehalt von 4% herzustellen?

39. Wieviel Wasser muß im Gradierwerk aus je 100 kg einer 7prozentigen Sole verdunsten, damit die Sole 25prozentig wird?

40. Um Weichlot herzustellen, wurden 12 kg Zinn (Sn), 0,6 kg Antimon (Sb) und 27,4 kg Blei (Pb) zusammen eingeschmolzen.

a) Berechne die Gewichtsteile als Prozente des Gesamtgewichts!

b) Wieviel Kilogramm Weichlot entstehen bei einem Schmelzverlust von 3%?

41. Duraluminium, eine Legierung von stahlähnlicher Festigkeit und Härte, setzt sich aus 4% Kupfer (Cu), 1% Mangan (Mn), 0,5% Magnesium (Mg) und 94,5% Aluminium (Al) zusammen. Unter Berücksichtigung von 1,5% Abbrand sind 250 kg Duraluminium herzustellen.

42. Invarstahl (Stahl mit 36% Nickel) eignet sich wegen seiner geringen Veränderung bei Temperaturschwankungen für Präzisionsinstrumente und -maßstäbe. 3 Präzisionsmaßstäbe von je 2,75 kg sind herzustellen. Wieviel Kilogramm Stahl und Nickel sind erforderlich, wenn mit einem Abbrand und Gießverlust von 0,7% zu rechnen ist?

Aus verschiedenen Gebieten

43. Die langen Seiten zweier flächengleicher Rechtecke sind 8,5 cm bzw. 11,9 cm lang. Die kurzen unterscheiden sich um 1,4 cm. Wie groß sind sie?

44. Ein Rechteck ist 2 cm länger als breit. Vergrößert man jede Seite um 4 cm, so wächst sein Inhalt um 72 cm^2. Berechne die Seiten!

45. In welchem Flächenmaßstab wird ein Kleinbildnegativ (24 mm × 36 mm) vergrößert, wenn eine Vergrößerung im Format 6 cm × 9 cm hergestellt wird?

46. Wie groß ist die Breite b und die Dicke d des in der Abbildung 5 wiedergegebenen Stahls I 50 (I lies: Doppel-Te), wenn die Höhe h 500 mm beträgt? Ermittle den Maßstab aus der Abbildung!

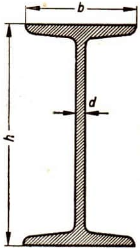


Abb. 5

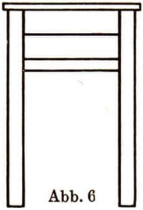


Abb. 6

47. Wie groß ist die quadratische Sitzfläche des in der Abbildung 6 dargestellten Hockers und wie dick sind die Beine, wenn die Höhe 480 mm beträgt? Ermittle den Maßstab aus der Abbildung!

48. Die Bahnstrecke von Schierke nach dem Brocken hat im Mittel eine Steigung von 1 : 30 bei einer Länge von rund 13,5 km. Der Bahnhof Schierke liegt 680 m ü. NN. Berechne die Höhe der Endstation auf dem Brocken! Zeichne ein „Steigungsdreieck“ mit dem Kathetenverhältnis 1 : 30 und überzeuge dich, daß es bei dem gerundeten Meßwert 13,5 km gleichgültig ist, ob man ihn tatsächlich als Fahrtstrecke (Hypotenuse) oder als waagerechte Entfernung (größere Kathete) ansieht!

49. An einer Straße steht das auf der Abbildung 7 abgebildete Verkehrszeichen. Was bedeutet es? Die betreffende Straße ist rund 720 m lang. Rechne!

Abb. 7

50. Die Schwingungszahlen der Töne jeder Dur-Tonleiter stehen im Verhältnis 24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 44 : 48. Der Kammerton a_1 hat die Schwingungszahl 440 Hz. Bestimme die Schwingungszahlen für die C-Dur-Tonleiter!

51. Die folgenden Gleichungen bzw. Formeln sind jeweils nach der angegebenen Größe aufzulösen; diese ist also als Unbekannte anzusehen.

a) $F = a \cdot b$ (Auflösen nach a)

b) $F = \frac{c \cdot h_c}{2}$ (Auflösen nach h_c)

c) $G = \gamma \cdot V$ (Auflösen nach Wichte γ)

d) $w : g = p : 100$ (Auflösen nach Grundwert g)

e) $w : g = p : 100$ (Auflösen nach Prozentsatz p)

f) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (Auflösen nach β)

g) $v = \frac{s}{t}$ (Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung; Auflösen nach Weg s)

h) $v = \frac{s}{t}$ (Auflösen nach Zeit t)

52. Der Pro-Kopf-Verbrauch in der DDR wird den in Westdeutschland bis zum Jahre 1961 einholen bzw. überholen. Berechne aus der Tabelle für das Jahr 1957 den Vergleichsfaktor, indem du die Frage löst: Wievielmal so groß ist der Pro-Kopf-Verbrauch der Bevölkerung der Deutschen Demokratischen Republik im Verhältnis zu Westdeutschland?

	Westdeutschland	Deutsche Demokratische Republik
Butter	7,2 kg	10,4 kg
Margarine	12,7 kg	12,1 kg
Fleisch	50,2 kg	48,0 kg
Zucker	28,3 kg	28,7 kg
Schlachtfette	5,9 kg	8,3 kg

53. Zu den Schiffen der Deutschen Seereederei (DDR) gehörten im November 1958 11 große Frachtschiffe der Klassen 3000 t und 10000 t mit einer gesamten Wasserverdrängung von 89000 t. Wieviel Schiffe gehörten zu jeder Klasse?

54. Die Sowjetunion schreitet im Aufbau des Kommunismus rasch voran. Mit 112 Millionen Tonnen lag die Förderung von Erdöl im Jahre 1958 um rund $\frac{1}{3}$ höher als 1956. Berechne die Produktion von 1956!

55. Wie lange braucht ein Kraftwagen mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, um einen 2 Stunden früher abgefahrenen Kraftwagen mit der Geschwindigkeit von $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ einzuholen?

56. Ein Autobus hatte vor einem später abgefahrenen Motorrad einen Vorsprung von 3 km. In welcher Entfernung vom Abfahrtsort holte das Motorrad den Bus ein, wenn sich ihre Geschwindigkeiten wie 5 : 8 verhielten?

V. Lineare Funktionen

24. Aufgaben zur Wiederholung

1. Bestätige die Richtigkeit folgender Gleichungen!

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 3 \cdot 12$

b) $100 - 50 - 30 - 10 = 10 \cdot (10 - 5 - 3 - 1)$

c) $3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 6 \cdot (2 + 5)$

d) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

e) $\frac{1}{2}c\left(\frac{1}{4}x - 2y\right) = \frac{1}{8}cx - cy$

f) $(4mn + 0{,}4m) : 4m = n + 0{,}1$

2. Die folgenden Gleichungen sind nur richtig, wenn du für x einen ganz bestimmten Zahlenwert einsetzt! Bestimme ihn und bestätige, daß dann das Gleichheitszeichen zu Recht besteht!

a) $3x + 0{,}8 - 4\left(\frac{x}{2} + 0{,}3\right) = 0{,}1$ b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{x}{4} - \frac{1}{6}$

c) $(2x + 3) : (5x + 1) = 5 : 6$ d) $\frac{1}{3}(7x - 10) - \frac{1}{2}(50 - x) = 20$

3. Stelle folgende Sachverhalte durch Streckendiagramme dar:

a) die Strecken, die von einem Kraftwagen bei einer Geschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in verschiedenen Zeiten (10, 20, 30 ... Min.) zurückgelegt werden,

b) die Zeiten, in denen 30 km von einem PKW bei $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ Geschwindigkeit, einem LKW bei $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ Geschwindigkeit, einem Radfahrer bei $18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ Geschwindigkeit und einem Fußgänger bei $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ Geschwindigkeit zurückgelegt werden,

c) die Flächeninhalte von Kreisen mit verschiedenen Durchmessern (1, 2, 3, ... cm).

4. Worin unterscheiden sich die Gleichungen

$$3 \cdot 5 = 15 \quad \text{und} \quad 5x + 9 = \tfrac{1}{2}x?$$

25. Der Begriff „Funktion“

Wir wollen jetzt eine neue Art von Gleichungen untersuchen.

1. Beispiel: Aus einem Brett von 2,25 m Länge sollen geschnitten werden

a) 2 Bretter von 0,80 m und 1,45 m Länge;
b) 2 Bretter, von denen das eine 1,50 m lang ist;
c) 2 Bretter von beliebiger Länge.

Berechne bzw. überprüfe die Maße der Bretter!

Wir stellen fest (alle Maße in m):

bei **a)** $0{,}80 + 1{,}45 = 2{,}25$

Ergebnis: Die Aufteilung ist möglich.

bei **b)** Wenn die Länge des 1. Brettes festgelegt ist, so steht auch das Maß für das 2. Brett x m fest, da beide Bretter zusammen die Länge von 2,25 m haben müssen.

$$\begin{aligned} 1{,}50 + x &= 2{,}25 \\ x &= 2{,}25 - 1{,}50 \\ x &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Ergebnis: Das zweite Brett wird 0,75 m lang.

bei **c)** $x + y = 2{,}25$

Ergebnis: Die Maßzahlen x und y für die Längen der beiden Bretter sind nicht eindeutig bestimmt; es gibt viele Möglichkeiten. Wir stellen einige davon in einer Wertetafel zusammen:

x	1,90	1,75	1,50	1,25	1,15
y	0,35	0,50	0,75	1,00	1,10

Diese Wertetafel läßt sich noch durch unzählige Wertepaare erweitern.

Im Fall **a)** bestätigt uns die Gleichung nur, daß die verlangte Aufteilung des Brettes möglich ist.

Im Fall **b)** ermöglicht es die Gleichung, die Länge des zweiten Brettes zu berechnen. Man kann für x nicht jede beliebige Zahl einsetzen. Die Länge des Reststückes ist durch die Länge des gesamten Brettes und durch die Länge des geforderten Stückes bestimmt. Es liegt eine Bestimmungsgleichung vor.

Im Fall **c)** finden wir einen völlig neuen Sachverhalt. Die Gleichung enthält zwei nicht gegebene Größen x und y. Trotzdem ist es keine Bestimmungsgleichung; denn es ist nicht möglich, aus ihr eindeutige „Lösungen" für x und y zu bestimmen. Es gibt vielmehr viele Paare von Zahlen, die beim Einsetzen an Stelle von x und y stets eine richtige Gleichung entstehen lassen. Wir wollen das für einige solcher Paare übersichtlich zusammenstellen.

x	y		$x + y = 2{,}25$
1,90	0,35	$\longrightarrow$	$1{,}90 + 0{,}35 = 2{,}25$
1,75	0,50	$\longrightarrow$	$1{,}75 + 0{,}50 = 2{,}25$
1,50	0,75	$\longrightarrow$	$1{,}50 + 0{,}75 = 2{,}25$
1,25	1,00	$\longrightarrow$	$1{,}25 + 1{,}00 = 2{,}25$
1,15	1,10	$\longrightarrow$	$1{,}15 + 1{,}10 = 2{,}25$

Die nebeneinanderstehenden Zahlen dieser Wertetafel dürfen allerdings nicht beliebig gewählt werden, sondern sie müssen „zueinander passen" oder müssen **einander zugeordnet** sein. Man sagt, daß Paare einander zugeordneter Zahlen die Gleichung „erfüllen" oder „befriedigen", oder daß sie **der Gleichung genügen**. Bei beliebigen Zahlen entsteht meist eine Ungleichung:

x	y		$x + y = 2{,}25$
0,70	0,50	$\longrightarrow$	$0{,}70 + 0{,}50 \neq 2{,}25$

Aus der Wertetafel geht hervor, daß einander zugeordnete Zahlen voneinander abhängen; denn beide müssen zusammen immer die Länge des Brettes (2,25 m) ergeben. Legen wir für x einen Wert zwischen 0 und 2,25 fest, so ist durch $y = 2{,}25 - x$ auch y festgelegt. Wir sagen: **y ist von x abhängig.** Das gilt auch umgekehrt. Legen wir zuerst y fest, so ist nun x nicht mehr frei wählbar, denn $x = 2{,}25 - y$. In diesem Falle ist **x von y abhängig.** Diese Abhängigkeit, die durch die Vorschrift der gegenseitigen Zuordnung bedingt ist, gilt also wechselseitig.

Wenn zwei Größen x und y derartig einander zugeordnet sind, daß sie wechselseitig voneinander abhängen, sagt man, sie bilden eine **Funktion. y ist eine Funktion von x,** aber auch **x ist eine Funktion von y.**

Wir überprüfen unsere neuen Erkenntnisse an einer weiteren Aufgabe.

2. Beispiel: Von einem größeren Feld soll ein rechteckiges Stück von 3a als Versuchsfeld abgegrenzt werden.

a) Das Versuchsfeld soll 30 m lang und 10 m breit werden.
Da 3a = 300 m² sind, gilt (alle Angaben in m bzw. m²):

$$30 \cdot 10 = 300$$

Ergebnis: Die vorgeschriebenen Maße sind möglich.

b) Das Versuchsfeld soll 20 m lang werden.

Durch die Längenangabe ist auch die Breite des Feldes (x m) bestimmt. Wir können sie durch folgende Bestimmungsgleichung ermitteln:

$$20 \cdot x = 300$$
$$x = \frac{300}{20}$$
$$x = 15$$

Ergebnis: Das Versuchsfeld muß bei 20 m Länge 15 m breit werden.

c) Das Versuchsfeld unterliegt keinen besonderen Vorschriften für die Länge und Breite.

Die Maßzahlen x und y für die Länge und Breite des Versuchsfeldes müssen die Gleichung $x \cdot y = 300$ erfüllen. Sie lassen sich nicht eindeutig angeben. Es gibt viele Möglichkeiten, da beide eine Funktion bilden.

Einige Wertepaare stellen wir in einer Wertetafel zusammen:

x	20	25	30	50	60
y	15	12	10	6	5

Aus den Beispielen ersehen wir: Bilden die beiden Größen eine Funktion, so können sie oft eine beliebig große Zahl von Wertepaaren annehmen, die man in einer Wertetafel zusammenstellen kann. Innerhalb dieser Tafel ändern x und y ständig ihren Wert. Man nennt sie deshalb **Veränderliche** oder **Variable**. Man bezeichnet sie meist durch x und y. Die Gleichung, die den Zusammenhang zwischen den Veränderlichen (das „Gesetz“ oder die „Vorschrift“ ihrer Zuordnung) darstellt, heißt der **analytische Ausdruck der betreffenden Funktion.**

Beim ersten Beispiel war $x + y = 2{,}25$, beim zweiten Beispiel $x \cdot y = 300$ der analytische Ausdruck der betreffenden Funktion.

26. Der Proportionalitätsfaktor

Funktionale Zusammenhänge zeigen sich überall in unserer Umwelt. Zwischen Warenmenge und Warenpreis besteht auch eine Funktion; denn jeder Warenmenge ist ein bestimmter Preis zugeordnet und umgekehrt. Bei den meisten Waren besteht Proportionalität zwischen Menge und Preis. Dann ist das Verhältnis aus dem Zahlenwert des Warenpreises y mit dem Zahlenwert der Menge x immer konstant. Diese Konstante ist der **Proportionalitätsfaktor** $\boldsymbol{k}$**,** also $y : x = k$. Er gibt den Preis für die Mengeneinheit, z. B. für 1 kg, an. Wenn von einer Apfelsorte 1 kg 1,20 DM kostet, ist der Zahlenwert des Proportionalitätsfaktors eben 1,20. Dann gilt für diese Apfelsorte im Verkauf

$$y : x = 1{,}20 \qquad \text{oder} \qquad y = 1{,}20\,x.$$

Setzen wir jetzt für x die Zahlenwerte beliebiger Apfelmengen ein, z. B. (in kg) 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3 usw., so können wir mit Hilfe dieser Gleichung die Zahlenwerte der zugeordneten Preise berechnen, nämlich (in DM) $1 \cdot 1{,}20 = 1{,}20$; $1\frac{1}{2} \cdot 1{,}20 = 1{,}80$; $2 \cdot 1{,}20 = 2{,}40$ usw.

Dann entsteht die folgende Wertetafel, die einen anschaulichen Überblick über die Funktion zwischen Warenmenge und Warenpreis gibt.

x	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	...
y	1,20	1,80	2,40	3,60	4,80	...

Die zugrunde liegende Gleichung $y = 1{,}20\,x$ regelt die Zuordnung der x- und y-Werte, sie ist also der analytische Ausdruck dieser Funktion.

27. Weitere Beispiele für funktionale Zusammenhänge

1) Wir können uns leicht überlegen, daß jede proportionale Beziehung zwischen zwei Größen eine Funktion darstellt. Aber nicht alle Funktionen sind der Ausdruck von Proportionalitäten. So bilden z. B. auch produktgleiche Größen eine Funktion.

Beispiel: Wenn der Dreher bei einer Drehmaschine eine konstante Schnittgeschwindigkeit einhalten will, muß er die Übersetzung je nach dem Durchmesser d des Werkstückes wählen. Die Umdrehungszahl n der Drehmaschine ist nämlich eine Funktion des Werkstückdurchmessers, die durch den analytischen Ausdruck $n \cdot d = c$ wiedergegeben ist. Die Veränderlichen dieser Funktion sind n und d. Wir können sie deshalb auch mit den Zahlenwerten x und y bezeichnen und $x \cdot y = c$ schreiben. c ist der feste Wert, der sich aus der gewünschten Schnittgeschwindigkeit v ergibt und von den gewählten Maßeinheiten für n, d und v abhängt. Wenn wir n in Umdrehungen je Minute $\left(\frac{\mathrm{U}}{\min}\right)$, d in mm und v in

$\frac{\text{m}}{\text{min}}$ messen, so wird mit einem Näherungswert $c = 318 \cdot v$. Für $v = 16\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$ wird also die Funktion zwischen x und y durch den analytischen Ausdruck $x \cdot y = 4770$ wiedergegeben.

Daraus errechnen wir die Wertetafel für verschiedene Durchmesser x mm und die zugeordneten Drehzahlen $y\,\frac{\text{U}}{\text{min}}$ in Abrundung auf Ganze:

x	30	50	80	100	150
y	159	95	60	48	32

2) Ein an beiden Enden gelagerter Flußstahlträger erfährt in der Mitte eine Durchbiegung y cm, die von seiner Länge x m (gemessen von Lager zu Lager) abhängig ist. Bei einer bestimmten konstanten Belastung wird die Durchbiegung nach der Gleichung $y = 0{,}06\,x^3$ ermittelt. Die Durchbiegung ist also eine Funktion der Länge, die sich durch die folgende Wertetafel veranschaulichen läßt. Ebenso kann man natürlich auch sagen, daß die Länge eine Funktion der Durchbiegung ist.

x	1	2	3	4	5
y	0,06	0,48	1,62	3,84	7,5

Zusammenfassung:

1. **Wir kennen jetzt drei verschiedene Arten von Gleichungen: Gleichungen mit bestimmten Zahlenwerten, Bestimmungsgleichungen und analytische Ausdrücke von Funktionen.**

2. **In den analytischen Ausdrücken von Funktionen kommen zwei Veränderliche x und y vor. Über diese kann zwar frei verfügt werden, doch nur so, daß immer zu einem beliebig gewählten Wert von x ein ganz bestimmter Wert von y gehört und umgekehrt.**

3. **Die Größen x und y sind einander zugeordnet, sie sind gegenseitig voneinander abhängig und bilden eine Funktion (x ist eine Funktion von y, aber auch y ist eine Funktion von x).**

4. **Die Zuordnungsvorschrift zwischen x und y kann als Gleichung niedergeschrieben werden. In dieser kommen neben bekannten Größen auch die beiden Veränderlichen x und y vor. Die Gleichung heißt der analytische Ausdruck der Funktion. Sie kann auch als Wertetafel dargestellt werden.**

5. **Auch proportionale oder produktgleiche Größen stehen in diesem Sinne jeweils in funktionaler Beziehung zueinander.**

Aufgaben

1. Folgende Gleichungen sind analytische Ausdrücke von Funktionen. Entwirf jedesmal eine Wertetafel und berücksichtige dabei auch negative und gebrochene Zahlen!

   a) $2x + 0{,}5y = 10$
   b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - 1 = 0$
   c) $y = 2x + 3$
   d) $x = 2y + 3$
   e) $a = \frac{1}{2}b^2$ (Veränderliche: a und b)
   f) $m = \frac{1}{3}n^3$ (Veränderliche: m und n)
   g) $y = 5 - 2x - 3x^2$
   h) $x = 4 - 3y - 4y^3$
   i) $u \cdot v - 10 = 0$ (Veränderliche: u und v)
   k) $x : y = 2 : 3$
   l) $3(x + y + 1) = 2(y - 3)$
   m) $(x - y) : 2 = (x + y) : 3$

   Anleitung: Die Ausdrücke a), b), i), k), l), m) sind vor der Berechnung von Wertepaaren für die Wertetafel erst nach einer der beiden Veränderlichen aufzulösen.

2. In den folgenden Sachverhalten stehen die beiden angegebenen Größen immer in einem bestimmten Verhältnis, d. h., sie sind proportional. Bezeichne den Zahlenwert der einen mit x, den der anderen mit y! Schreibe dann den funktionalen Zusammenhang zwischen x und y als analytischen Ausdruck auf! Berechne nun eine Wertetafel und achte dabei darauf, daß die Größen die richtigen Benennungen bekommen!

   a) 1 Brötchen kostet 0,05 DM.
   b) Ein Bügeleisen verbraucht in $2\frac{1}{2}$ Std. 1 kWh elektrische Energie.
   c) Aus 5 kg Trauben ergeben sich 3,5 l Traubensaft.
   d) Ein Abraumbagger in einer Kohlengrube räumt in 20 Min. 100 t Abraum ab.
   e) Für eine Beeteinfassung braucht man 3 Pflanzen auf je 50 cm.

3. Die Größen in den folgenden Aufgaben sind produktgleich. Verfahre genauso wie in Aufgabe 2!

   a) Wenn täglich 15 Briketts verfeuert werden, reicht der Vorrat 200 Tage.
   b) Man kann ein Stück Land mit den gelieferten Weißkrautpflanzen in Reihen von 50 cm Abstand bei einem Pflanzenabstand von 40 cm bepflanzen.
   c) Man kann aus einem Brett 20 Leisten von 9 mm Stärke schneiden.
   d) Bei der Einstellung eines regelbaren Widerstands auf 45 Ω beträgt die Stromstärke 5 Ampere.

4. Wie heißen die analytischen Ausdrücke für die Funktionen zwischen folgenden Veränderlichen? Stelle jedesmal eine Wertetafel auf!

a) Seite und Umfang eines gleichseitigen Dreiecks,

b) Seite und Umfang eines Quadrats,

c) Seite und Umfang eines regelmäßigen n-Ecks,

d) Seite und Fläche eines Quadrats,

e) Kante und Oberfläche eines Würfels,

f) Kante und Volumen eines Würfels.

5. Drücke die Abhängigkeiten in den folgenden Sachverhalten durch einen analytischen Ausdruck aus! Für die Variablen kannst du auch andere allgemeine Zahlsymbole als x und y wählen. Überlege dabei, ob man von der Sache her die eine Variable als unabhängige und die andere als abhängige veränderliche bezeichnen sollte! Vor dem Niederschreiben des analytischen Ausdrucks notiere mit der richtigen Maßbezeichnung, was die einzelnen allgemeinen Zahlsymbole bezeichnen!

a) Bei Rettungsarbeiten verbraucht ein Bergmann aus der mitgeführten Sauerstoffflasche in $\frac{1}{2}$ Std. 70 l Sauerstoff (Inhalt der Flasche etwa 3 hl Sauerstoff bei 760 Torr).

b) Eine Drahtspirale von 100 mm Länge dehnt sich bei Belastung mit 10 p um 16 mm, bei Belastung mit 20 p um 32 mm usw. aus. Nimm als abhängige Variable die Gesamtlänge der Spirale!

c) Für 1 m² Wand (11,5 cm dick, Format der Ziegel NF 52) braucht man 48 Ziegel (34 l Mörtel).

d) Bei 24 cm dicken und noch dickeren Wänden ermittelt man den Materialbedarf nach dem Volumen des Mauerwerks.
Für 1 m³ solchen Mauerwerks rechnet man 384 Normalziegel (NF 52) und 272 l Mörtel.

e) Um die Länge einer Mauer zu bestimmen, zählt man die nebeneinanderliegenden Ziegelköpfe. Das Maß eines Ziegelkopfes setzt sich bei einem Normalziegel (NF 52) aus 11,5 cm Ziegelbreite und 1 cm Stoßfuge zusammen. Das Produkt aus der Anzahl der Ziegelköpfe und der Kopfbreite ergibt die Länge der Mauer, wenn sie an einer Seite angemauert ist (Anbau). Steht aber die Wand frei (Pfeiler), so fehlt eine Stoßfuge. Ist die Mauer beidseitig angemauert (Nische), so kommt 1 cm für eine Stoßfuge hinzu. Stelle danach die drei Formeln für die Anbaulänge, Pfeilerlänge und Nischenbreite auf!

f) Bei NF 52 kommen auf 1 m Wandhöhe 12 Ziegelschichten. (Die Wandhöhe h soll die abhängige Variable sein.)

g) 5 kg Roggenmehl geben durchschnittlich 8 kg Brot.

h) Für 1 kg Brot muß man 1,1 kg Brotteig nehmen.

i) Für das Errechnen der Normzeit (t_N) beim Schneiden von Spindeln gewährt man zur eigentlichen Bearbeitungszeit eine Vorbereitungszeit t_A (30 Min.). Die eigentliche Bearbeitungszeit ist von der Anzahl n der Spindeln und von der Stückzeit $t_s = 12$ Min. je Stück abhängig. (Abhängige Variable ist die Normzeit.)

k) Weitere Beispiele:

	Vorbereitungszeit	Stückzeit
Aufpassen einer Handkurbel auf eine Vierkantspindel	12 Min.	8 Min.
Einbau von Kupplungen	40 Min.	50 Min.

l) Der Leistungsgrundlohn ist 115% des Zeitlohnes.

m) Der Leistungslohn richtet sich nach dem Leistungsgrundlohn und danach, mit wieviel Prozent der Arbeiter seine Norm erfüllt.

n) Befährt ein Kraftwagen eine Steigung, so hat er einen zusätzlichen Widerstand zu überwinden. Der Steigungswiderstand (W_s) in kp ist vom Gewicht des Wagens in kp und der Steigung in Prozent abhängig. Nimm als Steigung den Wert 6% an!

28. Die grafische Darstellung von Funktionen im rechtwinkligen Koordinatensystem

1) Mit Hilfe der Wertetafel können wir jede Funktion grafisch darstellen. Wir kennen schon sehr verschiedene Arten der grafischen Darstellung, z. B. figürliche Darstellungen, Kreisdiagramme (besonders in der Prozentrechnung), Streifendiagramme, Streckendiagramme. Wir wollen uns jetzt ausschließlich mit Streckendiagrammen beschäftigen und diesen eine andere Deutung geben.

1. Beispiel: Aus Weizen gewinnt man beim Mahlen 70% Mehl. Die anfallende Mehlmenge y kg ist also eine Funktion der Körnermenge x kg. Der zugrunde liegende analytische Ausdruck ist $y = 0{,}7 \cdot x$.
Eine Wertetafel ergibt:

x	1	2	3	4	5	10	15	20
y	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	7	10,5	14

Diese Zahlen haben wir bisher in einem Streckendiagramm so dargestellt, daß die Maßzahlen der einzelnen Mehlmengen als senkrechte Strecken in regelmäßigen Abständen auf einem Strahl stehen (Abb. 8). An den Anfangspunkt des Strahles haben wir dabei immer die Zahl 0, an die Fußpunkte der Senkrechten die Maßzahlen der zugeordneten Körnermengen

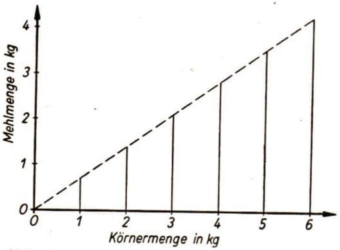


Abb. 8

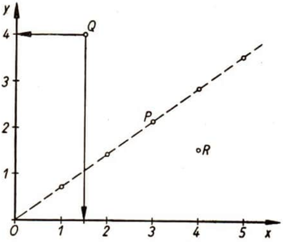


Abb. 9

geschrieben. Die Endpunkte der Strecken können wir geradlinig verbinden. Diese Gerade geht dabei durch den Anfangspunkt des Strahles. Jeder Maßzahl y entspricht im Diagramm eine Strecke.

2) Die senkrechten Strecken sind nicht das Wesentliche an den Streckendiagrammen. Sobald wir nämlich, wie in Abbildung 8, eine Hilfsgerade mit der Maßeinheit für die Mehlmengen einzeichnen, genügen bereits die Endpunkte der Strecken, um alle Werte ablesen zu können. Die Abbildung 8 vereinfacht sich dann zur Abbildung 9. In ihr sind lediglich noch die beiden Grundgeraden eingezeichnet, auf denen die Maßeinheiten abgetragen sind.

Die beiden Grundgeraden nennt man **Achsen**. Statt mit „Körnermenge" beziehungsweise „Mehlmenge" werden sie mit x bzw. mit y bezeichnet. Deshalb spricht man auch von der **x-Achse** und von der **y-Achse**. Dabei zeichnet man die x-Achse meist waagerecht, die y-Achse senkrecht dazu nach oben. Den Schnittpunkt der beiden Achsen nennt man den **Nullpunkt** oder **Ursprung**. Man bezeichnet ihn mit dem Buchstaben O.

Jedem Punkt der Zeichenebene sind dann nach Festlegung der beiden Achsen und ihrer Maßeinheiten eindeutig zwei Zahlen zugeordnet. So gehören z. B. zu dem in Abbildung 9 als Q bezeichneten Punkte die beiden Zahlen 1,5 und 4. Man findet sie, indem man von Q auf die beiden Achsen lotet und dort die Zahlenwerte abliest.

Dieser Punkt liegt nicht auf der eingezeichneten Geraden, weil die Werte x und y nicht der dargestellten Wertetafel entnommen sind. Zu $x = 1{,}5$ würde $y = 0{,}7 \cdot 1{,}5 = 1{,}05$, aber nicht $y = 4$ gehören. Zu $y = 4$ gehört $4 = 0{,}7 \cdot x$, also $x = 4 : 0{,}7 = 5\frac{5}{7}$, aber nicht $x = 1{,}5$.

Von den beiden zu Q gehörenden Zahlenwerten nennt man stets zuerst die auf der x-Achse abgelesene Zahl und schreibt dafür kurz $Q\,(1{,}5;\ 4)$. Entsprechend ergibt sich aus Abbildung 9 noch $P(3;\ 2{,}1)$ und $R(4;\ 1{,}5)$.

Die beiden Zahlen, die einen Punkt bestimmen, nennt man die **Koordinaten** des betreffenden Punktes. Die auf der x-Achse abgelesene Zahl heißt die **Abszisse**, die auf der y-Achse abgelesene Zahl die **Ordinate**. Aus diesem Grunde nennt man die x-Achse auch die **Abszissenachse**, die y-Achse auch **Ordinatenachse**.

Beide Achsen zusammen bilden die **Koordinatenachsen** oder das **Koordinatensystem**. Da die Koordinatenachsen senkrecht aufeinanderstehen, bilden sie in diesem Falle ein **rechtwinkliges Koordinatensystem.** Der Schnittpunkt der beiden Achsen heißt auch der Koordinatenursprung.

3) So wie zu jedem Punkt der Ebene eindeutig zwei Zahlen (seine beiden Koordinaten) gehören, bestimmen auch umgekehrt zwei Zahlen eines Zahlenpaares eindeutig einen Punkt in der Ebene, wenn wir die zwei Zahlen als Koordinaten dieses Punktes auffassen. Das trifft auch zu auf die zusammengehörenden Zahlen einer Wertetafel. Auf diese Weise können wir die ihr zugrunde liegende Funktion durch eine Folge von Punkten in einem festgelegten Koordinatensystem grafisch darstellen.

Dabei kommt es vor, daß auch negative oder gebrochene Zahlen als Koordinaten von Punkten gedeutet werden müssen. Das erfordert eine Erweiterung des Koordinatensystems.

2. Beispiel: An älteren Thermometern finden wir zwei Temperaturskalen. Die eine heißt die Celsiusskala, die zweite die Réaumurskala. Beide haben dieselben Nullpunkte, doch sind die übrigen Zahlenwerte einander so zugeordnet, daß Celsiuswert zu Réaumurwert sich immer wie 5 zu 4 verhält:

$$C : R = 5 : 4$$
$$4\,C \quad = 5\,R$$

Beide bilden also eine Funktion, und $4\,C = 5\,R$ ist der zugrunde liegende analytische Ausdruck. Die Veränderlichen sind dabei mit C und R bezeichnet.

Die Wertetafel muß in diesem Falle auch negative Zahlen umfassen, da ja auch Temperaturen unter 0° berücksichtigt werden müssen. Wir ermitteln Zahlenpaare, indem wir beispielsweise für R eine Reihe von Zahlen einsetzen und jeweils die zugehörige Zahl für C berechnen.

$$R = 16;\quad \begin{aligned} 4 \cdot C &= 5 \cdot 16 \\ C &= \tfrac{5 \cdot 16}{4} \\ C &= 20 \end{aligned} \;\Bigg|\; :4 \qquad R = -6;\quad \begin{aligned} 4 \cdot C &= 5 \cdot (-6) \\ C &= -\tfrac{5 \cdot 6}{4} \\ C &= -7\tfrac{1}{2} \end{aligned} \;\Bigg|\; :4$$

So ergibt sich die folgende Wertetafel:

R	-20	-16	-10	-6	0	$+4$	$+14$	$+40$
C	-25	-20	$-12{,}5$	$-7{,}5$	0	$+5$	$+17{,}5$	$+50$

Wenn wir diese Zahlenpaare durch Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen wollen, müssen wir die Achsen über ihre Nullpunkte hinaus verlängern und zu Zahlengeraden erweitern. Das ist in Abbildung 10 ausgeführt worden. Auf jeder der Achsen ist mit Hilfe einer willkürlich gewählten Einheit eine Skala mit ganzen (positiven und negativen) Zahlen eingezeichnet worden. Die Maßeinheiten sind auf beiden Achsen gleich groß gewählt worden. Das ist zwar nicht nötig, aber zweckmäßig. Die Halbachsen mit den positiven Skalenwerten wollen wir künftig immer durch einen Pfeil kennzeichnen.

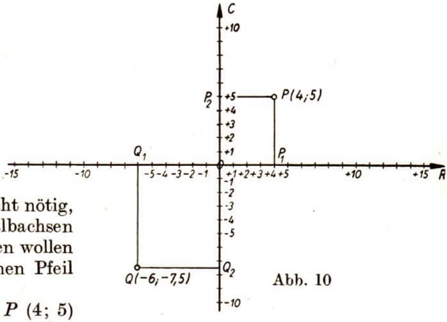
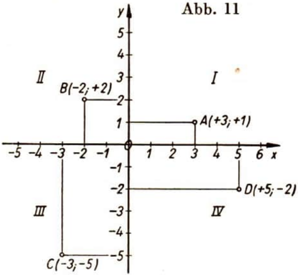


Abb. 10

Um jetzt z. B. den Punkt P (4; 5) zu zeichnen, ziehen wir von den Punkten $+4$ der R-Skala und $+5$ der C-Skala jeweils die Senkrechte zu der betreffenden Achse; der Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt. Dasselbe ist noch einmal für $Q(-6; -7{,}5)$ gezeichnet. Wir erkennen, daß diese Senkrechten (in Abb. 10 Q_1Q bzw. Q_2Q) zusammen mit den Abschnitten auf den Achsen vom Nullpunkt bis zu den Punkten, die mit den betreffenden Koordinaten beschriftet sind (in Abb. 10 OQ_1 bzw. OQ_2), immer ein Rechteck bilden. In diesem sind die Maßzahlen der Seiten gleich den Koordinaten des betreffenden Punktes.

Abb. 11


Durch die erweiterten Koordinatenachsen wird die ganze Zeichenebene in vier Viertel, die vier **Quadranten,** aufgeteilt. Wir wollen sie so numerieren, wie es Abbildung 11 zeigt.

Beachte besonders: Die Koordinaten eines Punktes, z. B. Q, sind nicht dasselbe wie die Strecken $Q_1Q = OQ_2$ und $Q_2Q = OQ_1$. Die Koordinaten sind Zahlen. Sie werden durch diese Strecken, die mit einer beliebigen Maßeinheit gezeichnet werden können, veranschaulicht.

4) Im Laufe eines Sommertages erhielt man durch Messen der Lufttemperatur alle 2 Stunden die folgende Wertetafel:

Uhrzeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24 Uhr
Temperatur	14	11,5	9,5	12	14	22	26,5	27,5	27	25,5	22	19	16 °C

Stelle den Temperaturverlauf während des Tages grafisch dar!

Hier liegt ebenfalls eine Funktion vor. Denn jeder Uhrzeit ist eine bestimmte Lufttemperatur zugeordnet, oder die Temperatur und die Uhrzeit sind voneinander abhängig. Es ist aber nicht möglich, zu dieser Funktion ein Gesetz in Form eines analytischen Ausdrucks zwischen Temperatur und Uhrzeit niederzuschreiben. Infolgedessen können wir auch die Zahlen dieser Wertetafel nicht wie bei den anderen Beispielen berechnen, sondern sind zu ihrer Ermittlung auf Naturbeobachtungen angewiesen.

Auch diese durch Beobachtung erhaltene Wertetafel können wir durch Punkte in einem Koordinatensystem grafisch darstellen (Abb. 12). Da in unserem Beispiel nur Temperaturwerte über 9° auftreten, ist die Skala

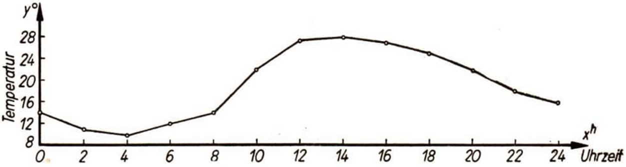


Abb. 12

der Temperaturachse erst bei 8° begonnen worden. Bei dieser Abbildung müssen wir aber bedenken, daß uns nur die Punkte bekannt sind, deren Koordinaten die Beobachtungstafel enthält. Wir dürfen nicht etwa schließen, daß die Temperatur um 7 Uhr 13° gewesen sei.

Die einzelnen Punkte können durch kurze Strecken verbunden werden, um die Anschaulichkeit zu steigern. Die Punkte dürfen nicht durch eine gekrümmte Kurve verbunden werden.

Zusammenfassung:

1. **Funktionen können mit Hilfe von Wertetafeln grafisch dargestellt werden, indem man einander zugeordnete Werte als Koordinaten (Abszisse und Ordinate) je eines Punktes auffaßt. Die Wertepaare der Wertetafeln werden dann durch diese Punkte dargestellt.**

2. **Die Grundlage sind zwei rechtwinklig zueinander stehende Koordinatenachsen (Abszissen- oder x-Achse und Ordinaten- oder y-Achse), auf denen Maßskalen abgetragen werden. Nach Möglichkeit werden die Nullpunkte beider Skalen in den Schnittpunkt der Achsen, den Koordinatenursprung oder Nullpunkt gelegt.**

3. **Negative Werte der Koordinaten erfordern die Ausdehnung der Achsen zu Zahlengeraden. Dadurch entstehen vier Quadranten. Das Ganze heißt rechtwinkliges Koordinatensystem.**

4. Die Punkte, die den Wertepaaren einer Wertetafel entsprechen, können zur besseren Veranschaulichung durch Strecken verbunden werden. Das Ersetzen des gebrochenen Streckenzuges durch eine gekrümmte Kurve ist aber nur dann erlaubt, wenn der Wertetafel ein analytischer Ausdruck zwischen den Veränderlichen zugrunde liegt, der das Berechnen beliebig vieler Zwischenwerte erlaubt.

5. Koordinaten (Abszissen und Ordinaten) sind Zahlenwerte und keine Strecken (Lote oder Abschnitte auf den Koordinatenachsen). Diese dienen nur zur bildlichen Darstellung der Koordinaten.

Aufgaben

1. Bestimme die Lage der folgenden Punkte im rechtwinkligen Koordinatensystem: (1; 1), (+1; −1), (−1; −1), (−1; +1), (0; 1), (−1; 0), (0; 0), (−4; 0), (4; −4), (−4; −4)! In welchen Quadranten liegen die Punkte?

2. Stelle die in Aufgabe **1a)** bis **m)** von S. 66 berechneten Wertetafeln grafisch dar!

3. Verfahre ebenso mit den Aufgaben **2a)** bis **e)** von S. 66!

4. Verfahre ebenso mit den Aufgaben **3a)** bis **d)** von S. 66!

5. Verfahre ebenso mit den Aufgaben **4a)** bis **f)** von S. 67!

6. Die Messung der relativen Feuchtigkeit an einem Tage ergab die folgende Wertetafel:

Uhrzeit	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	Uhr
rel. Feuchtigkeit	72	73	76	75	68	60	55	53	53	55	60	65	68	%

Stelle die Wertetafel grafisch dar!

7. Bilde auf Grund der folgenden Tatsachen den analytischen Ausdruck und stelle die Abhängigkeit grafisch dar!

a) Beim Abbau von Gestein entstehen aus 5 m³ Gestein 8 m³ Haufwerk.

b) Eine Schraubenfeder von 30 mm Länge verlängert sich bei einer Belastung von 1 kp um 11 mm, bei einer Belastung von 2 kp um 22 mm, usw.

Nimm als abhängige Veränderliche die Gesamtlänge der Schraubenfeder!

