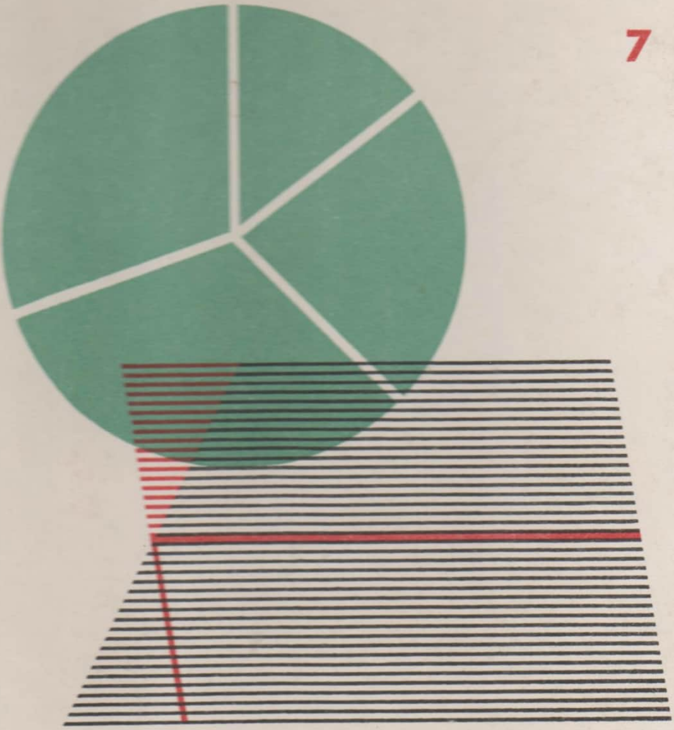
7



Rechnen, Messen, Konstruieren

RECHNEN
MESSEN
KONSTRUIEREN

SIEBENTES SCHULJAHR

Ausgabe 1959

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1960

Die Abschnitte A, I und A, II wurden von Paul Polster verfaßt,
die Abschnitte B, III und B, IV von der Redaktion Mathematik.
Die Abschnitte B, V bis B, X verfaßte Hans Simon,
die Abschnitte C, XI und C, XII Dr. Helmut Klein,
die Abschnitte C, XIII und C, XIV Doris Singer
und den Abschnitt C, XV Oskar Mader.
Die wissenschaftliche und methodische Bearbeitung
besorgten Helmuth Kreißler und Oskar Mader.

Redaktionschluß: 30. März 1959
Zeichnungen: Kurt Dornbusch und Heinz Grothmann
Umschlaggestaltung: Heinz Unzner

Gemäß der Verordnung vom 14. 8. 1958 über die physikalisch-technischen Einheiten sind alle Angaben in Verbindung mit der Einheit Doppelzentner (dz) *als Dezitonnen* (dt) *aufzufassen.*

ES 11 G · Bestell-Nr. 00709-2
2.— DM · Lizenz Nr. 203 · 1000/59 (DN)
Satz und Druck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)

A. EINFÜHRENDE WIEDERHOLUNG

I. Zahlen, Maße

1. Verwandlungsübungen

1. a) Eine Ziffer rückt in der Stellentafel eine Stelle nach links. Wie ändert sich ihr Wert?

b) Sie rückt eine Stelle nach rechts.

c) Sie rückt zwei (drei) Stellen nach links.

d) Sie rückt zwei (drei) Stellen nach rechts.

e) Begründe die Ausdrücke „Zehnersystem“, „Dezimalsystem“, „Stellenwertsystem“!

f) Warum paßt die römische Zahlenschreibweise (z. B. MCCXLVIII) nicht in ein Stellenwertsystem?

2. a) $38{,}74 \cdot 10$ (100, 1000) **b)** $0{,}395 \cdot 100$ (1000, 10000)
c) $576{,}3 : 10$ (100, 1000) **d)** $6240 : 100$ (10000, 1000)

3. a) $421 \cdot 0{,}1$ (0,01, 0,001) **b)** $1700 \cdot 0{,}01$ (0,1, 0,001)
c) $15 : 0{,}1$ (0,01, 0,001) **d)** $348 : 0{,}01$ (0,1, 0,001)

4. Untersuche mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, ob die folgenden Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25, 125 teilbar sind!

a) 3678	**b)** 7690	**c)** 14586	**d)** 33872
e) 67924	**f)** 7683500	**g)** 23456100	**h)** 7653300

5. Zerlege die folgenden Zahlen in Primfaktoren und verwende dabei die Potenzschreibweise!

a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**
48	56	72	240	250	125
84	120	180	243	242	216
96	150	256	288	512	1000

6. Verwandle in endliche Dezimalzahlen!

a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**
$1\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{4}$	$6\frac{3}{5}$	$9\frac{5}{8}$	$5\frac{3}{8}$	$5\frac{3}{10}$
$2\frac{3}{4}$	$12\frac{2}{5}$	$10\frac{7}{8}$	$7\frac{4}{5}$	$18\frac{9}{25}$	$8\frac{7}{20}$
$3\frac{1}{5}$	$11\frac{7}{10}$	$9\frac{17}{20}$	$14\frac{11}{20}$	$3\frac{11}{16}$	$1\frac{15}{16}$
$4\frac{1}{8}$	$6\frac{3}{25}$	$30\frac{7}{50}$	$25\frac{27}{50}$	$5\frac{73}{125}$	$7\frac{313}{500}$

7. Verwandle die folgenden Maßangaben in die nächstniedere Maßeinheit!

a)	b)	c)	d)	e)
7,06 DM	$1\frac{3}{4}$ m	$5\frac{1}{10}$ dm	7,2 dm	28 dm^2
0,96 m	$2\frac{1}{2}$ DM	0,89 m^2	$4\frac{1}{2}$ m^2	560 cm^2
4 dm	0,17 cm	$\frac{3}{4}$ dm^2	$8\frac{3}{4}$ cm^2	7 a
8,6 cm	26,30 m^2	0,07 cm^2	12,25 a	0,41 km^2
17 m^2	0,56 dm^2	$1\frac{1}{2}$ a	3 km^2	5,2 m^3
21 ha	$12\frac{1}{5}$ ha	0,26 ha	$8\frac{1}{2}$ dm^3	0,725 m^3
317 m^3	0,516 m^3	7,2 dm^3	$\frac{3}{4}$ cm^3	2,8 cm^3
4 t	0,17 t	0,620 kg	12,24 t	16 dz

8. Schreibe in der niederen Maßeinheit!

a)	b)	c)
3 km + 26 m	18 km + 150 m	5 cm + 6 mm
6 dm + 8 cm	8 a + 19 m^2	2 m^2 + 2 dm^2
7 ha + 5 a	7 km^2 + 22,5 ha	42 m^3 + 750 dm^3
26 cm^2 + 90 mm^2	4 dm^3 + 800 cm^3	1 dm^3 + 80 cm^3
6 km^2 + 15 ha	$\frac{1}{4}$ cm^3 + 5 mm^3	4 hl + 15 l

9. Verwandle die folgenden Maßangaben in die nächsthöhere Maßeinheit!

a)	b)	c)	d)
1350 Pf	950 dm	4800 mm	7200 m
650 cm	3400 a	7100 cm^2	425 m^2
3500 ha	710 mm^2	85 ml	260 kg
75 l	305 l	2340 kg	0,9 dz
4 dz	17,5 dz	360 g	620 mg

10. Berechne die Zeit in Std. und Min. für die folgenden Zeitspannen!

a)	b)	c)
3^{00} bis 21^{45}	0^{49} bis 19^{32}	20^{53} bis 2^{50} d. folg. Tg.
5^{26} bis 10^{31}	20^{54} bis 22^{15}	23^{48} bis 3^{14} d. folg. Tg.
6^{47} bis 9^{00}	0^{28} bis 9^{17}	8^{40} bis 0^{30} d. folg. Tg.
16^{02} bis 17^{45}	2^{39} bis 6^{16}	21^{15} bis 7^{00} d. folg. Tg.

11. Auf der Gewichtsschale der Dezimalwaage stehen

a) 200 g, 100 g, 50 g
b) 2 kg, 100 g, 50 g, 10 g
c) 5 kg, 2 kg, 100 g, 50 g, 10 g
d) 1 kg, 500 g, 20 g
e) 10 kg, 500 g, 100 g, 20 g
f) 2 kg, 1 kg, 200 g, 100 g, 20 g
g) 5 kg, 1 kg, 500 g
h) 1 kg, 200 g, 50 g, 20 g.

Welche Mengen werden abgewogen?

12. Die Seefahrt rechnet in Seemeilen (1 sm = 1,852 km). Rechne $1\frac{1}{2}$ sm, $2\frac{1}{4}$ sm, 4 sm, $3\frac{3}{4}$ sm, $\frac{1}{10}$ sm in km um!

13. Bevölkerung und Fläche einiger Staaten im Jahre 1956:

Volksrepublik Bulgarien	7 588 000	110 874 km²
Deutsche Demokratische Republik	17 604 000	107 830 km²
Volksrepublik Polen	27 544 000	311 730 km²
Rumänische Volksrepublik	16 800 000	237 502 km²
Tschechoslowakische Republik	13 157 000	127 827 km²
Ungarische Volksrepublik	9 795 000	93 011 km²
UdSSR	200 200 000	22 403 000 km²

Runde die Bevölkerungszahl auf Millionen und die Fläche auf Tsd. Quadratkilometer und ordne jedesmal der Größe nach!

II. Rechenarten

2. Addition und Subtraktion

1. Rechne vorteilhaft im Kopf!

a) $7{,}5 + 4{,}9 + 2{,}5 + 2{,}1$ **b)** $63 + 840 + 57 + 160$

c) $0{,}42 + 0{,}61 + 0{,}58 + 0{,}29$ **d)** $7{,}9 + 34 + 2{,}1 + 76$

e) $230 + 32{,}4 + 170 + 7{,}6$ **f)** $0{,}165 + 2{,}28 + 0{,}335 + 4{,}62$

g) $29{,}8 + 40{,}2 + 113 + 177$ **h)** $795 + 215 + 831 + 629$

2. Addiere die Zahlen der Spalten und die der Zeilen!

	a)	b)	c)	d)	i)
e)	175,64 DM	87,69 DM	1 305,60 DM	356,26 DM	DM
f)	26,39 DM	2 400,75 DM	934,49 DM	59,62 DM	DM
g)	830,07 DM	491,36 DM	88,16 DM	3 030,33 DM	DM
h)	5,84 DM	29,43 DM	521,71 DM	418,17 DM	DM
k)	DM	DM	DM	DM	DM

3. Kürze die Ergebnisse, wenn möglich!

a) $8\frac{3}{5} + 6\frac{2}{5}$ **b)** $15\frac{9}{25} + 16\frac{11}{25}$ **c)** $8\frac{7}{15} + 3\frac{11}{30}$ **d)** $45\frac{7}{8} + 9\frac{7}{24}$

$6\frac{11}{12} + 5\frac{5}{12}$ $10\frac{9}{10} + 13\frac{7}{10}$ $11\frac{6}{11} + 9\frac{4}{33}$ $66\frac{11}{24} + 33\frac{31}{48}$

$2\frac{7}{8} + 7\frac{5}{8}$ $14\frac{5}{9} + 17\frac{8}{9}$ $17\frac{7}{12} + 19\frac{11}{24}$ $35\frac{7}{75} + 16\frac{4}{15}$

e) $9\frac{7}{8} + 8\frac{3}{5}$ f) $3\frac{1}{2} + 9\frac{7}{13}$ g) $1\frac{11}{20} + 2\frac{3}{17}$ h) $4\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4}$

$6\frac{9}{10} + 5\frac{3}{11}$ $1\frac{5}{9} + 6\frac{9}{11}$ $8\frac{7}{15} + 6\frac{6}{11}$ $7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{6} + 5\frac{5}{7}$ $6\frac{4}{5} + 8\frac{5}{9}$ $8\frac{2}{3} + 5\frac{7}{10}$ $5\frac{3}{4} + 7\frac{4}{5}$

4. a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{7}{8} + \frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{9} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{5}{8} + \frac{7}{12}$

c) $\frac{5}{7} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$ d) $\frac{11}{12} + \frac{9}{20} + \frac{4}{15} + \frac{3}{4} + \frac{9}{10} + \frac{23}{24}$

e) $26\frac{3}{4} + 13\frac{4}{5} + 6\frac{3}{8} + 15\frac{5}{6}$ f) $48\frac{2}{3} + 9\frac{5}{6} + 26\frac{9}{10} + 7\frac{3}{4}$

g) $1\frac{9}{20} + 5\frac{4}{15} + 7\frac{5}{6} + 9\frac{2}{9}$ h) $6\frac{3}{7} + 5\frac{1}{5} + 8\frac{1}{6} + 13\frac{2}{3}$

5. Rechne vorteilhaft!

a) 861 − 298 b) 2906 − 497 c) 8300 − 699 d) 6690 − 594

e) 473 − 188 f) 537 − 285 g) 649 − 377 h) 1725 − 789

6.

a)	b)	c)	d)
8473	9666	25113	54612
− 586	− 1074	− 1085	− 9015
− 725	− 2201	− 7629	− 20169
− 2028	− 4583	− 310	− 4783
− 3945	− 649	− 4432	− 8576

7. a) 2863,19 DM − 362,45 DM − 428,73 DM − 993,19 DM

b) 3417,44 DM − 681,39 DM − 527,73 DM − 496,57 DM

8. a) $1\frac{5}{8} - \frac{7}{8}$ b) $7\frac{9}{10} - 5\frac{7}{10}$ c) $6\frac{5}{6} - \frac{5}{12}$ d) $2\frac{3}{4} - 1\frac{7}{8}$

$3\frac{11}{15} - \frac{14}{15}$ $8\frac{5}{16} - 2\frac{9}{16}$ $5\frac{4}{15} - \frac{7}{30}$ $9\frac{4}{5} - 6\frac{3}{10}$

$1\frac{11}{21} - \frac{19}{21}$ $6\frac{5}{24} - 4\frac{17}{24}$ $8\frac{9}{16} - \frac{1}{4}$ $7\frac{5}{12} - 5\frac{5}{6}$

$4\frac{9}{32} - \frac{17}{32}$ $9\frac{7}{20} - 8\frac{11}{20}$ $4\frac{9}{10} - \frac{1}{2}$ $9\frac{1}{6} - 3\frac{5}{18}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ f) $5\frac{5}{6} - 2\frac{4}{5}$ g) $12\frac{1}{2} - 5\frac{13}{15}$ h) $17\frac{1}{4} - 7\frac{7}{9}$

$\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ $8\frac{7}{8} - 4\frac{6}{7}$ $16\frac{2}{7} - 9\frac{7}{12}$ $14\frac{2}{9} - 11\frac{7}{10}$

$\frac{4}{5} - \frac{1}{6}$ $6\frac{8}{9} - 3\frac{7}{8}$ $13\frac{1}{3} - 6\frac{7}{16}$ $18\frac{3}{5} - 12\frac{10}{11}$

$\frac{6}{7} - \frac{5}{8}$ $7\frac{9}{10} - 1\frac{8}{9}$ $20\frac{3}{8} - 10\frac{8}{15}$ $15\frac{5}{12} - 8\frac{11}{14}$

9. Erkläre die Ausdrücke „Summe“, „Summand“, „Minuend“, „Subtrahend“ und „Differenz“ an selbstgewählten Beispielen!

10. a) Vermehre 12,50 um 5,75! b) Vermindere 12,50 um 5,75!

11. Was sagen dir die folgenden Beispiele?
a) $4 + 3 = 3 + 4$ b) $4 - 3 \neq 3 - 4$ ($\neq$ lies: nicht gleich)

3. Multiplikation und Division

1. Rechne im Kopf und benutze Rechenvorteile, wenn es möglich ist!

a)	b)	c)	d)
$3{,}50 \cdot 4$	$4{,}60 \cdot 8$	$2{,}1 \cdot 30$	$0{,}32 \cdot 80$
$2{,}30 \cdot 7$	$5{,}70 \cdot 9$	$6{,}3 \cdot 50$	$0{,}42 \cdot 70$
$8{,}40 \cdot 8$	$0{,}18 \cdot 6$	$8{,}1 \cdot 90$	$1{,}90 \cdot 60$
$7{,}20 \cdot 9$	$7{,}80 \cdot 5$	$5{,}8 \cdot 60$	$0{,}45 \cdot 40$
$0{,}27 \cdot 5$	$9{,}30 \cdot 7$	$1{,}4 \cdot 70$	$0{,}36 \cdot 500$

e)	f)	g)	h)	i)
$4 \cdot 0{,}5$	$0{,}8 \cdot 0{,}4$	$\frac{7}{8} \cdot 9$	$12 \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3}$
$6 \cdot 0{,}25$	$0{,}7 \cdot 0{,}5$	$\frac{2}{3} \cdot 12$	$81 \cdot \frac{8}{9}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$
$12 \cdot 0{,}4$	$1{,}2 \cdot 0{,}4$	$\frac{5}{6} \cdot 18$	$24 \cdot \frac{5}{16}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7}$
$15 \cdot 0{,}6$	$2{,}5 \cdot 0{,}8$	$\frac{8}{9} \cdot 15$	$45 \cdot \frac{3}{20}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{9}$
$18 \cdot 0{,}3$	$3{,}6 \cdot 1{,}5$	$\frac{11}{12} \cdot 42$	$36 \cdot \frac{5}{18}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{13}$

2. Vor jeder schriftlichen Multiplikation und Division ist die Größenordnung des Ergebnisses zu überschlagen. Die Zahlen sind dazu so zu verändern, daß der Überschlag im Kopf gerechnet werden kann. Diese Kopfrechenaufgabe ist zu notieren. Am Schluß ist das Ergebnis mit dem Überschlag zu vergleichen.
Berechne so die Flächen der Rechtecke mit den folgenden Seiten!
a) 4,34 m, 3,63 m b) 10,74 m, 18,72 m c) 24,49 m, 18,96 m
d) 6,13 m, 8,54 m e) 12,37 m, 14,85 m f) 20,83 m, 17,48 m
g) 9,26 m, 7,25 m h) 15,46 m, 16,22 m i) 30,36 m, 19,94 m

3. Berechne das Volumen von Quadern mit den folgenden Kantenlängen! Das Ergebnis runde jedesmal auf vier geltende Ziffern!
a) 300 mm, 490 mm, 238 mm b) 0,43 m, 0,75 m, 1,25 m
c) 6,72 m, 2,57 m, 1,41 m d) 17,75 cm, 11,5 cm, 7,1 cm
e) 24 cm, 11,5 cm, 7,1 cm f) 11,5 cm, 11,5 cm, 11,3 cm

4. Berechne die Ladefläche in m² und den Laderaum in m³!
a) LKW IFA-Framo 901/2: Länge 2310 mm, Breite 1500 mm, Höhe 370 mm.
b) LKW IFA H 6: Länge 5000 mm, Breite 2340 mm, Höhe 610 mm.

5. a) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{14} \cdot \frac{26}{27}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ d) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 3\frac{1}{3}$

$\frac{7}{12} \cdot \frac{9}{14}$ $\frac{49}{50} \cdot \frac{34}{35}$ $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{9}$ $4\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{7} \cdot \frac{5}{11}$

$\frac{4}{11} \cdot \frac{22}{25}$ $\frac{24}{25} \cdot \frac{15}{16}$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10}$ $6\frac{2}{3} \cdot 9\frac{9}{10} \cdot 4\frac{5}{22}$

$\frac{14}{15} \cdot \frac{25}{28}$ $\frac{9}{13} \cdot \frac{65}{66}$ $\frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ $8\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{11} \cdot \frac{5}{46}$

$\frac{7}{30} \cdot \frac{20}{21}$ $\frac{19}{24} \cdot \frac{32}{35}$ $\frac{11}{12} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{5}$ $7\frac{1}{5} \cdot 8\frac{8}{9} \cdot 6\frac{3}{10}$

6. Rechne im Kopf! (Unterscheide Teilen und Enthaltensein!)

a) 1,5 m : 3 b) 26 cm : 1,3 c) $\frac{2}{3}$ l : $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ m : 2

4,2 m : 6 75 cm : 2,5 $\frac{3}{4}$ l : $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ m : 3

3,5 m : 50 12 cm : 2,4 $\frac{3}{4}$ l : $1\frac{1}{5}$ $1\frac{1}{3}$ m : 5

5,6 m : 70 14,4 cm : 4,8 $\frac{1}{2}$ l : $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ m : $1\frac{1}{5}$

f) 0,5 m in 2 m g) 0,2 l in 1,5 l h) $\frac{1}{2}$ m in 15 m

0,8 m in 2 m 0,6 l in 1,4 l $\frac{1}{4}$ m in $1\frac{1}{2}$ m

0,3 m in 0,6 m 1,2 l in 4,8 l $\frac{3}{4}$ m in 3 m

0,4 m in 1,8 m 1,2 l in 5,4 l $\frac{1}{5}$ m in 2 m

7. Rechne schriftlich und überschlage vorher die Größenordnung des Ergebnisses!

a) 435,75 DM : 7 b) 3,532 km : 4 c) 6,478 kg : 2 d) 296,480 t : 4

736,25 DM : 5 4,950 km : 6 5,370 kg : 6 137,400 t : 6

914,64 DM : 4 5,760 km : 5 13,750 kg : 5 97,263 t : 9

452,13 DM : 3 5,390 km : 7 26,184 kg : 8 82,584 t : 8

73,26 DM : 9 11,340 km : 9 25,620 kg : 3 826,700 t : 7

8. Das Ergebnis ist als gemischte Zahl zu schreiben!

a) 931 : 15 b) 6347 : 21 c) 7082 : 32 d) 87453 : 45
e) 2483 : 59 f) 8074 : 65 g) 6324 : 48 h) 59728 : 73
i) 15629 : 18 k) 78332 : 72 l) 56419 : 94 m) 60308 : 38

9. Als Ergebnis soll der Näherungswert mit vier geltenden Ziffern angegeben werden (5 Ziffern ausrechnen und runden!).

a) 53261 : 510 b) 46127 : 223 c) 94583 : 516
d) 693428 : 428 e) 842356 : 816 f) 705692 : 324
g) 535002 : 619 h) 902008 : 704 i) 844398 : 803
k) 204503 : 226 l) 415303 : 412 m) 962457 : 579

10. Dividiere, bis sich eine endliche Zahl ergibt oder bis die Periode erkenntlich ist, höchstens aber bis zu vier geltenden Ziffern!

a) $225{,}4 : 1{,}2$	b) $64 : 0{,}16$	c) $65{,}34 : 1{,}2$	d) $2{,}3 : 0{,}048$
e) $39{,}04 : 2{,}6$	f) $95 : 0{,}015$	g) $24{,}8 : 3{,}2$	h) $42{,}83 : 6{,}3$
i) $43{,}827 : 35$	k) $32 : 0{,}048$	l) $100 : 0{,}09$	m) $14{,}5 : 0{,}74$
n) $59 : 0{,}9$	o) $75 : 0{,}035$	p) $16{,}41 : 0{,}64$	q) $628{,}4 : 7{,}85$

11. Verwandle die folgenden Brüche in Dezimalzahlen! Verfahre dabei so wie in Aufgabe 10!

a) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{7}{64}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{8}$

b) $\frac{7}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{9}{19}$, $\frac{2}{9}$

c) $\frac{6}{13}$, $\frac{5}{17}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{17}{50}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{14}{25}$, $\frac{6}{19}$, $\frac{34}{35}$, $\frac{3}{19}$, $\frac{5}{28}$, $\frac{3}{14}$

12. a) $6\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4}$ b) $4\frac{3}{8} : 5\frac{5}{6}$ c) $9\frac{2}{3} : 4\frac{4}{9}$ d) $10\frac{1}{5} : 3\frac{3}{10}$

e) $7\frac{1}{5} : 1\frac{5}{6}$ f) $9\frac{2}{7} : 1\frac{4}{9}$ g) $6\frac{1}{4} : 8\frac{1}{3}$ h) $12\frac{1}{4} : 1\frac{2}{5}$

13. Erkläre an selbstgewählten Beispielen die Ausdrücke „Faktor", „Produkt", „Dividend", „Divisor" und „Quotient"!

14. Das Vierfache einer Zahl ist 1,2; der vierte Teil einer anderen Zahl ist ebenfalls 1,2. Wie heißt jeweils die Ausgangszahl?

15. Was sagen dir die folgenden Beispiele?

a) $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$ b) $4 : 3 \neq 3 : 4$

4. Vergleichen von Zahlen

1. Vergleiche, indem du die Brüche gleichnamig machst!

a) $\frac{5}{7}$ und $\frac{9}{13}$ b) $\frac{1}{4}$ und $\frac{13}{50}$ c) $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{8}$ d) $\frac{2}{3}$ und $\frac{29}{42}$

e) $\frac{2}{5}$ und $\frac{24}{61}$ f) $\frac{4}{5}$ und $\frac{33}{41}$ g) $\frac{5}{8}$ und $\frac{26}{41}$ h) $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{11}$

2. Bestimme!

a) $\frac{1}{2}$ von 0,5	b) $\frac{1}{4}$ von 0,24	c) $\frac{1}{4}$ von 3	d) $\frac{3}{5}$ von 240
$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$ von 3,6	$\frac{3}{4}$ von 3	$\frac{4}{7}$ von 280
$\frac{1}{3}$ von 0,36	$\frac{1}{8}$ von 4	$\frac{1}{6}$ von 14,4	$\frac{3}{5}$ von 0,75
$\frac{1}{5}$ von 0,20	$\frac{1}{10}$ von 82	$\frac{5}{6}$ von 14,4	$\frac{3}{7}$ von 35
$\frac{1}{7}$ von 7,7	$\frac{1}{9}$ von 0,54	$\frac{1}{8}$ von 1000	$\frac{3}{4}$ von 0,64

3. Gib die kleinere Zahl als Bruchteil der größeren an!

a)	b)	c)	d)
1,3 und 3,9	0,17 und 0,68	0,2 und 3,0	1,5 und 2,0
2,5 und 12,5	1,3 und 7,8	0,8 und 3,0	16 und 20
0,8 und 4,0	0,3 und 3,0	0,25 und 1,25	20 und 25
0,9 und 8,1	0,02 und 0,16	1,00 und 1,25	20 und 24
0,9 und 6,3	0,3 und 3,6	17 und 68	26 und 30
0,02 und 1,00	0,02 und 0,40	51 und 68	26 und 32

4. Gib die größere Zahl als Vielfaches der kleineren an!

a)	b)	c)
36 und 9	13,2 und 1,1	0,25 Mill. und 125 Tsd.
36 und 4,5	7 und 0,35	1 Mill. und 100 Tsd.
15 und $2\frac{1}{2}$	1,08 und 0,12	27 Mill. und 1,5 Mill.
650 und 13	1,3 Tsd. und 0,65 Tsd.	1,2 Mrd. und 2,4 Mrd.
175 und 25	11,7 Tsd. und 1,3 Tsd.	3,2 Tsd. und 0,16 Tsd.
112 und 56	1,6 Tsd. und 0,4 Tsd.	250 Mill. und 2 Mrd.

5. Folgen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben:

a)	b)	c)	d)	e)
$1 \cdot 16$	$1 \cdot 16$	$1 \cdot \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2} : 16$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$
$2 \cdot 16$	$\frac{1}{2} \cdot 16$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2} : 8$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$
$4 \cdot 16$	$\frac{1}{4} \cdot 16$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2} : 4$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$
$8 \cdot 16$	$\frac{1}{8} \cdot 16$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2} : 2$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{16}$
$16 \cdot 16$	$\frac{1}{16} \cdot 16$	$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2} : 1$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{32}$

Stelle fest, wie sich ein Faktor (der Divisor) von Aufgabe zu Aufgabe ändert und wie sich infolgedessen das Produkt (der Quotient) ändert!

6. Um vergleichen zu können, wie dicht die Menschen in einem Staat wohnen, berechnet man, wieviel Einwohner durchschnittlich auf 1 km² kommen. Berechne die Bevölkerungsdichte der in Aufgabe 13 auf Seite 5 genannten Staaten!

7. Berechne die durchschnittlichen Hektarerträge (dz/ha) für Winterweizen, die von den landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften erzielt wurden!
Runde die Ergebnisse sinnvoll!

Jahr	Anbaufläche	Ertrag
1953	39 353 ha	1 131 020 dz
1954	41 010 ha	1 078 250 dz
1955	66 818 ha	2 127 030 dz
1956	73 484 ha	2 183 680 dz
1957	77 387 ha	2 415 680 dz

B. RATIONALE ZAHLEN

III. Einführung der rationalen Zahlen

5. Der Begriff „rationale Zahl“

Manchmal ist eine Zahlenangabe nicht eindeutig. Sagen wir zum Beispiel: „Die Temperatur beträgt 15°“, so ist nicht klar, ob sie 15° über Null oder 15° unter Null beträgt. Auch die Angabe, die Länge eines Eisenträgers weiche um 150 mm vom vorgeschriebenen Maß ab, ist nicht eindeutig.

In allen derartigen Fällen muß man die Zahlen besonders kennzeichnen. Bei Temperaturangaben geschieht das, indem man den Temperaturwerten über 0° ein Pluszeichen und den Temperaturwerten unter 0° ein Minuszeichen voranstellt. Die Angabe +15° bedeutet demnach, daß die Temperatur 15° über dem Nullpunkt liegt, die Angabe −15° bedeutet, daß die Temperatur 15° unter dem Nullpunkt liegt.

Auch in den anderen Beispielen wird erst durch eine solche Kennzeichnung der Zahlen die Zahlenangabe eindeutig. Sagt man, ein Eisenträger weiche um +150 mm vom vorgeschriebenen Maß ab, so bedeutet das, daß er 150 mm zu lang ist; sagt man, er weiche um −150 mm davon ab, so bedeutet das, daß er 150 mm zu kurz ist.

In unseren Beispielen haben wir nur ganze Zahlen verwendet. Wir hätten ebensogut Brüche verwenden können, zum Beispiel $\frac{3}{20}$ m oder 0,150 m an Stelle von 150 mm.

Ganze und gebrochene Zahlen, die mit einem Pluszeichen versehen sind, nennen wir **positive Zahlen**. Ganze und gebrochene Zahlen, die mit einem Minuszeichen versehen sind, nennen wir **negative Zahlen**. Am Thermometer erkennen wir, daß zwischen den positiven und den negativen Zahlen die Zahl 0 steht. Die positiven Zahlen, die negativen Zahlen und die Zahl 0 bezeichnen wir als **rationale Zahlen**.

Zusammenfassung:

1. **Zu den rationalen Zahlen gehören die positiven Zahlen, die Zahl Null und die negativen Zahlen.**
2. **Die positiven Zahlen kennzeichnet man mit einem Pluszeichen, die negativen mit einem Minuszeichen.**

Aufgaben

1. Gib die folgenden Höhenangaben mit rationalen Zahlen an:
   a) 165 m über dem Meeresspiegel, b) 20 m unter dem Meeresspiegel,
   c) 7650 m über dem Meeresspiegel, d) 496 m unter dem Meeresspiegel!

2. Gib die Höhenangaben als rationale Zahlen an!
   a) Brocken 1142 m über dem Meeresspiegel,
   b) Spiegel des Kaspischen Meeres 28 m unter dem Meeresspiegel,
   c) Spiegel des Toten Meeres 394 m unter dem Meeresspiegel,
   d) Tschomolungma 8882 m über dem Meeresspiegel.

3. Die Länge eines Eisenträgers wurde fünfmal gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte: 8015 mm, 8009 mm, 8012 mm, 8013 mm, 8011 mm. Ermittle den Durchschnitt und gib die Abweichungen der Meßwerte vom Durchschnitt mit rationalen Zahlen an!

4. Der Rundfunk bringt regelmäßig Wasserstandsmeldungen. Die darin genannten rationalen Zahlen geben an, um wieviel Zentimeter der für den betreffenden Tag gemeldete Wasserstand (in Metern) vom Wasserstand des Vortages abweicht.

   Beispiele:

   Torgau 3,60 +5. Der Wasserstand des Vortages betrug 3,55 m.
   Dresden 2,15 −8. Der Wasserstand des Vortages betrug 2,23 m.

   Gib für die folgenden Orte an der Elbe den Wasserstand des Vortages an!
   Schöna 3,11 −8; Dresden 2,73 −15; Torgau 3,70 ±0;
   Wittenberg 4,09 +15; Roßlau 3,33 +7; Magdeburg 2,86 ±0;
   Tangermünde 4,06 −2; Wittenberge 3,72 −3.

5. An einem Pegel (Wasserstandsmesser) wurden an den sieben Tagen einer Woche folgende Wasserstände gemessen: 315 cm, 329 cm, 334 cm, 318 cm, 326 cm, 330 cm, 323 cm. Der mittlere Wasserstand des Jahres an diesem Pegel ist 326 cm. Gib die Abweichungen der einzelnen Pegelstände vom mittleren Wasserstand mit rationalen Zahlen an!

6. Die Zahlengerade

Unsere bisherigen Zahlen haben wir auf dem Zahlenstrahl dargestellt. Die rationalen Zahlen können wir auf einer Geraden darstellen, die wir **Zahlengerade** nennen (Abb. 1). Wir zeichnen eine Gerade und wählen auf ihr einen beliebigen Punkt als Nullpunkt. Von ihm aus tragen wir nach beiden Richtungen hin fortgesetzt die Einheit ab. Die Teilpunkte,

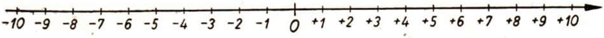


Abb. 1

die wir auf diese Weise erhalten, numerieren wir nach rechts mit $+1$, $+2$ usw., nach links mit -1, -2 usw. Die Brüche fügen wir zwischen den ganzen Zahlen ein, zum Beispiel den Bruch $+\frac{3}{2}$ auf der Mitte zwischen $+1$ und $+2$, den Bruch $-\frac{3}{2}$ auf der Mitte zwischen -1 und -2. Nun gehört zu jeder rationalen Zahl eindeutig ein Punkt auf der Zahlengeraden. Schließlich kennzeichnen wir den positiven Teil der Zahlengeraden durch eine Pfeilspitze.

Wir zeichnen nun einen Zahlenstrahl und eine Zahlengerade mit gleichen Einheiten (Abb. 2). Ein Vergleich zeigt, daß der Zahlenstrahl und der positive Teil der Zahlengeraden (einschließlich des Nullpunktes) miteinander übereinstimmen.

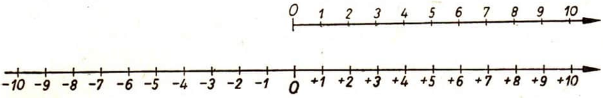


Abb. 2

Am Zahlenstrahl und damit auch am positiven Teil der Zahlengeraden gilt bekanntlich: Von zwei Zahlen liegt die größere stets rechts von der kleineren. Das gilt für alle rationalen Zahlen.

Beispiele:

Es ist -5 größer als -8, weil die Temperatur bei $-5°$ höher ist als bei $-8°$. Die Zahl -5 liegt rechts von der Zahl -8.

Es ist $+3$ größer als -3, weil die Temperatur bei $+3°$ höher ist als bei $-3°$. Die Zahl $+3$ liegt rechts von der Zahl -3.

Für „ist größer als" schreiben wir das Zeichen $>$, für „ist kleiner als" das Zeichen $<$.

Beispiele: $-5 > -8$ bedeutet: -5 ist größer als -8.
$-3 < +3$ bedeutet: -3 ist kleiner als $+3$.

Zusammenfassung:

1. **Die rationalen Zahlen kann man durch Punkte auf einer Geraden, der Zahlengeraden, darstellen.**
2. **Der positive Teil der Zahlengeraden stimmt mit dem Zahlenstrahl überein. Wir wollen ihn stets nach rechts zeichnen.**
3. **Die größere von zwei rationalen Zahlen liegt auf der Zahlengeraden stets rechts von der kleineren.**

Aufgaben

1. Zeichne eine Zahlengerade (Einheit 1 cm) und gib auf ihr die folgenden rationalen Zahlen möglichst genau an! Verwende Millimeterpapier!

a) $-5,\quad +4,\quad +2,\quad -3,\quad +5,\quad -1,\quad 0$

b) $-3\frac{1}{2},\quad +4\frac{1}{4},\quad +5\frac{1}{3},\quad +\frac{1}{2},\quad -3\frac{4}{5},\quad +1\frac{1}{3},\quad -\frac{3}{4}$

c) $+0{,}5,\quad -0{,}5,\quad +3{,}9,\quad -2{,}4,\quad -1{,}75,\quad +2{,}55,\quad -4{,}4$

d) $-1{,}5,\quad +3\frac{3}{4},\quad -2,\quad +0{,}6,\quad -1{,}33,\quad -4{,}5,\quad +1\frac{4}{5}$

2. Gib an, welche rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden in Abbildung 3 durch große Striche dargestellt sind!

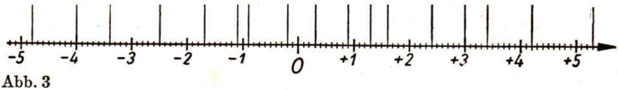


Abb. 3

3. Welche der beiden rationalen Zahlen ist größer?

a) $+3,\ +5$ **b)** $0,\ +6$ **c)** $+23,\ +19$ **d)** $+7,\ +4$

e) $+1,\ +8$ **f)** $+1,\ -1$ **g)** $-5,\ +1$ **h)** $-2,\ +6$

i) $+1,\ 0$ **k)** $+6,\ -6$ **l)** $+6\frac{2}{3},\ +6\frac{3}{5}$ **m)** $-10\frac{4}{5},\ +10\frac{9}{10}$

4. Welche der beiden rationalen Zahlen ist kleiner?

a) $+2,\ +3$ **b)** $-\frac{1}{2},\ -0{,}55$ **c)** $-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}$ **d)** $-\frac{5}{6},\ +6$

e) $+0{,}5,\ +0{,}05$ **f)** $-3\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$ **g)** $+\frac{3}{4},\ -\frac{4}{3}$ **h)** $+5,\ -5\frac{1}{2}$

5. Kennzeichne die Größenverhältnisse der paarweise gegebenen rationalen Zahlen durch das Zeichen $>$ oder $<$!

a) $-11,\ +11$ **b)** $-13,\ -14$ **c)** $+5,\ -5$ **d)** $-8,\ +4$

e) $+0{,}2,\ +0{,}22$ **f)** $-\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}$ **g)** $+3\frac{1}{3},\ -6$ **h)** $-\frac{5}{6},\ -\frac{11}{12}$

6. Welche der rationalen Zahlen liegt auf der Zahlengeraden weiter rechts?

a) $+5,\ +4$ **b)** $-3,\ -2$ **c)** $-5,\ +4$ **d)** $+3,\ -2$

e) $+\frac{1}{2},\ +\frac{3}{4}$ **f)** $-\frac{5}{8},\ -\frac{3}{5}$ **g)** $+\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}$ **h)** $+\frac{5}{8},\ -\frac{3}{5}$

7. Nenne drei positive und drei negative Zahlen, die

a) größer sind als -6, **b)** kleiner sind als $+5$!

8. Ordne die folgenden rationalen Zahlen ihrer Größe nach! Beginne mit der kleinsten!

a) -11, $+10$, $+15$, -16, -19, -8, -17, $+6$, 0, -1

b) $-\frac{5}{6}$, $-2\frac{11}{12}$, $-1\frac{5}{6}$, $+\frac{5}{24}$, $+2\frac{1}{4}$, $+2\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{8}$, $+1$, $-1\frac{1}{12}$

7. Der absolute Betrag einer rationalen Zahl

Die positive Zahl $+5$ ist fünf Einheiten, die negative Zahl -4 ist vier Einheiten vom Punkt 0 entfernt. Jede rationale Zahl hat auf der Zahlengeraden einen solchen eindeutig bestimmten Abstand vom Nullpunkt. Diesen Abstand nennt man den **absoluten Betrag** der rationalen Zahl (Abb. 4).

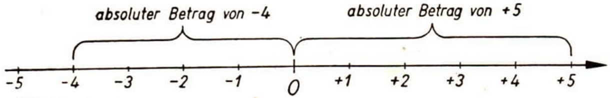


Abb. 4

Beispiele: Die Zahl $+4{,}5$ ist 4,5 Einheiten vom Nullpunkt entfernt; 4,5 ist der absolute Betrag von $+4{,}5$.
Die Zahl $-6\frac{1}{4}$ ist $6\frac{1}{4}$ Einheiten vom Nullpunkt entfernt; $6\frac{1}{4}$ ist der absolute Betrag von $-6\frac{1}{4}$.

Soll gekennzeichnet werden, daß von einer Zahl nur der absolute Betrag gemeint ist, so wird die Zahl in senkrechte Striche eingeschlossen.

Beispiele: Absoluter Betrag von $+2$: $|+2| = 2$,
absoluter Betrag von -2: $|-2| = 2$,
absoluter Betrag von $+\frac{3}{4}$: $\left|+\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$,
absoluter Betrag von $-0{,}5$: $|-0{,}5| = 0{,}5$.

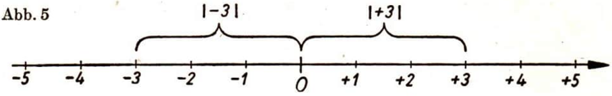
Wir stellen fest, daß zu *einer* rationalen Zahl nur *ein* absoluter Betrag gehört. Zu *einem* absoluten Betrag gehören aber immer *zwei* rationale Zahlen (außer bei der Zahl Null). Zum Beispiel ist

$$|-5| = 5 \text{ und } |+5| = 5; \text{ also } 5 = |+5| = |-5|.$$

Aus den Beispielen erkennen wir: Den absoluten Betrag einer rationalen Zahl erhält man, indem man das Vorzeichen wegläßt.

Zwei verschiedene rationale Zahlen, die den gleichen absoluten Betrag haben, heißen **entgegengesetzte Zahlen**. So ist z. B. $+3$ die entgegengesetzte Zahl von -3 und -3 die entgegengesetzte Zahl von $+3$ (Abb. 5).

Abb. 5



Weitere Beispiele: −495 ist die entgegengesetzte Zahl von +495,
+0,98 ist die entgegengesetzte Zahl von −0,98.

Zusammenfassung:

1. **Der absolute Betrag einer rationalen Zahl gibt an, wie weit diese Zahl vom Nullpunkt entfernt ist.**
2. **Den absoluten Betrag einer rationalen Zahl erhält man, indem man das Vorzeichen wegläßt.**
3. **Der absolute Betrag der Zahl Null ist 0.**
4. **Zwei rationale Zahlen mit gleichem absolutem Betrag, die verschiedene Vorzeichen haben, heißen entgegengesetzte Zahlen.**

Aufgaben

1. Gib die absoluten Beträge der folgenden rationalen Zahlen an!

   a) $+8$, -21, -47, $+3465$, -10563, $+\frac{1}{8}$, $-\frac{4}{5}$, $+2\frac{3}{4}$, $+0{,}157$

   b) $+11$, -12, $-\frac{11}{6}$, $+11{,}99$, 0, $-12{,}01$, $+0{,}0005$, $-13\frac{5}{6}$, $+2{,}555$

2. Zu welchen rationalen Zahlen gehören die folgenden absoluten Beträge?

   a) $19{,}304$ b) $21{,}007$ c) $\frac{5}{6}$ d) 3665 e) $1\frac{1}{2}$ f) 0

3. Gib zu den folgenden rationalen Zahlen die entgegengesetzten Zahlen an!

   a) $-5\frac{1}{2}$ b) 0 c) $+0{,}228$ d) $-1{,}33$ e) $+4596$ f) -27

4. Gib fünf Paare einander entgegengesetzter Zahlen an!

8. Operationszeichen und Vorzeichen

Die Zeichen + (plus) und − (minus) sind uns schon seit dem ersten Schuljahr bekannt. Sie forderten uns auf, eine ganz bestimmte Rechenoperation durchzuführen. So bedeutete zum Beispiel die Aufgabe $3 + 5$ die Aufforderung: „Addiere 5 zu 3!“ und die Aufgabe $8 - 5$: „Subtrahiere 5 von 8!“ Wenn die Zeichen + (plus) und − (minus) in dieser Bedeutung verwendet werden, nennt man sie Rechenzeichen oder **Operationszeichen**.

Bei der Einführung der rationalen Zahlen haben wir die gleichen Zeichen in einer neuen Bedeutung kennengelernt. Sie dienen dabei zur Unterscheidung der positiven und negativen Zahlen. So bedeutet zum Beispiel $+2$ die positive Zahl Zwei, -2 die negative Zahl Zwei. Hier gehören also die Zeichen $+$ und $-$ zur rationalen Zahl. Werden diese Zeichen in dieser Bedeutung verwendet, so nennt man sie **Vorzeichen** der rationalen Zahlen.

Operationszeichen und Vorzeichen müssen deutlich voneinander unterschieden werden. Wenn eine Verwechslung möglich ist, schließt man das Vorzeichen mit der Ziffer in Klammern ein.

Beispiel:

Vorzeichen

$$(+9) - (+6) + (-3)$$

Operationszeichen

Die Aufgabe lautet: Subtrahiere $+6$ von $+9$ und addiere dann -3! Wir wollen solche Aufgaben folgendermaßen lesen: Klammer auf, plus neun, Klammer zu, minus Klammer auf, plus sechs, Klammer zu, plus Klammer auf, minus drei, Klammer zu.

Zusammenfassung:

1. Operationszeichen geben die Art der durchzuführenden Rechnung an.

2. Vorzeichen kennzeichnen eine rationale Zahl als positiv oder negativ.

9. Die Darstellung der rationalen Zahlen durch Pfeile

Jede rationale Zahl läßt sich durch einen Pfeil auf einer Geraden darstellen. Die Länge des Pfeiles entspricht dabei ihrem absoluten Betrag. Ist die Zahl positiv, so zeigt der Pfeil nach rechts, ist sie negativ, so zeigt er nach links. (Jetzt wird auch die Bezeichnung „entgegengesetzte Zahl“ verständlich; vergleiche Abbildung 6!) Die Lage des Pfeiles auf der Geraden ist beliebig; man kann ihn also verschieben (Abb. 7).

Abb. 6

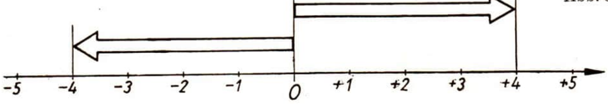
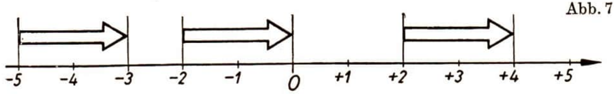


Abb. 7



Aufgaben

1. Stelle die folgenden rationalen Zahlen durch Pfeile dar (Einheit 1 cm)!
$+3, \quad -4, \quad +2, \quad -1, \quad +1{,}5, \quad +3{,}2, \quad -0{,}5, \quad +\frac{3}{4}, \quad -2\frac{3}{5}$

2. Stelle die folgenden rationalen Zahlen durch Pfeile dar (Einheit 1 mm)!
a) $+23, \ -15, \ +47, \ -33, \ +12$ b) $-16, \ +16, \ -21, \ +21, \ 0$

3. Welche rationalen Zahlen werden durch die Pfeile in der Abbildung 8 (Einheit 1 cm) dargestellt?

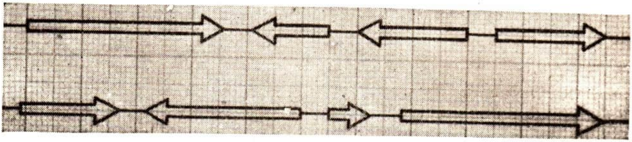


Abb. 8

IV. Das Rechnen mit rationalen Zahlen

10. Die Addition

Bei der Addition von rationalen Zahlen unterscheiden wir drei Fälle:

1. Fall: Die beiden Summanden sind positiv.
Beispiel: $(+5) + (+3)$

2. Fall: Die beiden Summanden sind negativ.
Beispiel: $(-5) + (-3)$

3. Fall: Die beiden Summanden haben verschiedene Vorzeichen.
Beispiele: $(+8) + (-5)$
$(-8) + (+5)$

Um die Rechenregeln für die Addition herzuleiten, verwenden wir die Darstellung rationaler Zahlen durch Pfeile.

Die Abbildung 9 zeigt den 1. Fall, die Abbildung 10 den 2. Fall. In beiden Abbildungen wurden die Pfeile der Summanden aneinandergesetzt (addiert). Der Pfeil der Summe verläuft vom Anfang des einen Pfeiles zur Spitze des anderen Pfeiles.

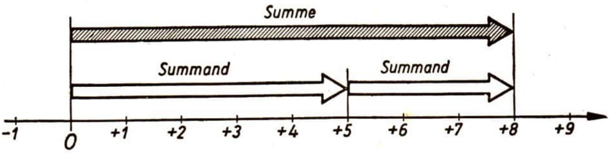


Abb. 9

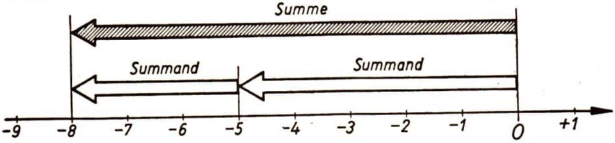


Abb. 10

Vergleichen wir diese beiden Fälle miteinander, so erkennen wir:

> Der absolute Betrag der Summe ist gleich der Summe aus den absoluten Beträgen der Summanden. Das Vorzeichen der Summe ist gleich dem Vorzeichen der Summanden.

Es bleibt noch der 3. Fall. Hier müssen wir unterscheiden:

a) Der absolute Betrag des positiven Summanden ist größer als der des negativen (Abb. 11).

b) Der absolute Betrag des positiven Summanden ist kleiner als der des negativen (Abb. 12).

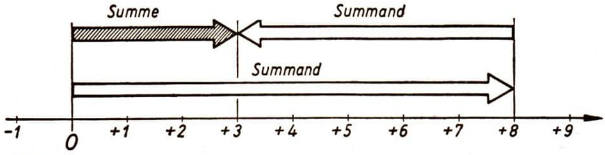


Abb. 11

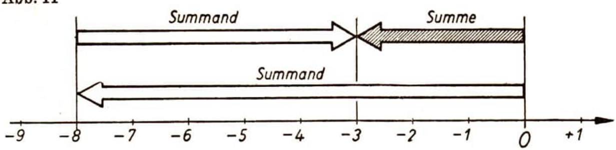


Abb. 12

Auch in diesen beiden Abbildungen wurden die Pfeile der Summanden aneinandergesetzt. Der Pfeil vom Anfang des eines Pfeiles zur Spitze des anderen ist wieder der Pfeil der Summe.

Vergleichen wir die Abbildungen **11** und 12 miteinander, so stellen wir fest:

> Der absolute Betrag der Summe ist gleich der Differenz aus den absoluten Beträgen der Summanden. Das Vorzeichen der Summe ist gleich dem Vorzeichen des Summanden mit dem größeren absoluten Betrag.

In den beiden Regeln spielt die Reihenfolge der Summanden keine Rolle. Also gilt bei der Addition rationaler Zahlen das Vertauschungsgesetz: Die Summanden können vertauscht werden.

Beispiele:

$$(+5) + (-3) = (-3) + (+5)$$
$$(-5) + (+3) = (+3) + (-5)$$
$$(-3) + (-5) = (-5) + (-3)$$

Zusammenfassung:

1. **Zwei rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen addiert man, indem man die Summe ihrer absoluten Beträge bildet und dieser Summe das Vorzeichen der Summanden gibt.**
2. **Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen addiert man, indem man die Differenz ihrer absoluten Beträge bildet und dieser Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren absoluten Betrag gibt.**
3. **Die Summanden können vertauscht werden (Vertauschungsgesetz der Addition).**

Aufgaben

1. Addiere und stelle die Aufgaben durch Pfeile dar!

a) $(+3) + (+4)$ b) $(-5) + (-3)$ c) $(+4) + (-3)$ d) $(-3) + (+2)$
e) $(+1) + (+5)$ f) $(-1) + (-2)$ g) $(+2) + (-2)$ h) $(-5) + (+6)$
i) $0 + (+6)$ k) $0 + (-5)$ l) $(+5) + (-6)$ m) $(-4) + (+4)$

2. a) $\left(+13\frac{1}{2}\right) + (-5)$ b) $\left(-31\frac{7}{10}\right) + (-19)$ c) $\left(-14\frac{3}{4}\right) + (-9)$
d) $(+30) + \left(+10\frac{11}{12}\right)$ e) $\left(-15\frac{7}{8}\right) + (+16)$ f) $\left(+25\frac{10}{17}\right) + (-36)$
g) $(+20) + \left(-15\frac{4}{5}\right)$ h) $\left(-33\frac{5}{7}\right) + (-27)$ i) $(-23) + \left(+24\frac{1}{2}\right)$

3. a) $(-135{,}76) + (-198{,}39)$ b) $(+128{,}45) + (-79{,}376)$
c) $(+566{,}39) + (+119{,}45)$ d) $(-411{,}106) + (+266{,}3)$

e) $(+386{,}76) + (-212{,}68)$ f) $(-\ 91{,}6) + (-\ 99{,}305)$
g) $(+596{,}22) + (+498{,}69)$ h) $(-\ 42{,}98) + (-\ 40{,}374)$
i) $(-158{,}39) + (-272{,}00)$ k) $(-\ 59{,}697) + (+\ 80{,}102)$

4. a) $\begin{array}{r}(+4075)\\ +\ (+6987)\\ \hline\end{array}$ b) $\begin{array}{r}(-3643)\\ +\ (-5479)\\ \hline\end{array}$ c) $\begin{array}{r}(+5246)\\ +\ (-2625)\\ \hline\end{array}$ d) $\begin{array}{r}(-7532)\\ +\ (+9611)\\ \hline\end{array}$

e) $\begin{array}{r}(-40{,}53)\\ +\ (+62{,}25)\\ \hline\end{array}$ f) $\begin{array}{r}(+81{,}06)\\ +\ (-59{,}75)\\ \hline\end{array}$ g) $\begin{array}{r}(-17{,}66)\\ +\ (-84{,}34)\\ \hline\end{array}$ h) $\begin{array}{r}(-93{,}46)\\ +\ (+27{,}19)\\ \hline\end{array}$

5. a) $\begin{array}{r}(+97{,}16)\\ +\ (-35{,}68)\\ \hline\end{array}$ b) $\begin{array}{r}(-68{,}48)\\ +\ (-89{,}76)\\ \hline\end{array}$ c) $\begin{array}{r}(+54{,}81)\\ +\ (-73{,}85)\\ \hline\end{array}$ d) $\begin{array}{r}(+59{,}36)\\ +\ (+46{,}78)\\ \hline\end{array}$

11. Die Subtraktion

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Das haben wir bisher immer bei der Probe für eine Subtraktionsaufgabe ausgenutzt. Betrachten wir zum Beispiel die Aufgabe

$$\begin{array}{ccccc} 9 & - & 4 & = & 5\ , \\ \text{Minuend} & - & \text{Subtrahend} & = & \text{Differenz.} \end{array}$$

Bei der Probe addieren wir zur Differenz den Subtrahend. Das Ergebnis muß dann der Minuend sein:

$$\begin{array}{ccccc} 5 & + & 4 & = & 9\ , \\ \text{Differenz} & + & \text{Subtrahend} & = & \text{Minuend.} \end{array}$$

Die Differenz ist also diejenige Zahl, zu der man den Subtrahenden addieren muß, wenn man den Minuenden erhalten will. Für die Pfeildarstellung der Subtraktion rationaler Zahlen bedeutet das: Wir suchen den Pfeil, zu dem man den Pfeil des Subtrahenden addieren muß, um den Pfeil des Minuenden zu erhalten. Dazu zeichnen wir den Pfeil des Subtrahenden so an den Pfeil des Minuenden, daß die Pfeilspitzen zusammentreffen (Abb. 13). Der Pfeil vom Anfang des Minuenden zum Anfang des Subtrahenden ist der gesuchte Pfeil. Er stellt die Differenz dar.

In dem betrachteten Beispiel haben wir zwei positive Zahlen verwendet. Die Überlegungen gelten aber auch dann, wenn der Minuend oder der Subtrahend nicht positiv sind. Immer zeichnen wir die Pfeilspitze des Subtrahenden an die Pfeilspitze des Minuenden, und der Pfeil vom Anfang des Minuenden zum Anfang des Subtrahenden ist immer der Pfeil der Differenz.

Nun drehen wir in der Abbildung 13 den Pfeil des Subtrahenden um (Abb. 14); das heißt, wir vertauschen Pfeilspitze und Pfeilanfang. Dadurch wird aus der Subtraktionsaufgabe eine Additionsaufgabe: der eine

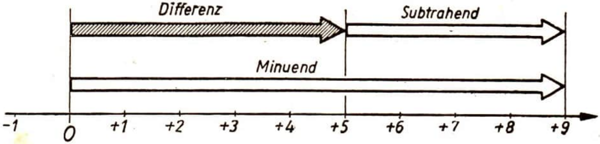


Abb. 13

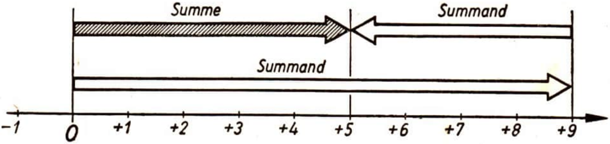


Abb. 14

Summand ist der bisherige Minuend, der andere Summand ist die zum bisherigen Subtrahenden entgegengesetzte Zahl; die Summe ist die bisherige Differenz.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich:

> Die Subtraktion einer rationalen Zahl führt zu demselben Ergebnis wie die Addition der zu ihr entgegengesetzten Zahl.

Mit den bisherigen Zahlen war nicht jede Subtraktionsaufgabe lösbar. Der Subtrahend durfte nämlich nicht größer sein als der Minuend.

Beispiel: Die Aufgabe $5-7$ ist mit den bisherigen Zahlen nicht lösbar, weil der Subtrahend größer ist als der Minuend.

Mit den rationalen Zahlen können wir jede Subtraktionsaufgabe lösen, da jede Subtraktionsaufgabe auf eine Additionsaufgabe zurückgeführt werden kann. Jede Additionsaufgabe ist aber lösbar.

Beispiel: $(+5)-(+7)=(+5)+(-7)=(-2)$

Die Aufgabe $(+5)-(+7)$ ist also lösbar, obwohl der Subtrahend größer ist als der Minuend.

Zusammenfassung:

Man subtrahiert eine rationale Zahl, indem man die zu ihr entgegengesetzte Zahl addiert. Jede Subtraktionsaufgabe ist lösbar.

Aufgaben

1. a) $(+5)-(+3)$ **b)** $(-4)-(-7)$ **c)** $(+6)-(-2)$ **d)** $(-4)-(+4)$
e) $(+1)-(+4)$ **f)** $(-9)-(-2)$ **g)** $(+2)-(-5)$ **h)** $(-6)-(+3)$
i) $(+2)-0$ **k)** $(-2)-0$ **l)** $(+3)-(-1)$ **m)** $(-7)-(+1)$

2. a) $\left(-43\frac{1}{2}\right)-\left(+22\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(+16\frac{15}{16}\right)-\left(+14\frac{3}{4}\right)$ c) $\left(-16\frac{3}{4}\right)-\left(-17\frac{3}{8}\right)$

d) $(-20)-\left(+22\frac{1}{5}\right)$ e) $(+28)-\left(-15\frac{7}{10}\right)$ f) $\left(+14\frac{1}{9}\right)-\left(-14\frac{1}{7}\right)$

g) $\left(-7\frac{3}{4}\right)-\left(+7\frac{3}{8}\right)$ h) $\left(-7\frac{3}{4}\right)-\left(-7\frac{7}{12}\right)$ i) $\left(+3\frac{3}{4}\right)-\left(+2\frac{1}{8}\right)$

3. a) $(+12{,}345)-(+98{,}765)$ b) $(-134{,}67)-(+256{,}00)$

c) $(-12{,}345)-(+98{,}765)$ d) $(+963{,}21)-(+975{,}21)$

e) $(-12{,}345)-(-98{,}765)$ f) $(-0{,}3456)-(-0{,}7891)$

g) $(+12{,}345)-(-98{,}765)$ h) $(-2{,}468)-(+1{,}357)$

i) $(+45{,}678)-(-54{,}321)$ k) $(+12{,}48)-(+13{,}96)$

4. a) $\begin{array}{r}(+2134)\\ -(+1056)\\ \hline\end{array}$ b) $\begin{array}{r}(+4268)\\ -(-2112)\\ \hline\end{array}$ c) $\begin{array}{r}(-1798)\\ -(+7236)\\ \hline\end{array}$ d) $\begin{array}{r}(-3927)\\ -(-7256)\\ \hline\end{array}$

e) $\begin{array}{r}(-3579)\\ -(-3208)\\ \hline\end{array}$ f) $\begin{array}{r}(+8645)\\ -(+6957)\\ \hline\end{array}$ g) $\begin{array}{r}(+5091)\\ -(-4243)\\ \hline\end{array}$ h) $\begin{array}{r}(-2874)\\ -(+8427)\\ \hline\end{array}$

5. a) $\begin{array}{r}(+386{,}76)\\ -(-212{,}68)\\ \hline\end{array}$ b) $\begin{array}{r}(+566{,}39)\\ -(+915{,}27)\\ \hline\end{array}$ c) $\begin{array}{r}(-411{,}61)\\ -(+256{,}03)\\ \hline\end{array}$

d) $\begin{array}{r}(+128{,}45)\\ -(-679{,}37)\\ \hline\end{array}$ e) $\begin{array}{r}(-435{,}57)\\ -(-198{,}89)\\ \hline\end{array}$ f) $\begin{array}{r}(-603{,}14)\\ -(-625{,}03)\\ \hline\end{array}$

12. Algebraische Summen

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, daß wir jede Subtraktionsaufgabe als Additionsaufgabe schreiben können. Deshalb brauchen wir nicht mehr zwischen Summen und Differenzen zu unterscheiden. Wir bezeichnen von jetzt an Rechenausdrücke, in denen nur die Addition und die Subtraktion auftritt, als **algebraische Summen.**

Beispiele:
$$(+3)+(-5)$$
$$(+3)-(-5)$$

Bei der Addition und Subtraktion haben wir bereits mit algebraischen Summen gearbeitet. Sie enthielten stets nur zwei Summanden. Es kommt aber häufig vor, daß eine algebraische Summe mehr als zwei Summanden enthält.