8. Entnimm aus den Abbildungen 13 und 14 die Koordinaten der Punkte und stelle sie in einer Wertetafel zusammen!

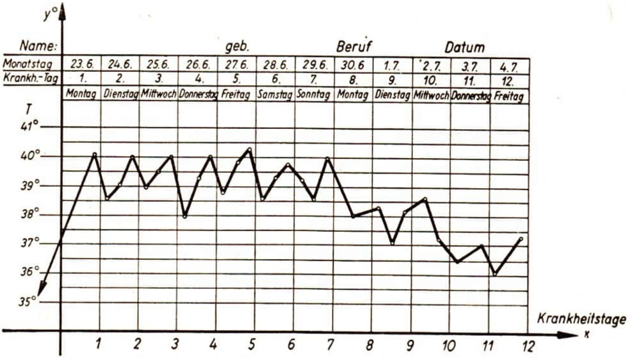


Abb. 13

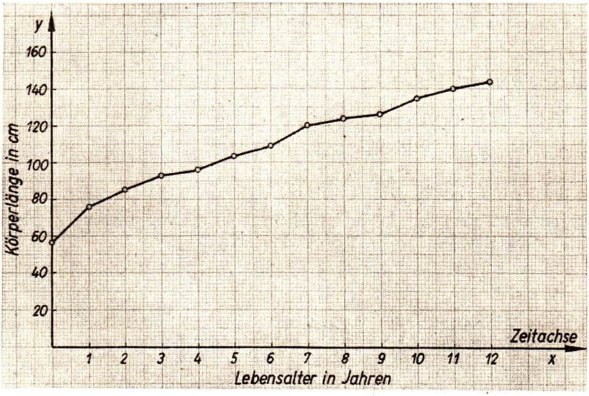


Abb. 14

29. Die lineare Funktion

1) Wir wollen jetzt ausschließlich Funktionen untersuchen, denen ein analytischer Ausdruck zugrunde liegt. Damit berechnen wir eine Wertetafel, und diese stellen wir grafisch in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar. Es gibt also neben der in Worten gefaßten Zuordnungsvorschrift drei Möglichkeiten, solche Funktionen darzustellen:

a) durch einen analytischen Ausdruck,
b) mit Hilfe der Wertetafel,
c) als Diagramm in einer grafischen Darstellung.

Der analytische Ausdruck muß neben bekannten Größen stets auch die Veränderlichen x und y enthalten. Je nachdem, durch welche arithmetischen Operationen diese Größen verbunden sind, ergeben sich Funktionen verschiedenster Art.

Aus der Übersicht auf S. 51 ersahen wir, daß es Bestimmungsgleichungen verschiedenen Grades gibt. Auch Funktionen werden durch ihren Grad unterschieden.

Beispiele:

Funktionen 1. Grades (lineare Funktionen)	$3x - 4y + 5 = 0$ $y = 2x + 1$
Funktionen 2. Grades (quadratische Funktionen)	$y = 2x^2 + x + 1$ $x - 3y + y^2 = 8$
Funktionen 3. Grades	$4x^3 + y - 2x = 6$ $y = x^3 - 2x^2 + x - 3$

Wir wollen uns zunächst nur mit Funktionen 1. Grades beschäftigen.

Eine Funktion 1. Grades kann demnach nur ein Glied mit $x^1 = x$, ein Glied mit $y^1 = y$ und ein von x und y freies Glied enthalten. Dieses nennt man absolutes Glied.

Beispiel: $2x - 3y + 6 = 0$

Um eine Wertetafel zu bestimmen, können wir zwei Wege einschlagen:

1. Weg: Wir setzen für y beliebige Zahlen ein und berechnen jeweils die zugehörigen x-Werte.

Die Berechnung wird bequemer, wenn wir von vornherein den gegebenen analytischen Ausdruck nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6 &= 0 &&\Big| + 3y - 6 \\ 2x &= 3y - 6 &&\Big| : 2 \\ x &= \tfrac{3}{2}y - 3 && \end{aligned}$$

In diesem Falle nennt man y die unabhängige Veränderliche und x die abhängige Veränderliche.

2. Weg: Wir setzen für x beliebige Zahlen ein und berechnen jeweils die zugehörigen y-Werte.

Auch hier wird die Berechnung bequemer, wenn wir den analytischen Ausdruck nach y auflösen.

$$\begin{array}{rl|l} 2x - 3y + 6 = 0 & & -2x-6 \\ -3y = & -2x - 6 & :(-3) \\ y = & \frac{2}{3}x + 2 & \end{array}$$

In diesem Falle nennt man x die unabhängige Veränderliche und y die abhängige Veränderliche.

Wir wollen die Berechnung der Wertetafel nach beiden Wegen gegenüberstellen.

1. Weg

	$x = \frac{3}{2}y - 3$
$y_1 = +2$	$x_1 = \frac{3}{2}(+2) - 3$ $x_1 = 3 - 3$ $x_1 = 0$
$y_2 = 0$	$x_2 = \frac{3}{2}(0) - 3$ $x_2 = 0 - 3$ $x_2 = -3$
$y_3 = -2$	$x_3 = \frac{3}{2}(-2) - 3$ $x_3 = -3 - 3$ $x_3 = -6$

2. Weg

	$y = \frac{2}{3}x + 2$
$x_1 = +3$	$y_1 = \frac{2}{3}(+3) + 2$ $y_1 = 2 + 2$ $y_1 = 4$
$x_2 = +1$	$y_2 = \frac{2}{3}(+1) + 2$ $y_2 = \frac{2}{3} + \frac{6}{3}$ $y_2 = 2\frac{2}{3}$
$x_3 = -1$	$y_3 = \frac{2}{3}(-1) + 2$ $y_3 = -\frac{2}{3} + \frac{6}{3}$ $y_3 = 1\frac{1}{3}$

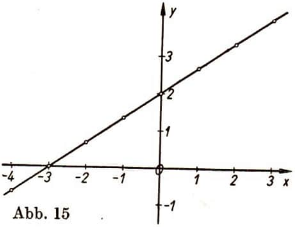


Abb. 15

Die Wertepaare werden in einer Wertetafel zusammengestellt.

x	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
y	$-\frac{2}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$+2$	$+\frac{8}{3}$	$+\frac{10}{3}$	$+4$

Daraus ergibt sich das Diagramm der Abbildung 15.

2) Für jede Funktion 1. Grades kann in derselben Weise eine Wertetafel aufgestellt werden. Dabei ist es üblich, x als unabhängige und y als abhängige Veränderliche aufzufassen, also die Gleichungen nach y aufzulösen.

Beispiele: $3x + 4y - 8 = 0$ $\qquad 4x - 2y = 3$

$$y = -\tfrac{3}{4}x + 2 \qquad y = 2x - \tfrac{3}{2}$$

Der analytische Ausdruck nimmt also dann die allgemeine Form an:

$$y = mx + n$$

Sowohl der Koeffizient von $x(m)$ als auch das absolute Glied (n) können dabei ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sein.

Stehen in dem analytischen Ausdruck alle Glieder mit den Veränderlichen auf der einen Seite der Gleichung und auf der anderen nur ein absolutes Glied oder 0, so nennt man das die **implizite** (unentwickelte) **Form** des analytischen Ausdrucks.

Beispiele: $4x - 5y + 7 = 0; \qquad 2x + 3y = 15.$

Wird der Ausdruck aber nach einer der Veränderlichen aufgelöst, so spricht man von einer **expliziten** (nach x bzw. y entwickelten) **Form.**

Beispiele: $x = \frac{5}{4}y - \frac{7}{4}; \qquad y = -\frac{2}{3}x + 5.$

Auch die allgemeine Form $y = mx + n$ des analytischen Ausdrucks einer Funktion 1. Grades ist demnach eine explizite Form.

3) Wir wollen die Funktion 1. Grades jetzt in der expliziten Form genauer untersuchen. Dazu müssen wir systematisch erforschen, welchen Einfluß die beiden Konstanten m und n auf Gestalt und Lage der Kurve im Diagramm haben.

Wir untersuchen zunächst den Einfluß von m, indem wir für n einen möglichst einfachen Wert, z. B. $n = 0$, wählen. Dann nimmt der analytische Ausdruck die einfache Form $y = m \cdot x$ an. Schreiben wir durch Division beider Seiten durch x dafür $\frac{y}{x} = m$, so heißt das, daß einander zugeordnete Werte von x und y immer dasselbe Verhältnis haben:

$$y_1 : x_1 = y_2 : x_2 = y_3 : x_3 = y_4 : x_4 = \cdots = m.$$

Der analytische Ausdruck der Funktion 1. Grades in der einfachen Form für $n = 0$, also $y = mx$, stellt demnach die Proportionalität zwischen x und y dar.

Wir untersuchen nun den Einfluß von m auf die jeweilige Gerade (Abb. 16):

Eine Gerade ist durch zwei Punkte festgelegt. Einer davon ist auf jeden Fall der Koordinatenursprung mit den Koordinaten (0; 0). Denn zu $x = 0$ gehört stets $y = m \cdot 0 = 0$, unabhängig davon, welchen Zahlenwert m hat. Alle Geraden gehen also durch den Ursprung des Koordinatensystems. Ein zweites, leicht berechenbares Wertepaar erhalten wir für $x = 1$. Dann ist $y = m \cdot 1 = m$, also:

$$m = 2; \quad y = 2x; \quad \text{Punkte: } (0; 0); \ (1; 2),$$
$$m = \tfrac{1}{2}; \quad y = \tfrac{1}{2}x; \quad \text{Punkte: } (0; 0); \ \left(1; \tfrac{1}{2}\right),$$
$$m = -2; \quad y = -2x; \quad \text{Punkte: } (0; 0); \ (1; -2).$$

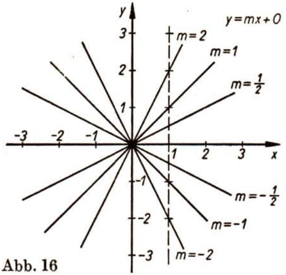


Abb. 16

Zur Konstruktion der Geraden erhalten wir die zweiten Punkte, die alle die Abszisse 1 haben, sehr leicht auf einer Hilfsgeraden, die im Abstand $+1$ parallel zur y-Achse verläuft. Auf ihr brauchen wir jeweils nur die Werte von m vom Schnittpunkt mit der x-Achse aus abzutragen, um den zweiten Punkt der betreffenden Geraden zu erhalten. Verbinden wir ihn mit dem Koordinatenursprung, so ist die dem betreffenden Werte von m zugeordnete Gerade gefunden (Abb. 16).

An der Abbildung 16 erkennen wir folgendes: Den Proportionalitätsfunktionen mit dem analytischen Ausdruck $y = mx$ entsprechen Geraden durch den Koordinatenursprung. Man spricht von einem Geradenbüschel. Die Richtung der einzelnen Geraden hängt vom Werte des Proportionalitätsfaktors m ab. Ist er positiv, verläuft die Gerade im 1. und 3. Quadranten, ist er negativ, so verläuft sie im 2. und 4. Quadranten. Je größer der Absolutbetrag $|m|$ ist, desto steiler verläuft die Gerade in bezug auf die x-Achse. Man nennt den Proportionalitätsfaktor m deshalb auch den **Richtungsfaktor** oder den **Anstieg** der Geraden. Beachte vor allem folgende Besonderheiten:

	m	analytischer Ausdruck	Lage der Geraden
1.	$+1$	$y = x$	Halbierende des 1. und 3. Quadranten
2.	-1	$y = -x$	Halbierende des 2. und 4. Quadranten
3.	$+\frac{1}{2}$ $+2$	$y = \frac{1}{2}x$ $y = 2x$	symmetrisch zur Halbierenden $y = x$
4.	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}x$ $y = -\frac{1}{2}x$	symmetrisch zur x-Achse und zur y-Achse

Die symmetrische Lage bei 3. und 4. gilt nicht nur für $m = +2$ und $m = +\frac{1}{2}$ bzw. für $m = +\frac{1}{2}$ und $m = -\frac{1}{2}$, sondern für jeden Zahlenwert k, also für $m = k$ und $m = \frac{1}{k}$ bzw. $m = +k$ und $m = -k$.

4) Jetzt untersuchen wir die Bedeutung des absoluten Gliedes n. Dazu wählen wir einen möglichst einfachen Richtungsfaktor, z. B. $m = \frac{1}{2}$, also den analytischen Ausdruck $y = \frac{1}{2}x + n$. Wählen wir zunächst $n = 0$, so errechnen wir zu $y = \frac{1}{2}x$ leicht folgende Wertetafel:

x	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
y	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$

Geben wir jetzt n einen anderen Wert, z. B. 3, so ergibt sich die neue Wertetafel für $y = \frac{1}{2}x + 3$ aus der für $y = \frac{1}{2}x$, indem wir alle y-Werte der ersten Tafel um $+3$ vergrößern:

x	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
$y = \frac{1}{2}x$	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{2}x + 3$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$	$+2\frac{1}{2}$	$+3$	$+3\frac{1}{2}$	$+4$	$+4\frac{1}{2}$

Da also die Ordinaten alle um den gleichen Betrag $+3$ größer geworden sind, müssen die ihnen entsprechenden Punkte alle um das gleiche Stück in Richtung der positiven y-Achse verschoben werden (vgl. Abb. 17). Die gesamte zu $y = \frac{1}{2}x$ gehörende Gerade wird also parallel zu sich selbst um $+3$ in Richtung der positiven y-Achse verschoben, wenn sie in die zu $y = \frac{1}{2}x + 3$ gehörende übergeht. Auch zu $y = \frac{1}{2}x + 3$ gehört also als Diagramm eine Gerade.

Entsprechendes gilt für andere Werte von n (Abb. 18). Das absolute Glied n gibt den Betrag der Parallelverschiebung der Geraden $y = mx$ an. Sein Wert ist auf der y-Achse zu erkennen. Man nennt n deshalb den **Abschnitt auf der y-Achse**. Die Gesamtheit aller Funktionen 1. Grades, deren analytische Ausdrücke dasselbe m (in Abb. 18 $m = \frac{1}{2}$),

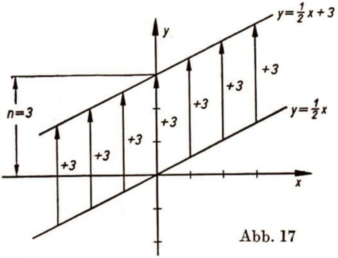


Abb. 17

aber verschiedene n haben, ergibt als Diagramm demnach eine Schar paralleler Geraden.

Da jede Funktion 1. Grades ($y = mx + n$) als Diagramm eine gerade Linie ergibt, nennt man die Funktion 1. Grades auch **lineare Funktion.**

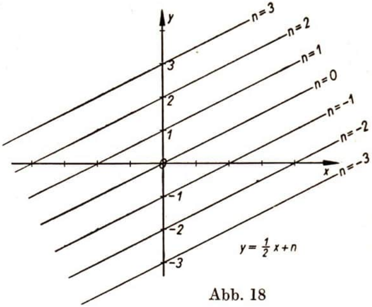


Abb. 18

Zusammenfassung:

1. **Jede Funktion 1. Grades ergibt als Diagramm eine gerade Linie. Sie heißt deshalb auch lineare Funktion.**
2. **Der analytische Ausdruck kann entweder in der impliziten Form (z. B. $3x + 7y + 2 = 0$) oder in der expliziten Form (z. B. $x = 2y - 1$) angegeben werden.**
3. **In der expliziten Form $y = mx + n$ bestimmt m die Richtung der Geraden (Richtungsfaktor oder Anstieg), n die Verschiebung längs der y-Achse (Abschnitt auf der y-Achse).**
4. **Für $n = 0$ entsteht der analytische Ausdruck $y = mx$. Durch ihn ist die Proportionalität zwischen x und y gekennzeichnet. Der Richtungsfaktor m heißt dann Proportionalitätsfaktor. Die Proportionalität ist also ein spezieller Fall der linearen Funktion.**

Aufgaben

1. Zeichne die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems und die Geraden für $y = x$ und $y = -x$! Dadurch entstehen 8 Achtel der Zeichenebene. Markiere farbig die Achtel, in denen Geraden $y = mx$ verlaufen, für die die Absolutwerte der Richtungsfaktoren $|m| > 1$ sind, andersfarbig diejenigen, in denen Geraden mit $|m| < 1$ verlaufen!
2. a) Setze in $2x + 3y - 6 = 0$ zuerst statt 2, dann statt 3 die Zahl 0! Zeichne die entsprechenden Geraden und schreibe die Gleichungen daran! Sprich das Ergebnis in Worten aus!
   b) Zeichne die Geradenschar $y = a$ für verschiedene Werte für a! Sprich das Ergebnis in Worten aus!
   c) Zeichne die Geradenschar $x = b$ für verschiedene Werte für b! Sprich das Ergebnis in Worten aus!
3. Gib den analytischen Ausdruck der linearen Funktion an, die
   a) durch die x-Achse b) durch die y-Achse als Gerade dargestellt wird!

4. Stelle die folgenden Scharen von Funktionen grafisch dar!

a) $y + x - n = 0$ **b)** $y - x - n = 0$ **c)** $3y - x - n = 0$
d) $2y + x - n = 0$ **e)** $y - mx - 1 = 0$ **f)** $y - mx + 1 = 0$
g) $y - mx + 2{,}5 = 0$ **h)** $y - mx - 2{,}5 = 0$

Anleitung: Setze jeweils für n bzw. m eine Anzahl beliebiger Zahlenwerte ein!

5. Stelle die folgenden linearen Funktionen grafisch dar!

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = 3x$ **d)** $y = \frac{1}{2}x$
e) $y = -x$ **f)** $y = -2x$ **g)** $y = -3x$ **h)** $y = -\frac{1}{2}x$

Wie verlaufen die Geraden? Durch welche Bewegungen lassen sie sich ineinander überführen?

6. Stelle die folgenden linearen Funktionen grafisch dar!

a) $y = x$ **b)** $y = x + 1$ **c)** $y = x + 2$ **d)** $y = x + 3$
e) $y = 2x$ **f)** $y = 2x + 1$ **g)** $y = 2x + 2$ **h)** $y = 2x + 3$

Wie verlaufen die Geraden **a)** bis **d)** und **e)** bis **h)** zueinander? Durch welche Bewegungen lassen sie sich ineinander überführen?

7. Stelle folgende Funktionen grafisch in ein und demselben Koordinatensystem dar!

$y = x + 1$ $y = 2x + 1$ $y = 3x + 1$
$y = -x + 1$ $y = -2x + 1$ $y = -3x + 1$

Vergleiche die analytischen Ausdrücke und die Lage der Geraden!

8. Stelle die folgenden Geraden grafisch dar!

a) $y = -2$ $y = -1$ $y = +1$ $y = +2$
b) $x = -2$ $x = -1$ $x = +1$ $x = +2$

Durch welche Bewegungen lassen sie sich ineinander überführen?

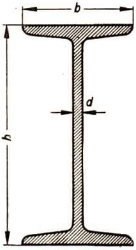


Abb. 19

9. I-Stahl (Doppel-T-Stahl) hat einen Querschnitt, wie ihn Abbildung 19 zeigt. h bedeutet die Traghöhe, b die Flanschbreite. In DIN 1025 sind die genormten Abmessungen für die Höhe und die Flanschbreite der verschiedenen Typen angegeben.

Bezeichnung	I	8	10	12	14	16	18	20	22	24	25	26	28
Abmessungen in mm	h	80	100	120	140	160	180	200	220	240	250	260	280
	b	42	50	58	66	74	82	90	98	106	110	113	119

Bezeichnung	I	30	32	34	36	38	40	$42\frac{1}{2}$	45	$47\frac{1}{2}$	50	55	60
Abmessungen in mm	h	300	320	340	360	380	400	425	450	475	500	550	600
	b	125	131	137	143	149	155	163	170	178	185	200	215

Jeder Flanschbreite b ist eine Traghöhe h zugeordnet; b ist eine Funktion der Traghöhe h.

a) Veranschauliche die in der Tafel einander zugeordneten Werte von h und b in einem rechtwinkligen Koordinatensystem! (Maßstab der Abszissenachse h: [1 : 5]; Maßstab der Ordinatenachse b: [1 : 2].)

b) Welcher Art ist die Kurve im Bereich $80 < h < 250$ und welcher Art im Bereich $250 < h < 600$?

c) Ist die in der Tafel wiedergegebene Zuordnung durch einen analytischen Ausdruck darstellbar?

d) Welche allgemeine Form haben die analytischen Ausdrücke der Funktionen in den beiden Bereichen?

e) Bringe die beiden Kurven zum Schnitt mit der Ordinatenachse und bestimme die absoluten Glieder!

f) Bestimme aus der Zeichnung den Anstieg m jeder Geraden.

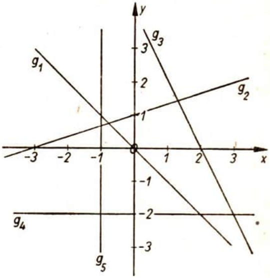


Abb. 20

10. Lies aus dem Diagramm der Abbildung 20 zu den angegebenen Abszissen die Ordinaten ab! Zeichne dazu zuvor die Abbildung 20 sorgfältig auf Millimeterpapier, damit du die Werte recht genau ablesen und die Geraden notfalls hinreichend verlängern kannst!

a) Gerade g_1: $x_1 = 0$; $x_2 = -1{,}5$; $x_3 = +4$; $x_4 = +0{,}2$

b) Gerade g_2: $x_1 = -3$; $x_2 = +2{,}4$; $x_3 = -\frac{1}{2}$; $x_4 = 0$

c) Gerade g_3: $x_1 = +2\frac{1}{2}$; $x_2 = -2$; $x_3 = 0$; $x_4 = +3{,}8$

d) Gerade g_4: $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 0$; $x_3 = +5$; $x_4 = +1{,}7$

11. Bestimme zu den angegebenen Ordinaten die Abszissen!

a) Gerade g_1: $y_1 = 0$; $y_2 = +2$; $y_3 = -3{,}5$; $y_4 = +0{,}8$

b) Gerade g_2: $y_1 = -2$; $y_2 = -1\frac{1}{2}$; $y_3 = 0$; $y_4 = +3$

c) Gerade g_3: $y_1 = +1\frac{1}{2}$; $y_2 = 0$; $y_3 = -3$; $y_4 = -1\frac{1}{2}$

d) Gerade g_5: $y_1 = +1$; $y_2 = 0$; $y_3 = -3\frac{1}{2}$; $y_4 = +4{,}2$

VI. Dreieckskonstruktionen und Kongruenz

30. Das Dreieck als stabile Figur

1) Die Abbildung 21 zeigt drei Holzleisten, die durch Splinte zu einem Dreieck verbunden sind. Obwohl die Verbindungen der Holzleisten untereinander nicht fest sind, kann ein solches Dreieck in seiner Form nicht verändert werden. Diese Eigenschaft des Dreiecks wird in der Technik dazu benutzt, Brücken, Dächer, Türen, Wände, Geräte usw. zu stabilisieren (zu festigen).

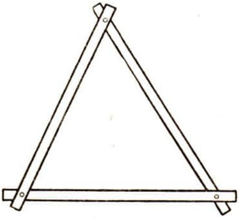


Abb. 21

Die Abbildungen 22 bis 24 zeigen die Verwendung des Dreiecks zur Stabilisierung (zur Festigung). Die Abbildung 22 zeigt Balkenverbindungen bei einem Fachwerkhaus, die Abbildung 23 eine Stehleiter und die Abbildung 24 eine Brückenkonstruktion.

Im Gegensatz zum Dreieck ist z. B. das Viereck keine stabile Figur. Ein Viereck aus vier Holzleisten, die durch Splinte verbunden sind, kann man in seiner Form verändern (Abb. 25).

Dreiecke muß man oft aus bestimmten Maßangaben konstruieren. Damit wollen wir uns im folgenden beschäftigen.

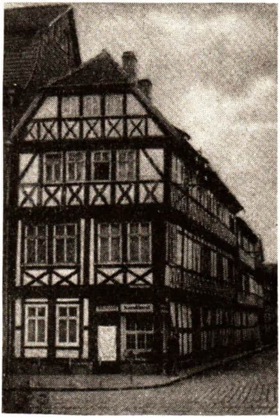


Abb. 22

2) Die für eine Dreieckskonstruktion angegebenen Strecken und Winkel werden auch **Bestimmungsstücke** oder kurz **Stücke** genannt. Bei den folgenden Konstruktionsaufgaben ist

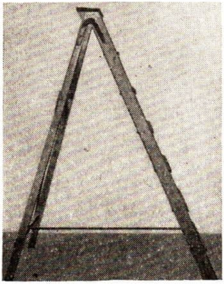


Abb. 23

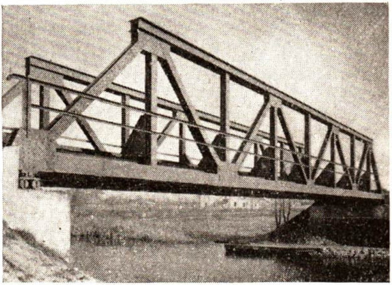


Abb. 24

entweder nur ein Stück oder es sind zwei Stücke gegeben.

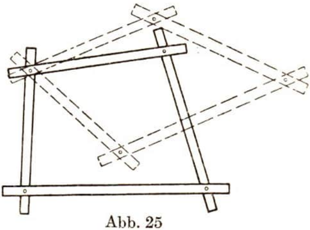


Abb. 25

Aufgaben

1. Konstruiere Dreiecke aus dem einen gegebenen Stück!

a) $c = 5$ cm	**b)** $a = 4$ cm
c) $b = 3{,}5$ cm	**d)** $c = 6$ cm
e) $\alpha = 75°$	**f)** $\beta = 63°$
g) $\gamma = 112°$	**h)** $\beta = 27°$

2. Konstruiere Dreiecke aus den zwei gegebenen Stücken!

a) $b = 6$ cm,	$a = 4$ cm	**b)** $\gamma = 63°$,	$b = 3{,}5$ cm
c) $c = 5$ cm,	$a = 2{,}8$ cm	**d)** $b = 4{,}9$ cm,	$\beta = 73°$
e) $\alpha = 72°$,	$\beta = 45°$	**f)** $\gamma = 112°$,	$b = 3{,}5$ cm

31. Die Konstruktion von Dreiecken aus den drei Seiten

Aus dem vorigen Kapitel haben wir erkannt: Man kann aus einem Stück oder aus zwei Stücken viele Dreiecke unterschiedlicher Form konstruieren, die jedoch alle die jeweils geforderten Stücke enthalten.

Im folgenden sollen Dreiecke aus drei Stücken konstruiert werden. Bei allen Dreieckskonstruktionen überlegen wir vorher, ob die Konstruktion überhaupt ausführbar ist. Wir zeichnen dazu ein beliebiges Dreieck als **Überlegungsfigur** und kennzeichnen in ihm nur die Stücke, die uns in der Aufgabe gegeben sind. Dann untersuchen wir, ob für jeden der drei

Dreieckspunkte auf Grund der gegebenen Stücke zwei Bestimmungslinien gefunden werden können.

Beispiel: Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3{,}5$ cm!

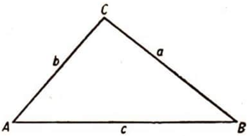


Abb. 26

Überlegung: (Vergleiche Abbildung 26!) Die Punkte A und B sind als Endpunkte der Strecke $AB = c$ bestimmt. Bestimmungslinien für den Punkt C sind:

1. der Kreis mit b um A,
2. der Kreis mit a um B.

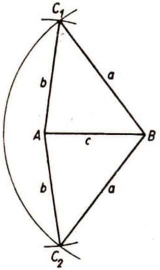


Abb. 27

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = c = 3{,}5$ cm. Nun schlage ich mit $b = 4$ cm um A und mit $a = 5$ cm um B Kreise, die einander in den Punkten C_1 und C_2 schneiden. Ich verbinde A und B mit C_1 und C_2. Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind die verlangten (Abb. 27).

Die beiden Dreiecke sind achsensymmetrisch zueinander. Sie haben die gleiche Form und Größe. Wenn bei der Konstruktion von Dreiecken zwei Dreiecke entstehen, die achsensymmetrisch zueinander sind, so wird meist nur eines von beiden gezeichnet.

Es ist stets zu prüfen, ob das konstruierte Dreieck auch wirklich das in der Aufgabe verlangte ist. Man überzeugt sich, ob die Konstruktionszeichnung die in der Aufgabe gegebenen Stücke in der geforderten Größe auch tatsächlich enthält. Erst dann kann man als Schlußsatz formulieren, daß das konstruierte Dreieck das verlangte ist.

Bei allen Konstruktionen sind stets anzugeben: Aufgabe, Überlegungsfigur, Überlegung, Konstruktionszeichnung und Konstruktionsbeschreibung.

Bei der Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Seiten kann der Fall eintreten, daß sich die Kreise um A und B nicht schneiden und kein Dreieck entsteht (zum Beispiel bei den Maßen $a = 1{,}5$ cm, $b = 1$ cm, $c = 3{,}5$ cm). In diesen Fällen widersprechen die Maßangaben für die drei Seiten dem Satz, daß im Dreieck die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte Seite. Solche Strecken können deshalb nicht die Seiten eines Dreiecks sein.

Zusammenfassung: Aus der Angabe der drei Seiten kann genau ein Dreieck konstruiert werden; das dazu achsensymmetrische Dreieck wird nicht betrachtet. Die Längen der drei Seiten dürfen jedoch nicht dem Satz widersprechen, daß im Dreieck die Summe zweier Seiten stets größer ist als die dritte Seite.

Aufgaben

. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a)	$a = 4$ cm	$b = 5$ cm	$c = 6$ cm
b)	$a = 3{,}6$ cm	$b = 4{,}8$ cm	$c = 6{,}5$ cm
c)	$a = 5{,}3$ cm	$b = 6{,}8$ cm	$c = 7{,}3$ cm
d)	$a = 4{,}0$ cm	$b = 5{,}7$ cm	$c = 5{,}9$ cm
e)	$a = 4{,}8$ cm	$b = 3{,}9$ cm	$c = 3{,}9$ cm

2. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a)	$a = 3{,}7$ cm	$b = 4{,}5$ cm	$c = 6{,}8$ cm
b)	$a = 3{,}8$ cm	$b = 2{,}4$ cm	$c = 4{,}7$ cm
c)	$a = 6{,}5$ cm	$b = 7{,}4$ cm	$c = 2{,}8$ cm
d)	$a = 4{,}2$ cm	$b = 6$ cm	$c = 5{,}5$ cm

e) $a = b = 6$ cm, $c = 4$ cm f) $a = b = c = 4{,}8$ cm

3. Ermittle in den Dreiecken der Aufgabe 2 die Größe der übrigen Stücke!

32. Die Konstruktion von Dreiecken aus zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel

Beispiel: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 63°$!

Überlegung: (Vergleiche Abbildung 28!) Die Punkte A und B sind als Endpunkte der Strecke $AB = c$ bestimmt. Bestimmungslinien für den Punkt C sind:

1. der freie Schenkel des Winkels α, angetragen in A an AB,
2. der Kreis mit b um A.

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = c = 5$ cm. In A trage ich an AB den Winkel $\alpha = 63°$ an. Um A schlage ich mit $b = 4$ cm

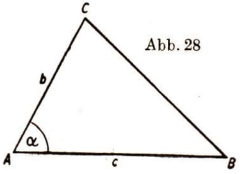
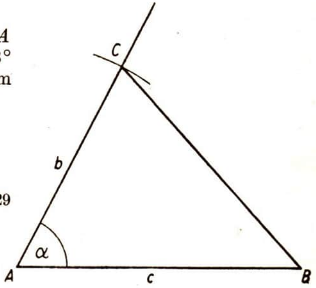


Abb. 28

Abb. 29



einen Kreisbogen, der den freien Schenkel des Winkels α im Punkt C schneidet. Ich verbinde C mit B und erhalte das verlangte Dreieck ABC (Abb. 29).

Die Maßangaben von c und b können völlig beliebig, der Winkel α muß kleiner als 180° sein. Dann führt die Konstruktion in jedem Falle zu genau einem Dreieck. Der freie Schenkel des Winkels α ist ein Strahl, also an einer Seite unbegrenzt. Deshalb gibt es immer einen Schnittpunkt mit dem Kreisbogen um A, wie groß b auch sein mag.

Zusammenfassung: Aus der Angabe von zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel kann genau ein Dreieck konstruiert werden, sofern der eingeschlossene Winkel kleiner als 180° ist.

Aufgaben

1. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $b = 3{,}6$ cm,	$c = 4{,}5$ cm,	$\alpha = 74°$
b) $a = 4{,}9$ cm,	$b = 3{,}6$ cm,	$\gamma = 112°$
c) $a = 5{,}3$ cm,	$c = 6{,}7$ cm,	$\beta = 76°$
d) $b = 5{,}8$ cm,	$a \doteq 5{,}1$ cm,	$\gamma = 65°$
e) $a = 6$ cm,	$b = 5$ cm,	$\gamma = 90°$

2. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $a = 4{,}9$ cm,	$b = 6{,}3$ cm,	$\gamma = 62°$
b) $b = 2{,}4$ cm,	$c = 1{,}5$ cm,	$\alpha = 43°$
c) $a = 6$ cm,	$b = 6$ cm,	$\gamma = 60°$
d) $a = 6$ cm,	$c = 6$ cm,	$\beta = 90°$
e) $b = 7$ cm,	$c = 4{,}9$ cm,	$\alpha = 39°$

3. Ermittle in den Dreiecken der Aufgabe 2 die Größe der übrigen Stücke!

33. Die Konstruktion von Dreiecken aus einer Seite und zwei Winkeln

Hier gibt es zwei Möglichkeiten. Die Winkel können beide an der gegebenen Seite liegen (z. B. c, α, β oder b, γ, α). Es kann aber auch nur einer der gegebenen Winkel an der gegebenen Seite liegen (z. B. c, α, γ oder b, α, β). Da die Summe der Innenwinkel im Dreieck 180° beträgt, kann der dritte Winkel stets aus den beiden gegebenen Winkeln berechnet oder durch Konstruktion ermittelt werden. Es kann also jede dieser Aufgaben auf die Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zurückgeführt werden.

Beispiel: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 5$ cm, $\alpha = 43°$, $\beta = 65°$!

Überlegung: (Vergleiche Abbildung 30!) Die Punkte A und B sind als Endpunkte der Strecke $AB = c$ bestimmt. Bestimmungslinien für den Punkt C sind:

1. der freie Schenkel des Winkels α, angetragen in A an AB,
2. der freie Schenkel des Winkels β, angetragen in B an AB.

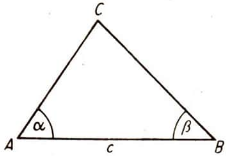


Abb. 30

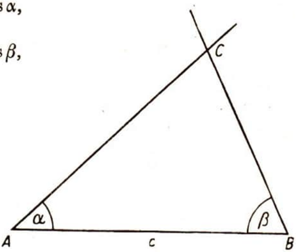


Abb. 31

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = c = 5$ cm. An AB trage ich in A den Winkel $\alpha = 43°$ und in B auf der gleichen Seite den Winkel $\beta = 65°$ an. Die beiden freien Schenkel schneiden einander im Punkt C. Das Dreieck ABC ist das verlangte (Abb. 31).

Bei dieser Aufgabe kann die gegebene Seite beliebig lang sein. Die Summe der beiden gegebenen Winkel muß kleiner als 180° sein.

Zusammenfassung: Sofern die Summe der zwei gegebenen Winkel kleiner ist als 180°, kann aus einer Seite und zwei Winkeln genau ein Dreieck konstruiert werden.

Aufgaben

1. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $a = 9$ cm, $\beta = 75°$, $\gamma = 52°$ b) $c = 12$ cm, $\alpha = 105°$, $\beta = 37°$
c) $b = 4{,}9$ cm, $\gamma = 60°$, $\alpha = 75°$ d) $c = 5{,}4$ cm, $\alpha = 102°$, $\beta = 22°$
e) $b = 3{,}5$ cm, $\alpha = 37°$, $\gamma = 78°$ f) $a = 7{,}3$ cm, $\beta = 45°$, $\gamma = 90°$

2. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $a = 8{,}1$ cm, $\alpha = 28°$, $\gamma = 74°$ b) $c = 4$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$
c) $b = 5{,}5$ cm, $\alpha = 60°$, $\gamma = 60°$ d) $c = 5$ cm, $\gamma = 90°$, $\beta = 60°$
e) $b = 4{,}8$ cm, $\alpha = 53°$, $\gamma = 37°$ f) $a = 3{,}2$ cm, $\alpha = 72°$, $\beta = 63°$

3. Bestimme in den Dreiecken der Aufgabe 2 die Größe der übrigen Stücke!

34. Die Konstruktion von Dreiecken aus zwei Seiten und einem von diesen Seiten nicht eingeschlossenen Winkel

Hier sind zwei Fälle möglich: Entweder liegt der Winkel der größeren oder er liegt der kleineren der gegebenen Seiten gegenüber. Wir untersuchen zunächst den ersten Fall.

1) Beispiel: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 2{,}7$ cm, $b = 4$ cm, $\beta = 54°$!

Überlegung: (Vergleiche Abbildung 32!) Die Punkte A und B sind als Endpunkte der Strecke $AB = c$ bestimmt. Bestimmungslinien für den Punkt C sind:

1. der freie Schenkel des Winkels β, angetragen in B an AB,
2. der Kreisbogen mit b um A.

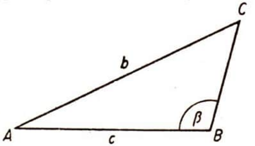


Abb. 32

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = c = 2{,}7$ cm. In B an AB trage ich den Winkel $\beta = 54°$ an. Um A schlage ich mit $b = 4$ cm einen Kreisbogen, der den freien Schenkel des Winkels β im Punkt C schneidet. Ich verbinde C mit A und erhalte das verlangte Dreieck ABC (Abb. 33).

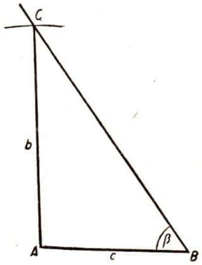


Abb. 33

Diese Konstruktion führt immer genau zu einem Dreieck, wenn der gegebene Winkel kleiner als 180° ist und der größeren der beiden gegebenen Seiten gegenüberliegt. Dann schneidet der Kreisbogen mit b um A den freien Schenkel des Winkels β in genau einem Punkt.

Zusammenfassung: Aus zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel kann genau ein Dreieck konstruiert werden. Der gegebene Winkel muß kleiner als 180° sein.

2) Beispiel: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 3$ cm, $b = 2$ cm, $\beta = 25°$!

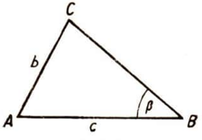


Abb. 34

Überlegung: (Vergleiche Abbildung 34!) Die Punkte A und B sind durch die Strecke $AB = c$ bestimmt. Bestimmungslinien für den Punkt C sind: 1. der freie Schenkel des Winkels β, angetragen in B an AB, 2. der Kreisbogen mit b um A,

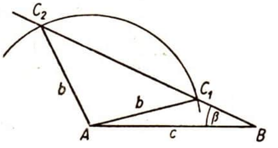


Abb. 35

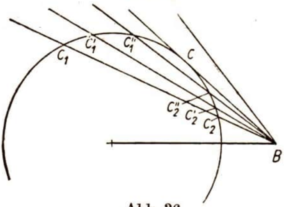


Abb. 36

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $AB = c = 3$ cm. In B an AB trage ich den Winkel $\beta = 25°$ an. Um A schlage ich mit $b = 2$ cm einen Kreisbogen, der den freien Schenkel des Winkels β in zwei Punkten, C_1 und C_2, schneidet. Ich verbinde A mit C_1 und C_2. Es entstehen zwei verschiedene Dreiecke ABC_1 und ABC_2, die aber beide die gegebenen Stücke c, b und β in der geforderten Größe enthalten. Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind die verlangten (Abb. 35).

Wir führen nun folgenden Versuch durch: Wir zeichnen auf ein Blatt Papier die Strecke $AB = c = 3$ cm und um A einen Kreisbogen mit $b = 2$ cm. Nun legen wir einen Pappstreifen durch den Punkt B. Diesen Pappstreifen können wir als freien Schenkel des Winkels β betrachten. Wenn $\beta = 25°$ ist, schneidet der Pappstreifen den Kreisbogen in zwei Punkten. Wir lassen jetzt den Winkel β langsam größer werden; wir drehen den Pappstreifen nach rechts. Die beiden Schnittpunkte mit dem Kreisbogen wandern dabei aufeinander zu. Schließlich fallen sie in einem Punkt zusammen. Bei dieser Größe des Winkels β entsteht bei der Dreieckskonstruktion nur ein Dreieck. Wenn wir den Winkel β noch größer werden lassen, entsteht schließlich überhaupt kein Dreieck mehr (Abb. 36.)

Zusammenfassung: Ob aus zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ein Dreieck konstruiert werden kann, hängt von der Größe der gegebenen Stücke ab. Es kann bei dieser Konstruktion genau ein Dreieck oder gar keins, es können aber auch zwei verschiedene Dreiecke entstehen.

Aufgaben

1. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a)	$a = 6$ cm,	$c = 2{,}4$ cm,	$\alpha = 53°$
b)	$a = 4{,}9$ cm,	$b = 2{,}4$ cm,	$\alpha = 51°$
c)	$b = 3{,}3$ cm,	$c = 5$ cm,	$\gamma = 106°$
d)	$a = 3{,}7$ cm,	$c = 6$ cm,	$\gamma = 106°$
e)	$a = 11{,}2$ cm,	$b = 5$ cm,	$\alpha = 113°$

2. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $a = 4{,}5$ cm,	$b = 7{,}4$ cm,	$\beta = 33°$
b) $a = 5$ cm,	$b = 4$ cm,	$\alpha = 50°$
c) $b = 6$ cm,	$c = 4$ cm,	$\beta = 120°$
d) $a = 1{,}8$ cm,	$c = 4{,}1$ cm,	$\gamma = 79°$
e) $a = 3{,}5$ cm,	$b = 2$ cm,	$\alpha = 69°$

3. Versuche, ein Dreieck aus den gegebenen Stücken zu konstruieren!

a) $a = 4{,}7$ cm,	$c = 2{,}9$ cm,	$\alpha = 104°$
b) $b = 3{,}9$ cm,	$c = 4{,}8$ cm,	$\beta = 12°$
c) $a = 6{,}7$ cm,	$b = 5{,}2$ cm,	$\beta = 45°$
d) $a = 3$ cm,	$b = 4{,}5$ cm,	$\alpha = 45°$
e) $b = 2{,}8$ cm,	$c = 2{,}8$ cm,	$\beta = 50°$

4. Bestimme bei den Dreiecken der Aufgabe 2 die Größe der übrigen Stücke!

35. Der Begriff „Kongruenz“

Die Abbildung 37 zeigt zwei zueinander achsensymmetrische Dreiecke. Beim Umklappen um die Symmetrieachse s kommen die beiden Dreiecke zur Deckung. Zueinander achsensymmetrische Figuren haben gleiche Form und Größe.