Beispiele:
$$(+1)+(-12)+(+5)+(-7)$$
$$(+7)-(+3)+(+1)+(+9)-(-2)$$

Wir wollen jetzt lernen, wie man derartige algebraische Summen berechnet.

Dabei sind zwei Fälle möglich:

1. Fall: Die algebraische Summe enthält keine Subtraktionen.
2. Fall: Die algebraische Summe enthält Subtraktionen.

Wir behandeln zunächst den 1. Fall:

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& \underbrace{(+1)+(-12)}+(+5)+(-7)\\
= & \underbrace{(-11)+(+5)}+(-7)\\
= & \underbrace{(-6)+(-7)}\\
= & -13
\end{aligned}
$$

Wir können die Summanden in der Reihenfolge addieren, in der sie aufgeschrieben sind.

Oft ergeben sich wesentliche Vereinfachungen, wenn wir das Vertauschungsgesetz anwenden. So ist es zum Beispiel zweckmäßig, die positiven Summanden für sich und die negativen Summanden für sich zusammenzufassen und dann die beiden Teilsummen zu addieren.

Wir ordnen die Summanden um und fassen positive und negative für sich zusammen.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& (+2)+(-5)+(+9)+(-4)\\
= & \underbrace{(+2)+(+9)}+\underbrace{(-5)+(-4)}\\
= & \underbrace{(+11)+(-9)}\\
= & +2
\end{aligned}
$$

Den 2. Fall können wir folgendermaßen lösen: Wir führen jede Subtraktion auf die Addition der entgegengesetzten Zahl zurück. Damit enthält die algebraische Summe nur noch Additionen, und sie kann leicht nach dem 1. Fall berechnet werden.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& (+7)-(+3)+(+1)-(+19)-(-\ 2)\\
= & (+7)+(-3)+(+1)+(-19)+(+\ 2)\\
= & \underbrace{(+7)+(+1)+(+2)}+\underbrace{(-\ 3)+(-19)}\\
= & \underbrace{(+10)+(-22)}\\
= & -12
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung:

1. **Ein Rechenausdruck mit rationalen Zahlen, der nur Additionen und Subtraktionen enthält, heißt algebraische Summe.**
2. **Eine algebraische Summe berechnet man folgendermaßen:**
   a) Man führt Subtraktionen auf Additionen zurück.
   b) Man ordnet die Summanden zweckmäßig.
   c) Man bildet Teilsummen.
   d) Aus den Teilsummen bildet man die Endsumme.

Aufgaben

1. **a)** $(+231) + (+188)$ **b)** $(-496) + (+347)$ **c)** $(+5{,}64) + (-7{,}33)$

d) $(-157) + (+209) + (-53)$ **e)** $(+2099) + (-738) + (-1245)$

f) $\left(+9\frac{1}{2}\right) + \left(-4\frac{3}{4}\right) + \left(+1\frac{1}{4}\right)$ **g)** $(-10{,}15) + (22{,}30) + (-12{,}15)$

h) $(+11) + (-72) + (+83) + (-11) + (-32) + (+56)$

i) $(-2{,}85) + (+97) + (+41{,}37) + (-13{,}96) + (+17{,}69) + (-0{,}11)$

k) $(+12{,}28) + \left(-80\frac{3}{4}\right) + (101{,}50) + \left(-\frac{1}{4}\right) + (+0{,}25)$

l) $\left(-\frac{7}{9}\right) + \left(+15\frac{2}{5}\right) + \left(-29\frac{2}{9}\right) + \left(-1\frac{1}{5}\right) + \left(+49\frac{4}{5}\right)$

m) $(+3{,}3) + \left(-12\frac{4}{5}\right) + \left(-31\frac{3}{5}\right) + (+59{,}8) + (-8{,}7)$

2. **a)** $(+437) - (+188)$ **b)** $\left(-\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{11}{12}\right)$ **c)** $(+23) - \left(-18\frac{3}{4}\right)$

d) $(-139) - (-139) - (+572)$ **e)** $(-2{,}54) - (-11{,}23) - (+4{,}78)$

f) $\left(+3\frac{2}{5}\right) - \left(-8\frac{3}{10}\right) - \left(+6\frac{7}{10}\right)$ **g)** $\left(-4\frac{1}{2}\right) - (+1{,}25) - (-7)$

h) $(-559) - (-141) - (-428) - (-19)$

i) $(+18{,}72) - (+1{,}63) - (+9{,}48) - (+8{,}55)$

k) $(-79{,}5) - \left(-32\frac{1}{4}\right) - (+19{,}25) - \left(-48\frac{3}{4}\right) - (+5{,}75)$

l) $(+473{,}63) - (+208{,}17) - (-89{,}41) - (-17{,}09) - (+473{,}65)$

m) $\left(+17\frac{3}{4}\right) - (+6{,}25) - \left(-8\frac{1}{2}\right) - (+0{,}75) - \left(-22\frac{1}{4}\right)$

3. **a)** $(-2578) - (+3649)$ **b)** $(+10809) - (+954) + (-8006)$

c) $(+59076) + (-61807)$ **d)** $(-17032) + (-268) - (-17300)$

e) $(-409{,}78) - (-731{,}25)$ **f)** $(+560{,}70) - (+345{,}00) - (+222{,}92)$

g) $\left(+364\frac{4}{5}\right) + (-122{,}9)$ **h)** $\left(-4\frac{2}{7}\right) - \left(-2\frac{3}{14}\right) + \left(+8\frac{5}{7}\right)$

i) $\left(-17\frac{1}{2}\right) - \left(+24\frac{3}{4}\right)$ **k)** $(+28{,}9) + \left(-17\frac{3}{5}\right) - \left(-9\frac{3}{10}\right)$

l) $(+7954) - (-2047) - (+4643) + (-6009) + (+3406)$

m) $(-82{,}56) + (-34{,}67) - (+25{,}17) - (-50{,}78) + (-49{,}49)$

4. Bilde je zwei Additions- und je zwei Subtraktionsaufgaben, bei denen die Summen bzw. Differenzen folgende Werte haben!

a) -5 **b)** $+18$ **c)** -31 **d)** 0 **e)** -60 **f)** $+73$
g) -95 **h)** $+23$ **i)** -20 **k)** $-3\frac{1}{5}$ **l)** $+6\frac{6}{7}$ **m)** $-19\frac{3}{4}$

13. Multiplikation und Division

a) Multiplikation zweier Faktoren

Wir wollen nun die Regeln für die Multiplikation rationaler Zahlen kennenlernen. Dazu betrachten wir folgenden Sachverhalt:

In ein hochgelegenes Speicherbecken wird nachts Wasser gepumpt. Während der Spitzenbelastungszeiten läßt man das Wasser ausfließen; es treibt dann Turbinen an, mit deren Hilfe man zusätzlich elektrische Energie gewinnen kann.

Zu einem gewissen Zeitpunkt mißt man eine bestimmte Menge Wasser im Speicher. Man will wissen, wieviel Kubikmeter Wasser sich zu einem anderen Zeitpunkt im Becken befanden.

Ein Mehr an Wasser im Speicher wollen wir mit einer positiven Zahl, ein Weniger an Wasser mit einer negativen Zahl angeben.

Beispiele: Fließen 100 m³ Wasser zu, so wollen wir das mit $(+100)$ bezeichnen. Fließen dagegen 100 m³ aus, so bezeichnen wir das mit (-100).

Den Zeitpunkt der Messung geben wir mit 0 an, alle danach liegenden Zeitpunkte als positiv $(+)$, alle davor liegenden als negativ $(-)$.

Beispiele: Den Zeitpunkt 5 Stunden nach der Messung bezeichnen wir mit $(+5)$, den Zeitpunkt 5 Stunden vor der Messung mit (-5).

Zunächst untersuchen wir folgende zwei Fälle:

Fließen in der Stunde 100 m³ Wasser zu $(+100)$, so beträgt die Wassermenge 5 Stunden nach der Messung (zum Zeitpunkt $+5$)

$$(+100) \cdot (+5) \text{ m}^3.$$

5 Stunden lang sind in jeder Stunde 100 m³ Wasser zugeflossen, im ganzen also

$$100 \text{ m}^3 \cdot 5 = 500 \text{ m}^3.$$

Es befinden sich also 5 Stunden nach der Messung 500 m³ Wasser mehr im Speicher.

Demnach ist $$(+100) \cdot (+5) = +500.$$

Fließen dagegen 5 Stunden vor der Messung in jeder Stunde 100 m³ Wasser aus (-100), so betrug die Wassermenge 5 Stunden vor der Messung (zum Zeitpunkt -5)

$$(-100) \cdot (-5) \text{ m}^3.$$

5 Stunden lang sind in jeder Stunde 100 m³ Wasser ausgeflossen, im ganzen also

$$100 \text{ m}^3 \cdot 5 = 500 \text{ m}^3.$$

Es befanden sich also 5 Stunden vor der Messung 500 m³ Wasser mehr im Speicher.

Wir stellen fest: $$(-100) \cdot (-5) = +500.$$

Betrachten wir diese beiden Fälle, so stellen wir fest:

1. In beiden Fällen haben wir die absoluten Beträge der Faktoren miteinander multipliziert.

2. In beiden Fällen haben die Faktoren gleiche Vorzeichen, und beide Produkte sind positiv.

Nun untersuchen wir noch zwei weitere Fälle:
Fließen in der Stunde 120 m³ Wasser aus (-120), so beträgt die Wassermenge 3 Stunden nach der Messung (zum Zeitpunkt $+3$)

$$(-120) \cdot (+3) \text{ m}^3.$$

3 Stunden lang sind in jeder Stunde 120 m³ Wasser ausgeflossen, im ganzen also

$$120 \text{ m}^3 \cdot 3 = 360 \text{ m}^3.$$

Es befinden sich also 3 Stunden nach der Messung 360 m³ Wasser weniger im Speicher.

Wir stellen fest: $$(-120) \cdot (+3) = -360.$$

Fließen dagegen 3 Stunden vor der Messung in jeder Stunde 120 m³ Wasser zu $(+120)$, so betrug die Wassermenge 3 Stunden vor der Messung (zum Zeitpunkt -3)

$$(+120) \cdot (-3) \text{ m}^3.$$

3 Stunden lang sind in jeder Stunde 120 m³ zugeflossen, im ganzen also

$$120 \text{ m}^3 \cdot 3 = 360 \text{ m}^3.$$

Es befanden sich also 3 Stunden vor der Messung 360 m³ Wasser weniger im Speicher.

Demnach ist $$(+120) \cdot (-3) = -360.$$

Betrachten wir diese beiden Fälle, so stellen wir fest:

3. Auch in diesen beiden Fällen haben wir die absoluten Beträge der Faktoren miteinander multipliziert.

4. In diesen beiden Fällen haben die Faktoren verschiedene Vorzeichen, und beide Produkte sind negativ.

Fassen wir die Feststellungen 1, 2, 3 und 4 zusammen, so können wir die Regel festsetzen:

> Man multipliziert zwei rationale Zahlen, indem man das Produkt ihrer absoluten Beträge bildet. Das Produkt zweier rationaler Zahlen ist positiv, wenn die Faktoren gleiche Vorzeichen haben; das Produkt ist negativ, wenn die Faktoren verschiedene Vorzeichen haben.

In dieser Regel spielt die Reihenfolge der Faktoren keine Rolle. Also gilt bei der Multiplikation rationaler Zahlen das Vertauschungsgesetz: Die Faktoren können vertauscht werden.

b) Multiplikation mehrerer Faktoren

Beispiele:

$$\begin{aligned} &\underbrace{(+9)\cdot(-4)}\cdot(+7)\cdot(-5) \\ =\; &\underbrace{(-36)\cdot(+7)}\cdot(-5) \\ =\; &\underbrace{(-252)\cdot(-5)} \\ =\; &+1260 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(+9)\cdot\underbrace{(-4)\cdot(+7)}\cdot(-5) \\ =\; &(+9)\cdot\underbrace{(-28)\cdot(-5)} \\ =\; &\underbrace{(+9)\cdot(+140)} \\ =\; &+1260 \end{aligned}$$

Wir können die Faktoren in beliebiger Reihenfolge multiplizieren.

Wir wissen nämlich: Ein Produkt aus den bisherigen Zahlen ist unabhängig davon, wie wir die Faktoren zu Teilprodukten zusammenfassen.

> Der absolute Betrag eines Produktes aus mehreren rationalen Zahlen ist gleich dem Produkt der absoluten Beträge der rationalen Zahlen. Die Zusammenfassung zu Teilprodukten ist beliebig.

Nun überlegen wir, welches Vorzeichen ein Produkt aus mehreren Faktoren hat. Enthält das Produkt nur positive Faktoren, so ist jedes Teilprodukt positiv und damit auch das ganze Produkt.

Beispiel: $(+5)\cdot(+6)\cdot(+9)\cdot(+8) = +2160$

Enthält dagegen das Produkt auch negative Faktoren, so überlegen wir folgendermaßen: Ein Teilprodukt ist negativ, wenn es aus einem negativen und einem positiven Faktor besteht.

Beispiel: $(-5)\cdot(+6) = -30$

Tritt zu diesem Teilprodukt ein positiver Faktor, so bleibt das Vorzeichen unverändert.

Beispiel: $(-5)\cdot(+6)\cdot(+9) = -270$

Tritt jedoch ein negativer Faktor hinzu, so wird das Teilprodukt positiv.

Beispiel: $(-5)\cdot(+6)\cdot(-9) = +270$

Jeder weitere negative Faktor kehrt das Vorzeichen einmal um. Je zwei negative Faktoren lassen stets das Produkt positiv werden. Ein einzelner negativer Faktor macht es dagegen negativ. Daraus ergibt sich:

> Ist die Anzahl der negativen Faktoren gerade, so ist das Produkt positiv, ist sie ungerade, so ist das Produkt negativ.

Zusammenfassung:

1. **Man multipliziert rationale Zahlen, indem man das Produkt ihrer absoluten Beträge bildet; das Produkt ist positiv, wenn die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist, sonst ist es negativ.**
2. **Die Faktoren können beliebig zu Teilprodukten zusammengefaßt werden.**

Aufgaben

1. a) $(-7)\cdot(+3)$ b) $(-3)\cdot(+18)$ c) $(+3)\cdot(-9)$
d) $(+9)\cdot(+3)$ e) $(-11)\cdot(-11)$ f) $(-2)\cdot(-83)$
g) $(-9)\cdot(+8)$ h) $(-14)\cdot(-1)$ i) $(-15)\cdot(+12)$
k) $(-4)\cdot(-5)$ l) $(-13)\cdot(-11)$ m) $(+1)\cdot(-1)$

2. a) $(+6)\cdot(-13)$ b) $(-4)\cdot(+27)$ c) $(+9)\cdot(-18)$
d) $(+3)\cdot(-258)$ e) $(+3)\cdot(-48)$ f) $(-72)\cdot(-5)$
g) $(-2)\cdot(+579)$ h) $(-798)\cdot(-2)$ i) $(+17)\cdot(-14)$
k) $(-19)\cdot(-7)$ l) $(+206)\cdot(-4)$ m) $(-831)\cdot(+3)$

3. a) $(-7)\cdot(+8)\cdot(-3)$ b) $(+2{,}6)\cdot(-4)\cdot(+5)$
c) $(-13)\cdot(+2{,}5)\cdot(-1{,}2)$ d) $(+5)\cdot(-1)\cdot(+19)$
e) $(-6)\cdot(+9)\cdot(-1{,}7)$ f) $(+4{,}9)\cdot(-7)\cdot(+2{,}1)$
g) $(-9)\cdot(+3)\cdot(-6)$ h) $(+4{,}5)\cdot(-6)\cdot(+8)$
i) $(-7{,}3)\cdot(+6)\cdot(-5)$ k) $(-12)\cdot(-1)\cdot(+37)$

4. a) $(+6)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(+7)$ b) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(+7)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$
c) $(+27)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)$ d) $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(+94)\cdot\left(+\frac{5}{3}\right)$
e) $\left(+\frac{5}{6}\right)\cdot(-42)\cdot(-1)$ f) $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(+\frac{5}{6}\right)\cdot(-23)$
g) $\left(+\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ h) $\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(+\frac{23}{27}\right)\cdot\left(+\frac{9}{4}\right)$
i) $\left(+\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)$ k) $\left(+2\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{4}{5}\right)\cdot\left(+3\frac{2}{3}\right)$

5. Zeige, daß die Regeln für ein Produkt mit mehr als zwei Faktoren auch für ein Produkt aus nur zwei Faktoren gelten!

6. a) $(+11{,}07)\cdot(-9{,}27)\cdot(+2{,}19)$ b) $(+7{,}04)\cdot(-93{,}75)\cdot(+13{,}11)$
c) $(-6{,}38)\cdot(+0{,}93)\cdot(-8{,}63)$ d) $(+876{,}5)\cdot(+831{,}4)\cdot(-101{,}4)$
e) $(+74{,}6)\cdot(-0{,}79)\cdot(+17{,}9)$ f) $(-16{,}61)\cdot(+14{,}35)\cdot(-24{,}18)$
g) $(-3{,}675)\cdot(+8{,}177)\cdot(-0{,}507)$ h) $(+91{,}78)\cdot(-8{,}11)\cdot(-18{,}57)$

7. a) $\left(-4\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-3\frac{1}{7}\right)\cdot\left(+\frac{5}{11}\right)$ b) $\left(+8\frac{1}{4}\right)\cdot\left(+2\frac{1}{11}\right)\cdot\left(-\frac{5}{46}\right)$
c) $\left(+6\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-9\frac{9}{10}\right)\cdot\left(+4\frac{5}{22}\right)$ d) $\left(-2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)$
e) $\left(-7\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-8\frac{8}{9}\right)\cdot\left(-6\frac{3}{10}\right)$ f) $\left(-4\frac{3}{8}\right)\cdot\left(+3\frac{11}{15}\right)\cdot\left(+7\frac{7}{11}\right)$

8. a) $\left(-5\frac{3}{8}\right)\cdot\left(+2\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-3\frac{5}{9}\right)$

b) $\left(-2\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-3\frac{1}{8}\right)\cdot\left(+1\frac{3}{10}\right)\cdot\left(-4\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{4}{13}\right)$

c) $\left(-7\frac{3}{11}\right)\cdot\left(+4\frac{5}{8}\right)\cdot\left(+3\frac{2}{5}\right)\cdot\left(+\frac{4}{9}\right)\cdot\left(-4\frac{1}{4}\right)\cdot\left(+\frac{21}{37}\right)\cdot\left(-1\frac{4}{7}\right)$

9. a) $(+3)^5$ b) $(+1)^7$ c) $(-5)^4$ d) $(+1)^6$ e) $(-4)^3$

10. a) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ b) $\left(+\frac{2}{3}\right)^4$ c) $\left(-\frac{7}{8}\right)^2$ d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ e) $\left(+\frac{3}{5}\right)^4$

c) Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Das haben wir bisher immer bei der Probe für eine Divisionsaufgabe ausgenutzt. Betrachten wir zum Beispiel die Aufgabe

$$\begin{array}{ccccc} 20 & : & 5 & = & 4, \\ \text{Dividend} & : & \text{Divisor} & = & \text{Quotient.} \end{array}$$

Bei der Probe multiplizieren wir den Quotient mit dem Divisor. Das Ergebnis muß dann der Dividend sein:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & \cdot & 5 & = & 20, \\ \text{Quotient} & \cdot & \text{Divisor} & = & \text{Dividend.} \end{array}$$

Wir wollen nun überlegen, wie man eine Divisionsaufgabe mit rationalen Zahlen löst. Dazu überlegen wir zunächst, wie groß der absolute Betrag des Quotienten ist. Wenn 20 der absolute Betrag des Dividenden ist und 5 der absolute Betrag des Divisors, so muß bei der Probe gelten:

$$|\text{Quotient}| \cdot 5 = 20.$$

Daran erkennen wir, daß der absolute Betrag des Quotienten gleich dem absoluten Betrag des Dividenden geteilt durch den absoluten Betrag des Divisors ist. Das gilt auch, wenn wir andere Zahlen verwenden.

Um Regeln für das Vorzeichen des Quotienten zu finden, betrachten wir zunächst die Fälle, in denen Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen haben:

1. Es ist $(+20):(+5) = (+4)$, weil $(+4)\cdot(+5) = (+20)$ ist.
2. Es ist $(-20):(-5) = (+4)$, weil $(+4)\cdot(-5) = (-20)$ ist.

Verallgemeinern wir diese beiden Beispiele, so erkennen wir:

> Der Quotient ist positiv, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen haben.

Nun betrachten wir die Fälle, in denen Dividend und Divisor verschiedene Vorzeichen haben:

3. Es ist $(+20):(-5) = (-4)$, weil $(-4)\cdot(-5) = (+20)$ ist.
4. Es ist $(-20):(+5) = (-4)$, weil $(-4)\cdot(+5) = (-20)$ ist.

Verallgemeinern wir diese beiden Beispiele, so erkennen wir:

Der Quotient ist negativ, wenn Dividend und Divisor verschiedene Vorzeichen haben.

Zusammenfassung:

Man dividiert rationale Zahlen, indem man den Quotient aus ihren absoluten Beträgen bildet; der Quotient ist positiv, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen haben, sonst ist er negativ.

d) Besondere Ergebnisse bei Multiplikation und Division

Aus der Regel für die Multiplikation rationaler Zahlen ergibt sich:

1. Ein Produkt aus mehreren rationalen Zahlen ist gleich 0, wenn mindestens ein Faktor gleich 0 ist. Dann ist nämlich der absolute Betrag des Produktes gleich 0.

   Beispiele: $$(+3756) \cdot 0 \cdot (-5{,}6) \cdot (+24{,}36) = 0$$ $$(-8{,}6) \cdot (-2563) \cdot (+4{,}69) \cdot 0 = 0$$

2. Ein Faktor $(+1)$ kann weggelassen oder hinzugesetzt werden. Der absolute Betrag von $(+1)$ verändert nämlich den absoluten Betrag des Produktes nicht, und das positive Vorzeichen beeinflußt das Vorzeichen des Produktes nicht.

   Beispiele: $$(+3) \cdot (-5) \cdot \mathbf{(+1)} \cdot (-2) = (+3) \cdot (-5) \cdot (-2) = +30$$ $$(-2) \cdot \mathbf{(+1)} \cdot (+2) \cdot (+4) = (-2) \cdot (+2) \cdot (+4) = -16$$

3. Ein Faktor (-1) läßt den absoluten Betrag des Produktes unverändert; er beeinflußt aber das Vorzeichen des Produktes.

   Beispiel: $$(+5) \cdot (+4) \cdot (-2) \cdot \mathbf{(-1)} = +40$$ $$(+5) \cdot (+4) \cdot (-2) = -40$$

Aus den Regeln für die Division rationaler Zahlen ergibt sich:

4. Ist der Divisor gleich $(+1)$, so ist der Quotient gleich dem Dividenden. Ist der Divisor gleich (-1), so ist der Quotient gleich der entgegengesetzten Zahl des Dividenden.

   Beispiele: $$(+6) : (+1) = +6$$ $$(-325) : (+1) = -325$$ $$(+0{,}67) : (-1) = -0{,}67$$ $$\left(-\tfrac{3}{4}\right) : (-1) = +\tfrac{3}{4}$$

5. a) Wir wollen jetzt versuchen, die Aufgabe $(+3) : 0$ zu lösen. Den Quotient kennen wir noch nicht, deshalb bezeichnen wir ihn vorläufig mit x.

   Wenn unsere Lösung richtig ist, lautet die Probe

   $$\text{Quotient} \cdot \text{Divisor} = \text{Dividend},$$ $$x \cdot 0 = +3.$$

Wir wissen aber: wenn in einem Produkt ein Faktor gleich 0 ist, so ist das Produkt gleich 0. Deshalb kann die Zahl 0 nicht Divisor von (+3) sein. Nur wenn der Dividend auch gleich 0 wäre, würde die Probe stimmen, bei jeder anderen Zahl aber wird sie falsch. Daraus ergibt sich: Die Zahl 0 kann nicht Divisor eines Dividenden sein, der nicht gleich 0 ist.

b) Nun wollen wir versuchen, die Aufgabe 0 : 0 zu lösen. Wie oben bezeichnen wir den zunächst unbekannten Quotienten mit x. Die Probe ergibt:

$$\text{Quotient} \cdot \text{Divisor} = \text{Dividend},$$
$$x \cdot 0 = 0.$$

Diese Probe stimmt aber für **jede** Zahl x, zum Beispiel für (+3), für (−25), für (+3675), für (−0,5). Das bedeutet aber, daß man aus der Division 0 : 0 kein bestimmtes Ergebnis erhält.

c) Fassen wir a) und b) zusammen, so stellen wir fest:

Man kann nicht durch 0 dividieren.

Aufgaben

1. a) (+ 48) : (− 6) b) (+ 72) : (+ 8) c) (+ 96) : (+12)
d) (+ 64) : (−16) e) (+119) : (−17) f) (+ 92) : (− 4)
g) (−108) : (+18) h) (−105) : (−21) i) (−104) : (+ 8)

2. a) (− 75) : (+15) b) (+ 98) : (−49) c) (−246) : (−82)
d) (+114) : (−19) e) (− 81) : (−27) f) (−189) : (+ 7)
g) (− 91) : (+13) h) (+126) : (−14) i) (−376) : (+94)

3. a) (−2075) : (−1) b) (+10305) : (−1) c) (−898) : (+ 1)

4. a) (+11) : (+33) b) (− 7) : (−28) c) (+ 6) : (−78)
d) (− 9) : (+45) e) (−14) : (−84) f) (−24) : (+72)
g) (−27) : (+65) h) (−51) : (−85) i) (−28) : (−49)

5. a) (+ 846) : (− 47) b) (− 98) : (+294) c) (+1645) : (− 35)
d) (−1029) : (+ 21) e) (+ 688) : (+ 86) f) (− 54) : (+351)
g) (+ 78) : (+507) h) (− 132) : (−528) i) (+ 722) : (− 76)

6. a) (− 28,5) : (+13,5) b) (+308,4) : (−29,2)
c) (+ 31,2) : (− 0,12) d) (+11,78) : (− 5,12)
e) (− 24,8) : (+ 0,8) f) (− 5,8) : (+17,4)
g) (− 2,75) : (+ 0,25) h) (+ 4,95) : (−33)

7. a) $\left(+\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(-2\frac{2}{3}\right):\left(+1\frac{5}{8}\right)$ c) $\left(-9\frac{1}{2}\right):\left(+6\frac{2}{3}\right)$
d) $\left(+5\frac{1}{6}\right):\left(-3\frac{3}{4}\right)$ e) $\left(-\frac{7}{8}\right):\left(+\frac{5}{12}\right)$ f) $\left(+9\frac{1}{3}\right):\left(-2\frac{3}{4}\right)$
g) $\left(-3\frac{5}{9}\right):\left(+5\frac{1}{3}\right)$ h) $\left(+\frac{13}{22}\right):(-1)$ i) $(-1) : \left(+5\frac{1}{7}\right)$

8. a) $\left(+23\frac{9}{13}\right)\cdot(-1)$ b) $\left(+\frac{23}{48}\right)\cdot\left(-\frac{48}{23}\right)$ c) $(-1)\cdot(-256{,}78)$
d) $\left(-48\frac{17}{25}\right)\cdot(+1)$ e) $\left(-\frac{34}{21}\right)\cdot\left(+\frac{21}{34}\right)$ f) $(+10798)\cdot 0$

9. a) $(+271):(+1)$ b) $(+\ 1):(+43)$ c) $(-409):(+1)$
d) $(+\ 1):\left(-\frac{2}{3}\right)$ e) $(+397):(-1)$ f) $(-\ 1):\left(-\frac{1}{4}\right)$

10. Schreibe alles auf, was du über die Division durch 0 weißt! Unterscheide dabei die Fälle a) Dividend gleich 0, und b) Dividend nicht gleich 0!

14. Vergleich der positiven Zahlen mit den bisherigen Zahlen

Wir haben die rationalen Zahlen und das Rechnen mit ihnen kennengelernt. Jetzt wollen wir die positiven Zahlen mit den Zahlen vergleichen, die wir vor der Einführung der rationalen Zahlen kannten.

Bei der Behandlung der Zahlengeraden stellten wir bereits fest: Die positiven Zahlen sind auf der Zahlengeraden genauso angeordnet wie die bisherigen Zahlen auf dem Zahlenstrahl; die positiven Zahlen stimmen mit den bisherigen Zahlen überein (Abb. 15).

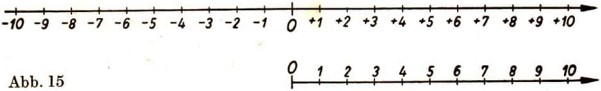


Abb. 15

Es besteht aber auch Übereinstimmung zwischen den Rechenoperationen mit positiven Zahlen und den Rechenoperationen mit den bisherigen Zahlen.

Betrachten wir zum Beispiel die Aufgabe $(+6)+(+5)$! Wir wissen: Die Summe zweier positiver Zahlen ist positiv. Die Größe der Summe berechnen wir mit Hilfe der absoluten Beträge:

$$(+6)+(+5)=(+11), \qquad |+6|+|+5|=|+11|, \qquad \mathbf{6+5=11.}$$

Aus dieser Gegenüberstellung erkennen wir sofort, daß die Addition positiver Zahlen mit der Addition der bisherigen Zahlen übereinstimmt.

Auf genau die gleiche Weise können wir uns auch die Übereinstimmung von Subtraktion, Multiplikation und Division klarmachen. Bei der Subtraktion ist allerdings eine Einschränkung notwendig: der Subtrahend darf bei den bisherigen Zahlen nicht größer sein als der Minuend.

Das Rechnen mit den positiven Zahlen stimmt also vollständig mit dem Rechnen mit den bisherigen Zahlen überein. Man kann daher die bisherigen Zahlen durch die positiven oder die positiven Zahlen durch die bisherigen Zahlen ersetzen. Wir haben sozusagen unsere bisherigen Zahlen, die wir von jetzt an nur noch als positive Zahlen ansehen wollen, um die negativen Zahlen erweitert. Dadurch haben wir zweierlei erreicht:

1. Wir können bestimmte Sachverhalte durch rationale Zahlen eindeutig angeben (zum Beispiel Temperaturen, Abweichungen vom Durchschnitt usw.).
2. Durch die Einführung der negativen Zahlen ist jede Subtraktionsaufgabe lösbar geworden.

Da wir die bisherigen Zahlen durch die positiven Zahlen ersetzt haben, können wir das positive Vorzeichen weglassen, ohne daß Unklarheiten entstehen. Man muß aber beachten, daß eine Zahl ohne Vorzeichen stets als positive Zahl anzusehen ist. Wir denken uns also bei Zahlen ohne Vorzeichen immer das Pluszeichen dazu.

Beispiele: $465 = +465$, $\quad 0{,}8 = +0{,}8$, $\quad \frac{2}{3} = +\frac{2}{3}$.

Das negative Vorzeichen kann man dagegen nicht weglassen; sonst könnte man die negativen Zahlen nicht mehr von den positiven unterscheiden. Die Zahlenangaben wären dann nicht mehr eindeutig.

Zusammenfassung:

1. **Die positiven Zahlen entsprechen den bisherigen Zahlen.**
2. **Die positiven Zahlen wurden um die negativen Zahlen erweitert.**

15. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Schreibe auf, was du über die rationalen Zahlen und ihre Darstellung weißt!

2. a) $(+49) - (+72) + (+32)$ b) $(-231) + (+325) - (+169)$
c) $(-58) + (-37) + (+58)$ d) $(+286) - (+405) - (-356)$
e) $(+34) - (-89) - (+164)$ f) $(-509) + (-362) - (+693)$

3. a) $16969 - 104582 + 98965$ b) $-1436 + 2587 - 1708$
c) $94126 - 45691 + 21056 - 94126 - 13614 + 51469$
d) $-3654 - 4757 - 2013 - 18085 - 5776 - 9082 - 6801$
e) $608007 - 492856 - 103643 + 597239 + 492856 - 897654$
f) $-232549 + 123424 + 25298 - 17611 + 90078 + 17611$

4. Stelle die Aufgaben a) und b) auch auf der Zahlengeraden (Einheit 1 cm) dar!

a) $4{,}5 - 3{,}8 + 4{,}9$ **b)** $-3{,}1 + 4{,}8 - 3{,}1 + 1{,}4$

c) $29{,}78 - 58{,}43 + 82{,}67 - 94{,}06 + 18{,}26 - 29{,}78 + 30{,}09$

d) $-65{,}60 - 21{,}09 - 43{,}72 - 109{,}19 - 52{,}38 - 9{,}01 - 160{,}27$

e) $48{,}07 - 69{,}89 + 37{,}28 + 75{,}08 + 69{,}89 - 90{,}46 - 41{,}99$

5. a) $-5\frac{3}{7} - 3\frac{2}{9} + 15\frac{10}{63} - 92\frac{16}{21}$ **b)** $-3\frac{1}{8} - \frac{7}{15} + 14\frac{3}{5} + \frac{4}{15} - 9\frac{1}{4}$

6. Was folgt aus den Regeln über die Multiplikation rationaler Zahlen für ein Produkt aus zwei Faktoren, wenn **a)** ein Faktor gleich 0 ist, **b)** ein Faktor (+1) auftritt, **c)** ein Faktor (—1) auftritt?

7. a) $(-4332) \cdot (+\ 125)$ **b)** $(+8143) \cdot (-1) \cdot (+80345)$

c) $(+\ 256) \cdot (-1654)$ **d)** $(-94837) \cdot (+2) \cdot (-3506)$

e) $(-6009) \cdot (-\ 784)$ **f)** $(-8245193) \cdot 0 \cdot (-12453)$

g) $(+9826) \cdot (+\ 589)$ **h)** $(+40508) \cdot (-8796) \cdot (+1)$

i) $(-\ 837) \cdot (+6519)$ **k)** $(-2345) \cdot (-4567) \cdot (-89)$

8. a) $(-650887) \cdot 9654 \cdot 0$ **b)** $871 \cdot (-235{,}6) \cdot (-1)$

c) $(-1) \cdot 2006 \cdot 379$ **d)** $(-7534) \cdot (-978) \cdot (-1)$

e) $56235 \cdot (-89) \cdot 74$ **f)** $348 \cdot (-1) \cdot 978$

g) $(-17608534) \cdot 222 \cdot 0$ **h)** $(-1) \cdot (-7844) \cdot 736$

i) Ordne die Ergebnisse der Größe nach! Beginne mit dem größten!

9. a) $357{,}28 \cdot (-57{,}96)$ **b)** $46{,}32 \cdot (-798{,}36)$ **c)** $(-564{,}07) \cdot 84{,}37$

d) $(-203{,}27) \cdot (-49{,}68)$ **e)** $230{,}46 \cdot 63{,}79$ **f)** $(-987{,}56) \cdot 407{,}89$

g) $(-969{,}15) \cdot (-48{,}07)$ **h)** $942{,}82 \cdot (-834{,}47)$ **i)** $4705{,}08 \cdot 438{,}69$

10. a) $\left(-2\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right)$ **b)** $\left(-15\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right) \cdot (-1)$ **c)** $4\frac{1}{5} \cdot \left(-3\frac{1}{7}\right) \cdot \frac{5}{11}$

d) $\left(-7\frac{1}{5}\right) \cdot (-1) \cdot 8\frac{8}{9}$ **e)** $3\frac{5}{6} \cdot \left(-7\frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{6}{23}\right)$ **f)** $\left(-6\frac{3}{10}\right) \cdot 4\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{11}$

g) Ordne die Ergebnisse der Größe nach! Beginne mit dem kleinsten!

11. a) $(-7)^3$ **b)** $(-1)^8$ **c)** 6^4 **d)** $(-5)^3$ **e)** 2^6

12. a) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3$ **b)** $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ **c)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^6$ **d)** $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ **e)** $\left(-\frac{4}{5}\right)^5$

13. a) $(+1596) : (-57)$ **b)** $(-24892) : (-\ 98)$

c) $(-1764) : (+36)$ **d)** $(+15372) : (-183)$

e) $(+4420) : (+68)$ **f)** $(-20466) : (+379)$

g) $(-4371) : (-47)$ **h)** $(+24332) : (-\ 79)$

14. a) $(-58879) : 97$ b) $137760 : (-205)$
c) $64725 : (-863)$ d) $(-809025) : (-1)$
e) $(-66792) : (-88)$ f) $(-114642) : 579$
g) $79053 : (-1)$ h) $154732 : (-383)$

15. a) $(-5678{,}9) : (-407{,}6)$ b) $23041{,}2 : 638{,}3$
c) $8025{,}7 : (-792{,}2)$ d) $(-7533{,}6) : (-49{,}8)$
e) $(-3843{,}4) : 2050{,}5$ f) $42903{,}3 : (-487{,}6)$
g) $13758{,}3 : 824{,}1$ h) $(-7891{,}5) : 529{,}7$

16. a) $22\frac{4}{5} : (-6)$ b) $(-13) : \left(-4\frac{1}{3}\right)$ c) $(-36) : 4\frac{1}{2}$
d) $\left(-13\frac{7}{11} : 35\right)$ e) $32 : \left(-3\frac{1}{5}\right)$ f) $15\frac{5}{7} : 25$

17. a) $\left(-8\frac{2}{5}\right) : \left(-1\frac{1}{9}\right)$ b) $7\frac{5}{7} : 4\frac{4}{5}$ c) $7\frac{1}{3} : \left(-4\frac{5}{7}\right)$ d) $\left(-5\frac{2}{3}\right) : 4\frac{1}{4}$
e) $\left(-5\frac{2}{12}\right) : \left(-1\frac{4}{15}\right)$ f) $6\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$ g) $\left(-19\frac{1}{2}\right) : 28\frac{3}{5}$ h) $9\frac{1}{6} : \left(-2\frac{11}{12}\right)$

18. a) $\dfrac{\left(-5\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{7}{11}}{7\frac{2}{3}\cdot\left(-1\frac{4}{23}\right)}$ b) $\dfrac{4\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{5}{29}\right)}{3\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{13}}$ c) $\dfrac{\left(-7\frac{1}{2}\right)\cdot(-87)}{9\cdot\left(-6\frac{4}{9}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{4}\right)}$

19. Setze in den folgenden Aufgaben die fehlenden Operationszeichen ein!

a)	(-38)	$(-29) = (-67)$	f)	43	$(-51) = (-8)$
b)	(-14)	$(-35) = \frac{2}{5}$	g)	(-19)	$19 = 0$
c)	25	$(-17) = 8$	h)	$\left(-\frac{4}{9}\right)$	$2\frac{1}{4} = (-1)$
d)	(-34)	$(-4) = 136$	i)	(-140)	$(-28) = 5$
e)	$\left(-\frac{5}{8}\right)$	$\frac{10}{16} = (-1)$	k)	12	$(-12) = (-144)$

20. Ein Thermometer zeigt
a) $-5°$, und die Temperatur steigt um $8°$,
b) $+8°$, und die Temperatur fällt um $9°$,
c) $+11°$, und die Temperatur steigt um $6°$,
d) $-4°$, und die Temperatur fällt um $2°$,
e) $+23°$, und die Temperatur fällt um $4°$,
f) $0°$, und die Temperatur steigt um $3°$,

g) $+ 2°$, und die Temperatur fällt um $2°$,
h) $-13°$, und die Temperatur steigt um $5°$.

Berechne den Stand des Thermometers!

21. Was ist größer, die Differenz der rationalen Zahlen (-16) und (-28) oder die Summe der rationalen Zahlen 23 und (-45)?

22. Vermindere das Produkt aus (-3) und (-9) um 28 und multipliziere diese Differenz mit 14,62!

23. Setze in den folgenden Aufgaben die fehlenden Zahlen ein!

a)	$12 + (-16) =$	f)	$\cdot\ (-7) = (-301)$
b)	$:\ 13 = (-9)$	g)	$(-32) - (-71) =$
c)	$(-58) - \quad = 0$	h)	$:\ (-46) = (-15)$
d)	$19 \cdot (-14) =$	i)	$(-63) + \quad = 0$
e)	$+\ 126 = 39$	k)	$\cdot\ 23 = (-184)$

24. Vermehre den Quotient aus (-3) und 9 um $\left(-1\frac{1}{2}\right)$!

25. Wie groß ist der Quotient aus dem Produkt der rationalen Zahlen (-4), (-3) und 2 und der Summe von (-50) und 14?

26. Durch welche Zahl muß man den Quotienten aus der Summe und der Differenz der rationalen Zahlen (-8) und 3 dividieren, um als Ergebnis (-1) zu erhalten?

27. In Hauptwetterstationen, die Tag und Nacht besetzt sind, wird die Temperatur an einem Tage viermal gemessen (um 7.00 Uhr, 13.00 Uhr, 19.00 Uhr und 1.00 Uhr). Aus diesen Werten wird die sogenannte mittlere Temperatur des Tages (durchschnittliche Temperatur) bestimmt. Die Temperaturwerte werden dabei bis auf eine Stelle nach dem Komma genau angegeben.

An mehreren Tagen wurden folgende Temperaturen gemessen:

a) $+11{,}8°$, $+22{,}5°$, $+16{,}3°$, $+9{,}7°$
b) $-\ 3{,}9°$, $+\ 8{,}4°$, $+\ 6{,}6°$, $-2{,}8°$
c) $-\ 6{,}1°$, $+\ 2{,}0°$, $0\ °$, $-4{,}2°$
d) $-12{,}3°$, $-10{,}5°$, $-\ 7{,}4°$, $-9{,}6°$

Berechne für jeden Tag die mittlere Tagestemperatur!

Wetterstation	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Arkona	0,6	− 5,2	0,1	2,4	9,8	12,9	15,8	14,0	13,4	9,4	3,6	3,0
Schwerin	0,3	− 8,4	2,6	4,4	12,6	13,9	17,5	13,6	13,7	8,8	3,0	2,6
Neustrelitz	− 0,1	− 9,6	2,1	4,1	12,5	14,3	17,3	13,9	13,1	8,4	2,0	1,9
Potsdam	0,0	− 9,6	2,6	4,9	13,3	14,6	18,0	14,8	13,8	8,8	1,9	2,0
Jüterbog	− 0,2	− 11,3	2,7	5,0	13,1	14,6	17,9	14,9	14,0	8,8	2,3	2,0
Wittenberg	− 0,3	− 10,7	2,6	5,1	13,2	14,2	18,2	14,9	14,1	8,8	2,4	1,9
Altenburg	− 0,3	− 11,8	2,0	5,3	12,8	13,8	17,4	14,9	14,1	8,6	1,9	1,5
Plauen i. Vogtl.	− 1,1	− 12,7	1,1	4,4	11,6	12,6	16,4	14,0	13,0	7,8	0,9	0,8
Sonneberg-Stadtberg	− 2,7	− 12,1	0,3	3,7	11,0	11,0	15,1	12,3	12,5	6,4	− 0,3	− 0,5
Brocken	− 4,8	− 13,3	− 2,3	− 1,2	6,5	6,3	10,5	7,3	8,8	3,2	− 2,2	− 2,2
Fichtelberg	− 5,6	− 14,4	− 4,6	− 0,7	6,6	7,1	11,4	8,8	8,9	3,6	− 3,5	− 3,3
Geisingberg	− 3,9	− 13,2	− 2,8	1,7	9,2	9,9	13,9	11,4	11,3	6,0	− 1,8	− 1,4

28. Die mittlere Temperatur eines Jahres ist der Durchschnitt aus den mittleren Temperaturen der zwölf Monate. In der Tabelle sind die in verschiedenen Wetterstationen im Jahre 1956 bestimmten mittleren Monatstemperaturen angegeben.
   a) Berechne für jede Wetterstation die mittlere Temperatur des Jahres 1956!
   b) Berechne für jede Wetterstation die mittlere Temperatur des ersten Vierteljahres (Durchschnitt aus den mittleren Temperaturen der Monate Januar bis März)!
   c) Berechne für die Wetterstationen Brocken, Fichtelberg und Geisingberg die mittlere Temperatur des ersten Halbjahres!

29. Berechne Summe, Differenz, Produkt und Quotient der rationalen Zahlen 4 und (—2) und addiere die Ergebnisse!

30. Die bisher beobachtete höchste Temperatur der arabischen Wüste betrug $+56{,}6^\circ$C, die bisher tiefste auf der nördlichen Halbkugel $-78{,}0^\circ$C.
   Wieviel Grad beträgt der Unterschied zwischen diesen Temperaturen?

31. Der Durchmesser einer Welle wurde fünfmal gemessen. Dabei ergaben sich folgende Werte: 32,25 mm, 32,27 mm, 32,26 mm, 32,29 mm, 32,28 mm. Ermittle den Durchschnitt und gib die Abweichungen der einzelnen Meßwerte vom Durchschnitt mit rationalen Zahlen an!

V. Einführung in die Gleichungslehre

16. Der Begriff „Gleichung“

1) Wir wiederholen einige einfache Aufgaben aus dem Mathematikunterricht früherer Klassen.

1. Beispiel: Vermehre 1 um 2 und 3! Was ergibt sich?
Man schreibt $1 + 2 + 3 = 6$ und liest: „1 plus 2 plus 3 ist gleich 6“.

2. Beispiel: Zerlege 6 in drei positive ganze Zahlen als Summanden! Was ergibt sich?

Man notiert $6 = 1 + 2 + 3$ und liest: „6 ist gleich 1 plus 2 plus 3“. Indem man die Aufgabe links, das Ergebnis aber rechts schreibt, erkennt man deutlich, in welcher Richtung man gerechnet hat (die Pfeile mögen die Richtung des Rechnens und Lesens andeuten):

Beim 1. Beispiel	$\overrightarrow{1 + 2 + 3 = 6}$
Beim 2. Beispiel	$\underrightarrow{6 = 1 + 2 + 3}$

Man könnte beides, ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen, auch folgendermaßen einfacher durch eine einzige Beziehung schreiben:

1. Beispiel
2. Beispiel

$$\underleftarrow{\overrightarrow{1 + 2 + 3 = 6}}$$

Das heißt: Man könnte bei der Beziehung $1 + 2 + 3 = 6$ sowohl erst die linke Seite und dann die rechte (1. Beispiel), als auch erst die rechte und dann die linke (2. Beispiel) lesen. Das ist möglich, weil rechts und links vom Gleichheitszeichen gleiche Werte ($1 + 2 + 3$ und 6) stehen.

In dieser Deutung nennt man

$$1 + 2 + 3 = 6$$

eine **Gleichung**, das Symbol $=$ das **Gleichheitszeichen** und spricht von einer **linken Seite** und einer **rechten Seite** der Gleichung.

Das Wesen einer Gleichung kann an einer Waage veranschaulicht werden (Abb. 16).

Das Gleichheitszeichen stellt nicht nur eine Verbindung von Aufgabe und Ergebnis dar. Das Gleichheitszeichen deutet an, daß die Werte beider Seiten gleich groß sind. Es weist ferner darauf hin, daß jede Gleichung zum Beispiel $3 + 2 + 1 = 6$ auch in der umgekehrten Form $6 = 3 + 2 + 1$ geschrieben werden darf.

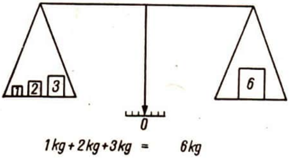


Abb. 16

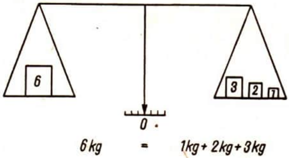


Abb. 17

Wir erkennen daraus folgenden wichtigen Satz:

Die Seiten einer Gleichung sind vertauschbar.

Das bestätigt auch die Waage (Abb. 17).

In diesem Sinne ist jede Rechenaufgabe mit ihrer fehlerfreien Lösung eine Gleichung:

$$13 \cdot 7 = 91, \quad (-5) + \left(-3\tfrac{1}{2}\right) = \left(-8\tfrac{1}{2}\right), \quad \tfrac{3}{4} : 1\tfrac{7}{8} = \tfrac{2}{5}.$$

2) Sind die Summen der Gewichtsstücke auf den Schalen einer Waage verschieden groß, so herrscht kein Gleichgewicht. In der Mathematik sagt man, daß eine **Ungleichung** vorliegt und verwendet das Symbol $\neq$.

Beispiel: $2 + 3 \neq 6$, man liest „2 plus 3 ist verschieden von 6“ oder „2 plus 3 ist nicht gleich 6“ oder „2 plus 3 ist ungleich 6“ (Abb. 18).

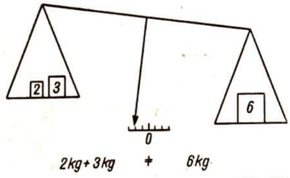


Abb. 18

Weitere Beispiele:

$$325 + 789 \neq 1014, \quad \tfrac{4}{25} \cdot 25\tfrac{1}{7} \neq \tfrac{4}{7},$$
$$(-5) : (+2) \neq (+2{,}5).$$

Genauer läßt sich eine Ungleichheit schreiben, wenn wir die Werte ihrer beiden Seiten vergleichen und feststellen, welcher der größere und welcher der kleinere ist. Beim Schreiben verwendet man dabei die Symbole $>$, gelesen „größer als“, und $<$, gelesen „kleiner als“. Statt $2 + 3 \neq 6$ schreiben wir dann

$2 + 3 < 6$ („2 plus 3 ist kleiner als 6“) oder
$6 > 2 + 3$ („6 ist größer als 2 plus 3“).

Weitere Beispiele:

$7 > 3 \qquad 0 < 15 \qquad (-2) > (-3) \qquad (-3) < \left(+\frac{1}{8}\right)$

Statt $325 + 789 \neq 1014$ genauer $325 + 789 > 1014$.

Statt $\frac{4}{25} \cdot 25\frac{1}{7} \neq \frac{4}{7}$ genauer $\frac{4}{25} \cdot 25\frac{1}{7} > \frac{4}{7}$.

Statt $(-5) : (+2) \neq (+2{,}5)$ genauer $(-5) : (+2) < (+2{,}5)$.

Durch die Symbole $=$, $\neq$, $>$, $<$ können wir nicht nur eine Rechenaufgabe und ihre (richtige bzw. falsche) Lösung verbinden, sondern auch zwei verschiedene Rechenausdrücke.

Beispiele: $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 3 \cdot (2 + 12)$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{7}$$
$$(-222) : 2 < \frac{1}{5} \cdot (-554)$$
$$(+2)^3 \neq (-2)^3$$

3) Bei Anwendungsaufgaben haben wir oft neben dem Gleichheitszeichen $=$ auch das Zeichen $\triangleq$ verwendet. So schreiben wir zum Beispiel bei einer Gegenüberstellung von Volumen und Gewicht beim Wasser: $1\,\text{dm}^3 \triangleq 1\,\text{kp}$, in Worten: $1\,\text{dm}^3$ „entspricht“ 1 kp. In diesem Falle dürfen wir nicht das Gleichheitszeichen $=$ („ist gleich“) setzen; denn $1\,\text{dm}^3$ ist nicht dasselbe wie 1 kp. Das erste ist eine Volumengröße, das zweite eine Gewichtsgröße. Allerdings besteht zwischen beiden ein Zusammenhang: $1\,\text{dm}^3$ Wasser hat ein Gewicht von 1 kp, oder einem dm^3 Wasser „entspricht“ ein Gewicht von 1 kp. Deshalb schreiben wir $1\,\text{dm}^3 \triangleq 1\,\text{kp}$.

Weitere Beispiele:

a) $0{,}50\,\text{m} = 50\,\text{cm}$; $\quad 3\,\text{DM} = 300\,\text{Pf}$.
Aber: $0{,}50\,\text{m} \triangleq 3\,\text{DM}$, wenn etwa der Preis für einen halben Meter Stoff 3 DM ist.

b) In einer LPG erhalten die Genossenschaftsmitglieder für jede Arbeitseinheit (AE) 6,15 DM. Dann können wir schreiben: 1 AE $\mathrel{\widehat{=}}$ 6,15 DM.

c) $300\,\text{l} = 3\,\text{hl}$; $800\,\text{kg} = 8\,\text{dz}$; $500\,\text{kg} = 5\,\text{dz} = \frac{1}{2}\,\text{t}$.

Da 3 hl Heizöl denselben Heizwert haben wie 8 dz Rohkohle oder wie 5 dz Braunkohlenbriketts, kann man für den Fall des Vergleichs der Heizwerte schreiben:

3 hl Heizöl $\mathrel{\widehat{=}}$ 8 dz Rohkohle $\mathrel{\widehat{=}}$ 5 dz $= \frac{1}{2}$ t Braunkohlenbriketts

Zusammenfassung:

1. **Haben zwei Zahlenausdrücke den gleichen Wert, so kann man sie durch das Gleichheitszeichen = zu einer Gleichung verbinden.**
2. **Die beiden Seiten einer Gleichung sind vertauschbar.**
3. **Haben zwei Zahlenausdrücke nicht den gleichen Wert, so kann man sie durch das Ungleichheitszeichen $\neq$ zu einer Ungleichung verbinden. Die Zeichen $>$ oder $<$ deuten eine Ungleichung genauer.**
4. **Zwei benannte Zahlen kann man nur dann durch das Gleichheitszeichen verbinden, wenn die Größen auch sachlich dasselbe darstellen. Sonst wird ein Zusammenhang durch das Zeichen $\mathrel{\widehat{=}}$ ausgedrückt.**

Aufgaben

1. a) Auf der linken Schale einer Waage stehen ein 2 kg- und ein 5 kg-Gewicht, auf der rechten drei 2 kg-Gewichte und ein 1 kg-Gewicht. Drücke das Gleichgewicht durch eine Gleichung in den entsprechenden Zahlenwerten aus!

   b) Wie lauten die Gleichungen, wenn folgende Veränderungen vorgenommen werden?

   1. Auf jede Seite werden noch drei 1 kg-Gewichte gelegt.
   2. Auf jeder Seite werden Gewichtsstücke im Werte von 5 kg weggenommen.
   3. Die Belastung wird auf jeder Seite verdoppelt.

2. Vergleiche in den folgenden Aufgaben jeweils die beiden Zahlenausdrücke und schreibe das Ergebnis als Gleichung oder als Ungleichung nieder! Die Ungleichungen schreibe noch ein zweites Mal unter Verwendung der Zeichen $>$ oder $<$!

   a) $10 - 15$ und $20 + 25$ b) $68 - 35$ und $35 - 2$

   c) $33{,}17 - 36{,}08$ und $-21{,}34$ und $24{,}25$

   d) $25\frac{3}{4} + 17\frac{1}{2}$ und $19\frac{1}{2} + 23\frac{1}{2}$

e) $16{,}95 + 21{,}18 + 33{,}76$ und $29{,}34 - 37{,}11 + 12{,}14$

f) $16\frac{5}{7} + 31\frac{4}{5} - 20\frac{12}{35}$ und $14\frac{17}{35} - 24\frac{3}{5} + 38\frac{3}{7}$

g) $34\frac{1}{2} : 15$ und $43\frac{7}{10} : 19$ h) $6 + 15\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ und $23 - 16\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

3. Stelle fest, welche zwei der folgenden Zahlenausdrücke jeweils einander gleich sind! Verbinde diese durch das Gleichheitszeichen zu einer Gleichung!

a) $3(45 - 25) + 4$ b) $-2(+4 - 3 + 1)$ c) 4^3

d) $(-8478) : 314$ e) 6^2 f) $10\frac{2}{3} : \left(-2\frac{2}{3}\right)$

g) $(-3)^3$ h) $(7 \cdot 6) - (2 \cdot 3)$ i) $(-6)^2$

4. Ergänze die rechten Seiten der folgenden Gleichungen so, daß das Gleichheitszeichen berechtigt ist! Beachte dabei, daß es manchmal mehrere Möglichkeiten gibt!

a) $15 + 8 = 25 \ldots$ b) $67 - 17 = 5 \ldots$

c) $\frac{13}{25} = \frac{65}{\ldots}$ d) $9 \cdot 16 = 12 \ldots$

e) $(-7) : \frac{1}{2} = 2 \ldots$ f) $\left(-2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) = (+3) \ldots$

g) $\frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{\ldots}{12}$ h) $0{,}024 : 0{,}8 = 0{,}003 \ldots$

5. Verbinde die folgenden Größen durch $=$ oder $\widehat{=}$!

a) 3 t und 30 dz, b) $3\frac{1}{2}$ m Stoff und 24,50 DM,

c) 1 Einmarkstück und 10 Zehnpfennigstücke,

d) 1 DM und $10 \cdot 10$ Pf.,

e) 3 ha und 630 dz (Feldgröße und Ertrag an Kartoffeln).

17. Das Umformen von Gleichungen

Wir wollen jetzt untersuchen, ob und wie man die Seiten einer Gleichung verändern kann, ohne daß die Gleichheit gestört wird. Wir machen uns das wieder an Hand einer Waage klar.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$20 + 20 + 10 + 10 = 20 + 20 + 5 + 5 + 5 + 5.$$

Die Abbildung 19 veranschaulicht die Gleichung mit Hilfe einer Tafelwaage.

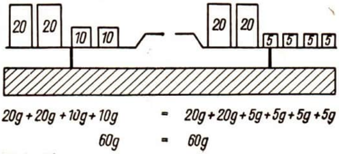


Abb. 19

1) Wenn wir den Betrag nur auf einer Waagschale verändern, kommt die Waage aus dem Gleichgewicht.

Abb. 20: links: $+50$ rechts: unverändert

$$20 + 20 + 10 + 10 + 50 \neq 20 + 20 + 5 + 5 + 5 + 5$$

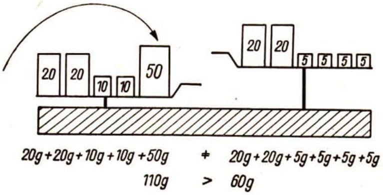


Abb. 20

Das Gleichgewicht wird auch gestört, wenn wir auf beiden Waagschalen verschiedene Veränderungen vornehmen:

Abb. 21: links: $+50$ rechts: -20

$$20 + 20 + 10 + 10 + 50 \neq 20 + 20 + 5 + 5 + 5 + 5 - 20$$

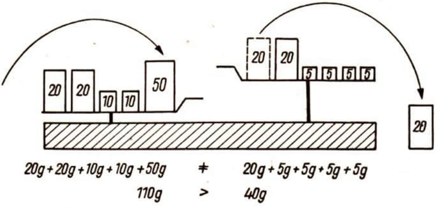


Abb. 21

Wir erkennen:

Aus der Gleichung wird eine Ungleichung, wenn nur eine Seite der Gleichung verändert wird, oder wenn beide Seiten verschieden verändert werden.