Die Abbildung 38 zeigt zwei Dreiecke, die ebenfalls die gleiche Form und Größe haben, jedoch nicht achsensymmetrisch zueinander sind. Durch einmaliges Umklappen sind diese Dreiecke nicht zur Deckung zu bringen. Wenn man jedoch das Dreieck $A'B'C'$ verschiebt, so kann man es ebenfalls mit dem Dreieck ABC zur vollständigen Deckung bringen.

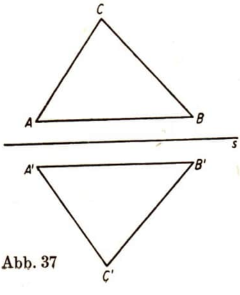


Abb. 37

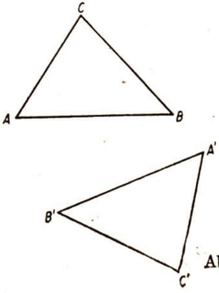


Abb. 38

Das Dreieck $A'B'C'$ der Abbildung 38 kann mit dem Dreieck $A'B'C'$ der Abbildung 37 zur Deckung gebracht werden, wenn man es zunächst umklappt und dann verschiebt.

Erklärung: **Figuren, die man in irgendeiner Weise zur Deckung bringen kann, nennt man deckungsgleich oder kongruent.**

Die bei der Deckung kongruenter Figuren zusammenfallenden Punkte, Strecken und Winkel heißen gleichliegende Punkte, Strecken und Winkel.

Das Zeichen für Kongruenz ist $\cong$.

Achsensymmetrische Figuren sind immer kongruent. Kongruente Figuren können wir uns sehr einfach herstellen. Wir legen mehrere Blätter Papier übereinander und schneiden dann die Figur gleichzeitig auf allen Blättern aus. Auch beim Durchpausen einer Zeichnung oder beim Übertragen eines Schnittmusters entstehen kongruente Figuren.

Satz 1: In kongruenten Figuren sind die gleichliegenden Strecken und gleichliegenden Winkel einander gleich.

Aufgaben

1. Falte ein Blatt Papier mehrere Male zusammen und stelle durch Ausschneiden kongruente Dreiecke her! Bezeichne gleichliegende Seiten und Winkel durch gleiche Buchstaben!

2. Falte ein Blatt Papier mehrmals zusammen und stelle durch Ausschneiden kongruente Fünfecke her! Bezeichne gleichliegende Seiten und Winkel durch gleiche Buchstaben!

3. Zeichne zwei kongruente Dreiecke, die nicht achsensymmetrisch zueinander sind! Bezeichne gleichliegende Stücke gleich!

4. Zeichne ein Quadrat $ABCD$! Verbinde A mit C!

a) Prüfe, ob die entstandenen Dreiecke ABC und ACD kongruent sind!

b) Prüfe, ob die beiden Dreiecke achsensymmetrisch zueinander sind!

c) Bezeichne gleichliegende Stücke mit gleichen Buchstaben!

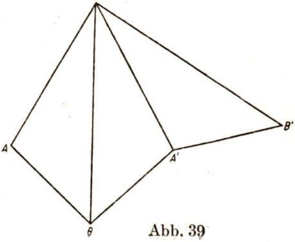


Abb. 39

5. a) Konstruiere ein Dreieck aus $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm!
   b) Wähle die Seite BC als Symmetrieachse und konstruiere das zu ABC symmetrische Dreieck $BA'C$ (Abb. 39)!
   c) Wähle die Seite $A'C$ als Symmetrieachse und konstruiere das zu $BA'C$ symmetrische Dreieck $A'B'C$ (Abb. 39)!
   d) Stelle fest, ob das Dreieck $A'B'C$ achsensymmetrisch zum Dreieck ABC ist!
   e) Prüfe, ob die drei Dreiecke kongruent sind! Bezeichne gleichliegende Stücke mit gleichen Buchstaben!

36. Die Kongruenzsätze

Kongruente Dreiecke stimmen in den gleichliegenden Winkeln und in den gleichliegenden Seiten, also in allen sechs gleichliegenden Stücken überein. Wenn umgekehrt von zwei Dreiecken feststeht, daß sie in allen sechs gleichliegenden Stücken übereinstimmen, so können wir mit Sicherheit behaupten, daß sie kongruent sind.

Wir wollen untersuchen, ob auch schon aus der Übereinstimmung in weniger als sechs gleichliegenden Stücken auf die Kongruenz von Dreiecken geschlossen werden kann. Wir wissen:

1) Aus drei Seiten können zwei Dreiecke konstruiert werden, die zueinander achsensymmetrisch und folglich auch kongruent sind. Die Dreiecke, die von den Schülern einer Klasse aus drei angegebenen Seiten konstruiert werden, sind alle kongruent.

Satz 2 (I. Kongruenzsatz): Wenn Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen, so sind sie kongruent ($s\ s\ s$).

2) Aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel kann genau ein Dreieck konstruiert werden. Die Dreiecke, die von den Schülern einer Klasse aus der Angabe von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel konstruiert werden, sind alle kongruent.

Satz 3 (II. Kongruenzsatz): Wenn Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent ($s\ w\ s$).

3) Auch die Dreiecke, die von den Schülern einer Klasse aus einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln konstruiert werden, sind alle kongruent.

Satz 4 (III. Kongruenzsatz): Wenn Dreiecke in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent ($s\ w\ w$).

4) Schließlich hatten wir Dreiecke aus zwei Seiten und einem Winkel konstruiert, wobei der Winkel von den beiden gegebenen Seiten nicht eingeschlossen wurde. Dabei hatten wir zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn der gegebene Winkel der größeren der gegebenen Seite gegenüberliegt, so entsteht bei der Konstruktion stets genau ein Dreieck. Die von Schülern zu einer Aufgabe gezeichneten Dreiecke sind alle kongruent.

Satz 5 (IV. Kongruenzsatz): Wenn Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent (*s s w*).

5) Wenn ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel konstruiert werden soll, so kann die Konstruktion auf zwei verschiedene Dreiecke führen, die nicht kongruent sind. Es gibt also Dreiecke, die in zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen und nicht kongruent sind. Die Abbildung 40 zeigt zwei derartige Dreiecke.

Aus der Übereinstimmung in zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel kann also nicht auf die Kongruenz der Dreiecke geschlossen werden.

Zusammenfassung: Dreiecke werden kongruent genannt, wenn man sie zur Deckung bringen kann. In kongruenten Dreiecken sind gleichliegende Stücke gleich groß. Der Wert der Kongruenzsätze besteht darin, daß man schon aus der Übereinstimmung in jeweils drei bestimmten Stücken die Kongruenz von Dreiecken feststellen kann. Man weiß dann, daß diese Dreiecke auch in allen übrigen Stücken übereinstimmen.

Mit Hilfe der Kongruenzsätze kann man viele praktische Aufgaben lösen. Ferner werden die Kongruenzsätze oft zum Beweis der Richtigkeit neuer geometrischer Lehrsätze benutzt.

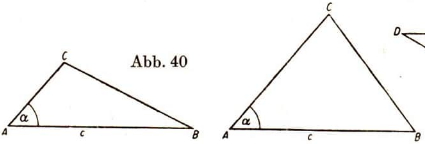


Abb. 40

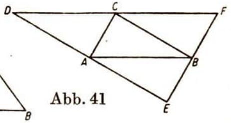


Abb. 41

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck ABC und die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiecks (Abb. 41)! Zeige, daß die Dreiecke ABC und CFB kongruent sind! (Benutze die Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen!)

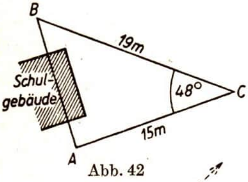


Abb. 42

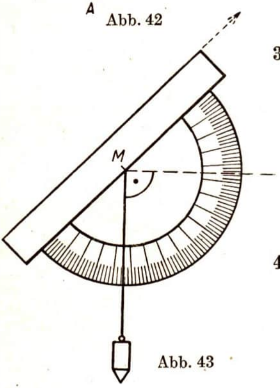


Abb. 43

2. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $b = 3{,}5$ cm, $c = 4{,}4$ cm, $\alpha = 120°$
b) $c = 5$ cm, $\alpha = 30°$, $\gamma = 105°$
c) $a = 3{,}6$ cm, $b = 4{,}8$ cm, $c = 6{,}5$ cm
d) $a = 4{,}4$ cm, $b = 5{,}2$ cm, $\gamma = 74°$
e) $b = 2{,}8$ cm, $c = 7{,}4$ cm, $\gamma = 20°$
f) $b = 4{,}2$ cm, $\beta = 47°$, $\gamma = 86°$
g) $a = 8{,}3$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm

3. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 30°$
b) $c = 6$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$
c) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm
d) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 90°$
e) $a = 4{,}5$ cm, $b = 5{,}2$ cm, $\beta = 90°$
f) $c = 6$ cm, $a = 5$ cm, $\beta = 90°$
g) $c = 5{,}8$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $\alpha = 90°$

4. Es soll die Entfernung zwischen zwei Punkten gemessen werden, zwischen denen ein Hindernis liegt. Von einem dritten Punkt wird die Entfernung zu den beiden Punkten und der Winkel gemessen, unter dem die beiden Punkte angepeilt werden (Abb. 42).

a) Entnimm der Abbildung 42 die Maße, zeichne das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab und ermittle die Länge von AB!

b) Suche im Gelände zwei Punkte, zwischen denen ein Hindernis liegt! Ermittle die Entfernung der beiden Punkte!

5. Unter der „Sonnenhöhe“ versteht man den Winkel, den die Sonnenstrahlen mit einer waagerechten Ebene bilden. Die Sonnenhöhe kann man folgendermaßen messen: Man stellt einen Stab senkrecht auf den Erdboden, mißt seine Länge und die Länge seines Schattens. Diese beiden Strecken schließen einen rechten Winkel ein. Nun kann man das Dreieck in einem geeigneten Maßstab konstruieren und aus der Zeichnung die Größe des Winkels, die Sonnenhöhe, entnehmen.
Miß die Sonnenhöhe um 13.00 Uhr, 14.00 Uhr, 15.00 Uhr, 16.00 Uhr und stelle die Werte in einer Tabelle zusammen!

6. Stelle den in der Abbildung 43 dargestellten Winkelpeiler aus einem Winkelmesser und einem Lot her. Mit diesem Gerät kann man zum

Beispiel den Winkel messen, den die Peilrichtung zu einer Turmspitze mit der waagerechten Richtung einschließt.

7. Miß mit Hilfe des in der Aufgabe 6 beschriebenen Winkelpeilers den Winkel, unter dem du **a)** die obere Kante eines Fensters, **b)** die Spitze eines Turmes, **c)** die Spitze eines Telegrafenmastes in bezug auf die waagerechte Richtung siehst!

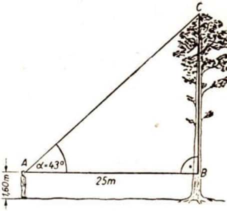


Abb. 44

8. Die Höhe eines Baumes soll festgestellt werden. Wir legen die Strecke AB fest, messen sie und bestimmen vom Punkt A aus die Größe des Winkels α (Abb. 44). Durch Konstruktion des Dreiecks ABC in einem geeigneten Maßstab können wir die Länge der Strecke BC ermitteln. Wenn wir zu dieser Länge noch die Augenhöhe addieren, so erhalten wir die Höhe des Baumes. Entnimm der Abbildung 44 die Maße, konstruiere das Dreieck in einem geeigneten Maßstab und ermittle die Höhe des Baumes!

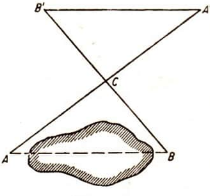


Abb. 45

9. Bestimme mit Hilfe des in der Aufgabe 8 beschriebenen Verfahrens die Höhe einer Fensterbrüstung über dem Erdboden! Kontrolliere das Ergebnis durch Messen eines heruntergelassenen Fadens!

10. Die Entfernung zwischen zwei Punkten, zwischen denen ein Hindernis liegt, kann man auch direkt im Gelände ohne die Messung von Winkeln bestimmen. Man markiert durch einen Fluchtstab einen Punkt C, der von A und B aus angepeilt werden kann (Abb. 45). Man peilt nun je einen Fluchtstab in die Verlängerung von BC und von AC ein. Auf diesen Verlängerungen trägt man die Entfernung BC beziehungsweise AC mit einem Bandmaß ab und erhält die Punkte B' und A'.

a) Weise nach, daß $A'B' = AB$ ist!

b) Führe eine derartige Messung zusammen mit einem Schulkameraden, zum Beispiel auf dem Schulhof, durch! Miß die Entfernungen, eventuell durch Abschreiten!

11. Die Abbildungen 46 und 47 zeigen zwei Balkenkonstruktionen, wie sie beim Bau von Brücken oder Dächern Verwendung finden.

a) In der Abbildung 46 ist ACD ein gleichschenkliges Dreieck. Der Balken BD soll senkrecht auf AC stehen. AC ist 10 m und BD ist

3 m lang. Stelle durch Konstruktion des Dreiecks ABD in einem geeigneten Maßstab fest, wie lang die Balken AD und CD und wie groß die Winkel α und γ sein müssen!

b) In der Abbildung 47 sind die Dreiecke ABC und DEF kongruent. Entnimm der Zeichnung die Maße und stelle durch Konstruktion und durch Überlegung die Länge aller Balken und die Größe aller Winkel fest!

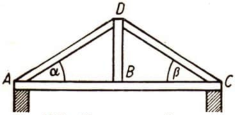


Abb. 46

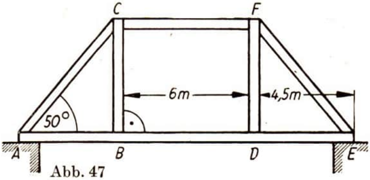


Abb. 47

12. Es soll der Abstand eines Turmes von einer annähernd geradlinig und eben verlaufenden Landstraße bestimmt werden. Eine direkte Messung ist nicht möglich, da ein Fluß dazwischenliegt. Man steckt auf der Landstraße eine Strecke AB mit bestimmter Länge ab. Dann peilt man den Turm von den zwei Endpunkten der Strecke aus an und mißt die Winkel der Peilrichtung mit der Strecke (Abb. 48). Entnimm der Abbildung 48 die Maße und konstruiere das Dreieck ABC in einem geeigneten Maßstab! Ermittle dann den Abstand des Punktes C von AB! (Konstruiere das Lot von C auf AB! Beachte den Maßstab!)

13. Die Breite eines Flusses kann man auch nach dem Verfahren bestimmen, das in der Abbildung 49 skizziert ist.

a) Erläutere die Abbildung 49!

b) Entnimm der Abbildung 49 die Maße, führe die Konstruktion in einem geeigneten Maßstab aus und ermittle die Flußbreite!

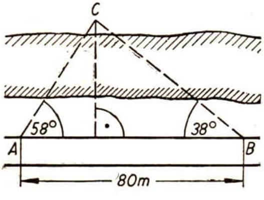


Abb. 48

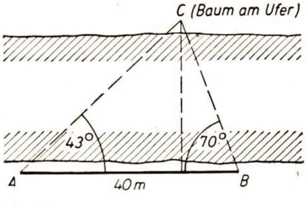


Abb. 49

14. Um die Höhe eines Hauses zu finden, hat man aus einer Entfernung von 6 m die oberste Kante des Daches angepeilt und mit der waagerechten Richtung einen Winkel von 49° gemessen. Die Augenhöhe betrug 1,40 m. Fertige eine Skizze an und ermittle die Höhe des Hauses!

15. Durch einen Berg soll zwischen den Punkten A und B ein Tunnel gebaut werden. Man will auf beiden Seiten gleichzeitig mit dem Bau beginnen. Es ist festzustellen, wie lang der Tunnel wird. Man bestimmt im anschließenden Gelände einen Punkt C so, daß von ihm A und B zugänglich sind (Abb. 50). Wir wenden dann das in der Aufgabe 4 beschriebene Verfahren an. Löse die Aufgabe durch eine Konstruktion unter Verwendung eines geeigneten Maßstabes!

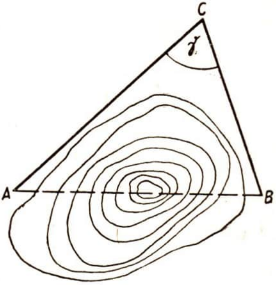


Abb. 50

a) $AC = 55$ m, $BC = 80$ m, $\gamma = 115°$

b) $AC = 76$ m, $BC = 110$ m, $\gamma = 85°$

37. Besondere Linien im Dreieck

1) In dem Dreieck ABC (Abb. 51) schneidet die Halbierungslinie des Dreieckswinkels α die gegenüberliegende Dreiecksseite im Punkt D. Die Strecke AD wird mit w_α bezeichnet. Diese Strecke nennt man kurz die **Winkelhalbierende** des Winkels α.

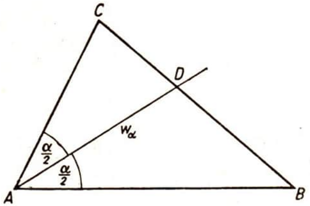


Abb. 51

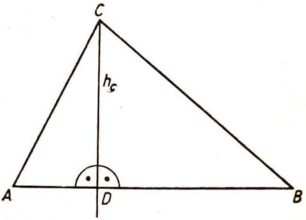


Abb. 52

In einem Dreieck kann man drei Winkelhalbierende zeichnen, die man mit w_α, w_β und w_γ bezeichnet.

2) In dem Dreieck ABC der Abbildung 52 ist vom Punkt C das Lot auf die gegenüberliegende Dreiecksseite gefällt. Das Lot schneidet diese Seite im Punkt D. Die Strecke CD heißt **Höhe** vom Punkt C aus und wird mit h_c bezeichnet. Entsprechend sind h_a und h_b die Höhen von den Punkten A beziehungsweise B auf die jeweils gegenüberliegende Dreiecksseite. Wenn der Winkel α stumpf ist, schneidet h_c die Seite AB nicht, sondern nur deren Verlängerung (Abb. 53). Auch in diesem Falle wird die Strecke $CD = h_c$ als Höhe des Dreiecks vom Punkt C aus bezeichnet. Wenn der Winkel $\alpha = 90°$ ist, so fallen h_c mit der Seite b und h_b mit der Seite c zusammen (Abb. 54).

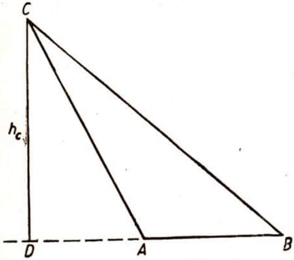


Abb. 53

3) In dem Dreieck der Abbildung 55 ist die Seite $AC = b$ halbiert. Der Halbierungspunkt D ist mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks verbunden. Die Strecke BD wird **Seitenhalbierende** der Seite b genannt und mit s_b bezeichnet. Entsprechend sind s_a und s_c die Seitenhalbierenden der Seiten a und c.

Die Winkelhalbierenden, Höhen und Seitenhalbierenden eines Dreiecks verbinden jeweils einen Eckpunkt des Dreiecks mit einem Punkt der gegenüberliegenden Seite beziehungsweise deren Verlängerung.

Die Höhen, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden werden oft als Stücke für die Konstruktion von Dreiecken angegeben.

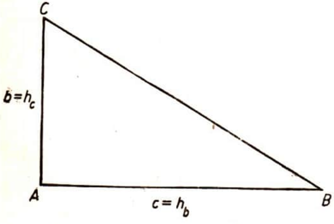


Abb. 54

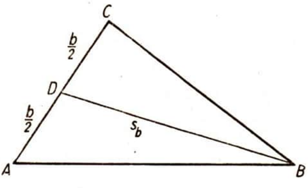


Abb. 55

Aufgaben

1. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm! Konstruiere die drei Winkelhalbierenden und miß ihre Längen!

2. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5{,}5$ cm, $\gamma = 105°$, $\beta = 30°$! Konstruiere die drei Winkelhalbierenden und miß ihre Längen!

3. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus $\alpha = 90°$, $a = 6$ cm, $b = 4$ cm! Miß die Längen von w_α, w_β und w_γ!

4. **a)** Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus $a = c = 5$ cm, $\beta = 41°$!

b) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck aus $a = 6{,}8$ cm!

c) Miß in den Aufgaben **a)** und **b)** die Längen von w_α, w_β und w_γ!

5. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 7{,}5$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $c = 6{,}5$ cm! Konstruiere die drei Höhen und miß ihre Längen!

6. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5{,}5$ cm, $c = 4$ cm, $\beta = 112°$! Konstruiere die drei Höhen h_a, h_b, h_c und miß ihre Längen! Verlängere die Höhen so, daß sie einander schneiden!

7. Konstruiere ein Dreieck aus $\gamma = 90°$, $c = 6$ cm, $b = 5$ cm! Miß die Längen von h_a, h_b und h_c!

8. **a)** Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck aus $a = b = 6$ cm, $\alpha = 50°$! Ermittle die Längen von h_a, h_b und h_c!

b) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck aus $b = 5$ cm! Ermittle die Längen von h_a, h_b und h_c!

c) Zeichne ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) aus $c = 6$ cm! Ermittle die Längen von h_a, h_b und h_c!

9. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8$ cm

b) $b = 5{,}5$ cm, $\alpha = 105°$, $\gamma = 30°$

c) $\alpha = 90°$, $c = 4$ cm, $a = 6$ cm **d)** $a = c = 5{,}5$ cm, $\beta = 100°$

10. Halbiere in den Dreiecken der Aufgaben 9a) bis d) jede Seite! Zeichne die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c ein und ermittle ihre Längen!

11. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges Dreieck, **b)** ein stumpfwinkliges Dreieck, **c)** ein rechtwinkliges Dreieck, **d)** ein gleichschenklig-spitzwinkliges Dreieck, **e)** ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, **f)** ein gleichseitiges Dreieck! Zeichne die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten ein!

12. Zeichne ein Dreieck ABC und seine drei Höhen! Konstruiere durch jeden Eckpunkt des Dreiecks die Parallele zu der gegenüberliegenden Seite! Diese Parallelen schneiden einander und bilden ein neues Dreieck DEF. Konstruiere in diesem neuen Dreieck die Mittelsenkrechten der drei Seiten! Beschreibe, was du feststellst!

38. Besondere Punkte im Dreieck

1) Aus der Lösung der Aufgaben des Kapitels 37 ergibt sich die Vermutung, daß die drei Winkelhalbierenden, die drei Höhen, die drei Seitenhalbierenden und die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks jeweils einander in einem Punkt schneiden. Es soll deshalb untersucht werden, ob folgende Behauptung richtig ist:

Behauptung: In allen Dreiecken schneiden die drei Winkelhalbierenden einander genau in einem Punkt.

In der Mathematik versucht man stets, solche Behauptungen mit Hilfe schon bekannter Lehrsätze zu beweisen. Gelingt das, so weiß man mit Sicherheit, daß die aufgestellte Behauptung für jedes Dreieck zutrifft.

Beweis: Zur Veranschaulichung zeichnen wir uns ein beliebiges Dreieck ABC und in ihm die Winkelhalbierenden w_α und w_β (Abb. 56). Diese beiden Winkelhalbierenden schneiden einander mit Sicherheit in einem Punkt innerhalb des Dreiecks. Den Schnittpunkt bezeichnen wir mit P.

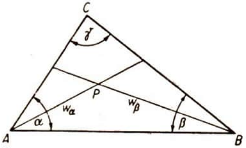


Abb. 56

Wir wissen, daß die Winkelhalbierende die Bestimmungslinie der Punkte ist, deren Abstände von den Schenkeln eines Winkels einander gleich sind. Der Punkt P als Punkt von w_α hat demnach von den Schenkeln des Winkels α den gleichen Abstand. Gleichzeitig hat P als Punkt der Winkelhalbierenden w_β von den Schenkeln des Winkels β den gleichen Abstand.

Die Schenkel des Winkels α sind AB und AC, die Schenkel des Winkels β sind AB und BC. Der Punkt P hat demnach von AB, von BC und von AC, also von allen Dreiecksseiten, den gleichen Abstand. Dann muß P aber auch auf der Winkelhalbierenden des Winkels γ liegen, denn er hat auch von den Schenkeln dieses Winkels (AC und BC) den gleichen Abstand. Die Winkelhalbierende w_γ muß also durch P verlaufen; die drei Winkelhalbierenden schneiden einander genau in einem Punkt. Das war zu beweisen.

Dieser Beweis ist allgemein geführt worden. Er gilt für jedes Dreieck, gleichgültig, welche Form und Größe es hat. Die Behauptung ist damit mathematisch bewiesen und kann nun als Lehrsatz formuliert werden.

Satz 6: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander genau in einem Punkt.

2) Behauptung: Die Mittelsenkrechten der drei Seiten eines Dreiecks schneiden einander immer genau in einem Punkt.

Beweis: Zur Veranschaulichung zeichnen wir ein beliebiges Dreieck ABC und die Mittelsenkrechten der Seiten AB und AC. Diese Mittel-

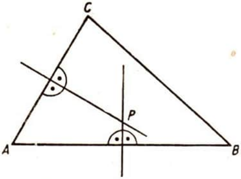


Abb. 57

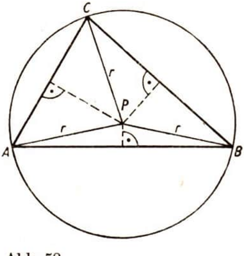


Abb. 58

senkrechten schneiden einander in einem Punkt. Diesen Schnittpunkt wollen wir mit P bezeichnen (Abb. 57).

Wir wissen, daß die Mittelsenkrechte einer Strecke die Bestimmungslinie für alle Punkte ist, deren Entfernungen von den Endpunkten der Strecke jeweils einander gleich sind. Deshalb gilt für P als Punkt der Mittelsenkrechten auf AB, daß $AP = BP$ ist, und als Punkt der Mittelsenkrechten auf AC, daß $AP = CP$ ist. Daraus folgt: $BP = CP$. Der Punkt P ist also auch von den Endpunkten der Strecke CB gleich weit entfernt. Dann muß P auf der Mittelsenkrechten der Strecke BC liegen. Anders ausgedrückt: Die Mittelsenkrechte von BC muß durch den Punkt P gehen. Das war zu beweisen.

Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten ist ein sehr wichtiger Punkt. Er ist von den drei Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt. Die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von einem festen Punkt P die Entfernung r haben, ist der Kreis mit r um P. Folglich liegen die Punkte A, B und C auf dem Kreis mit dem Radius $r = PC = PB = PA$ um P. Dieser Kreis wird der **Umkreis** des Dreiecks ABC genannt (Abb. 58).

Satz 7: Die Mittelsenkrechten der drei Seiten eines Dreiecks schneiden sich genau in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises.

Auch dieser Lehrsatz wurde allgemein bewiesen. Dabei ist es völlig gleichgültig, ob der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt.

3) Wir haben schließlich vermutet, daß auch die drei Seitenhalbierenden und die drei Höhen eines Dreiecks stets einander genau in einem Punkt schneiden. Das ist auch tatsächlich der Fall. Die Richtigkeit dieser Behauptung wollen wir jedoch an dieser Stelle nicht beweisen.

Aufgaben

1. Beweise Satz 7 für den Fall, daß der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten außerhalb des Dreiecks liegt! Führe den Beweis an Hand der Abbildung 59!

2. Beweise allgemein folgende Behauptungen!

a) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Höhe auf der Basis gleichzeitig die Mittelsenkrechte der Basis.

b) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Höhe auf der Basis gleichzeitig die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze.

c) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Höhe auf der Basis gleichzeitig die Seitenhalbierende der Basis.

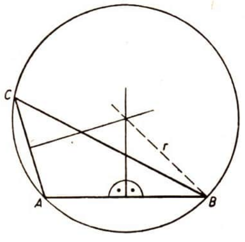


Abb. 59

3. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck aus $a = 8$ cm! Konstruiere die Höhen und die Winkelhalbierenden! Beschreibe, was du feststellst! Formuliere aus dieser Feststellung einen Lehrsatz!

4. Zeichne ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck aus $a = 6$ cm, $c = 6$ cm, $\beta = 90°$! Konstruiere die drei Höhen! Ermittle deren Schnittpunkt! Fasse das Ergebnis in einem Lehrsatz zusammen!

5. Konstruiere im Dreieck der Aufgabe 4 die drei Mittelsenkrechten!

6. a) Konstruiere ein Dreieck aus $c = 6$ cm, $\alpha = 50°$, $\beta = 80°$! Konstruiere die Parallele zu AB durch C und die drei Höhen!

b) Der Punkt C soll jetzt auf der Parallelen zu AB nach links wandern. Deshalb vergrößern wir den Winkel α um 20°. Dabei verändert sich auch gleichzeitig der Winkel β. Der Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Parallelen wird mit C_1 bezeichnet. Konstruiere die Höhen in dem Dreieck ABC_1!

c) Vergrößere den Winkel α weiter schrittweise um 20° bis 130°! Ermittle jeweils den Höhenschnittpunkt in dem neuen Dreieck!

7. Konstruiere Dreiecke aus den gegebenen Stücken! Ermittle dann jeweils den Radius des Umkreises und zeichne den Umkreis ein!

a) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 60°$ **b)** $c = 3$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$

c) $b = 5$ cm, $c = 4$ cm, $\beta = 66°$ **d)** $a = 3$ cm, $\alpha = 87°$, $\beta = 42°$

8. Zeichne ein beliebiges Dreieck auf ein Stück festen Karton! Konstruiere den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden! Schneide das Dreieck aus und stütze es im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden mit einer Stecknadel! Beschreibe, was du feststellst! Lege das Dreieck mit einem anderen Punkt auf die Stecknadelspitze. Was stellst du nun fest?

39. Die Konstruktion von Dreiecken mit Hilfe der besonderen Linien

Bei der Konstruktion von Dreiecken unter Verwendung von Höhen, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden als Stücke kann man sehr häufig nicht sofort das ganze Dreieck konstruieren. Man konstruiert dann zunächst ein Teildreieck.

Beispiel: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 4{,}8$ cm, $h_c = 3{,}2$ cm, $\beta = 40°$!

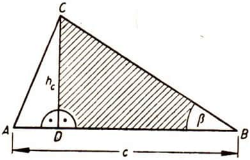


Abb. 60

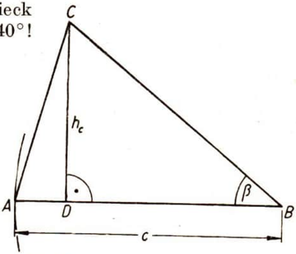


Abb. 61

Überlegung: (Vergleiche Abbildung 60!) Es ist zunächst das Teildreieck DBC zu konstruieren. Dieses Teildreieck ist nach dem III. Kongruenzsatz ($s\,w\,w$) durch h_c, Winkel $CDB = 90°$ und β bestimmt. Bestimmungslinien für den Punkt A sind:

1. die Verlängerung von BD über D hinaus,
2. der Kreisbogen mit c um B.

Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne $CD = h_c = 3{,}2$ cm. An CD trage ich in D den Winkel $90°$ und in C den Winkel $90° - \beta = 50°$ an. Die beiden freien Schenkel schneiden einander im Punkt B. Ich verlängere BD über D hinaus und schlage mit $c = 4{,}8$ cm um B einen Kreisbogen, der die Verlängerung im Punkt A schneidet. Ich verbinde A mit C und erhalte das verlangte Dreieck ABC (Abb. 61).

Aufgaben

1. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $c = 4{,}5$ cm,	$h_c = 3{,}2$ cm,	$\alpha = 70°$
b) $h_c = 4$ cm,	$\alpha = 55°$,	$\beta = 76°$
c) $c = 4{,}5$ cm,	$s_c = 3{,}8$ cm,	$\beta = 74°$
d) $a = 4{,}2$ cm,	$b = 5{,}3$ cm,	$s_\alpha = 3{,}8$ cm
e) $w_\alpha = 5$ cm,	$\alpha = 50°$,	$c = 6$ cm
f) $c = 5$ cm,	$h_c = 4$ cm,	$a = 6$ cm

2. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $a = 6$ cm, $h_c = 3{,}2$ cm, $w_\gamma = 3{,}5$ cm
b) $a = 8$ cm, $h_a = 3$ cm, $s_\alpha = 4$ cm
c) $a = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $w_\gamma = 5$ cm
d) $b = 4{,}8$ cm, $h_c = 4$ cm, $s_b = 6$ cm
e) $b = 4{,}8$ cm, $h_c = 4$ cm, $w_\alpha = 4{,}5$ cm

40. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Konstruiere aus den gegebenen Stücken ein Dreieck!

a) $a = 5{,}2$ cm, $\beta = 47°$, $\gamma = 83°$
b) $b = 3{,}1$ cm, $c = 4{,}8$ cm, $\alpha = 26°$
c) $a = 6{,}3$ cm, $b = 5{,}4$ cm, $c = 4{,}2$ cm
d) $c = 7{,}1$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$
e) $b = 4{,}6$ cm, $c = 2{,}4$ cm, $\beta = 90°$
f) $a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm, $b = 7$ cm
g) $b = 4$ cm, $c = 7$ cm, $\gamma = 63°$
h) $a = 8$ cm, $h_c = 6$ cm, $\gamma = 75°$
i) $b = 1{,}8$ cm, $\beta = 78°$, $\gamma = 78°$
k) $c = 9$ cm, $w_\alpha = 7$ cm, $\alpha = 67{,}5°$
l) $a = 7$ cm, $w_\gamma = 5$ cm, $\gamma = 75°$
m) $a = 4{,}5$ cm, $b = 6{,}6$ cm, $s_b = 4$ cm
n) $b = 7$ cm, $s_b = 4$ cm, $\beta = 70°$
o) $a = 2{,}7$ cm, $b = 4{,}9$ cm, $\beta = 67°$
p) $b = 3$ cm, $a = 5$ cm, $c = 5$ cm
q) $a = 4{,}5$ cm, $\beta = 67°$, $\gamma = 67°$

2. Scherzaufgabe

a) Zeichne ein gleichseitig-rechtwinkliges Dreieck mit der Seitenlänge 4 cm!

b) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 4$ cm und dem Winkel $\gamma = 45°$!

3. An welcher Stelle müßte ein UKW-Sender stehen, der von den Städten Neustrelitz, Schwerin und Wittenberge gleich weit entfernt ist?

a) Lege ein Blatt Papier auf den entsprechenden Landkartenausschnitt! Pause die Punkte für die angegebenen Städte durch und ermittle den gesuchten Punkt!

b) Markiere auf dem durchsichtigen Papier das Gebiet, in dem dieser Sender bei einer Reichweite von 100 km gehört werden könnte! Nenne Orte, die in diesem Gebiet liegen!

4. Konstruiere ein Dreieck aus den gegebenen Stücken!

a) $c = 8$ cm, $\beta = 50°$, $b = 170\%$ von c
b) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 120\%$ von b
c) $a = 6$ cm, $\alpha = 90°$, $\beta = 60\%$ von α

5. Von der Spitze eines 70 m hohen Turmes peilt man einen Ort A unter einem Winkel von 20° zur Waagerechten an.
   a) Wie weit ist der Ort A vom Sockel des Turmes entfernt?
   b) Wie weit ist der Ort A vom Beobachter entfernt?

6. Stecke mit Hilfe von Winkelpeilern, Meßband und Fluchtstäben auf dem Schulhof Dreiecke mit den folgenden Stücken ab:
   a) $a = 25$ m, $b = 40$ m, $\gamma = 43°$,
   b) $c = 15$ m, $a = 10$ m, $b = 20$ m!

7. Bestimme die Höhe des Klassenzimmers! Welche Verfahren kannst du anwenden und welche Messungen mußt du dazu vornehmen?

8. Es soll die Höhe eines Berges gemessen werden. Die Abbildung 62 enthält die gemessenen Werte.
   a) Erläutere an Hand der Abbildung 62, welche Messungen man vornehmen muß und wie man die Höhe ermittelt!
   b) Entnimm der Abbildung 62 die gemessenen Werte und ermittle die gesuchte Höhe!

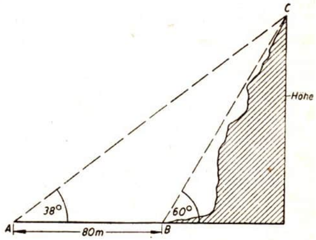


Abb. 62

9. Zeichne Gegenstände oder Teile von Bauten, bei denen Dreiecke zur Stabilisierung von Flächen verwendet werden!

10. Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $AB = 6$ cm und $AD = 3$ cm! Verbinde A mit C!
    a) Prüfe, ob die entstandenen Dreiecke kongruent sind!
    b) Prüfe, ob die entstandenen Dreiecke achsensymmetrisch sind!
    c) Bezeichne gleichliegende Stücke mit gleichen Buchstaben!

11. Erkläre schriftlich, welches Viereck man ein Trapez nennt!

12. Schreibe auf, was du über die Achsensymmetrie im gleichschenkligen Trapez und die daraus folgenden Eigenschaften dieser Figur weißt!

13. Konstruiere gleichschenklige Trapeze aus den gegebenen Stücken!

	a)	b)	c)	d)
Große Grundseite:	8 cm	6,5 cm	9 cm	12 cm
Kleine Grundseite:	5 cm	4,5 cm	4 cm	8 cm
Höhe:	6 cm	3 cm	4 cm	6 cm

VII. Die Ähnlichkeit

41. Aufgaben zur Wiederholung

1. Was verstehst du unter kongruenten Vielecken?
Beantworte die Frage so, daß du **a)** den anschaulichen Begriff „deckungsgleich", **b)** den Begriff „gleichliegende Stücke" verwendest!

2. Unter welchen Bedingungen sind zwei Dreiecke kongruent, und zwar **a)** beliebige, **b)** rechtwinklige, **c)** gleichschenklige, **d)** gleichseitige?

3. Jedes Viereck, das keine einspringenden Ecken besitzt, läßt sich durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegen. Nenne und zeichne Vierecke, in denen **a)** keine, **b)** je zwei, **c)** alle vier der entstehenden Dreiecke kongruent sind!

4. Unter „gleichen" Vielecken versteht man in der Mathematik solche mit gleichem Flächeninhalt. Unter welchen Bedingungen sind zwei
a) beliebige Dreiecke, **b)** gleichseitige Dreiecke, **c)** Parallelogramme, **d)** Quadrate flächengleich?

5. Zeichne ein Dreieck ABC mit den Seiten 50 mm, 60 mm und 90 mm und dazu
a) ein kongruentes $A_1B_1C_1$ in gleicher Lage,
b) ein kongruentes $A_2B_2C_2$ in spiegelbildlicher Lage,
c) eine Anzahl flächengleicher Dreiecke!
Verwende zur Niederschrift bei **a)** und **b)** das Symbol der Kongruenz ($\cong$)!

6. Verfahre wie bei Aufgabe 5 mit einem Parallelogramm $ABCD$ mit den nichtparallelen Seiten von 50 mm bzw. 80 mm Länge und dem eingeschlossenen Winkel von 60°!

42. Kongruenz, Gleichheit, Ähnlichkeit

1) Schneiden wir zwei kongruente Vielecke aus dem Zeichenblatt aus, so können wir sie so innerhalb der Zeichenebene verschieben, daß sie sich vollständig decken. Manchmal genügt dazu eine Verschiebung der Art, daß sich die einzelnen Eckpunkte auf untereinander parallelen Geraden bewegen. (Parallelverschiebung oder Schiebung oder Translation; Abb. 63.)

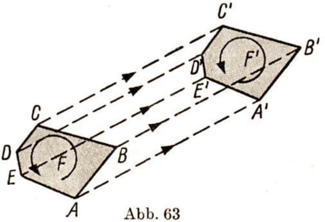


Abb. 63

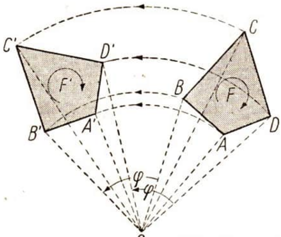


Abb. 64

Mitunter ist aber auch eine Drehung der einen Figur um einen bestimmten Winkel nötig (Abb. 64). Die einzelnen Eckpunkte bewegen sich dabei auf konzentrischen Kreisbögen.

Es gibt aber auch kongruente Vielecke, die sich nicht durch Schiebung oder Drehung zur Deckung bringen lassen (Abb. 65). Übertragen wir diese Figuren auf ein Zeichenblatt und schneiden sie aus, so können wir sie nur dadurch zur Deckung bringen, daß wir das eine ausgeschnittene Vieleck aus der Zeichenebene herausheben und umwenden, so daß die obere Seite der Figur zur unteren Seite wird. Zeichnerisch bedeutet das, daß wir die eine Figur an einer Achse spiegeln müssen. Die beiden Figuren liegen also diesmal achsensymmetrisch. Sie können nicht durch Schiebung oder Drehung zur Deckung gebracht werden, da die entsprechenden Eckpunkte einmal linksherum, das andere Mal rechtsherum aufeinanderfolgen. Man sagt, daß der Umlaufsinn dieser beiden kongruenten Figuren in der ursprünglichen Lage der Abbildung 65 verschieden oder daß sie *ungleichsinnig kongruent* seien. Durch die Spiegelung wird der Umlaufsinn wie bei den kongruenten Vierecken in den Abbildungen 63 und 64 jeweils derselbe. Solche Figuren wollen wir *gleichsinnig kongruent* nennen.

Gleichsinnig kongruente Figuren können wir also stets durch eine Schiebung oder eine Drehung zur Deckung bringen. Bei ungleichsinnig kongruenten Figuren ist eine Spiegelung erforderlich. Mitunter muß bei solchen Figuren neben der Spiegelung noch eine Schiebung ausgeführt werden (*Schubspiegelung*, Abb. 66).