2) Anders ist es, wenn auf beiden Waagschalen zugleich gleiche Veränderungen vorgenommen werden. Dann bleibt die Waage im Gleichgewicht.

a) Wir legen auf jeder Waagschale 50 g zu (Abb. 22):

$$20 + 20 + 10 + 10 + 50 = 20 + 20 + 5 + 5 + 5 + 5 + 50.$$

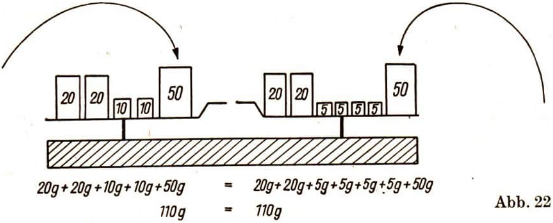


Abb. 22

b) Wir nehmen auf jeder Waagschale 20 g weg (Abb. 23):

$$20 + 20 + 10 + 10 - 20 = 20 + 20 + 5 + 5 + 5 + 5 - 20.$$

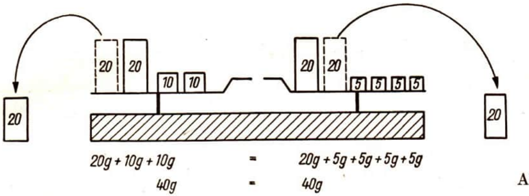


Abb. 23

c) Wir verdoppeln auf jeder Waagschale alle Gewichte (Abb. 24):

$$2 \cdot (20 + 20 + 10 + 10) = 2 \cdot (20 + 20 + 5 + 5 + 5 + 5).$$

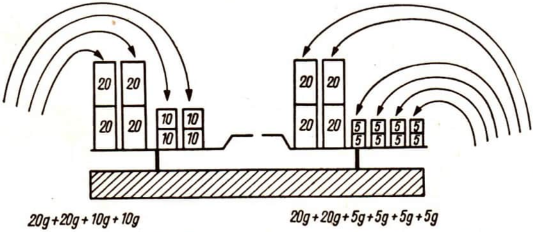


Abb. 24

d) Wir nehmen auf jeder Waagschale von jeder Sorte Gewichte die Hälfte weg; d. h. wir halbieren auf jeder Seite die Gewichtssumme (Abb. 25):

$$(20 + 20 + 10 + 10) : 2 = (20 + 20 + 5 + 5 + 5 + 5) : 2.$$

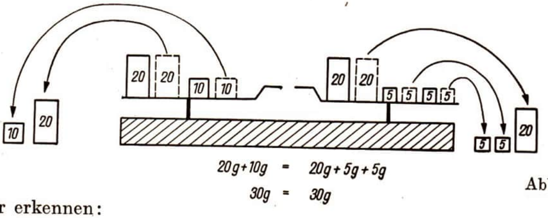


Abb. 25

Wir erkennen:

Werden beide Seiten einer Gleichung in gleicher Weise verändert, so bleibt die Gleichheit erhalten.

Diese Veränderung kann in folgenden Rechenoperationen bestehen:

	$60 = 60$	
a) Addition	$60 + 50 = 60 + 50$ $110 = 110$	Gleiches um Gleiches vermehrt ergibt Gleiches.
b) Subtraktion	$60 - 20 = 60 - 20$ $40 = 40$	Gleiches um Gleiches vermindert ergibt Gleiches.
c) Multiplikation	$60 \cdot 2 = 60 \cdot 2$ $120 = 120$	Gleiches mit Gleichem vervielfacht ergibt Gleiches.
d) Division	$60 : 2 = 60 : 2$ $30 = 30$	Gleiches durch Gleiches geteilt ergibt Gleiches.

3) Gleichungen müssen umgeformt werden, wenn eine der Seiten auf eine vorgeschriebene Form oder Größe gebracht werden soll. Die Gleichheit der Seiten muß dabei stets gewahrt bleiben.

1. Beispiel:

Die Gleichung $3 \cdot 4 = 12$ soll so umgeformt werden, daß die rechte Seite nicht 12, sondern 1 heißt. Das ist auf verschiedene Weise zu erreichen:

a) Wir vermindern 12 um 11. Um die Gleichheit zu erhalten, müssen wir aber auch die linke Seite um 11 vermindern:

$$3 \cdot 4 - 11 = 12 - 11$$
$$3 \cdot 4 - 11 = 1$$

b) Wir teilen 12 durch 12. Dann müssen wir aber auch die linke Seite durch 12 teilen:

$$3 \cdot 4 : 12 = 12 : 12$$

$$\frac{3 \cdot 4}{12} = 1$$

2. Beispiel: $30 + 7{,}5 - 18 + 2 - 20 - 5{,}5 = -4$

Forderung: Die rechte Seite soll $+4$ heißen.
Damit aus (-4) die Zahl $(+4)$ wird, kann man wieder verschieden vorgehen.

a) Wir multiplizieren (-4) mit (-1). Dann müssen wir links dasselbe tun:

$$(30 + 7{,}5 - 18 + 2 - 20 - 5{,}5) \cdot (-1) = (-4) \cdot (-1)$$

$$-30 - 7{,}5 + 18 - 2 + 20 + 5{,}5 \quad = +4$$

b) Wir addieren rechts $(+8)$. Links muß dasselbe geschehen:

$$30 + 7{,}5 - 18 + 2 - 20 - 5{,}5 + 8 = -4 + 8$$

$$30 + 7{,}5 - 18 + 2 - 20 - 5{,}5 + 8 = 4$$

Wir erkennen:

Man kann mitunter die gestellte Forderung auf verschiedene Weise erfüllen.

3. Beispiel: Wenn im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Basis mit α bezeichnet werden und der Winkel an der Spitze gleich 45° ist, so gilt die Gleichung: $2\,\alpha + 45° = 180°$.

Die Gleichung soll so umgeformt werden, daß aus dem gegebenen Winkel an der Spitze (45°) der Winkel α an der Basis berechnet werden kann, daß also die letzte Zeile der Gleichung $\alpha = \ldots$ heißt. Man sagt dafür: „Die Gleichung soll nach α aufgelöst werden“, oder „α soll isoliert werden“. Dazu muß links zweierlei „beseitigt werden“: a) der Summand 45° und b) der Faktor 2.

Um 45° auf der linken Seite wegzubringen, subtrahieren wir diese Größe auf beiden Seiten der Gleichung:

$$2\alpha + 45° - 45° = 180° - 45°$$

$$2\alpha = 135°$$

Der Faktor 2 fällt durch Division durch 2 weg:

$$2\alpha : 2 = 135° : 2$$

$$\alpha = 67\tfrac{1}{2}°$$

Ergebnis: Der Basiswinkel beträgt $67\frac{1}{2}°$.

Zusammenfassung:

1. **Eine Gleichung bleibt gültig, wenn auf beiden Seiten die gleichen Veränderungen vorgenommen werden.**
2. **Eine Gleichung nach einer Größe auflösen (die Größe isolieren) heißt die Gleichung so umformen, daß diese Größe allein auf einer Seite der Gleichung steht.**
3. **Eine Größe wird schrittweise isoliert. Die Art und die Reihenfolge der einzelnen Schritte hängt von der betreffenden Gleichung ab und muß in jedem einzelnen Fall überlegt werden.**

Aufgaben

1. Die folgenden Gleichungen sind so umzuformen, daß die eine Seite nur aus der Zahl +1 besteht. Beachte, daß es dabei oft mehrere Wege gibt! Überprüfe vorher jedesmal die Richtigkeit der Gleichung!

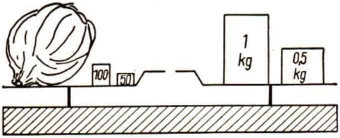
a) $6 + 1 = 7$
b) $19 = 20 - 1$
c) $5 + 3 + 1 = 9$
d) $27 + 24 - 1 = 20 + 30$
e) $11 \cdot 11 - 1 = 120$
f) $3 \cdot 23 + 1 = 70$
g) $27 : 3 + 1 = 10$
h) $182 : 7 = 25 + 1$
i) $5 \cdot 1 = 5$
k) $17 = 17$
l) $-29 = -29$
m) $3\frac{1}{2} \cdot 2 = 8 - 1$
n) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
o) $13\frac{1}{4} = 13{,}25$
p) $\left(-2\frac{1}{5}\right) : \frac{1}{5} = -9 - 2$
q) $\left(-\frac{7}{8}\right) \cdot (-1) = \frac{7}{8}$

2. Die folgenden Gleichungen sind so umzuformen, daß auf der rechten Seite 0 steht. Vorher ist jedesmal die Richtigkeit der Gleichung zu überprüfen.

a) $8 = 8$
b) $\frac{1}{8} = 0{,}125$
c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$
d) $1{,}3 \cdot 1{,}3 = 1{,}69$
e) $(-23) : (-1) = (+23)$
f) $17 \cdot 15 + 1 = 16 \cdot 16$
g) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}25$
h) $3 + 5 + 7 = 10 + 5$

18. Die Bestimmungsgleichung

1. Beispiel: Frau Jahnke kauft einen Kopf Weißkohl. Der Verkäufer legt ihn auf eine Waage, auf die andere Waagschale setzt er erst ein Kilogrammgewicht, dann noch ein $\frac{1}{2}$-kg-Gewicht dazu. Da die Waage jetzt auf der Gewichtsseite niedergeht, legt er auf die andere Waagschale zum



Kraut + 100g + 50g = 1kg + 0,5kg Abb. 26

Weißkraut Kleingewichte, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Das ist bei 150 g der Fall (Abb. 26). Wie schwer ist das Kraut?

Die Waage veranschaulicht jetzt folgende Gleichung:

$$\text{Kraut} + 100 + 50 = 1000 + 500.$$

Zur einfacheren Darstellung wollen wir das unbekannte Gewicht des Krauts durch x g darstellen. Dann erhält die Gleichung folgendes Aussehen:

$$x + 100 + 50 = 1000 + 500.$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine besondere Art. Sie wird nur dann zu einer Gleichung, wenn wir für x eine ganz bestimmte Zahl einsetzen. Jede beliebige Zahl ist dafür nicht geeignet. In den meisten Fällen entstünde dann nämlich eine Ungleichung:

Beispiele: $x = 100$; $100 + 100 + 50 \neq 1000 + 500$,
$x = 1500$; $1500 + 100 + 50 \neq 1000 + 500$,
$x = 2350$; $2350 + 100 + 50 \neq 1000 + 500$.

Nur bei einem ganz bestimmten Wert für x, nämlich bei $x = 1350$, besteht die Gleichung zu Recht:

$$x = 1350;\ 1350 + 100 + 50 = 1000 + 500.$$

Der Wert für x, für den die Gleichung richtig ist, stellt für unsere Aufgabe die Lösung dar:
Das Kraut wiegt 1350 g = 1,350 kg.

Solche Gleichungen, die nur dann richtig sind, wenn man für x einen ganz bestimmten Wert einsetzt, spielen in der Praxis zur Lösung von Anwendungsaufgaben eine große Rolle. Mit ihrer Hilfe kann man deren Ergebnisse bestimmen. Sie heißen deshalb **Bestimmungsgleichungen.** Die Größe, nach der in der Aufgabe gefragt ist, wird meist mit x bezeichnet. Man nennt diese Größe die **Unbekannte**. Der Zahlenwert für x, den man dann mit der Gleichung bestimmt (im Beispiel 1350), heißt die **Lösung** der Gleichung. Das Ermitteln dieses Zahlenwertes nennt man das **Lösen** der Bestimmungsgleichung.

Zur systematischen Berechnung wird die Bestimmungsgleichung nach der Unbekannten x aufgelöst.

Wir fassen zunächst zusammen und subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung 150.

$$\begin{aligned} x + 100 + \ \ 50 &= 1000 + 500 \\ x + 150 &= 1500 \\ x + 150 - 150 &= 1500 - 150 \\ x &= 1350 \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Weißkohlkopf wiegt 1350 g.

Beachte: Beim Umformen schreibt man auf jede Zeile nur eine Gleichung und setzt Gleichheitszeichen genau unter Gleichheitszeichen.

Es ist denkbar, daß sich bei diesen Umformungen ein Rechenfehler einschleicht, so daß die errechnete Lösung gar nicht der gesuchte Wert ist. Deshalb muß man an das Lösen die **Probe** anschließen. Sie ist genauso wichtig wie das Lösen der Gleichung selbst. Wenn der errechnete Wert die richtige Lösung ist, so muß sich wirklich in der Ausgangsgleichung eine Gleichheit der linken und der rechten Seite ergeben, wenn wir an Stelle der Unbekannten diesen Wert einsetzen. Wir führen die Probe so durch, daß wir die linke und die rechte Seite der Ausgangsgleichung für sich betrachten, überall für die Unbekannte den gefundenen Wert einsetzen und die beiden Seiten getrennt zusammenfassen.

Linke Seite: $1350 + 100 + 50 = 1500$
Rechte Seite: $1000 + 500 \qquad\quad = 1500$

Diese beiden Ergebnisse vergleichen wir. Sind sie gleich, so ist die gefundene Lösung richtig. Der Vergleich ergibt: $1500 = 1500$.
Dabei müssen wir immer voraussetzen, daß wir bei der Probe richtig gerechnet haben.

2. Beispiel:

Auf einer LPG soll ein rechteckiges Versuchsfeld von 1,5 ha Größe abgesteckt werden. Eine Seite des Feldes soll 120 m lang werden. Wie groß wird die andere?
Die Fläche F eines Rechtecks können wir aus den Seiten a und b nach der Formel $a \cdot b = F$ berechnen. Wir wissen, daß $F = 1{,}5$ ha $= 15000$ m² groß werden soll, und daß eine Seite a 120 m Länge haben soll. Die Länge der anderen Seite ist unbekannt, wir bezeichnen sie mit x m.

Es ergibt sich aus der Formel die Bestimmungsgleichung:

$$120 \cdot x = 15000$$

Um x zu isolieren, dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch 120:

$$\begin{aligned} 120 \cdot x : 120 &= 15000 : 120 \\ x &= 15000 : 120 \\ x &= 125 \end{aligned}$$

Zur Probe berechnen wir $120 \cdot 125$ und erhalten tatsächlich 15000.

Ergebnis: Die andere Seite wird 125 m lang.

Zusammenfassung:

1. **Bestimmungsgleichungen enthalten neben bekannten Größen auch eine Unbekannte, die meist mit x bezeichnet wird. Die beiden Seiten von Bestimmungsgleichungen sind nur dann gleich, wenn für die Unbekannte ein ganz bestimmter Zahlenwert eingesetzt wird.**

2. **Man ermittelt diesen Zahlenwert (die Lösung der Bestimmungsgleichung) durch schrittweises Umformen der Gleichung, bis die Unbekannte auf der einen Seite allein (isoliert) steht.**

3. **Die errechnete Lösung muß durch die Probe überprüft werden. Wir setzen in der Ausgangsgleichung überall für die Unbekannte die errechnete Lösung ein und fassen die Seiten getrennt zusammen. Die beiden Ergebnisse müssen gleich sein.**

4. **Bestimmungsgleichungen dienen zum Lösen von Anwendungsaufgaben. Der Lösungsweg einer Anwendungsaufgabe gliedert sich in drei Abschnitte:**
   a) **Aufstellen der Bestimmungsgleichung aus dem Text der Aufgabe,**
   b) **Lösen der Bestimmungsgleichung,**
   c) **Überprüfen der Richtigkeit der ermittelten Lösung mit Hilfe der Probe.**

5. **Auch Formeln dienen zum Aufstellen der Bestimmungsgleichungen.**

Aufgaben

In den folgenden Aufgaben ist jedesmal die frei gelassene Größe als Unbekannte einer Bestimmungsgleichung aufzufassen und mit Hilfe der angegebenen Formel zu berechnen. Verfahre dabei so, wie es im 2. Beispiel dieses Kapitels angegeben wurde!

Vor dem Aufstellen der Bestimmungsgleichungen sind die gegebenen Größen in ihren Benennungen aufeinander abzustimmen.

1. Umfang eines Dreiecks:

	u	a	b	c
a)	96 cm	38 cm	29 cm	
b)	112 mm	51 mm		52 mm
c)	1,15 m		47 cm	0,33 m
d)		0,15 m	41 cm	3,9 dm

2. Fläche eines Dreiecks $F = \frac{1}{2} s \cdot h_s$. (Überlege jeweils erst, welche der frei gelassenen Größen man aus den gegebenen berechnen kann!)

	F	a	b	c	h_a	h_b	h_c
a)	2112 cm²		44 cm				
b)	7,03 m²						1,9 m
c)		28 mm			1,5 cm		
d)	11,34 m²	84 dm					

3. Volumen und Gewicht eines Quaders: $V = a \cdot b \cdot c$; $P = \gamma \cdot V$. (Beachte: Dabei sind beide angegebenen Formeln nacheinander zu benutzen!)

	Länge a	Breite b	Höhe c	Volumen V	Wichte γ	Gewicht P
a)	12 cm	16 cm	18 cm		Kupfer 8,9 p/cm³	
b)	25 cm	12 cm		5100 cm³		3570 p
c)	36 cm		8 cm	12960 cm³	Silber 10,5 p/cm³	
d)		2,5 dm	0,3 dm	15,750 dm³		177,975 kp
e)	1,20 m		12 cm	115200 cm³	Aluminium 2,7 p/cm³	

4. Ermittle bei **3 b)** und **d)** mit Hilfe der Zahlentafeln, aus welchen Stoffen diese Quader bestehen! (Schätze vorher!)

19. Das Lösen von Bestimmungsgleichungen

1) Die Bestimmungsgleichung enthält nur ein Glied mit der Unbekannten. Die Unbekannte wird auf der linken Seite isoliert.

Beispiel 1:

Der Unbekannten ist ein Faktor beigegeben.

$$7x = 28$$
$$7x : 7 = 28 : 7$$
$$x = 4$$

Probe: Linke Seite: $7 \cdot 4 = 28$
Rechte Seite: 28
Vergleich: $28 = 28$

Die Unbekannte x wird isoliert, indem wir beide Seiten der Gleichung durch den Faktor dividieren.

Beispiel 2:

Die Unbekannte steht in Verbindung mit einem Divisor.

$$\frac{x}{6} = 3$$
$$\frac{x}{6} \cdot 6 = 3 \cdot 6$$
$$x = 18$$

Probe: Linke Seite: $\frac{18}{6} = 3$
Rechte Seite: 3
Vergleich: $3 = 3$

Die Unbekannte wird isoliert, indem wir beide Seiten der Gleichung mit dem Divisor multiplizieren.

Beispiel 3:

Die Unbekannte x ist mit einem Faktor und einem Divisor verbunden.

$$\frac{5x}{8} = 2$$

Wir können in zwei Schritten vorgehen. Zuerst beseitigen wir den Nenner 8:

$$\frac{5x}{8} \cdot 8 = 2 \cdot 8$$
$$5x = 16$$

Dann beseitigen wir den Faktor 5:

$$5x : 5 = 16 : 5$$
$$x = \frac{16}{5}$$
$$x = 3\frac{1}{5}$$

Statt dieser zwei hätte auch ein einziger Schritt zum Ziel geführt, wenn wir die Gleichung folgendermaßen geschrieben hätten:

$$\frac{5}{8}x = 2$$
$$\frac{5}{8}x : \frac{5}{8} = 2 : \frac{5}{8}$$
$$x = 2 \cdot \frac{8}{5}$$
$$x = \frac{16}{5}$$
$$x = 3\frac{1}{5}$$

Probe: Linke Seite: $\dfrac{5 \cdot \frac{16}{5}}{8} = \dfrac{5 \cdot 16}{5 \cdot 8} = 2$

Rechte Seite: 2

Vergleich: $2 = 2$

Ein beliebiger Faktor von x wird durch Division, ein mit x verbundener Divisor (Nenner) durch Multiplikation beseitigt, so daß x den Faktor $+1$ erhält: $(+1) \cdot x = x$.

Beispiel 4:

Die Unbekannte ist mit einem Summanden verbunden.

$$x + 26 = 15$$
$$x + 26 - 26 = 15 - 26$$
$$x = -11$$

Ein mit der Unbekannten verbundener Summand wird durch Subtraktion auf beiden Seiten beseitigt. Entsprechend könnte ein Subtrahend durch Addition beseitigt werden.

2) Die Unbekannte kann auf der linken oder der rechten Seite isoliert werden.

Beispiel: $4,5 = 7x - 16,5$

Isolieren von x auf der rechten Seite

$$4,5 = 7x - 16,5$$
$$4,5 + 16,5 = 7x - 16,5 + 16,5$$
$$21 = 7x$$
$$\frac{21}{7} = \frac{7x}{7}$$
$$3 = x$$

Die Schreibweise ist ungewöhnlich, man schreibt meist

$$x = 3.$$

Das ist nach dem Vertauschungsgesetz ohne weiteres möglich.

Isolieren von x auf der linken Seite

$$4,5 = 7x - 16,5$$
$$4,5 - 7x = 7x - 16,5 - 7x$$
$$4,5 - 7x = -16,5$$
$$4,5 - 7x - 4,5 = -16,5 - 4,5$$
$$-7x = -21$$

Um x zu isolieren, dividieren wir auf beiden Seiten durch -7.

$$\frac{-7x}{-7} = \frac{-21}{-7}$$
$$x = 3$$

Probe: Linke Seite: $4,5$

Rechte Seite: $7 \cdot 3 - 16,5 = 21 - 16,5 = 4,5$

Vergleich: $4,5 = 4,5$

3) Die Bestimmungsgleichung enthält mehrere Glieder mit der Unbekannten.

Beispiel: $15 - 6x = 51 - 5x$

Um x auf der linken Seite zu isolieren, müssen wir auf beiden Seiten zunächst 15 subtrahieren und dann $5x$ addieren.

$$\begin{aligned} 15 - 6x - 15 &= 51 - 5x - 15 \\ -6x &= 36 - 5x \\ -6x + 5x &= 36 - 5x + 5x \\ -x &= 36 \end{aligned}$$

Bei x steht diesmal der Faktor (-1), denn $-x = (-1) \cdot x$. Dieser muß durch Division auf beiden Seiten beseitigt werden:

$$\begin{aligned} (-x) : (-1) &= 36 : (-1) \\ x &= -36 \end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $15 - 6 \cdot (-36) = 15 + 216 = 231$

Rechte Seite: $51 - 5 \cdot (-36) = 51 + 180 = 231$

Vergleich: $231 = 231$

Das Umformen, wodurch alle Glieder mit der Unbekannten auf der einen und alle bekannten Glieder auf der anderen Seite vereinigt werden, nennt man das **Ordnen** der Glieder.

Wir wollen künftig solche Umformungen dadurch kürzer schreiben, daß wir hinter jeder Zeile (nur einmal) vermerken, welche Umformungen auf beiden Seiten durchzuführen sind:

Ordnen und Zusammenfassen:

$$\begin{array}{rcl|l} 15 - 6x &=& 51 - 5x & -15 + 5x \\ -x &=& 36 & :(-1) \\ x &=& -36 & \end{array}$$

Zusammenfassung:

Eine Bestimmungsgleichung wird in drei Schritten gelöst:

1. **Man ordnet die Glieder der Gleichung, so daß auf einer Seite nur Glieder mit der Unbekannten, auf der anderen Seite nur Glieder ohne die Unbekannte stehen.**
2. **Man faßt die Glieder auf jeder Seite der Gleichung für sich zusammen.**
3. **Ein mit der Unbekannten verbundener beliebiger Faktor wird durch Division, ein Divisor durch Multiplikation beseitigt.**

Aufgaben

Bei allen Aufgaben ist die Lösung zu bestimmen und die Richtigkeit durch die Probe zu überprüfen. Vermerke hinter jeder Zeile, welche Umformungen vorgenommen wurden!

1. a) $4x = 12$ 3 **b)** $36 = 6x$ **c)** $7x = 24\frac{1}{2}$

d) $14x = 154$ **e)** $2{,}3x = 18{,}4$ **f)** $4x = 9\frac{1}{3}$

g) $0{,}5x = 48$ h) $2x = 3\frac{1}{3}$ i) $3\frac{2}{3}x = 18\frac{1}{3}$
k) $3x = 2\frac{5}{6}$ l) $18x = 27$ m) $6\frac{1}{3}x = 25\frac{1}{3}$
n) $\frac{3}{8}x = 1\frac{1}{5}$ o) $3\frac{3}{4} = \frac{5}{9}x$ p) $8\frac{1}{3}x = 15$
q) $6\frac{1}{4}x = 6\frac{2}{3}$ r) $\frac{3}{14} = 2\frac{4}{7}x$ s) $9\frac{4}{5}x = 14$

2. a) $\frac{x}{24} = 3$ b) $\frac{x}{24} = \frac{1}{2}$ c) $38 = \frac{x}{2}$
d) $\frac{x}{0{,}25} = 8$ e) $\frac{x}{0{,}4} = 90$ f) $80 = \frac{x}{0{,}8}$
g) $\frac{x}{1{,}6} = 60$ h) $70 = \frac{x}{1{,}24}$ i) $\frac{x}{6{,}1} = 0{,}05$
k) $0{,}7 = \frac{x}{1{,}9}$ l) $\frac{x}{\frac{1}{2}} = 3$ m) $\frac{x}{\frac{3}{4}} = 2$
n) $\frac{x}{\frac{7}{10}} = 5$ o) $\frac{x}{1\frac{1}{6}} = 2$ p) $\frac{x}{\frac{4}{9}} = 11\frac{1}{4}$

3. a) $x + 20 = 50$ b) $x - 4 = 16$ c) $42 + x = 65$
d) $x + 14 = 32$ e) $x - 36 = 70$ f) $18 + x = 20$
g) $24 + x = 126{,}9$ h) $x - 6{,}7 = 19$ i) $19{,}8 + x = 21{,}5$
k) $2\frac{1}{2} + x = 9\frac{3}{4}$ l) $16\frac{4}{5} + x = 22\frac{3}{10}$ m) $8\frac{2}{3} + x = 10\frac{4}{5}$
n) $x + 4{,}16 = 16{,}46$ o) $x - 3\frac{1}{8} = 10\frac{3}{4}$ p) $24{,}37 + x = 36{,}15$
q) $x - 4\frac{2}{3} = 7\frac{1}{6}$ r) $13\frac{1}{2} + x = 42$ s) $9{,}3 + x = 18{,}2$

4. a) $100 - x = 66$ b) $15 - x = 12$ c) $34 = 36 - x$
d) $-x + 81 = -19$ e) $-x - 3\frac{1}{2} = -14$ f) $15{,}95 - x = 12{,}05$
g) $18\frac{3}{4} = 20\frac{1}{2} - x$ h) $17 = 39\frac{3}{8} - x$ i) $28{,}25 - x = 12{,}5$
k) $24 - x = 25{,}85$ l) $38\frac{7}{8} - x = 40\frac{3}{4}$ m) $12{,}5 = -18{,}3 - x$

Anleitung zu 5 g bis l und 6: Bei solchen Aufgaben kann es zweckmäßig sein, erst auf den beiden Seiten zusammenzufassen zu je einem Glied mit der Unbekannten und einem bekannten Glied, und dann erst zu ordnen.

5. a) $3x + 4 = 2x + 7$ b) $5x - 11 = 3x + 15$
c) $16 + 8x = 25 + x$ d) $9 + 5x - 6 = 3x - 11$
e) $25 + 6x = 29 + 2x$ f) $6x - 16 = 20 - 3x$
g) $8x + 20 - 4x = 98 - 9x$ h) $15x - 29 - 7x = 17 + 4x + 14$
i) $8x = 9x + 17 + 7x - 10x + 31$
k) $8 - 7x + 12 + 9x - 35 + 4x = x$
l) $3x + 20 - 6x + 8x = 2x + 36 - 1$

6. a) $4x + 13 - 7x + 36 + 4x = 14x + 42 - 34 + 30x + 19\frac{1}{2}$

b) $3x + 21 - 8x + 30 - x = 71 - 12x + 19 + 4x - 35\frac{2}{3}$

c) $13 + 34x - 5 + 23 - 14x - 97 = 20x + 29 - 10x$

d) $7 - 5x + 8 + 3x - 5 + 8x = x$

e) $3x + 2 + x + 8 + 11x + 4 = x + 16 + 4x - 12 - 3x - 4 - x$

f) $0{,}23x + 4{,}7 - 0{,}19x - 3{,}4 = 0{,}18x + 5{,}7 - 0{,}25x$

g) $0{,}56x + 8{,}9 + 1{,}14x - 6{,}5 + 8{,}8x - 19{,}7 + 12{,}4x - 0{,}9x = 4{,}7$

20. Anwendungsaufgaben

Nachdem wir im Kapitel 19 gelernt haben, wie gegebene Bestimmungsgleichungen gelöst werden und wie man die Richtigkeit der errechneten Lösung durch die Probe überprüft, wollen wir jetzt kennenlernen, wie Bestimmungsgleichungen entstehen. Wir wissen bereits aus Kapitel 18, daß Bestimmungsgleichungen dazu dienen, Anwendungsaufgaben zu lösen. Wir lernen jetzt, wie aus dem Aufgabentext Bestimmungsgleichungen aufgestellt werden.

1. Beispiel:

Der Anbauplan einer LPG sieht vor, 138 ha mit Getreide zu bestellen. Dabei soll die Fläche für Roggen viermal so groß sein wie die für Weizen. Berechne die Weizenfläche!

Wir überschlagen zunächst im Kopf. Wenn viermal soviel Roggen wie Weizen angebaut werden soll, entfallen auf den Weizen nur $\frac{1}{5}$ von rund 140 ha, also 28 ha.

Systematische Lösung:

Die Fläche, die mit Weizen bestellt werden soll, ist die Unbekannte; wir bezeichnen sie mit x ha. Da die Fläche für den Roggenanbau viermal so groß sein soll, ist sie gleich $4x$ ha. Das sind zusammen x ha $+ 4x$ ha. Andererseits ist angegeben, daß die gesamte Getreidefläche 138 ha beträgt. Wir haben also diese LNF (Landwirtschaftliche Nutzfläche) zweimal durch verschiedene Größen ausgedrückt. Die beiden Größen stellen dasselbe dar, folglich können wir sie einander gleichsetzen:

$$x \text{ ha} + 4x \text{ ha} = 138 \text{ ha}.$$

Da die Benennungen überall die gleichen sind, können wir sie weglassen und die Gleichung nur mit den Zahlenwerten schreiben:

$$x + 4x = 138$$

Wir lösen diese Bestimmungsgleichung wie folgt:

$$\begin{aligned} x + 4x &= 138 \\ 5x &= 138 \quad |:5 \\ x &= 27{,}6 \end{aligned}$$

Bevor wir den Ergebnissatz formulieren, müssen wir uns überzeugen, daß das errechnete Ergebnis auch richtig ist, d. h. den Bedingungen der Aufgabe genügt. Wir erkennen durch Vergleich mit dem Ergebnis des Überschlags (28 ha), daß grobe Fehler nicht vorgekommen sein können. Jetzt erfolgt die Probe, die bei Anwendungsaufgaben unbedingt an Hand des Textes durchgeführt werden muß. Setzen wir nämlich 27,6 in der Bestimmungsgleichung $x + 4x = 138$ ein, so können wir bei Feststellung der Gleichheit nur auf die fehlerfreie Berechnung der Bestimmungsgleichung schließen. Wir können aber nicht feststellen, ob die Bestimmungsgleichung von uns überhaupt richtig aufgestellt worden ist, ob sie also dem gegebenen Aufgabentext entspricht.

Wir führen deshalb die Probe am Text durch: Wenn die Weizenanbaufläche 27,6 ha groß ist, beträgt die Roggenanbaufläche, die viermal so groß ist, 110,4 ha. Beide zusammen sind also 138 ha. Das ist aber gerade die Fläche, die für beide Getreidearten vorgesehen war. Also ist das errechnete Ergebnis richtig.

Ergebnissatz: Mit Weizen werden 27,6 ha bestellt.

Wir fassen zusammen:

Wenn wir eine Anwendungsaufgabe mit Hilfe einer Bestimmungsgleichung lösen wollen, sind folgende Schritte nötig:

(1) Wir überschlagen nach Möglichkeit das Ergebnis.
(2) Wir bezeichnen die Unbekannte mit x und notieren hinter x die Benennung.
(3) Wir übertragen die textlichen Angaben in mathematische Zeichen und drücken eine Größe auf zweierlei Weise aus. Dadurch erhalten wir die Bestimmungsgleichung.
(4) Wir bringen alle Benennungen in Übereinstimmung, schreiben die Bestimmungsgleichung dann nur mit den Zahlenwerten (ohne Benennungen) und lösen sie nach x auf.
(5) Wir vergleichen die Lösung mit dem Ergebnis des Überschlags und führen die Probe am Text aus.
(6) Wir schreiben den Ergebnissatz nieder, wobei die Benennungen wieder beigefügt werden müssen.

In der schriftlichen Darstellung müssen diese sechs Schritte zu erkennen sein. Wir wollen deshalb künftig stets das Wesentliche in Form eines kurzen Lösungsweges niederschreiben und jedem Arbeitsschritt die entsprechende Nummer unserer Anleitung beifügen.

2. Beispiel:

Renate gibt ihren Freundinnen ein Zahlenrätsel auf: „Ich habe mir auf diesem Zettel eine Zahl aufgeschrieben. Die Summe aus dem vierten Teil dieser Zahl und 7 ist ebenso groß wie die Differenz aus der aufgeschriebenen Zahl und 2. Welche Zahl steht auf dem Zettel?“

(1) Ein Überschlag ist nicht möglich.

(2) Die auf dem Zettel stehende Zahl nennen wir x.

(3) Der vierte Teil dieser Zahl ist $\frac{x}{4}$. Die Summe aus $\frac{x}{4}$ und 7 heißt $\frac{x}{4} + 7$. Die Differenz aus x und 2 ist $x - 2$.
Da die Summe gleich der Differenz sein soll, ergibt sich die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{x}{4} + 7 = x - 2$$

(4) Da es sich bei dieser Aufgabe um unbenannte Zahlen handelt, kann die Bestimmungsgleichung sofort aufgelöst werden.

$$\begin{array}{rcl|l}
\frac{x}{4} + 7 & = & x - 2 & -\frac{x}{4} + 2 \\
7 + 2 & = & x - \frac{x}{4} & \\
9 & = & \frac{3}{4}x & :\frac{3}{4} \\
9 \cdot \frac{4}{3} & = & x & \\
12 & = & x & \\
x & = & 12 &
\end{array}$$

(5) Da kein Überschlag möglich war, entfällt diesmal auch der Vergleich des Ergebnisses mit dem Überschlag.

Probe: Der vierte Teil von 12 ist 3. Die Summe aus 3 und 7 ist 10. Die Differenz von 12 und 2 ist ebenfalls 10. Also ist 12 die richtige Lösung.

(6) Ergebnis: Auf Renates Zettel steht die Zahl 12.

3. Beispiel:

In einem gleichschenkligen Dreieck ist jeder Basiswinkel viermal so groß wie der Winkel an der Spitze. Wie groß sind die Winkel?

Bei dieser Aufgabe ergibt sich etwas Neues. Es ist gleich nach zwei Größen (Winkel an der Basis und Winkel an der Spitze) gefragt. In solchen Fällen können wir wählen, welche der beiden gesuchten Größen wir als Unbekannte festlegen wollen. Die zweite gesuchte Größe müssen wir aber ebenfalls sofort in mathematischen Zeichen ausdrücken. Es gibt infolgedessen je nach der Wahl der Unbekannten zwei Lösungswege. Wir wollen beide nebeneinanderstellen.

(1) Überschlag: Wenn die Winkel an der Basis und an der Spitze gleich wären (gleichseitiges Dreieck), so wären sie je 60°. Wenn der Basiswinkel größer als der Winkel an der Spitze sein soll, muß er größer als 60° sein. Er muß aber andererseits kleiner als 90° sein, so daß wir mit einer Größe von etwa 70° bis 80° rechnen müssen, beim Winkel an der Spitze mit etwa 20° bis 40°.

1. Weg

(2) Der Winkel an der Spitze sei $x°$.

(3) Der Winkel an der Basis ist dann $4 \cdot x°$.

Die Summe aller drei Winkel ist einerseits $x° + 4x° + 4x°$,

andererseits $180°$.
Daraus folgt die Bestimmungsgleichung:

$$x° + 4x° + 4x° = 180°$$

(4) Da die Benennungen gleich sind, schreiben wir in Zahlenwerten

$$x + 4x + 4x = 180$$

$$9x = 180 \quad |:9$$

$$x = 20$$

(5) Der Überschlag ergab $20°$ bis $40°$, so daß das Rechenergebnis stimmen kann.

Probe:

Winkel an der Spitze: $20°$

Jeder Basiswinkel: $4 \cdot 20° = 80°$

Zusammen:

$20° + 80° + 80° = 180°$
Winkelsumme im Dreieck: $180°$
Vergleich: $180° = 180°$

2. Weg

Der Winkel an der Basis sei $x°$.

Der Winkel an der Spitze ist dann $\frac{1}{4} \cdot x°$.

Die Summe aller drei Winkel ist einerseits $x° + x° + \frac{1}{4}x°$,

andererseits $180°$.
Daraus folgt die Bestimmungsgleichung:

$$x° + x° + \frac{1}{4}x° = 180°$$

Da die Benennungen gleich sind, schreiben wir in Zahlenwerten

$$x + x + \frac{1}{4}x = 180$$

$$2\frac{1}{4}x = 180 \quad |: 2\frac{1}{4}$$

$$x = 180 \cdot \frac{4}{9}$$

$$x = 80$$

Der Überschlag ergab $70°$ bis $80°$, was mit dem rechnerischen Ergebnis übereinstimmt.

Winkel an der Basis: $80°$

Winkel an der Spitze: $\frac{1}{4} \cdot 80° = 20°$

Zusammen: $2 \cdot 80° + 20° = 180°$
Winkelsumme im Dreieck: $180°$
Vergleich: $180° = 180°$

(6) Ergebnis: Der Winkel an der Spitze ist $20°$, jeder Basiswinkel $80°$.

Wir stellen fest: Es ist gleichgültig, welche der beiden gesuchten Größen wir als Unbekannte verwenden. Das Ergebnis ist in beiden Fällen dasselbe.

Aufgaben

1. Welche Zahl ergibt, wenn man sie um 45 vermindert, 44?
2. Eine bestimmte Zahl wird um $13\frac{3}{4}$ vermehrt. Dadurch erhält man $27\frac{1}{2}$. Wie heißt diese Zahl?

3. Welche Zahl muß man um 63 vermindern, damit man 77 erhält?

4. Die Summe zweier Zahlen beträgt 85,17. Ein Summand heißt 18,83. Berechne den anderen Summanden!

5. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 95.
   a) Berechne den Minuenden, wenn der Subtrahend 15 $\left(28, 44\frac{2}{3}\right)$ ist!
   b) Berechne den Subtrahenden, wenn der Minuend 113 $\left(129, 134\frac{7}{8}\right)$ ist!

6. Wenn man das Dreifache einer Zahl um 16 vermindert, erhält man 26. Wie heißt diese Zahl?

7. Das Fünffache einer Zahl wird um 12 vermehrt. Dadurch erhält man 62. Wie heißt die Zahl?

8. Wenn man den fünften Teil einer Zahl um $2\frac{1}{2}$ vermehrt, so erhält man $3\frac{1}{2}$. Wie heißt die Zahl?

9. Vermindert man den dritten Teil einer Zahl um 5, so erhält man -3. Wie heißt die Zahl?

10. Vermehrt man das Dreifache einer Zahl um 4,2, so erhält man ebensoviel wie bei der Verminderung dieser Zahl um 0,2. Wie heißt sie?

11. Ich habe mir eine Zahl aufgeschrieben. Sie wurde verdoppelt und das Ergebnis um 13 vermindert. Der gleiche Wert ergab sich, als ich das Fünffache der aufgeschriebenen Zahl um 55 verminderte. Welche Zahl habe ich mir notiert?

12. Die Summe dreier Zahlen beträgt 40. Die zweite Zahl ist um 3 größer als die erste, die dritte ist um 8 kleiner als die erste Zahl. Wie heißen diese drei Zahlen?
    Anleitung: Hier ist nach drei Zahlen gefragt. Du mußt zur Aufstellung der Bestimmungsgleichung eine davon als Unbekannte x bezeichnen und dann die beiden anderen entsprechend dem Text in mathematischen Zeichen darstellen!

13. Die Summe dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen beträgt 45. Wie heißen diese drei Zahlen?

14. In den folgenden Aufgaben ist die Bestimmungsgleichung gegeben. Drücke die gegebenen Beziehungen jeweils in Worten aus!

    Beispiel: $x + 2x = 60 - 3x$

    Lösung: Ich erhalte dasselbe, wenn ich eine Zahl um ihr Doppeltes vermehre oder wenn ich ihr Dreifaches von 60 subtrahiere.

    a) $35 + 3x = 10x$ b) $4x - 3 = 9x - 8$
    c) $12 + 2x = 8x - 12$ d) $x + 10x + 100x = 37$
    e) $x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = 10$ f) $\frac{1}{10}x + 3 = \frac{1}{100}x - 6$

15. In der Gemeinde R. bewirtschaftet die LPG „Immer bereit“ 461 ha. Das sind 9 ha weniger als die Hälfte der landwirtschaftlichen Nutzfläche (LNF) der Gemeinde. Berechne diese!

16. Drei Traktoristen pflügten an einem Tage zusammen 8,4 ha. Die Leistung des ersten lag 0,8 ha höher als die des zweiten und die des zweiten 0,5 ha höher als die des dritten. Wieviel Hektar schaffte jeder?

17. Die Weidefläche einer LPG hat die Form eines Rechtecks. Der Umfang beträgt 2 880 m. Die Koppel ist fünfmal so lang wie breit. Berechne den Flächeninhalt!

18. 14 Lehrlinge werden in einem VEG ausgebildet. Es sind zweieinhalbmal soviel Mädchen wie Jungen. Wieviel männliche und weibliche Lehrlinge sind dort tätig?

19. Auf der Baustelle setzt man die Ziegel in Stapeln zu 200 Stück oder zu 250 Stück. In jede Schicht (Stapelring) kommen 16 hochkant gestellte Steine. Beim kleinen Stapel liegen 8 Stück als Kopf obenauf, beim großen 10 Stück. Wieviel Stapelringe sind bei jedem Stapel zu setzen?

20. 1956 wurden rund 223 000 Mopeds und Motorräder hergestellt, dabei etwa 37 000 mehr Mopeds als Motorräder. Berechne die Stückzahlen!

21. Im 2. Vierteljahr stellte ein volkseigenes Maschinenwerk monatlich durchschnittlich 14 Maschinen mehr her als der Monatsdurchschnitt im 1. Vierteljahr ergab. So wurden im 1. Halbjahr 282 Maschinen produziert. Wie hoch war der Monatsdurchschnitt im 1. Vierteljahr?

22. Der Vorsteckbolzen einer Anhängerkupplung von 22 mm Durchmesser hält einen Zug von 25 600 kp aus. Aus Sicherheitsgründen darf die Belastung aber nur $\frac{1}{4}$ davon betragen. Wie hoch ist diese?

23. Zwei Strecken sind zusammen 24 cm lang. Die eine ist doppelt so groß wie die andere. Wie groß ist jede der beiden Strecken?

24. In einem Rechteck mit dem Umfang 26 cm ist die eine der beiden Seiten um 3 cm größer als die andere. Wie groß sind die Rechteckseiten?

25. Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umfang von 64 mm. Die beiden Schenkel sind je eineinhalbmal so lang wie die Basis. Wie groß sind die Dreieckseiten?

26. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist ebenso groß wie die eines Quadrates. Die Summe aller Seiten des Dreiecks und des Quadrates beträgt 71,4 cm.

    a) Berechne die Länge einer Seite!

    b) Berechne die Umfänge des Dreiecks und des Quadrates!

27. Stelle mit Hilfe der Abbildungen 27a—k die Bestimmungsgleichungen auf und ermittle den Wert von x.

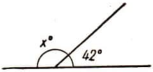


Abb. 27a

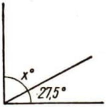


Abb. 27b

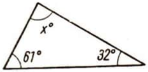


Abb. 27c

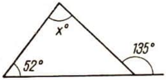


Abb. 27d

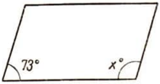


Abb. 27e

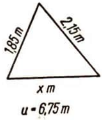


Abb. 27f

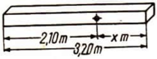


Abb. 27g

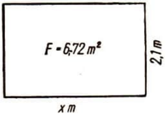


Abb. 27h

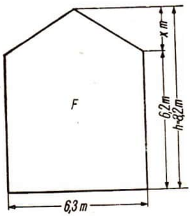


Abb. 27i

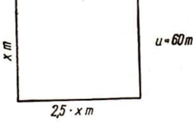


Abb. 27k

28. Von einem Nebenwinkelpaar ist der eine Winkel dreimal so groß wie der andere. Wie groß sind die beiden Winkel?

29. In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Summe aus einem Basiswinkel und dem Winkel an der Spitze 110°. Wie groß ist der Basiswinkel?

30. In einem Dreieck ist der Außenwinkel von α um 28° kleiner als der Außenwinkel von γ, der Außenwinkel von β um 50° kleiner als der Außenwinkel von γ. Wie groß sind die drei Außenwinkel und die drei Innenwinkel?

31. In einem Dreieck ist β dreimal so groß wie α, und γ um 5° größer als α. Wie groß sind α, β und γ?

32. Rudolf und Elke haben zusammen 44,20 DM gespart. Rudolf hat in seiner Sparbüchse 4,60 DM weniger als die dreifache Sparsumme seiner Schwester Elke. Wieviel Geld hat jedes der beiden Geschwister?

VI. Das Rechnen mit proportionalen Größen

21. Vorbereitende Übungen

1. Nenne die Regel **a)** über die Multiplikation eines Bruches mit einem Bruch, **b)** über die Division eines Bruches durch einen Bruch!

2. **a)** $\frac{5}{6} \cdot 21$ **b)** $33 \cdot \frac{7}{9}$ **c)** $2\frac{1}{2} \cdot 14$ **d)** $75 \cdot 8\frac{1}{3}$
e) $\frac{18}{19} \cdot \frac{17}{24}$ **f)** $\frac{5}{21} \cdot \frac{51}{60}$ **g)** $\frac{7}{18} : 19$ **h)** $10 : \frac{7}{15}$
i) $\frac{9}{11} : \frac{2}{5}$ **k)** $3\frac{9}{16} : 2\frac{31}{32}$ **l)** $121\frac{1}{4} : 1\frac{9}{16}$ **m)** $19 : 3\frac{4}{5}$
n) $77 : 2\frac{3}{4}$ **o)** $2\frac{2}{3} : \frac{4}{7}$ **p)** $3\frac{1}{3} : 7\frac{1}{4}$ **q)** $14 \cdot \frac{9}{11}$

3. Nenne die Regel **a)** über die Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer Dezimalzahl, **b)** über die Division einer Dezimalzahl durch eine Dezimalzahl!

4. **a)** $0{,}035 \cdot 24$ **b)** $46{,}3 \cdot 1{,}24$ **c)** $0{,}473 \cdot 18{,}4$
d) $753{,}21 \cdot 64{,}2$ **e)** $7{,}05 \cdot 80{,}567$ **f)** $642{,}85 \cdot 97{,}3$
g) $0{,}169 : 13$ **h)** $224 : 0{,}0016$ **i)** $6752{,}1 : 317$

5. **a)** $461{,}42 \cdot 0{,}1$ (0,01, 0,001) **b)** $27{,}48 : 0{,}1$ (0,01, 0,001)
c) $596{,}3 : 10$ (100, 1000) **d)** $38{,}74 \cdot 10$ (100, 1000)

6. **a)** $401{,}01 \cdot 0{,}103$ **b)** $370{,}0176 : 5{,}024$ **c)** $0{,}01 \cdot 0{,}03$
d) $17{,}4 \cdot 0{,}01$ **e)** $26{,}264 : 4{,}9$ **f)** $628{,}788 : 732$

7. Vergleiche die folgenden Größen! Das Wievielfache von der kleineren stellt die größere Zahl dar?

a) 48 und 816 **b)** 9,4 und 103,4 **c)** $3\frac{1}{5}$ und $73\frac{3}{5}$

d) 3,1 und $89\frac{9}{10}$ **e)** 7,4 cm und 22,2 cm **f)** 5,28 hl und 15,84 hl

g) 56 Pf und 5,04 DM **h)** 12 Min. und 2 Std.

i) $9\frac{1}{2}$ kg und 190 g **k)** 7,52 cm^2 und 15,04 mm^2

8. Vergleiche die folgenden Größen! Den wievielten Teil von der größeren Zahl stellt die kleinere dar?

a) 112 und 448 **b)** 4,6 und 27,6

c) $2\frac{3}{4}$ und $13\frac{3}{4}$ **d)** $9\frac{3}{5}$ und 76,8

e) 3,2 m^2 und 12,8 m^2 **f)** 11,7 cm^3 und 105,3 cm^3

g) 76 Pf und 10,64 DM **h)** 1,62 m und 648 cm

9. Unterscheide beim Dividieren von Größen die Aufgabe des Teilens von der des Enthaltenseins (des Messens)!

a) Bilde beide Arten von Aufgaben aus folgenden Größen!

(1) 114 kg, 6 kg, 19 (2) 2,76 DM, 46 Pf, 6

(3) 714 dm^3, 42 cm^3, ... (4) 3,90 m, 5, ...

(5) 6,24 hl, 52 l, ... (6) 4,32 t, 48, ...

b) Um welche Art von Divisionsaufgaben handelte es sich beim Vergleichen zweier Größen in den Aufgaben 7 und 8?

10. a) Was verstehst du unter einem Streifendiagramm, was unter einem Streckendiagramm?

b) Berechne eine Preistabelle für den Verkauf von Stoff von 50 cm zu 50 cm, wenn 1 m 7 DM kostet! Stelle diese Tabelle durch ein Streckendiagramm dar (waagerecht: Längen, lotrecht: Preise)!

c) Die folgende Tabelle zeigt, wieviel jeder Einwohner der DDR in einem Jahr durchschnittlich verbrauchte.

Nahrungsmittel	Durchschnittlicher Verbrauch		
	1950	1953	1957
Fleisch (in kg)	22,1	40,6	45,5
Butter (in kg)	5,4	9,2	10,5
Eier (in Stück)	63,1	107,6	163
Kartoffeln (in kg)	219,3	197,3	173,1

Stelle diese Größen durch 4 Streifendiagramme dar (waagerecht: Jahreszahlen, lotrecht: Nahrungsmittelmengen)!

11. Gib die Ergebnisse in gemeinen Brüchen an!

a) $\dfrac{16{,}8 \cdot 2\frac{2}{5}}{4\frac{1}{5} \cdot 1{,}2}$ b) $\dfrac{6{,}25 \cdot 2\frac{2}{5}}{1\frac{4}{5} \cdot 1{,}2}$ c) $\dfrac{32 \cdot 4{,}8}{1\frac{3}{5} \cdot 5{,}6}$ d) $\dfrac{8\frac{1}{2} \cdot 4{,}5}{3\frac{3}{4}}$

12. Gib bei den folgenden Größen zunächst die größere als Vielfaches der kleineren und dann die kleinere als Teil der größeren an!
In welcher Beziehung stehen jeweils die beiden Vergleichszahlen, das „Vielfache" und der „Teil", zueinander?

a) 78 und 1014 b) 8,6 und 163,4 c) $6\frac{4}{5}$ und $88\frac{2}{5}$
d) $6\frac{1}{5}$ und 86,8 e) 7,2 m³ und 79,2 m³ f) 0,23 DM und 4,37 DM
g) 2,9 cm und 754 mm h) 24 Min. und 4 Std.
i) 600 m² und 0,6 ha k) 1,88 hl und 1692 l

22. Das Verhältnis zweier Größen

1. Beispiel:

Im Statistischen Jahrbuch für die DDR lesen wir, daß im Jahre 1950 in unserer Republik 71 Elektrolokomotiven gebaut wurden, 1953 aber 213. Wenn wir diese beiden Produktionszahlen vergleichen, so können wir folgendes feststellen: Die Produktion im Jahre 1950 betrug nur ein Drittel derjenigen vom Jahre 1953. Oder: Die Produktion ist von 1950 bis 1953 auf das Dreifache angestiegen. Statt dessen sagt man auch oft: Die beiden Produktionszahlen verhalten sich wie eins zu drei oder sie stehen im Verhältnis eins zu drei. Man schreibt dafür kurz 1 : 3. Der Doppelpunkt, den wir bisher nur als Rechenzeichen für die Division kennen, wird auch als Symbol für das **Verhältnis zweier Größen** benutzt und dann als „zu" gelesen.

Wir haben schon häufig vom Verhältnis, in dem zwei Zahlen stehen, gesprochen und dabei das Wort „zu" verwendet, z. B. beim Maßstab einer Landkarte (1 : 25000) oder beim Torverhältnis eines Fußballspieles (3 : 2).

Man vergleicht gewöhnlich die Mengen oder Größen gleichartiger Dinge durch Verhältnisse miteinander, z. B. die Milcherträge verschiedener Kühe in Kilogramm je Monat; die Stahlproduktion verschiedener Staaten in Tonnen je Jahr; die Geschwindigkeiten von Fahrzeugen in Kilometern je Stunde; die Preise von Waren in DM usw.

Die Angabe eines Verhältnisses ist also eine neue Art des Zahlenvergleichs, die dem Messen einer Größe mit einer anderen gleichartigen entspricht. Es ist also zu bestimmen, wie oft die eine Größe in der anderen enthalten ist. Daher ist das Verhältnis zweier gleichartiger Größen stets unbenannt.

2. Beispiel:

Beim 100-m-Lauf wurde eine Zeit von 12 Sek. gestoppt. Ein Fußgänger braucht für 1 km durchschnittlich 12 Min. In welchem Verhältnis stehen die Zeiten, die Läufer und Fußgänger für 100 m benötigen?

Wir überlegen uns zunächst, daß der Fußgänger im Durchschnitt 1,2 Min. für 100 m braucht. Jetzt vergleichen wir 12 Sek. mit 1,2 Min., berechnen also, wie oft 12 Sek. in 1,2 Min. enthalten sind. Beide Benennungen werden in Übereinstimmung gebracht (1,2 Min. = 72 Sek.). Nun erkennen wir, daß der Fußgänger die sechsfache Zeit benötigt. Die beiden Zeiten verhalten sich also wie 1 : 6.

Will man das Verhältnis zweier gleichartiger Größen bestimmen, die in verschiedenen Maßeinheiten gegeben sind, so rechnet man vorher beide Größen in gleiche Maßeinheiten um.

3. Beispiel:

Der durchschnittliche Ernteertrag an Weizen betrug in der DDR im Jahre 1950 rund 25 dz je Hektar, 1956 aber rund 30 dz je Hektar. In welchem Verhältnis stehen die Erträge?

Diesmal ist die größere Zahl kein ganzes Vielfaches der kleineren. Deshalb geben wir zunächst das Verhältnis der gegebenen Zahlenwerte (30 : 25) als Ergebnis an.

Das Verhältnis 30 : 25 können wir als Divisionsaufgabe auffassen und infolgedessen auch als Bruch $\frac{30}{25}$ schreiben. Brüche lassen sich kürzen: $\frac{30}{25} = \frac{6}{5}$. Den gekürzten Bruch $\frac{6}{5}$ („6 Fünftel") können wir wieder als Divisionsaufgabe 6 : 5 ansehen (6 „durch" 5) und weiter auch als Zahlenverhältnis (6 „zu" 5) deuten. Demzufolge lautet das Ergebnis: Die durchschnittlichen Hektarerträge an Weizen in den Jahren 1956 und 1950 stehen im Verhältnis 6 : 5.

Das Verhältnis zweier gleichartiger Größen mit gleichen Benennungen kann ohne Benennung durch Verbinden mit dem Verhältniszeichen : angegeben und wie ein Bruch gekürzt werden. Auf diese Weise erhält man das Verhältnis „in kleinsten ganzen Zahlen". Sollen Dezimalzahlen ins Verhältnis gesetzt werden, so erweitert man sie, um Verhältnisse aus ganzen Zahlen zu erhalten:

$$5{,}6 : 8{,}4 = \frac{5{,}6}{8{,}4} = \frac{56}{84} = \frac{2}{3} = 2 : 3.$$

Zusammenfassung:

1. **Um zwei gleichartige Größen zu vergleichen, kann man feststellen, in welchem Verhältnis beide stehen. Werden dabei die beiden Größen in denselben Maßeinheiten angegeben, so sind die entstehenden Verhältnisse unbenannt.**
2. **Es ist üblich, sie durch möglichst kleine ganze Zahlen darzustellen.**

Aufgaben

1. In welchem Verhältnis stehen folgende Größen? (Überschlage stets vor der schriftlichen Rechnung die Ergebnisse im Kopf, soweit sie nicht überhaupt im Kopf bestimmt werden können!)

a)	16 m und 96 m	23 hl und 184 hl
	28 DM und 112 DM	1075 mm^2 und 43 mm^2
b)	0,8 l und 7,2 l	4,6 m^2 und 36,8 m^2
	0,60 DM und 10,20 DM	2,8 kg und 0,35 kg
c)	$\frac{3}{4}$ ha und $18\frac{3}{4}$ ha	$\frac{1}{2}$ DM und 12 DM
	$16\frac{2}{3}$ Std. und $3\frac{1}{3}$ Std.	$\frac{1}{2}$ kg und $\frac{1}{4}$ kg
d)	76 cm und 9,88 m	17 mm^3 und 17 cm^3
	1,9 a und 3,61 ha	3,8 l und 3,04 hl

2. Gib das Verhältnis folgender Größen in möglichst kleinen ganzen Zahlen an!

a)	2,60 DM und 9,10 DM	1,96 m und 3,08 m
	18,5 hl und 7,4 hl	10,34 m^2 und 5,64 m^2
b)	85 m^2 und 1,87 a	78 m und 3,9 km
	92 Min. und 3 Std. 27 Min.	66 a und 4,14 ha

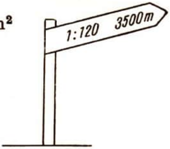


Abb. 28

3. Längs der Eisenbahnstrecken befinden sich „Steigungstafeln“. Sie geben an, wie der nächste Streckenabschnitt ansteigt oder abfällt (Abb. 28) Das Verhältnis 1 : 120 bedeutet, daß auf je 120 m waagerechter Entfernung 1 m Höhenunterschied zu überwinden ist; die Zahl 3500 m gibt die waagerecht gemessene Länge eines Streckenabschnitts an. Die Stellung der Tafelfahne (nach oben oder nach unten) weist auf Ansteigen oder Abfallen hin. Am Ende dieses Streckenabschnitts steht dann die nächste Steigungstafel. Entwirf eine Steigungstafel für einen Streckenabschnitt, in dem auf die nächsten 2,7 km ein Anstieg von 18 m kommt!

4. Die Spareinlagen bei den Sparkassen der DDR im Jahre 1950 und im Jahre 1957 verhalten sich etwa wie 1 : 7. Veranschauliche dieses Verhältnis durch ein Streifendiagramm!

5. Zeichne ein Quadrat mit der Seite 16 mm und ein zweites mit der Seite 48 mm! In welchem Verhältnis stehen die Umfänge, in welchem die Flächen dieser beiden Quadrate? Stelle das Ergebnis durch zwei Streckendiagramme dar!

6. In welchem Verhältnis stehen die Kantenlängen, die Oberflächen und die Rauminhalte zweier Würfel mit den folgenden Kantenlängen?

a) 14 cm und 21 cm **b)** 5 mm und $2\frac{1}{2}$ cm **c)** 1,25 m und 75 cm

7. Bestimme das Verhältnis folgender Größen! Was stellst du fest? $\frac{1}{2}$ l Wasser und $\frac{1}{2}$ l Milch, 0,80 DM und 80 Pf, 10 dz und 1 t.

8. Beim Aufbau unserer Städte wird immer mehr die Großblockbauweise angewandt. Die Großplatte I 4 ist 2,55 m lang, 2,09 m hoch und 0,20 m dick. Der Mauerziegel NF 52 hat folgende Maße: 24 cm × 11,5 cm × 7,1 cm. Vergleiche durch Zahlenverhältnisse die Längen, Breiten und Dicken der beiden Bauelemente!

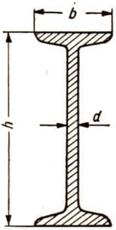


Abb. 29

9. Der in der Abbildung 29 im Querschnitt dargestellte **I**-Stahl (lies: Doppel-Te-Stahl) I 50 hat nach DIN 1025 eine Höhe $h = 500$ mm. In welchem Maßstab ist die Zeichnung hergestellt?

10. Sputnik 2 hatte eine Geschwindigkeit von etwa 8000 m/Sek., das sowjetische Flugzeug Tu 104 hat eine solche von rund 875 km/Std. Bestimme das Verhältnis der Geschwindigkeiten!

23. Der Begriff „Proportion“; das Umformungsgesetz

1) Beispiel 1: In einem Werk wurde durch die Einführung einer neuen Arbeitsmethode und die Aufstellung neuer Maschinen eine beträchtliche Steigerung der Produktion möglich. In der Zeit, in der sonst 90 Werkstücke produziert wurden, können jetzt 120 Stück hergestellt werden. Beide Leistungen verhalten sich wie 120 : 90. Wir kürzen das Verhältnis und erhalten:

$$120 : 90 = 60 : 45 = 20 : 15 = 4 : 3$$

Entsprechend können wir es auch erweitern:

$$4 : 3 = 8 : 6 = 12 : 9 = 24 : 18 = 40 : 30 = 80 : 60 = 180 : 135 = \ldots$$

Wir erhalten eine ganze Kette gleicher Verhältnisse. Aus ihr wollen wir zwei beliebige herausgreifen; etwa 120 : 90 und 4 : 3. Dann ist sicher folgende Gleichung berechtigt:

$$120 : 90 = 4 : 3$$

Wir lesen: „120 (verhält sich) zu 90 wie 4 zu 3“.

Diese Gleichungsform wird **Verhältnisgleichung** oder **Proportion** genannt. 120, 90, 4 und 3 sind die **Glieder** der Proportion.

Die Glieder werden nach ihrer Anordnung in der Proportion benannt:

Außenglieder

Innenglieder

120 : 90 = 4 : 3

Vorderglieder Hinterglieder

Das Gleichheitszeichen wird „wie“ gelesen.