2) Kongruente Figuren stimmen in der Größe und in der Form (Gestalt) überein. Sie müssen also zwei verschiedene Bedingungen zugleich

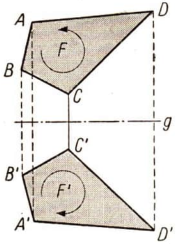


Abb. 65

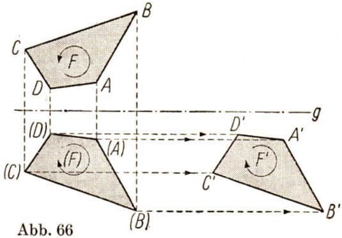


Abb. 66

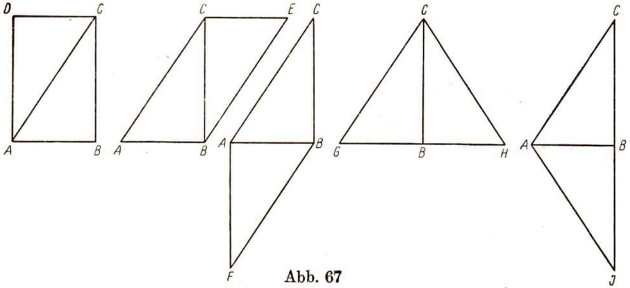


Abb. 67

erfüllen. Diese beiden Bedingungen wollen wir jetzt getrennt näher untersuchen.

Zwei Figuren können die gleiche Größe besitzen und doch verschiedene Formen haben. In Abbildung 67 wird gezeigt, wie wir ein Rechteck $ABCD$ längs der Diagonale AC halbieren und die beiden Hälften in verschiedener Weise zu neuen Figuren zusammensetzen können. Diese haben alle dieselbe Größe, aber verschiedene Formen. Solche Figuren nennt man flächengleich oder kurz gleich und schreibt dafür das Symbol $=$. Es ist also in Abbildung 67:

Rechteck $ABCD$ = Parallelogramm $ABEC$ = Parallelogramm $FBCA$ = Dreieck GHC = Dreieck AIC.

Beachte dabei, daß wir diese Figuren in der Mathematik gleich nennen und das Gleichheitszeichen zur Kennzeichnung benutzen, obwohl wir im täglichen Sprachgebrauch dazu neigen, bei gleichen Gegenständen auch die Gleichheit der Gestalt vorauszusetzen, also an kongruente zu denken.

3) Oft entsteht die Aufgabe, zu einem gegebenen Vieleck ein gleiches von anderer (vorgeschriebener) Gestalt zu zeichnen. Man sagt dafür: das gegebene Vieleck soll in ein anderes (flächengleiches) verwandelt werden.

Beispiel 1: Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 5 cm und 8 cm soll in ein gleichschenkliges verwandelt werden, so daß dessen Basis gleich der Hypotenuse des Ausgangsdreiecks wird.

Wir überlegen uns an Hand der Abbildung 68 folgendes: Alle Dreiecke, die in der Größe einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, sind flächen-

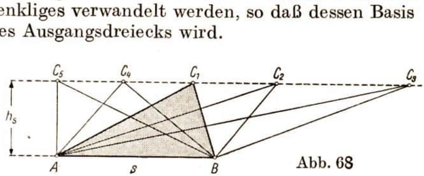


Abb. 68

gleich $\left(F = \frac{s \cdot h_s}{2}\right)$. Das wenden wir in Abbildung 69 an: Wir ziehen zur Hypotenuse AC

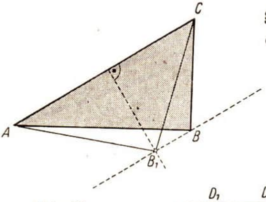


Abb. 69

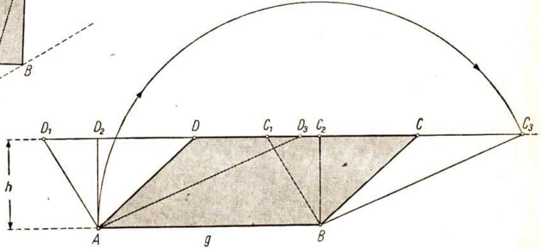


Abb. 70

des gegebenen Dreiecks die Parallele durch die gegenüberliegende Ecke B und finden auf dieser Parallelen mit Hilfe der Mittelsenkrechten auf AC die Spitze B_1 des gesuchten flächengleichen gleichschenkligen Dreiecks AB_1C.

Beispiel 2: Ein Parallelogramm ist **a)** in ein Rechteck, **b)** in einen Rhombus zu verwandeln (Abb. 70).

Für das Parallelogramm ($F = g \cdot h$) gelten dieselben Überlegungen wie für das Dreieck im 1. Beispiel: Es entstehen lauter flächengleiche Parallelogramme, wenn wir die zur Grundseite $AB = g$ parallele Seite CD längs ihrer Verlängerung beliebig verschieben, z. B. nach C_1D_1. Unter diesen Parallelogrammen befindet sich auch ein Rechteck (ABC_2D_2 mit $BC_2 \perp AB$) und ein Rhombus (ABC_3D_3 mit $BC_3 = AB$; Kreisbogen mit AB um B!).

4) Zwei geometrische Gebilde können auch dieselbe Form besitzen, ohne die gleiche Größe zu haben. Dieser Zusammenhang tritt uns im täglichen Leben besonders oft entgegen.

Beispiel 1: Oft werden Ausschnitte aus technischen Zeichnungen in einem größeren Maßstab hergestellt, um gewisse Einzelheiten besser zu zeigen. In diesen Fällen zeigen die auf der Teilzeichnung wiedergegebenen Teile dieselbe Form wie auf der Gesamtzeichnung, jedoch in anderer Größe. Dasselbe gilt von Landkarten desselben Gebietes, die in verschiedenen Maßstäben (1 : 5000; 1 : 25000; 1 : 100000 usw.) hergestellt sind.

Beispiel 2: Wenn wir ein ebenes Geländestück, z. B. unseren Schulhof, „vermessen", um seine Größe und Gestalt festzustellen, so halten wir das Ergebnis in einer Zeichnung fest, die wir in irgendeinem Maßstab herstellen. Diese Zeichnung muß dann zwar nicht dieselbe Größe wie das Geländestück in der Natur, wohl aber dieselbe Gestalt haben.

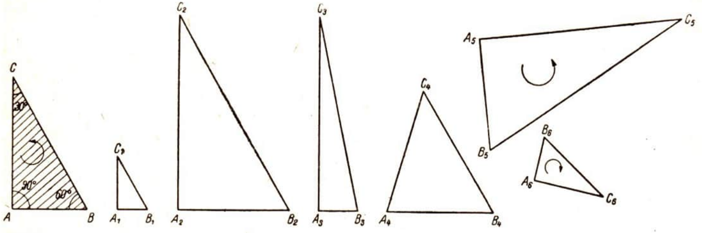


Abb. 71

Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen zwei Figuren dieselbe Form haben, betrachten wir die in Abbildung 71 dargestellten Dreiecke. Die Anschauung sagt uns, daß die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ dieselbe Form wie ABC haben, nicht aber $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$. Der Grund ist offenbar der, daß in $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$ nicht alle entsprechenden Winkel die gleiche Größe wie im Dreieck ABC haben, was für die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zutrifft. Bei den Dreiecken $A_5B_5C_5$ und $A_6B_6C_6$ erschwert ihre Lage einen unmittelbaren anschaulichen Vergleich mit dem Dreieck ABC. Wir müßten in diesem Falle die Dreiecke $A_5B_5C_5$ und $A_6B_6C_6$ ausschneiden und sie dann in eine Lage zu bringen versuchen, die der des Dreiecks ABC entspricht. Beim Dreieck $A_5B_5C_5$ ist das durch eine Drehung zu erreichen, beim Dreieck $A_6B_6C_6$ ist aber außerdem eine Spiegelung an einer Symmetrieachse erforderlich. Der Grund ist der gleiche wie bei der Kongruenz: Die Dreiecke ABC und $A_5B_5C_5$ sind gleichsinnig, die Dreiecke ABC und $A_6B_6C_6$ aber ungleichsinnig in der Anordnung ihrer Eckpunkte.

Figuren, die die gleiche Form oder Gestalt besitzen, nennt man **ähnliche Figuren**. Zur Symbolisierung dient das Zeichen $\sim$. In Abbildung 71 gilt also

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_5B_5C_5 \sim \triangle A_6B_6C_6.$$

Aus der Anschauung setzen wir fest:

Vielecke sind ähnlich, wenn alle gleichliegenden Winkel jeweils die gleiche Größe haben.

In Abbildung 72 sind zwei Vierecke gezeichnet, für die alle gleichliegenden Viereckswinkel

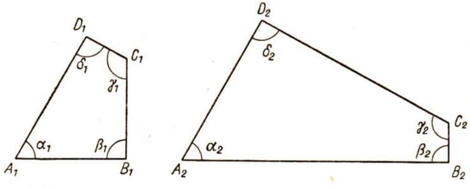


Abb. 72

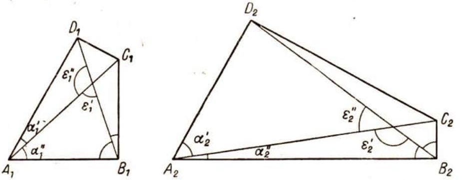


Abb. 73

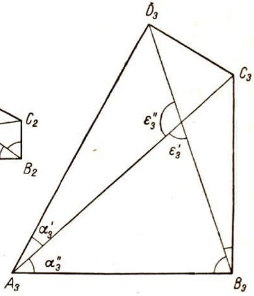


Abb. 74

jeweils einander gleich sind: $\alpha_1 = \alpha_2$; $\beta_1 = \beta_2$; $\gamma_1 = \gamma_2$; $\delta_1 = \delta_2$. Es scheint also so, als ob die Ähnlichkeitsbedingung erfüllt sei. Trotzdem haben sie ganz verschiedene Gestalt. Den Grund erkennen wir an Abbildung 73. Zur Ähnlichkeit war gefordert worden, daß alle gleichliegenden Winkel jeweils gleich groß sein müssen. Dazu gehören auch die Winkel zwischen den Diagonalen und zwischen den Diagonalen und den Seiten. Abbildung 73 zeigt, daß das aber für $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ nicht zutrifft: $\alpha_1{}' \neq \alpha_2{}'$; $\alpha_1{}'' \neq \alpha_2{}''$; ...; $\varepsilon_1{}' \neq \varepsilon_2{}'$; $\varepsilon_1{}'' \neq \varepsilon_2{}''$.

Wenn wir aber auch noch die Gleichheit dieser Winkel fordern, dann ergibt sich tatsächlich ein Viereck derselben Form (Abb. 74):

$$\alpha_1{}' = \alpha_3{}'; \quad \alpha_1{}'' = \alpha_3{}''; \quad \ldots; \quad \varepsilon_1{}' = \varepsilon_3{}'; \quad \varepsilon_1{}'' = \varepsilon_3{}'';$$

folglich: Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1 \sim$ Viereck $A_3 B_3 C_3 D_3$.

5) Wir haben drei verschiedene Arten von Figurenpaaren kennengelernt:

Flächengleiche Figuren ... Symbol: $=$
Ähnliche Figuren......... Symbol: $\sim$
Kongruente Figuren ...... Symbol: $\cong$

Ähnlichkeit und Kongruenz haben dabei besondere Bedeutung. Man spricht in diesen Fällen auch von g e o m e t r i s c h e n V e r w a n d t s c h a f t e n zwischen den betreffenden Figuren. In Abbildung 75 sind vier verschiedene Parallelogramme P_1, P_2, P_3, P_4 gezeichnet; wir wollen feststellen, welche Beziehungen zwischen ihnen bestehen.

Vergleich	Beziehung zwischen den Figuren		
	Gleichheit	Ähnlichkeit	Kongruenz
P_1 mit P_2	$P_1 = P_2$	—	—
P_1 mit P_3	$P_1 = P_3$	—	—
P_1 mit P_4	—	—	—
P_2 mit P_3	$P_2 = P_3$	$P_2 \sim P_3$	$P_2 \cong P_3$
P_2 mit P_4	—	$P_2 \sim P_4$	—
P_3 mit P_4	—	$P_3 \sim P_4$	—

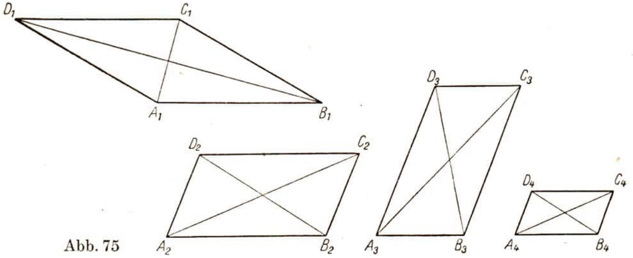


Abb. 75

Wir erkennen: Figuren, die zugleich flächengleich und ähnlich sind, sind auch kongruent. Die Kongruenz ist also eine engere Beziehung als Gleichheit oder Ähnlichkeit, sie vereinigt diese beiden in sich. Das zeigt sich auch im Symbol $\cong$, das aus den Symbolen für die Gleichheit $(=)$ und für die Ähnlichkeit $(\sim)$ zusammengesetzt ist.

Zusammenfassung:

1. **Zwei Figuren können ohne Rücksicht auf ihre Form flächengleich oder kurz gleich $(=)$ sein.**
2. **Zwei Figuren können ohne Rücksicht auf ihre Größe gleiche Form haben. Dann heißen sie ähnlich $(\sim)$. Vielecke sind dann ähnlich, wenn sie in sämtlichen gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.**
3. **Figuren, die zugleich ähnlich und gleich sind, können durch Parallelverschiebung (Translation), Drehung, Spiegelung oder Schubspiegelung zur vollständigen Deckung gebracht werden. Sie heißen kongruent.**
4. **Wenn bei zwei kongruenten oder ähnlichen Vielecken die Eckpunkte in demselben Umlaufsinn angeordnet sind, heißen sie gleichsinnig kongruent beziehungsweise ähnlich, im andern Falle ungleichsinnig kongruent beziehungsweise ähnlich.**

Aufgaben

1. a) Unter welchen Bedingungen sind

aa) gleichseitige, ab) gleichschenklige, ac) rechtwinklige;
ad) gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke kongruent?

b) Unter welchen Bedingungen sind sie ähnlich?

2. a) Unter welchen Bedingungen sind
   aa) Quadrate, ab) Rhomben, ac) Rechtecke, ad) regelmäßige Sechsecke, ae) Kreise kongruent?
   b) Unter welchen Bedingungen sind sie ähnlich?
3. Zeichne verschiedene dir bekannte Fotoformate, z. B. 24 mm × 24 mm; 24 mm × 36 mm; $4\frac{1}{2}$ cm × 6 cm; 6 cm × 6 cm; 6 cm × 9 cm; 9 cm × 12 cm; 74 mm × 105 mm! Welche von ihnen sind ähnlich?
4. Zeichne einen rechteckigen Bilderrahmen von 2 cm Breite, dessen äußere Kanten 8 cm und 6 cm lang sind! Sind die beiden ineinanderliegenden Rechtecke des Rahmens ähnlich? Begründe deine Antwort!
5. Verwandle ein Rechteck mit den Seiten 50 mm und 70 mm in einen flächengleichen Rhombus!
6. Verwandle ein Dreieck mit den Seiten 40 mm, 55 mm und 80 mm je auf drei verschiedene Arten: a) in flächengleiche rechtwinklige, b) in flächengleiche gleichschenklige Dreiecke!
7. Verwandle das Dreieck der Aufgabe 6 in ein flächengleiches Parallelogramm und dieses dann in ein Rechteck!

   Anleitung: Wenn du das Dreieck um 180° gedreht nochmals an das gegebene ansetzt, erhältst du ein Parallelogramm mit doppeltem Flächeninhalt. Aus diesem kannst du ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt des Dreiecks herstellen.
8. Schlage bei verschiedenen deiner Bücher und Hefte je eine beliebige Seite auf und vergleiche sie miteinander! Welche sind a) kongruent, b) ähnlich?
9. a) Falte einen Bogen DIN A 4 in der Mitte der größeren Seite zusammen. Ist das neu entstehende Rechteck dem ersten ähnlich?
   b) Fahre mit dem Zusammenfalten fort und überprüfe weiter auf Ähnlichkeit!
10. Vergleiche die Öffnungen eines Fahrradschlüssels!
11. Vergleiche Original und Lichtpause eines Schriftstreifens! Vergleiche auch Original und Fotokopie davon!
12. Unter welcher Voraussetzung sind Kreisausschnitte des gleichen Kreises kongruent? Durch welche Bewegung können solche Ausschnitte zur Deckung gebracht werden?
13. Was mußt du nachprüfen, um festzustellen, ob Abschnitte des gleichen Kreises kongruent sind?
14. Zeichne drei kongruente Drachenvierecke! Im ersten ziehe die große Diagonale, im zweiten die kleine, im dritten beide Diagonalen! Sind dadurch kongruente oder ähnliche Teildreiecke entstanden?

43. Der Hauptähnlichkeitssatz für Dreiecke; ähnliche Dreiecke in Ähnlichkeitslage

1) Wir untersuchen zunächst die Ähnlichkeit von Dreiecken genauer. Wir werden dabei oft auf die entsprechenden Untersuchungen über die Kongruenz von Dreiecken zurückgreifen. Wir wissen: Zwei Dreiecke heißen dann kongruent, wenn sie in sämtlichen gleichliegenden Seiten und Winkeln (also 6 Stücken) übereinstimmen. Um aber diese Kongruenz zu gewährleisten, genügt es, wenn die Übereinstimmung in nur drei (geeignet ausgewählten) Stücken nachgewiesen wird. Das ist der Inhalt der vier Kongruenzsätze. Entsprechendes gilt für die Ähnlichkeit.

Um die Übereinstimmung in allen drei Winkeln sicherzustellen, genügt bereits die Übereinstimmung in zwei Winkeln, z. B. $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$. Denn dann ist wegen des Winkelsummensatzes $\gamma = 180° - \alpha - \beta$;

$$\gamma' = 180° - \alpha' - \beta' = 180° - \alpha - \beta, \text{ also auch } \gamma = \gamma'.$$

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

Dieser Satz heißt der **Hauptähnlichkeitssatz.**

2) Mit Hilfe des Hauptähnlichkeitssatzes können wir zu einem gegebenen Dreieck andere, dazu ähnliche konstruieren. Das kann auf zwei Arten geschehen.

1. Art (Abb. 76): Wir entnehmen dem gegebenen Dreieck ABC zwei beliebige Winkel, z. B. α und β, und tragen sie an einer beliebigen Strecke $c' \neq c$ in deren Endpunkten A' und B' an. Ihre Schenkel schneiden sich in dem dritten Eckpunkt C' des Dreiecks $A'B'C'$, das zum gegebenen ABC ähnlich ist.

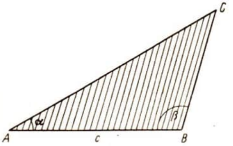
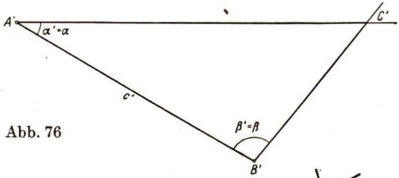
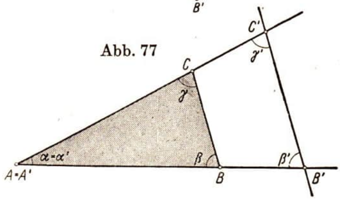


Abb. 76



2. Art (Abb. 77): Wir zeichnen die Dreiecke nicht getrennt wie in Abbildung 76, sondern so übereinander, daß einer der Winkel zugleich in beiden Dreiecken liegt. Dann ziehen wir zu der α gegenüberliegenden Seite BC

Abb. 77



eine Parallele. Ihre Schnittpunkte mit den Schenkeln des Winkels ergeben die Eckpunkte B' und C' eines Dreiecks $A'B'C'$, das dem Dreieck ABC ähnlich ist. Denn β und β' sowie γ und γ' sind dann Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und daher auch einander gleich.

In beiden Fällen ist es möglich, die Größe des zweiten Dreiecks durch Vorschreiben eines weiteren Stückes (z. B. $c' = 60$ mm; oder $b' = 2\,b$) von vornherein genau festzulegen.

3) Die Lage der beiden ähnlichen Dreiecke im zweiten Fall ist dadurch ausgezeichnet, daß sie durch den gemeinsamen Eckpunkt $A = A'$ und durch die gemeinsamen Geraden durch A (nach B und B' beziehungsweise nach C und C') miteinander zu einer einzigen Figur gekoppelt sind. Man sagt in diesem Fall: Die beiden ähnlichen Dreiecke befinden sich in Ähnlichkeitslage.

Als verkoppelnden Punkt können wir jeden beliebigen Punkt P der Zeichenebene wählen (Abb. 78). Wir ziehen dabei von P aus durch die drei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks ABC Geraden und weiter von einem beliebigen Punkt einer dieser Geraden, z. B. von A' aus, Parallelen zu AC und AB. Diese ergeben auf der Verlängerung von PB den Schnittpunkt B', auf der Verlängerung von PC den Schnittpunkt C'. Verbinden wir noch B' mit C', so ist das Dreieck $A'B'C'$ ähnlich zu ABC; denn auch hier ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$. Das läßt sich z. B. für α und α' durch Zusammensetzen der Stufenwinkel $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PA'B'$ beziehungsweise $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PA'C'$ beweisen:

$$\sphericalangle PAB - \sphericalangle PAC = \alpha = \sphericalangle PA'B' - \sphericalangle PA'C' = \alpha'.$$

Entsprechend verläuft der Beweis für $\beta = \beta'$.

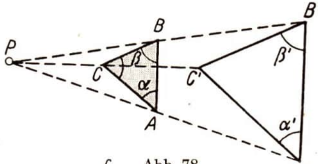


Abb. 78

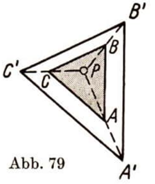


Abb. 79

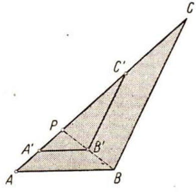


Abb. 80

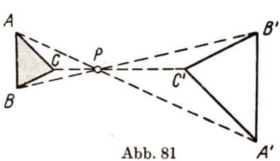


Abb. 81

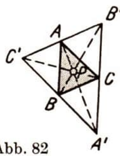


Abb. 82

Man nennt P den Ähnlichkeitspunkt und die von ihm nach den Eckpunkten der Dreiecke führenden Geraden die Ähnlichkeitsstrahlen. Die Abbildungen 79 bis 82 zeigen weitere Lagen des Ähnlichkeitspunktes. Liegt P zwischen A und A', B und B' bzw. C und C', so spricht man von einem inneren Ähnlichkeitspunkt (Abb. 81 und 82), im anderen Fall (Abb. 78) von einem äußeren Ähnlichkeitspunkt.

Zusammenfassung:

1. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (Hauptähnlichkeitssatz).**
2. **Wenn zwei ähnliche Dreiecke so liegen, daß die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte durch einen gemeinsamen Punkt P gehen und gleichliegende Seiten parallel verlaufen, so befinden sich die Figuren in Ähnlichkeitslage. P heißt der Ähnlichkeitspunkt, die durch P verlaufenden Geraden die Ähnlichkeitsstrahlen.**
3. **Je nachdem ob P auf den Ähnlichkeitsstrahlen innerhalb oder außerhalb der Abschnitte AA', BB', CC' liegt, nennt man ihn inneren oder äußeren Ähnlichkeitspunkt.**

Aufgaben

1. Zeichne zwei Dreiecke von verschiedener Größe aus zwei gleichen Winkelpaaren $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$ und $\beta_1 = \beta_2 = 70°$ in beliebiger Lage!
2. Zeichne zwei Dreiecke von verschiedener Größe, welche übereinstimmen in zwei Winkeln, $\alpha_1 = \alpha_2 = 50°$, $\beta_1 = \beta_2 = 60°$, in Ähnlichkeitslage **a)** mit einem inneren Ähnlichkeitspunkt, **b)** mit einem äußeren Ähnlichkeitspunkt!
3. Zeichne ein Dreieck mit den Seiten $a = 50$ mm, $b = 60$ mm und $c = 80$ mm und dazu mit Hilfe des Hauptähnlichkeitssatzes ein ähnliches **a)** mit der Seite $a' = 30$ mm, **b)** mit der Seite $b' = \frac{4}{3}b$!
4. Zeichne zu einem beliebigen Dreieck ABC ein ähnliches, das etwas größer ist, mit Hilfe eines Ähnlichkeitspunktes, der mit dem Mittelpunkt von AB zusammenfällt!
5. Zeichne ein Dreieck nach den Maßen von Aufgabe 3! Ziehe innerhalb dieses Dreiecks zu Seite b sieben Parallelen durch die in 8 Teile geteilte Seite c. Vergleiche die entstandenen Dreiecke!
6. Zeichne in ein gleiches Dreieck wie in Aufgabe 3 **a)** ein ähnliches, dessen parallele Seiten von den gegebenen jeweils einen Abstand von 5 mm haben, **b)** ein zweites mit 10 mm Abstand!

   Anleitung: Wenn du durchscheinendes Millimeterpapier dabei verwendest, kannst du die Lage der Parallelen leicht durchstechen.

7. Zeichne im Maßstab 1 : 10 die Formate DIN A 0 1189 mm × 841 mm, DIN A 1 841 mm × 594 mm, DIN A 2 594 mm × 420 mm, DIN A 3 420 mm × 297 mm, DIN A 4 297 mm × 210 mm und DIN A 5 210 mm × 148,5 mm! Die Rechtecke sollen so ineinandergeschoben werden, daß sie in einem rechten Winkel aufeinanderliegen und jeweils die entsprechenden Seiten gleichgerichtet sind.
   a) Was für eine Linie entsteht, wenn du die freien Eckpunkte mit dem gemeinsamen Eckpunkte verbindest?
   b) Auf was für eine geometrische Verwandtschaft kannst du daraus schließen?

44. Die Seitenverhältnisse bei ähnlichen Dreiecken

1) In einem maßgerechten Lageplan eines Ortsteils sind alle Flächen den wahren Flächen ähnlich. Auf dem Plan und in der Natur stehen entsprechende Strecken in dem Verhältnis, welches der Maßstab angibt. Die Winkel bleiben gleich. Wir wollen nun untersuchen, ob das allgemein für ähnliche Dreiecke gilt.

Beispiel: Zeichne ein Dreieck mit den Seiten $a = 65$ mm, $b = 50$ mm, $c = 95$ mm und dazu ein ähnliches in Ähnlichkeitslage mit $A = A'$ als Ähnlichkeitspunkt, in dem $c' = \frac{c}{2}$ ist! Wie groß sind a' und b'?

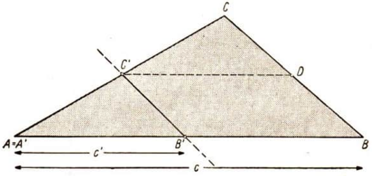


Abb. 83

In Abbildung 83 ist zum Ausgangsdreieck ABC das ähnliche $A'B'C'$ wie üblich konstruiert worden. Um die Größen von $A'C' = b'$ beziehungsweise $B'C' = a'$ zu bestimmen, ziehen wir durch C' die Parallele zu AB. Diese schneidet BC in D, und es entsteht das Parallelogramm $BD\ C'B'$. In diesem sind die Gegenseiten paarweise gleich, also $B'B = C'D$ und $B'C' = BD$.

Offenbar sind außerdem die Teildreiecke $A'B'C'$ und $C'DC$ kongruent. ($\sphericalangle\, C'A'B' = \sphericalangle\, CC'D$; $\sphericalangle\, A'C'B' = \sphericalangle\, C'CD$; $A'B' = B'B = C'D$).

Folglich sind aber auch $A'C' = C'C$ und $C'B' = CD = BD$. Infolgedessen ist $a'\ (= B'C') = \frac{1}{2}\, a\ (= \frac{1}{2}\, BC)$ und $b'\ (= A'C') = \frac{1}{2}\, b\ (= \frac{1}{2}\, AC)$. Also ist $c : c' = b : b' = a : a' = 2 : 1$.

In diesem Falle stehen also alle entsprechenden Seiten der beiden ähnlichen Dreiecke im gleichen Verhältnis 2 : 1 zueinander.

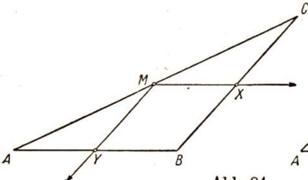


Abb. 84

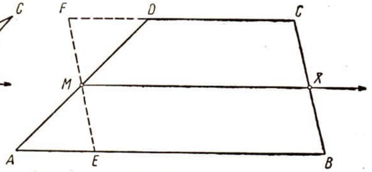


Abb. 85

2) Wir können das Ergebnis auch noch anders ausdrücken (Abb. 84): Zieht man durch den Mittelpunkt M einer beliebigen Dreieckseite die Parallelen zu den beiden anderen Seiten, so werden durch diese Parallelen auch die anderen beiden Seiten halbiert. Aus $AM = CM$ folgt $BX = CX$ und $AY = BY$. Diese Parallelen nennt man Mittelparallelen des Dreiecks.

Diesen Satz kann man auch auf Trapeze übertragen (Abb. 85). Zieht man durch den Mittelpunkt M des einen Schenkels eines Trapezes die Parallele zu den Parallelseiten, so wird durch diese Parallele auch der andere Schenkel halbiert. Aus $AM = DM$ folgt $BX = CX$. Diese Parallele nennt man Mittelparallele des Trapezes.

Zum Beweis ziehen wir durch M die Parallele zu BC. Dann läßt sich zeigen, daß $\triangle AEM \cong \triangle DFM$ ist. Folglich ist $MF = ME$. Da $ME = XB$ und $MF = XC$, ist auch $XB = XC$. X ist also tatsächlich der Mittelpunkt von BC.

3) Aus den Sätzen über die Mittelparallelen im Dreieck und im Trapez ergibt sich folgende Figur (Abb. 86): In einem beliebigen Dreieck ABC halbieren wir die eine der drei Seiten, zum Beispiel $AB = c$ fortgesetzt, so daß nacheinander zweimal $\frac{c}{2}$, viermal $\frac{c}{4}$, achtmal $\frac{c}{8}$ usw. entstehen. Ziehen wir durch die Teilpunkte von AB einmal die Parallelen zu $BC = a$, zum anderen die Parallelen zu $AC = b$, so wird durch die ersteren b, durch die zweiten a in gleicher Weise unterteilt, nämlich halbiert, geviertelt, geachtelt usw. Zugleich entstehen wegen der

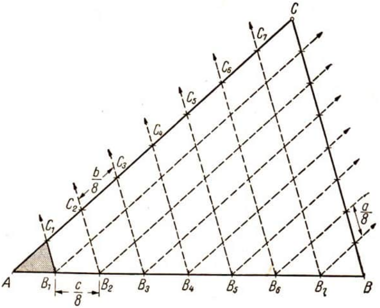


Abb. 86

gleichbleibenden Winkel lauter ähnliche Dreiecke. Greifen wir zwei beliebige heraus, zum Beispiel $A B_1 C_1$ und das Ausgangsdreieck ABC, so sind deren Seiten:

$$a_1 = \frac{a}{8};\ b_1 = \frac{b}{8};\ c_1 = \frac{c}{8} \text{ beziehungsweise } a;\ b;\ c.$$

Bilden wir die Verhältnisse gleichliegender Seiten, so erhalten wir stets den gleichen Wert, nämlich

$$a_1 : a = \frac{a}{8} : a = 1 : 8, \quad b_1 : b = \frac{b}{8} : b = 1 : 8, \quad c_1 : c = \frac{c}{8} : c = 1 : 8.$$

Genauso können wir mit anderen ähnlichen Dreiecken aus der Abbildung 86 verfahren.

Wir stellen fest:

Bei irgendwelchen ähnlichen Dreiecken stehen entsprechende Seiten stets in demselben Verhältnis. Es gilt also stets:

$$a' : a'' = b' : b'' = c' : c'' = k$$

Der Wert k dieses Verhältnisses ist dabei je nach den gewählten Dreiecken verschieden. Er heißt der Maßstab der ähnlichen Vergrößerung beziehungsweise Verkleinerung oder das **Ähnlichkeitsverhältnis**.

Die Verhältnisgleichheit $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = k$ gilt für beliebige ähnliche Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$, da beide ähnlichen Dreiecke so unterteilt werden können, daß eine hinreichend genaue Berechnung der Verhältnisse gleichliegender Seiten möglich ist.

4) Wir haben erkannt: Wenn in zwei Dreiecken gleichliegende Winkel gleich sind, dann stehen gleichliegende Seiten im gleichen Verhältnis. Wir fragen, ob auch die Umkehrung gilt, das heißt, ob dann, wenn bei zwei Dreiecken gleichliegende Seiten im gleichen Verhältnis stehen, auch gleichliegende Winkel gleich sind.

Wir untersuchen diese Frage zunächst zeichnerisch. Dazu zeichnen wir ein beliebiges Dreieck $A_1 B_1 C_1$ und dazu ein zweites $A_2 B_2 C_2$, dessen Seiten zu den gleichliegenden von $A_1 B_1 C_1$ in einem beliebig gewählten Verhältnis stehen (Abb. 87). Wir wollen das gegebene Dreieck $A_1 B_1 C_1$ das Original, das neu gezeichnete $A_2 B_2 C_2$ das Bild nennen. Ferner wollen wir vereinbaren, daß das Ähnlichkeitsverhältnis k stets das Verhältnis der Seiten des Bildes zu denen des Originals (nicht umgekehrt!) bedeuten soll. In Abbildung 87 ist das Verhältnis $3 : 2$ verwendet worden.

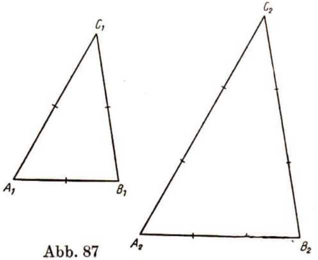


Abb. 87

Es ist also:
$a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = c_2 : c_1 = 3 : 2$ oder $a_2 = \frac{3}{2}\, a_1$; $b_2 = \frac{3}{2}\, b_1$; $c_2 = \frac{3}{2}\, c_1$.
Aus a_2, b_2, c_2 konstruieren wir dann das Dreieck $A_2 B_2 C_2$. Jetzt messen wir die Winkel $\alpha_1, \beta_1; \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ mit dem Winkelmesser. Im Rahmen der dabei möglichen Genauigkeit werden wir feststellen, daß tatsächlich $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ und $\gamma_1 = \gamma_2$ sind, daß also die Dreiecke ähnlich sind.

Dieses Ergebnis kann man noch durch weitere Dreiecke mit anderen Seitenverhältnissen bestätigen.

Wir folgern daraus:

Wenn bei zwei Dreiecken die Verhältnisse gleichliegender Seiten immer denselben Wert haben, so sind auch die gleichliegenden Winkel jeweils gleich, das heißt, die Dreiecke sind ähnlich.

Unsere Zeichnungen lassen zwar die Richtigkeit dieser Schlußfolgerung vermuten, sie sind aber kein Beweis.

5) Wir haben gelernt, daß es zwei gleichwertige Kennzeichen für die Ähnlichkeit zweier Dreiecke gibt:

1. die Gleichheit gleichliegender Winkel,
2. das konstante Verhältnis gleichliegender Seiten.

Jede Möglichkeit für sich genügt, um die Ähnlichkeit zu gewährleisten.
Da Vielecke stets durch geeignete Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden können beziehungsweise aus aneinandergesetzten Dreiecken aufgebaut werden können, gilt diese Erkenntnis auch für beliebige Vielecke.

Auch in ähnlichen Vielecken sind sämtliche gleichliegenden Winkel jeweils gleich, und die Verhältnisse gleichliegender Seiten haben einen konstanten Wert, das Ähnlichkeitsverhältnis k.

Zusammenfassung:

1. **Verbindet man in einem Dreieck die Mittelpunkte zweier Seiten, so verläuft die Verbindungsstrecke parallel zur dritten Seite (Mittelparallele des Dreiecks).**
2. (Umkehrung zu 1.) **Zieht man durch den Mittelpunkt einer Dreieckseite die Parallele zu einer der anderen Seiten, so halbiert diese Parallele die dritte Dreieckseite.**
3. **In ähnlichen Dreiecken und Vielecken sind jeweils gleichliegende Winkel gleich, und die Verhältnisse gleichliegender Seiten haben einen konstanten Wert, das Ähnlichkeitsverhältnis *k*.**

Aufgaben

1. Zeichne drei Paar verschieden lange, verhältnisgleiche Strecken $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3}$ und zeichne damit zwei ähnliche Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$!

2. Zeichne ein beliebiges Dreieck und zu ihm ein ähnliches mit dem Ähnlichkeitsverhältnis

a) $k_1 = 2:1$ b) $k_2 = 1:2$!

Verwende dazu als äußeren Ähnlichkeitspunkt P

aa) einen Eckpunkt des Dreiecks,

ab) einen Punkt auf einer Dreieckseite,

ac) einen Punkt außerhalb des Dreiecks,

ad) einen Punkt innerhalb des Dreiecks!

3. Zeichne zu einem Dreieck ein zweites mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $1:1$! Sprich das Ergebnis in Worten aus!

4. Zeichne ein beliebiges Viereck und mit Hilfe eines äußeren Ähnlichkeitspunktes ein im Maßstab $2:3$ verkleinertes Bild des Vierecks!

5. Wie hoch ist ein Turm, der einen Schatten von 12 m wirft, wenn zur gleichen Zeit ein lotrecht stehender Fluchtstab von 2 m Länge einen Schatten von 80 cm wirft? Entwirf von Turmschatten und Turm eine Zeichnung im Maßstab $1:250$!

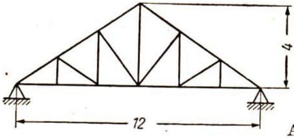
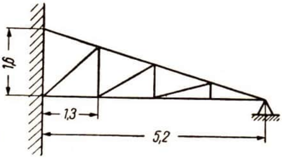


Abb. 88



6. In Abbildung 88 sind zwei Dachbinder gezeichnet. Die angeschriebenen Maße sind in m angegeben.

a) In welchen Maßstäben sind die Zeichnungen wiedergegeben?

b) Bestimme durch Abmessen die Länge des Obergurts, der schrägen und der senkrechten Streben!

7. Bestimme die Entfernung eines unzugänglichen Punktes X vom Beobachtungsort A (Abb. 89)! Stecke im zugänglichen Gelände von A aus mit Fluchtstäben eine Strecke AB und eine zu ihr parallele Gerade g ab! Peile von A und B aus den Punkt X an und markiere die Schnittpunkte der Peilstrahlen mit g durch Einfluchten von Stäben in C und D! Miß $AB = m$, $CD = n$ und $AC = a$! Bestimme durch Zeichnung und Rechnung die gesuchte Strecke $AX = x$! ($m = 15{,}00$ m; $n = 9{,}50$ m; $a = 7{,}35$ m.)

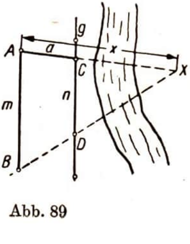


Abb. 89

8. Schattenwurf: Bei einem physikalischen Versuch soll eine 12,5 cm (12 cm; 8,5 cm) lange durchsichtige Teilung eines Meßgerätes auf eine 2,1 m (1,8 m; 2,4 m) dahinter gestellte Bildwand durch Schattenwurf so abgebildet werden, daß sie in einer Größe von 50 cm (60 cm; 40,5 cm) erscheint.
   - a) Entwirf eine Zeichnung in einem geeigneten Maßstab!
   - b) Berechne die Entfernung, in der man die Lichtquelle vor der Teilung aufstellen muß!

45. Die vier Ähnlichkeitssätze beim Dreieck

1) In Abbildung 90 sind zwei ähnliche Sechsecke dargestellt. Für ihre Seiten gilt:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = d_1 : d_2 = e_1 : e_2 = f_1 : f_2 = k.$$

Wir können dafür auch sagen: Die Seiten der ähnlichen Vielecke sind einander proportional.

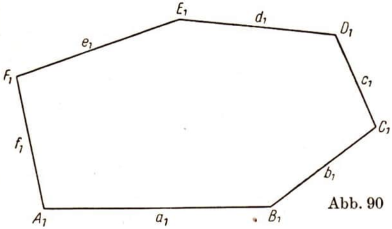
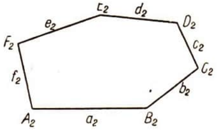


Abb. 90



Wir erkennen daraus die enge Beziehung zwischen dem arithmetischen Begriff der Proportionalität und dem geometrischen Begriff der Ähnlichkeit. Ähnliche Figuren sind gewissermaßen die geometrische Darstellung der Proportionalität. Der Proportionalitätsfaktor wird dabei zum Ähnlichkeitsverhältnis k.

2) Aus der Verhältniskette können wir viele einzelne Proportionen bilden:

$$\begin{array}{lll} a_1 : a_2 = b_1 : b_2, & b_1 : b_2 = c_1 : c_2, & c_1 : c_2 = d_1 : d_2, \\ a_1 : a_2 = c_1 : c_2, & b_1 : b_2 = d_1 : d_2, & c_1 : c_2 = e_1 : e_2, \ \ldots \\ a_1 : a_2 = d_1 : d_2, & b_1 : b_2 = e_1 : e_2, & c_1 : c_2 = f_1 : f_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Bei jeder dieser Proportionen können wir die Innenglieder vertauschen. Dann erhalten wir:

$$\begin{array}{lll} a_1 : b_1 = a_2 : b_2, & b_1 : c_1 = b_2 : c_2, & c_1 : d_1 = c_2 : d_2, \\ a_1 : c_1 = a_2 : c_2, & b_1 : d_1 = b_2 : d_2, & c_1 : e_1 = c_2 : e_2, \ \ldots \\ a_1 : d_1 = a_2 : d_2, & b_1 : e_1 = b_2 : e_2, & c_1 : f_1 = c_2 : f_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

In dieser Form besagen die Proportionen: Bildet man das Verhältnis von irgendzwei Seiten des einen Vielecks, so ist dieses jeweils genauso groß wie das Verhältnis der gleichliegenden Seiten im ähnlichen Vieleck. Solche Verhältnisse nennt man „entsprechende Verhältnisse“.

In ähnlichen Vielecken sind demnach die gleichliegenden Winkel und alle entsprechenden Seitenverhältnisse jeweils gleich groß.

Statt der vielen einzelnen Proportionen schreibt man unter Zusammenfassung kürzer:

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 : e_1 : f_1 = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 : e_2 : f_2.$$

Das Symbol : wird dabei ebenfalls als „zu“ gelesen und das Gleichheitszeichen = als „wie“. Einen solchen Ausdruck nennt man eine **fortlaufende Proportion.**

Die fortlaufende Proportion ist also eine andere Form, um die Proportionalität zweier Größen (hier der Seiten ähnlicher Vielecke) darzustellen.