Da die Verhältnisse gleichartiger Größen unbenannt sind, besteht auch jede daraus gebildete Proportion aus reinen Zahlenwerten. Einer derartigen Proportion kann man nicht ansehen, welcher Sachverhalt zugrunde liegt. Zur Proportion $120 : 90 = 4 : 3$ hätten wir auch über Aufgaben gelangen können, die einen anderen Sachverhalt zum Inhalt haben.

Beispiel 2: 4 dz Thomasmehl sind als Phosphorsäuredünger 3 dz Magnesiumphosphat gleichwertig. Ist es richtig, wenn der Agronom einer LPG veranlaßt, daß für ein Feld von $\frac{1}{2}$ ha Größe an Stelle der im Vorjahr gestreuten 120 kg Thomasmehl diesmal 90 kg Magnesiumphosphat verwendet werden sollen?

Zur Überprüfung setzen wir die entsprechenden Düngermengen ins Verhältnis, nämlich 4 kg und 3 kg bzw. 120 kg und 90 kg, und stellen tatsächlich die Gleichheit der Verhältnisse fest. Die entstehende Proportion $120 : 90 = 4 : 3$ ist die gleiche wie in Beispiel 1, obwohl hier ein anderer Sachverhalt vorliegt.

2) Man kann Proportionen umformen, ohne daß dabei die Gleichheit der Seiten verlorengeht.

Da es sich bei den Proportionen um Gleichungen handelt, müssen beim Umformen die Gesetze der Gleichungslehre beachtet werden. Wir benutzen zur Untersuchung die Proportion

(1) $3 : 4 = 6 : 8$ (Verhältnisgleichung)

Man kann eine Proportion auch als Gleichung zwischen zwei Brüchen schreiben:

(2) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ (Gleichung zwischen zwei Brüchen)

Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit dem Produkt aus beiden Nennern, also $4 \cdot 8$. Dann ergibt sich $\frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 8 = \frac{6}{8} \cdot 4 \cdot 8$ und nach dem Kürzen auf jeder Seite

(3) $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ (Produktgleichung)

Alle drei Gleichungen drücken dasselbe aus.

Der Vergleich von (1) mit (3) zeigt uns sofort, wie die **Produktgleichung** aus der Proportion entsteht:

Satz 1: In jeder Proportion ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder (Produktgleichung).

3) Zu jeder Proportion gehört eine ganz bestimmte Produktgleichung. Aus $3:4 = 6:8$ folgt eindeutig $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Das Umgekehrte gilt aber nicht, denn diese Produktgleichung könnte auch aus anderen Proportionen entstanden sein, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

	I		II
a)	$3:4 = 6:8$	a)	$4:3 = 8:6$
b)	$3:6 = 4:8$	b)	$4:8 = 3:6$
c)	$8:4 = 6:3$	c)	$6:3 = 8:4$
d)	$8:6 = 4:3$	d)	$6:8 = 3:4$

Alle acht Proportionen ergeben dieselbe Produktgleichung $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Durch sie hängen sie miteinander zusammen, d. h., die eine kann aus der anderen durch Vertauschen gewisser Glieder entstehen.

Beim Vergleichen der Proportionen in der Zusammenstellung erkennt man:

Satz 2: Aus jeder Proportion kann man andere Proportionen gewinnen,
indem man die Innenglieder vertauscht,
indem man die Außenglieder vertauscht oder
indem man die Innenglieder gegen die Außenglieder austauscht.

Bei jeder Proportion, die nach diesem Lehrsatz durch Gliedervertauschung aus einer gegebenen Proportion entsteht, ergeben die linke und die rechte Seite natürlich andere Verhältniswerte, als sie die Ausgangsproportion besaß. Das zeigen wir an unserem Beispiel $3:4 = 6:8$.

Proportion	Verhältniswert	Proportion	Verhältniswert
$3:4 = 6:8$	$\frac{3}{4}$	$4:3 = 8:6$	$\frac{4}{3}$
$3:6 = 4:8$	$\frac{1}{2}$	$4:8 = 3:6$	$\frac{1}{2}$
$8:4 = 6:3$	2	$6:3 = 8:4$	2
$8:6 = 4:3$	$\frac{4}{3}$	$6:8 = 3:4$	$\frac{3}{4}$

Zusammenfassung:

1. **Wenn zwei Verhältnisse den gleichen Wert haben, kann man sie durch ein Gleichheitszeichen zu einer Verhältnisgleichung (Proportion) verbinden.**

2. Die Gleichheit zweier Verhältnisse kann in drei Formen geschrieben werden:

a) als Proportion,

b) als Gleichung zwischen zwei Brüchen,

c) als Produktgleichung.

3. In jeder Proportion ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.

4. In jeder Proportion kann man die Innenglieder untereinander, die Außenglieder untereinander oder die Innenglieder gegen die Außenglieder austauschen.

Aufgaben

1. Wie heißen Vorder- und Hinterglieder, Innen- und Außenglieder bei folgenden Proportionen? (Überzeuge dich vorher jeweils von der Gleichheit der beiden Verhältnisse!)

a) $0{,}18 : 0{,}21 = 6 : 7$ **b)** $9{,}5 : 1{,}9 = 5 : 1$

c) $\frac{4}{5} : \frac{8}{5} = 1 : 2$ **d)** $\frac{3}{4} : \frac{9}{20} = 5\frac{5}{6} : 3\frac{1}{2}$

2. Suche zu folgenden Verhältnissen ein zweites vom gleichen Wert und vereinige beide dann zu einer Proportion! Schreibe jede Proportion auch als eine Gleichung zwischen zwei Brüchen!

a) $7{,}2 : 24$ **b)** $32 : 15{,}2$ **c)** $\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$ **d)** $26 : 0{,}36$

3. Bilde aus den folgenden vier Größen eine Proportion, indem du jeweils zwei Größen ins Verhältnis setzt!

a) 15 DM, 21 DM, 40 DM, 56 DM **b)** 34 m, 6,40 m, 85 m, 16 m

c) 72 l, 96 l, 1,76 hl, 1,32 hl **d)** 4 a, 1,5 ha, 1,2 ha, 5 a

e) 0,3, 4, 1,2, 16 **f)** $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ **g)** 0,01, 20, 0,3, 600

h) 3, 0,36, 1,8, 15 **i)** 42, 4, 6, 63 **k)** 3, $4\frac{1}{4}$, $5\frac{2}{3}$, 4

Gibt es bei den Aufgaben jeweils nur eine Lösung?

4. Bilde jeweils die anderen sieben Proportionen durch Austauschen der Glieder und stelle die Produktgleichung auf!

a) $45 : 75 = 42 : 70$ **b)** $136 : 51 = 176 : 66$ **c)** $1000 : 1 = 27000 : 27$

d) $1 : 5 = 12 : 60$ **e)** $3 : 7 = \frac{3}{14} : \frac{1}{2}$ **f)** $3\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4} = 1\frac{3}{7} : \frac{15}{28}$

g) $0{,}95 : 1{,}75 = 11{,}4 : 21$ **h)** $0{,}8 : 2{,}8 = 2{,}5 : 8{,}75$

5. **a)** bis **k)** Verfahre genauso mit den bei Aufgabe 3 entstandenen Proportionen!

6. Mit Hilfe der Produktgleichung läßt sich feststellen, ob eine gegebene Proportion zu Recht besteht. Überprüfe in dieser Weise folgende Proportionen!

a) $\frac{3}{4} : 1 = 1\frac{1}{2} : 2$ b) $1{,}2 : 1{,}5 = 2{,}1 : 2{,}8$

c) $2{,}2 : 0{,}11 = 2 : 0{,}1$ d) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$

e) $10 : 1{,}2 = 25 : 3$ f) $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{2}{25} : \frac{3}{10}$

24. Der Begriff „Proportionalität“

1) Bisher haben wir Proportionen untersucht, deren Glieder gleichartige Größen darstellen.

Beispiel: Aus den Gliedern 120 St., 90 St., 4 St. und 3 St. bildeten wir die Proportion $120 : 90 = 4 : 3$.

In einer Proportion kann aber auch das Verhältnis der einen Seite aus andersartigen Größen entstanden sein als das Verhältnis der anderen Seite. Allerdings ist ein Vergleich zweier solcher Verhältnisse nur dann sinnvoll, wenn zwischen den Größen der beiden Verhältnisse auch ein sachlicher Zusammenhang besteht.

Beispiel 1:

Der Vater kaufte 3 m Anzugstoff und bezahlte dafür 90 DM. Sein Arbeitskollege kaufte 4 m und sagte, er habe dafür 120 DM bezahlt. Günter rechnete schnell und sagte dann: „Da haben Sie vielleicht denselben Stoff gekauft wie Vater.“ Wie kommt Günter zu dieser Behauptung? Er stellte fest, daß sich die Meterzahlen wie $4 : 3$ verhalten, die Preise aber wie $120 : 90$. Beide Verhältnisse sind gleich: $120 : 90 = 4 : 3$. Günter weiß, daß das im allgemeinen bei jeder Ware so ist: Die Preise für verschiedene Mengen derselben Ware stehen in demselben Verhältnis wie diese Mengen, also 120 DM verhalten sich zu 90 DM wie 4 m zu 3 m.

Beispiel 2:

Bei der Serienproduktion von Meßgeräten konnten am Fließband in 4 Std. 120 Geräte montiert werden. Der Meister rechnet damit, daß nach weiteren 3 Stunden die nächsten 90 Geräte fertig sind. Er weiß, daß bei gleichmäßiger Fließbandarbeit die Produktionszahlen im gleichen Verhältnis wie die Arbeitszeiten stehen. Für die Produktionszahlen ist das Verhältnis 120 St. : 90 St., für die Arbeitszeiten ist es 4 Std. : 3 Std. Beide Verhältnisse sind gleich; denn $120 : 90 = 4 : 3$.

Die beiden Beispiele zeigen: Es ist auch möglich, zwei Verhältnisse zu vergleichen, von denen das eine aus andersartigen Größen gebildet ist als das andere. Allerdings ist es nötig, daß zwischen den verschiedenartigen

Größen sachliche Zusammenhänge bestehen (Warenmengen und ihre Preise, Arbeitszeiten und die zugehörigen Produktionsmengen).

2) Aus der Gleichheit der Verhältnisse der Produktionsmengen und der zugehörigen Arbeitszeiten können wir noch weitere zusammengehörige Größen erschließen:

$$120 : 30 = 4 : 1$$
$$120 : 60 = 4 : 2 \quad \text{usw.}$$

Wir stellen die Ergebnisse in einer Wertetafel zusammen:

Arbeitszeit (in Std.)	1	2	3	4	5	6	7	8
produzierte Geräte (in St.)	30	60	90	120	150	180	210	240

Greifen wir jetzt zwei beliebige Arbeitszeiten und die zugehörigen Produktionsmengen heraus, so sind die Verhältnisse gleichartiger Größen gleich.

Beispiel (siehe Wertetafel): 3 Std. : 8 Std. und 90 St. : 240 St.

Folglich gilt die Proportion: $3 : 8 = 90 : 240$.

So könnten wir aus zusammengehörigen Zahlen der Wertetafel noch beliebig viele Proportionen bilden.

Man nennt die Beziehung, in der Produktionsmenge und Arbeitszeit stehen, **Proportionalität**. Wir wollen uns dafür folgende Kennzeichen merken:

Zwischen zwei Größen herrscht Proportionalität, wenn das Verhältnis aus zwei Werten der einen Größe stets genauso groß ist wie das Verhältnis aus den entsprechenden Werten der anderen Größe, und wenn die Größen in einem sachlichen Zusammenhang stehen.

Häufig erkennt man die Proportionalität schon an dem gleichartigen Verhalten der Größen:

Vergrößert sich die eine (z. B. die Arbeitszeit), so vergrößert sich auch die andere im gleichen Maße (also die Zahl der produzierten Geräte). Genauso gilt: Verkleinert sich die eine, so verkleinert sich auch die andere im gleichen Maße. Oder: Wird die eine Größe verdoppelt, verdreifacht, ..., halbiert, gedrittelt, ..., so wird auch die andere Größe verdoppelt, verdreifacht, ..., halbiert, gedrittelt, ...

Die Proportionalität zwischen zwei Größen wird durch das Kurzzeichen $\sim$ (lies proportional) angegeben. Die Proportionalität zwischen Produktionsmenge und Arbeitszeit kann man demnach unter Verwendung der Anfangsbuchstaben folgendermaßen ausdrücken:

$$P \sim A.$$

3) Die gleichsinnige und gleichmäßige Änderung proportionaler Größen zeigt sich besonders anschaulich, wenn wir die Wertetafel als Streckendiagramm grafisch darstellen. Auf der waagerechten Achse tragen wir die Arbeitszeiten, auf der lotrechten (mit einer kleineren Maßeinheit) die

Produktionsmengen ab (Abb.30a). Es fällt sofort auf, daß die Endpunkte der Strecken, die den Gerätezahlen entsprechen, auf einer Geraden liegen, die vom Nullpunkt der beiden Achsen ausgeht. Daß das kein Zufall ist, machen wir uns folgendermaßen klar: Im Diagramm der Abbildung 30a erkennen wir rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten jeweils die Arbeitszeiten bzw. die Produktionsmengen darstellen. Wir wissen, daß diese beiden Größen bei Proportionalität stets im gleichen Maße wachsen. Das Verhältnis der beiden Katheten ist also

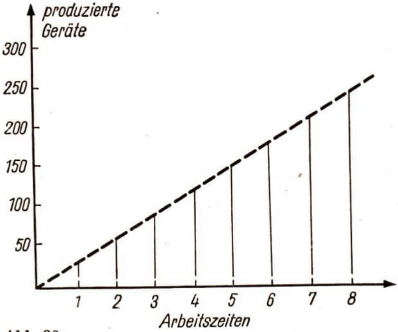


Abb. 30a

beim ersten Dreieck 30 : 1,
beim zweiten Dreieck 60 : 2,
beim dritten Dreieck 90 : 3 usw.

Zeichnen wir diese Dreiecke (mit den gleichen Maßeinheiten wie in Abbildung 30a) einzeln, so ergibt sich Abbildung 30b. Die Dreiecke sind zwar alle verschieden groß, haben aber wegen der Proportionalität ihrer Katheten alle die gleiche Form oder Gestalt. Ihre Hypotenusen laufen also z. B. alle in derselben Richtung unter dem Winkel α. Das bleibt auch so, wenn wir die Dreiecke alle übereinander zeichnen (Abb. 30c). Die Hypotenusen müssen dann alle auf der unter α ansteigenden Geraden liegen, die, vom gemeinsamen Scheitel (dem Nullpunkt) ausgehend, die Endpunkte der Strecken verbindet, die im Diagramm (Abb. 30a) die Gerätezahlen darstellen.

4) Zwei Größen sind nicht proportional, wenn sie sich nicht im gleichen Maße vergrößern oder verkleinern. Man darf sich nicht durch die Kennzeichnung „Je größer die eine — desto größer die andere“ täuschen lassen.

Abb. 30b

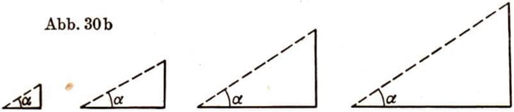
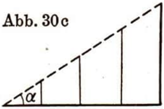


Abb. 30c



Beispiel:

Wir zeichnen fünf Quadrate mit den Seiten 1, 2, 3, 4 und 5 cm. Wir fragen, ob Proportionalität zwischen den Seiten und den Umfängen bzw. den Flächen besteht. Wir berechnen die Umfänge und die Flächen und stellen die Ergebnisse in einer Wertetafel zusammen:

Seiten (in cm)	1	2	3	4	5
Umfänge (in cm)	4	8	12	16	20
Flächen (in cm²)	1	4	9	16	25

Bilden wir nun die Verhältnisse zweier beliebiger Seiten, der zugehörigen Umfänge und der zugehörigen Flächen, so stellen wir fest:

Seiten und Umfänge:

$1 : 2 = 4 : 8$
$2 : 4 = 8 : 16$
$2 : 3 = 8 : 12$

Seiten und Flächen:

$1 : 2 \neq 1 : 4$
$2 : 4 \neq 4 : 16$
$2 : 3 \neq 4 : 9$

usw.

Die Umfänge sind proportional zu den Seiten ($u \sim s$).

Die Flächen sind nicht proportional zu den Seiten.

Bei der grafischen Darstellung ergibt sich nur bei den Umfängen eine Gerade (Abb. 31a), bei den Flächen aber entsteht ein gebrochener Streckenzug (Abb. 31b).

Zusammenfassung:

1. **Zwei Verhältnisse, von denen das eine aus andersartigen Größen gebildet ist als das andere, können miteinander verglichen werden, wenn zwischen den Größen sachliche Zusammenhänge bestehen.**
2. **Ist das Verhältnis aus zwei beliebigen Werten der einen Größe jeweils gleich dem Verhältnis aus den zugehörigen Werten der anderen Größe, so nennt man die Größen zueinander proportional. (Symbol: $\sim$)**
3. **Die Proportionalität kann man in einem Diagramm durch eine Gerade darstellen, die durch den Nullpunkt beider Achsen verläuft.**

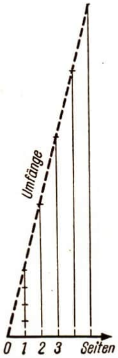


Abb. 31a

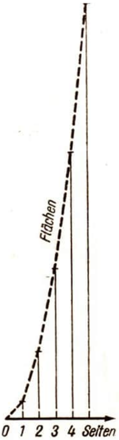


Abb. 31b

Aufgaben

1. Die von den Mitgliedern landwirtschaftlicher Produktionsgenossenschaften verrichtete Arbeit wird nach Arbeitseinheiten bewertet. Dabei wird sowohl der Umfang als auch die Schwierigkeit der Arbeit berücksichtigt.

   a) Die Genossenschaftsmitglieder Richter, Junge und Platen waren an einem Tage zum Pflügen eingesetzt. Nach Feierabend verbucht der Brigadier folgendes:

	Junge	Richter	Platen
Größe des gepflügten Feldstückes (in ha)	0,70	0,80	0,65
Anzurechnende Arbeitseinheiten	1,4	1,6	1,3

   Sind die angerechneten Arbeitseinheiten zu den Größen der Felder proportional?

   b) Sprich das Ergebnis über die Abhängigkeit der anzurechnenden Arbeitseinheiten von der Größe des bearbeiteten Feldes bei derselben Feldarbeit in einem Satz aus!

   c) Das Ergebnis eines anderen Arbeitstages ist folgendes:

	Junge	Richter	Platen
Größe des bearbeiteten Feldes (in ha)	4,4	5,2	4,0
Anzurechnende Arbeitseinheiten	1,1	1,3	1,2

   Verfahre wie bei **a)**! Was kannst du über die Art der Feldarbeiten aussagen, die Junge, Richter und Platen an diesem Tage verrichtet haben?

2. Das Gewicht eines Kieferkantholzes beträgt
   beim Querschnitt 8 cm × 8 cm und 1 m Länge 4,20 kp,
   beim Querschnitt 12 cm × 12 cm und 1 m Länge 9,45 kp,
   beim Querschnitt 8 cm × 8 cm und 2 m Länge 8,40 kp.

   Vergleiche das Verhältnis der Gewichte **a)** mit dem Verhältnis der Querschnittsbreiten, **b)** mit dem Verhältnis der Längen und **c)** mit dem Verhältnis der Querschnittsflächen! In welchem Falle besteht Proportionalität?

3. Zeichne acht gleichschenklige Dreiecke mit den Basiswinkeln 80°, 70°, ..., 20°, 10° und markiere jeweils gleichfarbig

   a) die Basiswinkel, **b)** die Innenwinkel an der Spitze, **c)** die Außenwinkel an der Spitze!

Miß und berechne die Winkel an der Spitze und stelle die Ergebnisse in einer Zahlentabelle wie der folgenden zusammen:

Basiswinkel	10°	20°		80°
Innenwinkel an der Spitze	160°			
Außenwinkel an der Spitze	20°			

Vergleiche **a)** mit **b)**, **a)** mit **c)** und **b)** mit **c)**! In welchen Fällen besteht Proportionalität? Begründe deine Erkenntnisse!

25. Der Proportionalitätsfaktor

Wir betrachten nochmals die Wertetafel aus Kapitel 24, die die proportionalen Größen „Produktionsmenge“ und „Arbeitszeit“ veranschaulicht.

	Produktionsmenge (in St.)		Arbeitszeit (in Std.)	
	30		1	
	60		2	
	90 ←	90 : 3 →	3	
	120		4	
90 : 240	150		5	3 : 8
	180		6	
	210		7	
	240 ←	240 : 8 →	8	

Wir bildeten bisher Proportionen, indem wir Verhältnisse aus gleichartigen, einander entsprechenden Größenwerten gleichsetzten:

$$90 : 240 = 3 : 8.$$

Wir wollen jetzt Verhältnisse aus ungleichartigen, einander entsprechenden Größen bilden, also aus irgendeiner Arbeitszeit und der zugehörigen Produktionsmenge (siehe Kennzeichnung in der Wertetafel):

90 St. und 3 Std.; 240 St. und 8 Std.

Diese Verhältnisse müssen gleich sein, denn

$$90 : 3 = 240 : 8$$

entsteht durch Vertauschen der Innenglieder aus der Proportion

$$90 : 240 = 3 : 8.$$

Bilden wir die entsprechenden Verhältnisse aus den anderen Zahlen der Wertetafel, so haben auch diese alle denselben Wert.
Wir können demzufolge eine ganze Kette gleicher Verhältnisse aufstellen:

$$30 : 1 = 60 : 2 = 90 : 3 = 120 : 4 = 150 : 5 = \ldots = 30$$

Wenn zwei Größen proportional sind, kann man stets eine solche Kette gleicher Verhältnisse aufstellen. Den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse, nennt man den **Proportionalitätsfaktor**. Er ist für jedes Verhältnis, das aus der Wertetafel gebildet wurde, gleich (konstant), für dieses Beispiel 30. Der Proportionalitätsfaktor gibt an, wieviel Geräte in jeder Stunde fertiggestellt werden: 30 Stück in jeder Stunde. Wir schreiben dafür 30 St./Std. Er ermöglicht das Berechnen weiterer Zahlenpaare der Wertetafel: Multipliziert man eine Zahl von Arbeitsstunden mit dem Proportionalitätsfaktor, so erhält man die in dieser Zeit produzierten Geräte.

Beispiel: Produktionsmenge in 5 Std.:

$$5 \cdot 30 = 150.$$

Das läßt sich verallgemeinern.
Zwischen der Produktionsmenge und der Arbeitsstundenzahl lernten wir folgende Beziehung kennen:

$$P \sim A \text{ } (P = \text{Produktionsmenge}; A = \text{Arbeitsstundenzahl}).$$

Wenn wir den Proportionalitätsfaktor mit k bezeichnen, wird aus der Proportionalitätsfeststellung die Gleichung

$$P = k \cdot A.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir zu irgendeiner Arbeitszeit A die Produktionsmenge P bestimmen, oder auch zu einer gegebenen Produktionsmenge P die erforderliche Arbeitszeit A. Die gesuchte Größe fassen wir dann jedesmal als Unbekannte einer Bestimmungsgleichung auf.

Zusammenfassung:

Der konstante Wert der Verhältnisse aus zusammengehörenden Werten proportionaler Größen heißt der Proportionalitätsfaktor. Er hat eine reale Bedeutung, die sich aus dem Sachverhalt ergibt.

Aufgaben

1. Zwischen den nach Celsius und den nach Réaumur gemessenen Temperaturwerten besteht die Beziehung, daß 5° C immer 4° R entsprechen.

a) Ergänze und erweitere folgende Wertetafel!

C	$-5°$	$5°$	$10°$	$12°$	$40°$	$100°$
R	$-4°$	$4°$	$8°$			

b) Bestätige die Proportionalität zwischen Celsius- und Réaumurwerten durch Proportionen, durch eine Verhältniskette und durch den Proportionalitätsfaktor!

c) Bestätige sie auch durch eine grafische Darstellung (waagerechte Achse: Celsiusgrade; lotrechte Achse: Réaumurgrade)!

d) Zeichne nochmals eine grafische Darstellung wie unter c), diesmal aber mit den Réaumurgraden auf der waagerechten und den Celsiusgraden auf der lotrechten Achse! Wodurch unterscheiden sich die beiden Diagramme?

2. Bei vielen Sachverhalten kennen wir die Proportionalität zwischen den Größen aus der Erfahrung.
Verfahre mit jedem der folgenden Beispiele so wie in Aufgabe 1!
 a) Menge und Preis einer Ware: $\frac{1}{2}$ l Vollmilch kostet 34 Pf.
 b) Verrichtete Arbeitseinheiten und Barauszahlung bei einer LPG: Ein Melker einer Tierzuchtbrigade bekam im Monat für 56,4 Arbeitseinheiten 513,24 DM ausgezahlt.
 c) Wanderweg und Wanderzeit: Eine Gruppe Junger Pioniere erreicht auf einer Wanderung in $\frac{3}{4}$ Std. das nächste Dorf, das 3,750 km entfernt liegt.
 d) Anbaufläche und Saatgutmenge: Für 1 ha Maisanbau benötigt man durchschnittlich 25 kg Saatgut.
 e) Fahrstrecke und Fahrpreis bei der Reichsbahn: 1 km kostet in der 2. Klasse 8 Pf, in der 1. Klasse 11,6 Pf.
 f) Mauerwerk und Bedarf an Mörtel und Kalk: Zu 2 m^3 Mauerwerk aus groben Bruchsteinen werden 0,6 m^3 Mörtel benötigt und dazu wieder 3,8 dz Kalk. (3 Aufgaben: Vergleiche Mauerwerk mit Mörtelmenge, Mörtelmenge mit Kalkmenge und Mauerwerk mit Kalkmenge!)
 g) Arbeitszeit und Arbeitsleistung: Mit einem Mähdrescher können $3\frac{1}{2}$ ha Getreide in 8 Std. gemäht werden (Durchschnittswert).

3. Bei physikalischen und technischen Gesetzen kann oft nur die Beobachtung (das Experiment) aufdecken, ob Proportionalität vorliegt oder nicht. Es sind folgende Proportionalitäten ermittelt worden. Verfahre auch mit diesen Beispielen wie bei Aufgabe 1!
 a) Zugbelastung elastischer Stoffe und Verlängerung: Ein Gummiseil erfährt bei einer Belastung mit 5 kp eine Verlängerung um 8 cm.
 b) Gewicht und Volumen eines Stoffes: 3 cm^3 eines Stoffes wiegen 8,4 p.
 c) Betriebszeit, Energieverbrauch und Kosten bei elektrischen Geräten: Ein elektrischer Heizofen verbraucht in 3 Stunden 4,5 kWh, für die 36 Pf berechnet werden. (3 Aufgaben: Vergleiche Energieverbrauch mit Betriebsdauer, Energieverbrauch mit Kosten und Betriebsdauer mit Kosten!)

4. In der Abbildung 32a und b sind für zwei verschiedene Sachverhalte die Zusammenhänge grafisch dargestellt. In welchem Fall liegt

Proportionalität vor, in welchem nicht? Bestätige deine Antwort auch rechnerisch, indem du aus den grafischen Darstellungen zusammengehörende Werte abliest und den Verhältnisvergleich durchführst!

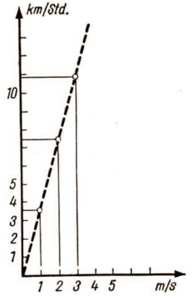


Abb. 32a

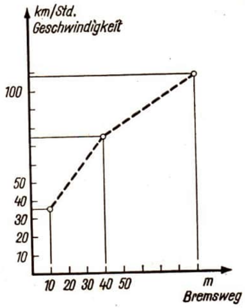


Abb. 32b

5. Bilde mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors für die folgenden proportionalen Größen jeweils eine Verhältniskette und stelle eine Wertetafel auf!
Fertige zu jedem Beispiel eine grafische Darstellung an!

a) Saatgutmenge bei Mais und Größe des bestellten Feldes; Proportionalitätsfaktor: 25 kg Mais je Hektar des Feldes.

b) „Schußzahl" beim Weben und Länge des gewebten Stoffes; Proportionalitätsfaktor: 2200 „Schuß" für jeden Meter Stoff.

c) Gedüngte Getreideanbaufläche und Superphosphatmenge; Proportionalitätsfaktor: 2,1 dz Superphosphat je Hektar Anbaufläche.

d) Transportierter Sand und Anzahl der Fahrten eines LKW; Proportionalitätsfaktor: 3,5 t bei einer Fahrt.

e) Kubikmeter gefördertes Wasser und Pumpzeit einer Pumpe im Pumpspeicherwerk Niederwartha; Proportionalitätsfaktor: 9,8 m³ Wasser je Sekunde Pumpzeit.

26. Das Berechnen unbekannter Größen

Wenn zwischen zwei Sachverhalten Proportionalität besteht, kann man zu drei gegebenen Größen die vierte unbekannte Größe aus einer Proportion berechnen.

1. Beispiel: 3 m eines Kleiderstoffes kosten 24 DM. Wieviel DM kosten 5 m?

Die Aufgabe enthält drei bekannte Größen (3 m, 24 DM und 5 m). Eine vierte Größe soll berechnet werden. Wir bezeichnen ihren Zahlenwert wie bei den Bestimmungsgleichungen mit x.

Zur Vorbereitung der Lösung schreiben wir die Aufgabe in zwei kurzen übersichtlichen Sätzen nieder, den sogenannten

Ansatz: 3 m kosten 24 DM,
5 m kosten x DM.

Die gesuchte Zahl x steht immer im zweiten Satz rechts, gleichbenannte Zahlen stehen stets untereinander.

Aus der Proportionalität von Stoffmengen und Preisen ergibt sich die Proportion:

$$3 : 5 = 24 : x.$$

Das ist eine Bestimmungsgleichung für x. Das Isolieren von x ist leichter möglich, wenn wir für die Proportion die Produktgleichung schreiben:

$$3 \cdot x = 24 \cdot 5 \quad | : 3$$
$$x = \frac{24 \cdot 5}{3}$$
$$x = 40$$

Ergebnis: 5 m Stoff kosten 40 DM.

Wir hätten das Ergebnis auch durch folgende Überlegungen finden können: Wenn 3 m Stoff 24 DM kosten, kostet 1 m den dritten Teil von 24 DM, also 24 DM : 3 = 8 DM. 5 m kosten dann das Fünffache hiervon, also 5 · 8 DM = 40 DM. Solche Überlegungen nennt man Schlüsse: Wir schließen vom Preis für 3 m auf den Preis für 1 m und dann vom Preis für 1 m auf den Preis für 5 m. Auch der oben benutzten Proportion $3 : 5 = 24 : x$ liegen diese beiden Schlüsse zugrunde. Sie erlaubt aber eine wesentlich kürzere Lösung der Aufgabe, als sie durch einzelne Schlüsse möglich ist, und stellt außerdem eine klarere Niederschrift der Zahlbeziehungen dar.

2. Beispiel: Eine quaderförmige Platte aus Gußstahl von 45 mm Dicke wiegt in unbearbeitetem Zustand 3,5 kp. Sie wird auf 40 mm Dicke abgehobelt. Wie groß ist dann ihr Gewicht?

Ansatz: 45 mm $\hat{=}$ 3,5 kp,
40 mm $\hat{=}$ x kp.

Nachdem wir im 1. Beispiel einen Überblick über das Rechenverfahren gewonnen haben, wollen wir jetzt wieder wie bei den Bestimmungsgleichungen vor der Lösung einen Überschlag vornehmen.

Überschlag: 5 mm ist $\frac{1}{9}$ von 45 mm, $\frac{1}{9}$ von 3,6 kp ist 0,4 kp.
Also wird das Ergebnis rund 3 kp werden.

Proportion:

$$45 : 40 = 3{,}5 : x$$
$$45x = 3{,}5 \cdot 40 \quad | : 45$$
$$x = \frac{3{,}5 \cdot 40}{45}$$
$$x = 3\frac{1}{9}$$

Ergebnis: Nach dem Abhobeln wiegt die Platte rund 3,1 kp.

3. Beispiel (in endgültiger Form):

Mit einer sowjetischen Rübenkombine kann man an einem 8stündigen Arbeitstag durchschnittlich $2\frac{1}{2}$ ha abernten. Welche Arbeitszeit erfordert ein Rübenschlag von $8\frac{3}{4}$ ha?

Ansatz:

$$2\tfrac{1}{2}\text{ ha} \mathrel{\widehat{=}} 8\text{ Std.}$$
$$8\tfrac{3}{4}\text{ ha} \mathrel{\widehat{=}} x\text{ Std.}$$

Überschlag: 9 ha sind fast das Vierfache von $2\frac{1}{2}$ ha, also etwa 30 Std. Arbeitszeit.

Proportion:

$$2\tfrac{1}{2} : 8\tfrac{3}{4} = 8 : x$$
$$2\tfrac{1}{2}x = 8 \cdot 8\tfrac{3}{4}$$
$$x = \frac{8 \cdot 8\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}}$$
$$x = \frac{8 \cdot 35 \cdot 2}{4 \cdot 5}$$
$$x = 28$$

Ergebnis: Man braucht 28 Std. zum Abernten.

Zusammenfassung:

1. **Besteht zwischen zwei Sachverhalten Proportionalität, so kann zu drei gegebenen Größen die vierte mit Hilfe einer Proportion errechnet werden.**
2. **Die Bestimmung der unbekannten Größe verläuft in vier Schritten:**

   a) Ansatz, b) Überschlag, c) Proportion, d) Ergebnis.

   Der Ansatz wird in zwei Sätzen geschrieben, wobei die Unbekannte x rechts unten steht. Gleichartige Größen stehen untereinander. Die weiteren Arbeitsschritte werden wie beim Lösen von Gleichungen durchgeführt.

Aufgaben

1. 6 dz Briketts kosten 19,80 DM. Wieviel DM hat man für 7,50 dz zu bezahlen?
2. 12 Frottiertücher kosten 93,60 DM. Wieviel DM kosten 6 (9; 3) Frottiertücher?
3. Für 4 m Stoff wurden 24 DM bezahlt. Berechne den Preis für

   a) 5 m, b) $3\frac{1}{4}$ m, c) 7,5 m, d) 10,75 m des gleichen Stoffes!
4. Für $3\frac{1}{4}$ m Blusenstoff werden 42,25 DM bezahlt. Wieviel DM kosten

   a) $2\frac{3}{4}$ m, b) $3\frac{1}{2}$ m, c) 1,25 m, d) 2,75 m, e) 3,80 m dieses Stoffes?

5. Herr Heinrich hat für 3,10 m Anzugstoff 96,10 DM bezahlt. Wieviel Meter des gleichen Anzugstoffes hat Herr Kuhn gekauft, wenn er 55,80 DM bezahlen mußte?

6. Einem Haushalt wurden für den Verbrauch von 14 m^3 Wasser in einem Monat 3,78 DM (ohne Grundgebühr) berechnet. Wieviel Kubikmeter sind im vorausgegangenen Monat verbraucht worden, wenn ohne Grundgebühr 4,59 DM bezahlt wurden?

7. 2 dz Kartoffeln kosten 25,20 DM. Wieviel DM kosten **a)** 3 dz, **b)** 5 dz, **c)** 9 dz Kartoffeln?

8. Eine Pumpe fördert in 5 Min. $4\frac{1}{2}$ hl Wasser. Wieviel Wasser fördert sie in 2 Std. 20 Min.?

9. Zwei Pumpen mit gleicher Leistung fördern zusammen in jeder Viertelstunde 376 l Wasser. In welcher Zeit kann 1 m^3 gefördert werden, wenn eine der Pumpen zur Überholung stillgelegt ist?

10. Für die meisten Zweitaktmotoren werden Benzin und Öl im Verhältnis 25 : 1 gemischt.

    a) Wieviel Benzin kann man mit 1,25 l Öl mischen?

    b) Wieviel Öl mit 120 l Benzin?

11. **a)** Der Kraftstoffverbrauch beim Personenkraftwagen P 70 beträgt für 100 km durchschnittlich 7,1 l. Wie groß ist der Kraftstoffverbrauch für 247 km?

    b) Wie groß ist der Kraftstoffverbrauch für die gleiche Strecke bei einer Fahrt mit dem Motorroller „Wiesel", der im Durchschnitt für 100 km 3,2 l Kraftstoff verbraucht?

12. In 5 kg Messing Ms 60 sind rund 3 kg Kupfer und 2 kg Zink enthalten. Berechne die Buntmetallmenge in 1 t Messing!

13. Eine Gießpfanne enthält 125 kp Rotguß. Diese Legierung besteht zu 43 Teilen aus Kupfer, zu 5 Teilen aus Zinn und zu 2 Teilen aus Zink. Rechne!

14. Beim Mischen mit der Hand werden für 500 l Mörtel etwa $\frac{1}{2}$ Std. benötigt. Eine Mischmaschine mit 500 l Fassungsvermögen braucht dazu etwa 2 Min.

    a) Wie verhalten sich die Zeiten zueinander?

    b) Wie verhalten sich aber die Mengen zueinander, die beide in der gleichen Zeit, z. B. in einer halben Stunde, gemischt werden?

15. Um den Beton für einen Stahlbetonträger herzustellen, werden 246 kg Portlandzement und 0,97 m^3 Grubenkies (1 $m^3 \mathrel{\widehat{=}} 1{,}6$ t) gemischt. Gib das Mischungsverhältnis der Mengen (Zement : Kies) in der Form 1: . . . auf eine Dezimalstelle an!

16. Dreiecke mit den Seitenverhältnissen 3 : 4 : 5 sind rechtwinklig. Ein Maurer prüft die Rechtwinkligkeit seines Mauerwerkes so nach, daß er seinen 2 m langen Gliedermaßstab als längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks verwendet. Wie lang müssen dann die anderen Seiten sein?

17. Für eine $\frac{1}{2}$ Stein (11,5 cm) dicke Wand von 32 m² Fläche sind 1536 Ziegel (NF 52) und 1,1 m³ Mörtel erforderlich.

   a) Berechne den Bedarf für eine gleichartige Wand von 22,5 m² Fläche!

   b) Wieviel Quadratmeter der gleichen Wand kann man mit 1000 Ziegeln mauern und wieviel Kubikmeter Mörtel braucht man dazu?

18. Das Fundament eines Brückenpfeilers drückt mit 11500 kp auf den Baugrund. Dieser darf bis zu 3 kp/cm² belastet werden. Wie groß muß die Fläche des Fundaments mindestens sein?

19. Als zulässige Belastung von Decken ist festgelegt: In Wohnräumen 200 kp/m², in Klassenzimmern 350 kp/m², bei Tribünen mit festen Sitzplätzen 500 kp/m², ohne feste Sitzplätze 750 kp/m².

   a) Gib in kleinsten ganzen Zahlen an, wie sich die Belastungen zueinander verhalten!

   b) Berechne für euer Klassenzimmer die zulässige Belastung! Überschlage, wie hoch die Belastung tatsächlich ist (Tische, Stühle, Ranzen, Kinder usw.)!

27. Die grafische Lösung von Aufgaben mit proportionalen Größen

Wir wissen bereits, daß die Proportionalität zwischen zwei Größen durch eine ansteigende Gerade durch den Nullpunkt dargestellt wird. Mit Hilfe solcher Diagramme können wir Aufgaben, denen Proportionalität zugrunde liegt, grafisch lösen.

Beispiel: 35 m³ Gas kosten 5,60 DM. Stelle die Aufgabe grafisch dar und lies aus dem Diagramm Preise für andere Gasmengen ab!

Lösung: Den nach rechts gerichteten Strahl wählen wir als Geldachse, auf dem senkrecht dazu verlaufenden tragen wir die Gasmengen ab. Maßstäbe: 1 cm $\widehat{=}$ 1 DM; 1 cm $\widehat{=}$ 5 m³ (Abb. 33).

Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, müssen wir zwei Punkte der Geraden finden. Da 0 Kubikmeter Gas 0 DM kosten, ist der Nullpunkt ein solcher Punkt. Aus der Aufgabe geht weiter hervor, daß 35 m³ Gas 5,60 DM kosten. Wir errichten daher auf den Achsen in den Punkten 5,60 DM und 35 m³ Senkrechte. Der Schnittpunkt dieser

Senkrechten ist der zweite Punkt der gesuchten Geraden, die wir nun einzeichnen können.

Aus der grafischen Darstellung können wir die Lösungen für Aufgaben folgender Art ablesen:

a) Wieviel DM kosten 20 m³ Gas?
(Pfeilrichtung für das Ablesen →↓; Ergebnis: 3,20 DM.)

b) Wieviel Kubikmeter Gas kann man für 4 DM verbrauchen?
(Pfeilrichtung für das Ablesen ←↑; Ergebnis: 25 m³.)

Wir können auch andere Maßeinheiten auf den Achsen wählen, zum Beispiel 1 cm ≙ 0,10 DM und 1 cm ≙ 1 m³. Wir erhalten dann das in der

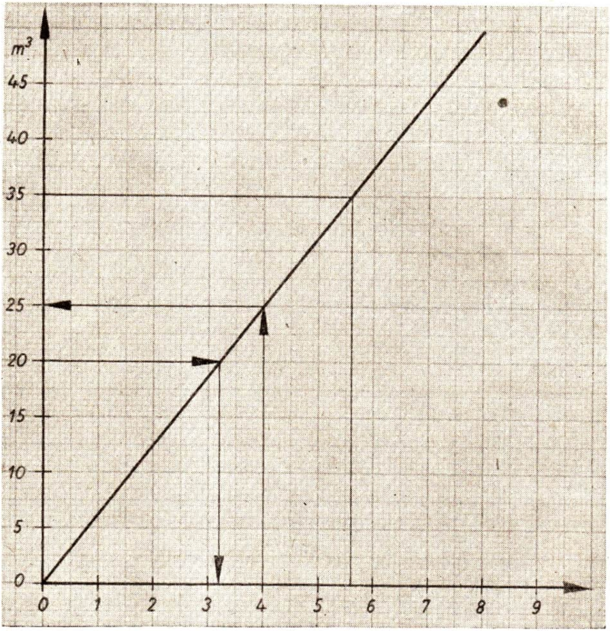


Abb. 33

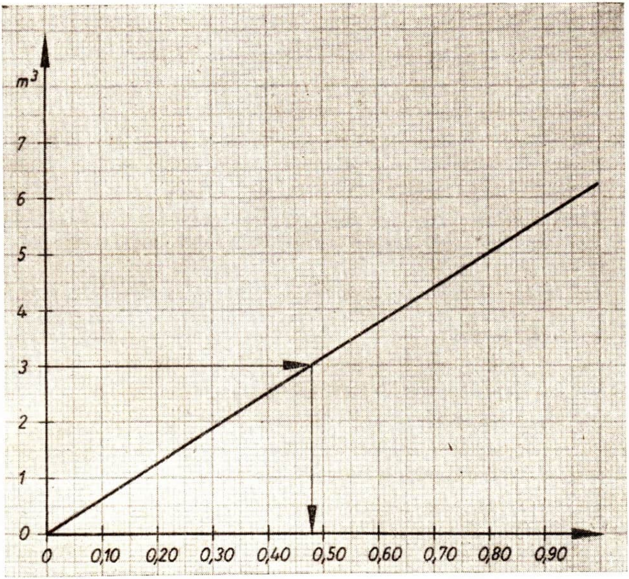


Abb. 34

Abbildung 34 gezeigte Diagramm. Aus diesem lassen sich die Ergebnisse genauer ablesen als aus dem Diagramm mit kleineren Maßeinheiten (Abb. 33). Eine Änderung der Maßeinheiten hat meist eine andere Neigung der Geraden zur Folge. Die Geradlinigkeit bleibt aber stets erhalten, ebenso die Tatsache, daß die Gerade durch den Nullpunkt verläuft.

Zusammenfassung:

1. **Bei der grafischen Darstellung proportionaler Größen ergibt sich eine Gerade durch den Nullpunkt. Ihre Neigung hängt u. a. von den zur Darstellung gewählten Maßeinheiten auf den Achsen ab.**
2. **Wird eine grafische Darstellung zur Lösung von Aufgaben verwendet, so erhält man für die Lösung im allgemeinen nur Näherungswerte. Ihre Genauigkeit hängt u. a. von der Größe der gewählten Maßeinheiten ab; je größer diese sind, desto genauer kann abgelesen werden.**

Aufgaben

Fertige nach den folgenden Angaben grafische Darstellungen an! (Verwende Millimeterpapier!) Ermittle die gefragten Größen grafisch!

1. 35 dz Siebbraunkohle kosten 94,50 DM. Wieviel DM kosten 20 dz? Wieviel Doppelzentner erhält man für 54 DM?

2. 150 dz Rüben liefern 25 dz Zucker. Wieviel Doppelzentner Zucker ergeben 60 dz Rüben? Wieviel Doppelzentner Rüben sind zur Gewinnung von 15 dz Zucker notwendig?

3. Aus 5 dz Leinsamen können 165 kg Öl gewonnen werden. Wieviel Kilogramm gewinnt man aus 3 dz Leinsamen? Ermittle die nötige Leinsamenmenge für 1 dz Öl!

4. Ein Arbeiter erhält einen Zeitlohn von 2,70 DM je Stunde. Wie hoch ist sein Lohn für eine 40stündige Arbeit? Wie lange hat er für 13,50 DM Lohn gearbeitet?

5. 6 dz Briketts kosten 19,80 DM. Wieviel DM kosten 10 dz Briketts? Wieviel Doppelzentner Briketts erhält man für 16,50 DM?

6. Ein Rennfahrer fährt auf einer Autorennstrecke bei einer bestimmten Durchschnittsgeschwindigkeit eine Strecke von 400 km in $2\frac{1}{2}$ Std. Wie lang ist die Fahrstrecke bei 4 Std.? Ermittle die Fahrzeit für 450 m!

7. Ein Verkehrsflugzeug mit Kolbenmotoren legt 500 km in 90 Minuten zurück. Das sowjetische Düsenverkehrsflugzeug TU 104 benötigt für die gleiche Strecke 40 Minuten. Ermittle für beide Typen die Flugzeit für 300 km! Welche Strecken legen beide in 2 Stunden zurück?

VII. Das Rechnen mit produktgleichen Größen

28. Der Begriff „Produktgleichheit“

1) Nach der Proportionalität wollen wir eine andere Beziehung kennenlernen, die zwischen zwei Sachverhalten bestehen kann, die Produktgleichheit.

Beispiel: Aus einer Sandgrube sollen 72 m³ Bausand mit Muldenkippern von je 1 m³ Fassungsvermögen zur Verladerampe gefahren werden. Man kann für den Transport einen, zwei oder mehrere Kipper einsetzen. Wie oft muß in jedem Fall jeder einzelne Kipper beladen und zur Verladerampe geschoben werden?

Bei der Benutzung eines Kippers wären 72 Fahrten notwendig; denn 72 Fahrten zu je 1 m^3 ergeben 72 m^3 Sand.

Bei der Verwendung von 2 Kippern (der doppelten Anzahl) wären nur 36 Fahrten je Kipper (die halbe Anzahl) notwendig; denn 36 Fahrten zu je 2 m^3 ergeben ebenfalls 72 m^3.

Bei der Verwendung von 3 Kippern (dem Dreifachen) wären nur 24 Fahrten je Kipper (ein Drittel) notwendig; denn 24 Fahrten zu je 3 m^3 ergeben ebenfalls 72 m^3.

Daraus erkennen wir: Vergrößert sich die Anzahl der Kipper, so verkleinert sich die Anzahl der Fahrten je Kipper im gleichen Maße.

Führt man die Überlegung fort, kommt man zu folgender Zusammenstellung:

Zahl der verwendeten Kipper 1 Kipper $\mathrel{\widehat{=}}$ 1 m^3	Zahl der Fahrten je Kipper	Zahl der Fahrten aller Kipper	Beförderter Sand in m^3
1	72	$1 \cdot 72 = 72$	72
2	36	$2 \cdot 36 = 72$	72
3	24	$3 \cdot 24 = 72$	72
4	18	$4 \cdot 18 = 72$	72
6	12	$6 \cdot 12 = 72$	72
8	9	$8 \cdot 9 = 72$	72
9	8	$9 \cdot 8 = 72$	72
12	6	$12 \cdot 6 = 72$	72

Wir erkennen: Die Produkte aus je zwei einander zugeordneten Werten der beiden Größen (Zahl der benutzten Kipper und Zahl der Fahrten je Kipper) sind gleich.

Wir können eine Kette gleicher Produkte bilden:

$$12 \cdot 6 = 9 \cdot 8 = 8 \cdot 9 = 6 \cdot 12 = 4 \cdot 18 = 3 \cdot 24 = 2 \cdot 36 = 1 \cdot 72 = 72$$

Der konstante Wert dieser Produkte ist für den dargestellten Sachverhalt kennzeichnend. Er stellt die Gesamtmenge des zu transportierenden Bausandes dar, nämlich 72 m^3.

Wir nennen solche Größen, bei denen das Produkt einander zugeordneter Werte konstant ist, **produktgleich.** Sie stehen im Gegensatz zu den verhältnisgleichen (proportionalen) Größen, bei denen das Verhältnis einander zugeordneter Werte konstant ist.

Die Verhältnisse entsprechender Werte sind hierbei nicht gleich:

$$12 : 6 \neq 9 : 8 \neq 8 : 9 \neq 6 : 12 \neq 4 : 18 \neq \ldots$$

2) Bei produktgleichen Größen sind infolgedessen auch nicht die Verhältnisse gleich, die wir aus irgend zwei Werten der einen Größe und den entsprechenden Werten der anderen Größe bilden können.

Beispiel:

		a				b		
Zahl der verwendeten Kipper	1	2	3	4	6	8	9	12
Zahl der Fahrten je Kipper	72	36	24	18	12	9	8	6

Wir bilden jetzt die Verhältnisse der gekennzeichneten Werte:

	Verhältnis der Kipper:	Verhältnis der Fahrten:
a)	$2:6 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$36:12 = \frac{36}{12} = \frac{3}{1}$
b)	$8:12 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$	$9:6 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Die Verhältnisse entsprechender Werte sind also nicht gleich. Es ist aber der eine Verhältniswert jeweils der Kehrwert des anderen $\left(\frac{1}{3}\text{ und }\frac{3}{1}, \frac{2}{3}\text{ und }\frac{3}{2}\right)$. Man sagt deshalb auch, produktgleiche Größen stehen im **umgekehrten Verhältnis** zueinander, also: $2:6 = 12:36$ bzw. $8:12 = 6:9$.

Wir können das Verhältnis aus zwei beliebigen Werten der einen Größe mit dem Verhältnis aus den entsprechenden Werten der anderen Größe in Übereinstimmung bringen, wenn wir bei der einen Größe die Kehrwerte ins Verhältnis setzen.

Verhältnis der Kipper	Verhältnis der Fahrten (Kehrwerte)
a) $2:6 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{36} : \frac{1}{12} = \frac{1}{36} \cdot \frac{12}{1} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$
b) $8:12 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{9} : \frac{1}{6} = \frac{1}{9} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Daraus können wir Proportionen bilden:

bei a) $2:6 = \frac{1}{36} : \frac{1}{12}$ bei b) $8:12 = \frac{1}{9} : \frac{1}{6}$

Man sagt deshalb auch: Produktgleiche Größen stehen in der Beziehung der umgekehrten oder **indirekten Proportionalität.**

Ist K die Zahl der benutzten Kipper und F die Zahl der Fahrten je Kipper, so schreiben wir kurz:

$$K \sim \frac{1}{F}.$$

Die Proportionalität selbst nennt man im Gegensatz dazu direkte Proportionalität.

3) Wir wollen an Hand unseres Beispiels die grafische Darstellung produktgleicher Größen kennenlernen.

Wir zeichnen zunächst ein Achsenkreuz (Abb. 35). Auf der waagerechten Achse stellen wir die Zahl der verwendeten Muldenkipper dar (1 cm $\widehat{=}$ 1 Kipper), auf der lotrechten die Anzahl der erforderlichen Fahrten je Kipper (2 cm $\widehat{=}$ 10 Fahrten). In den Punkten, die die Anzahl der Kipper angeben, errichten wir Senkrechte, deren Längen jeweils der zugeordneten Zahl der Fahrten entsprechen. Auf diese Weise erhalten wir acht Senkrechte. (Warum müssen die Senkrechten in den Punkten 5, 7, 10

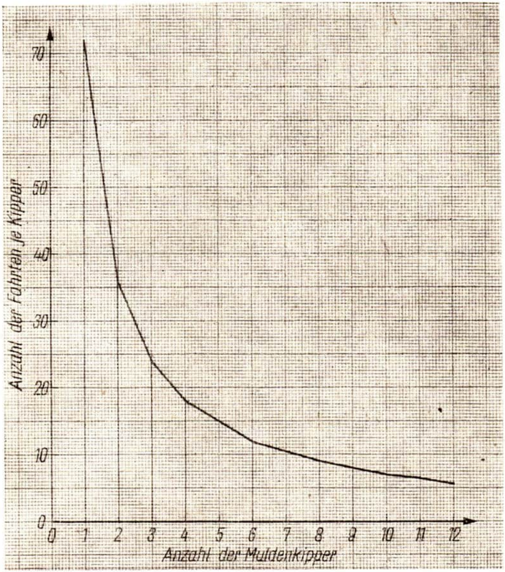


Abb. 35

und 11 ausgelassen werden? Überlege, warum diese Werte schon in der Wertetafel fehlen!) Die Endpunkte dieser Senkrechten liegen diesmal nicht auf einer Geraden, weil zwischen den Größen keine Proportionalität besteht. Zur besseren Veranschaulichung wollen wir jeden Punkt mit dem nächsten durch ein kurzes Geradenstück verbinden. Es ergibt sich als Diagramm produktgleicher Größen statt einer Geraden ein Streckenzug.

Zusammenfassung:

1. **Zwei Größen heißen produktgleich, wenn das Produkt einander zugeordneter Werte stets den gleichen Betrag hat. Man kann in diesem Falle eine Produktkette niederschreiben. Das konstante Produkt hat stets eine reale Bedeutung, die sich aus dem betreffenden Sachverhalt ergibt.**
2. **Für produktgleiche Größen gilt: Je größer die eine, desto kleiner die andere (je kleiner die eine, desto größer die andere), wobei die Vergrößerung und Verkleinerung im gleichen Maße erfolgt.**

3. **Das Verhältnis aus zwei beliebigen Werten der einen Größe und das aus den entsprechenden beiden Werten der anderen Größe sind Kehrwerte voneinander. Deswegen sagt man von produktgleichen Größen auch, sie stehen im umgekehrten Verhältnis.**
4. **Aus produktgleichen Größen kann man eine Proportion bilden, indem man das Verhältnis zweier Werte der einen Größe dem Verhältnis der Kehrwerte der beiden entsprechenden Werte der anderen Größe gleichsetzt. Deswegen sagt man von produktgleichen Größen auch, sie seien umgekehrt oder indirekt proportional.**
5. **Produktgleichheit und Proportionalität (Verhältnisgleichheit) zeigen in vieler Hinsicht gegensätzliche Eigenschaften.**
6. **Die grafische Darstellung produktgleicher Größen ergibt keine Gerade.**

Aufgaben

1. Ergänze die folgenden Sätze!
   a) Je mehr Personen von einem bestimmten Vorrat verpflegt werden, desto ... Zeit reicht er.
   b) Je höher die Geschwindigkeit eines Zuges, Kraftwagens oder Motorrades ist, desto ... Zeit wird benötigt, um eine bestimmte Strecke zurückzulegen.
   c) Je mehr Helfer mitarbeiten, desto ... Zeit benötigt man für eine Arbeit.
2. Sprich die Beziehungen in Aufgabe 1 aus, indem du mit „je weniger“, „je geringer“ beginnst!
3. Bilde entsprechend Aufgabe 1 weitere Aussagen, denen produktgleiche Beziehungen zugrunde liegen!
4. In den folgenden Beispielen für Zusammenhänge der Produktgleichheit sind mit Hilfe des gegebenen konstanten Produktes jeweils eine Produktkette und eine Wertetafel für die genannten Größen aufzustellen. Gib diesen Größen dabei richtige Benennungen!
   a) Zahl der Tiere und Liegefläche je Tier in einem Rinderoffenstall; konstantes Produkt: 180 m² Stallgröße.
   b) Geschwindigkeit und Fahrzeit eines Kraftwagens; konstantes Produkt: 36 km Fahrstrecke.
   c) Zahl und Inhalt der aus einem Faß abgefüllten Flaschen; konstantes Produkt: 50 l Faßinhalt.
5. In den nachfolgenden Beispielen sind die Größen jeweils produktgleich. Stelle jedesmal eine Wertetafel auf, gib die Produktkette an und bestimme das konstante Produkt! Gib dem Produkt nach Möglichkeit auch eine sachliche Deutung!

a) Fassungsvermögen eines LKW und Anzahl der Fahrten beim Abtransport von Trümmerschutt: Bei 1,75 m^3 Fassungsvermögen sind 16 Fahrten nötig.

b) Anzahl der laufenden Drehmaschinen und Arbeitszeit bei einer bestimmten Produktionsauflage: Wenn 3 Drehmaschinen arbeiten, werden 60 Std. benötigt.

c) Abstand und Anzahl der Pflanzen für eine bestimmte Beetumrandung: Bei einem Abstand von 10 cm braucht man 160 St.

d) Breite und Anzahl der Bretter zur Herstellung einer bestimmten Bretterwand: Bei 20 cm breiten Brettern benötigt man 36 St.

e) Futterverbrauch je Tag und Anzahl der Futtertage bei einer bestimmten Silogröße: Bei einem Tagesverbrauch von 8 dz reicht der Vorrat für 200 Tage.

29. Das Berechnen unbekannter Größen

Auch bei produktgleichen Beziehungen begegnet uns im täglichen Leben oft die Aufgabe, zu drei gegebenen eine vierte unbekannte Größe zu bestimmen.

1. Beispiel:

Eine Gruppe Junger Touristen plant eine zehntägige Wanderung. Die Kosten für Verpflegung und Unterkunft sollen je Teilnehmer 3,50 DM am Tage betragen. Auf wieviel DM verringert sich der Tagessatz, wenn die Wanderung auf 14 Tage ausgedehnt wird, ohne daß die Reisekosten erhöht werden?

Genau wie bei den entsprechenden Aufgaben zur Proportionalität beginnen wir mit dem Ansatz:

$$\begin{aligned} 10 \text{ Tg.} &\mathrel{\widehat{=}} 3{,}50 \text{ DM}, \\ 14 \text{ Tg.} &\mathrel{\widehat{=}} \quad x \quad \text{DM}. \end{aligned}$$

Je mehr Tage die Reise dauert, desto geringer ist der Tagessatz. Die Zahl der Wandertage und die tägliche Geldausgabe sind produktgleiche Größen. Das konstante Produkt ist der für jeden Teilnehmer zur Verfügung stehende Gesamtbetrag von $10 \cdot 3{,}50$ DM $= 35$ DM (erste Zeile des Ansatzes). Da auch die Geldsumme von x DM, die bei 14tägiger Wanderung an jedem Tag ausgegeben werden kann, mit der Tageszahl 14 dasselbe Produkt ergeben muß (zweite Zeile des Ansatzes), ergibt sich die Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} 14 \cdot x &= 10 \cdot 3{,}50 \qquad | : 14 \\ x &= \frac{10 \cdot 3{,}50}{14} \\ x &= 2{,}50 \end{aligned}$$

Ergebnis: Bei einer 14tägigen Wanderung kann jeder Teilnehmer nur 2,50 DM je Tag verbrauchen.

Dieses Ergebnis hätten wir auch durch folgende Überlegung (durch Schlüsse) finden können: Würde die Wanderung statt 10 Tage nur 1 Tag dauern, hätte an einem Tag alles Geld ausgegeben werden können, nämlich $10 \cdot 3{,}50$ DM $= 35$ DM. Dauert die Wanderung 14 Tage, so kann an jedem Tag nur der 14. Teil dieser Summe ausgegeben werden, also 35 DM : 14 = 2,50 DM.

2. Beispiel (endgültige Form):

Die MTS pflügt ein Ackerstück mit einem Zweischarpflug in 16 Std. In welcher Zeit würde das ein Dreischarpflug schaffen? (Wendezeiten sollen unberücksichtigt bleiben.)

Ansatz:

2 Schare $\widehat{=}$ 16 Std.

3 Schare $\widehat{=}$ x Std.

Überschlag: Die Leistung des Dreischarpfluges ist $\frac{3}{2}$ von der des Zweischarpfluges. Die Arbeitszeit beträgt also $\frac{2}{3}$ von $15 = 10$.

Produktgleichung:

$$3x = 2 \cdot 16 \quad | :3$$
$$x = \frac{2 \cdot 16}{3}$$
$$x = 10\frac{2}{3}$$

Ergebnis: Mit einem Dreischarpflug benötigt man 10 Std. 40 Min.

Zusammenfassung:

Wenn zu drei gegebenen Größen eine vierte gesucht ist und zwischen diesen Größen Produktgleichheit besteht, so kann der Wert der Unbekannten (x) mit Hilfe einer Bestimmungsgleichung errechnet werden.
Man schreibt zunächst den Ansatz und setzt dann die konstanten Produkte aus entsprechenden Werten der beiden Größen gleich. Diese stehen im Ansatz nebeneinander.

Folgende Arbeitsschritte werden durchgeführt:

a) Ansatz, b) Überschlag, c) Produktgleichung, d) Ergebnis.

Aufgaben

1. Die Zahl 252 soll das Produkt zweier ganzer positiver Zahlen sein. Gib in einer Tabelle alle Möglichkeiten an! Warum muß ein Faktor stets kleiner als 16 sein?

2. Bei einer Kundgebung ist eine Kolonne, die in Zwölferreihen marschiert, etwa 120 m lang. Welche Länge hätte sie bei Sechserreihen, bei Reihen zu 18?

3. 5 Schüler graben im Schulgarten eine Versuchsfläche in 12 Std. um. In welcher Zeit schaffen die gleiche Arbeit **a)** 6, **b)** 10, **c)** 4 Schüler?

4. 4 Schüler haben die Hälfte des Schulgartens in insgesamt 18 Std. umgegraben. Die andere Hälfte des Gartens muß in 8 Std. umgegraben sein. Wieviel Schüler müssen graben?

5. Eine Gruppe Junger Pioniere legte bei einer Wanderung in einer Stunde durchschnittlich 4,4 km zurück. Die Wanderung dauerte $2\frac{1}{2}$ Stunden, wenn man die Pausen nicht mit einrechnet.

a) In welcher Zeit würde ein Radfahrer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $12\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$ diese Wanderstrecke durchfahren?

b) Wieviel Zeit benötigt ein Motorradfahrer bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $44\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$, wenn er die gleiche Strecke durchfährt?

6. Ein Lastkraftwagen durchfährt eine Strecke in $2\frac{3}{4}$ Stunden, wenn seine Durchschnittsgeschwindigkeit $60\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$ beträgt. Welche Zeit braucht ein anderer Kraftfahrer bei einer mittleren Geschwindigkeit von $55\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$ für die gleiche Strecke?

7. Ein D-Zug erreicht sein Ziel in 110 Min. bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$.

a) In welcher Zeit durchfährt ein Personenzug bei einer mittleren Geschwindigkeit von $33\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$ die gleiche Strecke?

b) Ein anderer Personenzug braucht nach dem Fahrplan 3 Std., ein Schnelltriebwagen benötigt 80 Min. für die gleiche Strecke. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit für den zweiten Personenzug und für den Schnelltriebwagen?

Aus der sozialistischen Volkswirtschaft

8. Eine LPG verfüttert täglich 5 kg Hafer je Pferd. Sie reicht mit ihrem Hafervorrat 120 Tage für 8 Pferde. Wie lange reicht der Vorrat, wenn wegen starker Beanspruchung der Pferde täglich 6 kg je Pferd verfüttert werden müssen?

9. Wird mit Schleppern auf kleinen Feldstücken gepflügt, geht viel Zeit durch Wenden verloren. Auf den kleinen Feldern eines Einzelbauern werden daher in 8 Std. nur 1,2 ha, auf den großen Feldern einer LPG aber 1,8 ha gepflügt. Wie verhalten sich die Arbeitszeiten bei gleichen Flächen zueinander?

10. Die Tankstelle einer MTS hat einen Vorrat an Dieselkraftstoff für 20 Tage, wenn sie täglich 1200 l abgibt. Während der Ernte werden aber im Durchschnitt täglich 1500 l gebraucht. Wie lange reicht der Vorrat?

11. a) Ein Mäher mäht mit der Sense eine Wiese von 28 a in 8 Std. Wieviel Stunden braucht er zu 1 ha?

b) Mit einem Grasmäher, der eine Arbeitsbreite von 1,20 m hat, kann man in 8 Std. 3 ha mähen. Wie lange braucht man für 1 ha?

c) Vergleiche die Arbeitszeiten je Hektar in **a)** und **b)** mit den in 8 Std. gemähten Flächen!

12. An einem Wege muß zu beiden Seiten ein Wassergraben ausgehoben werden. An dem Graben auf der rechten Seite arbeiten 5 Arbeiter 6 Tage. Auf der linken Seite werden 3 Arbeiter eingesetzt. Wie lange arbeiten diese an dem Graben?

13. Von einem für den Neuaufbau vorgesehenen Gelände wird der Trümmerschutt durch Lastkraftwagen abgefahren. Nachdem 10 Fahrzeuge insgesamt 48 Std. lang gefahren sind, ist etwa die Hälfte des Schuttes beseitigt. Für die zweite Hälfte setzt man 6 Lastkraftwagen mit Hängern ein. In wieviel Stunden ist der Rest abgeräumt? (Alle LKW und Hänger mögen das gleiche Ladegewicht haben.)

14. Eine Treppe soll statt mit 24 Stufen (Steigungen) zu je 18 cm Höhe mit Stufen aufgebaut werden, die 2 cm niedriger sind. Rechne!

15. Wenn man einen Flur mit quadratischen Platten von der Größe 20 cm × 20 cm auslegt, braucht man 1536 Stück. Es stehen aber nur solche von 25 cm × 25 cm zur Verfügung. Wieviel Platten sind nötig, wenn der Abfall gleich hoch ist?

16. Ein Baumstamm gibt 14 Bretter von 4 cm Stärke. Wieviel Bretter von 3,5 cm Stärke hätten daraus geschnitten werden können?

17. Auf der Achse eines Motors, der in der Minute 1200 Umdrehungen macht, sitzt eine Riemenscheibe von 150 mm Durchmesser. Von ihr läuft ein Treibriemen über eine zweite Riemenscheibe. Diese soll 240 Umdrehungen je Minute machen. Wie groß muß der Durchmesser der zweiten Scheibe sein, wenn der Riemenschlupf unwesentlich ist?

18. Vorteilhafter als Riementriebe sind Zahnradtriebe. Das Zahnrad auf einer Motorwelle hat 24 Zähne, am getriebenen Zahnrad sind es 75 Zähne. Die Drehzahl des Motors beträgt $900 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$. Wie groß ist die Drehzahl des getriebenen Zahnrads?

19. Bei einem zweiseitigen Handbremshebel ist der Arm, an dem die Handkraft mit 20 kp ansetzt, 550 mm lang. Der andere Arm, der einen Zug bewirkt, mißt 100 mm. Berechne die Zugkraft!

20. Bei einer Fußbremse gelten folgende Werte: Fußkraft 35 kp, Kraftarm 400 mm, Zugarm 85 mm.

30. Gegenüberstellung von Proportionalität und Produktgleichheit

Wir lernten als zwei wichtige Beziehungen zwischen sachlichen Größen die Proportionalität und die Produktgleichheit kennen. Beide Beziehungen wollen wir nochmals an Hand zweier einfacher Beispiele einander gegenüberstellen und miteinander vergleichen.

Proportionalität

Beispiel: 1 m Stoff kostet 8 DM. Wieviel Mark kosten 2 m, 3 m, 4 m und 5 m?

Stofflänge in m	Preis in DM
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40

Wächst die eine Größe (Stofflänge), so nimmt auch die andere Größe (Preis) in gleichem Maße zu.

Zum Beispiel:

$$1\text{ m} \mathrel{\widehat{=}} 8\text{ DM}$$
$$3\text{ m } (= 1\text{ m}\cdot 3) \mathrel{\widehat{=}} 24\text{ DM } (= 8\text{ DM}\cdot 3)$$

Nimmt die eine Größe ab, so nimmt auch die andere Größe in entsprechendem Maße ab.

Zum Beispiel:

$$5\text{ m} \mathrel{\widehat{=}} 40\text{ DM}$$
$$1\text{ m } (= 5\text{ m} : 5) \mathrel{\widehat{=}} 8\text{ DM } (= 40\text{ DM} : 5)$$

Rechnerisch bedeutet das:

Beide Größen werden mit der gleichen Zahl multipliziert, oder beide Größen werden durch die gleiche Zahl dividiert.

Produktgleichheit

Beispiel: 1 Arbeiter erledigt eine Arbeit in 40 Std. Wieviel Stunden benötigen 2, 3, 4 und 5 Arbeiter für die gleiche Arbeit?

Zahl der Arbeiter	benötigte Zeit in Stunden
1	40
2	20
3	$13\frac{1}{3}$
4	10
5	8

Wächst die eine Größe (Zahl der Arbeiter), so nimmt die andere Größe (benötigte Zeit) in entsprechendem Maße ab.

Zum Beispiel:

$$1\text{ Arb.} \mathrel{\widehat{=}} 40\text{ Std.}$$
$$4\text{ Arb. } (= 1\text{ Arb.}\cdot 4) \mathrel{\widehat{=}} 10\text{ Std. } (= 40\text{ Std.} : 4)$$

Nimmt die eine Größe ab, so nimmt die andere Größe in entsprechendem Maße zu.

Zum Beispiel:

$$5\text{ Arb.} \mathrel{\widehat{=}} 8\text{ Std.}$$
$$1\text{ Arb. } (= 5\text{ Arb.} : 5) \mathrel{\widehat{=}} 40\text{ Std. } (= 8\text{ Std.}\cdot 5)$$

Rechnerisch bedeutet das:

Der Multiplikation der einen Größe mit einer Zahl entspricht eine Division der anderen Größe durch dieselbe Zahl. Umgekehrt entspricht

Bilden wir die Verhältnisse aus beliebigen Stofflängen und die Verhältnisse der entsprechenden Preise, so sind diese jeweils gleich.

Zum Beispiel:

$$2 : 5 \text{ und } 16 : 40$$

Verhältnisse:

$$\frac{2}{5} \;\Big|\; \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{oder} \quad 2 : 5 = 16 : 40$$

Setzen wir jede Stoffmenge mit ihrem zugehörigen Preis in Beziehung, indem wir jedesmal das Verhältnis bilden, so sind diese Verhältnisse alle gleich. Sie können als Verhältniskette geschrieben werden.

$$8 : 1 = 16 : 2 = 24 : 3 = \ldots$$

Deshalb spricht man hier von Verhältnisgleichheit (Proportionalität, genauer: direkte Proportionalität).

Der konstante Wert dieser Verhältnisse (8) heißt der Proportionalitätsfaktor. Er gibt den Preis in DM je 1 m Stoff an.

der Division der ersten Größe durch eine Zahl die Multiplikation der anderen Größe mit derselben Zahl. Bilden wir die Verhältnisse aus beliebigen Zahlen der Arbeiter und aus den von ihnen benötigten Arbeitsstunden, so sind diese nicht gleich.

Zum Beispiel:

$$2 : 5 \text{ und } 20 : 8$$

Verhältnisse:

$$\frac{2}{5} \;\Big|\; \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2}{5} \neq \frac{5}{2}$$

Die Gleichheit wird hergestellt, wenn das eine Verhältnis als Kehrwert geschrieben wird:

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{oder} \quad 2 : 5 = 8 : 20$$

(umgekehrtes Verhältnis)

oder wenn das eine Verhältnis aus den Kehrwerten der Zahlenwerte gebildet wird:

$$2 : 5 = \frac{1}{20} : \frac{1}{8}$$

(umgekehrte oder indirekte Proportionalität.)

Setzen wir jede Arbeiterzahl mit der zugehörigen Arbeitszeit in Beziehung, indem wir jedesmal das Produkt bilden, so sind diese Produkte alle gleich. Sie können als Produktkette geschrieben werden.

$$1 \cdot 40 = 2 \cdot 20 = 3 \cdot 13\tfrac{1}{3} = \ldots$$

Deshalb spricht man hier von Produktgleichheit.

Der konstante Wert dieser Produkte (40) gibt die Zahl der Arbeitsstunden an, die zur Bewältigung der Arbeit insgesamt zu leisten sind.

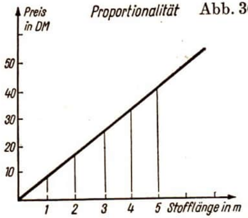


Abb. 36

Die grafische Darstellung der Proportionalität ergibt eine ansteigende Gerade durch den Nullpunkt (Abb. 36).

Soll eine unbekannte Größe aus drei bekannten berechnet werden, so führt das über einen Ansatz zu einer Bestimmungsgleichung in Proportionenform.

1. Beispiel: Wieviel kosten $6\frac{1}{2}$ m Stoff, wenn 5 m 40 DM kosten?

Ansatz:

$$5\ \text{m} \mathrel{\widehat{=}} 40\ \text{DM}$$
$$6\tfrac{1}{2}\ \text{m} \mathrel{\widehat{=}} x\ \text{DM}$$

Berechnung:

$$5 : 6\tfrac{1}{2} = 40 : x$$
$$5x = 40 \cdot 6\tfrac{1}{2} \quad |:5$$
$$x = \frac{40 \cdot 6\frac{1}{2}}{5}$$
$$x = \frac{40 \cdot 13}{5 \cdot 2}$$
$$x = 52$$

Ergebnis: $6\frac{1}{2}$ m kosten 52 DM.

2. Beispiel: Wieviel Stoff bekommt man für 20 DM, wenn 4 m 32 DM kosten?

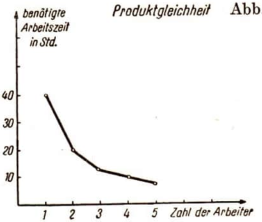


Abb. 37

Die grafische Darstellung der Produktgleichheit ergibt einen gebrochenen Streckenzug (Abb. 37).

Soll eine unbekannte Größe aus drei bekannten berechnet werden, so führt das über einen Ansatz zu einer Bestimmungsgleichung, bei der zwei konstante Produkte einander gleichgesetzt sind.

1. Beispiel: Welche Zeit würden 6 Arbeiter benötigen, wenn 4 Arbeiter 10 Std. brauchen?

Ansatz:

$$4\ \text{Arbeiter} \mathrel{\widehat{=}} 10\ \text{Std.}$$
$$6\ \text{Arbeiter} \mathrel{\widehat{=}} x\ \text{Std.}$$

Berechnung:

$$6 \cdot x = 4 \cdot 10 \quad |:6$$
$$x = \frac{4 \cdot 10}{6}$$
$$x = 6\tfrac{2}{3}$$

Ergebnis: 6 Arbeiter brauchen $6\frac{2}{3}$ Std.

2. Beispiel: Wieviel Arbeiter müssen zufassen, wenn eine Arbeit in 5 Std. erledigt sein soll und 2 Arbeiter 20 Std. benötigen?

Ansatz: $32\ \text{DM} \mathrel{\hat{=}} 4\ \text{m}$
$20\ \text{DM} \mathrel{\hat{=}} x\ \text{m}$

Berechnung:

$$32 : 20 = 4 : x$$
$$32x = 4 \cdot 20 \quad | : 32$$
$$x = \frac{4 \cdot 20}{32}$$
$$x = 2\tfrac{1}{2}$$

Ergebnis: Für 20 DM bekommt man $2\frac{1}{2}$ m Stoff.

Ansatz: $20\ \text{Std.} \mathrel{\hat{=}} 2$ Arbeiter
$5\ \text{Std.} \mathrel{\hat{=}} x$ Arbeiter

Berechnung:

$$5 \cdot x = 20 \cdot 2 \quad | : 5$$
$$x = \frac{20 \cdot 2}{5}$$
$$x = 8$$

Ergebnis: In diesem Falle werden 8 Arbeiter eingesetzt.

31. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Aus verschiedenen Gebieten

1. 1 Seemeile (sm) ist gleich 1852 m. Gib die Länge des Erdumfanges (rund 40000 km) in Seemeilen an!

2. Vor Bahnübergängen stehen drei-, zwei- und einstreifige Baken. Ein Streifen entspricht 80 m Entfernung. Wieviel Zeit braucht ein Radfahrer (Autofahrer) bei einer Geschwindigkeit von 3 m/s (12 m/s) von der dreistreifigen Bake bis zum Gleis?

3. Die durchschnittlichen Geschwindigkeiten eines Lastkraftwagens und eines Personenkraftwagens verhalten sich wie 2 : 3. In welcher Zeit fährt der PKW die Strecke Eisenach—Dresden (Autobahn), wenn der LKW 4 Std. 40 Min. benötigt?

4. Ein Radfahrer fährt auf der Straße von Halle nach Sangerhausen durchschnittlich 14,4 km in der Stunde. Um 15 Uhr war er 3,6 km hinter Halle. Wann kann er in Sangerhausen eintreffen, wenn die Entfernung zwischen beiden Städten 50,4 km beträgt?

5. Ein Personenkraftwagen verbraucht 10,5 l Benzin auf einer Fahrt von 100 km. Man will eine Strecke von 140 km fahren. Rechne!

6. Der Wasserhahn tropft. In 90 Min. läuft das Litermaß voll. Berechne den Wasserverlust in **a)** einem Tag, **b)** einem Monat, **c)** einem Jahr!

7. Die Lufthülle drückt auf 10 cm² durchschnittlich mit 10,33 kp. Der menschliche Körper hat eine Oberfläche von etwa 1,5 m². Rechne!

8. Zum Streichen von 20 m² Fußboden sind 6,4 kg Farbe erforderlich. Welche Menge wird zum Streichen
a) von 31,80 m², **b)** von 42,00 m² gebraucht?

9. Vier Maler können das Innere einer Messehalle von einem Gerüst aus in 12 Arbeitstagen, das heißt in 96 Std., streichen. Wieviel Maler müssen für eine zweite und dritte Schicht herangezogen werden, wenn das Gerüst nach 4 Tagen abgebaut werden muß?

10. Ein Bockgerüst für Maurerarbeiten ist 1,50 m breit und 5,00 m lang. Auf ihm arbeitet eine Dreiergruppe, das Durchschnittsgewicht eines Mannes ist 75 kp. Außerdem stehen auf dem Gerüst zwei gefüllte Mörtelkästen (Eigengewicht des Kastens 20 kp, Inhalt 100 l, Wichte des Mörtels 1,75 kp/dm^3). Berechne
    a) die Gerüstfläche,
    b) die zulässige Belastung (300 kp/m^2),
    c) das Gewicht der beiden Mörtelkästen mit Mörtel,
    d) die Gesamtbelastung,
    e) die Zahl der Ziegel (1 Ziegel $\mathrel{\widehat{=}}$ 3 kp), die noch gelagert werden könnten!

Aus der sozialistischen Landwirtschaft

11. Einer LPG stehen für 34 ha Haferanbaufläche 40 dz Kalkstickstoff zur Verfügung. Wieviel Doppelzentner Kalkstickstoff sind auf einen Schlag von 8,6 ha zu streuen?

12. Eine Schülerbrigade von 8 Mann braucht voraussichtlich 6 Arbeitstage zu je 5 Std., um ein Maisfeld zu hacken. Man möchte aber unbedingt in 4 Tagen fertig werden. Wie ist das zu erreichen?

13. Mit drei gekoppelten Eggen muß man 65mal über ein Feld fahren. Wie oft muß man mit fünf gekoppelten Eggen fahren?

14. Ein werktätiger Einzelbauer schließt mit seiner MTS einen Vertrag über den Einsatz eines Vielfachgeräts ab. Mit dem Gerät werden in 8 Std. 7 ha gehackt. Wieviel Arbeitskräfte ersetzt die Maschine, wenn eine Person mit der Handhacke je Stunde 320 m^2 hackt?

15. Das Gewicht eines Mähdreschers (ohne Betriebsstoff und ohne Kühlwasser) beträgt 5000 kp. Um ein Versacken des Mähdreschers zu vermeiden, müssen die Reifen der Räder mit möglichst großer Fläche auf dem Erdreich aufliegen. Die 4 Räder liegen insgesamt mit einer Fläche von 2400 cm^2 auf.
    a) Wie groß ist der Druck in kp/cm^2?
    b) Um wieviel kp/cm^2 erhöht sich der Druck für die gleiche Auflagefläche, wenn zum Gewicht des Mähdreschers 13 dz Korn im gefüllten Bunker, 130 l Benzin ($\gamma = 0{,}88$ p/cm^3) und 40 l Kühlwasser hinzukommen?

16. Ein Hektar Zuckerrüben muß in der Wachstumszeit mindestens 4000000 l Wasser bekommen. Wieviel Liter Niederschläge je Quadratmeter sind das?

17. Die Mähvorrichtung des Mähdreschers kann hydraulisch gehoben werden. Dabei drückt eine Pumpe mit einem Druck von 20 kp/cm² Öl in den hydraulischen Zylinder (Innendurchmesser 100 mm). Welche Druckkraft wird dadurch im hydraulischen Zylinder erzeugt?

18. Ein Gestüt ist mit 63 Pferden besetzt. Sein Futtervorrat reicht für 72 Tage. 9 Pferde werden verkauft. Wie lange reicht jetzt der Futtervorrat?

19. Das volkseigene Gut Neuendorf lieferte dem VEAB an einem Tage 186 dz Roggen ab und erhielt dafür 3906 DM.

a) Wieviel DM erbrachte eine Lieferung am nächsten Tage, die 209 dz betrug?

b) Für eine dritte Lieferung erhielt das VEG 7266 DM. Für wieviel Doppelzentner war der Preis berechnet?

20. Eine LPG bewirtschaftet 3 Teiche: Teich I 1,9 ha, Teich II 0,7 ha, Teich III 2,3 ha. Abzuliefern sind im Jahre 150 kg Karpfen je Hektar. Da die LPG die Teiche gut betreute, konnte sie 360 kg Karpfen je Hektar fischen.

a) Wie hoch war das Ablieferungssoll?

b) Wieviel Kilogramm fischte die LPG? Vergleiche mit dem Soll!

c) 52 kg verbrauchten die Mitglieder selbst. Die anderen lieferten sie ab. Die LPG lieferte 1480 kg Karpfen über 1 kg Gewicht je Karpfen ab, 1 kg zu 2,50 DM, den Rest unter 1 kg Gewicht, 1 kg zu 2,10 DM. Berechne die Einnahme aus dem Fischverkauf!

21. Beim Handmelken rechnet man mit 0,8 kg Milch je Minute.

a) Wieviel Kilogramm Milch melken 3 Melker in $\frac{3}{4}$ Std.?

b) In welcher Zeit werden 12 kg Milch von 3 Melkern gemolken?

22. Auf einem volkseigenen Gut wurden von 5 Melkern 35 Kühe in $1\frac{1}{4}$ Std. mit der Hand gemolken.

a) Wieviel Kühe wurden in 1 Std. gemolken?

b) Wieviel Kühe hat ein Melker je Stunde gemolken?

c) Nach der Anschaffung einer Melkmaschine benötigten 2 Melker für 39 Kühe $1\frac{1}{2}$ Std. Wieviel Kühe konnten nun in einer Stunde gemolken werden?

Aus der sozialistischen Industrie

23. Im Braunkohlenwerk Mücheln bei Merseburg fördert der „Schaufelradbagger 66" in 24 Min. 280 t Rohbraunkohle.

a) Wieviel Tonnen Rohbraunkohle fördert der Schaufelbagger in 1 Std.?

b) Wieviel Großraumwagen mit einem Ladegewicht von 60 t sind jede Stunde erforderlich, um die Braunkohle abzutransportieren?

24. Eine Brigade von 9 Schaltungsmonteuren erfüllte einen Arbeitsauftrag in 46 Std.

a) In welcher Zeit kann der Auftrag von 12 Monteuren erledigt werden?

b) Welche Zeit würden 7 Monteure dafür benötigen?

c) Wieviel Arbeitsstunden werden eingespart, wenn 8 Monteure den Auftrag ebenfalls in 46 Std. erledigen?

25. Mit 12 Drehmaschinen kann eine Serie von Kleinmaschinenteilen in 22 Std. gefertigt werden.

a) Wieviel Stunden dauert die Fertigung, wenn 2 Drehmaschinen wegen notwendiger Reparaturen für diesen Auftrag ausfallen?

b) Um wieviel Stunden verschiebt sich der Abschluß der Fertigung?

26. Wieviel Zähne haben 300 mm lange Sägeblätter, wenn **a)** bei grober Teilung 16 Zähne, **b)** bei mittlerer Teilung 22 Zähne, **c)** bei feiner Teilung 32 Zähne auf 25 mm Länge des Sägeblattes kommen?

27. Ein ⊏-Stahl 10 (lies: U-Stahl 10) von 2,50 m Länge wiegt 26,5 kp. Wieviel wiegt ein Träger von 3,70 m Länge gleichen Profils?

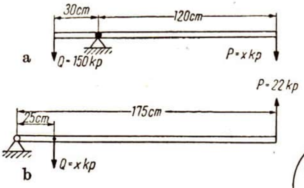
28. Eine Bohrspindel macht 400 Umdrehungen in der Minute. Sie wird durch einen Motor mit 1400 U/min angetrieben. Auf der Achse des Motors sitzt ein Zahnrad mit 36 Zähnen. Berechne die Zahl der Zähne, die das Zahnrad auf der Bohrspindelachse hat!

29. Bei 250 Umdrehungen in der Minute beträgt die Riemengeschwindigkeit eines Motors 7 m/s. Wie groß ist sie bei 900 U/min?

30. Ein Rundstahl von 1340 mm Länge wird bei einer Schnittgeschwindigkeit von 11 m/min in 2 Std. 50 Min. abgedreht.

a) Welche Zeit wird unter gleichen Bedingungen für einen Stahl von 1620 mm Länge gebraucht?

b) Welche Zeit wird zu dem Stahl von 1340 mm Länge gebraucht, wenn die Schnittgeschwindigkeit durch Einsatz von Schnellarbeitsstahl auf 21 m/min gesteigert wird?



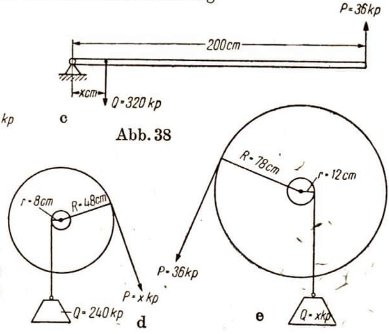


Abb. 38

31. Stelle mit Hilfe der Abbildungen 38a bis e Ansätze auf und bestimme jeweils den Wert von x!

VIII. Einführung in die Prozentrechnung

32. Vorbereitende Übungen

1. Gib die kleinere Zahl als Bruchteil der größeren an!

a) 6 und 12, 45 und 55, 34 und 85, 8,4 und 12,6, 2,7 und 5,4

b) 50 (25, 75, 20, 80, 5, 45, 4, 15, 2) und 100

2. Gib die größere Zahl als Bruchteil der kleineren an!

a) 35 und 28, 45 und 35, 8,4 und 7,7, 19,2 und 15,6

b) 150 (250, 375, 125, 175, 750) und 100

3. Vergleiche die Zahlenpaare der Aufgaben 1 und 2 auch unter Verwendung von Dezimalzahlen!

4. Vergleiche die Zahlenpaare der Aufgaben 1a) und b) und 2a) und b) durch Verhältnisse

a) in möglichst kleinen ganzen Zahlen,

b) mit 1 als kleinerer Verhältniszahl,

c) mit 1 als größerer Verhältniszahl,

d) mit 100 als Hinterglied!

5. Berechne die folgenden Bruchteile!

a) $\frac{1}{5}$ von 20, $\frac{4}{5}$ von 20, $\frac{5}{6}$ von 48, $\frac{3}{4}$ von 100, $\frac{3}{8}$ von 5

b) $\frac{1}{3}$ von 2,4, $\frac{2}{3}$ von 2,4, $\frac{3}{5}$ von 100, $\frac{5}{8}$ von 1000, $\frac{3}{10}$ von 100

6. Verwandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalzahlen!

a) $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{29}{50}$ b) $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{43}{80}$, $\frac{7}{40}$

7. Verwandle die folgenden gemeinen Brüche in Dezimalzahlen! Bestimme sie auf vier Stellen nach dem Komma!

a) $\frac{7}{12}$, $\frac{23}{24}$, $\frac{17}{36}$, $\frac{9}{22}$, $\frac{4}{37}$ b) $\frac{1}{7}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{16}{31}$, $\frac{21}{23}$, $\frac{13}{93}$

8. Verwandle die folgenden Dezimalzahlen in gemeine Brüche oder in gemischte Zahlen!

a) 0,50; 0,75; 0,25; 0,85; 0,125 b) 4,005; 17,075; 103,08

9. Vergleiche die folgenden gemeinen Brüche, indem du sie in Dezimalzahlen verwandelst und dann das Verhältnis angibst!

a) $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{25}$ und $\frac{1}{4}$ c) $\frac{9}{40}$ und $\frac{6}{25}$ d) $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{5}$

e) $\frac{13}{50}$ und $\frac{19}{80}$ f) $\frac{14}{125}$ und $\frac{9}{250}$ g) $\frac{3}{4}$ und $\frac{642}{856}$ h) $\frac{791}{904}$ und $\frac{1293}{2155}$

10. Wieviel Hundertstel geben die folgenden Zahlen an?

Beispiel: $0{,}0271 = \frac{271}{10000} = \frac{2{,}71}{100} = 2{,}71$ Hundertstel

a) 0,09; 0,05; 0,01; 0,10; 0,37; 0,99; 0,8; 1

b) 0,025; 0,436; 0,0615; 0,94556; 1,05; 4,65; 10,001; 3,4465; 3,001

c) 12,334; 0,9356; 0,08; 744; 100; 101; 0,385; 7; 1,005

11. Drücke Rechnung und Ergebnis der Übungen in Aufgabe 10 durch eine Proportion mit den Hintergliedern 1 und 100 aus!

Beispiel: $0{,}0271 : 1 = 2{,}71 : 100$

33. Der Prozentbegriff

1) Beispiel: Bei einem Schulsportfest gewannen 39 von 260 Schülern der Schule A einen Preis. Von 225 Schülern der Schule B wurden 36 Schüler mit einem Preis ausgezeichnet. Welche Schule hat das bessere Ergebnis erzielt und ist als Gesamtsieger zu erklären?

Lösung: Wir untersuchen hierzu, welchen Anteil bei jeder Schule die Zahl der Preisträger an der Gesamtzahl der Schüler hat. Die Anteile drücken wir in Brüchen aus:

	Schule A	Schule B
Schülerzahl	260	225
Zahl der Preisträger	39	36
	39 ist $\frac{39}{260}$ von 260	36 ist $\frac{36}{225}$ von 225

Bei der Schule A erhielten $\frac{39}{260}$ der beteiligten Schüler, bei der Schule B $\frac{36}{225}$ der beteiligten Schüler einen Preis.

Um die beiden Anteile vergleichen zu können, müssen wir die beiden Brüche gleichnamig machen. Das kann mit Hilfe des Hauptnenners geschehen oder durch Umwandeln in Dezimalzahlen.

Schule A	Schule B
$\frac{39}{260} = 39 : 260 = 0{,}15$	$\frac{36}{225} = 36 : 225 = 0{,}16$

Ergebnis: Die Schule B ist mit einer Preisträgerzahl von 16 Hundertsteln der beteiligten Schüler besser als die Schule A mit 15 Hundertsteln.

Für „Hundertstel" sagt man dabei **Prozent** und schreibt dafür das Zeichen %. Das Wort „Prozent" ist von dem lateinischen Ausdruck „pro centum" abgeleitet und heißt wörtlich übersetzt „für Hundert", sinngemäß übertragen „Hundertstel".

Das Ergebnis in unserem Beispiel können wir also auch so aussprechen: Die Schule B ist mit einer Preisträgerzahl von 16% der beteiligten Schüler besser als die Schule A mit 15%.

Der Anteil der Schule A (15%) wurde auf Grund der Gesamtschülerzahl 260 berechnet. Wir bezeichnen die Zahl 260 deshalb als **Grundwert**. Der Grundwert entspricht 100 Hundertsteln oder 100 Prozent der Gesamtschülerzahl (100% von 260 oder $\frac{100}{100} \cdot 260$ ist 260). Wir bezeichnen den Grundwert mit $\boldsymbol{g}$.

Die Zahl der Preisträger (39) ist der Teil der Gesamtschülerzahl (260), der sich als $\frac{39}{260} = 0{,}15 = \frac{15}{100} = 15\%$ vom Grundwert 260 ausdrücken läßt. Wir bezeichnen die Zahl 39 als **Prozentwert** und schreiben dafür $\boldsymbol{w}$.

Die Anzahl der Hundertstel (15) bezeichnen wir als **Prozentsatz** und schreiben kurz $\boldsymbol{p}$.

Je nach der geforderten Genauigkeit und Zweckmäßigkeit ist es nötig, den Prozentsatz zu runden. In der Praxis hat sich das Runden auf eine Dezimalstelle bewährt. Auch wir wollen die Aufgaben in dieser Weise berechnen, falls keine anderen Anweisungen in der Aufgabe stehen.

2) Wenn der Prozentwert w und der Grundwert g einfache unbenannte oder gleichbenannte Zahlen sind, und wenn sich der aus ihnen gebildete Bruch gut kürzen läßt, können wir den Prozentsatz p im Kopf berechnen.

Beispiele: Wieviel Prozent sind

a) 20 von 80? $w = 20;\ g = 80$

Lösung: $p\% = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$ $\quad p = 25$

b) 6 DM von 120 DM? $w = 6;\ g = 120$

Lösung: $p\% = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = \frac{5}{100} = 5\%$ $\quad p = 5$

c) 180 dz von 120 dz? $w = 180;\ g = 120$

Lösung: $p\% = \frac{180}{120} = \frac{3}{2} = 1{,}50 = \frac{150}{100} = 150\%$ $\quad p = 150$

d) 33 m von 33 m? $w = 33;\ g = 33$

Lösung: $p\% = \frac{33}{33} = \frac{1}{1} = 1{,}00 = \frac{100}{100} = 100\%$ $\quad p = 100$

Wir erkennen, daß solche Aufgaben besonders dann leicht im Kopf gerechnet werden können, wenn der entstehende gekürzte Bruch leicht in Hundertstel umgewandelt werden kann und wenn dabei einfache Prozentzahlen entstehen. Solche Brüche sind z. B.

$w:g$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$
p	1	5	10	$12\frac{1}{2}$	20	25	$33\frac{1}{3}$	50	$66\frac{2}{3}$	75	100	150	200

Wir erkennen ferner:

Ist $w < g$, so ist $p < 100$
Ist $w > g$, so ist $p > 100$
Ist $w = g$, so ist $p = 100$

3) In einfachen Fällen können wir auch den Prozentwert w im Kopf berechnen. Dazu müssen der Grundwert g und der Prozentsatz p bekannt sein.

Beispiele:

Wieviel sind

a) 50% von 480 kg? $p = 50;\ g = 480$

Lösung: $w = \frac{50}{100} \cdot 480 = \frac{1}{2} \cdot 480 = 240$ Ergebnis: 240 kg

b) 10% von 24 DM? $p = 10;\ g = 24$

Lösung: $w = \frac{10}{100} \cdot 24 = \frac{1}{10} \cdot 24 = 2{,}4$ Ergebnis: 2,40 DM

c) 125% von 3000 St.? $p = 125;\ g = 3000$

Lösung: $w = \frac{125}{100} \cdot 3000 = 125 \cdot 30 = 3750$

Ergebnis: 3750 St.

d) 100% von 77 hl? $p = 100;\ g = 77$

Lösung: $w = \frac{100}{100} \cdot 77 = 1 \cdot 77 = 77\ (= g)$ Ergebnis: 77 hl

Zusammenfassung:

1. **Prozente sind Hundertstel.**
2. **Der Grundwert entspricht 100 Hundertsteln oder 100%. Wir bezeichnen ihn mit *g*.**
3. **Der Prozentwert ist ein Teil des Grundwertes. Er wird mit *w* bezeichnet.**
4. **Der Prozentsatz ist eine Zahl, die angibt, wieviel Hundertstel des Grundwertes auf den Prozentwert entfallen. Er wird mit *p* bezeichnet.**

Aufgaben

1. Wie groß ist der Grundwert g, der Prozentwert w und der Prozentsatz p in folgenden Aussagen?

a) 70% von 13 DM sind 9,10 DM
b) 3 l sind $\frac{3}{100}$ von 100 l
c) 20 Pf sind von 20 Pf 100 Prozent
d) 18 ist $0{,}40 \cdot 45$
e) 250% von 1000 St. sind 2500 St.
f) 50 sind 200% von 25

2. Bestimme den Prozentsatz im Kopf!

a) 8 ha von 80 ha
b) 14 dz von 56 dz
c) 9 m von 27 m
d) 46 km² von 69 km²
e) 700 DM von 1000 DM
f) 36 hl von 90 hl
g) 6 kg von 42 kg
h) 20 kg von 30 kg
i) 15 kg von 20 kg
k) 2,1 dz von 7 dz
l) 72 dz von 80 dz
m) 22,5 hl von 75 hl
n) 13 m² von 65 m²
o) 5,6 ha von 8,4 ha

3. Berechne 1% von den folgenden Werten im Kopf!

a) 300, 1000, 40000, 650
b) 40, 75, 90, 16520, 132500
c) 1, 3, 24, 5, 355, 1006
d) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{8}$
e) 308,80 DM, 17,75 DM, 8,50 DM, 3,45 DM, 0,70 DM, 0,25 DM

4. a) 10% von 658,40 DM
b) 50% von 1256,48 ha
c) $12\frac{1}{2}$% von 5,2 cm
d) $33\frac{1}{3}$% von 6789 m
e) 25% von 987,40 hl
f) $12\frac{1}{2}$% von 1490 l
g) 20% von 279,50 DM
h) $66\frac{2}{3}$% von 240,3 t

IX. Das Berechnen der Grundgrößen

34. Das Berechnen von Prozentsätzen

Um zu berechnen, wieviel Prozent eine Größe von einer anderen ausmacht, müssen wir den Prozentwert w und den Grundwert g ins Verhältnis setzen und dieses Verhältnis als Hundertstel (%) ausdrücken.

Das bedeutet das Verwandeln von $w : g$ in ein neues Verhältnis mit dem Hinterglied 100. Dessen Vorderglied ist dann der Prozentsatz p. Es verhalten sich also

Prozentwert zu Grundwert wie Prozentsatz zu 100

$$\boldsymbol{w : g = p : 100}$$

Diese Proportion ist die grundlegende Beziehung der gesamten Prozentrechnung. Wir müssen sie uns einprägen und wollen künftig alle Prozentaufgaben, die nicht im Kopf gelöst werden können, auf sie zurückführen.

1. Beispiel: Wieviel Prozent von 625 DM sind 26,50 DM?
Zuerst erfolgt der Überschlag mit veränderten Zahlen.

$$\frac{26{,}50}{625} \approx \frac{30}{600} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = \frac{5}{100} = 5\% \qquad p \approx 5$$

Lösung: $w : g = p : 100 \qquad w = 26{,}50;\ g = 625$

$$26{,}50 : 625 = p : 100$$

p ist in dieser Bestimmungsgleichung die Unbekannte. Nach dieser müssen wir die Gleichung auflösen. Das führt wie bei den Aufgaben zur Proportionalität über die Produktgleichung.

$$625 \cdot p = 26{,}50 \cdot 100$$
$$p = \frac{2\,650}{625}$$
$$p = 4{,}24 \approx 4{,}2$$

Der Wert stimmt mit dem Ergebnis des Überschlags gut überein.

Ergebnis: 26,50 DM sind rund 4,2% von 625 DM.

2. Beispiel: In einer LPG betrug im Jahre 1954 die durchschnittliche Milchleistung je Kuh nur 1900 kg. Im Jahre 1957 betrug die Milchleistung 2790 kg je Kuh. Auf wieviel Prozent der früheren Leistung ist die jetzige Leistung gestiegen? (Runde auf ganze Prozente!)

Die Aufgabe geht von der früheren Leistung aus. Die Zahl 1900 bildet also den Grundwert. Die Zahl 2790 dagegen stellt den Prozentwert dar.

Überschlag: $\frac{2\,790}{1\,900} \approx \frac{3\,000}{2\,000} = \frac{3}{2} = 1{,}5 = 150\% \qquad p \approx 150$

Lösung: $w : g = p : 100 \qquad w = 2790;\ g = 1900$

$$2790 : 1900 = p : 100$$
$$1900 \cdot p = 2790 \cdot 100$$
$$p = \frac{2\,790 \cdot 100}{1\,900}$$
$$p = 146{,}84\ldots \approx 147$$

Der Vergleich mit dem Überschlag ergibt Übereinstimmung in der Größenordnung.

Ergebnis: Die Milchleistung ist auf rund 147% der früheren Leistung gestiegen.

Zusammenfassung:

1. **Allen Prozentaufgaben liegt die Proportion $w : g = p : 100$ zugrunde.**
2. **Zur Berechnung des Prozentsatzes wird die Proportion nach p aufgelöst.**
3. **Vor jeder Berechnung ist ein Überschlag im Kopf durchzuführen.**

Aufgaben

Soweit möglich, sind diese Aufgaben im Kopf oder halbschriftlich zu lösen. Auf jeden Fall ist das Ergebnis vorher im Kopf zu überschlagen.

1. Berechne den Prozentsatz!

a) 26 DM von 104 DM **b)** 54 DM von 90 DM **c)** 21 m von 700 m
d) 36 m von 900 m **e)** 42 kg von 280 kg **f)** 39 kg von 260 kg
g) 91 dz von 260 dz **h)** 27 dz von 450 dz **i)** 17 hl von 425 hl

2. Berechne den Prozentsatz!

a) 82,50 DM von 660 DM **b)** 85,80 DM von 2640 DM
c) 9,3 dz von 12 dz **d)** 0,70 dz von 56 dz
e) 6,27 ha von 38 ha **f)** 31,32 ha von 135 ha
g) 13 kg von 2600 kg **h)** 5,6 kg von 2240 kg

Bei den folgenden Aufgaben ist der Prozentsatz auf eine Dezimalstelle genau zu bestimmen.

3. a) 5 DM von 70 DM **b)** 15 g von 68 g **c)** 270 DM von 4368 DM
d) 92 m von 155 m **e)** 16 t von 353 t **f)** 850 kg von 1340 kg
g) 4 l von 430 l **h)** 43 t von 587 t **i)** 2,7 dz von 2175 dz

4. a) 50 DM von 40 DM **b)** 80 DM von 40 DM
c) 1023 kg von 825 kg **d)** 40 m³ von 40 m³
e) 96 m³ von 64 m³ **f)** 27,44 a von 22,4 a
g) 8,8 l von 6 l **h)** 8,5 m von 7,5 m **i)** 340,6 t von 32,5 t

5. a) 78 cm von 1,35 m **b)** 629 m von 1,2 km **c)** 19 mm von 3 cm
d) 94 Pf von 3,36 DM **e)** 45 dm von 6,0 m **f)** 843 p von 2,3 kp
g) 26 cm von 17 dm **h)** 260 mp von 7 p **i)** 1436 m von 0,8 km

6. a) $1\frac{3}{5}$ von 125 **b)** $6\frac{3}{4}$ von $40\frac{1}{2}$ **c)** $65\frac{1}{4}$ von 1450
d) $4\frac{5}{8}$ von $64\frac{3}{4}$ **e)** $2\frac{4}{9}$ von 84 **f)** $283\frac{9}{40}$ von $217\frac{4}{5}$
g) $8\frac{7}{8}$ von $40\frac{3}{5}$ **h)** $9\frac{5}{7}$ von $37\frac{3}{8}$ **i)** $367\frac{4}{13}$ von $136\frac{2}{5}$

Aus unserem Schulwesen

7. In der Schule A erhielten 65 Schüler Schwimmunterricht; davon sind 52 Schüler Freischwimmer geworden. In der Schule B, in der 84 Schüler am Schwimmunterricht teilnahmen, wurden 63 Schüler Freischwimmer. Berechne die Prozentsätze und vergleiche diese Ergebnisse des Schwimmunterrichts in den beiden Schulen!

8. a) Bei einem Schulsportfest erreichten im Hochsprung von 64 Jungen der 7. Klasse 8 Jungen die Höhen 1,20 m bis 1,35 m, 14 Jungen die Höhen 1,10 m bis 1,20 m, 33 Jungen die Höhen 1,00 m bis 1,10 m. Die Leistungen der übrigen Schüler lagen unter 1,00 m. Wieviel Prozent der Schüler entfielen auf jede Leistungsstufe?

b) Von 58 Mädchen der 7. Klassen erreichten im Weitsprung 6 Schülerinnen die Weiten 3,40 m bis 3,60 m, 17 Schülerinnen die Weiten 3,00 m bis 3,40 m, 35 Schülerinnen die Weiten 2,75 m bis 3,00 m. Berechne die Prozentsätze!

9. An der Wandzeitung einer Schule soll durch ein Streifendiagramm die Beteiligung am außerschulischen Sport in den Jahren 1953 bis 1957 veranschaulicht werden. Den Schulakten werden die folgenden Zahlen entnommen:

	1953	1954	1955	1956	1957
Schülerzahl	750	760	710	800	752
Teilnehmer am außerschulischen Sport	207	190	213	256	319

a) Wieviel Prozent der Schüler beteiligten sich in den angegebenen Jahren am außerschulischen Sport?

b) Zeichne das Streifendiagramm!

10. Im Werkunterricht wurde eine Blechschachtel angefertigt. Dazu wurden 60,0 dm² Blech verbraucht. Beim Ausmessen ergibt sich, daß die Schachtel 52,5 dm² Blech enthält. Wieviel Prozent beträgt der Abfall (Verschnitt)?

11. a) Ein Schulheft hat 16 Seiten. Wieviel Prozent des Heftes werden nicht ausgenutzt, wenn eine halbe Seite nicht beschrieben wird?

b) In der Deutschen Demokratischen Republik gab es im Jahre 1956 etwa 1630000 Grundschüler. Wir nehmen an, daß jeder Grundschüler im Jahr durchschnittlich 20 Hefte verbraucht. Wieviel Hefte werden insgesamt für die Grundschüler benötigt?

c) Für wieviel Hefte würde das Papier reichen, das nach Aufgabe a) nicht ausgenutzt wird?

d) Ein Heft kostet 0,10 DM. Welchen Wert hat die in Aufgabe c) errechnete Heftmenge?

Aus der sozialistischen Landwirtschaft

12. Aufteilung der LNF der DDR im Jahre 1957:

Acker- und Gartenland	Obstanlagen, Baumschulen, Rebland	Wiesen und Weiden
5109000 ha	72000 ha	1284000 ha

Wieviel Prozent der Gesamtfläche entfallen auf die einzelnen Flächen?

13. Die landwirtschaftliche Nutzfläche einer LPG ist folgendermaßen aufgeteilt: 432,46 ha Ackerland, 91,72 ha Grünland (Wiesen und Weiden), 58,57 ha Gartenland. Außerdem besitzt die LPG 72,85 ha Wald, 3,47 ha Ödland und 4,12 ha Gebäude- und Hofflächen.

a) Wieviel Hektar umfaßt die Gesamtfläche?

b) Wieviel Prozent der Gesamtfläche entfallen auf die einzelnen Flächen?

14. Dieselbe LPG hat ihre Ackerfläche wie folgt bestellt: 219,00 ha mit Getreide, 120,32 ha mit Hackfrüchten, 46,30 ha mit Futterpflanzen, 29,21 ha mit Ölfrüchten, 17,63 ha mit Feldgemüse. Wieviel Prozent der gesamten Ackerfläche nehmen die einzelnen Teilflächen ein?

15. Der Krieg ist auch ein Feind der Landwirtschaft. Das zeigt die folgende Übersicht über die durchschnittlichen Ernteerträge im Gebiet der DDR:

Ernteerträge	Durchschnitt 1934/38	1946	1957
Winterweizen	24,9 dz/ha	17,7 dz/ha	31,1 dz/ha
Winterroggen	17,2 dz/ha	12,9 dz/ha	20,4 dz/ha
Ölfrüchte	14,6 dz/ha	5,9 dz/ha	12,4 dz/ha

a) Berechne, auf wieviel Prozent die Hektarerträge infolge des Krieges sanken!

b) Berechne, auf wieviel Prozent die Hektarerträge seit 1946 gesteigert werden konnten!

16. Der Gesamtaufwand beim Einsatz eines Mähbinders (einschließlich Abernten und Dreschen mit der Dreschmaschine) betrug 7664 DM, beim Einsatz des Mähdreschers nur 4251 DM. Wieviel Prozent der Betriebskosten wurden im zweiten Falle eingespart?

17. a) In einer Hühnerfarm wurden 120 Eier in die Brutmaschine eingelegt. Aus 108 Eiern schlüpften Küken. Berechne den Prozentsatz!
b) Ein anderes Mal schlüpften aus 150 Eiern 129 Küken. Berechne ebenfalls den Prozentsatz!

18. Zwei volkseigene Betriebe übernahmen die Patenschaft über eine landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaft. Der Betrieb A beschäftigt 120, der Betrieb B beschäftigt 210 Arbeiter. Beim Bau eines Stalles für die LPG beteiligten sich 62 Werktätige vom Betrieb A und 85 Werktätige vom Betrieb B. Stelle die prozentuale Beteiligung in beiden Betrieben beim Bau des Stalles fest!

19. Eine LPG im Erzgebirge erzielte in einem Jahr aus pflanzlichen Erzeugnissen Einnahmen in Höhe von 35917,53 DM; die Einnahmen aus der Viehwirtschaft betrugen 70 332,31 DM. Wieviel Prozent der gesamten Einnahmen entfielen hier auf die beiden Einnahmequellen?

20. Wieviel Prozent beträgt bei den folgenden Tieren das Schlachtgewicht vom Lebendgewicht?

	Ochse	Bulle	Kuh	Färse	Kalb
Lebendgewicht	520 kp	680 kp	500 kp	360 kp	85 kp
Schlachtgewicht	286 kp	374 kp	265 kp	144 kp	51 kp

Zur Übung des Überschlags

21. Bestimme den Prozentsatz angenähert durch einen Überschlag im Kopf!
a) 16 DM von 33 DM b) 15 DM von 59 DM c) 37 hl von 78 hl
d) 23 kg von 68 kg e) 37 kg von 139 kg f) 36 kg von 55 kg
g) 21 ha von 103 ha h) 9 ha von 73 ha i) 29 ha von 39 ha
k) 65 l von 207 l l) 12 t von 125 t m) 64 t von 81 t

22. Überschlage den Prozentsatz im Kopf!
a) 358,75 ha von 723,30 ha b) 51,36 ha von 987,45 ha
c) 213,57 dz von 838,62 dz d) 188,65 dz von 567,84 dz
e) 59,86 dz von 478,25 dz f) 541,36 dz von 596,75 dz

23. Vor der Ernte wurde der Ertrag eines Weizenfeldes auf 29 dz je Hektar geschätzt. Tatsächlich war der Ertrag um 2,8 dz je Hektar größer. Wieviel Prozent war ungefähr der Mehrertrag?

24. In einer Schulklasse waren von 33 Schülern zu Beginn des Schwimmunterrichts 16 Nichtschwimmer. Nach Abschluß des Schwimmunterrichts waren es noch 3. Gib angenäherte Prozentsätze an!

35. Das Berechnen von Prozentwerten

Beispiel: Eine Zuckerfabrik kann täglich 1125 t Zuckerrüben verarbeiten. Wieviel Tonnen Zucker können aus dieser Menge hergestellt werden, wenn die industrielle Zuckerausbeute im Durchschnitt 15% beträgt?

Überschlag: Wir überschlagen statt mit 15% mit dem nächstgelegenen einfachen Prozentsatz, also mit $12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$.
$\frac{1}{8}$ von rund 1200 t sind 150 t.

Auch dieser Aufgabe liegt die grundlegende Beziehung der Prozentrechnung $w : g = p : 100$ zugrunde, die dieses Mal nach der Unbekannten w aufgelöst werden muß.

Lösung:
$$\begin{aligned} w : g &= p : 100 \qquad\qquad g = 1125;\ p = 15 \\ w : 1125 &= 15 : 100 \\ 100 \cdot w &= 1125 \cdot 15 \\ w &= \frac{1125 \cdot 15}{100} \\ w &= 168{,}75 \end{aligned}$$

Ergebnis: Es können 168,75 t Zucker aus 1125 t Zuckerrüben gewonnen werden.

Aufgaben

Soweit die Prozentsätze einfache Bruchteile vom Grundwert sind, sind die Aufgaben im Kopf zu lösen. Ist ein schriftliches oder halbschriftliches Rechnen erforderlich, ist vor der Berechnung das Ergebnis im Kopf zu überschlagen.

1. a) 2% von 4500 DM **b)** 4% von 360 DM **c)** 5% von 332 hl
d) 9% von 780 hl **e)** 6% von 480 hl **f)** 14% von 43 t

2. a) 40% von 6,5 km **b)** 75% von 89,52 m^2 **c)** 90% von 804 dz
d) 60% von 2,7 hl **e)** $66\frac{2}{3}\%$ von 1452,6 t **f)** 80% von 55 cm^2

3. a) $12\frac{1}{2}\%$ von 1840 l — b) 75% von 938,40 km²
c) 10% von 0,4 kg — d) $66\frac{2}{3}\%$ von 549,60 DM
e) 50% von 1025 t — f) 30% von 9,50 a
g) $33\frac{1}{3}\%$ von 6648 DM — h) 25% von 27,70 dz
i) 70% von 30 m³ — k) $12\frac{1}{2}\%$ von 174,80 a

Runde in den folgenden Aufgaben den Prozentwert auf die erforderliche Stellenzahl!

4. a) 9% von 8,20 DM — b) 5% von 6,75 dz
c) 3% von 18,7 t — d) 8% von 40,50 hl
e) 65% von 65 m — f) 72% von 48,3 kg
g) 4% von 86,32 hl — h) 31% von 49,80 DM

5. Berechne a) 2%, b) 3%, c) 7%, d) 11%, e) 32% von 500 DM (350 DM, 72 DM, 9 DM, 700 m, 8 km, 6,300 kg, 27,50 dz, 51,2 t)!

6. a) 200% von 6,25 DM — b) 125% von 18 DM
c) 540% von 300,25 DM — d) 105% von 70 DM
e) 220% von 43 DM — f) 425% von 7,60 DM

7. a) 6,25% von 540 DM — b) 8,4% von 2340 hl
c) 2,1% von 750 a — d) 5,2% von 340 hl
e) 3,45% von 460 kg — f) 4,75% von 860 hl

8. Berechne a) $\frac{1}{2}\%$, b) $\frac{1}{10}\%$, c) $\frac{4}{5}\%$ von 366 DM (54 hl, 35,400 kg, 8,80 ha)!

9. a) $4\frac{1}{2}\%$ von 460 kg — b) $2\frac{1}{4}\%$ von 160 kg
c) $5\frac{3}{4}\%$ von 68 l — d) $9\frac{1}{4}\%$ von 480 dz
e) $6\frac{1}{5}\%$ von 20 ha — f) $4\frac{3}{8}\%$ von 6300 kg

10. Berechne a) $1\frac{3}{4}\%$, b) 3,8%, c) 4,7% von 210 m (15 kg, 351 t, 120 l, 5,75 DM)!

11. a) 25% von 83,20 DM — b) 7,5% von 188 DM
c) 26,7% von 360 DM — d) $6\frac{1}{4}\%$ von 17,44 DM
e) $12\frac{1}{2}\%$ von 296 DM — f) 125% von 750 DM
g) 45% von 486 kg — h) 17,5% von 92 kg
i) $16\frac{2}{3}\%$ von 39 kg — k) $66\frac{2}{3}\%$ von 46,2 dz
l) 250% von 43,8 t — m) $133\frac{1}{3}\%$ von 74,1 t

12. Die Luft, die wir einatmen, besteht aus etwa 20% Sauerstoff und 80% Stickstoff. Außerdem sind geringe Beimengungen anderer Gase darin enthalten.

a) Wieviel Kubikmeter Sauerstoff und wieviel Kubikmeter Stickstoff enthält ein Klassenzimmer von 230 m³, 215 m³, 192 m³?

b) Wieviel Kubikmeter Sauerstoff enthält ein Zimmer, das 4,20 m lang, 3,60 m breit und 2,80 m hoch ist?

c) Führe die gleichen Berechnungen für dein Klassenzimmer und dein Wohnzimmer durch!

13. Gudrun hat während eines Jahres sorgfältig die Rückvergütungsmarken des Konsums in das dafür vorgesehene Heft geklebt. Zusammen mit ihrer Mutter stellt sie fest, daß für 1386 DM Waren gekauft worden sind. Wieviel Mark erhält Gudruns Mutter zurück, wenn ihre Konsumgenossenschaft 1,5% Rückvergütung zahlt?

14. Im Labor des Betonwerkes wird der gelieferte Kies einer Siebprobe unterworfen, d. h. es wird durch Aussieben festgestellt, wieviel Gewichtsprozente von den folgenden Korngrößen in ihm enthalten sind: Korngröße bis 0,2 mm, über 0,2 mm bis 1 mm, über 1 mm bis 3 mm, über 3 mm bis 7 mm, über 7 mm bis 15 mm, über 15 mm bis 30 mm Durchmesser. Die Probe ergab für die genannten Korngrößen die folgenden Gewichtsprozente: 8%, 20%, 18%, 15%, 21%, 17%.

a) Warum ergibt die Summe nicht genau 100%?

b) Für einen Stahlbetonträger werden 0,97 m³ (1 m³ wiegt 1,6 t) von diesem Kies gebraucht. Berechne, wieviel Kilogramm des Kieses auf jede Größenklasse kommen!

15. Aus Knochen können 9% Knochenfett, 45% Knochenmehl (das unter anderem als Düngemittel verwendet wird) und 15% Leim gewonnen werden. Eine Pioniergruppe sammelte in einem Monat 105,6 kg Knochen. Wieviel Kilogramm der genannten wichtigen Stoffe konnten aus den gesammelten Knochen gewonnen werden?

Aus der sozialistischen Landwirtschaft

16. Frischer Stallmist enthält im Durchschnitt 0,50% Stickstoff (N), 0,25% Phosphorsäure (P_2O_5) und 0,60% Kali (K_2O)

Davon gehen verloren	N	P_2O_5	K_2O
bei schlechter Düngerpflege	60%	10%	20%
bei bester Düngerpflege	20%	—	—

Wieviel Kilogramm der einzelnen Nährstoffe gehen in beiden Fällen von 120 dz Stalldung verloren?

17. Als Hochzuchtsaatgut anerkanntes Getreidesaatgut muß eine Keimfähigkeit von mindestens 95% haben. Bei einer Keimprobe werden 300 Weizenkörner ausgesät. Wieviel Körner müssen davon mindestens aufgehen, damit das Saatgut als Hochzuchtsaatgut anerkannt werden kann?

18. Bei der Aussaat mit der Drillmaschine braucht man gegenüber der Aussaat mit der Hand nur 75% des Saatgutes, weil die Saat gleichmäßig in den Boden eingebracht wird. Je Hektar Roggenanbaufläche werden bei der Handaussaat etwa 220 kg Saatgut benötigt. Wieviel Kilogramm Saatgut werden bei der Aussaat mit der Drillmaschine benötigt?

19. Bei einem Versuch konnten folgende Körnerverluste und Arbeitsleistungen bei der Weizenernte ermittelt werden:

	Körnerverlust	Leistung
Beim Handmähen und Binden	6%	$0{,}05\ \frac{\text{ha}}{\text{h}}$
Beim Mähen mit dem Ableger	5%	$0{,}45\ \frac{\text{ha}}{\text{h}}$
Beim Mähen mit dem Binder	1,5%	$0{,}35\ \frac{\text{ha}}{\text{h}}$
Beim Mähen mit dem Mähdrescher	0,5%	$2\ \frac{\text{ha}}{\text{h}}$

a) Wieviel Doppelzentner Weizen gehen auf einem 4,4 ha großen Felde $\left(\text{Ertrag } 34\ \frac{\text{dz}}{\text{ha}}\right)$ beim Ernten nach diesen vier Verfahren jeweils verloren?

b) Wieviel Doppelzentner Weizen werden infolgedessen nach dem 2., 3. bzw. 4. Verfahren mehr geerntet?

c) Wie lange braucht man in jedem Falle für das Abmähen eines 4,4 ha großen Feldes? Warum ist die notwendige Zeit nicht das einzige Maß für die Leistung?

20. In einer LPG werden 80 weißköpfige Fleischschafe mehr als bisher gehalten. Ein Schaf gibt jährlich etwa 5 kg Wolle. 60% davon sind Reinwolle. Beim Verspinnen zu Wollgarn fallen 25% der Reinwolle ab. Für einen Anzug benötigt man 3 kg Wollgarn. Für wieviel Anzüge liefert die LPG durch ihren Entschluß jährlich das Wollgarn?

21. Zur Desinfektion eines Stalles wird die Lösung eines Desinfektionsmittels in Wasser hergestellt. Die Menge des Desinfektionsmittels soll 2,5% der Lösungsmenge betragen (2,5prozentige Lösung). Wieviel Liter Desinfektionsmittel benötigt man für 30 l Lösung? Wieviel Liter Wasser werden benötigt?

22. Eine LPG plant die Produktion von 320 dz Fleisch. 35% davon sollen Rindfleisch sein. Wieviel Doppelzentner Rindfleisch sind zu produzieren?

23. Die Rinderzuchtbrigade einer LPG hat den Fleischproduktionsplan von 128 dz mit 112,5% erfüllt. Die dadurch erzielte Mehreinnahme betrug 3352 DM.

a) Welche Fleischmenge wurde über den Plan hinaus erzeugt?

b) Die LPG hatte beschlossen, der Rinderzuchtbrigade 10% der Mehreinnahme als Prämie zu zahlen. Wie hoch wird die Prämie sein?