3) Für zwei ähnliche Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (Abb. 91) gelten demnach folgende Beziehungen:

(1) $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$

(2) $a : a' = b : b' = c : c' = k$

(3) $a : b : c = a' : b' : c'$ oder

$a : b = a' : b'$; $b : c = b' : c'$; $a : c = a' : c'$

Die Ähnlichkeit dieser Dreiecke ist bereits gewährleistet, wenn sie in zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (Hauptähnlichkeitssatz). Daraus folgt die Gleichheit aller Winkel (1) und die Proportionalität der Seiten (2). Andererseits genügt es für die Ähnlichkeit, die Proportionalität der Seiten festzustellen (2). Daraus folgt (1). Da aber aus (2) auch (3) folgt und umgekehrt, sind zwei Dreiecke

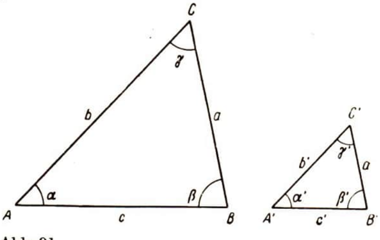


Abb. 91

auch dann mit Sicherheit ähnlich, wenn entsprechende Seitenverhältnisse gleich sind: $a : b = a' : b'$; $b : c = b' : c'$; $a : c = a' : c'$.

Von diesen Proportionen ist aber die dritte eine Folge der beiden anderen.

Begründung: $a : b = a' : b'$ können wir schreiben als $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$,

$b : c = b' : c'$ können wir schreiben als $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$.

Wir multiplizieren jetzt die entsprechenden Seiten beider Gleichungen miteinander: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{b'}{c'}$.

Hier können wir links mit b und rechts mit b' kürzen und erhalten tatsächlich die dritte Proportion: $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$.

Daraus ergibt sich:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen. (Zweiter Ähnlichkeitssatz.)

Infolgedessen muß sich die Gestalt eines Dreiecks ermitteln lassen, wenn zwei Seitenverhältnisse gegeben sind.

Beispiel: $a : b = 2 : 5$; $b : c = 3 : 2$.

Zur Lösung stellen wir aus diesen beiden Proportionen eine fortlaufende Proportion $a : b : c$ her. Das ist nur möglich, wenn der beiden Proportionen gemeinsamen Größe b auch rechts in beiden Proportionen derselbe Zahlenwert entspricht. Das ist in unserem Beispiel nicht der Fall (einmal 5 und einmal 3). Wir erweitern deshalb die rechten Seiten der Proportionen so, daß statt 5 beziehungsweise 3 das kleinste gemeinsame Vielfache aus diesen Zahlen, also $3 \cdot 5 = 15$, steht:

$$a : b = 6 : 15; \quad b : c = 15 : 10$$

Jetzt können wir schreiben: $a : b : c = 6 : 15 : 10$.

Zur Konstruktion des Dreiecks wählen wir zunächst eine beliebige Streckeneinheit e (Abb. 92) und zeichnen es mit $a = 6 \cdot e$; $b = 15 \cdot e$; $c = 10 \cdot e$.

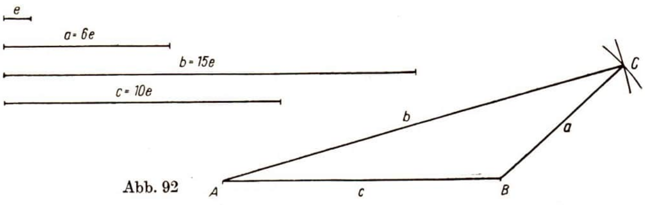


Abb. 92

4) Die Konstruktion der Abbildung 92 stimmt weitgehend mit der Konstruktion eines Dreiecks aus drei gegebenen Seiten nach dem Kongruenzsatz *sss* überein. Der Unterschied ist lediglich der, daß dort die Seiten gegeben waren, während jetzt nur die Seitenverhältnisse vorgeschrieben sind. Das heißt, daß wir jetzt eine beliebige Einheit e zur Konstruktion verwenden und damit die Größe des Dreiecks frei wählen können.

Wir wollen nun auch in den anderen Kongruenzsätzen an Stelle der fest gegebenen Seiten Seitenverhältnisse verwenden. Dadurch gewinnen wir weitere Ähnlichkeitssätze.

Aus drei Seiten a, b, c können wir zwei (eigentlich drei) Seitenverhältnisse bilden: $a:b$; $b:c$ (eigentlich noch $a:c$).
Aus zwei Seiten a, b können wir nur ein Seitenverhältnis $a:b$ bilden.
Aus einer Seite a können wir gar kein Seitenverhältnis bilden.

So entsteht

aus dem Kongruenzsatz	der Ähnlichkeitssatz
$w\ w\ s$	$w_1,\ w_2$ (1. oder Hauptähnlichkeitssatz)
$s\ s\ s$	$s_1 : s_2,\ s_2 : s_3$ (2. Ähnlichkeitssatz)
$s\ w\ s$	$s_1 : s_2,\ w_3$ (3. Ähnlichkeitssatz)
$s\ s\ w$	$s_1 : s_2,\ w_1$ (4. Ähnlichkeitssatz)
(w: Gegenwinkel der größeren der beiden Seiten)	(w_1: Gegenwinkel der größeren der beiden Seiten; $s_1 > s_2$)

Der 3. und der 4. Ähnlichkeitssatz lauten in Worten:

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Wir verzichten auf einen Beweis dieser beiden Sätze.

Aufgaben

1. Bilde aus den folgenden Proportionen jeweils eine fortlaufende Proportion!

a) $a:b = 3:7;\ b:c = 14:9$

b) $a:b = 6:5;\ a:c = 9:13$

c) $r:s = 8:9;\ t:s = 5:6$

d) $u:v = 2:3;\ v:w = 5:6;\ w:x = 9:8$

e) $g:h = 5:6;\ i:k = 2:3;\ k:h = 9:8$

f) $a:b = 6:7;\ a:c = 8:9;\ a:d = 12:13;\ d:e = 13:4$

2. Zeichne zwei Dreiecke von verschiedener Größe, welche übereinstimmen

a) in zwei Seitenverhältnissen $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = 7 : 4$ und $b_1 : c_1 = b_2 : c_2 = 2 : 3$,

b) im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = 7 : 4$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 70°$,

c) im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = 2 : 3$, $\beta_1 = \beta_2 = 60°$!

3. Stelle Ähnlichkeitssätze auf für **a)** gleichseitige, gleichschenklige, rechtwinklige, gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, **b)** Quadrate, Rechtecke, Rhomben, Parallelogramme, Kreise!

4. An Eisenbahnstrecken und gelegentlich auch an Straßen findet man bei Beginn einer Steigung eine schräg in die Richtung der Steigung zeigende Tafel nach Art eines Wegweisers (Abbildung 93) aufgestellt, auf der ein Verhältnis und eine Weglänge angegeben sind, z. B. 1 : 125, 1 500 m. Die Angabe bedeutet, daß auf je 125 m waagerechter Strecke die Erhebung 1 m beträgt. Die Waagerechte des Steigungsdreiecks ist 1 500 m lang.

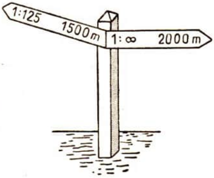


Abb. 93

a) Wie groß ist die Gesamterhebung am Ende der Steigung?

b) Bestimme durch eine maßstäbliche Zeichnung den Steigungswinkel und die Höhe des Steigungsdreiecks!

c) Drücke den Anstieg in Prozenten aus!

46. Flächen und besondere Linien ähnlicher Vielecke

1) Das Ähnlichkeitsverhältnis k zweier ähnlicher Dreiecke bezieht sich auf alle gleichliegenden Strecken oder Linien, zum Beispiel auch auf die Höhen, die Winkelhalbierenden, die Seitenhalbierenden (Abb. 94). Daß auch für diese Strecken dasselbe Ähnlichkeitsverhältnis wie für die Seiten gilt, folgt aus der Ähnlichkeit folgender Teildreiecke:

für die Höhen	für die Winkelhalbierenden	für die Seitenhalbierenden
$\triangle A_1H_1C_1 \sim \triangle A_2H_2C_2$	$\triangle A_1W_1C_1 \sim \triangle A_2W_2C_2$	$\triangle A_1S_1C_1 \sim \triangle A_2S_2C_2$
$b_1 : b_2 = h_{c_1} : h_{c_2} = k$	$b_1 : b_2 = w_{\gamma_1} : w_{\gamma_2} = k$	$b_1 : b_2 = s_{c_1} : s_{c_2} = k$

Entsprechend gilt bei ähnlichen Vielecken das Ähnlichkeitsverhältnis auch für gleichliegende Diagonalen.

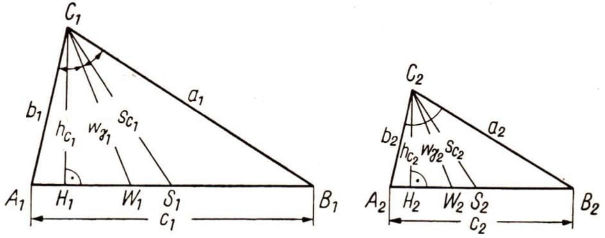


Abb. 94

2) Auch die Umfänge ähnlicher Vielecke stehen in demselben Ähnlichkeitsverhältnis wie gleichliegende Strecken. Wir beweisen das für zwei Dreiecke (Abb. 94).

Sicher gilt: $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

Wir addieren auf beiden Seiten dieser Gleichung 1 und bringen die linke wie die rechte Seite je auf einen gemeinsamen Nenner.

$$\frac{a_1}{b_1} + 1 = \frac{a_2}{b_2} + 1$$

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} + \frac{b_2}{b_2}$$

$$\frac{a_1 + b_1}{b_1} = \frac{a_2 + b_2}{b_2}$$

Durch Umstellung ergibt sich:

$$\frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Nun gilt aber in ähnlichen Dreiecken weiterhin:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Folglich: $$\frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{oder} \quad \frac{a_1 + b_1}{c_1} = \frac{a_2 + b_2}{c_2}$$

Mit dieser Gleichung verfahren wir wie oben:

$$\frac{a_1 + b_1}{c_1} + 1 = \frac{a_2 + b_2}{c_2} + 1$$

$$\frac{a_1 + b_1 + c_1}{c_1} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{c_2}$$

Folglich: $(a_1 + b_1 + c_1) : (a_2 + b_2 + c_2) = c_1 : c_2$, das heißt

$$\boldsymbol{u_1 : u_2 = c_1 : c_2 = k}$$

Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke stehen aber nicht in demselben Verhältnis wie gleichliegende Strecken. Sie verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Strecken. Ist das Ähnlichkeitsverhältnis der Seiten k, so gilt:

$$F_1 : F_2 = c_1^2 : c_2^2 = k^2$$

3) Wir nennen zum Schluß drei wichtige Sätze, deren Beweise mit Hilfe ähnlicher Dreiecke geführt werden können.

1. Lehrsatz: **Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich.**

2. Lehrsatz: **Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten, also z. B. $h_a : h_b = b : a$.**

3. Lehrsatz: **Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (der Schwerpunkt S) teilt diese Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1, und zwar liegen die zwei Teile jeweils zwischen dem Eckpunkt und S.**

Aufgaben

1. Zeichne ein Dreieck aus

Gestalt:	Größe:	Gestalt:	Größe:
a) $a : b,\ \gamma$	c	b) $a : b,\ \alpha\ (a > b)$	w_α
c) $a : b;\ c : a$	h_c	d) $a : h_c,\ \gamma$	s_c

Anleitung: Aus den Angaben unter „Gestalt" zeichne jedesmal ein dem gesuchten ähnliches Dreieck $A_1 B_1 C_1$; darauf aus dem Stück unter „Größe" ein dem gesuchten kongruentes Dreieck ABC! Warum ist zur Bestimmung der Größe niemals ein Winkel gegeben?

2. Vergrößere ein gegebenes Dreieck im Streckenverhältnis 2 : 1! In welchem Verhältnis wird die Fläche vergrößert? Veranschauliche die Flächenvergrößerung durch Zerlegen der Fläche des Bilddreiecks in vier kongruente Ausgangsdreiecke!

3. Verkleinere ein gegebenes Dreieck im Streckenverhältnis 1 : 2! In welchem Verhältnis wird die Fläche verkleinert? Veranschauliche die Flächenverkleinerung durch Zerlegung des Originals!

4. Wie verhalten sich **a)** die Umfänge, **b)** die Flächen zweier Kreise mit den Radien r_1 und r_2 $(r_1 \neq r_2)$?

47. Der Strahlensatz

1) Wir zeichnen mehrere ähnliche Dreiecke in Ähnlichkeitslage (Abb. 95): $\triangle CA_1B_1 \sim \triangle CA_2B_2 \sim \triangle CA_3B_3 \sim \triangle CA_4B_4$. Dann gilt zum Beispiel $CA_2 : CA_1 = CB_2 : CB_1$. Wir verändern diese Gleichung wie folgt:

$$\frac{CA_2}{CA_1} - 1 = \frac{CB_2}{CB_1} - 1$$

$$\frac{CA_2 - CA_1}{CA_1} = \frac{CB_2 - CB_1}{CB_1}$$

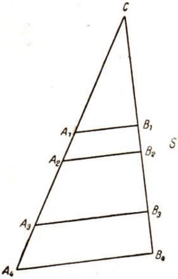


Abb. 95

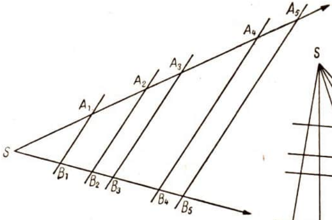


Abb. 96

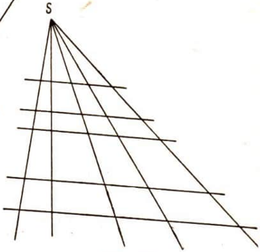


Abb. 97

Die Figur zeigt: $CA_2 - CA_1 = A_1A_2$ und $CB_2 - CB_1 = B_1B_2$. Daraus folgt: $A_1A_2 : CA_1 = B_1B_2 : CB_1$.

Die Proportionalität besteht also nicht nur zwischen den Dreieckseiten, sondern auch zwischen den durch die Eckpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 bzw. B_1, B_2, B_3, B_4 entstehenden Teilabschnitten auf den Schenkeln des Winkels A_4CB_4.

Außerdem gilt $A_1B_1 : A_2B_2 = CA_1 : CA_2$. Die parallelen Abschnitte zwischen den Schenkeln des Winkels sind also auch proportional zu den zugehörigen Dreieckseiten.

Wir können der Figur auch die Gestalt der Abbildung 96 geben und diese Erkenntnisse als **Strahlensatz** aussprechen.

Werden zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen von einer Schar von Parallelen geschnitten, so verhalten sich

a) irgendzwei Abschnitte auf dem einen Strahl wie die gleichliegenden auf dem anderen, und

b) die Parallelenabschnitte zwischen den Strahlen wie die zugehörigen Strahlenabschnitte, die aber dabei stets vom Ähnlichkeitspunkt S aus zu messen sind.

Der Strahlensatz stellt nur eine andere Formulierung der Ähnlichkeitsbeziehungen dar. Das Wesentliche an ihm sind auch die ähnlichen Dreiecke mit ihren Seitenverhältnissen.

Beispiele zu **a)** (Abb. 96) $SA_3 : SA_5 = SB_3 : SB_5$

$A_1A_3 : A_4A_5 = B_1B_3 : B_4B_5$

Beispiele zu **b)** (Abb. 96) $A_1B_1 : A_3B_3 = SA_1 : SA_3$

$A_5B_5 : A_2B_2 = SB_5 : SB_2$

2) Der Strahlensatz kann in zweifacher Weise erweitert werden.

1. Erweiterung (Abb. 97): Setzen wir mehrere Figuren der Abbildung 96 aneinander, so wird aus dem Strahlenpaar ein Strahlenbüschel. Dadurch ändert sich die Aussage des Strahlensatzes nicht, sofern wir bei **b)** stets Parallelenabschnitte zwischen denselben zwei Strahlen ins Verhältnis setzen.

2. Erweiterung: In den Abbildungen 95, 96 und 97 war C beziehungsweise S stets ein äußerer Ähnlichkeitspunkt für die ähnlichen Dreiecke. Wählen wir statt dessen einen inneren Ähnlichkeitspunkt, so wird aus der Abbildung 97 die Abbildung 98, und das Strahlenbüschel wird zum Geradenbüschel. Auch dadurch ändert sich an der Aussage des Strahlensatzes nichts, wenn statt von „Strahlen" jetzt von „Geraden" gesprochen wird.

3) Anwendungen der Strahlensatzfigur:

a) Konstruieren der 4. Proportionale (Abb. 99).

Soll zu drei Größen a, b, c eine vierte x bestimmt werden, so daß die Beziehung $a : b = c : x$ erfüllt ist, so nennen wir x die vierte Proportionale zu a, b und c.

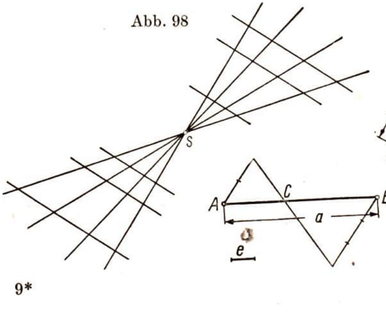
b) Teilen einer Strecke im gegebenen Verhältnis $m : n$ (Abb. 100).

Soll die Strecke $AB = a$ zum Beispiel im Verhältnis $2 : 3$ geteilt werden, so ziehen wir durch A und B zwei beliebige, aber untereinander parallele Geraden und tragen auf ihnen nach verschiedenen Seiten von a die Strecken $2e$ beziehungsweise $3e$ ab (e ist eine beliebig gewählte Einheit). Durch Verbinden der Endpunkte der Strecken entsteht die Strahlensatzfigur und in C der gesuchte Teilpunkt.

c) Teilen einer Strecke in n gleiche Teile.

Mit Hilfe des Strahlensatzes können wir jetzt eine Strecke mit Zirkel und Zeichenwinkeln auch in eine beliebige Anzahl gleicher Teile teilen.

Abb. 98



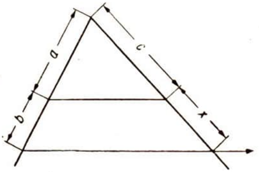


Abb. 99

Abb. 100

Abbildung 101 zeigt die Teilung einer Strecke in sieben gleiche Teile. Dazu wurde in einem Endpunkt der Strecke ein beliebiger Strahl angetragen und auf ihm eine ebenfalls beliebige Einheit e siebenmal abgetragen. Die Verbindung des siebenten Punktes mit dem andern Endpunkt der gegebenen Strecke gibt die Richtung der Parallelenschar an. Zum Zeichnen der Parallelenschar kann man ein Blatt durchscheinendes Millimeterpapier verwenden. Letzteres legt man so auf die Zeichnung, daß eine Schar paralleler Rasterlinien in Richtung der gesuchten Parallelenschar zu liegen kommt. Jetzt kann man die Schnittpunkte der Parallelen mit der zu teilenden Strecke mit einer Nadel durchstechen. In der Praxis wird das Teilen einer Strecke meist mit Hilfe eines Millimetermaßstabs ausgeführt.

4) Umkehrung des Strahlensatzes.

Mit Hilfe des Strahlensatzes wird aus dem Schnitt eines Strahlen- oder Geradenbüschels durch eine Schar von Parallelen die Verhältnisgleichheit gleichliegender Abschnitte gefolgert. Wir fragen jetzt, ob umgekehrt aus der Verhältnisgleichheit gleichliegender Abschnitte darauf geschlossen werden kann, daß die schneidende Geradenschar eine Schar von Parallelen ist. Wir untersuchen das für zwei Strahlen und zwei schneidende Geraden.

1. Umkehrung (Abb. 102): Wir setzen voraus, daß die Proportion $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ erfüllt ist. Dann ist $\triangle A_1B_1C \sim \triangle A_2B_2C$ nach dem 3. Ähnlichkeitssatz. Damit ist aber $\alpha_1 = \alpha_2$. Infolgedessen sind die Geraden A_1B_1 und A_2B_2 parallel.

Wir stellen fest:

Werden die Strahlen oder Geraden eines Büschels von einer Schar von Geraden so geschnitten, daß die Verhältnisse irgendwelcher Abschnitte auf dem einen Strahl gleich sind den Verhältnissen der gleichliegenden Abschnitte auf einem anderen Strahl, so sind die schneidenden Geraden untereinander parallel.

2. Umkehrung (Abb. 103): Diesmal setzen wir voraus, daß die Proportion $a_1 : c_1 = a_2 : c_2$ erfüllt ist. Die Figur zeigt, daß unter dieser Bedingung die schneidenden Geraden parallel sein können, aber nicht parallel

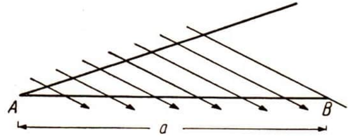


Abb. 101

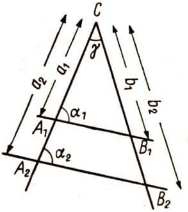


Abb. 102

zu sein brauchen. Das hängt davon ab, ob c_1 als A_1B_1 oder als A_1B_1' in die Figur eingetragen wird. Der Grund ist folgender: Um die Ähnlichkeit der Dreiecke A_1B_1C und A_2B_2C nachzuweisen, muß der vierte Ähnlichkeitssatz ($s_1 : s_2$; w_1) verwendet werden. Die Ähnlichkeit ist aber dabei nur gewährleistet, wenn der Winkel der größeren der beiden Seiten gegenüberliegt. Das ist bei der in Abbildung 103 gewählten Größe von γ, a_1, c_1, a_2 und c_2 nicht der Fall.

Die zweite Umkehrung des Strahlensatzes ist also nicht richtig.

Die Proportionalität zwischen den Abschnitten auf den Strahlen und den Abschnitten auf der schneidenden Geradenschar gewährleistet nicht deren Parallelität.

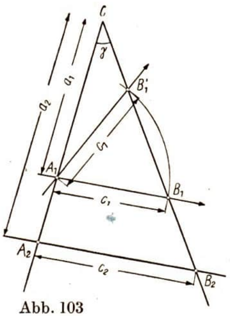


Abb. 103

Zusammenfassung:

1. **Die Proportionalität zwischen den Seiten ähnlicher Dreiecke läßt sich auch in Form des Strahlensatzes (Schnitt eines Strahlenpaares durch eine Schar von Parallelen) aussprechen.**
2. **Der Strahlensatz erlaubt zwei Erweiterungen, auf ein Strahlenbüschel (äußerer Ähnlichkeitspunkt) und auf ein Geradenbüschel (innerer Ähnlichkeitspunkt).**
3. **Sind in einer Proportion drei Glieder bekannt und das vierte unbekannt, so heißt dieses die vierte Proportionale zu den drei bekannten.**

Aufgaben

1. Zeichne die 4. Proportionale zu den folgenden Strecken:
   a) $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm
   b) $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3$ cm
   c) $p = 18$ mm, $q = 45$ mm, $r = 38$ mm!
2. Eine Strecke a ist in a) zwei, b) fünf, c) zehn gleiche Teile zu teilen. Führe die Teilung in 2 Teile auf zweierlei verschiedene Weise durch!
3. a) Teile eine Strecke a einmal im Verhältnis $2 : 5$ und einmal im Verhältnis $5 : 2$! Beschreibe die Lage der Teilpunkte!
   b) Verfahre genauso mit den Verhältnissen $1 : 2$ und $2 : 1$!
4. Verlängere eine Strecke AB über B hinaus einmal, zweimal, dreimal, viermal um sich selbst! In welchem Verhältnis teilt der Punkt B jeweils die entstandene gesamte Strecke?

48. Verschiedene Anwendungen der Ähnlichkeit

1. Zwei Orte A und B sind durch einen Bergrücken getrennt und sollen durch einen geradlinigen Tunnel miteinander verbunden werden. Der Durchstich wird gleichzeitig von beiden Orten aus begonnen. Die Richtung, in welcher der Durchstich geführt werden muß, und die geradlinige Entfernung der beiden Orte A und B ist zu bestimmen (Abb. 104).

Man bestimmt einen Punkt C, von dem aus die beiden Orte A und B sichtbar sind, und ermittelt dessen Entfernung von A und B. Dann bestimmt man für einen beliebigen Punkt D auf AC das Teilverhältnis $m:n$ und teilt die Strecke BC im gleichen Verhältnis. Die Verbindungslinie der Teilpunkte D und E wird durch eine dritte, durch C gehende Gerade im Punkte F geschnitten. Man bestimmt auf ihr die Strecke FG als vierte Proportionale aus $DC:DA = FC:FG$. Die Peillinie AG gibt die gesuchte Richtung an, in der der Durchstich vom Punkt A aus zu führen ist. In entsprechender Weise legt man auch im Punkte B die gesuchte Richtung fest. ($AC = 4200$ m; $BC = 5040$ m; $DE = 1900$ m; $FC = 1350$ m; $m:n = 9:5$.)

Bestimme durch Zeichnung und Rechnung die Entfernung AB!

2. Der Meßkeil (Abb. 105) wird zur Messung kleiner Abstände, z. B. des lichten (inneren) Durchmessers von Röhren, verwendet.

a) Wie groß ist der lichte Durchmesser der Glasröhre in Abbildung 105?

b) Welche Ablesegenauigkeit ist mit dem Meßkeil erreichbar?

3. Der Keilausschnitt (Abb. 106).

a) Beschreibe die Anwendung des Keilausschnitts zur Dickenmessung von Platten!

b) Wie groß ist in der Abbildung 106 die Dicke der Platte?

c) Welche Ablesegenauigkeit ist mit dem Keilausschnitt erreichbar?

4. Der Proportionalmaßstab oder Transversalmaßstab ist ein Gerät zur Messung von Strecken, die mit dem Stechzirkel in Zeichnungen oder

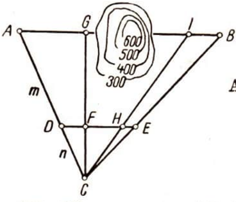


Abb. 104

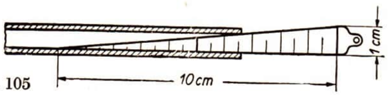


Abb. 105

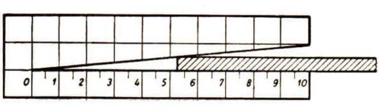


Abb. 106

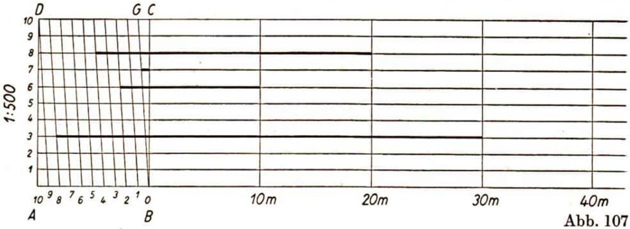


Abb. 107

Geländekarten abgegriffen werden. Die Abbildung 107 zeigt einen Transversalmaßstab für eine Karte im Maßstab 1 : 500. Der Kopf des Maßstabes (auf der linken Seite) ist ein Rechteck $ABCD$, dessen Länge 10 Einheiten umfaßt und dessen Höhe beliebig lang und in 10 gleiche Teile geteilt ist. Durch die Teilpunkte der Höhe AD sind horizontale Parallelen gezogen. Durch Verbindung der Teilpunkte von AB mit den um eine Einheit nach links verschobenen Teilpunkten von CD erhält man die schrägen Parallelen oder „Transversalen“, nach denen der Maßstab bezeichnet wird. Die Parallelen zur Grundseite AB sind von unten nach oben mit 1, 2, ..., 10, die Transversalen von B aus beginnend nach links mit 0, 1, 2, ..., 9 beziffert.

a) Wie lang ist das im Dreieck BCG liegende Stück der 7. Horizontalparallelen?

b) In welchem Zusammenhang steht die Bezifferung an den horizontalen Parallelen mit der Länge ihrer Abschnitte im Dreieck BCG?

c) Wie lang sind die eingetragenen Strecken in Wirklichkeit?

d) Zeichne Strecken, die den Entfernungen 15,4 m; 28,7 m; 10,9 m entsprechen!

5. Das Försterdreieck (Abb. 108) ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, das man zur schnellen Bestimmung der Höhe von Bäumen, Masten, Türmen usw. benutzt.

a) Beschreibe seinen Gebrauch!

b) Welchen Zweck hat das an einer Kathete herabhängende Lot und warum ist es notwendig?

c) Die Höhenbestimmung wird auf die Messung einer zugänglichen Größe zurückgeführt. Welche Größe muß gemessen werden?

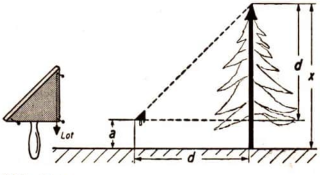


Abb. 108

d) Bestimme mit einem Försterdreieck die Höhe eines Hochspannungsgittermastes, eines Turmes, eines Hausgiebels usw. (vgl. **c**)!

6. Zur kartografischen Aufnahme eines Geländestückes verwendet man den Meßtisch. Er besteht aus einer auf einem Dreifuß ruhenden und um eine lotrechte Achse schwenkbaren quadratischen Platte, die mit Zeichenpapier überspannt ist. Mit einer Wasserwaage wird die Tischplatte waagerecht eingestellt (Abb. 109). In dem aufzunehmenden Gelände sei die waagerechte Entfernung zweier Punkte A und B bekannt. Die „Standlinie AB" wird in dem gewünschten Maßstab (gewöhnlich 1 : 25000) als Strecke $A'B'$ auf das Meßtischblatt übertragen. Um die Lage eines dritten Punktes C in der Zeichnung festzulegen, stellt man den Meßtisch zunächst in A so auf, daß A' lotrecht über A liegt und die Richtung von $A'B'$ in die Richtung von AB fällt. Die Richtung von A' nach dem Punkt C legt man in der Zeichnung fest. Dann stellt man den Meßtisch im Punkte B so auf, daß B' lotrecht über B liegt und $B'A'$ mit der Richtung BA zusammenfällt. Die Richtung von B' nach C wird durch den Peilstrahl nach C bestimmt und in der Zeichnung festgelegt. Beide Peilstrahlen schneiden sich in der Zeichnung im Punkte C'. Wiederholt man dieses Verfahren für eine Reihe von Geländepunkten, so erhält man auf dem Meßtischblatt ein ähnliches Bild des Geländes im gewünschten Maßstab.

a) Beweise, daß das Bild $A'B'C'$ auf dem Meßtischblatt dem Geländedreieck ABC ähnlich und im gewünschten Maßstab verkleinert ist!

b) Führe mit einer behelfsmäßigen Vorrichtung (Reißbrett) eine Meßtischaufnahme im Freien durch!

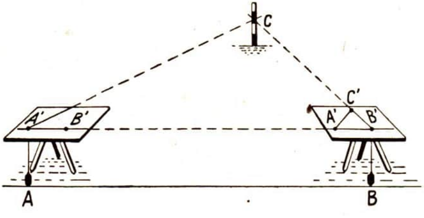


Abb. 109

7. Der Storchschnabel (Abb. 110) ist ein Zeichengerät zur unmittelbaren Umzeichnung ebener Figuren in vergrößertem oder verkleinertem Maßstab. Er besteht aus 4 Stäben, die in den Punkten A, B, C, F gelenkig miteinander verbunden sind und ein Gelenkparallelogramm $AFBC$ bilden. Die Punkte P, F, Z liegen stets in einer Geraden. Der Punkt P, der Pol des Storchschnabels, wird auf dem Zeichen-

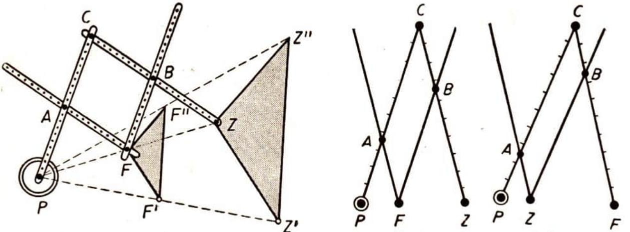


Abb. 110

tisch befestigt. Eine durch ihn geführte und auf der Zeichenebene senkrecht stehende Achse ist die Drehachse für die Bewegungen des Storchschnabels. Umfährt man mit dem in F befestigten „Fahrstift“ die zu vergrößernde Originalfigur, so beschreibt der in Z befestigte „Zeichenstift“ das ähnlich liegende vergrößerte Bild.

a) Stelle ein Modell eines Storchschnabels aus Pappstreifen her!

b) Wie mußt du den Aufbau des Storchschnabels ändern, wenn andere Maßstäbe (1 : 2; 1 : 3) zugrunde gelegt werden?

8. Halte am gestreckten Arm den abgespreizten Daumen lotrecht, schließe das eine Auge und visiere mit dem anderen am Daumen rechts und links vorbei nach einem entfernten Geländestück! Du wirst beobachten, daß ein gewisser Geländestreifen vom Daumen überdeckt wird. Bestimme jetzt die Breite deines Daumens und (mit Hilfe eines Freundes) die Entfernung des Daumens vom offen gehaltenen Auge! Die Abbildung **111** zeigt dir zwei Möglichkeiten der Anwendung dieses Verfahrens der „Daumenbreite“ (A : Auge; d : Breite des Daumens; a : Abstand des Daumens vom Auge).

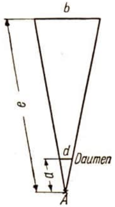


Abb. 111

a) Kennst du die Entfernung e des beim Visieren überdeckten Geländestücks, so kannst du seine Breitenausdehnung b berechnen.

b) Kennst du die Breitenausdehnung b des überdeckten Geländestücks (oder kannst du sie schätzen), so kannst du die Entfernung des überdeckten Geländestücks berechnen.
Führe das Verfahren praktisch aus und ermittle selbst Zahlenwerte für a, d und e beziehungsweise b!

9. Daumensprung: Halte dazu wie bei Aufgabe 8 deinen Arm mit dem abgespreizten Daumen, diesmal möglichst genau vor die Mitte zwischen deinen Augen! Visiere erst mit dem einen und dann mit dem anderen Auge an demselben Daumenrand (links oder rechts) vorbei nach einem Geländestück, ohne dabei die Armhaltung zu verändern! Der Daumenschatten „springt" um eine gewisse Geländebreite g zur Seite. Jetzt laß von einem Freund noch die Entfernung deiner beiden Pupillen messen! Nun kannst du nach Abbildung 112 dieselben beiden Aufgaben wie in Aufgabe 8 lösen. (P_1, P_2: die beiden Pupillen; p: ihr Abstand; g: Geländebreite; a und e wie in der Abbildung 111). Führe auch dieses Verfahren praktisch durch!

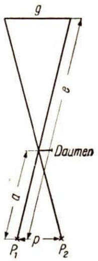


Abb. 112

49. Anwendungsaufgaben

1. In einem Dreieck ABC ist die Seite a 36 mm lang und der Winkel γ beträgt 55°. Durch den Punkt D auf der Seite BC, der 20 mm von C entfernt ist, wurde zu der Seite c eine Parallele von 30 mm Länge gezogen. Berechne c und überprüfe das Ergebnis durch Konstruktion!

2. Zur Seite c eines Dreiecks ABC ist eine Parallele gezogen. Sie trifft die Seite a in D ($CD = 16$ mm; $DB = 31$ mm; $c = 56$ mm). Bestimme durch Rechnung und Zeichnung die Länge der Parallelen!

3. In einem Dreieck ABC ist durch den Punkt B' auf AB die Parallele zu BC gezogen. Sie schneidet AC in C' ($a = 50$ mm; $b = 70$ mm; $c = 90$ mm; $AB' = 40$ mm). Wie lang sind die Seiten des Dreiecks $AB'C'$ und die des Trapezes $B'BCC'$? Rechne und zeichne!

4. Eine Straße verläuft rechtwinklig zur Blickrichtung. Der Abstand zweier Telefonstangen (Abstand 50 m) wird gerade durch 1 ($1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$) Daumenbreite gedeckt. Wieviel Meter sind es bis zur Straße?
Anmerkung: Nimm das Verhältnis der Armlänge a zur Daumenbreite d mit 30 an!

5. Wie breit ist ein Geländestreifen, wenn er in einer Entfernung

von	800	600	850	1000	1200	1000 m
von	1	2	$1\frac{1}{2}$	3	$2\frac{1}{2}$	1 Daumenbreiten

gedeckt wird? ($a : d = 30$)

6. Die Bäume einer rechtwinklig zur Blickrichtung führenden Straße haben einen Abstand von 10 m. Ein Daumensprung geht über 5 (8, 9, 16, 12, 20) Bäume. Wieviel Meter sind es bis zur Straße?
Anmerkung: Nimm das Verhältnis von Armlänge a zum Augenabstand p mit 10 an!

7. Wie breit ist der Geländestreifen, den dein Daumensprung in 600, 1000, 1800, 2800, 3000 m Entfernung überstreicht?

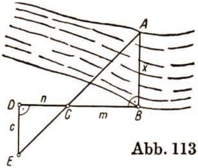


Abb. 113

8. Berechne die Breite g des Daumensprunges bei $p = 6{,}5$ cm, $a = 65$ cm und $e = 1000$ m!

9. Die Abbildungen 113 und 114 zeigen, wie man Flußbreiten ermitteln kann. An den mit Kreisen bezeichneten Stellen stehen Fluchtstäbe. Bestimme x durch Zeichnung und Rechnung!

		m	n	c
Abbildung 113:	a)	35 m	17 m	8 m
	b)	42 m	12 m	6 m

		m	n	r
Abbildung 114:	c)	34 m	24 m	20 m
	d)	30,5 m	24,3 m	16,5 m

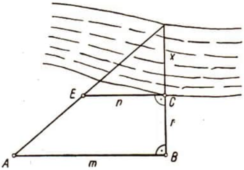


Abb. 114

10. Die drei Punkte A, B, C liegen auf einer Karte (Maßstab **1 : 100000**) auf einer Geraden. Die Strecke AC mißt 5 cm, die Strecke AB mißt 3 cm. Am Punkt A steht die Höhenzahl 750 m ü. NN, am Punkt C 650 m ü. NN. Wie hoch darf Punkt B höchstens liegen, wenn A von C aus eingesehen werden kann?

11. Kann C von A aus eingesehen werden, wenn auf einer Karte im Maßstab 1 : 25000 die folgenden Zahlenwerte vermessen wurden?

Höhenlage des Punktes ü. NN

	A	B	C	AB	BC
a)	625 m	570 m	550 m	32 cm	16 cm
b)	750 m	720 m	710 m	32 cm	8 cm
c)	1225 m	1170 m	1140 m	20,4 cm	18,8 cm
d)	775 m	660 m	625 m	18,8 cm	5,2 cm

12. Auf einer Fotografie des Völkerschlachtdenkmals wird dessen Höhe mit 8,5 cm gemessen. Wie hoch ist es in Wirklichkeit, wenn der Apparat bei der Aufnahme 160 m von der Mittelebene des Denkmals entfernt war und die Brennweite des Objektivs 15 cm betrug?

13. Steffen hält mit ausgestrecktem Arm (60 cm) ein Zehnpfennigstück so, daß es gerade den Dresdner Gasometer (Durchmesser 62 m) verdeckt. Wieviel Meter stand er vom Gasometer entfernt?

14. Ein Küstenschutzboot der Seepolizei steuert bei einer Geschwindigkeit von 10 kn (lies: Knoten) den Kurs N. Um 10.25 gibt es einem anderen KS-Boot, das zu diesem Zeitpunkt 10 sm in Richtung O von ihm steht, den Befehl, mit 20 kn Geschwindigkeit auf kürzestem Weg zu ihm zu stoßen. Wann treffen die Boote zusammen und welchen Fahrweg legt jedes von ihnen bis dahin zurück?

Anleitung: Zeichnerische Lösung! 1 kn = 1 sm/Std; 1 sm = 1,852 km

15. Das Objektiv einer Kamera für Luftbildaufnahmen hat eine Brennweite von 75 cm. Das Bildformat ist 30 cm × 30 cm. Wie hoch muß das Flugzeug fliegen, damit gerade 1 km² aufgenommen werden kann?

16. a) Aus welcher Entfernung müßten wir ein Projektionsbild von der Breite 2 m (1,80 m; 3,50 m; 1,20 m) betrachten, damit es dem Auge genauso groß erscheint, wie eine Fotografie von 9 cm Breite in normaler Sehweite (25 cm)?

b) Wie breit müßte jeweils ein Projektionsbild mit der unter a) berechneten Entfernung sein, damit es dem Auge genauso groß erscheint wie ein Bild vom Format 24 mm × 36 mm (als Hochbild)?

c) Wie hoch müßte jeweils das Projektionsbild sein?

VIII. Die Satzgruppe des Pythagoras

50. Der Lehrsatz des Pythagoras

1) Beispiel: Ein Quadrat mit der Seite a ist in ein anderes Quadrat zu verwandeln, dessen Fläche doppelt so groß ist.

Lösung: Die Abbildung 115 zeigt die Lösung der Aufgabe.

Damit wir den Nachweis für die Richtigkeit der Lösung liefern können, ziehen wir in dem ursprünglichen Quadrat die Diagonalen (Abb. 116). Dadurch entstehen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke, die nach

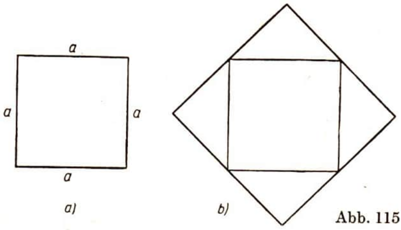


Abb. 115

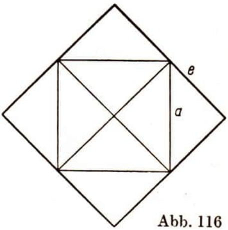


Abb. 116

außen geklappt werden. So entsteht das neue Quadrat, das acht kongruente rechtwinklige Dreiecke enthält. Also ist

$$e^2 = 2a^2.$$

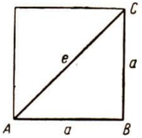


Abb. 117

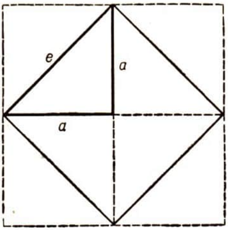


Abb. 118

Das Ergebnis $e^2 = 2a^2$ wollen wir uns noch auf andere Weise veranschaulichen. Aus der Abbildung 116 erkennen wir, daß die Seite des neuen Quadrates gleich der Diagonalen im ursprünglichen Quadrat ist. Das Quadrat mit der Seite a wird durch die Diagonale e in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke geteilt (Abb. 117). Die beiden Seiten im rechtwinkligen Dreieck, die den rechten Winkel einschließen, heißen **Katheten**. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, nennt man **Hypotenuse.** In unserem Beispiel ist im rechtwinkligen Dreieck ABC die Seite e die Hypotenuse. Die Seiten a sind die Katheten. Aus der Abbildung 118 erkennen wir, daß das Quadrat über der Hypotenuse gleich e^2 ist. Das Quadrat über jeder Kathete ist gleich a^2. Folglich ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten:

$$e^2 = 2a^2.$$

2) Dieser Satz gilt auch für jedes beliebige rechtwinklige Dreieck.

Beispiel: Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 4$ cm und $b = 3$ cm! Ermittle die Summe der Quadrate über beiden Katheten!

Lösung:

Wir konstruieren ein Quadrat $ABCD$ mit der Seite $d = a + b = 7$ cm. Zu AB und AD zeichnen wir im Abstand von $b = 3$ cm die Parallelen EF und GH. Die Parallelen schneiden sich in dem Punkt M. Dadurch sind das Quadrat $AHME$ mit der Seite $b = 3$ cm und das Quadrat $MFCG$ mit der Seite $a = 4$ cm entstanden. Außerdem wurden die Rechtecke $HBFM$ und $EMGD$ mit den Seiten $a = 4$ cm und $b = 3$ cm gebildet. Beide Rechtecke sind kongruent (Abb. 119a).

Ziehen wir in beiden Rechtecken je eine Diagonale, und zwar HF und EG, dann entstehen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke. Ihre Hypotenusen nennen wir c (Abb. 119a). Ihre Katheten sind die Seiten a und b.

Wir erhalten die Summe der Quadrate a^2 und b^2, wenn wir die vier rechtwinkligen Dreiecke wegnehmen. Wir können die Dreiecke aber auch von den Ecken des Quadrates $ABCD$ wegnehmen (Abb. 119b).

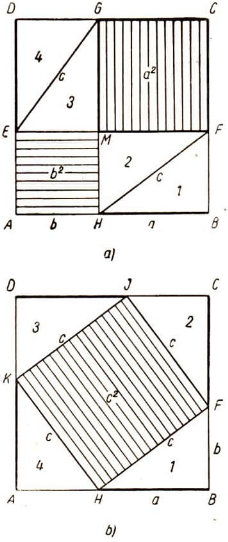


Abb. 119

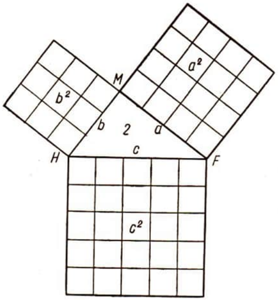


Abb. 120

Erkläre, inwiefern die vier rechtwinkligen Dreiecke wiederum kongruent sind!

Wollen wir nachweisen, daß über der Hypotenuse c ein Quadrat entstanden ist, müssen wir folgende Überlegung an Hand der Abbildung 119 b anstellen:

In dem rechtwinkligen Dreieck HBF zum Beispiel sei der $\sphericalangle FHB = \alpha$. Dann ist $\sphericalangle HFB = 90° - \alpha$. Diese Winkel treten auch in den anderen rechtwinkligen Dreiecken auf. Da nun bei H drei Winkel liegen und zwei davon Komplementwinkel sind, muß der dritte ein rechter sein; denn alle drei bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Weise das gleiche für F, I und K nach! Also ist über der Hypotenuse c das Quadrat c^2 gebildet worden.

Haben wir auch hier die vier rechtwinkligen Dreiecke weggenommen, dann erhalten wir ebenfalls die Summe der Quadrate $a^2 + b^2$:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Legen wir die Abbildung 119 b so auf die Abbildung 119 a, daß sich die Dreiecke 2 decken, während die Dreiecke 1, 3 und 4 fortfallen, dann erhalten wir die anschauliche Lösung des Beispiels (Abb. 120). Ebenso kann man mit jedem anderen rechtwinkligen Dreieck verfahren. Also gilt:

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}.$$

Dieser Satz ist der **Lehrsatz des Pythagoras**[1].

Aus der Erkenntnis $c^2 = a^2 + b^2$ können wir ableiten:

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ und}$$

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

[1] Pythagoras: griechischer Mathematiker, 580 bis 501 v. u. Z.

3) Lassen wir in der Abbildung 120 den rechten Winkel zu einem stumpfen Winkel werden, ohne daß die Seiten a und b sich ändern, dann wird die Seite c größer und damit auch c^2. Daraus folgt: $c^2 > a^2 + b^2$. Verändern wir den rechten Winkel zu einem spitzen Winkel, dann wird die Seite c kleiner und damit auch c^2. Es ist also $c^2 < a^2 + b^2$. Untersuche das an entsprechenden Zeichnungen!

Daraus ergibt sich die Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes:

Ist in einem Dreieck die Summe der Quadrate zweier Seiten gleich dem Quadrat über der dritten Seite, dann ist es ein rechtwinkliges Dreieck.

Positive ganze Zahlen, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, nennt man **pythagoreische Zahlen**, wie 3, 4, 5 oder 6, 8, 10 oder 5, 12, 13.

Aufgaben

1. Lege aus 12 Streichhölzern ein rechtwinkliges Dreieck!

2. In einem rechtwinkligen Dreieck sind $b = 15$ cm und $c = 17$ cm.
   a) Stelle fest, wie groß das Quadrat über der Kathete a ist!
   b) Konstruiere a^2, indem du zur Konstruktion den Maßstab 1 : 5 wählst!

3. Zeichne ein Quadrat nach selbstgewähltem Maß! Konstruiere ein Quadrat, das gleich der Hälfte des gegebenen ist!

4. Konstruiere ein Quadrat, das gleich der Summe zweier Quadrate ist, deren Seiten 4,2 cm und 5,8 cm messen!

5. Zeichne ein Quadrat mit der Seite $a = 2$ cm und daneben Quadrate, die doppelt, dreimal, viermal, fünfmal, sechsmal so groß sind! Miß die Seiten der entstandenen Quadrate und vergleiche sie!

6. **a)** Bestimme durch Konstruktion die Höhe h_c in einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis $c = 8$ cm und dem Schenkel $b = 5$ cm!
   b) Konstruiere das Quadrat über der Höhe!

7. Zwei Quadrate haben eine Fläche von 36 cm² und 25 cm². Konstruiere ein Quadrat, das gleich der Differenz dieser beiden Quadrate ist! Miß die Länge seiner Seite!

8. Ein Quadrat hat die Fläche von 81 cm², ein zweites die von 16 cm². Konstruiere ein Quadrat, dessen Fläche gleich der Differenz der beiden gegebenen Quadrate ist! Welche Länge hat seine Seite?

9. Zwei Orte L. und B. sollen eine direkte Verbindungsstraße erhalten. Zur Vorplanung muß die Entfernung zwischen beiden Orten gemessen werden, was infolge dazwischenliegender Hindernisse Schwierigkeiten bereitet. Von einem dritten Ort S. sind beide Orte 360 m und 150 m entfernt. Die Visierlinien von S. nach L. und B. bilden einen rechten Winkel. Fertige eine Konstruktionszeichnung im Maßstab von 1 : 5000 an und stelle die Entfernung zwischen beiden Orten fest!

10. Die Länge der Giebelbalken eines Daches muß festgestellt werden. Das Haus hat eine Breite von 15 m, und der Giebel bildet ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Fertige die Konstruktion im Maßstab 1 : 100 an!

51. Der Kathetensatz (Satz des Euklid)

1) Nachdem wir den Lehrsatz des Pythagoras kennengelernt haben, interessiert es uns, welchem Teil des Hypotenusenquadrats das Quadrat über einer der Katheten gleicht.

Beispiel: Verwandle das Quadrat über der Kathete b des rechtwinkligen Dreiecks ABC in ein flächengleiches Rechteck!

Lösung: In der Abbildung 121 wurden die beiden Kathetenquadrate und das Hypotenusenquadrat zum rechtwinkligen Dreieck ABC konstruiert. Ziehen wir durch J, den einen Eckpunkt des Quadrates über b, die Parallele zu AB, so erhalten wir das Parallelogramm $ABKJ$.

Dieses Parallelogramm ist flächengleich dem Quadrat über der Kathete b, weil beide die gleiche Grundseite JA haben und weil beide zwischen Parallelen liegen, nämlich zwischen JA und HB. Also ist

$$ABKJ = ACHJ = b^2.$$

Drehen wir das Parallelogramm $ABKJ$ um einen Winkel von $90°$ um den Punkt A, dann fällt die Seite JA auf die Dreieckseite AC und der

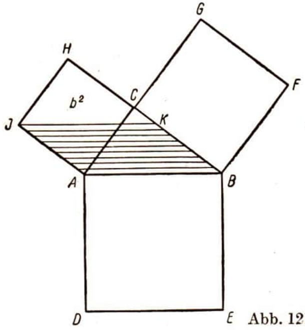


Abb. 121

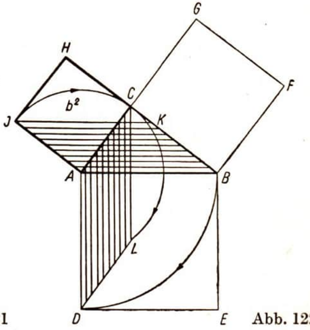


Abb. 122

Punkt J auf den Punkt C (Abb. 122). Ferner fällt die Seite AB auf die Seite AD, weil beide Seiten des Hypotenusenquadrats sind. Folglich fällt auch der Punkt B auf den Punkt D. Es ist das Parallelogramm $ADLC$ entstanden (Abb. 122).

Das Parallelogramm können wir in ein flächengleiches Rechteck mit der gleichen Grundseite AD und der gleichen Höhe $AP = q$ verwandeln. Die Grundseite AD ist die Seite c des Hypotenusenquadrats; die Höhe AP ist die Projektion der Kathete b auf die Hypotenuse (Abb. 123).

Es ist also

$$ADLC = ADOP = c \cdot q.$$

Fassen wir noch einmal zusammen, was wir entwickelt haben, dann ergibt sich:

$$ABKJ = b^2,$$
$$ABKJ = ADLC = c \cdot q.$$

Also ist $\boldsymbol{b^2 = c \cdot q}$.

Wir erkennen daraus:

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf diese.

Diesen Satz nennt man den **Kathetensatz** oder den **Satz des Euklid**[1].

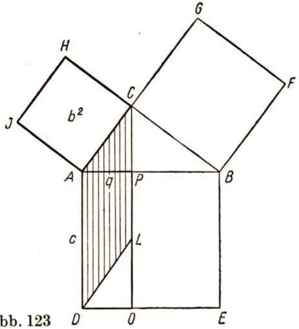


Abb. 123

Führe auf entsprechende Weise die Untersuchung für $a^2 = c \cdot p$ durch! (Die Projektion der Kathete a auf die Hypotenuse nennen wir p.)

2) Mit dem Kathetensatz hat Euklid einen Beweis für die Richtigkeit des Lehrsatzes des Pythagoras geführt. Wir haben folgendes festgestellt:

$$b^2 = c \cdot q,$$
$$a^2 = c \cdot p.$$

Addieren wir beide Gleichungen, so ergibt sich:

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q, \quad \text{d. h. also}$$
$$a^2 + b^2 = c\,(p + q),$$
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Abb. 124).}$$

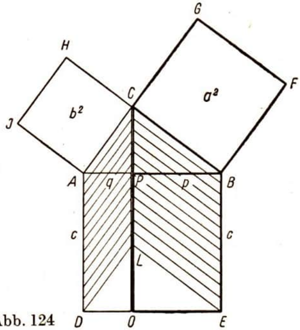


Abb. 124

[1] Euklid, griechischer Mathematiker, lebte von 365 bis 310 in Alexandria.

52. Der Höhensatz

1) Mit Hilfe dieser beiden Lehrsätze können wir weitere wichtige mathematische Erkenntnisse am rechtwinkligen Dreieck gewinnen.

Beispiel: Verwandle das Quadrat über der Höhe h in dem rechtwinkligen Dreieck ABC in ein flächengleiches Rechteck!

Lösung: In dem rechtwinkligen Dreieck ABC fällen wir die Höhe $CD = h$ auf die Hypotenuse. Die Höhe teilt die Hypotenuse in die Projektionen q und p. In dem entstandenen rechtwinkligen Dreieck ADC gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

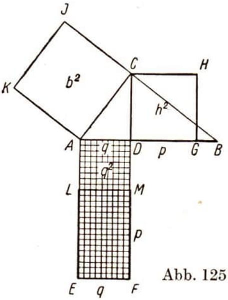


Abb. 125

$$b^2 = h^2 + q^2.$$

Nach dem Kathetensatz ist aber auch

$$b^2 = c \cdot q.$$

Ersetzen wir in der ersten Gleichung b^2 durch $c \cdot q$, dann erhalten wir folgende Gleichung:

$$h^2 + q^2 = c \cdot q.$$

Dann ist $h^2 = c \cdot q - q^2,$

$$h^2 = q \cdot (c - q),$$

$$h^2 = q \cdot p.$$

An der Abbildung 125 erkennen wir, daß das Rechteck $AEFD$ dem Quadrat über der Kathete b flächengleich ist (nach dem Kathetensatz). Die Summe aus dem Quadrat über der Höhe h und dem Quadrat über dem Hypotenusenabschnitt q ist gleich dem Rechteck $c \cdot q$, d. h. also

$$DGHC + ALMD = AEFD.$$

Demnach ist das Quadrat über der Höhe h gleich der Differenz aus dem Rechteck $c \cdot q$ und dem Quadrat über dem Hypotenusenabschnitt q. Diese Differenz stellt das Rechteck $EFML$ dar. Die Rechteckseite LE ist entstanden aus $AE - AL = c - q$. Folglich ist

$$LE = p.$$

Für die andere Rechteckseite stellen wir fest:

$$LM = q.$$

Die Seiten des Rechtecks, das dem Höhenquadrat flächengleich ist, sind demnach die Kathetenprojektionen auf die Hypotenuse.

Wir merken uns:

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

Diesen Satz nennt man den **Höhensatz.**

2) Mit dem Lehrsatz des Pythagoras, dem Kathetensatz und dem Höhensatz können wir folgende Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck feststellen:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad h^2 = p \cdot q$$
$$h^2 + q^2 = b^2 \qquad a^2 = c \cdot p$$
$$h^2 + p^2 = a^2 \qquad b^2 = c \cdot q$$

Aufgaben

1. Verwandle ein Rechteck mit den Seiten 8 cm und 2 cm in ein Quadrat!
Anleitung: Nach dem Kathetensatz: $c = 8$ cm, $q = 2$ cm, gesucht b^2,
nach dem Höhensatz: $p = 8$ cm, $q = 2$ cm, gesucht h^2.

2. Verwandle in einem rechtwinkligen Dreieck ABC das Quadrat über der Kathete $a = 5$ cm in ein Rechteck, dessen eine Seite **a)** 2 cm, **b)** 3 cm lang ist!
Anleitung: $a = 5$ cm, $p = 2$ cm, gesucht c.

3. Verwandle ein Rechteck mit den Seiten $a = 4{,}5$ cm und $b = 3{,}3$ cm in ein Quadrat! (Siehe Aufgabe 1!)

4. In einem rechtwinkligen Dreieck sind $a = 5$ cm und $h = 3$ cm gegeben. Konstruiere ein flächengleiches Rechteck zu h^2! Miß die Länge der Hypotenuse c!

5. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind $p = 9$ cm und $q = 4$ cm gegeben.
a) Konstruiere h^2!
b) Miß die Längen der Katheten a und b!

6. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind $a = 8$ cm und $c = 10$ cm gegeben. Konstruiere das Quadrat über der Kathete b und ein dazu flächengleiches Rechteck!

IX. Quadratzahlen und Quadratwurzeln

53. Quadratzahlen (Begriff und Berechnung)

Schon oft haben wir Produkte aus gleichen Faktoren verkürzt geschrieben.

1. Beispiel: Zerlege die Zahlen 25 und 125 in Primfaktoren!

a) $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$
b) $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$

In beiden Fällen ist 5 die **Basis der Potenz** 5^2 bzw. 5^3. Die Zahl 2 (bei **a**) bzw. 3 (bei **b**) ist der **Exponent**. 25 und 125 sind die **Potenzwerte.**

Eine Potenz ist ein Produkt aus gleichen Faktoren; der Exponent gibt an, wie oft die Basis als Faktor gesetzt werden muß.

2. Beispiel: Zur LNF einer LPG gehört eine quadratische Wiese mit einer Seitenlänge von 83 m. Wie groß ist ihre Fläche?

Wir erhalten die Anzahl der Quadratmeter der Fläche, indem wir rechnen: $83 \cdot 83 = 83^2 = 6889$.

Die Wiese hat eine Fläche von 6889 m², das sind 68,89 a.

Da das Berechnen der zweiten Potenzen von Zahlen häufig in der Geometrie vorkommt, haben sich zwei Ausdrucksweisen gebildet:

Beispiel:

83^2 ist die zweite Potenz von 83.	83^2 ist das Quadrat von 83.
Wir errechnen die zweite Potenz von 83.	Wir quadrieren 83.
Wir lesen	
83 hoch 2	83 zum Quadrat.

Weitere Beispiele:

$(+7)^2 = (+7) \cdot (+7) = +49$ $\qquad$ $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = +49$

$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6} = \frac{25}{36}$ $\qquad$ $\left(1\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{8 \cdot 8}{5 \cdot 5} = \frac{64}{25}$

$0{,}013^2 = \left(\frac{13}{1000}\right)^2 = \frac{13 \cdot 13}{1000 \cdot 1000} = \frac{169}{1000000} = 0{,}000169$

Aufgaben

1. Berechne die Quadrate der Zahlen 1 bis 20 und präge sie dir ein!

2. Wie groß sind die Quadrate der folgenden Zahlen?

$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{5}$, 0,6, 0,06, 60, 600, 150, 15000, 1,5, 0,015.

3. **a)** $(-24)^2$ **b)** $(-26)^2$ **c)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ **d)** $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$ **e)** $(-1{,}7)^2$ **f)** $(-3{,}3)^2$

4. Errechne den Wert der folgenden Ausdrücke!

a) $(-6)^2 - (-5)^2 + (-4)^2 - (-3)^2 + (-2)^2 - (-1)^2$

b) $2 \cdot 4^2 + 5 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 2^2$

c) $8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 16 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^2 - 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

5. Gib je zwei Beispiele für die folgenden Feststellungen:

a) Das Quadrat einer einstelligen Zahl ist ein- oder zweistellig.

b) Das Quadrat einer zweistelligen Zahl ist drei- oder vierstellig.

c) Das Quadrat einer dreistelligen Zahl ist fünf- oder sechsstellig.

6. Eine LPG will ihr Hühnerhaus verglasen. Insgesamt müssen 96 quadratische Scheiben eingesetzt werden, von denen jede 36 cm Seitenlänge hat.

a) Errechne die Fläche einer Glasscheibe!

b) Wieviel Quadratmeter Glas braucht die LPG zum Verglasen des Hühnerhauses, wenn mit einem Verschnitt von 10% zu rechnen ist?

54. Die Quadrattafel

Um das Berechnen der Quadrate von Zahlen zu ersparen, hat man sie in Tafeln zusammengestellt. Wir verwenden eine Tafel, die die Quadrate der Zahlen 1,00 bis 10,09 enthält. Jeweils die beiden ersten Ziffern der Zahlen 1,00 bis 10,09 stehen in der linken Spalte; die dritte Ziffer ist in der ersten Zeile notiert. Das Quadrat der Zahl 1,23 z. B. steht im Schnittpunkt der zu 1,2 gehörenden Zeile mit der zur Endziffer 3 gehörenden Spalte. Wir finden $1{,}23^2 \approx 1{,}513$.

Der genaue Wert von $1{,}23^2$ ist 1,5129. Der Tafelwert ist also der durch Runden entstandene Näherungswert. Doch weichen die Näherungswerte nur wenig vom genauen Wert ab. Bei $1{,}23^2 = 1{,}5129 \approx 1{,}513$ beträgt die Abweichung 0,0001. Das sind $\frac{1}{15\,129}$ oder 0,000066 oder 0,0066% vom genauen Wert. Ähnlich ist es bei den anderen Tabellenzahlen. Die Quadrate von ein- und zweistelligen Zahlen sind genau angegeben.

Wenn wir das Quadrat einer Zahl $<1{,}00$ oder $>10{,}09$ aufsuchen wollen, müssen wir die Zahl durch Abspalten von Zehntel- oder Zehnerpotenzen so schreiben, daß ein Zahlenfaktor entsteht, der in der Tafel steht.

Beispiele: $0{,}673^2 = (6{,}73 \cdot 0{,}1)^2 = 6{,}73^2 \cdot 0{,}1^2$
$38{,}7^2 = (3{,}87 \cdot 10)^2 = 3{,}87^2 \cdot 10^2$

Hier müssen wir vor dem Aufsuchen in der Tafel die Größenordnung des Quadrates überschlagen.

Aufgabe:	$0{,}673^2$	$38{,}7^2$
Überschlag:	$0{,}7^2 = 0{,}49$	$40^2 = 1600$
Umformen:	$0{,}673^2 = 6{,}73^2 \cdot 0{,}01$	$38{,}7^2 = 3{,}87^2 \cdot 100$
Tafel:	$6{,}73^2 \approx 45{,}29$	$3{,}87^2 \approx 14{,}98$
Ergebnis:	$0{,}673^2 \approx 0{,}4529$	$38{,}7^2 \approx 1498$

Enthält die Basis der Potenz mehr als drei geltende Ziffern, so ist vor dem Aufsuchen auf drei Ziffern zu runden.

Beispiele: $43{,}26^2 \approx 43{,}3^2$; $0{,}4304^2 \approx 0{,}430^2$

Aufgaben

1. a) $8{,}6^2$ b) $7{,}5^2$ c) $2{,}9^2$ d) $6{,}7^2$ e) $3{,}4^2$ f) $5{,}2^2$

2. a) $1{,}06^2$ b) $2{,}07^2$ c) $3{,}08^2$ d) $1{,}43^2$ e) $2{,}59^2$ f) $3{,}14^2$

Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt in jedem Falle der in der Tafel notierte Näherungswert?

3. a) $4{,}45^2$ b) $5{,}27^2$ c) $7{,}18^2$ d) $6{,}39^2$ e) $9{,}56^2$ f) $8{,}61^2$

4. a) $15{,}4^2$ b) $0{,}154^2$ c) 154^2 d) 269^2 e) $2{,}69^2$ f) $0{,}0269^2$
g) $0{,}843^2$ h) 843^2 i) $84{,}3^2$ k) 956^2 l) 9560^2 m) $0{,}956^2$

5. a) $24{,}87^2$ b) $8{,}629^2$ c) $0{,}7341^2$ d) $426{,}5^2$ e) 73340^2 f) $65{,}32^2$

55. Der Begriff „Quadratwurzel“

Beispiel: Ein Quadrat hat eine Fläche von 49 m². Wie lang ist seine Seite? Wir bezeichnen den Zahlenwert der Seite mit x und können schreiben:

$$x^2 = 49.$$

Gesucht wird die Basis einer Potenz. Bekannt sind der Exponent und der Potenzwert.

Wir wissen, daß 49 die zweite Potenz von (+7) und auch von (−7) sein kann: $(+7)^2 = 49$; $(-7)^2 = 49$.

Für x können also die Werte (+7) und auch (−7) angenommen werden. Da x hier Maßzahl einer Strecke ist, kommt nur der absolute Betrag 7 in Frage. Wir schreiben dafür

$$\sqrt{49} = 7$$

und lesen: zweite Wurzel aus 49 gleich 7.

Die Quadratseite ist 7 m lang.

Das hier durchgeführte Bestimmen der Basis bezeichnet man als **Wurzelziehen oder Radizieren**[1]. In $\sqrt[2]{49} = 7$ ist 49 der **Radikand**, 2 der **Wurzelexponent** und 7 der **Wurzelwert**. Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ ist aus dem Anfangsbuchstaben von radix entstanden. Statt „zweite Wurzel aus“ sagt man auch „Quadratwurzel aus“ oder noch kürzer „Wurzel aus“ und läßt den Wurzelexponenten 2 auch beim Schreiben weg: $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16}$.

Aufgaben

Bestimme in den folgenden Aufgaben den absoluten Betrag der Quadratwurzeln!

1. a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt{9}$ c) $\sqrt{25}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{196}$
g) $\sqrt{169}$ h) $\sqrt{100}$ i) $\sqrt{144}$ k) $\sqrt{121}$ l) $\sqrt{256}$ m) $\sqrt{225}$

2. a) $\sqrt{1600}$ b) $\sqrt{400}$ c) $\sqrt{4900}$ d) $\sqrt{3600}$ e) $\sqrt{6400}$ f) $\sqrt{4900}$
g) $\sqrt{0{,}25}$ h) $\sqrt{0{,}64}$ i) $\sqrt{0{,}81}$ k) $\sqrt{0{,}16}$ l) $\sqrt{0{,}49}$ m) $\sqrt{10000}$

3. a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{25}}$ c) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{64}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{144}}$ f) $\sqrt{\frac{1}{169}}$
g) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ h) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ i) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ k) $\sqrt{\frac{9}{64}}$ l) $\sqrt{\frac{25}{81}}$ m) $\sqrt{\frac{49}{169}}$

4. Gib je zwei Beispiele für die folgenden Feststellungen:
a) Die Quadratwurzel aus einem ein- oder zweistelligen Radikanden ist einstellig.
b) Die Quadratwurzel aus einem drei- oder vierstelligen Radikanden ist zweistellig.
c) Die Quadratwurzel aus einem fünf- oder sechsstelligen Radikanden ist dreistellig.

---
[1] radix (lat.) Wurzel.

56. Irrationale Zahlen

Beispiel: Die Seite eines Quadrates ist 1 dm lang. Wie groß ist seine Diagonale?

a) Zeichnerische Lösung: Wir zeichnen auf Millimeterpapier ein Dezimeterquadrat und messen die Diagonale. Bei genauem Arbeiten erhalten wir 1,41 dm oder 1,42 dm. Wir wissen aber, daß diese durch Zeichnung gewonnenen Ergebnisse nur Näherungswerte sein können.

b) Rechnerische Lösung: Wenn wir die unbekannte Diagonale mit x bezeichnen, dann ist nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

Das Quadrat über der Diagonale ist demnach 2. Dann beträgt die Länge der Diagonale $x = \sqrt{2}$.

Die folgende Aufstellung zeigt, wie man die Zahl 2 immer besser zwischen zwei endliche Dezimalzahlen einschließen kann.

$1^2 = 1$	$1 < \sqrt{2} < 2$	$2^2 = 4$
$1{,}4^2 = 1{,}96$	$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	$1{,}5^2 = 2{,}25$
$1{,}41^2 = 1{,}9881$	$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	$1{,}42^2 = 2{,}0164$
$1{,}414^2 = 1{,}999396$	$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	$1{,}415^2 = 2{,}002225$

Wir brechen hier das Einengen ab und halten fest, daß 2 dem Wert 1,414 näher liegt als dem Wert 1,415.

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414$$

In der Aufstellung treten als Näherungswerte für $\sqrt{2}$ ganze Zahlen und endliche Dezimalzahlen (unechte Brüche) auf. $\sqrt{2}$ kann keine ganze Zahl sein. $\sqrt{2}$ kann auch kein unechter Bruch sein, weil das Quadrat eines unechten Bruches wieder ein unechter Bruch sein muß.

Ganze Zahlen, endliche Dezimalzahlen und periodische Dezimalzahlen lassen sich durch das Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken $\left(2 = \frac{2}{1};\ 1{,}41 = \frac{141}{100};\ 1{,}\overline{3} \ldots = \frac{4}{3}\right)$. Sie heißen **rationale Zahlen**. Die meisten Wurzeln lassen sich wie $\sqrt{2}$ nicht durch das Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellen. Sie heißen deswegen **irrationale Zahlen**. Irrationale Zahlen sind somit unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen.

Aufgaben

1. Die Raumdiagonale eines Dezimeterwürfels beträgt $\sqrt{3}$ dm. Bestimme $\sqrt{3}$ durch Einengen auf 4 geltende Ziffern wie oben!

2. Verfahre ebenso bei

   a) $\sqrt{5}$, b) $\sqrt{7}$, c) $\sqrt{8}$, d) $\sqrt{10}$!

57. Das Quadratwurzelziehen mit der Quadrattafel

Für das genaue oder näherungsweise Bestimmen der Zahlenwerte von Quadratwurzeln (kürzer: für das „Ziehen von Quadratwurzeln") benutzen wir auch die Quadrattafel. Dabei muß in entgegengesetzter Richtung wie beim Aufsuchen von Quadraten vorgegangen werden.

Sofern der Radikand eine Zahl zwischen 1,000 und 101,8 ist und in der Tafel steht, läßt sich der genaue oder der genäherte Wert der Wurzel sofort ablesen. Beispiel: $\sqrt{23{,}04} = 4{,}8$.

Steht der zwischen 1,000 und 101,8 liegende Radikand nicht in der Tafel, so sucht man die beiden Nachbarwerte auf und verwendet den nächstgelegenen. Beispiel: $\sqrt{5}$; in der Tafel steht $\sqrt{4{,}973} \approx 2{,}23$ und $\sqrt{5{,}018} \approx 2{,}24$. Die Zahl 5 liegt näher an 5,018, also $\sqrt{5} \approx 2{,}24$

Liegen die beiden Nachbarwerte gleich weit vom Radikanden entfernt, so verwendet man den größeren von beiden.

Wenn der Radikand eine Zahl $<1{,}000$ oder $>101{,}8$ ist, so ist das vorausgehende Überschlagen der Größenordnung des Ergebnisses besonders wichtig. Eine Hilfe dazu ist das Abteilen des Radikanden vom Komma aus in Gruppen zu zwei Ziffern.

Beispiele:

Aufgabe und Abteilen des Radikanden:	$\sqrt{37\vert 50}$	$\sqrt{3\vert 75}$	$\sqrt{0{,}37\vert 5}$
Überschlag:	$\sqrt{36\vert 00} = 60$	$\sqrt{3\vert 61} = 19$	$\sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10}$
Tafel:	$\sqrt{37{,}50} \approx 6{,}12$	$\sqrt{3{,}75} \approx 1{,}94$	$\sqrt{37{,}5} \approx 6{,}12$
Ergebnis:	$\sqrt{3750} \approx 61{,}2$	$\sqrt{375} \approx 19{,}4$	$\sqrt{0{,}375} \approx 0{,}612$

Da in der Quadrattafel nur vierstellige Zahlen stehen, ist jeder Radikand mit mehr als vier geltenden Ziffern vor dem Aufsuchen auf vier geltende Ziffern zu runden.

Beispiele: $\sqrt{6{,}7082} \approx \sqrt{6{,}708}$ $\qquad \sqrt{605352} \approx \sqrt{605400}$

Aufgaben

1. **a)** $\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{11}$ **c)** $\sqrt{66}$ **d)** $\sqrt{52}$ **e)** $\sqrt{71}$ **f)** $\sqrt{95}$

2. **a)** $\sqrt{39}$ **b)** $\sqrt{77}$ **c)** $\sqrt{84}$ **d)** $\sqrt{49{,}07}$ **e)** $\sqrt{1{,}177}$ **f)** $\sqrt{394}$

3. **a)** $\sqrt{4}$ **b)** $\sqrt{40}$ **c)** $\sqrt{400}$ **d)** $\sqrt{4000}$ **e)** $\sqrt{0{,}4}$ **f)** $\sqrt{0{,}04}$

Hinweis: $\sqrt{0{,}4} = \sqrt{0{,}40}$ Ü.: $\sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10}$ $\sqrt{0{,}40} \approx 0{,}632$

g) $\sqrt{17}$ **h)** $\sqrt{170}$ **i)** $\sqrt{1700}$ **k)** $\sqrt{1{,}7}$ **l)** $\sqrt{0{,}17}$ **m)** $\sqrt{0{,}017}$

Hinweis: $\sqrt{0{,}017} = \sqrt{0{,}01\vert 70}$ Ü.: $\sqrt{\frac{169}{10000}} = \frac{13}{100}$ $\sqrt{0{,}01\vert 70} \approx 0{,}133$

n) $\sqrt{493}$ o) $\sqrt{4930}$ p) $\sqrt{49300}$ q) $\sqrt{49,3}$ r) $\sqrt{4,93}$ s) $\sqrt{0,493}$
t) $\sqrt{6234}$ u) $\sqrt{623,4}$ v) $\sqrt{62,34}$ w) $\sqrt{6,234}$ x) $\sqrt{0,6234}$ y) $\sqrt{62340}$

4. a) $\sqrt{15,93}$ b) $\sqrt{4260}$ c) $\sqrt{153,7}$ d) $\sqrt{264,8}$ e) $\sqrt{9375}$
f) $\sqrt{0,6048}$ g) $\sqrt{971,5}$ h) $\sqrt{60,82}$ i) $\sqrt{0,7193}$ k) $\sqrt{4,820}$

5. a) $\sqrt{18370}$ b) $\sqrt{826,41}$ c) $\sqrt{59,372}$ d) $\sqrt{8,6046}$
e) $\sqrt{59717}$ f) $\sqrt{26,08}$ g) $\sqrt{937,18}$ h) $\sqrt{20480}$

6. Auch wenn Radikanden in der Quadrattafel stehen, sind ihre Wurzeln meist irrationale Zahlen. Zeige das an
a) $\sqrt{53}$, b) $\sqrt{57}$, c) $\sqrt{61}$, d) $\sqrt{75}$, e) $\sqrt{99}$, f) $\sqrt{6,2}$, g) $\sqrt{6,3}$!

58. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Wie lang sind die Diagonalen
a) eines Quadrates mit der Seite $a = 29$ cm,
b) eines Rechtecks mit den Seiten $a = 25,4$ cm und $b = 19,3$ cm?

2. Die Diagonale eines quadratischen Platzes ist 184 m lang. Wie groß sind Umfang und Fläche des Platzes?

3. Die Diagonalen eines Rhombus messen $e = 42,4$ cm und $f = 35,2$ cm.
a) Wie lang ist die Seite des Rhombus?
b) Wie groß ist der Flächeninhalt?

4. Der Durchmesser eines Kreises ist 16 cm lang; parallel zu ihm legt man in Abständen von 2 zu 2 cm Sehnen in den Kreis. Berechne ihre Längen!

5. Ein Pionier läßt seinen Drachen steigen, so hoch es sein 87 m langer Bindfaden zuläßt. Sein Freund, der 50 m von ihm entfernt steht, sieht den Drachen senkrecht über sich. Welche Höhe über dem Erdboden hat der Drachen erreicht? (Der Durchhang der Drachenschnur wird vernachlässigt.)

6. Eine Telegrafenstange ist durch ein Drahtseil befestigt, dessen Verankerung in der Erde vom Fußpunkt der Stange 7,50 m entfernt ist. Bis zur Drahtbefestigung beträgt die Höhe der Stange schätzungsweise 6 m. Wie lang ist das Drahtseil?

7. Die Wände eines Raumes sollen 1,35 m hoch mit Kacheln verkleidet werden. Der Raum ist 4,25 m lang und 3,60 m breit. Die Eingangstür ist 1,10 m breit. Die Kacheln sind quadratisch, die Seite mißt 15 cm. Wieviel Kacheln sind nötig?

8. Eine 8,5 m lange Leiter wird so an eine Hauswand gestellt, daß ihr Fuß 3,20 m absteht. Wie hoch reicht die Leiter an der Wand hinauf?

9. Die Giebelseite eines Hauses, die der Wetterseite zugekehrt ist, muß neu verputzt werden. Der Dachgiebel ist ein gleichseitiges Dreieck. Entnimm die Maße der Abbildung 126 und berechne die Kosten des Verputzens, wenn 1 m² 6,40 DM kostet!

10. An eine 12 m lange Hauswand wird ein Schuppen mit einem einfachen Pultdach gebaut. Berechne nach den Maßen in Abbildung 127,
   a) wie lang die schräg verlaufende Dachkante wird,
   b) wieviel Quadratmeter Bretter zum Bedecken des Daches erforderlich sind!

11. Wie groß sind bei dem Dachbinder in Abbildung 128 die Firsthöhe und die Sparrenlängen, wenn $a = b = c = 1{,}5$ m ist?

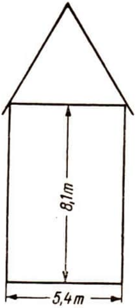


Abb. 126

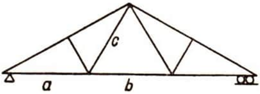


Abb. 128

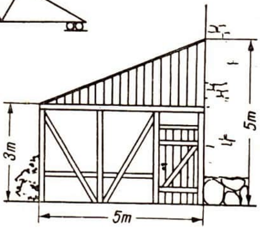


Abb. 127

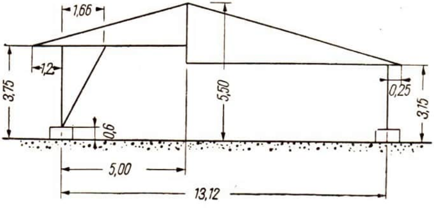


Abb. 129

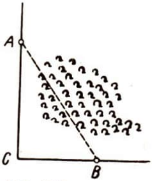


Abb. 130

12. Die Abbildung 129 zeigt den Schnitt durch einen Offenstall für 60 Milchkühe.

a) Berechne die Länge der beiden schrägen Dachkanten!

b) Berechne die Länge der Strebe!

13. Die Punkte A und B (Abb. 130) liegen auf zwei Straßen, die einander rechtwinklig schneiden; sie sollen durch einen Weg verbunden werden. Wegen eines dazwischenliegenden Gehölzes kann die Strecke AB nicht gemessen werden. Man mißt AC zu 550 m und BC zu 380 m. Berechne AB!

14. Um einen quadratischen Dorfplatz wurden von Jungen Pionieren Pappeln im Abstand von 3 m gepflanzt. Der Dorfplatz ist 18225 m² groß.

a) Wie lang ist die Seite des Dorfplatzes?

b) Wieviel DM erhielt die Pioniergruppe für ihre Gruppenkasse, wenn sie je Bäumchen 0,32 DM erhielt?

15. Ein Maisfeld in der Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 200 m und einer Kathete von 120 m erbrachte 900 dz Silomais. Wieviel Silomais wurde je Hektar geerntet?

16. Mit einem 10,50 m langen Höhenförderer wird eine Strohmiete errichtet. Welche Höhe hat die Miete erreicht, wenn noch ein 1,50 m langer Teil des Gerätes über die obere Kante der Miete hinausragt und der Abstand zwischen Gerät und Miete 3,25 m beträgt.

a) Löse die Aufgabe durch eine maßstäbliche Zeichnung!

b) Kontrolliere dein Ergebnis durch Rechnung!

17. Eine der größten landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften in der DDR düngte 1958 eine quadratische Ackerfläche von 350 ha mit dem Flugzeug. Das Flugzeug überflog in einer Stunde bei 6 m Arbeitsbreite 8 ha.

a) Wie oft mußte das Flugzeug wenden?

b) Welche Geschwindigkeit hatte das Flugzeug in der Stunde?

18. Ein Schiff ist von Rügen 8,5 sm (1 sm = 1,852 km) entfernt und will bei geradliniger Fahrt in einem Abstand von 4 sm an der Insel vorbeikommen. Wie groß ist seine Geschwindigkeit, wenn es nach $1\frac{1}{4}$ Std. an Rügen vorbeikommt?

19. Ein Schiff kam nach einer 13stündigen geradlinigen Fahrt in einem Abstand von 4,3 sm an dem Warnemünder Leuchtturm vorbei und hatte stündlich 4,75 sm zurückgelegt. Wie weit war das Schiff ursprünglich vom Warnemünder Leuchtturm entfernt?

20. Ein Schiff war von dem Leuchtturm auf Hiddensee 14,3 sm entfernt und kam bei einer (geradlinigen) Fahrt mit 5,25 Knoten (5,25 Knoten ist die Geschwindigkeit von 5,25 sm in der Stunde) nach 2 Std. 40 Min. an dem Turm vorbei. In welcher Entfernung passierte das Schiff den Turm?

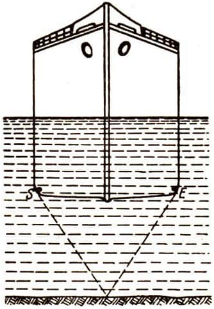


Abb. 131

21. Um Meerestiefen zu messen, wird das Echolot benutzt (Abb. 131). Der Schallerreger befindet sich in S, der Schallempfänger in E. Die Schiffsbreite beträgt $b = 18$ m (15 m). Der Schall pflanzt sich in Meerwasser mit einer Geschwindigkeit von $1510\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ fort. Während der Zeitmessung ruht das Schiff.

a) Berechne die Wassertiefen für die Zeitunterschiede $t = 0{,}05$; $0{,}08$; $0{,}1$ s!

b) Berechne für dieselben Zeitunterschiede die Wassertiefen, wenn die Schiffsbreite vernachlässigt wird! Vergleiche!

X. Berechnen von Rauminhalten

59. Schnitte an einer quadratischen Pyramide

Mit Hilfe eines Kantenmodells wollen wir den Aufbau einer quadratischen Pyramide untersuchen.

1. Wir stellen fest (Abb. 132):

a) Die Höhe der Seitenflächen ist stets größer als die Körperhöhe.

b) Die Höhe der Seitenfläche ist stets kleiner als die Seitenkante.

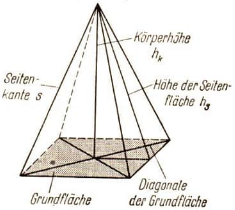


Abb. 132

2. Wir wollen verschiedene Schnitte durch die Pyramide legen.

a) Ein Schnitt parallel zur Grundfläche teilt die Pyramide in zwei Teilkörper: in eine kleinere Pyramide und in einen Pyramidenstumpf (Restkörper), wie es Abbildung 133 zeigt. Die Schnittflächen sind stets Quadrate, die kleiner sind als die Grundfläche. (Wieviel solcher Schnitte kannst du legen?) Grundfläche und Schnittfläche sind Quadrate von unterschiedlicher Größe.