36. Die grafische Darstellung von Prozentsatz und Prozentwert

1) Es gibt in der Prozentrechnung verschiedene Möglichkeiten der grafischen Darstellung. Man kann zum Beispiel den Grundwert durch eine Strecke darstellen, die bequem durch 100 zu teilen ist (zum Beispiel 10 cm). 1% ist der 100. Teil der Strecke (in unserem Beispiel 1 mm).

Beispiel: Bei einer Klassenarbeit im Fach Rechnen schreiben von 36 Schülern 3 Schüler eine 1, 12 Schüler eine 2, 19 Schüler eine 3 und 2 Schüler eine 4. Stelle die Ergebnisse grafisch dar!

Lösung: Wir berechnen die Prozentzahlen:

$$\frac{3}{36} = 0{,}08\overline{3} \approx 8\%, \quad \frac{19}{36} = 0{,}52\overline{7} \approx 53\%,$$

$$\frac{12}{36} = 0{,}33\overline{3} \approx 33\%, \quad \frac{2}{36} = 0{,}05\overline{5} \approx 6\%.$$

Wir stellen diese Prozentsätze auf einer Strecke von 10 cm Länge dar (Abb. 39). 1% entspricht dann 1 mm.

Abb. 39

Man kann an Stelle der Strecke auch einen Streifen verwenden. Die Breite des Streifens ist beliebig. Wir stellen das Ergebnis noch einmal an einem Streifen von 10 cm Länge dar (Dezimeterstreifen) (Abb. 40).

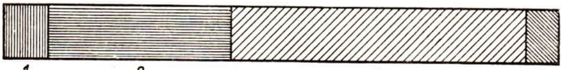


Abb. 40

2) Eine weitere, häufig verwendete Art der Darstellung ist die am Kreis. Man zeichnet einen Kreis mit beliebigem Radius und stellt die Prozentzahlen als Kreisausschnitte dar. Der Grundwert entspricht dann einem Vollwinkel von 360°, 1% entspricht $\frac{360°}{100} = 3{,}6°$.

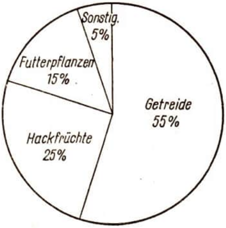


Abb. 41

Beispiel: Eine LPG hat ihre landwirtschaftliche Nutzfläche folgendermaßen aufgeteilt: Getreide 55%, Hackfrüchte 25%, Futterpflanzen 15%, Sonstiges 5%.

Lösung: Wir berechnen die Winkel der Kreisausschnitte, die zu den Prozentzahlen gehören:

$$\begin{aligned} 55\% &\mathrel{\hat{=}} 55 \cdot 3{,}6° = 198°, \\ 25\% &\mathrel{\hat{=}} 25 \cdot 3{,}6° = 90°, \\ 15\% &\mathrel{\hat{=}} 15 \cdot 3{,}6° = 54°, \\ 5\% &\mathrel{\hat{=}} 5 \cdot 3{,}6° = 18°. \end{aligned}$$

Die Abbildung 41 zeigt das Kreisdiagramm.

In den beiden Beispielen haben wir den Grundwert vollständig aufgeteilt. Die Summe der Prozentsätze ergab also 100. Häufig muß man aber bei der Berechnung der Prozentsätze runden. Dadurch kann es vorkommen, daß die Summe der Prozentsätze etwas von 100 abweicht. Dann weicht aber auch die Summe der Einzelstrecken von der gewählten Gesamtstrecke beziehungsweise die Summe der Einzelwinkel vom Vollwinkel ab. Eine weitere Abweichung kann sich durch Runden der Maßzahlen für die Einzelstrecken beziehungsweise für die Einzelwinkel ergeben.

3) Eine andere grafische Darstellung erhalten wir folgendermaßen. In der Grundbeziehung $w : g = p : 100$ ist die rechte Seite der Gleichung für einen bestimmten Prozentsatz ein feststehender Wert. Für $p = 25$ z. B. ist $p : 100 = \frac{1}{4}$.

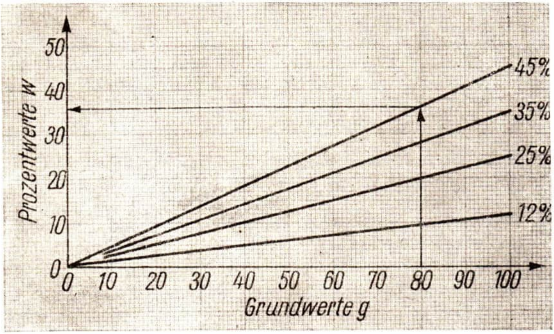


Abb. 42

Prozentwert und Grundwert sind zueinander proportional; $\frac{p}{100}$ ist der jeweilige Proportionalitätsfaktor. Demzufolge ergeben sich als Diagramme Geraden durch den Nullpunkt, wenn wir z. B. auf der waagerechten Achse die Grundwerte und auf der senkrechten Achse die Prozentwerte auftragen. Für jeden Prozentsatz ergibt sich eine anders geneigte Gerade. Abbildung 42 zeigt die grafische Darstellung für $p = 12$; 25; 35 und 45. Diese Geraden nennt man **Prozentstrahlen.**

Aufgaben

1. Stelle die folgenden Prozentsätze in Dezimeterstreifen dar!

a) 15%, 33%, 52% **b)** 12,5%, 25%, 17,5%, 45%

c) 10%, $33\frac{1}{3}$%, $26\frac{2}{3}$%, 30% **d)** 6%, 27%, 44%, 23%

2. Stelle die Prozentsätze aus Aufgabe 1 in Kreisdiagrammen dar!

3. Eine LPG hatte ihre Bodenfläche folgendermaßen aufgeteilt:

Getreide	51%	Grünland (Wiesen und Weiden)	8,5%
Kartoffeln	17,5%	Sonstige Fruchtarten	5%
Zuckerrüben	7%	Wege, Gebäude- und Hofflächen	2,5%
Futterpflanzen	8,5%		

Stelle die Aufteilung in einem Kreisdiagramm dar!

4. Die folgende Tabelle gibt an, wie sich die Wohnbevölkerung der Deutschen Demokratischen Republik einschließlich des demokratischen Sektors von Groß-Berlin am 31. Dezember 1957 auf die Gemeinden verschiedener Größengruppen aufteilte.

Gemeinden unter 2000 Einw.	Landstädte 2000 bis unter 5000 Einw.	Kleinstädte 5000 bis unter 20000 Einw.	Mittelstädte 20000 bis unter 100000 Einw.	Großstädte 100000 Einw. und mehr
28,6%	12,8%	19,0%	18,9%	20,7%

Stelle die Aufteilung **a)** in einem Dezimeterstreifen, **b)** in einem Kreisdiagramm dar!

5. Fertige eine grafische Darstellung entsprechend der Abbildung 42 für die Prozentsätze 10, 15, 20, 30 und 40! Löse mit Hilfe dieser Darstellung folgende Aufgaben!

a) 10% von 80 kg **b)** 30% von 75 t **c)** 15% von 45 DM

d) 40% von 90 l **e)** 10% von 15 m **f)** 20% von 85 ha

6. Bestimme aus den Abbildungen 43 und 44 die durch die Teilwinkel beziehungsweise Teilstreifen dargestellten Prozentsätze!

Anleitung: Miß die Winkel der Kreisausschnitte in Abbildung 43 beziehungsweise die Länge der Teilstreifen in Abbildung 44 und berechne dann die Prozentsätze!

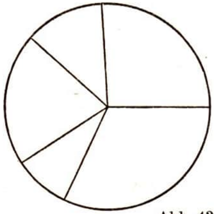


Abb. 43

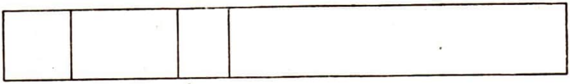


Abb. 44

37. Das Berechnen von Grundwerten

Aus Prozentwert und Prozentsatz können wir den Grundwert ebenfalls mit Hilfe der Grundbeziehung $w : g = p : 100$ berechnen, wenn wir diese nach g auflösen. Vorher wollen wir auch hierbei stets das Ergebnis im Kopf überschlagen. Dazu überlegen wir uns, daß der Grundwert stets 100% entspricht. Ein Vergleich mit dem gegebenen Prozentsatz p ermöglicht dann den Überschlag. Auch hierbei können uns einfache Bruchteile vom Grundwert oft die Arbeit erleichtern.

1. Beispiel: Einer Zeitungsnotiz entnehmen wir, daß eine Konsumverkaufsstelle im Monat November ihren Umsatzplan um 3660 DM übererfüllte. Das waren 15% des geplanten Umsatzes in diesem Monat. (Als Umsatz bezeichnet man die gesamten Einnahmen für die verkauften Waren.) Wie hoch war der geplante Umsatz?

Überschlag: 100% ist rund siebenmal so groß wie 15%. Also wird der Grundwert rund $7 \cdot 3000 = 21000$ sein.

Lösung:

$$w : g = p : 100 \qquad w = 3660;\; p = 15$$
$$3660 : g = 15 : 100$$
$$15 \cdot g = 3660 \cdot 100$$
$$g = \frac{366000}{15}$$
$$g = 24400$$

Ergebnis: Der geplante Umsatz betrug 24400 DM.

2. Beispiel: Die Zahl 8840 soll 104% eines Grundwertes darstellen. Wie groß ist der Grundwert?

Überschlag: 104% ist etwas mehr als der Grundwert. Dieser wird also wenig unter 8800 liegen.

Lösung:
$$\begin{aligned} w : g &= p : 100 \qquad w = 8840;\ p = 104 \\ 8840 : g &= 104 : 100 \\ 104 \cdot g &= 8840 \cdot 100 \\ g &= \frac{884000}{104} \\ g &= 8500 \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Grundwert ist 8500.

Aufgaben

Soweit möglich, sind die Aufgaben im Kopf oder halbschriftlich zu lösen.

1. Welche Zahl entspricht 100%?

a) 1% ≙ 5 (17, 124, 208) **b)** 1% ≙ $\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{5}$, $1\frac{1}{4}$, $5\frac{3}{4}$)

c) 1% ≙ 3,5 (2,05, 0,72, 0,015, 27,38, 8,375, 9,5425)

Gib in den folgenden Aufgaben den Grundwert an!

2. a) 2% ≙ 16 DM **b)** 3% ≙ 27 DM **c)** 8% ≙ 240 DM

3. a) $\frac{1}{2}$% ≙ 0,50 DM **b)** $\frac{5}{6}$% ≙ 45 kg **c)** $\frac{3}{4}$% ≙ 1,20 DM

d) $\frac{4}{5}$% ≙ 36 kg **e)** $1\frac{1}{2}$% ≙ 7,5 l **f)** $\frac{3}{8}$% ≙ 12 kg

4. a) 50% ≙ 150 DM **b)** 25% ≙ 105 DM **c)** $12\frac{1}{2}$% ≙ 3,50 DM

d) $33\frac{1}{3}$% ≙ 55 ha **e)** $16\frac{2}{3}$% ≙ 4,5 ha **f)** 300% ≙ 270 hl

5. a) Zeichne auf Millimeterpapier ein Diagramm nach dem Muster von Abbildung 42 für den Prozentsatz 30 und gib an, wie man zum Beispiel zu dem Prozentwert 27 den Grundwert findet!

b) Lies die Grundwerte zu den folgenden Prozentwerten aus der Zeichnung ab: 6 DM, 21 DM, 16,50 DM, 7,80 DM, 28,50 DM!

6. Berechne den Grundwert!

a) $7\frac{1}{2}$% ≙ 37,5 kg **b)** $3\frac{1}{3}$% ≙ 850 kg **c)** $1\frac{1}{4}$% ≙ 5312 t

d) $5\frac{1}{2}$% ≙ 434,5 t **e)** 75% ≙ 0,6 t **f)** 87,5% ≙ 630 l

g) 7,3 % ≙ 32,12 dz **h)** 8,5% ≙ 51,51 dz **i)** 6,4% ≙ 468,63 m³

7. Die Zahl der Studentinnen (Direktstudium) an den Universitäten und Hochschulen der DDR betrug:

1951 6510, das sind 23,4% der Studierenden,
1957 20550, das sind 31% der Studierenden.

Berechne die Zahl der Studierenden in den beiden Jahren!

8. Eine Frau berichtet, daß sie im Konsum 38,10 DM als Rückvergütung erhielt. Ihre Konsumgenossenschaft zahlte $1\frac{1}{2}$ % des Umsatzes. Für wieviel DM hatte die Frau im Konsum eingekauft?

9. 1956 fielen in Dresden 717 mm Niederschläge.
   a) Wieviel Liter je Quadratmeter sind das?
   b) Im Vergleich zum Jahresdurchschnitt der Jahre 1891 bis 1930 waren das 120%. Wie hoch sind die jährlichen durchschnittlichen Niederschläge in Dresden?
   c) Für andere Orte lauten die entsprechenden Zahlen: Warnemünde 570 mm (108%), Potsdam 722 mm (123%), Cottbus 674 mm (114%), Brocken 1578 mm (94%), Jena 843 mm (148%), Geisingberg 822 mm (88%), Leipzig 763 mm (137%).

10. Messing besteht aus Kupfer und Zink. Man hat 195 kg Kupfer zur Verfügung und will eine Legierung herstellen, die 65% Kupfer enthält.
   a) Wieviel Kilogramm Messing können hergestellt werden?
   b) Wieviel Kilogramm Zink werden dazu benötigt?

11. In einer Zeitung wurde berichtet, daß in einer Braunkohlengrube an einem Tage 1020 t Rohbraunkohle über den Plan hinaus gefördert wurden. Das waren rund 7% der geplanten Menge.
   a) Wie groß war diese?
   b) Verteile die überplanmäßige Menge auf 15 t-Wagen!

38. Vermehrter oder verminderter Grundwert

1. Beispiel: Die Jahresproduktion an Roheisen betrug 1950 in der DDR 337200 t. Sie konnte bis 1957 um 390% gesteigert werden. Wie groß war die Produktion im Jahre 1957?

Überschlag: Eine Steigerung um rund 400% bedeutet, daß die Produktion um das 4fache von rund 300000 t, also um 1200000 t zunahm. Sie betrug also 1957 rund 1200000 t + 300000 t = 1500000 t.

Lösung: Wenn wir den Prozentwert berechnen, so ergibt sich:

$$w : g = p : 100 \qquad g = 337200;\ p = 390$$

$$w : 337200 = 390 : 100$$

$$100\,w = 337200 \cdot 390$$

$$w = \frac{337200 \cdot 390}{100}$$

$$w = 1315080$$

In der Aufgabe ist aber nicht nach dieser Zunahme, sondern nach der gesamten Produktion im Jahre 1957 gefragt:

$$337\,200 + 1\,315\,080 = 1\,652\,280.$$

Ergebnis: Die Produktion an Roheisen betrug im Jahre 1957 rund 1650000 t.

Zu diesem Ergebnis können wir auf kürzerem Wege gelangen, wenn wir bedenken, daß die Produktion im Jahre 1957 aus dem Grundwert und der prozentualen Steigerung besteht: $100\,\% + 390\,\% = 490\,\%$

$$w : g = p : 100 \qquad g = 337\,200;\ p = 490$$

$$w : 337\,200 = 490 : 100$$

$$100 \cdot w = 490 \cdot 337\,200$$

$$w \approx 1\,650\,000$$

Ergebnis: Die Produktion betrug 1957 rund 1650000 t.

Wir müssen künftig genau darauf achten, ob in einer Aufgabe von einer Zu- oder Abnahme um eine gewisse Größe oder auf eine gewisse Größe die Rede ist.

2. Beispiel: Das im Bau befindliche Großkraftwerk Lübbenau wird nach der Fertigstellung eine Leistung von 1300 Megawatt haben. Das sind rund 1350% mehr, als das Kraftwerk Hirschfelde liefert. Wie groß ist dessen Leistung?

Lösung: Die Leistung von Hirschfelde entspricht 100%. Die Megawattzahl g dieses Grundwertes ist unbekannt. Die Leistung von Lübbenau beträgt 1350% mehr. Insgesamt liefert also Lübbenau $100\,\% + 1350\,\% = 1450\,\%$ der unbekannten Leistung g, die Hirschfelde besitzt.

Überschlag: Die Leistung von Hirschfelde ist etwas weniger als $\frac{1}{13}$ der Leistung von Lübbenau, also nicht ganz 100 Megawatt.

Lösung:

$$w : g = p : 100 \qquad w = 1300;\ p = 1450$$

$$1300 : g = 1450 : 100$$

$$1450 \cdot g = 1300 \cdot 100$$

$$g \approx 90$$

Ergebnis: Die Leistung von Hirschfelde beträgt rund 90 MW.

3. Beispiel: Im Schaufenster einer HO-Verkaufsstelle befindet sich an einem Paar Halbschuhen folgendes Preisschild: „Um 18% preisgesenkt; neuer Preis 37,30 DM.“ Berechne den früheren Preis!

Der frühere Preis ist der Bezugswert für die Prozente, also der Grundwert ($g \mathrel{\widehat{=}} 100\,\%$). Der jetzige, um 18% erniedrigte Preis, entspricht demnach $100\,\% - 18\,\% = 82\,\%$. Das ist die Prozentzahl, mit der wir rechnen müssen.

Überschlag: 100% sind rund $\frac{1}{4}$ mehr als 80%, also wird der ursprüngliche Verkaufspreis um rund $\frac{1}{4}$ höher sein als der jetzige, nämlich rund 36 DM + 9 DM = 45 DM.

Lösung: $w : g = p : 100 \qquad w = 37{,}30;\ p = 82$

$$37{,}30 : g = 82 : 100$$
$$82 \cdot g = 37{,}30 \cdot 100$$
$$g \approx 45{,}50$$

Ergebnis: Vor der Preissenkung kosteten die Schuhe 45,50 DM.

4. Beispiel: In einem Betrieb konnten die Selbstkosten für jedes Produktionsstück um 8% auf 26,68 DM gesenkt werden. Wieviel DM werden dadurch an jedem Stück eingespart?

Lösung: Diesmal ist nicht nach dem Grundwert gefragt, sondern nach dem Prozentwert w. Wir können aber dabei die Grundbeziehung $w : g = p : 100$ nicht ohne weiteres verwenden, da wir den Grundwert g nicht kennen, sondern den um die Einsparung erniedrigten Wert 26,68 DM. Dieser entspricht aber nicht 100%, sondern 100% − 8% = 92%. Wir müssen also diesmal eine etwas abgeänderte Proportion ansetzen.

Lösung: $w : 26{,}68 = 8 : 92$

$$92 \cdot w = 26{,}68 \cdot 8$$
$$w = \frac{26{,}68 \cdot 8}{92}$$
$$w = 2{,}32$$

Ergebnis: Die Einsparung beträgt 2,32 DM je Produktionsstück.

Wir merken uns: In einzelnen Fällen kann es erforderlich werden, an Stelle der Grundbeziehung $w : g = p : 100$ eine andere Proportion zu setzen.

Aufgaben

1. In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt der Winkel an der Spitze 50% vom Basiswinkel.

a) Wieviel Prozent vom Winkel an der Spitze beträgt der Basiswinkel?

b) Wie groß sind die drei Winkel?

2. Müllers Garten ist 300 m² groß und damit 25% größer als Schulzes Garten. Wie groß ist dieser?

3. Eine Schule wird von 660 einheimischen Schülern besucht. Der Rest (12% der gesamten Schülerzahl) kommt von auswärts.

4. Die Verpackung einer Ware beträgt 6% vom Bruttogewicht. Das Nettogewicht ist 75,2 kg. Wieviel wiegt die ganze Sendung?

5. Bei einer Preissenkung wurde der Preis des Belichtungsmessers Fotolux um 20 % auf 45,70 DM gesenkt. Wieviel DM betrug die Senkung?

6. Beim Mahlen von Weizen gehen 30% für Kleie und Schwund ab. Wieviel Weizen muß für 1 dz Mehl gemahlen werden?

Aus der sozialistischen Industrie

7. Wieviel Stück beträgt die Gesamtproduktion, wenn durch eine Mehrproduktion von 220 Stück das Soll mit 105% erfüllt wird?

8. Flüssiges Metall verringert beim Erstarren sein Volumen. Bei Stahlguß ist das Schwindmaß 6%. Welches Volumen hatte demnach das flüssige Metall, das in erstarrtem Zustand ein Stahlgußstück von 9,670 dm^3 Volumen ergab?

9. Zum Gießen von Metallteilen sind Gußformen erforderlich. Um sie herzustellen, fertigt der Tischler Modelle an. Sie müssen größer als das fertige Metallteil sein, weil das Gußstück beim Abkühlen schwindet. 65 mm lange Stäbe aus Aluminium sind zu gießen; das Längenschwindmaß beträgt 1,8%. Wie lang muß die Gußform sein?

10. Für das Gießen von Bronzebuchsen soll eine Gußform angefertigt werden. Berechne die Länge der Gußform, wenn die Buchse 130 mm lang werden soll und das Längenschwindmaß bei Bronze 1,6% beträgt!

11. Bei einem Hochofen beträgt die Ausbeute 38% des Eisenerzes. Der tägliche Ausstoß wird mit 675 t Roheisen angegeben. Wieviel Tonnen Schlacke fallen dabei an?

12. Durch Anwenden des Schnelldrehverfahrens verbessert ein Dreher seine Leistung um 32% und braucht nun nur noch 50 Sekunden. Wieviel Zeit spart er bei jedem Werkstück ein?

39. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Flug in den Weltraum

1. Rechne die Geschwindigkeit von Sputnik I $\left(\text{rund } 8\,\frac{\text{km}}{\text{Sek.}}\right)$ in $\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$ um und fertige ein Streckendiagramm für die folgenden Geschwindigkeiten an (einschl. Sputnik I)!

Moped	$45\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$	Prop.-Verkehrsflugzeug	$600\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$
Pkw auf Autobahn	$100\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$	Düsenverkehrsflugzeug	$900\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$
Schnellzug	$90\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$	Schall in Luft	$1192\,\frac{\text{km}}{\text{Std.}}$

2. Wie groß ist die prozentuale Zunahme (Abnahme) der Masse im Vergleich zum 1. künstlichen Erdsatelliten?

Datum	Name	astronom. Bezeichnung	Land	Masse
4. 10. 57	Sputnik I	1957 α_2	UdSSR	86 kg
3. 11. 57	Sputnik II (m. d. Hündin Laika)	1957 β	UdSSR	508,3 kg
1. 2. 58	Explorer I	1958 α	USA	13,4 kg
13. 3. 58	Explorer II	1958 β_2	USA	1,5 kg
26. 3. 58	Explorer III	1958 γ	USA	14 kg
15. 5. 58	Sputnik III	1958 δ_2	UdSSR	1327 kg
26. 7. 58	Explorer IV	1958 ε	USA	17,7 kg
2. 1. 59	XXI. Parteitag (Erster künstlicher Planet unseres Sonnensystems)	1959 α	UdSSR	1472 kg

3. Sputnik II benötigte für einen Umlauf um die Erde 102 Minuten. Der Satellit hatte eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $8\,\frac{\text{km}}{\text{Sek.}}$. Wieviel Prozent der Entfernung Erde—Mond (rund 384000 km) beträgt die Strecke, die von ihm bei einem Umlauf zurückgelegt wurde?

4. In der Nacht vom 3. zum 4. Januar 1959 verfolgten viele Menschen die Meldungen über die Begegnung der Weltraumrakete mit dem Mond. Um 19.00 Uhr MEZ hatte sie 284000 km der rund 370000 km (die Mondentfernung ist nicht konstant) zurückgelegt. Wieviel Prozent der Entfernung betrug der noch verbleibende Streckenabschnitt?

5. Wieviel Prozent der Entfernung bis zum Mond (384000 km) erreichten die gescheiterten amerikanischen Mondraketen des Jahres 1958?

   (1. Rakete 18. 8. 58 kurz nach dem Start explodiert)

2. Rakete	11. 10. 58	128000 km
3. Rakete	8. 11. 58	1600 km
Juno	6. 12. 58	102000 km

Aus der Textilindustrie

6. Für die Herstellung von Socken wird ein Mischgarn verwendet, das Perlon und Baumwolle im Verhältnis 4 : 21 enthält. Wieviel Gramm Perlon sind in einer Spule (Cope) mit einem Gewicht von 60 g enthalten? Gib auch die prozentuale Zusammensetzung an!

7. Bei einer Auslastung von 88% verarbeitet eine Karde-Maschine 4,3 kg Baumwolle in 1 Std. Wieviel Kilogramm würden bei voller Auslastung in 8 Std. verarbeitet werden?

8. Ein Arbeiter bedient nach der Norm 16 Karde-Maschinen. Da ein Kollege erkrankte, übernahm er zusätzlich drei weitere Maschinen, um keine Stillstandszeit für die Maschinen eintreten zu lassen.
   a) Wieviel Prozent betrug seine Normerfüllung?
   b) Auf wieviel DM wurde sein Stundenlohn berechnet, wenn er bei einer Arbeitsleistung von 100% 1,33 DM Stundenlohn erhält?

9. Früher wurden von einer Spinnerin 2 Maschinen mit je 412 Spindeln bedient. Durch die Anwendung von Neuerermethoden konnten die Maschinen weitgehend verbessert werden (Fadenabsaugung beim Reißen des Fadens), so daß eine Facharbeiterin jetzt ohne Mehrbelastung 206 Spindeln zusätzlich bedienen kann. Berechne die prozentuale Steigerung der Arbeitsproduktivität!

10. Eine Spindel fertigt in einer Minute 10,2 m Garn.
    a) Berechne, wie lang das Garn ist, das eine Spinnerin in einer Schicht (8 Std.) mit den in Aufgabe 9 aufgeführten Spindeln produziert!
    b) Suche auf dem Atlas 2 Städte, die etwa diese Entfernung voneinander aufweisen!

11. Die Rohbaumwolle wird aus der UdSSR in Ballen zu etwa 180 kg geliefert.
    a) Wieviel Kilogramm Garn kann aus einem Ballen produziert werden, wenn mit einem Abfall von 6% gerechnet werden muß?
    b) Wie lang wird der Faden, wenn man das Garn in einer Stärke verspinnt, in der 60 m das Gewicht von 1 g haben? (Die Garnstärke wird durch die Länge des Fadens je Gramm angegeben.)

Aus der sozialistischen Landwirtschaft

12. Die Milchmenge, die ein landwirtschaftlicher Betrieb abzuliefern hat, gilt für Milch mit einem normalen Fettgehalt von 3,5%. Liefert ein Betrieb Milch mit einem anderen Fettgehalt ab, so wird die Milchmenge auf 3,5% Fettgehalt umgerechnet.
    a) Wieviel Kilogramm Milch werden einer LPG angerechnet, die 480 kg Milch mit einem Fettgehalt von 4,0% abgeliefert hat?
    b) Eine andere LPG lieferte 560 kg Milch mit einem Fettgehalt von 3,8% ab. Wieviel Kilogramm Milch werden ihr angerechnet?
    c) Mit wieviel Kilogramm werden 600 kg Milch bei einem Fettgehalt von 3,1% (4,1%) Fettgehalt angerechnet?

13. Einer Molkerei wurden von mehreren landwirtschaftlichen Produktionsgenossenschaften folgende Milchmengen angeliefert:
315 kg (Fettgehalt 3,5%), 616 kg (Fettgehalt 3,6%),
208 kg (Fettgehalt 3,4%), 412 kg (Fettgehalt 3,8%),
535 kg (Fettgehalt 4,1%).
Rechne die angelieferten Milchmengen auf 3,5% Fettgehalt um!

14. Bei der Butterherstellung rechnet man (bei Milch mit normalem Fettgehalt) mit einer Buttermenge von 4% des Milchgewichts. Ein Bauer liefert 71,5 kg Milch mit normalem Fettgehalt ab. Wieviel Kilogramm Butter kann man aus dieser Milchmenge gewinnen?

15. Roggen ergibt durchschnittlich 85% Mehl und 13% Kleie. Wieviel von beidem erhält man von einem Hektar Anbaufläche bei einem Ertrag von 22 dz/ha?

16. Ein Genossenschaftsbauer hat als Entlohnung für die verrichtete Arbeit unter anderem Weizen erhalten. Er will 50 kg 70prozentiges Weizenmehl ausmahlen lassen (das heißt, die Mehlmenge beträgt 70% der Getreidemenge). Wieviel Kilogramm Weizen muß er zur Mühle bringen?

17. Durch Räuchern verändert sich das Gewicht von 12 kg Frischfleisch auf 10,8 kg. Wieviel Prozent beträgt die Gewichtsverringerung?

18. Sämtliche Bauern des Dorfes Trinwillershagen (Kreis Ribnitz-Damgarten) schlossen sich am 1. Mai 1953 zu einer LPG zusammen. Die Bauern des Nachbardorfes Wiepkenhagen wirtschafteten im Jahre 1957 noch als Einzelbauern. In der folgenden Übersicht werden durchschnittliche Hektarerträge des Jahres 1957 bei LPG und Einzelbauern miteinander verglichen.

Anbaukultur	Ernteertrag in dz/ha	
	LPG	Einzelbauern
Getreide	34	32
Zuckerrüben	369	325
Kartoffeln	260	240

a) Um wieviel Doppelzentner liegt bei den einzelnen Produkten der von der LPG erzielte Ertrag über dem Ertrag, den die Einzelbauern erzielten? Wieviel Prozent sind das?

b) Stelle die Hektarerträge der LPG und die der Einzelbauern in einem Streifendiagramm einander gegenüber!

19. Die Hektarerträge konnten 1957 im Vergleich zu 1936 auf folgenden Stand verbessert werden:

	Getreide	Kartoffeln	Zuckerrüben
1936	20,6 dz/ha	173 dz/ha	291 dz/ha
1957	23,3 dz/ha	179,3 dz/ha	295,2 dz/ha

a) Berechne 1., um wieviel Prozent, 2., auf wieviel Prozent der jeweiligen Produktion von 1936 die Hektarerträge gesteigert wurden!

b) Stelle die Ergebnisse grafisch dar!

20. Zur Unkrautbekämpfung werden $2\frac{1}{2}$ kg eines Unkrautvernichtungsmittels in 200 l Wasser aufgelöst. Wievielprozentig ist die Lösung? Beachte: Grundwert ist das Gewicht der Lösung, das sich aus dem Gewicht des Wassers und der gelösten Chemikalien zusammensetzt.

21. Um nachzuweisen, daß eine tiefe Bodenbearbeitung den Ertrag steigert, wurden auf einem Versuchsfeld 3 Flächen von je 4 m² verschieden tief bearbeitet.
Ergebnis in kg:

Bearbeitungstiefe	Sommerroggen	Ackerbohnen	Möhren	Kartoffeln	Rüben
unbearbeitet	0,990	0,810	5,600	7,960	8,940
18 cm tief gepflügt	1,145	1,250	9,600	11,840	14,500
36 cm tief gepflügt	1,220	1,340	12,440	13,910	16,840

a) Welchem Ernteergebnis in dz/ha entsprachen die Ergebnisse?

b) Wieviel Prozent Mehrertrag wurden in jedem Fall durch die tiefere Bodenbearbeitung erzielt?

22. Ein Traktorist hackt mit seinem Vielfachgerät Kartoffeln. Dabei schafft er in einer Schicht 6,09 ha und verbraucht 5,9 l Treibstoff je Hektar. Die vorgesehene Leistungsnorm beträgt 5,85 ha je Schicht bei einem Treibstoffverbrauch von 6,3 l/ha.

a) Mit wieviel Prozent erfüllte der Traktorist seine Norm in bezug auf die bearbeitete Fläche?

b) Wieviel Liter Treibstoff sparte er beim Hacken von 6,09 ha ein?

23. Auf einer Grünfutterfläche wird ein Gemisch von 30% Rotklee, 20% Weißklee, 5% Schwedenklee und 45% Weidelgras ausgesät.

a) Für 1 ha benötigt man zur Aussaat 21 kg dieses Gemisches. Wieviel Kilogramm jeder Sorte muß man also nehmen?

b) Welche Mengen der einzelnen Sorten braucht man für ein $13\frac{1}{2}$ ha großes Feld?

24. Beim Mähdrescher S 4 werden die Körner in einem auf der Maschine angebrachten Behälter von 1,7 m^3 Fassungsraum gesammelt.
Wieviel Doppelzentner faßt der Bunker
a) bei Weizen mit 76,5 kg/hl, **b)** bei Gerste mit 60 kg/hl,
c) bei Roggen mit 72 kg/hl, **d)** bei Hafer mit 46 kg/hl?

25. Das Maiskorn ist ein wertvolles Futtermittel. Mais liefert im Durchschnitt 28 dz/ha Körner mit 8,7% Eiweiß und 81,6% Stärkeeinheiten, Hafer nur 24 dz/ha Körner mit 7,2% Eiweiß und 59,7% Stärkeeinheiten. Um wieviel Prozent liegen Körnermenge, Eiweißmenge und Stärkemenge je Hektar beim Mais höher als beim Hafer?

26. Kartoffeln verlieren beim Lagern in der Miete während des Winters 8% ihres Gewichts. Wieviel Doppelzentner kann man im Frühjahr entnehmen, wenn im Herbst 300 dz eingelagert wurden?

Aus der Metallurgie

27. Bronze ist eine Legierung von Kupfer und Zinn. Wieviel Kilogramm Kupfer und wieviel Kilogramm Zinn werden für die Herstellung der folgenden Bronzemengen benötigt?

Bronzemenge	Kupferanteil	Zinnanteil
180 kg	80%	20%
350 kg	94%	6%
240 kg	87%	13%
710 kg	91%	9%
450 kg	90%	10%

28. Messing ist eine Legierung von Kupfer und Zink und geringen Zusätzen anderer Metalle (zum Beispiel Eisen und Blei). Wieviel Kilogramm Kupfer und wieviel Kilogramm Zink werden für die Herstellung der folgenden Messingmengen benötigt?

Messingmenge	Kupferanteil	Zinkanteil
40 kg	54 %	41 %
60 kg	59,5%	38,5%
150 kg	62 %	35,5%
84 kg	65 %	31 %
120 kg	69,5%	29,5%
225 kg	73 %	26 %

29. Rotguß Rg 4 enthält 93% Kupfer, 4% Zinn, 2% Zink, 1% Blei. Wieviel Kilogramm von jedem dieser vier Metalle enthält ein Rohrflansch aus Rotguß Rg 4 von 23 kg Gewicht?

30. Das reichste Eisenerz (Magneteisenstein) enthält etwa 70% Eisen. Wieviel Erz wird zur Produktion von 3600 t Roheisen gebraucht?

31. Ein Goldschmied will aus 5 g Feingold eine Legierung mit einem Feingoldgehalt von $33\frac{1}{3}$% herstellen. Wieviel Gramm Legierung erhält er?

32. Ein Kilogrammstück hat am Nordpol ein Gewicht von 1,002 kp, am Äquator ein Gewicht von 0,997 kp. Auf dem Mond hätte es ein Gewicht von etwa 0,169 kp. Um wieviel Prozent weichen die Gewichte von einem Kilopond ab?

33. Lötzinn wird aus Zinn und Blei hergestellt. Es werden 15 kg Lötzinn mit einem Gehalt von 43% Zinn gebraucht. Wieviel Kilogramm Zinn und wieviel Kilogramm Blei muß man miteinander einschmelzen?

34. Wieviel Tonnen Kupfer können aus einer Ladung von 64 t Kupfererz gewonnen werden, wenn die Ausbeute etwa 1,5% beträgt?

35. Wieviel Tonnen Roheisen können aus 1200 t Eisenerz gewonnen werden, wenn dieses 45% Eisen enthält?

36. Der Rohling einer Welle wiegt 67,0 kg. Nach der Bearbeitung auf der Drehmaschine wiegt die fertige Welle noch 61,5 kg. Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

Aus dem Verkehrswesen

37. Bei Ferienreisen in FDGB-Ferienheime gewährt die Deutsche Reichsbahn eine Fahrpreisermäßigung von $33\frac{1}{3}$%. Eil- und D-Zugzuschläge werden in voller Höhe erhoben. Wieviel DM beträgt die Ermäßigung, wenn der volle Fahrpreis ohne Zuschlag **a)** 16,50 DM, **b)** 21,90 DM, **c)** 18,60 DM, **d)** 27,00 DM, **e)** 48,60 DM beträgt?

38. Für Arbeiterrückfahrkarten gewährt die Deutsche Reichsbahn (außer für Eil- und D-Zugzuschläge) eine Ermäßigung von 75%. Der Fahrpreis 2. Klasse ist 0,08 DM je Kilometer; der Eilzugzuschlag beträgt bei Entfernungen bis 300 km 1,50 DM, der D-Zugzuschlag für dieselben Entfernungen 3,00 DM.

Wieviel DM kostet eine Arbeiterrückfahrkarte 2. Klasse **a)** für Personenzug, **b)** für Eilzug, **c)** für D-Zug bei folgenden Entfernungen: 85 km, 160 km, 220 km, 285 km? Wieviel Prozent beträgt die Fahrpreisermäßigung bei Berücksichtigung des Zuschlags?

39. Eine FDJ-Gruppe von 20 Jugendlichen fährt von Dresden Hbf. nach Schmilka-Hirschmühle (46,9 km). Sie zahlt 50% des Fahrpreises 2. Klasse. (Auf volle Zehnpfennige runden!)

40. Viele Kraftfahrer in volkseigenen Betrieben haben sich verpflichtet, besonders schonend mit den ihnen anvertrauten Kraftfahrzeugen umzugehen. Sie sind in der „100000-Kilometer-Bewegung“ zusammengeschlossen.

a) Ein Kraftfahrer fuhr mit einem neuen Lastwagen 135000 km, bevor eine Generalüberholung notwendig wurde. Die Norm lag bei 80000 km. Um wieviel Prozent wurde diese überboten?

b) Ein anderer Kraftfahrer erreichte bis zur ersten Generalüberholung 128000 km. Die Norm für seinen Kraftwagen betrug 75000 km. Vergleiche diese Leistung mit der Leistung des Kraftfahrers in Aufgabe a)!

41. Der Kraftstoffverbrauch eines Lufttaxis der Deutschen Lufthansa vom Typ Super Aero 45 hängt von der Reisegeschwindigkeit ab. Bei einer Geschwindigkeit von $235 \frac{\text{km}}{\text{Std.}}$ beträgt er 20,5 l für 100 km. Beim sogenannten Sparflug $\left(\text{Geschwindigkeit } 180 \frac{\text{km}}{\text{Std.}}\right)$ beträgt er 18,5 l für 100 km.

a) Um wieviel Prozent ist der Kraftstoffverbrauch beim Sparflug niedriger?

b) Wie weit kann das Flugzeug mit einem Vorrat von 310 l Kraftstoff (voller Tank) bei den beiden Geschwindigkeiten fliegen?

c) Um wieviel Prozent ist die Flugstrecke beim Sparflug größer?

X. Zinsrechnung

40. Der Begriff „Zinsen“ und die Berechnung der Zinsen für 1 Jahr

Viele Menschen sparen bei der Sparkasse. Unser Staat verwendet das Geld zum Aufbau von Industriebetrieben, Schulen, Wohnungen und anderen Bauvorhaben.

Jeder Sparer erhält für jedes Jahr Sparzeit als Vergütung einen bestimmten Teil vom Sparbetrag, der in Prozenten angegeben wird. Diese Vergütung nennt man **Zinsen**. Die Höhe des Zinssatzes richtet sich unter anderem danach, ob der Sparer täglich sein Geld abheben kann (tägliche Kündigung), oder ob er es von vornherein der Sparkasse für eine längere Zeit überläßt.

Wir berechnen die Zinsen zunächst für 1 Jahr Sparzeit.

Beispiel: Auf einem Sparbuch sind 350 DM eingetragen, die der Sparer der Sparkasse für 1 Jahr überläßt. Der Betrag wird mit 4% verzinst. Wieviel DM Zinsen werden nach 1 Jahr gezahlt?

Lösung: Wir berechnen 4% von 350 DM: $350 \cdot 0{,}04 = 14$

Ergebnis: Nach 1 Jahr werden 14 DM Zinsen gezahlt.

Wir erkennen: Die Zinsen für 1 Jahr entsprechen dem Prozentwert. Deshalb können die Zinsen für 1 Jahr auch mit Hilfe der Grundbeziehung der Prozentrechnung $w : g = p : 100$ berechnet werden.

In der Zinsrechnung wollen wir folgende Fachausdrücke und Kurzzeichen verwenden:

Prozentrechnung		Zinsrechnung	
Begriff	Abkürzung	Begriff	Abkürzung
Grundwert	g	Grundbetrag	g
Prozentwert	w	Zinsen	z
Prozentsatz	p	Zinssatz	p

Infolgedessen lautet die Grundbeziehung für die Berechnung der Zinsen für 1 Jahr

$$\boldsymbol{z : g = p : 100.}$$

Bei feststehendem Zinssatz p ist $z : g$ ein konstantes Verhältnis. Die Zinsen sind also in diesem Fall proportional zum Grundbetrag; $\frac{p}{100}$ ist der Proportionalitätsfaktor.

Zusammenfassung:

1. **Zinsen sind Vergütungen für gespartes Geld. Sie werden prozentual von der Sparsumme (Grundbetrag) berechnet. Der Prozentsatz heißt Zinssatz.**

2. **Zinsen werden für 1 Jahr nach der Beziehung $z : g = p : 100$ berechnet.**

3. **Bei gegebenem Zinssatz sind die Zinsen proportional zum Grundbetrag; der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{p}{100}$.**

Aufgaben

1. Die folgenden Grundbeträge sollen mit 3% $\left(3\frac{1}{2}\,\%\right)$ verzinst werden. Berechne die Zinsen für 1 Jahr im Kopf!

a) 100 DM	b) 400 DM	c) 500 DM	d) 900 DM	e) 1000 DM
f) 2000 DM	g) 6000 DM	h) 8000 DM	i) 250 DM	k) 1550 DM

2. Die folgenden Grundbeträge sollen mit 4% verzinst werden. Berechne die Zinsen für 1 Jahr!

a) 378 DM	b) 514 DM	c) 933 DM	d) 428 DM	e) 1360 DM
f) 6427 DM	g) 673 DM	h) 4926 DM	i) 36500 DM	k) 2369 DM

3. Zu Beginn des Jahres ist in einem Sparbuch ein Guthaben von 390 DM eingetragen. Während des Jahres werden keine weiteren Eintragungen vorgenommen. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des Jahres nach Gutschrift der Zinsen zu 3%?

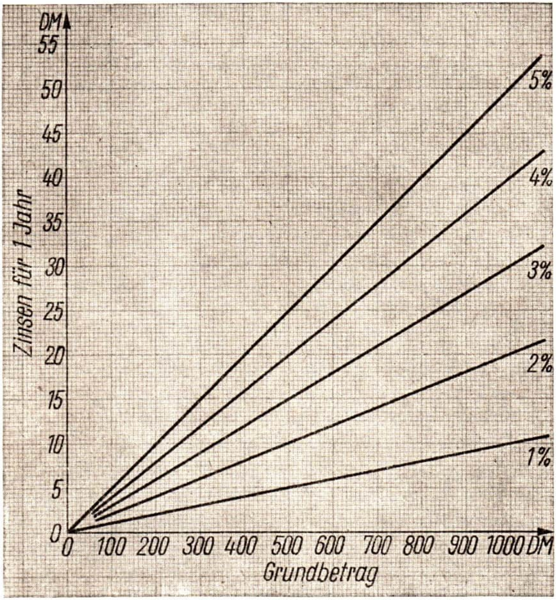


Abb. 45

4. Zeichne ein Diagramm nach Abbildung 45 auf Millimeterpapier! Lies die Zinsen für 1 Jahr aus dem gezeichneten Diagramm ab!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Grundbetrag in DM...	400	500	900	700	950	650
Zinssatz	1	2	4	3	5	2

5. Ein Arbeiter hat 750 DM gespart. Wieviel DM Zinsen trägt dieser Sparbetrag **a)** bei 3%, **b)** bei 4% Verzinsung?

6. Wieviel DM Zinsen werden bei 4% im Jahr für 545 DM gezahlt?

7. Ein Sparbetrag von 164 DM wird 1 Jahr lang zu 4% verzinst. Wie hoch sind die Zinsen?

41. Das Berechnen der Zinsen für mehrere Jahre und für Teile eines Jahres

Einen großen Teil der Spareinlagen stellen die Sparkassen und Banken als Darlehen für den Aufbau der Wirtschaft zur Verfügung. Wer von einer Bank Geld leiht, muß für jedes Jahr Leihzeit eine Entschädigung zahlen, die man ebenfalls als Zinsen bezeichnet. Meist wird solches Geld nicht für genau 1 Jahr entliehen, sondern für längere oder kürzere Zeit.

1. Beispiel: Eine LPG hat sich für den Neubau einer Scheune von der Deutschen Bauernbank 12000 DM geliehen. Der Betrag ist mit 5% zu verzinsen. Nach 5 Jahren kann die LPG das Darlehen zurückzahlen. Wieviel DM Zinsen hat sie in den 5 Jahren insgesamt bezahlt?

Lösung: Für das erste Jahr betragen die Zinsen 5% von 12000 DM, also $\frac{5}{100} \cdot 12000$ DM $= 600$ DM.

In jedem folgenden Jahr ist wieder der gleiche Zinsbetrag zu zahlen, so daß also in 5 Jahren insgesamt $5 \cdot 600$ DM $= 3000$ DM Zinsen gezahlt werden mußten. Wir erkennen, daß die Zinssumme proportional zur Anzahl der Jahre ist, für die die Verzinsung erfolgt.

Da wir die Zinsen für 1 Jahr aus der Proportion $z : g = p : 100$ berechnen können zu $z = \frac{p}{100} \cdot g$, ergeben sich die Zinsen in t Jahren als $z = \frac{p}{100} \cdot g \cdot t$. Sie sind also proportional sowohl zum Grundbetrag g als auch zur Zahl der Zinsjahre t; der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{p}{100}$.

2. Beispiel: Ein Darlehen von 6000 DM wird für 75 Tage in Anspruch genommen. Wieviel Zinsen sind bei einem Zinssatz von 4% zu erbringen?

Lösung: Hier gelten dieselben Überlegungen wie beim 1. Beispiel. Die Zinsen für 1 Jahr betragen $\frac{4}{100} \cdot 6000$ DM $= 240$ DM. 75 Tage sind nur ein Bruchteil eines Jahres.

Bei der Berechnung dieser Bruchteile ist es üblich, 1 Jahr mit 360 Tagen und jeden Monat (unabhängig von seiner tatsächlichen Länge) mit 30 Tagen zu rechnen. Also sind 75 Tage $= \frac{75}{360}$ Jahr $= \frac{5}{24}$ Jahr. Die zu zahlenden Zinsen betragen also $\frac{5}{24} \cdot 240$ DM $= 50$ DM.

Zusammenfassung:

1. **Zinsen für mehrere Jahre werden aus den Zinsen für 1 Jahr durch Vervielfachung mit der Anzahl der Jahre berechnet.**
2. **Bei feststehendem Zinssatz sind die Zinsen proportional zum Grundbetrag und zur Anzahl der Zinsjahre:** $z = \frac{p}{100} \cdot g \cdot t$.
3. **Zinsen für Bruchteile eines Jahres (Tage; Monate) werden als entsprechender Bruchteil der Zinsen für 1 Jahr berechnet, wobei 1 Jahr = 360 Tage und 1 Monat = 30 Tage (unabhängig von der tatsächlichen Länge) gesetzt werden.**

Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben wird vorausgesetzt, daß die Zinsen immer am Jahresende ausgezahlt werden.

1. Berechne die Zinsen im Kopf!

	Grundbetrag in DM	Zinssatz	Zeit in Jahren		Grundbetrag in DM	Zinssatz	Zeit in Jahren
a)	3000	4	3	**c)**	8000	3	6
b)	2000	5	5	**d)**	5000	5	4

2. Berechne die Zinsen für die angegebene Zeit!

	Grundbetrag in DM	Zinssatz	Zeit in Jahren		Grundbetrag in DM	Zinssatz	Zeit in Jahren
a)	400	$3\frac{1}{2}$	4	**d)**	5300	$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
b)	16000	$3\frac{3}{4}$	4	**e)**	6700	$3\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
c)	570	$3\frac{3}{4}$	5	**f)**	36000	$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

3. Ein Darlehen in Höhe von 2400 DM wird mit 5% verzinst. Wie hoch sind die in 5 Jahren gezahlten Zinsen?

4. Ein Arbeiter richtet sich ein Sparkonto ein. Die Beträge werden in diesem Fall mit 4% verzinst. Wieviel DM Zinsen werden in 3 Jahren für einen Betrag von 300 DM gezahlt?

5. Berechne die Zinsen!

	Grundbetrag in DM	Zinssatz	Zeit in Monaten		Grundbetrag in DM	Zinssatz	Zeit in Tagen
a)	2000	3	5	**d)**	4800	$3\frac{1}{2}$	35
b)	4500	4	11	**e)**	7000	4	57
c)	600	5	$3\frac{1}{2}$	**f)**	497	3	178

6. Am 15. Juli richtete sich ein Traktorist ein Aufbausparkonto ein. Der erste Sparbetrag betrug 230 DM. Wieviel DM Zinsen wurden für diesen Betrag bei 4% Zinsen am Jahresende gezahlt?

42. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Zeichne ein Diagramm für a) 3 % und b) $3\frac{1}{2}$% Jahreszinsen!

2. Eine Pionierfreundschaft erhält für die Abgabe von Schrott 475 DM. Dieser Betrag soll für die Anschaffung von Zelten verwendet werden und wird bei der Sparkasse eingezahlt, die ihn mit $3\frac{1}{2}$% für 189 Tage verzinst. Welcher Betrag steht für den Zeltkauf zur Verfügung?

3. Eine Produktionsgenossenschaft des Handwerks erhält von der Bank für Handwerk und Gewerbe zum Kauf neuer Maschinen ein Darlehen in Höhe von 15000 DM. Der Zinssatz beträgt 5%. Halbjährlich sind 2500 DM und jeweils die Zinsen für die noch nicht zurückgezahlte Geldsumme zu zahlen, das erstemal $\frac{1}{2}$ Jahr nach Erhalt des Darlehns. Entwirf einen übersichtlichen Zahlungsplan!

4. Ein Prämiensparer zahlte im Jahre 1958 regelmäßig monatlich 5 DM bei der Sparkasse ein. Bis zum 31. Dezember 1958 nahm er an der Prämienauslosung teil. Dafür wurde das Geld in den Jahren 1958 und 1959 nicht verzinst. Ab 1. Januar 1960 werden 4% Zinsen gezahlt.
   a) Wie hoch ist der Sparbetrag am 31. Dezember 1958?
   b) Wie hoch ist der Sparbetrag einschließlich Zinsen am 31. Dezember 1960?

5. Für den Ausbau eines Gehöftes wurde von einer LPG ein Darlehen in Höhe von 19000 DM aufgenommen. Es wurde mit 5% verzinst. Die Zinsen waren immer am Jahresende zu zahlen.
   a) Wieviel DM Zinsen wurden insgesamt in 2 Jahren gezahlt?
   b) Nach diesen 2 Jahren konnten außerdem 10000 DM zurückgegeben werden. Die restlichen 9000 DM werden mit den Zinsen im folgenden Jahr nach 7 Monaten zurückgezahlt. Wieviel DM waren das?
   c) Wieviel DM Zinsen wurden insgesamt für das Darlehen gezahlt?

6. Die Verschuldung der Landwirtschaft in Westdeutschland betrug 1948 2480 Mill. DM, 1956 aber 8170 Mill. DM.
   a) Auf wieviel Prozent wuchsen die Schulden in 8 Jahren?
   b) Wie hoch war die Zinslast 1948 und 1956, wenn durchschnittlich 5% Zinsen zu zahlen waren?

7. Die Sparkassen gewähren dem Sparer bei täglicher Verfügung 3% Zinsen, bei jährlicher Kündigung 4%. Stelle den proportionalen Zusammenhang zwischen Grundwert und jährlicher Zinssumme durch Prozentstrahlen (Zinsstrahlen) grafisch dar!

C. GEOMETRIE

XI. Bestimmungslinien

43. Aufgaben zur Wiederholung

1. Zeichne folgende Strecken und konstruiere die Mittelsenkrechten!
a) $AB = 4{,}6$ cm **b)** $AC = 6{,}5$ cm **c)** $CD = 7{,}2$ cm
d) $BC = 4{,}9$ cm

2. Zeichne folgende Strecken und konstruiere in den Endpunkten die Senkrechten auf jeder Strecke!
a) $AB = 5$ cm **b)** $CA = 6{,}5$ cm **c)** $AE = 5{,}4$ cm
d) $RS = 25$ mm

3. Zeichne folgende Winkel und konstruiere die Winkelhalbierenden!
a) $\alpha = 65°$ **b)** $\beta = 97°$ **c)** $\gamma = 116°$ **d)** $\delta = 178°$
Kontrolliere mit dem Winkelmesser!

4. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P außerhalb der Geraden! Fälle von P das Lot auf die Gerade g! Kontrolliere mit dem Zeichendreieck! Beschreibe, wie du vorgehst!

5. Zeichne eine Gerade g! Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Parallelen zu der Geraden g im Abstand von
a) 2 cm, **b)** 3,5 cm, **c)** 4,7 cm, **d)** 5 cm!

6. Teile eine gegebene Strecke AB in **a)** 2, **b)** 4, **c)** 8 gleiche Teile!

7. Konstruiere Winkel von **a)** 45°, **b)** 135°, **c)** 22,5°, **d)** 67,5°! Prüfe die Konstruktion mit dem Winkelmesser nach!

8. Zeichne ein beliebiges Dreieck EFG und konstruiere die drei Winkelhalbierenden! Kontrolliere mit dem Winkelmesser!

9. Zeichne ein beliebiges Dreieck DEF und konstruiere die Mittelsenkrechten der Dreieckseiten!

10. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und fälle von jedem Eckpunkt das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung!

11. Welche gemeinsame Eigenschaft haben die in den Aufgaben **8** bis **10** konstruierten Linien?

44. Der Begriff „Bestimmungslinie“ und der Kreis als Bestimmungslinie

Wir wissen bereits, daß alle Punkte einer Kreislinie vom Mittelpunkt des Kreises die gleiche Entfernung r (Radius) haben. Es gibt keine Punkte auf der Kreislinie, die diese Bedingung nicht erfüllen. Es gibt auch keine Punkte mit der gleichen Entfernung vom Mittelpunkt, die nicht auf der Kreislinie liegen.

Im Schulatlas befindet sich eine Karte von der Insel Rügen im Maßstab 1 : 500000. Wenn man um die Stadt Putbus als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm (das entspricht einer Entfernung von 15 km) zeichnet, so liegen auf dieser Kreislinie folgende Orte: Baabe, Sellin, Lützow, Landow, Datsow und Groß-Zicker. Diese Orte sind 15 km von Putbus entfernt (Luftlinie). Andererseits gibt es keine Orte auf der Karte, die von Putbus ebenfalls 15 km entfernt sind, aber nicht auf der Kreislinie mit dem Radius $r = 3$ cm um Putbus liegen.
Wir stellen fest:

1. Jeder Punkt der Kreislinie (des Kreises) mit dem Radius r hat vom Mittelpunkt M die Entfernung r (Abb. 46).

2. Jeder Punkt in einer Ebene, der von M die Entfernung r hat, liegt auf der Kreislinie (dem Kreis) mit dem Radius r um M für diesen Punkt.

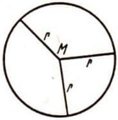


Abb. 46

Die Kreislinie (der Kreis) bestimmt also alle Punkte in einer Ebene, die von M die Entfernung r haben. Man nennt die Kreislinie (den Kreis) deshalb auch die **Bestimmungslinie** für diese Punkte.

Erklärung: Wenn alle Punkte einer Linie eine bestimmte Bedingung erfüllen, der kein Punkt außerhalb dieser Linie genügt, nennt man diese Linie Bestimmungslinie für diese Punkte.

Wir werden im folgenden stets nur Bestimmungslinien für Punkte in einer Ebene behandeln.

Satz 1: Die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von einem festen Punkte M die gleiche Entfernung r haben, ist die Kreislinie um M mit dem Radius r.

Aufgaben

1. Schreibe auf, welche Bedingung alle Punkte der Kreislinie um den Punkt P mit dem Radius **a)** 9 mm, **b)** 6 cm, **c)** 1,9 dm erfüllen!
2. Wo liegen alle Punkte, die von dem Punkt E **a)** 8 mm, **b)** 4 cm, **c)** 4,8 dm, **d)** 4 m, **e)** 2,5 km entfernt sind?
3. Beschaffe dir eine Kreiskarte deines Heimatkreises!
   Lege ein Blatt durchsichtiges Papier auf die Karte und zeichne auf ihm alle Orte ein, die von deinem Heimatort **a)** 3 km, **b)** 6 km, **c)** 7,5 km, **d)** 12,5 km entfernt sind (Luftlinie)!

4. Zeichne zwei einander unter einem Winkel von 60° schneidende Straßen (als Geraden)! Bezeichne den Schnittpunkt mit A!
Zeichne im Maßstab 1 : 20000 die Punkte auf der Straße ein, die von A **a)** 200 m, **b)** 800 m, **c)** 1,5 km, **d)** 2,5 km entfernt sind!

45. Weitere Bestimmungslinien

1) Wir suchen die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von zwei festen Punkten A und B den gleichen Abstand haben.

Wir wissen bereits: Zu zwei Punkten A und B gibt es eine Symmetrieachse, die die Mittelsenkrechte der Strecke AB ist. Jeder Punkt dieser Symmetrieachse ist von den beiden Punkten gleich weit entfernt. Wir wissen außerdem, daß ein Punkt bei gleicher Entfernung von A und B auf der Mittelsenkrechten von AB liegen muß (Abb. 47).

Satz 2: **Die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von zwei festen Punkten A und B jeweils die gleiche Entfernung haben, ist die Mittelsenkrechte (Symmetrieachse) der Strecke AB.**

2) Wir suchen nun die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von einer Geraden g gleich weit entfernt sind.

Beispiel: Alle Punkte sollen den Abstand $a = 1{,}6$ cm von der Geraden haben (Abb. 48).

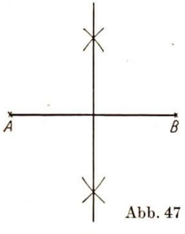


Abb. 47

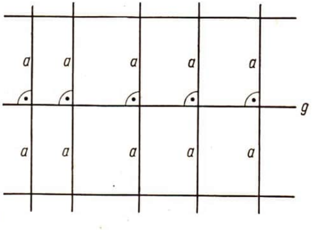


Abb. 48

Wir zeichnen eine Gerade g und errichten in mehreren ihrer Punkte die Senkrechten. Auf den Senkrechten tragen wir von der Geraden g aus die Strecke $a = 1{,}6$ cm nach beiden Richtungen ab. Alle entstehenden Punkte liegen auf zwei Geraden, den beiden Parallelen zu g im Abstand 1,6 cm. Daraus ergibt sich, daß alle Punkte mit dem gleichen Abstand a von einer Geraden g auf den beiden Parallelen zu g in diesem Abstand liegen.

Satz 3: **Die Bestimmungslinien für alle Punkte, die von einer Geraden g den Abstand a haben, sind die beiden Parallelen beiderseits von g im Abstand a.**

3) Wir suchen die Bestimmungslinie für die Punkte, deren Abstände von den beiden Schenkeln eines Winkels jeweils einander gleich sind.

Wir zeichnen einen Winkel mit dem Scheitelpunkt S und konstruieren die Winkelhalbierende. Von verschiedenen Punkten der Winkelhalbierenden fällen wir die Lote auf beide Schenkel des Winkels und messen die Abstände. Wir stellen fest: Jeder Punkt der Winkelhalbierenden erfüllt die Bedingung, daß seine Abstände von den Schenkeln des Winkels einander gleich sind. Andere Punkte, die außerhalb der Winkelhalbierenden liegen und ebenfalls diese Bedingung erfüllen, gibt es nicht (Abb. 49).

Satz 4: Die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von den Schenkeln eines Winkels jeweils gleichen Abstand haben, ist die Winkelhalbierende.

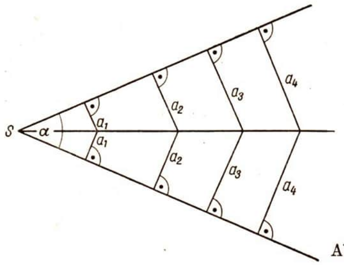


Abb. 49

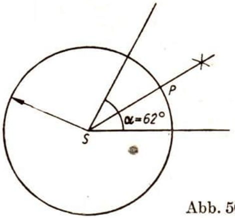


Abb. 50

4) Außer den bisher angeführten vier Bestimmungslinien gibt es noch viele andere. Die Bestimmungslinien sind für geometrische Konstruktionen sehr wichtig, da im allgemeinen die Lage eines Punktes durch zwei Bestimmungslinien festgelegt wird.

1. Beispiel: Gegeben ist der Winkel $\alpha = 62°$. Gesucht werden Punkte zwischen den beiden Schenkeln, die vom Scheitel S des Winkels 1,5 cm entfernt sind und deren Abstände von den Schenkeln des Winkels α einander gleich sind.