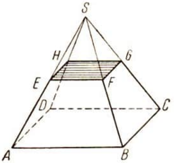


Abb. 133

b) Einen Schnitt durch die Körperhöhe (Achse) und durch eine Parallele zur Grundkante (Parallelschnitt, Abb. 134a). Die Schnittfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck (Abb. 134b). Wieviel solcher Schnitte kannst du vornehmen?

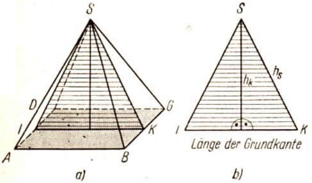


Abb. 134

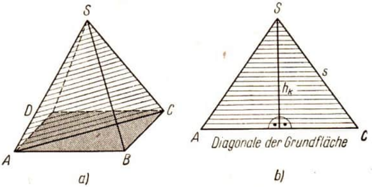


Abb. 135

c) Einen Schnitt durch die Körperhöhe und durch eine Diagonale der Grundfläche (Diagonalschnitt, Abb. 135a). Die Schnittfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck (Abb. 135b). Wieviel solcher Schnitte kannst du vornehmen?

3. Die Schnittfiguren eines **Parallelschnitts** und eines **Diagonalschnitts** durch eine quadratische Pyramide sind **nicht kongruent**. Mit Hilfe dieser Figuren können Strecken an Pyramiden berechnet werden. Die Körperhöhe ist für die beiden Schnittfiguren die Symmetrieachse, die jedes der gleichschenkligen Dreiecke in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

Welchen der drei Schnitte wir zur Berechnung verwenden, hängt von der Aufgabenstellung ab. Es empfiehlt sich deshalb, vor dem Berechnen eine Planfigur zu zeichnen.

60. Berechnen einer Pyramide

1. Volumen

a) Veranschaulichung durch einen Versuch:

Wir stellen ein quadratisches Prisma ohne Deckfläche und eine quadratische Pyramide ohne Grundfläche als Modelle aus Pappe her. Beide Körper

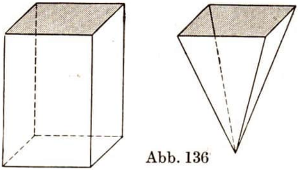


Abb. 136

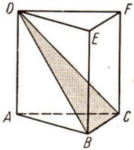


Abb. 137

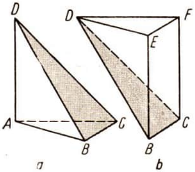


Abb. 138

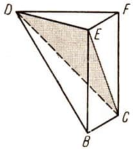


Abb. 139

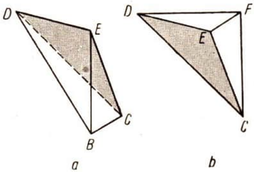


Abb. 140

sollen kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben (Abb. 136). Dann füllen wir trocknen, feinen Sand in die Pyramide. Wir stellen fest, daß der Inhalt der Pyramide etwa dreimal in das Prisma gefüllt werden kann.

b) Wir wollen den Rauminhalt einer Pyramide genauer bestimmen.

Dazu zerlegen wir ein dreiseitiges Prisma durch zwei ebene Schnitte in drei dreiseitige Pyramiden (Abb. 137 bis 140). Durch den Schnitt DBC (Abb. 137) wird das Prisma in eine dreiseitige Pyramide (Spitze D und Grundfläche ABC) und eine vierseitige Pyramide (Spitze D und Grundfläche $BCFE$; Abb. 138) zerlegt. Diese wird durch einen zweiten Schnitt DCE (Abb. 139) in zwei dreiseitige Pyramiden mit der Spitze D und der Grundfläche BCE beziehungsweise CFE zerlegt (Abb. 140). Diese beiden Pyramiden haben die gleiche Grundfläche; denn die Seitenfläche $BCFE$ des Prismas wurde durch den Schnitt in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Beide Pyramiden haben aber auch die gleiche Höhe, die von D auf das Parallelogramm $BCFE$ gefällt wird. Der Anschauung entnehmen wir, daß solche Pyramiden gleichen Rauminhalt haben. Auf einen genauen Nachweis müssen wir hier noch verzichten.

Die Pyramide mit der Grundfläche CFE und der Spitze D kann auch als Pyramide mit der Spitze C und der Grundfläche DEF aufgefaßt werden. Diese Grundfläche ist kongruent der Grundfläche ABC der Pyramide mit der Spitze D (Abb. 138a), weil beide Flächen Grund- bzw. Deckflächen des dreiseitigen Prismas sind. Diese beiden Pyramiden haben auch gleiche Höhen: den Abstand zwischen Grund- und Deckfläche des Prismas. Wir nehmen auch hier aus der Anschauung an, daß die Pyramiden $D(ABC)$ und $C(DEF)$ einander gleich sind.

Daraus folgt, daß das dreiseitige Prisma in drei gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt wurde. Eine Pyramide hat also einen Rauminhalt, der dem dritten Teil des Rauminhaltes eines Prismas gleicht, das die gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Jede mehrseitige Pyramide kann in dreiseitige Pyramiden zerlegt und damit ein entsprechender Nachweis geführt werden.

Wir stellen gegenüber:

Rauminhalt eines Prismas	**Rauminhalt einer Pyramide**
$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$	$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G \cdot h$

(G ist die Grundfläche, h die Höhe des Körpers)

1. Beispiel: Berechne das Gewicht P einer quadratischen Pyramide aus Stahl, deren Grundkante $a = 120$ mm und deren Höhe $h_k = 150$ mm betragen! $\left(\gamma = 7{,}86 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$

Gegeben: $a = 12$ cm; $h_k = 15$ cm; $\gamma = 7{,}86 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.

Gesucht: V (in cm³), P (in p, Umrechnen in kp).

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G\, h \qquad (\textit{G ist ein Quadrat}) \qquad G = a^2,\ G = 144 \text{ cm}^2$$

Einsetzen:

$$V = \frac{144 \cdot 15}{3}$$
$$V = 720 \text{ cm}^3$$

Berechnung des Gewichtes:

$$P = V \cdot \gamma$$
$$P = 720 \cdot 7{,}86$$
$$P = 5659{,}2 \approx 5659$$

Die quadratische Pyramide aus Stahl wiegt 5,659 kp oder rund 5,7 kp.

2. Beispiel: Berechne das Volumen einer quadratischen Pyramide, deren Grundkante $a = 4$ cm und deren Seitenkante $s = 6$ cm betragen!

Gegeben: $a = 4$ cm, $s = 6$ cm. Gesucht: h_k (in cm), V (in cm³).

Zunächst berechnen wir mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras die Körperhöhe (Abb. 141). Wir führen dazu einen Diagonalschnitt aus.

$$h_k^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2$$
$$h_k^2 = s^2 - \frac{a^2}{2}$$
$$h_k^2 = 36 - \frac{16}{2}$$
$$h_k^2 = 28$$
$$h_k = \sqrt{28}$$
$$h_k = 5{,}292 \text{ cm} \approx 5{,}3 \text{ cm}$$

Berechnung des Volumens:

$$V = \tfrac{1}{3}Gh \quad (G \text{ ist ein Quadrat})$$

$$G = a^2$$

$$G = 16\ \text{cm}^2$$

Einsetzen: $V = \frac{16 \cdot 5{,}3}{3}$

$$V = 28{,}2\overline{6}\ldots$$

Das Volumen der quadratischen Pyramide beträgt rund 28,3 cm³.

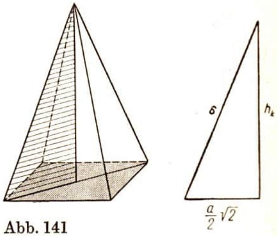


Abb. 141

2. Oberfläche

Die Oberfläche einer Pyramide können wir uns an ihrem Netz veranschaulichen. Sie setzt sich zusammen aus einem Vieleck als Grundfläche und der gleichen Anzahl von Dreiecken als Seitenflächen, wie die Grundfläche Kanten hat. Abbildung 142 zeigt die Oberfläche einer regelmäßigen geraden, sechsseitigen Pyramide an ihrem Netz.

Die Oberfläche der Pyramide berechnen wir, indem wir den Inhalt jeder Begrenzungsfläche bestimmen und die erhaltenen Werte addieren.

Oberfläche$_{\text{Pyramide}}$ = Grundfläche + Summe der Seitenflächen

Die Summe der Seitenflächen wird als **Mantel** der Pyramide bezeichnet, also

$$O_{\text{Pyramide}} = G + M.$$

Beispiel: Ein Turmdach hat die Form einer quadratischen Pyramide ($a = 12$ m, $h_k = 5$ m). Das Dach soll neu gedeckt werden. Für welche Fläche müssen Dachziegel bereitgestellt werden?

Gegeben: $a = 12$ m, $h_k = 5$ m. Gesucht: h_s (in m), M (in m²).

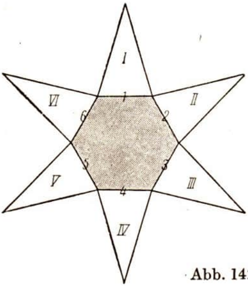


Abb. 142

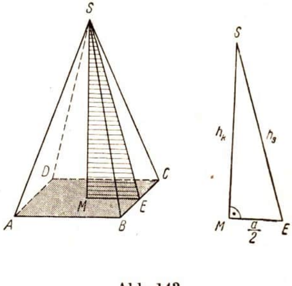


Abb. 143

Um die Seitenflächen berechnen zu können, bestimmen wir h_s mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras.

$$h_s^2 = h_k^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$h_s^2 = 25 + 36$$
$$h_s = \sqrt{61}$$
$$h_s \approx 7{,}81 \text{ m}$$

Die Dachfläche setzt sich aus 4 gleichschenkligen Dreiecken mit der Grundlinie $g = a = 12$ m und der Seitenhöhe $h_s \approx 7{,}81$ m zusammen.

$$M = 4\,\frac{a \cdot h_s}{2}$$
$$M = 2a \cdot h_s$$
$$M \approx 24 \cdot 7{,}81$$
$$M \approx 187{,}44$$

Die Dachziegel müssen für eine Fläche von 187,44 m² bereitgestellt werden.

Aufgaben

1. Berechne Oberfläche und Volumen
   a) einer quadratischen Pyramide (Grundkante 6 cm, Körperhöhe 24 cm);
   b) einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche (Grundkante 12 m beziehungsweise 8 m, Körperhöhe 16 m);
   c) einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide (Grundkante 5 cm, Körperhöhe 3 cm)!

2. Baue als Kantenmodell eine Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck und deren Seitenflächen ebenfalls gleichseitige Dreiecke sind! Einen solchen regelmäßigen Körper nennt man **Tetraeder**. Berechne die Höhe, die Oberfläche und das Volumen eines Tetraeders, dessen Kantenlänge $a = 8$ cm ist!
   Anleitung: Verwende zum Modellbau Holzstäbchen und Knetmasse!

3. Baue als Kantenmodell eine Doppelpyramide! Die Grundfläche ist ein Quadrat und die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke. Dieser Körper heißt **Oktaeder**. Berechne Höhe, Oberfläche und Volumen eines Oktaeders mit der Seitenkante $a = 6$ cm!

4. Ein Quarzkristall besteht aus einem sechsseitigen Prisma (Seitenkante 6,2 cm, Grundkante 1,7 cm) und zwei auf dessen Grundflächen stehenden sechsseitigen Pyramiden (Seitenkante 2,5 cm). Er wiegt 145 p. Wie groß ist die Wichte von Quarz?

5. Manche Salze kristallisieren in der Form von Oktaedern, zum Beispiel Alaun. Wie schwer ist ein Alaunkristall, wenn seine Seitenkante 4,6 cm beträgt $\left(\gamma = 1{,}7 \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}\right)$?

6. Ein Turmdach soll mit Dachziegeln neu gedeckt werden. Die Turmspitze hat die Form einer quadratischen Pyramide; sie ist 14,20 m hoch, die Grundkante mißt 8,60 m. Wie groß sind **a)** eine Seitenkante, **b)** die Höhe einer Dachfläche, **c)** die gesamte Dachfläche? **d)** Wie hoch werden die Kosten, wenn der Preis für 1 m² 7,85 DM beträgt?

7. Ein Laubendach in Form einer quadratischen Pyramide mit 1,80 m langer Grundkante und 1,35 m Seitenhöhe wird mit Dachpappe gedeckt. Wieviel Quadratmeter werden benötigt?

8. Ein Turm wird durch eine regelmäßige sechsseitige Pyramide abgeschlossen. Eine Grundkante mißt 2,50 m, die Höhe der Seitendreiecke beträgt 3,75 m. Der Turm wird mit Zinkblech neu abgedeckt. Wieviel Quadratmeter Zinkblech sind erforderlich, wenn für das Zusammenfügen und für Abfall 5% gerechnet werden müssen?

9. Ein quadratischer Turm von 8,20 m Grundkantenlänge hat als Abschluß eine 11,25 m hohe Pyramide. Berechne die Größe des Dachraumes!

10. Ein Turm, der die Gestalt eines quadratischen Prismas hat, endigt in einer quadratischen Pyramide. Sein Umfang mißt 12 m, die Seitenflächenhöhe des Daches 5,75 m.
    a) Stelle durch eine maßgerechte Zeichnung die Höhe der Turmspitze fest und prüfe das Ergebnis durch Rechnung nach!
    b) Wieviel DM kostet das Decken des Daches, wenn für 1 m² Schieferdach 7,50 DM zu zahlen sind?

11. Ein Zelt, das am Boden 11 m Umfang hat, hat die Gestalt einer quadratischen Pyramide. Seine Höhe beträgt 1,60 m. Berechne den Luftraum, den das Zelt umschließt!

61. Schnitte am geraden Kreiskegel

Die Abbildung 144 verdeutlicht noch einmal den Aufbau des geraden Kreiskegels. Durch den Kegel können wir zwei verschiedene Arten von Schnitten legen.

a) Durch Schnitte parallel zur Grundfläche entstehen stets Kreise, deren Durchmesser kleiner sind als der Durchmesser des Grundkreises (Abb. 145). Ein solcher Schnitt teilt den Kegel in zwei Teilkörper: in

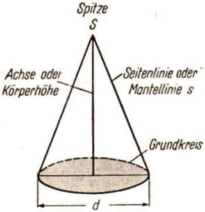


Abb. 144

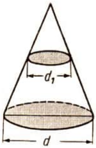


Abb. 145

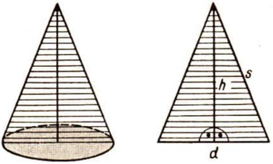


Abb. 146

einen kleineren Kegel und in einen Kegelstumpf. Wieviel solcher Schnitte sind möglich?

b) Nach einem Schnitt durch die Körperhöhe senkrecht zur Grundfläche (Achsenschnitt) entstehen als Schnittflächen stets kongruente, gleichschenklige Dreiecke (Abb. 146). Wieviel solcher Schnitte sind möglich?

Mit Hilfe des Achsenschnitts können wir fehlende Strecken am Kegel berechnen, wobei wir den Lehrsatz des Pythagoras anwenden.

62. Berechnen eines geraden Kreiskegels

1) Volumen

Als wir das Volumen eines Zylinders berechneten, verwendeten wir die gleiche Grundformel wie bei der Volumenberechnung eines Prismas.

Prisma:	$V = G \cdot h;$	G ist ein Vieleck.
Zylinder:	$V = G \cdot h;$	G ist ein Kreis.

a) Entsprechend können wir einen Kegel mit einer Pyramide vergleichen. Auch hier denken wir uns bei der Grundfläche der Pyramide die Seiten des Vielecks immer kleiner und die Anzahl der Eckpunkte immer größer werdend, so daß sich die Fläche des Vielecks einer Kreisfläche immer mehr nähert. Wir berechnen deshalb auch das Volumen des Kegels und das Volumen der Pyramide nach der gleichen Grundformel.

Pyramide:	$V = \frac{1}{3} G \cdot h;$	G ist ein Vieleck.
Kegel:	$V = \frac{1}{3} G \cdot h;$	G ist ein Kreis.

b) Zur Veranschaulichung diene ein Versuch: Wir stellen aus Pappe einen hohlen Kreiszylinder und einen hohlen Kreiskegel mit gleichem Grundkreisdurchmesser und gleicher Höhe her (Abb. 147). Dann füllen wir

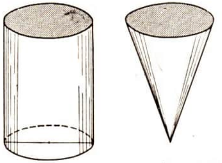


Abb. 147

feinen, trockenen Sand in den Kegel und stellen fest, wie oft der Inhalt des Kegels in den Zylinder gefüllt werden kann.

Wir erkennen, daß 3 Kegel den gleichen Rauminhalt wie ein Zylinder von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben. Folglich umfaßt ein Kegel den dritten Teil dieses Rauminhaltes, wobei die Grundfläche $G = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ und die Körperhöhe h ist.

Beispiel: Berechne das Volumen eines Kreiskegels, dessen Grundkreisradius $r = 6$ cm und dessen Seitenlinie $s = 7{,}5$ cm betragen!

Gegeben: $s = 7{,}5$ cm, $r = 6$ cm, $d = 12$ cm.

Gesucht: h (in cm), V (in cm³).

Die Körperhöhe berechnen wir mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras (Abb. 148).

$$h^2 = s^2 - r^2$$
$$h^2 = 56{,}25 - 36$$
$$h^2 = 20{,}25$$
$$h = \sqrt{20{,}25}$$
$$h \approx 4{,}5 \text{ cm}$$

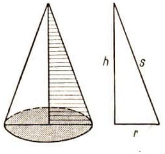


Abb. 148

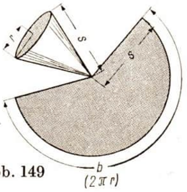


Abb. 149

Nun können wir das Volumen berechnen.

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h \qquad G = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Einsetzen: $V \approx \frac{113{,}10 \cdot 4{,}5}{3}$ $\qquad G = \frac{\pi \cdot 12^2}{4}$

Zahlentafel: $V \approx 169{,}65$ cm³ $\qquad$ *Zahlentafel:* $G \approx 113{,}10$ cm²

Das Volumen des Kreiskegels beträgt rund 169,65 cm³.

2) Oberfläche

Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels setzt sich zusammen aus dem Grundkreis und dem Mantel.

a) Wenn wir den Mantel eines geraden Kreiskegels längs einer Seitenlinie aufschneiden und ihn in eine Ebene abrollen, so entsteht ein Kreisausschnitt (Abb. 149).

Die Seitenlinie s ist der Radius des zugehörigen Kreises, dessen Fläche $F = \pi s^2$ und dessen Umfang $u = 2\pi s$ ist. Der Bogen b ist so groß wie der Umfang des Grundkreises mit dem Radius r; also $b = 2\pi r$.

Wir können die Mantelfläche M berechnen aus der Proportion:

$$M : F_{\text{Kreis}} = b : u_{\text{Kreis}}$$
$$M : \pi s^2 = 2\pi r : 2\pi s$$

$$M \cdot 2\pi s = 2\pi r \cdot \pi s^2$$
$$M = \frac{2\pi r \cdot \pi s^2}{2\pi s}$$
$$M = \pi r s$$

Mantelfläche des geraden Kegels: $M = \pi r s$

b) Die Oberfläche des geraden Kreiskegels berechnen wir aus der Summe der Mantelfläche und der Grundkreisfläche:

$$O = \pi r s + \pi r^2$$
$$O = \pi r(s + r)$$

Oberfläche des geraden Kegels: $O = \pi r(s + r)$

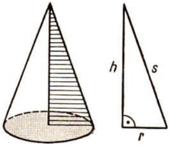


Abb. 150

Beispiel: Ein kegelförmiges Werkstück ($d = 6$ cm, $h = 8$ cm) soll galvanisiert werden. Wie groß ist seine Oberfläche?

Gegeben: $d = 6$ cm, $r = 3$ cm, $h = 8$ cm.
Gesucht: s (in cm), O (in cm²).

Wir berechnen zunächst die Seitenlinie s mit dem Lehrsatz des Pythagoras.

$$s^2 = h^2 + r^2$$
$$s = \sqrt{64 + 9}$$
$$s = \sqrt{73}$$
$$s \approx 8{,}544$$
$$s \approx 8{,}5 \text{ cm}$$

Nun können wir die Oberfläche des Werkstückes berechnen.

$$O = \pi r(s + r)$$
$$O = \pi \cdot 3 \cdot (8{,}5 + 3)$$
$$O = 34{,}5\pi$$
$$O \approx 108{,}38$$

Die Oberfläche des Werkstückes beträgt etwa 108,38 cm².

Aufgaben

1. Berechne Oberfläche und Volumen eines geraden Kegels!
a) $r = 4$ cm, $h = 6$ cm **b)** $d = 1{,}6$ dm, $h = 2$ dm

2. Berechne Mantel und Volumen eines geraden Kegels!
a) $d = 10$ cm, $h = 40$ cm **b)** $r = 40$ mm, $h = 9$ cm

3. Berechne Mantel, Oberfläche und Volumen eines geraden Kegels, der 2,50 m hoch ist und einen Grundkreisradius von 1,80 m hat!

4. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b wird um die Kathete a gedreht. Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt des entstehenden Kegels?

a) $a = 8$ cm; $b = 6$ cm b) $a = 24$ cm; $b = 7$ cm
c) $a = 15$ cm; $b = 8$ cm d) $a = 40$ cm; $b = 9$ cm

5. Im Werkunterricht soll aus Blech das Modell eines Kegels ($r = 9$ cm, $s = 15$ cm) für die Lehrmittelsammlung hergestellt werden. Wieviel Material brauchst du, wenn 10% für Verschnitt gerechnet werden müssen?

6. Berechne das Volumen der folgenden Trichter (ohne Ansatzrohr)!

d	22 cm	24 cm	27 cm
h	26,5 cm	27,5 cm	29 cm

7. Aus Blechscheiben mit dem Durchmesser von 5 cm sollen Trichter hergestellt werden, und zwar sollen Kreisausschnitte mit den Zentriwinkeln 90°, 180° und 270° zu Trichtern gebogen werden. Wie hoch werden die verschiedenen Trichter und wie groß wird ihr Volumen? Stelle das Ergebnis übersichtlich zusammen!

8. Bei der Arbeit mit dem Förderband bilden sich Abraumkegel. Berechne die Volumina folgender Kegel:

	feiner Sand	grober Sand	grober Kies	Gesteinsbrocken
d	9 m	10 m	12 m	16 m
h	1,5 m	2,5 m	4 m	8 m

9. Ein kegelförmiger Haufen Sand soll durch Lastwagen abgefahren werden. Der Umfang des Kegels wird durch Abschreiten auf 22 m geschätzt, die Höhe auf etwa 2 m. Wieviel Fuhren ergeben sich bei der Verwendung von 3-Tonnern? $\left(\text{Berechnungsgewicht: } 1800\ \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}\right)$

10. Ein rundes Spitzzelt hat einen Durchmesser von 4 m und ist 5 m hoch. Wie groß ist die Bodenfläche? Berechne den Rauminhalt! Seine Seitenlinie mißt 5,39 m. Wieviel Zeltplanenstoff wurde für das Zelt gebraucht?

11. Auf einem zylindrischen Turm mit 11 m Umfang ist ein 6 m hohes kegelförmiges Dach gesetzt und mit Blech beschlagen worden. Für 1 m² werden einschließlich Arbeitslohn 5,60 DM berechnet. Wie teuer wurde das Dach?

12. Ein kegelförmig aufgeschütteter Sandhaufen ist 2,10 m hoch und hat am Boden einen Umfang von 24,84 m. Wieviel Kubikmeter Sand enthält er und wie groß ist sein Gewicht, wenn 1 m^3 trockener Sand 1 800 kp wiegt?

63. Kugelschnitte

1) Wir wissen bereits, daß die Kugel von einer Fläche begrenzt wird, die nach allen Richtungen gleichmäßig gekrümmt ist. Die Kugelfläche läßt sich demnach nicht auf einer ebenen Fläche ausbreiten, im Gegensatz zu Kegel und Zylinder. Während sich auf den zuletzt genannten Körpern Geraden in einer bestimmten Richtung ziehen lassen, können auf einer Kugel in keiner Richtung Geraden gezeichnet werden. Wir sprechen deshalb von den Mantelflächen des Kegels und Zylinders als von einseitig gekrümmten Flächen, die man auch in einer Ebene ausbreiten kann. Die Kugeloberfläche nennen wir eine doppelt gekrümmte Fläche, die nicht in einer Ebene ausgebreitet werden kann. (Darum bietet der Globus eine genauere Darstellung der Erdoberfläche als die Landkarte). Die Eigenschaften der Kugel, daß sie nach allen Richtungen rollen kann und daß ihre Reibung gering ist, nutzt die Technik aus, z. B. in Kugellagern oder Kugelgelenken.

2) Durch die Kugel können wir zwei verschiedene Arten von Schnitten legen.

a) Legen wir Schnitte durch Durchmesser der Kugel, so sind die Schnittflächen stets kongruente Kreise, deren Durchmesser gleichzeitig der Durchmesser der Kugel ist (Abb. 151). Die Schnittlinien auf der Kugeloberfläche nennen wir **Großkreise**. Wieviel solcher Schnitte kannst du durch die Kugel legen?

b) Schnitte senkrecht zu einem Durchmesser der Kugel bilden Schnittflächen, die stets Kreise mit verschieden großen Durchmessern sind. Dabei ist die Schnittfläche die größte, die durch den Mittelpunkt der Kugel gelegt ist (Abb. 152). Die Schnittlinien auf der Kugeloberfläche sind Kreislinien von verschiedener Größe. (Auf der Erde nennt man sie Breitenkreise.) Wieviel solcher Schnitte kannst du durch die Kugel legen?

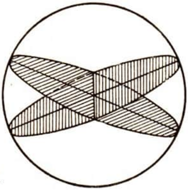


Abb. 151

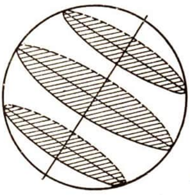


Abb. 152

64. Berechnen einer Kugel

1) Volumen

Wenn wir eine Glasmurmel, einen Fußball und einen Globus miteinander vergleichen, so erkennen wir, daß die Größe der Kugel abhängig ist von der Größe des Durchmessers. Rauminhalt und Oberfläche einer Kugel sind nur von der Größe des Kugelradius abhängig.

Wir werden uns jetzt die Berechnung durch einen Versuch veranschaulichen.

Wir stellen uns 3 Körper (Zylinder, Kegel, Halbkugel) her, die alle denselben Grundkreis mit dem Radius r haben und deren Höhe ebenfalls gleich r ist (Abb. 153). Füllt man in die Halbkugel und in den Kegel feinen, trockenen Sand und entleert beide in den Zylinder, so wird der Zylinder gerade voll ausgefüllt. Unser Versuch hat gezeigt, daß das Volumen der Halbkugel gleich der Differenz aus dem Volumen des Zylinders und dem Volumen des Kegels ist:

Abb. 153

$$\underline{V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} = V_{\text{Halbkugel}}}$$

$$G \cdot h - \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{2}{3} G \cdot h \text{ (} G \text{ ist der Grundkreis, } h \text{ ist der Radius)}$$

$$= \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot r$$

$$= \frac{2}{3} \pi r^3$$

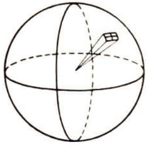


Abb. 154

Das Volumen der Kugel ist doppelt so groß.

Der Rauminhalt einer Kugel mit dem Radius r beträgt

$$\boldsymbol{V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi d^3}$$

(Führe die Umrechnung selbst durch, indem du für $r = \frac{d}{2}$ einsetzt!)

Den genauen Beweis dafür können wir erst später führen.

2) Oberfläche

Wollen wir die Berechnung der Kugeloberfläche durchführen, so denken wir uns einen regelmäßigen Körper mit n ebenen Flächen der Kugel einbeschrieben. Verbindet man die Eckpunkte dieser Flächen mit dem Mittelpunkt der Kugel, so entstehen n Pyramiden mit den Grundflächen G_1, G_2, G_3, …, G_n und den Höhen h_1, h_2, h_3, …, h_n.

Der Rauminhalt einer Pyramide beträgt $V = \frac{1}{3} G \cdot h$.

Der Rauminhalt aller Pyramiden, also des der Kugel einbeschriebenen regelmäßigen Körpers, beträgt

$$V = \frac{1}{3}(G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots + G_n h_n).$$

Je größer n wird, um so mehr nähern sich die Höhen dem Werte r:

$$V = \frac{1}{3} r (G_1 + G_2 + \cdots + G_n).$$

Die Grundflächen der Pyramiden werden aber immer kleiner und die Summe der Grundflächen nähert sich der Oberfläche O der Kugel:

$$V = \frac{r}{3} \cdot O$$

Ersetzen wir V durch den Wert $\frac{4}{3}\pi r^3$ und vertauschen wir die Seiten, so erhalten wir

$$\frac{r}{3} O = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Big| \cdot \frac{3}{r}$$

$$O = \frac{4\pi r^3 \cdot 3}{3 \cdot r}$$

Daraus folgt:

Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r beträgt

$$\boldsymbol{O_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2 = \pi d^2}$$

Beispiel: Berechne das Volumen und die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser 40 cm beträgt!

Gegeben: $d = 40$ cm $= 4$ dm. Gesucht: V (in dm³), O (in dm²).

Wir berechnen das Volumen:

$$V = \frac{\pi}{6} d^3$$

$$V = \frac{\pi}{6} 4^3$$

Zahlentafel: $V \approx 33{,}510$

Das Volumen der Kugel beträgt rund 33,5 dm³.

Wir berechnen die Kugeloberfläche:

$$O = \pi d^2$$

$$O = \pi 4^2$$

Zahlentafel: $O \approx 50{,}265$

Die Oberfläche der Kugel beträgt rund 50,3 dm².

Aufgaben

1. Eine Kugel hat den Radius **a)** $r = 15{,}4$ cm, **b)** $r = 32{,}5$ cm. Wie groß ist ihre Oberfläche?

2. Berechne Oberfläche und Volumen der folgenden Kugeln!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
d	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m

Stelle die Lösungen übersichtlich zusammen und sprich das Ergebnis in einem Satz aus!

3. Eine Kugel hat die Oberfläche **a)** $O = 616$ cm², **b)** $O = 55{,}44$ cm². Wie groß ist ihr Rauminhalt? (Für π benutze den Näherungswert $\frac{22}{7}$!)

4. Wie groß ist die Oberfläche und welches Gewicht besitzt eine Kugel aus

	Wichte	Halbmesser
a) Buchsbaumholz	$1{,}15 \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$	40 cm,
b) Sandstein	$2{,}33 \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$	9 cm,
c) Messing	$8{,}40 \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$	6 cm,
d) Elfenbein	$1{,}92 \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$	5 cm ?

5. Der Umfang einer Kugel ist 157 cm. Wie groß ist **a)** ihr Durchmesser, **b)** ihre Oberfläche, **c)** ihr Rauminhalt?

6. Aus einem Holzwürfel mit der Kante $a = 28$ cm wird eine Kugel so gedreht, daß der Abfall möglichst gering wird. Wieviel Kubikzentimeter beträgt der Abfall?

7. Ein gefüllter Ballon hat einen Radius $r = 2{,}1$ m. Wieviel Kubikmeter Raum schließt er ein?

8. Aus einem Marmorwürfel von 60 cm Kantenlänge soll eine möglichst große Kugel ausgehauen werden. Wieviel beträgt der Abfall? Wie schwer ist die fertige Kugel? (Entnimm die Wichte einer Tabelle!)

9. a) Wieviel Kugeln mit dem Durchmesser $d = 3$ cm können aus einem Bleirohr von 1,8 m Länge, 3 cm Wandstärke und 9 cm innerem Durchmesser hergestellt werden, wenn beim Schmelzen 4% verlorengehen?

b) Wie schwer ist jede Kugel, wenn die Wichte des Bleis $11{,}35 \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$ ist?

10. Wieviel Kugeln von 10 mm Durchmesser kann man aus 5 kg Blei gießen?

11. Wieviel wiegt eine eiserne Hohlkugel, die einen äußeren Durchmesser von 15 cm und eine Wandstärke von 1 cm hat? (Entwirf eine Skizze!)

12. Eine zum Kugelstoßen verwendete Kugel wiegt 7,25 kp und hat einen Umfang von 391 mm, wenn sie aus Stahl besteht. Enthält sie eine Bleifüllung, so beträgt der Umfang 346 mm. Der Stahlmantel dieser Kugel ist rund 7 mm dick. Die Wichte des Bleis beträgt $11{,}35 \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$.

a) Berechne den Durchmesser der Stahlkugel und die Wichte des Stahls!

b) Berechne den Durchmesser der Kugel mit Bleifüllung!

c) Berechne das Gewicht des Stahlmantels und der Bleifüllung dieser Kugel!

13. Ein Schlagball hat ein Gewicht von 90 p und einen Umfang von 22 cm. Berechne den Durchmesser und die Wichte des Balles!

14. Kannst du eine Korkkugel tragen, die einen Durchmesser von 1 m hat $\left(\gamma = 0{,}24 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$?

15. Ein kugelförmiger Turmkopf von 60 cm Durchmesser soll neu vergoldet werden. Wieviel Quadratmeter Fläche müssen bearbeitet werden?

16. Wieviel Kubikmeter enthält das 0,5 m starke Mauerwerk einer halbkugelförmigen Kuppel (innerer Durchmesser 12 m)?

17. Ein eiserner Wasserbehälter besteht aus einem Zylinder, der unten durch eine Halbkugel abgeschlossen ist. Der zylindrische Teil des Behälters ist 1,8 m hoch, sein Grundkreis hat 2 m Durchmesser (lichte Weite).

a) Wieviel Hektoliter Wasser faßt dieser Behälter?

b) Wie groß ist die Benetzungsfläche des Behälters?

18. **a)** Wieviel Milliliter (ml) Wasser faßt eine halbkugelförmige Schöpfkelle von 9 cm Durchmesser?

b) Wieviel Liter Wasser faßt ein halbkugelförmiger Waschkessel von 90 cm Durchmesser?

c) Vergleiche die gefundenen Werte!

19. Die Lunge des Menschen besteht aus rund 1,6 Milliarden Bläschen. Jedes hat einen Durchmesser von rund 0,2 mm. **a)** Berechne die Oberfläche 1. eines Bläschens, 2. aller Bläschen! **b)** Vergleiche die Gesamtoberfläche mit einer dir bekannten Fläche!

20. Der Radius der Erde wird mit 6370 km angegeben. Berechne unter der Voraussetzung, daß die Erde eine Kugel ist, **a)** den Umfang eines Längenkreises der Erdkugel, **b)** ihre Oberfläche, **c)** ihren Rauminhalt!

21. Vergleiche Oberfläche und Rauminhalt des Mondes mit den bei der Erde berechneten Größen, wenn sein Durchmesser mit 3476 km bestimmt wurde!

22. Der Radius der Sonne beträgt 695400 km.

a) Bestimme ihren Rauminhalt!

b) Wieviel Erdkugeln könnte man in diesem Raum unterbringen?

23. Ein großer Schulglobus hat einen Durchmesser von 84 cm. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Oberflächen, **b)** die Inhalte von Globus und Erdkugel zueinander?

24. Bei einem im Maßstab 1 : 100 gehaltenen Modell eines Planetariums hat der Grundkreis der halbkugelförmigen Kuppel den Umfang $u = 39$ cm. Berechne den wirklichen Durchmesser der Kuppel!

65. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Die größte der Pyramiden bei Giseh (Ägypten) ist die Cheopspyramide. Ihre Grundfläche war nach der Vollendung ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 233 m; ihre Höhe betrug 146 m.

a) Welche Fläche bedeckte die Pyramide?

b) Berechne die Größe einer Seitenfläche sowie die des Mantels!

c) Die Seitenflächen sind mit polierten Marmorplatten abgedeckt. Um einen Quadratmeter Marmor zu polieren, werden 6 Arbeitsstunden benötigt. Wieviel Mann würden gebraucht, um alle Platten in 1 Jahr (bei 300 Arbeitstagen zu je 8 Std.) zu polieren?

d) Berechne das Volumen der Pyramide!

e) Über viertausend Jahre war die Pyramide der Witterung ausgesetzt, so daß sie jetzt noch eine Seitenlänge von 227 m und eine Höhe von 137 m hat. Wie groß ist ihr Volumen jetzt?

f) Um wieviel Prozent ist die Pyramide durch die Verwitterung kleiner geworden?

2. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Rauminhalte, **b)** die Mäntel, **c)** die Oberflächen eines Zylinders, einer Halbkugel und eines Kegels von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche?

3. Wie groß ist die Diagonale **a)** eines Rechtecks von 58,3 m Länge und 36,4 m Breite, **b)** eines Quadrates von 17,5 m Seitenlänge?

4. Ein Bleiwürfel von 5 cm Kantenlänge soll in eine regelmäßige vierseitige Pyramide von 8 cm Höhe umgegossen werden. Berechne die Grundkante a!

5. Der Durchmesser eines Freiballons beträgt 22 m.

a) Wieviel Quadratmeter Stoff braucht man zu seiner Hülle?

b) Wieviel Kubikmeter Raum schließt er in gefülltem Zustand ein?

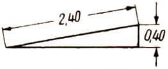


Abb. 155

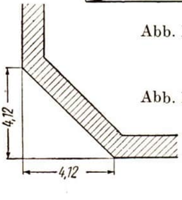


Abb. 156

6. Auf dem Güterbahnhof soll eine neue Laderampe errichtet werden (Abb. 155). Wie lang ist der Rampenfuß?

7. Beim Wiederaufbau eines Eckhauses soll die Hauptecke abgeschrägt werden, weil das Haus an einer verkehrsreichen Straßenkreuzung liegt.

Bestimme die Länge der Schräge! Entnimm die Zahlenwerte der Abbildung 156!

8. Ein 6,5 m hoher Mast soll durch einen Balken abgestützt werden, der 2 m von seinem Fußpunkt entfernt verankert werden soll. Wie lang ist der Balken, wenn er 1,50 m unter der Spitze des Mastes befestigt wird?

9. Eine kegelförmige Abraumhalde hat bei einem Böschungswinkel von 45° eine Höhe von 23 m. Berechne die Abraummenge!

10. Ein Antennenmast soll in 15 m Höhe durch 4 gleich lange Drahtseile verankert werden. Die Anker, die sich in einer Entfernung von 7 m vom Mast befinden, bilden ein Quadrat. Wie lang ist ein Drahtseil, wenn der Durchhang nicht berücksichtigt wird?

11. Ein Werkstück soll vernietet werden (Abb. 157). Berechne den Diagonalabstand f der Niete im Mittelpunkt für $t = 500$ mm!

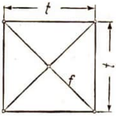


Abb. 157

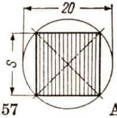


Abb. 158

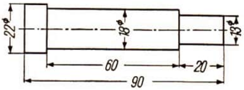


Abb. 159

12. Ein zylinderförmiger Schwimmer von 88 cm Länge und 18 cm Durchmesser ist an beiden Enden halbkugelförmig abgeschlossen. Wie groß ist die Oberfläche des Schwimmers und welches Volumen schließt er ein?

13. An ein Stück Rundstahl von 70 mm Durchmesser ist eine 150 mm lange Spitze angeschmiedet. Die Gesamtlänge des Werkstücks beträgt 170 mm.

a) Berechne das Gewicht $\left(\gamma = 7{,}85 \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ des Werkstücks!

b) Da das Werkstück galvanisiert werden soll, ist die Oberfläche zu berechnen.

14. An eine Spindel mit dem Durchmesser $d = 20$ mm ist der größtmögliche Vierkant in einer Länge von 15 mm anzufräsen (Abb. 158). Wie groß ist der Abfall?

15. Für die Kugellager einer Serie feinmechanischer Geräte werden 2000 Stahlkugeln von 1,0 mm Durchmesser benötigt. Welches Gewicht haben die Stahlkugeln? (Entnimm die Wichte einer Tabelle!)

16. Berechne Rauminhalt und Werkstoffmenge eines Bolzens aus Stahl! Entnimm die Maße der Abbildung 159!

17. In welchem Verhältnis stehen Oberfläche und Rauminhalt zweier Würfel, deren Kanten 5 cm und 15 cm lang sind? Stelle das Ergebnis übersichtlich zusammen und sprich es in einem Satz aus!

18. An ein Stück Quadratstahl (50 mm × 50 mm) wird eine pyramidenförmige Spitze von 92 mm Höhe angeschweißt. Wieviel wiegt das Werkstück bei einer Gesamtlänge von 180 mm Länge? (Entnimm die Wichte einer Tabelle!)

19. Eine zylinderförmige Litfaßsäule hat einen Umfang von 2,60 m. Der Sockel besteht aus einer 50 cm hohen Ziegelschicht, auf der die eigentliche Anschlagsäule (2 m hohes Eisenblech) montiert ist. Die Säule wird durch ein kegelförmiges Dach (Höhe 40 cm) abgeschlossen.

a) Zeichne die Säule im Zweitafelverfahren (Grundriß und Aufriß) im Maßstab 1 : 25!

b) Welche Fläche steht für die Anschläge zur Verfügung?

c) Das Dach erhält einen Anstrich mit Ölfarbe. Wie groß ist die Dachfläche?

d) Welches Volumen hat die gesamte Säule?

20. Ein Briefbeschwerer aus Stahl in Form einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide ist 9 cm hoch. Seine Grundkante mißt 6 cm. Berechne das Volumen und das Gewicht! (Entnimm die Wichte einer Tabelle!)

21. Ein Stück Rundstahl wird zum Teil kegelförmig abgedreht. Wieviel Prozent beträgt der Abfall? Entnimm die Maße der Abbildung 160!

22. In einem Getreidesilo ist Weizen annähernd kegelförmig aufgeschichtet. Der Durchmesser der Anhäufung beträgt etwa 5 m, seine Höhe etwa 2 m.

a) Wieviel Kubikmeter Weizen liegen ungefähr in der Anhäufung?

b) Wieviel Doppelzentner Weizen sind das? (1 dz $\triangleq$ 0,14 m³.)

23. Berechne das Gewicht des Spitzsenkers mit Zylinderschaft aus Schnellstahl $\left(\gamma = 8{,}1\ \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$! Entnimm die Maße der Abbildung 161!

24. Aus Blech soll ein Trichter von 15 cm Durchmesser (ohne Ansatzrohr) angefertigt werden, der ein Volumen von 2 dm³ besitzt.

a) Wie groß ist die Mantellinie?

b) Wieviel Quadratzentimeter Blech sind erforderlich?

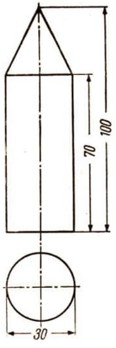


Abb. 160

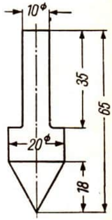


Abb. 161

25. Ein Torpfeiler aus Sandstein hat die Gestalt eines quadratischen Prismas von 40 cm Seitenlänge und 1,50 m Höhe. Ihm ist eine 15 cm hohe Pyramide aufgesetzt.

a) Zeichne den Pfeiler im Zweitafelverfahren (Grundriß und Aufriß) im Maßstab 1 : 25!

b) Berechne sein Gewicht $\left(\gamma = 2{,}2\,\frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}\right)$!

26. Berechne das Gewicht des Führungsprismas aus Stahlguß! (Entnimm die Maße der Abbildung 162 und die Wichte der Tabelle in den Zahlentafeln!)

27. Ein Senkblei besteht aus einem Zylinder von der Höhe $h = 140$ mm und dem Durchmesser $d = 50$ mm und aus einem aufgesetzten Kegel, dessen Höhe $h_1 = 30$ mm beträgt. Berechne das Gewicht des Körpers! (Entnimm die Wichte einer Tabelle!)

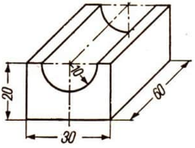


Abb. 162

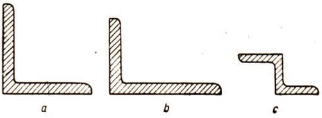


Abb. 163

28. Berechne die Gewichtsdifferenz zwischen 1000 Stahlkugeln, deren Durchmesser 1 mm beträgt, und einem Stahlwürfel mit der Kantenlänge von 10 mm $\left(\gamma = 7{,}85\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$!

29. Abbildung 163 zeigt die Querschnitte von gleichschenkligem Winkelstahl (a), ungleichschenkligem Winkelstahl (b) und Doppelwinkelstahl (c). Die Fläche des Querschnitts ist bei (a) 26,2 cm²; bei (b) 33,2 cm²; bei (c) 14,5 cm². Wie schwer ist ein solcher Profilstahl von 4 m Länge, wenn 1 cm³ Stahl 7,85 p wiegt?

30. Ein Schiffshebewerk hat einen Trog mit einer Breite von 12,50 m, einer Länge von 85 m. Seine Wassertiefe beträgt 2,50 m.

a) Wieviel Wasser faßt der Trog?

b) Das Gewicht des leeren Troges und der Stahlträger, auf denen er ruht, ist ebenso groß wie das Gewicht seiner Wasserfüllung. Welche Last wird bei jedem Aufstieg des Troges gehoben?

31. Der Trog eines Schiffshebewerkes hat eine Länge von 85 m, eine Breite von 12 m, eine Wassertiefe von 2,50 m.

a) Welchen Raum nimmt die Wassermenge ein; wie schwer ist sie?

b) Die gesamte Eisenkonstruktion des Troges wiegt 1600 t. Wie schwer ist der mit Wasser gefüllte Trog?

32. Ein Badeofen in Form eines Zylinders, der 222 l faßt, hat einen Durchmesser von 50 cm. Das im Innern befindliche Rauchrohr hat einen Durchmesser von 12 cm. Wie hoch ist der Badeofen, und wieviel Blech war zu seiner Herstellung nötig, wenn für den Falz 5% gerechnet wurden? (Entwirf eine Skizze!)

33. Ein Wagenrad von 8 cm Breite erhält einen Reifen aus Flachstahl $\left(\gamma = 7{,}85\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}\right)$, wodurch der Durchmesser von 30 auf 32 cm vergrößert wird. Berechne die durch den Reifen entstandene Gewichtszunahme!

34. Das Gewicht einer Kreisscheibe (Durchmesser $d = 200$ mm) soll durch Ausbohren von vier kreisförmigen Löchern um $\frac{1}{4}$ verringert werden. Berechne den Durchmesser der Löcher!

35. Der Mantel eines 16 m hohen und 24 m weiten (äußere Weite!) Gasbehälters wird mit Mennige grundiert und dann dreimal mit Ölfarbe gestrichen. 1 m² wird mit 3,80 DM berechnet. Bestimme die Kosten für den Anstrich!

36. Ein Wasserleitungsrohr aus Grauguß ist 5,25 m lang und besitzt einen Umfang von 2,20 m. Es wiegt 1220 kp. Die Wichte von Grauguß beträgt 7,25 $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$. Wie dick ist die Wand des Rohres?

37. Wieviel Kilopond Kupfer sind zur Herstellung eines 8500 km langen Leitungsdrahtes erforderlich, wenn er einen Durchmesser von 1 mm (1,2 mm; 0,8 mm) besitzen soll und die Wichte des Kupfers 8,9 $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$ ist?

38. Für das Gehäuse einer kleinen Gleichstromdynamomaschine benötigt man ein Stahlrohrstück von 102/87 mm Durchmesser und 80 mm Länge. Berechne das Gewicht des Rohrstückes $\left(\gamma = 7{,}85\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}\right)$!

39. Bei den verschiedenen Brennkraft-Kolbenmaschinen gibt es Erfahrungswerte für das Verhältnis $K = \frac{\text{Hubraum}}{\text{Zylinderdurchmesser}}$. Berechne den Hubraum für Zylinderdurchmesser von 4 (5; 7; 9,5) cm nach der Tafel!

Motorart	K
Dieselmotoren	1,30 bis 1,70
Ottomotoren	1,10 bis 1,45

40. Ein Grünfuttersilo ist ein zylinderförmiger Behälter, der zum Einsäuern von Viehfutter dient. Er ist $h = 13{,}5$ m hoch und hat eine innere, „lichte" Weite von 6 m. Wieviel Kubikmeter vermag er zu fassen (Abb. 164)?

41. Das Walmdach eines Hauses von $a = 25$ m Breite und $b = 14$ m Tiefe ist unter dem Neigungswinkel $\alpha = 60°$ gegen alle Seiten aufgesetzt.

a) Stelle durch eine maßstäbliche Zeichnung die Höhe des Daches fest!

b) Zerlege den Dachraum durch zwei Ebenen, die senkrecht zum Dachfirst durch dessen Endpunkte gelegt werden, in Körper mit bekannten Inhaltsformeln und berechne den Rauminhalt des Daches!

c) Zeichne den Grundriß und Aufriß des Walmdaches in geeignetem Maßstab!

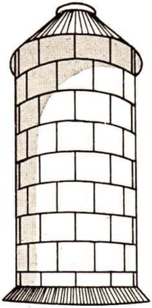


Abb. 164

42. Ein Walmdach hat die in Abbildung 165 angegebenen Maße in Metern.

a) Zerlege mit Hilfe von zwei geeigneten Schnittebenen den Dachraum in Körper, für die Formeln bekannt sind, und berechne den Rauminhalt des Daches!

b) Zeichne den Grundriß und Aufriß des Walmdaches und bestimme daraus die Höhen der Dachflächen!

c) Berechne die Flächenhöhen und vergleiche die Ergebnisse mit den durch die Zeichnung gefundenen Werten!

d) Berechne, wie groß die mit Ziegeln zu deckenden Dachflächen sind!

43. Ein Topf aus Weißblech hat unten 13 cm, oben 8 cm lichte Weite. Seine innen gemessene räumliche Höhe ist 12,5 cm.

a) Zeichne den Topf in Grund- und Aufriß! Ergänze die Aufrißzeichnung zu einem gleichschenkligen Dreieck und miß die Verlängerung der Höhe aus! Sie ist die Höhe des „Ergänzungskegels".

b) Berechne mit Hilfe der Höhe des Ergänzungskegels den Rauminhalt des Topfes!

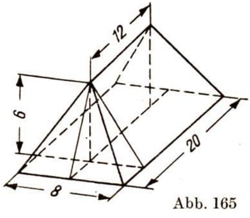


Abb. 165

10

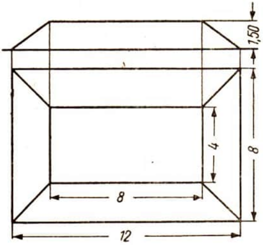


Abb. 166

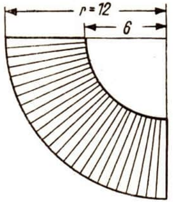


Abb. 167

44. Zerlege den in Abbildung 166 in Grund- und Aufriß dargestellten Sandhaufen durch geeignete Schnittebenen in solche Raumteile, deren Inhaltsformeln bekannt sind, und berechne, wieviel Kubikmeter Sand in ihm lagern!

45. Der in Abbildung 167 dargestellte Viertelkreisring läßt sich zum Mantel eines Kegelstumpfes formen und ist der Zuschnitt zum Mantel eines Bechers.

a) Berechne die Durchmesser seines Grund- und seines Deckkreises!

b) Zeichne mit Hilfe der berechneten Durchmesser den Achsenschnitt des Kegelstumpfes und miß seine Höhe aus!

c) Berechne diese Höhe mit Hilfe der Durchmesser!

46. Eine freitragende steinerne Treppe besteht aus mehreren Stufen, deren unterste als „Antritt" einen rechteckigen Querschnitt hat, während die anderen Stufen ein rechtwinkliges Dreieck zum Querschnitt haben (Abb. 168). Der waagerechte Teil der Stufe heißt „Auftritt" b, der senkrechte Teil heißt „Steigung" h. Das günstigste Steigungsverhältnis wird allgemein aus der Erfahrungsformel $2h + b = 62$ cm berechnet.

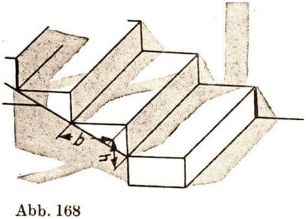


Abb. 168

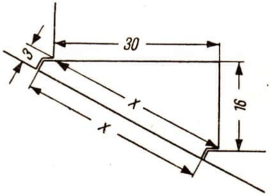


Abb. 169

a) Berechne die Steigung h der Treppe für einen 30 cm breiten Auftritt! Wieviel Stufen sind nötig, wenn die Treppe 1,44 m hoch führen soll, und welche waagerechte Weite benötigt man für diese Treppe?

b) Zeichne die Seitenansicht der Treppe, wenn eine einfache Lagerung der Stufen angenommen wird, bei der die Stufen mit den Kanten aneinanderstoßen, und entnimm der Zeichnung den Anstiegswinkel!

c) Die wirkliche Lagerung ist aus Abbildung 169 zu ersehen. Berechne die Länge der Strecke x und den Flächeninhalt des Querschnitts der Steinstufe sowie deren Gewicht, wenn die Treppe 1 m breit und die Wichte des Steines 2,1 $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$ ist!

XI. Darstellende Geometrie

66. Die wahre Größe einer Strecke

1) Aus einer technischen Zeichnung muß man alle Abmessungen des dargestellten Gegenstandes unmittelbar ablesen oder mit dem Stechzirkel abgreifen können. Die Gegenstände werden deshalb je nach Form, Gestalt und Abbildungsweise in zwei oder drei Rissen dargestellt (Grund- und Aufriß; Grund-, Auf- und Kreuzriß). Wir erkannten bereits, daß es zweckmäßig ist, die Gegenstände in Parallelstellung zu den Bildtafeln anzuordnen. Möglichst viele Strecken und Flächen sollen parallel zur einen oder anderen Bildtafel liegen. Befinden sich Strecken bzw. Flächen in einer parallelen Lage zu einer Rißtafel, so werden sie auf dieser in wahrer Länge bzw. deckungsgleich abgebildet.

Bei Prismen und bei Gegenständen, die aus diesen Körpern zusammengesetzt sind, kann man bei Parallelstellung im Grundriß oder im Aufriß die wahre Länge aller Kanten herauslesen. Bei einer quadratischen Pyramide werden jedoch in Parallelstellung (Abb. 170) nur die Kanten an der Grundfläche (in Abb. 170 die Kanten AB, BC, CD, DA) in wahrer Größe abgebildet, nicht aber die zur Spitze führenden Kanten (in Abb. 170 die Kanten AS, BS, CS, DS). Diese Kanten sind sowohl gegen die Grundrißtafel als auch gegen die Aufrißtafel geneigt und werden darum in beiden Rissen verkürzt abgebildet.

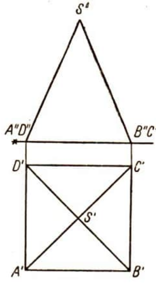


Abb. 170

2) Wir wollen nun zeichnerisch die wahre Größe der Seitenkanten der Pyramide ermitteln. Es genügt eine dieser Kanten (z. B. AS) in wahrer Größe abzubilden, da bei der geraden quadratischen Pyramide alle vier zur Spitze führenden Kanten gleich lang sind. Die Kante AS kann man durch Drehung oder durch Umklappung in eine parallele Lage zu einer der beiden Rißtafeln bringen.

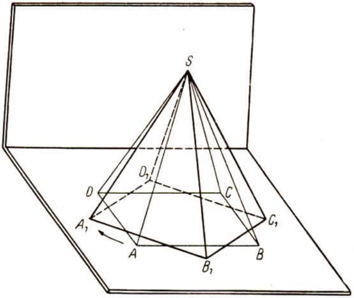


Abb. 171

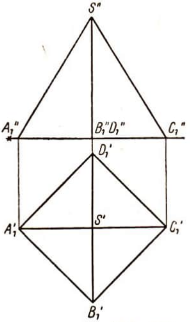


Abb. 172

a) Drehung

Die Pyramide wird auf der Grundrißtafel so weit gedreht, bis die Kante, die in wahrer Größe abgebildet werden soll, parallel zur Aufrißtafel liegt (Abb. 171). Dies ist daran zu erkennen, daß der Grundriß dieser Kante parallel zur Rißachse liegt (Abb. 172). Man zeichnet also zunächst den Grundriß in gedrehter Lage (im gewählten Beispiel ist eine Drehung um 45° im Uhrzeigersinn erforderlich) und bestimmt den zugeordneten Aufriß. In diesem Aufriß wird die Kante (in Abb. 172 die Kante AS) in wahrer Größe abgebildet.

Es ist jedoch nicht notwendig, den ganzen Körper zu drehen. Es genügt, wenn die in wahrer Größe abzubildende Kante allein in eine zu einer Bildtafel parallele Lage gebracht wird. Nehmen wir an, die gerade quadratische Pyramide (Abb. 171) wird um ihre Achse gedreht. Dann beschreibt der Punkt A einen Kreisbogen auf der Grundrißtafel, und zwar einen Bogen von 45° im Uhrzeigersinn. In der Abbildung 173 ist dies im Grundriß dargestellt; der Punkt A' bewegt sich auf einem Kreisbogen in seine neue Lage A_1'. Der andere Endpunkt der Kante AS, die Spitze S, ändert seine Lage bei der Drehung nicht. Nun wird mit Hilfe der entsprechenden Ordnungslinie von A_1' aus der Aufriß A_1'' bestimmt. Die Verbindungsstrecke $A_1'' S''$ gibt die wahre Größe der Kante AS an. In der Abbildung 173 sind diejenigen Linien gezeichnet, auf die man sich bei der Konstruktion der wahren Größe der Kante beschränken kann.

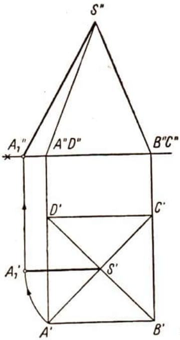


Abb. 173

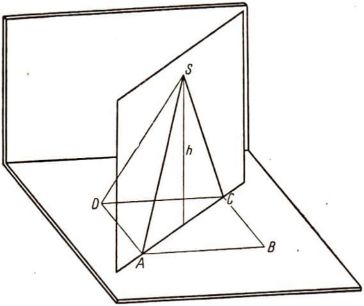


Abb. 174

b) Umklappung

Durch die Pyramide wird ein ebener Schnitt senkrecht zur Grundrißtafel so geführt, daß in ihm die Kante liegt, deren wahre Größe bestimmt werden soll. Dieser Schnitt enthält auch die Höhe der Pyramide (Abb. 174). Man bezeichnet die Gerade im Grundriß, auf der die Schnittebene steht, als **Grundrißspur**. Die Schnittebene wird nun um ihre Grundrißspur in die Grundrißtafel umgeklappt (Abb. 175). Die Konstruktion wird im Grundriß ausgeführt (Abb. 176). Die Höhe der Schnittfigur ist die Höhe h der Pyramide. Sie wird aus dem Aufriß in die Konstruktion übertragen.

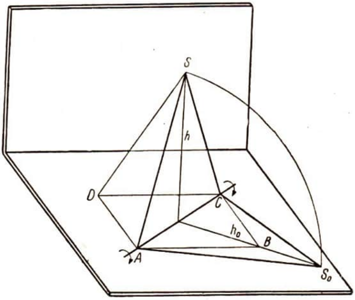


Abb. 175

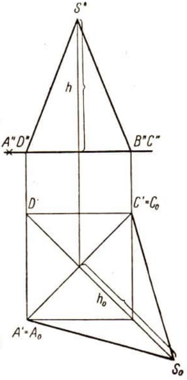


Abb. 176

Die Umklappung der Spitze S wird mit S_0 bezeichnet. Die Strecke $A'S_0$ gibt die wahre Größe der Kante AS wieder.

Auch bei der Umklappung ist es nicht notwendig, die ganze Schnittfigur zu klappen. Wenn man die wahre Größe einer Kante erhalten will, klappt man nur das rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse AS, der Kathete h und der Kathete $A'S'$ um (dabei ist $A' = A_0$). In der Abbildung 177 ist es schraffiert eingezeichnet. Wir klappen nun das Stützdreieck in die Grundrißtafel und erhalten die wahre Größe der Kante (in Abb. 178 Strecke $A_0'S_0$).

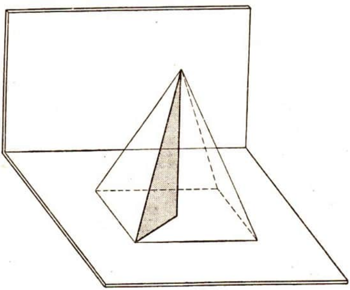


Abb. 177

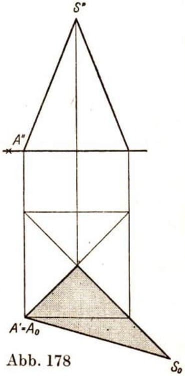


Abb. 178

Zusammenfassung:

1. **Um eine Strecke in wahrer Größe abzubilden, muß man sie in parallele Lage zu einer der beiden Bildtafeln bringen oder sie in eine der beiden Bildtafeln legen. Dies ist durch Drehung oder durch Umklappung möglich.**

2. **Zum Umklappen einer Strecke, von der ein Endpunkt auf der Grundrißtafel liegt, dient ein rechtwinkliges Dreieck, das die Strecke selbst zur Hypotenuse hat und dessen Katheten vom Grundriß der Strecke und von der Höhe des zweiten, nicht auf der Grundrißtafel liegenden Endpunktes gebildet werden.**

Aufgaben

1. Bestimme die wahre Größe der Seitenkanten einer quadratischen Pyramide, deren Kanten an der Grundfläche 4 cm lang sind und deren Höhe 5,6 cm beträgt!

2. Bestimme die wahre Größe der Kanten des in der Abbildung 179 in Grundriß und Aufriß gegebenen schiefen Prismas!

3. Bestimme die wahre Größe der Seitenkanten der in der Abbildung 180 in Grundriß und Aufriß gegebenen vierseitigen Pyramide

a) durch Drehung des ganzen Körpers,

b) durch Drehung einer Kante allein,

c) durch Umklappung!

4. Zeichne das Netz der in der Abbildung 181 in Grundriß und Aufriß dargestellten unregelmäßigen dreiseitigen Pyramide!

5. Bestimme die wahre Größe der Seitenkanten der in der Abbildung 182 gezeigten abgestumpften Pyramide!
Bemerkung: Bei der Drehung einer Seitenkante allein braucht nicht die Höhe des Vollkörpers als Drehachse zu dienen!

6. Vergleiche die beiden Verfahren, die wahre Größe einer Strecke zu bestimmen, und beschreibe, welche Bewegung das Dreieck bei der Drehung in die zur Aufrißtafel parallele Lage ausführt!

7. Zeichne das Netz des in Abbildung 183 im Grundriß mit Höhenmaßstab dargestellten Dachmodells (Walmdach; Maßstab 1 : 200)!

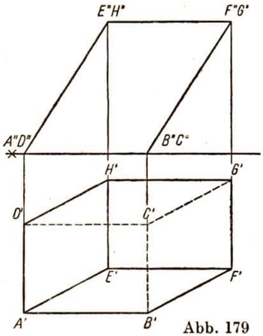


Abb. 179

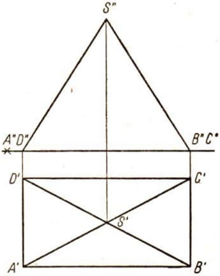


Abb. 180

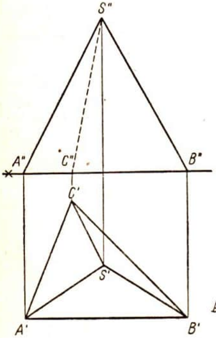


Abb. 181

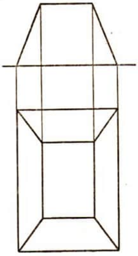


Abb. 182

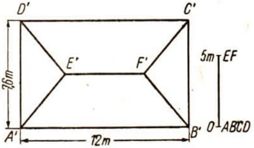


Abb. 183

8. Zeichne Grundriß und Aufriß einer geraden quadratischen Pyramide mit gegebenen Kantenlängen (Grundkante $a = 4$ cm; Seitenkante $s = 5$ cm) in Parallelstellung!

Anmerkung: Die wahre Größe der Kanten ist gegeben. Zu bestimmen sind die Risse (Umkehrung der Aufgabe, die wahre Größe einer durch ihre Risse gegebenen Strecke zu bestimmen).

67. Die wahre Größe und Gestalt einer ebenen Figur

In der Praxis ist es auch oftmals notwendig, die wahre Größe und Gestalt ebener Figuren, zum Beispiel von Seitenflächen bei Körpern und Werkstücken, zu ermitteln. Auch diese sind nicht immer unmittelbar aus dem Grund- und Aufriß zu entnehmen. Wir wissen, daß diejenigen ebenen Figuren in wahrer Größe und Gestalt abgebildet werden, die parallel zu einer Bildtafel liegen. So werden zum Beispiel die Grund- und die Deckfläche eines parallelgestellten Quaders im Grundriß in wahrer Größe und Gestalt abgebildet, die Vorder- und die Rückfläche im Aufriß.

Will man die wahre Größe und Gestalt einer ebenen Figur bestimmen, die in keinem der beiden Risse deckungsgleich abgebildet wird, so muß man die Figur auf eine Bildtafel legen oder sie zu einer Bildtafel in parallele Lage bringen. Dies ist wieder durch Drehung oder durch Umklappung möglich.

a) Drehung

Bei Gegenständen, deren Seitenflächen zur Grundrißtafel senkrecht stehen, zum Beispiel bei geraden Prismen, kann durch Drehung des ganzen Körpers die Seitenfläche, deren wahre Größe und Gestalt bestimmt werden soll, zur Aufrißtafel in parallele Lage gebracht werden. Zu diesem Zwecke wird der Grundriß so weit gedreht, bis die Grundrißspur der betreffenden Fläche parallel zur Rißachse liegt. Dies ist in der Abbildung 184a an einem Dachmodell gezeigt, dessen Giebelwände in wahrer Größe und Gestalt abgebildet werden sollen. Im zugeordneten Aufriß sind dann die Giebelwände in wahrer Größe und Gestalt zu erkennen (Abb. 184b).

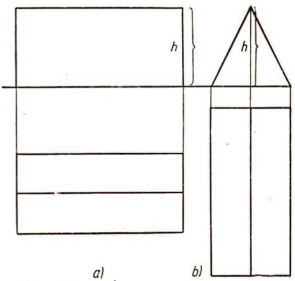


Abb. 184

b) Umklappung

Die Drehung des Gegenstandes auf der Grundrißtafel ist nicht anwendbar, wenn die ebene Figur, deren wahre Größe und Gestalt

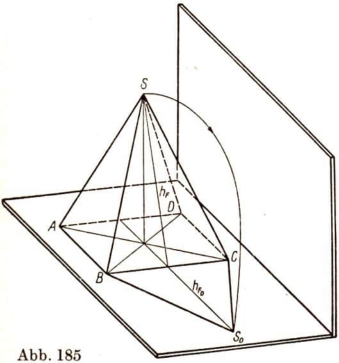


Abb. 185

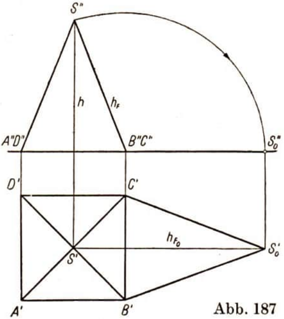


Abb. 187

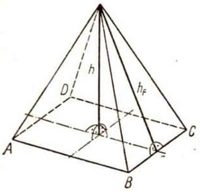


Abb. 186

ermittelt werden soll, gegen die Grundrißtafel geneigt ist. Dies betrifft zum Beispiel die Seitenfläche einer auf der Grundrißtafel stehenden Pyramide. In diesem Falle wird die Figur um ihre Grundrißspur in die Grundrißtafel umgeklappt (Abb. 185). Bei der Umklappung beschreibt die Spitze der Pyramide einen Kreisbogen mit der Höhe der Seitenfläche h_F als Radius. Die Höhe der Seitenfläche (h_F) ist nicht gleich der Höhe (h) der Pyramide (Abb. 186).

Steht die Figur, die umgeklappt werden soll, senkrecht zur Aufrißtafel (dies ist daran zu erkennen, daß die Grundrißspur der Figur senkrecht zur Rißachse steht), so ist die Umklappung zeichnerisch einfach auszuführen; denn der Weg, den die Spitze der Seitenfläche beschreibt, verläuft parallel zur Aufrißtafel. Er wird im Grundriß als gerade Linie parallel zur Rißachse und im Aufriß als Kreisbogen um den Punkt B'' abgebildet. Die Strecke $B''\,S''$ ist gleich der Flächenhöhe h_F. Bei der Konstruktion wird darum zunächst im Aufriß ein Kreisbogen mit dem Radius $B''\,S''$ um B'' geschlagen und mit der Rißachse zum Schnitt gebraeht; denn auf der Rißachse liegt der Aufriß S_0'' des umgeklappten Punktes S_0. Danach wird durch S' eine Parallele zur Rißachse gezeichnet; denn auf dieser liegt der Grundriß S_0' des umgeklappten Punktes S_0. Mit Hilfe der entsprechenden Ordnungslinie wird nun von S_0'' aus der Punkt S_0' ermittelt. Das Dreieck $B'C'S_0'$ stellt die umgeklappte Seitenfläche BCS dar (Abb. 187). In diesem Fall wurde die Klappung durch einen Kreisbogen in der Aufrißtafel ausgeführt. Es ist gleich, nach welcher Seite die Figur umgeklappt wird. Aber wegen der Übersichtlichkeit ist es zweckmäßig, nach außen, das heißt vom Körper weg, umzuklappen.

Steht die ebene Figur, deren wahre Größe und Gestalt ermittelt werden soll, nicht senkrecht zur Aufrißtafel, so kann die Klappung nicht unmittelbar durch einen Kreisbogen im Aufriß erfolgen. In diesem Fall wird der Gegenstand auf der Grundrißtafel so weit gedreht, bis die betreffende Figur gegen die Aufrißtafel eine senkrechte Lage einnimmt. Zeichnerisch wird dies durch Drehung des Grundrisses ausgeführt, bis die Grundrißspur der Figur zur Rißachse senkrecht steht.

Es ist noch eine andere Umklappung in die Grundrißtafel möglich. Wir wollen wieder die Seitenflächen einer Pyramide, die aber nicht in Parallelstellung steht, in wahrer Größe ermitteln. Dazu wäre eine Klappung des Seitendreiecks um $B'C'$ ($B' = B$; $C' = C$) notwendig (Abb. 188). Dieses Dreieck kann man aber nicht unmittelbar umklappen. Wir führen dazu zwei Schritte aus:

1. Durch die Spitze des Körpers wird ein Schnitt gelegt, der das **Stützdreieck** der Seitenfläche, bestehend aus der Hypotenuse h_F, der Kathete h und der Kathete aus dem Grundriß der Flächenhöhe h_F, enthält. Die Höhe h kann aus dem Aufriß entnommen werden. Das Stützdreieck wird um seine Grundrißspur in die Grundrißtafel geklappt (Abb. 189) und ergibt die Flächenhöhe h_F in wahrer Länge.

2. Nun wird um den Schnittpunkt der Grundrißspur der Seitenfläche BCS und der Grundrißspur der Schnittebene ein Kreisbogen von der Spitze des um-

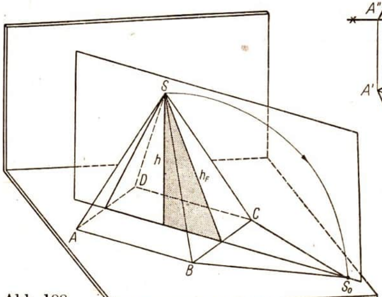


Abb. 188

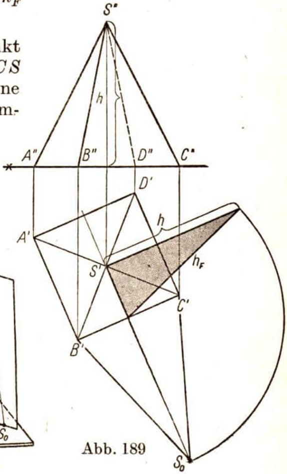


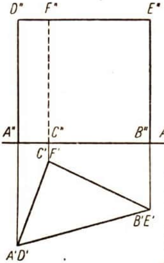
Abb. 189

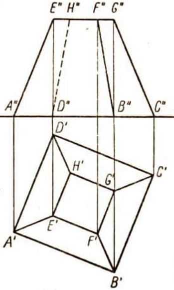
geklappten Stützdreiecks aus geschlagen und mit der Grundrißspur der Schnittebene zum Schnitt gebracht. Dieser Punkt ist der Eckpunkt S_0 der umgeklappten Seitenfläche $B'C'S_0$. Das Dreieck $B'C'S_0$ zeigt die Seitenfläche BCS in wahrer Größe und Gestalt (Abb. 189).

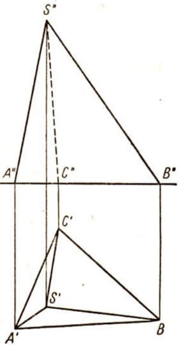
Zusammenfassung:

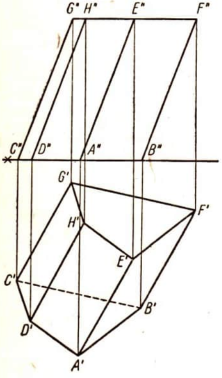
Um eine ebene Figur in wahrer Größe und Gestalt abzubilden, muß man sie in parallele Lage zu einer der beiden Bildtafeln bringen oder sie in eine der beiden Bildtafeln legen. Dies ist durch Drehung oder durch Umklappung möglich.

Abb. 190 (links)
Abb. 191 (Mitte)
Abb. 192 (rechts)
Abb. 193 (unten)









Aufgaben

1. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der Seitenflächen des in der Abbildung 190 in Grundriß und Aufriß gegebenen Prismas!
2. Zeichne das Netz der in der Abbildung 191 in Grundriß und Aufriß dargestellten abgestumpften Pyramide!
3. Zeichne das Netz der in der Abbildung 192 in Grundriß und Aufriß dargestellten unregelmäßigen dreiseitigen Pyramide!
4. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der Seitenflächen des schiefen Prismas, das in der Abbildung 193 dargestellt ist!

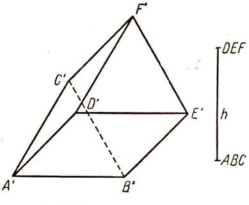


Abb. 194

5. Zeichne das Netz des in der Abbildung 194 im Grundriß gegebenen 5 cm hohen schiefen Prismas!

6. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der in Abbildung 195 in Grundriß und Aufriß dargestellten ebenen Figuren!

7. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der Schnittfläche des in Abbildung 196 dargestellten schief abgeschnittenen Würfels!

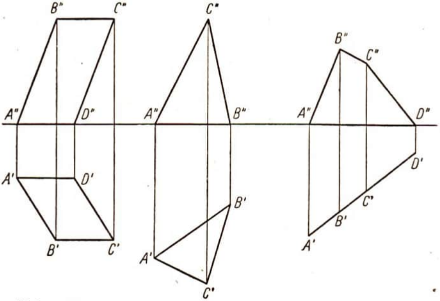


Abb. 195

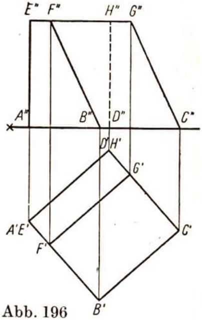


Abb. 196

68. Die Abbildung der Kugel in Grund-, Auf- und Kreuzriß

Das Bild einer Kugel ist sowohl im Grundriß als auch im Aufriß und im Kreuzriß ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Kugeldurchmesser ist (Abb. 197).

Wir wollen nun untersuchen, wie die einzelnen Teile der Kugeloberfläche abgebildet werden. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Kugel mit dem in der Erdkunde üblichen Gradnetz (Breiten- und Längenkreise) überzogen. Die Achse der Kugel soll senkrecht zur Grundrißtafel stehen. Die drei Risse der Kugel sind in Abbildung 198 gezeigt.

Im Grundriß werden die Parallelkreise als konzentrische Kreise abgebildet, der Umriß der Figur ist das Bild des Äquators. Die Längenkreise erscheinen als Durchmesser. Der Winkel, den zwei Meridiane miteinander einschließen, wird als Winkel zwischen den entsprechenden Durchmessern wiedergegeben.

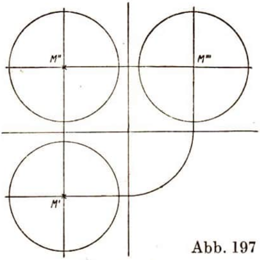


Abb. 197

Im Aufriß und im Kreuzriß werden die Parallelkreise als parallele Sehnen abgebildet, die Längenkreise im allgemeinen als Ellipsen, deren große Achsen gleich dem Kugeldurchmesser sind und die mit dem in diesen

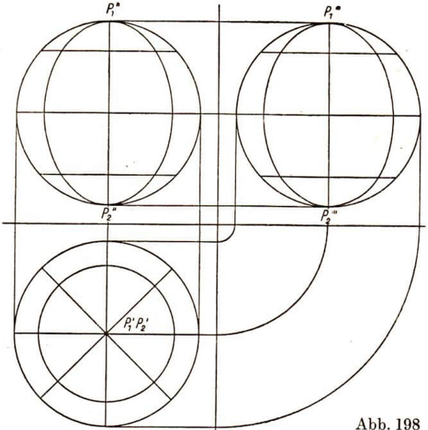


Abb. 198

Rissen senkrecht gezeichneten Durchmesser zusammenfallen. Ausnahmen bilden nur diejenigen Meridiane, die entweder parallel oder senkrecht zu den Bildtafeln sind.

Weiterhin denken wir uns die Kugel mit ihrem Gradnetz um eine horizontale, zur Kreuzrißtafel senkrechte Achse nach vorn gekippt, etwa um einen Winkel von 30°. Diese Kippung erscheint im Kreuzriß als Drehung im Uhrzeigersinne um diesen Winkel (Abb. 199). Konstruieren wir zum Kreuzriß die beiden anderen zugeordneten Risse, so ergibt sich folgendes:

Im Grundriß und im Aufriß wird der Äquator als Ellipse, deren große Achse gleich dem Kugeldurchmesser ist, abgebildet. Die anderen Parallelkreise erscheinen als Ellipsen, die der Äquatorellipse ähnlich sind, das heißt das gleiche Achsenverhältnis wie diese haben. Ihre großen Achsen sind parallel zur großen Achse der Äquatorellipse, ihre Mittelpunkte liegen auf dem Bild der (zur Äquatorebene senkrechten) Kugelachse.

Die Meridiankreise werden in beiden Rissen im allgemeinen als Ellipsen abgebildet.

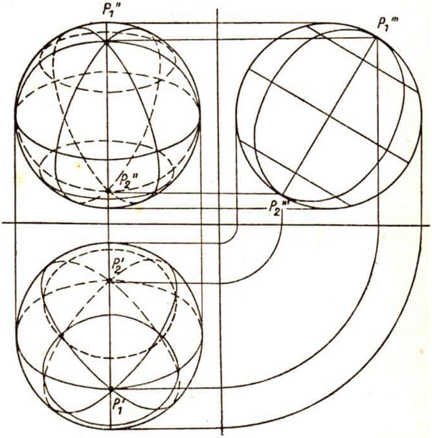


Abb. 199

Aufgaben

1. Zeichne eine Kugel ($d = 7$ cm) mit einem Gradnetz von 30° zu 30° in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß (Kugelachse senkrecht zur Grundrißtafel)!

2. Zeichne eine Kugel mit Äquator und Polen, wenn ihre Achse
   a) parallel zur Aufrißtafel, gegen die Grundrißtafel unter 60° geneigt,
   b) parallel zur Kreuzrißtafel, gegen die Grundrißtafel unter 45° geneigt,
   c) parallel zur Grundrißtafel und parallel zur Aufrißtafel ist!

3. Eine Halbkugel ($d = 6{,}4$ cm) wird in 2,4 cm Höhe, parallel zur Grundfläche, abgeflacht. Zeichne die drei Risse dieses Körpers!

4. Eine Kugel ($d = 5{,}6$ cm) wird längs ihrer senkrechten Achse zylindrisch ($d_1 = 4{,}2$ cm) durchbohrt. Zeichne den ringförmigen Restkörper in Grundriß und Aufriß!

INHALTSVERZEICHNIS

A. Einführende Wiederholung

Seite

I. Zahlen, Maße 3

1. Verwandlungsübungen 3

II. Rechenarten 4

2. Addition und Subtraktion 4
3. Multiplikation und Division 6
4. Formen des Zahlenvergleichs 8
5. Verhältnisgleichheit — Produktgleichheit 9

B. Arithmetik

III. Allgemeine Zahlsymbole 11

6. Zur Einführung allgemeiner Zahlsymbole 11
7. Auswertung von Ausdrücken mit allgemeinen Zahlsymbolen 15
8. Addition und Subtraktion 17
9. Monom und Binom 20
10. Klammern 21
11. Multiplikation von Monomen 25
12. Division von Monomen 26
13. Verbindung der vier Grundrechenarten 28
14. Multiplikation von Polynomen mit Monomen 29
15. Division von Polynomen durch Monome 31
16. Die Multiplikation von Polynomen mit Polynomen 33
17. Die binomischen Formeln 36
18. Das Ausklammern von Faktoren 38
19. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 40

IV. Lineare Gleichungen 43

20. Aufgaben zur Wiederholung 43
21. Das Lösen von Bestimmungsgleichungen (Erweiterungen) 44
22. Der Grad der Bestimmungsgleichung; die Bezeichnung der Unbekannten 51
23. Das Lösen von Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Bestimmungsgleichungen 52

V. Lineare Funktionen 60

24. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 60
25. Der Begriff „Funktion“ 61
26. Der Proportionalitätsfaktor 64
27. Weitere Beispiele für funktionale Zusammenhänge 64
28. Die grafische Darstellung von Funktionen im rechtwinkligen Koordinatensystem 68
29. Die lineare Funktion 75

C. Geometrie

VI. Dreieckskonstruktionen und Kongruenz 83

30. Das Dreieck als stabile Figur 83
31. Die Konstruktion von Dreiecken aus den drei Seiten 84

Seite

32. Die Konstruktion von Dreiecken aus zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel 86
33. Die Konstruktion von Dreiecken aus einer Seite und zwei Winkeln .. 87
34. Die Konstruktion von Dreiecken aus zwei Seiten und einem von diesen Seiten nicht eingeschlossenen Winkel 89
35. Der Begriff „Kongruenz" 91
36. Die Kongruenzsätze 93
37. Besondere Linien im Dreieck 98
38. Besondere Punkte im Dreieck 101
39. Die Konstruktion von Dreiecken mit Hilfe der besonderen Linien . 104
40. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 105

VII. Die Ähnlichkeit 107

41. Aufgaben zur Wiederholung 107
42. Kongruenz, Gleichheit, Ähnlichkeit 107
43. Der Hauptähnlichkeitssatz für Dreiecke; ähnliche Dreiecke in Ähnlichkeitslage 115
44. Die Seitenverhältnisse bei ähnlichen Dreiecken 118
45. Die vier Ähnlichkeitssätze beim Dreieck 123
46. Flächen und besondere Linien ähnlicher Vielecke 127
47. Der Strahlensatz 129
48. Verschiedene Anwendungen der Ähnlichkeit 134
49. Anwendungsaufgaben 138

VIII. Die Satzgruppe des Pythagoras 140

50. Der Lehrsatz des Pythagoras 140
51. Der Kathetensatz (Satz des Euklid) 144
52. Der Höhensatz 146

IX. Quadratzahlen und Quadratwurzeln 147

53. Quadratzahlen (Begriff und Erweiterung) 147
54. Die Quadrattafel 149
55. Der Begriff „Quadratwurzel" 150
56. Irrationale Zahlen 151
57. Das Quadratwurzelziehen mit der Quadrattafel 152
58. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 153

X. Berechnen von Rauminhalten 156

59. Schnitte an einer quadratischen Pyramide 156
60. Berechnen einer Pyramide 157
61. Schnitte am geraden Kreiskegel 162
62. Berechnen eines geraden Kreiskegels 163
63. Kugelschnitte 167
64. Berechnen einer Kugel 168
65. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 172

XI. Darstellende Geometrie 179

66. Die wahre Größe einer Strecke 179
67. Die wahre Größe und Gestalt einer ebenen Figur 184
68. Die Abbildung der Kugel in Grund-, Auf- und Kreuzriß 188