Lösung: Die Aufgabe stellt zwei Bedingungen, die für die Lage der Punkte erfüllt sein müssen. Jede Bedingung entspricht einer Bestimmungslinie. Die erste Bestimmungslinie für die gesuchten Punkte ist die Kreislinie um S mit dem Radius $r = 1{,}5$ cm. Die zweite Bestimmungslinie ist die Winkelhalbierende des Winkels α. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Kreis ist der Punkt P (Abb. 50). Er erfüllt als einziger Punkt beide Bedingungen, die in der Aufgabe gestellt waren.

Oft erhält man bei derartigen Konstruktionen mehrere Punkte, die den beiden gestellten Bedingungen genügen.

2. Beispiel: Gegeben ist eine Strecke $AB = 3$ cm. Gesucht werden Punkte, die von dieser den Abstand $a = 1{,}5$ cm haben und deren Entfernungen nach A und B einander gleich sind.

Lösung: Als erste Bestimmungslinie zeichnen wir die zwei Parallelen beiderseits der Strecke AB im Abstand von 1,5 cm. Die zweite Bestimmungslinie ist die Mittelsenkrechte der Strecke AB. Diese schneidet die beiden Parallelen in P_1 und P_2. Beide Punkte erfüllen die in der Aufgabe gestellten Bedingungen (Abb. 51).

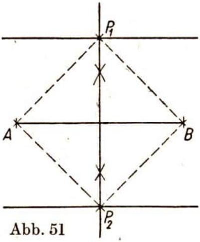


Abb. 51

Aufgaben

1. Zwei Punkte A und B sind 5 cm voneinander entfernt.

a) Bestimme Punkte, die von A und B jeweils gleich weit entfernt sind! Wie viele solcher Punkte gibt es?

b) Bestimme Punkte, die von A 4,5 cm und von B 3 cm entfernt sind! Wie viele solcher Punkte gibt es?

c) Bestimme die Entfernung der gefundenen Punkte (Aufgabe b) von der Strecke AB!

2. An einem See sind zwei Ferienlager eingerichtet worden. Für beide Lager soll eine gemeinsame Badestelle angelegt werden. Gesucht wird der Punkt am Seeufer, der von beiden Lagern gleich weit entfernt ist. Fertige eine Skizze an, konstruiere diesen Punkt und beschreibe die Konstruktion (Abb. 52)!

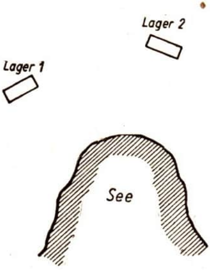


Abb. 52

3. Rechts und links von einer Bahnstrecke liegen zwei Orte R und S. Es soll ein Bahnhof gebaut werden, der von beiden Orten gleich weit entfernt ist. Stelle durch eine Zeichnung fest, wo der neue Bahnhof angelegt werden muß (Abb. 53)!

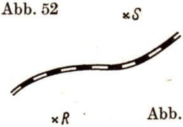


Abb. 53

4. Pause die Karte von der Insel Rügen aus deinem Schulatlas (Maßstab 1 : 500000) auf ein Blatt durchsichtiges Papier! Bestimme die Orte, deren Entfernungen von Bergen und Putbus jeweils einander gleich sind!

5. Zeichne die Bestimmungslinien der Punkte, die von einer Geraden g den Abstand **a)** 4 cm, **b)** 3,2 cm, **c)** 5,6 cm haben!

6. Zeichne die Bestimmungslinien der Punkte, deren Abstände von den beiden Schenkeln eines Winkels **a)** $\alpha = 50°$, **b)** $\beta = 115°$ jeweils einander gleich sind!

7. Zeichne die Bestimmungslinien der Punkte, die von einem Schenkel eines Winkels $\alpha = 48°$ den Abstand $a = 4{,}2$ cm haben!

8. Zeichne die Bestimmungslinie der Punkte, die von dem Scheitelpunkt S des Winkels $\alpha = 48°$ die Entfernung $a = 6$ cm haben.

9. Konstruiere den Punkt, dessen Abstände von den Schenkeln des Winkels einander gleich sind und der vom Scheitelpunkt S 6 cm entfernt ist!

10. Die Sendungen des Fernsehsenders Brocken sind im allgemeinen bis zu einer Entfernung von etwa 100 km zu empfangen. Kennzeichne auf einer Karte in deinem Atlas den Bereich, in dem die Sendungen des Fernsehsenders Brocken zu empfangen sind!

11. Zeichne den Winkel $\alpha = 35°$! Konstruiere den Punkt, der auf einem Schenkel des Winkels liegt und von dem anderen Schenkel den Abstand $a = 2{,}5$ cm hat!

12. Zeichne den Winkel $\gamma = 75°$! Konstruiere den Punkt, der von dem einen Schenkel den Abstand 5,5 cm und von dem anderen Schenkel den Abstand 4 cm hat!

13. Zeichne zwei Parallelen g_1 und g_2! Konstruiere die Bestimmungslinie der Punkte, die von beiden Parallelen den gleichen Abstand haben!

14. Zeichne zwei Parallelen mit dem Abstand 6 cm und zwischen ihnen einen Punkt P! Konstruiere die Punkte, die von den beiden Parallelen den gleichen Abstand haben und vom Punkt P 4 cm entfernt sind!

15. Zeichne drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen! Konstruiere einen Punkt, der von A, B und C gleich weit entfernt ist! Überlege, ob es noch einen weiteren Punkt mit dieser Eigenschaft gibt!

16. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC! Konstruiere einen Punkt, der von A, B und C gleich weit entfernt ist!

17. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC! Konstruiere einen Punkt, der von den drei Seiten den gleichen Abstand hat!

XII. Der Kreis

46. Der Kreis und die Kreisteile

Wir wissen bereits, daß alle Punkte der Kreislinie vom Mittelpunkt (Zentrum) des Kreises gleich weit entfernt sind. Für **Kreislinie** können wir

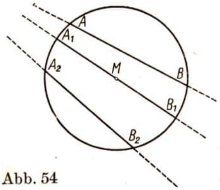


Abb. 54

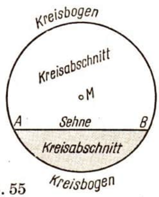


Abb. 55

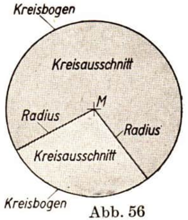


Abb. 56

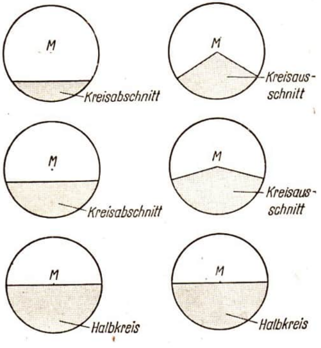


Abb. 57

auch **Kreisumfang, Peripherie** oder **Vollkreisbogen** sagen. Eine Gerade, die den Kreis schneidet, wird **Sekante**[1] oder **Schneidende** genannt.

In Abbildung 54 ist ein Kreis mit mehreren Sekanten gezeichnet. Der innerhalb der Kreisfläche verlaufende Teil (AB; A_1B_1; A_2B_2) einer Sekante wird als **Sehne** bezeichnet. In einem Kreis können Sehnen verschiedener Länge gezeichnet werden. Die Sehne, die durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft (A_1B_1), ist die längste Sehne und heißt **Durchmesser** des Kreises. Der Durchmesser ist doppelt so lang wie der **Radius (Halbmesser)**. Die Durchmesser, die auch Symmetrieachsen des Kreises sind, haben alle die gleiche Länge.

Jede Sehne teilt die Kreisfläche in zwei **Kreisabschnitte** oder **Segmente**[2] und die Kreislinie in zwei **Kreisbogen**, von denen der kleinere als zur Sehne gehörend bezeichnet wird. Ein Kreisabschnitt wird durch eine Sehne und einen Kreisbogen begrenzt (Abb. 55).

Zwei Radien, die sich nicht decken, teilen den Kreis in zwei **Kreisausschnitte** oder **Sektoren** und die Kreislinie in zwei Kreisbogen. Ein Kreisausschnitt wird durch zwei Radien und einen Kreisbogen begrenzt (Abb. 56).

Wird die Sehne eines Kreises zum Durchmesser, so wird der Kreisabschnitt zum Halbkreis und der zugehörige Kreisbogen zum halben Umfang des Kreises (Abb. 57). In diesem Falle ist der Halbkreis gleichzeitig

[1] secare (lat.) = schneiden, [2] segmentum (lat.) = Abschnitt

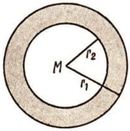


Abb. 58

Kreisausschnitt, da der Durchmesser aus 2 Radien besteht. Es stimmen also in diesem besonderen Falle Kreisabschnitt und Kreisausschnitt, Segment und Sektor, überein; jeder hat die Größe eines Halbkreises.

Haben zwei Kreise mit verschieden großen Radien r_1 und r_2 den gemeinsamen Mittelpunkt M, so liegen sie **konzentrisch** zueinander. Die von den beiden Kreislinien eingeschlossene Fläche bezeichnen wir als **Kreisring** (Abb. 58). Der Unterschied der beiden Radien heißt **Breite des Ringes.**

Aufgaben

1. Zeichne mit Hilfe des Zirkels einen Kreis mit dem Radius von **a)** 3 cm, **b)** 4 cm, **c)** 2,7 cm, **d)** 3,5 cm, **e)** 18 mm, **f)** 48 mm, **g)** 0,45 dm!

2. Zeichne einen Kreis mit dem Durchmesser von **a)** 6 cm, **b)** 7,2 cm, **c)** 8,5 cm, **d)** 46 mm, **e)** 76 mm, **f)** 0,8 dm, **g)** 0,58 dm!

3. Zeichne ein Wagenrad mit dem Radius $r = 3{,}5$ cm und **a)** 4 Speichen, **b)** 8 Speichen!

   Anleitung: Ein voller Kreisbogen entspricht einem Winkel von 360°!

4. **a)** Zeichne in einem Kreis mit dem Radius 3 cm eine Rosette!

   b) Wieviel Symmetrieachsen hat die Rosette? Wo kommen solche Verzierungen vor?

   c) Verbinde die benachbarten Spitzen der Rosette geradlinig miteinander! Welche Figur wird durch diese Strecke gebildet? Vergleiche die Längen der Strecken untereinander und mit dem Radius!

5. Bestimme mit Hilfe eines Lineals und zweier Zeichendreiecke die Durchmesser von runden Bleistiften, von Geldstücken und Knöpfen!

In der Technik benutzt man für solche Messungen ein besonderes Gerät, die **Schieblehre** (Abb. 59). Mit diesem Meßgerät kann man Außenmessungen, Innenmessungen und Tiefenmessungen durchführen. Die Ablesungen erfolgen mit einem Nonius, der zehntel Millimeter abzulesen gestattet.

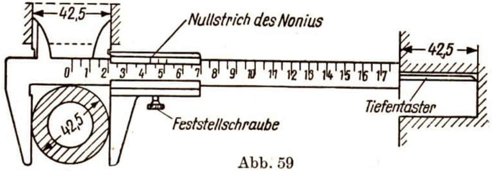


Abb. 59

47. Sehnen

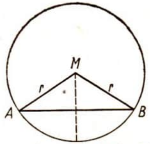


Abb. 60

1) Zeichnen wir in einen Kreis eine beliebige Sehne AB und verbinden die Endpunkte A und B mit dem Mittelpunkt (M) des Kreises, so erhalten wir ein gleichschenkliges Dreieck. Die Basis ist die Sehne, und die beiden Schenkel sind gleich dem Radius des Kreises (Abb. 60). Wir wissen, daß das gleichschenklige Dreieck achsensymmetrisch ist. Somit geht die Symmetrieachse der Basis AB (Sehne des Kreises) durch die Spitze des Dreiecks AMB (Mittelpunkt des Kreises, in dem AB Sehne ist). Da jede Sehne Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ist, so muß auch jede Symmetrieachse (Mittelsenkrechte auf der Basis) durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

Die Mittelsenkrechte (Symmetrieachse) jeder Sehne eines Kreises geht durch den Kreismittelpunkt.

Diese Erkenntnis können wir dazu benutzen, den nicht gezeichneten Mittelpunkt eines Kreises zu konstruieren.

Beispiel: Lege den Deckel eines Konservenglases auf ein Stück Papier und zeichne den Rand mit einem Bleistift nach! Zeichne zwei beliebige Sehnen, die nicht parallel liegen, und konstruiere ihre Mittelsenkrechten! Der gesuchte Mittelpunkt des Kreises muß sowohl auf der einen als auch auf der anderen Mittelsenkrechten liegen. Der einzige Punkt, der diese Bedingungen erfüllt, ist der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten. Dieser Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt des Kreises. Wir können sogar den Mittelpunkt eines Kreises konstruieren, wenn uns nur ein Teil der Kreislinie, ein Kreisbogen, gegeben ist. In diesen Kreisbogen zeichnen wir zwei Sehnen ein und konstruieren deren Mittelsenkrechten. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt M des Kreises, den wir dann vervollständigen können (Abb. 61 und 62).

2) Aus der Abbildung 63 erkennen wir, daß die Größe der Sehne abhängig ist von ihrer Entfernung vom Mittelpunkt. Je größer die Sehne, um so

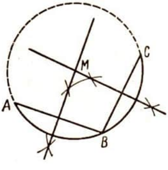


Abb. 61

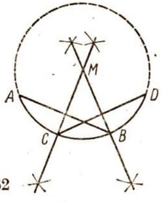


Abb. 62

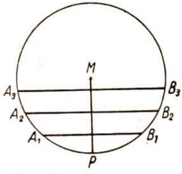


Abb. 63

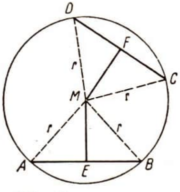


Abb. 64

kleiner ist der Abstand zum Mittelpunkt. Bei der größten Sehne, dem Durchmesser, ist der Abstand gleich 0. Bei der kleinsten Sehne, einem Punkt auf dem Umfang, ist der Abstand gleich dem Radius des Kreises.

Die größere von zwei Sehnen eines Kreises hat den kleineren Abstand vom Kreismittelpunkt.

Welchen Abstand vom Mittelpunkt des Kreises haben nun Sehnen gleicher Länge?

Zeichne einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm (vgl. Abb. 64)! Trage zwei Sehnen von 4 cm Länge ein (AB und CD), konstruiere die Mittelsenkrechten (EM und FM) und verbinde die Endpunkte der Sehnen mit dem Mittelpunkt des Kreises! Es ergeben sich zwei gleichschenklige Dreiecke, bei denen die Basen und die Schenkel (Radien) untereinander gleich sind.

Zeichne nun ein weiteres Dreieck mit diesen Abmessungen, schneide es aus und befestige es mit der Spitze im Mittelpunkt des Kreises! Durch Drehung des Dreiecks um M können nacheinander beide Dreiecke abgedeckt werden. Daraus geht hervor, daß die Dreiecke flächengleich sind und daß die Abstände der Basen vom Mittelpunkt gleich sind: $EM = FM$.

Sehnen gleicher Länge haben gleichen Abstand vom Kreismittelpunkt.

Aufgaben

1. Bestimme den Mittelpunkt eines Kreises, der mit Hilfe einer Tasse, eines Tellers u. a. gezeichnet wurde!

2. Zeichne einen Kreis, der durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte geht!

3. Warum kannst du keinen Kreis zeichnen, der durch drei in einer Geraden liegende Punkte gehen soll?

4. Zeichne einen Kreis, der durch die Punkte A und B geht und dessen Mittelpunkt auf einer (nicht zu AB senkrechten) Geraden g liegt!

5. Zeichne Kreise mit dem Radius $r = 5$ cm, die durch zwei gegebene, 6 cm voneinander entfernte Punkte A und B gehen!

6. Ziehe durch einen Punkt A innerhalb eines Kreises eine Sehne so, daß sie durch den Punkt A halbiert wird!

7. Gegeben sind eine Sehne und ein Punkt der Kreislinie. Zeichne den zugehörigen Kreis!

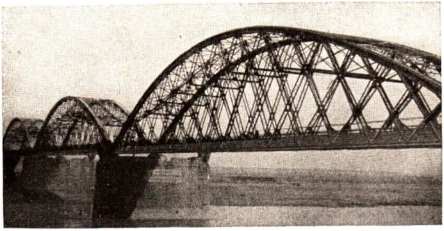


Abb. 65

8. An der Tafel ist die Markierung des Mittelpunktes eines Kreises vergessen worden. Wie kannst du ihn finden, wenn noch die Zirkelöffnung vorhanden ist?

9. Eine eiserne Bogenbrücke (vgl. Abb. 65) über einen Fluß hat eine Länge von 30 m. Der Bogen ist 4 m hoch. Suche auf dem Wege der Zeichnung den Halbmesser des Kreises, zu dem der Bogen gehört!

Erklärung: Der Bogen vermag infolge seiner Spannung eine größere Last zu tragen. Waagerechte Balken würden sich durch ihre eigene Last durchbiegen. Zugstangen an den Brückenbögen verhindern das letztere. Man unterscheidet bei einer Brücke die Spannweite (AB) und die Bogenhöhe (s), auch Pfeilhöhe oder Scheitelhöhe genannt (Abb. 66). Die Bogenhöhe soll bei einer Spannweite von 3 bis 10 m etwa $\frac{1}{12}$, bei 10 bis 20 m etwa $\frac{1}{10}$, bei 20 bis 30 m etwa $\frac{1}{8}$ und bei 30 bis 40 m etwa $\frac{1}{6}$ der Spannweite betragen.

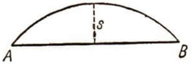


Abb. 66

10. Von einem Kreisbogen sind die Spannweite $AB = 5$ cm und der Radius a) $r = 3$ cm, b) $r = 4$ cm, c) $r = 2$ cm bekannt. Miß die Pfeilhöhe! Welche von den drei Aufgaben ist unlösbar?

48. Sekante und Tangente

1) Sekanten haben mit dem Kreis je zwei Schnittpunkte.

Wird eine Sekante um einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt P gedreht, so ändern die Schnittpunkte unausgesetzt ihre Lage (Abb. 67). Gleichzeitig verändert sich der Abstand der zugehörigen Sehne von M. Fallen schließlich die beiden Schnittpunkte in T_1 bzw. T_2 (je nach Drehrichtung) zusammen, so ist der Abstand der Geraden vom Mittelpunkt gleich dem Radius. Die ehemals schneidende Gerade berührt jetzt den

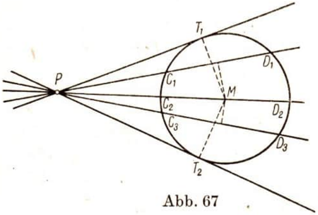


Abb. 67

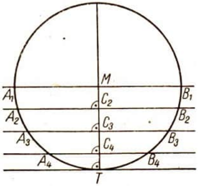


Abb. 68

Kreis und heißt deshalb **Tangente**[1] oder **Berührende**. Der Punkt, in dem die Tangente den Kreis berührt, heißt **Berührungspunkt** und der zu ihm führende Radius **Berührungsradius**. Aus der Abbildung 67 erkennen wir, daß von jedem Punkt außerhalb des Kreises zwei Tangenten an denselben gelegt werden können, durch einen Punkt auf dem Umfang aber nur eine. Die Sekante, die durch den Mittelpunkt des Kreises geht, heißt **Zentrale**.

Eine Sekante wird auch zur Tangente, wenn man sie parallel zu sich vom Mittelpunkt nach außen hin verschiebt (Abb. 68). Die Schnittpunkte rücken gleichmäßig näher und fallen schließlich in T zusammen. Die Parallele durch T ist eine Tangente. Ihr Abstand vom Mittelpunkt ist der Radius r. Die Mittelsenkrechten aller zugehörigen Sehnen liegen auf demselben Radius. Die gemeinsame Mittelsenkrechte steht auch auf der Tangente senkrecht.

Die Tangente steht auf dem Berührungsradius senkrecht.

Oder: **Die Senkrechte im Berührungspunkt einer Tangente mit einem Kreis geht durch den Kreismittelpunkt.**

2) Wir konnten schon aus der Abbildung 67 ersehen, daß von einem Punkt außerhalb des Kreises zwei Tangenten an den Kreis gelegt werden können. Die Strecken PT_1 und PT_2 sind die **Tangentenabschnitte**, die Strecke T_1T_2 heißt **Berührungssehne** (Abb. 69). Es gilt:

Die von einem Punkt außerhalb eines Kreises an den Kreis gezeichneten Tangentenabschnitte sind einander gleich. Die Zentrale halbiert die Berührungssehne und den Winkel zwischen den beiden Tangenten.

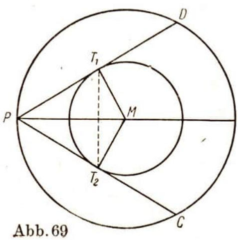


Abb. 69

[1] tángere (lat.) berühren

Beweis:

Zwei vom Punkt P ausgehende Tangenten berühren einen Kreis in den Punkten T_1 und T_2. Um M wird ein zweiter Kreis mit dem Radius MP geschlagen, der die Tangenten in den Punkten C und D schneidet (Abb. 69). Die Sehnen PC und PD sind gleich lang, denn beide haben den gleichen Abstand von M ($T_1M = T_2M$ als Radien des kleinen Kreises). Da T_1M und T_2M die Mittelsenkrechten der Sehnen sind, müssen die beiden Tangentenabschnitte PT_1 und PT_2 gleich lang sein.

PM ist Symmetrieachse (als Winkelhalbierende) zu PC und PD. T_1 und T_2 liegen symmetrisch zur Zentrale und es gilt $T_1T_2 \perp PM$. MP halbiert also T_1T_2.

3) In der Werkstatt einer Fabrik oder einer MTS können wir ein Gerät finden, mit dem man den Mittelpunkt eines Rundstahls oder einer Kreisfläche bestimmen kann, den Zentrierwinkel, Mittelpunktsucher oder Winkelhaken. Der Aufbau ist gleich, nur sind die Namen für dieses Instrument in den einzelnen Berufen verschieden. Zum Aufsuchen des Mittelpunktes legt man das Gerät mit seinen Schenkeln in zwei verschiedenen Lagen an den kreisförmigen Querschnitt eines Rundstahls. Die Kante des mittleren Stabes (es ist die Zentrale) verläuft dabei stets durch den Mittelpunkt. Reißen wir jedesmal diese Gerade an, so ergibt der Schnittpunkt der beiden Geraden den Mittelpunkt der Kreisfläche.

Aufgaben

1. Konstruiere an einen Kreis in einem Punkt des Umfangs die Tangente! Konstruktion (Abb. 70): Verbinde den gegebenen Punkt P auf dem Umfang mit dem Mittelpunkt M des Kreises! Errichte in P auf PM die Senkrechte!

2. Zeichne einen Kreis, der die Gerade g in dem Punkt A berührt und durch den (nicht auf g liegenden) Punkt B geht!

3. Zeichne einen Kreis, der zwei gegebene Parallelen berührt und durch einen gegebenen Punkt N verläuft!
   a) Der Punkt liegt auf einer der Parallelen.
   b) Der Punkt liegt zwischen den Parallelen.

4. Um M sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm gezeichnet.
   a) Zeichne an den Kreis Tangenten, die zu einer gegebenen Geraden g parallel laufen!
   b) Zeichne an den Kreis Tangenten, die mit einer gegebenen Geraden g den Winkel $\alpha = 45°$ bilden!
   c) Beschreibe um den Kreis ein Quadrat!

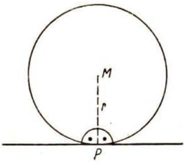


Abb. 70

5. Zeichne Kreise, die zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 berühren!

6. Zeichne Kreise mit dem Radius $r = 2$ cm, die zwei einander schneidende Geraden berühren!

7. Zeichne Kreise, die zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 berühren, und zwar eine von ihnen in einem gegebenen Punkt P!

8. Bestimme den Punkt, von dem aus an einen Kreis mit dem Radius $r = 5$ cm ein Tangentenabschnitt von der Länge $l = 9$ cm gelegt werden kann!

9. Zwei Eisenbahngleise von 1,435 m (Normal-) Spurweite haben einen Richtungsunterschied von 130°. Um das Rangieren zu vermeiden, sollen sie durch eine Kreiskurve mit dem Radius $r = 1400$ m verbunden werden. Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 20000 an (Abb. 71)!

Anleitung: Zeichne einen Kreis mit dem Radius r, der zwei Geraden berührt, die sich unter einem Winkel von 130° schneiden!

Abb. 71

10. Eine Blechplatte 100 mm × 100 mm × 2 mm soll an den vier Ecken mit dem Radius $r = 25$ mm abgerundet werden. Zeichne die Blechform! (Vergleiche Aufgabe 6!)

49. Winkel am Kreis

1) In einem Kreis werden durch Radien, Sehnen usw. Winkel gebildet. Drei wichtige Winkel werden in der Abbildung 72 dargestellt.

Zentriwinkel oder Mittelpunktswinkel α: Der Scheitelpunkt liegt im Mittelpunkt des Kreises, die Schenkel sind Radien. Der Kreisbogen zwischen den Schenkeln $\widehat{AB}$[1] heißt zugehöriger Bogen, die Strecke AB[1] entsprechend zugehörige Sehne.

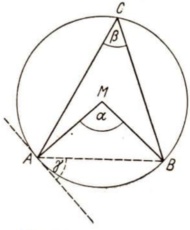


Abb. 72

[1] Bemerkung: BC bedeutet die Strecke BC

$\widehat{BC}$ bedeutet den Kreisbogen BC zur Sehne BC

Peripheriewinkel oder Umfangswinkel β: Der Scheitelpunkt liegt auf dem Kreisumfang, die Schenkel sind Sehnen in dem Kreis. $\widehat{AB}$ ist der zugehörige Bogen und AB die zugehörige Sehne.

Sehnentangentenwinkel γ: Der Scheitelpunkt liegt auf dem Kreisumfang. Ein Schenkel wird durch die Tangente an den Kreis im Scheitelpunkt gebildet, der andere durch eine Sehne des Kreises.

Die Winkel treten natürlich auch einzeln und in ganz beliebiger Lage auf.

2) Liegen Zentriwinkel und Peripheriewinkel über demselben Bogen (über derselben Sehne), so besteht zwischen ihren Winkelgrößen folgender Zusammenhang:

Jeder Peripheriewinkel eines Kreises ist halb so groß wie der Zentriwinkel, der mit ihm über demselben Bogen (derselben Sehne) steht.

Beweis:

a) Wir zeichnen in einen Kreis (Abb. 73) einen Zentriwinkel beliebiger Größe ($\sphericalangle AMB$) und verlängern einen Radius (BM) über den Mittelpunkt hinaus zum Durchmesser (BC). Wir verbinden C mit A und erhalten einen Peripheriewinkel über demselben Bogen $\widehat{AB}$ (über derselben Sehne AB).

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle MAC + \sphericalangle MCA \quad \text{(Außenwinkel im Dreieck } AMC\text{)}$$
$$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle MCA \quad (\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA \text{ als Basiswinkel})$$
$$\overline{\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle BCA}$$

Wie wir erkennen werden, gilt der Lehrsatz nicht nur für den besonderen Fall der Abbildung 73, sondern allgemein.

b) Wird der Scheitel C des Peripheriewinkels ACB so gelegt, daß der Scheitel M des Zentriwinkels AMB zwischen den Schenkeln AC und BC des Peripheriewinkels liegt, so ergibt der Durchmesser CD die Zentriwinkel AMD und BMD und die Peripheriewinkel ACD und BCD, für die nach der vorangegangenen Beweisführung jeweils gilt (Abb. 74):

$$\sphericalangle AMD = 2 \cdot \sphericalangle ACD$$
$$\sphericalangle BMD = 2 \cdot \sphericalangle BCD$$
$$\sphericalangle AMD + \sphericalangle BMD = 2 \cdot \sphericalangle ACD + 2 \cdot \sphericalangle BCD$$
$$\overline{\sphericalangle AMB \qquad = 2 \cdot \sphericalangle ACB}$$

c) Wird der Scheitel C des Peripheriewinkels ACB so gelegt, daß der Scheitel M des Zentriwinkels AMB außerhalb des Peripheriewinkelraumes liegt, so ergibt der Durchmesser CD die Zentriwinkel AMD und BMD und die Peripheriewinkel ACD und BCD, für die nach der vorangegangenen Beweisführung gilt (Abb. 75):

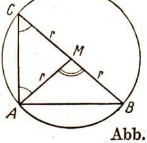


Abb. 73

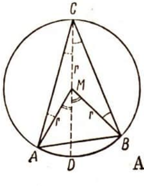


Abb. 74

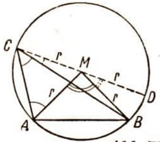


Abb. 75

$$
\begin{array}{ll}
\sphericalangle AMD = 2 \cdot \sphericalangle ACD & \\
\sphericalangle BMD = 2 \cdot \sphericalangle BCD & \\
\sphericalangle AMD - \sphericalangle BMD = 2 \cdot \sphericalangle ACD - 2 \cdot \sphericalangle BCD & \\
\hline
\sphericalangle AMB \qquad\qquad = 2 \cdot \sphericalangle ACB &
\end{array}
$$

Wir haben somit bewiesen, daß jeder Peripheriewinkel, unabhängig von der Lage, halb so groß ist wie der Zentriwinkel über demselben Bogen.

Daraus ergibt sich: **Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen sind gleich.**

Anschauungsbeweis: Fertige ein Modell nach Abbildung 76 an!

Um den Mittelpunkt M des rechteckigen Stückes Pappe ist ein Kreisbogen $\widehat{AB}$ und das Dreieck AMB gezeichnet. Fasse die Schlaufe bei C und drehe bei gespanntem Bindfaden MC. Dann bewegt sich der Scheitel des Peripheriewinkels auf der Kreislinie, und die Drähte schieben sich durch die Ösen bei A und B, ohne daß sich die Größe des Peripheriewinkels ACB ändert.

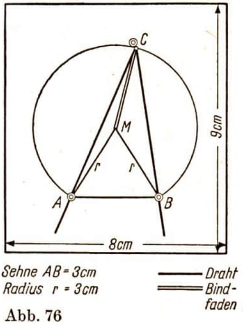


Abb. 76

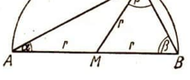
3) Ein besonderer Fall liegt vor, wenn der Zentriwinkel 180° beträgt. Jeder Peripheriewinkel über diesem Bogen (dem halben Kreisumfang) beträgt dann 90°.

Jeder Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel (Satz des Thales).

Wir wollen diesen Lehrsatz durch einen weiteren Beweis begründen (Abb. 77).

$$
\begin{array}{l}
\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 180^\circ \ (\triangle ABC) \\
\alpha = \alpha' \ (\text{Basiswinkel } \triangle AMC) \\
\underline{\beta = \beta' \ (\text{Basiswinkel } \triangle CMB)} \\
\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ \\
2\alpha + 2\beta \qquad = 180^\circ
\end{array}
$$

Abb. 77



Wir dividieren alle Glieder der Gleichung durch 2 und erhalten

$\alpha + \beta = 90^\circ$ ($\alpha + \beta$ ist der Peripheriewinkel über AB).

4) Der Zusammenhang zwischen Peripherie- und Sehnentangentenwinkel (Abb. 78).

Wir zeichnen einen Kreis mit einer Sehne und einem Sehnentangentenwinkel. Über dem zugehörigen Bogen $\widehat{AB}$ zeichnen wir den Zentri- und einen Peripheriewinkel. Von M fällen wir das Lot auf die Sehne AB. Dieses halbiert die Sehne und den Zentriwinkel AMB und steht senkrecht auf der Sehne $\overline{AB}$. Wir erhalten den Punkt D.

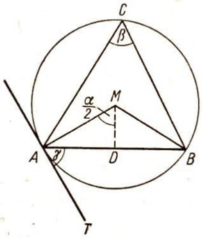


Abb. 78

$\sphericalangle TAB + \sphericalangle DAM = 90°$

$\sphericalangle AMD + \sphericalangle DAM = 90°$ (ADM rechtwinkliges Dreieck)

$\sphericalangle TAB \qquad = \sphericalangle AMD$

Da $\sphericalangle AMD$ der halbe Zentriwinkel ist, so muß der volle Zentriwinkel doppelt so groß sein wie der Sehnentangentenwinkel, der über dem gleichen Kreisbogen steht.

Jeder Sehnentangentenwinkel ist halb so groß wie der Zentriwinkel, der über demselben Kreisbogen steht.

Folglich gilt:

Jeder Sehnentangentenwinkel ist gleich jedem Peripheriewinkel, der über demselben Kreisbogen steht.

Aufgaben

1. Zeichne einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 6$ cm und einer Sehne $AB = 4$ cm. Errichte über AB nach beiden Seiten Peripheriewinkel!

2. Unter welcher Bedingung sind die beiden Peripheriewinkel über dem Bogen und dem Ergänzungsbogen einer Sehne gleich?

3. Wie groß sind der Zentriwinkel und ein Peripheriewinkel über einem **a)** Viertelkreis, **b)** Halbkreis, **c)** Dreiviertelkreis?

4. Bestimme die Länge der Sehne, die in einem Kreis mit dem Radius $r = 4$ cm zu dem Peripheriewinkel $\beta = 30°$ gehört!

50. Der Kreis als Bestimmungslinie

Nach dem Satz des Thales ist der Bogen des Halbkreises über dem Durchmesser eine Bestimmungslinie, denn er entspricht den Anforderungen, die wir an eine Bestimmungslinie stellen.

> Der Kreisbogen mit dem Durchmesser AB ist die Bestimmungslinie für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch A und B gehen (Abb. 77).

Beziehen wir den Satz auf das Dreieck, so können wir sagen:

Der Kreisbogen über einer Strecke *AB* ist die Bestimmungslinie für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke, die diese Strecke als Hypotenuse haben.

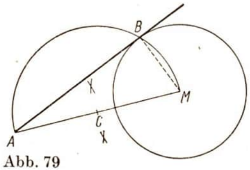


Abb. 79

Nach dem Satz über die Gleichheit aller Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen können wir den Kreisbogen, auf dem alle gleichen Peripheriewinkel liegen, als Bestimmungslinie betrachten.

Der Kreisbogen, der eine Strecke AB als Sehne und den Winkel γ als Peripheriewinkel hat, ist die Bestimmungslinie für die Scheitel aller Winkel von der Größe γ, deren Schenkel durch A und B gehen (Abb. 76).

Beziehen wir diesen Lehrsatz wieder auf das Dreieck, so können wir sagen:

Der Kreisbogen über einer Sehne *AB* ist die Bestimmungslinie für die Spitzen aller Dreiecke, die *AB* als Seite und den Peripheriewinkel γ als gegenüberliegenden Winkel haben.

Aufgaben

1. Konstruiere von einem Punkt A außerhalb des Kreises eine Tangente an den Kreis!

   Anmerkung: Der Berührungsradius bildet mit der Tangente einen rechten Winkel. Errichtet man über der Verbindungsstrecke AM einen Halbkreis, so ist jeder Peripheriewinkel über der Sehne AM ein rechter Winkel (Abb. 79).

   Welchen Lehrsatz hast du verwendet?

2. Konstruiere von einem Punkt außerhalb eines Kreises die beiden Tangenten an diesen!

3. Benutze den Satz des Thales, um in einem Dreieck die Höhen zu konstruieren!

4. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus $c = 8$ cm und $h_c = 3$ cm! Wieviel Dreiecke lassen sich konstruieren?

5. Bestimme den Punkt, von dem aus an einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 10$ cm ein Tangentenabschnitt mit der Länge $l = 9$ cm gelegt werden kann!

6. Bestimme den Punkt P auf der Verlängerung eines Durchmessers AB, von dem aus die Tangente mit der Zentrale einen Winkel von $32°$ bildet!

7. Konstruiere ein Dreieck aus

a) $a = 8$ cm, $h_b = 6$ cm, $h_a = 7$ cm;
b) $a = 9$ cm, $h_b = 7{,}5$ cm, $s_a = 6$ cm;
c) $a = 6$ cm, $h_b = 4{,}8$ cm, $r = 5$ cm!

8. Konstruiere rechtwinklige Dreiecke (Thaleskreis) aus:

a) $c = 6{,}2$ cm, $h_c = 2{,}6$ cm;
b) $c = 7{,}8$ cm, $h_c = 2{,}5$ cm;
c) $c = 7{,}8$ cm, $\alpha = 75°$;
d) $c = 5$ cm, $\beta = 65°$!

9. Zwei Verstrebungen einer Landmaschine schneiden sich unter dem Winkel von 75°. Diese Verstrebungen müssen durch einen Kreisbogen, der einen Radius $r = 250$ mm hat, verstärkt werden (Abb. 80). Wähle einen geeigneten Maßstab und konstruiere die Verstrebung!

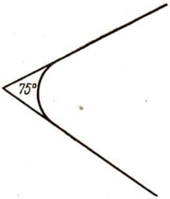


Abb. 80

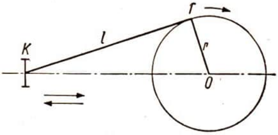


Abb. 81

10. Der in der Abbildung 81 schematisch skizzierte Kurbeltrieb hat die Aufgabe, die kreisförmige Bewegung des Kurbelzapfens T in eine hin- und hergehende Bewegung des Kreuzkopfes K zu verwandeln. Die Schubstangenlänge KT betrage l mm, der Kurbelkreisradius $OT = r$ mm.

a) Wie groß ist der Weg des Kreuzkopfes für eine halbe Kurbelumdrehung?

b) Wie weit ist die Entfernung zwischen Kreuzkopf K und Kurbelwellenmitte O in der linken und rechten Totlage des Kurbeltriebes?
(In der Totlage liegen K, T und O in einer Geraden.)

11. Es wird erzählt, der bekannte Rechenmeister Adam Ries habe eine Wette gegen einen anderen Rechenmeister seiner Zeit gewonnen, der sich seiner geometrischen Kenntnisse und Fertigkeiten sehr rühmte. Es handelte sich bei der Wette darum, in einer bestimmten Zeit nur mit Lineal und Zirkel, also ohne Winkelmesser, die größte Anzahl genauer rechter Winkel zu zeichnen.
Wie ist es wohl dem Adam Ries gelungen, die Wette zu gewinnen?

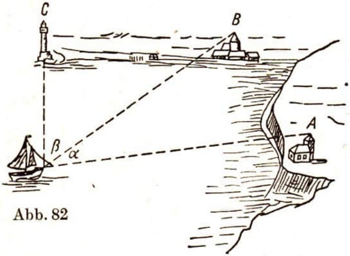


Abb. 82

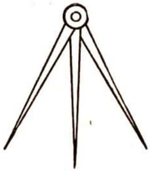


Abb. 83

12. Sieht der Seemann drei Landmarken A, B und C (insbesondere Leuchttürme) und kennt er ihre Lage und ihre Entfernungen untereinander aus der Karte, so könnte er durch zwei Winkelmessungen α und β den eigenen Standort durch Zeichnung finden (Abb. 82).
Die Winkel α und β nennt man Gesichtswinkel oder Sehwinkel. Das Verfahren bezeichnet man als: Rückwärtseinschneiden nach drei Punkten.
Die Schiffskapitäne zeichnen aber nicht, sondern sie benutzen einen Auflegezirkel mit drei beweglichen Schenkeln (Abb. 83).

Beispiele:

$AB = 6{,}5$ km	$BC = 4{,}6$ km	$\sphericalangle ABC = 120°$	$\alpha = 69°$	$\beta = 40°$
$AB = 5{,}6$ km	$BC = 6{,}4$ km	$\sphericalangle ABC = 130°$	$\alpha = 52°$	$\beta = 54°$
$AB = 3{,}8$ km	$BC = 4{,}1$ km	$\sphericalangle ABC = 145°$	$\alpha = 36°$	$\beta = 60°$

a) Stelle durch Zeichnung den Standort des Schiffes fest (Lehrsätze über Peripheriewinkel)!

b) Baue dir einen solchen Zirkel (Abb. 83)!

c) Zeichne die beiden Winkel α und β so auf Pauspapier, daß sie einen Schenkel und den Scheitelpunkt gemeinsam haben (Spinne des Seemanns)! Verschiebe es so lange, bis die drei Schenkel durch A, B und C gehen! Überprüfe die zeichnerischen Lösungen von **12 a**!

13. Vor einer Küste befinden sich Klippen. Zwei Landmarken A und B sind errichtet. Die Schiffer können die Gefahr vermeiden, wenn sie den „Gefahrenwinkel" beachten (d. i. der Sehwinkel, unter dem sie AB höchstens sehen dürfen).
Die Landmarken sind 5 km voneinander entfernt, der Gefahrenwinkel ist 60°. Zeichne das gefährdete Gebiet (Maßstab 1 : 100000)!

XIII. Kreisberechnung

51. Die Zahl π und die Berechnung des Kreisumfangs

1) Die Triebräder einer Schnellzug- und einer Güterzuglokomotive unterscheiden sich u. a. in ihrer Größe. Dreht sich das Rad einmal herum (um 360°), so wird eine Strecke von der Länge des Umfangs des Rades zurückgelegt. Vergleichen wir die entsprechenden Strecken beider Lokomotiven, so erkennen wir, daß das Rad der Schnellzuglokomotive mit dem größeren Durchmesser einen größeren Kreisumfang besitzt.

Wir wollen untersuchen, ob zwischen den Kreisumfängen und den Kreisdurchmessern Proportionalität besteht. Hierfür wurden die Umfänge (u) und Durchmesser (d) einiger gerader Zylinder gemessen und in einer Wertetafel zusammengestellt.

	Weckglas	Kochtopf	Konservendose
u	26,8 cm	78,3 cm	32,1 cm
d	8,5 cm	25,0 cm	10,2 cm

Setzt man die entsprechenden Werte ins Verhältnis ($u : d$), so erhält man annähernd den gleichen Wert, etwa 3,14. Abweichungen sind auf ungenaues Messen zurückzuführen.

Es ergibt sich:

Zwischen den Kreisumfängen und den Kreisdurchmessern besteht Proportionalität: $u_1 : d_1 = u_2 : d_2$.

Der Proportionalitätsfaktor ist rund 3,14. Er wird mit dem griechischen Buchstaben π (gelesen: pi) bezeichnet. Durch andere Rechenverfahren konnte die Zahl π genauer bestimmt werden, und man erkannte, daß es eine unendliche, nicht periodische Dezimalzahl ist.

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,2384\ldots$$

Im täglichen Leben rundet man die Zahl und verwendet die Näherungswerte:

$$\pi \approx 3{,}14 \quad \text{oder} \quad \pi \approx \frac{22}{7}.$$

In der Technik benutzt man meistens Tabellen, denen der Wert $\pi \approx 3{,}1416$ zugrunde gelegt wurde.

Man erhält den Umfang eines Kreises, wenn man den Durchmesser mit dem Proportionalitätsfaktor π multipliziert:

$$\boldsymbol{u = \pi\, d} \quad \text{oder, da } \boldsymbol{d = 2r}, \quad \boldsymbol{u = 2\pi\, r}.$$

2) In der Praxis arbeitet man vorwiegend mit der Formel $u = \pi d$, weil es keine Schwierigkeiten bereitet, den Durchmesser eines runden Werkstückes mit der Schieblehre oder der Mikrometerschraube zu messen. Die Abbildung 84 gibt uns die Anleitung für die behelfsmäßige Messung des Durchmessers.

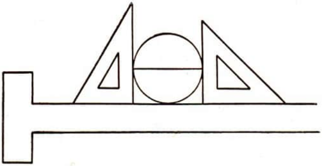


Abb. 84

Beispiel: Zur schnellen Entladung von Getreide aus Lastkähnen verwendet man Saugheber, die die Ladung durch starke Rohre aus dem Schiff direkt in den Silo befördern. Wie breit müssen die Bleche sein, die zur Herstellung der Rohre verwendet werden, wenn der Durchmesser 95 cm werden soll? (Der Rand für die Schweißnaht wird nicht berücksichtigt.)

Zur Überschlagsberechnung wird π auf 3 abgerundet.

Überschlag: $3 \cdot 100 = 300$.

Gegeben: $d = 95$ cm. Gesucht: u (in cm).

$$u = \pi d$$

$$u = 3{,}14 \cdot 95$$

$$u = 298{,}30$$

$$\begin{array}{r} 3{,}14 \cdot 95 \\ \hline 2826 \\ 1570 \\ \hline 298{,}30 \end{array}$$

Ergebnis: Die Breite des Bleches muß etwa 298 cm betragen.

Die Berechnung des Kreisumfanges kann man sich durch die Benutzung der *Zahlentafeln* erleichtern. Wir verwenden hierfür die Tafel 7 der Zahlentafeln. In dieser Tafel steht für d der Buchstabe n[1].

$$u = \pi d$$
$$u = \pi \cdot 95$$
$$u = 298{,}45 \quad \text{(Ergebnis aus der Zahlentafel)}$$

Merke:

1. **Ist der Radius r gegeben, rechnen wir zunächst den Durchmesser $d = 2r$ aus.**
2. **Vor Beginn der Rechnung überlegen wir die Maßeinheit des Ergebnisses. Die gesamte Rechnung führen wir ohne Maßeinheiten durch.**
3. **Wir überschlagen das Ergebnis und ermitteln die Größenordnung. (Setze dabei $\pi \approx 3$.)**
4. **Wir runden sinnvoll und fügen dem Ergebnis die vorher festgelegte Maßeinheit bei.**

[1] numerus (lat.) Zahl.

5. Da für π Näherungswerte (also gerundete Werte) eingesetzt werden, müßten wir bei jeder Rechnung statt des Gleichheitszeichens das Näherungszeichen schreiben. In der Praxis wird aber diese Unterscheidung nicht gemacht, so daß bei allen Kreisberechnungen das Gleichheitszeichen verwendet wird.

3) Die Tafel 7 kann nicht nur für die ganzzahligen Durchmesser von 1 bis 100 benutzt werden. Auch für andere Stellenwerte von d (z. B. 4,2 oder 4200) kann man mit Hilfe der Tafel den Wert von u ermitteln. Aus dem Überschlag entnehmen wir dann jedesmal die Größenordnung, die für das Ergebnis berücksichtigt werden muß.

Beispiele: Berechne den Kreisumfang (Zahlenangaben in cm)!

d	$\pi \cdot d$	Überschlag	Ergebnis: u
4,2	$\pi \cdot 4{,}2$	$3 \cdot 4 = 12$	13,195
4200	$\pi \cdot 4200$	$3 \cdot 4000 = 12000$	13 195
0,78	$\pi \cdot 0{,}78$	$3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$	2,4504
540	$\pi \cdot 540$	$3 \cdot 500 = 1500$	1696,5

Hat d mehr als zwei geltende Ziffern, so können wir die Aufgabe zerlegen und die Einzelergebnisse addieren.

Beispiele:

a) Berechne den Umfang des Kreises mit dem Durchmesser 135 cm!

Gegeben: $d = 135$ cm. Gesucht: u (in cm, umrechnen in m).

$$u = \pi\, d$$
$$u = \pi \cdot 135 \qquad (\text{Ü: } 3 \cdot 140 = 420)$$
$$u = \pi \cdot 100 + \pi \cdot 35$$

Tabelle

$$\begin{array}{r} \pi \cdot 100 = 314{,}16 \\ +\pi \cdot 35 = 109{,}96 \\ \hline \pi \cdot 135 = 424{,}12 \end{array}$$

$$u = 424{,}12$$

Ergebnis: Der Umfang beträgt rund 4,24 m.

b) Berechne den Umfang des Kreises mit dem Durchmesser 5,93 m!

Gegeben: $d = 5{,}93$ cm. Gesucht: u (in m).

$$u = \pi\, d$$
$$u = \pi \cdot 5{,}93 \qquad (\text{Ü: } 3 \cdot 6 = 18)$$
$$u = \pi \cdot 5 + \pi \cdot 0{,}93$$

Tabelle

$$\begin{array}{r} \pi \cdot 5 = 15{,}708 \\ +\pi \cdot 0{,}93 = 2{,}9217 \\ \hline \pi \cdot 5{,}93 = 18{,}6297 \end{array}$$

$$u = 18{,}6297$$

Ergebnis: Der Umfang beträgt rund 18,63 m.

Zusammenfassung:

1. **Zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises besteht Proportionalität. Das Verhältnis $u : d$ ergibt das konstante Verhältnis π.**
2. **π ist eine unendliche, nicht periodische Dezimalzahl. Den Tabellenbüchern liegt meist der Wert 3,1416 zugrunde.**
3. **Der Umfang eines Kreises wird direkt oder mit Hilfe von Zahlentafeln nach der Formel $u = \pi d$ berechnet.**

Aufgaben

1. Erweitere die Wertetafel für die Umfänge und Durchmesser von Kreisen (S. 159), indem du selbst Messungen an kreisförmigen Gegenständen ausführst! Prüfe das Verhältnis nach!

2. Berechne den Umfang eines Kreises mit
   a) dem Durchmesser $d = 9$ cm (21 cm; 38,5 cm; 78 mm; 2,52 m),
   b) dem Radius $r = 8$ cm (56 cm; 45,6 m; 185 m)!
   In welchen Fällen wird man mit $\frac{22}{7}$ rechnen?

3. Berechne den Kreisumfang mit Hilfe der Zahlentafeln!
   a) $d = 850$ cm (6,5 cm; 0,24 m; 4400 cm; 0,09 m),
   b) $r = 48$ cm (3,4 cm; 83 cm; 3200 m; 0,024 m).

4. a) Miß den Durchmesser der Räder eines Fahrrades! Wieviel Umdrehungen machen sie auf einer 45 km langen Strecke?
   b) Führe die Berechnung für den Fall durch, daß $d = 73$ cm ist!

5. Der Durchmesser des Triebrades einer Personenzuglokomotive mißt 1,75 m.
   a) Wie oft dreht sich das Triebrad bei einer Fahrt von Berlin nach Wittenberg (95 km)?
   b) Welche Strecke legt die Lokomotive bei 100 Umdrehungen zurück?

6. Gas- und Wasserleitungsrohre haben u. a. folgende äußere Rohrdurchmesser: 56 mm; 118 mm; 274 mm; 429 mm; 738 mm; 1256 mm. Berechne jedesmal den Umfang des Rohres!

52. Die Berechnung des Durchmessers und des Kreisbogens

1) Mit der gleichen Formel $u = \pi d$ können wir den Durchmesser d eines Kreises berechnen, wenn sein Umfang u bekannt ist.

Beispiel: Berechne den Durchmesser d des Kreises, dessen Umfang 210 cm beträgt!

Gegeben: $u = 210$ cm. Gesucht: d (in cm).

$$u = \pi d$$
$$210 = 3{,}14 \cdot d \qquad | : 3{,}14$$
$$\frac{210}{3{,}14} = d \qquad (\text{Ü}: 210 : 3 = 70)$$
$$66{,}9 \approx d$$

Ne: $210 : 3{,}14$

$21\,000 : 314 = 66{,}9$
1884
2160
1884
2760

Ergebnis: Der Durchmesser des Kreises beträgt rund 67 cm.

Bei der Berechnung dieser Aufgaben mit der Zahlentafel wird in der Spalte πn der nächstliegende Wert aufgesucht. Die Spalte n ergibt dann den gerundeten Wert des Durchmessers.

$$u = \pi d$$
$$210 = \pi d$$

In der Tafel liegt für πn der Wert 210,49 dem gegebenen Umfang am nächsten. Der zugehörige Wert n ist 67.

Das bedeutet: $d \approx 67$ cm.

Dieser gerundete Wert genügt für die meisten Aufgaben aus der Praxis.

2) Das Eingangstor zu einem neuen Kulturhaus soll einen Rundbogen erhalten. Die Linie zwischen den Pfeilern heißt **Kreisbogen** (Abb. 85).

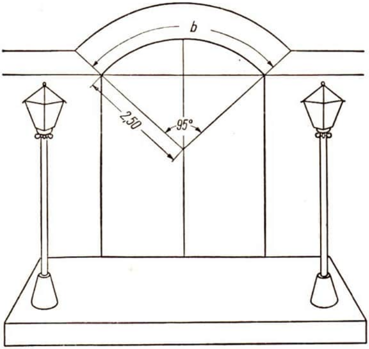


Abb. 85

Die Länge des Kreisbogens hängt von der Größe des Zentriwinkels ab, der diesen Bogen einschließt. Aus dem Umstand, daß dem Zentriwinkel $180° \left(\frac{1}{2} \cdot 360°\right)$ der halbe Kreisumfang entspricht, dem Zentriwinkel $90° \left(\frac{1}{4} \cdot 360°\right)$ ein Viertel des Kreisumfangs usw., erkennen wir:

> Je größer der Zentriwinkel α wird, desto größer wird der zugehörige Bogen. Beide Größen ändern sich im gleichen Maß.

Es gilt die Proportion:

Kreisbogen : Zentriwinkel = Kreisumfang : Vollwinkel des Kreises

$$b : \alpha = \pi d : 360°$$
$$b \cdot 360° = \pi d \alpha$$

Länge des Kreisbogens: $\boldsymbol{b = \frac{\pi d \alpha}{360°}}$

Beispiel: Berechne den Kreisbogen, wenn aus der Bauzeichnung für das Kulturhaus der Radius 2,50 m und der Zentriwinkel 95° entnommen wird!

Gegeben: $r = 2{,}50$ m; $d = 5$ m; $\alpha = 95°$. Gesucht: b (in m)

$$b = \frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360°}$$

Einsetzen: $b = \frac{3{,}14 \cdot 5 \cdot 95}{360}$

Auch diese Aufgaben können außer durch Nebenrechnungen mit Hilfe der Tafel gelöst werden.

$$b \approx 3{,}14 \cdot 1{,}32 \quad (\text{Ü: } 3 \cdot 1{,}3 = 3{,}9)$$

Die Nebenrechnung $3{,}14 \cdot 1{,}32$ ergibt: $b = 4{,}1448$

Aus der Tabelle entnehmen wir:

$$\begin{array}{r} \pi \cdot 1{,}00 = 3{,}1416 \\ + \pi \cdot 0{,}32 = 1{,}0053 \\ \hline b = 4{,}1469 \end{array}$$

Ergebnis: Der Bogen hat eine Länge von rund 4,14 m (bzw. 4,15 m).

Aufgaben

1. Wie groß ist a) der Durchmesser, b) der Radius eines Kreises, dessen Umfang 25,12 cm (84,78 cm; 187 cm; 737,9 m; 1000 m) mißt?

2. Wie groß ist in einem Kreis mit dem Radius $r = 14$ cm ein Bogen, der zu dem Zentriwinkel

a) $\alpha = 60°$	b) $\alpha = 45°$	c) $\alpha = 59°$
d) $\alpha = 36°$	e) $\alpha = 24°$	f) $\alpha = 63°$
g) $\alpha = 144°$	h) $\alpha = 225°$	i) $\alpha = 168°$

gehört?

3. Ein Tischler soll einen Tisch mit kreisförmiger Platte für 8 Personen anfertigen. Wie groß muß er den Durchmesser nehmen, wenn auf jede Person 80 cm gerechnet werden?

4. Wie groß ist jeweils der Durchmesser, wenn a) ein Wagenrad einen Umfang von 3,77 m, b) ein Baum einen Umfang von 2,35 m, c) das Abfallrohr einer Regenrinne einen Umfang von 47,1 cm, d) ein Zylinder einen Umfang von 2,83 m hat?

5. Wieviel Tulpenzwiebeln pflanzt ein Gärtner auf den Rand eines kreisförmigen Beetes von 1,50 m Radius, wenn er die Zwischenräume 12 cm groß nimmt?

6. Der Umfang einer Maschinenwelle beträgt 1365 mm. Wie groß ist ihr Durchmesser?

7. Welchen Umfang hat ein Rundstahl mit 5 (8, 10, 11, 16, 25, 29, 38, 46, 52, 72, 155) mm Durchmesser? Rechne mit der Zahlentafel und stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen!

8. **a)** Die Länge des Erdäquators wird mit rund 40000 km angegeben. Berechne daraus den Radius der Erde!

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit (in m/s) eines Ortes am Äquator infolge der Drehung der Erde um ihre eigene Achse?

9. Der große Zeiger einer Armbanduhr ist 11 mm lang. Welchen Weg beschreibt seine Spitze **a)** an einem Tag, **b)** in einer Woche, **c)** in einem Jahre?

53. Die Berechnung des Kreisinhaltes

1) Ein Betrieb stellt in der zusätzlichen Massenbedarfsgüterproduktion Töpfe her. Es soll berechnet werden, wieviel Topfdeckel aus dem hierfür bereitgestellten Material angefertigt werden können. Zur Berechnung verwendet man die Formel für den Flächeninhalt des Kreises.

An Stelle des Kreises wollen wir uns zunächst ein regelmäßiges Sechseck denken. Die Teildreiecke, die sich durch das Einzeichnen der Diagonalen ergeben, können zu einem Rechteck zusammengesetzt werden (Abb. 86).

Vergrößert man die Anzahl der Teildreiecke im Kreis immer mehr, so nähert sich die Summe der Teilflächen immer mehr der Kreisfläche. Alle Dreiecksgrundseiten zusammen würden dann die Länge der Kreislinie $2\pi r$ haben, die große Seite des Rechtecks aus den Dreiecken die Länge πr. Die Höhen der Dreiecke und damit die andere Rechteckseite hätten die Länge des Radius r (Abb. 87). Berechnet man die Rechteckfläche, so ergibt sich:

$$F = \pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2.$$

Aus $r = \frac{d}{2}$ und $r^2 = \frac{d^2}{4}$ ergibt sich $\pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$.

Flächeninhalt des Kreises: $F = \pi r^2$ oder $F = \frac{\pi}{4} d^2$

2) Für die Berechnung der Kreisfläche gibt es zwei Wege:

1. Weg: Wir verwenden nicht die Zahlentafel. In diesem Fall rechnen wir nach der Formel $F = \pi r^2$, weil wir Brüche vermeiden wollen.

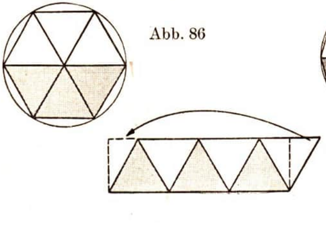


Abb. 86

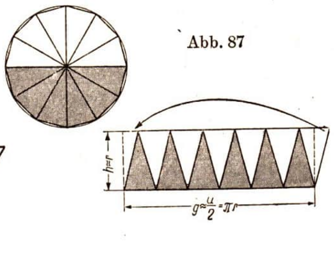


Abb. 87

2. Weg: Wir verwenden die Zahlentafel. In diesem Fall rechnen wir nach der Formel $F = \frac{\pi}{4} d^2$. Die Tafeln werden nach dieser Formel aufgestellt, da man an den Werkstücken den Durchmesser leicht messen kann (Schieblehre).

Beispiel: Zum Prägen der Topfdeckel für die Massenbedarfsgüterproduktion werden kreisförmige Bleche mit dem Durchmesser 18 cm gestanzt. Berechne die Kreisfläche!

1. Weg:	2. Weg:
Gegeben: $r = 9$ cm	Gegeben: $d = 18$ cm
Gesucht: F (in cm²)	Gesucht: F (in cm²)
$F = \pi r^2$	$F = \frac{\pi}{4} d^2$
$F = 3{,}14 \cdot 81$ (Ü: $3 \cdot 81 = 243$)	$F = \frac{\pi}{4}\ 18^2$ (Ü: $1 \cdot 324$)
Durch Nebenrechnung:	Mit der Zahlentafel:
$F = 254{,}34$	$F = 254{,}47$

Ergebnis: Die Fläche eines Kreises mit dem Durchmesser 18 cm beträgt rund 254 cm².

Merke:

1. **Vor Beginn der Rechnung überlegen wir die Maßeinheit des Ergebnisses. Die gesamte Rechnung führen wir ohne Maßeinheiten durch.**
2. **Wir überschlagen das Ergebnis und ermitteln die Größenordnung. (Setze dabei $\pi \approx 3$ und $\frac{\pi}{4} \approx 1$.)**
3. **Wir runden sinnvoll und fügen die vorher festgelegte Maßeinheit dem Ergebnis bei.**

3) Mit Hilfe der Zahlentafeln können auch Kreisflächen berechnet werden, deren Durchmesser keine ganzzahligen Werte von 1 bis 100 darstellen. Hat d einen anderen Stellenwert, so ermitteln wir durch Überschlagsrechnung die Größenordnung, die für das Ergebnis berücksichtigt werden muß.

Beispiele: Berechne die Kreisfläche (Zahlenangaben in cm bzw. cm²)!

d	$\frac{\pi}{4} d^2$	Überschlag	Ergebnis: F
5,7	$\frac{\pi}{4} \cdot 5{,}7^2$	$1 \cdot 5^2 = 25$	25,518
570	$\frac{\pi}{4} \cdot 570^2$	$1 \cdot 500^2 = 250000$	255180
0,83	$\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}83^2$	$1 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}64$	0,54106
3,5	$\frac{\pi}{4} \cdot 3{,}5^2$	$1 \cdot 4^2 = 16$ $1 \cdot 3^2 = 9$	9,6211

Merke:

Hat d mehr als 2 Ziffern, so dürfen wir diesen Durchmesser nicht zerlegen (wie bei der Umfangsberechnung). In diesem Falle müssen wir den Radius berechnen und das Ergebnis rechnerisch (Nebenrechnung) mit Hilfe der Formel $F = \pi r^2$ ermitteln.

Aufgaben

1. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius **a)** $r = 7$ cm, **b)** $r = 35$ cm, **c)** $r = 4{,}2$ cm, **d)** $r = 5{,}6$ cm!

2. Der Durchmesser eines Kreises beträgt **a)** $d = 12$ cm, **b)** $d = 16$ cm, **c)** $d = 27$ cm, **d)** $d = 45$ m, **e)** $d = 32$ mm. Berechne den Flächeninhalt!

3. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Umfang von **a)** 1,56 m, **b)** 3,25 m, **c)** 18,7 cm, **d)** 2 m, **e)** 56,6 cm, **f)** 12,56 m, **g)** 345,40 m!

4. Ein Quadrat und ein Kreis haben den gleichen Umfang von 110 cm. Welche Fläche ist größer?

5. Zeichne drei Kreise, deren Radien 2 cm, 4 cm und 6 cm messen! Berechne **a)** die Umfänge, **b)** die Inhalte der Kreise und vergleiche die Ergebnisse mit Hilfe einer Proportion!

6. Der Stamm einer alten Eiche im Park von Muskau in der Lausitz hat einen Umfang von 7,85 m. Berechne seinen Querschnitt!

7. Die Seite einer quadratischen Marmorplatte mißt 89 cm. Aus ihr wird die größtmögliche Kreisfläche als Tischplatte ausgeschnitten. Berechne **a)** die Tischfläche, **b)** den Abfall!
c) Wieviel Prozent beträgt der Abfall?

8. Eine Zugstange aus Stahl hat einen Umfang von 9,60 cm. Die höchstzulässige Zugkraft für 1 cm² Querschnitt beträgt 825 kp. Wieviel Kilopond darf der auf die Stange ausgeübte Zug höchstens betragen?

9. Wie groß ist der Blechbedarf für 20 kreisförmige Blechscheiben mit einem Durchmesser von 27 (105, 17, 43, 33) mm, wenn der Verschnitt 10% beträgt?

10. Die Bühne eines Freilichttheaters hat die Form eines Halbkreises von 41 m Durchmesser. Wie groß ist die Fläche?

11. In einer Gärtnerei wird in der heißen Jahreszeit der Boden durch Beregnungsapparate künstlich bewässert. Wie groß ist die kreisförmige Fläche, die beregnet wird, wenn der Wasserstrahl 10 m weit reicht?

12. Der Kolben einer Dampfmaschine hat einen Durchmesser von 540 mm. Berechne den Querschnitt!

54. Die Berechnung des Flächeninhaltes von Kreisausschnitten und Kreisringen

1) Technische Werkstücke stellen oft Teile eines Kreises, also Kreisausschnitte dar.

Die Größe des Kreisausschnittes A hängt von der Größe des zugehörigen Zentriwinkels α ab (Abb. 88). Aus dem Umstand, daß dem Zentriwinkel 180° $\left(\frac{1}{2} \cdot 360^\circ\right)$ die halbe Kreisfläche entspricht, dem Zentriwinkel 90° $\left(\frac{1}{4} \cdot 360^\circ\right)$ der vierte Teil der Kreisfläche usw., erkennen wir:

Je größer der Zentriwinkel α wird, desto größer wird der zugehörige Kreisausschnitt A.

Es gilt die Proportion:

Kreisausschnitt : Zentriwinkel = Kreisfläche : Vollkreis

$$A : \alpha = \pi r^2 : 360^\circ$$

$$A \cdot 360^\circ = \pi r^2 \alpha$$

Fläche des Kreisausschnitts: $A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$

Beispiel: Der Durchmesser eines Kreises beträgt $d = 54$ cm. Welchen Flächeninhalt hat der zu dem Zentriwinkel $\alpha = 48^\circ$ gehörige Kreisausschnitt A?

Gegeben: $d = 54$ cm, $r = 27$ cm; $\alpha = 48^\circ$. Gesucht: A (in cm²).

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$$

Einsetzen: $$A = \frac{\pi \cdot 27^2 \cdot 48}{360}$$

Kürzen: $$A = \frac{486}{5} \pi$$

$$A = 97{,}2\, \pi \quad (\text{Ü: } 100 \cdot 3 = 300)$$

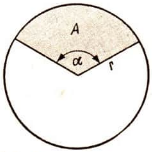


Abb. 88

Wir zerlegen, so daß wir die Spalte πn der Zahlentafel benutzen können.

$$A = 97 \cdot \pi + 0{,}2\, \pi$$

Tabelle

$$\begin{array}{rrl} & 97\,\pi = & 304{,}73 \\ + & 0{,}2\,\pi = & 0{,}62832 \\ \hline & 97{,}2\,\pi = & 305{,}35832 \end{array}$$

$$A = 305{,}358\,32$$

Ergebnis: Die Fläche des Kreisausschnittes beträgt rund 305,36 cm².

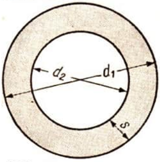


Abb. 89

2) Der Querschnitt eines Rohres ist von zwei Kreisen begrenzt. Diese bilden einen **Kreisring**.

Die Abbildung 89 zeigt den Querschnitt eines Rohres. Wie kann man die Durchmesser d_1 und d_2 messen? Wir unterscheiden den Außendurchmesser und den Innendurchmesser (letzterer wird auch „lichte Weite“ genannt). Stelle aus Pappe einen Kreisring her! Wie entsteht ein Kreisring?

Zur Berechnung der Kreisringfläche subtrahieren wir die Fläche des Innenkreises F_{II} von der Fläche des Außenkreises F_I.

Fläche des Außenkreises: $F_I = \frac{\pi}{4} d_1^2$

Fläche des Innenkreises: $F_{II} = \frac{\pi}{4} d_2^2$

Fläche des Kreisringes: $F_I - F_{II} = \frac{\pi}{4} d_1^2 - \frac{\pi}{4} d_2^2$

Wird diese Berechnung mit den Radien der Kreise durchgeführt, so erhält man eine zweite Formel für den Kreisring.

Flächeninhalt des Kreisringes:

$$F_{\text{Ring}} = \frac{\pi}{4} d_1^2 - \frac{\pi}{4} d_2^2 \quad \text{oder} \quad F_{\text{Ring}} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2$$

Merke:

Die 1. Formel benutzen wir, wenn wir mit der Zahlentafel arbeiten.

Die 2. Formel benutzen wir, wenn wir ohne Zahlentafel rechnen.

Beispiele: Ein Rohr hat einen Außendurchmesser $d_1 = 50$ mm und einen Innendurchmesser $d_2 = 28$ mm. Berechne seinen Querschnitt!

Gegeben: $d_1 = 50$ mm $\quad r_1 = 25$ mm
$d_2 = 28$ mm $\quad r_2 = 14$ mm

Gesucht: $F_I - F_{II}$ (in mm², umrechnen in cm²)

1. Weg: $F_I - F_{II} = \frac{\pi}{4} d_1^2 - \frac{\pi}{4} d_2^2$

$F_I - F_{II} = \frac{\pi}{4} 50^2 - \frac{\pi}{4} 28^2$

$F_I - F_{II} = 1963{,}5 - 615{,}75$ (der Tafel entnommen)

$F_I - F_{II} = 1347{,}75$

2. Weg: $F_I - F_{II} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$F_I - F_{II} = \pi\, 25^2 - \pi\, 14^2$

$F_I - F_{II} = 3{,}14 \cdot 625 - 3{,}14 \cdot 196$ (Ü: $3 \cdot 600 - 3 \cdot 200 = 1200$)

$F_I - F_{II} = 1962{,}5 - 615{,}44$ (durch Nebenrechnung ermittelt)

$F_I - F_{II} = 1347{,}06$

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Querschnittes beträgt rund 1350 mm² oder 13,5 cm².

Aufgaben

1. Wie groß ist der Flächeninhalt des Kreisringes mit den Radien **a)** $r_1 = 9$ cm, $r_2 = 7$ cm, **b)** $r_1 = 12$ cm, $r_2 = 9$ cm, **c)** $r_1 = 1{,}6$ cm, $r_2 = 1{,}4$ cm? **d)** Berechne für die Kreisringe der Aufgaben 1a bis c jeweils die Breite des Ringes!
2. Leite die Formel $F_{\text{Ring}} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2$ her und fertige eine Zeichnung an!

3. Der äußere Durchmesser einer Unterlegscheibe beträgt 126 mm und der innere Durchmesser 94,2 mm. Welche Fläche hat die Scheibe?

4. Ein Rohr hat einen äußeren Durchmesser von 11,5 cm und eine Wandstärke von 1,5 cm. Berechne die lichte Weite und die Fläche des Querschnittes (Skizze)!

5. Berechne die Querschnittsflächen von Stahlrohren mit folgenden Maßen:

Außendurchmesser	22 mm	16 mm	18 mm	28 mm	50 mm
Wandstärke	2 mm	2,5 mm	3 mm	6 mm	7 mm

6. Berechne den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, wenn folgende Stücke gegeben sind:
   a) Radius $r = 25$ cm, Zentriwinkel $\alpha = 60°$
   b) Radius $r = 32$ cm, Zentriwinkel $\alpha = 72°$
   c) Radius $r = 40$ cm, Zentriwinkel $\alpha = 112°$
   d) Radius $r = 56$ cm, Bogen $b = 88$ cm
   e) Radius $r = 62$ cm, Bogen $b = 57$ cm!

XIV. Körperberechnung

55. Vorbereitende Übungen

1. Nenne dir bekannte Körper und erläutere deren Körpernetze!

2. Berechne den Rauminhalt und die Oberfläche folgender Körper:
   a) Würfel, $a = 3{,}5$ cm (7 dm, 0,9 m)
   b) Quader, $a = 9{,}1$ cm (5,2 dm), $b = 3{,}4$ cm (28 cm), $c = 5$ cm (10,5 cm)!

3. Berechne das Volumen eines Prismas mit der Grundfläche 14 cm² und der Höhe 7 cm!

4. Berechne die Oberfläche eines dreiseitigen Prismas! Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 3 cm und 4 cm und der Hypotenuse 5 cm. Die Höhe des Prismas beträgt 12 cm. Zeichne vorher das Netz dieses Körpers!

5. Durch ein gerades, dreiseitiges Prisma werden Schnitte gelegt:
   a) parallel zur Grundfläche, b) senkrecht zur Grundfläche.
   Welche geometrischen Figuren stellen die Schnittflächen dar?

6. Was weißt du über die Wichte?

7. Berechne das Gewicht von
   a) 5 cm³ Silber, b) 12 dm³ Kupfer, c) 3 m³ Eisen!

56. Der Zylinder

1) Ein Körper, dessen Grund- und Deckfläche gleich große, zueinander parallele Kreisflächen sind, heißt **Kreiszylinder.** Außer von den beiden Kreisflächen wird der Kreiszylinder noch von einer gekrümmten Fläche begrenzt. Diese Fläche heißt **Mantelfläche** oder **Mantel** des Zylinders. Man unterscheidet **gerade** und **schiefe** Kreiszylinder (Abb. 90). Wir wollen uns zunächst nur mit den geraden Kreiszylindern beschäftigen, die wir kurz **Zylinder** nennen.

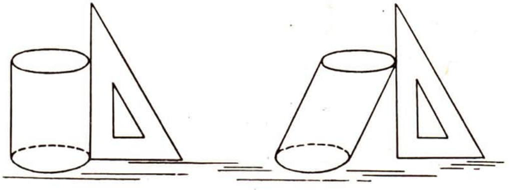


Abb. 90

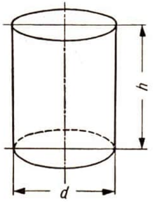


Abb. 91

An einem Zylinder werden der Durchmesser d (Schieblehre) und die Höhe h (Abstand des Mittelpunktes der Grundfläche von dem der Deckfläche) gemessen (Abb. 91).

Schnitte, die parallel zur Grundfläche liegen, ergeben als Schnittflächen Kreise. Schnitte, die senkrecht zur Grundfläche liegen, ergeben als Schnittflächen Rechtecke (Abb. 92 a bis c).

Im täglichen Leben und in der Technik treffen wir häufig zylinderförmige Gegenstände an. Manchmal erkennen wir die Zylinderform schwer,

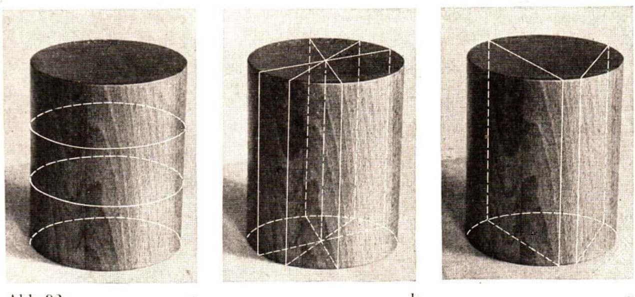


Abb. 92 a b c

weil das Werkstück oder die Maschine aus mehreren Teilen zusammengesetzt ist. Bei manchen Gegenständen denken wir nicht sofort daran, daß sie zylinderförmig sind.

Beispiele:

a) Wenn die Höhe sehr klein ist, sind es Scheiben.

b) Wenn die Höhe sehr groß ist und der Durchmesser entsprechend klein wird, sind es Stangen und Drähte.

c) Wenn der Querschnitt ein Kreisring ist, sind es Rohre.

2) Zylinder können in ihrem Aufbau mit einem Prisma verglichen werden. Das Volumen wird deshalb nach der gleichen Formel berechnet.

Merke:

Wir berechnen das Volumen eines Zylinders, indem wir die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multiplizieren. Wir beachten dabei, daß die Grundfläche ein Kreis ist, der nach der Formel für den Kreisinhalt berechnet wird.

Volumen des Zylinders: $V = G\,h$ (G ist ein Kreis)

Beispiel: Wie groß ist das Volumen eines Rundstabes, dessen Durchmesser 40 mm und dessen Länge 250 mm beträgt?

Gegeben: $d = 40\,\text{mm} = 4\,\text{cm}$; $h = 250\,\text{mm} = 25\,\text{cm}$. Gesucht: V (in cm³).

$V = G\,h$ (G ist ein Kreis)

Wir berechnen G mit der Zahlentafel: $G = \frac{\pi}{4} d^2$

$G = \frac{\pi}{4} 4^2$

$G = 12{,}566$

Einsetzen: $V = 12{,}566 \cdot 25$ (Ü: $13 \cdot 25 = 325$)

$V = 314{,}15$

Ergebnis: Das Volumen des Rundstabes beträgt rund 314 cm³.

3) Die Oberfläche des Zylinders besteht aus zwei gleich großen Kreisen, der Grund- und Deckfläche, sowie aus dem Mantel.

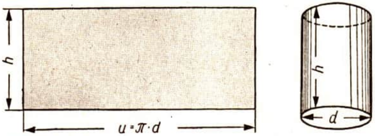


Abb. 93

Wird der Mantel „abgewickelt", erkennt man die Form des Rechtecks (Abb. 93). Die Grundseite des Mantels ist so groß wie der Umfang des Grundkreises. Die Höhe ist gleich der Höhe des Zylinders.

Fläche des Mantels: $\boldsymbol{M = \pi\, d\, h}$

Oberfläche des Zylinders: Mantel + 2 Grundflächen

$$O = M + 2\,G$$

Beispiel: Eine Konservendose ist 112 mm hoch und hat einen Durchmesser von 86 mm.

a) Die Dose soll mit einem Papierstreifen als Etikett umklebt werden. Wieviel Papier braucht man für eine Dose?

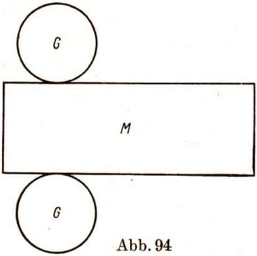


Abb. 94

b) Wieviel Blech wird zur Herstellung einer Dose gebraucht?

Gegeben: $d = 86$ mm, $h = 112$ mm

Gesucht:

M (in mm², umrechnen in dm²),

O (in mm², umrechnen in dm²)

a) Berechnung von M (in mm²)

$M = \pi\, d\, h$

$M = \pi\, 86 \cdot 112$

$M = \pi\, 9632$ (Ü: $3 \cdot 10000 = 30000$)

$M = \pi\, 9600 + \pi\, 32$

Tabelle:

$9600\,\pi = 30159$

$32\,\pi = \quad 100{,}53$

$9632\,\pi = 30259{,}53$

$M = 30259{,}53$

Ergebnis: Für das Etikettieren einer Dose werden 30260 mm² oder rund 3 dm² Papier benötigt.

b) Berechnung von O (in mm²)

$O = M + 2\,G$

$O = M + 2\frac{\pi}{4}d^2$

$O = M + 2\frac{\pi}{4} \cdot 86^2$

$O = 41877{,}13$

Tabelle:

$\frac{\pi}{4} \cdot 86^2 = \quad 5808{,}8 \mid \cdot 2$

$2\frac{\pi}{4} \cdot 86^2 = 11617{,}6$

$M \qquad = 30259{,}53$

$O \qquad = 41877{,}13$

Ergebnis: Zum Herstellen einer Konservendose benötigt man 41877 mm² oder rund 4,20 dm² Blech.

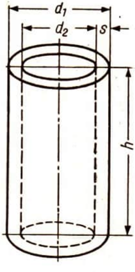


Abb. 95

4) Ein Rohr ist ein **Hohlzylinder,** dessen Grund- und Deckfläche je ein Kreisring ist (Abb. 95).

Das Volumen eines Hohlzylinders wird berechnet, indem man das Produkt aus der Grundfläche (Kreisring) und der Höhe bildet.

Volumen des Hohlzylinders: $V = G\,h$ (G ist ein Kreisring)

Beispiel: Berechne das Volumen eines Stahlrohres!
Die Länge (h) beträgt 750 mm, die lichte Weite (innerer Durchmesser d_2) 48 mm und die Wandstärke (s) 12 mm.

Beachte: $d_1 = d_2 + 2s$
Gegeben: $d_1 = 72$ mm; $d_2 = 48$ mm; $s = 12$ mm; $h = 750$ mm
Gesucht: V (in mm³, umrechnen in dm³)

$$V = G\,h \quad (G \text{ ist ein Kreisring})$$

$$G = \frac{\pi}{4}d_1^2 - \frac{\pi}{4}d_2^2$$
$$G = \frac{\pi}{4}72^2 - \frac{\pi}{4}48^2$$
Tabelle: $G = 4071{,}5 - 1809{,}6$
$$G = 2261{,}9 \text{ mm}^2$$

Einsetzen: $V = 2261{,}9 \cdot 750$
$V = 22619 \cdot 75$ (Ü: $20000 \cdot 80 = 1600000$)
$V = 1696425$ $\quad 1696425 \text{ mm}^3 \approx 1{,}696 \text{ dm}^3$

Ergebnis: Das Volumen des Eisenrohres beträgt rund 1,7 dm³.

Aufgaben

1. Berechne Mantelfläche, Oberfläche und Rauminhalt folgender Zylinder!
   a) $r = 5$ cm; $h = 10$ cm b) $d = 15$ cm; $h = 2$ cm
   c) $r = 2{,}5$ cm; $h = 60$ cm d) $r = 7{,}5$ cm; $h = 5$ cm

2. Wieviel Milliliter Wasser fassen folgende Standzylinder?
   a) $d = 2$ cm; $h = 12$ cm b) $d = 2{,}5$ cm; $h = 18$ cm
   c) $d = 3{,}2$ cm; $h = 26$ cm d) $d = 4$ cm; $h = 190$ mm

3. Ein zylindrischer Brunnen soll gegraben werden ($d = 1{,}50$ m).
   a) Wieviel Kubikmeter Erdreich sind auszuschachten, wenn man 12 m tief graben muß?
   b) Wieviel Fuhren sind das, wenn 1 Wagen 2 m³ faßt?

4. Aluminiumtöpfe haben folgende Innenmaße:

d	14 cm	16 cm	18 cm	20 cm	22 cm	24 cm
h	10 cm	11 cm	12 cm	13 cm	14 cm	15 cm

Wieviel Liter faßt jeder Topf?

5. Zwei Hohlmaße haben folgende Innenmaße:

Halblitermaß: $d = 69$ mm; $h = 134$ mm,
Viertellitermaß: $d = 55$ mm; $h = 106$ mm.

Untersuche, ob man die Maße bis zum Rande füllen muß!

6. Bechergläser für den Chemieunterricht haben folgende Maße:

Höhe	70 mm	100 mm	160 mm	200 mm
Weite	30 mm	50 mm	80 mm	100 mm

Wieviel fassen die einzelnen Gläser?

7. Ein zylinderförmiges Gefäß ist 4 m hoch und hat einen Durchmesser von 1,40 m. Wieviel solcher Gefäße werden in einem Chemiewerk benötigt, um 46 m³ Salzsäure zu lagern?

8. Ein Stahlbehälter von der Form eines quadratischen Prismas (Quadratseite $a = 45$ cm, Höhe $h = 90$ cm) soll mit Flüssigkeit gefüllt werden. Wieviel Liter muß man einfüllen, wenn der Flüssigkeitsspiegel 20 cm unter dem oberen Rand stehen soll (Skizze)?

9. Bis zu welcher Höhe füllt 1 Liter Wasser ein Gefäß von der Form eines Zylinders, wenn der Halbmesser des Grundkreises 4 cm beträgt?

10. Ein Rechteck mit den Seiten a und b wird um die Seite a gedreht. Wie groß sind Rauminhalt und Oberfläche des entstandenen Zylinders? **a)** $a = 9$ cm; $b = 7$ cm **b)** $a = 15$ cm; $b = 18$ cm

57. Die Berechnung des Gewichtes eines Körpers

1) Bei einer Schrottsammlung lieferte eine Gruppe Junger Pioniere eine rechteckige Eisenplatte ab. Da keine ausreichend große Waage im Schulhof zur Verfügung stand, wurde das Gewicht geschätzt. Das Ergebnis befriedigte die Jungen Pioniere nicht, und so kamen sie auf den Gedanken, das Gewicht zu berechnen.

Sie wußten aus dem Physikunterricht, daß das Gewicht eines Körpers berechnet wird, indem man die Maßzahl des Volumens mit der Maßzahl der Wichte des Werkstoffes multipliziert.

Gewicht = Volumen · Wichte

$$P = V \cdot \gamma$$

Die Wichte ist das Verhältnis von Gewicht und Volumen eines Körpers. (Symbol: γ.) Zwischen Gewicht und Volumen herrscht Proportionalität. Die Wichte ist der Proportionalitätsfaktor.

Die Maßeinheit der Wichte ist Pond je Kubikzentimeter $\left(\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$.

In der Technik benutzt man oft auch größere Maßeinheiten, nämlich:

Kilopond je Kubikdezimeter $\left(\frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}\right)$

oder Megapond je Kubikmeter $\left(\frac{\text{Mp}}{\text{m}^3}\right)$.

Beispiel: Die obenerwähnte Eisenplatte hatte folgende Maße: Länge 1,05 m, Breite 9 dm, Dicke 2 cm. Die Wichte des Stahls beträgt 7,86 $\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$. Wieviel Kilopond wiegt die Platte?

Gegeben: $a = 105$ cm, $b = 90$ cm, $c = 2$ cm, $\gamma = 7{,}86\ \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$

Gesucht: V (in cm³, umrechnen in dm³)
P (in kp)

1. Berechnung von V

$V = a\,b\,c$
$V = 105 \cdot 90 \cdot 2$
$V = 18\,900$

2. Berechnung von P

$P = V\gamma$
$P = 18{,}9 \cdot 7{,}86$ (Ü: 140)
$P = 148{,}554$

Das Volumen beträgt 18900 cm³ = 18,9 dm³

Ergebnis: Die Eisenplatte wiegt rund 149 kp.

2) Wenn wir das Gewicht (P) und das Volumen (V) eines Körpers kennen, so können wir die Wichte (γ) berechnen und somit feststellen, aus welchem Werkstoff der Körper besteht.

$$P = V\gamma \qquad | : V$$
$$\frac{P}{V} = \gamma$$

Merke: **Wir berechnen die Wichte eines Stoffes, indem wir das Gewicht eines Körpers durch sein Volumen dividieren.**

$$\gamma = \frac{P}{V}$$

Beispiel: Ein quaderförmiges Werkstück ist 3 cm lang, 4 cm breit und 1 cm hoch. Es wiegt 32,6 Pond. Woraus besteht es?

Gegeben: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 1$ cm, $P = 32{,}6$ p

Gesucht: V (in cm³), γ $\left(\text{in } \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$

1. Berechnung von V

$V = a\,b\,c$
$V = 3 \cdot 4 \cdot 1$
$V = 12$

2. Berechnung von γ

$\gamma = \frac{P}{V}$
$\gamma = \frac{32{,}6}{12}$
$\gamma = 2{,}72$

Das Volumen beträgt 12 cm³.

Aus der Tabelle entnehmen wir: $\gamma = 2{,}72\ \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$ ist die Wichte von Aluminium.

Ergebnis: Das Werkstück besteht aus Aluminium.

Aufgaben

1. Berechne den Rauminhalt und das Gewicht folgender Quader:

	Länge a	Breite b	Höhe h	Werkstoff	Wichte
a)	2,9 cm	1,3 cm	0,7 cm	Blei	11,4 p/cm³
b)	41 cm	23 cm	19 cm	Aluminium	2,5 p/cm³
c)	25 cm	4 cm	0,75 cm	Grauguß	7,2 p/cm³
d)	85 cm	42 cm	7 cm	Granit	2,7 p/cm³
e)	1,2 m	0,80 m	12 cm	Sandstein	2,3 p/cm³

2. In folgender Übersicht sind die Kantenlängen und Gewichte von Würfeln aus verschiedenem Material zusammengestellt. Ermittle die verwendeten Werkstoffe!

	Kantenlänge	Gewicht
a)	12 cm	12,442 kp
b)	4 cm	727 p
c)	25 cm	39,063 kp
d)	30 cm	72,9 kp
e)	33 cm	82,655 kp

3. Die Ladekästen (Pritschen) einiger gebräuchlicher deutscher Lastkraftwagen haben folgende Maße:

Pritschenlänge	4,0 m	4,4 m	5,0 m
Pritschenbreite	2,05 m	2,3 m	2,35 m
Wandhöhe	0,47 m	0,465 m	0,5 m
Nutzlast	3000 kp	3500 kp	6000 kp

a) Berechne für jeden Wagen das Fassungsvermögen der Kästen!

b) Prüfe nach, ob bei einer Beladung mit Sand (Wichte 2,1 p/cm³) oder mit Schlacke (Wichte 0,7 p/cm³) die zulässige Nutzlast erreicht wird, und gib an, wieviel Kubikmeter von jedem dieser Stoffe höchstens geladen werden dürfen!

4. Große Pflastersteine aus Granit sind 20 cm lang, 15 cm breit und 13 cm hoch. Wieviel Steine kann jeder Wagen aus Aufg. 3 laden?

5. Ein Betrieb erhält 3 m lange Rundstäbe aus Stahl, und zwar 25 Stück 14 mm ⌀, 10 Stück 40 mm ⌀, 8 Stück 150 mm ⌀ und 5 Stück 300 mm ⌀.

a) Berechne das Gewicht jedes Stabes! (Entnimm die Wichte der Zahlentafel.)

b) Berechne das Gesamtgewicht!

6. Ein 6 m langes Kupferrohr hat einen äußeren Durchmesser von 36 mm, einen inneren Durchmesser von 30 mm. Berechne **a)** seinen Querschnitt, **b)** sein Gewicht! (Wichte in der Zahlentafel!)

7. Ein Ziegelstein nach DIN 105 ist 25 cm lang, 12 cm breit, 6,5 cm hoch (Wichte 1,8 p/cm³).
   a) Welchen Rauminhalt, welches Gewicht hat er?
   b) Wieviel Ziegelsteine könnte ein LKW (Aufg. 3) höchstens laden?

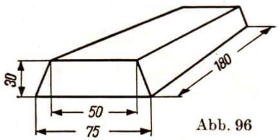


Abb. 96

8. Berechne das Gewicht des Führungsstückes aus Grauguß ($\gamma = 7{,}6$ p/cm³) nach den Maßen der Abbildung 96 (Maße in mm)!

58. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Du füllst in 3 Standzylinder mit den lichten Weiten **a)** $d = 2{,}8$ cm, **b)** $d = 3{,}4$ cm, **c)** $d = 4{,}1$ cm je 75 cm³ Wasser. Wie hoch steht das Wasser in jedem Zylinder?

2. Bietet eine quadratische Tischplatte von 60 cm Länge, eine rechteckige von 50 cm Länge und 70 cm Breite oder eine kreisförmige von 65 cm Durchmesser mehr Fläche?

3. Wie groß ist der Umfang von Kreissägeblättern, die den Durchmesser **a)** 25 cm, **b)** 40 cm, **c)** 60 cm haben?

4. Läßt sich ein Faß, dessen größter Umfang 7 m beträgt, durch eine 2 m breite Kellertür bringen?

5. In den VEB-Ölwerken Riesa wird das Speiseöl in zylindrische Fässer abgefüllt ($d = 86$ cm, $h = 120$ cm). Wieviel Fässer kann man aus einem quaderförmigen Ölbehälter ($l = 2{,}20$ m, $b = 2{,}20$ m, $h = 2{,}00$ m) zum Versand fertigmachen? Runde das Ergebnis!

6. Ein Betriebsschlosser stellt Ofenrohre von 120 cm Länge her. Wie muß er das Blech zuschneiden, wenn das Rohr einen Durchmesser von 15 cm haben soll? Gib für die Bördelnaht 2 cm zu!

7. Ein zylinderförmiger Maissilo einer LPG ist 4,2 m hoch und hat einen Durchmesser von 3,5 m.
   a) Wie groß ist sein Volumen?
   b) Wieviel Tage reicht der Inhalt, wenn täglich 0,25 m³ Futter verbraucht werden?

8. Eine Anschlagsäule hat einen Durchmesser von 1,40 m und ist über dem Sockel 2,50 m hoch. Wie groß ist die Fläche zum Bekleben?

9. Eine Torbogenöffnung soll gemauert werden. Der Maurer erhält folgende Maße: $r = 2{,}75$ m, Zentriwinkel $\alpha = 87°$. Fertige eine Skizze an und berechne die Bogenlänge!

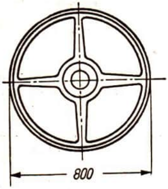


Abb. 97

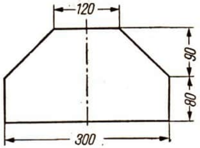


Abb. 98

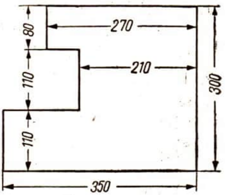


Abb. 99

10. Berechne die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades (Abb. 97)! Das Schwungrad hat einen Durchmesser von $d = 800$ mm und macht in 1 Minute 80 Umdrehungen.

11. Um Dichtungen für Dampfkessel herzustellen, verwendet man den Werkstoff Kautasit. Er ist elastisch und hitzebeständig. Die quadratische Werkstoffplatte ist 120 cm × 120 cm groß. Wieviel ringförmige Dichtungen können daraus gestanzt werden, wenn

a) der Außendurchmesser 145 mm, der Innendurchmesser 80 mm,

b) der Außendurchmesser 55 mm, der Innendurchmesser 15 mm beträgt?

c) Berechne für jede Aufgabe den Abfall in Quadratzentimetern und in Prozenten und fertige eine Skizze an!

Aus der metallverarbeitenden Industrie

12. Berechne die in den Abbildungen 98 und 99 dargestellten Flächen der ausgeschnittenen Kupferbleche (Maße in mm)! Das Blech ist 5 mm dick. Berechne das Gewicht jedes einzelnen Bleches! Entnimm die Wichte der Tabelle!

13. Welche Außendurchmesser haben Stahlrohre mit einem äußeren Querschnittsumfang von 69,1 (157,1, 44,0, 182,2, 88,0, 37,7, 150,8, 56,6, 94,2, 141,4) mm? Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen!

14. Ein Werkstück aus Grauguß $\left(\gamma = 7{,}2 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$ mit dem Gewicht 80 kp erhält durch Bearbeitung die Form eines Zylinders. Der Durchmesser beträgt nun 25 cm und die Höhe 20 cm. Berechne das Gewicht des Werkstückes! Wieviel Prozent beträgt der Bearbeitungsabfall?

15. Aus einem Kupferbarren (100 mm × 100 mm × 700 mm) wird Kupferdraht hergestellt. Berechne die Länge, wenn der Durchmesser **a)** 6 mm, **b)** 0,08 mm beträgt!

16. Wieviel Kilogramm wiegt der Bleimantel eines Kabels von 3 km Länge und einer Wandstärke von 3 mm? Der Durchmesser des Kabels ohne Mantel beträgt 44 mm.

17. Ein Stück Blech soll zu Wellblech, dessen Querschnitt sich aus aneinandergefügten Halbkreisen mit dem Radius $r = 2$ (3; 3,5; 4; 5) cm zusammensetzt, geformt werden.

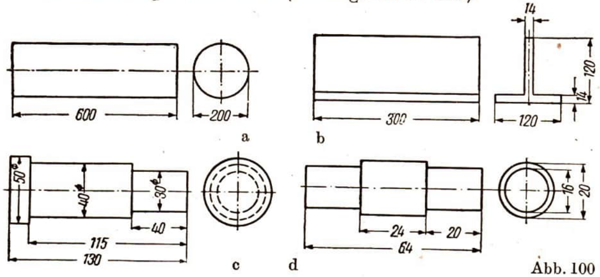
a) Fertige dazu eine Zeichnung an und berechne ($r = 2$ cm), wieviel Meter glattes Blech man zu 1 m Wellblech braucht!

b) Untersuche, ob man an Blech spart, wenn man der Rechnung einen anderen der angeführten Radien zugrunde legt!

18. Auf ein Stahlrohr, das als Stütze verwendet wird ($d_1 = 60$ mm, $d_2 = 30$ mm), wirkt eine Kraft $P = 1500$ kp. Wie groß ist der Druck $\left(\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Querschnitt}}\right)$?

19. Statt Stahlrohre werden in der Technik jetzt oft Plastikrohre verwendet, weil diese nicht rosten. Vergleiche das Gewicht von zwei Rohren gleicher Abmessungen (Außendurchmesser 15 cm, Innendurchmesser 13 cm, Länge 200 cm)! Das eine Rohr besteht aus Plastik Hart PVC ($\gamma = 1{,}4$ p/cm³). Das andere besteht aus Stahl ($\gamma = 7{,}8$ p/cm³).

20. Berechne das Volumen und das Gewicht der Werkstücke aus Stahl in den Abbildungen 100a bis d (Maßangaben in mm)!



a b c d

Abb. 100

21. Ein Blechstreifen ist 1 m lang und 9,5 cm breit.

a) Wieviel quadratische Stücke kannst du abschneiden, wenn die Quadratseite 9 cm lang sein soll?

b) Wieviel Kreisscheiben kannst du ausstanzen, wenn der Durchmesser der Scheiben 9 cm betragen soll?

c) Berechne für beide Aufgaben den Abfall in Quadratzentimetern und in Prozent und fertige Skizzen an!

22. Ein zylindrisches Gefäß ist 42 cm hoch und hat einen Durchmesser von 26 cm. Es ist zu $\frac{2}{3}$ mit Teer gefüllt. Berechne das Gewicht des Teers! (Wichte des Teers $1{,}2\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.)

23. Zur Entwässerung eines Wiesenstückes soll ein 145 m langer geradlinig verlaufender Graben mit trapezförmigem Querschnitt ausgehoben werden. Die untere Breite soll 40 cm, die obere Breite 120 cm und die Tiefe 60 cm betragen.

a) Wieviel Kubikmeter Erde müssen ausgeschachtet werden?

b) Wieviel Fuhren müssen abgefahren werden, wenn die Tragfähigkeit eines Wagens 1,5 m³ zuläßt?

XV. Darstellende Geometrie

59. Grundriß, Aufriß und Kreuzriß

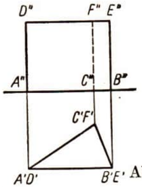


Abb. 101

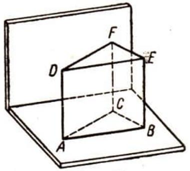


Abb. 102

Wir wissen bereits, daß aus dem Grundriß allein nicht immer auf die Größe und die Form des abgebildeten Gegenstandes geschlossen werden kann. Um auch die Höhen zu kennzeichnen, wird dem Grundriß ein Aufriß beigefügt, oder der Grundriß wird mit einem Höhenmaßstab oder mit Höhenzahlen versehen. Aus dem Grundriß und dem dazugehörenden Aufriß eines Punktes geht seine Lage im Raum eindeutig hervor. In der Abbildung 101 sind Grundriß und Aufriß eines Körpers gezeichnet; die Eckpunkte tragen die üblichen Bezeichnungen. Es ist sofort ersichtlich, daß ein gerades dreikantiges Prisma abgebildet wurde, das auf der Grundrißtafel steht (Abb. 102).

Beim praktischen Zeichnen treten häufig sehr viele Punkte auf kleinem Raum auf, so daß eine Bezeichnung unzweckmäßig, ja oftmals gar nicht möglich ist. Fehlen aber die Bezeichnungen, ist nicht immer zu erkennen, welche Punkte des einen Risses zu bestimmten Punkten des anderen Risses gehören, wenn mehrere Punkte auf der gleichen Ordnungslinie liegen.

Beispiel: Die Abbildung 103 zeigt als Grundriß und Aufriß des Gegenstandes je ein Quadrat, eine eindeutige Form geht aber aus dieser Darstellung nicht hervor. Der Gegenstand kann **a)** ein Würfel, **b)** ein schiefgestelltes Rechteck, **c)** eine aus zwei Quadraten zusammengesetzte

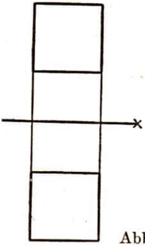


Abb. 103

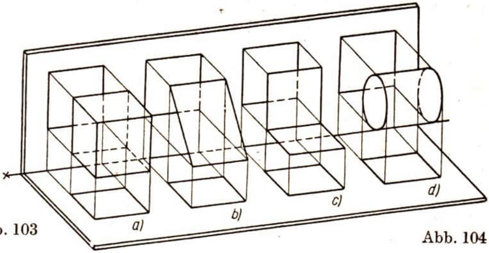


Abb. 104

Figur oder **d)** ein liegender Zylinder sein (Abb. 104). Durch Bezeichnung der Eckpunkte ließe sich nur in den Beispielen **a)** bis **c)** Klarheit schaffen.

Es ist darum beim technischen Zeichnen üblich, in solchen Fällen zum Grundriß und Aufriß noch eine dritte Ansicht hinzuzufügen. Dazu wird meist die Seitenansicht von links gewählt. Die Zeichnung, die diese Ansicht wiedergibt, heißt **Kreuzriß**. Wir denken uns den Kreuzriß auf einer ebenen Fläche entstanden, die senkrecht zur Grund- und Aufrißtafel steht. Sie wird **Kreuzrißtafel** genannt. Grundrißtafel, Aufrißtafel und Kreuzrißtafel stoßen aneinander wie die Wände eines Zimmers oder die Wände einer Schachtel; sie bilden eine **rechtwinklige räumliche Ecke** (Abb. 105). Die Abbildung **106** zeigt, wie Grundriß, Aufriß und Kreuzriß eines Quaders auf den drei Tafeln entstehen.

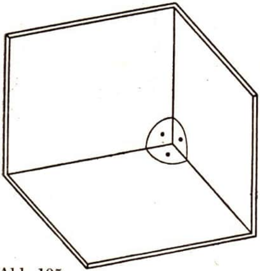


Abb. 105

Der Kreuzriß wird mit den gleichen Buchstaben oder Ziffern wie das Original bezeichnet, hinzugefügt werden drei hochgestellte Striche (zum Beispiel A''', gesprochen: A-drei-Strich). Körperkanten und Umrißlinien, die von der linken Seite aus sichtbar sind, werden mit Vollinien, verdeckte Körperkanten mit Strichlinien gezeichnet.

Beim Zeichnen liegen alle drei Rißtafeln in einer Ebene. Wir denken uns die rechtwinklige, räumliche Ecke so in die Ebene geklappt, wie es die Ab-

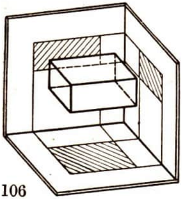


Abb. 106

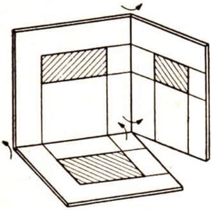


Abb. 107

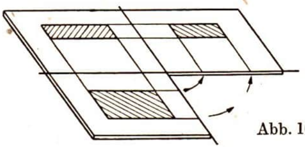


Abb. 108

bildungen 107 und 108 zeigen. Die Achsen, um die geklappt wurde, bilden das **Achsenkreuz.** Die Abbildung 109 zeigt die drei Risse des Körpers in ihrer Anordnung gegenüber dem Achsenkreuz.

Der dritte Riß ist jeweils durch zwei Risse festgelegt.

Beispiel: Konstruiere den Kreuzriß eines Punktes, wenn Grundriß und Aufriß gegeben sind!

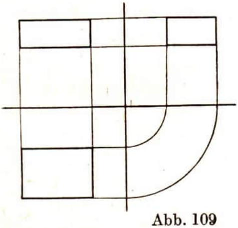


Abb. 109

Im Aufriß wird eine Parallele zur waagerechten Achse gezogen. Im Grundriß wird eine Parallele mit der senkrechten Achse zum Schnitt gebracht. Vom Mittelpunkt des Achsenkreuzes wird durch den Schnittpunkt ein Kreisbogen geschlagen und mit der waagerecht gezeichneten Achse zum Schnitt gebracht. Von diesem Schnittpunkt aus wird eine Parallele zur senkrecht gezeichneten Rißachse gezogen und ergibt im Schnittpunkt mit der waagerechten Parallelen den Kreuzriß des Punktes (Abb. 110).

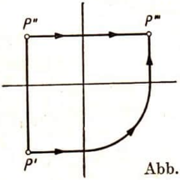


Abb. 110

Werden die Sätze über die Abbildung im Grund- und Aufriß auf die Abbildung in drei Rissen angewendet, so ergeben sich folgende wichtige Sätze:

1. **Liegen Strecken parallel zu einer Tafel, so werden sie dort in wahrer Größe abgebildet.**
2. **Liegen Strecken senkrecht zu einer Tafel, so werden sie dort als Punkte abgebildet.**
3. **Ist eine ebene Figur parallel zu einer Bildtafel, so wird sie auf dieser Tafel deckungsgleich abgebildet.**
4. **Steht eine ebene Figur senkrecht auf einer Bildtafel, so wird sie auf dieser Tafel als Strecke abgebildet.**

Aufgaben

1. Zeichne Grundriß, Aufriß und Kreuzriß eines Punktes P, der 2,5 cm über der Grundrißtafel, 3 cm vor der Aufrißtafel und 2 cm vor der Kreuzrißtafel liegt!

2. Wo liegen die drei Risse eines Punktes, der sich
a) auf der Grundrißtafel, **b)** auf der Aufrißtafel,
c) auf der Kreuzrißtafel befindet! Fertige Skizzen an!

3. Eine Strecke steht senkrecht zur Grundrißtafel. Welche Lage hat sie zu den anderen Bildtafeln und wie wird sie in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß abgebildet?

4. Untersuche Grundriß, Aufriß und Kreuzriß einer Strecke (Fläche), die **a)** auf der Aufrißtafel, **b)** auf der Kreuzrißtafel senkrecht steht!

5. Eine ebene Figur, zum Beispiel ein Quadrat, ist zur Aufrißtafel parallel. Welche Lage hat die Figur zu den anderen Bildtafeln? Wie wird sie in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß abgebildet?

6. Zeichne Grundriß, Aufriß und Kreuzriß eines Quaders ($a = 60$ mm, $b = 45$ mm, $c = 35$ mm) in Parallelstellung!

7. Zeichne Grundriß, Aufriß und Kreuzriß des in Abbildung 111 im Schrägbild dargestellten Körpers, wenn er
a) in Parallelstellung,
b) gegenüber der Parallelstellung um 45° auf der Grundrißtafel im Uhrzeigersinne gedreht ist!

8. Zeichne die in den Abbildungen 112a und b im Schrägbild dargestellten Werkstücke in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß!

9. Zeichne den Grundriß des in Abbildung 113 in Aufriß und Kreuzriß gegebenen Körpers!

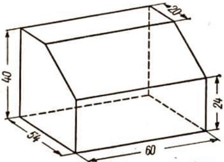


Abb. 111

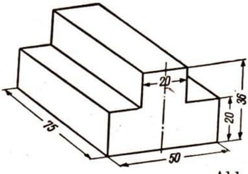


Abb. 112a

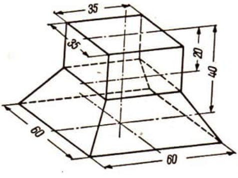
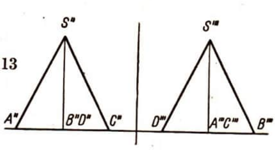


Abb. 112b

Abb. 113



10. Zeichne den Kreuzriß der in den Abbildungen 114 und 115 in Grundriß und Aufriß gegebenen Körper!

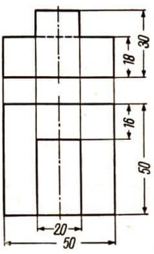


Abb. 114

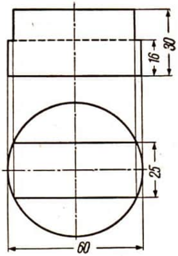


Abb. 115

60. Die Kavalierperspektive

Wird ein Gegenstand im Grund-Aufriß-Verfahren dargestellt, so kann man zwar ohne Schwierigkeiten seine Maße entnehmen, man kann sich aber die Gestalt des Gegenstandes nur schwer vorstellen. Die Darstellung in Grund- und Aufriß ist zwar weitgehend *maßgerecht*, aber sie ist wenig *anschaulich*. Deshalb werden neben maßgerechten Zeichnungen noch anschauliche Darstellungen angefertigt. Diese anschaulichen Darstellungen sind nicht in allen Strecken maßgerecht. Beide Darstellungsformen nebeneinander haben wir schon auf Ausstellungen und in Zeitungsartikeln sehen können.

1) Ein anschauliches Bild des Gegenstandes ergibt sich, wenn man vom Aufriß aus alle Strecken, die senkrecht zur Aufrißtafel stehen, in einer bestimmten Richtung aufträgt. Diese Strecken werden, da sie sozusagen in die Tiefe des Raumes führen, **Tiefenstrecken** genannt. Die Tiefenstrecken werden entweder in wahrer Größe oder auf einen (echten) Bruchteil verkürzt gezeichnet. Die Abbildung 116 zeigt Bilder eines Würfels, die auf diese Weise entstanden sind. Sie erwecken den Eindruck einer Ansicht schräg von rechts oben (Abb. 116a; b; c), schräg von oben (Abb. 116d) oder schräg von der Seite (Abb. 116e). Besonders anschaulich wirkt eine Darstellung, bei der die Tiefenstrecken unter 45° geneigt und auf die Hälfte verkürzt sind (Abb. 115b). Sie wird **Kavalierperspektive**[1] genannt.

In der Kavalierperspektive werden alle Strecken, die auf der Aufrißtafel liegen oder zu dieser parallel sind, in wahrer Größe abgebildet. Solche

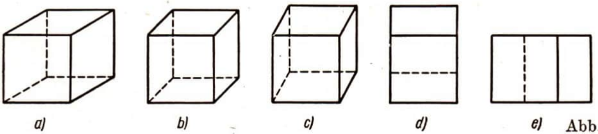


Abb. 116

[1] Diese Bezeichnung stammt wahrscheinlich aus der Praxis des Festungsbaues im 18. Jahrhundert.

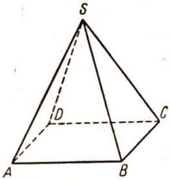


Abb. 117

Strecken nennt man **Frontstrecken**. Strecken, die eine andere Lage haben, werden nicht in wahrer Größe abgebildet. Alle Tiefenstrecken werden auf die Hälfte verkürzt. Ebene Figuren, die auf der Aufrißtafel liegen oder zu dieser parallel sind, werden deckungsgleich abgebildet. Das ist zum Beispiel an den Würfelbildern in Abbildung 116, bei denen die Vorder- und Rückflächen deckungsgleich sind, gut zu erkennen. Figuren, die eine andere Lage haben, werden im allgemeinen nicht deckungsgleich abgebildet. So sind die Bilder der Grundfläche, der Deckfläche, der linken und der rechten Seitenfläche des Würfels in der Abbildung 116 entweder Parallelogramme oder Rechtecke oder Strecken.

Bei einer Abbildung in Kavalierperspektive werden ebenfalls die sichtbaren Kanten und Umrißlinien des Körpers mit Vollinien, die unsichtbaren Kanten mit Strichlinien gezeichnet. Punkte, Linien und Flächen erhalten die gleiche Buchstabenbezeichnung wie der Gegenstand (Abb. 117).

2) Einige Beispiele sollen die Konstruktion von ebenen Figuren in Kavalierperspektive erläutern.

Beispiel 1:

Es soll ein Quadrat in Kavalierperspektive abgebildet werden (Abb. 118). Die Seiten AB und CD liegen parallel zur Rißachse. Das Quadrat wird zunächst als Hilfsfigur $A_0B_0C_0D_0$ in wahrer Größe gezeichnet. Die Seite AB fällt mit der Seite A_0B_0 der Hilfsfigur zusammen. Diese zur Rißachse parallele Strecke stellt die Grundlinie der Konstruktion dar. Die Seiten BC und DA werden als Tiefenstrecken unter einem Winkel von 45° zur Grundlinie und auf die Hälfte verkürzt gezeichnet. Die Strecke CD ist eine Frontstrecke und wird in wahrer Größe abgebildet. Gegenüberliegende Quadratseiten sind auch im Bild parallel. Man kann sich denken, daß das Bild durch Umklappen der Hilfsfigur entsteht. (Vergleiche dazu auch die Darstellung der Grund- und Deckfläche des Würfels in Abbildung 116b!)

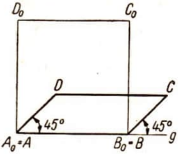


Abb. 118

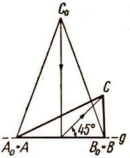


Abb. 119

Beispiel 2:

Es soll ein gleichschenkliges Dreieck in Kavalierperspektive abgebildet werden (Abb. 119).

Für die Abbildung von Strecken auf der Grundrißtafel, die weder parallel zur Aufrißtafel (Frontstrecken) noch senkrecht zu dieser (Tiefenstrecken) sind, gibt es keine einfache Zeichenregel. Man muß vielmehr die Endpunkte dieser Strecken abbilden und die Bilder dieser Punkte miteinander verbinden. Man zeichnet zunächst den Grundriß in wahrer Größe als Hilfsfigur und wählt eine Grundlinie für die Konstruktion. Diese Grundlinie muß parallel zur Rißachse verlaufen. Wir zeichnen in der Hilfsfigur A_0B_0 parallel zur Rißachse und betrachten diese Strecke als Grundlinie. Vom Punkt C_0 der Hilfsfigur wird das Lot auf die Grundlinie gefällt. Dieses Lot wird als Tiefenstrecke unter 45° und auf die Hälfte verkürzt abgebildet. Nun werden die Strecken AC und BC als Verbindungslinien gezeichnet.

Enthält die Figur keine geraden Linien, die parallel zur Rißachse sind und damit als Grundlinien gewählt werden können, so muß eine Grundlinie angenommen werden. Zweckmäßig wählt man dazu eine Parallele zur Rißachse durch den vordersten Eckpunkt der Figur, wie dies in Abbildung 120 am Beispiel eines schräggestellten Rechtecks gezeigt wird.

Als Grundlinie kann auch eine Gerade gewählt werden, die die Figur schneidet, zum Beispiel eine zur Rißachse parallele Diagonale (Abb. 121).

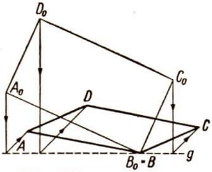


Abb. 120

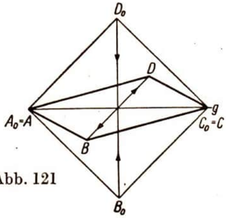


Abb. 121

Zusammenfassung:

Für die Abbildung in Kavalierperspektive gilt:

1. **Frontstrecken werden in wahrer Größe abgebildet. Frontflächen werden deckungsgleich abgebildet.**
2. **Tiefenstrecken werden unter einem Winkel von 45° zur Richtung der Rißachse und auf die Hälfte verkürzt abgebildet.**
3. **Parallele gerade Linien werden im allgemeinen wieder als parallele Geraden abgebildet.**

3) Zur Darstellung eines Körpers in Kavalierperspektive zeichnet man zunächst den Grundriß dieses Körpers in Kavalierperspektive. Von den einzelnen Punkten des Grundrisses werden die Höhen, die ja parallel zur Aufrißebene liegen, in wahrer Größe aufgetragen. Zur Kontrolle der Zeichengenauigkeit nutzt man aus, daß Figuren deckungsgleich abgebildet werden, wenn sie zur Aufrißtafel parallel sind. Eine andere Möglichkeit besteht darin, zunächst den Aufriß als Hilfsfigur zu zeichnen und von den Punkten des Aufrisses aus die entsprechenden Tiefenstrecken zu zeichnen. Auch hierbei dient zur Kontrolle, daß Figuren, die zur Aufrißtafel parallel sind, deckungsgleich abgebildet werden. Eine weitere Zeichenkontrolle ergibt sich aus der Tatsache, daß parallele gerade Linien als Parallelen abgebildet werden.

Aufgaben

1. Zeichne einen Würfel von 5 cm Kantenlänge in Kavalierperspektive (Parallelstellung)!

2. Zeichne einen Quader, dessen Kanten 2,8 cm, 4,4 cm und 6,2 cm lang sind, wenn er **a)** auf seiner größten Fläche, **b)** auf seiner kleinsten Fläche in Parallelstellung steht!

3. Zeichne eine quadratische Pyramide (Länge der Kanten an der Grundfläche 4 cm, Höhe 6,5 cm) in Parallelstellung, wenn sie **a)** mit ihrer Grundfläche, **b)** mit ihrer Spitze auf der Grundrißtafel steht!

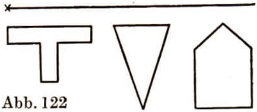


Abb. 122

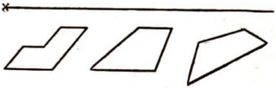


Abb. 123

4. Die in der Abbildung 122 gezeichneten Figuren liegen auf der Grundrißebene. Bilde sie in natürlicher Größe in Kavalierperspektive ab!

5. In der Abbildung 123 sind ebene, auf der Grundrißtafel liegende Figuren in Kavalierperspektive dargestellt. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der Figuren!

   Anmerkung: Überlege, wie die Darstellung in Kavalierperspektive entstanden ist! Gehe von der Abbildung aus und verfolge den Gang der Konstruktion zurück!

6. Zeichne die in der Abbildung 124 in Grundriß und Aufriß gegebenen Werkstücke in Kavalierperspektive!

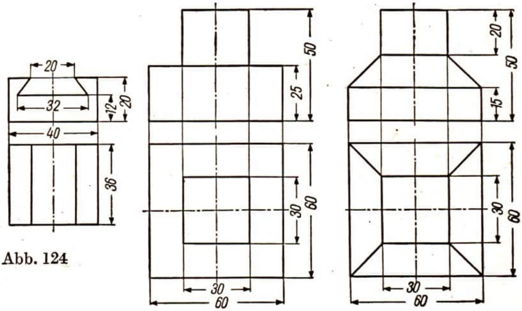


Abb. 124

7. Zeichne einen Würfel von 4,2 cm Kantenlänge, der „über Eck“ steht, das heißt, der gegenüber der Parallelstellung um 45° gedreht ist!

8. Ein regelmäßiges Sechseck (Seitenlänge 3 cm) liegt in einer Höhe von 4,5 cm über der Grundrißtafel. Bilde es in Kavalierperspektive ab!

Anmerkung: Fasse das Sechseck als Deckfläche eines 4,5 cm hohen geraden Prismas auf!

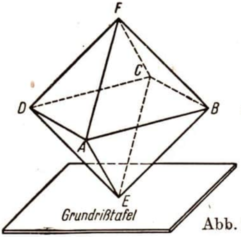


Abb. 125

9. In der Abbildung 125 ist ein Körper in Kavalierperspektive dargestellt. Zeichne Grundriß und Aufriß!

61. Die Abbildung des Kreises in Kavalierperspektive

1) Kreise, die eine parallele Lage zur Aufrißtafel haben, werden als deckungsgleiche Kreise abgebildet. Es sind Frontflächen. Haben sie eine andere Lage, werden sie im allgemeinen nicht als Kreise abgebildet.

Hat der Kreis eine parallele Lage zur Grundrißtafel, so zeichnet man zunächst wieder eine Hilfsfigur. Der waagerecht liegende Durchmesser des Hilfskreises dient als Grundlinie der Konstruktion. Diesen Durchmesser unterteilt man gleichmäßig und errichtet in den Teilpunkten senkrechte Sehnen (Abb. 126). Die Sehnen sind im gesuchten Kreis Tiefenstrecken. Sie werden von der Grundlinie aus auf die Hälfte verkürzt und unter einem Winkel von 45° abgebildet. Verbindet man nun die Endpunkte der Tiefenstrecken, so erhält man eine geschlossene Kurve, die zweiachsig symmetrisch ist und etwas über die Hilfsfigur, den Kreis, hinausragt (Abb. 127)! Diese Kurve ist eine **Ellipse.**

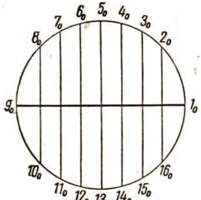


Abb. 126

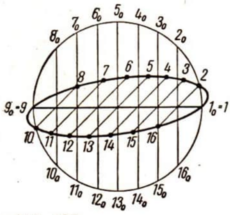


Abb. 127

Der Mittelpunkt M_0 des Kreises wird als Mittelpunkt M der Ellipse abgebildet ($M_0 = M$), der Kreisdurchmesser 1_0; 9_0 als Ellipsendurchmesser 1; 9, der Kreisdurchmesser 5_0; 13_0 als Ellipsendurchmesser 5; 13. Die Bilder paralleler

Kreissehnen sind parallele Sehnen der Ellipse (Abb. 127).

Die große Achse der Ellipse liegt bei dieser Abbildung nicht in der Richtung der Grundlinie der Konstruktion, sondern ist gegen diese um einen Winkel von etwa 7° entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gedreht (Abb. 128).

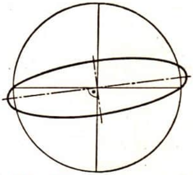
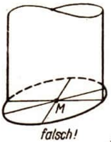
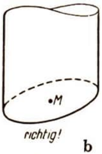


Abb. 128

2) Beim Zeichnen von geraden zylindrischen Gegenständen sind die Umrißlinien der Körper besonders zu beachten. Der Umriß des Körpers wird nicht von den Seitenlinien an den Endpunkten des im Bilde waagerechten Ellipsendurchmessers (Abb. 129a), sondern von den im Bilde senkrechten Tangenten an die Ellipse gebildet (Abb. 129b). Da die Konstruktion von Tangenten an die Ellipse verhältnismäßig kompliziert ist, werden sie meist nach Augenmaß gezeichnet.



a



b

Abb. 129a u. b

Aufgaben

1. Zeichne einen Kreis ($d = 6$ cm) mit einbeschriebenem regelmäßigem Sechseck und konstruiere das Bild des Kreises in Kavalierperspektive mit Hilfe dieser Figur!

2. Zeichne einen geraden Kreiszylinder ($d = 6$ cm; $h = 8{,}5$ cm) in Kavalierperspektive, wenn er **a)** auf der Grundrißtafel steht, **b)** so auf der Grundrißtafel liegt, daß seine Grundfläche parallel zur Aufrißtafel ist!

3. Zeichne einen geraden, auf der Grundrißtafel stehenden Kreiskegel in Kavalierperspektive! ($d = 7{,}2$ cm, $h = 5{,}6$ cm.)

4. Ein gerader Kreiskegel ($d = 8$ cm, $h = 12$ cm) wird in 6 cm Höhe abgestumpft. Die Deckfläche hat einen Durchmesser von 4 cm. Stelle den Körper in Kavalierperspektive dar!

5. Ein gerader Kreiszylinder ($d = 6$ cm; $h = 8$ cm) liegt so auf der Grundrißtafel, daß seine Achse parallel zur Rißachse ist. Zeichne den Körper in Kavalierperspektive!

INHALTSVERZEICHNIS

A. Einführende Wiederholung

B. Arithmetik

C. Geometrie